

AN INTRODUCTION TO
REGGE THEORY &
HIGH ENERGY PHYSICS

P. D. B. COLLINS

Physics Department, University of Durham

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE

LONDON · NEW YORK · MELBOURNE

П. Коллинз

ВВЕДЕНИЕ
В РЕДЖЕВСКУЮ ТЕОРИЮ
И ФИЗИКУ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Перевод с английского
кандидата физико-математических наук
П. Э. Волковицкого
и кандидата физико-математических наук
А. В. Турбинера



Москва
Атомиздат

1980

УДК 539.14

Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий: Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1980. — 432 с.

Рассмотрен один из наиболее плодотворных и разработанных подходов к физике сильных взаимодействий — теория комплексных моментов. Подробно изложена теория полюсов Редже и теоретическая схема, в которой помимо полюсов учетны ветвления в комплексной плоскости углового момента. Обсуждены вопросы, связанные с реджевским подходом к многочастичным реакциям, в том числе к инклюзивным процессам. Рассмотрены отдельные аспекты гипотезы дуальности и бутстрапа, а также связь метода комплексных моментов со слабым взаимодействием.

Для физиков, специализирующихся по физике элементарных частиц и физике высоких энергий. Может быть использована студентами и аспирантами физических и инженерно-физических специальностей.

Табл. 13. Ил. 54. Библиогр. 418.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|------------|
| Предисловие | 8 |
| 1. Матрица рассеяния | 12 |
| 1.1. Введение | 12 |
| 1.2. S-матрица | 14 |
| 1.3. Блочные диаграммы и амплитуды рассеяния | 17 |
| 1.4. Аналитические свойства амплитуды рассеяния | 22 |
| 1.5. Структура особенностей | 24 |
| 1.6. Кроссинг | 28 |
| 1.7. Амплитуда $2 \rightarrow 2$ | 29 |
| 1.8. Экспериментально наблюдаемые величины | 35 |
| 1.9. Оптическая теорема | 37 |
| 1.10. Дисперсионные соотношения по одной переменной | 39 |
| 1.11. Представление Мандельштама | 42 |
| 1.12. Сингулярности фейнмановских интегралов | 45 |
| 1.13. Потенциальное рассеяние | 49 |
| 1.14. Эйкональное разложение | 53 |
| 2. Комплексная плоскость углового момента | 56 |
| 2.1. Введение | 56 |
| 2.2. Парциальные амплитуды | 57 |
| 2.3. Представление Грибова — Фруассара | 62 |
| 2.4. Ограничение Фруассара | 64 |
| 2.5. Сигнатура | 65 |
| 2.6. Сингулярности парциальных амплитуд и дисперсионных соотношений | 68 |
| 2.7. Аналитическое продолжение в плоскость углового момента | 73 |
| 2.8. Полюса Редже | 78 |
| 2.9. Преобразование Мандельштама — Зоммерфельда — Ватсона | 82 |
| 2.10. Преобразование Меллина | 85 |
| 3. Некоторые модели, содержащие полюса Редже | 86 |
| 3.1. Введение | 86 |
| 3.2. Свойства траекторий Редже | 87 |
| 3.3. Потенциальное рассеяние | 92 |
| 3.4. Полюса Редже в теоретико-полевой теории возмущений | 103 |
| 3.5. Бутстрап | 108 |
| 4. Спин | 117 |
| 4.1. Введение | 117 |
| 4.2. Спиральные амплитуды и наблюдаемые | 121 |
| 4.3. Кроссинг спиральных амплитуд | 125 |
| 4.4. Парциальные амплитуды со спином | 127 |
| 4.5. Представление Грибова — Фруассара | 130 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.6. | Представление Зоммерфельда — Ватсона | 132 |
| 4.7. | Ограничения на реджевские особенности, следующие из унитарности | 136 |
| 4.8. | Фиксированные особенности и свёрхсходящиеся правила сумм | 139 |
| 5. | Реджевские траектории и резонансы | 141 |
| 5.1. | Введение | 141 |
| 5.2. | Унитарная симметрия | 143 |
| 5.3. | Реджевские траектории | 151 |
| 5.4. | Аналитические свойства траекторий | 157 |
| 6. | Реджевские полюсы и рассеяние при высокой энергии | 159 |
| 6.1. | Введение | 159 |
| 6.2. | Кинематические особенности реджевских вычетов | 159 |
| 6.3. | Нефизические множители | 166 |
| 6.4. | Реджевские полюсы и s-канальные амплитуды | 171 |
| 6.5. | Дочерние и конспирирующие траектории | 173 |
| 6.6. | Теоретико-групповые методы | 177 |
| 6.7. | Внутренняя симметрия и кроссинг | 180 |
| 6.8. | Феноменология реджевских полюсов | 185 |
| 7. | Дуальность | 209 |
| 7.1. | Введение | 209 |
| 7.2. | Правила сумм при конечной энергии | 213 |
| 7.3. | Применения ПСКЭ и дуальность | 219 |
| 7.4. | Модель Венециано | 223 |
| 7.5. | Дуальность и $SU(3)$ | 230 |
| 7.6. | Феноменологические выводы дуальности | 235 |
| 7.7. | Заключение | 240 |
| 8. | Реджевские разрезы | 241 |
| 8.1. | Введение | 241 |
| 8.2. | Реджевские разрезы и диаграммы Фейнмана | 243 |
| 8.3. | Реджеонное исчисление | 252 |
| 8.4. | Абсорбция и эйкональная модель | 261 |
| 8.5. | Вычисление амплитуд, обусловленных реджевскими разрезами | 270 |
| 8.6. | Разрезы, образованные полюсом Померанчука, и абсорбция | 273 |
| 8.7. | Феноменология реджевских разрезов | 278 |
| 9. | Мультиреджевская теория | 287 |
| 9.1. | Введение | 287 |
| 9.2. | Многочастичная кинематика | 289 |
| 9.3. | Мультиреджеонные амплитуды рассеяния | 294 |
| 9.4. | Многочастичные дуальные модели | 301 |
| 9.5. | Мультиреджевская феноменология | 311 |
| 10. | Инклюзивные процессы | 315 |
| 10.1. | Введение | 315 |
| 10.2. | Кинематика инклюзивных процессов | 317 |
| 10.3. | Инклюзивные сечения | 321 |
| 10.4. | Обобщенная оптическая теорема Мюллера | 326 |
| 10.5. | Фрагментация и однореджеонный предел | 328 |
| 10.6. | Центральная область и двухреджеонный предел | 333 |
| 10.7. | Скейлинг и дуальность | 339 |
| 10.8. | Трехреджеонное поведение | 342 |
| 10.9. | Правила сумм при конечной массе | 349 |
| 10.10. | Корреляции и корреляционная длина | 352 |

| | |
|---|------------|
| 11. Реджевские модели многочастичных процессов | 357 |
| 11.1. Введение | 357 |
| 11.2. Дифракционная модель | 358 |
| 11.3. Мультипериферическая модель | 365 |
| 11.4. Мультипериферический бутстрап | 373 |
| 11.5. Производящая функция | 377 |
| 11.6. Двухкомпонентная модель | 380 |
| 11.7. Дуальный бутстрап | 386 |
| 12. Полюса Редже, элементарные частицы и слабые взаимодействия | 392 |
| 12.1. Введение | 392 |
| 12.2. Фоторождение и векторная доминантность | 393 |
| 12.3. Реджезация элементарных частиц | 396 |
| 12.4. Фиксированные полюса | 399 |
| 12.5. Глубоко неупругое рассеяние | 406 |
| Приложение А. Функции Лежандра | 413 |
| Приложение Б. Функции вращения | 416 |
| Список литературы | 420 |
| Алфавитно-предметный указатель | 429 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1959 г. Редже показал, что при рассмотрении решений уравнения Шредингера для нерелятивистского потенциального рассеяния полезно считать угловой момент l комплексной переменной. Он доказал, что для широкого класса потенциалов единственными сингулярностями амплитуды рассеяния в комплексной плоскости являются полюса, называемые сейчас «реджевскими полюсами». Если эти полюса существуют при целых положительных значениях l , то они соответствуют связанным состояниям или резонансам, а в общем случае важны для установления некоторых аналитических свойств амплитуды рассеяния. Однако скоро стало ясно, что метод Редже может быть применен также и к физике элементарных частиц высокой энергии, и в настоящее время именно в этой области теория комплексных угловых моментов, обычно называемая для краткости реджевской теорией, применяется наиболее плодотворно.

Если исключить лептоны (электрон, мюон и нейтрино) и фотон, то очень большое число обнаруженных элементарных частиц — барионов и мезонов — участвует как в сильных взаимодействиях (ядерные силы, которые связывают нуклоны в ядре), так и в электромагнитных, слабых и гравитационных взаимодействиях. Такие частицы были названы адронами от греческого слова $\alpha\delta\rho\acute{o}\zeta$, означающего тяжелый. Некоторые из них стабильны, но большинство нестабильно и быстро распадается на другие адроны и лептоны. Адроны можно классифицировать в соответствии с их квантовыми числами, такими, как барионное число, заряд, странность и т. п., причем для каждого набора квантовых чисел найдена последовательность частиц, отличающихся только спином. Например, резонансы, подобные ρ -мезону (нестабильной частице, распадающейся на π -мезоны: $\rho \rightarrow \pi\pi$), существуют со спинами $\sigma = \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$, причем масса их возрастает с увеличением спина.

Если объяснить такие резонансы как связанные состояния, образованные потенциалом $V(r)$ между пионами (рис. 1.П), то радиальное уравнение Шредингера будет содержать эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + l(l+1)/r^2,$$

который из-за члена, связанного с центробежным барьером $l(l+1)r^{-2}$, приводит к уменьшению силы связи при возрастании орбитального углового момента пионов l . Таким образом, при больших l потенциал

действует менее эффективно, что и объясняет, почему резонансы с высокими спинами имеют большую массу. В действительности можно решить уравнение для произвольной комплексной величины l , и собственные значения этого уравнения будут непрерывно меняться вдоль траектории в l -плоскости, связывающей различные физические решения при $l = n\hbar$ (n — целое). Разумеется, такая нерелятивистская модель совершенно бесполезна для физики высоких энергий, но основная идея, что последовательность составных частиц с массами m_i и спинами σ_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) должна лежать на данной траектории Редже $l = \alpha(t)$, где t — квадрат энергии в системе центра масс, такой, что для всех i $\alpha(m_i^2) = \sigma_i$ успешно обеспечивает взаимосвязь внутри многих групп резонансов. В настоящее время считается, что все адроны являются составными частицами, лежащими на этих траекториях, и не являются по-настоящему элементарными.

Кроме того, хорошо установлено, что сильные взаимодействия обусловлены обменом частицами. Это является обобщением гипотезы Юкавы, что дальнедействующая часть межнуклонных сил обусловлена обменом пи-мезоном. Но вместо того чтобы рассматривать обмен отдельной частицей, полезно рассмотреть обмен целой траекторией частиц. Реджевская теория предсказывает, что поведение амплитуды рассеяния при высокой энергии в этом случае будет

$$A(s, t) = s^{\alpha(t)},$$

где s — теперь квадрат энергии в системе центра масс; t — квадрат переданного импульса (рис. 1, б). Такое поведение имеют амплитуды большого числа процессов.

Итак, реджевская теория связана со спектром частиц, с силами между частицами и с поведением амплитуды рассеяния при высокой энергии, т. е. почти со всеми чертами сильных взаимодействий. Поэтому понимание теории Редже необходимо всем, кто хочет заниматься физикой высоких энергий, и цель этой книги — дать введение в реджевскую теорию.

В гл. 1 мы обсудим кинематику процессов рассеяния, введем амплитуды рассеяния и проведем обзор их аналитической структуры как функции от энергии и переданного импульса. В гл. 2 определим парциальные амплитуды с данным l и покажем, как и почему оказывается полезным провести аналитическое продолжение по l . Объясним, почему полюса Редже по l , которые лежат на траекториях Редже, соответствуют частицам. В гл. 3 исследуем полюса Редже в потенциальном рассеянии, в теории поля и в других моделях сильных взаимодей-

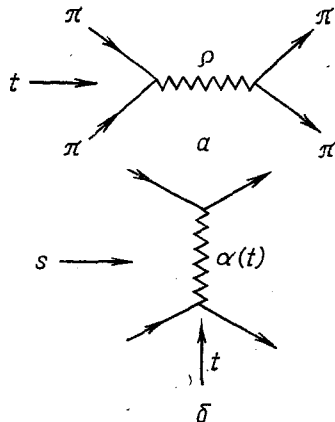


Рис. 1. а — Взаимодействие двух π -мезонов с образованием нестабильного ρ -резонанса, который снова распадается на два π -мезона. б — Обмен траекторией $\alpha(t)$, которая определяет поведение амплитуды рассеяния при высокой энергии

ствий. Затем в гл. 4 введем несколько более сложный формализм для того, чтобы рассмотреть проблему спина, прежде чем представить в гл. 5 доказательства реджевской классификации частиц по траекториям. Гл. 6 посвящена обсуждению предсказаний теории полюсов Редже для поведения амплитуд рассеяния при высокой энергии, а в гл. 7 изучим гипотезу о том, что существует «дуальность» между резонансными полюсами и обменами реджевскими траекториями. В гл. 8 описаны эффекты реджевских разрезов — сингулярности в плоскости углового момента, вызванные одновременным обменом двумя или большим числом реджевских траекторий. Затем в гл. 9 сделаем обзор предсказаний теории Редже для поведения амплитуд многочастичных процессов, а в гл. 10 — ее предсказаний для «инклюзивных» реакций, в которых детектируется только несколько частиц из конечного состояния. Эта область в последние годы дала большое количество подтверждений правильности теории Редже. В гл. 11 исследованы разнообразные модели поведения сечений при высоких энергиях и самосогласованность гипотезы о том, что реджевские обмены обеспечивают силы, связывающие между собой частицы, которые, в свою очередь, образуют реджевские траектории так называемого бутстрапного механизма. В последней главе довольно кратко обсуждается применение теории Редже к электромагнитным и слабым взаимодействиям. Математическое дополнение о функциях Лежандра и D -функциях дано в приложениях.

Книга в основном предназначена для тех, кто только начинает заниматься физикой частиц, но уже имеет хорошую подготовку на уровне последнего курса физических факультетов, т. е. предполагается знакомство с квантовой механикой и, в частности, с теорией рассеяния в объеме, например, книги [355], со специальной теорией относительности и основными понятиями физики элементарных частиц, такими, как резонансное рассеяние и изотопический спин (например, по книге [61]). Необходимо также знание теории функций комплексного переменного и специальных функций математической физики. В некоторых местах после краткого введения использованы идеи теории поля (в основном диаграммы Фейнмана), и читатель должен или понять о чем идет речь, или обратиться к цитируемой литературе. Подобным образом желательнее более детальное рассмотрение групп Ли $SU(2)$ и $SU(3)$, чем то, которое имеется в данной книге. Однако я надеюсь, что те, кто будет читать эту книгу с необходимыми ссылками, не испытают слишком больших трудностей. Мы настоятельно советуем опустить наиболее трудные части при первом чтении и вернуться к ним, когда это станет необходимо. Чтобы помочь в этом, те разделы, которые могут быть опущены, помечены звездочкой. Мы также надеемся, что более опытные исследователи смогут найти в этой книге полезный конспект основных идей и результатов реджевской теории.

Когда книгу пишут о быстро развивающейся области науки, всегда трудно определить, какие вопросы выдержат проверку временем, а какие окажутся недоработанными. В начале 60-х годов кое-кому казалось, что вся теория Редже может попасть во вторую категорию,

но теперь многое надежно установлено и я постарался сосредоточить основное внимание именно на этом, лишь изредка бросая беглый взгляд на то, что происходит вблизи быстро движущейся границы наших знаний. Наиболее установившимися являются те вопросы теории, которые непосредственно связаны с экспериментом, так что я включил в изложение большую часть «реджевской феноменологии», особенно в гл. 5—10, однако я старался не пропустить полностью те многочисленные указания, которые теория Редже готовит для долгожданной фундаментальной теории сильных взаимодействий.

Я не пытался дать полные ссылки на многотомную литературу по рассматриваемой теме. Не цитировал в большом количестве оригинальную литературу, относящуюся к начальному периоду развития теории, за исключением, разумеется, некоторых исторически наиболее важных статей, однако эти ссылки могут быть легко найдены в упомянутых здесь многочисленных книгах и обзорных статьях. Что касается более современных работ, то я попытался дать большее количество полезных ссылок, но только с целью проиллюстрировать текст, а не для утверждения приоритета конкретных открытий. Я могу только принести извинения тем, чьи работы были пропущены или недостаточно представлены.

Эта книга многим обязана предыдущей работе по полюсам Редже, которую проф. Е. И. Сквайрс и я написали несколько лет назад [132], и обзору [121], а также разнообразным курсам лекций, которые я читал в Университете Дархайма и в других местах. И хотя я не стал бы менять текст просто из любви к искусству, но я снова подумал о том, как наилучшим способом изложить материал, используя идеи из многочисленных превосходных обзоров и курсов лекций. Вместе с тем я попытался упростить материал насколько это возможно.

В заключение я хотел бы выразить свою признательность и благодарность многим лицам: проф. Дж. Ф. Чу, который первым познакомил меня с излагаемой темой, проф. Е. И. Сквайрсу, от которого я узнал много подробностей и деталей, моим коллегам по Университету Дархайма, создавшим обстановку, стимулирующую изучение теории элементарных частиц, и многим другим, проф. Дж. К. Полкинхорну, который убедил меня написать эту книгу, проф. Дж. К. Полкинхорну, проф. Е. И. Сквайрсу, д-ру А. Д. Мартену, д-ру В. Дж. Закревски за многие ценные замечания, Т. Д. Б. Уилки и А. Д. М. Райту за большую помощь по редактированию и исправлению текста, Маргарет и Эндрю, обеспечившим условия и давшим возможность написать данную книгу, и Диане Филпот, которая замечательно перепечатала очень трудный оригинал.

Кафедра физики Университета Дархайма
август 1975 г.

П. Д. Б. Коллинз

1

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

1.1. Введение

В типичном эксперименте по рассеянию на ускорителе частица из ускоренного пучка сталкивается с другой частицей вещества мишени (обычно это протон) и в результате возможно образование нескольких типов частиц, движущихся в различных направлениях, как это показано на рис. 1.1. Таким образом, перед взаимодействием было начальное состояние $|i\rangle$, составленное из двух свободных частиц (пучка и мишени), а после окончания взаимодействия — конечное состояние $|f\rangle$, состоящее часто из многих частиц. Если бы существовала полная квантовомеханическая теория процесса рассеяния, можно было бы вывести вероятность получения любого определенного конечного состояния из данного начального состояния.

Определим оператор рассеяния S так, что его матричные элементы между начальным и конечным состояниями $\langle f | S | i \rangle$ дают вероятность P_{fi} того, что $|f\rangle$ будет конечным состоянием, возникающим из $|i\rangle$, т. е.

$$P_{fi} = |\langle f | S | i \rangle|^2 = \langle i | S^+ | f \rangle \langle f | S | i \rangle, \quad (1.1.1)$$

где S^+ — оператор, эрмитово сопряженный с S .

Знание полной матрицы рассеяния (или S -матрицы, для краткости), содержащей матричные элементы, которые связывают любое мыслимое начальное состояние с любым возможным конечным, приводило бы, разумеется, к полному описанию всех взаимодействий частиц, что является нашей конечной целью.

К сожалению, до сих пор не существует теории сильного взаимодействия элементарных частиц, так что получить S -матрицу дедуктивным путем невозможно, но тем не менее в этой главе мы объясним кратко те предположения, на которых будем основываться при последующем развитии теории Редже, т. е. общие принципы, такие, как аналитичность и кроссинг, которые, хотя и не доказаны твердо, но выдержали проверку временем и будут являться основой для рассмотрения. Мы попробуем придать им больше правдоподобия, показав, как они включены в теорию нерелятивистского потенциального рассеяния и в квантовую теорию поля, которые благодаря этому служат полезными источниками физической интуиции.

В теории поля, подобной квантовой электродинамике, эти элементы S -матрицы могут быть выведены, по крайней мере в принципе, из основного лагранжиана, описывающего взаимодействие фундамен-

тальных частиц. Однако для сильных взаимодействий этот способ подхода вызывает много проблем, таких, как неприменимость схемы перенормировок и расходимость ряда теории возмущений. Несмотря на это, элементы S -матрицы всегда вычисляют между так называемыми асимптотическими состояниями во времени $t = \pm \infty$ или, что более точно, начальное состояние считается сформированным задолго до начала взаимодействия, а конечное состояние — спустя долгое время после его окончания (т. е. время, большое по сравнению со временем взаимодействия порядка 10^{-22} с). Естественно, то, что происходит во время взаимодействия, непосредственно не наблюдается. Поэтому, несомненно, очень полезно, а некоторые авторы (см., например, [101]) настаивали на этом, исходя из принципов квантовой механики, попытаться развить теорию прямо для S -матрицы. Другие авторы по-прежнему считают, что необходимо исходить из взаимодействия квантованных полей и что нашей целью должно быть получение для теории сильных взаимодействий чего-то похожего на квантовую электродинамику (см., например, обзор по этой теме [51]). Однако мы все еще так далеки от законченной теории, что подобные разногласия кажутся преждевременными. Здесь примем в основном S -матричную точку зрения, главным образом потому, что, работая с S -матричными элементами, мы имеем дело с (почти) непосредственно измеряемыми величинами, и таким образом S -матрица представляет собой удобный аппарат, который помогает рассмотреть связь теоретических вычислений с экспериментальными фактами.

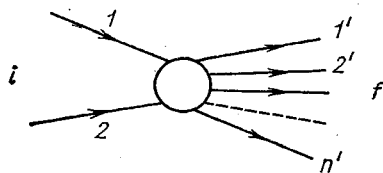


Рис. 1.1. Процесс рассеяния с двумя частицами в начальном состоянии и с n частицами в конечном

В следующих разделах введем основные идеи теории S -матрицы, уравнения унитарности и аналитические свойства амплитуд рассеяния. Покажем, как предположения об аналитичности позволяют записать дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния, и обсудим те неопределенности, которыми часто обладают такие дисперсионные соотношения из-за того, что они включают расходящиеся интегралы. Мы также обсудим кратко фейнмановскую теорию возмущений и модели рассеяния с потенциалом Юкавы и покажем, что в этих случаях выполняются многие из перечисленных свойств. Все это дает основание для введения теории Редже в следующей главе.

Будем пользоваться обычно применяемой в физике частиц системой единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка \hbar полагаются равными единице. Энергия, импульс и масса выражены в электронвольтах или, что более удобно, в гигаэлектронвольтах: $1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}$. Эта единица может быть превращена в единицы времени или длины с помощью равенств:

$$\hbar = 6,58 \cdot 10^{-25} \text{ ГэВ} \cdot \text{с}; \quad \hbar c = 1,97 \cdot 10^{-16} \text{ ГэВ} \cdot \text{м}.$$

Другой удобной единицей длины является ферми:

$$1 \text{ Фм} = 10^{-15} \text{ м} = 10/(1,97 \text{ ГэВ}) \approx 5 \text{ ГэВ}^{-1}.$$

Сечения обычно измеряют в миллибарнах ($1 \text{ мбарн} = 10^{-31} \text{ м}^2$), которые могут быть переведены в гигаэлектронвольты:

$$1 \text{ ГэВ}^{-2} = 0,389 \text{ мбарн}.$$

1.2. S-Матрица

Теория S-матрицы начинается со следующих основных предположений.

Постулат I

Состояния свободных частиц, содержащие любое число частиц, удовлетворяют принципу суперпозиции квантовой механики, так что если $|\psi_\alpha\rangle$ и $|\psi_\beta\rangle$ — физические состояния, то $|\psi_\gamma\rangle = a|\psi_\alpha\rangle + b|\psi_\beta\rangle$, где a и b — любые комплексные числа, тоже является физическим состоянием. На самом деле существуют правила суперотбора, такие, как законы сохранения заряда и барионного числа, которые нарушают этот принцип, но здесь они будут несущественны (см. работу [305]).

Постулат II

Сильные взаимодействия обладают малым радиусом. Из ядерной физики мы знаем, что сильные взаимодействия не действуют на расстоянии, большем чем несколько единиц на 10^{-15} м (несколько комптоновских длин волн пиона). Это значит, что мы можем рассматривать частицы как свободные (т. е. невзаимодействующие), за исключением того случая, когда они находятся очень близко друг к другу, и таким образом асимптотические состояния до и после эксперимента представляют собой свободные частицы (мы рассматриваем связанные состояния типа дейтрона как одну частицу). Ясно, что это справедливо, когда можно пренебречь силами с большим радиусом действия, такими, как электромагнитные и гравитационные. В действительности эти силы не могут быть включены в рамки формализма S-матрицы без значительных трудностей и мы, в основном, будем игнорировать эти слабые взаимодействия и предполагать, что имеем дело с идеализированным миром, где они «выключены».

Чтобы определить полностью состояние одной свободной частицы, мы должны точно указать ее внутренние квантовые числа, т. е. ее заряд Q , барионное число B , изоспин I , странность S , четность P (а для нестранного мезона G — четность G и зарядовую четность C_n) и ее спин σ [собственное значение σ^2 равно $\sigma(\sigma + 1)$]. Классификация частиц в терминах этих квантовых чисел обсуждена в гл. 5. Мы обозначим все эти квантовые числа вместе как тип частицы T . Необходимо также определить проекцию ее спина на выбранную ось квантования, скажем, σ_z и ее массу m , энергию E и импульс p в некоторой выбранной лоренцевой системе отсчета.

Постулат III

Процесс рассеяния и, следовательно, S -матрица инвариантны относительно преобразования Лоренца. Удобно рассматривать $E = p_0$ как временную компоненту релятивистского 4-вектора, пространственные компоненты которого есть p_1, p_2 и p_3 , т. е.

$$p_\mu = (p_0, \mathbf{p}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.2.1)$$

Мы всегда имеем дело со свободной частицей, для которой полная энергия определяется как

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.2.2)$$

где m — масса покоя частицы. Так как мы используем единицы, где $c = 1$, то 4-импульс находится на «массовой поверхности»

$$\Sigma p_\mu p^\mu \equiv p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad (1.2.3)$$

так что при заданной массе только три из его четырех компонент независимы.

В этой книге мы примем часто используемое условие, что ось спина совпадает с направлением движения частицы в выбранной системе отсчета. Проекция спина на эту ось называется спиральностью λ и определяется как

$$\lambda = \sigma \mathbf{r} / |\mathbf{p}|. \quad (1.2.4)$$

Ясно, что λ может принимать любое из $2\sigma + 1$ возможных значений: $\sigma, \sigma - 1, \dots, -\sigma$.

Таким образом, одночастичное состояние обозначается как

$$|T, \lambda, p_\mu\rangle = |P\rangle, \quad (1.2.5)$$

и такие состояния образуют неприводимые представления группы Лоренца (доказательство см., например, [305]).

Очевидно, что состояния, соответствующие различным импульсам, внутренним квантовым числам или спиральностям, должны быть ортогональны друг другу, так что их скалярные произведения имеют вид:

$$\langle P' | P \rangle = \langle T', \lambda', p'_\mu | T, \lambda, p_\mu \rangle = N \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{T' T} \delta_{\lambda' \lambda}, \quad (1.2.6)$$

где $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ есть сокращенное обозначение для

$$\delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) \delta(p_3 - p'_3), \quad (1.2.7)$$

а N — нормировочный множитель.

Мы хотим нормировать векторы состояний лоренц-инвариантным образом. Нормировка состояния даст число частиц в данном элементе фазового объема $d^3\mathbf{p}$ вокруг вектора \mathbf{p} , но это состояние, очевидно, не является лоренц-инвариантной величиной, потому что неинвариантен элемент объема $d^3\mathbf{p}$. Элемент объема $\delta(p^2 - m^2) d^4p$, однако, явным образом инвариантен, а δ -функция гарантирует, что частица находится на массовой поверхности. Элемент объема может быть записан в виде

$$d^4 p \delta(p^2 - m^2) = \frac{d^3 p}{2p_0} \theta(p_0), \quad (1.2.7)$$

поскольку, используя обычные правила для обращения с δ -функцией Дирака, т. е.

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x),$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta(p^2 - m^2) &= \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) = \frac{1}{2p_0} \delta(p_0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}) - \\ &- \frac{1}{2p_0} \delta(p_0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}), \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

и всегда можно ограничить интегрирование только положительными значениями p_0 . Следовательно, удобно выбрать N в (1.2.6) таким, что

$$\langle P' | P \rangle = (2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{T'T} \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (1.2.9)$$

Множитель $(2\pi)^3$ является результатом определенного соглашения, в то время как присутствие p_0 с учетом (1.2.7) гарантирует, что нормировка инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Состояние, состоящее из n свободных частиц, может быть записано как прямое произведение одночастичных состояний

$$\begin{aligned} |T_1, \lambda_1, p_1; T_2, \lambda_2, p_2; \dots; T_n, \lambda_n, p_n\rangle &= |P_1, \dots, P_n\rangle = \\ &= |P_1\rangle \otimes |P_2\rangle \otimes |P_3\rangle \otimes \dots \otimes |P_n\rangle \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

и его нормировка из (1.2.9) имеет вид

$$\langle P'_1 \dots P'_{n'} | P_1 \dots P_n \rangle = \prod_{i=1}^n (2\pi)^3 2p_{0i} \delta^3(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i) \delta_{T'_i T_i} \delta_{\lambda'_i \lambda_i} \delta_{n'n}. \quad (1.2.11)$$

Постулат IV

Матрица рассеяния является унитарной матрицей. Так будет, если состояния свободных частиц $|m\rangle$, $m = 1, 2 \dots$ образуют полный ортонормированный набор базисных состояний, удовлетворяющий условию полноты

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = 1, \quad (1.2.12)$$

и, следовательно, для любого данного состояния $|i\rangle$ вероятность того, что образуется любое конечное состояние, должна равняться единице. Таким образом, из (1.1.1) следует

$$\sum_m P_{mi} = \sum_m |\langle m | S | i \rangle|^2 = \sum_m \langle i | S^+ | m \rangle \langle m | S | i \rangle = \langle i | S^+ S | i \rangle = 1, \quad (1.2.13)$$

и так как это должно быть справедливо для любого состояния $|i\rangle$, получаем

$$S^+ S = 1 = S S^+, \quad (1.2.14)$$

так что S является унитарной матрицей.

Для многочастичных состояний с нормировкой (1.2.11) условие полноты (1.2.12) имеет вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \sum_{\lambda_i} \sum_{T_i} (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 p_i}{2\rho_{0i}} |P_1 \dots P_m\rangle \langle P_1 \dots P_m| = 1, \quad (1.2.15)$$

где суммирование проводится по всем возможным числам частиц, их типам и спиральностям и по всем возможным импульсам частиц. Таким образом, в терминах этих состояний соотношение унитарности (1.2.13) принимает вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m \sum_{\lambda_i} \sum_{T_i} (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 q_i}{2q_{0i}} \langle P'_1 \dots P'_n | S | Q_1 \dots Q_m \rangle \times \quad (1.2.16)$$
$$\times \langle Q_1 \dots Q_m | S^\dagger | P_1 \dots P_n \rangle = \langle P'_1 \dots P'_n | P_1 \dots P_n \rangle,$$

где через $Q_i = \{T_i, \lambda_i, q_{\mu_i}\}$ обозначены частицы в промежуточном состоянии с 4-импульсами q_{μ_i} . Отметим, что в этих уравнениях мы рассматривали все частицы как неодинаковые и будем делать так и далее. Для одинаковых частиц необходимо суммировать по $n!$ способам перестановок импульсов в (1.2.11), при этом в условии полноты (1.2.15) и в выражении (1.2.16) появляется множитель $(n!)^{-1}$.

Условие унитарности (1.2.16) имеет фундаментальное значение для определения S -матрицы. Однако оно довольно сложно и становится существенно проще для понимания и применения, если представить его графически в терминах «блочных диаграмм». (Более полное изложение этого предмета может быть найдено в [157].)

1.3. Блочные диаграммы и амплитуды рассеяния

Суммирование по различным типам частиц и их спиральности в (1.2.16) без особой необходимости усложняет обозначения этого уравнения. До конца этой главы мы будем иметь дело только с импульсными и пространственными свойствами S -матрицы, так что мы опустим индексы T и λ и запишем уравнения так, как будто существует только один тип частицы с нулевым спином. Тогда n -частичное состояние может быть записано просто как $|p_1 \dots p_n\rangle$. Каждое интегрирование по импульсу должно, таким образом, рассматриваться вместе с суммированием по всем различным типам частиц, которые могут давать вклад, с учетом ограничений, налагаемых сохранением квантовых чисел, и с суммированием по всем возможным $2\sigma_i + 1$ значениям спиральности частицы со спином σ_i .

Обозначим каждый элемент S -матрицы, представляющий некоторый процесс рассеяния блоком с линиями, соответствующими входящим и выходящим частицам, а именно

$$\langle p'_1 \dots p'_n | S | p_1 \dots p_n \rangle \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \longrightarrow & \text{S} & \longrightarrow \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \end{array} \\ n \end{array} \quad (1.3.1)$$

и

$$\langle p'_1 \dots p'_{n'} | S^+ | p_1 \dots p_n \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \rightarrow \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \rightarrow \text{---} \\ \rightarrow \text{---} \\ \rightarrow \text{---} \\ \rightarrow \text{---} \end{array} \quad (1.3.2)$$

Промежуточные состояния, появляющиеся в условии унитарности (1.2.16), обозначим следующим образом:

$$\prod_{i=1}^m \int (2\pi)^{-3} \frac{d^3 q_i}{2q_{0i}} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ m \end{array} \quad (1.3.3)$$

Черточки на концах означают, что такие линии должны быть прикреплены к блокам. Скалярное произведение векторов состояний (1.2.11) записывается в виде

$$\langle p'_1 \dots p'_{n'} | p_1 \dots p_n \rangle = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ n \end{array} \times \delta_{n'n} \quad (1.3.4)$$

Известно, что вследствие лоренц-инвариантности (постулат III) в процессе рассеяния сохраняется энергия и импульс и, следовательно, элемент S -матрицы (1.3.1) обращается в нуль везде, за исключением случая

$$\sum_{i=1}^n p_{\mu_i} = \sum_{i=1}^{n'} p'_{\mu_i}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.3.5)$$

Это означает, например, что в сумму (1.2.16) дают вклад только промежуточные состояния с $\left(\sum_{i=1}^m m_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2$. Равенство здесь выполняется, когда энергия процесса $|p_1 \dots p_n\rangle \rightarrow |q_1 \dots q_m\rangle$ равна пороговой.

Итак, предположим, что дано (а это и есть тот случай, который осуществляется в действительности) двухчастичное начальное состояние, и допустим для простоты, что все адроны имеют одну и ту же массу m . (Это, разумеется, должно означать, что все они стабильны, так как не существует состояний с меньшей массой, на которые они могли бы распасться.) Тогда при $(2m)^2 \leq (p_1 + p_2)^2 \leq (3m)^2$, т. е. выше двухчастичного порога, но ниже порога образования трех частиц, в условии унитарности могут давать вклад только двухчастичные промежуточные и конечные состояния. Условие унитарности (1.2.16) принимает вид

$$\int \prod_{i=1}^2 (2\pi)^{-3} \frac{d^3 q_i}{2q_{0i}} \langle p'_1 p'_2 | S | q_1 q_2 \rangle \langle q_1 q_2 | S^+ | p_1 p_2 \rangle = \langle p'_1 p'_2 | p_1 p_2 \rangle, \quad (1.3.6)$$

что по приведенным выше правилам может быть переписано как

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \leftarrow \\ \textcircled{S^+} \\ \rightarrow \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} q \\ \leftarrow \\ \textcircled{S} \\ \rightarrow \\ q_2 \end{array} \begin{array}{c} p'_1 \\ \leftarrow \\ \textcircled{S} \\ \rightarrow \\ p'_2 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (1.3.7)$$

Однако, когда энергия начального состояния возрастает так, что

$$(3m)^2 \leq \left(\sum_i p_i \right)^2 \leq (4m)^2,$$

в начальном состоянии оказываются возможными (в принципе) двух- и трехчастичные состояния и те же состояния возможны (и это осуществляется на опыте) в промежуточном и конечном состояниях; при этом (1.2.16) дает ряд условий унитарности:

$$\begin{array}{l} \textcircled{S^+} \textcircled{S} + \textcircled{S^+} \textcircled{S} = \text{---}; \\ \textcircled{S^+} \textcircled{S} + \textcircled{S^+} \textcircled{S} = 0; \\ \textcircled{S^+} \textcircled{S} + \textcircled{S^+} \textcircled{S} = 0; \\ \textcircled{S^+} \textcircled{S} + \textcircled{S^+} \textcircled{S} = \text{---}. \end{array} \quad (1.3.8)$$

Обобщение на более высокие энергии, когда может давать вклад еще большее число частиц, очевидно.

Дальнейшее преобразование этих уравнений оказывается возможным благодаря конечному радиусу сильных взаимодействий (постулат II). Например, элемент S -матрицы с двумя частицами в начальном и конечном состояниях может быть разложен следующим образом:

$$\begin{array}{c} \textcircled{S} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{+} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \quad (1.3.9)$$

$$= \langle p'_1, p'_2 | p_1, p_2 \rangle + \langle p'_1, p'_2 | S_c | p_1, p_2 \rangle$$


Первый член здесь существен, когда две частицы никогда не подходят достаточно близко, чтобы провзаимодействовать, а второй, так называемая связанная часть, представляет взаимодействие двух частиц. (Знак $+$ использован для обозначений связанной части S -матрицы по причинам, которые будут выяснены далее). Эти члены сильно отличаются друг от друга, потому что в первом члене каждая частица в конечном состоянии имеет ту же энергию и импульс, которые она имела в начальном состоянии, в то время как во втором члене только полная энергия и полный импульс двух частиц должны сохраняться.

Подставляя δ -функции из (1.2.11) и выделяя закон сохранения 4-им-

пульса из  в явном виде, получаем из (1.3.9):

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{S} \text{---} &= (2\pi)^6 4p_{01} p_{02} \delta^3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) + i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \\ &\quad - p'_1 - p'_2) \langle p'_1 p'_2 | A | p_1 p_2 \rangle \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Множитель $i(2\pi)^4$ включен, чтобы получить нужную нормировку

A -матрицы или «амплитуды рассеяния», обозначенной 

С другой стороны, элемент S -матрицы $2 \rightarrow 3$ существует только тогда когда две частицы действительно рассеиваются, так что

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{S} \text{---} &= \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \text{---} \bigcirc \text{+} \text{---} \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 - p'_3) \times \\ &\quad \times \langle p'_1 p'_2 p'_3 | A^+ | p_1 p_2 \rangle \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Если существует больше внешних линий, то может быть больше несвязных частей, например

$$\text{---} \bigcirc \text{+} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{+} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{+} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{+} \text{---} + \text{---} \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{S} \text{---} \quad (1.3.12)$$

Для S^+ соответственно

$$\text{---} \bigcirc \text{S}^+ \text{---} = \text{---} \text{---} + (-1) \text{---} \bigcirc \text{-} \text{---}, \quad (1.3.13)$$

где

$$\text{---} \bigcirc \text{-} \text{---} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \langle p'_1 p'_2 | A^- | p_1 p_2 \rangle \quad (1.3.14)$$

Здесь опять знак минус имеет условный смысл.

Это свойство несвязности позволяет провести дальнейшее упрощение условий унитарности. Так, после подстановки (1.3.9) и (1.3.13) равенство (1.3.7) принимает вид

$$\left(\text{---} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{+} \text{---} \right) \times \left(\text{---} \text{---} - \text{---} \bigcirc \text{-} \text{---} \right) = \text{---} \text{---}, \quad (1.3.15)$$

что после перемножения и сокращения одинаковых членов дает двухчастичное условие унитарности

$$(1.3.16)$$

Аналогичным образом выше трехчастичного порога первое уравнение из (1.3.8) дает

$$(1.3.17)$$

Разумеется, в таких уравнениях δ -функции сохранения полной энергии и импульса одинаковы в каждом члене и могут быть сокращены вместе с различными множителями типа i , 2π и т. п. (наши обозначения были выбраны с целью помочь этому), и в результате мы приходим к следующему упрощенному набору правил для диаграмм:

для каждого связного блока

$$(1.3.18)$$

для каждой внутренней линии

$$(1.3.19)$$

для каждой замкнутой петли

$$(1.3.20)$$

где q — 4-импульс интегрирования [с учетом сохранения импульса в каждой вершине — см. (1.3.16)]. Так, например, выражение (1.3.16) принимает вид

$$(1.3.21)$$

Как будет видно, эти условия унитарности сильно ограничивают вид амплитуды рассеяния.

1.4. Аналитические свойства амплитуды рассеяния

До сих пор мы рассматривали амплитуды рассеяния $A^\pm(p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n)$ как произвольные функции 4-импульсов входящих частиц. Однако лоренц-инвариантность предполагает, что A должна быть скаляром относительно группы Лоренца и, следовательно, может быть записана как функция только лоренцевых скаляров. До тех пор пока мы пренебрегаем спинами, это означает, что A — функция только скалярных произведений импульсов.

Так, амплитуда $A(p_1, p_2, p_3, p_4)$ процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ будет функцией только лоренцевых скаляров, таких, как $(p_1 + p_2)^2$, $(p_1 + p_3)^2$, $(p_1 + p_2 + p_3)^2$ и т. д. (Напомним, что $p_i^2 = m_i^2$, $i = 1, \dots, 4$ не являются переменными.) Однако не все скалярные произведения независимые величины, поскольку, например, $(p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$ вследствие сохранения 4-импульса. В общем случае для процесса с n линиями существуют $4n$ переменных (компонент 4-векторов), однако n уравнений массовой поверхности в виде $p_i^2 = m_i^2$, 4 ограничения вследствие сохранения полной энергии и импульса и 6 условий из-за вращательной инвариантности в четырехмерном пространстве Минковского оставляют $3n - 10$ независимых переменных. Так, если мы рассмотрим одночастичный пропагатор как «амплиту-

ду рассеяния» $1 \rightarrow 2 \xrightarrow{1} \textcircled{+} \xrightarrow{2} 3$, то $n = 2$, так что имеется — 4

степени свободы, т. е. 4 условия $p_{1\mu} = p_{2\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Для процесса рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, $n = 4$ и таким образом имеются две независимых переменных, в то время как процесс $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5$ зависит от 5 переменных и т. д. Мы назовем эти переменные лоренц-инвариантами

$$s_{ijk} \dots = (\pm p_i \pm p_j \pm p_k \dots)^2.$$

Но как A зависит от этих инвариантов? Ответ на этот вопрос дает следующий постулат теории S -матрицы.

Постулат V.

Максимальная аналитичность первого рода

Амплитуды рассеяния являются граничными значениями аналитических функций инвариантов $s_{ijk} \dots$, рассматриваемых как комплексные переменные с теми и только теми сингулярностями, которые требуются условиями унитарности.

Таким образом, хотя обычно только действительные значения $s_{ijk} \dots$ имеют физический смысл, мы собираемся рассматривать их как комплексные переменные. Предположим, что амплитуды являются аналитическими функциями $s_{ijk} \dots$, так что мы можем получить физическую амплитуду рассеяния, переходя к пределу $s \rightarrow$ действительное значение.

Из последующего рассмотрения можно легко понять, почему следует ожидать таких аналитических свойств амплитуд. Рассмотрим рассеяние волнового пакета, распространяющегося вначале вдоль оси z со скоростью v :

$$\psi_{in}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi(\omega) \exp\{-i\omega(t - z/v)\}, \quad (1.4.1)$$

где ω — энергия ($\hbar = 1$). Возьмем фурье-образ

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(0, t) \exp(i\omega t). \quad (1.4.2)$$

Для того чтобы иметь физический смысл, этот интеграл должен сходиться для действительных ω , но он определяет $\varphi(\omega)$ при всех комплексных значениях ω . Если волновой пакет не достигает точки $z = 0$ до тех пор, пока $t = 0$, то $\psi(0, t) = 0$ для $t < 0$, так что

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \psi(0, t) \exp(i\omega t). \quad (1.4.3)$$

Это означает, что $\varphi(\omega)$ является аналитической функцией ω , не имеющей особенностей в верхней полуплоскости (т. е. при $\text{Im } \omega > 0$), так как в этой области интеграл (1.4.3) должен наверняка сходиться (интеграл существует для действительных ω и при $\text{Im } \omega > 0$ он еще лучше сходится из-за фактора $\exp\{-\text{Im } \omega t\}$). Подобным образом для рассеянной волны имеем:

$$\psi_{out}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \varphi(\omega) \exp\{-i\omega(t - r/v)\}, \quad (1.4.4)$$

где, по определению, $A(\omega)$ — амплитуда рассеяния при данной энергии (см., например, [355]). Если процесс рассеяния обладает свойством причинности, то рассеянная волна не может уйти на расстояние r от центра рассеяния раньше чем за время $t = r/v$, так что

$$\psi_{out}(r, t) = 0 \text{ при } t < r/v,$$

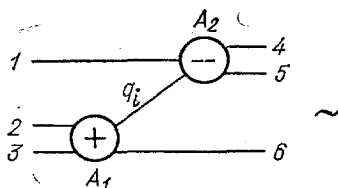
откуда для фурье-образа (1.4.4), повторяя аргументы (1.4.1)—(1.4.3), получаем, что $A(\omega)$ также является аналитической функцией ω в верхней полуплоскости.

Трудность подобной аргументации заключается, разумеется, в предположении, что точное описание распространения волнового пакета во времени имеет смысл. Но, поскольку мы предположили, что знаем точно и его энергию, не ясно, насколько имеет смысл такая концепция микропричинности. Очевидно, что ни одно квантовомеханическое измерение не может, даже в принципе, выяснить, каким должно быть временное описание волнового пакета. Однако ниже будет видно, что, по-видимому, требование микропричинности существенно только в классическом пределе.

Были предприняты попытки вывести свойства аналитичности (и положение сингулярностей) амплитуды рассеяния из аксиоматической теории поля (см., например, [1971]) и аксиоматической теории S -матрицы (см. [1571]), но при этом возникает много трудностей с обходом различных особенностей. Ситуация более или менее ясна только для особенностей в физической области [56]. Если амплитуда рассеяния может быть записана как ряд теории возмущений (сумм диаграмм Фейнмана), то могут быть найдены аналитические свойства отдельных членов ряда (по крайней мере в низших порядках), но, разумеется, в случае сильного взаимодействия мы имеем дело с расходящимся рядом теории возмущений. Однако, поскольку ожидается, что теория S -матрицы и теория возмущений обладают одинаковой структурой особенностей, то часто бывает удобно использовать модели фейнмановских диаграмм (см. разд. 1.12). Здесь же мы просто предположим, что структура сингулярностей, которая может быть выведена из постулатов теории S -матрицы, справедлива в действительности.

1.5. Структура особенностей


Наиболее важным типом сингулярности, который может быть определен с помощью условий унитарности, является простой полюс, отвечающий обмену физической частицей. Положения таких полюсов могут быть выведены из условий унитарности для амплитуды $3 \rightarrow 3$ (1.3.8), в которых мы возьмем, например, член



$$\sim A_1^+ (-2\pi i \delta(q_i^2 - m_i^2)) A_2^-, q_i = p_2 + p_3 - p_6 = p_4 + p_5 - p_1 \quad (1.5.1)$$

δ -Функция возникает, разумеется, от того, что обмен частицей между вершинами возможен только тогда, когда $(p_2 + p_3 + p_6)^2 = m_i^2$. Поскольку

$$\frac{1}{q_i^2 - m_i^2 \pm i\epsilon} = P \frac{1}{q_i^2 - m_i^2} \pm \pi i \delta(q_i^2 - m_i^2)$$

(где P — главная часть), то амплитуды  должны содер-

жать вклад полюса в виде

$$= A_1^+ \frac{1}{q_1^2 - m_1^2 + i\varepsilon} A_2^+,$$

$$= A_1^- \frac{1}{q_1^2 - m_1^2 - i\varepsilon} A_2^- \quad (1.5.2)$$

так что выражения $\equiv \text{---} \oplus \text{---} - \text{---} \ominus \text{---}$ содержат δ -функции из (1.5.1)

в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот результат не является неожиданным, потому что в теории возмущений фейнмановский пропагатор бесспиновой частицы имеет вид полюса $(q_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon)^{-1}$ (см. разд. 1.12). Кроме того, из ядерной физики известны нестабильные частицы (или резонансы), которые приводят к амплитуде в форме Брейта — Вигнера $\sim (q_i^2 - m_i^2 + im_i \Gamma_i)^{-1}$, где Γ_i — ширина резонанса, и отвечают комплексному полюсу при $q_i^2 = m_i^2 - im_i \Gamma_i$.

Дополнительное свойство выражения (1.5.2) заключается в том, что вычет в полюсе $q_i^2 = m_i^2$ может быть факторизован в амплитуды двух процессов рассеяния, включающих частицу i , а именно $1 + i \rightarrow 4 + 5$ и $2 + 3 \rightarrow i + 6$. Иногда говорят, что эта факторизация — следствие унитарности, но в действительности она следствие постулата несвязности II, поскольку диаграммы (1.5.2) представляют последовательные процессы рассеяния, которые полностью не зависят друг от друга и происходят в двух точках, разделенных промежутком $\gg 1$ Фм.

Таким образом, мы нашли, что обмен частицей дает полюс по q^2 в S -матрице, и наоборот, присутствие полюса по q^2 указывает на существование частицы: стабильной, если полюс существует при действительных значениях q^2 , и нестабильной, если полюс существует при комплексных q^2 , как в формуле Брейта—Вигнера.

Следующая простейшая особенность обусловлена обменом двумя частицами, как это происходит в (1.3.21). При этом на пороге $(p_1 + p_2)^2 = (2m)^2$ возникает точка ветвления. Заменяя переменную интегрирования $q \rightarrow q - p_1$, получаем

$$A^+ - A^- = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4 q \delta(q^2 - m^2) \delta((p_1 + p_2 - q)^2 - m^2) A^+ A^-. \quad (1.5.3)$$

В системе центра масс $p_1 = (p_{01}, \mathbf{p})$ и $p_2 = (p_{02}, -\mathbf{p})$, так что

$$p_1 + p_2 = (p_{10} + p_{20}, 0) = (\sqrt{s}, 0), \quad (1.5.4)$$

где мы определили \sqrt{s} как полную энергию в системе центра масс. Полагая $q = (q_0, \mathbf{q})$, аргумент второй δ -функции в (1.53) принимает вид

$$(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2 = s - 2\sqrt{s} q_0 + q^2 - m^2 = s - 2\sqrt{s} q_0, \quad (1.5.5)$$

поскольку первая δ -функция приводит к $q^2 = m^2$. Итак,

$$\begin{aligned} A^+ A^- &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4 q \delta(q^2 - m^2) \delta(s - 2\sqrt{s} q_0) A^+ A^- = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 2\sqrt{s}} \int dq_0 d^3 \mathbf{q} \delta(q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - m^2) \delta\left(\frac{1}{2}\sqrt{s} - q_0\right) A^+ A^- = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 2\sqrt{s}} \int d^3 \mathbf{q} \delta\left(\frac{1}{4}s - |\mathbf{q}|^2 - m^2\right) A^+ A^-. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Полагая $d^3 \mathbf{q} = (1/2) |\mathbf{q}| d|\mathbf{q}|^2 d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла по направлению \mathbf{q} , получаем

$$A^+ - A^- = i \frac{\sqrt{s/4 - m^2}}{(4\pi)^2 \sqrt{s}} \int d\Omega A^+ A^-. \quad (1.5.7)$$

Условие унитарности можно распространить на область ниже порога

$$\text{---} \textcircled{+} \text{---} - \text{---} \textcircled{-} \text{---} = 0 \quad \text{или} \quad A^+ - A^- = 0 \quad (1.5.8)$$

так что A^+ и A^- можно рассматривать как одну и ту же функцию $A(s \pm i\epsilon, \dots)$, аналитически продолженную выше или ниже двухчастичного порога, где она имеет точку ветвления, причем скачок через корневой разрез дается выражением (1.5.7) (см. рис. 1.2). Физиче-

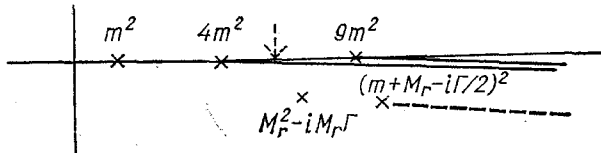


Рис. 1.2. Сингулярности амплитуды рассеяния в комплексной s -плоскости: полюс при $s = m^2$, пороговые точки ветвления при $s = 4m^2, 9m^2, \dots$, полюс, отвечающий резонансу в точке $s = M_r^2 - iM_r\Gamma$ на нефизическом листе под разрезом и разрез от порога образования резонанса. Физическое значение амплитуды A^+ получается при приближении к действительной оси s сверху, как указано стрелкой

ская амплитуда, разумеется, вычисляется при действительном s , однако имеется выбор в выходе на действительную ось сверху или снизу. Мы выбираем (условно) правило $+i\epsilon$ для амплитуды A^+ , что приводит к результату:

$$\text{физическая } A^+(s, \dots) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A^+(s + i\epsilon, \dots), \quad (1.5.9)$$

и проводим разрез вдоль действительной s -оси, как показано на рис. 1.2. Лист s -плоскости, представленный на рис. 1.2, называется физическим листом.

Поскольку ниже порога A действительна, то из принципа симметрии Шварца [381] ясно, что $A(s^*, \dots) = A^*(s, \dots)$ и что A^- комплексно сопряжена A^+ , так что

$$\text{физическая } A^-(s, \dots) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(s - i\varepsilon, \dots), \quad (1.5.10)$$

Амплитуда, удовлетворяющая принципу симметрии, называется «вещественно-аналитической» или «действительно-аналитической».

Эти результаты могут быть обобщены с целью получить скачок через разрез, связанный с произвольным числом частиц в промежуточном состоянии от 1 до n (рис. 1.3). В соответствии с результатами Каткоского [135, 136] он равен

$$\text{Disc}(A) = \int \prod_{l=1}^{n-1} \frac{id^4 k_l}{(2\pi)^4} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \{ -2\pi i \delta(q_i^2 - m_i^2) \} A_1^\dagger A_2^-, \quad (1.5.11)$$



Рис. 1.3. Скачок на n -частичном промежуточном состоянии

где интегрирование проводится по $n - 1$ независимым петлям, образованным n линиями в промежуточном состоянии. Так как

$$\frac{1}{q_i^2 - m_i^2 \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{q_i^2 - m_i^2} \pm \pi i \delta(q_i^2 - m_i^2), \quad (1.5.12)$$

где P — главная часть, то (1.5.11) можно переписать как

$$\text{Disc}(A) = \text{Disc} \int \prod_{l=1}^{n-1} \frac{id^4 k_l}{(2\pi)^4} \prod_{i=1}^n \frac{1}{q_i^2 - m_i^2} A_1^\dagger A_2^-. \quad (1.5.13)$$

Это выражение совпадает с тем, которое получается при использовании фейнмановских пропагаторов для частиц в промежуточном состоянии (см. разд. 1.12).

Особенности интегралов типа (1.5.13) детально исследованы [157], а их положения даются правилами Ландау [269] (см. разд. 1.12):

$$\text{I. } q_i^2 = m_i^2 \text{ для всех } i = 1, \dots, n; \quad (1.5.14)$$

II. $\sum_{\text{петля } i} \alpha_i q_i = 0$ при некоторых значениях констант α_i , причем суммирование ведется по всем замкнутым петлям, а $\alpha_i \neq 0$ при всех i .

Таким образом, можно определить все сингулярности амплитуды, записав все различные промежуточные состояния (а их бесконечное число), составленные из разнообразных частиц данной теории, которые могут перевести начальное состояние в конечное. Далее мы рассмотрим несколько примеров. Из правил Ландау и Каткоского, зная полюса, отвечающие частицам, можно (в принципе) вычислить все положения разрезов и скачки на них.

Эти сингулярности включают полюса на действительной оси, обусловленные стабильными частицами, и точки ветвления на действительной оси, связанные с порогами образования различных стабильных частиц. Следует отметить, что нестабильные частицы или резонансы

приводят к полюсу под действительной осью, в точке $q_i^2 = m_i^2 - i m_i \Gamma_i$, где Γ_i — ширина резонанса. Так как действительная часть массы резонанса, очевидно, должна быть больше, чем пороговая энергия канала, в который он может распадаться, соответствующий полюс будет лежать не на физическом листе, а на листе, который достигается обходом точки ветвления. Точки ветвления, включающие такие частицы, также будут лежать вне физического листа (см. рис. 1.2).

Мы уже упоминали, что эти особенности, как предполагается, вызваны причинностью. Колмен и Нортон [119] показали, что в физической области уравнения Ландау (1.5.14) соответствуют таким кинематическим условиям, что процесс, представляемый данной диаграммой, может идти классическим образом. Это значит, что если мы рассмотрим каждый внутренний пропагатор как пропагатор точечной частицы с импульсом q_i , то вершины испускания и поглощения частицы могут быть разделены в пространстве—времени

$$\Delta_i = q_i \alpha_i,$$

где α_i — время между испусканием и поглощением в собственной системе частицы. Если $\alpha_i = 0$, то эти две точки совпадают. Чтобы это было возможно для частицы, движущейся по замкнутой петле, очевидно, требуется, чтобы $\sum_{\text{петля}} \Delta_i = 0$, что совпадает с выражением (1.5.14).

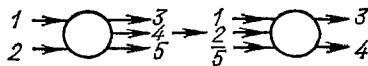
А условия (1.5.14) (1) есть просто уравнения массовой поверхности для 4-импульса.

Таким образом, сингулярности в физической области возникают только тогда, когда соответствующая диаграмма Фейнмана отвечает реальному физическому процессу для классических точечных релятивистских частиц. Поэтому кажется, что микропричинность в теории S-матрицы требуется только в пределе принципа соответствия, когда квантовая механика переходит в классическую.

1.6. Кроссинг

Очень важным следствием приведенных выше аналитических свойств является соотношение, устанавливаемое между различными процессами рассеяния, которые иначе были бы совершенно независимы. Это соотношение известно под названием «кроссинг».

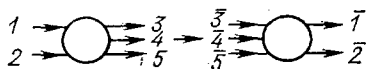
Если мы рассмотрим амплитуду процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5$, то интуитивно ясно, что она будет иметь тот же набор особенностей, как и амплитуда процесса $1 + 2 + \bar{5} \rightarrow 3 + 4$, где $\bar{5}$ — античастица по отношению к частице 5, потому что все, что мы сделали, сводится к изменению направления линии, соответствующей частице 5, т. е. мы перевернули ее, а именно



Промежуточные состояния в этих двух блоках будут совершенно одинаковыми.

Ясно, что $\bar{5}$ должна быть античастицей по отношению к частице 5, потому что если оба процесса возможны, то она должна иметь противоположный знак всех аддитивных квантовых чисел. Разумеется, области значений переменных, отвечающих этим двум процессам, различны, поскольку для первого требуется, чтобы $\sqrt{s_{12}} \geq \sqrt{s_{34}} + m_5$, в то время как для второго $\sqrt{s_{34}} \geq \sqrt{s_{12}} + m_{\bar{5}}$. Однако, поскольку эти две амплитуды имеют одинаковые сингулярности, они должны, в принципе, получаться одна из другой аналитическим продолжением.

Более того, если мы перевернем все линии



то получим опять те же области значений переменных, и таким образом амплитуды процессов $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5$ и $\bar{3} + \bar{4} + \bar{5} \rightarrow \bar{1} + \bar{2}$ должны быть одинаковы. Это пример *ТСР*-инвариантности, поскольку здесь требуется, чтобы *S*-матрица не менялась при комбинированных операциях отражения времени *T*, зарядового сопряжения *C* и изменения четности *P* (которые необходимы, чтобы получить античастицы, распространяющиеся в обратном направлении в пространстве и времени).

К сожалению, доказать этот результат нельзя, так как мы не можем быть уверенными, что аналитическое продолжение из физической области одного процесса обязательно приведет нас в физическую область другого процесса. Мы должны предположить, что продолжения могут быть выполнены не сходя с физических листов переменных *s*. Это выполняется в теории возмущений и кажется весьма правдоподобным в физике частиц.

1.7. Амплитуда $2 \rightarrow 2$

Как пример, который будет использован далее, рассмотрим процесс рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ (рис. 1.4, *a*). Ниже будут введены каналы, которые называются по соответствующим энергетическим инвариантам.

Вследствие кроссинга и *ТСР*-теоремы все шесть процессов

$$\begin{aligned}
 1 + 2 &\rightarrow 3 + 4; \quad \bar{3} + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + \bar{2} \quad (s\text{-канал}); \\
 1 + \bar{3} &\rightarrow \bar{2} + 4; \quad 2 + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + 3 \quad (t\text{-канал}); \\
 1 + \bar{4} &\rightarrow \bar{2} + 3; \quad 2 + \bar{3} \rightarrow \bar{1} + 4 \quad (u\text{-канал})
 \end{aligned}
 \tag{1.7.1}$$

будут описываться одной и той же амплитудой рассеяния, но пары процессов, обозначенные *s*, *t* и *u*, будут занимать различные области переменных.

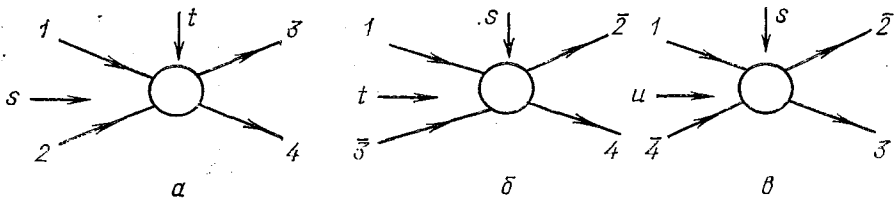


Рис. 1.4. Процессы рассеяния в s -, t - и u -каналах, определенные в (1.7.1)

В системе центра масс частиц 1 и 2 их 4-импульсы записываются как

$$p_1 = (E_1, \mathbf{q}_{s12}), \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{q}_{s12}), \quad (1.7.2)$$

где \mathbf{q}_{s12} — трехмерный импульс, который для двух частиц одинаков, но имеет противоположное направление. Аналогично для конечного состояния

$$p_3 = (E_3, \mathbf{q}_{s34}), \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{q}_{s34}). \quad (1.7.3)$$

Поскольку начальное и конечное состояния включают только свободные частицы, то должны удовлетворяться уравнения массовой поверхности:

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= E_1^2 - \mathbf{q}_{s12}^2 = m_1^2; \\ p_2^2 &= E_2^2 - \mathbf{q}_{s12}^2 = m_2^2; \\ p_3^2 &= E_3^2 - \mathbf{q}_{s34}^2 = m_3^2; \\ p_4^2 &= E_4^2 - \mathbf{q}_{s34}^2 = m_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.4)$$

Определим инвариант

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2, \quad (1.7.5)$$

который является квадратом полной энергии в системе центра масс для s -канальных процессов. Теперь, объединяя (1.7.4) и (1.7.5), получаем

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2, \quad (1.7.6)$$

где точка означает произведение 4-векторов. Подобным образом получаем из (1.7.2) и (1.7.5):

$$p_1 (p_1 + p_2) = m_1^2 + p_1 p_2 = E_1 \sqrt{s} \quad (1.7.7)$$

Теперь, объединяя (1.7.6) и (1.7.7), получаем

$$E_1 = (1/2 \sqrt{s}) (s + m_1^2 - m_2^2) \quad (1.7.8)$$

для энергии частицы 1 в системе центра масс, выраженной через s . Аналогично находим:

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= (1/2 \sqrt{s}) (s + m_2^2 - m_1^2); \\ E_3 &= (1/2 \sqrt{s}) (s + m_3^2 - m_4^2); \\ E_4 &= (1/2 \sqrt{s}) (s + m_4^2 - m_3^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.7.9)$$

Теперь из (1.7.4) и (1.7.8) получаем

$$q_{s12}^2 = E_1^2 - m_1^2 = (1/4s) [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2]. \quad (1.7.10)$$

Удобно ввести «функцию треугольника»

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz, \quad (1.7.11)$$

так что

$$q_{s12}^2 = (1/4s) \lambda(s, m_1^2, m_2^2). \quad (1.7.12)$$

Аналогично найдем

$$q_{s34} = (1/4s) \lambda(s, m_3^2, m_4^2).$$

Далее введем инвариант

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2. \quad (1.7.13)$$

Вспоминая, что при кроссинге меняется знак p_3 и p_2 , становится ясно, что это квадрат полной энергии в системе центра масс t -канала. Для этих процессов получаем

$$E_1 = (1/2\sqrt{t}) (t + m_1^2 - m_3^2); \quad (1.7.14)$$

$$q_{t13}^2 = (1/4t) \lambda(t, m_1^2, m_3^2) \text{ и т. д.}, \quad (1.7.15)$$

а порог находится при $t = (m_1 + m_3)^2$. Однако в s -канале t представляет собой импульс, переданный в процессе рассеяния, т. е. разность между импульсами частиц 1 и 3. Таким образом, из (1.7.13), используя (1.7.2) и (1.7.3), находим

$$\begin{aligned} t &= m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 p_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2q_{s12} q_{s34} = \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2q_{s12} q_{s34} \cos \theta_s, \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

где θ_s — угол рассеяния между направлениями движения частиц 1 и 2 в системе центра масс s -канала (см. рис. 1.4, а). Подставляя в (1.7.16) (1.7.8) и (1.7.9), получаем

$$\begin{aligned} z_s &= \cos \theta_s = [s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)] / 4sq_{s12} q_{s34} = \\ &= s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) / \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \end{aligned} \quad (1.7.17)$$

из (1.7.12), (1.7.13), где мы определили

$$\Sigma = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (1.7.18)$$

Подобным образом в t -канале s представляет собой переданный импульс, поэтому получаем

$$\begin{aligned} z_t &= \cos \theta_t = [t^2 + t(2s - \Sigma) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)] / 4tq_{t13} q_{t24} = \\ &= \frac{[t^2 + t(2s - \Sigma) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)]}{\sqrt{\lambda(t, m_1^2, m_3^2) \lambda(t, m_2^2, m_4^2)}}. \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

Наконец, для u -канальных процессов квадрат энергии в системе центра масс равен

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 p_4 \quad (1.7.20)$$

и можно написать аналогичные выражения для энергий, импульсов и углов рассеяния в этом канале.

Однако из разд. 1.4 мы знаем, что амплитуда четыреххвостки зависит только от двух независимых инвариантов, так что между s , t и u должно быть соотношение. Действительно, объединяя (1.7.6), (1.7.16) и (1.7.20), находим

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 + 2p_1(p_2 - p_3 - p_4),$$

но закон сохранения импульса требует, чтобы $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Используя (1.7.4) и (1.7.18), получаем

$$s + t + u = \Sigma. \quad (1.7.21)$$

Обычно мы будем использовать в качестве независимых переменных s и t .

Эти формулы существенно упрощаются при рассеянии частиц равных масс: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, так как

$$\lambda(s, m^2, m^2) = s(s - 4m^2)$$

дает

$$\begin{aligned} q_{s12}^2 &= q_{s34}^2 = (s - 4m^2)/4; \\ z_s &= 1 + 2t/(s - 4m^2) = -1 - 2u/(s - 4m^2); \\ q_{t13}^2 &= q_{t24}^2 = (t - 4m^2)/4; \\ z_t &= 1 + 2s/(t - 4m^2) = -1 - 2u/(t - 4m^2). \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

Физическая область s -канала определяется условиями $s \geq \geq \max \{(m_1 + m_2)^2, (m_3 + m_4)^2\}$ (т. е. порогом процесса) и $-1 \leq \leq \cos \theta_s \leq 1$. Эту границу удобно записать в виде равенства нулю функции

$$\Phi(s, t) = 4sq_{s12}^2 q_{s34}^2 \sin^2 \theta_s = 0, \quad (1.7.23)$$

которая после алгебраических преобразований с использованием (1.7.12), (1.7.13) и (1.7.17) равна

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= stu - s(m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2) - t(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) - \\ &- (m_1^2 m_4^2 - m_3^2 m_2^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_3^2 - m_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.7.24)$$

или

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m_2^2 & t & m_1^2 \\ 1 & m_2^2 & 0 & m_3^2 & s \\ 1 & t & m_3^2 & 0 & m_4^2 \\ 1 & m_1^2 & s & m_4^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.7.25)$$

Несмотря на антисимметричный вид выражения (1.7.24), получаем

$$\Phi(s, t) = 4tq_{t13}^2 q_{t24}^2 \sin^2 \theta_t = 4uq_{u14}^2 q_{u23}^2 \sin^2 \theta_u, \quad (1.7.26)$$

так что равенство $\Phi(s, t) = 0$ дает границы физических областей для s -, t - и u -каналов. Для рассеяния частиц равных масс (1.7.24) сводится к равенству $stu = 0$, и границами являются просто линии $s = 0$,

$t = 0$ и $u = 0$. Для неравных масс кривые границы асимптотически приближаются к этим линиям. Некоторые примеры показаны на рис. 1.5, где изображены s , t и u , удовлетворяющие условию (1.7.21).

На плоскости Мандельстама может быть указано также положение различных особенностей. Так, если все массы равны, то можно ожидать появления полюсов, отвечающих связанным состояниям при $s = m^2$, $t = m^2$ и $u = m^2$, двухчастичных точек ветвления при s , t или $u = 4m^2$ и следующих порогов, связанных с тремя, четырьмя и большим числом частиц в промежуточном состоянии при $9m^2$, $16m^2$ и т. д. Наклонный полюс и разнородные резонансы для случая более реалистического $\pi N \rightarrow \pi N$ -рассеяния показаны на рис. 1.5, б (без учета сложностей, связанных с изоспином).

Из-за кроссинга можно ожидать, что ближайшие особенности в t - и u -каналах будут определять поведение амплитуды рассеяния в s -канале вперед и назад ($z_s = \pm 1$ соответственно). Так, в πN -рассеянии существует пик рассеяния вперед при $t = 0$, обусловленный пороговым разрезом в $\pi\pi$ -системе и, в частности, вызванный резонансами ρ , f и т. д., которые существуют в $\pi\pi$ -канале, и пик назад при $u \approx 0$, связанный с обменом N , Δ и другими полюсами, отвечающими барионным резонансам. Эта доминантность обмена полюсами будет важным положением теории Редже.

Хотя теоретически более удобно работать в системе центра масс, эксперименты (за исключением тех, которые выполняются на сталкивающихся пучках, таких, как *CERN-ISR*) делаются в так называемой лабораторной системе, в которой частица мишени находится в покое. Если 1 — частица пучка, а 2 — мишени, то

$$p_{1L} = (E_L, \mathbf{p}_L); \quad p_{2L} = (m_2, 0), \quad (1.7.27)$$

где E_L — энергия, а \mathbf{p}_L — трехмерный импульс частицы пучка в лабораторной системе. Уравнения массовой поверхности (1.2.3) требуют, чтобы

$$E_L^2 = \mathbf{p}_L^2 + m_1^2, \quad (1.7.28)$$

так что инвариант s может быть выражен в терминах лабораторных величин следующим образом:

$$\begin{aligned} s &= (p_{1L} + p_{2L})^2 = (E_L + m_2, \mathbf{p}_L)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_L = \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \sqrt{\mathbf{p}_L^2 + m_1^2}. \end{aligned} \quad (1.7.29)$$

Для энергий много больших массы это выражение принимает вид

$$s \approx 2m_2 E_L \approx 2m_2 p_L. \quad (1.7.30)$$

Подобным образом, если E_{4L} — энергия частицы 4 в конечном состоянии, из (1.7.13) находим

$$t = m_2^2 + m_4^2 - 2m_2 E_{4L}. \quad (1.7.31)$$

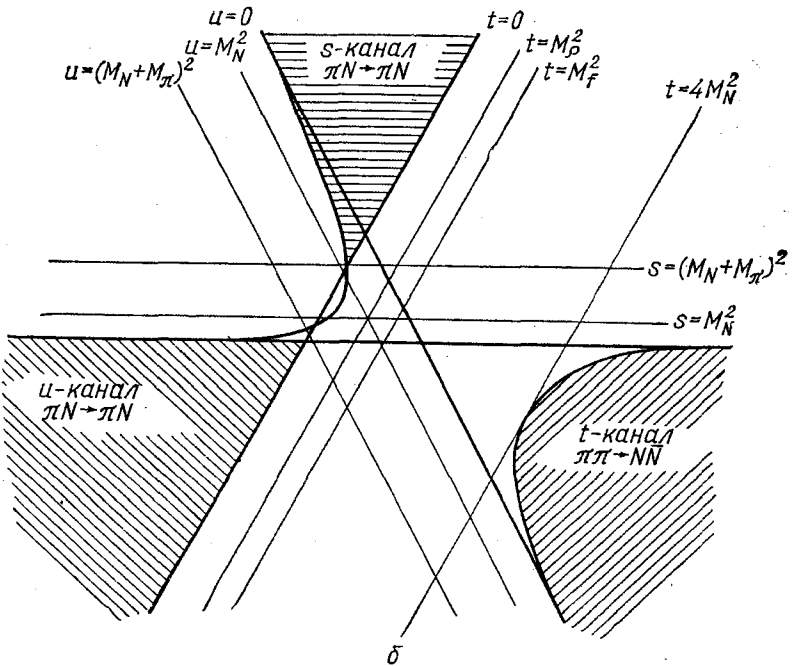
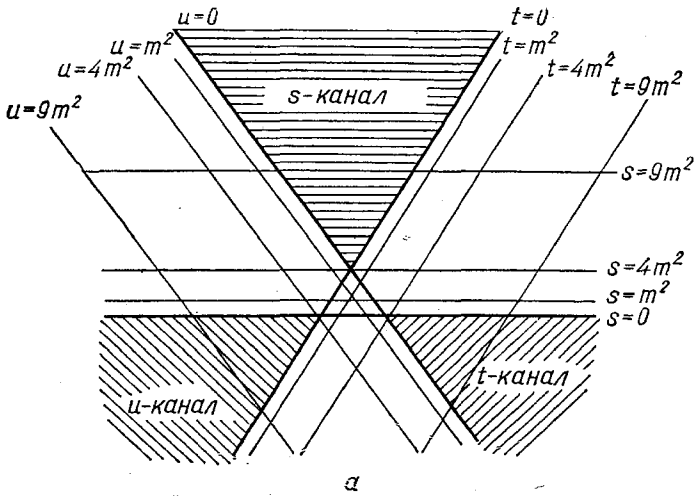


Рис. 1.5. *a* — Плоскость Мандельштама $s-t-u$ для рассеяния частиц одинаковых масс, на которой приведены положения полюсов при m^2 , точек ветвления при $4m^2, 9m^2, \dots$, в каждом канале. Заштрихованы три физических области; *б* — плоскость Мандельштама для случая πN рассеяния (в пренебрежении изоспином), указаны физические области и ближайшие особенности: нуклонные полюса в s - и u -каналах и ρ - и f -полюса в t -канале (масштаб не соблюдается)

1.8. Экспериментально наблюдаемые величины

Разумеется, амплитуда рассеяния, которую мы ввели в разд. 1.3, не может быть измерена непосредственно. В эксперименте по рассеянию (в идеальном случае) измеряются импульсы, энергии и поляризации спинов всех n частиц, которые образованы в данном двухчастичном столкновении $1 + 2 \rightarrow n$, и цель теории — нахождение вероятности возникновения из данного начального состояния определенного конечного состояния.

Исходя из выражения (1.1.1) и определения амплитуды рассеяния (1.3.10), (1.3.11) и т. д. вероятность в единицу времени и на единицу объема того, что из данного начального состояния

$$|i\rangle = |P_1, P_2\rangle$$

образуется конечное состояние $|f_n\rangle = |P'_1 \dots P'_n\rangle$, дается вероятностью перехода

$$R_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) |\langle f | A | i \rangle|^2. \quad (1.8.1)$$

Сечение рассеяния для этого процесса $\sigma_{12 \rightarrow n}$ определено как полная вероятность перехода на единицу плотности падающего потока частиц. Плотность потока падающих частиц F — число начальных частиц на единицу площади и в единицу времени — определяется относительной скоростью двух частиц $|v_1 - v_2|$, деленной на инвариантный нормировочный объем V , т. е. на объем фазового пространства, который отвечает двум изолированным частицам. Этот объем из (1.2.11) равен

$$V = (2p_{01}2p_{02})^{-1}.$$

Таким образом, в системе центра масс получаем

$$F = 4E_1 E_2 |v_1 - v_2|. \quad (1.8.2)$$

Скорости в системе центра масс из (1.7.2) равны

$$v_1 = \mathbf{q}_{s12}/E_1; \quad v_2 = -\mathbf{q}_{s12}/E_2, \quad (1.8.3)$$

так что

$$F = 4E_1 E_2 (q_{s12}/E_1 + q_{s12}/E_2) = 4(E_1 + E_2) q_{s12} = 4\sqrt{s} q_{s12}, \quad (1.8.4)$$

что, разумеется, есть инвариант. Чтобы получить полную вероятность перехода, нужно просуммировать по всем возможным конечным состояниям $|f_n\rangle$, содержащим n частиц, так что

$$\begin{aligned} \sigma_{12 \rightarrow n} &= \sum_i \frac{R_{fi}}{F} = \frac{1}{4q_{s12} \sqrt{s}} \sum_i (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) |\langle f_n | A | i \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{4q_{s12} \sqrt{s}} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^4 p'_i}{(2\pi)^3} \delta(p_i'^2 - m_i^2) (2\pi)^4 \times \\ &\times \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n p'_i - p_1 - p_2 \right) \sum_{\text{спин}} |\langle P'_1 \dots P'_n | A | P_1 P_2 \rangle|^2, \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по всем возможным импульсам n частиц в конечном состоянии с учетом нормировки (1.2.11) и (1.2.7). Временно мы будем иметь дело только с бесспиновыми частицами, так что опустим $\sum_{\text{спин}}$ и заменим P_i на p_i . Множитель

$$\begin{aligned} d\Phi_n &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^4 p_i'}{(2\pi)^3} \delta(p_i'^2 - m_i^2) \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n p_i' - p_1 - p_2 \right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 p_i'}{2p_{i0} (2\pi)^3} \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n p_i' - p_1 - p_2 \right) \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

представляет собой объем фазового пространства, который могут занимать n частиц в конечном состоянии, и интеграл в выражении (1.8.5) берется по этому объему.

Полное сечение рассеяния частиц 1 и 2 получается суммированием выражения (1.8.5) по всем возможным конечным состояниям, содержащим различное число частиц, а именно

$$\sigma_{12}^{\text{tot}} = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_{12 \rightarrow n}. \quad (1.8.7)$$

Если в конечном состоянии имеются только две частицы 3 и 4 с импульсами в системе центра масс, определяемыми выражением (1.7.3) то из (1.8.5) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{12 \rightarrow 34} &= \frac{1}{4q_{s12} (\sqrt{s}) (2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} |\langle p_3 p_4 | A | p_1 p_2 \rangle|^2 \times \\ &\quad \times \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (1.8.8)$$

Так как трехмерные импульсы частиц в (1.7.3) равны и противоположно направлены, то в (1.8.8) можно, используя δ -функцию, выполнить одно интегрирование

$$\sigma_{12 \rightarrow 34} = \frac{1}{4q_{s12} (\sqrt{s}) (2\pi)^2} \int \frac{d^3 q_{s34}}{2E_3 2E_4} \delta(E_3 + E_4 - \sqrt{s}) |\langle p_3 p_4 | A | p_1 p_2 \rangle|^2. \quad (1.8.9)$$

Можно выразить элемент объема в импульсном пространстве в полярных координатах $d^3 q_{s34} = q_{s34}^2 dq_{s34} d\Omega$, где $d\Omega = \sin \theta_s d\theta_s d\varphi$ — элемент телесного угла, связанный с направлением частицы 3, а полярный угол определен по отношению к направлению пучка — оси z . Тогда, определяя

$$E = E_3 + E_4 = \sqrt{m_3^2 + q_{s34}^2} + \sqrt{m_4^2 + q_{s34}^2}, \quad (1.8.10)$$

получаем

$$dE = \left(\frac{q_{s34}}{E_3} + \frac{q_{s34}}{E_4} \right) dq_{s34} = \frac{q_{s34} E}{E_3 E_4} dq_{s34}, \quad (1.8.11)$$

так что

$$\int \frac{q_{s34}^2 dq_{s34}}{E_3 E_4} \delta(E - \sqrt{s}) = \int \frac{q_{s34} dE}{E} \delta(E - \sqrt{s}) = \frac{q_{s34}}{\sqrt{s}} \quad (1.8.12)$$

и, наконец,

$$\sigma_{12 \rightarrow 24} = \frac{q_{s34}}{64\pi^2 s q_{s12}} \int |\langle p_3 p_4 | A | p_1 p_2 \rangle|^2 d\Omega. \quad (1.8.13)$$

Поэтому полезно ввести «дифференциальное сечение»

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_{s34}}{64\pi^2 s q_{s12}} |\langle p_3 p_4 | A | p_1 p_2 \rangle|^2, \quad (1.8.14)$$

которое, при единичной плотности потока падающих частиц, дает вероятность частице 3 рассеяться в угол $d\Omega$.

Так как сейчас мы рассматриваем только случай бесспиновых частиц, то всегда вероятность рассеяния не зависит от азимутального угла φ , поскольку нет никакого фактора, который выделял бы какое-либо направление перпендикулярно падающему пучку, и из (1.7.16) при фиксированном s следует

$$d\Omega = d(\cos \theta_s) d\varphi = \frac{dt}{2q_{s12} q_{s34}} d\varphi. \quad (1.8.15)$$

Поскольку $\int d\varphi = 2\pi$, более удобно взять в качестве дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q_{s12}^2} |A(s, t)|^2. \quad (1.8.16)$$

В общем случае можно получить парциальное (или дифференциальное) сечение по любому инварианту, поместив в выражение (1.8.5) δ -функцию. Так, определяя $t' = (p_1 - p_i')^2$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt'} &= \frac{1}{4s q_{s12} \sqrt{s}} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^4 p_i'}{(2\pi)^3} \delta(p_i'^2 - m_i^2) (2\pi)^4 \times \\ &\times \delta^4(\Sigma p_i' - p_1 - p_2) \delta(t' - (p_1 - p_i')^2) \sum_{\text{спин}} |\langle P_1' \dots P_n' | A | P_1 P_2 \rangle|^2 \end{aligned} \quad (1.8.17)$$

и ясно что эта процедура может быть повторена с целью получить парциальное сечение по отношению к любому числу независимых инвариантов.

1.9. Оптическая теорема

Полное сечение (1.8.7) удовлетворяет замечательному условию унитарности, называемому «оптической теоремой», которое будем часто использовать дальше.

Для конкретных начального и конечного состояний условие унитарности (1.2.14) может быть записано в виде

$$(SS^+)_{ji} = \sum_n S_{jn} S_{ni}^+ = \delta_{ji}. \quad (1.9.1)$$

Для упругого рассеяния $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ из (1.3.10) получаем

$$S_{ji} = \delta_{ji} + i(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \langle f | A | i \rangle, \quad (1.9.2)$$

что вместе с (1.3.13) приводит (1.9.1) к виду

$$i(\langle f|A^+|i\rangle - \langle f|A^-|i\rangle) = -(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_n - p_i) \langle f|A^+|n\rangle \langle n|A^-|i\rangle. \quad (1.9.3)$$

В случае, когда начальное и конечное состояния одинаковы, получаем, вспомнив (1.5.10):

$$2\text{Im}[\langle i|A|i\rangle] = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_n - p_i) |\langle n|A^+|i\rangle|^2. \quad (1.9.4)$$

Но правая часть здесь такая же, как и в (1.8.7) с учетом (1.8.5) и без потокового множителя. Так что окончательно получаем соотношение

$$\sigma_{12}^{tot} = \frac{1}{2q_{s12} \sqrt{s}} \text{Im}[\langle i|A|i\rangle]. \quad (1.9.5)$$

Поскольку конечное состояние совпадает с начальным, $\langle i|A|i\rangle$ есть амплитуда упругого рассеяния вперед $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ без изменения направления движения частиц, т. е. $\theta_s = 0$, что означает из (1.7.16) при условии $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$, что $t = 0$, и поэтому

$$\sigma_{12}^{tot} = \frac{1}{2q_{s12} \sqrt{s}} \text{Im}[A^{el}(s, t = 0)]. \quad (1.9.6)$$

Эта оптическая теорема хорошо известна в нерелятивистском потенциальном рассеянии (см., например, [355]), где она утверждает, что вследствие сохранения вероятности амплитуда волновой функции в «тени» за мишенью ($\theta_s = 0$) должна быть меньше, чем амплитуда падаю-

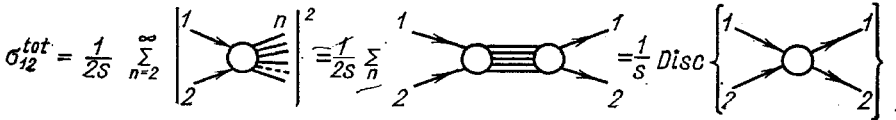


Рис. 1.6. Оптическая теорема.

Множитель $(2s)^{-1}$ есть выражение для потока (1.8.4) в пределе больших s

щей волны, на величину, равную полному сечению рассеяния во всех направлениях. Уравнение (1.9.5) представляет собой тот же закон сохранения вероятности, распространенный на релятивистский случай, когда может происходить образование частиц. Отметим, что в правой части стоит только упругая амплитуда процесса $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$, в то время как в левой части — полное сечение процесса $1 + 2 \rightarrow$ все возможные состояния.

Из рис. 1.6 можно понять, как это соотношение возникает на языке диаграмм, причем последний шаг следует из (1.5.11), поскольку мы

берем скачок $\left(\begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \right)$ на n -частичном разрезе и суммируем по всем

возможным промежуточным состояниям, учитывая закон сохранения 4-импульса. Вещественная аналитичность означает, что

$$\text{Disc } A = \text{Im } A.$$

Эта оптическая теорема является одним из наиболее полезных ограничений, которые унитарность накладывает на амплитуду рассеяния. В гл. 10 будут рассмотрены некоторые ее обобщения.

1.10. Дисперсионные соотношения по одной переменной

В соответствии с обсуждением в разд. 1.5 предполагается, что единственными особенностями, появляющимися на физическом листе, являются полюса, которые отвечают стабильным частицам, и пороговые точки ветвления. Так, для случая равных масс, зафиксировав t

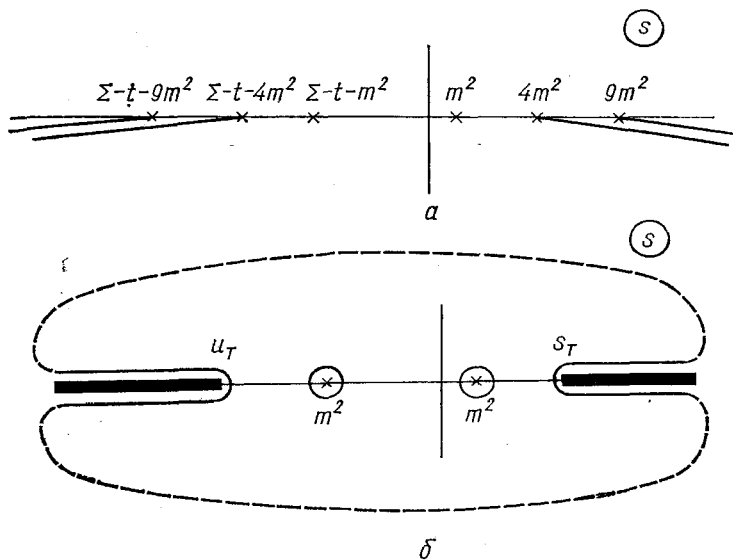


Рис. 1.7. *a* — Особенности по s на физическом листе при фиксированном t ($\Sigma = 4m^2$). *б* — Контур интегрирования в комплексной s -плоскости, растянутый до бесконечности и окружающий разрезы и полюса на вещественной оси

равным некоторому малому действительному отрицательному значению (см. рис. 1.5), мы обнаружим в s -плоскости особенности, показанные на рис. 1.7. Справа, для $\text{Re } s > 0$, будут находиться s -канальные полюса, отвечающие связанному состоянию, и различные s -канальные пороги. Слева, при $\text{Re } s < 0$, мы обнаружим u -канальный полюс и u -канальные пороги. Ясно, что расстояние между полюсами зависит от выражения (1.7.21)

$$s = 4m^2 - t - u. \quad (1.10.1)$$

Если взять t достаточно большим отрицательным числом, то эти особенности будут перекрываться.

Мы провели разрезы от s -канальных порогов вдоль действительной оси по направлению $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$ (но слегка сместив их для лучшей видимости) и от u -особенностей по направлению $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$. Тогда лист, изображенный на рис. 1.7, *a*, является физическим листом, на котором s -канальная физическая амплитуда получается приближением к действительной оси s сверху, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s + i\varepsilon$, и аналогично u -канальная амплитуда получается как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s - i\varepsilon$, что соответствует приближению к действительной оси s снизу, как это обусловлено соотношением (1.10.1).

Определим скачки на разрезах:

$$D_s(s, t) = \frac{1}{2i} (A(s_+, t, u) - A(s_-, t, u));$$

$$D_u(u, t) = \frac{1}{2i} (A(s, t, u_+) - A(s, t, u_-)), \quad (1.10.2)$$

где $s_{\pm} = s \pm i\varepsilon$. В D_s и D_u мы опустили третью зависимую переменную. Вследствие вещественной аналитичности A (см. разд. 1.5) получаем

$$A(s^*, t, u) = A^*(s, t, u) \quad (1.10.3)$$

и таким образом $D_s(s, t) = \operatorname{Im} [A(s, t, u)]$ вдоль s -канальных разрезов и $D_u(u, t) = \operatorname{Im} [A(s, t, u)]$ вдоль u -канальных разрезов.

Идея дисперсионных соотношений заключается в выражении амплитуды рассеяния с помощью интегральной формулы Коши [381]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz'}{z' - z} F(z'),$$

так что

$$A(s, t, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{ds'}{s' - s} A(s', t, u'), \quad (1.10.4)$$

где интеграл берется по любому контуру, направленному против часовой стрелки в комплексной плоскости s , окружающему точку s и такому, что $A(s, t, u)$ аналитична (гомоморфна) внутри контура и на нем самом (см. рис. 1.7, *b*). Можно расширить контур так, что он обойдет полюса и разрезы, как это показано на рисунке, и тогда

$$A(s, t, u) = \frac{g_s(t)}{m^2 - s} + \frac{g_u(t)}{m^2 - u} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{ds'}{s' - s} A(s', t, u'). \quad (1.10.5)$$

(Необходимо помнить, что s' и u' связаны соотношением $s' + t + u' = 4m^2$.) Тогда если

$$|A(s, t, u)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow |s|^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.10.6)$$

то вклад от окружности на бесконечности исчезает и окончательно получаем

$$A(s, t, u) = \frac{g_s(t)}{m^2 - s} + \frac{g_u(t)}{m^2 - u} + \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds' + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{u_T}^{\infty} \frac{D_u(u', t)}{u' - u} du', \quad (1.10.7)$$

где s_T и u_T — s - и u -канальные пороги соответственно.

Такие дисперсионные соотношения были выведены первоначально Крамерсом [265] и Кронигом [266] для рассеяния света на свободных электронах, и они представляют собой критическую проверку сделанных в разд. 1.5 предположений об аналитичности. С точностью имеющих экспериментальных данных они согласуются с опытом [156]. Теоретически они очень важны, потому что, как мы показали, задавая полюса, отвечающие частицам, с помощью условий унитарности можно получить все остальные особенности амплитуды рассеяния и скачки на разрезах (по крайней мере в принципе). Таким образом, условия унитарности дают нам $\text{Im } A$, но не дают $\text{Re } A$. Однако, поскольку мы знаем все скачки амплитуды, с помощью дисперсионных соотношений можно найти также и действительную часть амплитуды, и таким образом при заданных полюсах, отвечающих частицам, унитарность плюс аналитичность полностью определяют амплитуду рассеяния.

Однако часто требование сходимости (1.10.6) не выполняется, и в таком случае мы должны прибегнуть к процедуре вычислений. Так если [пренебрегая для простоты другими членами в (1.10.7)]

$$A(s, t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds', \quad (1.10.8)$$

но интеграл расходится при $s' \rightarrow \infty$, то вместо него мы должны записать дисперсионное соотношение для $A(s, t, u) [(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)]^{-1}$, включив в скобки достаточное количество членов, чтобы обеспечить сходимость (предполагая, что для этого достаточно конечного их числа). Итак,

$$A(s, t, u) \prod_{i=1}^n (s - s_i)^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{A(s_j, t, u_j)}{s - s_j} \times \\ \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j - s_i)^{-1} + \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s_1) \dots (s' - s_n)(s' - s)} ds'. \quad (1.10.9)$$

Здесь мы собрали вместе дополнительные вклады от каждого из полюсов при $s = s_1, s_2, \dots, s_n$. Отсюда

$$A(s, t, u) = F_{n-1}(s, t) + \frac{1}{\pi} \prod_{i=1}^n (s - s_i) \int_{sT}^{\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s_1) \dots (s' - s_n)(s' - s)} ds', \quad (1.10.10)$$

где $F_{n-1}(s, t)$ — произвольный полином $n - 1$ порядка по s , но теперь интеграл сходится, если $D_s(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} s^{n-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, проблема сходимости решена ценой введения произвольного полинома, который не определен (по крайней мере прямо) условиями унитарности. Одна из основных задач реджевской теории — ликвидация этого недостатка определением вычитаний.

Особенно полезны дисперсионные соотношения для упругой амплитуды рассеяния вперед, такие, как для реакции $\pi N \rightarrow \pi N$ при $t = 0$, когда $u = \Sigma - s$. Из оптической теоремы (1.9.5) следует

$$D_s(s, 0) = \text{Im}[A^{el}(s, 0)] = 2q_{s12}(\sqrt{s}) \sigma_{12}^{tot}(s), \\ D_u(u, 0) = \text{Im}[A^{el}(u, 0)] = 2q_{u14}(\sqrt{u}) \sigma_{14}^{tot}(u) \quad (1.10.11)$$

и эти сечения равны, если частицы 2 и $\bar{2}$ ($= 4$) одинаковы. Можно показать (см. разд. 2.4), что $\sigma_{12}^{tot}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{const}$ (с возможными множителями типа $\ln s$), так что в (1.10.7) необходимы только два вычитания. Так, произведя вычитания в точке $s = 0$, мы получим (пренебрегая всеми полюсными вкладами) для действительных s выше s -канального порога:

$$\text{Re}[A^{el}(s, 0)] = a_0 + a_1 s + \frac{s^2}{\pi} P \int_{sT}^{\infty} ds' \sqrt{s'} q_{s12} \sigma_{12}^{tot}(s') \times \\ \times \left(\frac{1}{s'^2(s' - s)} + \frac{1}{(s' - \Sigma)^2(s' + s - \Sigma)} \right), \quad (1.10.12)$$

где P — главное значение [см. (1.5.2)]. Таким образом, если известно полное сечение (и сделаны предположения о его поведении при очень больших s , где оно еще не измерено), то можно найти $\text{Re}[A(s, 0)]$ в терминах только двух неизвестных — вычитательных констант a_0 и a_1 . Поскольку в экспериментах по интерференции с кулоновским взаимодействием $\text{Re}[A(s, 0)]$ может быть измерена непосредственно (см., например, [155]), то справедливость дисперсионных соотношений при $t = 0$ может быть проверена.

1.11. Представление Мандельштама

Дисперсионные соотношения по одной переменной мы получили, фиксируя одну инвариантную переменную (в (1.10.4) была фиксирована t) и представляя амплитуду как контурный интеграл вокруг осо-

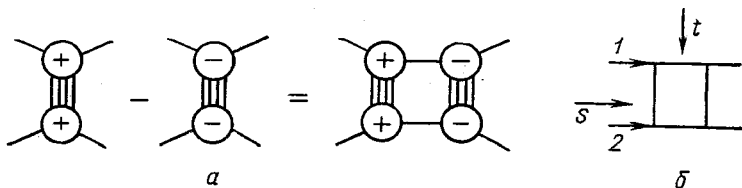


Рис. 1.8. *a* — Вклад t -канальных промежуточных состояний в s -канальное двухчастичное условие унитарности. *б* — Квадратная диаграмма — простейшая диаграмма, дающая вклад в $\rho_{st}(s, t)$

бенностей по другим инвариантам (s). Однако $D_s(s, t)$ будет иметь особенности по t , соответствующие t -канальным порогам и т. д. На рис. 1.8, *a* эти t -канальные обмены помещены в s -канальное условие унитарности. Будут существовать также и u -канальные пороговые точки ветвления, но, конечно, u не есть независимая переменная; благодаря соотношению (1.7.21) при фиксированном положительном s эти точки ветвления будут появляться при отрицательных значениях t (см. рис. 1.5).

Можно ожидать, что эти особенности лежат на вещественной оси t , так что для $D_s(s, t)$ можно записать дисперсионные соотношения, аналогичные соотношениям для самой амплитуды $A(s, t, u)$. Определим скачок $D_s(s, t)$ через разрезы в t -плоскости как

$$\rho_{st}(s, t) = \frac{1}{2i} (D_s(s, t_+) - D(s, t_-)), \quad t > b_1(s) > 0 \quad (1.11.1)$$

и через разрезы в u -плоскости как

$$\rho_{su}(s, u) = \frac{1}{2i} (D_s(s, u_+) - D_s(s, u_-)), \quad u > b_2(s) > 0. \quad (1.11.2)$$

Положения особенностей диаграмм низшего порядка, дающих вклад в ρ , задают граничные функции $b_{1,2}(s)$; обычно это квадратная диаграмма рис. 1.8, *б*. В следующем разделе мы покажем, что

$$b_1(s) = b_2(s) = 4m^2 + 4m^2/(s - 4m^2) \quad (1.11.3)$$

для случая равных масс. Эти границы показаны на рис. 1.9. Можно записать дисперсионное соотношение при фиксированном s :

$$D_s(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{b_1(s)}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s, t'')}{s'' - t} dt'' + \frac{1}{\pi} \int_{b_2(s)}^{\infty} \frac{\rho_{su}(s, u'')}{u'' - u} du''. \quad (1.11.4)$$

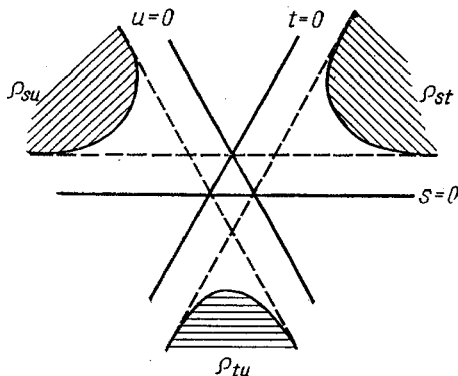


Рис. 1.9. Плоскость Мандельштама для случая рассеяния частиц равных масс (ср. рис. 1.5, *a*).

Заштрихованы области, где двойная спектральная функция отлична от нуля. Границы областей даются выражением (1.11.3)

Аналогичным образом скачок по u имеет точки ветвления, отвечающие s - и t -порогам, так что можно записать

$$D_u(u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{b_1(u)}^{\infty} \frac{\rho_{tu}(u, t'')}{t'' - t} dt'' + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_2(u)}^{\infty} \frac{\rho_{su}(s'', u)}{s'' - s} ds''. \quad (1.11.5)$$

Если эти выражения подставить в (1.10.7), пренебрегая для простоты полюсными членами, то окончательно получим

$$A(s, t, u) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{st}(s', t'')}{(s' - s)(t'' - t)} ds' dt'' + \\ + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s', u'')}{(s' - s)(u'' - u')} ds' du'' + \\ + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{tu}(u', t'')}{(u' - u)(t'' - t)} du' dt'' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s'', u')}{(u' - u)(s'' - s')} du' ds''. \quad (1.11.6)$$

Необходимо напомнить, что это соотношение, подобно выражению (1.10.7), написано при фиксированном t , так что во втором и в четвертом членах нужно использовать выражения

$$s + t + u = s' + t + u' = \Sigma, \quad (1.11.7)$$

где штрихами обозначены переменные, которые получаются из знаменателей в формулах (1.11.4) и (1.11.5). Конечно же, переменные со штрихами являются немymi переменными интегрирования, так что можно переставить штрихи в четвертом члене и сложить его со вторым, получая

$$\iint \rho_{su}(s', u'') \left(\frac{1}{(s' - s)(u'' - u')} + \frac{1}{(u'' - u)(s' - s'')} \right) ds' du''. \quad (1.11.8)$$

Это можно переписать, используя (1.11.7) в следующем виде:

$$\iint \frac{\rho_{su}(s', u'')}{(s' - s)(u'' - u)} ds' du'',$$

так что выражение (1.11.8) принимает вид

$$A(s, t, u) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{st}(s, t'')}{(s' - s)(t'' - t)} ds' dt'' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s', u'')}{(s' - s)(u'' - u)} ds' du'' + \\ + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{tu}(u', t'')}{(u' - u)(t'' - t)} du' dt''. \quad (1.11.9)$$

Функции ρ_{st} , ρ_{su} , ρ_{tu} называются «двойными спектральными функциями», а (1.11.9) — двойным дисперсионным соотношением. Представление амплитуды рассеяния в терминах двойных спектральных функций называется представлением Мандельштама [293, 294]. Мы недостаточно хорошо знаем особенности амплитуды рассеяния, чтобы быть уверенными, что такое представление правильно. В частности, мы не знаем, все ли особенности на физическом листе лежат на действительной оси. Известно, что для диаграмм, у которых массы промежуточных состояний меньше массы внешних линий, на физическом листе появляются аномальные пороги и для того чтобы включить их, контур интегрирования должен выйти в комплексную плоскость. (Обсуждение этой проблемы можно найти в [157].) Но кажется вероятным, что выражение (1.11.9) для большинства приложений является, по меньшей мере, хорошим приближением.

Мы выводили (1.11.9) из дисперсионных соотношений при фиксированном t (1.10.7). Однако окончательный результат симметричен по всем трем переменным s , t и u и мог быть равным образом получен из дисперсионных соотношений при фиксированном s или u . Это связано с тем, что из (1.11.1) и (1.10.2) двойная спектральная функция равна

$$\begin{aligned} \rho_{st} &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{2i} (A(s_+, t_+) - A(s_-, t_+)) - \frac{1}{2i} (A(s_+, t_-) - A(s_-, t_-)) \right] = \\ &= \frac{1}{4} [A(s_+, t_+) + A(s_-, t_-) - A(s_-, t_+) - A(s_+, t_-)], \quad (1.11.10) \end{aligned}$$

что может быть записано в виде

$$\frac{1}{2i} (D_t(s_+, t) - D_t(s_-, t)) \text{ или } \frac{1}{2i} (D_s(s, t_+) - D_s(s, t_-)). \quad (1.11.11)$$

При использовании выражения (1.11.9) возникают два усложняющих обстоятельства. Первое, достаточно тривиальное, заключается в том, что мы опустили полюса, отвечающие связанным состояниям, которые могут существовать в любом из трех каналов: s , t или u . При необходимости они должны быть просто добавлены, как это сделано в (1.10.7). Более серьезная проблема касается расходимости интеграла, когда s' , t'' и т. д. стремятся к бесконечности. Подобно соотношению (1.10.7), выражение (1.11.9) определено с точностью до различных вычитательных членов, которые могут быть необходимы для сходимости интегралов. Поэтому мы, возможно, будем вынуждены ввести в представление Мандельштама относительно произвольные вычитательные члены. Однако в следующей главе мы увидим, что гипотеза аналитического продолжения по угловому моменту помогает определить и эти вычитательные члены.

1.12. Сингулярности фейнмановских интегралов

В разд. 1.5 мы отмечали, что условия унитарности приводят к тому, что амплитуды рассеяния имеют те же особенности, что и фейнмановские диаграммы в теории возмущений квантовой теории поля.

Это не удивительно, поскольку такие теории дают лоренц-инвариантные амплитуды с теми же самыми свойствами связности, которые удовлетворяют унитарности, по крайней мере в теории возмущений. Разумеется, мы не надеемся, что такой подход в рамках теории возмущений будет справедлив в теории сильных взаимодействий, где ряды теории возмущений не будут сходиться, поскольку константы связи не малы и мы не можем использовать обычную технику перенормировок. Однако можно надеяться приобрести некоторое интуитивное представление о форме амплитуд сильных взаимодействий, исходя из аналогий теории поля.

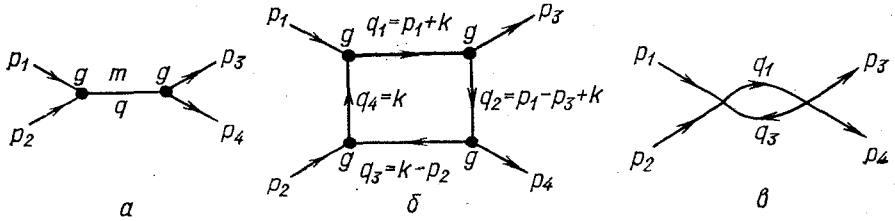


Рис. 1.10. *a* — Диаграмма Фейнмана для обмена одной частицей в *s*-канале. *б* — Квадратная диаграмма. *в* — Стянутая квадратная диаграмма в случае, когда линии q_2 и q_4 стянуты в точку наложением условий $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$

Для наших целей спиновые характеристики частиц не очень важны и поэтому мы будем рассматривать только бесспиновые скалярные мезоны с массой m , взаимодействие которых описывается лагранжианом $L_{int} = g\phi^3$. Правила Фейнмана для таких частиц очень просты [51]. Каждая внутренняя линия с импульсом q в данной диаграмме соответствует множителю $i[(2\pi)^4(q^2 - m^2 + i\epsilon)]^{-1}$, каждой вершине отвечает множитель g , сохранению энергии — импульса в вершине $1 + 2 \rightarrow 3$ соответствует фактор $(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3)$ и по каждой внутренней линии проводится интегрирование. Наличие δ -функций означает, что свободные импульсы имеют только замкнутые петли, однако одна δ -функция, отвечающая полному сохранению энергии-импульса, может быть вынесена из определения амплитуды рассеяния, подобно тому, как это сделано в (1.3.10).

Теперь вклад диаграммы с обменом одной частицей (рис. 1.10, *a*) — борновской диаграммы в амплитуду есть всего лишь

$$g^2/(q^2 - m^2 + i\epsilon); \quad q^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad (1.12.1)$$

a амплитуда, соответствующая квадратной диаграмме (рис. 1.10, *б*), есть

$$i \frac{g^4}{(2\pi)^4} \int d^4 k \{ [(k + p_1)^2 - m^2 + i\epsilon] [(k - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon] \times \\ \times [(k + p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\epsilon] [k^2 - m^2 + i\epsilon] \}^{-1}. \quad (1.12.2)$$

Произвольная диаграмма приводит в пренебрежении нормировочными множителями к выражению

$$A \sim \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_l}{\prod_{i=1}^n (q_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon)}. \quad (1.12.3)$$

где k_l — независимые импульсы в петлях, а значения q определяются δ -функциями в каждой вершине. Используя равенство Фейнмана

$$\frac{1}{u_1 u_2 \dots u_n} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right]^n}, \quad (1.12.4)$$

можно переписать (1.12.3) как

$$A \sim \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \int d^4 k_1 \dots d^4 k_l \frac{\delta(1 - \sum \alpha_i)}{[\sum \alpha_i (q_i^2 - m_i^2) + i\varepsilon]^n}. \quad (1.12.5)$$

Сингулярности таких интегралов подробно исследованы в работе [157]. Если функция $F(x)$ представляется интегралом типа

$$F(x) = \int_a^b f(x, z) dz, \quad (1.12.6)$$

то она необязательно имеет особенность там же, где есть особенность функции $f(x, z)$, потому что контур интегрирования может быть смещен в комплексную плоскость так, чтобы избежать сингулярности, а по теореме Коши все такие продолжения эквивалентны. Особенности возникают по двум причинам.

1. Особенность функции $f(x, z)$ существует в конечной точке интервала интегрирования a или b , поэтому контур не может быть деформирован, чтобы обойти ее. Например,

$$F(x) = \int_a^b \frac{dz}{z-x} = \ln \frac{b-x}{a-x} \quad (1.12.7)$$

имеет особенности при $x = a$ или $x = b$.

2. Две или большее число особенностей функции f приближаются к контуру с разных сторон (или сингулярность уходит на бесконечность), защемляя таким образом контур интегрирования, так что обойти эти особенности нельзя. Так, например,

$$F(x) = \int_a^b \frac{dz}{(z-x)(z-x_0)} = \frac{1}{(x-x_0)} \ln \left[\left(\frac{b-x_0}{a-x_0} \right) \left(\frac{b-x}{a-x} \right) \right] \quad (1.12.8)$$

имеет особенность в точке $x = x_0$, где две особенности подынтегрального выражения совпадают, и в точках $x = a, b$, как и ранее. Эти два типа особенностей называются особенностями в конечных точках и особенностями пинча соответственно.

Обобщение на интегрирование по большему числу переменных довольно сложно, потому что включаются дополнительные переменные, но известно, что особенности подынтегрального выражения в (1.12.5) приводят к особенностям амплитуды рассеяния, если выполнены следующие условия:

$$q_i^2 = m_i^2 \text{ или } \alpha_i = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n$$

и

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \sum_{i=1}^n \alpha_i (q_i^2 - m_i^2) = 0 \text{ для } j = 1, \dots, l.$$

Но поскольку [см., например, (1.12.2)] каждое q линейно по k , то последнее условие эквивалентно требованию, чтобы $\sum_i \alpha_i q_i = 0$ для каждой петли j . Это условие Ландау (1.5.14).

Таким образом для квадратной диаграммы рис. 1.10, б или $q_i^2 = m_i^2$, или $\alpha_i = 0$ для $i = 1, \dots, 4$ и

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 + \alpha_4 q_4 = 0. \quad (1.12.9)$$

Равенство $\alpha_i = 0$ эквивалентно стягиванию рассматриваемой линии, так что если, например, $\alpha_2, \alpha_4 = 0$, то получается диаграмма рис. 1.10, в. При этом требуется, чтобы $q_1^2 = q_3^2 = m^2$ и $\alpha_1 q_1 + \alpha_3 q_3 = 0$, так что $q_1 = -q_3$ и особенность возникает при $s = (q_1 - q_3)^2 = 4q_1^2 = 4m^2$, т. е. на пороге. Если не обращаться в нуль ни одна из α_i , то должно выполняться условие (1.12.9). Умножение уравнения (1.12.9) последовательно на каждое из q_i ($i = 1, \dots, 4$) дает четыре линейных уравнения для α , причем решение с $\alpha_i \neq 0$ возможно, только если определитель системы равен нулю, т. е.

$$\det(q_i q_j) = 0 \text{ для } i, j = 1, \dots, 4.$$

Поскольку $s = (q_1 - q_3)^2$ и $t = (q_2 - q_4)^2$, то видно, что особенность возникает при

$$(s - 4m^2)(t - 4m^2) = 4m^4. \quad (1.12.10)$$

Это граница области, где отлична от нуля двойная спектральная функция Мандельштама (1.11.3), поскольку условие (1.2.10) даёт кривую, где скачок на s -канальном разрезе имеет скачок по t , связанный с t -канальным порогом. Отметим, что при $s \rightarrow \infty$ эта граница движется по направлению к порогу при $t = 4m^2$. Более сложные особенности, обусловленные большим числом частиц в промежуточном состоянии, будут возникать при больших значениях инвариантов. Здесь мы не будем обсуждать этот вопрос, а читателей, интересующихся подробным рассмотрением, отсылаем к книге [157]. Мы хотим только использовать некоторые из этих результатов далее.

Необходимо заметить, что соответствие между фейнмановскими и унитарными диаграммами всегда неоднозначно. Так, унитарная диаграмма рис. 1.11, а с обменом одной частицей соответствует скачку бесконечной последовательности диаграмм Фейнмана, аналогичных изображенной на рис. 1.11, б, которые приводят к перенормировке

вершин и массы обмениваемой частицы. Более сложные диаграммы Фейнмана, типа изображенной на рис. 1.11, *в*, будут давать вклад в несколько различных унитарных диаграмм, потому что скачок в этой диаграмме может быть взят несколькими различными способами,

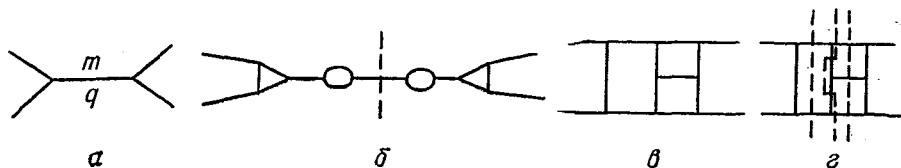


Рис. 1.11. *а* — Унитарная диаграмма для одночастичного обмена, приводящая к скачку на полюсной особенности в виде $\delta(q^2 - m^2)$. *б* — Одна из диаграмм Фейнмана, которая в случае, когда взят разрез по одночастичному пропагатору, как показано пунктирной линией, дает вклад в скачок, показанный на рис. *а*. *в* — Диаграмма Фейнмана. *г* — Три различных разреза диаграммы *в*, дающие вклад в двух-, трех- и четырехчастичные унитарные диаграммы

как это показано на рис. 1.11, *г*. Это обстоятельство следует иметь в виду при применении моделей, основывающихся на диаграммах Фейнмана, к процессам сильного взаимодействия.

1.13. Потенциальное рассеяние

Достаточно ясно, что теория нерелятивистского потенциального рассеяния имеет весьма малое отношение к физике частиц. Это не просто вопрос введения релятивистской кинематики. Саму идею потенциала, являющегося функцией пространственных координат, очень трудно обобщить на релятивистский случай. В действительности существование локального причинного взаимодействия всегда приводит, вследствие лоренц-инвариантности, к испусканию квантов поля. А в физике частиц, за исключением очень низких энергий, преимущественно будут происходить неупругие процессы, включающие образование новых частиц, которые, очевидно, нельзя легко включить в рамки потенциального рассеяния.

Тем не менее потенциальное рассеяние является очень полезным теоретическим методом для исследования многих аспектов квантовой теории рассеяния и некоторые из моделей, используемых в физике частиц, основаны на аналогии с теорией потенциального рассеяния. Для наших целей особенно важно то, что в потенциальном рассеянии, при условии соответствующего поведения потенциалов, выполняется тот вид дисперсионных соотношений, который мы обсуждали в этой главе. В гл. 3 мы покажем, что и основные идеи теории Редже также могут быть доказаны в потенциальном рассеянии. В этом разделе мы постараемся выявить аналогии между структурой сингулярностей амплитуд потенциального рассеяния с потенциалом Юкавы и сингулярностями *S*-матрицы.

Уравнение Шредингера для двух частиц, взаимодействующих посредством локального потенциала $V(r)$ в системе центра масс, имеет вид [355]

$$\left[\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{\hbar^2}{2M} k^2 - V(r) \right] \psi(r) = 0, \quad (1.13.1)$$

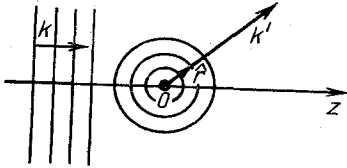
где k — волновое число (энергия $E = \hbar^2 k^2 / 2M$), а M — приведенная масса. Удобно ввести

$$U(r) = V(r) 2M / \hbar^2, \quad (1.13.2)$$

так что уравнение (1.13.1) принимает вид

$$(\nabla^2 + k^2 - U(r)) \psi(r) = 0. \quad (1.13.3)$$

Начальное состояние представляется плоской волной с волновым вектором k , направленным вдоль оси z (рис. 1.12):



$$\psi(r) = \exp(ikr) = \exp(ikz). \quad (1.13.4)$$

Мы ищем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию, такому, что при $r \rightarrow \infty$

$$\psi(r) \rightarrow \exp(ikz) + A(k, k') \exp(ik'r) / r, \quad (1.13.5)$$

где второй член есть расходящаяся рассеянная волна, волновой вектор которой k' направлен по направлению единичного вектора \hat{r} , а $A(k, k')$ — амплитуда рассеяния. Для упругого рассеяния $|k| = |k'| = k$.

Рис. 1.12. Падающая плоская волна, волновой вектор k которой направлен вдоль оси z , рассеянная потенциалом в точке $z=0$ в направлении \hat{r} с волновым вектором k'

Решение (1.13.3) с граничным условием (1.13.5) дается уравнением Липпмана—Швингера

$$\psi(r) = \exp(ikz) + \int G_0(r, r') U(r') \psi(r') dr', \quad (1.13.6)$$

где функция Грина равна

$$G_0(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[ik|r - r'|]}{|r - r'|}. \quad (1.13.7)$$

То, что выражение (1.13.6) является решением уравнения (1.13.3), можно проверить прямой подстановкой, имея в виду, что

$$\nabla^2 (1/|r - r'|) = -4\pi\delta(r - r'). \quad (1.13.8)$$

И при условии, что $\lim_{r \rightarrow \infty} rU(r) = 0$, поскольку $|r - r'| \approx r - r'\hat{r}$, получаем

$$\psi(r) \rightarrow \exp(ikr) - \exp(ikr) / (4\pi r) \int \exp(-ik'r') U(r') \psi(r') dr' \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (1.13.9)$$

что при сравнении с (1.13.5) дает

$$A(k, k') = - (1/4\pi) \int \exp(ik'r') U(r') \psi(r') dr'. \quad (1.13.10)$$

Борновское приближение, справедливое при высоких энергиях, получают аппроксимацией $\psi(\mathbf{r}')$ в (1.13.10) падающей плоской волной (1.13.4) в предположении, что рассеяние невелико:

$$A^B(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = - (1/4\pi) \int \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'] U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.13.11)$$

Удобно ввести (по аналогии с предыдущими обозначениями) величину $s = k^2$ для полной энергии (в единицах, где $\hbar^2 = 2M = 1$) и

$$t = -K^2 = -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = -2k^2(1 - \cos \theta),$$

где \mathbf{K} — вектор переданного импульса. Тогда

$$A^B(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = A^B(s, t) = - (1/4\pi) \int \exp(i\mathbf{K}\mathbf{r}') U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.13.12)$$

Теперь, при подстановке

$$\int d\mathbf{r}' = \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \quad (1.13.13)$$

и $\mathbf{K}\mathbf{r}' = Kr \cos \alpha$, где α, β — полярные углы вокруг оси \mathbf{K} (рис. 1.13), интегрирование по углам легко выполняется, поскольку $U = U(r')$, и получаем

$$A^B(s, t) = -\frac{1}{K} \int_0^\infty \sin(Kr') U(r') r' dr'. \quad (1.13.14)$$

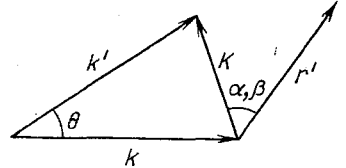


Рис. 1.13. Волновые векторы $|\mathbf{k}|$ и $|\mathbf{k}'|$ равны, так что $|\mathbf{K}| = 2|\mathbf{k}| \sin(\theta/2)$. Углы α и β есть полярные углы вектора \mathbf{r}' по отношению к оси \mathbf{K}

Самой простой формой короткодействующего потенциала, присущего сильным взаимодействиям, является потенциал Юкавы

$$U(r) = g^2 \exp(-\mu r)/r, \quad (1.13.15)$$

где g^2 — константа связи, а μ^{-1} — радиус; для этого потенциала получаем

$$A^B(s, t) = g^2/(\mu^2 + K^2) = g^2/(\mu^2 - t). \quad (1.13.16)$$

Таким образом, борновское приближение для амплитуды рассеяния в потенциале Юкавы является просто полюсом в точке $t = \mu^2$, вычет в котором дается константой связи. Разумеется, для более сложных потенциалов аналитические свойства не будут столь просты, но как суперпозиция потенциалов юкавского типа может быть представлен широкий класс потенциалов:

$$U(r) = \frac{1}{r} \int_m^\infty \rho(\mu) \exp(-\mu r) d\mu, \quad (1.13.17)$$

где ρ — весовая функция, что дает

$$A^B(s, t) = \int_m^\infty d\mu \frac{\rho(\mu)}{\mu^2 - t}. \quad (1.13.18)$$

Это выражение, очевидно, гомоморфно по s , а разрез по t идет от $t = m^2$ до ∞ .

Чтобы двинуться дальше, мы отметим, что, поскольку

$$(\nabla^2 + k^2) \exp(ikr) = 0, \quad (1.13.19)$$

выражение (1.13.3) может быть записано как

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = (\nabla^2 + k^2) \exp(ikr) + U\psi. \quad (1.13.20)$$

Поэтому формально

$$\psi = \exp(ikr) + U\psi/(\nabla^2 + k^2) \quad (1.13.21)$$

и после последовательных подстановок

$$\psi = \exp(ikr) + \frac{1}{\nabla^2 + k^2} U \exp(ikr) + \frac{1}{\nabla^2 + k^2} U \frac{1}{\nabla^2 + k^2} U \exp(ikr) + \dots \quad (1.13.22)$$

Поэтому в выражении (1.13.10) получаем

$$A(k, k') = -\frac{1}{4\pi} \int \exp(-ik' r') U (\exp(ikr') + U \exp(ikr')/(\nabla^2 + k^2) + \dots) dr'. \quad (1.13.23)$$

Первый член есть борновское приближение (1.13.11), который обозначим следующим образом:

$$A^B(k, k') = \langle k' | U | k \rangle, \quad (1.13.24)$$

где состояния $|k\rangle$ есть собственные состояния оператора импульса, такие, что

$$\nabla^2 |k\rangle = -k^2 |k\rangle.$$

Теперь, используя соотношение полноты, чтобы записать

$$\frac{1}{\nabla^2 + k^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |p\rangle \frac{d^3 p}{k^2 - p^2} \langle p|, \quad (1.13.25)$$

получаем борновский ряд (1.13.23) в виде

$$A(k, k') = \langle k' | U | k \rangle + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle k' | U | p \rangle \frac{d^3 p}{k^2 - p^2} \{ \langle p | U | k \rangle + \dots \}. \quad (1.13.26)$$

Поскольку член в фигурных скобках есть опять борновское разложение амплитуды $A(k, p)$, то можно переписать (1.13.26) как уравнение Липпмана—Швингера для амплитуды рассеяния

$$A(k, k') = A^B(k, k') + \frac{1}{(2\pi)^3} \int A(k, p) \frac{d^3 p}{k^2 - p^2} A^B(p, k'), \quad (1.13.27)$$

которое представлено графически на рис. 1.14.

Для потенциала Юкавы подстановка (1.13.16) в (1.13.24) и (1.13.26) приводит к уравнению

$$A(k, k') = \frac{g^2}{\mu^2 + (k - k')^2} + \frac{g^4}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{[(k' - p)^2 + \mu^2] [k^2 - p^2] [(p - k)^2 + \mu^2]} + \dots, \quad (1.13.28)$$

являющемуся степенным рядом по константе связи и напоминающему правила Фейнмана для диаграмм на рис. 1.10, но, разумеется, для случая трех измерений. Второй член имеет разрез по $k^2 = s$ для $k^2 > 0$, где знаменатель $(p^2 - k^2)^{-1}$ обращается в нуль. Первый член имеет полюс при $t = \mu^2$, второй — разрез, начинающийся в точке $t = 4\mu^2$. Второй член имеет двойную спектральную функцию Мандельштама с границей при

$$t = b(s) = 4\mu^2 + \mu^4/s. \quad (1.13.29)$$

Таким образом, рассеяние в потенциале Юкавы или его простые обобщения типа (1.13.18) имеют структуру особенностей, аналогичную той, которой обладает квантовая теория поля Φ^3 . Разумеется, есть прин-

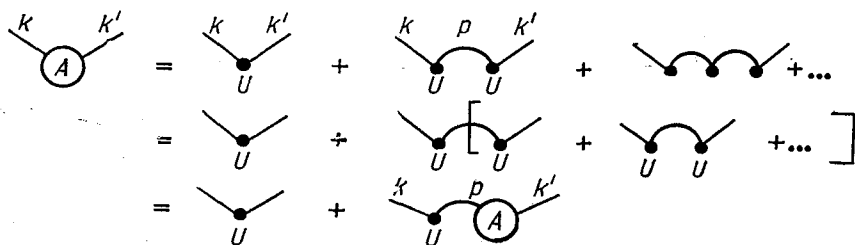


Рис. 1.14. Представление уравнения Липпмана-Швингера диаграммами борновского ряда, где потенциал действует в произвольный момент времени

ципальная разница, заключающаяся в отсутствии u -канальных особенностей (которые должны соответствовать обменному потенциалу майорановского типа), при отсутствии неупругих порогов по s и в том факте, что упругая точка ветвления находится при $s = 0$, поскольку вместо релятивистской кинематики $s = E^2 = k^2 + m^2$, мы используем нерелятивистскую: $s = E = k^2$.

1.14. Эйкональное разложение *

Полезным приближенным методом, который мы будем использовать в гл. 8, является так называемое эйкональное разложение амплитуды. Оно может быть легко выведено в случае потенциального рассеяния, где оно справедливо при энергиях много больших, чем потенциал взаимодействия, т. е. при $E \gg V$ или $k^2 \gg U$ в выражении (1.13.3) (см. [192, 254]).

В этом случае мы ожидаем, что рассеяние назад будет невелико и поэтому можем записать решение уравнения (1.13.3) в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}), \quad (1.14.1)$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ — изменение падающей волны, вызванное потенциалом.

* Здесь и далее раздел, отмеченный звездочкой, может быть опущен при первом чтении.

После подстановки (1.14.1) в (1.13.6) уравнение для $\Phi(\mathbf{r})$ принимает вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = 1 - (1/4\pi) \int \exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - ik(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] U(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') \times \\ \times d\mathbf{r}'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1 - (1/4\pi) \int \exp[ikr''(1 - \cos\theta'')] \times \\ \times U(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') r'' dr'' d(\cos\theta'') d\varphi'', \quad (1.14.2)$$

где введен вектор $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, а θ'' и φ'' — полярные углы вектора \mathbf{r}'' по отношению к направлению \mathbf{r} .

При высоких энергиях можно предположить, что область, в которой произведение $U\Phi$ меняется существенно, много больше длины волны λ , так что интегрирование по $\cos\theta''$ можно выполнить по частям и, пренебрегая вторым членом, получить

$$\Phi \approx 1 - \frac{1}{4\pi} \frac{\exp[ikr''(1 - \cos\theta'')] }{-ikr''} \times \\ \times U(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \Big|_{\cos\theta''=1}^{\cos\theta''=-1} \times \\ \times r'' dr'' d\varphi''. \quad (1.14.3)$$

Член с $\cos\theta'' = -1$ очень быстро осциллирует и поэтому дает малый вклад в интеграл по r'' . Пренебрегая им, получаем, что интеграл отличен от нуля только тогда, когда \mathbf{r}'' параллелен \mathbf{k} , т. е. направлен вдоль оси z , и поэтому (так как $\int d\varphi'' = 2\pi$) выражение (1.14.3) принимает вид

$$\Phi \approx 1 - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(x, y, z'') \Phi(x, y, z'') dz'', \quad (1.14.4)$$

решение которого есть

$$\Phi(x, y, z) = \exp\left(-\frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(x, y, z'') dz''\right). \quad (1.14.5)$$

Поэтому если мы разложим \mathbf{r} (рис. 1.15)

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z,$$

где \mathbf{b} — двумерный вектор, перпендикулярный единичному вектору $\hat{\mathbf{k}}$, то получим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \exp\left[ik\mathbf{r} - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^z U(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z'') dz''\right], \quad (1.14.6)$$

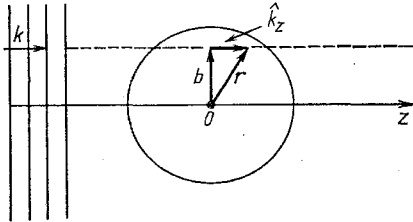


Рис. 1.15. Плоская волна, падающая на потенциал:

\mathbf{b} — двумерный вектор в плоскости прицельного параметра, перпендикулярной z

гоя им, получаем, что интеграл отличен от нуля только тогда, когда \mathbf{r}'' параллелен \mathbf{k} , т. е. направлен вдоль оси z , и поэтому (так как $\int d\varphi'' = 2\pi$) выражение (1.14.3) принимает вид

что при подстановке в (1.13.10) дает

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -(1/4\pi) \int \exp(-ik' r') U(\mathbf{b}' + \hat{\mathbf{k}}z') \times \\ \times \exp(ikr' - (i/2k) \int_{-\infty}^z U(\mathbf{b}' + \hat{\mathbf{k}}z'') dz'') dz' d^2 b'. \quad (1.14.7)$$

Для рассеяния на малые углы $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \hat{\mathbf{k}} \approx 0$ и в этом приближении интегрирование по z' производится от функции, являющейся полным дифференциалом. Это так, потому что

$$\frac{\partial}{\partial z'} \left[\exp\left(-\int_0^{z'} U dz''\right) \right] = - \left[\exp\left(-\int_0^{z'} U dz''\right) \right] U dz'. \quad (1.14.8)$$

И поэтому получаем

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (ik/2\pi) \int \exp(ikb') (1 - \exp[\chi(b')]) d^2 b'. \quad (1.14.9)$$

Здесь введена эйкональная функция, определенная следующим образом:

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z'') dz''. \quad (1.14.9)$$

Для сферически-симметричных потенциалов можно выполнить в (1.14.8) интегрирование по углам, имея в виду, что

$$d^2 b' = b' db' d\varphi;$$

$$Kb' = (2k \sin \theta/2) b' \cos \varphi = (\sqrt{t}) b' \cos \varphi$$

и из [292]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i\kappa \cos \varphi] d\varphi = J_0(\kappa). \quad (1.14.10)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. В результате получаем

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -ik \int_0^{\infty} J_0(b' \sqrt{-t}) (\exp[i\chi(b)] - 1) b' db'. \quad (1.14.11)$$

Если разложить экспоненту по степеням χ , то получим эйкональный ряд

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -ik \sum_n \int_0^{\infty} J_0(b' \sqrt{-t}) \frac{(i\chi)^n}{n!} b' db'. \quad (1.14.12)$$

Эйкональная функция (1.14.9) может быть выражена как двумерный фурье-образ от борновского приближения (1.13.12), т. е.

$$\chi(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi k} \int d^2 k \exp(-ikb) A^B(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \\ = \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(b\sqrt{t}) A^B(s, t) dt. \quad (1.14.13)$$

Обращая (1.14.13) и используя [292]

$$\int_0^{\infty} J_0(xy) J_0(x'y) dy = \delta(x - x'), \quad (1.14.14)$$

получаем

$$A^B(s, t) = k \int_0^{\infty} \chi(b) J_0(b\sqrt{-t}) b db, \quad (1.14.15)$$

которая является первым членом в ряду (1.14.12).

Таким образом, первый член в эйкональном ряду совпадает с первым членом в борновском ряду при высоких энергиях (1.13.26). Соотношение между членами высших порядков в этих двух рядах более сложно (см. [254]), так как для действительных потенциалов эйкональный ряд содержит попеременно действительные и мнимые члены, в то время как в общем случае все члены борновского ряда комплексны. В пределе же больших k и фиксированных K эти два ряда совпадают. Поэтому эйкональный ряд можно рассматривать как приближение к сумме лестничных диаграмм (см. рис. 1.14), где каждое последовательное перерассеяние происходит только на малый угол. В дальнейшем мы увидим, что это очень полезное приближение (см. разд. 8.4).

2

КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ УГЛОВОГО МОМЕНТА

2.1. Введение

В 1959—1960 гг. Редже [339, 340] была высказана принципиально новая идея, относящаяся к теории рассеяния. Эта идея заключалась в важности рассмотрения аналитического продолжения амплитуд рассеяния в комплексную плоскость углового момента.

На первый взгляд эта идея кажется довольно бессмысленной, так как в квантовой механике угловой момент системы квантуется и принимает только целые положительные значения* (или только полуцелые, в случае, если система имеет полуцелый спин). Поэтому с самого начала поясним процедуру аналитического продолжения.

Квантование углового момента отражает в основном кинематику процесса, так как является следствием инвариантности системы при пространственных поворотах, и поэтому должно мало влиять на силы, которые определяют природу взаимодействия. В связи с этим решение задач нерелятивистского потенциального рассеяния обычно начинают с разделения уравнения Шредингера на радиальную и угловую части. В дальнейшем достаточно рассмотреть только радиальное уравнение (подробнее см. ниже, разд. 3.3)

$$d^2\Phi_l(r)/dr^2 + (k^2 - l(l+1)/r^2 - U(r)) \Phi_l(r) = 0, \quad (2.1.1)$$

* Здесь и в дальнейшем угловые моменты будут измеряться в единицах \hbar .

в которое входит потенциал взаимодействия и, следовательно, содержит в себе всю динамику взаимодействия. Причем угловой момент l входит в это уравнение просто как параметр.

Обычно уравнение (2.1.1) можно разрешить только при тех значениях l , которые имеют физический смысл. Однако нет никаких причин, вследствие которых нельзя было бы рассмотреть нефизические значения l : нецелые или даже комплексные. В следующей главе мы покажем, в чем заключается смысл и какова польза от рассмотрения нефизических угловых моментов в задачах нерелятивистского потенциального рассеяния, однако стоит сразу подчеркнуть, что основные идеи имеют значительно большую общность и их сфера применимости отнюдь не ограничивается задачами потенциального рассеяния. Наиболее важными и полезными они оказались в области физики элементарных частиц.

Эту главу мы начнем с того, что определим парциальные амплитуды и обсудим некоторые их свойства, а затем рассмотрим их аналитическое продолжение на комплексные значения углового момента. Мы покажем, что в комплексной плоскости углового момента возникают сингулярности, которые определяют асимптотическое поведение амплитуды рассеяния. Исходя из этого сразу определится процедура вычитания в дисперсионных соотношениях. Будет также показано, что движущиеся полюса в плоскости углового момента связаны с составными частицами (или резонансами), так как асимптотическое поведение амплитуды рассеяния определяется состояниями, которыми могут обмениваться сталкивающиеся частицы. Этот результат является одной из наиболее важных критических проверок применимости идей Редже к физике элементарных частиц. Применение идей Редже в теории элементарных частиц составляет основное содержание остальной части книги. Кроме того, на основании этого результата мы в дальнейшем введем в рассмотрение «гипотезу бутстрапа», согласно которой все сильновзаимодействующие частицы могут возникать как следствие условий унитарности и аналитичности амплитуд рассеяния.

2.2. Парциальные амплитуды

В этой главе будем рассматривать только процессы рассеяния $2 \rightarrow 2$, когда две частицы сталкиваются и переходят снова в две частицы. Ограничимся бесспиновым случаем, и поэтому полный угловой момент начального состояния совпадает с относительным орбитальным угловым моментом сталкивающихся частиц. Так как угловой момент — сохраняющаяся величина, то орбитальный угловой момент конечного состояния должен быть таким же, как и начального состояния. Часто удобно рассматривать амплитуду рассеяния для каждого состояния с определенным угловым моментом отдельно. Такую амплитуду будем далее называть парциальной амплитудой рассеяния. Однако обычно начальное состояние не является собственным состоянием оператора углового момента, а представляет собой суперпозицию состояний с различными угловыми моментами, и поэтому пол-

ная амплитуда рассеяния дается суммой различных парциальных амплитуд.

Известно, что для бесспиновых частиц угловая часть волновой функции, описывающей состояние с заданным орбитальным угловым моментом l в s -канале, дается функцией Лежандра первого рода $P_l(z_s)$ [см. (A.3)]. В системе центра масс реакции, которую мы в дальнейшем будем использовать, $z_s \equiv \cos \theta_s$ дается выражением (1.7.17). Поэтому при фиксированном квадрате выходной энергии s угол рассеяния θ_s определяется только величиной t [или u с помощью (1.7.21)] и, следовательно, $t = t(z_s, s)$.

Таким образом, в системе центра масс парциальная амплитуда рассеяния с данным угловым моментом l в s -канале определяется через полную амплитуду рассеяния следующим образом:

$$A_l(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) A(s, t(z_s, s)), \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

В определении (2.2.1) для удобства введен множитель $(16\pi)^{-1}$; он позволит упростить вид условия унитарности (см. ниже). Если использовать соотношение ортогональности (A.20), то можно обратиться (2.2.1):

$$A(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(z_s). \quad (2.2.2)$$

Выражение (2.2.2) называется «разложением по парциальным волнам» полной амплитуды $A(s, t)$.

Выражение (2.2.2) имеет одно очень важное достоинство: при малых s можно ожидать, что только несколько парциальных волн дают вклад в разложение (2.2.2). Это можно пояснить следующим образом. Если предположить, что частица движется классически и имеет угловой момент $l > q_s R$ (q_s — импульс частицы, R — радиус действия сил), то она должна пролететь мимо мишени и, следовательно, не должна испытать рассеяния. Таким образом, если сильные взаимодействия, грубо говоря, характеризуются радиусом действия сил порядка 1 Фм, то для того чтобы только S -волновая амплитуда давала вклад в правую часть (2.2.2), необходимо, чтобы $q_s \lesssim 2000$ МэВ/с, для S - и P -волновых амплитуд $q_s \lesssim 400$ МэВ/с и т. д.

Другим достоинством разложения (2.2.2) является то, что каждая парциальная волна удовлетворяет своему собственному условию унитарности, которое никак не связано с условиями унитарности для других парциальных волн. Это можно легко вывести, если подставить разложение (2.2.2) в двухчастичное условие унитарности (1.5.7)

$$\begin{aligned} & 16\pi \sum_l (2l+1) (A_l^{i\bar{j}}(s_+) - A_l^{i\bar{j}}(s_-)) P_l(z_s) = \\ & = \frac{iq_{sn}}{16\pi^2 \sqrt{s}} (16\pi)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dz' \sum_{l'} (2l'+1) (A_{l'}^{i\bar{n}}(s_+) P_{l'}(z') \times \\ & \quad \times \sum_{l''} (2l''+1) A_{l''}^{n\bar{j}}(s_-) P_{l''}(z''), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где $z' \equiv \cos \theta_{in}$ — косинус угла между направлениями движения частиц в начальном состоянии i и промежуточном состоянии n ; $z'' \equiv \cos \theta_{nf}$ — косинус угла соответственно для промежуточного и конечного состояний, и наконец, $z_s = \cos \theta_{if}$ (рис.2.1). Теорема сложения косинусов дает

$$\cos \theta_{in} = \cos \theta_{if} \cos \theta_{fn} + \sin \theta_{if} \sin \theta_{fn} \cos \varphi, \quad (2.2.4)$$

где φ — угол между плоскостями рассеяния реакций $i \rightarrow n$ и $n \rightarrow f$. Теорема сложения для функций Лежандра [см. т. 1 с. 168 [161]] приводит к

$$P_l(z'') = P_l(z_s) P_l(z') + 2 \sum_{m=1}^l (-1)^m \frac{\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+m+1)} P_l^m(z_s) P_l^m(z') \cos m\varphi, \quad (2.2.5)$$

где $P_l^m(z)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода. Условие ортогональности (A.20) (см. [161], т. 1, с. 171) дает

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dz' P_{l'}(z') P_{l''}(z'') = \delta_{l'l''} \frac{4\pi}{2l'+1} P_{l'}(z_s) \quad (2.2.6)$$

и в результате (2.2.3) переходит в

$$A_i^{ff}(s_+) - A_i^{ff}(s_-) = (4iq_{sn}/\sqrt{s}) A_i^{in}(s_+) A_i^{nf}(s_-). \quad (2.2.7)$$

Таким образом, в условие унитарности включаются только состояния с угловым моментом l . Отметим, что множитель 16π в (2.2.7) отсутствует из-за соответствующего определения парциальных амплитуд в (2.2.1).

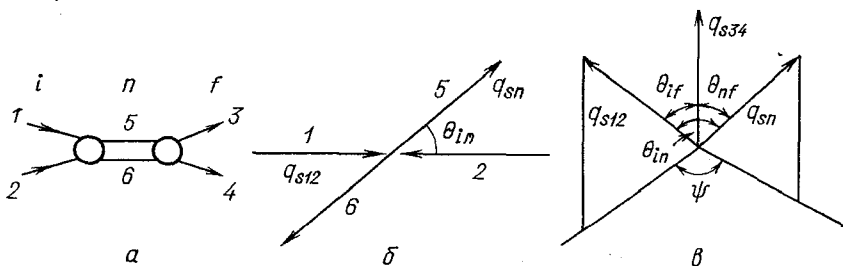


Рис. 2.1. *a* — Двухчастичное промежуточное состояние $|n\rangle = 5+6$ в реакции $1+2 \rightarrow 3+4$. *б* — Угол рассеяния θ_{in} в реакции $1+2 \rightarrow 5+6$ в системе центра масс реакции. *в* — Углы рассеяния θ_{in} , θ_{nf} и θ_{if} . Угол Φ — азимутальный угол, задающий направление вектора q_{s34} и равный углу между плоскостями (q_{s12}, q_{s34}) и (q_{s34}, q_{sn})

В случае упругого рассеяния, когда в начальном, промежуточном и конечном состояниях находятся одни и те же частицы, выражение (2.2.7), если вспомнить (1.10.3), переходит в

$$\text{Im} \{A_i^{ii}(s)\} = (2q_{si}/\sqrt{s}) |A_i^{ii}(s)|^2 = \rho^i(s) |A_i^{ii}(s)|^2, \quad (2.2.8)$$

где

$$\rho^i(s) \equiv 2q_{si}/\sqrt{s} \quad (2.2.9)$$

является фазовым фактором парциальной волны для состояния i . Так как $\rho^i(s) \leq 1$ при всех s , то из (2.2.8) следует, что $0 \leq \text{Im} \{A_i^{ii}\} \leq 1$.

Очевидно, что решение (2.2.8) следует искать в виде

$$A_i^{ii}(s) = \frac{\exp [2i\delta_i(s)] - 1}{2i\rho^i(s)} = \frac{\exp [i\delta_i(s)] \sin \delta_i(s)}{\rho^i(s)} = \frac{1}{\rho^i(s)} \frac{1}{\text{ctg} \delta_i(s) - i}, \quad (2.2.10)$$

Это выражение служит определением фазы $\delta_i(s)$, которая является действительной функцией. Амплитуда рассеяния вплоть до неупругого порога полностью характеризуется этой функцией. Фазы можно найти прямо из экспериментальных данных, анализируя угловое распределение $d\sigma/dt$, по меньшей мере для низших парциальных волн при малых s . Однако настоящий фазовый анализ сильно затрудняется наличием у частиц спина (см. гл. 4), а также неупругостью и представляет собой довольно трудную задачу.

В общем случае, когда имеется много открытых каналов, выражение (2.2.7) переходит в

$$\text{Im} \{A_i^{ii}(s)\} = \rho^i(s) |A_i^{ii}(s)|^2 + \sum_{n \neq i} \rho^n A_i^{in}(s_+) A_i^{ni}(s_-) + \text{каналы с тремя и более частицами}, \quad (2.2.11)$$

причем

$$0 \leq |A_i^{ii}|^2 \leq \text{Im} \{A_i^{ii}\} \leq 1. \quad (2.2.12)$$

Учет неупругих каналов может быть произведен и прямо в (2.2.10), если разрешить фазам δ_i быть комплексными, $\delta_i \rightarrow \delta_i^R + i\delta_i^I$. Тогда

$$A_i^{ii}(s) = \frac{\eta_i \exp (2i\delta_i^R) - 1}{2i\rho^i(s)}, \quad \text{где } \eta_i \equiv \exp (-2\delta_i^I), \quad (2.2.13)$$

причем η_i имеет смысл фактора неупругости, $0 \leq \eta_i \leq 1$. Ясно, что в случае упругого рассеяния $\eta_i = 1$.

В случае, когда в некоторой парциальной волне имеется резонанс при $s = M_r^2$ (см., например, [55, с. 398]), то

$$\delta_i^R(s) \xrightarrow{s \rightarrow M_r^2} (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n - \text{целое число}).$$

Тогда, если мы положим $\text{tg} \delta_i(s) \approx M_r \Gamma / (M_r^2 - s)$ при $s \approx M_r^2$ и подставим в (2.2.10), то получим выражение

$$A_i^{ii}(s) \approx \frac{1}{\rho^i(s)} \frac{M_r \Gamma}{M_r^2 - s - iM_r \Gamma} \approx \frac{1}{\rho^i(s)} \frac{\Gamma/2}{M_r - E - i\Gamma/2}, \quad \text{где } E \equiv \sqrt{s}. \quad (2.2.14)$$

Эта формула, часто используемая в ядерной физике, представляет собой выражение для упругого брейт-вигнеровского резонанса с массой M_r и шириной Γ . В случае потенциального рассеяния условие $\delta_i \rightarrow (2n+1)\pi/2$ очень похоже на условие образования связанно-

го состояния с единственной поправкой на то, что резонанс возникает при положительной энергии и поэтому может распадаться (см., например, [355, с. 128]). Таким образом, можно рассматривать резонансы как нестабильные составные частицы, которые похожи на связанные состояния. В том случае, когда имеется неупругость, резонанс может распадаться в один из нескольких возможных каналов f . В этой ситуации амплитуда распада будет иметь следующий вид:

$$A_l^{if}(s) = \frac{1}{\rho_{if}} \frac{M_r (\Gamma_i \Gamma_f)^{1/2}}{M_r^2 - s - iM_r \Gamma}; \quad \rho_{if} = \left(\frac{2q_i q_f}{s} \right)^{1/2}, \quad (2.2.15)$$

где Γ_f — парциальная ширина распада в данный канал f , а $\Gamma \equiv \sum_f \Gamma_f$ — полная ширина распада. Стоит отметить важный в дальнейшем факт, что вычеты в полюсе амплитуды (2.2.15) факторизуются. С помощью анализа парциальных волн было открыто много подобных резонансов (см., например, [332]).

Так как для всех l $P_l(z=1) = 1$, то можно сформулировать оптическую теорему (1.9.5) используя (2.2.2), на языке парциальных амплитуд

$$\sigma_{12}^{tot}(s) = \frac{8\pi}{q_{s12} \sqrt{s}} \sum_l (2l+1) \text{Im} \{A_l^{ii}(s)\}. \quad (2.2.16)$$

Если подставить (2.2.2) в (1.8.13) и с помощью (A.20) совершить интегрирование по угловым переменным, то для сечения упругого рассеяния $1+2 \rightarrow 1+2$ получается

$$\sigma_{12}^{el}(s) = \frac{16\pi}{s} \sum_l (2l+1) |A_l^{ii}(s)|^2. \quad (2.2.17)$$

С помощью подстановки (2.2.8) в (2.2.16) можно убедиться, что ниже неупругого порога $\sigma_{12}^{tot} = \sigma_{12}^{el}$, как и должно быть.

Совершенно очевидно, что можно сделать полностью аналогичное разложение по парциальным волнам в t -канале, определяя парциальные волны как

$$A_l(t) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_t P_l(z_t) A(s(z_t, t), t), \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (2.2.18)$$

Обратив это выражение, получим, что разложение по парциальным волнам имеет вид

$$A(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(t) P_l(z_t). \quad (2.2.19)$$

В следующем разделе мы рассмотрим связь между (2.2.19) и рассеянием в s -канале, которое связано с рассеянием в t -канале соотношением кроссинга.

2.3. Представление Грибова—Фруассара

Таким образом, разложение (2.2.19) является представлением амплитуды рассеяния во всей физической области t -канала. Так как $A_l(t)$ содержит как t -канальные пороги, так и полюса, отвечающие резонансам, то амплитуда, полученная с помощью (2.2.19), также содержит все эти t -канальные сингулярности. Однако зависимость этих сингулярностей от s полностью заключены в полиномах Лежандра, которые являются целыми функциями z_t и, следовательно, переменной s , когда t фиксирована. Поэтому совершенно очевидно, что это представление должно нарушаться вне физической области t -канала $-1 \leq z_t \leq +1$, например, если мы сделаем аналитическое продол-

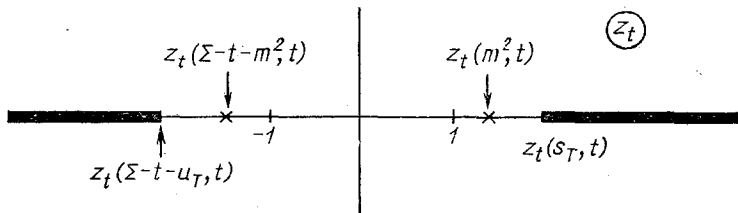


Рис. 2.2. Сингулярности плоскости z_t при фиксированном $t (> t_r)$. Вне физической области ($-1 \leq z_t \leq 1$) имеются: s -канальные полюса и точки ветвления при $z_t > 1$ и u -канальные сингулярности при $z_t < -1$ (ср. рис. 1.5)

жение к ближайшей сингулярности по s (или u), где ряд начинает расходиться. Поясним сказанное простым примером. Известно, что полюс можно представить как

$$(m^2 - s)^{-1} = m^{-2} [1 + s/m^2 + (s/m^2)^2 + \dots].$$

Очевидно, что это представление нарушается, когда s становится больше m^2 , так как ряд расходится начиная с $s = m^2$.

На рис. 2.2 показаны ближайшие к t -каналу s - и u -канальные полюса, а также точки ветвления в плоскости z_t . Они всегда находятся вне физической области t -канала и, следовательно, представление (2.2.19) справедливо в довольно малой области плоскости Мандельштама (см. рис. 1.5) вне физической области t -канала. Это является большим препятствием для использования соотношений кроссинга. Например, если при малых t доминирует резонанс со спином σ , то хорошей аппроксимацией амплитуды рассеяния является выражение

$$A(s, t) \approx 16\pi (2\sigma + 1) P_\sigma(z_t) M_r \Gamma / (M_r^2 - t - iM_r \Gamma) \quad (2.3.1)$$

[ср. (2.2.14) при $\rho^i(s) \rightarrow 1$]. Однако, хотя это представление удовлетворительно в физической области t -канала, его нельзя использовать в физической области s -канала ($t \leq 0$), потому что мы знаем, что ряд (2.2.19), который аппроксимируется с помощью (2.3.1), начнет расходиться еще до того, как мы попадем в физическую область s -канала (см. рис. 1.5).

Для того чтобы получить выражение для парциальных амплитуд, которое бы включало сингулярности по s и u и, следовательно, было

бы достоверным по всей плоскости Мандельштама, можно использовать дисперсионные соотношения (1.10.7). Так как из (1.7.19) и (1.7.21) следует, что

$$\left. \begin{aligned} s' - s &= 2q_{t13} q_{t24} (z_i' - z_i) \\ u' - u &= -2q_{t13} q_{t24} (z_i' - z_i) \end{aligned} \right\}, \quad (2.3.2)$$

то можно переписать (1.10.7) в виде

$$\begin{aligned} A(s, t) &= \frac{g_s(t)}{2q_{t13} q_{t24} (z_t(m^2, t) - z_t(s, t))} \\ &\quad - \frac{g_u(t)}{2q_{t13} q_{t24} (z_t(\Sigma - t - m^2, t) - z_t(\Sigma - t - s, t))} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{z_t(s_T, t)}^{\infty} dz_i' \frac{D_s(s', t)}{z_i' - z_t} + \frac{1}{\pi} \int_{z_t(u_T, t)}^{\infty} dz_i' \frac{D_u(u', t)}{z_i' - z_t}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Причем отметим, что вполне может оказаться необходимым сделать в интегралах вычитания. Подставив (2.3.3) в (2.2.18) и проинтегрировав по z_t с помощью соотношения Неймана (А.14) при условии, что порядок интегрирования можно изменить, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} A_l(t) &= \frac{1}{16\pi} \frac{g_s(t)}{2q_{t13} q_{t24}} Q_l(z_t(m^2, t)) + \frac{1}{16\pi} \frac{g_u(t)}{2q_{t13} q_{t24}} \times \\ &\times Q_l(z_t(\Sigma - t - m^2, t)) + \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_t(s_T, t)}^{\infty} D_s(s', t) Q_l(z_i') dz_i' + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_t(u_T, t)}^{\infty} D_u(u', t) Q_l(z_i') dz_i', \quad l=0, 1, 2 \dots \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Эта формула называется представлением Грибова—Фруассара [202, 178] и полностью эквивалентна (2.2.18), конечно, при условии, что дисперсионные соотношения справедливы. Далее, стоит заметить, что в (2.3.4) и (2.2.18) входят совершенно различные области интегрирования по z_i и, следовательно, по s . Так как в (2.2.18) интегрирование проводится по конечному отрезку, то парциальные амплитуды всегда однозначно определяются данным способом, во всяком случае в физической области t -канала. В (2.3.4) интегрирование проводится до бесконечности, и поэтому встает вопрос о сходимости интегралов. Интегралы должны сходиться, ибо в противном случае нельзя было бы изменить порядок интегрирования при выводе формулы (2.3.4). Из (А.27) $Q_l(z) \sim z^{-l-1}$ и если D_s (или D_u) $\sim z^N$, то (2.3.4) определено только для $l > N$. Для того чтобы найти парциальные волны с $l \leq N$, необходимо знать вычитательные функции, подобные (1.10.10).

2.4. Ограничение Фруассара

Фруассар показал [178], что если для амплитуды справедливо представление Мандельштама, то требование s -канальной унитарности накладывает ограничение на асимптотическое поведение амплитуды рассеяния в физической области s -канала ($t \leq 0$) и, следовательно, ограничивает число необходимых вычитаний. Это ограничение может быть получено следующим образом.

Известно, что [см. (A.31)]

$$Q_l(z) \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} l^{-1/2} \exp [-(l+1/2) \zeta(z)];$$

$$\zeta(z) \equiv \ln [z + \sqrt{z^2 - 1}], \quad (2.4.1)$$

поэтому представление Грибова—Фруассара (2.3.4) для s -канальных парциальных волн дает

$$A_l(s) \underset{l, s \rightarrow \infty}{\rightarrow} f(s) \exp [-l\zeta(z_0)], \quad (2.4.2)$$

где z_0 отвечает ближайшей сингулярности по t амплитуды $A(s, t)$ (это может быть порог или полюс, отвечающий связанному состоянию); $f(s)$ — некоторая функция s . Это означает, что все парциальные волны s

$$l \gg l_M \equiv \zeta^{-1}(z_0) \quad (2.4.3)$$

будут очень малыми. В самом деле, мы можем определить радиус действия сил (см. разд. 2.2) из условия

$$Rq_s = l_M, \quad (2.4.4)$$

и тогда частицы, падающие на мишень с прицельными параметрами $b > R$, будут пролетать мимо мишени, т. е., говоря более точно, они будут рассеиваться значительно более слабо, чем частицы с $b < R$. Таким образом, для нуклон-нуклонного рассеяния, в котором ближайшей сингулярностью по t является пионный полюс, радиус действия сил равен [ср. (1.7.22) при $t = m_\pi^2$]

$$z_0 = 1 + \frac{m_\pi^2}{2q_s^2}; \quad R = \frac{1}{q_s \zeta(z_0)} \underset{s \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{m_\pi} = \frac{\hbar}{m_\pi c}, \quad (2.4.5)$$

и, следовательно, эффективный размер нуклона равен комптоновской длине волны пиона, как это и ожидалось из соотношения неопределенности.

Следовательно, из (2.4.2) получается, что

$$A_l(s) \underset{l, s \rightarrow \infty}{\rightarrow} f(s) \exp(-l/Rq_s) \rightarrow \exp\left(-\frac{2l}{R\sqrt{s}} + \ln f(s)\right), \quad (2.4.6)$$

так как $q_s \rightarrow \sqrt{s}/2$ и поэтому при больших s мы можем ожидать существенное рассеяние для парциальных волн s

$$l < \sqrt{s} R \ln f(s) \rightarrow c\sqrt{s} \ln s, \quad (2.4.7)$$

где c — некоторая константа. Таким образом, бесконечную сумму в (2.2.2) можно оборвать и написать вместо нее следующее:

$$A(s, t) \approx 16\pi \sum_{l=0}^{c\sqrt{s} \ln s} (2l+1) A_l(s) P_l(z_s). \quad (2.4.8)$$

Используя ограничение (2.2.12) и свойство, что $|P_l(z)| \leq 1$ для $-1 \leq z \leq 1$, мы имеем (после суммирования арифметической прогрессии)

$$|A(s, t)| \leq 16\pi \sum_{l=0}^{c\sqrt{s} \ln s} (2l+1) \leq \text{const } s \ln^2 s, \quad s \rightarrow \infty, t \leq 0. \quad (2.4.9)$$

Вспоминая оптическую теорему (1.9.5), получаем

$$\sigma^{tot}(s) \leq \text{const } \ln^2 s. \quad (2.4.10)$$

Это ограничение и называется ограничением Фруассара. Более строго в рамках квантовой теории поля оно было доказано Мартеном [302, 303].

Ограничение (2.4.9) также приводит к важному следствию, что при фиксированном $t \leq 0$ $D_s(s, t), D_u(u, t) \leq \text{const } s \ln^2 s, s \rightarrow \infty$ и поэтому $N \leq 1$ (см. конец предыдущего раздела), т. е. представление Грибова—Фруассара (2.3.4) определено при всех $l > 1$.

С помощью (2.4.6) можно определить более строго, чем раньше, область сходимости ряда по парциальным волнам (2.2.2). Так как мы знаем асимптотическое поведение полиномов $P_l(z)$ [см. (A.29)], то, используя (2.4.6), можно легко получить, что ряд (2.2.2) сходится, если

$$|\text{Im} \{\theta\}| \leq \xi(z_0) = \cosh^{-1}(z_0). \quad (2.4.11)$$

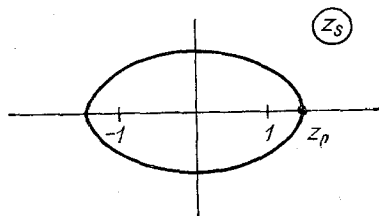


Рис. 2.3. Эллипс Лемана-Мартена:

он задает область сходимости разложения по парциальным волнам в s -канале в комплексной плоскости z_s . Эта область определяется сингулярностью, ближайшей к s -каналу и лежащей в точке $z_s = z_0$.

Это условие соответствует точкам, лежащим внутри эллипса в комплексной плоскости z_s с фокусами в точках $z_s = \pm 1$ и главной полуосью z_0 (рис. 2.3). В литературе этот эллипс обычно называется малым эллипсом Лемана—Мартена [281, 303].

2.5. Сигнатура

В выражении (2.3.4) парциальные амплитуды $A_l(t)$ определяются с помощью интегралов от скачков полной амплитуды на правом (s -канал) и левом (u -канал) разрезах в плоскости z_t (см. рис. 2.2). Можно легко получить асимптотическое поведение этих интегралов при $l \rightarrow \infty$, исходя из (2.4.2). Так как правый разрез в плоскости z_t на-

чинается всегда правее единицы, то $\zeta(z)$ — действительная и положительно определенная функция [см. (2.4.1)] и для $t > t_T$ имеем

$$A_l^{RH} \rightarrow f(f) \exp(-l\zeta(z_0)), \quad z_0 \equiv z_l(s_0, t). \quad (2.5.1)$$

Вдоль левого разреза $z_l < -1$

$$\zeta(z) = \zeta(|z|) + i\pi, \quad A_l^{LH} \rightarrow f(t) \exp[-l\zeta(|z_0|)] \exp(-i\pi l) \quad (2.5.2)$$

и когда $l \rightarrow i\infty$ амплитуда неограниченно растет. В разд. 2.7 мы должны будем выразить амплитуды рассеяния в виде контурного интеграла в комплексной плоскости l и, естественно, эта расходимость мешала бы это сделать.

Для того чтобы обойти эту трудность, введем парциальные амплитуды с определенной сигнатурой $\xi = \pm 1$ следующим образом (для простоты пренебрежем полюсными членами):

$$\begin{aligned} A_l^\xi(t) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} D_s(s', t) Q_l(z_i') dz_i' + \xi \frac{1}{16\pi^2} \times \\ &\times \int_{z_T}^{\infty} D_u(s', t) Q_l(z_i') dz_i' = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} (D_s(s', t) + \xi D_u(s', t)) \times \\ &\times Q_l(z_i') dz_i' \equiv \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} D_s^\xi(s', t) Q_l(z_i') dz_i', \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

где $D_s^\xi(s, t) = D_s(s, t) + \xi D_u(s, t)$, а оба интеграла берутся вдоль положительной оси z_i (при $t > t_T$). Амплитуды с сигнатурой $\xi = +1$ мы будем называть амплитудами с четной сигнатурой, а амплитуды с $\xi = -1$ — амплитудами с нечетной сигнатурой. Вследствие того что $Q_l(z)$ удовлетворяет соотношению отражения (A.17), совершенно очевидно из сравнения с (2.3.4), что

$$\left. \begin{aligned} A_l^+(t) &= A_l(t) \quad \text{для } l = 0, 2, 4 \dots \\ A_l^-(t) &= A_l(t) \quad \text{для } l = 1, 3, 5 \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5.4)$$

Приведенные выше целые значения l являются физическими и поэтому в дальнейшем мы их будем называть «точками своей сигнатуры» амплитуд $A_l^\xi(t)$ (т. е. четные l для четной сигнатуры, и наоборот), а целые нефизические значения (т. е. нечетные l для четной сигнатуры, и наоборот) назовем «точками чужой сигнатуры». Из определения (2.5.3) следует

$$A_l^\xi(t) \rightarrow f(t) \exp(-l\zeta(z_0)) \quad \text{при } \xi = \pm 1. \quad (2.5.5)$$

Мы можем просуммировать ряд по парциальным амплитудам с определенной четностью

$$A^\xi(s, t) \equiv 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l^\xi(t) P_l(z_l). \quad (2.5.6)$$

Четная часть $A^+(s, t)$ в плоскости z_t равна четной части $A(s, t)$, а нечетная часть $A^-(s, t)$ равна нечетной части $A(s, t)$. Эти амплитуды удовлетворяют также и дисперсионным соотношениям (полусные члены снова опущены)

$$A^{\xi}(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} ds' \frac{D_s(s', t)}{s' - s} + \xi \frac{1}{\pi} \int_{u_T}^{\infty} \frac{D_u(u', t)}{u' - s} du'; & (2.5.7) \\ \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s^{\xi}(s', t)}{s' - s} ds', & (2.5.8) \end{cases}$$

где s заменено на u в знаменателе второго члена вследствие замены $z_t \rightarrow -z_t$ в соответствующем члене (2.5.3). Представление Мандельштама для такой амплитуды легко получить из подстановки выражений (1.11.4), (1.11.5) в (2.5.7); сделав при этом некоторые тривиальные замены переменных

$$A^{\xi}(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{st}(s, t'') + \xi \rho_{tu}(s', t'')}{(s' - s)(t'' - t)} ds' dt'' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s', t'') + \xi \rho_{su}(u'', s')}{(s' - s)(u'' - u)} ds' du''. \quad (2.5.9)$$

Вследствие того что мы взяли амплитуды с определенной сигнатурой в t -канале, произошла потеря симметрии по s, t, u . Конечно, рассмотренные нами амплитуды с определенной сигнатурой являются нефизическими, так как в определении (2.5.3) уже включено изменение знака z_t . Однако из выражения (2.5.6) с помощью (2.5.4) и (A.11) можно получить физические амплитуды

$$A(s, t) = (1/2) [A^+(z_t, t) + A^+(-z_t, t) + A^-(z_t, t) - A^-(-z_t, t)]. \quad (2.5.10)$$

В дальнейшем при построении аналитического продолжения по l мы всегда будем использовать амплитуды $A^{\xi}(s, t)$, а не $A(s, t)$.

В случае кинематики с равными массами выражение для z_t дается (1.7.22) и полюс находится в точке $t = t_T \equiv 4m^2$. Тогда, вспоминая о (2.5.1), мы можем ввести для $t < t_T$ амплитуды

$$\hat{A}_l^{\xi}(t) \equiv \exp(i\pi l) A_l^{\xi}(t), \quad (2.5.11)$$

которые имеют хорошее асимптотическое поведение, когда $l \rightarrow \infty$, в отличие от самих $A_l^{\xi}(t)$. В следующем разделе мы найдем, что пороговое поведение амплитуд $A_l^{\xi}(t) \sim (q^2)^l \sim (t - 4m^2)^l$ и требуемый фактор (2.5.11) автоматически включается.

2.6. Сингулярности парциальных амплитуд и дисперсионных соотношений *

Для того чтобы получить парциальные амплитуды с определенной сигнатурой в физической области t -канала, можно воспользоваться выражениями (2.2.18) и (2.5.6) и тогда будем иметь

$$A_l^{\xi}(t) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A^{\xi}(s, t) P_l(z_l) dz_l, \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad (2.6.1)$$

либо, что полностью эквивалентно, выражениями (2.5.3) и (2.5.8)

$$A_l^{\xi}(t) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} D_s^{\xi}(s, t) Q_l(z_l) dz_l, \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (2.6.2)$$

Так как $2D_s^{\xi}(s, t)$ — скачок амплитуды $A^{\xi}(s, t)$ на разрезах в плоскости z_l , а с другой стороны, как следует из (A.15), $-\pi P_l(z)$ — скачок функции $Q_l(z)$, то тогда мы можем объединить формулы (2.6.1) и (2.6.2), написав следующее выражение:

$$A_l^{\xi}(t) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{C_1 \text{ или } C_2} A^{\xi}(s, t) Q_l(z_l) dz_l, \quad (2.6.3)$$

где контур интегрирования охватывает либо разрез функции $Q_l(z_l)$, либо разрез амплитуды $A^{\xi}(s, t)$, как показано на рис. 2.4.

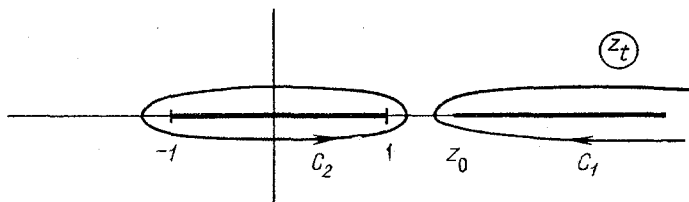


Рис. 2.4. Контур интегрирования в комплексной плоскости z_l , используемый в (2.6.3)

Вследствие того что интегрирование в (2.6.1) идет по конечной области s при фиксированном t , совершенно очевидно, что амплитуда $A_l^{\xi}(t)$ будет иметь все t -канальные пороговые точки ветвления, содержащиеся в амплитуде $A^{\xi}(s, t)$ и возникающие при фиксированном t . В выражении (2.6.2) эти точки ветвления содержатся в функции $D_l^{\xi}(s, t)$. Все они, конечно, генерируются условиями унитарности, что подробно обсуждалось в гл. 1.

Однако в парциальных амплитудах могут возникнуть добавочные сингулярности, не содержащиеся в полной амплитуде. Они возникают при обращении в нуль трехмерного импульса, который содержится в выражении для z_t (1.7.19). Таким образом, в области порога упругой реакции $t \rightarrow (m_1 + m_3)^2$, $\lambda(t, m_1^2, m_3^2) \rightarrow 0$, $q_{t13} \rightarrow 0$ и поэтому $z_t \rightarrow \infty$.

Используя асимптотическое поведение функций Лежандра (A.27) $Q_l(z_i) \sim (z_i)^{-l-1}$, получаем

$$\int_{z_T}^{\infty} Q_l(z_i) dz_i \sim [-t - (m_1 + m_3)^2]^{l/2}. \quad (2.6.4)$$

Подставляя это выражение в (2.6.2), имеем

$$A_l^{\xi}(t) \sim [t - (m_1 + m_3)^2]^{l/2}. \quad (2.6.5)$$

Кроме того, импульс q_{t13} обращается в нуль на так называемом псевдопороге $t \rightarrow (m_1 - m_3)^2$, а $q_{t24} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow (m_2 \pm m_4)^2$. Поэтому, если мы введем определение

$$T_{ij}^{\pm}(t) \equiv [t - (m_i \pm m_j)^2]^{l/2}, \quad (2.6.6)$$

то

$$A_l^{\xi}(t) \sim T_{13}^{+}(t) T_{13}^{-}(t) T_{24}^{+}(t) T_{24}^{-}(t)^l. \quad (2.6.7)$$

Если пороги начального и конечного состояний совпадают, т. е. если $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$, то в этом случае возникает кинематический нуль порядка l на пороге, хотя с другой стороны для нечетных значений l имеются корневые точки ветвления. Это существенно усложняет дело в случае, если мы хотим делать аналитическое продолжение для нецелых значений l , так как из формулы (2.6.7) следует, что всегда имеются кинематические точки ветвления. Итак, если мы пожелаем написать дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд, производя интегрирование только по динамическим сингулярностям, как это мы делали для полной амплитуды в выражении (1.10.7), мы должны первым делом устранить кинематические сингулярности с помощью введения «приведенных» парциальных амплитуд

$$B_l^{\xi}(t) \equiv A_l^{\xi}(t) (q_{t13} q_{t24})^{-l}, \quad (2.6.8)$$

в которых пороговые сингулярности по t содержат только динамические пороговые точки ветвления. Ясно, что приведенная амплитуда $B_l^{\xi}(t)$ вещественно аналитична, если, конечно, амплитуда $A_l^{\xi}(s, t)$ сама является таковой (см. разд. 1.5).

При положительных t скачок амплитуды $B_l^{\xi}(t)$ на правом разрезе может быть получен, если подставить (2.5.9) в (2.6.2) с учетом (2.6.8), например

$$\text{Im} \{B_l^{\xi}(t)\}_{RH} = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_0}^{\infty} (\rho_{st}(s', t) + \xi \rho_{tu}(s', t)) Q_l(z_i) (q_{t13} q_{t24})^{-l} dz_i'. \quad (2.6.9)$$

В дополнение к этим порогам амплитуда $A_l^{\xi}(s, t)$ может также иметь сингулярности при фиксированном t из-за полюсов, отвечающих связанным состояниям и лежащих ниже порога реакции. Таким образом, связанное состояние в t -канале с массой M и спином j дает вклад в амплитуду, равный

$$A_l^{\xi}(s, t) = \frac{(2j+1) g_l^2 (q_{t13} q_{t24})^j}{M^2 - t} P_j(z_i), \quad (2.6.10)$$

где g_t^2 — константа, характеризующая силу связи [фактор $2j + 1$ введен чисто условно]. В выражение (2.6.10) явно включен пороговый фактор $(q_{t_{13}} q_{t_{24}})^i$, поэтому g_t может быть константой. Из (2.2.18) с помощью (A.20) и (2.6.8) получаем выражение для приведенной парциальной амплитуды

$$B_l^{\xi}(t) = \frac{1}{16\pi} \frac{g_t^2}{M^2 - t} \delta_{lj}, \quad (2.6.11)$$

т. е. имеется вклад только в парциальную волну с $l = j$. Эти правосторонние сингулярности показаны на рис. 2.5, где также нарисованы пороговые разрезы вдоль положительной оси t .

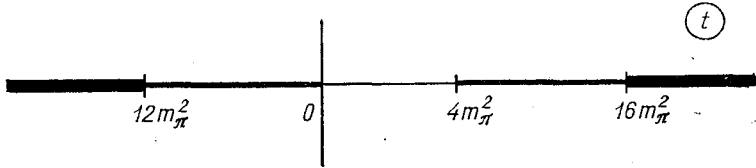


Рис. 2.5. Сингулярности t -канальных парциальных амплитуд в случае $\pi\pi$ -рассеяния.

Пороги расположены в точках $t = (2m_{\pi})^2, (4m_{\pi})^2, \dots$, левые разрезы — в точках $t = 4m_{\pi}^2 - s_{Tl}$, где s_{Tl} — положения s -канальных разрезов, отвечающих s -канальным порогам при $s = (2m_{\pi})^2, (4m_{\pi})^2, \dots$ (отметим, что нечетное число пионов запрещено по G -четности)

Помимо сингулярностей, обсужденных выше, имеются сингулярности, возникающие при отрицательных значениях t , вследствие существования s -канальных сингулярностей $A^{\xi}(s, t)$. [Следует отметить, что $A^{\xi}(s, t)$ не имеет сингулярностей по u , так как они были «переправлены» в s -канал с помощью (2.5.3)]. Для того чтобы рассмотреть эти сингулярности, предположим, что в s -канале имеется полюс, отвечающий связанному состоянию, со спином j и массой M

$$A^{\xi}(s, t) = \frac{(2j+1) g_s^2 (q_{s_{12}} q_{s_{34}})^i}{M^2 - s} P_j(z_s) \equiv \frac{G_s(s)}{M^2 - s} P_j(z_s), \quad (2.6.12)$$

и, следовательно,

$$D^{\xi}(s, t) = \pi G_s(s) P_j(z_s(s, t)) \delta(s - M^2). \quad (2.6.13)$$

Это выражение будучи подставлено в (2.5.3) дает с помощью (2.6.8)

$$B_l^{\xi}(t) = G_s(M^2) P_j(z_s(M^2, t)) Q_l(z_t(M^2, t)) (q_{t_{13}} q_{t_{24}})^{-l}. \quad (2.6.14)$$

Так как функция $Q_l(z)$ имеет при целых l точки ветвления в плоскости z при $z = \pm 1$, то амплитуда (2.6.14) имеет сингулярности при

$$z_t(M^2, t) = \pm 1,$$

т. е. когда

$$\frac{t^2 + t(2M^2 - \Sigma) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(t, m_1^2, m_3^2) \lambda(t, m_2^2, m_4^2)}} = \pm 1 \quad (2.6.15)$$

[это легко получить с помощью (1.7.19)].

Если все внешние частицы имеют равные массы (например, в случае реакции $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, когда $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_\pi$), условие (2.6.15) вырождается в

$$1 + 2M^2/(t - 4m_\pi^2) = \pm 1, \quad (2.6.16)$$

т. е. при $t = \infty$ и $t = 4m_\pi^2 - M^2$ имеются точки ветвления: разрезы, отвечающие этим точкам ветвления, обычно рисуют вдоль отрицательной оси t , как показано на рис. 2.5. Заметим, что, в отличие от ранее рассмотренного случая, s -канальный полюс, отвечающий спину j , дает вклад во все парциальные волны t -канала [см. (2.6.14)].

Таким образом, сингулярность возникает вследствие защемления сингулярности амплитуды $A_s^\xi(s, t)$ точками ветвления функции $Q_l(z)$ в выражении (2.5.3). Все другие s -канальные сингулярности, пороговые точки ветвления и т. п. будут давать подобные защемления и, следовательно, подобные левосторонние точки ветвления, положения которых определяются просто заменой M^2 в (2.6.16) на соответствующий порог по s .

В случае кинематики с неравными массами картина s -канальных сингулярностей на плоскости t будет много более сложной. В этом случае имеются четыре решения уравнения (2.6.15), причем два из них будут независимыми от t , а именно: $t = 0$ и $t = \infty$. Например, в случае πN -рассеяния обмен нуклоном генерирует точки ветвления при

$$t = 0, t = \infty, t = (M_N - m_\pi^2/M_N)^2, t = M_N^2 + 2m_\pi^2$$

[отметим, что если на плоскости t провести разрез, соединяющий последние две точки ветвления, а другой разрез, как обычно, направить вдоль отрицательной оси, то при $m_\pi \rightarrow M_N$ эти два разреза соединятся, давая один разрез, начинающийся в точке $t = 3M_N^2$ в согласии с (2.6.16); более подробно эти вопросы изложены в работе [305], на с. 376 и дальше].

Так как для целых l мнимая часть функции Q_l дается выражением (A.15), то из (2.5.3) находим

$$\text{Im} \{A_l^\xi(t)\}_{LH} = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{z_0} P_l(z_i) D_s^\xi(s', t) dz_i' \quad (2.6.17)$$

[z_0 отвечает ближайшей сингулярности по t (рис. 2.6)]. Это выражение дает скачок амплитуды $A_l^\xi(t)$ вдоль ее левого разреза. Для нецелых l мы вынуждены воспользоваться выражением (A.16). Однако нас более интересуют сингулярности приведенных амплитуд $B_l^\xi(t)$, поэтому рассмотрим эти амплитуды. При $s > 0$ $t \pm i\epsilon$ соответствует $z_t \pm i\epsilon$ из (1.7.19), и поэтому точка ветвления $Q_l(z_t)$ при $z_t = -1$ сокращается из-за кинематического фактора (2.6.8), т. е. выражение $Q_l(z_t) (q_{t13} q_{t24})^{-l}$ не имеет разреза для $z_t < -1$. Имеется только вклад от разреза $Q_l(z_t)$ при $-1 < z_t < 1$, с одной стороны, и вклад от

скачка $D_s(s, t)$ в области отрицательных значений t , полученный из (2.5.9), с другой стороны. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{B_l^{\xi}(t)\}_{LH} = & \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{z_0} P_l(-z_i') D_s^{\xi}(s', t) dz_i' (-q_{i13} q_{i24})^{-l} + \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{a(t)}^{b(t)} Q_l(z_i') (\rho_{su}(s', u') + \xi \rho_{su}(u', s')) dz_i' (q_{i13} q_{i24})^{-l}, \quad (2.6.18) \end{aligned}$$

где области интегрирования показаны на рис. 2.6. Так как замена

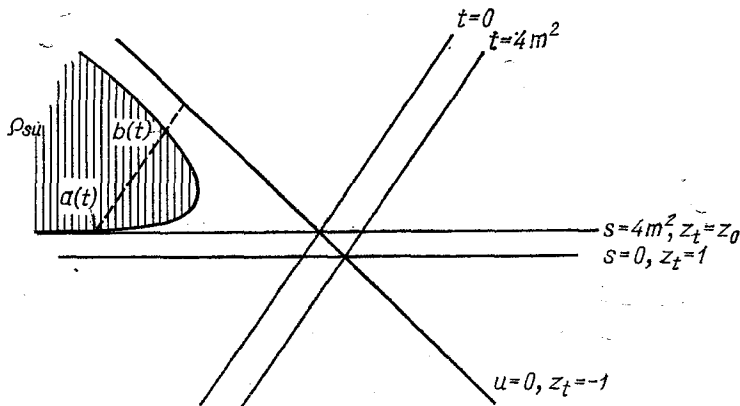


Рис. 2.6. Сингулярности t -каналных парциальных амплитуд с определенной сигнатурой на плоскости Мандельштама.

Левый разрез при фиксированном t приводит к интегрированию по сингулярностям по s между $z_t=z_0$ (ближайшая сингулярность по s) и $z_t=-1$. Для достаточно малых отрицательных значений t это интегрирование включает в себя интегрирование двойной спектральной функции между граничными точками $a(t)$ и $b(t)$. Контур интегрирования при фиксированном t показан пунктирной линией

s на u эквивалентна изменению знака z_t , то с помощью (A.17) выражение (2.6.18) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{B_l^{\xi}(t)\}_{LH} = & \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{z_0} P_l(-z_i') D_s^{\xi}(s', t) dz_i' (-q_{i13} q_{i24})^{-l} + \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{a(t)}^{b(t)} Q_l(z_i') \rho_{su}(s', u') [1 - \xi \exp(-i\pi l)] dz_i' (q_{i13} q_{i24})^{-l}. \quad (2.6.19) \end{aligned}$$

Последний член в этом выражении возникает из-за обменных сил и, следовательно, двойная спектральная функция ρ_{su} не дает вклада, когда l имеют свою сигнатуру, т. е. $\exp(-i\pi l) = \xi$.

Теперь мы знаем структуру сингулярностей и поэтому можем написать дисперсионные соотношения для приведенных парциальных амплитуд

$$B_l^{\xi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{RH} \frac{\operatorname{Im} \{B_l^{\xi}(t')\}}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{LH} \frac{\operatorname{Im} \{B_l^{\xi}(t')\}}{t' - t} dt', \quad (2.6.20)$$

причем оба скачка будут даваться двойными спектральными функциями из выражений (2.6.9) и (2.6.19). Отметим, что особое внимание необходимо уделить рассмотрению вопроса о вычитаниях, так как, выделив пороговое поведение в определении (2.6.8), мы ухудшили асимптотическое поведение по t . Такие дисперсионные соотношения широко используют при параметризации парциальных амплитуд, в частности, когда необходимо совершить фазовый анализ. Особую важность имеет тот факт, что в этих дисперсионных соотношениях легко совершается операция кроссинга, причем сингулярности, отвечающие перекрестным каналам, появляются на левом разрезе. Отметим, что скачок на правом разрезе дается соотношением унитарности. Это легко показать, если рассмотреть условие унитарности (2.2.7) (с заменой s на t , и наоборот) и вспомнить определение (2.6.8):

$$B_i^{\xi i}(t_+) - B_i^{\xi i}(t_-) = 2i \sum_n \rho_i^n(t) B_i^{\xi in}(t_+) B_i^{\xi ni}(t_-) + \text{трех и более частичные промежуточные расстояния}, \quad (2.6.21)$$

где

$$\rho_i^n(t) \equiv (q_{t13} q_{t24})^l q_{tn} / \sqrt{t}, \quad (2.6.22)$$

причем в области упругого рассеяния [ср. (2.2.8)]

$$\text{Im} \{B_i^{\xi i}(t)\} = [2 (q_{t13})^{2l+1} / \sqrt{t}] |B_i^{\xi i}(t)|^2. \quad (2.6.23)$$

Подчеркнем, что эта форма условия унитарности окажется очень полезной, когда мы будем делать аналитическое продолжение по l .

2.7. Аналитическое продолжение в плоскость углового момента

Представление Грибова—Фруассара (2.6.2) может быть использовано, чтобы определить амплитуды $A_i^{\xi}(t)$ при всех значениях l , а не только при целых или четных значениях, как предполагалось до сих пор. Если говорить более точно, то представление Грибова—Фруассара позволяет определить амплитуды $A_i^{\xi}(t)$ для всех тех l , для которых $\text{Re} \{l\} > N(t)$, где D_s (или D_u) $\sim z^{N(t)}$ и где $N(t) \leq 1$ для $t \leq 0$, как следует из (2.4.9). Основное преимущество использования формулы (2.6.2) по сравнению с (2.2.18) при рассмотрении нецелых l заключается в том, что функция Q_l имеет лучшее поведение при $l \rightarrow \infty$, чем функция P_l [ср. (A.28) и (A.31)].

Единственными сингулярностями функции Q_l являются полюса при $l = -1, -2, \dots$ [см. (A.32)], поэтому формула (2.6.2) определяет функцию переменной l , которая является голоморфной (т. е. свободной от сингулярностей) в области $\text{Re} \{l\} > \max \{N(t), -1\}$.

Однако совершенно не очевидно, что это расширенное определение парциальных амплитуд обладает большими достоинствами, чем предыдущее, так как только целые положительные значения l имеют физический смысл и поэтому совершенно ясно, что существует бесчислен-

ное множество способов интерполяции по целым числам. Но так как амплитуда $A_l^{\xi}(t)$, определенная с помощью (2.6.2), исчезает, когда $|l| \rightarrow \infty$ [см. (2.5.5)], то теорема Карлсона (доказанная в книге [381], говорит о том, что продолжение, даваемое формулой (2.6.2), является единственным продолжением, обладающим этим свойством.

Более точно теорема Карлсона формулируется следующим образом: если $f(l)$ является регулярной функцией и имеет поведение $O(e^{k|l|})$, причем $k < \pi$ при $\operatorname{Re}\{l\} \geq n$ и, кроме того, $f(l) = 0$ для бесконечной последовательности целых чисел $l = n, n + 1, n + 2, \dots$, то $f(l) = 0$ тождественно. Таким образом, если мы напишем, что

$$A_l^{\xi}(t) = A_l^{GF}(t) + f(l, t),$$

где функция $A_l^{GF}(t)$ получена с помощью представления Грибова—Фруассара и где $f(l, t) = 0$ для целых значений l , то теорема гласит, что либо $A_l^{\xi} \rightarrow 0$, когда $|l| \rightarrow \infty$, либо функция $f(l)$ всюду исчезает, т. е. тождественно равна нулю. Возможно, простейшим примером является следующий:

$$A_l^{\xi}(t) = A_l^{GF}(t) + F(t) \sin \pi l.$$

Вспоминая, что $\sin \pi l = [\exp(i\pi l) - \exp(-i\pi l)](2i)^{-1}$, совершенно очевидно, что $|A_l^{\xi}(t)| \not\rightarrow \infty$, когда $l \rightarrow i\infty$ из-за наличия дополнительного члена.

Следовательно, выражение (2.6.2) определяет однозначным образом функцию $A_l^{\xi}(t)$ как голоморфную, имеющую конечный предел при $|l| \rightarrow \infty$ для всех $\operatorname{Re}\{l\} > N(t)$. Однако продолжение в область $\operatorname{Re}\{l\} \leq N(t)$ затруднено из-за расходимости $D_s(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$.

Для того чтобы перейти к дальнейшему рассмотрению, нам необходимо сделать дополнительное и очень существенное предположение о том, что амплитуда рассеяния $A_l(t)$ аналитическая функция l во всей комплексной плоскости углового момента и содержит только изолированные особенности. Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать только изолированные особенности, которые естественным образом будут приводить к расходимости, но мы сможем тем не менее сделать аналитическое продолжение в оставшуюся часть комплексной плоскости.

Для примера предположим, что скачок $D_s^{\xi}(s, t)$ имеет степенное поведение в асимптотике

$$D_s^{\xi}(s, t) \sim s^{\alpha(t)} + \text{члены более низкого порядка}, \quad (2.7.1)$$

причем $N(t) = \alpha(t)$. Так как из (A.27) следует, что $Q_l(z) \sim z^{-l-1}$, а из (1.7.9) — что $z_l \rightarrow s/(q_{l13}q_{l24})$, то при больших s (скажем, s больше некоторого s_1) формула (2.6.2) дает

$$A_l^{\xi}(t) \underset{l > \alpha(t)}{\sim} \int_{s_1}^{\infty} s^{\alpha(t)} s^{-l-1} ds = \frac{\exp[\alpha(t) - l] \ln s_1}{\alpha(t) - l}. \quad (2.7.2)$$

Следовательно, амплитуда $A_l(t)$ имеет полюс при $l = \alpha(t)$. Это есть, по нашей гипотезе, наиболее правая особенность $A_l(t)$ в комплексной плоскости l и, таким образом, это именно та сингулярность, которая мешает нам сделать продолжение левее $\text{Re}\{l\} = \alpha(t)$. Однако раз уж этот полюс является изолированной особой точкой, то мы можем сделать продолжение вокруг него влево, но до тех пор, пока не наткнемся на другую сингулярность, соответствующую следующему члену асимптотического разложения скачка $D_s^{\xi}(s, t)$.

В частности, в разложении могут содержаться логарифмические члены типа

$$D_s^{\xi}(s, t) \sim s^{\alpha(t)} (\ln s)^{\beta(t)}, \quad (2.7.3)$$

которые дадут

$$A_l^{\xi}(t) \underset{l > \alpha(t)}{\sim} \int_{s_1}^{\infty} s^{\alpha(t)} (\ln s)^{\beta(t)} s^{-l-1} ds = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha(t) - l)^{1 + \beta(t)}} + \dots, & \beta(t) \neq -1; \\ \ln(\alpha(t) - l), & \beta(t) = 1. \end{cases} \quad (2.7.4)$$

Таким образом, амплитуда $A_l^{\xi}(t)$ будет иметь точку ветвления при $l = \alpha(t)$ или кратный полюс в случае, если β является положительным целым числом. Физический смысл этих полюсов и точек ветвления мы будем обсуждать ниже.

Предположение о том, что амплитуда $A_l^{\xi}(t)$ имеет только изолированные особые точки и поэтому может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость углового момента, иногда называют постулатом о «максимальной аналитичности второго рода», для того чтобы отличать его от постулата V разд. 1.4, касающегося аналитичности по переменным s и t . Постулат о максимальной аналитичности второго рода является основным предположением, на котором основано применение теории Редже к физике частиц, что, к сожалению, ни в коей мере нельзя считать доказанным, хотя, как будет показано в следующей главе, это предположение является справедливым в различных реалистических моделях сильных взаимодействий и, что мною более важно, похоже, что находится в согласии с экспериментальными данными.

Таким образом, если все это справедливо, то ряд (2.5.6) в разложении по парциальным волнам можно переписать в виде контурного интеграла в комплексной плоскости l (этот метод использовал Зоммерфельд [364], следуя технике, предложенной Ватсоном [398]):

$$A^{\xi}(s, t) = - \frac{16\pi}{2i} \int_{C_1} (2l + 1) A_l^{\xi}(t) \frac{P_l(-z_l)}{\sin \pi l} dl. \quad (2.7.5)$$

Контур C_1 показан на рис. 2.7. Он охватывает все целые положительные числа и нуль, но избегает каких-либо точек, соответствующих сингулярностям $A_l(t)$. Вычеты подынтегрального выражения в по-

люсах, расположенных в целых точках $l = n$, в которых $\sin \pi l \rightarrow (-1)^n (l - n) \pi$, имеют следующий вид:

$$\frac{2\pi i (2n+1) A_n^{\xi}(t) P_n(-z_t)}{(-1)^n \pi} = 2i (2n+1) A_n^{\xi}(t) P_n(z_t) \quad (2.7.6)$$

[для того чтобы это получить, нужно использовать (A.11)].

Таким образом, с помощью теоремы Коши мы получаем из (2.7.5)

$$A^{\xi}(s, t) = 16\pi \sum_l (2l+1) A_l^{\xi}(t) P_l(z_t). \quad (2.7.7)$$

Следовательно, выражение (2.7.5) эквивалентно (2.7.7) при условии, что амплитуда $A_l(t)$ имеет требуемые аналитические свойства по l .

Так как мы уже нашли, что амплитуда $A_l^{\xi}(t)$ не имеет сингулярностей при $\text{Re}\{l\} > N(t)$, то мы можем заменить контур C_1 на контур C_2 , как показано на рис. 2.7, и будем уверены, что при этом мы не захватим ни одной сингулярности подынтегральной функции. Это справедливо при условии, что вертикальная линия соответствует

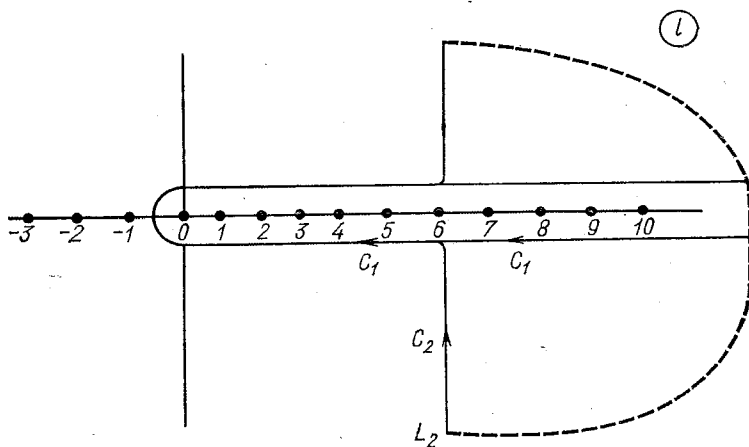


Рис. 2.7. Контур интегрирования C_1 в комплексной плоскости l , охватывающий все положительные целые числа.

Контур можно развернуть вдоль линии $\text{Re}\{l\} = L_2$ с полуокружностью на бесконечности. Этот контур называется C_2 .

$\text{Re}\{l\} \equiv L_2 > N(t)$. Вследствие условий (2.5.5) и (A.30) интеграл по полуокружности (при условии, что его радиус стремится к бесконечности) будет равен нулю. Эти условия [(2.5.5) и (A.30)] также показывают, что область сходимости (2.7.5) по переменной z много больше, чем малый эллипс Лемана (2.4.11), внутри которого справедливо разложение (2.7.7). Эта область не зависит от $\text{Im}\{\theta\}$ и, фактически, вследствие (2.5.11) должна включать в себя всю комплексную плоскость z . Отметим, что сингулярности по s амплитуды $A^{\xi}(s, t)$, которые мешают сходимости выражения (2.7.7), содержатся в функции $P_l(-z_t)$ при $z_t > 1$ [для нецелых l это можно увидеть с помощью (A.13)].

Если мы будем смещать L_2 налево, то нам будут встречаться сингулярности плоскости l , подобные (2.7.2) и (2.7.4), которые ответственны за расходимость (2.6.2). Давайте предположим для простоты, что мы встретили только один простой полюс при $l = \alpha(t)$, которому отвечает $A_l(t) \sim \beta(t) (l - \alpha(t))^{-1}$, и только одну точку ветвления при $l = \alpha_c(t)$, когда мы прошли всю область $\text{Re}\{l\} > -1/2$, как показано на рис. 2.8. Тогда мы получаем следующее:

$$A^{\xi}(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_3} (2l+1) A_l^{\xi}(t) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl - 16\pi^2 (2\alpha(t) + 1) \beta(t) \times \\ \times \frac{P_{\alpha(t)}(-z_t)}{\sin \pi \alpha(t)} - \frac{16\pi}{2i} \int_{\alpha_c(t)}^{\alpha(t)} (2l+1) \Delta_l^{\xi}(t) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl, \quad (2.7.8)$$

где последний член отвечает интегрированию вокруг части разреза, отвечающего точке ветвления и показанного на рис. 2.8 [$\Delta_l^{\xi}(t)$ — скачок на разрезе]. Формула (2.7.8) известна в литературе как представление Зоммерфельда—Ватсона.

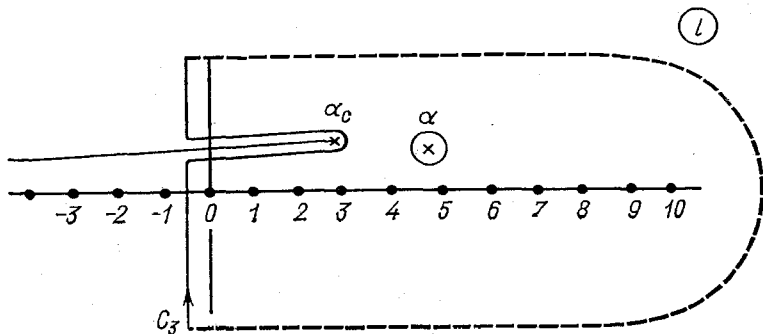


Рис. 2.8. Контур интегрирования C_3 , развернутый вдоль $\text{Re}\{l\} = -1/2$. Этот контур включает в себя обход полюса при $l = \alpha$ и охватывает разрез, отвечающий точке ветвления при $l = \alpha_c$.

Очевидно, что первый член, который называется «фоновым интегралом», обращается в нуль, когда $s \rightarrow \infty$ как $\sim s^{-1/2}$. Это легко получить, если вспомнить асимптотическое поведение функции $P_l(z)$ при $z \rightarrow \infty$ [см. (A.25), (A.26)]. Аналогично сразу получается, что полюсный член $\sim s^{\alpha(t)}$, также как и в (2.7.1), тогда как асимптотическое поведение вклада от разреза зависит от скачка на этом разрезе в области $l \rightarrow \alpha_c(t)$. Если скачок $\Delta_l^{\xi}(t)$ ведет себя как $(1 - \alpha_c(t))^{1+\beta(t)}$, то поведение в асимптотике будет $\sim s_c^{\alpha(t)} (\ln s)^{\beta(t)}$ [см. (2.7.4)].

В случае потенциального рассеяния (для потенциалов с «хорошим поведением») в амплитуде имеются только полюса и отсутствуют разрезы. Это было показано Редже в статьях, посвященных этому вопросу (см. гл. 3). В физике частиц мы предполагаем, что имеются и разрезы, однако подробное обсуждение этих вопросов мы отложим до гл. 8, а все предыдущие главы посвятим детальному рассмотрению полюсов.

2.8. Полюса Редже

Второй член в формуле (2.7.8) называется «полюсом Редже», который является полюсом в комплексной плоскости l . В амплитуду рассеяния он вносит вклад:

$$A^{\pm R}(s, t) = -16\pi^2 [2\alpha(t) + 1] \beta(t) P_{\alpha(t)}(-z_t) / \sin \pi \alpha(t). \quad (2.8.1)$$

Его вклад в скачок по s имеет следующий вид, если вспомнить (A.13):

$$D_s^R(s, t) = 16\pi^2 (2\alpha(t) + 1) \beta(t) P_{\alpha(t)}(z_t), \quad z_t > 1; \quad (2.8.2)$$

$$D_s^R(s, t) \sim s^{\alpha(t)}, \quad s \rightarrow \infty.$$

как и ожидалось из (2.7.1). Фактически если выражение (2.8.2) подставить в (2.6.2), то с помощью (A.22) можно получить

$$A_l^{\pm}(t) = \frac{(2\alpha(t)+1)\beta(t)}{i(l-\alpha(t))(l+\alpha(t)+1)} \xrightarrow{l \rightarrow \alpha(t)} \frac{\beta(t)}{l-\alpha(t)}. \quad (2.8.3)$$

Это выражение подтверждает, что формула (2.8.1) указывает на возникновение полюса в плоскости l .

Если $\alpha(t)$ является функцией переменной t , то для данного фиксированного l амплитуда $A_l(t)$ будет иметь полюс по t при некотором $t = t_r$, таком, что $\alpha(t_r) = l$. Мы будем подробно исследовать свойства функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$ в разд. 3.2 и найдем, что функция $\alpha(t)$ обычно является аналитической функцией t и содержит точку ветвления при пороговом значении $t = t_r$. Таким образом, для действительных значений $t > t_r$ можно выделить в этой функции действительную и мнимую части

$$\alpha(t) = \alpha_R(t) + i\alpha_I(t) \quad (2.8.4)$$

и определить точку t_r , в которой $\alpha_R(t) = l$. Разлагая $\alpha(t)$ около этой точки в ряд, получаем

$$\alpha(t) = l + \alpha'_R(t_r)(t - t_r) + \dots + i\alpha_I(t_r) + i\alpha'_I(t_r)(t - t_r) + \dots \quad (2.8.5)$$

(штрих означает производную по t) и поэтому для $\alpha_R \approx l$ парциальная амплитуда имеет вид

$$\begin{aligned} A_l^{\pm}(t) &\approx \frac{\beta(t_r)}{-\alpha'_R(t_r)(t-t_r) - i\alpha_I(t_r) - i\alpha'_I(t_r)(t-t_r)} \approx \\ &\approx \frac{\beta(t_r)/\alpha'_R(t_r)}{t_r - t - i\alpha_I(t_r)/\alpha'_R(t_r)}, \end{aligned}$$

что справедливо в предположении $\alpha'_I \ll \alpha'_R$. Это выражение можно сравнить с формулой Брейта—Вигнера (2.2.15), из которой сразу видно, что выражение (2.8.6) соответствует t -канальному резонансу с массой $M_r = \sqrt{t_r}$ и полной шириной

$$\Gamma = \alpha_I(t_r)/\alpha'_R(t_r) M_r. \quad (2.8.7)$$

Ниже порога мнимая часть равна нулю: $\alpha_j = 0$, и мы имеем полюс, отвечающий связанному состоянию при действительных значениях t . Эти факты позволяют рассматривать связанные состояния и резонансы с одной точки зрения: как полюса Редже (рис. 2.9).

Когда такие полюса Редже возникают при целых физических значениях l , то они отвечают физическим частицам или резонансам. Это высказывание совершенно очевидным образом подтверждается и формулой (2.8.1), из которой видно, что полюс по t возникает, когда функция $\alpha(t)$ равняется целому числу, так как при этом обращается в нуль $\sin \pi \alpha(t)$. Однако формула (2.8.1) написана для амплитуды с определенной сигнатурой и поэтому, для того чтобы получить выражение для физической амплитуды, необходимо воспользоваться формулой (2.5.10) и в результате

$$A^R(s, t) = -16\pi^2 (2\alpha(t) + 1) \beta(t) \frac{P_{\alpha(t)}(-z_t) + \xi P_{\alpha(t)}(z_t)}{\sin \pi \alpha(t)}. \quad (2.8.8)$$

Это выражение с помощью (A.10) приводится к виду

$$A^R(s, t) = -16\pi^2 (2\alpha(t) + 1) \beta(t) \left[(1 + \xi \exp[-i\pi \alpha(t)]) \frac{P_{\alpha(t)}(-z_t)}{\sin \pi \alpha(t)} - \xi \frac{2}{\pi} \sin \pi \alpha(t) Q_{\alpha(t)}(-z_t) \right]. \quad (2.8.9)$$

Так как вследствие (A.27) последний член этого выражения дает в асимптотике пренебрежимо малый вклад, его обычно опускают. Окончательное выражение, часто используемое в литературе, имеет вид

$$A_R(s, t) = -16\pi^2 [2\alpha(t) + 1] \beta(t) (1 + \xi \exp[-i\pi \alpha(t)]) \times \times P_{\alpha(t)}(-z_t) / \sin \pi \alpha(t). \quad (2.8.10)$$

Фактор $(1 + \xi \exp[-i\pi \alpha(t)])$ называется «сигнатурным множителем». Этот фактор обеспечивает выполнение условия: траектория с данной сигнатурой $\xi = \pm 1$ вносит вклад в полюс по t в амплитуде рассеяния только в том случае, если $\alpha(t)$ проходит через точки своей сигнатуры, т. е. четные — нечетные целые числа [см. (2.5.4) и последующие формулы].

Для того чтобы не вступать в противоречие с ограничением Фруасара (2.4.9), необходимо, чтобы $\alpha(t) < 1$ для $t < 0$. Для положительных t траектория проходит через несколько целых чисел, и поэтому

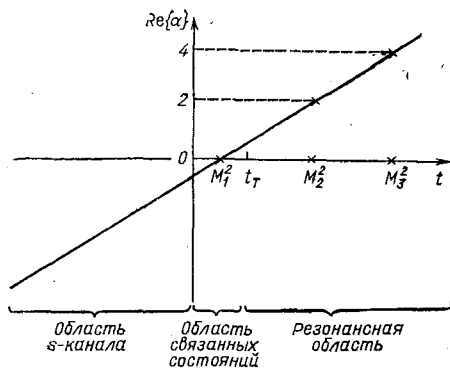


Рис. 2.9. Траектория Редже с четной сигнатурой.

Траектория имеет $\text{Re}(\alpha) = 0$ при некотором $t < t_T$ (меньше порога), давая связанное состояние со спином, равным нулю, и массой M_1 , а затем идут резонансы: со спином 2 и массой M_2 , со спином 4 и массой M_3 . При $t < 0$ траектория приводит к степенному поведению в перекрестном s -канале, $\sim s^\alpha(t)$

ле, $\sim s^\alpha(t)$

мы можем ожидать, что обнаружим целые семейства частиц, которые лежат на траекториях, причем те, которые лежат на данной траектории, имеют спины, отличающиеся на две единицы углового момента. В гл. 5 мы покажем, что это действительно справедливо (во всяком случае, когда $\alpha(t)$ берется в виде линейной функции

$$\alpha(t) = \alpha^0 + \alpha' t, \quad (2.8.11)$$

как это для примера показано на рис. 2.9 и 5.4—5.6). Этот факт служит одним из оправданий применимости идей Редже к физике частиц.

Другой простой проверкой служит рассмотрение физической области перекрестного s -канала $s > s_T$, $t < 0$. В этом случае (2.8.10) дает при учете (1.7.9) и (A.25)

$$A^R(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{\alpha(t)}, \quad (2.8.12)$$

причем в этом случае t характеризует передачу импульса. Таким образом, мы ожидаем, что при высоких энергиях зависимость от s амплитуды рассеяния в s -канале дается простым степенным поведением, причем показатель степени является функцией от переданного импульса [вспомним, что в этой области $\alpha(t)$ — действительная функция]. Все это должно бы быть следствием аналитического продолжения по спинам частиц, лежащих на лидирующей t -канальной траектории (см. рис. 2.9 или 6.6). Таким образом, так как при положительных t функция $\alpha(t)$ наблюдается только в дискретных точках, где $\alpha(t)$ равно целому числу и где имеются частицы, функцию $\alpha(t)$ можно определить по асимптотическому поведению при $s \rightarrow \infty$ для всех $t \leq 0$, по крайней мере в принципе. Однако практически это довольно трудная задача, так как в каждом конкретном процессе обычно происходит обмен несколькими траекториями, и хотя разные траектории характеризуются различным степенным поведением, тем не менее их довольно сложно выделить на фоне друг друга. Но, несмотря на все эти трудности, было доказано, что можно полностью определить свойства большого количества траекторий, исходя из экспериментальных данных, изложенным выше способом (см. разд. 6.8).

Степенное поведение, ожидаемое при обмене траекторией Редже (иногда вместо этого говорят об обмене «реджеоном») (2.8.12), можно противопоставить поведению, возникающему при обмене частицей с фиксированным спином (2.6.10) и которое соответствует символу Кронекера δ в плоскости l (2.6.11). Из (A.25) мы видим, что выражение (2.6.10) приводит к $A(s, t) \sim s^j$, где j — целое число и не зависит от t . На первый взгляд этот факт кажется довольно удивительным: обмен многими частицами с высокими спинами, лежащими на траектории подобной той, что изображена на рис. 2.9, должен дать степенную зависимость с показателем степени $\alpha(t) < 1$ при $t < 0$ (как это требует ограничение Фруассара), тогда как обмен каждой частицей отдельно приводил бы к s^i $i = 1, 2, 3 \dots$ Объяснение этого кажущегося противоречия состоит в том, что вклады от различных парциальных волн сокращаются (необходимо просто помнить, что разложение по парциальным волнам в t -канале не сходится в физической области

s-канала). Для того чтобы это пояснить, предположим, что имеется линейная траектория, подобная (2.8.11), с полюсами при

$$t = M_l^2 \equiv (l - \alpha^0)/\alpha', \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\alpha^0 < 0). \quad (2.8.13)$$

Затем мы можем написать для этих полюсов ряд по парциальным волнам

$$\begin{aligned} A_s^{\xi}(s, t) &= 16\pi \sum_l (2l + 1) \frac{\beta(M_l^2)}{\alpha'(M_l^2 - t)} P_l(z_t) = \\ &= -\frac{16\pi}{2i} \int_{c_1} (2l + 1) \frac{\beta(t)}{l - \alpha(t)} \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl, \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

и когда мы воспользуемся преобразованием Зоммерфельда—Ватсона (2.7.8), то в результате получим $A_s^{\xi}(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$, что вполне естественно.

Гипотеза максимальной аналитичности второго рода подразумевает, что все вычитания в дисперсионных соотношениях, подобные (1.10.7), являются следствием сингулярностей в плоскости углового момента типа (2.7.2) и (2.7.4). Если бы были разрешены произвольные вычитания как в (1.10.10), то функция $F_{n-1}(s, t)$ (которая является полиномом по s степени $n - 1$) вносила бы вклад во все парциальные волны с $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ в t -канале, давая в плоскости l члены с δ -символами Кронекера: $\delta_{l0}, \delta_{l1}, \dots, \delta_{ln-1}$, а не сингулярности. Но такого типа члены устраняются нашим постулатом аналитичности. Из ограничения Фруассара следует, что степень $F_{n-1}(s, t)$ может быть как максимум равна единице и поэтому высшие парциальные волны, несомненно, определяются и получаются только из скачка $D_s^{\xi}(s, t)$; однако постулат аналитичности также требует, чтобы низшие парциальные волны получались бы из высших с помощью аналитического продолжения, т. е. они тоже определяются скачком $D_s^{\xi}(s, t)$, и, следовательно, функция F не является произвольной.

На этом мы завершим обсуждение наиболее важного момента в определении амплитуды рассеяния, исходя из уравнений унитарности. Как мы видели в гл. 1 (особенно в разд. 1.10), если заданы все полюса, отвечающие частицам (массы и константы связей), то можно, в принципе, определить с помощью соотношений унитарности все остальные сингулярности и, следовательно, найти амплитуду рассеяния, используя дисперсионные соотношения (конечно, с точностью до неопределенности, связанной с вычитаниями). При этом, по-видимому, не возникает никаких ограничений на число частиц. Однако кажется очень маловероятным, что необходимо взять a priori только полюса, отвечающие всем частицам, так как имеются составные частицы, которые являются следствием действия межчастичных сил и которые должны возникать как следствия унитарности; они будут лежать на траекториях. Например, если рассмотреть дейтрон как связанное состояние протона и нейтрона, то можно было бы вывести все его свойства (массу и константу связи), исходя из знания сил, ответственных за сильные взаимодействия, и все это, конечно, противоречило бы введению произвольных значений для этих величин.

С другой стороны, максимальная аналитичность второго рода подразумевает, что если известен скачок $D_s^{\xi}(s, t)$, то можно обратить всю изложенную выше процедуру с помощью представления Грибова—Фруассара и выяснить природу всех полюсов, потому что все они являются полюсами Редже. Эта процедура предполагает очень высокую степень самосогласованности теории сильных взаимодействий. Если очень постараться и придумать новую частицу, а затем ввести ее в соотношения унитарности, то она должна привести к возникновению дальнейших сингулярностей и дальнейших вкладов в асимптотическое поведение амплитуд рассеяния, и, следовательно, дальнейших полюсов Редже, которые, в свою очередь, будут включены в соотношение унитарности, и т. д.

Совершенно очевидно, что если наши постулаты корректны, то настоящее (возможно, бесконечное) число типов различных частиц во Вселенной должно быть самосогласованным, т. е. под действием комбинированных процессов унитаризации и аналитического продолжения по l только они должны воспроизводиться, а не должно появляться каких-либо новых частиц. Однако существует ли только один единственный набор с такими свойствами, т. е. определяет ли требование самосогласованности теорию полностью, — этот вопрос не ясен. Подход, в котором все сильновзаимодействующие частицы генерируют друг друга таким способом, называется «гипотезой бутстрапа» (см. [101]), и мы будем ее обсуждать и исследовать в дальнейшем. Интуитивно кажется ясным, что если все адроны состоят из одного из другого, а все силы возникают как следствие обмена частицами, то в этом случае необходимо ввести некоторую форму самосогласованности, причем, призывая на помощь теорию Редже, можно дать более строгую формулировку этой идеи. Так как в рамках этого подхода устраняются элементарные частицы и все наблюдаемые частицы входят на равных основаниях как составные реджеоны, то этот подход иногда называется «ядерной демократией» [102].

С другой стороны, может быть так, что имеется несколько базисных, основных элементарных частиц, например кварков (см. гл. 5), которые не лежат на реджевских траекториях и свойства которых необходимо изучить, прежде чем пытаться предсказывать спектр частиц. Если так, то теория Редже недостаточна сама по себе, чтобы сказать нам все о физике сильных взаимодействий, но в этом случае она снабдит нас очень важными условиями самосогласованности амплитуд рассеяния. Мы еще вернемся к обсуждению этих философских проблем в гл. 11.

2.9. Преобразование Мандельштама—Зоммерфельда—Ватсона *

В представлении Зоммерфельда—Ватсона (2.7.8) мы выбрали контур интегрирования для «фонового интеграла» C_3 вдоль линии $\text{Re } \{l\} = -1/2$. Такой выбор был связан с тем обстоятельством [(см. (A.25), (A.26)], что вдоль этой линии функции $P_l(z)$ быстрее убывают ($\sim z^{-1/2}$ для $\text{Re } \{l\} = -1/2$). Однако эта линия отнюдь не явля-

ется естественной границей аналитического продолжения, и в 1962 г. Мандельштам [295] показал, как пройти за ней налево.

Мы начнем с того, что перепишем (2.7.7) в виде

$$A^{\xi}(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} \{(2l+1) A_l(t) P_l(z_t) + \frac{1}{\pi} (-1)^{l-1} (2l) \times \\ \times A_{l-1/2}^{\xi}(t) Q_{l-1/2}(z_t)\} - 16\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (-1)^{l-1} (2l) A_{l-1/2}^{\xi}(t) Q_{l-1/2}(z_t). \quad (2.9.1)$$

Теперь сделаем преобразование Зоммерфельда—Ватсона двух членов в фигурных скобках в (2.9.1). Тогда первый член дает формулу (2.7.5), а второй включает в подынтегральное выражение $Q_l(-z_t)/(\cos \pi l)$ и,

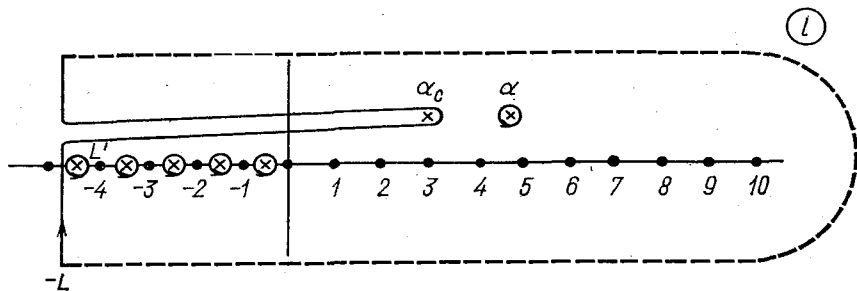


Рис. 2.10. Контур интегрирования в формуле (2.9.2) с точно такими же сингулярностями внутри, как на рис. 2.8, плюс дополнительные полюса при отрицательных полуцелых значениях l

следовательно, оно имеет полюса при полуцелых значениях l . Затем с помощью (A.18) эти два интеграла можно скомбинировать так, что, когда мы развернем контур, как в (2.7.6), то получим следующее

$$A^{\xi}(s, t) = \frac{16}{2i} \int_{-1/2+\varepsilon-i\infty}^{-1/2+\varepsilon+i\infty} (2l+1) A_l^{\xi}(t) \frac{Q_{-l-1}(z_t)}{\cos \pi l} dl + \\ + 16\pi (2\alpha(t) + 1) \beta(t) \frac{Q_{-\alpha(t)-1}(-z_t)}{\cos \pi \alpha(t)} + \frac{16}{2i} \int_{\alpha_c(t)}^{\alpha(t)} (2l+1) \Delta_l^{\xi}(t) \times \\ \times \frac{Q_{-l-1}(-z_t)}{\cos \pi l} dl - 16\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (-1)^{l-1} (2l) A_{l-1/2}^{\xi}(t) Q_{l-1/2}(z_t). \quad (2.9.2)$$

Контур фонового интеграла должен проходить при $1/2 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), чтобы не встретиться с полюсом, отвечающим $(\cos \pi l)^{-1}$, при $l = -1/2$ (рис. 2.10). Если сместить этот контур в $\text{Re}\{l\} = -L$, мы захватим вклады от полюсов в точках $l' = l = -1/2, -3/2, \dots$, где $-L'$ — ближайшее полуцелое число, большее $-L$, и получим

$$\begin{aligned}
A^{\xi}(s, t) = & \frac{16}{2i} \int_{-L-i\infty}^{-L+i\infty} (2l+1) A_l^{\xi}(t) \frac{Q_{-l-1}(-z_l)}{\cos \pi l} dl + \text{полюса} + \\
& + \text{разрезы} - 16\pi \sum_{l'=-L'}^{-1/2} (2l'+1) A_{l'}^{\xi}(t) Q_{-l'-1}(-z_l) \frac{(-1)^{l'-1/2}}{\pi} - \\
& - 16\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\pi} (2l) A_{l-1/2}^{\xi}(t) Q_{l-1/2}(z_l). \quad (2.9.3)
\end{aligned}$$

Если теперь заменить индекс суммирования l' в первой сумме на $l = -l' - 1/2$, то эта сумма будет иметь вид

$$16\pi \sum_{l=0}^{L'-1/2} \frac{(-1)^{-l-1}}{\pi} (-2l) A_{l-1/2}^{\xi}(t) Q_{l-1/2}(-z_l) \quad (2.9.4)$$

и она сократится с первыми $L' - 1/2$ членами в последней сумме в (2.9.3) при условии

$$A_{l-1/2}^{\xi}(t) = A_{-l-1/2}^{\xi}(t), \quad l - \text{целое число}. \quad (2.9.5)$$

Эта симметрия парциальных волн относительно точки $l = -1/2$, так называемая симметрия Мандельштама, следует из рассмотрения представления Грибова — Фруассара и соответствующей симметрии (А.19) функций $Q_l(z)$ (без учета, конечно, того факта, что представление не сходится без вычитаний). Как мы увидим в следующей главе, эта симметрия справедлива в потенциальном рассеянии и поэтому кажется разумным предположить, что она будет существовать и в сильных взаимодействиях. Итак, окончательное выражение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
A^{\xi}(s, t) = & \frac{16}{2i} \int_{-L-i\infty}^{-L+i\infty} (2l+1) A_l^{\xi}(t) \frac{Q_{-l-1}(-z_l)}{\cos \pi l} dl + \text{полюса} + \\
& + \text{разрезы} - 16 \sum_{l=L'+1/2}^{\infty} (-1)^{l-1} (2l) A_{l-1/2}^{\xi}(t) Q_{l-1/2}(z_l). \quad (2.9.6)
\end{aligned}$$

Так как из (А.27) следует, что $Q_l(z) \sim z^{-l-1}$, то члены, отвечающие полюсам Редже и разрезам [приведенные явно в формуле (2.9.2)], по-прежнему имеют асимптотическое поведение $\sim s^{\alpha(l)}$, тогда как первый и последний члены (2.9.6) $\sim s^{-L}$, причем L может быть сделано сколь угодно большим. Конечно, при таком перемещении контура мы можем захватывать все больше и больше полюсов и разрезов и фоновый интеграл при фиксированном z может даже увеличиться.

Легко понять, что полюс в реджевском полюсном члене в выражении (2.9.2) содержится в функции $Q_{-\alpha-1}$, которая имеет полюса в точках, когда α равняется неотрицательному целому числу [см. (А.32)]. Очевидно, что полюса выражения $\cos^{-1} \pi \alpha$ при положительных полуцелых значениях α сокращаются с нулями функции $Q_{-\alpha-1}$, которая содержит фактор $[\Gamma(-\alpha + 1/2)]^{-1}$ [см. (А.8)], в то время как симметрия (2.9.5) обеспечивает то, что вычеты этих полюсов исчезают при отрицательных полуцелых числах.

2.10. Преобразование Меллина *

В дальнейшем нам очень часто придется сталкиваться только с главным членом асимптотики по s амплитуды рассеяния. В этом случае можно сильно упростить вид многих выражений, заменив $z_t \rightarrow s$ при $s \rightarrow \infty$ и соответственно функции Лежандра их асимптотикой (А.25), (А.27).

Таким образом, t -канальное разложение по парциальным волнам (2.5.6) превратится в разложение амплитуды по степеням s :

$$A^{\xi}(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) s^n. \quad (2.10.1)$$

Если, в свою очередь, разложить в ряд по s дисперсионное соотношение (2.5.8)

$$A^{\xi}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s^{\xi}(s', t)}{s' - s} ds' = \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} D_s^{\xi}(s', t) \frac{1}{s'} \left[1 + \frac{s}{s'} + \left(\frac{s}{s'} \right)^2 + \dots \right] ds', \quad (2.10.2)$$

то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в этом выражении и в (2.10.1), найдем, что

$$a_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} D_s^{\xi}(s', t) s'^{-(n+1)} ds'. \quad (2.10.3)$$

Эти коэффициенты соответствуют тому, что в представлении Грибова—Фруассара (2.5.3) в функциях Лежандра оставлен только главный член по s . Так как мы рассматриваем главные члены асимптотики, то положение порога не очень существенно, и поэтому мы сильно не ошибемся, если вместо (2.10.3) напишем

$$a_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} D_s^{\xi}(s', t) s'^{-(n+1)} ds'. \quad (2.10.4)$$

Написанное выражение является просто преобразованием Меллина функции $D_s^{\xi}(s, t)$ (см. [380, с. 71]). Сделав преобразование Меллина, получим

$$D_s^{\xi}(s, t) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty + \gamma}^{i\infty + \gamma} a_n(t) s^n dn, \quad (2.10.5)$$

причем контур интегрирования проходит по линии, параллельной мнимой оси правее всех сингулярностей по n функции $a_n(t)$. Теперь возьмем только главный член асимптотики по z_t функции Лежандра в разложении Зоммерфельда—Ватсона (2.7). Тогда

$$A^{\xi}(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_1} (2l+1) A_l^{\xi}(t) \frac{(-s)^l}{\sin \pi l} dl. \quad (2.10.6)$$

Если теперь вспомнить поведение скачка:

$$\text{Disc}_s \{(-s)^l\} = -s^l \sin \pi l, \quad s > 0$$

и ввести множитель $16\pi(2l+1)$ в определение $a_n(t)$, то сразу становится очевидным, что выражение (2.10.6) согласуется с (2.10.5). Контур C_1 в (2.10.6) может быть трансформирован в контур в (2.10.5), но если $D_{\frac{5}{2}}^{\xi}(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$, то, как следует из (2.10.3) [см. (2.7.2)], $a_n(t)$ будет иметь полюс при $n = \alpha(t)$. Вклад этого полюса должен быть добавлен к (2.10.5) аналогично тому, как это было сделано в (2.7.8). Следовательно, полюса Редже, лежащие в плоскости l , приводят к возникновению полюсов в плоскости n . Однако так как функция Лежандра может быть разложена в ряд по степеням z_t , в котором (А.25) дает только первый член этого разложения, то данный полюс Редже будет приводить к целому набору полюсов, лежащих в плоскости n при $n = \alpha(t) - m$, при $m = 0, 1, 2, \dots$; и соответственно наоборот. Однако до тех пор, пока мы будем касаться только лидирующего поведения всех величин в асимптотике по s , нас не будет интересовать это неоднозначное соответствие между полюсами l - и n -плоскостей.

Сравним аналитические свойства (2.10.6) и полюсного члена в (2.7.8). Аналитические свойства этих выражений несколько различаются: в (2.10.6) имеется разрез от $0 \leq s \leq \infty$, в то время как полюсной член в (2.7.8) имеет разрез при $z_t > 1$ [см. (А.13)], например при $-4q_t^2 \leq s \leq \infty$ в случае кинематики с равными массами, как это следует из (1.7.22). Конечно, ни первый, ни второй разрезы не соответствуют истинному разрезу амплитуды рассеяния, так как мы знаем, что истинный разрез начинается от порога, т. е. от $s = s_T$. Это противоречие легко устраняется, так как известно, что имеются сокращения между скачками полюсных членов и фоновым интегралом в областях $0 \leq s \leq s_T$ и $-4q_t^2 \leq s \leq s$ соответственно. В гл. 6 будет показано, что замена z_t на s при кинематике с неравными массами является не совсем тривиальной процедурой. Но при условии, что все эти моменты имеются в виду, часто значительно более удобно использовать выражения (2.10.4) и (2.10.5), а не точные выражения.

3

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ, СОДЕРЖАЩИЕ ПОЛЮСА РЕДЖЕ *

3.1. Введение

В гл. 2 было показано, как с помощью парциальных амплитуд, аналитически продолженных в плоскость углового момента, полная амплитуда рассеяния представляется в виде суммы вкладов полюсов и точек ветвления, лежащих в комплексной плоскости l . В потенциальном рассеянии и некоторых упрощенных моделях сильных взаимодействий в комплексной плоскости l не возникают точки ветвления, и поэтому в дальнейшем, вплоть до гл. 8, мы не будем их рассматривать.

Мы уже знаем, что полюса Редже соответствуют связанным состояниям или резонансам, и эта глава будет посвящена тому, что мы будем следить за тем, как полюса Редже возникают в амплитудах нерелятивистского потенциального рассеяния, в фейнмановских диаграммах теории возмущений, в квантовой теории поля, в различных динамических моделях сильных взаимодействий.

Хотя совершенно ясно, что никакие примеры не могут доказать того, что полюса Редже действительно возникают в динамике адронных взаимодействий, эти примеры убеждают нас в правдоподобности этого предположения. Кроме того, они содержат некоторые указания на то, какими свойствами обладали бы реджевские траектории, если бы их существование было строго доказано.

Мы начинаем эту главу с наиболее общих результатов, которые справедливы всегда и не зависят от конкретных рассматриваемых моделей, т. е. не являются свойствами этих моделей.

3.2. Свойства траекторий Редже

Свойства аналитичности и унитарности парциальных амплитуд подразумевают существование некоторых общих свойств траекторий Редже.

Например, возникновение полюса при $l = \alpha(t)$ подразумевает, что

$$[B_l(t)]^{-1} \rightarrow 0, \text{ когда } l \rightarrow \alpha(t). \quad (3.2.1)$$

Это свойство может быть неявно использовано при определении функции $\alpha(t)$ и, следовательно, говорит об аналитичности функции $\alpha(t)$. Однако значительно более полезно начать с того, что написать, исходя из (2.6.2) и (2.6.8) [323, 41], следующее выражение:

$$B_l(t) = \int_{s_T}^{s_1} + \int_{s_1}^{\infty} [(16\pi^2)^{-1} Q_l(z_i) D_s(s, t) (q_{i13} q_{i24}) dz_i] \equiv E_l(t) + F_l(t). \quad (3.2.2)$$

Для того чтобы определить функции $E_l(t)$ и $F_l(t)$, область интегрирования была разделена некоторой точкой s_1 на две области. Затем если $D_s(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$, а из (A.27) следует, что $Q_l(z_i) \sim s^{-l-1}$, то мы находим

$$F_l(t) \sim \int_{s_1}^{\infty} s^{-l-1+\alpha(t)} ds = - \frac{\exp [(\alpha(t)-1) \ln s_1]}{\alpha(t)-l}. \quad (3.2.3)$$

Таким образом $F_l(t)$ содержит полюс. Так как в определении $E_l(t)$ входит интегрирование по конечному отрезку s , то эта функция не содержит полюса. Таким образом, вместо определения (3.2.1) можно ввести другое определение функции $\alpha(t)$:

$$(F_l(t))^{-1} \rightarrow 0, \text{ когда } l \rightarrow \alpha(t). \quad (3.2.4)$$

Из определения (3.2.2) совершенно очевидно, что функция $F_l(t)$ имеет точно такие же сингулярности, что и амплитуда $B_l(t)$, т. е. тот же самый правый динамический разрез, начинающийся от порога

t_T , возникающий вследствие сингулярностей s -канала, но сама точка ветвления сдвинута несколько дальше влево в плоскости t , так как ее положение теперь определяется величиной s_1 , а не s_T [подставленной вместо M^2 в выражение (2.6.16), см. разд. 2.6]. Так как кинематические пороговые факторы, приводящие к сингулярности на пороге, устранены из $B_l(t)$, то, естественно, они отсутствуют в $F_l(t)$ [см. (3.2.2)].

Теорема о неявных функциях говорит (см. [381, с. 198]) о том, что если $[F_l(t)]^{-1}$ — регулярная функция в окрестности некоторой точки $t = t_p$ и если

$$\partial [F_l(t_p)]^{-1} / \partial l \Big|_{l=\alpha(t_p)} \neq 0, \quad (3.2.5)$$

то функция $\alpha(t_p)$ также является регулярной функцией в окрестности точки t_p . Это можно очень хорошо продемонстрировать, если разложить функцию $[F_l(t)]^{-1}$ в ряд Тейлора около точки $t = t_p$, $l = \alpha(t_p)$:

$$(F_l(t))^{-1} = a_1(l - \alpha(t_p)) + a_2(l - \alpha(t_p))^2 + \dots + b_1(t - t_p) + b_2(t - t_p)^2 + \dots + c_2(t - t_p)(l - \alpha(t_p)) + \dots \quad (3.2.6)$$

Затем, положив $[F_l(t)]^{-1} = 0$ при $l = \alpha(t)$, получим разложение

$$\alpha(t) = \alpha(t_p) - (b_1/a_1)(t - t_p) + \dots, \quad (3.2.7)$$

которое представляет собой ряд Тейлора для функции $\alpha(t)$, и поэтому функция $\alpha(t)$ должна быть регулярна в окрестности точки t_p . Однако в том случае, если условие (3.2.5) не выполняется, т. е. если $a_1 = 0$, то

$$\alpha(t) = \alpha(t_p) \pm (-b_1/a_2)^{1/2} (t - t_p)^{1/2} + \dots \quad (3.2.8)$$

и имеются две траектории, которые пересекаются в точке $t = t_p$. Каждая из них содержит точку ветвления корневого типа, причем их мнимые части при $t < t_p$ имеют противоположные знаки и равны по величине — это необходимо для сохранения аналитичности функции $F_l^{-1}(t)$. Конечно, в том случае, если в этой точке обращается в нуль и b_1 , точки ветвления не будет.

Таким образом, можно заключить, что функция $\alpha(t)$ аналитична тогда, когда аналитична функция $F_l^{-1}(t)$. Конечно, это справедливо в случае, когда две или более траектории не пересекаются, ибо в противном случае функция каждой траектории может иметь (а может и не иметь) точку ветвления. Итак, если только траектории не пересекаются, можно ожидать, что функция $\alpha(t)$ имеет те же самые сингулярности, что и $F_l^{-1}(t)$. Отметим, что положение левого разреза в функции $F_l(t)$ довольно произвольно, так как оно зависит от s_1 . Мы можем сделать по своему желанию s_1 сколь угодно большим и все равно будем получать полюс в (3.2.3), потому что он связан с расходимостью на верхнем пределе интеграла в (3.2.2) и вполне очевидно, что функция $\alpha(t)$ не может содержать левого разреза $F_l^{-1}(t)$. Следовательно, если только две траектории не сталкиваются, функция $\alpha(t)$ имеет только динамический правый разрез от t_T до $+\infty$.

Фактически такие столкновения траекторий должны возникать при $t = 0$ для фермионных траекторий, чтобы удовлетворять обобщен-

ной симметрии Мак-Дауэлла (см. разд. 6.5). Кроме того, они появляются в различных вычислениях, проводимых в задачах потенциального рассеяния, но это явление возникает только, когда $\text{Re}\{t\} < -1/2$ (см. следующий раздел). В настоящее время не имеется никаких прямых указаний на то, что в адронной физике при $t < 0$ возникают комплексные траектории (см. однако разд. 8.6), и поэтому обычно предполагается, что функции траекторий являются действительными функциями при $t < t_T$.

Поэтому, раз уж $\alpha(t)$ — аналитическая функция, можно написать дисперсионные соотношения

$$\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im}\{\alpha(t')\}}{t' - t} dt'. \quad (3.2.9)$$

Отметим, что обычно приходится в этих дисперсионных соотношениях делать вычитания. Например если

$$\text{Re}\{\alpha(t)\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A(t),$$

где $A(t)$ — полином по t , то имеем

$$\alpha(t) = A(t) + \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im}\{\alpha(t')\}}{t' - t} dt'. \quad (3.2.10)$$

В следующем разделе мы найдем, что для потенциалов с хорошим поведением (типа Юкавы) траектории стремятся к отрицательным целым числам, когда $t \rightarrow \infty$, приводя к

$$\alpha(t) = -n + \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im}\{\alpha(t')\}}{t' - t} dt', \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.11)$$

С другой стороны, траектории, которые встречаются в физике частиц, приблизительно линейны с довольно малыми мнимыми частями (см. разд. 5.3) и поэтому вместо (3.2.11) будет

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im}\{\alpha(t')\}}{t' - t} dt'. \quad (3.2.12)$$

Однако интеграл в (3.2.12) может оказаться расходящимся. Тогда потребуется сделать вычитания, аналогично тому как это делалось в (1.10.10). Например, если окажется, что достаточно сделать два вычитания, то получим

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{t^2}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im}\{\alpha(t')\}}{t'^2 (t' - t)} dt'. \quad (3.2.13)$$

Мы сделали вычитания при $t = 0$ и поэтому $\alpha_0 = \alpha(0)$ и $\alpha_1 = \alpha'(0) \equiv (d\alpha/dt)_{t=0}$.

Мы найдем в дальнейшем (см. разд. 5.4), что $\text{Im} \{\alpha(t)\} > 0$ при $t > t_T$ и тогда если взять n -ю производную по t от (3.2.11), либо (3.2.12) или (3.2.13)

$$\frac{d^n \alpha}{dt^n} = \frac{n!}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im} \{\alpha(t')\}}{(t' - t)^{n+1}} dt, \quad (3.2.14)$$

то сразу видим, что все производные положительны при $t < t_T$. Функция, обладающая такими свойствами, называется функцией Герглотца [232].

Если полюс имеет вид (2.8.3), то, вспомнив (2.6.8), получим

$$B_l(t) \xrightarrow{l \rightarrow \alpha(t)} \gamma(t)/[l - \alpha(t)], \text{ где } \gamma(t) \equiv \beta(t) (q_{t13} q_{t24})^{-\alpha(t)}. \quad (3.2.15)$$

Функция $\gamma(t)$, которая является вычетом в полюсе Редже и из которой устранено пороговое поведение, довольно часто называется «приведенным вычетом». Если использовать теорему Коши о вычетах, то из формулы (3.2.2) можно получить

$$\gamma(t) = (1/2\pi i) \oint dF_l(t), \quad (3.2.16)$$

где контуром интегрирования является замкнутая кривая, охватывающая точку $l = \alpha(t)$ и не захватывающая никаких других сингулярностей функции $F_l(t)$. Эта формула вместе с теоремой о неявных функциях указывает на то, что $\gamma(t)$ будет иметь аналитические свойства, похожие на те, которые имеет функция $\alpha(t)$, т. е. она будет иметь динамический правый разрез из-за $F_l(t)$. Конечно, все это справедливо в том случае, если не пересекаются две или более траекторий. Из тех же соображений, из которых было написано дисперсионное соотношение (3.2.9), можно написать дисперсионное соотношение для реджевского приведенного вычета

$$\gamma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im} \{\gamma(t')\}}{t' - t} dt', \quad (3.2.17)$$

в котором, так же как и в предыдущем случае, можно сделать вычитания, если это необходимо.

Можно также исследовать с помощью соотношения унитарности природу точки ветвления в функции траектории при $t = t_T$. Для этого рассмотрим процесс упругого рассеяния $1 + 3 \rightarrow 1 + 3$ в области ниже первого неупругого порога t_1 в t -канале. Тогда из (2.6.23) имеем

$$\text{Im} \{(B_l(t))^{-1}\} = -\rho(t) (q_{t13})^{2l}, \quad t_T < t < t_1, \quad (3.2.18)$$

где $\rho(t) \equiv 2q_{t13} t^{-1/2}$. Функция

$$\frac{-[i\rho(t) (-q_{t13}^2)^l]}{\cos \pi l} = -[i\rho(t) (q_{t13}^2)^l \exp(\pm i\pi l)] / \cos \pi l \quad (3.2.19)$$

при $t_T < t < t_I$ имеет такой же скачок, что и $[B_l(t)]^{-1}$. Таким образом, функция

$$Y(t, l) \equiv \cos \pi l [B_l(t)]^{-1} + i\rho(t) (-q_{i13}^2)^l \quad (3.2.20)$$

аналитична в этой области. Из (3.2.1) имеем

$$Y(t, l) \rightarrow i\rho(t) (-q_{i13}^2)^l, \text{ при } l \rightarrow \alpha(t). \quad (3.2.21)$$

Если определим $\alpha_T \equiv \alpha(t_T)$, то тогда [используя (1.7.15)] $t_T = (m_1 + m_3)^2$

$$Y(t, \alpha_T) \approx -(2/\sqrt{t_T}) [(t_T - t)/4]^{\alpha_T + 1/2}, \text{ при } t \rightarrow t_T. \quad (3.2.22)$$

Итак, $Y(t_T, \alpha_T) = 0$, если $\alpha_T > -1/2$. Если разложить Y в ряд Тейлора около пороговых значений t и α , то получим

$$Y(t, \alpha(t)) = Y(t_T, \alpha_T) + Y'_i(\alpha(t) - \alpha_T) + Y'_i(t - t_T) + \dots; \quad (3.2.23)$$

где

$$Y'_i \equiv \partial Y / \partial l \Big|_{l=\alpha_T}, \quad Y'_i = \partial Y / \partial t \Big|_{t=t_T}. \quad (3.2.24)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \alpha_T - \frac{2}{\sqrt{t_T}} Y'_i{}^{-1} \left(\frac{t - t_T}{4} \right)^{\alpha_T + 1/2} \exp[-i\pi(\alpha_T \mp 1/2)] - \\ - (t - t_T)(Y'_i/Y'_i) + \dots, \quad \alpha_T > -1/2. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Следовательно, траектория имеет пороговую точку заострения (cusp) при $-1/2 < \alpha_T < 1/2$, а выше порога

$$\text{Im}\{\alpha(t)\} \sim (t - t_T)^{\alpha_T + 1/2}, \quad t \approx t_T. \quad (3.2.26)$$

Однако в потенциальном рассеянии эти эффекты заострения будут малы [397].

Поскольку

$$Y(t, l) \rightarrow -2/\sqrt{t_T}, \quad l \rightarrow -1/2, \quad t \rightarrow t_T, \quad (3.2.27)$$

то условие существования полюса (3.2.1) с помощью (3.2.20) принимает вид

$$2/\sqrt{t_T} = (2/\sqrt{t_T}) (q_{i13}^2)^{l+1/2} \exp[-i\pi(l+1/2)]. \quad (3.2.28)$$

Оно может быть удовлетворено при $l = \alpha_n$ для любых α_n , таких, что

$$(\ln(q_{i13}^2) - i\pi)(\alpha_n + 1/2) = 2\pi ni, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.2.29)$$

или, в явном виде,

$$\alpha_n = 2\pi n / (\pi + i \ln(q_{i13}^2)) - 1/2. \quad (3.2.30)$$

Итак, бесконечное число траекторий сходится к точке $\alpha = -1/2$ при $t \rightarrow t_T$ ($q_{i13} \rightarrow 0$). Это явление иногда называется явлением Гривова—Померанчука [207, 208]. Их возникновение должно служить предостережением для тех, кто думает, что левая полуплоскость углового момента имеет простую аналитическую структуру.

3.3. Потенциальное рассеяние

В этом разделе будет дан краткий обзор поведения решений уравнения Шредингера при рассмотрении задач нерелятивистского потенциального рассеяния как функций переменной l . Как уже упоминалось ранее, при исследовании именно этих задач были впервые обнаружены полюса Редже [339]. Изучение этих задач имеет неоспоримое и чрезвычайно важное достоинство, заключающееся в том, что все результаты могут быть строго доказаны. Но поскольку потенциальное рассеяние имеет довольно отдаленное отношение к физике частиц, обсуждение будет носить довольно поверхностный характер. Заинтересовавшемуся читателю мы можем предложить для рассмотрения более полные работы, где все необходимые доказательства приведены в подробностях [365, 318, 17].

3.3а. Решения уравнения Шредингера

Если потенциал взаимодействия $U(r)$ является функцией только r (все рассмотрение происходит в полярных координатах), то решения уравнения Шредингера (1.13.3)

$$\nabla^2\psi - U(r)\psi + k^2\psi = 0 \quad (3.3.1)$$

могут быть разложены по парциальным волнам (см., например, [355, с. 81])

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} (1/r) \varphi_l(r) P_l(\cos \theta). \quad (3.3.2)$$

Цилиндрическая симметрия устраняет любую зависимость от азимутального угла, а радиальная волновая функция $\varphi_l(r)$ удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера (2.1.1)

$$d^2\varphi_l(r)/dr^2 + (k^2 - l(l+1)/r^2 - U(r))\varphi_l(r) = 0. \quad (3.3.3)$$

Квантование углового момента, ограничивающее возможные значения l целыми положительными числами, является отражением требования, чтобы угловая зависимость в (3.3.2) была конечна при любых значениях угла θ . Но в уравнение (3.3.3) l входит как свободный параметр и ничто не мешает нам разрешить его при произвольном значении l . Теорема Пуанкаре (см. ниже) гласит, что решения подобного дифференциального уравнения — обычно аналитические функции таких параметров и поэтому можно надеяться, что $\varphi_l(r)$ будет аналитической функцией по переменной l . Стоит также подчеркнуть такое важное свойство уравнения (3.3.3), как его симметрия относительно замены $l \rightarrow -(l+1)$, а также замены $k \rightarrow -k$.

До тех пор пока рассматриваются «регулярные» потенциалы, т. е. когда $r^2U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, поведение решений уравнения (3.3.3) при малых r контролируется центробежным барьером, возникающим из-за члена $l(l+1)r^{-2}$. Этот член привносит дополнительный вклад, а часто просто обуславливает отталкивание в эффективном потенциале. С физической точки зрения этот член приводит к дополни-

тельными трудностям при удержании частиц вместе с большим относительным угловым их моментом вследствие того, что он создает центробежную силу. Если $r \rightarrow 0$, то можно пренебречь членами k^2 и U в (3.3.3). Очевидно, что уравнение имеет два линейно независимых решения, которые ведут себя как r^{-l} и r^{l+1} соответственно, при $r \rightarrow 0$. Так как физическое решение должно быть конечно в начале координат, при $r = 0$, то физическим решением уравнения (3.3.3) является решение, которое обозначим как $\varphi_l(r) = \varphi(l, k, r) \sim r^{l+1}$.

Это решение удовлетворяет следующему интегральному уравнению (см. Ньютон [318, с. 21], де Альфаро и Редже [17, с. 38]):

$$\varphi(l, k, r) = \varphi_0(l, k, r) + \int_0^r dr' G(r, r') U(r') \varphi(l, k, r'), \quad (3.3.4)$$

где G — функция Грина, которую можно выписать в явном виде с помощью функций Ганкеля и которая имеет вид

$$G(r, r') = i \frac{\pi}{4} (rr')^{1/2} [H_{l+1/2}^{(2)}(kr) H_{l+1/2}^{(1)}(kr') - H_{l+1/2}^{(1)}(kr) H_{l+1/2}^{(2)}(kr')] , \quad (3.3.5)$$

причем φ_0 — решение уравнения (3.3.3) при $U(r) = 0$, т. е.

$$\varphi_0(l, k, r) = r^{l+1/2} \Gamma(l + 3/2) (k/2)^{-l-1/2} J_{l+1/2}(kr), \quad (3.3.6)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя. Прямой подстановкой можно убедиться, что (3.3.4) удовлетворяет уравнению (3.3.3) и граничному условию при $r = 0$.

В том случае, если $rU(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, потенциал $U(r)$ и член, отвечающий центробежному барьеру, можно не рассматривать в (3.3.3) в области $r \rightarrow \infty$. В этом пределе имеет смысл рассмотреть «нерегулярные» решения $\chi(l, \pm k, r)$, удовлетворяющие граничным условиям $\chi(l, \pm k, r) \sim \exp(\mp ikr)$ при $r \rightarrow \infty$, поскольку эти решения отвечают падающей и выходящей плоским волнам, с помощью которых и определяется амплитуда рассеяния. Они удовлетворяют интегральному уравнению (см. Ньютон [318, с. 14], де Альфаро и Редже [17, с. 40]):

$$\chi(l, k, r) = \chi_0(l, k, r) - \int_r^\infty G(r, r') U(r') \chi(l, k, r') dr', \quad (3.3.7)$$

где G — та же функция Грина (3.3.5), а χ_0 — решение (3.3.3) при $U(r) = 0$, т. е.

$$\chi_0(l, k, r) = \exp[-(i\pi/2)(l+1)] (\pi kr/2)^{1/2} H_{l+1/2}^{(2)}(kr). \quad (3.3.8)$$

Чтобы получить другое, линейно независимое решение, нужно в (3.3.8) сделать замену $k \rightarrow -k$.

Поскольку любое решение (3.3.3) можно выразить с помощью одной из двух систем линейно независимых решений, то можно свя-

зять физическое решение (3.3.4) с решением (3.3.7), имеющим на бесконечности плоские волны:

$$\varphi(l, k, r) = (1/2ik) (f(l, k) \chi(l, -k, r) - f(l, -k) \chi(l, k, r)), \quad (3.3.9)$$

где функции $f(l, \pm k)$ называются функциями Йоста и удовлетворяют (де Альфаро и Редже [17, с. 59])

$$f(l, k) = f_0(l, k) + \int_0^{\infty} U(r') \chi(l, k, r') \varphi(l, k, r') dr'; \quad (3.3.10)$$

$$f_0(l, k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{k}{2}\right)^{-l} \exp\left(-\frac{i\pi l}{2}\right). \quad (3.3.11)$$

Следовательно, при $r \rightarrow \infty$

$$\varphi(l, k, r) \rightarrow 1/2ik (f(l, k) \exp(ikr) - f(l, -k) \exp(-ikr)). \quad (3.3.12)$$

Теперь введем парциальные волны S -матрицы следующим образом:

$$S(l, k) = \exp[2i\delta_l(k)],$$

где $\delta_l(k)$ — фазовый сдвиг [см. (2.2.10)]. Они связаны с асимптотическим поведением регулярного решения

$$\varphi(l, k, r) \sim [\exp(-ikr) - \exp[-i(\pi l - kr) S(l, k)]], \quad (3.3.13)$$

т. е. $S(l, k)$ имеет смысл отношения выходящего потока ($\chi \sim \exp(ikr)$) к входящему [$\chi \sim \exp(-ikr)$] для данной парциальной волны. В терминах функций Йоста она имеет следующий вид:

$$S(l, k) = [f(l, k)/f(l, -k)] \exp(i\pi l), \quad (3.3.14)$$

причем парциальная амплитуда рассеяния, полученная из этой S -матрицы, равна

$$A_l(k) = [S(l, k) - 1]/2ik \quad (3.3.15)$$

[см. (2.2.10), учет нерелятивистской кинематики приводит к замене $\rho(s) \rightarrow k$].

3.36. Аналитические свойства решений

Аналитические свойства амплитуд $A_l(k)$ можно легко вывести из рассмотрения аналитических свойств функций $f(l, k)$, полученных с помощью (3.3.10).

Теорема Пуанкаре [334] гласит, что если некоторый параметр входит в дифференциальном уравнении только в функции, которые по нему голоморфны, и если граничные условия не зависят от этого параметра, то решения данного уравнения будут голоморфны по этому параметру.

Поскольку функции в уравнении (3.3.3) — аналитические функции по l и мы рассматриваем функцию $r^{-l-1} \varphi(l, k, r)$, граничные условия становятся не зависящими от l , и регулярное решение $\varphi(l, k, r)$ должно быть аналитической функцией по переменной l при $\text{Re}\{l\} > -1/2$. Однако если $\text{Re}\{l\} < -1/2$, то регулярное решение стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$, и поэтому точка $r = 0$ не является точкой регулярности уравнения (3.3.3).

Для того чтобы попасть в область $\operatorname{Re} \{l\} < -1/2$, необходимо сделать аналитическое продолжение в интегральном уравнении (3.3.4), возможность которого сильно зависит от природы потенциала. В случае если потенциал сингулярный, т. е. $rU(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, и если он еще является и потенциалом отталкивания, то граничное условие перестает зависеть от l , так как наиболее сингулярный член содержится в потенциале. Итак, мы теперь можем использовать симметрию уравнения (3.3.3) относительно замены $l \rightarrow -(l+1)$ для того, чтобы получить S -матрицу при $\operatorname{Re} \{l\} < -1/2$, т. е. из (3.3.14):

$$S(l, k) = -\exp(-2\pi i l) S(-l-1, k). \quad (3.3.16)$$

Это отвечает симметрии Мандельштама (2.9.5). Однако в случае сингулярного потенциала притяжения S -матрица не может быть определена таким способом, так как она содержит бесчисленное множество связанных состояний [171].

Однако в дальнейшем мы будем в основном касаться потенциалов, регулярных в начале координат и подобных обобщенному потенциалу Юкавы (1.13.17). Для таких потенциалов можно сделать разложения

$$\left. \begin{aligned} rU(r) - k^2 r &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n; \\ \varphi(l, k, r) &= r^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \end{aligned} \right\} \quad (3.3.17)$$

и подставить их в (3.3.3). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r , получаем

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{(2l+n+1)n} \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_{n-1-m}, \quad n \geq 1; \\ b_0 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.18)$$

Итак, функция φ — мероморфная функция в плоскости l . Ее полюса лежат при $2l = -(n+1)$, т. е. когда $2l$ равняется отрицательным целым числам. Все это, конечно, справедливо лишь при условии, что ряд (3.3.17) сходится в некоторой окрестности точки $r=0$. Аналогичное утверждение справедливо и для функций Юста в (3.3.9), с единственной оговоркой, что полюса при полужелых значениях l исчезают вследствие симметрии Мандельштама. С другой стороны, так как положения полюсов при целых отрицательных значениях l не зависят от r , то эти фиксированные полюса сократятся в отношении (3.3.14) и таким образом будут отсутствовать в S -матрице.

Если потенциал исчезает в начале координат, например как $rU(r) \sim p^{p+1}$, и если его можно представить в виде (1.13.17), то это приводит [разлагая экспоненту в (1.13.17)] к

$$\int_m^{\infty} \rho(\mu) \mu^n d\mu = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p, \quad (3.3.19)$$

поэтому отсутствуют полюса функции φ при целых l , когда $\operatorname{Re} \{l\} > -1 - p/2$.

Особый, промежуточный случай представляет собой потенциалы, которые содержат сингулярный член V_0/r^2 . Этот член можно добавить к члену в (3.3.3), отвечающему за возникновение центробежного барьера, и тогда возникает член, отвечающий центробежному барьеру, с эффективным угловым моментом L , где $L(L+1) \equiv l(l+1) + V_0$. Таким образом, полюса в плоскости L при $L = n$ приводят к появлению точек ветвления в плоскости l при

$$l = (1/2) \{ -1 \pm [1 - 4V_0 + 4n(n+1)]^{1/2} \}, \quad (3.3.20)$$

причем положения этих точек ветвления зависят от V_0 .

В сильных взаимодействиях, где поведение взаимодействия на малых расстояниях известно хуже всего, применимость изложенного выше анализа вызывает большие сомнения. Хотя тот факт, что потенциал Юкавы и его обобщения аналогичны тем потенциалам, которые возникают при обмене частицами и приводят к мероморфным функциям Йоста при $\operatorname{Re} \{l\} > -1$, позволяет предполагать, что аналогичное заключение может быть справедливо также и в физике частиц.

С помощью аргументов, совершенно аналогичных тем, которые были использованы выше, можно показать, что функция $\varphi(l, k, r)$ голоморфна по k во всей плоскости k ($\operatorname{Re} \{l\} > -1/2$), так как k входит аналитическим образом в уравнение (3.3.3) и не появляется в граничных условиях. Подобным образом функция $\chi(l, k, r)$ голоморфна по k при $\operatorname{Re} \{k\} > 0$, $\operatorname{Im} \{k\} < 0$. Но в точке $k = 0$ функция χ имеет точку ветвления, которую можно увидеть прямо из выражения (3.3.8) для χ_0 . Решение при $\operatorname{Re} \{k\} < 0$ может быть получено с помощью продолжения вокруг этой сингулярности, заменяя χ на $\chi(l, k \exp(-i\pi), r)$. Продолжение же в область $\operatorname{Im} \{k\} > 0$ можно сделать только с помощью серьезных методов. Было найдено, что функции Йоста обладают свойством вещественной (эрмитовой) аналитичности

$$f(l, k) = f^*(l^*, k^*). \quad (3.3.21)$$

Однако, если потенциал имеет вид потенциала Юкавы и ведет себя подобно $\exp(-mr)$ при $r \rightarrow \infty$, асимптотическая форма волновой функции $\chi \sim \exp(ikr)$, отвечающая выходящей плоской волне, затухает быстрее, чем $U(r) \exp(-ikr)$ при $r \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Im} \{k\} > m/2$, и поэтому решение в виде ряда отсутствует в данной области. Это явление происходит из-за того, что парциальная амплитуда имеет левый разрез в плоскости k^2 , который начинается в точке $k^2 = -m^2/4$, как и должно было бы быть в соответствии с аналитическими свойствами, обсуждавшимися в разд. 1.13 и 2.6.

Зная сингулярности функций Йоста по k и l , можно теперь перейти к рассмотрению сингулярностей парциальной амплитуды, которую с помощью (3.3.14) и (3.3.15) можно записать в виде

$$A_l(k) = \frac{1}{2ik} \left[\frac{\exp(i\pi l) f(l, k) - f(l, -k)}{f(l, -k)} \right]. \quad (3.3.22)$$

Ясно, что ее сингулярности по k^2 будут точно такими же у функций f , а именно: она будет иметь левый разрез, начинающийся в точке $k^2 = -m^2/4$, и правый разрез вдоль положительной оси k^2 , начинающийся при $k^2 = 0$, как было найдено в разд. 1.13. Фактически, с помощью методов, основанных на использовании парциальных амплитуд, можно доказать, что для рассеяния в потенциале Юкавы справедливо представление Мандельштама [54]. Конечно, правый разрез является следствием условия унитарности $SS^* = 1$ и в случае целых l можно с помощью (3.3.15) и (3.3.21) получить

$$A_l(k_+) - A_l(k_-) = 2ik A_l(k_+) A_l(k_-), \quad (3.3.23)$$

где $k_{+,-}$ — значения k , взятые выше или ниже разреза соответственно [ср. (2.2.7)]. Для того чтобы получить аналогичную формулу для случая нецелых l , необходимо устранить пороговое поведение [так же, как и в (2.6.8)], вводя амплитуды

$$B_l(k) = A_l(k)/k^{2l}, \quad (3.3.24)$$

которые являются эрмитово аналитическими и вдоль правого разреза $k^2 > 0$ удовлетворяют следующему соотношению унитарности [ср. (2.6.23)]:

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} \{B_l(k)\} &\equiv B_l(k_+) - B_l(k_-) = 2ik^{2l+1} B_l(k_+) B_l(k_-) = \\ &= 2ik^{2l+1} |B_l(k)|^2. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

3.3.в. Полюса Редже

Помимо точек ветвления, которые мы обсуждали выше, не исключена возможность появления в выражении (3.3.22) полюсных особенностей. Причиной их появления может служить обращение в нуль $f(l, -k)$. Если это произойдет, скажем, при данном l и некотором $k = ik_b$, $k_b > 0$, то совершенно очевидно из (3.3.12), что при $r \rightarrow \infty$ волновая функция будет экспоненциально подавлена как $\exp(-k_b r)$ и этот полюс будет соответствовать связанному состоянию, лежащему при действительном отрицательном значении k^2 . Так как f является аналитической функцией от l , то положение этого полюса находится при $l = \alpha(k_b^2)$, где функция α определяется из условия

$$f(\alpha(k_b^2), -k_b) = 0, \quad (3.3.26)$$

будет также аналитической функцией l . С другой стороны, если нуль функции $f(l, -k)$ расположен в области $\operatorname{Im} \{k\} < 0$, скажем, при $k = k_R - ik_I$, то в окрестности k можно написать

$$f(l, -k) \approx C(k - k_R + ik_I)$$

и, следовательно,

$$f(l, k) = f^*(l^*, -k^*) = C^*(k - k_R - ik_I), \quad (3.3.27)$$

где C — некоторая константа. Таким образом, в S -матрице (3.3.14) возникает полюс, отвечающий резонансному вкладу, в виде

$$S(l, k) \approx \exp\{i(\pi l - 2 \operatorname{arg} C)\} \left(\frac{k - k_R - ik_I}{k - k_R + ik_I} \right). \quad (3.3.28)$$

(Заметим, что невозможна ситуация, когда $k_I = 0$, так как тогда и $f(l, k)$, и $f(l, -k)$ должны обратиться в нуль в одном и том же месте, и соответственно φ также должно обратиться в нуль.) Итак, резонансы будут также лежать на реджевских траекториях, как и связанные состояния.

Для того чтобы найти реджевские траектории некоторого потенциала, необходимо провести исследование нулей функции $f(l, -k)$. Особенно простой вид имеют траектории в кулоновском потенциале $V(r) = e^2/r$. Несмотря на то что в этом потенциале шарушаются тре-

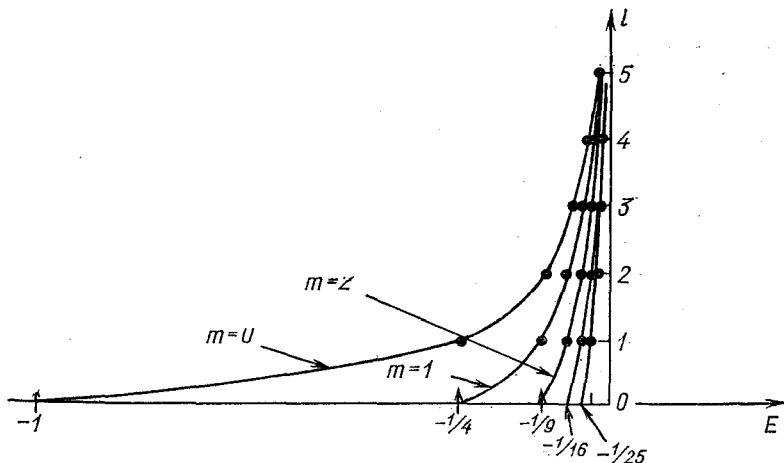


Рис. 3.1. Реджевские траектории для кулоновского потенциала [см. (3.3.29)].

При целых значениях l имеются вырожденные уровни атома водорода с главным квантовым числом $n=l+m+1$ ($m=0, 1, 2, \dots$), где m — радиальное квантовое число. (E измеряется в единицах $1/4 = 1$ ридберг)

бования сходимости при $r \rightarrow \infty$ ($rU(r) \neq 0$), хорошо известно (см., например, Шифф [355, с. 138]), что фазы могут быть легко определены, если только устранить бесконечную часть $\exp[(ie^2 \ln r)/2k]$, происходящую от бесконечности радиуса взаимодействия. S -матрица имеет вид [361]

$$S(l, k) = \Gamma(l+1 - ie^2/2k) / \Gamma(l+1 + ie^2/2k). \quad (3.3.29)$$

Это выражение содержит полюса в точках, когда аргумент Γ -функции, стоящей в числителе, равняется целым отрицательным числам и поэтому

$$l = \alpha_n(s) \equiv -m - 1 + ie^2/2k, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3.30)$$

причем связанные состояния возникают при

$$s = E = k^2 = -e^4/4(l+m+1)^2. \quad (3.3.31)$$

Это выражение является обычной, хорошо известной формулой Ридберга для атома водорода (рис. 3.1). Отметим, что при $E = 0$ все траектории стремятся к бесконечности. Этот факт отражает такую важ-

ную характеристику этого потенциала, как обмен безмассовыми фотонами.

В случае потенциалов подобных потенциалу Юкавы уравнение Шредингера может быть разрешено численными методами с помощью разложения в ряд (3.3.17). Некоторые примеры вычислений показаны на рис. 3.2. В потенциалах с достаточно сильным притяжением возникают связанные состояния при небольших значениях l . С ростом l из-за отталкивания, связанного с наличием центробежного барьера, эти состояния становятся все менее и менее связанными, и в резуль-

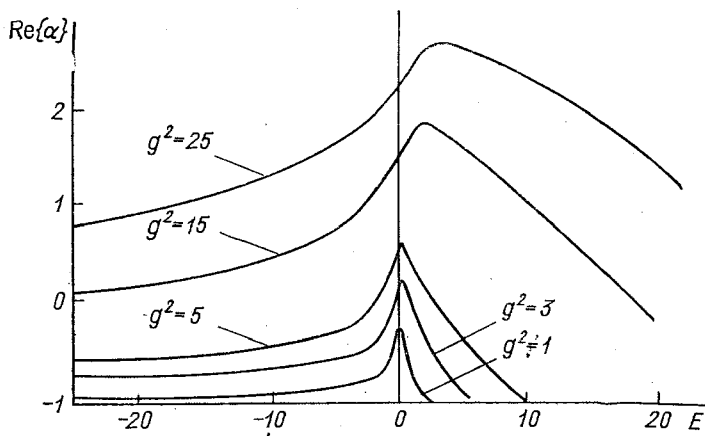


Рис. 3.2. Реджевские траектории для потенциала Юкавы с притяжением: $V(r) = -g^2 \exp(-r)/r$ при различных значениях g^2 , из работы Ловласа и Мэссо [290].

Смотри также работу [16]

тате могут проявить себя как резонансы с высоким спином. Как только эффективный потенциал $U(r) = l(l+1)r^2$ становится слишком слабым для того чтобы создать полюс при данном l , траектория сразу начинает загигаться. В дальнейшем мы увидим, что в пределе $g^2 \rightarrow 0$ основная траектория все время остается в области $l = -1$ при любом значении k , т. е. она расположена в той области, где лежит фиксированный полюс функции Йоста с самым большим l . Это следствие того, что борновское приближение (1.13.16) или (1.13.18), которое ведет себя как t^{-1} при всех s , является хорошим приближением амплитуды рассеяния в этом пределе.

В действительности вследствие того, что первое борновское приближение доминирует при больших s , лидирующая реджевская траектория имеет асимптотическое поведение $\alpha \rightarrow (-1)$ при $s \rightarrow \pm\infty$, даже в случае больших значений константы g^2 . Однако в том случае, когда потенциал стремится к нулю при подходе к началу координат, т. е. $rU(r) \sim r^{p+1}$ при $r \rightarrow 0$, тогда траектория стремится в асимптотике к наибольшему целому числу $l \leq -1 - (p+1)/2$. Это утвер-

ждение прямо следует из (1.13.18), так как если знаменатель этого выражения разложить в ряд при больших t

$$A^B(s, t) = - \int_m^{\infty} d\mu \rho(\mu) \left(\frac{1}{t} + \frac{\mu^2}{t^2} + \dots \right), \quad (3.3.32)$$

то совершенно ясно из (3.3.19), что коэффициенты при степенях t^{-1} , t^{-2} , t^{-3} , ..., $t^{-p/2-1}$ исчезают.

Другим классом потенциалов, для которых вычислены траектории Редже, являются квадратичные потенциалы (см. [318]) и, в частности, трехмерный гармонический осциллятор $V(r) = (1/2) M \omega^2 r^2$, где ω — классическая частота. Его собственные состояния равны (см. Морс и Фешбах [313, с. 1662])

$$E = k^2 = \hbar \omega (n + 1/2) = \hbar \omega (2m + l + 3/2), \quad (3.3.33)$$

давая траектории с поведением $l \sim E$. Данное свойство обуславливает особый интерес к этому потенциалу, так как в случае релятивистской кинематики, когда $E = k^2 + m^2$, можно ожидать, что получится поведение траекторий $l \sim E^2$ вместо того, которое получается в нерелятивистском случае. А такое поведение соответствует тому, что наблюдают в физике частиц (см. гл. 5). На этом наблюдении основаны различные кварковые модели для мезонных траекторий (см. [139] и гл. 5). Эти модели используют статический вариант релятивистских уравнений Бете—Солпитера [см. (3.4.11)] вместо уравнения Шредингера с гармоническим осцилляторным потенциалом между кварками. Однако такие потенциалы не удовлетворяют требованию сходимости, т. е. $rV(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и поэтому не дают решений, отвечающих кварк-кварковому рассеянию. Но так как кварки до сих пор экспериментально не наблюдаемы, то нет ничего плохого в том, что они не могут выйти за пределы потенциала, т. е. отсутствует кварк-кварковое рассеяние!

Для потенциалов с хорошим поведением можно, исходя из «размера» связанного состояния, определить наклон траектории ниже порога. Запишем уравнение Шредингера в следующем виде:

$$D\varphi = 0, \text{ где } D \equiv \left[\frac{d^2}{dr^2} + E - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right]. \quad (3.3.34)$$

Мы ищем решение $\varphi(l, k, r)$ при $l = \alpha(E)$, где $E = k^2$. Проинтегрируем (3.3.34) по E и получим

$$\frac{dD}{dE} \varphi + D \frac{d\varphi}{dE} = 0, \text{ где } \frac{dD}{dE} = 1 - \frac{2\alpha+1}{r^2} \frac{d\alpha}{dE}. \quad (3.3.35)$$

Умножая (3.3.34) на $d\varphi/dE$, а (3.3.35) на φ и вычитая их друг из друга, получаем

$$\frac{d\varphi}{dE} D\varphi - \varphi D \frac{d\varphi}{dE} = \varphi \frac{dD}{dE} \varphi, \quad (3.3.36)$$

но

$$D\varphi - \varphi D = \frac{d^2}{dr^2} \varphi - \varphi \frac{d^2}{dr^2}. \quad (3.3.37)$$

Таким образом, левую часть равенства (3.3.36) можно записать как

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{d\varphi}{dE} \frac{d\varphi}{dr} - \varphi \frac{d^2\varphi}{dE dr} \right]. \quad (3.3.38)$$

Интегрируя обе части (3.3.36) по r от 0 до ∞ , получаем

$$\left[\frac{d\varphi}{dE} \frac{d\varphi}{dr} - \varphi \frac{d^2\varphi}{dE dr} \right]_0^\infty = \int_0^\infty \frac{dD}{dE} \varphi^2 dr. \quad (3.3.39)$$

Так как $\varphi \sim r^{l+1}$ при $r \rightarrow 0$ и $\sim \exp(-|k|r)$ при $r \rightarrow \infty$ (для случая связанного состояния), то левая часть исчезает в обоих предельных случаях при условиях: $l > -1/2$, $E < 0$.

Подставляя затем (3.3.35) в правую часть (3.3.39), окончательно получаем следующее:

$$\frac{d\alpha}{dE} = \frac{1}{2\alpha + 1} \frac{\int_0^\infty \varphi^2 dr}{\int_0^\infty (1/r^2) \varphi^2 dr} \equiv \frac{R^2}{2\alpha + 1} > 0, \quad (3.3.40)$$

где параметр R^2 , определенный в (3.3.40), имеет смысл среднего квадрата радиуса состояния, описываемого волновой функцией $\varphi(l, k, r)$. Это означает, что производная $d\alpha/dE$ принимает положительные значения при $\alpha > -1/2$, $E < 0$.

3.3г. N/D -метод

Когда встает задача о получении амплитуды рассеяния из потенциала, то ищут функцию, левый разрез которой в плоскости $E = k^2$ дается потенциалом, а правый разрез удовлетворяет соотношению унитарности (3.3.25). Существует метод решения уравнения Шредингера, основанный на использовании этих аналитических свойств, который называется N/D -методом [54]. Этот метод вызывает большой интерес в связи с тем, что, в отличие от методов, основанных на использовании уравнения Шредингера, он легко обобщается применительно к физике частиц. Конечно, это все справедливо при том условии, что амплитуды рассеяния имеют ожидаемые аналитические свойства.

Из (3.3.22) и (3.3.24) можно написать

$$B_l(E) = \frac{f(l, k) \exp(i\pi l) - f(l, -k)}{2(ik)^{l+1}} \frac{1}{(-ik)^l f(l, -k)} \equiv \frac{N_l(E)}{D_l(E)}. \quad (3.3.41)$$

И тогда из (3.3.21) сразу находим, что $N_l(k) = N_l[k \exp(-i\pi)]$ (для действительных l), и, следовательно, функция $N_l(E)$ не имеет правого разреза в плоскости E , а только левый, обусловленный потенциалом и начинающийся от $E = -m^2/4$. Отметим, что $N_l \rightarrow 0$ при $|E| \rightarrow \infty$. Из аналогичных соображений функция $D_l(E)$ не имеет левого, а содержит только правый разрез, который является следствием соотношения унитарности, причем $D_l(E) \rightarrow 1$ при $|E| \rightarrow \infty$. Обе функции N и D — аналитические функции.

Следовательно, можно написать дисперсионные соотношения

$$N_l(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2/4} \frac{\text{Im} \{N_l(E')\}}{E' - E} dE'; \quad (3.3.42)$$

$$D_l(E) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} \{D_l(E')\}}{E' - E} dE', \quad (3.3.43)$$

Если скачок функции $B_l(E)$ через левый разрез определить как $b_l(E)$, то

$$\text{Im} \{N_l(E)\} = D_l(E) b_l(E), \quad E < -m^2/4, \quad (3.3.44)$$

в то время как скачок на правом разрезе равен

$$\begin{aligned} \text{Im} \{D_l(E)\} &= N_l(E) \text{Im} \{1/B_l(E)\} = \\ &= -N_l(E) \text{Im} \{B_l(E)\} / |B_l(E)|^2 = -N_l(E) k^{2l+1} \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Это можно получить с помощью (3.3.25). Таким образом, получается система уравнений:

$$N_l(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2/4} \frac{D_l(E') b_l(E')}{E' - E} dE'; \quad (3.3.46)$$

$$D_l(E) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N_l(E') E'^{l+1/2}}{E' - E} dE'. \quad (3.3.47)$$

Решение этих уравнений при заданном $b_l(E)$ соответствует решению уравнения Шредингера с некоторым потенциалом. Конечно, задача состоит в отыскании $b_l(E)$. Она довольно легко разрешается, если рассмотреть первое борновское приближение (1.13.16), скачок которого по t равен

$$D_t(E, t) = \pi g^2 \delta(t - \mu^2).$$

Если подставить этот скачок в (2.6.19), поменяв при этом местами s и t (положив $q = k$), получим

$$b_l^+(E) = \frac{g^2}{64} P_l \left(1 + \frac{\mu^2}{2k^2} \right) \frac{1}{k^{2l+2}}, \quad E < -\frac{\mu^2}{4}. \quad (3.3.48)$$

Подстановкой этого выражения в (3.3.46) и (3.3.47) можно убедиться, что мы имеем очень хорошую аппроксимацию точного решения в области малых g^2 . Вклад второго борновского приближения также может быть получен довольно просто [126], однако вычисление вкладов членов более высоких порядков представляет трудную задачу.

В рамках этого подхода полюса Редже появляются как нули функции D , т. е. уравнение $D_{\alpha(E)}(E) = 0$ неявно определяет функцию $\alpha(E)$. Таким образом, траектория $\alpha(E)$ может быть найдена наблюдением за движением нуля функции $D_l(E)$ в плоскости l . Это являет-

сы указанием на то, что траектория $\alpha(E)$ будет иметь те же сингулярности, что и функция $D_l(E)$, т. е. только правый разрез. Это высказывание находится в согласии с выводами, полученными в предыдущем разделе.

3.4. Полюса Редже в теоретико-полевой теории возмущений

Квантовая теория поля является значительно более реалистическим подходом к физике элементарных частиц, чем потенциальный. Поэтому очень важный момент всего рассмотрения — выяснение вопроса о возникновении полюсов Редже в квантовой теории поля, хотя бы в рамках теории возмущений. В квантовой теории поля амплитуды рассеяния имеют значительно более реалистическую структуру особенностей по s и t , чем в потенциальном рассеянии. В гл. 8 будет показано, что в плоскости l возникают особенности значительно более сложные, чем полюса: реджевские точки ветвления. Такие особенности присущи полевым теориям и отсутствуют в потенциальном рассеянии, однако в этом разделе мы ограничимся рассмотрением только полюсных особенностей.

Возможно, что первое, о чем стоит упомянуть, начиная рассмотрение структуры плоскости l в квантовой теории поля, — это то, что кроме полюсов Редже, которые позднее возникнут, появятся также особенности типа δ -функции Кронеккера, отвечающие налетающим элементарным частицам. В связи с тем что мы пока рассматриваем только скалярные мезоны, разложение по парциальным волнам t -канального пропагатора типа (1.12.1) имеет вид

$$A_l(t) = \frac{g^2}{16\pi} \frac{1}{t-m^2} \delta_{l0}. \quad (3.4.1)$$

Это выражение можно получить с помощью (2.2.18) и (A.20), т. е. оно содержит только S -волновой вклад. Однако такие элементарные частицы до сих пор не обнаружены, и поэтому с самого начала мы можем быть уверены в том, что не все аспекты структуры особенностей плоскости l в квантовой теории поля будут иметь свое отражение в физике частиц. Однако в гл. 12 будет показано, что при некоторых обстоятельствах эти «входные» δ -функции могут сократиться и таким образом исчезнуть с плоскости l . В дальнейшем будем рассматривать только составные частицы, которые возникают как связанные или резонансные состояния и являясь следствием взаимодействия между элементарными частицами. Эти составные частицы будут лежать на траекториях, по аналогии с тем, как это было в потенциальном рассеянии.

Для того чтобы получить такие составные частицы, необходимо рассмотреть бесконечные совокупности фейнмановских диаграмм и при этом предположить, что асимптотическое поведение этих совокупностей диаграмм может быть получено простым суммированием главных членов асимптотик отдельных диаграмм. Этот факт может не быть строгим в математическом смысле, однако по меньшей мере при малых

константах связи, где ряду теории возмущений можно придать некоторый смысл, он кажется весьма правдоподобным.

Значительно более полный обзор затронутых выше проблем можно найти в книге Идена и др. [157, гл. 3]. Здесь же мы в основном будем касаться вопросов, связанных с получением формулы (3.4.11).

Рассмотрим фейнмановский интеграл общего вида (1.12.5) с n внутренними линиями и l замкнутыми петлями. Так как в каждой вершине выполняется закон сохранения 4-импульса, то с его помощью можно выразить все q_i через импульсы k_l , текущие по петлям, и внешние импульсы p_j . Затем, после разумных замен переменных $k_l \rightarrow k'_l$, знаменатель может быть перестроен таким образом, что можно проинтегрировать по k' , используя для этого формулу

$$\int \frac{d^4 k'}{(k'^2 + U)^3} = \frac{i\pi^2}{2U}, \quad (3.4.2)$$

а также формулы, которые получаются из нее дифференцированием обеих частей по U , и тогда [157] окончательное выражение имеет следующий вид:

$$A = \frac{\int_0^1 \prod_{i=1}^n d\alpha_i \delta\left(1 - \sum_i \alpha_i\right) C(\alpha)^{n-2l-2}}{[D(p, \alpha) + i\epsilon C(\alpha)]^{n-2l}}. \quad (3.4.3)$$

где D — функция от внешних импульсов p и от α , а C — функция только от α . Таким образом, для рассеяния $2 \rightarrow 2$, когда имеются только два независимых кинематических инварианта s и t и, кроме того, D является линейной функцией по s , амплитуда рассеяния (в пренебрежении членом $i\epsilon$) имеет вид

$$A = \frac{\int_0^1 \prod_{i=1}^n d\alpha_i \delta(1 - \sum_i \alpha_i) C(\alpha)^{n-2l-2}}{(g(\alpha)s + d(t, \alpha))^{n-2l}}. \quad (3.4.4)$$

где g и d — некоторые функции. В пределе $s \rightarrow \infty$ при фиксированном t подынтегральное выражение ведет себя $\sim s^{-n+2l}$. Конечно, это справедливо в предположении, что $g(\alpha) \neq 0$. Следовательно, если в области интегрирования по α функция $g(\alpha) \neq 0$, то и сам интеграл будет обладать таким же поведением, как и подынтегральная функция. Однако область интегрирования по α вблизи точки, в которой $g(\alpha) = 0$, может давать вклады, убывающие с ростом s медленнее. Ясно, что доминирующие при больших s вклады можно получить лишь в том случае, когда контур интегрирования по α невозможно деформировать с целью избежать попадания в него точки, где $g(\alpha) = 0$. Это может происходить по двум причинам.

1. Если $g(\alpha) = 0$ на границе области интегрирования по α (так называемые «концевые» вклады).

2. Если $g(\alpha) = 0$ в некоторой внутренней точке контура интегрирования по α , которая при $s \rightarrow \infty$ соответствует заземлению, т. е. эта точка зажимается сингулярностями подынтегрального выражения,

благодаря чему контур не удается деформировать так, чтобы на нем не лежала эта точка (см. разд. 1.12).

Можно показать, что до тех пор пока рассматриваются только планарные диаграммы (т. е. диаграммы, которые можно нарисовать на листе бумаги без пересекающихся линий), то никаких пинчевых вкладов на физическом листе не возникает. Непланарные диаграммы будут подробно рассматриваться в гл. 8, а сейчас коснемся вкладов от граничных точек в планарных диаграммах.

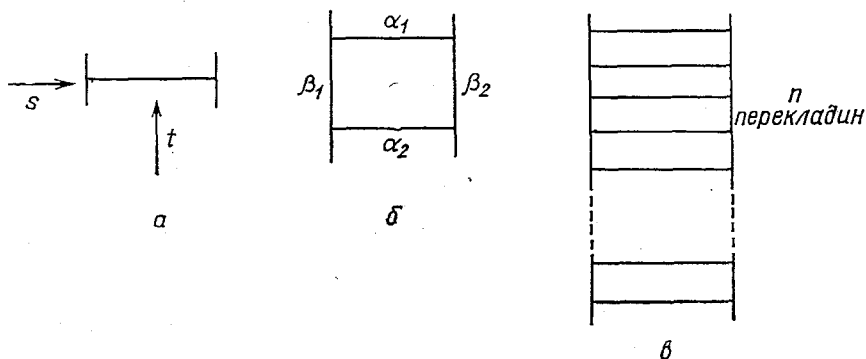


Рис. 3.3. Последовательность t -канальных фейнмановских лестничных диаграмм: a — одночастичный обмен (первое борновское приближение); $б$ — диаграмма ящичного типа с соответствующими фейнмановскими параметрами; $в$ — диаграмма с n ступеньками.

Очевидно, что полюсная диаграмма рис. 3.3, a вносит в амплитуду рассеяния вклад, равный

$$A_1 = g^2 / (m^2 - s) \sim 1/s, \quad (3.4.5)$$

который совпадает с первым борновским приближением для процесса рассеяния в t -канале. Далее, имеется квадратная диаграмма (рис. 3.3, $б$). Ее вклад в амплитуду равен

$$A_2 = g^2 \left(-\frac{g^2}{16\pi^2} \right) \frac{\int_0^1 \prod_{i=1}^2 d\alpha_i d\beta_i \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i)}{[\alpha_1 \alpha_2 s + d_2(\alpha, \beta, t)]^2}. \quad (3.4.6)$$

При изучении асимптотического поведения этой диаграммы при $s \rightarrow \infty$ необходимо рассмотреть область $\alpha_1, \alpha_2 = 0$ и, вводя определение $d'_2 = d_2(0, 0, \beta_1, \beta_2, t)$, получаем

$$\int_0^{\epsilon} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 \alpha_2 s + d'_2)^2} = \int_0^{\epsilon} \frac{\epsilon d\alpha_2}{d'_2 (\epsilon \alpha_2 s + d'_2)} = \frac{1}{d'_2 s} \ln \left(\frac{\epsilon^2 s + d'_2}{d'_2} \right) \sim \frac{\ln s}{d'_2 s}. \quad (3.4.7)$$

Таким образом,

$$A_2 \rightarrow g^2 K(t) (\ln s)/s, \quad (3.4.8)$$

где

$$K(t) = -\frac{g^2}{16\pi^3} \int_0^1 \frac{d\beta_1 d\beta_2 \delta(1-\beta_1-\beta_2)}{d_2(0, 0, \beta_1, \beta_2, t)} =$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^3} \int \frac{d^2 K}{(K^2 + m^2) [(K+q)^2 + m^2]}, \quad t = -q^2. \quad (3.4.9)$$

Выражение (3.4.9) является интегралом по петле, который соответствует фейнмановской диаграмме рис. 3.4, а со стянутыми в точку сторонами (так как $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), для вычисления которой необходимо провести интегрирование по двумерному импульсу K , а не по четырехмерному k [следствие того факта, что d_2 появляется только в первой степени, в отличие от (3.4.6)].

Аналогично вычисляется вклад лестничной диаграммы с n перекладинами (рис. 3.3, в):

$$A_n = g^2 \left(\frac{-g^2}{16\pi} \right)^{n-1} (n-1)! \frac{\int_0^1 \prod_{i=1}^n d\alpha_i \prod_{j=1}^n d\beta_j \delta(1-\sum \alpha_i - \sum \beta_i) [C(\alpha, \beta)]^{n-2}}{[\alpha_1 \dots \alpha_n s + d_n(\alpha, \beta, t)]^n}. \quad (3.4.10)$$

Опять, как и в предыдущем случае, главный член поведения в асимптотике обусловлен областью, где α_i обращается в нуль (рис. 3.4, б), и поэтому можно провести интегрирование по α_i , в результате получим

$$A_n \sim (g^2/s) [K(t) \ln s]^{n-1} / (n-1)! \quad (3.4.11)$$

Таким образом, все диаграммы рис. 3.3 характеризуются степенным поведением в асимптотике типа s^{-1} . Это является следствием факта, что для того чтобы пройти всю диаграмму, достаточно одночастичного пропагатора. Степень $\ln s$, которая также появляется, уже зависит от числа таких одночастичных пропагаторов.

Рис. 3.4. Стянутые диаграммы, которые соответствуют диаграммам рис. 3.3.

Эти диаграммы дают коэффициент перед s^{-1} в асимптотическом поведении

Следующий шаг заключается в том, чтобы найти асимптотическое поведение суммы всех таких лестничных диаграмм с любым числом перекладин, используя для этого упомянутое выше предположение о том, что асимптотическое поведение суммы равняется сумме асимптотических поведений отдельных диаграмм. Из (3.4.11) получаем

$$A(s, t) \equiv \sum_n A_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^2}{s} \frac{(\ln s K(t))^{n-1}}{(n-1)!} \sim \frac{g^2}{s} \exp [K(t) \ln s]; \quad (3.4.12)$$

$$A(s, t) \sim g^2 s^{\alpha(t)}, \quad \text{где } \alpha(t) \equiv -1 + K(t). \quad (3.4.13)$$

Если вспомнить о представлении Грибова—Фруассара (2.6.2), то становится совершенно очевидным, что степень s в (3.4.13) можно идентифицировать с лидирующей реджевской траекторией в t -канале. Та-

ким образом, несмотря на то что каждая индивидуальная диаграмма не обладает реджевским поведением, сумма диаграмм, которая сводится к собиранию степеней $\ln s$, происходящих от последовательных взаимодействий двух частиц, рассеивающихся в t -канале, уже характеризуется реджевским поведением. Так как $K(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (см. ниже), то $\alpha(t) \rightarrow -1$ вследствие поведения борновского приближения (3.4.5).

Это можно установить и непосредственными вычислениями. Так как из (2.3.4) следует, что борновское приближение дает

$$A_l^B(t) = \frac{g^2}{32\pi q_t^2} Q_l \left(1 + \frac{m^2}{2q_t^2} \right), \quad q_t^2 = \frac{1}{4}(t - 4m^2), \quad (3.4.14)$$

которое, как можно увидеть из (A.32), имеет полюс при $l = -1$:

$$A_l^B(t) \sim g^2 / [32\pi q_t^2 (l + 1)]. \quad (3.4.15)$$

Когда этот фиксированный полюс вносится в условие унитарности, то он сразу реджезуется. При $q^2 \rightarrow 0$ парциальная амплитуда должна стремиться к пределу, даваемому выражением (3.4.14), и удовлетворять соотношению унитарности (2.2.8), которое приводит, если написать его в виде ряда по степеням g^2 , к следующему выражению:

$$A_l(t) = \frac{g^2}{32\pi q_t^2} \left[\frac{1}{d(t) - l} - \frac{1}{l + 1} \left(1 + \frac{g^2 \alpha_1(t)}{l + 1} + \dots \right) \right], \quad (3.4.16)$$

причем функция траектории также разложена в ряд по g^2 :

$$\alpha(t) = -1 + \frac{g^2}{16\pi} \alpha_1(t) + \dots; \quad (3.4.17)$$

$$\text{Im} \{ \alpha(t) \} = \frac{g^2}{16\pi q_t \sqrt{t}}. \quad (3.4.18)$$

Так как $\alpha(t)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая дисперсионному соотношению (3.2.11) с $n = 1$, то окончательно имеем выражение

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & -1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{q_t' \sqrt{t'} (t' - t)} = -1 + \\ & + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{q_t \sqrt{t}} \ln \left[\frac{2q_t + \sqrt{t}}{2q_t - \sqrt{t}} \right], \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

которое согласуется с (3.4.13). Итак, как и ожидалось, $\alpha(t) \rightarrow -1$ при $t \rightarrow \pm\infty$, для всех g^2 , или всех t , когда $g^2 \rightarrow 0$. Почти очевидно, что это свойство, несомненно, далеко от реальности при рассмотрении сильных взаимодействий, так как оно является следствием элементарности структуры скалярного мезона, которым до сих пор осуществлялись обмены. Однако способ, с помощью которого была построена траектория для рассматриваемого фундаментального взаимодействия, очень похож на тот, что был использован в потенциальном рассеянии; по этой причине кажется очень правдоподобным заявление, что аналогич-

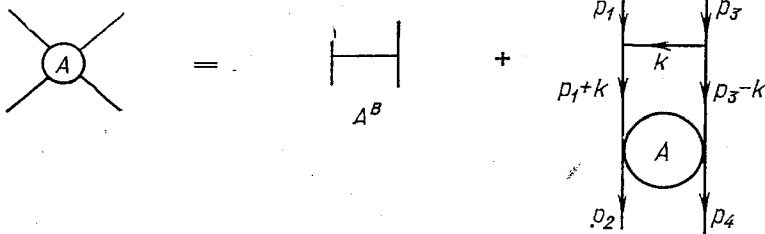


Рис. 3.5. Графический вид уравнения Бете—Солпитера для суммирования лестничных диаграмм

ный механизм будет работать также и в адронной физике. Ведь в самом деле, суммирование лестничных диаграмм соответствует решению t -канального уравнения Бете—Солпитера (рис. 3.5) [49] (см. также [335]):

$$A(s, t) = A^B(s, t) + \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{[(p_1+k)^2 - m^2][(p_3-k)^2 - m^2]} \times \\ \times A^B(p_1, p_3, p_1+k, p_3-k) A(p_1+k, p_3-k, p_2, p_4), \quad (3.4.20)$$

которое является релятивистской версией уравнения Липпмана—Швингера (1.13.27). Траектории, которые генерируются при решении уравнения Бете—Солпитера с различными потенциалами, опубликованы Свифтом и Таккером [371, 372].

3.5. Бутстрап

В разд. 2.8 была сформулирована гипотеза бутстрапа, которая гласила, что только те частицы, существование которых совместимо с требованиями унитарности, аналитичности по s и t , а также по l , представляют собой настоящие адроны, с которыми мы все сталкиваемся в реальном мире. Если это справедливо, то тогда представляется возможным вывести свойства частиц только из условия того, что обеспечивается выполнение уравнений унитарности с ограничениями, которые налагаются условиями кроссинга. Попытки достигнуть этой цели получили название «бутстрапных вычислений».

Сложность уравнений многочастичной унитарности приводит к тому, что до сих пор еще невозможно сколь-нибудь серьезно проверить гипотезу бутстрапа. Некоторый прогресс, достигнутый в этом направлении, будет рассматриваться в разд. 11.7, а настоящий раздел будет посвящен тому, чтобы проиллюстрировать применения двухчастичной унитарности, в дополнение к обсуждениям в предыдущих разделах. Будет также дан краткий обзор трех основных подходов, которые обычно используются.

Эти уравнения основаны на дисперсионных соотношениях для парциальных амплитуд, и их рассмотрение находится в тесной связи с обсуждением, проведенным в разд. 3.3г. Из дисперсионного соотношения (2.6.20) можно написать [109]

$$B_l^{\xi}(t) = B_l^L(t) + (1/\pi) \int_{t_T}^{\infty} \text{Im} \{B_l^{\xi}(t')\} dt' / (t' - t), \quad (3.5.1)$$

где $B_l^L(t)$ — вклад левого разреза. Если полностью пренебречь неупругостью, то можно воспользоваться соотношением унитарности в области упругого рассеяния (2.6.23) на всем протяжении правого разреза и это приводит к

$$B_l^{\xi}(t) = B_l^L(t) + (1/\pi) \int_{t_T}^{\infty} \rho_l(t') |B_l^{\xi}(t')| dt' / (t' - t). \quad (3.5.2)$$

Теперь если предположить, что известны все сингулярности кроссинговых каналов, т. е. дана величина $B_l^L(t)$, то тогда (3.5.2) является интегральным уравнением для амплитуды рассеяния. Для того чтобы его решить, мы его сначала линеаризуем, написав [ср. (3.3.41)]

$$B_l^{\xi}(t) = N_l(t) / D_l(t), \quad (3.5.3)$$

где, по определению, функция $N_l(t)$, стоящая в числителе, имеет только левый разрез, соответствующий левому разрезу амплитуды $B_l^{\xi}(t)$, а функция $D_l(t)$ — правый разрез. Итак,

$$\text{Im} \{N_l(t)\} = \text{Im} \{B_l^{\xi}(t)\} D_l(t) \equiv b_l(t) D_l(t), \quad \text{при } t < t_L, \quad (3.5.4)$$

а с другой стороны,

$$\text{Im} \{D_l(t)\} = \begin{cases} N_l(t) \text{Im} \{1/B_l^{\xi}(t)\}, & \text{при } t > t_T; \\ -N_l(t) \text{Im} \{B_l^{\xi}(t)\} / |B_l^{\xi}(t)|^2 = -\rho_l(t) N_l(t). \end{cases} \quad (3.5.5)$$

Это получается с помощью условия унитарности (2.6.23). Используя (2.2.10) и (2.6.8), получаем

$$1/B_l^{\xi}(t) = D_l(t) / N_l(t) = \exp[-i\delta_l(t)] \rho_l(t) / \sin \delta_l(t). \quad (3.5.6)$$

Поскольку функция $N_l(t)$ действительна при $t > t_L$, функция $D_l(t)$ должна иметь фазу $\exp[-i\delta_l(t)]$ вдоль всего правого разреза, $t > t_T$.

Если известна эта фаза, положения всех ρ_l полюсов в точках $t = t_{il}$ и всех m_l нулей в точках $t = t_{jl}$ на физическом листе, то с по-

мощью метода Винера — Хопфа (см. Титчмарш [380, с. 339]) можно сконструировать функцию $D_l(t)$. Она будет иметь следующий вид:

$$D_l(t) = D_l(t_T) \prod_{i=1}^{p_l} \left(\frac{t_T - t_{il}}{t - t_{il}} \right) \prod_{j=1}^{m_l} \left(\frac{t - t_{jl}}{t_T - t_{jl}} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{t - t_T}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\delta_l(t') - \delta_l(t_T)}{(t' - t)(t' - t_T)} dt' \right\}. \quad (3.5.7)$$

Мы предположили, что фаза $\delta_l(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \text{const}$, т. е. в интеграле требуется сделать только одно вычитание в точке t_T . Мы настаиваем (как и в разд. 3.3г) на том, что полюсам амплитуды соответствуют нули функции $D_l(t)$, а не полюса функции $N_l(t)$. Это могут быть либо связанные состояния, лежащие на физическом листе при $t = t_{jl}$, либо резонансы на нефизических листах, где $\delta_l(t) \rightarrow (2n + 1)\pi/2$. Тогда из (3.5.7) следует

$$D_l(t) \sim t^{\{m_l - p_l + \pi^{-1} [\delta_l(\infty) - \delta_l(t_T)]\}}. \quad (3.5.8)$$

Функция $D_l(t)$ выбирается стандартным образом, т. е. так, что $D_l(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$, и поэтому

$$\delta_l(\infty) - \delta_l(t_T) = \pi [p_l - m_l]. \quad (3.5.9)$$

Кроме того, $\delta_l(t_T) = \pi m_l$, принимая

$$\delta_l(\infty) = \pi p_l. \quad (3.5.10)$$

Эта связь между асимптотической фазой и числом полюсов функции $D_l(t)$ носит название теоремы Левинсона [283].

Исходя из (3.5.5) и (3.5.7), можно написать дисперсионное соотношение для функции $D_l(t)$:

$$D_l(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\rho_l(t') N_l(t')}{t' - t} dt' + \sum_{i=1}^{p_l} \frac{\gamma_{il}}{t - t_{il}}, \quad (3.5.11)$$

где γ_{il} — вычеты полюсов. Так как вычеты γ_{il} и положения t_{il} полюсов — произвольны, то совершенно очевидно, что функция $D_l(t)$ не может быть полностью определена заданием скачка $B_l^L(t)$. Это явление носит название КДД-неоднозначности (по начальным буквам фамилий Кастильехо, Далица и Дайсона, которые это явление обнаружили [85]). Элементарная (не составная) частица типа той, которой соответствует (3.4.1), приводит к возникновению КДД-полюсов в соответствующей парциальной волне.

В случае больших значений l из (2.5.5) следует, что $B_l(t) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} B_l^L(t) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} 0$, т. е. $\delta_l(\infty) \rightarrow \delta_l(t_T)$. Таким образом, в этом пределе отсутствуют связанные состояния $m_l \rightarrow 0$ и тем самым по теореме Левинсона (3.5.9) отсутствуют и нули $p_l \rightarrow 0$. Поэтому при доста-

точно больших значениях l КДД-неоднозначность отсутствует и амплитуды рассеяния полностью определяются заданием только скачка $B_l^L(t)$. Однако мы требуем, чтобы выполнялась максимальная аналитичность второго рода, согласно которой низшие парциальные волны должны получаться из высших с помощью аналитического продолжения по l , и поэтому мы не можем просто так добавлять полюса в (3.5.11) при уменьшении l . Таким образом, аналитичность по l мешает возникновению КДД-полюсов в низших парциальных волнах.

Следовательно, имея в виду, что КДД-полюса отсутствуют, и используя (3.5.4) и (3.5.5), мы получаем окончательный вид дисперсионных соотношений для $N_l(t)$ и $D_l(t)$ и одновременно систему интегральных N/D -уравнений:

$$N_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t_L} \frac{b_l(t') D_l(t')}{t' - t} dt'; \quad (3.5.12)$$

$$D_l(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\rho_l(t') N_l(t')}{t' - t} dt, \quad (3.5.13)$$

аналогичную (3.3.46), (3.3.47). Если теперь ввести функцию

$$C_l(t) \equiv N_l(t) - B_l^L(t) D_l(t), \quad (3.5.14)$$

в которой левый разрез будет отсутствовать, потому что

$$\text{Im} \{B_l^L(t)\} = \text{Im} \{N_l(t)\} / D_l(t), \quad t < t_L. \quad (3.5.15)$$

Ее скачок на правом разрезе будет даваться

$$\text{Im} \{C_l(t)\} = -B_l^L(t) \text{Im} \{D_l(t)\}. \quad (3.5.16)$$

Следовательно, она удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$C_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{\text{Im} \{C_l(t')\}}{t' - t} dt' \quad (3.5.17)$$

или, вспоминая определение (3.5.14),

$$N_l(t) = B_l^L(t) D_l(t) - \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{B_l^L(t') \text{Im} \{D_l(t')\}}{t' - t} dt'. \quad (3.5.18)$$

Затем, с помощью (3.5.13) и (3.5.5), можно устранить функцию $D_l(t)$ и тогда получится окончательно

$$N_l(t) = B_l^L(t) + \frac{1}{\pi} \int_{t_T}^{\infty} \frac{B_l^L(t') - B_l^L(t)}{t' - t} \rho_l(t') N_l(t') dt'. \quad (3.5.19)$$

Таким образом, для функции $N_i(t)$ при заданном скачке $B_i^L(t)$ мы имеем интегральное уравнение, которое может быть разрешено численно. А как только найдено $N_i(t)$, то подстановкой его в (3.5.13) сразу находим $D_i(t)$ и, следовательно, всю амплитуду $B_i^{\bar{L}}(t)$.

Эти уравнения можно легко обобщить на случай, когда имеются неупругие состояния (см. для обзора Коллинз и Сквайрс [132, гл. 6]). Наиболее важным изменением является то, что связанные или резонансные состояния в одном из каналов могут проявляться как КДД-полюса в другом канале. Однако такой КДД-полюс будет возникать как следствие существования неупругого разреза при аналитическом продолжении по l с высших парциальных волн на низшие и

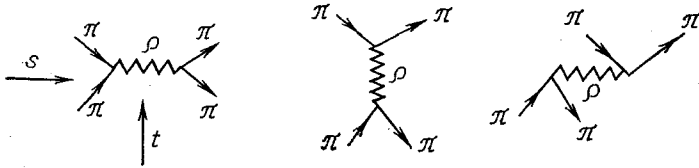


Рис. 3.6. Полюса, отвечающие обмену ρ -траекторией, в s -, t - и u -каналах в $\pi\pi$ -рассеянии

поэтому непрерывность по l не нарушается. Очень существенно, что таким КДД-полюсам не отвечают никакие элементарные частицы.

Пусть при некотором $t = t_r$ функция $D_i(t)$ обращается в нуль и при этом возникает полюс в парциальной амплитуде. Продолжая это решение по l , получаем траекторию $\alpha(t)$

$$D_{\alpha(t)}(t_r) = 0. \quad (3.5.20)$$

Если затем разложить $D_i(t)$ в точке $l = \alpha(t_r)$, то будем иметь из (3.5.3)

$$B_i^{\bar{L}}(t) \approx N_{\alpha(t_r)}(t_r)/(l - \alpha(t_r)) (\partial D_i / \partial l) \Big|_{l=\alpha(t_r), t=t_r}, \quad l \approx \alpha(t_r), t \approx t_r. \quad (3.5.21)$$

Таким образом, вычет в реджевском полюсе дается выражением $N(\partial D / \partial l)^{-1}$.

Простым примером использования таких уравнений является ρ -бустрап [415, 26, 27, 120]. Этот пример основан на наблюдении, что в низкоэнергетическом упругом $\pi\pi$ -рассеянии доминирующей сингулярностью является сингулярность, отвечающая резонансу со спином единица, т. е. ρ -мезону. Так как $\pi\pi$ -рассеяние — кроссинг-симметричная реакция, то этот резонанс будет возникать во всех трех s -, t - и u -каналах (рис. 3.6). Итак, если мы сделаем очень сильное предположение, что это единственная существенная сингулярность, то можно получить левый разрез в t -канальной парциальной амплитуде, являю-

щийся следствием ρ -полюсов в s - и u -каналах. Таким образом, из (2.6.14) имеем

$$B_l^L(t) = \frac{g_\rho^2}{16\pi} \frac{q_\rho^2}{q_l^{2l+2}} Q_l \left(1 + \frac{m_\rho^2}{2q_l^2} \right) P_1 \left(1 + \frac{t}{2q_\rho^2} \right), \quad (3.5.22)$$

где

$$q_\rho^2 \equiv (1/4) (m_\rho^2 - m_\pi^2).$$

Массу ρ -мезона m_ρ и его константу связи с $\pi\pi$ -системой g_ρ можно рассматривать как свободные параметры. Если подставить (3.5.22) в (3.5.19), затем разрешить уравнение и подставить решение для $N_l(t)$ (3.5.13), то в результате из рассмотрения (3.5.20) и (3.5.21) получится t -канальная траектория и вычет в полюсе. Условие кроссинг-симметрии приводит к требованию, что функция $D_l(t)$ должна обращаться в нуль при $l = 1$ в точке $t = m_\rho^2$ и иметь вычет, равный g_ρ^2 . Следовательно, исходя из самосогласованности при кроссинге и унитарности, можно определить эти параметры, а посредством них — константу связи и массу ρ -мезона, т. е. только из требований самосогласованности можно найти характеристики ρ -мезона.

К сожалению, имеется несколько чисто технических проблем, связанных с расходимостью интеграла в уравнении (3.5.19) и необходимостью в связи с этим его обрезать, поэтому мы можем говорить об успехах в качественном смысле (см. Коллинз и Сквайрс [132, гл. 6]). Вероятно, это максимум, того, что можно ожидать в ситуации, когда пренебрегаем всеми другими сингулярностями и неупругой унитарностью. Однако наиболее важный вывод из всего, что было проделано выше, — это то, что метод получения траекторий в физике частиц основан на использовании методов, которые, как мы знаем, заведомо успешно применяются в потенциальном рассеянии.

3.56 Метод Ченга-Шарпа

Другой метод использования соотношения унитарности для парциальных волн, чтобы вычислять реджевские траектории, был предложен Ченгом, Шарпом [98] и Фраучи, Каусом, Захариазеном [172].

Если парциальную амплитуду выразить в виде суммы по реджевским полюсам плюс фоновый интеграл

$$B_l^{\pm}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i(t)}{l - \alpha_i(t)} + \bar{B}_l^{\pm}(t) \quad (3.5.23)$$

и затем это подставить в соотношение унитарности (2.6.23) или (4.7.4) (см. ниже) при $l \rightarrow \alpha_j(t)$, то получим

$$\frac{1}{2i\rho_{\alpha_j}(t)} = \sum_i \frac{\gamma_i^*(t)}{\alpha_j(t) - \alpha_i^*(t)} + \bar{B}_{\alpha_j}^{\pm*}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5.24)$$

Выражение (3.5.24) представляет собой систему уравнений, позволяющую определить реджевские параметры при данном фоновом интеграле (который содержит сингулярности перекрестных каналов, т. е. «по-

тенциал»). Если теперь предположить, что доминирует только один полюс α_j , который характеризуется малой величиной $\text{Im} \{\alpha_j\}$, то тогда можно пренебречь \bar{B} и (3.5.24) приобретает вид

$$\text{Im} \{\alpha_j(t)\} = \rho_{\alpha_j}(t) \gamma_j(t), \quad \text{Im} \{\gamma_j(t)\} = 0, \quad (3.5.25)$$

причем это выражение имеет правильное пороговое поведение (3.2.26).

Для того чтобы приступить к дальнейшему рассмотрению, необходимо модифицировать реджевские полюсные члены таким образом, чтобы они имели правильные аналитические свойства в смысле Мандельштама. (Разрез по s в (2.8.10) начинается при $z_t = -1$, из (A.13), т. е. при $s = -4q_t^2$ в случае кинематики с равными массами, а не от порога s_T [132].) Можно также добавить полюса перекрестных каналов, которые предусмотрены потенциалом, в \bar{B}_t^{ξ} . Отметим, что этот метод успешно применялся при вычислении траекторий в задачах потенциального рассеяния [219] и при необходимых модификациях использовался при проведении некоторых бутстрапных вычислений [8].

3.5.в. Итерационная процедура Мандельштама

Этот метод прямо основан на использовании представления Мандельштама, обсуждавшегося в разд. 1.11. Условие унитарности для упругого рассеяния используется для того, чтобы получить двойные спектральные функции ρ_{st} в тех областях плоскости $s - t$, где соотношение упругой унитарности справедливо, а асимптотическое поведение двойных спектральных функций ρ_{st} дает траекторию.

Исходя из (1.5.7), можно получить скачок на упругом разрезе в t -канале в области $t_T < t < t_f$:

$$D_t(s, t) = \frac{qt}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int d\Omega_t A^+(s', t) A^-(s'', t), \quad (3.5.26)$$

где [см. (2.2.3) с заменой $s \leftrightarrow t$] $s' = s(z', t)$, $z' \equiv \cos \theta_{in}$ — косинус угла рассеяния, т. е. угла между направлениями движения частиц в начальном и промежуточном состояниях; $s'' = s(z'', t)$ и $z'' \equiv \cos \theta_{nf}$ — косинус угла рассеяния при переходе промежуточного состояния в конечное в t -канальной системе центра масс. Аналогичным образом $s = s(z_t, t)$, где $z_t = \cos \theta_{if}$ (см. рис. 2.1), а $d\Omega_t \equiv dz'' d\varphi$. Эти углы связаны по теореме сложения (2.2.4)

$$z' = z_t z'' + \sqrt{(1-z_t^2)} \sqrt{(1-z''^2)} \cos \varphi. \quad (3.5.27)$$

Формально мы можем подставить дисперсионные соотношения (1.10.7) для A^+ и A^- в выражение (3.5.26) и тогда получится, что при фиксированном t (если пренебречь для простоты полюсными членами)

$$D_t(s, t) = \frac{qt}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int d\Omega_t \left[\frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s(s_1, t_+)}{s_1 - s'} ds_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{u_T}^{\infty} \frac{D_u(u_1, t_+)}{u_1 - u'} du_1 \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s(s_2, t_-)}{s_2 - s''} ds_2 + \frac{1}{\pi} \int_{u_T}^{\infty} \frac{D_u(u_2, t_-)}{u_2 - u''} du_2 \right] \quad (3.5.28)$$

при условии [см. (1.7.21)]

$$s + t + u = s' + t + u' = s'' + t + u'' = s_1 + t + u_1 = s_2 + t + u_2 = \Sigma. \quad (3.5.29)$$

Если затем заменить все s и u на z с помощью (2.3.2) и изменить порядок интегрирования, то мы приходим к членам типа

$$\int_{-1}^1 dz'' \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(z_1 - z')(z_2 - z'')} = \frac{2\pi}{\Delta^{1/2}} \ln \left(\frac{z - z_1 z_2 + \Delta^{1/2}}{z - z_1 z_2 - \Delta^{1/2}} \right) \quad (3.5.30)$$

[при этом необходимо использовать (3.5.27)], где введено обозначение

$$\Delta(z_i, z_1, z_2) \equiv -1 + z_i^2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_i z_1 z_2, \quad (3.5.31)$$

причем необходимо выбрать такую ветвь логарифма, на которой он является действительной функцией в области $-1 < z < 1$. Совершая обратный переход от различных z к s , получаем

$$D_t(s, t) = \frac{qt}{16\pi^3 \sqrt{t}} \int_{s_T}^{\infty} \frac{ds_1}{2q_i^2} \int_{s_T}^{\infty} \frac{ds_2}{2q_i^2} (D_s(s_1, t_+) + D_u(s_1, t_+)) (D_s(s_2, t_-) + \\ + D_u(s_2, t_-)) 2q_i^2 K^{-1/2} \ln \left(\frac{s - s_1 - s_2 - (s_1 s_2 / 2q_i^2) + K^{1/2}}{s - s_1 - s_2 - (s_1 s_2 / 2q_i^2) - K^{1/2}} \right), \quad (3.5.32)$$

где

$$K(s, s_1, s_2, t) \equiv [s^2 + s_1^2 + s_2^2 - 2(ss_1 + ss_2 + s_1 s_2) - ss_1 s_2 / q_i^2]. \quad (3.5.33)$$

Как это следует из (1.11.11), двойная спектральная функция $\rho_{st}(s, t)$ является скачком функции $D_t(s, t)$ на ее разрезах в плоскости s . Этот скачок возникает вследствие обращения в нуль функции K . Когда $K \rightarrow 0$, логарифм стремится к $\ln 1 = 2\pi ni$, где n — целое число, определяемое ветвью логарифма, которую мы выбрали. Следовательно, скачок на разрезе, который идет от пороговой точки ветвления в плоскости s при $K > 0$, равен 2π . Таким образом,

$$\rho_{st}(s, t) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{qt}{\sqrt{t}} \int_{s_T}^{\overbrace{s_T}^{K=0}} \frac{ds_1}{2q_i^2} \int_{s_T}^{\infty} \frac{ds_2}{2q_i^2} \frac{D_s(s_1, t_+) D_s(s_2, t_-)}{K^{1/2}(s, s_1, s_2, t)} 2q_i^2. \quad (3.5.34)$$

Область интегрирования по s_1, s_2 находится из условий, что $s_1, s_2 > s_T$ и $K > 0$, так как при $K < 0$ отсутствует разрез и соответственно скачок на нем. Граница области значений s , где определена двойная спектральная функция $\rho_{st}(s, t)$, дается наименьшими возможными значениями s_1, s_2 , где

$$K(s, s_T, s_T, t) = s(s - 4s_T - s_T^2/q_T^2) = 0. \quad (3.5.35)$$

Поскольку точка $s = 0$ не является особой точкой в (3.5.32), граница дается

$$s = 4s_T + s_T^2/q_T^2 \equiv b(t). \quad (3.5.36)$$

Из соотношения (1.11.4) имеем

$$D_s(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{b(s)}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s, t'')}{t'' - t} dt'' + \text{другие члены}. \quad (3.5.37)$$

Из «других членов» наиболее важным является s -канальный полюс, отвечающий связанному состоянию, который в борновском приближении имеет вид

$$D_s^B = \pi g^2 \delta(s - m^2). \quad (3.5.38)$$

Если этот член подставить в (3.5.34), то получится

$$\rho_{st}(s, t) = g^4 / [16q_t (s - 4m^2 - m^4/q_t^2)^{1/2} \sqrt{t} \sqrt{s}], \quad (3.5.39)$$

причем граница определяется из условия $K(s, m^2, m^2, t) = 0$, что соответствует (1.12.10). Если затем подставить (3.5.39) в (3.5.37), то по-

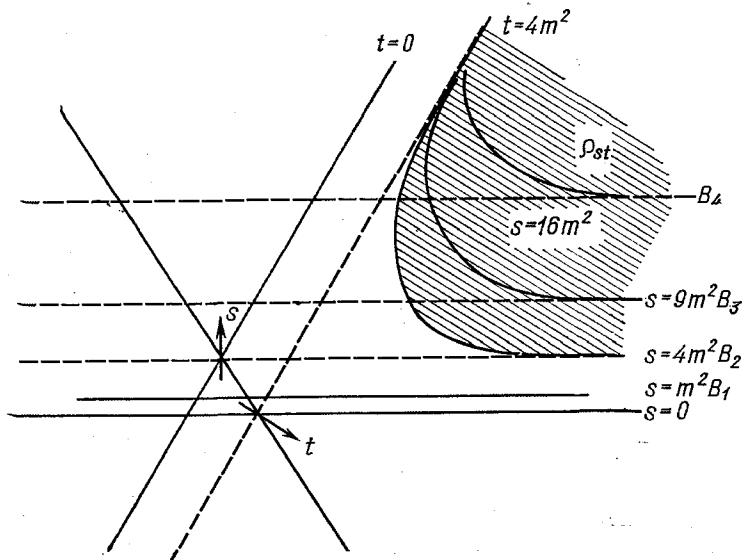


Рис. 3.7. Границы последовательных вкладов в двойную спектральную функцию (B_2, B_3, B_4, \dots).

Получены интегрированием t -канального условия унитарности с s -канальным полюсным вкладом B_1 на входе. Асимптотическое поведение при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t будет $\rho_{st}(s, t) \approx s^{-\alpha(t)}$ и, следовательно, дает возможность найти траекторию $\alpha(t)$

лучится дополнительный вклад в D_s , который может быть, в свою очередь, подставлен в (3.5.34) и приведет к дальнейшему вкладу в двойную спектральную функцию $\rho_{st}(s, t)$ с границей, определяемой условием $K(s, 4m^2, 4m^2, t) = 0$ и т. д. Таким образом, можно найти итерационным методом $D_s(s, t)$, причем последовательные вклады в двойную спектральную функцию будут иметь границы при все больших и больших значениях s , как показано на рис. 3.7. Это является другим методом суммирования лестниц, отвечающих многократному обмену в первом борновском приближении (3.5.38). В самом деле, (3.5.39) приводит к поведению (3.4.8) в асимптотике, а другие итерации согласуются с (3.4.11).

Конечно, выражение (3.5.38) очень далеко от истинного борновского приближения в физике частиц. Делаются попытки включить кросс-симметрию по реджеонам: на входе берутся s -канальные реджевские полюса, а на выходе производятся t -канальные реджевские полюса, при этом ищется самосогласованность в смысле бутстрапа, как это описывалось в разд 3.5а; однако вплоть до настоящего времени успехи в этом направлении довольно скромные [127, 399]. В гл. 11 мы будем использовать другие, подобные описанной, динамические схемы. Однако кажется весьма вероятным, что ограничение рассмотрением только планарных диаграмм совместно с условием унитарности в пренебрежении неупругими вкладами мешает нам получить надлежащую самосогласованность ответов. Цель, которая преследовалась при обсуждении этого метода, заключалась в том, чтобы показать, что итерационная процедура Манделъстама является другим способом получения реджевских траекторий, отличным от суммирования лестничных диаграмм.

4

СПИН

4.1. Введение

Обсуждая теорию S -матрицы в гл. 1 и развивая реджевскую теорию в гл. 2, мы для простоты пренебрегали той возможностью, что внешние частицы, входящие в данный процесс и образующиеся в результате его, могут иметь спин. Только внутренним реджеонам разрешалось иметь отличный от нуля угловой момент. Поскольку большинство экспериментов по рассеянию адронов использует нуклоны со спином $1/2$ в качестве мишени, а пучок налетающих частиц может иметь спин 0 (π или K), $1/2$ (p , n , \bar{p} , Λ и т. д.) и 1 (γ) и поскольку частицы, образованные в конечном состоянии, могут иметь любой целый или полуцелый спин, следует исправить этот недостаток, прежде чем иметь дело с предсказаниями реджевской теории для мира реальных частиц.

При этом следует иметь в виду три важных обстоятельства. Во-первых, в эксперименте могут участвовать начальные частицы, ориентация спина которых задана (поляризационные эксперименты). Или экс-

перимент может включать в себя определение спина некоторых частиц в конечном состоянии посредством последующего рассеяния или наблюдения их распада. Таким образом, существуют такие экспериментально наблюдаемые величины (в дополнение к σ^{tot} и $d\sigma/dt$), которые показывают, как вероятность рассеяния зависит от направлений спинов частиц. Во-вторых, зависимость процесса рассеяния от векторов спина означает, что свойства лоренц-инвариантности и кроссинга для амплитуды рассеяния будут в общем случае более сложными, чем для случая бесспиновых частиц. Третье и наиболее важное обстоятельство для реджевской теории — это то, что полный угловой момент данного состояния \mathbf{J} не будет больше только орбитальным угловым моментом \mathbf{l} , как в гл. 2, а будет векторной суммой \mathbf{l} и спинов частиц σ_j , так что, например, для начального состояния

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \sigma_1 + \sigma_2 \quad (4.1.1)$$

и при выполнении правильного аналитического продолжения по J (а не по l) необходима особая аккуратность. При обсуждении проблем спина наиболее часто используют метод инвариантных амплитуд в системе центра масс.

Чтобы получить инвариантные амплитуды, каждая частица со спином σ_j представляется волновой функцией $\psi(\sigma_j)$, причем спин квантован вдоль выбранной оси z . Для частиц со спином $1/2$ эти волновые функции являются просто обычными четырехкомпонентными дираковскими спинорами $u(\sigma_z)$, $\sigma_z = \pm 1/2$, в то время как для спина 1 мы используем векторы поляризации $\epsilon_\mu(\sigma_z)$, а для более высокого спина волновые функции могут быть построены как произведение волновых функций со спином $1/2$ и 1 при помощи подходящих коэффициентов Клебша—Гордана. Для процесса рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ амплитуда рассеяния между этими спиновыми состояниями может быть записана в виде (см., например, [40, 332])

$$A_{fi} = \chi_f M_{fi} \chi_i, \quad (4.1.2)$$

где χ — спинорные волновые функции частиц в начальном и конечном состояниях ($\chi_i = \psi_1 \otimes \psi_2$, $\chi_f = \psi_3 \otimes \psi_4$), а функции M представляют собой матрицы. Вследствие лоренц-инвариантности они могут быть представлены суммой

$$M_{fi} = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(s, t) Y_{\alpha}, \quad (4.1.3)$$

где A_{α} — скалярные функции инвариантов; Y_{α} — различные независимые лоренц-инвариантные матрицы, которые могут быть построены из операторов спина (матриц Дирака, векторов поляризации и т. п.) и векторов импульсов частиц [116, 117, 354]. Так, например, доказано, что в случае рассеяния псевдоскалярных мезонов на барионах спин $0 + 1/2 \rightarrow 0 + 1/2$, в (4.1.3) имеются только два независимых члена (это возникает вследствие ТСР-инвариантности и алгебры матриц Дирака) и в обозначениях работы [107] можно записать

$$M = A(s, t) + B(s, t) \frac{1}{2} (p_1 + p_3)_{\mu} \gamma^{\mu}, \quad (4.1.4)$$

где p_1 и p_3 — 4-импульсы пионов в начальном и конечном состояниях соответственно; γ_μ — матрицы Дирака; A, B — искомые инвариантные амплитуды процесса.

Преимущество этого метода заключается в том, что в случае подходящего выбора Y_α инвариантные амплитуды $A_\alpha(s, t)$ свободны от кинематических сингулярностей, так что имеются только динамические особенности, порождаемые условиями унитарности. К тому же инвариантные амплитуды могут быть просто переписаны из одного канала в другой ($s \rightarrow t$ и т. д.), так как повороты спина и тому подобные сложности, происходящие при переходе из одного канала в другой, описываются функциями Y_α . Таким образом, эти инвариантные амплитуды полностью аналогичны амплитудам для бесспиновых частиц, рассмотренных в гл. 1. Недостаток этого метода — то, что для высоких спинов определение полного набора независимых величин Y_α , удовлетворяющих ТСР-инвариантности и не имеющих произвольных нулей (которые могли бы компенсировать кинематические полюса в амплитудах A_α), довольно затруднительно и условия унитарности усложняются из-за появления спиноров в промежуточных состояниях, что делает необходимым вычисление шпура произведения матриц. Усложняется также связь инвариантных амплитуд с наблюдаемыми на опыте величинами и, что, возможно, наиболее важно для нас, разложение этих амплитуд по амплитудам с заданным угловым моментом не является тривиальным (см. обсуждение ковариантной реджезации в работах [153, 258, 367]).

По всем этим соображениям спиральное представление Жакоба и Вика является более популярным. (Полное рассмотрение спиральных амплитуд можно найти в работе [305].)

Как описано в гл. 1, спиральное состояние частицы с 4-импульсом p и спином σ обозначается $|p, \sigma, \lambda\rangle$, где спиральность λ есть проекция спина на направление движения частицы [из (1.2.4) $\lambda = \sigma\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$] и может принимать $2\sigma + 1$ возможных значений, $\sigma, \sigma - 1, \dots, -\sigma$. Такие состояния образуют неприводимое представление группы Лоренца и инвариантны по отношению к вращениям. Состояние, отвечающее двум не взаимодействующим частицам, описывается прямым произведением

$$|p_1, \sigma_1, \lambda_1\rangle \otimes |p_2, \sigma_2, \lambda_2\rangle = |p_1, \sigma_1, \lambda_1; p_2, \sigma_2, \lambda_2\rangle. \quad (4.1.5)$$

Мы находимся в системе центра масс, где $p_1 = -p_2$ и $s = (p_1 + p_2)^2$ есть квадрат полной энергии [см. (1.7.5)]. С целью избежать возможной путаницы будем обозначать спиральности в этой амплитуде буквой μ (обозначение λ будет использовано в дальнейшем для спиральностей в системе центра масс t -канала).

Таким образом, амплитуда рассеяния в системе центра масс s -канала для процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \langle p_3, \sigma_3, \mu_3; p_4, \sigma_4, \mu_4 | A | p_1, \sigma_1, \mu_1; p_2, \sigma_2, \mu_2 \rangle = \\ = \langle \mu_3, \mu_4 | A(s, t) | \mu_1, \mu_2 \rangle = A_{H_s}(s, t), \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

где зависимость от p_i выражена в терминах инвариантов s и t , как это сделано в гл. 1, а спины σ_i , являющиеся внутренними квантовыми числами (подобно Q, B, I, Y и т. д.), опущены. Для краткости мы использовали обозначение

$$H_s = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\} \quad (4.1.7)$$

для спиральностей частиц в системе центра масс s -канала. Эти амплитуды лоренц-инвариантны, за исключением операции обращения направления импульсов p_i .

Преимущество этих амплитуд в том, что они могут быть сразу применены к частицам с любым спином, условия унитарности для них имеют довольно простой вид, сводящийся всего лишь к суммированию по спиральностям промежуточного состояния (см. разд. 4.7) и, как мы увидим далее, эти амплитуды непосредственно связаны с наблюдаемыми величинами. Относительно несложным является также и их разложение по состояниям с данным угловым моментом. Это связано с тем, что для двухчастичного состояния орбитальный угловой момент перпендикулярен к направлению относительного движения частиц. Таким образом, в системе центра масс проекция полного углового момента на направление движения есть просто заданная разность спиральностей. Так, для начального состояния $J_z = \mu_1 - \mu_2$ (знак минус возникает из-за того, что частица 2 движется в направлении $-z$).

Недостаток этих спиральных амплитуд заключается в том, что они не свободны от кинематических сингулярностей, так что мы должны научиться извлекать необходимые кинематические множители, прежде чем сможем записать дисперсионные соотношения, содержащие, подобно (1.10.7), интегрирование по всем динамическим особенностям. Нетривиальными являются также и свойства кроссинга, потому что из-за того, что направления движения частиц в системах центров масс s - и t -каналов различны, данная s -канальная спиральная амплитуда переходит в сумму t -канальных спиральных амплитуд, и наоборот [см. формулу (4.3.7)].

Однако обе эти проблемы решены для случая произвольных спинов, поэтому сейчас спиральные амплитуды широко используются при рассмотрении проблем спина, и в этой книге мы будем повсюду ими пользоваться. Правда, инвариантные амплитуды были предложены раньше и довольно часто используются для описания рассеяния псевдоскалярных мезонов на барионах и процессов фоторождения.

В следующем разделе мы кратко обсудим соотношения между спиральными амплитудами и наблюдаемыми величинами и затем перейдем к рассмотрению их кроссинговых свойств. Мы повторим процедуры разложения по парциальным волнам и аналитического продолжения по угловому моменту, которым мы следовали в гл. 2, показывая дополнительные осложнения, которые привносит спин в реджевскую теорию. Завершим главу обзором условий, которые накладываются унитарностью на реджевские особенности.

4.2. Спиральные амплитуды и наблюдаемые

Для процесса рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ существует $\prod_{i=1}^4 (2\sigma_i + 1)$ различных спиральных амплитуд, отличающихся различными возможными комбинациями μ_i в (4.1.6). Однако из-за того, что сильные взаимодействия инвариантны относительно изменения четности и обращения времени, не все они независимы. При изменении четности $[(x, y, z) \xrightarrow{P} (-x, -y, -z)]$ вектор импульса преобразуется как $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, но так как вектор спина $\boldsymbol{\sigma}$ является аксиальным вектором (т. е. преобразуется как векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{p} \xrightarrow{P} (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, то $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$. Следовательно, при преобразовании четности знак спиральности (1.2.4) меняется на противоположный, т. е. $\mu \rightarrow -\mu$. Так как процесс рассеяния инвариантен относительно P , то

$$\langle \mu_3, \mu_4 | A | \mu_1, \mu_2 \rangle = \eta \langle -\mu_3, -\mu_4 | A | -\mu_1, -\mu_2 \rangle, \quad (4.2.1)$$

где $\eta = \pm 1$ — фазовый множитель. Обычно для спиральных амплитуд фазу выбирают, следуя [254], т. е. представляя оператор изменения четности P как отражения в $x - z$ -плоскости Y с вращением на угол π вокруг оси y . Условно принимаем, что частица движется вдоль оси z , так что, например,

$$\begin{aligned} P | p_1, \sigma_1, \mu_1 \rangle &= \exp(i\pi J_y) Y | p_1, \sigma_1, \mu_1 \rangle = \\ &= P_1 (-1)^{\sigma_1 - \mu_1} \exp(i\pi J_y) | p_1, \sigma_1, -\mu_1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

где P_1 — внутренняя четность частицы, а множитель $(-1)^{\sigma_1 - \mu_1}$ появляется из-за того, что отражение производится с помощью матрицы поворота $d_{\mu', \mu}^{\sigma}(\pi) = (-1)^{\sigma_1 - \mu} \delta_{\mu', \mu}$ из (Б.7) и (Б.8). Так как в качестве плоскости рассеяния выбрана плоскость $x - z$ ($\varphi = 0$), то, вспоминая, что частица 2 распространяется в направлении, противоположном частице 1, фазовый множитель в (4.2.1) принимает вид (см. [305, с. 232])

$$\eta = P_1 P_2 P_3 P_4 (-1)^{\sigma_1 - \mu_1 + \sigma_2 - \mu_2 - \sigma_3 + \mu_3 - \sigma_4 + \mu_4}. \quad (4.2.3)$$

Подобным образом инвариантность относительно обращения времени требует, чтобы с точностью до фазового множителя амплитуды процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ равнялись бы амплитудам процесса $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$; при сделанном выше выборе (см. [305, с. 232])

$$\langle \mu_3 \mu_4 | A | \mu_1 \mu_2 \rangle = (-1)^{\mu_3 - \mu_4 - \mu_1 + \mu_2} \langle \mu_1 \mu_2 | A | \mu_3 \mu_4 \rangle. \quad (4.2.4)$$

Эти соотношения сильно ограничивают число амплитуд, которые нужно рассматривать. Так, для процесса со спинами $0 + 1/2 \rightarrow 0 + 1/2$ из четырех возможных спиральных амплитуд только две независимы, в то время как для процесса $1/2 + 1/2 \rightarrow 1/2 + 1/2$ из 16 возможных амплитуд независимы только шесть. В некоторых случаях из тождественности частиц следуют дальнейшие ограничения (зависящие от того, какой статистике — Ферми или Бозе подчиняются рассматриваемые частицы).

В общем случае в процессе рассеяния невозможно определить полностью ориентации спинов всех частиц. Это значит, что нельзя иметь дело с чистыми спиральными состояниями, в которых каждая частица имеет определенную проекцию спина, а нужно рассматривать смешанные состояния (статистические ансамбли), которые являются некогерентными суммами различных состояний спиральности, входящих с различными вероятностями (см., например, [355]).

Простейший эксперимент — это такой, в котором не делается попыток определить какое-либо из направлений спина, так что все $2\sigma_i + 1$ спиральных состояния каждой частицы равновероятны. В этом случае нужно просто провести усреднение по всем возможным спиральным состояниям, которые могут давать вклад в начальное состояние, и просуммировать по всем тем состояниям, которые могут возникнуть в конечном, так что вместо (1.8.16) неполяризованное дифференциальное сечение в терминах амплитуд (4.1.6) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q_{s12}^2} \frac{1}{(2\sigma_1 + 1)(2\sigma_2 + 1)} \sum_{H_s} |A_{H_s}(s, t)|^2, \quad (4.2.5)$$

где суммирование по H_s означает суммирование по всем $2\sigma_i + 1$ значениям каждой спиральности μ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Аналогичным образом полное сечение процесса $1 + 2 \rightarrow$ любые частицы в случае рассеяния начального неполяризованного состояния связано при помощи оптической теоремы (1.9.6) с амплитудой упругого рассеяния вперед $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ соотношением

$$\sigma_{12}^{tot} = \frac{1}{2q_{s12} \sqrt{s}} \frac{1}{(2\sigma_1 + 1)(2\sigma_2 + 1)} \times \\ \times \sum_{\mu_1 \mu_2} \text{Im} [\langle \mu_1 \mu_2 | A^{el}(s, 0) | \mu_1 \mu_2 \rangle]. \quad (4.2.6)$$

Проводя эксперименты с поляризованными частицами, т. е. с частицами, для которых средняя проекция спина на некоторое выбранное направление отлична от нуля, можно получить информацию о зависимости процесса рассеяния от спина. Это можно сделать, например, в поляризационном эксперименте, в котором протон мишени при очень низких температурах помещен в сильное магнитное поле, направленное вдоль выбранной оси, что дает, скажем, более чем 50%-ную вероятность того, что $\sigma_z = 1/2$. Или в случае, когда одна из частиц в конечном состоянии нестабильна, можно определить среднюю ориентацию спина такой частицы из углового распределения продуктов ее распада.

Будем описывать смешанное спиновое состояние данной частицы i при помощи спиновой матрицы плотности $\rho_{mm'}$ — эрмитовой матрицы размерностью $2\sigma_i + 1$ на $2\sigma_i + 1$ с единичным следом, такой, что ожидаемое значение (или среднее значение) некоторой наблюдаемой величины O , зависящей от спина, в таком состоянии дается выражением

$$\langle O \rangle = \text{tr} (O\rho), \quad (4.2.7)$$

где tr — след матрицы. Предположим, например, что наблюдается угловое распределение от двухчастичного распада одной из частиц конечного состояния (скажем частицы 4), так что весь процесс имеет вид $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, $4 \rightarrow a + b$. Тогда амплитуда рассеяния будет иметь вид

$$\sum_m A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 m} A(m \rightarrow ab; \theta, \varphi), \quad (4.2.8)$$

где $A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 m}$ — амплитуда вероятности образования частицы 4 со спиральностью $\mu_4 = m$; $A(m \rightarrow ab; \theta, \varphi)$ — амплитуда распада частицы 4 из этого спирального состояния в частицы $a + b$, причем частица a движется вдоль прямой, определяемой полярными углами θ, φ к направлению движения частицы 4. (Эти углы измерены в системе покоя частицы 4.) Таким образом, угловое распределение этого процесса равно

$$W(\theta, \varphi) \sim \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left| \sum_m A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 m} A(m \rightarrow ab; \theta, \varphi) \right|^2. \quad (4.2.9)$$

Следовательно, если мы определим спиновую матрицу плотности образования частицы 4 как

$$\rho_{mm'} = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 m} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 m'}^* / \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} |A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}|^2, \quad (4.2.10)$$

которая нормирована так, что $\text{tr}(\rho) = 1$, и определим распадную матрицу плотности, так что

$$R_{mm'} = A(m \rightarrow ab) A^*(m' \rightarrow ab), \quad (4.2.11)$$

то угловое распределение (4.2.9) будет определяться выражением

$$W(\theta, \varphi) = \text{tr}(\rho R^*). \quad (4.2.12)$$

Если мы знаем R , то ρ может быть определено непосредственно из $W(\theta, \varphi)$. Таким образом, в дополнение к (4.2.5) можно получить добавочную информацию об амплитуде A_{H_s} .

Чтобы получить R , положим импульсы частиц a и b в системе покоя частицы 4 равными \mathbf{q} и $-\mathbf{q}$ и обозначим $\hat{\mathbf{q}}$ единичный вектор в направлении \mathbf{q} . Тогда конечное состояние после распада есть $|\hat{\mathbf{q}}, \mu_b\rangle$. Для распада с сохранением четности амплитуда распада принимает вид (с соответствующей нормировкой)

$$A(m \rightarrow \mu_a \mu_b) = [(2\sigma_4 + 1)/4\pi]^{1/2} D_{m\mu}^{\sigma_4^*}(\varphi, \theta, 0), \quad (4.2.13)$$

где D — матрица вращения (Б.3), отвечающая повороту системы с угловым моментом σ_4 от направления движения частицы 4 (m есть проекция спина частицы 4 на это направление до направления $\hat{\mathbf{q}}$ ($\mu = \mu_a - \mu_b$ есть проекция спина на $\hat{\mathbf{q}}$), θ — угол между \mathbf{p}_4 и $\hat{\mathbf{q}}$; φ — азимутальный угол вокруг $\hat{\mathbf{q}}$. Используя представление (Б.4)

$$D_{m\mu}^{\sigma_4^*}(\varphi, \theta, 0) = \exp(im\varphi) d_{m\mu}^{\sigma_4}(\theta) \quad (4.2.14)$$

и суммируя по спиральностям μ_a, μ_b , получаем, что нормированное угловое распределение имеет вид

$$W(\theta, \varphi) = \frac{2\sigma_4 + 1}{4\pi} \sum_{mm'} \sum_{\mu_a \mu_b} \rho_{mm'} \exp[i(m - m')\varphi] \times \\ \times d_{m\mu}^{\sigma_4}(\theta) d_{m'\mu}^{\sigma_4}(\theta). \quad (4.2.15)$$

Так, для распада частицы со спином 1 на две частицы со спином 0 (т. е. $\rho \rightarrow \pi\pi$) получаем

$$W_1(\theta, \varphi) = (3/4\pi) [\cos^2 \sigma_{\rho 00} + (1/2) \sin^2 \theta (\rho_{11} - \rho_{-1-1}) - \\ - \sin^2 \theta \operatorname{Re} [\rho_{1-1} \exp(2i\varphi) - (1/\sqrt{2}) \sin 2\theta \times \\ \times \operatorname{Re} [\rho_{10} \exp(i\varphi) - \rho_{-1,0} \exp(-i\varphi)]]. \quad (4.2.16)$$

Теперь совсем просто, взяв подходящие моменты от наблюдаемого экспериментального распределения, обратив (4.2.16) и получить ρ , т. е.

$$\rho_{00} = \frac{1}{2} \int d\Omega (5 \cos^2 \theta - 1) W_1(\theta, \varphi); \quad (4.2.17)$$

$$\rho_{11} + \rho_{-1-1} = \frac{1}{2} \int d\Omega (3 - 5 \cos^2 \theta) W_1(\theta, \varphi).$$

Аналогичные, но несколько более сложные выражения получаются для нарушающих четность слабых распадов, таких, как $\Lambda \rightarrow p\pi^-$, потому что в этом случае амплитуда распада, соответствующая выражению (4.2.13), будет включать два члена — четный и нечетный — относительно изменения четности [248].

Ввиду соотношения четности (4.2.1) не все элементы матрицы плотности независимы, а справедливо соотношение

$$\rho_{-m-m'} = (-1)^{m-m'} \rho_{mm'}. \quad (4.2.18)$$

К тому же эрмитовость матрицы плотности требует, чтобы ρ_{mm} были действительными, что вместе с условием нормировки $\operatorname{tr}(\rho) = \sum_m \rho_{mm} = 1$ оставляет независимыми лишь следующие действительные наблюдаемые величины:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{mm}, \quad 0 \leq m \leq \sigma_4; \\ \operatorname{Re} [\rho_{mm'}], \quad |m'| < m \leq \sigma_4; \\ \rho_{m-m}, \quad \text{для целых } \sigma_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.19)$$

Если обе частицы в конечном состоянии распадаются, то имеется объединенная матрица плотности

$$\rho_{nn'}^{mm'} = \sum_{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_1 \mu_2 mn} A_{\mu_1 \mu_2 m' n'} / \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} |A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}|^2, \quad (4.2.20)$$

которая может быть получена из объединенного распадного распределения $W(\theta_3\varphi_3; \theta_4\varphi_4)$.

Для частиц со спином $1/2$ матрица плотности обычно выражается через вектор поляризации \mathbf{P} , определяемый выражением

$$\rho_{mm'} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{P}\sigma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix}, \quad (4.2.21)$$

где σ — матрицы Паули. Ось z , как обычно, выбрана вдоль направления движения, а ось y перпендикулярна плоскости реакции. Сохранение четности (4.2.18) требует, чтобы $P_x = P_z = 0$. Так, например, для реакции $\pi + p \rightarrow \pi + p$ с поляризованной протонной мишенью

$$\begin{aligned} P_y &= \langle \sigma_y \rangle = \text{tr}(\rho \sigma_y) = -2 \text{Im}[\rho_{1/2-1/2}] = \\ &= -2A_{++} A_{+-}^* / (|A_{++}|^2 + |A_{+-}|^2), \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

где \pm равно $\pm 1/2$ для спиральностей нуклона, а индекс спиральности пиона, равный 0, опущен. Величина P_y может быть определена непосредственно из асимметрии сечения рассеяния относительно плоскости $y-z$.

4.3. Кроссинг спиральных амплитуд

Чтобы изучать вклад обменов реджевскими полюсами в процесс рассеяния, необходимо уметь переходить от амплитуды рассеяния в системе центра масс t -канала $A^t(s, t)$ для процесса $1 + \bar{3} \rightarrow 2 + \bar{4}$, в котором реджеон проявляется как физическая частица, к амплитуде $A^s(s, t)$ в системе центра масс s -канала, описывающей процесс $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Для бесспиновых частиц соотношение кроссинга записывается просто как

$$A^s(s, t) = A^t(s, t), \quad (4.3.1)$$

что следует из постулата кроссинга (см. разд. 1.6).

Однако для спиральных амплитуд дело обстоит не совсем так просто, потому что спиральности определены через проекции спина на направления движения различных частиц, так что если мы изменим направления движения, то спиральности тоже изменятся. Более того, мы должны сделать не просто физическое преобразование Лоренца, а сложное лоренцево преобразование, при котором мы переходим от значения импульсов, отвечающих физическому процессу в s -канале, к значениям импульсов в t -канале, где импульсы частиц 2 и 3 обращены. Таким образом, при определении способа продолжения кинематических множителей, входящих в преобразование Лоренца, требуется большая аккуратность. Однако можно показать [387], что при подходящем способе продолжения спиральности при кроссинге не меняются, так что (с точностью до возможного фазового множителя)

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | A^s(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_2 \lambda_4 | A^t(s, t) | \lambda_1 \lambda_3 \rangle, \quad (4.3.2)$$

где λ — спиральности в системе центра масс t -канала, т. е. проекции спина частиц на их направления движения в этой системе. Теперь нужно переписать (4.3.2) в терминах s -канальных спиральностей, а чтобы

сделать это, используем тот факт, что при общем преобразовании Лоренца спиральное состояние преобразуется как

$$|p, \sigma, \lambda\rangle \rightarrow \sum_{\lambda'} D_{\lambda' \lambda}^{\sigma}(\mathbf{R}) |p', \sigma, \lambda'\rangle, \quad (4.3.4)$$

где D — матрица вращения (Б.3); p' — лоренц-преобразованный 4-импульс. Но импульсы появляются только в лоренцевых скалярах s и t , поэтому

$$\begin{aligned} \langle \mu_3 \mu_3 | A^s(s, t) | \mu_1 \mu^2 \rangle &= \sum_{\lambda_i} d_{\lambda_i \mu_1}^{\sigma_1}(\chi_1) d_{\lambda_2 \mu_2}^{\sigma_2}(\chi_2) \times \\ &\times d_{\lambda_3 \mu_3}^{\sigma_3}(\chi_3) d_{\lambda_4 \mu_4}^{\sigma_4}(\chi_4) \langle \lambda_2 \lambda_4 | A^t(s, t) | \lambda_1 \lambda_3 \rangle. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Здесь использовано соотношение (Б.4), чтобы выразить матрицы вращения через функции вращения $d_{\lambda\mu}^{\sigma}$ и χ_i — угол между направлениями движения частицы i в системах центра масс s - и t -каналов. В терминах s и t эти углы даются следующими выражениями [305]:

$$\left. \begin{aligned} \cos \chi_1 &= \frac{-(s+m_1^2-m_2^2)(t+m_1^2-m_3^2)-2m_1^2\Delta}{[\lambda(s, m_1, m_2)\lambda(t, m_1, m_3)]^{1/2}}; \\ \cos \chi_2 &= \frac{(s+m_2^2-m_1^2)(t+m_2^2-m_4^2)-2m_2^2\Delta}{[\lambda(s, m_1, m_2)\lambda(t, m_2, m_4)]^{1/2}}; \\ \cos \chi_3 &= \frac{(s+m_3^2-m_4^2)(t+m_3^2-m_1^2)-2m_3^2\Delta}{[\lambda(s, m_3, m_4)\lambda(t, m_1, m_3)]^{1/2}}; \\ \cos \chi_4 &= \frac{-s(m_4^2-m_3^2)(t+m_4^2-m_2^2)-2m_4^2\Delta}{[\lambda(s, m_3, m_4)\lambda(t, m_2, m_4)]^{1/2}}; \\ \sin \chi_i &= \frac{2m_i \varphi^{1/2}}{[\lambda(s, m_i, m_j)\lambda(t, m_i, m_k)]^{1/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.5)$$

где

$$\Delta = m_2^2 - m_4^2 - m_1^2 + m_3^2; \quad (4.3.6)$$

φ и λ определены выражениями (1.7.23) и (1.7.11). Часто бывает удобно записать (4.3.4) как

$$A_{H_s}(s, t) = \sum_{H_t} M(H_s, H_t) A_{H_t}(s, t), \quad (4.3.7)$$

где $H_s = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$; $H_t = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$; M — спиральная матрица кроссинга, определенная в (4.3.4). Она, разумеется, является квадратной матрицей с $\prod_{i=1}^4 (2\sigma_i + 1)$ строками и колонками, но число ее элементов часто может быть уменьшено благодаря соотношениям четности и обращения времени (4.2.1) и (4.2.4).

В качестве примера рассмотрим упругое рассеяние $\pi + p \rightarrow \pi + p$ в s -канале, t -канал для которого есть $\pi + \pi \rightarrow p + \bar{p}$. Соотношение кроссинга имеет вид

$$A_{H_s}(s, t) = \sum_{\lambda_2 \lambda_4} d_{\lambda_2 \mu_2}^{1/2}(\chi_2) d_{\lambda_4 \mu_4}^{1/2}(\chi_4) A_{H_s}(s, t), \quad (4.3.8)$$

где $\chi_2 = \pi - \chi_4$, что получается при подстановке соответствующих масс в выражения (4.3.5). Используя (Б.19) и равенства $A_{++} = -A_{--}$, $A_{+-} = -A_{-+}$ из (4.2.1), где $\pm = \pm 1/2$, как в (4.2.22), найдем, что соотношения кроссинга принимают вид

$$\left. \begin{aligned} A_{++}^s(s, t) &= \sin \chi_4 A_{++}^t(s, t) - \cos \chi_4 A_{+-}^t(s, t); \\ A_{+-}^s(s, t) &= \cos \chi_4 A_{++}^t(s, t) + \sin \chi_4 A_{+-}^t(s, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

Эти амплитуды связаны с инвариантными амплитудами $A(s, t)$ и $B(s, t)$ из (4.1.4) следующим образом [117]:

$$\left. \begin{aligned} A_{++}^s &= [(1+z_s/2)]^{1/2} [2m_N A(s, t) + (s - m_N^2 - m_\pi^2) B(s, t)]; \\ A_{+-}^s &= -[(1-z_s/2)]^{1/2} s^{-1/2} [(s + m_N^2 - m_\pi^2) A(s, t) + \\ &\quad + (s - m_N^2 + m_\pi^2) m_N B(s, t)]; \end{aligned} \right\} \quad (4.3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{++}^t &= -(t - 4m_N^2)^{1/2} A(s, t) + m_N (t - 4m_\pi^2)^{1/2} z_t \times \\ &\quad \times B(s, t) = -(t - 4m_N^2)^{1/2} A'(s, t); \\ A_{+-}^t &= (1/2) (t - 4m_\pi^2)^{1/2} t^{1/2} (1 - z_t^2)^{1/2} B(s, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.3.11)$$

Так как инвариантные амплитуды свободны от кинематических сингулярностей, то эти уравнения непосредственно дают кинематические особенности спиральных амплитуд. Амплитуда $A'(s, t)$, определенная в (4.3.11), будет использована далее.

Так как функции вращения $d_{\lambda\mu}^\sigma$ ортогональны, то и матрица кроссинга тоже ортогональна. Следовательно, мы можем записать дифференциальное сечение в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q_{s12}^2} \frac{1}{(2\sigma_1 + 1)(2\sigma_2 + 1)} \sum_{H_t} |A_{H_t}(s, t)|^2. \quad (4.3.12)$$

Уравнения (4.2.5) и (4.3.12) эквивалентны в физических областях s - и t -каналов, так что не имеет значения, используются ли s - и t -канальные спиральные амплитуды. Однако вне физических областей матрица кроссинга обладает сингулярностями, так что при использовании эквивалентности этих двух уравнений необходима особая осторожность. Очевидно, что матрицы плотности для двух наборов амплитуд не одинаковы, хотя оба случая довольно часто применяются. Уравнение (4.2.10) дает то, что называется s -канальными или спиральными матрицами плотности, в то время как те же выражения, где μ заменены на λ , дают t -канальные матрицы плотности или матрицы плотности Готфрида—Джексона [200]. Матрица кроссинга (4.3.7) позволяет преобразовать один набор матриц плотности в другой.

4.4. Парциальные амплитуды со спином

Основным поводом для введения спиральных амплитуд была необходимость дать основу для разложения по парциальным волнам так, чтобы можно было провести аналитическое продолжение по полному угловому моменту J , как это было сделано в гл. 2.

В начальном состоянии $|p_1, \sigma_1, \mu_1; p_2, \sigma_2, \mu_2\rangle$ в системе центра масс s -канала имеются две частицы, движущиеся в противоположном направлении вдоль оси z . Начальное состояние может быть разложено по парциальным волнам с угловым моментом J следующим образом:

$$|p_1, \sigma_1, \mu_1; p_2, \sigma_2, \mu_2\rangle = (16\pi)^{1/2} \sum_{J=|\mu|}^{\infty} (2J+1)^{1/2} |s, J, \mu, \mu_1, \mu_2\rangle, \quad (4.4.1)$$

где

$$\mu = \mu_1 - \mu_2; \quad (4.4.2)$$

z -компонента J ; $s = (p_1 + p_2)^2$; множитель $[16\pi(2J+1)]^{1/2}$ дает удобную нормировку. Мы включили индексы спина $\sigma_{1,2}$ в неявное обозначение типа частиц в правой части (4.4.1) (см. разд. 1.2).

Аналогичным образом в конечном состоянии частицы распространяются в противоположных направлениях вдоль оси, направленной под углами θ, φ по отношению к оси z (см. рис. 2.1, ϵ), и соответствующее разложение имеет вид

$$\begin{aligned} |p_3, \sigma_3, \mu_3; p_4, \sigma_4, \mu_4\rangle = (16\pi)^{1/2} \sum_{J=|\mu'|}^{\infty} \sum_{\mu''=-J}^J (2J+1)^{1/2} \times \\ \times D_{\mu''\mu'}^J(\varphi, \theta, -\varphi) |s, J, \mu'', \mu_3, \mu_4\rangle, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

что получено при использовании (4.4.1), (Б.1) и (Б.3), где

$$\mu' = \mu_3 - \mu_4 \quad (4.4.4)$$

— проекция J на направление движения; μ'' — проекция J на ось z ; $D_{\mu''\mu'}^J(\varphi, \theta, -\varphi)$ — матрица вращения, определенная в (Б.3) и соответствующая повороту к направлению, определяемому углами θ, φ по отношению к оси z .

Благодаря сохранению углового момента можно определить парциальную амплитуду для рассеяния с данным J , т. е.

$$A_{HJ}(s) = \langle s, J, \mu'', \mu_3, \mu_4 | A | s, J, \mu, \mu_1, \mu_2 \rangle; \quad (4.4.5)$$

$$H = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}, \quad (4.4.6)$$

где вследствие сохранения проекции J на ось z $\mu'' = \mu$. Таким образом, полную амплитуду рассеяния (4.1.6) можно записать, используя (4.4.1), (4.4.3) и (4.4.6), в виде

$$A_{H_s}(s, t) = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) A_{HJ}(s) D_{\mu\mu'}^{J*}(\varphi, \theta, -\varphi), \quad (4.4.7)$$

где

$$M = \max \{ |\mu|, |\mu'| \}. \quad (4.4.8)$$

Если мы выберем в качестве плоскости рассеяния плоскость $x-z$, то $\varphi = 0$, и с учетом (Б.4) формула (4.4.7) упрощается:

$$A_{H_s}(s, t) = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) A_{HJ}(s) d_{\mu\mu'}^J(z_s). \quad (4.4.9)$$

Это выражение можно сравнить с формулой (2.2.2) для случая бесспиновых частиц.

Парциальную амплитуду можно получить из (4.4.9), используя соотношение ортогональности (Б.14), а именно

$$A_{HJ}(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A_{H_s}(s, t) d_{\mu\mu'}^J(z_s) dz_s. \quad (4.4.10)$$

Очевидно, что при рассеянии бесспиновых частиц, когда $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, вследствие (Б.18) выражение (4.4.10) сводится к (2.2.1).

Величина J в ряду (4.4.9) принимает целые или полуцелые значения, в зависимости от того, четно или нечетно число фермионов в s -канале, т. е. J целое для бозон-бозонного или фермион-фермионного рассеяния и полуцелое для бозон-фермионного рассеяния. Сумма начинается со значения $J = M$, определенного в (4.4.8), которое не равно 0 или $1/2$, поскольку, как было отмечено в разд. 4.1, l не имеет проекции на направление движения частиц, так что для начального состояния

$$J_z = \sigma_{1z} + \sigma_{2z} = \mu_1 - \mu_2 = \mu.$$

Аналогичное выражение имеет место для частиц в конечном состоянии по отношению к их направлению движения. Очевидно, должно быть $J \geq |J_z|$.

Следуя аргументам, которые были развиты в разд. 2.2, мы получим, что условие унитарности для парциальных амплитуд имеет вид

$$A_{HJ}^{if}(s_+) - A_{HJ}^{if}(s_-) = \frac{4i q_{sn}}{\sqrt{s}} \sum_{H_n} A_{HJ}^{in}(s_+) A_H^{nf} f_J(s_-), \quad (4.4.11)$$

подобно выражению (2.2.7), но здесь суммирование идет по всем спиральностям промежуточного состояния $|n\rangle$.

Аналогично (2.2.2) ряд (4.4.9) сходится только, пока мы не дойдем до ближайшей динамической особенности в t -канале, т. е. только внутри малого эллипса Лемана, и, чтобы продолжить его наружу в окрестность физической области s -канала, необходимо сделать аналитическое продолжение. Однако, в отличие от $P_l(z_s)$, $d_{\mu\mu'}^J(z_s)$ в общем случае не являются целыми функциями z_s , так что существуют дополнительные «кинематические» особенности, которые необходимо учитывать при продолжении. Они могут быть получены непосредственно из (Б.9), так как, поскольку полиномы Якоби являются целыми функциями z , то особенности $d_{\mu\mu'}^J(z_s)$ обусловлены множителем

$$\begin{aligned} \xi_{\mu\mu'}(z_s) &= [(1 - z_s)/2]^{|\mu - \mu'|/2} [(1 + z_s)/2]^{|\mu + \mu'|/2} = \\ &= (\sin \theta_s/2)^{|\mu - \mu'|} (\cos \theta_s/2)^{|\mu + \mu'|} \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

и, таким образом, находятся при $z_s = \pm 1$. Они имеют довольно простую физическую интерпретацию: для рассеяния вперед $z_s = 1$, а μ и μ' есть проекции J на ось z в начальном и конечном состояниях соответственно. Поскольку угловой момент должен сохраняться, амплитуда рассеяния должна, очевидно, убывать при $z_s \rightarrow 1$, за исключением

случай $\mu = \mu'$. То же самое относится и к рассеянию назад: $z_s = -1$ где μ и μ' — соответствующие z -компоненты J .

Таким образом, удобно определить s -канальные спиральные амплитуды, свободные от этих кинематических особенностей по t , следующим образом:

$$\hat{A}_{H_s}(s, t) = A_{H_s}(s, t) [\xi_{\mu\mu'}(z_s)]^{-1}. \quad (4.4.13)$$

Эти амплитуды будут удовлетворять дисперсионным соотношениям при фиксированном s , включающем интегралы по динамическим особенностям по t того же самого вида, что и амплитуды рассеяния бесспиновых частиц. Отметим, однако, что амплитуда (4.4.13) по-прежнему имеет кинематические особенности по s , которые мы обсудим далее (см. разд. 6.2).

Разумеется, для того чтобы получить разложение по парциальным волнам, мы могли бы повторить обсуждение этого раздела для t -канальной спиральной амплитуды

$$A_{H_t}(s, t) = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) A_{HJ}(t) d_{\lambda\lambda'}^J(z_t). \quad (4.4.14)$$

где

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_3; \quad \lambda' = \lambda_2 - \lambda_4; \quad M = \max \{ |\lambda|, |\lambda'| \}. \quad (4.4.15)$$

$$\hat{A}_{H_t}(s, t) = A_{H_t}(s, t) [\xi_{\lambda\lambda'}(z_t)]^{-1} \quad (4.4.16)$$

будет свободна от кинематических особенностей по s . Обращение (4.4.14) имеет вид [аналогично (4.4.10)]

$$A_{HJ}(t) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A_{H_t}(s, t) d_{\lambda\lambda'}^J(z_t) dz_t. \quad (4.4.17)$$

Для простоты мы опустили индексы каналов для спиральностей в парциальных амплитудах в (4.4.10) и (4.4.17), так как они всегда определяются инвариантами каналов.

4.5. Представление Грибова — Фруассара

Поскольку $\hat{A}_{H_t}(s, t)$, определенная в (4.4.16), не имеет кинематических особенностей по s , то она удовлетворяет дисперсионному соотношению по s при фиксированном t , аналогичному (1.10.7), т. е.

$$\hat{A}_{H_t}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_{sH}(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{u_T}^{\infty} \frac{E_{uH}(u', t)}{u' - u} du, \quad (4.5.1)$$

где D_{sH} — скачок A_H на динамическом разрезе по s выше порога s_T (и аналогично D_{uH}). Полюса, отвечающие связанным состояниям, если они существуют, могут быть добавлены в выражение (1.10.7).

Следуя методу, развитому в разд. 2.3, это выражение может быть использовано для определения парциальных амплитуд даже вне области сходимости ряда по парциальным волнам. Подставляя (4.5.1) в (4.4.17) и вспоминая соотношения (4.4.16) и (2.3.2), получим [75, 147]

$$A_{HJ}(t) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 dz_t d_{\lambda\lambda'}^J(z_t) \xi_{\lambda\lambda'}(z_t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{z_T}^{\infty} \frac{D_{sH}(s', t)}{z' - z_t} dz' + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-z_T}^{-\infty} \frac{D_{uH}(u', t)}{z' - z_t} dz' \right\} \quad (4.5.2)$$

[$z_T = z_s(s_T, t)$], которое, с учетом обобщенного соотношения Неймана (Б.21) дает представление Грибова—Фруассара [ср. (2.3.4)]

$$A_{HJ}(t) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} dz_t \{ D_{sH}(s, t) e_{\lambda\lambda'}^J(z_t) \xi_{\lambda\lambda'}(z_t) + \\ + (-1)^{J-\lambda} D_{uH}(s, t) e_{\lambda-\lambda'}^J(z_t) \xi_{\lambda-\lambda'}(z_t) \}, \quad (4.5.3)$$

где при получении второго члена использована формула (Б.23).

Если асимптотически A_{H_t} ведет себя как s^α , то из (4.4.16) $\hat{A}_{H_t} \sim s^{\alpha-M}$, а так как $\xi_{\lambda\lambda'}(z_t) \sim s^M$ и поскольку из (Б.25) $e_{\lambda\lambda'}^J(z) = s^{-J-1}$, то критерий сходимости интеграла (4.5.3) такой же, как и (2.3.4), т. е. $J > \alpha$.

Из (Б.26) видим, что при $J \rightarrow \infty$ первый член в (4.5.3) стремится к нулю как

$$J^{-1/2} \exp[-(J + 1/2)\xi(z_T)], \quad (4.5.4)$$

а второй член ведет себя как

$$J^{-1/2} \exp[-(J + 1/2)\xi(z_T)] \exp[-i\pi(J - \lambda)] \quad (4.5.5)$$

и, таким образом, расходится при $J \rightarrow i\infty$. Следовательно, (4.5.3) не удовлетворяет условиям теоремы Карлсона и (как в разд. 2.5) прежде чем делать аналитическое продолжение по J , необходимо ввести амплитуды с определенной сигнатурой. Они определены заменой множителя $(-1)^{J-\nu}$ на сигнатуру $\xi = \pm 1$, где

$$\left. \begin{aligned} \nu = 0 \text{ для целых } J; \\ \nu = 1/2 \text{ для полуцелых } J. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

Отметим, что вопрос, целые или полуцелые значения принимает λ , зависит от J . Следовательно,

$$A_{HJ}^{\xi}(t) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} dz_t \{ D_{sH}(s, t) e_{\lambda\lambda'}^J(z_t) \xi_{\lambda\lambda'}(z_t) + \\ + \xi (-1)^{\lambda-\nu} D_{uH}(s, t) e_{\lambda-\lambda'}^J(z_t) \xi_{\lambda-\lambda'}(z_t) \}. \quad (4.5.7)$$

При $\xi = \pm 1$ эти амплитуды совпадают с физическими амплитудами $A_{HJ}(t)$ [$J - v$ — четное (нечетное)], так что вместо (4.4.14) можно записать

$$A_{H_t}(s, t) = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) [A_{HJ}^{\xi}(t) d_{\lambda\lambda}^{\xi}(J, z) + A_{HJ}^{-\xi}(t) d_{\lambda\lambda}^{-\xi}(J, z)], \quad (4.5.8)$$

если определить

$$d_{\lambda\lambda}^{\xi}(J, z) = (1/2) [d_{\lambda\lambda}^J(z) + \xi (-1)^{\lambda-v} d_{\lambda-\lambda}^J(-z)]. \quad (4.5.9)$$

Отметим, что вследствие соотношения симметрии (Б.7) $d_{\lambda\lambda}^{\xi}(J, z)$ убывает [$J - v$ — четное (нечетное)].

Амплитуды рассеяния с данной сигнатурой определены соотношением

$$A_{H_t}^{\xi}(s, t) = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) A_{HJ}^{\xi}(t) d_{\lambda\lambda}^{\xi}(J, z). \quad (4.5.10)$$

Уравнение (4.5.7) можно использовать для определения парциальных амплитуд с определенной сигнатурой для всех J . Разумеется, физические значения J — это те, для которых $J - v$ целое, причем $J \geq |\lambda|$ для начального состояния (частицы $1 + \bar{3}$ в t -канале) и $J \geq |\lambda'|$ для конечного состояния. Таким образом, как это было определено в (4.4.15), $J \geq M$. Так как эти значения J имеют физический смысл, то они называются «физическими-физическими» или фф-значениями, и амплитуды для этих значений J также называются фф-амплитудами. При продолжении по J мы можем прийти к целым значениям $J - v$ с $J < M$, но $J \geq N$, где

$$N = \min \{ |\lambda|, |\lambda'| \}. \quad (4.5.11)$$

Если, например, $|\lambda| > |\lambda'|$, то такие значения J имеют физический смысл для конечного состояния, но не имеют физического смысла для начального состояния (и наоборот, если $|\lambda| < |\lambda'|$). Такие значения называются «физическими-нефизическими» или фн-значениями J . И, разумеется, для целых значений $J - v$ при $J < N$ мы имеем «нефизические-нефизические» или нн-амплитуды, которые не имеют физического смысла ни для начальных, ни для конечных состояний [187]. Иногда удобно называть все целые $J - v$ при $J - M$ «нефизическими» значениями J .

4.6. Представление Зоммерфельда—Ватсона

Разложение по парциальным волнам (4.5.10) можно переписать в виде контурного интеграла по J , как это было сделано в (2.7.5):

$$A_{H_t}^{\xi}(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_1} \frac{2J+1}{\sin \pi (J + \lambda')} A_{HJ}^{\xi}(t) d_{-\lambda\lambda}^{\xi}(J, -z_i) dJ, \quad (4.6.1)$$

где контур C_1 окружает физические значения $J \geq M$ и обходит все особенности амплитуды $A_{HJ}(t)$, как это показано на рис. 4.1. Фактор $(-1)^{J+\lambda'}$ от вычетов в полюсах знаменателя $\sin^{-1}\pi(J+\lambda')$ сокращается благодаря использованию функции вращения $d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(J, -z)$ вместо $d_{\lambda\lambda'}^{\xi}(J, z)$, связанной с последней соотношением симметрии (Б.7).

Теперь, при развороте контура в контур C_2 на рис. 4.1 встречаем все реджевские полюса и ветвления амплитуды $A_{HJ}(t)$ и получаем при

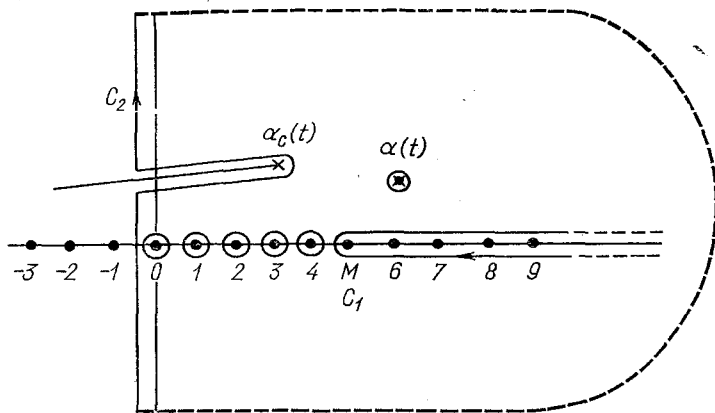


Рис. 4.1. Преобразование Зоммерфельда—Ватсона для спиральной амплитуды с $M=5$ и $N=3$.

Контур C_1 проходит вокруг целых точек с $J \geq M$. Когда он разворачивается в контур C_2 , получаются вклады от реджевского полюса в точке $\alpha(t)$ от разреза, начинающегося в точке $\alpha_c(t)$ и от целых значений J в пределах $-1/2 < J < M$

этом вклады от целых значений $J = v$ в области $-1/2 < J < M$, т. е. от определенных выше фн- и нн-значений момента. Итак, получаем

$$\begin{aligned}
 A_{Ht}^{\xi}(s, t) = & -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_2} \frac{2J+1}{\sin \pi(J+\lambda')} A_{HJ}^{\xi}(t) d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(J, -z_t) dJ - \\
 & -16\pi^2 \frac{2\alpha_c(t)+1}{\sin \pi(\alpha(t)+\lambda')} \beta_H(t) d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(\alpha(t), -z_t) - \\
 & -\frac{16\pi}{2i} \int_{\alpha_c(t)}^{\alpha_c(t)} \frac{2J+1}{\sin \pi(J+\lambda')} \Delta^{\xi}(J, t) d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(J, -z_t) dJ - \\
 & -\sum_{J=N}^{M-1} -\sum_{J=v}^{N-1} 16\pi(2J+1) A_{HJ}^{\xi}(t) d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(J, -z_t). \quad (4.6.2)
 \end{aligned}$$

Первый член — это обычный фоновый интеграл, пропорциональный $s^{\bar{J}/2}$. Для простоты мы предположили, что при $\text{Re } J > -1/2$ есть только один полюс при $J = \alpha(t)$ и одна точка ветвления при $J = \alpha_c(t)$; очевидно, из формулы (Б.14) эти члены имеют обычное асимптотическое

поведение $s^{\alpha(t)}$ и $s^{\alpha_c(t)}$ соответственно. Последние члены содержат фн- и нн-вклады.

Из выражения (Б.12) видно, что в фн-точке, например, $J = J_0$, где $J_0 = v$ — целое число при $N \leq J_0 < M$ функция $d_{\lambda\lambda'}^{\xi}(z)$ и, следовательно, $d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(J, z)$ убывает как $(J - J_0)^{1/2}$, а значит, эти члены не будут давать вклада, если только A_{HJ} не пропорциональна $(J - J_0)^{-1/2}$. Мы обсудим эту возможность далее в разд. 4.8, но если временно предположим, что этого не происходит, то первой суммой можно пренебречь. Аналогично из формулы (Б.12) видно, что в нн-точках $J = J_0$, где $J_0 = v$ — целое, причем $v \leq J_0 < N$, $d_{\lambda\lambda'}^J \sim (J - J_0)$ и, следовательно, эти члены также исчезают, если не существует фиксированных полюсов

$$A_{HJ} \sim (J - J_0)^{-1}.$$

Эту возможность мы рассмотрим в разд. 4.8.

Если мы хотим исследовать область $\text{Re } J < -1/2$, то должны вновь использовать метод Мандельштама, описанный в разд. 2.9, применив вместо (А.18) соотношение (Б.28). Свойства симметрии функций вращения (Б.27) гарантируют, что из (4.5.7)

$$A_{HJ}(t) = (-1)^{\lambda - \lambda'} A_{H-J-1}^{\xi'}(t), \quad J - v - \text{полуцелое} \quad (4.6.3)$$

где $\xi' = \xi$ для $v = 0$ и $\xi' = -\xi$ для $v = 1/2$, пока интеграл (4.5.7) сходится, и поэтому вклады полюсов $[\cos \pi (J + \lambda')]^{-1}$ в двух членах в (Б.28) сокращают друг друга при $J < M$. Итак, получаем

$$A_{Ht}^{\xi}(s, t) = 16\pi (2\alpha(t) + 1) \beta_H(t) \frac{e_{\lambda-\lambda'}^{\xi'}(-\alpha-1, -z_t)}{\cos \pi(\alpha + \lambda')} + \\ + \frac{16\pi}{2i} \int^{\alpha_i(t)} \frac{2J+1}{\cos \pi(J + \lambda')} \Delta^{\xi}(J, \lambda') e_{\lambda-\lambda'}^{\xi'}(-J-1; -z_t) dJ + \quad (4.6.4)$$

+ возможные фиксированные полюса или разрезы + фоновый интеграл,

где, следуя (4.5.9), мы определили

$$e_{\lambda\lambda'}^{\xi}(J, z) = \frac{1}{2} [e_{\lambda\lambda'}^J(z) + \xi (-1)^{\lambda-v} e_{\lambda\lambda'}^J(-z)]. \quad (4.6.5)$$

Уравнение (Б.25) гарантирует, что полюсные члены и члены, отвечающие разрезам, будут иметь асимптотическое поведение $s^{\alpha(t)}$ и $s^{\alpha_c(t)}$ соответственно, но теперь мы можем отодвинуть контур фонового интеграла так далеко, как захотим. Неудачным для реджевской схемы является не обстоятельство, что используемые нами спиральные состояния не являются собственными состояниями оператора четности, поскольку, безусловно, реджеоны должны иметь определенную четность. Так как разрезы не должны иметь определенной четности, то развитый выше формализм для них вполне удовлетворителен (см. гл.8). Поэтому иногда более удобно аналитически продолжать по J амплитуды с определенной четностью, которые определены в работе [188].

Данное t -канальное спиральное парциальное состояние $|J, \lambda, \lambda_1, \lambda_3\rangle$ преобразуется под действием оператора четности следующим образом:

$$P |J, \lambda, \lambda_1, \lambda_3\rangle = P_1 P_3 (-1)^{J-\sigma_1-\sigma_3} |J, \lambda, -\lambda_1, -\lambda_3\rangle, \quad (4.6.6)$$

где P_1, P_3 — внутренние четности частиц и, как обсуждалось в разд. 4.2, спиральности меняют знак. Фазовый множитель $(-1)^{J-\sigma_1-\sigma_3}$ соответствует выбору относительных фаз спиральных состояний Кондона и Шортли, использованному в (4.2.2) и в свойствах отражений матриц вращений (Б.7) [253]. Можно определить состояния с определенной четностью как

$$|J, \lambda, \lambda_1, \lambda_3, \eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|J, \lambda, \lambda_1, \lambda_3\rangle + \eta P_1 P_3 (-1)^{\sigma_1+\sigma_3-v} |J, \lambda, -\lambda_1, \lambda_3\rangle], \quad (4.6.7)$$

где $\eta = \pm 1$ для естественной и неестественной четности. Говорят, что состояние имеет естественную четность, если $P = (-1)^{J-v}$, и неестественную четность, если $P = (-1)^{J-v-1}$; эти выражения легко получаются из (4.6.7). Если, в зависимости от сигнатуры, $J - v$ — четное (нечетное), то эти состояния имеют физический смысл и таким образом возникает соотношение

$$P = \xi \eta. \quad (4.6.8)$$

Так как в сильных взаимодействиях четность сохраняется, то рассеяние возможно только между состояниями одинаковой четности и парциальная амплитуда с определенной четностью дается выражением

$$\begin{aligned} & \langle J, \lambda', \lambda_2, \lambda_4, \eta | A^\xi(t) | J, \lambda, \lambda_1, \lambda_3, \eta \rangle = A_{HJ}^{\eta\xi}(t) = \\ & = \langle \lambda_2 \lambda_4 | A^\xi(t) | \lambda_1, \lambda_3 \rangle + \eta P_1 P_3 (-1)^{\sigma_1+\sigma_3+v} \langle \lambda_2 \lambda_4 | A_J(t) | -\lambda_1, -\lambda_3 \rangle. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Следовательно, можно определить так называемые «сохраняющие четность спиральные амплитуды», свободные от кинематических особенностей по s , следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{H_t}^{\eta\xi}(s, t) & = \langle \lambda_2 \lambda_4 \eta | \hat{A}^\xi(s, t) | \lambda_1 \lambda_3 \eta \rangle = \\ & = \langle \lambda_2 \lambda_4 | A^\xi(s, t) | \lambda_1 \lambda_3 \rangle \xi_{\lambda\lambda'}^{-1}(z_t) + \\ & + \eta P_1 P_3 (-1)^{\lambda'+M+\sigma_1+\sigma_3-v} \langle \lambda_2 \lambda_4 | \hat{A}^\xi(s, t) | -\lambda_1 -\lambda_3 \rangle \times \\ & \times \xi_{-\lambda\lambda'}^{-1}(z_t). \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Разложение по парциальным волнам для этих амплитуд имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}_{H_t}^{\eta\xi}(s, t) & = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) A_{HJ}^{\xi}(t) d_{\lambda\lambda'}^{\xi}(J, z_t) / \xi_{\lambda\lambda'}(z_t) + \eta P_1 P_3 \times \\ & \times (-1)^{\lambda'+M+\sigma_1+\sigma_3-v} A_{HJ}^{\xi}(t) d_{-\lambda\lambda'}^{\xi}(z_t) / \xi_{-\lambda\lambda'}(z_t), \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

где мы ввели $\bar{H} = \{-\lambda_1, -\lambda_3, \lambda_2, \lambda_4\}$. Или, используя (4.6.9),

$$\begin{aligned} \hat{A}_{H_t}^{\eta \xi}(s, t) = & 16\pi \sum_{J=N}^{\infty} (2J+1) (A_{HJ}^{\eta \xi}(t) d_{\lambda \lambda'}^{\xi \pm}(J, z_t) + \\ & + A_{HJ}^{\bar{\eta} \bar{\xi}}(t) \hat{d}_{\lambda \lambda'}^{\xi \mp}(J, z_t), \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

где $\bar{\eta} = -\eta$;

$$\hat{d}_{\lambda \lambda'}^{\eta \xi}(J, z) = \frac{1}{2} \left[\frac{d_{\lambda \lambda'}^{\xi}(J, z)}{\xi_{\lambda \lambda'}(z)} + \eta (-1)^{\lambda' + M} \frac{d_{-\lambda \lambda'}^{\xi}(J, z)}{\xi_{-\lambda \lambda'}(z)} \right]. \quad (4.6.13)$$

Таким образом, мы видим, что полная амплитуда содержит вклады парциальных амплитуд обеих четностей, но асимптотически, из выражений (4.5.9), (4.6.12), (Б.13) и (Б.17)

$$d_{\lambda \lambda'}^{\eta \xi}(J, z) \sim (z/2)^{J-M} (1 + \eta/2) + O(z^{J-M-1}), \quad \text{Re } J > -1/2, \quad (4.6.14)$$

так что в главном приближении $\hat{d}_{\lambda \lambda'}^{\xi \pm}$ доминирует над $\hat{d}_{\lambda \lambda'}^{\xi \mp}$. Поэтому амплитуду (4.6.12) можно рассматривать как амплитуду с определенной четностью только в асимптотическом смысле.

Если теперь проделать над выражением (4.6.12) преобразование Зоммерфельда—Ватсона и использовать метод Мандельштама, как при выводе (4.6.4), то получим, что реджевский вклад дается выражением

$$\begin{aligned} \hat{A}_{H_t}^{\eta \xi}(s, t) = & 16\pi (2\alpha(t) + 1) \beta_H(t) \times \\ & \times \hat{e}_{\lambda \lambda'}^{\xi \pm}(-\alpha - 1, z_t) / \cos \pi(\alpha + \lambda'), \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

где, по аналогии с (4.6.13), мы ввели

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\lambda \lambda'}^{\eta \xi}(J, z) = & (1/4) \{1 + \xi \exp[\pm i\pi(J-v)]\} [e_{\lambda \lambda'}^J(z) / \xi_{\lambda \lambda'}(z) + \\ & + \eta (-1)^{\lambda' + M} e_{-\lambda \lambda'}^J(J, z) / \xi_{\lambda \lambda'}(z)]. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Однако в ведущих членах асимптотики выражение (4.6.15) и вклад реджевского полюса в (4.6.4) совпадают.

4.7. Ограничения на реджевские особенности, следующие из унитарности

Мы уже упоминали в разд. 2.4, что применение s -канальной унитарности приводит к ограничению Фруассара и, следовательно, к условию, что t -канальные реджевские особенности не могут лежать правее 1 при $t \leq 0$. Это применимо и в случае рассеяния частиц со спином, так как реджевское степенное поведение амплитуд не меняется.

Из t -канальной унитарности также вытекают некоторые важные ограничения. Для упругого рассеяния бесспиновых частиц в t -канале, $1 + \bar{3} \rightarrow 1 + \bar{3}$, условие унитарности записывается в виде [из (2.2.7) и (2.6.8) с заменой $s \rightarrow t$]

$$B_{\bar{1}}^{\xi}(t_+) - B_{\bar{1}}^{\xi}(t_-) = 2i\rho_t(t) B_{\bar{1}}^{\xi}(t_+) B_{\bar{1}}^{\xi}(t_-); \quad (4.7.1)$$

$$\rho_t(t) = (q_{t13})^{2l+1} 2/\sqrt{t}, \quad (4.7.2)$$

что справедливо для $t_T < t < t_I$, где t_T и t_I — порог упругого и неупругого процессов. Так как $B_l(t)$ — вещественно-аналитическая функция, то

$$(B_{l^*}^\xi(t+i\epsilon))^* = B_l^\xi(t-i\epsilon) \quad (4.7.3)$$

для действительных t (где звездочкой отмечено комплексное сопряжение), так что можно переписать (4.7.1) как

$$B_l^\xi(t) - (B_{l^*}^\xi(t))^* = 2i\rho_l(t) B_l^\xi(t) (B_{l^*}^\xi(t))^*. \quad (4.7.4)$$

Мы знаем только, что это уравнение справедливо для целых значений l со своей сигнатурой, но поскольку обе стороны равенства (4.7.4) удовлетворяют условию теоремы Карлсона (см. разд. 2.7), то уравнение останется верным, если мы продолжим его по l . Отметим, что, как это следует из обсуждения в разд. 2.6, выражение (4.7.4) справедливо для нецелых l только потому, что, определяя $B_l^\xi(t)$ в (2.6.8), мы устранили кинематические пороговые особенности.

Очевидно, что выражению (4.7.1) не может удовлетворять фиксированный полюс в l -плоскости в виде

$$B_l^\xi(t) \simeq \beta(l, t) / (l - l_0), \quad l \rightarrow l_0, \quad (4.7.5)$$

так как если подставить (4.7.5) в (4.7.1), то в левой стороне уравнения получится полюс первого порядка в точке l_0 , приравненный полюсу второго порядка в правой стороне. Полюс, положение которого меняется с t , например, полюс при $l = \alpha(t)$, может удовлетворять (4.7.1) при условии, что $\alpha(t_+) \neq \alpha(t_-)$, т. е. когда $\text{Im } \alpha(t) \neq 0$ (для $t > t_T^*$). Подобные примеры мы рассматривали в разд. 3.4, где унитарность превращала фиксированный полюс борновского члена в движущийся полюс с правым разрезом.

Единственный случай, когда соотношение (4.7.4) может быть согласовано с наличием фиксированного полюса, это тот, когда существует также и разрез в l -плоскости, проходящий через точку l_0 при всех $t_T^* < t < t_I$. Тогда в B_l и B_{l^*} подход к полюсу $l = l_0$ осуществляется по разным берегам разреза и полюс может существовать на одном берегу разреза, но его может не быть на другом. В таком случае нет противоречия с условием унитарности (см. разд. 8.3). Однако в отсутствие разрезом все полюса должны быть движущимися, т. е. их положение должно быть функцией t .

Определим соответствующие парциальные амплитуды для частиц со спином

$$B_{HJ}^\xi(t) = A_{HJ}^\xi(t) (q_{t13})^{-2L}, \quad (4.7.6)$$

где L — наименьший возможный орбитальный угловой момент на пороге для данного J ($L = J - Y_{13}^+$, где $Y_{13}^+ = \sigma_1 + \sigma_3$ или $\sigma_1 + \sigma_3 - 1$, в зависимости от четности. Это обстоятельство будет рассмотрено в разд. 6.2). Тогда условие унитарности может быть записано в виде

$$B_J^\xi(t) - (B_{J^*}^\xi(t))^+ = 2i (B_{J^*}^\xi(t))^* \rho_J(t) B_J^\xi(t), \quad (4.7.7)$$

где B представляет собой матрицы, причем различным начальным и конечным спиральным состояниям отвечают строки и столбцы матрицы (+ — обозначение эрмитово-сопряженной матрицы, т. е. комплексно-сопряженной и транспонированной матрицы: $B_{ij}^+ = B_{ji}^*$); $\rho_J(t)$ — диагональная матрица кинематических множителей

$$(\rho_{nJ}(t))_{nn} = (q_{t_n})^{2L_n + 1} 2/\sqrt{t}. \quad (4.7.8)$$

Таким образом, суммирование по промежуточным состояниям в (4.7.7) представлено в виде матричного произведения. Аналогичным образом выше неупругого порога увеличением числа строк и колонок в соответствии с условием унитарности (2.2.11) можно включить неупругие двухчастичные процессы.

Фиксированный полюс при $J = J_0$ в выражении (4.7.7) означает, что

$$\beta(J_0, t)\beta^+(J_0, t) = 0, \text{ т. е. } \beta = 0, \quad (4.7.9)$$

так что при действительных J фиксированные полюса опять запрещены, но если J_0 имеет мнимую часть, то (4.7.7) приводит к равенству:

$$\beta(J_0, t^+)\beta(J_0, t_-) = 0 \quad (4.7.10)$$

и не требуется, чтобы $\beta = 0$. Таким образом, в принципе фиксированные полюса могут существовать даже в отсутствие разрезов, но они должны лежать не на действительной оси. Однако, казалось бы, нет никаких причин, по которым должны существовать такие фиксированные полюса при комплексных значениях J . В следующем разделе мы увидим, что фиксированные полюса действительно существуют на вещественной оси в нефизических точках с чужой сигнатурой, и ясно, что такие полюса должны накрываться реджевскими разрезами.

Если определить парциальную S -матрицу как

$$S(J, t) = 1 + 2i\rho_J(t)B(J, t), \quad (4.7.11)$$

где 1 — это единичная матрица, то условие унитарности (4.7.7) запишется в виде

$$S(J, t)S^+(J, t) = 1 \text{ или } S_{ij}(J, t) = [S^+]_{ij}/\det S^+, \quad (4.7.12)$$

где $[S^+]_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента ij ; $\det S^+$ — детерминант матрицы S^+ . Для двухканального процесса это выражение принимает вид

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{22}^* & -S_{21}^* \\ -S_{12}^* & S_{11}^* \end{pmatrix} / (S_{11}^* S_{22}^* - S_{12}^* S_{21}^*), \quad (4.7.13)$$

так что если S имеет простой полюс вида $\beta(J - \alpha)^{-1}$, то убывание знаменателя в правой части требует, чтобы

$$\beta_{22}\beta_{11} = \beta_{12}\beta_{21}, \quad (4.7.14)$$

и можно записать

$$\beta_{ij} = \beta_i\beta_j, \quad (4.7.15)$$

т. е. вычеты в реджевских полюсах должны факторизоваться, что можно было ожидать из обсуждения в разд. 1.5. Этот результат был доказан для произвольного числа каналов в [97].

4.8. Фиксированные особенности и сверхсходящиеся правила сумм

Функции вращения $e_{\lambda\lambda}^J$, использованные в (4.5.7) для определения парциальной амплитуды при любом J , имеют особенности при фиксированных J , следующие из выражения в квадратных скобках (Б.24) при нефизических значениях J . (Функция $F(a, b, c, d)$ есть целая функция своих аргументов.) Поскольку $x!$ имеет полюса при $x = -1, -2, -3 \dots$, видно, что для $J = J_0$ (где $J_0 - \nu - \text{целое}$)

$$e_{\lambda\lambda}^J(z) \sim \begin{cases} (J - J_0)^{-1/2}, & N \leq J_0 < M \text{ и } -M \leq J_0 \leq -N; \\ (J - J_0)^{-1}, & -N \leq J_0 < N \text{ и } J_0 < -M. \end{cases} \quad (4.8.1)$$

Таким образом, при $J < -M$ вычет в полюсе есть просто $d_{\lambda\lambda}^{J_0}(z)$ [см. (Б.29)], так что при $J \rightarrow J_0 < -M$

$$A_{HJ}^{\xi}(t) \rightarrow \frac{1}{J - J_0} \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_T}^{\infty} dz_t \{ D_{sH}(s, t) \xi_{\lambda\lambda}(z_t) d_{\lambda\lambda}^{J_0}(z_t) + \\ + \xi(-1)^{\lambda-\nu} D_{uH}(s, t) \xi_{\lambda-\lambda}(z_t) d_{\lambda-\lambda}^{J_0}(z_t) \}. \quad (4.8.2)$$

Но, как мы выяснили в предыдущем разделе, такой фиксированный полюс на вещественной оси несовместим с унитарностью, и поэтому интеграл в (4.8.2) должен обращаться в нуль, т. е.

$$\int_{z_T}^{\infty} dz_t \{ D_{sH}(s, t) \xi_{\lambda\lambda}(z_t) d_{\lambda\lambda}^{J_0}(z_t) + \\ + \xi(-1)^{\lambda-\nu} D_{uH}(s, t) \xi_{\lambda-\lambda}(z_t) d_{\lambda-\lambda}^{J_0}(z_t) \} = 0 \quad (4.8.3)$$

или, взяв асимптотическое выражение для функций вращения [при $J < -1/2$ из (Б.13а)],

$$\int_{z_T}^{\infty} ds \{ D_{sH}(s, t) + \xi(-1)^{M-\nu} D_{uH}(s, t) \} s^{-J_0-1+M} = 0, \quad (4.8.4)$$

что выполняется для всех $J_0 < -M$.

Такие интегралы называются сверхсходящимися правилами сумм или СПС для краткости. Например, для рассеяния бесспиновых частиц ($N, M = 0$), $Q_l(z)$ в (2.5.3) имеет полюса при всех отрицательных целых значениях $J_0 = -1, -2 \dots$ (А.32), и СПС принимают вид

$$\int_{s_T}^{\infty} D_s^{\xi}(s, t) s^n ds = 0, \quad n = 0, 1, 2. \quad (4.8.5)$$

Аналогичные СПС должны иметь место в потенциальном рассеянии, если траектория проходит ниже $l = -(1 + n)$ (см. разд. 3.36).

Разумеется, если есть реджевские полюса и разрезы при $\text{Re } J > J_0$, то при $J > J_0$ интеграл (4.5.7) будет расходиться и СПС полу-
чаются только после устранения вклада всех таких полюсов и разре-

зов. Поскольку ограничение Фруассара требует, чтобы правее 1 при $t \leq 0$ не было ни полюсов, ни разрезов, то из (4.8.3) и (Б.14) следует, что при $n = M, M - 1, \dots, 1$

$$\int_{s_T}^{\infty} ds \{D_{sH}(s, t) + \xi (-1)^{M+v} D_{uH}(s, t)\} s^n = 0, \quad (4.8.6)$$

независимо от того, какие имеются реджевские особенности, потому что в противном случае фиксированные особенности (4.8.1) давали бы вклад в асимптотическое поведение, нарушающий ограничение Фруассара.

Но при $N \leq J_0 < M$ и $-M \leq J_0 < -N$ в парциальных амплитудах останутся еще точки ветвления типа $(J - J_0)^{1/2}$, возникающие при сокращении нулей СПС с выражением (4.8.1). Их удобно объединить парами с кинематическими разрезами, идущими от $J = M - 1 - k$ к $-M + k$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$. Они не дают вклада в асимптотику, потому что $d_{\lambda\lambda}^J$ также обращаются в нуль как $(J - J_0)^{1/2}$ в этих точках, что уже отмечалось при обсуждении формулы (4.6.2).

Однако В. Н. Грибов и И. Я. Померанчук [208] показали, что на самом деле СПС не могут выполняться при нефизических значениях J с чужой сигнатурой и поэтому в этих точках $A_{HJ}^{\xi}(t)$ будет иметь фиксированные полюса (или сгущение квадратичных точек ветвления). Это возникает потому, что, как видно из (2.6.19), мнимая часть парциальной спиральной амплитуды содержит вклад от третьей спектральной функции в виде

$$\text{Im } A_{HJ}^{\xi}(t) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{a(t)}^{b(t)} dz' \rho_H^{su}(s', u') e_{\lambda\lambda}^J(z_i') (1 - \xi \exp[-i\pi(J - v)]). \quad (4.8.7)$$

Это выражение обращается в нуль при физических значениях J , т. е. в точках своей сигнатуры. В случаях потенциального рассеяния (без майорановских обменных сил) третьей спектральной функции нет и ситуация иная. Однако в нефизических точках с чужой сигнатурой у амплитуд адрон-адронного рассеяния будут существовать фиксированные особенности типа (4.8.1). В то же время вследствие СПС их вычеты не будут обращаться в нуль потому, что, по крайней мере в некоторых областях значений t , где интеграл по s содержит упругую часть спектральной функции (см. рис. 2.6), из выражения (3.5.34) следует, что подынтегральная функция всегда положительна. Таким образом, СПС (4.8.3)—(4.8.5) справедливы только для таких J_0 , когда $(-1)^{J_0-v} = \xi$. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 7.2.

Вследствие условия унитарности (4.7.7) каждая спиральная амплитуда приобретет сингулярности всех других амплитуд, так что в действительности фиксированные особенности будут присутствовать во всех точках с чужой сигнатурой $J_0 = \sigma_T - k$, $k = 2, 4, 6, \dots$ или $1, 3, 5, \dots$, поскольку σ_T ($\sigma_T = \max\{\sigma_1 + \sigma_3, \sigma_2 + \sigma_4\}$) дает наибольшее возможное значение M . Разумеется, присутствие фиксированных

полюсов чужой сигнатуры при $J_c > 1$ не нарушает ограничения Фруассара, так как обращение в нуль сигнатурного множителя гарантирует, что эти полюса не будут давать вклад в асимптотическое поведение амплитуды. Однако эти фиксированные полюса на вещественной оси несовместимы с условием унитарности, так что существование полюсов Грибова—Померанчука доказывает существование реджевских разрезов, что мы и увидим в гл. 8.

5

РЕДЖЕВСКИЕ ТРАЕКТОРИИ И РЕЗОНАНСЫ

5.1. Введение

Одно из наиболее важных следствий гл. 2 и 4 заключалось в том, что, когда реджевская траектория $\alpha(t)$ проходит через целые значения $J - v$ со своей сигнатурой, амплитуда рассеяния в t -плоскости имеет полюс, который возникает из-за множителя $\sin[\pi(\alpha(t) + \lambda')]$ в (4.6.2). Как мы выяснили в разд. 1.5, такие полюса соответствуют физическим частицам; если полюс существует под порогом t -канала, то эта частица стабильна по отношению к сильным взаимодействиям; если полюс возникает над порогом, то он отвечает резонансу, который может распадаться на другие более легкие адроны. Если данная траектория проходит через несколько целых значений, то она будет содержать несколько частиц с возрастающим спином, и таким образом можно классифицировать все наблюдаемые частицы и резонансы на семейства, причем каждое семейство лежит на данной реджевской траектории. Несколько примеров приведено на рис. 5.5 и 5.6.

Эта глава в основном посвящена аргументам в пользу такой реджевской классификации, но поскольку для каждого набора внутренних квантовых чисел, таких, как B , I , S и т. д., существует своя траектория, то сначала будет полезно кратко рассмотреть способ, с помощью которого частицы классифицируют по внутренним квантовым числам в рамках $SU(3)$ -симметрии и в кварковой модели. Читателям, нуждающимся в более подробном рассмотрении, будут очень полезны книги Каррузерса [84], Журдена [201] и Коккеди [264].

Для полного определения характеристик адрона необходимо в дополнение к его массе m и спину σ задать значения его внутренних квантовых чисел, т. е. барионное число B , заряд Q , внутреннюю четность $P = \eta\xi$ из (4.6.8), странность S , изоспин I и в некоторых случаях также зарядовую четность C_n и G -четность G . Все эти величины сохраняются в сильных взаимодействиях, хотя только B и Q сохраняются во всех взаимодействиях (по крайней мере, пока мы так думаем).

По определению, $B = 0$ для мезонов, $+1$ для барионов и -1 для антибарионов. Те объекты, которые мы интуитивно называем «элементарными» частицами, могут иметь только эти значения B (см. разд. 2.8, где обсуждается более четкое определение терминологии, которой мы

пользуемся). Однако барионное число является аддитивным квантовым числом, поэтому двухчастичное состояние $|1, 2\rangle$ будет иметь барионное число $B_{12} = B_1 + B_2$ и, таким образом, для ядер $B = A -$ атомному массовому номеру.

Внутренняя четность частицы P равна ± 1 в зависимости от того, как преобразуется волновая функция частицы в собственной системе отсчета под действием оператора четности, т. е. $\hat{P}\psi(r) = \psi(-r) = P\psi(r)$. Это мультипликативное квантовое число, так что для двухчастичного состояния $P_{12} = P_1 P_2 (-1)^l$, где l — относительный угловой момент двух частиц [см. (4.6.6)].

Оператор зарядового сопряжения C превращает частицу в античастицу, т. е. в частицу, которая имеет противоположный знак всех аддитивных квантовых чисел. Под действием C $B \rightarrow -B$, $Q \rightarrow -Q$ и $S \rightarrow -S$. Так как сильные взаимодействия инвариантны относительно C , то частицы, которые имеют $B = Q = S = 0$, т. е. нестранные нейтральные мезоны, являются собственными состояниями оператора C с собственным значением $C_n = +1$ (индекс n означает нейтральные частицы). Известно (см., например, [47]), что $C_n = +1$ для π^0 и η^0 мезонов и $C_n = -1$ для ρ^0 , ω , ϕ и фотона γ . Эти значения согласуются с наблюдаемыми распадами $\pi^0, \eta^0 \rightarrow \gamma\gamma$ и $\rho^0, \omega, \phi \rightarrow \gamma\nu \rightarrow e^+e^-$ (где $\gamma\nu$ — виртуальный фотон).

Для других нестранных мезонов полезно использовать изотопическую инвариантность сильных взаимодействий, позволяющую определить оператор обобщенного сопряжения частицы и античастицы, называемый оператором G -четности. Для таких частиц проекция изоспина на ось z [см. (5.2.1)] равна заряду, т. е. $Q = I_z$ и таким образом поворот вектора состояния частицы на угол π вокруг оси y в «пространстве изоспина» приводит нас с точностью до фазового множителя к зарядово-сопряженной частице, т. е. $I_z \rightarrow -I_z$. Условие Кондона и Шортли для выбора фаз в изотопических мультиплетах дает [см. (B.7)]

$$\exp(i\pi I_y) |I, I_z\rangle = (-1)^{I-I_z} |I, -I_z\rangle. \quad (5.1.1)$$

Таким образом, для нестранных мезонов комбинированная операция

$$G = C \exp(i\pi I_y) \quad (5.1.2)$$

будет иметь собственные значения $G = \pm 1$. Так, для мультиплета пионов π^+, π^0, π^- с $I = 1, I_z = 1, 0, -1$ имеем $G_\pi = -1$, так как $C_{\pi^0} = +1$. Ясно, что это тоже мультипликативное квантовое число и, следовательно, состояние из n пионов будет иметь $G|n\rangle = (-1)^n |n\rangle$. Это позволяет определить G -четность других нестранных мезонов по их адронным распадам на пионы; например, тот факт, что существует распад $\rho \rightarrow \pi\pi$, указывает на то, что ρ имеет $G = +1$. И, конечно же, сохранение G -четности запрещает распады $\rho \rightarrow 3\pi$, 5π и т. д.

Оставшиеся квантовые числа I и S требуют краткого обзора унитарной симметрии, который мы произведем в следующем разделе.

5.2. Унитарная симметрия

5.2а. Изоспин

Из ядерной физики хорошо известно, что сильные взаимодействия с хорошей точностью инвариантны относительно преобразований группы изотопического спина (или изоспина) $SU(2)$, по крайней мере порядка нескольких процентов. Эта группа изоморфна группе вращений, причем вектор изоспина I соответствует J , в то время как его проекция на ось z в пространстве изоспина I_z соответствует J_z . Эта изотопическая инвариантность подтверждается двумя связанными аргументами.

I. Все адроны могут быть условно разбиты на мультиплеты с данным изоспином I , так что собственное значение I^2 равно $I(I+1)$. Мультиплеты приблизительно вырождены по массе и одинаковы по всем другим квантовым числам, за исключением заряда. Вот хорошо известные примеры.

Нуклон: p, n ; $I = 1/2, I_z = \pm 1/2$.

Пион: π^+, π^0, π^- ; $I = 1, I_z = 1, 0, -1$.

3—3 резонанс: $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$; $I = 3/2, I_z = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$.

Значение изоспина соответствует количеству зарядовых состояний, которыми обладает частица, так что I_z пробегает интервал значений $I, I-1, \dots, -I$ и проекция на ось z связана с зарядом соотношением

$$Q = I_z + 1/2B \quad (5.2.1)$$

(только для нестранных частиц). Таким образом, частица может быть представлена вектором изотопического состояния $|I, I_z\rangle$. Разность масс внутри данного мультиплета довольно мала (например, $m_p = 938,3$ МэВ, $m_n = 939,6$ МэВ) и предполагается, что она вызвана различными электромагнитными взаимодействиями частиц. В сильных взаимодействиях такими различиями можно пренебречь, и поэтому для всех членов мультиплета будем использовать единый символ (например, $N = \{p, n\}$) и предполагать, что все они лежат на одной и той же реджевской траектории, обладающей определенным изоспином. Например, $\alpha_N(t)$ имеет $I = 1/2$, и только при рассмотрении электромагнитных взаимодействий нужно учесть тот факт, что на самом деле существуют две слабо расщепленные траектории с $I_z = \pm 1/2$.

II. Различные амплитуды рассеяния, включающие эти частицы, связаны соотношениями, вытекающими из изотопической инвариантности; они зависят от величины I , но не зависят от I_z , т. е. сильные взаимодействия обладают зарядовой независимостью. Это свойство будет рассмотрено в разд. 6.7.

Иногда удобно рассматривать изодублет

$$(p, n) \quad I = 1/2, I_z = \pm 1/2$$

как фундаментальный изотопический спинор, из которого могут быть построены все другие мультиплеты (так же как все возможные угловые моменты могут быть построены сложением различного числа частиц

со спином $1/2$). Этот спинорный изодублет может быть представлен в виде столбца

$$\{2\} = \eta = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

который преобразуется под действием $SU(2)$ как

$$\eta \rightarrow \eta' = U\eta, \quad (5.2.3)$$

где U — любая унитарная матрица размерностью 2×2 с $\det U = 1$. Любая такая матрица может быть записана в виде

$$U = \exp(i\theta\mathbf{n}\tau/2), \quad (5.2.4)$$

где θ — произвольный параметр; \mathbf{n} — единичный трехмерный вектор, а компонентами τ являются матрицы Паули

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Соответствующие «античастицы» представляются в виде изоспина-строки

$$\{\bar{2}\} = \bar{\eta} = (\bar{p}, \bar{n}). \quad (5.2.6)$$

Формально, комбинируя η и $\bar{\eta}$, можно построить все остальные изомультиплеты. Так, например,

$$(1/2)(\bar{p}p + \bar{n}n) \quad (5.2.7)$$

соответствует синглету с $I = 0$ $\{1\}$, как, например, η -мезон, в то время как

$$\bar{p}\bar{n}, (1/2)(\bar{p}p - \bar{n}n), \bar{p}n \quad (5.2.8)$$

образуют триплет $\{3\}T = 1, I_z = 1, 0, -1$ соответственно, как, например, π -мезон. Таким образом, по крайней мере в формальном смысле

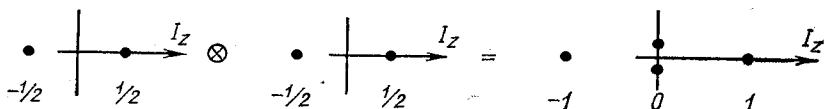


Рис. 5.1. Суперпозиция двух изодублетов с $I_z = \pm 1/2$, приводящая к четырем состояниям, одним с $I_z = -1$, двум с $I_z = 0$ и одним с $I_z = 1$

ле, можно рассматривать η - и π -мезоны как связанные состояния нуклон-антинуклонной системы

$$\{2\} \otimes \{2\} = \{1\} \otimes \{3\}, \quad (5.2.9)$$

как показано на рис. 5.1. Это полностью аналогично построению состояний атома гелия со спином 0 и 1 из двух электронов со спином $1/2$.

Чтобы учесть также и странные частицы, развитая выше схема должна быть расширена. Выберем в качестве фундаментального представления трехкомпонентный спинор:

$$\{3\} = q = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (5.2.10)$$

преобразующийся под действием $SU(3)$ как

$$q \rightarrow q' = Uq, \quad (5.2.11)$$

где теперь U — унитарная матрица размерности 3×3 с $\det U = 1$, которая может быть записана в виде

$$U = \exp(i\theta\alpha\lambda/2). \quad (5.2.12)$$

Здесь α — восьмимерный единичный вектор; λ -матрицы приведены в табл. 5.1. Они соответствуют трем t -матрицам группы $SU(2)$ (5.2.5).

Таблица 5.1

 λ -матрицы группы $SU(3)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Три частицы p , n , λ были введены Гелл-Маном [188] и Цвайгом [418] и названы «кварками». Приписанные им квантовые числа показаны в табл. 5.2. Ясно, что p - и n -кварки не могут быть идентифицированы с протоном и нейтроном в (5.2.2), так как они имеют, между прочим, $B = 1/3$. Нужен также и триплет антикварков

$$\{\bar{3}\} = \bar{q} = (\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda}). \quad (5.2.13)$$

Нет никаких подтверждений тому, что такие кварки действительно существуют, но, по крайней мере, они представляют собой очень удобную схему для классификации по группе $SU(3)$. К тому же, как мы будем специально обсуждать в гл. 7, наблюдаемые адроны ведут себя так, как если бы они были на самом деле составлены из кварков. (Полный обзор свидетельств в пользу кварковой структуры адронов в электромагнитных и слабых взаимодействиях дан в [165].)

Квантовые числа кварков

| Кварк | B | I | I_z | Q | S | Y |
|-----------|-------|-------|--------|--------|------|--------|
| p | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | $2/3$ | 0 | $1/3$ |
| n | $1/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $-1/3$ | 0 | $1/3$ |
| λ | $1/2$ | 0 | 0 | $-1/3$ | -1 | $-2/3$ |

Бариион состоит из трех кварков (чтобы получить $B = 1$), в то время как мезоны составлены из кварк-антикварковых пар. Гиперзаряд Y определен через странность S следующим образом:

$$Y = S + B. \quad (5.2.14)$$

Тогда заряд дается соотношением Гелл-Мана—Нишиджимы

$$Q = I_z + Y/2 = I_z + (S + B)/2 \quad (5.2.15)$$

вместо выражения (5.2.1).

Взяв все возможные комбинации кварка и антикварка, как показано на рис. 5.2, получим

$$q\bar{q} = \{3\} \otimes \{\bar{3}\} = \{1\} \otimes \{8\}, \quad (5.2.16)$$

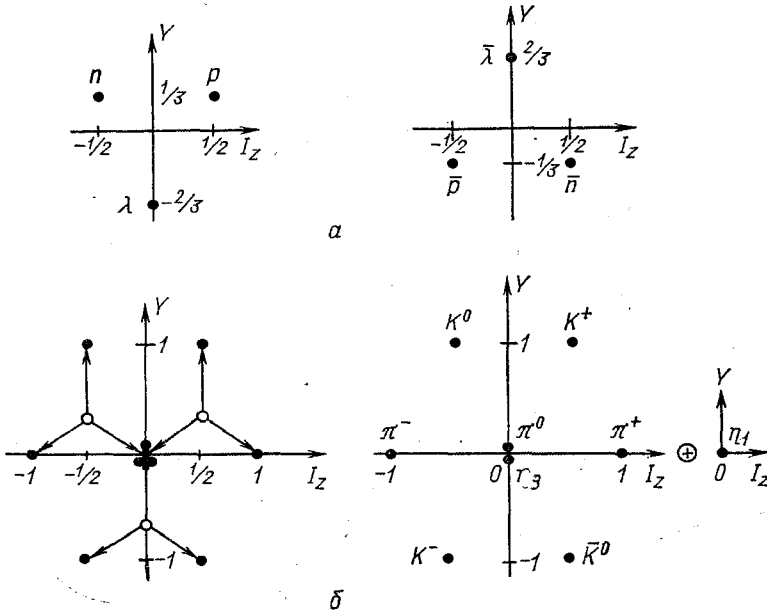


Рис. 5.2. (а) Триплеты кварков $\{p, n, \lambda\}$ и антикварков $\{\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda}\}$. (б) Разложение $q \otimes \bar{q} = \{8\} + \{1\}$.

Каждый кварк, обозначенный \circ , объединяется с триплетом антикварков, что дает девять состояний, которые отождествляются с изображенными справа псевдоскалярными мезонами

так что можно ожидать, что мезоны будут объединяться в нонеты, причем каждый нонет состоит из синглета и октета с квантовыми числами, показанными на рис. 5.2. Надежно установленные мезоны, сгруппированные в такие мультиплеты, приведены в табл. 5.3. Очевидно, что для масс частиц симметрия сильно нарушается и расщепление масс по Y в $SU(3)$ намного больше, чем расщепление масс по I_z в группе изоспина.

Таблица 5.3

Мезонные нонеты и составляющие их кварки

| Мультиплет | Кварковый состав | Частицы J^{PC} | | | | | | | |
|------------|---|------------------|-----|------------------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| | | I | S | 0^{--} PS | 1^{--} V | 0^{++} S | 1^{++} A^+ | 1^{+-} A^- | 2^{++} T |
| {8} | $p\bar{n}$ | 1 | 0 | π^+ (140) | ρ^+ (770) | δ^+ (970) | A_1^+ (1100) | B^+ (1235) | A (1310) |
| | $(1/\sqrt{2})(p\bar{p} - n\bar{n})$ | 1 | 0 | π^0 | ρ^0 | δ^0 | A_1^0 | B^0 | A_2^0 |
| | $n\bar{p}$ | 1 | 0 | π^- | ρ^- | δ^- | A_1^- | B^- | A_2^- |
| | $n\bar{\lambda}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | K^0 (498) | K^{*0} (890) | k^0 (1300) | Q^0 (1240) | Q^0 (1280) | K^{*0} (1420) |
| | $p\bar{\lambda}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | K^+ | K^{*+} | k^+ | Q^+ | Q^+ | K^{*+} |
| | $\lambda\bar{n}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | \bar{K}^0 | \bar{K}^{*0} | \bar{k}^0 | \bar{Q}^0 | \bar{Q}^0 | \bar{K}^{*0} |
| | $\lambda\bar{p}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | K^- | K^{*-} | k^- | Q^- | Q^- | K^{*-} |
| {1} | $(1/\sqrt{6})(p\bar{p} + n\bar{n} - 2\lambda\bar{\lambda})$ | 0 | 0 | η_8 | ω_8 | ε_8 | D_8 | H_8 | f_8 |
| | $(1/\sqrt{3})(p\bar{p} + n\bar{n} + \lambda\bar{\lambda})$ | 0 | 0 | η_1 | ω_1 | ε_1 | D_1 | H_1 | f_1 |

Примечание. Все частицы в мультиплетах PS , V и T установлены надежно, в то время как некоторые частицы в других мультиплетах не столь достоверны. Массы в мегаэлектронвольтах приведены только для первого члена в каждом изомultipлете. Для странных мезонов S не является сохраняющимся квантовым числом, поэтому классификация в области Q довольно неопределенна. Смешивание в изосинглетах имеет вид:

$$\eta_8 + \eta_1 = \eta(549) + \eta'(958), \quad \omega_8 + \omega_1 = \omega(783) + \phi(1019), \quad \varepsilon_8 + \varepsilon_1 = \varepsilon(600) + S^*(993),$$

$$D_8 + D_1 = D(1285) + E(1420), \quad H_8 + H_1 = H(990) + ?, \quad f_8 + f_1 = f(1270) + f'(1514).$$

Формулы смешивания — см. (5.2.17).

Неясно также, как можно отличить синглетные состояния, такие, как ω_1 , от октетного состояния с теми же квантовыми числами — ω_8 . В схеме с нарушенной симметрией наблюдаемые ω - и ϕ -мезоны могут быть смесью $SU(3)$ -чистых состояний, например:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \omega_8 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta; \\ \omega &= \omega_8 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.17)$$

где θ — угол смешивания. Так называемое «идеальное» значение угла смешивания равно

$$\theta = \arctg 1/\sqrt{2} \approx 38^\circ. \quad (5.2.18)$$

В таком случае из табл. 5.3 найдем, что

$$\omega = (1/\sqrt{2})(p\bar{p} + n\bar{n}), \quad \phi = -\lambda\bar{\lambda}, \quad (5.2.19)$$

так что ω не содержит странных кварков. Это идеальное смешивание справедливо для векторных и тензорных мезонов, но не выполняется для псевдоскалярных.

Предполагается, что расщепление масс внутри данного мультиплетта вызвано тем, что λ -кварк имеет массу, отличную от масс p - и n -кварков. Таким образом, если мы положим $m_n = m_p = m$ и $m_\lambda = m + \Delta m$, то в случае идеального смешивания для векторных мезонов получим

$$m_\omega = m_\rho = 2m, \quad m_{K^*} = 2m + \Delta m, \quad m_\phi = 2(m + \Delta m) \quad (5.2.20)$$

что дает

$$m_\omega + m_\phi = 2m_{K^*} \quad (5.2.21)$$

Однако обычно предполагается (без очень убедительных причин), что эти соотношения должны на самом деле записываться для квадратов масс, т. е. $m_\omega^2 = m_\rho^2$, $m_\omega^2 + m_\rho^2 = 2m_{K^*}^2$. Это выполняется довольно хорошо, так как массы мезонов много больше, чем разности масс. Самые легкие мезоны — псевдоскалярные — не удовлетворяют соответствующим массовым формулам ни для m , ни для m^2 , что обычно принимается как свидетельство того, что смешивание между η и η' далеко от идеального [264].

Как псевдоскалярный (PS), так и векторный (V) нонеты можно построить из кварков со спином $1/2$ в состоянии с орбитальным моментом $l = 0$, так как они отвечают соответственно антипараллельному (полный спин кварков $s = 0$) или параллельному ($s = 1$) расположению спинов кварков. Мезоны с более высоким спином могут рассматриваться как орбитальные возбуждения пары $q\bar{q}$. Поскольку q и \bar{q} , будучи фермионами, имеют противоположную внутреннюю четность, четность состояния $q\bar{q}$ равна

$$P = (-1)^{l+1} \quad (5.2.22)$$

и для состояний с $B = S = 0$ зарядовая и G -четности равны

$$C_n = (-1)^{l+s}, \quad G = (-1)^{l+s+l}. \quad (5.2.23)$$

Так как спин мезона равен $J = 1 + s$, то для $l = 0$ получается только PS - и V -нонеты с $J^{PC} = 0^{-+}$ и 1^{-} соответственно, в то время как для $l = 1$ существуют четыре возможных нонета: скалярный $S = 0^{++}$, два аксиальных $A^+ = 1^{++}$ и $A^- = 1^{+-}$ и тензорный $T = 2^{++}$. В табл. 5.3 дано возможное размещение мезонных состояний по нонетам в соответствии с этой классификацией.

Реджевская теория предсказывает, что можно ожидать повторения каждого из этих шести нонетов, когда величина J возрастает на 2. В следующем разделе мы увидим, что на опыте наблюдали только некото-

рые из этих возбужденных состояний. Однако это едва ли удивительно, потому что мезоны обычно можно наблюдать в экспериментах типа

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad 4 \rightarrow a + b.$$

Резонанс 4 наблюдается как пик в сечении по инвариантной массе продуктов его распада при $m_4^2 = (p_a + p_b)^2$, причем a и b будут иметь угловое распределение, отвечающее спину, частицы 4 (см. разд. 4.2). Но при больших значениях m_1^2 можно ожидать, что в сечении образования системы ab будут давать вклад много парциальных волн и таким образом выделение этого распада в трехчастичном конечном состоянии

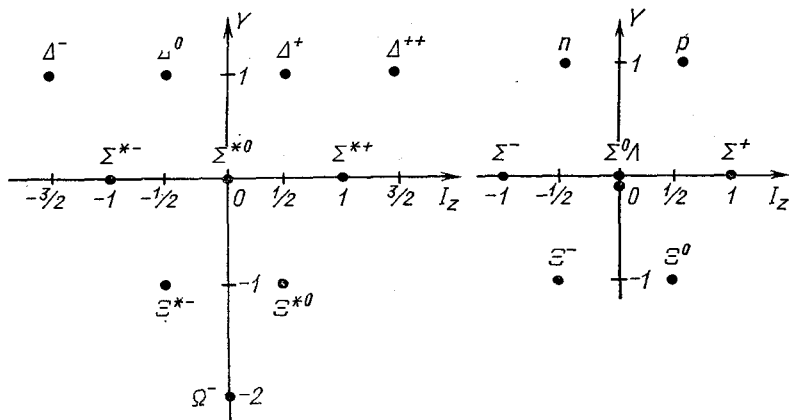


Рис. 5.3. Декуплет $I^P = 3/2$ и октет $1/2^+$ барионов

$3 + a + b$ становится затруднительным. Еще более трудно обнаружить мезоны с неестественной четностью, так как они распадаются только на три (или большее число) частицы.

Ситуация более благоприятна для барионных резонансов, которые могут быть образованы в экспериментах по мезон-барионному рассеянию типа

$$MB \rightarrow B^* \rightarrow MB.$$

Для того чтобы обнаружить резонанс, достаточно провести парциально-волновой анализ двухчастичного конечного состояния. Поэтому известно гораздо больше барионных резонансов.

Барионные резонансы построены из трех кварков

$$q \otimes q \otimes q = \{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} = \{1\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{10\} \quad (5.2.24)$$

(см. [84]), и поэтому барионы должны образовывать синглеты, октеты и декуплеты, квантовые числа которых показаны на рис. 5.3.

Низшие по массе состояния с $l = 0$ могут иметь $J = 1/2$ или $3/2$ (табл. 5.4), и опять можно ожидать при больших массах более высоких значений l . (Будем игнорировать трудность, связанную с тем, что поскольку кварки-фермионы, то, по-видимому, они обладают антисимметричной волновой функцией и поэтому возрастание массы с J да-

Октет и декуплет барионов с низшей массой
и их кварковый состав

| Мультиплет | Кварковый состав | I | S | Частицы |
|-------------------------------|-------------------------|-----|-----|----------------------|
| $\{8\}, J^P = \frac{1}{2}^+$ | ppn | 1/2 | 0 | p (938, 3) |
| | pnn | 1/2 | 0 | n (939, 6) |
| | $pp\lambda$ | 1 | -1 | Σ^+ (1189, 5) |
| | pnl | 1 | -1 | Σ^0 (1192, 6) |
| | | 0 | -1 | Λ (1115, 6) |
| | pnl | 1 | -1 | Σ^- (1197, 4) |
| | $p\lambda\lambda$ | 1/2 | -2 | Ξ^0 (1314, 7) |
| $\{10\}, J^P = \frac{3}{2}^+$ | $n\lambda\lambda$ | 1/2 | -2 | Ξ^- (1321, 2) |
| | ppp | 3/2 | 0 | Δ^{++} (1236) |
| | ppn | 3/2 | 0 | Δ^+ |
| | pnn | 3/2 | 0 | Δ^0 |
| | nnn | 3/2 | 0 | Δ^- |
| | $pp\lambda$ | 1 | -1 | Σ^{*+} (1383) |
| | pnl | 1 | -1 | Σ^{*0} |
| | pnl | 1 | -1 | Σ^{*-} |
| | $p\lambda\lambda$ | 1/2 | -2 | Ξ^{*0} (1532) |
| | $n\lambda\lambda$ | 1/2 | -2 | Ξ^{*-} |
| | $\lambda\lambda\lambda$ | 0 | -3 | Ω^- (1672) |

леко не очевидно [264]). Тем же методом, что и ранее, найдем, что расщепление масс в декуплете должно удовлетворять правилу равных интервалов

$$m_{\Omega^-} - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_{\Delta} = \Delta m, \quad (5.2.25)$$

которое хорошо выполняется. Для октета мы получаем массовую формулу Гелл-Мана — Окубо:

$$m_p + m_{\Xi} = (m_{\Sigma} + 3m_{\Lambda})/2, \quad (5.2.26)$$

но соотношения $m_{\Lambda} = m_{\Sigma}$ и $m_{\Lambda} - m_p = m_{\Sigma^*} - m_{\Delta}$ не выполняются, так что эффекты нарушения симметрии должны быть и в потенциале взаимодействия кварков.

В дополнение к этим предсказаниям относительно массы частиц $SU(3)$ -инвариантность дает также соотношения между амплитудами рассеяния, которые будут исследованы в разд. 6.7.

Приведенная выше схема является наиболее простым вариантом кварковой модели. Открытие двух долгоживущих векторных мезонов

ψ_1 (3100) и ψ_2 (3700) (ссылки см. в [328]) усилило интерес к более сложным схемам, включающим четвертый c -кварк с квантовыми числами

$$B, Q, I, S, C = 1/3, 2/3, 0, 0, 1,$$

где C — новое квантовое число, называемое шарм, собственное значение которого для p -, n - и λ -кварков равно 0. Предполагается, что ψ_1 и ψ_2 являются связанными состояниями в системе cc , а основные мезонные нонеты группы $SU(3)$, образованные как произведение $\{3\} \otimes \{\bar{3}\}$, увеличиваются до 16-плетов группы $SU(4)$, получающихся как $\{4\} \otimes \{\bar{4}\}$. Однако этот четвертый кварк должен быть намного тяжелее, чем другие, поэтому очарованные частицы (образованные из $c\bar{p}$ -, $c\bar{n}$ -, $c\bar{\lambda}$ -, $\bar{c}p$ -, $\bar{c}n$ -, $\bar{c}\lambda$ -кварков) тяжелее, чем мезоны нонета. В самом нонете $SU(3)$ -симметрия и смешивание приблизительно сохраняются. Открытие очарованных частиц сильно повысило интерес к этой модели и к другим близким схемам, основным на «цветных» кварках (обзоры на эту тему см. в [185, 351, 402]).

Важным подтверждением кварковой модели является то, что все наблюдаемые мезоны имеют квантовые числа, отвечающие системе $q\bar{q}$, как это показано на рис. 5.2, а все барионы имеют квантовые числа, которые могут быть получены в системе $q \otimes q \otimes q$ (см. рис. 5.3). Каналы, имеющие другие квантовые числа, например $\pi^+\pi^+$ -канал с изоспином $I = 2$ или K^+p -канал с $S = 1$, называются экзотическими каналами и как будто не содержат резонансов. Все хорошо установленные резонансы имеют неэкзотические квантовые числа.

5.3. Реджевские траектории

Полные обзоры свойств частиц и резонансов периодически публикуются Группой данных по частицам (Particle Data Group). Издание 1974 г. [327] содержит информацию о более чем 50 возможных мезонах и 90 барионах, хотя свидетельства в пользу некоторых из них довольно слабые. В этом разделе мы попытаемся разбить все частицы, для которых существуют достаточно веские свидетельства их существования, по реджевским траекториям. Разумеется, с полной определенностью этого сделать нельзя, потому что существует лишь несколько определенных правил, следуя которым частицы должны быть объединены вместе на одной траектории. Но, как мы увидим, эта задача сильно упрощается тем, что на плоскости $\text{Re}(\alpha(t)) - t$ траектории являются прямыми параллельными линиями.

5.3а. Мезоны

На рис. 5.4 на графике Чу—Фраучи зависимости спина $\sigma = \text{Re}(\alpha)$ от квадрата массы t показаны все надежно установленные мезоны. Следует отметить, что единственной надежно установленной частицей со спином $\sigma > 2$ является g -мезон со спином 3 и $I = 1$, который имеет те же внутренние квантовые числа, что и ρ -мезон ($\sigma = 1$), и, по-видимому, лежит на той же траектории. Строго говоря, это единственная траек-

тория, на которой можно поставить целых две точки. Однако при построении рис. 5.4 мы принимали во внимание то, что имеются свидетельства в пользу существования резонансов ω и K^* со спином 3 и h и A_2^* со спином 4 и использовали некоторую информацию о поведении траекторий при $t < 0$, полученную из реджевского описания экспериментальных данных (см. рис. 6.6).

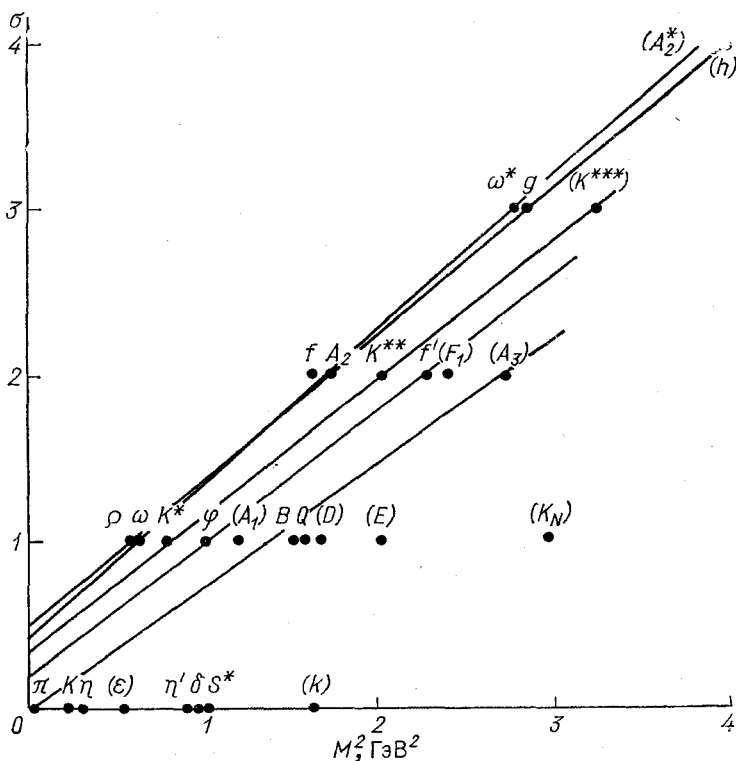


Рис. 5.4. Диаграмма Чу—Фраучи, изображающая $\text{Re}\{\alpha(t)\}$ в зависимости от t для надежно установленных мезонов. Состояния, установленные менее надежно, взяты в скобки

Известно также, что A_2 -мезон с $\sigma = 2$, который имеет те же квантовые числа, что и ρ -мезон, за исключением сигнатуры [отметим, что из (4.6.8), (5.2.22) и (5.2.23) это в действительности означает противоположные значения P , C_n и G], лежит очень близко к прямой линии, соединяющей ρ - и g -мезоны. Для $t < 0$ A_2 -траектория также очень близка к ρ -траектории. Такая близость траекторий противоположной сигнатуры называется «обменным вырождением». Это означает [из (2.5.3) или (4.5.7)], что, как ни удивительно, обменные силы, т. е. u -канальные сингулярности, не дают большого вклада в траектории. Аналогичным образом ω - и f -мезоны, которые вследствие идеального смешивания почти вырождены по массе с ρ - и A_2 -мезонами [см.

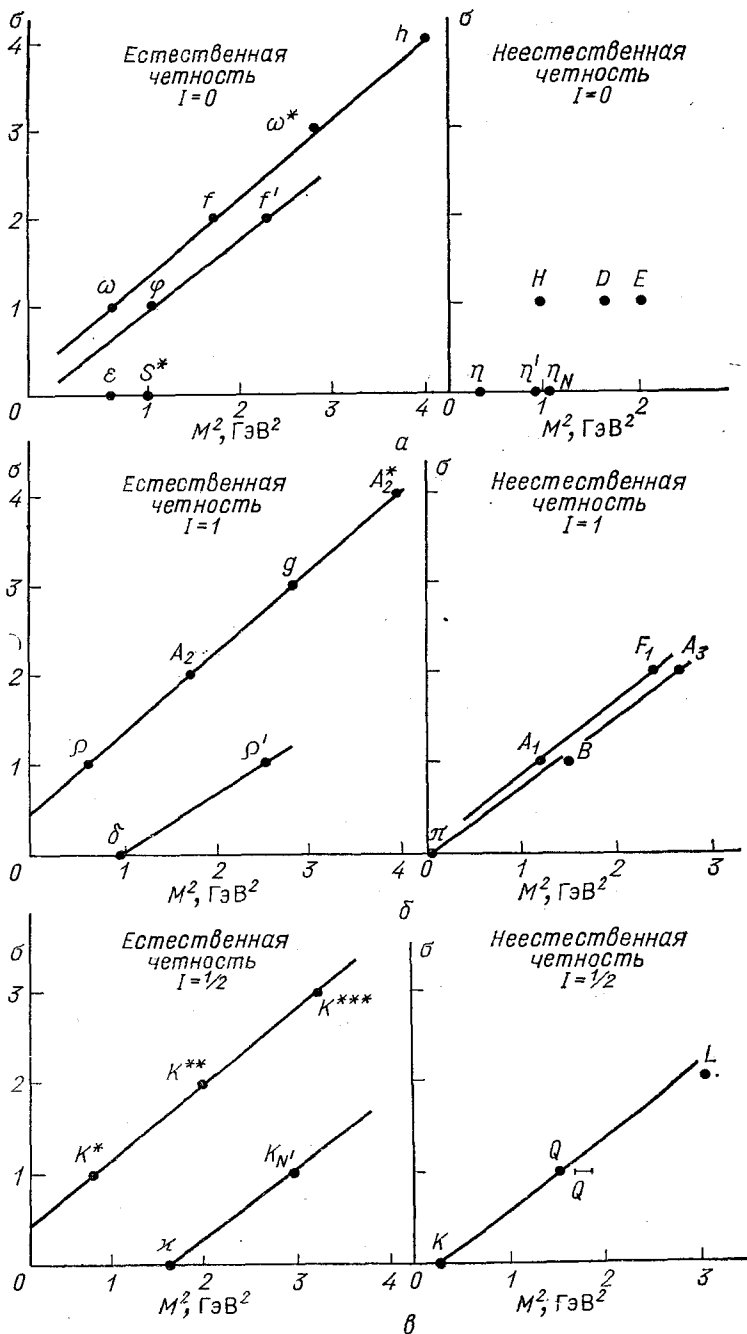


Рис. 5.5. Мезонные траектории для мезонов с (а) $I=0$, (б) $I=1$ и (в) с $I=1/2$, включая состояния, не очень надежно установленные

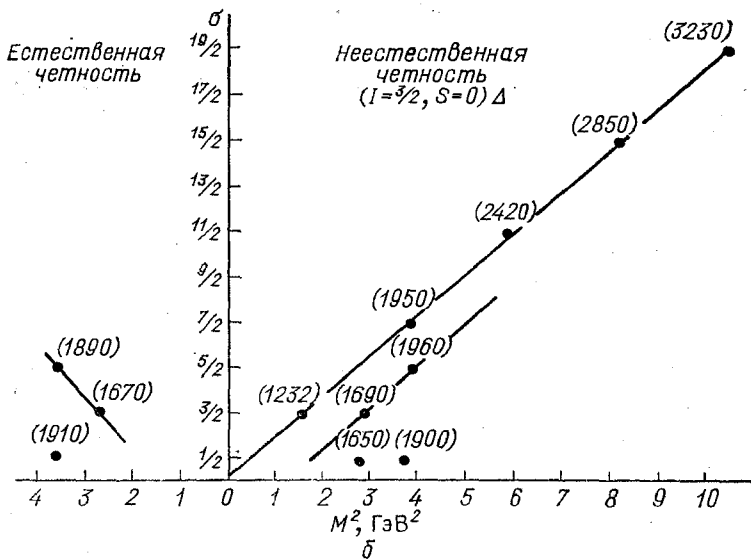
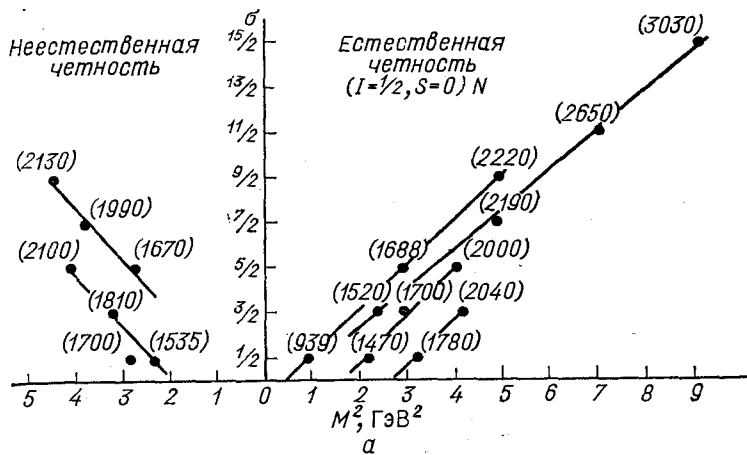
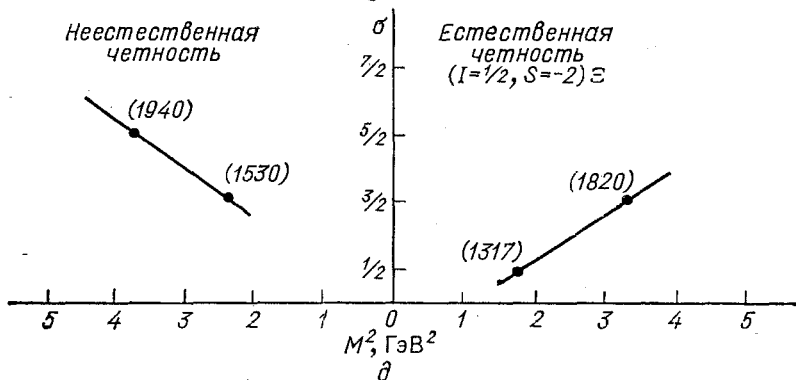
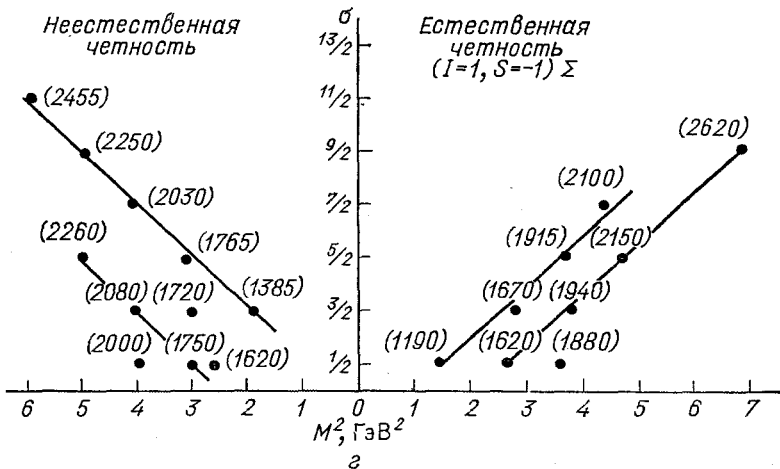
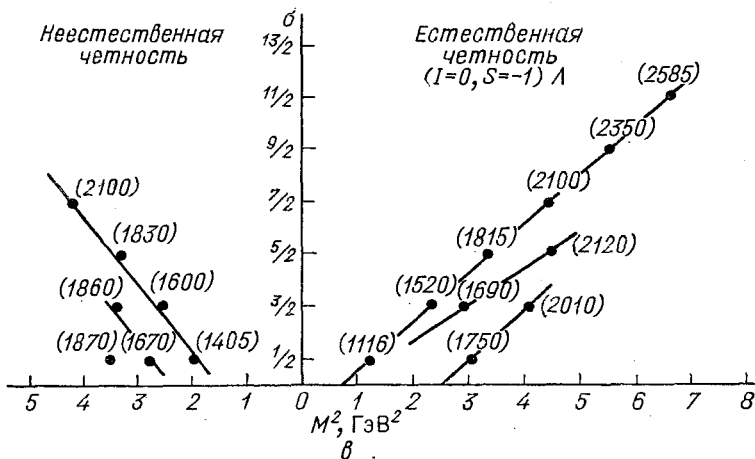


Рис. 5.6. Барийные траектории для случаев $(I, S) = (a)$ $(1/2, 0)$; $(б)$ $(3/2, 0)$; $(в)$ $(0, -1)$; $(г)$ $(1, -1)$; $(д)$ $(1/2, -2)$



(5.2.20)], лежат на единой обменно-вырожденной траектории с $I = 0$, которая почти совпадает с траекторией $\rho - A_2$, в то время как $\varphi - f'$ -траектория с $I = 0$ параллельна этим двум траекториям.

Если мы сделаем довольно смелое предположение, что все мезоны лежат на прямых, приблизительно параллельных обменно-вырожденных траекториях, то сможем связать большинство состояний, приведенных в работе [327] с траекториями, показанными на рис. 5.5. Ведущие траектории очень приблизительно выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \alpha_\rho(t) &\approx 0,5 + 0,9t & \rho, \omega, A_2, f, g, \omega^*, A_2^*, h & & I = 0, 1; \\
 \alpha_{K^*}(t) &\approx 0,3 + 0,9t & K^*, K^{**}, K^{***} & & I = 1/2; \\
 \alpha_\varphi(t) &\approx 0,1 + 0,9t & \varphi, f' & & I = 0; \\
 \alpha_\pi(t) &= 0,0 + 0,8t & \pi, B, A_3 & & I = 1; \\
 \alpha_K(t) &\approx -0,2 + 0,8t & K, Q, L & & I = 1/2.
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Эти прямые линии наводят на мысль об эффективном потенциале между кварками осцилляторного типа, как это отмечено в уравнении (3.3.33). Дополнительные подтверждения в пользу этих рисунков будут рассматриваться в разд. 6.5 и 7.4, и заключаются они в том, что существуют теоретические основания надеяться, что траектории могут образовывать последовательности, состоящие из «родительской» траектории $\alpha(t)$ и бесконечного числа «дочерних» траекторий $\alpha_n(t) = \alpha(t) - n$, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, $\rho'(1600)$, если это действительно резонанс, может лежать на дочерней ρ -траектории с $n = 2$.

5.36. Барионы

Барионных состояний с высокими спинами, квантовые числа которых достаточно хорошо определены, существует намного больше, чем мезонных, так что графики Чу—Фраучи на рис. 5.6 заселены более густо.

Траектории опять являются прямыми и параллельными линиями, наклоны которых близки к наклонам мезонных траекторий, но обменное вырождение во многих случаях сильно нарушено. Ведущие траектории примерно таковы:

$$\begin{aligned}
 \alpha_N(t) &\approx -0,3 + 0,9t, & N(939), N(1688), N(2220); \\
 \alpha_\Delta(t) &\approx 0,0 + 0,9t, & \Delta(1232), \Delta(1950), \Delta(2400), \\
 & & \Delta(2850), \Delta(3230); \\
 \alpha_\Lambda(t) &\approx -0,6 + 0,9t, & \Lambda(1116), \Lambda(1520), \Lambda(1815), \\
 & & \Lambda(2100), \Lambda(2350), \Lambda(2585); \\
 \alpha_\Sigma(t) &\approx -0,8 + 0,9t, & \Sigma(1190), \Sigma(1915).
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Мы поместили графики с траекториями с естественной и неестественной четностями рядом друг с другом, поскольку обобщенная симметрия Мак-Доуелла (см. разд. 6.5) требует, чтобы траектории с нечетными значениями барионного числа удовлетворяли соотношению

$$\alpha^+(V\bar{t}) = \alpha^-(-V\bar{t}) \text{ при } t > 0, \quad (5.3.3)$$

где индексы \pm означают четность. Так как траектории (5.3.2) приблизительно четны по $V\bar{t}$, то

$$\alpha^\pm(V\bar{t}) = \alpha^0 + \alpha' t \quad (5.3.4)$$

для обеих четностей, и, таким образом, резонансы должны существовать обменно-вырожденными парами. Из рис. 5.6, видно, что в действительности соотношение не удовлетворяется. Это обстоятельство будет обсуждаться далее в разд. 6.5.

Из приведенных рисунков ясно, что график Чу—Фраучи, в дополнении к $SU(3)$ -симметрии, является очень удобным способом классификации резонансов.

5.4. Аналитические свойства траекторий

Наличие спина у внешних частиц не меняет существенным образом заключений, полученных в разд. 3.2, об аналитичности реджевских траекторий.

Положение полюса в точке $J = \alpha(t)$ определяется следующим образом [ср. (3.2.1)]:

$$[A_{HJ}(t)]^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } J \rightarrow \alpha(t), \quad (5.4.1)$$

так что обычно $\alpha(t)$ будет обладать только особенностями выражения $[A_{HJ}(t)]^{-1}$. Однако, как уже обсуждали, $\alpha(t)$ не имеет левого разреза. К тому же, поскольку одни и те же траектории фигурируют в различных спиральных амплитудах данного процесса, связанных соотношением унитарности типа (4.4.11), то различные кинематические особенности $A_{HJ}(t)$, зависящие от спиральностей, не будут проявляться в $\alpha(t)$, а будут присутствовать в реджевских вычетах (см. разд. 6.2).

Таким образом, несмотря на то что траектории пересекают друг друга, $\alpha(t)$ будет иметь только правый динамический разрез, начинающийся в точке t_τ — пороговой точке ветвления t -канала. Соотношение унитарности (4.4.11) вместе с выражением (4.7.6) приводит к пороговому поведению

$$\text{Im } \alpha(t) \sim (t - t_\tau)^\alpha (t_\tau - Y_{13}^+)^{+1/2}, \quad \alpha(t_\tau) - Y_{13}^+ > -1/2 \quad (5.4.2)$$

вместо (3.2.26) и, как в выражении (3.2.29), в точке $J = Y_{13}^+ - 1/2$ на пороге будет собираться бесконечное число траекторий.

Можно ожидать, что мезонные траектории будут удовлетворять дисперсионным соотношениям, аналогичным (3.2.12) или (3.2.13). Однако для барионных траекторий симметрия Мак-Доуелла (5.3.3) предполагает, что дисперсионные соотношения должны быть записаны в терминах переменной \sqrt{t} , а не t , так что при отсутствии вычитаний они записываются в виде

$$\alpha(\sqrt{t}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{t_T}}^{\infty} \text{Im}[\alpha(\sqrt{t'})]/(\sqrt{t'} - \sqrt{t}) d\sqrt{t'} + \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{t_T}}^{-\infty} \text{Im}[\alpha(\sqrt{t'})]/(\sqrt{t'} - \sqrt{t}) d\sqrt{t'}, \quad (5.4.3)$$

где интегрирование идет по обеим физическим областям $\alpha(\sqrt{t})$. Разумеется, в действительности необходимы вычитания.

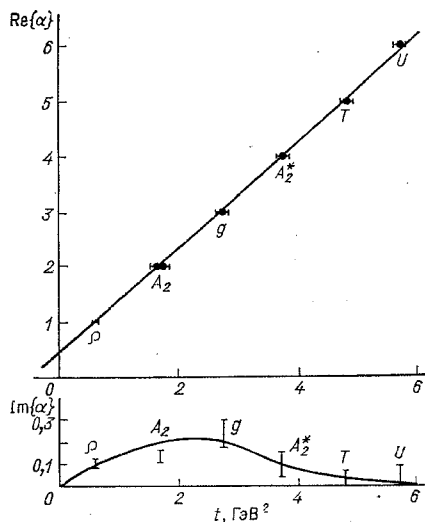
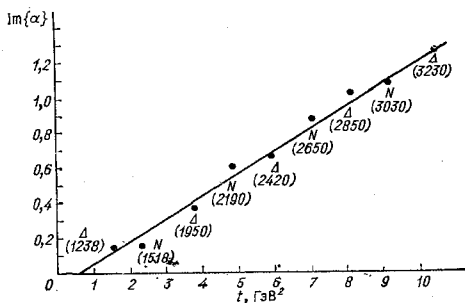


Рис. 5.7. Зависимость $\text{Re}\{\alpha(t)\}$ и $\text{Im}\{\alpha(t)\}$ от t для ρ - A_c обменно вырожденной траектории с $l=1$

Рис. 5.8. Зависимость $\text{Im}\{\alpha(t)\}$ от t для N - и Δ -траекторий



Значение $\text{Im}[\alpha(t)]$ и положение резонанса могут быть найдены с помощью выражения (2.8.7) из ширины резонанса. Величины, полученные для ρ -траектории, показаны на рис. 5.7, а для N - и Δ -траекторий — на рис. 5.8.

В каждом случае $\text{Im}[\alpha(t)] \ll \text{Re}[\alpha(t)]$. Это вместе с линейностью $\text{Re}[\alpha(t)]$ подтверждает предположение о том, что выполняются дисперсионные соотношения (3.2.12), а не (3.2.11), которые справедливы для потенциального рассеяния и лестничных моделей, описанных в разд. 3.4. Мы будем обсуждать это обстоятельство далее, в гл. 11.

РЕДЖЕВСКИЕ ПОЛЮСА И РАССЕЯНИЕ ПРИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

6.1. Введение

Определив в предыдущей главе из спектра резонансов некоторые лидирующие реджевские траектории, мы хотим далее более внимательно изучить другой важный аспект теории Редже, а именно механизм, при помощи которого полюса Редже в t -канале определяют поведение амплитуды рассеяния при высокой энергии в s -канале.

Для рассеяния бесспиновых частиц это не составляет проблемы — нужно просто применить формулу (2.8.10) в области малых отрицательных t и больших s . Однако в реальных экспериментах с частицами со спином ситуация несколько более сложна, потому что, как мы увидим в следующем разделе, t -канальные спиральные амплитуды содержат различные кинематические множители и удовлетворяют разнообразным ограничениям, которые необходимо учесть в реджевских вычетах. К тому же необходимо более подробно исследовать поведение вычетов в случаях, когда траектория проходит вблизи нефизических точек, обсуждавшихся в разд. 4.5. Только после того как будут выяснены эти кинематические ограничения, можно будет на основе формулы (4.6.15) получить правильное выражение для вклада реджевских полюсов в амплитуду рассеяния.

Исследуя эти кинематические проблемы, мы увидим, что некоторые из этих трудностей при $t = 0$ могут привести к появлению дополнительных траекторий, называемых «дочерними» или «конспирирующими». Кратко будет рассмотрено применение техники теории групп к этим проблемам. Будут также рассмотрены ограничения, которые накладывают на модели с обменом полюсами Редже внутренние симметрии $SU(2)$ и $SU(3)$.

Таким образом, после параметризации амплитуды обмена реджеоном мы приходим к формуле (6.8.1) и в обширном последнем разделе этой главы обсудим сравнение этого выражения с экспериментальными данными по процессам рассеяния при высоких энергиях. Читатель, интересующийся в основном феноменологией, может начать сразу с разд. 6.8 и при необходимости вернуться назад.

6.2. Кинематические особенности реджевских вычетов

В разд. 4.1 мы отмечали, что, хотя спиральные амплитуды имеют много преимуществ при использовании их в реджевской теории, они обладают тем недостатком, что не полностью свободны от кинематических особенностей. Поскольку вычет реджевского полюса в t -канале дается формулой [см. (4.6.1) и ср. (3.2.16)]

$$\beta_H(t) = (1/2\pi i) \oint dJ A_{HJ}^{\xi}(t), \quad (6.2.1)$$

где контур интегрирования взят вокруг полюса в точке $\alpha(t) = J$, то из обсуждения в разд. 3.2 ясно, что $\beta_H(t)$ унаследует особенности $A_{HJ}^{\xi}(t)$, т. е. как кинематические особенности, так и динамический правый разрез, начинающийся на пороге t -канала. Разумеется, $\beta_H(t)$ не будет содержать ни полюса, ни, принимая во внимание аргументы разд. 3.2, левого разреза амплитуды $A_{HJ}^{\xi}(t)$.

Для выделения кинематических сингулярностей использовали различные методы. Один способ заключается в установлении связи между спиральными амплитудами и инвариантными амплитудами типа (4.1.3), свободными от кинематических сингулярностей [117], однако для высоких спинов это становится сложно. Другая техника, предложенная в работе [220] и полностью разработанная в работе [396], использует тот факт, что в множителях половинного угла (4.4.12) возникают только кинематические особенности по t -канальным спиральным амплитудам. С точки зрения соотношения кроссинга (4.3.7) очевидно, что кинематические особенности по t -канальным спиральным амплитудам являются либо сингулярностями s -канальных амплитуд, либо известными сингулярностями матрицы кроссинга (4.3.4). Полный обзор этого метода дан в гл. 6 книги [305].

Однако в обоих случаях физические причины выделения кинематических множителей довольно туманны, и поэтому мы применим менее строгий метод, основанный на работе [249], который проясняет физическую картину.

Все особенности по s - t -канальным спиральным амплитудам возникают из множителей половинного угла (4.4.16), и их появление легко объясняется тем фактом, что сохранение углового момента при рассеянии вперед и назад требует обращения в нуль амплитуд с переверотом спина (см. разд. 4.4). Аналогично мы увидим, что кинематические множители в t -канале, которые могут возникать в процессе $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ на порогах $t = (m_1 + m_3)^2$ и $t = (m_2 + m_4)^2$ и псевдопорогах $t = (m_1 - m_3)^2$ и $t = (m_2 - m_4)^2$ или при $t = 0$, имеют также простое физическое объяснение. Начнем с предположения, что $m_1 > m_3$ и $m_2 > m_4$, а случай равных масс, для которого псевдопорог сдвигается в точку $t = 0$, рассмотрим далее.

Мы видели, что как в случае нерелятивистского потенциального рассеяния (3.3.24), так и для рассеяния бесспиновых частиц (2.6.8) парциальная амплитуда на пороге $t = (m_1 + m_3)^2$ имеет поведение

$$A_l(t) \sim (q_{t13})^l \sim (T_{13}^+(t))^l \quad (6.2.2)$$

в обозначениях (2.6.6), которое связано с фазовым объемом в данной парциальной волне. Поскольку рассеяние вблизи порога имеет нерелятивистский характер, то можно ожидать, что даже для рассеяния частиц со спином пороговое поведение аналогично будет иметь вид

$$A_{HJ}^{\xi}(t) \sim (T_{13}^+(t))^L, \quad (6.2.3)$$

где L — наименьшее значение l при данном J . В общем случае $L = J - \sigma_1 - \sigma_3$ (т. е. σ_1, σ_3 и l параллельны); если же это значение

l обладает чужой четностью, то $L = J - (\sigma_1 + \sigma_3) + 1$. Это может быть записано следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L &= J - \sigma_1 - \sigma_3 + \frac{1}{2} [1 - \xi P_1 P] (-1)^{\sigma_1 + \sigma_3 - \nu}; \\ L &\equiv J - Y_{13}^{\dagger}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

где $P_1, P_3 = \pm 1$ — внутренние четности частиц; ν определено в (4.5.6).

В разд. 2.6 мы видели, что для рассеяния бесспиновых частиц поведение (6.2.2) обусловлено представлением Грибова — Фруассара (2.6.2) (там, где оно сходится). Однако поскольку в (4.5.7) $e_{\lambda\lambda'}(z_i) \sim \sim (T_{13}^{\dagger})^{J+1}$ [из (1.7.19) и (Б.25)], а $\xi_{\lambda\lambda'}(z_i) \sim (T_{13}^{\dagger})^{-M}$ из (Б.11), где

$$M = \max \{ |\lambda|, |\lambda'| \}, \text{ а } dz_i \sim ds (T_{13}^{\dagger})^{-1},$$

то вместо (6.2.2) получаем

$$A_{HJ}^{\xi}(t) \sim (T_{13}^{\dagger})^{J-M}, \quad t \rightarrow (m_1 + m_3)^2. \quad (6.2.5)$$

Таким образом, выражение (6.2.3) может быть получено из (4.5.7) только в том случае, когда нужные дополнительные множители уже введены как кинематические множители в $A_{Ht}(s, t)$ и, следовательно, в $D_{sH}(s, t)$ и т. д. Поэтому должно быть

$$A_{Ht}(s, t) \sim (T_{13}^{\dagger})^{M-Y_{13}^{\dagger}}, \quad t \rightarrow (m_1 + m_3). \quad (6.2.6)$$

Аналогичный результат справедлив на пороге образования пары $2 + 4$. Псевдопорог соответствует порогу процесса, в котором более легкая частица, например m_3 , имеет энергию покоя, равную $E = -m_3$. Такие состояния с отрицательной энергией (или «дырки») соответствуют античастицам, причем для фермионов (но не для бозонов) античастица имеет четность, противоположную частице, так что можно заменить P_3 на $P_3 (-1)^{2\sigma_3}$. Таким образом, окончательно получаем пороговое поведение

$$A_{Ht}(s, t) \sim (T_{13}^{\dagger})^{M-Y_{13}^{\dagger}} (T_{13}^{-})^{M-Y_{13}^{-}} (T_{24}^{-})^{M-Y_{24}^{\dagger}} (T_{24}^{-})^{M-Y_{24}^{-}},$$

где $Y_{ij}^{\pm} = \sigma_i + \sigma_j - (1/2) [1 - \xi P_i P_j (-1)^{\sigma_i \pm \sigma_j - \nu}]$. (6.2.7)

для $m_i > m_j$. Конечно, если, например, $m_1 = m_3$, то псевдопорог сдвигается в точку $t = 0$, а если $m_3 = m_4$, то оба псевдопорога будут в точке $t = 0$. Эти случаи будут рассмотрены далее. Итак, после того как проведено разложение в ряд по парциальным волнам (4.5.7), с помощью (6.2.5) получим

$$A_{HJ}^{\xi}(t) \sim \bar{K}_{\lambda\lambda'}(t) (q_{t13} q_{t24})^{J-M}, \quad (6.2.8)$$

где $\bar{K}_{\lambda\lambda'}(t)$ — кинематический множитель, определенный в табл. 6.1. Таким образом, из (6.2.1) получаем

$$\beta_H(t) = \bar{K}_{\lambda\lambda'}(t) (q_{t13} q_{t24}/s_0)^{\alpha(t)-M} \bar{\beta}_H(t), \quad (6.2.9)$$

где вычет $\bar{\beta}_H(t)$ свободен от кинематических сингулярностей на порогах и псевдопорогах (но не обязательно при $t = 0$). Мы ввели произвольный масштабный фактор s_0 , измеряемый в тех же единицах, что и t , так что единицы, в которых измерено $\bar{\beta}_H$, не меняются с $\alpha(t)$. Это обстоятельство будет обсуждаться далее в разд. 6.8а.

На порогах, однако, возникает дополнительная проблема, связанная с тем, что различные спиральные амплитуды для данного процесса не независимы [249, 386]. Это так, потому что на пороге, благодаря (6.2.2), выживают только состояния с $l = 0$, а поэтому J заключено в интервале $|\sigma_1 - \sigma_3| \leq J \leq \sigma_1 + \sigma_3$, так что в разложении по парциальным волнам (4.4.14) остаются только эти значения J . Поэтому, если определить $s = \sigma_1 + \sigma_3$ и разложить парциальные спиральные состояния $|J, \lambda; \lambda_1, \lambda_3\rangle$ ($\lambda = \lambda_1 - \lambda_3$) по l -состояниям $|J, \lambda, l, s\rangle$, поскольку $l = 0$, $s = J$, на пороге получим

$$|J, \lambda; \lambda_1, \lambda_3\rangle = N_J \langle \sigma_1, \lambda_1, \sigma_3, \lambda_3 | J, \lambda \rangle |J, \lambda; 0, J\rangle, \quad (6.2.10)$$

где N_J — нормировочный множитель; $\langle \sigma_1, \lambda_1, \sigma_3, \lambda_3 | J, \lambda \rangle$ — коэффициент Клебша — Гордана. Таким образом, на пороге парциальная спиральная амплитуда может быть записана в виде

$$A_{HJ}^{\xi}(t) = \langle \sigma_1, \lambda_1, \sigma_3, \lambda_3 | J \lambda \rangle a_{\lambda_2 \lambda_4}(J, t), \quad (6.2.11)$$

где $a_{\lambda_2 \lambda_4}(J, t)$ не зависит от λ_1 и λ_3 . При суммировании по J , заключенному в пределах $|\sigma_1 - \sigma_3| \leq J \leq \sigma_1 + \sigma_3$, на пороге образования частиц $1 + 3$ все различные $A_{HJ}(s, t)$ с одинаковыми значениями $\lambda_2 \lambda_4$, но с различными $\lambda_1 \lambda_3$ связаны между собой коэффициентами Клебша — Гордана, как это следует из (6.2.11).

Лучше всего проиллюстрировать это на примере. Так, если рассмотреть упругое πN -рассеяние, для которого t -канальным процессом является процесс $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, то видно, что на $N\bar{N}$ -пороге при $t = 4m_N^2$ соотношение между амплитудами (4.3.11) имеет вид

$$A_{++}(s, t) \rightarrow -i A_{+-}(s, t), \quad t \rightarrow 4m_N^2. \quad (6.2.12)$$

Множитель $-i$ получается из множителя половинного угла [см. (6.2.15)]. Тогда после выделения всех кинематических множителей получим [ср. (4.3.11)]:

$$\left. \begin{aligned} A_{++}(s, t) &= \tilde{A}_{++}(s, t)(t - 4m_N^2)^{-1/2}; \\ A_{+-}(s, t) &= \tilde{A}_{+-}(s, t)t^{1/2}(t - 4m_\pi^2)^{1/2}(1 - z_t)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.13)$$

где амплитуды \tilde{A} свободны от кинематических сингулярностей как по s , так и по t . Если выразить все эти амплитуды через один полюс Редже $\alpha(t)$, то получим из (6.8.1):

$$A_{++}(s, t) = \gamma_1(t)(t - 4m_N^2)^{-1/2} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)}; \quad (6.2.14)$$

$$\begin{aligned} A_{+-}(s, t) &= \gamma_2(t)t^{1/2}(t - 4m_\pi^2)^{1/2}(1 - z_t^2)^{1/2} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)-1} \rightarrow \\ &\rightarrow i\gamma_2(t)t^{1/2}(t - 4m_N^2)^{-1/2}(s/s_0)^{\alpha(t)}, \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

где γ — вычеты, не имеющие кинематических особенностей. Соотношение (6.2.12) принимает при этом вид

$$\gamma_1(4m_N^2) = 2m_N\gamma_2(4m_N^2). \quad (6.2.16)$$

Это условие всегда будет выполняться, если запишем

$$2m_N\gamma_2(t) = \gamma_1(t) + \gamma_3(t) \Gamma(4m_N^2 - t)/4m_N^2, \quad (6.2.17)$$

где теперь $\gamma_1(t)$ и $\gamma_3(t)$ не имеют особенностей и на них нет никаких ограничений. Подставляя (6.2.14) и (6.2.15) в (4.3.12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & \frac{1}{64\pi s q_{s12}^2} \frac{1}{4m_N^2} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha(t)} \left\{ \gamma_1^2(t) - \frac{t}{4m_N^2} \times \right. \\ & \left. \times \left[2\gamma_1(t)\gamma_3(t) + \gamma_3^2(t) \left(1 - \frac{t}{4m_N^2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Это выражение не имеет особенности при $t = 4m_N^2$, а если бы мы использовали непосредственно (6.2.14) и (6.2.15), не учитывая ограничение (6.2.16), то в этой точке возникал бы ложный полюс. Это довольно громоздкая процедура, но, к счастью, оказывается, что обычно пороги находятся достаточно далеко от физической области s -канала ($t < 0$), поэтому ничего плохого не случится, если мы не будем учитывать это ограничение. В действительности оно важно только в случаях, аналогичных процессу $\pi N \rightarrow \pi \Delta$, где псевдопорог в точке $t = (m_\Delta - m_N)^2$ находится недалеко от точки $t = 0$.

Далее мы должны рассмотреть точку $t = 0$. Если массы не равны, т. е. $m_1 \neq m_3$, $m_2 \neq m_4$, то из (1.7.19) видно, что

$$z_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \pm 1 \text{ при } (m_1 - m_3)(m_2 - m_4) \neq 0. \quad (6.2.19)$$

Множитель половинного угла (4.4.12) ведет себя как

$$\xi_{\lambda\lambda'}(z_t) \sim t^{\lambda - \varepsilon\lambda' / 2} \quad (6.2.20)$$

и, таким образом, из (4.4.16)

$$\tilde{A}_{H_t}(s, t) \sim t^{\lambda - \varepsilon\lambda' / 2}.$$

Следовательно, амплитуды с определенной четностью (4.6.10) ведут себя как

$$\hat{A}_{H_t}^{\xi}(s, t) \sim t^{|\lambda - \varepsilon\lambda' / 2|} a_1(s, t) \pm \xi t^{|\lambda + \varepsilon\lambda' / 2|} a_2(s, t), \quad (6.2.22)$$

где a_1 и a_2 не имеют особенностей при $t = 0$. Поэтому $\hat{A}_{H_t}^{\xi}$ имеет особенность вида

$$\hat{A}_{H_t}^{\xi}(s, t) \sim a^{\xi} / t^{\max(|\lambda - \lambda'|, |\lambda - \lambda''|) / 2} = a^{\xi} / t^{(M+N)/2}, \quad (6.2.23)$$

где a^{ξ} — одна из амплитуд a_1 и a_2 , а M и N определены в (4.4.11) и в (4.5.15). Но реджевский полюс с определенной четностью не может иметь такого сингулярного поведения, потому что если бы это было так, то мы имели бы

$$\begin{aligned} A_{H_t}(s, t) = & \xi_{\lambda\lambda'}(z_t) \hat{A}_{H_t}(s, t) \sim \\ & \sim t^{\lambda - \varepsilon\lambda' / 2} \frac{1}{2} [a^{\xi} t^{-(M+N)/2} \mp \xi a^{-\xi} t^{-(M+N)/2}], \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

где $-\xi = (-1)\xi$. Эта амплитуда сингулярна независимо от того, равно ли $a^\xi \xi a^{-\xi}$ или $-\xi a^{-\xi}$, кроме случая, когда $\lambda = \lambda' = 0$. Связь между a^ξ и $a^{-\xi}$ на самом деле следует прямо из (6.2.22) и (6.2.23), но при обмене реджевским полюсом с определенной четностью она не выполняется. Поэтому вместо (6.2.23) будет менее сингулярное поведение

$$\hat{A}_{H_t}^\xi(s, t) \sim a^\xi / t^{1/2} \min\{|\lambda + \lambda'|, |\lambda - \lambda'|\} = a^\xi / t^{1/2} (M-N), \quad (6.2.25)$$

т. е. мы умножили (6.2.23) на t^N . (Однако для случаев с полуцелым фермионным числом N будет возникать ложная точка ветвления — см. разд. 6.5.)

Чтобы получить поведение вычета при $t = 0$ из (6.2.25), отметим, что (6.2.9) из (1.7.15) имеет особенность вида $t^{-\alpha(t)-M}$. Величина $t^{-\alpha}$ сокращается с соответствующей особенностью в асимптотике функций вращения в (4.6.4)

$$e_{\lambda\lambda'}^{-\alpha-1}(z_t) \sim (z_t/2)^\alpha \sim [(s-u)/(8q_{113} q_{124})]^\alpha, \quad (6.2.26)$$

как это следует из (Б.25), но член t^M останется, так что в итоге получим

$$\beta_H(t) = t^{-1/2(M+N)} \bar{K}_{\lambda\lambda'}(t) (q_{113} q_{124}/s_0)^\alpha (t)^{-M} \bar{\gamma}_H(t), \quad (6.2.27)$$

где $\bar{\gamma}_H(t)$ не имеет кинематических особенностей. К сожалению, это выражение не удовлетворяет требованию факторизации, так как его асимптотика при $t \rightarrow 0$: $\beta_H(t) \sim t^{1/2(M-N)-\alpha}$ не факторизуется между начальным и конечным состояниями. Нужно записать

$$\beta_H(t) = \beta_\lambda(t) \beta_{\lambda'}(t), \quad (6.2.28)$$

что возможно, только если мы изменим поведение при $t = 0$ на поведение вида $t^{1/2(M+N)-\alpha}$ и тогда в результате получим

$$\beta_H(t) = t^{-1/2(M-N)} \bar{K}_{\lambda\lambda'}(t) (q_{113} q_{124}/s_0)^\alpha (t)^{-M} \bar{\gamma}_H(t), \quad (6.2.29)$$

где $\bar{\gamma}_H(t)$ не имеет кинематических особенностей, но, возможно, удовлетворяет пороговым условиям типа (6.2.16).

Если одна пара масс одинакова, например, $m_1 = m_3$, то $z_t \sim t^{1/2}$, а если и $m_2 = m_4$, то при $t = 0$ z_t конечно, но в обоих случаях псевдопорог сдвигается в точку $t = 0$. Минимальное кинематическое поведение можно получить повторением предыдущих аргументов. Для амплитуд, у которых в одном состоянии массы равны, а в другом не равны, нужно обеспечить факторизацию типа (6.2.28):

$$\begin{aligned} \beta_H(t) &= t^\delta \bar{K}_{\lambda\lambda'}(t) (q_{113} q_{124}/s_0)^\alpha (t)^{-M} \bar{\gamma}_H(t) = \\ &= K_{\lambda\lambda'}(t) (q_{113} q_{124}/s_0)^\alpha (t)^{-M} \bar{\gamma}_H(t), \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

где значения $K_{\lambda\lambda'}(t)$ даны в табл. 6.1 (исключение — см. разд. 6.5).

Кинематические множители t -канальной спиральной амплитуды

Множители, введенные в выражения (6.2.9) и (6.2.30), имеют вид:

$$K_{\lambda\lambda'}(t) \equiv t^\delta \bar{K}_{\lambda\lambda'}(t)$$

$$\bar{K}_{\lambda\lambda'}(t) \equiv (T_{13}^+)^{M-Y_{13}^+} (T_{13}^-)^{M-Y_{13}^-} (T_{24}^+)^{M-Y_{24}^+} (T_{24}^-)^{M-Y_{24}^-},$$

где

$$M \equiv \max \{ |\lambda|, |\lambda'| \}, N \equiv \min \{ |\lambda|, |\lambda'| \}, \lambda \equiv \lambda_1 - \lambda_3, \lambda' \equiv \lambda_2 - \lambda_4;$$

$$T_{ij}^\pm \equiv [t - (m_i \pm m_j)^2]^{1/2};$$

$$Y_{ij}^\pm \equiv \sigma_i + \sigma_j - \frac{1}{2} [1 - \eta P_i P_j (-1)^{\sigma_i \pm \sigma_j - \nu}];$$

$\nu = 0 (1/2)$ для четного (нечетного) фермионного числа.

Отсутствие конспираций

$$UU\delta = -(M-N)/2;$$

$$EU\delta = -[|\lambda'| - M]/2 + [1 - \eta(-1)^\lambda]/4;$$

$$EE\delta = [1 - \eta(-1)^\lambda]/4 + [1 - \eta(-1)^{\lambda'}]/4.$$

Конспирации с числом Толлера Λ [см. (6.5.10)]

$$UU\delta = \frac{1}{2} \{ |\Lambda - M| + |\Lambda - N| \} - M;$$

$$EU\delta = \frac{1}{2} \{ |\Lambda - |\lambda'| - M| \} + \frac{1}{4} \{ 1 - \eta \bar{\eta} (-1)^\lambda + \varepsilon (\Lambda - 2\sigma_1) \};$$

$$EE\delta = \frac{1}{2} \{ 2 + \eta \bar{\eta} (-1)^\lambda + \eta \bar{\eta} (-1)^{\lambda'} + \varepsilon (\Lambda - 2\sigma_1) + \varepsilon (\Lambda - 2\sigma_3) \},$$

где $\bar{\eta} = (-1)^{\Lambda+1}$ и $\eta = (-1)^{2\sigma+1}$ при $2\sigma \geq \Lambda$;

$$\varepsilon (\Lambda - 2\sigma) = \Lambda - 2\sigma \text{ при } \Lambda - 2\sigma \geq 0;$$

$$\varepsilon (\Lambda - 2\sigma) = 0 \text{ при } \Lambda - 2\sigma \leq 0$$

Примечание. U — вершина для неравных масс; E — вершина для равных масс. В случае EU принято $m_1 = m_3, m_2 = m_4$, так что $\lambda = \lambda_1 - \lambda_3$ есть изменение спиральности в вершине с равными массами. В этом разделе рассматривался случай без конспираций (конспирации — см. разд. 6.5).

Когда выражение (6.2.30) подставлено в (4.6.4) и для функций вращения использована асимптотика вида (Б.25), (6.2.26), вклад реджевского полюса в амплитуду рассеяния принимает вид

$$\begin{aligned} A_{N_t}^R(s, t) = & -16\pi (-1)^\Lambda K_{\lambda\lambda'}(t) \bar{\gamma}_N(t) (\exp(-i\pi\alpha) + \xi) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2 \sin \pi(\alpha - \nu)} \frac{(2\alpha)! (2\alpha + 1)}{[(\alpha + M)! (\alpha - M)! (\alpha + N)! (\alpha - N)!]^{1/2}} \right\} \times \\ & \times \left(\frac{s-u}{8s_0} \right)^\alpha (t-M) \xi_{\lambda\lambda'}(z_t), \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

где Λ определена в (Б.10) и использовано соотношение

$$(-\alpha)! = \pi / \sin \pi \alpha (\alpha - 1)! \quad (6.2.32)$$

Тот же результат получаем из (4.6.2), используя (Б.12) для $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$.

6.3. Нефизические множители

Уравнение (6.2.31), однако, все еще некорректно, потому что различные факториалы, возникающие в нем, приводят к сингулярностям при нефизических значениях α (см. разд. 4.5), которые должны отсутствовать в амплитуде рассеяния. Поэтому $\bar{\gamma}_H(t)$ должна содержать соответствующие множители, чтобы их сократить.

Поскольку [292]

$$(2\alpha)! = 2^{2\alpha+1} (\alpha)! (\alpha + 1/2)! / \pi^{1/2} (2\alpha + 1), \quad (6.3.1)$$

можно переписать множитель в фигурных скобках в (6.2.31) в виде

$$\begin{aligned} \bar{f}_H(\alpha) = & \frac{2^{2\alpha+1}}{\pi^{1/2}} \frac{(\alpha)! (\alpha + 1/2)!}{[(\alpha + M)! (\alpha - M)! (\alpha + N)! (\alpha - N)!]^{1/2}} \times \\ & \times \frac{1}{\sin \pi (\alpha - v)}. \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Теперь $(\alpha + 1/2)!$ имеет простые полюса при $\alpha = -3/2, -5/2$, тогда как $\alpha!$ имеет полюса при $\alpha = -1, -2, \dots$. Но в зависимости от того, целые или полуцелые числа M и N (т. е. в зависимости от того, четно или нечетно фермионное число для данного канала), один из этих наборов сингулярностей сокращается знаменателем. Поэтому потребуем, чтобы $\bar{\gamma}_H(t) \sim [(\alpha + 1/2 - v)!]^{-1}$ сокращал бы другие особенности [v определено в выражении (4.5.6)]. Такое поведение вычета определяется благодаря (Б.24) представлением Грибова—Фруассара.

Остаток имеет вид

$$\frac{(\alpha + v)!}{[(\alpha + M)! (\alpha - M)! (\alpha + N)! (\alpha - N)!]^{1/2} \sin \pi (\alpha - v)}, \quad (6.3.3)$$

который, когда $\alpha_0 \rightarrow J_0$, где $J_0 - v$ целое число, равен

$$\begin{aligned} & (\alpha - J_0)^{-1} \quad \text{при } J_0 \geq M \text{ и } v > J_0 > -N; \\ & (\alpha - J_0)^{-1/2} \quad \text{при } M > J_0 \geq N \text{ и } -N > J_0 \geq -M \end{aligned}$$

и представляет собой конечное выражение для $N > J_0 \geq v$ и для $J_0 < -M$. Напомним, что только точки с $J_0 \geq M$ имеют физический смысл, т. е. по терминологии разд. 4.5 являются фф-точками и таким образом полюса в этой области соответствуют физическим частицам. (Отметим, что для других J_0 они сокращаются с сигнатурным множителем.) В фн-точках выражение (6.3.3) ведет себя как $(\alpha - J_0)^{-1/2} \times (\alpha + J_0 + 1)^{-1/2}$. Однако эти точки ветвления (поскольку $\alpha - \text{функция } t$, то возникают точки ветвления по t) не могут присутствовать в амплитуде рассеяния, поэтому или $\bar{\gamma}_H(t) \sim (\alpha - J_0)^{-1/2}$

$(\alpha + J_0 + 1)^{-1/2}$ или $\bar{\gamma}_H(t) \sim (\alpha - J_0)^{1/2} \times (\alpha + J_0 + 1)^{1/2}$. Представление Грибова — Фруассара (4.5.7) приводит к поведению первого типа, но, как это обсуждалось в разд. 4.8, мы надеемся, что будет выполняться свержсходящиеся правила сумм, а в этом случае будет иметь место поведение второго типа (за исключением, возможно, точек чужой сигнатуры, где можно ожидать появления фиксированных полюсов Грибова—Померанчука). Факторизация в виде (6.2.8) требует, чтобы

$$\beta_{ss}\beta_{nn} = (\beta_{sn})^2 \sim (\alpha - J_0)(\alpha + J_0 + 1), \quad (6.3.4)$$

где s и n — физические и нефизические значения λ и λ' для данного J_0 . Итак, поскольку фф-вычет β_{ss} должен быть конечным, чтобы был физический полюс, нн-вычет β_{nn} должен обращаться в нуль. Если такое поведение выполняется в каждой нефизической точке, то получаем

$$\bar{\gamma}_H(t) \sim \{(\alpha + M)!(\alpha + N)! / [(\alpha - M)!(\alpha - N)!]\}^{1/2}. \quad (6.3.5)$$

Объединяя это с предыдущими результатами, можно записать

$$\bar{\gamma}_H(t) = \gamma_\lambda(t)\gamma_{\lambda'}(t) \frac{2^{M-1}}{\pi^{1/2}} \frac{1}{(\alpha - 1/2 - v)!} \left(\frac{(\alpha + M)!(\alpha + N)!}{(\alpha - M)!(\alpha - N)!} \right)^{1/2}, \quad (6.3.6)$$

где $\gamma_\lambda(t)\gamma_{\lambda'}(t)$ — факторизованный вычет, на который в нефизических точках не накладывается никаких ограничений, и при подстановке в (6.2.31) это дает

$$A_{H_t}^R(s, t) = -16\pi(-1)^A K_{\lambda\lambda'}(t) \gamma_\lambda(t) \gamma_{\lambda'}(t) \times \\ \times (\exp[-i\pi(\alpha - v)] + \xi) f_H^s(\alpha) \left(\frac{s-u}{2s_0} \right)^{\alpha-M} \xi_{\lambda\lambda'}(z_t), \quad (6.3.7)$$

$$\text{где } f_H^s(\alpha) = \frac{(\alpha + v)!}{(\alpha - M)!(\alpha - N)!} \frac{1}{2 \sin \pi(\alpha - v)} \quad (6.3.8)$$

(здесь s означает выбор физических значений — см. ниже).

В точках своей сигнатуры, где сигнатурный множитель конечен, выражение (6.3.7) имеет поведение:

- I) $(\alpha - J_0)^{-1}$ при $J_0 \geq M$;
- II) конечное выражение при $M > J_0 \geq N$ и $J_0 < 0$;
- III) $(\alpha - J_0)$ при $N > J_0 \geq v$.

В точках чужой сигнатуры сигнатурные множители ведут себя как $i(\alpha - J_0)$, что приводит к конечному поведению в случае I, к нулю в случае II и к двойному нулю в случае III.

Однако существуют различные обстоятельства, которые могут заставить нас изменить эти выводы при $\sigma_T \geq J_0$ ($\sigma_T = \max\{\sigma_1 + \sigma_3, \sigma_2 + \sigma_4\}$).

6.3а. Множители, уничтожающие духовые состояния

Если траектория при $t > 0$ проходит через точку своей сигнатуры, то фф-вычет должен обращаться в нуль, так как иначе должна была бы существовать частица — дух с отрицательным m^2 , т. е. тахион.

Поскольку ограничение Фруассара требует, чтобы при $t < 0$ α было бы > 1 , то эта трудность возникает только для траекторий с четной сигнатурой при $J - \nu = 0$, что, как мы видим на рис. 5.4—5.6, может быть приложено в действительности только к траекториям f , A_2 и K^{**} (1400) (и, возможно, к P -траектории — см. разд. 6.86) в точке $\alpha = 0$. Если такой нуль присутствует в фф-вычете, он должен появиться также и в фн-и нн-вычетах из-за соотношения (6.3.4). Это иногда называется механизмом Чу [103].

6.36. Выбор нефизических значений

При данном нефизическом значении J_0 траектория может удовлетворять условию (6.3.4) при конечном значении β_{nn} и $\beta_{ss} = 0$. Это дает $\bar{\gamma}_H(t) \sim I(\alpha - J_0)(\alpha + J_0 + 1)^{1/2}$ при $M > J_0 \geq N$, как и ранее, но $\bar{\gamma}_H(t) \sim (\alpha - J_0)(\alpha + J_0 + 1)$ для некоторых физических точек $J_0 \geq M$. Если это происходит, например, для $p > J_0 > M$, где $p - \nu$ — некоторое целое число, большее M , то получаем

$$\bar{\gamma}_H(t) \sim \frac{(\alpha + p)!}{(\alpha - p)!} \left(\frac{(\alpha - M)!(\alpha - N)!}{(\alpha + M)!(\alpha + N)!} \right)^{1/2} \quad (6.3.9)$$

вместо (6.3.5). Возникающий в нн-амплитуде полюс не может, разумеется, соответствовать физической частице и поэтому должен сокращаться (или компенсироваться). Поскольку в нн-точке асимптотическое поведение $e_{\lambda\lambda}^{-\alpha-1}(z_t)$ имеет вид $z^{-\alpha-1}$, а не z^α , компенсирующая траектория должна проходить через точку $J_0 - 1$. Это то, что иногда называется механизмом Гелл-Мана [188, 189].

Однако необходимость в такой компенсирующей траектории может быть устранена, если положить нн-вычет равным нулю, причем в этом случае дополнительные нули появятся также и в фн- и нн-вычетах благодаря соотношению (6.3.4). Это называется бескомпенсационным механизмом.

6.3в. Фиксированные полюса чужой сигнатуры

Аргументы, приведенные в разд. 4.8, позволяют ожидать появления фиксированных полюсов (или бесконечной последовательности корневых точек ветвления) в нефизических точках чужой сигнатуры. Из-за сигнатурного множителя они не будут давать вклада в асимптотическое поведение амплитуды рассеяния. Однако если они присутствуют в вычете полюса Редже, то они будут сокращать нуль в сигнатурном множителе.

Фиксированные полюса, которые происходят из-за наличия третьей спектральной функции ρ_{su} , могут существовать в дополнение к полюсам Редже и отсутствовать в реджевских вычетах. Или, даже если в вычете есть фиксированные полюса, поскольку в точке, где $\alpha = J_0$ (J_0 — нефизическая точка чужой сигнатуры), в \bar{v} -вычете дает вклад только ρ_{su} , в то время как при всех других значениях α вклад дают все три двойных спектральных функции, то вычет может, например, иметь вид

$$a(t) + b(t)(\alpha(t) - J_0).$$

Поведение вычета и амплитуды при прохождении траектории через нефизическую точку J_0

| | Вычет | | Механизм | Амплитуда | | |
|--------------------|-----------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------|----------------|-----------------------|
| | нн | фф | | нн | фф | |
| Своя сигнатура | $\alpha - J_0$ | $(\alpha - J_0)^{\frac{1}{2}}$ | 1 | $\alpha - J_0$ | 1 | $(\alpha - J_0)^{-1}$ |
| | 1 | $(\alpha - J_0)^{\frac{1}{2}}$ | $\alpha - J_0$ | 1 | 1 | 1 |
| | $(\alpha - J_0)^2$ | $(\alpha - J_0)^{\frac{3}{2}}$ | $\alpha - J_0$ | $(\alpha - J_0)^2$ | $\alpha - J_0$ | 1 |
| | $\alpha - J_0$ | $(\alpha - J_0)^{\frac{3}{2}}$ | $(\alpha - J_0)^2$ | $\alpha - J_0$ | $\alpha - J_0$ | $\alpha - J_0$ |
| Чужая сигнатура | $(\alpha - J_0)^{-1}$ | $(\alpha - J_0)^{-\frac{1}{2}}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Примечание. Предполагалось наличие фиксированного полюса в вычете точки чужой сигнатуры. Если фиксированного полюса нет, то вычет ведет себя так же, как соответствующий вычет в точке своей сигнатуры, причем амплитуда имеет тот же вид, за исключением дополнительного множителя $\alpha - J_0$, получающегося из сигнатурного фактора.

Так что при $b \gg a$ вблизи $\alpha(t) = J_0$ по-прежнему может быть нуль, а при $a \gg b$ его не будет.

Табл. 6.2 суммирует все перечисленные выше возможности поведения вычета и соответствующие амплитуды для вклада реджевских полюсов.

Основное значение этих результатов — это предсказание, что в некоторых случаях амплитуда, отвечающая реджевскому полюсу, име-

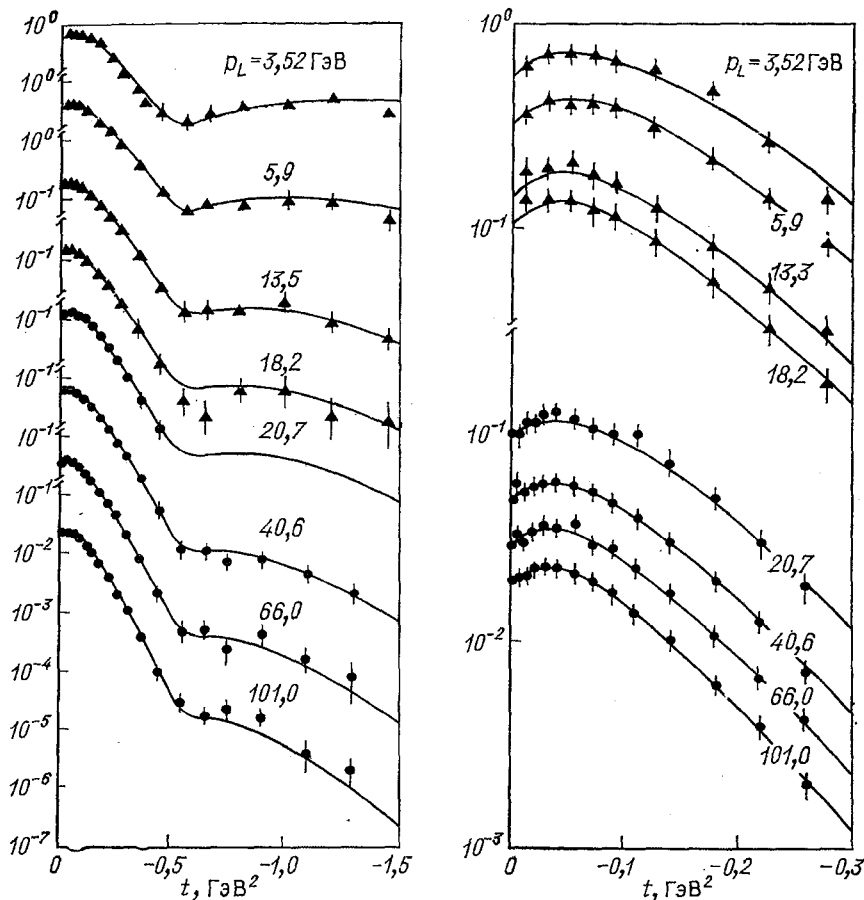


Рис. 6.1. Экспериментальные данные по реакции $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ для различных значений импульса p_L в лабораторной системе координат.

Линии отвечают подгонке с ρ и ρ' траекториями, взятой из работы [37]

ет нуль по t . Хорошим примером является процесс $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, который в t -канале ($\pi^-\pi^0 \rightarrow \bar{p}n$) содержит только ρ -траекторию, как это видно из перечня в табл. 6.5. Из рис. 5.5 (см. также рис. 6.6, а) видно, что эта траектория примерно равна $\alpha(t) = 0,5 + 0,9t$ и таким образом $\alpha(t) = 0$ при $t = -0,55$ ГэВ². t -Канальными спиральными

амплитудами для этого процесса являются A_{++} и A_{+-} , определенные в (4.3.11), а $\alpha = 0$ есть фф-точка для амплитуды A_{++} ($\lambda = \lambda' = 0$) и фн-точка для амплитуды A_{+-} ($\lambda = 0$ $\lambda' = 1$); $\alpha = 0$ есть точка чужой сигнатуры для ρ -траектории, поскольку ρ -мезон имеет спин 1. Так, из табл. 6.2 видно, что если нет фиксированных полюсов и траектория выбирает физические значения, то A_{++} будет конечна, а A_{+-} будет обращаться в нуль при $t = 0,55$, в то время как если бы траектория выбирала нефизические значения, то обе амплитуды обращались бы в нуль, а если бы был большой вклад фиксированных полюсов, то они обе были бы конечны. (Нефизические амплитуды появляются в процессе $\bar{p}n \rightarrow \bar{p}n$ и не должны здесь рассматриваться.) Экспериментальные данные по процессу перезарядки (рис. 6.1) указывают на наличие минимума, а не нуля $d\sigma/dt$ в этой точке, что свидетельствует о том, что ρ -траектория выбирает физические значения. Но окончательный вывод зависит от того, какие другие особенности могут давать вклад в амплитуду этого процесса, такие, как, например, лежащая ниже ρ' -траектория, реджевские разрезы и т. п. Мы вернемся к этой проблеме в разд. 6.8л, а другое возможное объяснение этой структуры, на основе разрезов, будет представлено в разд. 8.7в.

6.4. Реджевские полюса и s -канальные амплитуды

В разд. 6.2 у нас было много трудностей при введении правильных кинематических множителей в реджевские вычеты в t -канальную спиральную амплитуду. Однако, когда мы конструируем наблюдаемые величины, такие, как $d\sigma/dt$, матрица плотности и т. п., многие из этих множителей сокращаются и единственными существенными особенностями по t являются особенности, содержащиеся в s -канальных множителях половинного угла $\xi_{\mu\mu'}(z_s)$. Поэтому ясно, что использование непосредственно t -канальных реджевских полюсов в s -канальных спиральных амплитудах дало бы много преимуществ. Но если мы хотим это сделать, то должны быть достаточно внимательны по отношению к дополнительным множителям, которые возникают из-за того, что реджеон имеет определенную четность в t -канале и потому, что вычеты в терминах t -канальных спиральностей должны факторизоваться и, кроме того, мы должны ввести разнообразные нефизические множители, обсуждавшиеся в предыдущем разделе.

Выражение для амплитуды [116, 277]

$$A_{H_s}^R(s, t) = - \left(\frac{s}{s_0} \frac{1-z_s}{2} \right)^{|\mu-\mu'|/2} \left(\frac{1+z_s}{2} \right)^{|\mu+\mu'|/2} \times \\ \times \left(\frac{\exp[-i\pi(\alpha-v)] + \xi}{2 \sin \pi(\alpha-v)} \right) \beta_{H_s}(t) \left(\frac{s-u}{2s_0} \right)^{\alpha(t)} \quad (6.4.1)$$

содержит множитель половинного угла и сигнатурный множитель. И поскольку из (1.7.17)

$$\left(\frac{s}{s_0} \frac{1-z_s}{2} \right)^{|\mu-\mu'|/2} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \left(\frac{-t}{s_0} \right)^{|\mu-\mu'|/2} = \left(\frac{-t}{s_0} \right)^{n/2} \quad (6.4.2)$$

не зависит от s , где

$$n = \|\mu_1 - \mu_2\| - \|\mu_3 - \mu_4\| \quad (6.4.3)$$

— результирующая разность спиральностей в s -канале, то амплитуда (6.4.1) обладает реджевским поведением вида $(s/s_0)^{\alpha(t)}$. Однако она не удовлетворяет t -канальной факторизации.

Для случая неравных масс мы выяснили, что реджевский вычет при $t \rightarrow 0$ должен вести себя как $t^{(M-N)-\alpha}/2$, и поэтому t -канальные спиральные амплитуды (6.2.31) обладают поведением

$$A_{H_t}^R(s, t) \sim (-t)^{(M+N)/2} = (-t)^{(|\lambda_1 - \lambda_3| + |\lambda_2 - \lambda_4|)/2}. \quad (6.4.4)$$

Теперь, когда $t \rightarrow 0$, все углы перехода из одного канала в другой (4.3.5) ведут себя как

$$\chi_i \sim \sin \chi_i \sim (-t)^{1/2}, \text{ и поэтому } d_{\dots i \mu_i}^{\sigma_i}(\chi_i) \sim (-t)^{|\lambda_i - \mu_i|/2} \text{ при } = 1, \dots, 4. \text{ Поэтому спиральная матрица кроссинга (4.3.7)}$$

$$M(H_s, H_t) \sim (-t)^{(1/2)(|\lambda_1 - \mu_1| + |\lambda_2 - \mu_2| + |\lambda_3 - \mu_3| + |\lambda_4 - \mu_4|)} \quad (6.4.5)$$

диагональна с учетом членов первого порядка по t при $t \rightarrow 0$. Подставляя (6.4.4) и (6.4.5) в (6.3.7), получаем

$$A_{H_s}^R(s, t) \sim \sum_{H_t} (-t)^{(1/2)(|\lambda_1 - \mu_1| + |\lambda_2 - \mu_2| + |\lambda_3 - \mu_3| + |\lambda_4 - \mu_4| + |\lambda_1 - \lambda_3| + |\lambda_2 - \lambda_4|)}, \quad (6.4.6)$$

причем минимальная степень t получается из тех членов суммы для которых $\lambda_i = \mu_i \quad i = 1, \dots, 4$, и поэтому

$$A_{H_s}^R(s, t) \sim (-t)^{(1/2)(|\mu_1 - \mu_3| + |\mu_2 - \mu_4|)}, \quad t \rightarrow 0. \quad (6.4.7)$$

Чтобы обеспечить это поведение, напишем вместо (6.4.1)

$$\begin{aligned} A_{H_s}^R(s, t) = & - \left(\frac{-t}{s_0} \right)^{(1/2)(|\mu_1 - \mu_3| + |\mu_2 - \mu_4| - |\mu' - \mu''|)} \times \\ & \times \left(\frac{s}{s_0} \frac{1 - z_s}{2} \right)^{|\mu' - \mu''|/2} \left(\frac{1 + z_s}{2} \right)^{|\mu + \mu''|/2} \times \\ & \times \frac{\exp[-i\pi(\alpha - v)] + \xi}{2 \sin \pi(\alpha - v)} \gamma_{H_s}(t) \left(\frac{s - u}{2s_0} \right)^{\alpha(t)}; \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

$$A_{H_s}^R(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} - \left(\frac{-t}{s_0} \right)^{1/2m} \frac{\exp[-i\pi(\alpha - v)] + \xi}{2 \sin \pi(\alpha - v)} \gamma_{H_s}(t) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha(t)}, \quad (6.4.9)$$

где

$$\gamma_{H_s}(t) = \gamma_{\mu_1 \mu_3}(t) \gamma_{\mu_2 \mu_4}(t) \quad (6.4.11)$$

— вычет, не имеющий кинематических сингулярностей.

Хотя этот вывод проведен для случая неравных масс, но в действительности он справедлив для любой комбинации масс, потому что $A_{H_s}(s, t)$ не имеет зависящих от масс особенностей по t , за исключением особенностей множителя половинного угла.

Единственная сложность этого метода заключается в определении поведения вычетов. Не возникает трудностей с механизмом выбора нефизических значений, отсутствием компенсации или механизмами фиксированных полюсов, которые приводят к одинаковому поведению всех s -канальных амплитуд. Но механизм выбора физических значений и механизм Чу дают нуль в одних t -канальных амплитудах и не дают в других, и если данная амплитуда A_{H_i} обращается в нуль, то возникают ограничения типа

$$\sum_{H_s} M(H_s, H_i)^{-1} A_{H_s}(s, t) \sim \alpha(t) - J_0 \quad (6.4.12)$$

(где M^{-1} — матрица, обратная M), которые трудно удовлетворить при простой параметризации. Но, отвлекаясь от этих случаев, выражение (6.4.8) может с успехом применяться на практике

6.5. Дочерние и конспирирующие траектории *

При получении (6.3.7) для вклада реджевского полюса в амплитуду рассеяния при асимптотическом поведении функций вращения мы использовали выражение (6.2.26). Однако из (1.7.15) и (1.7.19) очевидно, что в случае неравных масс при $t \rightarrow 0$, $q_t \sim t^{-1/2}$ и $z_t \rightarrow \varepsilon$ [равных ± 1 , см. (6.2.19)] для всех s . Это могло бы, казалось бы, свидетельствовать о том, что амплитуды рассеяния в случае неравных масс не будут обладать реджевским поведением при $t = 0$. Но на самом деле это не так, потому что точка $t = 0$ не является особой точкой приведенной амплитуды рассеяния \tilde{A}_{H_i} .

Ошибку в предыдущих рассуждениях легче обнаружить, если переписать (1.7.19) в виде

$$z_t = \frac{s}{2q_{t13} q_{t24}} \left(1 + \frac{\Delta(t)}{s} \right), \quad (6.5.1)$$

где величина

$$\Delta(t) = (1/2t) [t^2 - t\Sigma + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)] \quad (6.5.2)$$

сингулярна при $t = 0$ в случае неравных масс. Проведем затем разложение

$$e_{\lambda\lambda'}^{\alpha-1}(z_t) = \xi_{\lambda\lambda'}(z_t) f(\alpha) [(z_t/2)^{\alpha-M} + f_1(\alpha)(z_t/2)^{\alpha-M-2} + \dots],$$

где $f(\alpha)$ дается выражением (Б.25), а $f_1(\alpha)$ может быть выведена из формулы (Б.24). После подстановки (6.5.1) и (6.2.30) в (4.6.4) получаем

$$A_{H_i}^R(s, t) \sim \left\{ \left(\frac{s}{4s_0} \right)^{\alpha-M} + \Delta(t)(\alpha-M) 4s_0 \left(\frac{s}{4s_0} \right)^{\alpha-M-1} + \left[\frac{(\alpha-M)(\alpha-M-1)}{2} (4s_0 \Delta(t))^2 + a_1(\alpha) \left(\frac{q_{t13} q_{t24}}{s_0} \right)^2 \right] \left(\frac{s}{4s_0} \right)^{\alpha-M-2} + \dots \right\}. \quad (6.5.3)$$

Итак, каждый член разложения порядка $(s/4s_0)^{\alpha-M-n}$ имеет при $t = 0$ особенность вида t^{-n} . Это как раз те самые сингулярности, которые обсуждались ранее.

Однако, поскольку, как предполагается, амплитуда удовлетворяет представлению Мандельштама, она должна быть аналитична при $t = 0$, так что должны быть какие-то другие вклады, которые сокращают эти. Эти члены могли бы содержаться в фоновом интеграле [132], но более общепринятое предположение [174], что существуют другие траектории, называемые дочерними, сингулярные вычеты которых точно сокращают особенности первоначальной родительской траектории. Таким образом, первая дочерняя траектория будет иметь траекторию

$$\alpha_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \alpha(t) - 1, \quad (6.5.4)$$

а вычет

$$\beta_1(t) \rightarrow -\beta(0) (m_1^2 - m_3^2) (m_2^2 - m_4^2) (\alpha(0) - M) 2s_0/t + \\ + \text{члены, не имеющие особенностей}, \quad (6.5.5)$$

что сокращает второй член в (6.5.3). В действительности необходима бесконечная последовательность дочерних траекторий со значениями

$$\alpha_k(0) = \alpha(0) - k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \beta_k(0) \sim t^{-k}. \quad (6.5.6)$$

Нечетные дочерние траектории должны иметь сигнатуру, противоположную сигнатуре родительской траектории, т. е. $\xi_k = \xi (-1)^k$, поэтому их сигнатурные множители совпадают с сигнатурными множителями родительской траектории при $t = 0$.

Существует большое число свидетельств в пользу существования таких дочерних траекторий; они приведены на рис. 5.4—5.6. Вычисления траекторий в случае равных масс в рамках уравнения Бете—Солпитера [137] дают довольно своеобразное поведение дочерних траекторий (рис. 6.2) и не приводят к частицеподобным решениям. Если члены без особенностей (6.5.5) не важны, то дочерние траектории не обязательно проявляются по энергетическому поведению в s -канале, к тому же, поскольку их основное предназначение — обеспечение поведения $s^{\alpha(t)}$ при всех t , они могут маскироваться другими особенностями (разрезами и т. п.). В следующей главе мы обсудим причины, по которым такие траектории должны существовать вместе с родительскими (см. рис. 7.5).

Другая проблема реджевских полюсов при $t = 0$ заключается в том, что вычеты не могут иметь кинематического поведения (6.2.23), а только то, которое дается выражением (6.2.25) (в данный момент пренебрежем факторизацией). Это так потому, что, как можно вывести из (6.2.22), амплитуды с определенной четностью должны удовлетворять условию

$$\hat{A}_{H_t}^{\xi}(s, t) \mp \xi \hat{A}_{\bar{H}_t}^{\xi}(s, t) \sim t^N. \quad (6.5.7)$$

Используя (6.2.25), мы можем обойти это ограничение, включив в вычет реджевского полюса дополнительный множитель t^N . Это необходимо сделать, так как реджеон может присутствовать только в амплитуде с определенной четностью.

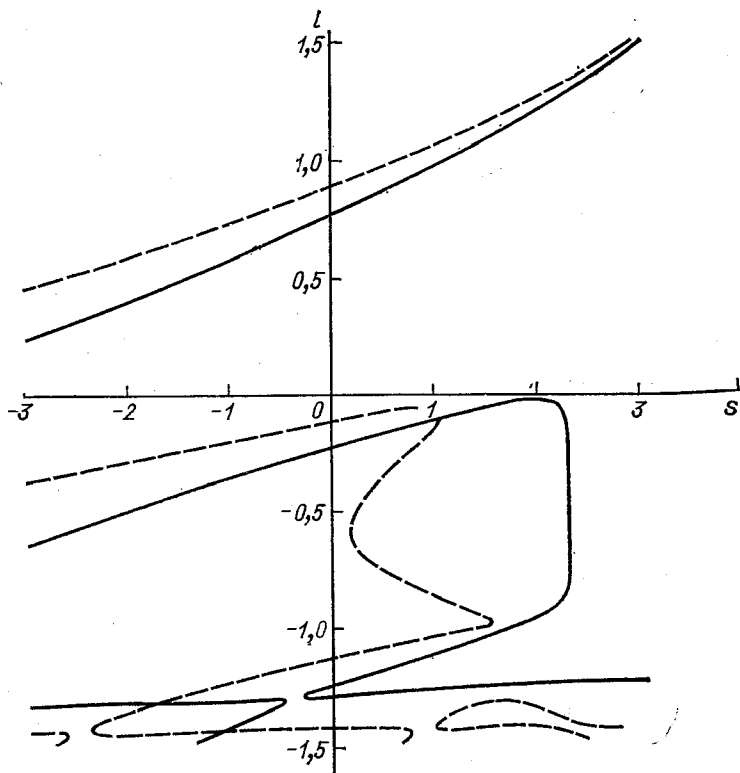


Рис. 6.2. Реджевские траектории, полученные в работе [137] с использованием уравнения Бете-Солпитера с потенциалом с отталкивающим кором. Непрерывные и пунктирные кривые отвечают различным значениям константы связи. Налицо удивительное поведение дочерних траекторий

Однако, если бы существовали две траектории с противоположной четностью, они могли бы «конспирировать», чтобы удовлетворить условию (6.5.7) [77, 275, 395]. При этом потребовалось бы, чтобы

$$\alpha_+(0) = \alpha_-(0) \text{ и } \beta_H^+(t) \pm \beta_H^-(t) \sim t^{1/2(M+N)-\alpha}, \quad (6.5.8)$$

где \pm обозначают четность ± 1 . Такая конспирация приводила бы к

$$\beta_H^\xi(t) \sim t^{(1/2)(M-N)-\alpha}, \quad \xi = \pm 1 \quad (6.5.9)$$

вместо (6.2.29), которое ведет себя как $t^{(1/2)(M+N)-\alpha}$.

Ясно, что это поведение не приводит к факторизации по λ и λ' , но тем не менее можно выбрать определенную амплитуду, например с $\lambda = \lambda' = \Lambda$, где Λ — данное число, называемое «числом Толлера»,

которая имеет самое сингулярное поведение из всех возможных. Тогда факторизация требует, чтобы другие спиральные амплитуды вели себя как

$$\beta_{\lambda\lambda}^{\xi}(t) \sim t^{(1/2)(|\Lambda - |\lambda_{\parallel}| + |\Lambda - |\lambda'_{\parallel}||) - \alpha} \quad (6.5.10)$$

и для конспирирующей траектории параметр δ заменяется на значение из табл. 6.1. Применяя соотношение кроссинга (4.3.7) и (6.4.5), получаем

$$A_{H_s}^R(s, t) \sim (-t)^{(1/2)(|\Lambda - |\mu_1 - \mu_3|| + |\Lambda - |\mu_2 - \mu_4||)}, \quad (6.5.11)$$

так что, в отличие от (6.4.7), амплитуда с $|\mu_1 - \mu_3| = |\mu_2 - \mu_4| = \Lambda$ не будет обращаться в нуль при $t = 0$.

Простым примером является процесс $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, когда в переднем конусе ($t \approx 0$) доминирует обмен π -мезоном. Поскольку для фотона μ_1 может равняться только ± 1 , а для бесспинового пиона $\mu_3 = 0$, то из (6.4.10) видно, что $m \neq 0$, и поэтому из-за (6.4.7) все амплитуды будут убывать при $t = 0$ и, следовательно, в $d\sigma/dt$ должен появляться минимум при $t = 0$. В действительности экспериментальные данные

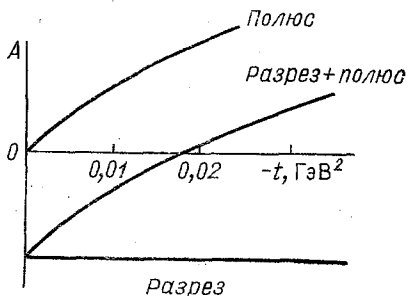


Рис. 6.3. Амплитуда рассеяния для процесса $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, свидетельствующая о вкладе пионного полюса и реджевского разреза.

Разрез и полюс образуют наблюдаемый на опыте пик в рассеянии вперед

указывают на наличие острого пика в рассеянии вперед с шириной $\Delta t \approx m_{\pi}^2$, который может быть объяснен как результат конспирации с $\Lambda = 1$ между π -траекторией и аналогичной траекторией с естественной четностью, приводящей к поведению (6.5.11) [30]. Однако не существует скалярной частицы, аналогичной пиону, и было показано [276], что такая конспирация несовместима с факторизацией в других процессах с π -обменом. Поэтому кажется более правдоподобным, что пик вперед обусловлен реджевскими разрезами (см. рис. 6.3 и разд. 8.7e). Для мезонных траекторий как будто нет никаких свидетельств конспираций.

Однако конспирации существенны, если фермионное число обмениваемой траектории нечетно. После формулы (6.2.25) было упомянуто, что при умножении вычета на t^N будут возникать нефизические корневые ветвления при $t = 0$. Действительно, делая замену $\sqrt{t} \rightarrow -\sqrt{t}$ в (6.2.24), получаем, что для полуцелых λ и λ'

$$A_{H_t}^{\xi}(s, \sqrt{t}) = A_{H_t}^{-\xi}(s, -\sqrt{t}) (-1)^{\lambda - \epsilon\lambda'}. \quad (6.5.12)$$

Это называется обобщенной симметрией Мак-Дауэлла [291] и означает, что в случае барионов должна быть конспирация между траекториями с противоположной четностью и числом Толлера $\Lambda = 1/2$, так что

$$\alpha^+(\sqrt{t}) = \alpha^-(-\sqrt{t}) \text{ и } \beta_H^+(\sqrt{t}) = (-1)^{\lambda - \epsilon\lambda'} \beta_H^-(-\sqrt{t}). \quad (6.5.13)$$

Если такие траектории четны по \sqrt{t} , как в случае линейной траектории (5.3.2), то эти две траектории должны совпадать и можно ожидать, что барионы существуют в виде вырожденных дублетов противоположной четности. Включение членов, нечетных по \sqrt{t} , таких, как

$$\alpha^\pm(\sqrt{t}) = \alpha_0 \pm \alpha_1 \sqrt{t} + \alpha_2 t, \quad (6.5.14)$$

снимает вырождение, но одновременно изгибает траектории. Однако мы видели в разд. 5.3, что барионные траектории линейны по t , но не вырождены по четности. Для того чтобы обратить в нуль нежелательные состояния, можно обратить в нуль вычеты [367, 368] или ввести точку ветвления при $J = \alpha_0$ и поместить нежелательные состояния на нефизическую сторону разреза (см., например, [83] и разд. 8.7и). Однако правильное объяснение этой проблемы еще не известно.

6.6. Теоретико-групповые методы *

Проблемы, связанные с введением дочерних траекторий и конспираций, возникают из-за того, что вследствие соотношения (6.5.2) функции вращения $d_{\lambda\lambda'}^J(z_t)$ не подходят для представления амплитуды рассеяния при $t = 0$. Работы Толлера [382, 383] и других привели к несколько более общей точке зрения на эти трудности.

При написании ряда по парциальным волнам (4.4.14) мы разлагали амплитуду рассеяния по функциям, являющимся представлением трехмерной группы вращений $O(3)$, или, более точно, поскольку был включен полуцелый спин, накрывающей группы $SU(2)$. Группа вращения является так называемой «малой группой» неоднородной группы Лоренца или группы Пуанкаре \mathcal{P} , т. е. группы преобразований, оставляющих инвариантными полный 4-импульс входящих и выходящих частиц (в t -канале) [305] и [62]

$$P_\mu = (p_{1\mu} + p_{3\mu}) = (p_{2\mu} + p_{4\mu}), \quad \mu = 1, \dots, 4. \quad (6.6.1)$$

Разумеется, угловой момент J^2 является оператором Казимира малой группы, а $\sum_\mu P_\mu^2 = t$ также есть инвариант Казимира группы \mathcal{P} .

Однако Вигнер [411] показал, что хотя $O(3)$ и является малой группой для $t > 0$, но в действительности существуют четыре различных класса представлений \mathcal{P} , описывающихся различными значениями t . Вот они.

- I. Времениподобный класс, $t > 0$, малая группа $O(3)$.
 - II. Пространственноподобный класс, $t < 0$, малая группа $O(2, 1)$.
 - III. Световой конус, $t = 0$, $P_\mu \neq 0$, малая группа $E(2)$.
 - IV. Начало координат, $t = 0$, $P_\mu = 0$, малая группа $O(3, 1)$.
- Здесь $O(3)$ — группа вращений в пространстве трех действительных измерений с инвариантом $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $O(2, 1)$ — группа вращений в пространстве двух вещественных и одного мнимого измерения

с инвариантом $x^2 + y^2 - z^2$; $E(2)$ — группа евклидовых преобразований в двух измерениях; $O(3, 1)$ — группа вращений в пространстве трех действительных и одного мнимого измерений с инвариантом $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, изоморфная группа Лоренца.

Функции $d_{\lambda\lambda'}^J(z_t)$, $-1 \leq z_t \leq 1$ образуют представление группы $O(3)$. Эти же функции $d_{\lambda\lambda'}^J(z_t)$, но с z_t , взятом при нефизических значениях, соответствующих $t < 0$, образуют представления группы $O(2, 1)$. Баргманн [38], показал, что функция, квадратично интегрируемая на групповом многообразии, может быть разложена в ряд по представлениям группы; так, амплитуда рассеяния, разложенная в этом базисе, имеет вид [60, 259]

$$A_{H_t}(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} dJ \frac{2J+1}{\sin \pi(J+\lambda')} A_{H_J}(t) d_{\lambda\lambda'}^J(z_t) +$$

+ нефизические члены, (6.6.2)

т. е. выражение (4.6.2) без реджевских полюсов и разрывов в области $\text{Re } J > -1/2$. Так получается из-за того, что условия квадратичной интегрируемости требуют, чтобы $A_{H_t}(s, t) = O(s^{-1/2})$.

Таким образом, представление Зоммерфельда—Ватсона можно рассматривать как разложение по представлениям группы $O(2, 1)$. Однако эта эквивалентность неполна, так как представление Зоммерфельда—Ватсона справедливо для всех t , а не только в области $t < 0$. К тому же оно справедливо и для нерелятивистского потенциального рассеяния, которое при $t < 0$ обладает симметрией группы $E(2)$, а не $O(2, 1)$, а представления $E(2)$ имеют совершенно иной вид [245, 285]. И, конечно же, представление Зоммерфельда—Ватсона при $\text{Re } J > -1/2$ с учетом реджевских особенностей является аналитическим продолжением выражения (6.6.2) по J . Но если отвлечься от этих различий, то можно переформулировать теорию Редже как разложение по группе $O(2, 1)$.

Из-за условий массовой поверхности $p_1^2 = m_1^2$ и других равенств равенство $t = (p_1 + p_2)^2 = (p_2 + p_4)^2 = 0$ приводит к тому, что отдельные проекции P_μ равны нулю в (6.6.1) только тогда, когда $m_1 = m_3$ и $m_2 = m_4$, так что будет ли малой группой при $t = 0$ $O(3, 1)$ или $E(2)$ зависит от того, равны или не равны друг другу массы частиц.

Если массы равны, то амплитуда может быть разложена по функциям, являющимся представлением группы $O(3, 1)$, которые могут быть обозначены как $d_{TT'}^{\Lambda\sigma}(z_t)$. Они были получены в работе [360] и зависят от двух операторов Казимира, один из них число Толлера, введенное в (6.5.10), которое в зависимости от фермионного числа может принимать значения 0, 1, 2, ... или 1/2, 3/2, 5/2 ..., а другим является чисто мнимое число σ , $-\infty < i\sigma < \infty$. Этот дополнительный оператор Казимира появляется из-за того, что в случае равных масс у решений, удовлетворяющих уравнению $\sum_\mu P_\mu^2 = 0$, имеются две степени

свободы. Вторая степень свободы отвечает изменению s . Разложенная в этом базисе амплитуда имеет вид

$$A_{H_t}(s, t=0) = \delta_{\lambda\lambda'} \sum_{TT'} \sum_{\Lambda=-T_M}^{T_M} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\sigma (\Lambda^2 - \sigma^2) A_{T\Lambda T'}^{\Lambda\sigma}(t=0) d_{T\Lambda T'}^{\Lambda\sigma}(z_t), \quad (6.6.3)$$

где $A_{T\Lambda T'}^{\Lambda\sigma}(t)$ — парциальные амплитуды на группе $O(3, 1)$, а $T_M = \min\{T, T'\}$ и при суммировании

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq T \leq \sigma_1 + \sigma_3, \quad |\sigma_2 - \sigma_4| \leq T' \leq \sigma_2 + \sigma_4.$$

При $t=0$ остаются только амплитуды без переворота спина $\lambda = \lambda'$. Если предположим, что, например, при $\sigma = a$ имеется полюс Толлера [как в выражении (6.6.2) может быть реджевский полюс при $J = \alpha$], то аналитическое продолжение по σ приводит к

$$A_{H_t}(s, 0) = [(6.6.3)] + \delta_{\lambda\lambda'} \sum_{TT'} A_{T\Lambda T'}^{\Lambda a} (\Lambda^2 - a^2) d_{T\Lambda T'}^{\Lambda a}, \quad (6.6.4)$$

где (6.6.3) означает правую часть выражения (6.6.3), а Λ — число Толлера для полюса. Так как известно, что

$$d_{T\Lambda T'}^{\Lambda\sigma}(z_t) \underset{z_t \rightarrow \infty}{\sim} (z_t)^{\sigma-1-|\Lambda-\lambda|}, \quad (6.6.5)$$

то из (6.6.4) получаем

$$A_{H_t}(s, 0) \sim \delta_{\lambda\lambda'} (z_t)^{a-1-|\Lambda-\lambda|}. \quad (6.6.6)$$

Если сравнить с (6.3.7), вспоминая (6.5.11), то становится ясно, что это поведение отвечает реджевскому полюсу с $\alpha(0) = a - 1$ и числом Толлера Λ . Конечно, если разложить функции, образующие представление группы $O(3, 1)$ по функциям $d_{\lambda\lambda'}^J(z_t)$, то видно [360], что единственный полюс Толлера в σ -плоскости при $\sigma = a$ (6.6.4) соответствует бесконечной последовательности реджевских полюсов в J -плоскости при $J = \alpha_k(0)$, где

$$\alpha_k(0) = a - k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.6.7)$$

т. е. конспирирующей последовательности дочерних траекторий с числом Толлера Λ . Когда мы уходим из точки $t=0$, $O(3, 1)$ -симметрия нарушается так, что дочерние траектории не должны отличаться от родительской на целое число, как в (6.6.7).

Очевидно, что этот аргумент неприменим в случае неравных масс, так как представления группы $E(2)$ сильно отличаются от представлений $O(3, 1)$, так что для подтверждения существования толлеровских полюсов в этом случае необходимо провести продолжение по массам [50, 144, 267]. Разумеется, наблюдаемое отсутствие конспираций, отмеченное в предыдущем разделе, заставляет подозревать, что при $t=0$ не использована действительная степень свободы, отвечающая изменению величины σ в (6.6.3). Единственный полюс Редже при $t=0$ соответствует бесконечной последовательности конспирирующих полюсов Толлера в σ -плоскости (совершенно аналогично соотно-

шению между полюсами в l - и n -плоскостях, приведенному в разд. 2.10), так что отсутствие конспирирующих траекторий, возможно, отражает первостепенное значение J -плоскости по сравнению с σ -плоскостью. Если это так, то развитая в этом разделе техника теории групп как будто не будет давать значительных преимуществ по сравнению с методом Зоммерфельда—Ватсона, используемым в этой книге.

6.7. Внутренняя симметрия и кроссинг

6.7а. Изоспин

Как уже упоминали в разд. 5.2, приближенная симметрия сильных взаимодействий по отношению к внутренним $SU(2)$ - и $SU(3)$ -симметриям приводит к важным соотношениям между амплитудами рассеяния. Мы начнем с группы $SU(2)$, которая изменяется не более чем на несколько процентов, что зачастую намного меньше погрешности, с которой может быть определена амплитуда рассеяния. Поэтому часто удобнее оперировать с амплитудами рассеяния для различных возможных изоспиновых состояний, а не с амплитудами для различных зарядовых состояний рассеивающихся частиц.

Удобно вначале рассмотреть распад частицы, например, такой, как $a \rightarrow 1 + 2$. Конечное состояние может быть выражено в терминах изоспинов частиц [см. (5.2.1)]

$$|1, 2\rangle = |I_1, I_{1z}\rangle \otimes |I_2, I_{2z}\rangle. \quad (6.7.1)$$

Полный изоспин есть сумма векторов изоспина частиц

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \quad (6.7.2)$$

с возможными собственными значениями

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 + I_2 - 1, \dots, |I_1 - I_2|, \quad (6.7.3)$$

$$\text{где } I_z = I_{1z} + I_{2z} = I, \quad I - 1, \dots, -I. \quad (6.7.4)$$

Состояние (6.7.1) может быть записано как суперпозиция различных возможных состояний с суммарным изоспином следующим образом

$$|1, 2\rangle = \sum_I \langle I_1, I_2, I_{1z}, I_{2z} | I, I_z \rangle |I, I_z\rangle, \quad (6.7.5)$$

где $\langle I_1, I_2, I_{1z}, I_{2z} | I, I_z \rangle$ — коэффициенты Клебша—Гордана [158]. Поскольку частица a имеет определенный изоспин I_a , то только один член из суммы (6.7.5) описывает процесс распада и поэтому амплитуда распада может быть записана в виде

$$A(a \rightarrow 1 + 2) = \langle I_1, I_2, I_{1z}, I_{2z} | I_a, I_{az} \rangle \bar{A}(a \rightarrow 1 + 2), \quad (6.7.6)$$

где \bar{A} — приведенная амплитуда, не зависящая от I_{az} . Таким образом, изотопическая инвариантность приводит к тому, что различные зарядовые состояния частицы a , имеющие свои различные значения I_{az} [см. (5.2.1)], будут иметь значения ширины распада, связанные друг с другом при помощи коэффициентов Клебша—Гордана группы $SU(2)$.

Например, в распаде $\rho \rightarrow \pi\pi$ как ρ^- , так и π -мезоны имеют $I = 1$. и $I_z = 1, 0, -1$, что отвечает зарядовым состояниям $+, 0$ и $-$. Поэто-

му в соответствии с (6.7.6) различные амплитуды распада связаны соотношением:

$$A(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) = A(\rho^- \rightarrow \pi^0 \pi^-) = A(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = \\ = (1/\sqrt{2}) \bar{A}(\rho \rightarrow \pi\pi), \quad (6.7.7)$$

где $\bar{A}(\rho \rightarrow \pi\pi)$ — приведенная амплитуда. Такие соотношения хорошо выполняются в адронных распадах.

Аналогичным образом для процесса рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, где как начальное, так и конечное состояния могут быть выражены через состояния с определенным изоспином подобно (6.7.5) в случае, если процесс рассеяния изотопически инвариантен, амплитуда рассеяния может быть разложена следующим образом:

$$\langle 34 | A | 12 \rangle = \sum_I \langle I_3 I_4, I_{3z}, I_{4z} | I, I_z \rangle \langle I_1, I_2, I_{1z}, I_{2z} | I, I_z \rangle A(I), \quad (6.7.8)$$

где $A(I)$ не зависит от I_z . В общем случае число различных изотопических амплитуд меньше, чем число процессов с заряженными частицами, и поэтому соотношение (6.7.8) связывает друг с другом амплитуды различных процессов.

Например, в πN -рассеянии состояние $|\pi^+ p\rangle$ имеет $I_z = 1 + 1/2 = 3/2$ и поэтому $I = 3/2$. Аналогично состояние $|\pi^- p\rangle$ имеет $I_z = -3/2$, $I = 3/2$. Поэтому из (6.7.8)

$$\langle \pi^+ p | A | \pi^+ p \rangle = \langle \pi^- n | A | \pi^- n \rangle = A(3/2). \quad (6.7.9)$$

Аналогично, находя коэффициенты Клебша—Гордана, получим

$$\left. \begin{aligned} \langle \pi^- p | A | \pi^- p \rangle &= \langle \pi^+ n | A | \pi^+ n \rangle = (1/3) A(3/2) + \\ &+ (2/3) A(1/2); \\ \langle \pi^0 p | A | \pi^0 p \rangle &= \langle \pi^0 n | A | \pi^0 n \rangle = (2/3) A(3/2) + \\ &+ (1/3) A(1/2); \\ \langle \pi^0 n | A | \pi^- p \rangle &= \langle \pi^0 p | A | \pi^+ n \rangle = \sqrt{2/3} A(3/2) - \\ &- \sqrt{2/3} A(1/2); \end{aligned} \right\} \quad (6.7.10)$$

Таким образом, восемь различных процессов πN -рассеяния определяются всего лишь двумя независимыми изоспиновыми амплитудами $A(1/2)$ и $A(3/2)$.

В настоящее время нет убедительного объяснения, почему природа должна была выбрать такую сложную симметрию для взаимодействий адронов, но она, несомненно, подтверждается с погрешностью до нескольких процентов — уровень, на котором она, по предположению, нарушается электромагнитными взаимодействиями.

Обсудим кратко соотношения между s -канальными амплитудами, возникающие из-за обмена частицами, имеющими определенный изоспин в t -канале. t -Канальный процесс $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ может быть представлен как

$$\langle \bar{2}4 | A | 1\bar{3} \rangle = \sum_{I_t} \langle I_1 I_3, I_{1z}, I_{3z} | I_t I_{tz} \rangle \langle I_2 I_4 I_{2z} I_{4z} | I_t, I_{tz} \rangle^* A(I_t), \quad (6.7.11)$$

в то время как для s -канального изоспина выполняется (6.7.8). Соотношение кроссинга (4.3.1) для изотопических амплитуд принимает вид

$$A(I_s) = \sum_{I_t} M(I_s, I_t) A(I_t), \quad (6.7.12)$$

где изотопическая матрица кроссинга может быть получена из коэффициентов Клебша—Гордана в (6.7.8) и (6.7.11). Однако в выборе фазы данного изотопического состояния и при изотопическом сопряжении требуется некоторая осторожность. Подробнее это обсуждается в работе [84]. Несколько полезных примеров приведено в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Изоспиновые матрицы кроссинга

| s -Канал | t -Канал | $M(I_s, I_t)$ |
|-----------------------------|---|---|
| $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ | $\bar{\pi}\pi \rightarrow \pi\bar{\pi}$ | $\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 1/2 & -5/6 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$ |
| $\pi N \rightarrow \pi N$ | $\bar{N}N \rightarrow \pi\bar{\pi}$ | $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & -1/2 \end{pmatrix}$ |
| $KN \rightarrow KN$ | $\bar{N}N \rightarrow K\bar{K}$ | $\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ |
| s -Канал | u -Канал | $M(I_s, I_u)$ |
| $\pi N \rightarrow \pi N$ | $\bar{\pi}N \rightarrow \bar{\pi}N$ | $\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ |
| $KN \rightarrow KN$ | $\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N$ | $\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ |

Примечание. Обозначение частиц относится только к их изоспину, так что π -мезон может быть заменен на любую частицу с $I=1$, а K, N — на частицы с $I=1/2$.

Чтобы проиллюстрировать, как возникают эти матрицы, рассмотрим $\pi\pi$ -рассеяние. В терминах изотопических состояний $|I, I_z\rangle$ можно записать:

$$\left. \begin{aligned} |\pi^+\pi^+\rangle &= |2, 2\rangle; \\ |\pi^+\pi^-\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle\right); \\ |\pi^-\pi^+\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.7.13)$$

и т. д. Так, например,

$$\begin{aligned} \langle \pi^+\pi^+ | A | \pi^+\pi^+ \rangle &= A(2); \\ \langle \pi^-\pi^+ | A | \pi^+\pi^- \rangle &= (1/3)A(0) - (1/2)A(1) + (1/6)A(2). \end{aligned} \quad (6.7.14)$$

Теперь при кроссинге s -канальный процесс $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$ переходит в процесс $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^-\pi^+$ в t -канале и поэтому

$$A_s(2) = (1/3)A_t(0) - (1/2)A_t(1) + (1/6)A_t(2), \quad (6.7.15)$$

что дает нижнюю строку в матрице кроссинга для $\pi\pi$ -рассеяния в табл. 6.3. Другие элементы могут быть выведены аналогичным образом.

6.76. $SU(3)$ -симметрия

Как и для изоспина, можно ожидать, что различные процессы рассеяния будут связаны коэффициентами Клебша—Гордана группы $SU(3)$, при условии, что сильные взаимодействия инвариантны по отношению к этой симметрии [84, 201].

Если обозначить мультиплет, к которому принадлежит частица, т. е. $\{1\}$, $\{8\}$, $\{10\}$ и т. д. буквой μ , а ее квантовые числа I, I_z, Y буквой ν , то состояние $|1, 2\rangle$ может быть разложено по неприводимым представлениям группы $SU(3)$ следующим образом [ср. (6.7.5)]:

$$|\mu_1 \nu_1\rangle \otimes |\mu_2 \nu_2\rangle = \sum_{\mu, \nu} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} |\mu, \nu\rangle, \quad (6.7.16)$$

где скобки означают коэффициент Клебша—Гордана.

Из мультиплетов разд. 5.2 наиболее важными являются [84, 201]:

$$\begin{aligned} \{1\} \otimes \{8\} &= \{8\}; \\ \{1\} \otimes \{10\} &= \{10\}; \\ \{8\} \otimes \{8\} &= \{1\} \oplus \{8_s\} \oplus \{8_a\} \oplus \{10\} \oplus \{\bar{10}\} \oplus \{27\}; \\ \{8\} \otimes \{10\} &= \{8\} \oplus \{10\} \oplus \{27\} \oplus \{35\}, \end{aligned} \quad (6.7.17)$$

где индексы s и a означают симметричную d -связь и антисимметричную f -связь между октетами $\{8\} - \{8\} - \{8\}$ соответственно.

Теперь коэффициент Клебша—Гордана для группы $SU(3)$ факторизуется на коэффициент Клебша—Гордана для группы $SU(2)$ и изоскалярный множитель вида

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} = \langle I_1, I_2, I_{1z}, I_{2z} | I, I_z \rangle \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu \\ I_1 Y_1 & I_2 Y_2 & I Y \end{pmatrix}. \quad (6.7.18)$$

Коэффициенты приведены, например, в работе [327]. Так, для векторного мезона V , принадлежащего октету $\{8\}$ и распадающегося на два псевдоскалярных мезона PS , также принадлежащих октету $\{8\}$, в пределе точной $SU(3)$ -симметрии получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} A(\rho \rightarrow \pi\pi) &= -\frac{2}{\sqrt{2}} A(\rho \rightarrow K\bar{K}) = -\frac{2}{\sqrt{3}} A(K^* \rightarrow K\pi) = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} A(K^* \rightarrow K\eta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos \theta} A(\varphi \rightarrow K\bar{K}) = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sin \theta} A(\omega \rightarrow K\bar{K}) = A(V \rightarrow PS + PS), \end{aligned} \quad (6.7.19)$$

где θ — угол смешивания в выражении (5.2.17). Однако, для того чтобы проверить такие соотношения, необходимо учесть сильно различающиеся в разных распадах фазовые объемы, что связано с большим расщеплением масс из-за нарушения симметрии. В частности, распады $K^* \rightarrow K\eta$ и $\omega \rightarrow K\bar{K}$ запрещены, так как масса резонанса меньше порога этих каналов распада. Учитывая оптимальным образом рассматриваемые неопределенности (см., например, [201]), можно утверждать, что эти соотношения выполняются достаточно хорошо.

Однако легче проверить соотношения $SU(3)$ -симметрии для полюсных обменов в амплитудах рассеяния. Инвариантность процессов рассеяния адронов по отношению к преобразованиям группы $SU(3)$ приводит к тому, что амплитуды могут зависеть от μ , но не должны зависеть от ν [ср. (6.7.11)], и поэтому для процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ получаем

$$\langle 34 | A | 12 \rangle = \sum_{\mu, \nu} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_3 & \mu_4 & \mu \\ \nu_3 & \nu_4 & \nu \end{pmatrix}^* A(\mu). \quad (6.7.20)$$

Так, например, в процессе типа $M + B \rightarrow M' + B'$, где M, M' и B, B' — члены мезонного и барионного октетов соответственно, имеется всего лишь семь независимых приведенных амплитуд

$$A(1), A(8_{ss}), A(8_{sa}), A(8_{as}), A(10), A(\bar{10}), A(27). \quad (6.7.21)$$

Это следует из (6.7.17) [отметим, что из-за инвариантности по отношению к обращению времени $A(8_{as}) = A(8_{sa})$] и, таким образом, все многообразие амплитуд этого типа связано коэффициентами Клебша—Гордана со всего лишь семью амплитудами, приведенными в (6.7.20) [аналогично (6.7.10)].

Таблица 6.4

Октетные матрицы кроссинга ($8 \otimes 8 \rightarrow 8 \otimes 8$)

| | 1 | 8_{ss} | 8_{sa} | 8_{as} | 8_{aa} | 10 | $\bar{10}$ | 27 |
|------------|-----------|-----------|---------------|------------------|-----------|------------------|------------------|------------|
| 1 | 1/8 | 1 | 0 | 0 | ± 1 | $\pm 5/4$ | $\pm 5/4$ | 27/8 |
| 8_{ss} | 1/8 | $-3/10$ | 0 | 0 | $\pm 1/2$ | $\mp 1/2$ | $\mp 1/2$ | 27/40 |
| 8_{sa} | 0 | 0 | $\pm 1/2$ | 1/2 | 0 | $\sqrt{5/4}$ | $-\sqrt{5/4}$ | 0 |
| 8_{as} | 0 | 0 | 1/2 | $\pm 1/2$ | 0 | $\mp \sqrt{5/4}$ | $\pm \sqrt{5/4}$ | 0 |
| 8_{aa} | $\pm 1/8$ | $\pm 1/2$ | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | $\mp 9/8$ |
| 10 | $\pm 1/8$ | $\mp 2/5$ | $1/\sqrt{5}$ | $\mp 1/\sqrt{5}$ | 0 | 1/4 | 1/4 | $\mp 9/40$ |
| $\bar{10}$ | $\pm 1/8$ | $\mp 2/5$ | $-1/\sqrt{5}$ | $\pm 1/\sqrt{5}$ | 0 | 1/4 | 1/4 | $\mp 9/40$ |
| 27 | 1/8 | 1/5 | 0 | 0 | $\mp 1/3$ | $\mp 1/12$ | $\mp 1/12$ | 7/40 |

Примечание. Верхний и нижний индексы относятся соответственно к матрицам кроссинга $s-t$ и $s-u$. Знак sa и as элементов в матрице $s-t$ -кроссинга изменен, чтобы было согласие с обычно принятым знаком констант связи мезона и парой барион—антибарион типа f .

Разумеется, при низких энергиях большое расщепление масс видоизменяет эти соотношения, но при высоких энергиях, когда внешние массы становятся несущественными, можно надеяться, что такие соотношения будут выполняться. Конечно, при этом должно аккуратно учитываться расщепление в траекториях (см. разд. 6.8 и далее). Если провести разложение, аналогичное (6.7.20), и для t -канального процесса $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$, то можно записать соотношение кроссинга [ср. (6.7.12)]:

$$A(\mu_s) = \sum_{\mu_t} M(\mu_s, \mu_t) A(\mu_t), \quad (6.7.22)$$

где $M(\mu_s, \mu_t)$ — матрица кроссинга. Пример такой матрицы приведен в табл. 6.4. Мы используем эти результаты далее.

6.8. Феноменология реджевских полюсов

Мы выяснили, что вклад реджевского полюса в t -канальную спиральную амплитуду дается выражением (6.3.7), т. е.

$$A_{H_t}^R(s, t) = -16\pi (-1)^\Lambda K_{\lambda\lambda'}(t) \gamma_\lambda(t) \gamma_{\lambda'}(t) \times \\ \times (\exp[-i\pi(\alpha - \nu)] + \xi) f_H(\alpha) \left(\frac{s-u}{2s_0}\right)^{\alpha-\mu} \xi_{\lambda\lambda'}(z_t). \quad (6.8.1)$$

Здесь величина $K_{\lambda\lambda'}(t)$, приведенная в табл. 6.1, зависит от того, присутствуют конспирации или нет, а функция $f_H(\alpha)$ зависит от того, выбирает ли траектория физические или нефизические значения, как это обсуждалось в разд. 6.3. Величина Λ определена в (Б.10), а $\xi_{\lambda\lambda'}(z_t)$ в (Б.11). Другой способ заключается в использовании выражения (6.4.9) и работе с s -канальными спиральными амплитудами. И, как обсуждалось в предыдущем разделе, поскольку реджевские полюса имеют определенные значения I, S и т. п., то между их вкладами в различные процессы, связанные $SU(2)$ - или $SU(3)$ -симметриями, должны быть определенные соотношения. Этот раздел содержит краткий обзор того, насколько хорошо эти предсказания совпадают с экспериментом. Список большого числа конкретных работ, посвященных реджевским предсказаниям для определенных процессов, можно найти в работе [123].

6.8а. Реджевское поведение

Уравнение (6.8.1) предсказывает, что при обмене одним полюсом Редже все спиральные амплитуды данного процесса будут иметь при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t асимптотическое поведение

$$A_H(s, t) \sim [(s-u)/2s_0]^{\alpha(t)} \sim [s/s_0]^{\alpha(t)} \quad (6.8.2)$$

и поэтому из (4.2.5) или (4.3.12)

$$d\sigma/dt \rightarrow F(t) (s/s_0)^{2\alpha(t)-2}, \quad (6.8.3)$$

где $F(t)$ — некоторая функция t , и из (4.2.6)

$$\sigma_{12}^{tot}(s) \sim (s/s_0)^{\alpha(0)-1}, \quad (6.8.4)$$

так что как дифференциальное, так и полное сечения должны иметь простое степенное поведение.

Эти выражения справедливы с точностью до членов ведущего порядка по s/s_0 . Поправки порядка $(s/s_0)^{\alpha(t)-1}$ могут возникать от других членов разложения $e_{\lambda\lambda}^{-\alpha-1}(z_i)$, от дочерних траекторий, пороговых поправок и т. п. Таким образом, предсказания теории Редже должны выполняться при $s \gg s_0$, где s_0 — масштабный множитель, введенный в (6.2.9). Ясно, что если бы s_0 было очень велико, то эти предсказания нельзя было бы проверить. Мы не можем вывести значение s_0 из теории (тем не менее см. разд. 7.4.), но эмпирически s_0 порядка 1 ГэВ², что согласуется с масштабом адронных масс. Поэтому реджевская теория обычно достаточно хорошо работает при $s > 10$ ГэВ² или [из (1.7.30)] при $p_L > 5$ ГэВ в случае протонной мишени, т. е. при всех энергиях выше резонансной области. Выбор $s_0 = 1$ ГэВ² имеет еще то преимущество, что это значение может быть опущено в уравнениях, но в таком случае подразумевается присутствие s_0 во всех выражениях.

6.86. Померон

Полные сечения различных процессов изображены на рис. 6.4. Хотя в некоторых случаях имеется падение сечений при низких энергиях и небольшой рост при высоких энергиях, но в широком интервале значений s они обладают замечательным постоянством. Из (6.8.4) следует, что постоянство $\sigma^{tot}(s)$ требует, чтобы $\alpha_0 \leq 1$, а все траектории, изображенные на рис. 5.4, 5.5, имеют $\alpha_0 \leq 1/2$. В упругом рассеянии $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ в t -канале имеются частица и античастица ($1 + \bar{1} \rightarrow 2 + \bar{2}$) и поэтому ясно, что обмениваемые траектории должны иметь квантовые числа вакуума, т. е. $B = Q = S = I = 0$, $P = G = C_n = \xi = +1$. f -Мезон обладает этими квантовыми числами, но, как это изображено на рис. 5.5, его траектория лежит при $t = 0$ много ниже и не может объяснить поведения полных сечений.

В истории реджевской феноменологии эта трудность была осознана довольно рано и была введена новая траектория [105], называемая помероном (или померанчоном, а также померанчуконом), для того, чтобы объяснить асимптотическое поведение $\sigma^{tot}(s)$. Так как она имеет четную сигнатуру, то вблизи $t = 0$ нет полюса, поскольку точка $\alpha_P(0) = 1$ — точка чужой сигнатуры. Четность сигнатуры означает, что вклад померона симметричен относительно замены знака $z_i \rightarrow -z_i$, т. е. $s \leftrightarrow u$ при фиксированном t [см. (2.5.3), (2.5.6)]. Теперь u -канальный процесс есть $\bar{1} + 2 \rightarrow \bar{1} + 2$, и поэтому гипотеза обмена помероном требует, чтобы при $s \rightarrow \infty$ $\sigma_{12}^{tot}(s) = \sigma_{\bar{1}2}^{tot}(s)$, и из рис. 6.4 видно, что это достаточно правдоподобно, т. е. что $\sigma_{pp}^{tot} \rightarrow \sigma_{\bar{p}p}^{tot}$, $\sigma_{K^+p}^{tot} \rightarrow \sigma_{K^-p}^{tot}$, $\sigma_{\pi^+p}^{tot} \rightarrow \sigma_{\pi^-p}^{tot}$ при $s \rightarrow \infty$. Такое равенство на основе более общих предположений было предсказано Померанчуком [337], что послужило основанием для названия этой траектории (см. работу [156], где дано обсуждение теоремы Померанчука).

Разумеется, значение $\alpha_P(0) = 1$ есть максимальная величина, разрешаемая ограничением Фруассара (2.4.10), поэтому наличие такой

высоколежащей траектории означает, что сильные взаимодействия сильны настолько, насколько это разрешается кроссингом, — т. е. унитарность «насыщена». Ясно, что то обстоятельство, что мы были вынуждены ввести траекторию, на которой как будто бы нет частиц, выглядит неудовлетворительно. Однако, как мы выясним далее (см. рис. 6.6, e), наклон этой траектории достаточно мал, $\alpha_R \approx 0,2 \text{ ГэВ}^2$,

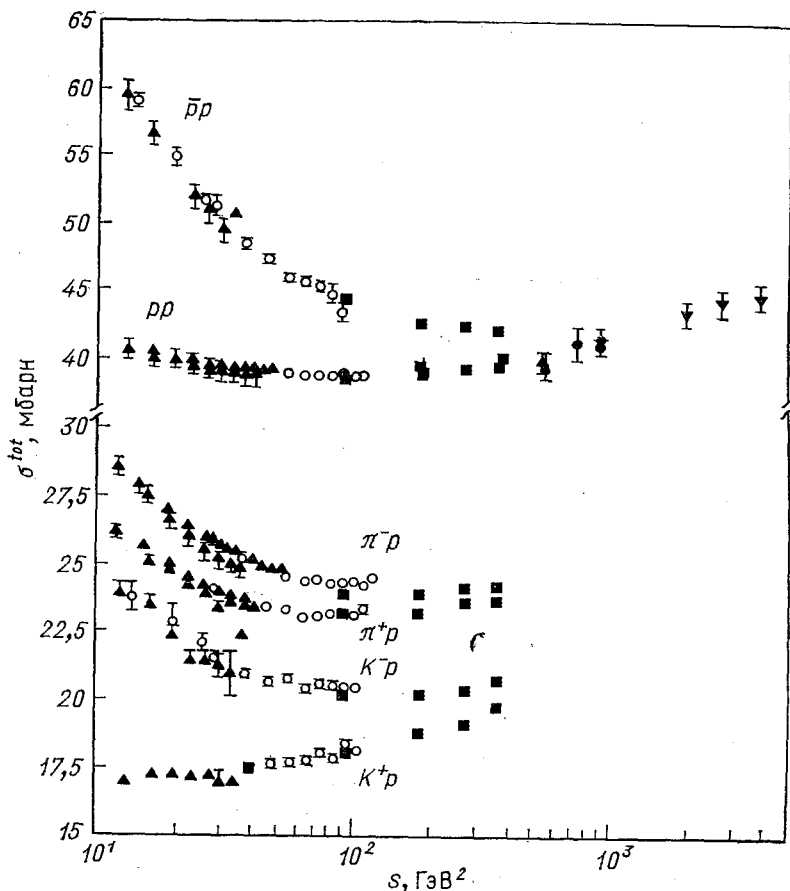


Рис. 6.4. Полные сечения рассеяния различных начальных состояний как функции s , взятые из работы [32].

Шкала \bar{s} — логарифмическая

так что частица при $\alpha(t) = 2$ должна иметь большую массу ($m^2 \approx \approx 5 \text{ ГэВ}^2$). В любом случае тот факт, что наблюдаемые $\sigma^{tot}(s)$ все еще растут при энергиях CERN ISR (что, казалось бы, требует $\alpha_R(0) > 1$), и усложнения, связанные с померонными ветвлениями (см. разд. 8.6), заставляют подозревать, что померон может быть более сложной особенностью, чем простой полюс.

Обмен помероном возможен не только в процессах упругого рассеяния, но и в так называемых квазиупругих процессах $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, где частица 3 имеет те же квантовые числа, что и частица 1, а 4 — те же, что и 2, например $\pi N \rightarrow \pi N^*(1/2)$, где $N^*(1/2)$ — барионный резонанс с $I = 1/2$, и поэтому все такие процессы должны иметь примерно постоянные полные сечения. Однако существует несколько эмпирических правил, которые ограничивают константы связи частиц с помероном.

В процессах упругого рассеяния P -полус связан только с s -канальной барионной вершиной без переворота спина, и, следовательно, в процессе $\pi N \rightarrow \pi N$ он связан с A_{++}^s , а не с A_{+-}^s [см. (4.3.10)]. Известно также, что в квазиупругих процессах, таких, как $\gamma N \rightarrow \rho^0 N$, $\gamma N \rightarrow \omega N$, $\gamma N \rightarrow \phi N$, $\pi N \rightarrow \pi N^*(1/2)$ и $NN \rightarrow NN^*(1/2)$ имеет место по крайней мере приближенное сохранение s -канальной спиральности (т. е. $\mu_1 = \mu_3$, $\mu_2 = \mu_4$). Конечно, довольно странно, что t -канальный обмен должен иметь такие простые s -канальные спиральные вершины. Однако это правило как будто нарушается в процессах $\pi N \rightarrow A_1 N$, $\pi N \rightarrow A_3 N$ и $KN \rightarrow QN$ (см., например, обзор в [282]).

Другое эмпирическое правило, так называемое правило Грибова—Моррисона [203, 311], заключается в том, что померон связан с частицами $\bar{1}\bar{3}$, только если

$$(-1)^{\sigma_1 - \sigma_3} = \eta_1 \eta_{\bar{3}}, \quad (6.8.5)$$

т. е. изменение спина в вершине связано с изменением четности частиц. Для случая бесспиновых частиц ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$) это правило следует из сохранения четности и выражения (4.6.8), т. е. $P = \eta \xi$. Поскольку для померона $P = \eta = \xi = +1$, то состояние $1\bar{3}$ должно иметь

$$P = +1 = \eta_1 \eta_{\bar{3}} (-1)^l = \eta_{1\bar{3}} (-1)^l = \eta_1 \eta_{\bar{3}} \xi = \eta_1 \eta_{\bar{3}}. \quad (6.8.6)$$

Однако для частиц со спином J не обязательно равно l , так что в этом случае всегда существуют спиральные состояния с сигнатурой и четностью померона. Но если соотношение (6.8.5) нарушается, то должно быть изменение спиральности, и поэтому из (6.4.2) следует, что амплитуды с обменом помероном будут обращаться в нуль в направлении вперед.

На практике это правило часто применяется к частицам со спином [282]. Так, известно, что в процессе $\pi N \rightarrow \pi N^* \rightarrow \pi \pi N$ образующиеся N^* имеют $L_{21,2S}$ (I — изоспин, S — спин), равные P_{11} , D_{13} , F_{15} без какой-либо примеси состояния D_{15} , которое бы нарушало правило (6.8.5). Аналогичным образом в то время как все процессы $\pi N \rightarrow A_1 N$, $KN \rightarrow QN$, $\gamma N \rightarrow \rho^0 N$ обладают обменом помероном при высокой энергии, процессы $\pi N \rightarrow A_2 N$, $KN \rightarrow K^* N$, $\gamma N \rightarrow BN$, нарушающие это правило, убывают с энергией. Однако сложность четкого отделения резонансов от событий фона и тот факт, что вторичные траектории могут приводить к убыванию сечений $\sigma(s)$ при малых s , не дают возможности с определенностью проверить это правило, и справедливость его до сих пор не ясна.

Если в данном процессе возможен обмен несколькими траекториями, то в асимптотике при данном t будет доминировать траектория с наибольшим значением $\text{Re} [\alpha(t)]$. Очевидно, что вопрос о том, насколько далеко по s нужно продвинуться, прежде чем обмен одной траекторией даст удовлетворительное приближение для амплитуды, зависит от расстояния между траекториями, от значений их вычетов и, разумеется, от величины s_0 .

Таким образом, все, что нужно сделать для данного процесса, это выяснить, какие квантовые числа возможны в t -канале, и подобрать ведущую траекторию с этими квантовыми числами из числа приведенных на рис. 5.4—5.6. Перечень лидирующих траекторий для большинства экспериментально доступных процессов приведен в табл. 6.5.

В случае обмена зарядом или изменения изоспина в одной из вершин (как при переходе $N \rightarrow \Delta$) в процессах, где в t -канале $B = S = 0$, I_t может принимать только значение, равное 1. Но если нет обмена зарядом или изменения изоспина в вершине, то $I_t = 0$ или 1. Если процесс вызван налетающими пионами ($G_\pi = -1$), то обмен в t -канале будет иметь определенную G -четность (± 1), в зависимости от G -четности конечного мезонного состояния. Но в случае взаимодействия K -мезонов, γ -квантов или барионов с барионной мишенью G -четность уже не будет сохраняющимся квантовым числом в t -канале и поэтому на нее нет ограничений. Если начальное состояние содержит псевдоскалярную частицу (π - или K -мезон) и в конечном состоянии также есть псевдоскалярный мезон, то в t -канале возможны обмены только с естественной четностью $\eta = +1$ [см. (6.8.6)]. Или, что бывает значительно реже, если конечное состояние содержит скалярный мезон (например, ϵ -мезон), то обмены должны обладать неестественной четностью $\eta = -1$. Для других комбинаций спинов четность не ограничена. В случае нейтральных γ -квантов или K_L^0 -мезонов G -четность не ограничена, а $I_t = 0$ или 1, поэтому если конечное состояние содержит нейтральный мезон, то обмен в t -канале имеет определенное значение $C_n = \pm 1$. В противном случае C_n не определена.

Для обменов, когда S и (или) $B \neq 0$ для G и C_n нет ограничений, поэтому эти правила применять гораздо проще.

Наиболее простым типом процессов является мезон-барионное рассеяние с обменом зарядом, как, например, процесс перезарядки $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$. Так как обмен в t -канале $\pi^- \pi^0 \rightarrow p\bar{n}$ обладает зарядом, то только нестранные мезоны с $I = 1$ могут давать вклад в t -канальный обмен, вершина $\pi - \pi$ ограничивает G -четность положительными значениями и четность обмена должна быть естественной. Только ρ -мезон удовлетворяет всем этим требованиям. Аналогичные замечания в приложении к реакции $\pi^- p \rightarrow \eta n$, отличающиеся тем, что η -мезон имеет положительную G -четность, приводят к тому, что возможен обмен только A_2 -траекторией. Однако для большинства процессов обмены не столь просты. Так, в реакции $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ K -мезоны не являются состояниями с определенной G -четностью, поэтому возможен обмен как ρ -, так и A_2 -траекториями, а если мезоны имеют ненулевой спин, как

Т а б л и ц а 6.5

Траектории Редже, дающие вклад в различные процессы

| Обмен | Передаваемые квантовые числа | | | | Процесс |
|----------------------------|------------------------------|-----|----------------------------|------------|--|
| | B | S | $(I)G$ | ηC_n | |
| Пучки π^\pm | | | | | |
| ρ | 0 | 0 | (1) ⁺ | + | $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ $\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Delta^{++}$ |
| A_2 | 0 | 0 | (1) ⁻ | + | $\pi^- p \rightarrow \eta p$ $\pi^+ p \rightarrow \eta \Delta^{++}$ |
| ρ, B | 0 | 0 | (1) ⁺ | \pm | $\pi^- p \rightarrow \omega p$ $\pi^+ p \rightarrow A_2^0 \Delta^{++}$ $\pi^+ p \rightarrow \omega \Delta^{++}$ |
| π, A_1 | 0 | 0 | (1) ⁻ | - | $\pi^- p \rightarrow \varepsilon n$ |
| A_2, π, A_1 | 0 | 0 | (1) ⁻ | \pm | $\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$ $\pi^- p \rightarrow f n$ $\pi^+ p \rightarrow \rho^0 \Delta^{++}$ $\pi^+ p \rightarrow f \Delta^{++}$ |
| ρ, f | 0 | 0 | (0,1) ⁺ | + | $\pi p \rightarrow \pi p$ $\pi p \rightarrow \pi N^*$ |
| ρ, B, f, n, D | 0 | 0 | (0,1) ⁺ | \pm | $\pi p \rightarrow A_2 p$ $\pi p \rightarrow A_1 p$ |
| A_2, π, A_1, ω, H | 0 | 0 | (0,1) ⁻ | \pm | $\pi p \rightarrow \rho p$ $\pi p \rightarrow B p$ $\pi p \rightarrow q p$ |
| K^*, K^{**} | 0 | 1 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | + | $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$ $\pi p \rightarrow K \Sigma$ |
| K^*, K^{**}, K, Q | 0 | 1 | (1/2) | \pm | $\pi p \rightarrow K^* \Lambda$ $\pi p \rightarrow K^* \Sigma$ |
| N | 1 | 0 | (1/2) | \pm | $\pi^- p \rightarrow n \eta$ |
| Δ | 1 | 0 | (3/2) | \pm | $\pi^- p \rightarrow p \pi^-$ $\pi^- p \rightarrow \rho \rho^-$ |
| N, Δ | 1 | 0 | (1/2, 3/2) | \pm | $\pi \rho \rightarrow \pi \rho$ $\pi \rho \rightarrow \rho \rho$ $\pi \rho \rightarrow \Delta \pi$ |
| Σ | 1 | -1 | (1) | \pm | $\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0$ $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$ |
| Пучки K^\pm | | | | | |
| ρ, A_2 | 0 | 0 | (1) | + | $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ $K p \rightarrow K \Lambda$ |

| Обмен | Передаваемые квантовые числа | | | | Процесс |
|---|------------------------------|-----|---|------------|---|
| | B | S | $(I)^G$ | ηC_n | |
| ρ, A_2, B, π, A_1 | 0 | 0 | (1) | \pm | $K^- p \rightarrow K^{*0} n$ $K^- p \rightarrow K^{*0} n$ $K\rho \rightarrow K^* \Delta$ |
| ρ, A_2, f, ω | 0 | 0 | (0,1) | $+$ | $K\rho \rightarrow K\rho$ |
| $\rho, A_2, B, \pi, A_1, f, \omega, \eta, H, D$ | 0 | 0 | (0,1) | \pm | $K\rho \rightarrow K^* p$ $K\rho \rightarrow K^{**} p$ $K\rho \rightarrow Q\rho$ |
| K^*, K^{**} | 0 | 1 | (1/2) | $+$ | $K\rho \rightarrow \pi\Lambda$ $K\rho \rightarrow \pi\Sigma$ $K^- p \rightarrow \eta\Lambda$ $K\rho \rightarrow \eta\Sigma$ $K^- p \rightarrow \eta' \Lambda$ $K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^{*+}$ |
| $K^* K^{**}, K, Q$ | 0 | 1 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | $+$ | $K\rho \rightarrow \rho\Lambda$ $K^- p \rightarrow \omega\Lambda$ $K^- p \rightarrow \varphi\Lambda$ $K\rho \rightarrow \rho\Sigma$ $K^- p \rightarrow \omega\Sigma^0$ $K^- p \rightarrow \varphi\Sigma^0$ |
| N | 1 | 0 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | \pm | $K\rho \rightarrow \Lambda\pi$ $K^- p \rightarrow \Lambda n$ |
| N, Δ | 1 | 0 | $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ | \pm | $K^- n \rightarrow \Sigma^0 p^-$ |
| Λ, Σ | 1 | -1 | (0,1) | \pm | $K\rho \rightarrow pK$ $K\rho \rightarrow K$ |
| Экзотические | | | | | |
| Пучок ρ | | | | | |
| ρ, A_2, B, π, A_1 | 0 | 0 | (1) | \pm | $\rho n \rightarrow n\rho$ $\rho\rho \rightarrow \rho\Delta$ $\rho\rho \rightarrow \Delta\Delta$ $\rho\rho \rightarrow \rho\rho$ |
| $\rho, A_2, B, \pi, A_1, f, \omega, \eta, H, d$ | 0 | 0 | (0,1) | \pm | $\rho\rho \rightarrow \rho\rho$ |
| N, Δ | 1 | 0 | $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ | \pm | $\rho\rho \rightarrow \pi D$ $\rho\rho \rightarrow \rho D$ |
| Пучок \bar{p} | | | | | |

| Обмен | Передаваемые квантовые числа | | | | Процесс |
|---|------------------------------|-----|---|------------|---|
| | B | S | $(I)^G$ | ηC_n | |
| ρ, A_2, B, π, A_1 | 0 | 0 | (1) | \pm | $\bar{p}p \rightarrow \bar{n}n$ $\bar{p}n \rightarrow \bar{\Delta}^{++} p$ $pp \rightarrow \bar{\Delta}\Delta$ $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$ |
| $\rho, A_2, B, \pi, A_1, f, \omega, \eta, H, D$ | 0 | 0 | (0,1) | \pm | $\bar{p}p \rightarrow \bar{\Lambda}\Lambda$ $\bar{p}p \rightarrow \bar{\Lambda}\Sigma_0$ $\bar{p}p \rightarrow \bar{\Sigma}\Sigma$ |
| K^*, K^{**}, K, Q | 0 | 1 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | \pm | $\bar{p}p \rightarrow \pi^- \pi^+$ |
| N, Δ | 1 | 0 | $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ | \pm | $\bar{p}p \rightarrow K^+ K^-$ |
| Λ, Σ | 1 | -1 | (0,1) | \pm | $\bar{p}p \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Sigma^-$ |
| Экзотические | | | | | |
| Пучок Λ | | | | | |
| f, ω, η, H, D | 0 | 0 | (0) | \pm | $\Lambda p \rightarrow \Lambda p$ |
| Пучок γ | | | | | |
| ρ, A_2, B, π, A_1 | 0 | 0 | (1) | \pm | $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ $\gamma p \rightarrow A_1^+ n$ $\gamma p \rightarrow \pi^- \Delta^{++}$ |
| ρ, B, ω, H | 0 | 0 | (0,1) | \pm | $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ $\gamma p \rightarrow \eta p$ |
| $A_2, \pi, A_1, f, \eta, D$ | 0 | 0 | (0,1) | \pm | $\gamma p \rightarrow \rho^0 p$ $\gamma p \rightarrow \omega p$ $\gamma p \rightarrow \varphi p$ |
| $A_2, \pi, A_1, f, \eta, D$ | 0 | 0 | (0,1) | \pm | $\gamma p \rightarrow \gamma p$ |
| K^*, K^{**}, K, Q | 0 | 1 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | \pm | $\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda$ $\gamma p \rightarrow K^{**} \Lambda$ |
| N | 1 | 0 | $\left(\frac{1}{2}\right)$ | \pm | $\gamma p \rightarrow \Delta \eta$ |
| N, Δ | 1 | 0 | $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ | \pm | $\gamma p \rightarrow \pi \pi^+$ $\gamma p \rightarrow p \pi^0$ $\gamma p \rightarrow \Delta^{++} \pi^-$ |
| Пучок K^0 | | | | | |
| ρ, ω | 0 | 0 | (0,1) | $+$ | $K_L^0 p \rightarrow K_S^0 p$ |

в случае реакции $\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$, то естественность в t -канале не ограничена, и поэтому наряду с π -обменом разрешен также обмен A_2 -траекторией.

Запомнив приведенные выше правила, читатель без труда проверит табл. 6.5. Однако там приведены только лидирующие траектории с

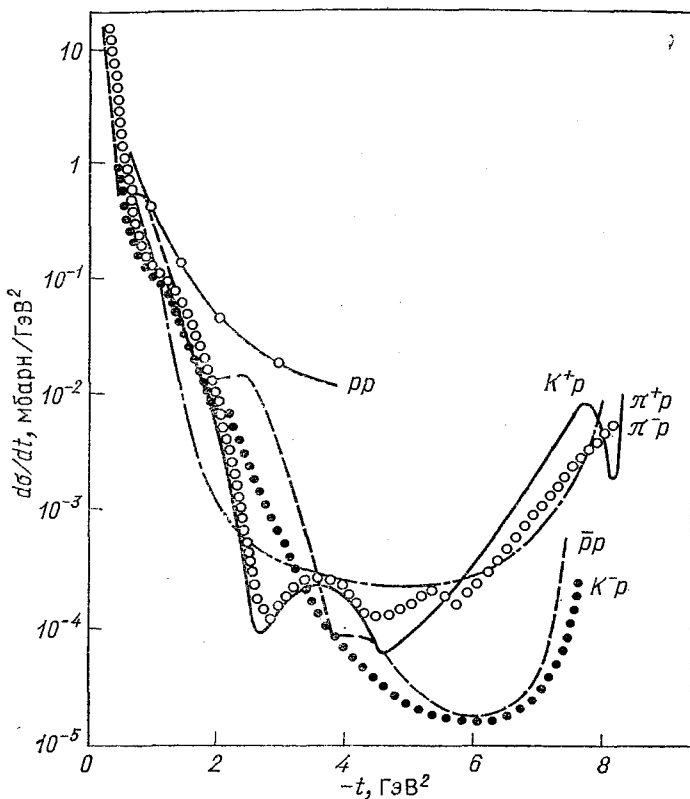


Рис. 6.5. Дифференциальные сечения упругого рассеяния различных процессов при 5 ГэВ

данными квантовыми числами, а в действительности должны присутствовать как вторичные или дочерние обмены ρ' , A_2' , так и реджевские разрезы (для f -полюса читай f и P).

Появление реджевских полюсов в t - (или u -) канале должно приводить к появлению пика в дифференциальном сечении вблизи направления вперед (или назад). На рис. 6.5 приведены экспериментальные данные по упругому K^+p -рассеянию. Вблизи направления вперед виден эффект t -канальных полюсов: P , f , ω , ρ и A_2 , в то время как u -канал K^+p -рассеяния обладает квантовыми числами Λ - и Σ -барионов, и поэтому существует меньший по амплитуде пик назад. Однако для

реакции $K^-p \rightarrow K^-p$ u -каналом является процесс $K^+p \rightarrow K^+p$, обладающий экзотическими квантовыми числами, и поэтому в этом канале нет обмена реджеонами (если не существует предполагаемой Z -частицы — см. [327]) и поэтому ожидаемый пик назад сильно подавлен.

Этот тип корреляций между присутствием пиков вперед и назад в $d\sigma/dt$ и существованием неэкзотических квантовых чисел (и, следовательно, известных траекторий) в перекрестном канале дает прекрасное подтверждение того, что обмен частицами является посредником в сильных взаимодействиях.

6.8г. Эффективная траектория

Из выражения (6.8.3) следует

$$\ln(d\sigma/dt) = (2\alpha(t) - 2) \ln(s/s_0) + \ln[F(t)], \quad (6.8.7)$$

и поэтому, изображая $\ln(d\sigma/dt)$ в зависимости от $\ln s$ при фиксированном t , можно определить «эффективную траекторию» для этого процесса. При достаточно высокой энергии эффективная траектория должна соответствовать лидирующей траектории для данного процесса (от-

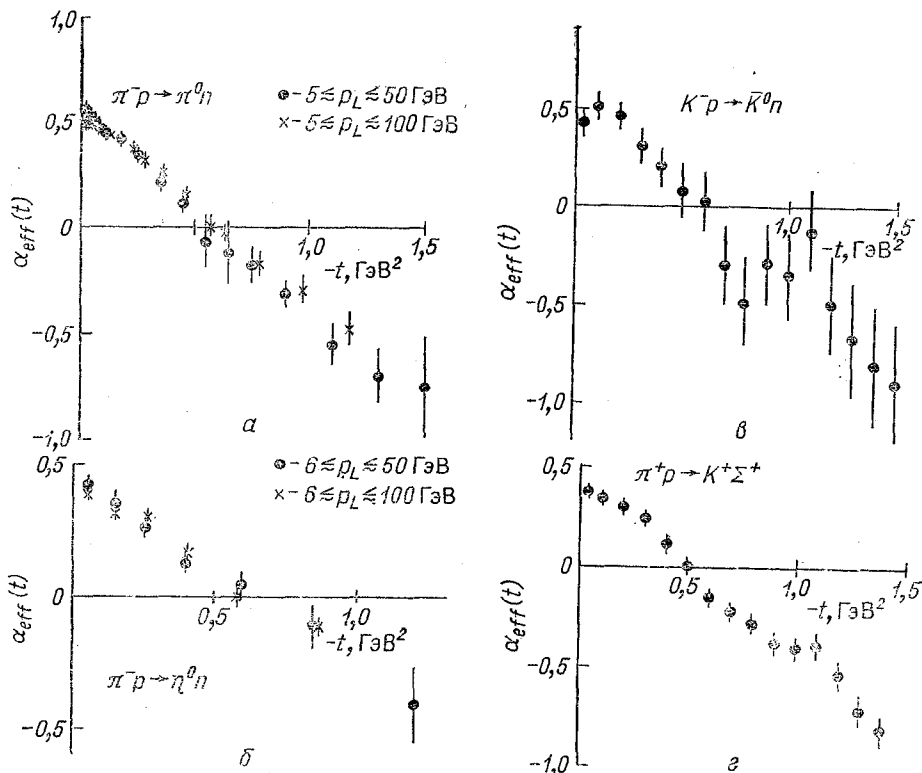
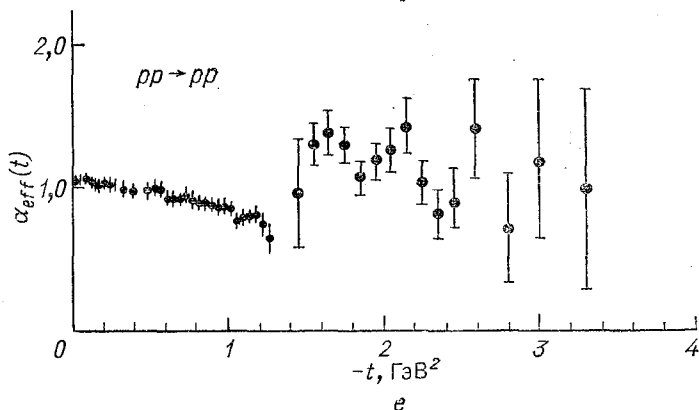
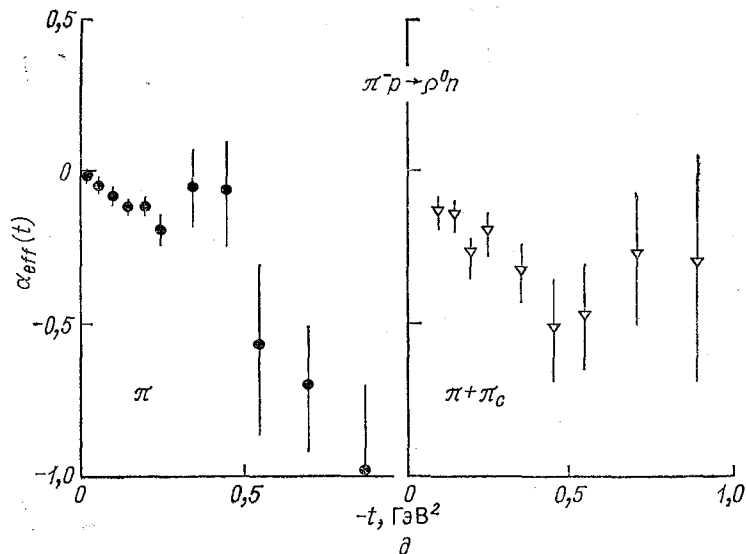


Рис. 6.6. Эффективные траектории для различных Траектории: а — ρ -обмен; б — A_2 -обмен; в — $\rho + A_2$ -обмен;

влекаясь от усложнений, обусловленных реджевскими полюсами и т. п. — см. гл. 8). На рис. 6.6 показаны эффективные траектории, полученные из (6.8.7) для некоторых процессов, где имеются хорошие экспериментальные данные при высоких энергиях и есть основание надеяться, что обмен одной траекторией дает удовлетворительное описание.

Очевидно, что в рамках экспериментальных погрешностей эти эффективные траектории являются прямыми линиями и достаточно хорошо согласуются с траекториями, которые получены из масс резонансов на рис. 5.4 и 5.5. Это замечательный успех реджевской теории. Он даже может казаться слишком хорошим, потому что можно было ожи-



процессов, полученные из формулы (6.8.7) — g — $K^* + K^{*}$ -обмены); d — π -обмен, e — P -обмен

дать непрямоллинейных траекторий и эффектов интерференции с ветвлениями.

В разд. 2.8 мы отмечали, что обмен элементарной частицей должен приводить к определенному степенному поведению, $A \sim s^\sigma$, где σ — спин частицы, не зависящий от t . Такие постоянные степени не наблюдаются даже для обмена стабильными частицами — пионом и нуклоном, которые раньше казались наилучшими кандидатами на роль элементарных обменов. Поэтому более правильно сделать вывод, что все адроны являются реджеонами, т. е. лежат на траекториях Редже.

На рис. 6.6, δ показана также эффективная траектория P -полоса, полученная из упругого pp -рассеяния при высоких энергиях. Получено, что

$$\alpha_P^{eff}(t) \simeq 1,08 + 0,2t, \quad (6.8.8)$$

для $|t| < 1,4 \text{ ГэВ}^2$, т. е. траектория имеет малый наклон, но ее пересечение лежит выше единицы, очевидным образом нарушая ограничение Фруассара. Мы будем обсуждать эту проблему дальше в разделе 8.7а.

6.8д. Сужение конуса

Поскольку $d\sigma/dt$ для малых $|t|$ во многих процессах падает, грубо говоря, экспоненциально (см., например, рис. 6.5), то можно аппроксимировать вычет экспонентой, так что (6.8.1) принимает вид

$$A(s, t) \approx G \exp(\alpha t) (s/s_0)^{\alpha(t)}, \quad (6.8.9)$$

где траектория примерно линейна:

$$\alpha(t) = \alpha^0 + \alpha' t, \quad (6.8.10)$$

что приводит к

$$A(s, t) \approx G (s/s_0)^{\alpha^0} \exp \{ [a + \alpha' \ln(s/s_0)] t \}. \quad (6.8.11)$$

Таким образом, если мы определим ширину пика вперед по t следующим образом:

$$\Delta t = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\sigma}{\sigma t} \right) / \frac{d\sigma}{dt} \right)^{-1},$$

то получим

$$\Delta t = [2(a + \alpha' \ln(s/s_0))]^{-1}, \quad (6.8.12)$$

подставляя (6.8.11) в (4.3.12). Поэтому при возрастании $\ln s$ Δt убывает, т. е. реджевская теория предсказывает, что ширина пика вперед будет убывать при возрастании s . Этот эффект может быть обнаружен при внимательном изучении рис. 6.1, на котором экспериментальные данные при низких энергиях обладают несколько более широким пиком, чем при высоких энергиях (при малых t). Это сужение пика и дает наклоны эффективных траекторий на рис. 6.6.

Из обсуждения в разд. 2.4 можно интерпретировать это сужение как увеличение эффективных размеров мишени, но поскольку сечение не возрастает, то ясно, что при возрастании энергии мишень становится все более прозрачной. Хотя эти предсказания реджевской теории

кажутся довольно удивительными с оптической точки зрения, к настоящему времени они хорошо проверены в большом количестве процессов.

В случае $\alpha_p(0) = 1$ получаем из (6.8.11) и (1.8.16) для упругого дифференциального сечения следующее выражение:

$$(d\sigma/dt)^{el} \rightarrow (1/16 \pi) G_p^2 \exp \{2 [a + \alpha_p' \ln (s/s_0)] t\}$$

и поэтому

$$\sigma_{12}^{el}(s) = \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{dt} dt \rightarrow \frac{1}{16\pi} \frac{G_p^2}{2 [a + \alpha_p' \ln (s/s_0)]}, \quad (6.8.13)$$

в то время как из (1.9.6) $\sigma_{12}^{tot}(s) \rightarrow G_p$ и, следовательно, $\sigma_{12}^{el}/\sigma_{12}^{tot} \sim \sim (\ln s)^{-1}$. Таким образом, из-за сужения конуса при $\ln s \rightarrow \infty$ упругое сечение является убывающей частью полного сечения.

6.8e. Соотношение между фазой и энергией

Поскольку, как предполагалось, траектории и вычеты ниже порога являются действительными функциями (за исключением случая, когда траектории пересекаются — см. разд. 3.2), то фаза амплитуды, отвечающей обмену реджевским полюсом (6.8.1), дается полностью сигнатурным множителем $\exp \{-i\pi (\alpha(t) - \nu)\} + \xi$, и поэтому фаза φ связана с энергетической зависимостью $\alpha(s)$ следующим образом:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\operatorname{Re} A}{\operatorname{Im} A} = \rho = - \frac{\cos \pi (\alpha(t) - \nu) + \xi}{\sin \pi (\alpha(t) - \nu)}. \quad (6.8.14)$$

Часто удобно переписать сигнатурный множитель следующим образом (в случае $\nu = 0$):

$$\begin{aligned} \exp(-i\pi\alpha) + \xi &= \exp(-i\pi\alpha/2) [\exp(-i\pi\alpha/2) + \xi \exp(i\pi\alpha/2)] = \\ &= \begin{cases} \pm \exp(-i\pi\alpha/2) 2 \cos(\pi\alpha/2) & \text{при } \xi = +1 \\ -i \exp(-i\pi\alpha/2) 2 \sin(\pi\alpha/2) & \text{при } \xi = -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.8.15)$$

(фазовый множитель здесь явно выделен).

Можно определить фазу спиральной амплитуды без переворота спина при $t = 0$ либо измерением

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{tot}(s) &\sim \operatorname{Im} \{A_{12}^{el}(s, 0)\}; \\ d\sigma/dt (12 \rightarrow 12) &\sim (\operatorname{Re} A_{12}^{el})^2 + (\operatorname{Im} A_{12}^{el})^2 \end{aligned}$$

(но $d\sigma/dt$ должно быть экстраполировано в точку $t = 0$ из области конечных отрицательных значений t , где оно может быть измерено), либо наблюдением интерференции между адронной амплитудой рассеяния и известной кулоновской амплитудой (см., например, [155]). На рис. 6.7 показаны экспериментальные данные по отношению ρ при $t = 0$ для упругого pp -рассеяния в сравнении с предсказаниями подгонки, учитывающей только реджевские полюса [125], к $\sigma_{tot}(pp)$ и $\sigma_{tot}(pp)$ и использующей только ведущие P -, f - и ω -траектории [$\alpha_p(0) > 1$]. Очевидно, что согласие достаточно хорошее.

Однако на самом деле это обстоятельство подтверждает не столько реджевскую теорию, сколько степенное поведение $\text{Im } A_{1/2}^{e'l}$ и справедливость дисперсионных соотношений. Так, например, если записать дисперсионное соотношение с одним вычитанием для амплитуды при s выше порога [из (1.10.7)]

$$\text{Re } A(s, t) = \frac{s}{\pi} P \int_{s_T}^{\infty} \frac{\text{Im } A(s', t)}{(s' - s) s'} ds' + \frac{s}{\pi} \int_{t_T}^{-\infty} \frac{\text{Im } A(s', t)}{(s' - s) s'} ds' \quad (6.8.16)$$

(где P — главное значение) и если $\text{Im } A(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$ и $\sim (-s)^{\alpha(t)}$, то тогда, поскольку [161]

$$\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} s'^{\alpha-1} = -s^{\alpha-1} \text{ctg}(\pi\alpha);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} s'^{\alpha-1} = -s^{\alpha-1} \text{cosec}(\pi(\alpha - 1)), \quad (6.8.17)$$

из (6.8.16) получаем при $s \rightarrow \infty$

$$\text{Re } A(s, t) / \text{Im } A(s, t) \sim -(\text{ctg}(\pi\alpha) + \xi \text{cosec}(\pi\alpha)) \quad (6.8.18)$$

в согласии с (6.8.14) (для случая $v = 0$). Этот результат основан на числе вычитаний. Из (6.8.17) ясно, что когда $\alpha_{\text{eff}} < 1$, то можно ожидать

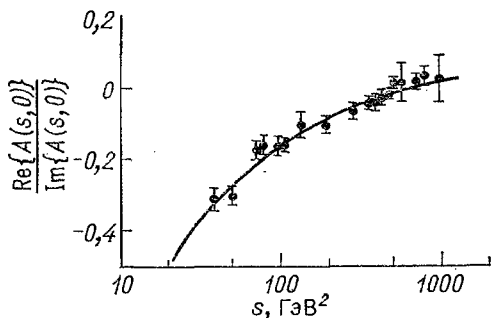


Рис. 6.7. Данные по отношению $\text{Re}\{A(s, 0)\} / \text{Im}\{A(s, 0)\}$ для pp -рассеяния в сравнении с описанием, учитывающим реджевские полюса [121]

$\rho < 0$, но когда полное сечение растет, так что α_{eff} , то ρ должно становиться положительным, что и происходит в случае, изображенном на рис. 6.7.

В общем случае нельзя определить абсолютные фазы амплитуд рассеяния, но могут быть определены относительные фазы различных амплитуд. Например, в случае процесса $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ поляризация определяется выражением (4.2.22) и поэтому зависит от разности фаз между спиральными амплитудами с переворотом и без переворота спина. Один только ρ -полюс приво-

дит к одинаковой фазе (6.8.14) (при $v = 0$, $\xi = -1$) обеих амплитуд, и поэтому при обмене только ρ -полюсом поляризация будет обращаться в нуль. На опыте наблюдается малая, но не нулевая (20—30%) поляризация при низких энергиях (< 10 ГэВ), указывающая на то, что в дополнение к ρ -полюсу существуют еще и другие вклады в амплитуду, связанные, возможно, с разрезами или с вторичной ρ' -траекторией. Примеры дальнейших предсказаний фаз, основанные на реджевской теории, будут обсуждаться дальше.

6.8ж. Факторизация и перекрестный канал

Несвязность S -матрицы дает основания ожидать, что вычеты в полюсах Редже будут факторизоваться на вклады от каждой вершины [см. (4.7.15)], так что для t -канального реджевского полюса (рис. 6.8)

$$\beta_{12 \rightarrow 34}^R(t) = \beta_{13}^R(t) \beta_{24}^R(t). \quad (6.8.19)$$

В разд. 6.2 и 6.3 мы выяснили, что это соотношение накладывает существенные ограничения на вычеты спиральных амплитуд.

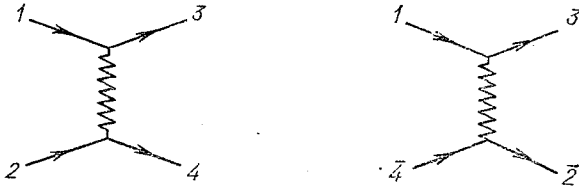


Рис. 6.8. Процессы, связанные соотношением кроссинга

В процессах, где доминирует обмен одной реджевской траекторией, факторизация приводит к соотношениям типа

$$(d\sigma/dt)_{12 \rightarrow 34} = (d\sigma/dt)_{11 \rightarrow 33} (d\sigma/dt)_{22 \rightarrow 44}, \quad (6.8.20)$$

но, к сожалению, такие соотношения довольно сложно проверить непосредственно, потому что все процессы адронного рассеяния происходят на нуклонной мишени. Но одно такое соотношение выполняется довольно хорошо [39, 175, 176], в соответствии с современными экспериментальными данными:

$$\frac{d\sigma/dt (NN \rightarrow NN)}{d\sigma/dt (\pi N \rightarrow \pi N)} = \frac{d\sigma/dt (NN \rightarrow NN^*)}{d\sigma/dt (\pi N \rightarrow \pi N^*)},$$

где N^* — любой барионный резонанс с $I = 1/2$, такой, что возможен обмен P -полюсом. Наилучшие прямые проверки факторизации могут быть получены в инклюзивных реакциях (см. гл. 10), в которых участвует большое количество разнообразных вершин.

Другим важным следствием факторизации является симметрия перекрестных каналов. Очевидно, что если нижнюю часть диаграммы с обменом в t -канале для процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ повернуть, как показано на рис. 6.8, то s заменится на u и получится процесс $1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3$, который должен иметь те же самые обмены реджевскими полюсами с теми же самыми константами связи, за исключением того, что у обменов с отрицательной сигнатурой, которые нечетны относительно замены $s \leftrightarrow u$, изменится знак (см. разд. 2.5).

Так, например, процессы $K^+p \rightarrow \pi^- \Sigma^+$ и $\pi^+p \rightarrow K^+ \Sigma^+$ различаются только поворотом вершины $K^- \pi$. В t -канале возможен обмен только странными мезонами с естественной четностью K^* (890) и

K^{**} (1400) (см. табл. 6.5), первый из которых имеет спин 1 и, следовательно, нечетную сигнатуру, а второй спин 2 и четную сигнатуру. Поэтому реджевские обмены для этих процессов могут быть записаны как $K^{**} \pm K^*$ соответственно. Таким образом могут быть определены только относительные знаки вкладов, а сами члены имеют фазы, определяемые (6.8.14). Аналогично процесс упругого рассеяния $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$ отличается от процесса $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ только поворотом верхней вершины, поэтому эти процессы обладают обменами $P + f \pm \rho$ соответственно, с одинаковыми вершинами. Равенство этих процессов при $s \rightarrow \infty$, когда доминирует P -полюс, есть теорема Померанчука из разд. 6.8б.

Существуют, однако, некоторые серьезные противоречия с гипотезой факторизации. Например, нуль в амплитуде с обменом ρ -полюсом $A_{+-}(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)$ при $|t| \approx 0,55 \text{ ГэВ}^2$, который, как обсуждалось в разд. 6.3, мог бы быть вызван нефизическим множителем, должен появляться также и в процессе $\gamma p \rightarrow \eta p$, в котором также доминирует ρ -обмен. Однако в этом процессе нет никаких признаков нуля и это дает основание полагать, что минимуму в дифференциальном сечении процесса $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ может быть обусловлен не только свойствами одного ρ -полюса, но может быть связан также и с разрезами (см. разд. 8.7в). В общем случае разрезы не обладают свойством факторизации, поэтому успех факторизации дает некоторые указания на пределы, в которых доминируют обмены полюсами. Конечно же, сумма полюсов также не факторизуется, поэтому, чтобы провести такие проверки, необходимо выделить обмен единственным полюсом Редже.

6.8з. Обменное вырождение

В разд. 5.3 отмечали, что траектории часто объединяются в приближенно обменно-вырожденные пары, как, например, ρ - и A_2 -траектории на рис. 5.4 и 6.6, которые выглядят как единственная траектория с $B = S = 0$, $I = 1$, $\xi = +1$, частицы на которой обладают $P = (-1)^J$, $C_n = (-1)^J$, $G = (-1)^{J+1}$ в каждой положительной целой точке J . Это так называемое «слабое обменное вырождение» хорошо выполняется для ведущих мезонных траекторий (исключая померон) и для странных барионных обменов и несколько хуже для нестранных барионов. Из (4.5.7) очевидно, что если амплитуды с обеими сигнатурами содержат ту же траекторию, то положение траектории не зависит от u -канального скачка на разрезе (или от «обменных сил»).

Если бы u -канальные силы не давали вклада и в вычетах траекторий, то и вычеты были бы тоже обменно вырождены. Это называется «сильным обменным вырождением». Отсутствие u -канального вклада кажется довольно удивительным, но в следующей главе будут указаны теоретические причины, по которым оно может иметь место. В этом случае траектории должны выбирать нефизические значения, т. е. не иметь связи с амплитудой в нефизических точках. Это можно увидеть, рассматривая, например, A_2 - и f -траектории, для которых во всех вычетах при $\alpha = 0$ нужны множители, уничтожающие духовые состояния, чтобы избежать появления частиц с отрицательными m^2 . А если они обмен-

но вырождены с ρ - и ω -траекториями соответственно, то и эти траектории должны иметь нули в вычетах, хотя $\alpha = 0$ является для них точкой чужой сигнатуры, и поэтому они выбирают нефизические значения (см. табл. 6.2).

Это сильное обменное вырождение имеет то важное следствие, что если данный процесс описывается суммой двух таких обменно-вырожденных траекторий, то амплитуда его пропорциональна

$$\beta_H \{ \{ \exp[-i\pi(\alpha - \nu)] + \xi \} + \{ \exp[-i\pi(\alpha - \nu)] - \xi \} \} = \\ = 2\beta_H^{\text{пр}} \exp[-i\pi(\alpha - \nu)], \quad (6.8.21)$$

а если процесс описывается разностью, то получаем

$$\beta_H \{ \{ \exp[-i\pi(\alpha - \nu) + \zeta] \} - \{ \exp[-i\pi(\alpha - \nu)] - \zeta \} \} = 2\beta_H \quad (6.8.22)$$

Модули выражений (6.8.21) и (6.8.22) одинаковы, но последнее выражение чисто вещественно, в то время как первое имеет фазу, которая меняется при изменении $\alpha(t)$.

Это соотношение должно выполняться для процессов, связанных соотношением кроссинга. Так, например, процессы $K^+n \rightarrow K^0p$ и $K^-p \rightarrow \bar{K}^0n$ описываются $A_2 \pm \rho$ -полюсами соответственно, так же как процессы $K^+p \rightarrow K^0\Delta^{++}$ и $K^-n \rightarrow \bar{K}^0\Delta^-$, в то время как реакции $K^-p \rightarrow \pi^0\Lambda$ и $\pi^-p \rightarrow K^0\Lambda$, а также $K^-p \rightarrow \pi^-\Sigma^+$ и $\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^-$ определяются $K^{**} \pm K^*$ -полюсами. Поэтому если имеет место сильное обменное вырождение, то мы бы ожидали, что первая реакция в каждой паре имеет амплитуду с постоянной фазой, а вторая — амплитуду с меняющейся фазой, а их модули одинаковы. Для случая первой пары равенство достигается при энергиях выше 5 ГэВ, а для других процессов ситуация менее ясна [247] отчасти из-за неопределенностей в нормировке экспериментальных данных. Однако из-за других вкладов, помимо вклада лидирующих траекторий (а они нужны, чтобы объяснить ненулевую наблюдаемую на опыте поляризацию), и не ожидается, что эти соотношения будут точно выполняться. Если бы (6.8.21) и (6.8.22) выполнялись точно, то все спиральные амплитуды данного процесса имели бы одинаковую фазу, что приводило бы к нулевой поляризации.

6.8и. Соотношения внутренней симметрии

Так как мы предполагаем, что изоспиновая $SU(2)$ -инвариантность сильных взаимодействий выполняется точно, то между амплитудами перехода между различными зарядовыми состояниями имеется большое число соотношений. Так, для процессов типа $\pi N \rightarrow \pi\Delta$ все различные зарядовые комбинации, такие, как $\pi^+p \rightarrow \pi^+\Delta^+$, $\pi^+p \rightarrow \pi^0\Delta^{++}$, $\pi^-p \rightarrow \pi^0\Delta^0$ и т. д. описываются одной и той же амплитудой ρ -обмена с $I_t = 1$ и равны с точностью до коэффициентов Клебша—Гордана. Поэтому удобно анализировать их все сразу и именно по этой причине во многих случаях в табл. 6.5 ряды не определены.

Из (6.7.9) и (6.7.10) получаем

$$\langle \pi^0 n | A | \pi^- p \rangle = (1/\sqrt{2}) (\langle \pi^+ p | A | \pi^+ p \rangle - \langle \pi^- p | A | \pi^- p \rangle). \quad (6.8.23)$$

Это означает, что ρ -обмен, который доминирует в процессах перезарядки, должен вследствие оптической теоремы (4.2.6) описывать энергетическую зависимость разностей полных сечений, изображенных на рис. 6.4, т. е.

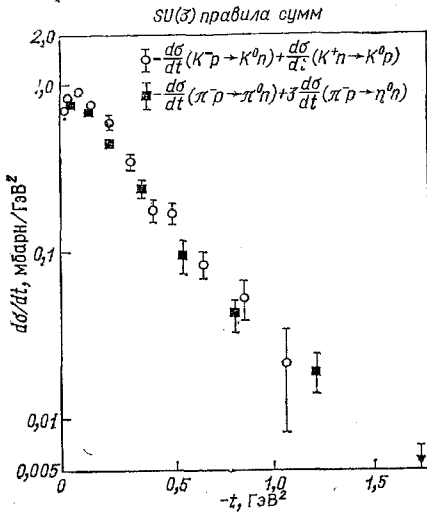
$$\Delta \sigma^{tot}(\pi p) \equiv \sigma_{\pi^- p}^{tot} - \sigma_{\pi^+ p}^{tot} \sim (s/s_0)^{\alpha_\rho(0)-1}. \quad (6.8.24)$$

Это соотношение хорошо выполняется и приводит к величине $\alpha_\rho(0)$, которая согласуется с рис. 6.6. Аналогичные соотношения, такие, как, например,

$$\langle K^0 n | A | K^- p \rangle = \langle K^- p | A | K^- p \rangle - \langle K^- n | A | K^- n \rangle, \quad (6.8.25)$$

могут быть получены для многих процессов. Это означает, что прежде чем подгонять экспериментальные данные по упругому рассеянию, полезно получить информацию об обменах с $I_t = 1$, проанализировав данные по перезарядке.

Рис. 6.9. Проверка соотношения (6.8.26) при 6 ГэВ [32]



Последующие интересные соотношения получаются из приближенной инвариантности относительно $SU(3)$. Так как эта симметрия сильно нарушается массами частиц, то расщепление траекторий часто приводит к совершенно различному поведению процессов, связанных соотношением $SU(3)$ -симметрии. В некоторых случаях траектории совпадают из-за обменного вырождения. Так, например, ряд реакций перезарядки $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ (ρ -обмен), $\pi^- p \rightarrow \eta n$ (A_2 -обмен), $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ ($A_2 + \rho$ -обмен), $K^+ n \rightarrow K^0 p$ ($A_2 - \rho$ -обмен) описываются одной и той же обменно-вырожденной $\rho - A_2$ -траекторией с одним и тем же вычетом в случае, если обменное вырождение сильное. Все мезоны, входящие в эти процессы, принадлежат к одному и тому же $SU(3)$ -октету, и поэтому если $SU(3)$ выполняется для вычетов точно, то получается соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) + 3 \frac{d\sigma}{dt}(\pi^- p \rightarrow \eta n) &= \frac{d\sigma}{dt}(K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n) + \\ &+ \frac{d\sigma}{dt}(K^+ n \rightarrow \bar{K}^0 p) \end{aligned} \quad (6.8.26)$$

(предполагается, что $\eta \approx \eta_8$), которое достаточно хорошо выполняется экспериментально (рис. 6.9). Если образуются частицы с более высокими спинами, то для того, чтобы проверить равенства такого

типа, необходимо ввести специальную матрицу плотности и тогда может быть получено, например, соотношение

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d\sigma}{dt} (\pi^- p \rightarrow \rho^0 n) + \rho \frac{d\sigma}{dt} (\pi^- p \rightarrow \omega^0 n) = \\ & = \rho \frac{d\sigma}{dt} (K^- p \rightarrow K^{*0} n) + \rho \frac{d\sigma}{dt} (K^+ n \rightarrow K^{*0} p), \end{aligned} \quad (6.8.27)$$

которое должно выполняться для любой матрицы плотности ρ , в предположении, что для вычетов октета векторных мезонов выполняется точная $SU(3)$ -симметрия с идеальным ω — ϕ -смешиванием и что ρ - и A_2 -траектории сильно обменно вырождены. Это соотношение также хорошо выполняется экспериментально [32].

Эти предсказания, основанные на $SU(3)$ -симметрии, выполняются с погрешностью $\sim 10\%$ для всех спиральных амплитуд и разностей полных сечений (хотя можно было бы ожидать во многих процессах существенных дополнительных вкладов от реджевских разрезов). Поэтому кажется, что $SU(3)$ -симметрия выполняется много лучше для реджевских вычетов, чем для масс частиц.

6.8к. Минимумы и максимумы в рассеянии вперед

В разд. 6.4 мы выяснили, что s -канальные спиральные амплитуды обладают при $t = 0$ кинематическим поведением (6.4.2), т. е.

$$A_{H_s} \sim (t)^{n/2}, \quad \text{где } n = \left| |\mu_1 - \mu_2| - |\mu_3 - \mu_4| \right|. \quad (6.8.28)$$

Реджевский полюс без конспираций приводит вследствие соотношений факторизации и ограничений, налагаемых четностью, к выражению

$$A_{H_s} \sim (-t)^{m/2},$$

где $m = |\mu_1 - \mu_3| + |\mu_2 - \mu_4|$.
(6.8.29)

Поэтому если рассмотреть, например, процесс $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, в котором, между прочим, возможен обмен π -траекторией, так как $\mu_\gamma = \pm 1$ и $\mu_\pi = 0$, то все спиральные амплитуды должны в соответствии с (6.8.29) обращаться в нуль, но благодаря (6.8.28) спиральная амплитуда с $|\mu_3 - \mu_4| = |\mu_1 - \mu_2|$ не будет обращаться в нуль. В действительности, как указано в табл. 6.6, дифференциальное сечение вперед имеет пик шириной $\Delta t \sim m_\pi^2$.

Таблица 6.6

Процессы с минимумами и пиками вблизи $t=0$, обусловленные π -обменом

| Процесс | Структура |
|--|-----------|
| $\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$ | Минимум |
| $\pi^+ n \rightarrow \rho^0 p$ | « |
| $\pi^\pm p \rightarrow \rho^\pm p$ | « |
| $\pi^+ p \rightarrow \rho^0 \Delta^{++}$ | Пик |
| $\pi^+ p \rightarrow f^0 \Delta^{++}$ | « |
| $\pi^+ n \rightarrow f^0 p$ | Минимум |
| $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ | Пик |
| $\gamma n \rightarrow \pi^- p$ | « |
| $\gamma p \rightarrow \pi^- \Delta^{++}$ | Минимум |
| $\gamma n \rightarrow \pi^+ \Delta^-$ | « |
| $K^\pm p \rightarrow K^{*\pm} p$ | « |
| $K^- p \rightarrow K^* n$ | « |
| $K^\pm p \rightarrow K^* \Delta$ | Пик |

Наше объяснение этого факта, которое обсуждалось в разд. 6.5, заключается в том, что пионная траектория конспирирует при $\Lambda = 1$ с траекторией естественной четности. Однако таких частиц не наблюдалось и введение конспираций наталкивается на трудности, связанные с факторизацией, так что обычно предполагают, что пик вперед вызван наличием разрезов, не имеющих определенной t -канальной четности и поэтому не подчиняющихся условию (6.8.29) [см. рис. 6.3 и разд. 8.7e]. При составлении табл. 6.6 предполагали, что в каждой вершине преобладает наименьший возможный переворот спина, т. е. в барионной вершине доминирует вершина с $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_4 = 0$, за исключением вершины $\pi N \bar{N}$, где сохранение четности требует, чтобы $\Delta\mu = 1$; в мезонных вершинах доминирует переход с $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_3 = 0$, за исключением $\eta\pi$ -вершины, где возможны только переходы с $\Delta\mu = \pm 1$. Если эти правила не разрешают, чтобы $n = 0$, то в рассеянии вперед имеется минимум, если же значение $n = 0$ разрешено, то, несмотря на формулу (6.8.29), в рассеянии вперед наблюдается пик.

6.8л. Нефизические минимумы

При обменном вырождении более предпочтителен выбор нефизических значений для реджеонных вершин. Это приводит к тому, что в различных дифференциальных сечениях должны быть минимумы в точках, где траектории проходят через нефизические точки чужой сигнатуры (см. табл. 6.2).

Траектории, приведенные на рис. 6.6, указывают, что для ρ - и ω -траекторий точка чужой сигнатуры $\alpha(t) = 0$ находится при $|t| \approx \approx 0,55 \text{ ГэВ}^2$. Для A_2 - и f -полюсов эта точка является точкой своей сигнатуры и дает конечный вклад (не полюс) при $\alpha(t) = 0$. Аналогично точка $\alpha(t) = -1$, которая в случае линейных траекторий достигается при $|t| \approx -1,6 \text{ ГэВ}^2$, есть точка своей сигнатуры для ρ - и ω -траекторий и точка чужой сигнатуры для A_2 - и f -полюсов. В табл. 6.7 приведены некоторые процессы, описываемые этими траекториями (следует иметь в виду, что вклад f -полюса всегда затеняется вкладом вакуумной P -траектории) и видно, что многие из ожидаемых минимумов действительно существуют, но далеко не все. Это значит, что или полюса не всегда выбирают нефизические значения, или существуют другие существенные вклады, например, разрезы, дополняющие эти лидирующие траектории; возможно, что имеется и то и другое. Поскольку требование факторизации связывает друг с другом амплитуды различных процессов, то кажется, что спасти вариант с выбором нефизических значений довольно трудно, несмотря на его очевидный успех в отдельных случаях.

Аналогичные выводы можно сделать в отношении других обменов. Можно ожидать появления нулей в амплитуде при обмене другими бозонными траекториями, как, например, K^* -полюсом при $\alpha(t) = 0$ (т. е. $|t| \approx 0,2 \text{ ГэВ}^2$) и барионными траекториями, такими, как N при $\alpha(u) = -1/2$ (т. е. $|u| \approx 0,2 \text{ ГэВ}^2$). Кое-какие из этих нулей наблюдаются на опыте, но не все. Ясно, что разрезы должны играть важную роль, и эта проблема будет обсуждаться далее в разд. 8.7в.

Процессы, описываемые ρ , ω и A_2 обменами

| Процесс | Виден ли минимум при $t \approx -0,55?$ | Траектории | n |
|---|---|------------------|-----|
| $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ | Да | ρ | 1 |
| $\pi^- p \rightarrow \eta^0 n$ | Нет | A_2 | 1 |
| $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ | Нет | $\rho + A_2$ | 1 |
| $K^+ n \rightarrow K^0 p$ | Нет | $\rho - A_2$ | 1 |
| $\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Delta^{++}$ | Да? | ρ | 1 |
| $\pi^+ p \rightarrow \eta \Delta^{++}$ | Нет | A_2 | 1 |
| $K^+ p \rightarrow K^0 \Delta^{++}$ | Нет | $\rho - A_2$ | 1 |
| $K^- n \rightarrow \bar{K}^0 \Delta^-$ | Нет | $\rho + A_2$ | 1 |
| $\pi^0 p \rightarrow \rho^0 p$ | Да | ω | 1 |
| $\pi^\pm p \rightarrow \rho^\pm p$ | Да | $\omega + A_2$ | 1 |
| $\pi^- p \rightarrow \omega n$ | Нет | ρ | 0,2 |
| $\pi^+ n \rightarrow \omega p$ | Нет | ρ | 0,2 |
| $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ | Да | $\omega (+\rho)$ | 1 |
| $\gamma n \rightarrow \pi^0 n$ | Да | $\omega (+\rho)$ | 1 |
| $\gamma p \rightarrow \eta p$ | Нет | $\rho (+\omega)$ | 0,2 |
| $\gamma N \rightarrow \pi^\pm N$ | Нет | $\rho + A_2$ | 0,2 |
| $\pi^+ p \rightarrow \rho^0 \Delta^{++}$ | Нет | A_2 | 0,2 |
| $K^+ p \rightarrow K^{*0} \Delta^{++}$ | Нет? | $\rho - A_2$ | 0,2 |
| $K^- n \rightarrow \bar{K}^{*0} \Delta^-$ | ? | $\rho + A_2$ | 0,2 |
| $\pi^+ p \rightarrow \omega \Delta^{++}$ | Нет? | ρ | 0,2 |

Примечания. I. Здесь не учитывался обмен π -полусом, который может доминировать вблизи точки $t=0$ в некоторых из этих процессов. Данное значение $n = (|\mu_1 - \mu_3| \pm |\mu_2 - \mu_4|)$ относится только к обменам с естественной четностью ρ , ω и A_2 . II. Предполагалось, что ρ - и A_2 -полюса обладают в основном вершинами $\bar{N}\bar{N}$ и $N\Delta$ с переворотом спина а ω -полюс — без переворота. III. Из $SU(3)$ -симметрии следует что $\gamma_{\omega\pi\gamma} > \gamma_{\rho\pi\gamma}$ и $\gamma_{\rho\eta\gamma} > \gamma_{\omega\eta\gamma}$. IV. Вершины связи ρ - и ω -полюсов с $\pi\pi$ и πV обладают переворотом спина.

6.8м. Проблема пересечения

Одним из неожиданных свойств дифференциальных сечений упругого рассеяния является то, что $d\sigma/dt (\pi^- p \rightarrow \pi^- p) > < d\sigma/dt (\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)$ при t вблизи нуля; для $|t| \approx 0,15 \text{ ГэВ}^2$ они становятся равными, а при больших $|t|$ знак неравенства меняется на обратный [20]. Из (6.8.3) и из табл. 6.5 видно, что разность между этими сечениями обусловлена обменом ρ -полюсом. Поэтому можно написать

$$d\sigma/dt (\pi^\pm p) = |(P + f \pm \rho)_{++}|^2 + |(P + f + \rho)_{+-}|^2, \quad (6.8.30)$$

где по сравнению с (4.2.5) опущены кинематические множители; индексы относятся к s -канальным спиральным амплитудам (4.3.10); вклад полюсов Редже обозначен их символами.

Известно, что наибольший вклад дает P -полюс, который при $t = 0$ имеет почти чисто мнимую амплитуду [это следует из того, что $\alpha_P(0) \approx 1$, $\xi = +1$ в (6.8.14)], и что P - и f -траектории имеют очень малую вершину с переверотом спина, так что можно записать

$$d\sigma/dt(\pi^\pm p) \approx |(P)_{++}|^2 + |(P)_{++}| \operatorname{Im}[(f \pm \rho)_{++}], \quad (6.8.31)$$

поэтому

$$\Delta [d\sigma/dt(\pi^\pm p)] = d\sigma/dt(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) - d\sigma/dt(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \sim \sim \operatorname{Im}[(\rho)_{++}] \quad (6.8.32)$$

и, следовательно, мнимая часть амплитуды без переверота спина, обусловленной обменом ρ -полюсом, должна иметь нуль, связанный с пересечением дифференциальных сечений при $|t| \approx 0,15$ ГэВ².

Подобные пересечения существуют почти при тех же значениях t и в других упругих процессах, как, например, $\Delta [d\sigma/dt(K^\pm p)]$ и $d\sigma/dt(pp) - d\sigma/dt(\bar{p}\bar{p})$ и в некоторых неупругих процессах, таких, как $\Delta [d\sigma/dt(K^\pm p \rightarrow Q^\pm p)]$. Для этих процессов разность зависит от $\operatorname{Im}[(\rho + \omega)_{++}]$, причем вклад ω -полюса много больше вклада ρ .

Можно описать эти дифференциальные сечения полюсными амплитудами, вставляя в вычеты без переверота спина у ρ - и ω -полюсов произвольные нули (см., например, [37]), но при этом возникают две сложности. Во-первых, в других процессах, таких, как $\pi^- p \rightarrow \omega n$ (ρ -обмен), $\pi^\pm p \rightarrow \rho^\pm n$ (ω - и A_2 -обмены) или $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ (ρ - и ω -обмены), где ρ - и ω -полюса также связаны с каналом $\bar{p}p$, не видно соответствующих нулей. Другими словами, этот вычет не факторизуется. Во-вторых, нуль в вычете полюса предполагает, что действительная и мнимая части амплитуды имеют совпадающие нули. В следующем разделе будет показано, что в действительности это не так. Поэтому ясно, что должны быть какие-то другие объяснения появления этих нулей, и опять разрезы кажутся наиболее правдоподобным объяснением (см. разд. 8.86).

6.8н. Фазы амплитуд и поляризация

Так как обмен полюсом Редже дает одну и ту же фазу всем спиральным амплитудам, то в процессах, где осуществляется обмен единственной траекторией Редже (или обменно-вырожденной парой траекторий), предсказывается нулевая поляризация [см., например, формулу (4.2.22)].

В действительности поляризация в процессах мезон-барионного рассеяния с $\Delta S = 0$ в общем случае невелика, меньше 20% (хотя в настоящее время экспериментальные данные по процессу $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, являющиеся наиболее яркой проверкой этого предсказания, проти-

воречат друг другу, ср. [57] и [233]), но то обстоятельство, что поляризация отлична от нуля, означает, что обязательно должны быть другие вклады в амплитуду: низколежащие полюса или разрезы.

Разумно объединяя и интерполируя данные по упругому $\pi\pm p$ -рассеянию и реакции $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, включая данные по поляризации и повороту спина, можно полностью определить структуру амплитуд с переворотом и без переворота спина с $I_t = 0,1$ для πN -рассеяния, разумеется, с точностью до общей фазы [218]. Так как амплитуда A_{++} с $I_t = 0$ при малых t должна иметь почти чисто мнимую фазу полюса Померанчука, то это дает почти полное определение фаз.

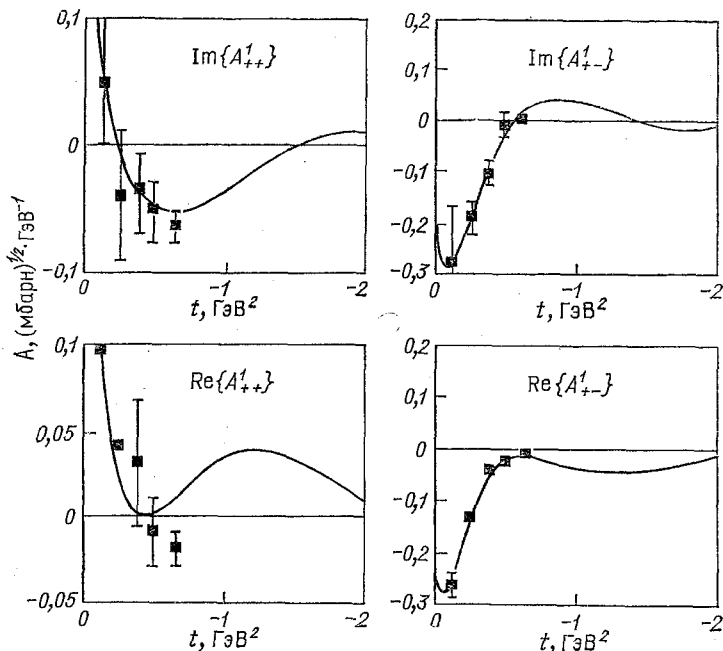


Рис. 6.10. s -Канальные спиральные амплитуды с $I_t=1$ для πN -рассеяния при 6 ГэВ, взятые из работы [218]:

■ — амплитудный анализ, проведенный в [218]; — анализ, основанный на правилах сумм при конечных энергиях из [37]

Результаты для амплитуды с $I_t = 1$ приведены на рис. 6.10. Рассматривая вначале амплитуду A_{+-} , видим нуль при рассеянии вперед, обусловленный кинематикой и выбором нефизической фазы

$$i \exp[-i\pi\alpha(t)/2]\alpha(t), \quad \alpha(t) \approx 0,5 + 0,9t \quad (6.8.33)$$

[из (6.8.15) при $\xi = -1$], так что мнимая часть амплитуды имеет нуль первого порядка, а действительная часть — нуль второго порядка при $\alpha(t) = 0$, т. е. при $|t| \approx 0,55$ ГэВ². Этот нуль второго порядка можно наблюдать непосредственно в упругой поляризации, поскольку

из (4.2.22), используя те же самые обозначения и приближения, что и при выводе (6.8.32), получаем

$$\begin{aligned} (d\sigma/dt)P(\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p) &= \mp \operatorname{Im} [(P+f)_{++}(\rho)_{+-}^* - 1] \approx \\ &\approx \mp |(P)_{++}| \operatorname{Re} [\rho_{+-}], \end{aligned} \quad (6.8.34)$$

так как вклад померона почти чисто мнимый. Разумеется, упругая поляризация (рис. 6.11) обладает зеркальной симметрией и нулем второго порядка, предсказываемым (6.8.33) при $|t| \approx 0,55 \text{ ГэВ}^2$. Поэтому амплитуда A_{+-} с $I_t = 1$ может быть легко параметризована

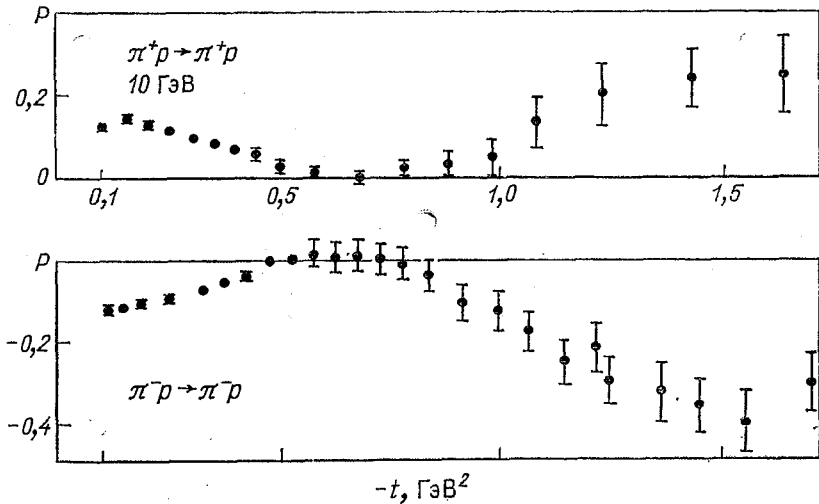


Рис. 6.11. Поляризация в упругом π^\pm - p -рассеянии из работ [58, 59]

ρ -полюсом, выбирающим нефизические значения. Амплитуда A_{++} имеет нуль, связанный с пересечением дифференциальных сечений в $\operatorname{Im} A_{++}$ при $|t| \approx 0,15 \text{ ГэВ}^2$, но действительная часть этой амплитуды имеет нуль второго порядка при $|t| \approx 0,55 \text{ ГэВ}^2$. Поэтому только $\operatorname{Im} A_{++}$ существенно отличается от того, что можно было бы ожидать при обмене одним только ρ -полюсом.

Хотя в настоящее время нет достаточного количества измерений спиновых зависимостей, чтобы провести подобный полный амплитудный анализ для других процессов, предположение о том, что некоторые амплитуды хорошо описываются обменом реджевскими полюсами, позволило получить много информации о структуре амплитуд. Действительно, многие амплитуды имеют почти реджевские фазы, но далеко не все, и сейчас еще нет полного понимания, почему это так.

ДУАЛЬНОСТЬ

7.1. Введение

При рассмотрении низкоэнергетического рассеяния в физической области s -канала часто бывает удобным представлять амплитуду рассеяния в виде ряда по парциальным волнам (4.4.9)

$$A_{H_s}(s, t) = 16\pi \sum (2J + 1) A_{HJ}(s) d_{\mu\mu'}^J(z_s) \quad (7.1.1)$$

потому (как это уже обсуждалось в разд. 2.2), что если силы имеют конечный радиус действий R , то при заданном s только парциальные волны с $J \lesssim (\sqrt{s})R/\hbar$ оказываются важными. Более того, очень часто случается, что доминирующие вклады в парциальные волны вносят полюса, отвечающие резонансам. Итак, используя формулу Брейта—Вигнера (2.2.15), можно написать

$$A_{HJ}(s) \approx \sum_r g_r / (s_r - s); \quad s_r \equiv M_r^2 - iM_r \Gamma_r. \quad (7.1.2)$$

Если подставить (7.1.2) в (7.1.1), то очень часто оказывается, что это выражение является довольно хорошей аппроксимацией низкоэнергетической амплитуды рассеяния, например, в области $s < 6 \text{ ГэВ}^2$.

Но как только s начинает увеличиваться, то число парциальных волн, которые необходимо учесть, начинает возрастать. Кроме того, плотность резонансов в каждой парциальной волне также начинает расти и таким образом становится значительно более трудной задача выделения вклада каждого отдельного резонанса. Следовательно, представление (7.1.1) оказывается значительно менее полезным при больших значениях s . Кроме того, известно, что это представление становится несправедливым, как только мы выходим за пределы границ физической области s -канала, потому что ряд начинает расходиться при подходе к ближайшей сингулярности t -канала [начиная с границы эллипса Лемана (2.4.11)]. Таким образом, аппроксимации амплитуды рассеяния, основанные на (7.1.1), эффективны только в той области плоскости Мандельштама, где s и $|t|$ достаточно малы, в окрестности физической области s -канала (см. рис. 1.5).

С другой стороны, мы нашли, что при больших s очень полезно работать с разложением по парциальным волнам в t -канале, преобразованным с помощью представления Зоммерфельда—Ватсона (4.6.4) в сумму по t -канальным реджевским полюсам и разрезам. При высоких энергиях, скажем, когда $s > 10 \text{ ГэВ}^2$, достаточно учесть только несколько главных сингулярностей J -плоскости, хотя в принципе представление Зоммерфельда—Ватсона справедливо при всех значениях s и t .

Таким образом, возникает вопрос о том, как связать две различные точки зрения. Эта проблема представляется очень важной с прак-

тической точки зрения, особенно в области промежуточных энергий, например, когда $4 < s < 10 \text{ ГэВ}^2$, в которой амплитуда начинает принимать свое гладкое реджевское асимптотическое поведение по s , но тем не менее некоторые нерегулярности резонансной природы могут наблюдаться (рис. 7.1.). Это также ставит очень важную теоретическую

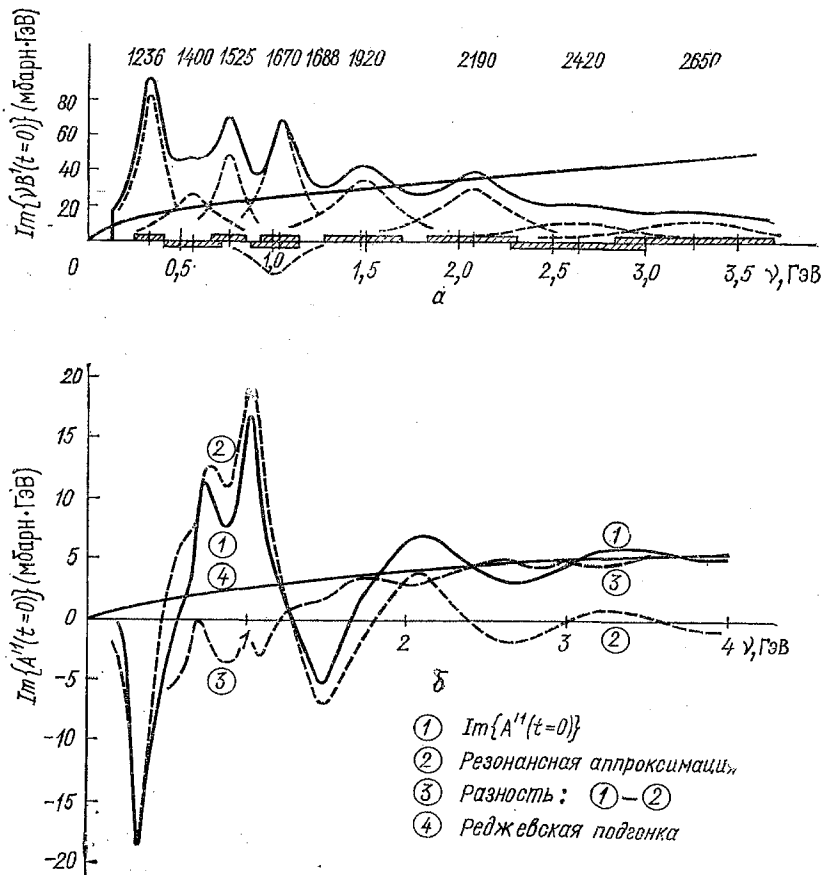


Рис. 7.1. Резонансный и реджевский полюсной вклады в (а) $\text{Im}\{vB\}$ и (б) $\text{Im}\{A''\}$ при $t=1$ в реакции $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ при $t=0$, из работы Долен и др. [143]. При низких энергиях резонансы почти полностью насыщают амплитуды, в то время как подгонка с помощью реджевской траектории ρ проходит через экспериментальные данные усредненным образом. (Определение γ дано в (7.2.3) (см. ниже)

задачу о том, каким образом s -канальные резонансы дают вклад в асимптотическое поведение по s или, эквивалентно, где эти резонансы проявляются в представлении Зоммерфельда—Ватсона.

Так как все вычеты g_r в (7.1.2) являются константами, если только имеется конечное (но большое) количество резонансов, то ясно, что суммарный резонансный вклад в амплитуду рассеяния должен приводить к поведению

$$A_H^r(s, t) \sim 1/s, \text{ при всех фиксированных } t, \quad (7.1.3)$$

которое должно проявляться в представлении Зоммерфельда—Ватсона [из (2.7.2)] как фиксированный полюс при $J_t = -1$. В этом случае можно сложить вклады (7.1.2) и (4.6.4) и получится

$$A_H(s, t) = A_H^r(s, t) + A_H^R(s, t), \quad (7.1.4)$$

где член A^r содержит все s -канальные резонансы, а A_H^R — все t -канальные реджевские сингулярности с $\text{Re} \{\alpha(t)\} > -1$. Это часто называют интерференционной моделью, потому что амплитуда осциллирует как функция s из-за интерференции между резонансами и реджевскими полюсами (см., например, работы [33, 34]).

Однако в гл. 3 было показано, как в простых динамических моделях подобных лестничной (см. рис. 3.3), если s -канальные полюса ведут себя как s^{-1} , то t -канальные траектории имеют асимптотическое поведение $\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -1$, т. е. такое же, как и в указанном выше случае,

вследствие унитаризации этого входного фиксированного полюса. Так же было найдено (см. рис. 6.6), что траектории, возникающие в реальных случаях, будут приближенно линейны: $\alpha(t) \approx \alpha^0 + \alpha^1 t$ и поэтому кажется, что они будут опускаться значительно ниже -1 . Это могло бы означать, что почему-то фиксированный полюс не дает вклада в лидирующие реджевские траектории, однако он добавляется к ним таким способом, как это было сделано в (7.1.4). Для амплитуд с четной сигнатурой, где точка $J = -1$ является нефизической точкой чужой сигнатуры, такой дополнительный фиксированный полюс несомненно возможен (см. разд. 4.8 и 6.3), однако в случае амплитуд с нечетной сигнатурой фиксированный полюс несовместим с t -канальной унитарностью. А движущийся полюс, который появляется в области $J_t = -1$, можно наблюдать, если построить график эффективной траектории.

Поэтому кажется довольно ясным, что по меньшей мере при больших значениях $-t$ s -канальные резонансные полюса сокращаются один с другим так, чтобы получилось асимптотическое поведение $\sim s^x$, где $x \leq \alpha(t)$, причем $\alpha(t)$ соответствует лидирующей t -канальной сингулярности. Наиболее интересна возможность, когда $x = \alpha(t)$, т. е. s -канальные резонансы действительно комбинируются так, что приводят к лидирующему поведению, отвечающему полюсу Редже. Конечно, это возможно только в той области t , где $\alpha(t) > -1$, и в том случае, если имеется бесконечное количество резонансов, таких, что ряд (7.1.2) расходится.

Эта возможность была впервые изложена в статье Доленя, Хорна и Шмида [143], ставшей ныне классической, авторы которой заметили, что если сложить вклады всех резонансов, открытых с помощью фазового анализа πN -рассеяния (при $I_t = 1$), то результат позволяет получить почти всю амплитуду рассеяния, но и в среднем приближенно равен вкладу от обмена ρ -полюсом, полученным из подгонки экспериментальных данных при высоких энергиях, который экстраполировался в области низких энергий (см. рис. 7.1). Таким образом, оказывается, что имеет место «дуальность в среднем» между резонансами прямого канала r и реджевскими полюсами перекрестных ка-

налов R , потому что, по меньшей мере при промежуточных энергиях, среднее от первого члена равно среднему от последнего, т. е.

$$\langle A_H(s, t) \rangle \approx \langle A'_H(s, t) \rangle \approx \langle A''_H(s, t) \rangle \quad (7.1.5)$$

(это утверждение будет сформулировано более строго в следующем разделе). Продолжая дальнейшее рассмотрение, можно надеяться, что с ростом s плотность резонансов будет также возрастать, и это будет приводить к сглаживанию нерегулярностей и в конце концов возникнет «локальная дуальность»

$$A_H(s, t) \approx A'_H(s, t) \approx A''_H(s, t) \quad (7.1.6)$$

без какого-либо усреднения.

К сожалению, этот аргумент не так уж неотразим по меньшей мере по двум причинам. Во-первых, всегда можно сделать другую параметризацию реджевских полюсных членов, которая сохранит их асимптотическое поведение, но уменьшит их значение в промежуточной области энергий. Например, заменой $\beta(t) (s/s_0)^{\alpha(t)}$ на $\beta(t) [(s-s_a)/s_0]^{\alpha(t)}$ уменьшается величина в окрестности произвольной наперед заданной точки s_a . Конечно, точка ветвления при $s = s_a$ должна быть ложной, такой же, как точка ветвления при $s = 0$ в обычной параметризации, которая является следствием аппроксимации (6.2.26). Существенно, что эти две параметризации отличаются только на члены порядка $s^{\alpha(t)-1}$, т. е. это отличие на уровне дочерних траекторий, где предсказания реджевской теории неоднозначны.

Во-вторых, успех (7.1.5) вызывает сомнения в связи с тем, что не ясно, насколько достоверна идентификация неупругих резонансов с помощью фазового анализа. Как показал Шмид [356], в случае, если взять реджевский полюсный член (6.8.1) с линейной траекторией $\alpha(t) = \alpha^0 + \alpha't$ и использовать кинематику с равными массами (1.7.22)

$$z_s = 1 + t/2 q_s^2, \quad q_s^2 = (s - 4m^2)/4,$$

то s -канальное разложение по парциальным волнам (2.2.1) реджевского полюсного члена зависит от [114]

$$\begin{aligned} A_J(s) &\sim \int_{-1}^1 dz_s \exp\{-i\pi\alpha(t)\} P_J(z_s) = \\ &= \exp\{-i\pi(\alpha^0 - 2q_s^2 \alpha')\} (i)^J J_J(-2q_s^2 \pi\alpha'), \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

где J_J — сферическая функция Бесселя порядка J (см., например, [292, с. 26]). С ростом s (а следовательно, и q_s^2) фаза амплитуды, определяемой выражением (7.1.7), будет вращаться против часовой стрелки, давая петлю точно такую же, как предсказывалось для неупругого резонанса в выражении (2.2.15) (рис. 7.2). Заметим, что если фаза достигает значения $\pi/2$, что соответствует «резонансу» при $s = s_r$, то тогда будут резонансы и в дальнейшем при $s_r^n = s_r + n/\alpha'$, $n = 1, 2, \dots$, т. е. в точках, где фаза проходит через $(2n+1)\pi/2$, причем все парциальные волны будут резонировать

при одних и тех же s_r^n , так как фаза в (7.1.7) не зависит от J . Таким образом, реджевские полюсные члены будут приводить к резонансно-подобным петлям на графиках Аргана для парциальных волн, несмотря на то, что реджевский полюсный член не содержит какие-либо полюса по s .

Ясно, что имеются два способа проинтерпретировать этот результат [129]. Либо нужно принять дуальность как постулат, и тогда эти петли соответствуют резонансам и являются проявлением дуальности в среднем (7.1.5), даже хотя реджевские члены не содержат s -канальных полюсов. Либо, если отвлечься от дуальности, петли на графиках Аргана уже больше не могут рассматриваться как достаточное условие для существования резонансов и вполне возможно, что резонансов на самом деле меньше, чем можно было предполагать, основываясь на фазовом анализе. Если это так, то феноменологическое доказательство дуальности разваливается. Смысл этой трудности заключается в том, что имеется только экспериментальное свидетельство о поведении амплитуды рассеяния вдоль действительной оси s и поэтому для того, чтобы сделать аналитическое продолжение полюса на нефизический лист, требуется модель, основанная на унитарности. Формула Брейта — Вигнера (2.2.14) представляет собой несомненно правильную модель амплитуды упругого рассеяния, в которой доминируют изолированные полюсы, однако ее использование в случае сильно неупругих, перекрывающихся групп резонансов находится под большим вопросом (см. книгу Блатта и Вайскопфа [55] и работу Вейденмюллера [400]).

Отложим обсуждение этих сомнений на конец главы, где будет больше оснований рассмотреть довольно сильные свидетельства в пользу того, что гипотеза дуальности является по меньшей мере приближенно справедливой. Следующий шаг — постараться сделать гипотезу дуальности немного более строгой.

7.2. Правила сумм при конечной энергии

Правила сумм при конечной энергии (ПСКЭ) очень похожи на СПС, сформулированные в разд. 4.8, но применяются они, когда амплитуда сходится на бесконечности. Несмотря на все это, все же необходимо чтобы асимптотическое поведение было известно. Для простоты будем предполагать, что асимптотическое поведение напоминает реджевское полюсное поведение. Таким образом из (6.8.1) следует

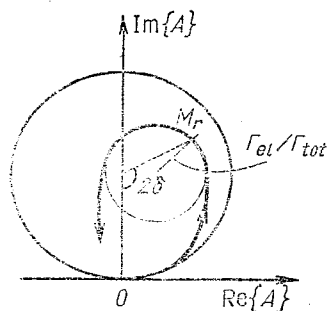


Рис. 7.2. Диаграмма Аргана данной парциальной волны для неупругого резонанса (см. (2.2.13) и последующие формулы).

В области энергий около M_r кривая дает круг вследствие формулы Брейта-Вигнера, однако он несколько меньше унитарного круга из-за неупругости, сдвинут в сторону от центра, а фаза может быть повернута из-за фона

$$\hat{A}_{H_t}(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \hat{A}^R(s, t) = \sum_i -G_i(t) \frac{\exp\{-i\pi(\alpha - \nu)\} + \xi_i \left(\frac{\nu}{s_0}\right)^{\alpha_i(t) - M}}{\sin \pi(\alpha - \nu)}, \quad (7.2.1)$$

где сумма берется по всем лидирующим реджевским полюсам, скажем, по тем, для которых

$$\operatorname{Re} \{\alpha_i(t)\} > -k, \quad k > 1. \quad (7.2.2)$$

Все различные факторы, связанные с вычетами, собраны в функциях $G_i(t)$ и, кроме того, введено обозначение

$$\nu \equiv (s - u)/2. \quad (7.2.3)$$

Итак, асимптотически

$$\left. \begin{aligned} D_s(s, t) &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sum_i G_i(t) (\nu/s_0)^{\alpha_i(t) - M}; \\ D_u(s, t) &\xrightarrow{s \rightarrow -\infty} \sum_i -\xi_i G_i(t) (\nu/s_0)^{\alpha_i(t) - M} (-1)^{M - \nu} \end{aligned} \right\} \quad (7.2.4)$$

Ожидается, что амплитуда рассеяния подчиняется дисперсионным соотношениям при фиксированном t (4. 5.1) и, следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{H_t}(\nu, t) - \hat{A}^R(\nu, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\nu_T}^{\infty} \frac{D_s(\nu', t) - \sum_i G_i(t) (\nu'/s_0)^{\alpha_i(t) - M}}{\nu' - \nu} d\nu' + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\nu_T}^{\infty} \frac{D_u(\nu', t) - (-1)^{M - \nu} \sum_i \xi_i G_i(t) (\nu'/s_0)^{\alpha_i(t) - M}}{\nu' + \nu} d\nu', \quad (7.2.5) \end{aligned}$$

где $\nu_T \equiv s_T + (t - \Sigma)/2$ — положение s -канального порога, выраженное через ν [где Σ определено в (1.7.18)], а интегралы сходятся. Как следствие гипотезы (7.2.2), все лидирующие члены в асимптотическом поведении \hat{A} содержатся в \hat{A}^R и поэтому самое большее, что может быть

$$\hat{A} - \hat{A}^R \sim 1/\nu^k, \quad \nu \rightarrow \infty. \quad (7.2.6)$$

Таким образом, если рассмотреть предел $\nu \rightarrow \infty$, то в правой части (7.2.5) коэффициент при члене ν^{-1} , должен обратиться в нуль:

$$\begin{aligned} &\int_{\nu_T}^{\infty} \left\{ D_s(\nu', t) - D_u(\nu', t) - \right. \\ &\left. - \sum_i [1 - \xi_i (-1)^{M - \nu}] G_i(t) \left(\frac{\nu'}{s_0}\right)^{\alpha_i(t) - M} \right\} d\nu' = 1. \quad (7.2.7) \end{aligned}$$

Очевидно, что среди всей последовательности полюсов i имеется подпоследовательность полюсов j , обладающих сигнатурой

$$\xi_j = (-1)^{M - \nu + 1}, \quad (7.2.8)$$

которые будут давать вклад в (7.2.7).

Так как асимптотическое поведение D_s и D_u обусловлено полюсами, то подынтегральное выражение становится пренебрежимо малым при $v' > N$, при достаточно большом N и тогда

$$\int_{v_T}^N (D_s(v', t) - D_u(v', t)) dv' = \int_{v_T}^N \sum_j 2G_j(t) (v'/s_0)^{\alpha_j(t) - M} dv'. \quad (7.2.9)$$

Интеграл в правой части довольно легко берется и дает ПСКЭ:

$$\int_{v_T}^N (D_s(v', t) - D_u(v', t)) dv' = \sum_j 2s_0 [G_j(t)/(\alpha_j(t) - M + 1)] \times \\ \times [(N/s_0)^{\alpha_j(t) - M + 1} - (v_T/s_0)^{\alpha_j(t) - M + 1}]. \quad (7.2.10)$$

В случае $\alpha_j > -1 + M$ очевидно, что пороговым членом в правой части можно пренебречь, если, конечно, $N \gg s_0$.

Имеется другой способ вывода (7.2.10) (его обобщения будут изложены ниже), который более элегантен, но, возможно, менее поучителен. Он заключается в том, чтобы, используя теорему Коши, написать

$$\int_C \hat{A}_H(v', t) dv' = 0, \quad (7.2.11)$$

где C — контур интегрирования, причем он не захватывает пороговые точки ветвления, как это показано на рис. 7.3. Растягивая контур так, чтобы он охватывал разрезы, идущие от точек ветвления, получаем

$$2i \int_{v_T}^N (D_s(v', t) - D_u(v', t)) dv' = \\ = - \int_{C'} \hat{A}_H(v', t) dv', \quad (7.2.12)$$

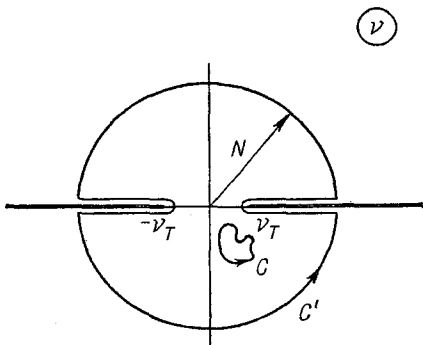


Рис. 7.3. Контур интегрирования в комплексной плоскости v в формулах (7.2.11) и (7.2.12)

где контур C' — круг с радиусом, равным N . Положив $v = N \exp(i\varphi)$, заменяя \hat{A}_H на \hat{A}_H^R из (7.2.1) и проследив надлежащим образом за скачками реджевских членов на разрезах, получим (7.2.10) без порогового члена.

Таким образом, ПСКЭ (7.2.10) приводит к связи между средним (т. е. нулевым моментом) от мнимой части амплитуды рассеяния при низких энергиях и асимптотическим поведением реджевского полюса при высоких энергиях; эта связь получается как следствие предложенной нами аналитичности амплитуды и доминирования реджевского полюсного вклада при $v \geq N$. Совершенно очевидно, что все это будет полезно для понимания дуальности.

Можно сделать несколько обобщений (7.2.10). С одной стороны, вместо (7.2.5) можно написать дисперсионное соотношение для

$$(\hat{A}_H(v, t) - \hat{A}_H^R(v, t)) (v/s_0)^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.2.13)$$

и до тех пор пока $2n < k$, коэффициент при члене v^{-1} должен обращаться в нуль, давая

$$\int_{v_T}^N (D_s(v', t) - D_u(v', t)) (v'/s_0)^{2n} dv' = \sum_j \frac{2s_0 G_j(t)}{\alpha_j(t) - M + 2n + 1} \times \\ \times [(N/s_0)^{\alpha_j(t) - M + 2n + 1} - (v_T/s_0)^{\alpha_j(t) - M + 2n + 1}], \quad (7.2.14)$$

т. е. получается ПСКЭ при четных моментах. С другой стороны, если рассмотреть нечетные степени (v/s_0) , то только полюса с сигнатурой, противоположной той, которая была в (7.2.8), т. е.

$$\xi_h = (-1)^{M-v}, \quad (7.2.15)$$

дают вклады, приводя к ПСКЭ при нечетных моментах:

$$\int_{v_T}^N (D_s(v', t) + D_u(v', t)) (v'/s_0)^{2n-1} dv' = \sum_k \frac{2s_0 G_k(t)}{\alpha_k(t) - M + 2n} \times \\ \times [(N/s_0)^{\alpha_k(t) - M + 2n} - (v_T/s_0)^{\alpha_k(t) - M + 2n}] \quad (7.2.16)$$

(знак $+$ в левой части появляется как следствие того, что рассматриваются нечетные степени v). Эти интегралы включают только мнимую часть амплитуды рассеяния, но можно включить как действительную, так и мнимую части, если написать дисперсионные соотношения для [286]

$$(\hat{A}_H(v, t) - \hat{A}_H^R(v, t)) [(v_T^2 - v^2)/s_0^2]^{\beta/2}, \quad (7.2.17)$$

где β — произвольный параметр. Тогда получаем

$$\int_{v_T}^N \left[\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \text{Im}\{\hat{A}_{H_t}(v', t)\} - \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \text{Re}\{\hat{A}_{H_t}(v', t)\} \right] \left(\frac{v'^2 - v_T^2}{s_0^2}\right)^{\beta/2} dv' = \\ = \sum_l \frac{2s_0 G_l(t)}{\alpha_l(t) + \beta + 1} \left(\frac{N}{s_0}\right)^{\alpha_l(t) + \beta + 1} \frac{\cos[\pi(\alpha_l(t) + \beta)/2]}{\cos(\pi\alpha_l(t)/2)}, \quad (7.2.18)$$

которое приводится, например, к выражению (7.2.14) (без члена, содержащего v_T) при четном β . Эти соотношения называются правилами сумм с непрерывными моментами (ПСНМ). Но так как информация о действительных частях амплитуд встречается редко, за исключением тех случаев, когда она извлекается из дисперсионных соотношений, которые как раз и использовались при выводе (7.2.18), то ПСНМ только изредка оказываются полезными.

Интересно написать ПСКЭ для амплитуд с определенной сигнатурой, для которых имеются дисперсионные соотношения при фиксированном t , подобные (2.5.7):

$$\hat{A}_H^\xi(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds' + (-1)^{M-v} \xi \int_{u_T}^{\infty} \frac{D_u(s', t)}{s' - s} ds' \quad (7.2.19)$$

Если проделать процедуру, которую проводили раньше, то получаем:

$$\int_{v_T}^N [D_s(v', t) + (-1)^{M-v} D_u(v', t)] \left(\frac{v'}{s_0}\right)^n dv' = \\ = \sum_l \frac{2s_0 G_l(t)}{\alpha_l(t) - M + n + 1} \left(\frac{N}{s_0}\right)^{\alpha_l(t) - M + n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.2.20)$$

где $l = j$ или k в зависимости от ξ [см. (7.2.8), (7.2.15)]. Эти ПСКЭ совпадают с (7.2.14) или (7.2.16) только при чередующихся моментах. Но возможно, что «неправильные» моменты [т. е. когда n — четное при $\xi = (-1)^{N-v}$ или n — нечетное при $\xi = (-1)^{M-v+1}$] будут некорректными, потому что мы пренебрегли тем, что амплитуды с определенной сигнатурой содержат фиксированные полюса в нефизических точках чужой сигнатуры (см. разд. 4.8), которые также должны быть включены в правую часть (7.2.20). Итак, для неправильных моментов мы должны добавить к правой части (7.2.20)

$$\sum_l \frac{G_l(t)}{J_l - M + n + 1} \left(\frac{N}{s_0}\right)^{J_l - M + n + 1}, \quad (7.2.21)$$

где J_l — положения нефизических фиксированных полюсов чужой сигнатуры, т. е. $J_l = M - 1, M - 3, \dots$ или $M - 2, M - 4, \dots$ для $\xi = \pm (-1)^{M-v}$. Однако, когда вычеты фиксированных полюсов малы, выражение (7.2.20) приближенно справедливо при всех моментах.

В следующем разделе будут обсуждаться некоторые феноменологические применения ПСКЭ, а сейчас наша основная цель — изучение свойств ПСКЭ, следующих из дуальности. Если мнимую часть амплитуды рассеяния при низких энергиях можно представить как сумму резонансных полюсных вкладов (r), то выражение (7.2.10) становится следующим:

$$\int_{v_T}^N (D'_s(v', t) - D'_u(v', t)) dv' = \sum_j \frac{2s_0 G_j(t)}{\alpha_j(t) + M + 1} \left(\frac{N}{s_0}\right)^{\alpha_j + M + 1}. \quad (7.2.22)$$

Это дает определенное значение для (7.1.5), так что интеграл от мнимой части по резонансным вкладам в амплитуду рассеяния равняется интегралу от реджевских полюсных вкладов (см. рис. 7.1). Заметим, однако, что для получения (7.2.22) уже было сделано предположение о дуальности, потому что сумма по конечному числу резонансов приводит к поведению $\sim s^{-1}$, а с другой стороны, мы предполагали в (7.2.2), что реджевские полюса включают все лидирующие члены в асимптотическом поведении вплоть до s^{-k} , $k > 1$. Таким образом, (7.2.22) ни в каком смысле не может служить доказательством дуальности, а всего навсего дает более конкретное, чем (7.1.5), математическое выражение.

Правила сумм для более высоких моментов требуют выполнения локальной дуальности и, таким образом, менее вероятно, что они вы-

полняются при низких энергиях. Если бы все моменты были одинаковыми, то, конечно, A^r должно было бы тождественно равняться A^R , а совершенно ясно, что это невозможно, так как первое из них содержит полюса по s , а второе не содержит.

Ограничения, которые накладываются на амплитуду вследствие (7.2.22), если их объединить с требованиями кроссинга, весьма значительны. Например, если рассмотреть $\pi\pi$ -рассеяние [211] (см. также работу Коллинза и Мира [130]), при условии $I_t = 1$, то доминирующим обменом с нечетной сигнатурой будет ρ -траектория (см. разд. 3.5). Кроме того, полюса, отвечающие ρ -мезону, со спином, равным единице, будут также играть главную роль среди s - и u -канальных резонансов. Таким образом [см. (2.6.13)],

$$\begin{aligned} D_s^r &= 16\pi^2 \cdot 3 \frac{\beta(s)}{\alpha'} P_1(z_s) \delta(s - m_\rho^2) = \\ &= 16\pi^2 \cdot 3 \frac{\beta(s)}{\alpha'} \left(1 + \frac{2t}{m_\rho^2 - 4} \right) \delta(s - m_\rho^2), \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

если использовать единицы, в которых $m_\pi = 1$. Возьмем вычет в виде

$$\beta(s) = \frac{\gamma(s) \alpha(s)}{\Gamma(\alpha + 3/2)} (q_s^2)^\alpha, \quad \text{где } \alpha(m_\rho^2) = 1, \quad q_s^2 = \frac{s-4}{4}, \quad (7.2.24)$$

где $\gamma(s)$ — приведенный вычет, т. е. выражение после явного выделения порогового поведения (6.2.9), нефизического множителя при $\alpha = 0$ и нулей, являющихся следствием симметрии Мандельштама (2.9.5). Это приводит к

$$D_s^r(s, t) = 64\pi^{3/2} \frac{\gamma(m_\rho^2)}{\alpha'} \left(\frac{m_\rho^2 - 4}{4} \right) \left(1 + \frac{2t}{m_\rho^2 - 4} \right) \delta(s - m_\rho^2). \quad (7.2.25)$$

Таким же образом можно получить выражение для $D_u^r(s, t)$. Аналогично ρ -траектория в t -канале будет давать, если использовать (6.8.1),

$$D_s^R(s, t) = 16\pi^{3/2} \gamma(t) \frac{\alpha(t)}{\Gamma(\alpha + 1)} \nu^\alpha(t). \quad (7.2.26)$$

Подставляя (7.2.25) и (7.2.26) в (7.2.22) [вспоминая при этом, что рассматривается амплитуда для бесспиновых частиц, т. е. $M = 0$, причем $I_t = 1$; таким образом, левая часть должна включать кроссинговый матричный элемент $1/2$ из табл. 6.3., который сокращается с фактором 2, появляющимся от сложения $D_s(s, t)$ и $D_u(s, t)$], получаем

$$2 \frac{\gamma(m_\rho^2)}{\alpha'} \left(\frac{m_\rho^2 - 4}{4} \right) \left(1 + \frac{2t}{m_\rho^2 - 4} \right) = \frac{\gamma(t) \alpha(t)}{\Gamma(\alpha(t) + 1) (\alpha(t) + 1)} N^{\alpha(t) + 1}. \quad (7.2.27)$$

Если теперь положить $t = m_\rho^2$, то приведенные вычеты γ сокращаются, а $\alpha(t) = 1$ и в результате

$$\alpha' = (3 m_\rho^2 - 4) / N^2.$$

Если теперь обрезать N примерно посередине между ρ ($m_\rho^2 \approx 30m_\pi^2$) и следующим s -канальным резонансом f ($m_f^2 \approx 80 m_\pi^2$), например, при $N = 68 m_\pi^2$ [из (7.2.3)], то получится

$$\alpha' = 0,019 m_\pi^{-2} = 1 \text{ ГэВ}^2,$$

что находится в довольно хорошем согласии с (5.3.1). Если взять правило сумм для n -го момента и не учитывать возможность появления фиксированных полюсов, то получится

$$\alpha' = \frac{n+2}{2^{n+1}} \frac{(3m_\rho^2 - 4)^{n+1}}{N^{n+2}}.$$

Это выражение при $N = 68$ характеризуется довольно слабой зависимостью α' от n при малых n , таким образом, все небольшие моменты довольно хорошо согласуются.

Уравнение (7.2.27), которое является условием согласованности ПСКЭ для ρ -траектории, иногда называется «ПСКЭ-бутстрапом». Это совершенно отличается от собственно бутстрапа типа того, который обсуждался в разд. 3.5 (и будет обсуждаться ниже в разд. 11.7), потому что не делается никаких попыток наложить условие унитарности и, следовательно, наложить ограничения на приведенный вычет $\gamma(t)$. Кроме того, перед тем как зафиксировать N , необходимо знать спектр частиц, поэтому траектория не определяется однозначно. Чтобы получить оценки, брали правило сумм при $t = m_\rho^2$, но совершенно очевидно, что t -зависимость обеих частей (7.2.27) совершенно различна. Тем не менее для того, как перейти к рассмотрению более полных дуальных моделей (см. разд. 7.4), хорошо бы на деле показать, что эти условия согласованности применяются довольно широко (см., например, Адемолло и др. [13], Иги и Мацуда [242]). Их обобщение на группу $SU_c(3)$ будет обсуждаться ниже.

7.3. Применения ПСКЭ и дуальность

Вначале стоит заметить, что гипотеза дуальности очевидным образом несправедлива для померонного (P) обмена. Например, амплитуды упругого рассеяния как $pp \rightarrow pp$, так и $K^+p \rightarrow K^+p$ характеризуются экзотическими квантовыми числами (см. разд. 5.2) и, следовательно, не содержат никаких s -канальных резонансов, однако эти амплитуды контролируются в t -канале обменом помероном P . Это наблюдение приводит к гипотезе о так называемой «двухкомпонентной дуальности» [176, 222], которая основана на том, что там, где в t -канале возникают обмены вакуумными квантовыми числами, обычные реджеоны R (т. е. все, за исключением P) дуальны резонансам (r), в то время как P дуален фоновой амплитуде (b), на которую потом накладываются резонансы. Итак, такие амплитуды имеют две компоненты

$$A_N(s, t) = A^r(s, t) + A^b(s, t) = A^R(s, t) + A^P(s, t) \quad (7.3.1)$$

с

$$\langle A^r \rangle = A^R \text{ и } \langle A^b \rangle = A^P, \quad (7.3.2)$$

причем средние берутся для мнимых частей в смысле (7.2.22). Конечно, для процессов, в которых обмен помероном P не возникает, имеет силу (7.1.6) и необходима только одна компонента.

Эта гипотеза была проверена прямо для упругого πN -рассеяния (например, [228]) и было показано, что сумма резонансов (представленных формулами Брейта — Вигнера) и померонная амплитуда (экстраполированная из подгонок высокоэнергетического рассеяния) может воспроизвести амплитуду рассеяния, полученную из фазового анализа при низких энергиях. Конечно, так как большинство этих резонансов было фактически открыто с помощью фазового анализа, то в действительности проверка сводится к тому, чтобы показать: а) формула Брейта — Вигнера (2.2.15) без какого-либо вращения фазы удовлетворительно параметризует резонансные петли; б) экстраполированная померонная амплитуда может объяснить весь фон под этими резонансами. К сожалению, этого недостаточно для того, чтобы доказать гипотезу, потому что, вводя в формулу Брейта—Вигнера произвольные фазы, которые не так уж и неразумны для высоконеупругих перекрывающихся наборов резонансов, интерференционная модель

$$A = A^P + A^R + A^r \quad (7.3.3)$$

может привести к столь же хорошему описанию [145], за исключением неопределенности, которая имеется при резонансной интерпретации фазовых сдвигов, упомянутой в разд. 7.1. Однако тот факт, что можно сконструировать согласованные дуальные модели и применить (7.3.2) в разнообразных ситуациях (см. также разд. 10.7), кажется, дает некоторую вероятность того, что двухкомпонентная гипотеза, по меньшей мере приближенно, справедлива.

Почему померон должен иметь такой исключительный статус — совершенно не ясно. Некоторые правдоподобные причины этого, следующие из динамики, обсуждаются в разд. 11.7, однако уже сейчас можно обратить внимание, что наклон померонной траектории довольно малая величина $\alpha'_R \approx 0,2 \text{ ГэВ}^2$, по сравнению с другими траекториями, где $\alpha'_R = 0,9 \text{ ГэВ}^2$, так что любые резонансноподобные петли, генерируемые помероном в (7.1.7), должны иметь очень медленное вращение фазы и должны быть расположены на большом расстоянии друг от друга.

Однако до сих пор все еще остается нерешенной проблема, заключающаяся в том, что в экзотических каналах типа $pp \rightarrow pp$ и $K^+p \rightarrow K^+p$ могут происходить обмены другими траекториями: $K = \rho$, A_2 , ω и f (см. табл. 6.5), несмотря на то, что эти каналы не содержат резонансов. Это явление может быть объяснено, если предположить сильное обменное вырождение (см. разд. 6.8, з), а также то, что [как и в (6.8.22)] вклады от этих траекторий сокращаются: $A_2 - \rho$ и $f - \omega$, не оставляя никакой мнимой части. Это явление может возникнуть, если знаки различных вкладов расположены так же, как и в табл. 7.1. Так как брейт-вигнеровские резонансы доминируют в мнимой части $\text{Im} \{A(s, t)\}$ [см. (2.2.15)], то отсутствие мнимой части в A^R подразумевает [это можно увидеть с помощью (7.2.22) и (7.3.2)], что никаких резонансов нет. С другой стороны, резонансы могли бы возникнуть

Знаки вкладов траекторий в мнимую часть амплитуды упругого NN - и KN -рассеяния

| Процесс | Обмен | Процесс | Обмен |
|---------------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$ | $P+f+\rho+\omega+A_2$ | $K^-p \rightarrow K^-p$ | $P+f+\rho+\omega+A_2$ |
| $\bar{p}n \rightarrow \bar{p}n$ | $P+f-\rho+\omega-A_2$ | $K^-n \rightarrow K^-n$ | $P+f-\rho+\omega-A_2$ |
| $pp \rightarrow pp$ | $P+f-\rho-\omega+A_2$ | $K^+p \rightarrow K^+p$ | $P+f-\rho-\omega+A_2$ |
| $pn \rightarrow pn$ | $P+f+\rho-\omega-A_2$ | $K^+n \rightarrow K^+n$ | $P+f+\rho-\omega-A_2$ |

Примечание. При замене $p \leftrightarrow n$ -траектории с нечетным изоспином ρ и A_2 меняют знак. При замене частицы на античастицу траектории с нечетным S_n ρ и ω меняют знак.

с такими переменными знаками, чтобы $\langle \text{Im} \{A^r\} \rangle = 0$, если провести усреднение по нескольким резонансам, но ясно, что это не есть решение, которое хотелось бы иметь для упругих экзотических процессов.

Таким образом, существенно, чтобы картина вырождения реджевских траекторий была бы согласована со спектром резонансов. Тогда можно объяснить тот факт, что экзотические процессы характеризуются довольно пологим поведением полных сечений $\sigma^{tot}(s)$ и простым экспоненциальным поведением $d\sigma/dt$ в зависимости от t при обмене P , в то время как неэкзотические, связанные с помощью кроссинга с предыдущими, процессы $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$ и $K^-p \rightarrow K^-p$, в которых знак при вкладах обменов с отрицательной сигнатурой ρ и ω изменен на обратный, имеют убывающие $\sigma^{tot}(s)$, а при низких энергиях — структуру $d\sigma/dt$ с минимумом при $|t| = 0,55 \text{ ГэВ}^2$, вследствие вклада R (см., например, рис. 6.4 и 6.5). Ниже следствие этих требований обменного вырождения обсуждается подробнее.

ПСКЭ дают новый инструмент для проведения реджевского анализа, потому что если, например, из фазового анализа известна низкоэнергетическая амплитуда, то можно использовать (7.2.14) и (7.2.16) для того, чтобы определить реджевские параметры без обращения к высокоэнергетическим экспериментальным данным. Это было сделано Доленом и др. [143], которые в качестве примера использовали разность между амплитудами упругого рассеяния $\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$, полученную из фазового анализа при энергиях $E < 1,5 \text{ ГэВ}$, для того чтобы получить параметры ρ -обмена из (7.2.22) (см. рис. 7.1).

Так как даже в случае обмена одной траекторией в (7.2.14) имеются два параметра при каждом данном значении t : $\alpha(t)$ и $G(t)$, то правила сумм не имеют единственного решения. Но если определить для амплитуды без переворота спина ($M = 0$)

$$S_m(t) = \frac{1}{N^{m+1}} \int_0^N v^m D_s^{\frac{m}{2}}(v', t) dv' = 2G(t) N^{\alpha(t)} / [\alpha(t) + m + 1] \quad (7.3.4)$$

Используя замечание (7.2.4) и положив $s_0 = 1$, то можно построить отношение

$$S_{m'}(t)/S_m(t) = \alpha(t) + m' + 1/[\alpha(t) + m + 1]. \quad (7.3.5)$$

Таким образом, $\alpha(t)$ может быть найдено из отношения первых двух моментов своей сигнатуры ($m = 0$ и $m = 2$ для ρ , имеющей $\xi = -1$). Вводя полученное выражение снова в (7.3.4), можно найти $G(t)$. Результаты находились в хорошем согласии с параметрами ρ , полученными при подгонках экспериментальных данных при высоких энергиях.

Различные резонансные вклады имеют различные зависимости от t вследствие того, что каждый вклад содержит $d_{\mu\mu'}^j(z_s)$, где j — спин резонанса. Эти функции вращения являются осциллирующими по переменной z_s (а следовательно, и по t при фиксированном s) и можно показать, что при некоторых значениях t левая часть (7.3.4) обращается в нуль. Для $\text{Im} \{A_{++}(v, t)\}$ это происходит при $t \approx -0,15 \text{ ГэВ}^2$, причем это пересечение с нулем появляется и в реджевской амплитуде. Для $\text{Im} \{A_{+-}(v, t)\}$ этой точке соответствует $t \approx -0,55 \text{ ГэВ}^2$, которое совпадает с положением нефизического нуля (см. разд. 6.8, л, м). Для того чтобы построить реджевское поведение с правильной зависимостью вычетов от t нужно учесть вклады различных резонансов.

Конечно, при таком использовании ПСКЭ приходится терпеть некоторые неоднозначности, связанные с существованием вторичных траекторий, разрывов и т. п., когда делается описание данных при высоких энергиях, однако, по крайней мере в принципе, эти вторичные вклады можно идентифицировать. Таким образом, если имеется вторичная траектория ρ' с $\alpha_1(t)$, в дополнение к обычной траектории ρ , то из (7.3.4) можно вывести

$$\frac{S_0(t) - G(t) N^{\alpha(t)}/(\alpha(t) + 1)}{S_2(t) - G(t) N^{\alpha(t)}/(\alpha(t) + 3)} = \frac{\alpha_1(t) + 3}{\alpha_1(t) + 1} \quad (7.3.6)$$

и поэтому раз уж $\alpha(t)$ и $G(t)$ найдены, вполне возможно получить $\alpha_1(t)$ и т. д. Фактически, в работе Долена и других вторичная траектория получилась довольно высокой: $\alpha_1(t) = 0,3 + 0,8t$. Это, вероятно, вследствие ошибок построения, которые возникают при определении параметров последовательно, один за другим, подобно тому как это делалось выше.

В правилах сумм при высоких моментах вес интегралов смещается в направлении верхнего предела интегрирования и если N достаточно большое, то использование ПСКЭ становится существенно эквивалентным реджевской подгонке около N . Но в действительности N довольно небольшая величина, потому что фазовый анализ никогда еще не совершался за пределами области энергий, больших 3 ГэВ . Это означает, что полученные результаты очень сильно зависят от предположений относительно высокоэнергетического поведения, и в действительности, так как экспериментальные данные имеют конечную точность, невозможно предсказать единственную аналитическую эк-

страполяцию. Итак, можно сделать вывод, что метод определения высокоэнергетического поведения амплитуд из экспериментальных данных при низких энергиях дает довольно ограниченную информацию. Конечно, эти экстраполяции ни в коей мере не могут заменить экспериментальные данные при высоких энергиях. Кроме того, фазовый анализ сделан всего для нескольких реакций (только для $\pi N \rightarrow \pi N$, $KN \rightarrow KN$, $\gamma N \rightarrow \pi N$, $\pi N \rightarrow \pi \Delta$) и поэтому число процессов, для которых этот метод может быть использован прямо, даже после того, что мы призвали на помощь изотопические соотношения типа (6.8.23), до некоторой степени ограничено. Довольно часто ПСКЭ используют для других процессов, но, конечно, если делают дополнительные предположения, такие, как насыщение низкоэнергетической амплитуды резонансами (это предположение использовали в предыдущем разделе при рассмотрении амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния), хотя очевидно, что неопределенность полученных результатов в этом случае увеличивается.

Однако имеется одно очень существенное преимущество метода ПСКЭ по сравнению со стандартными реджевскими подгонками, а именно то, что фазовый анализ дает входные амплитуды A_{H_s} прямо, тогда как из данных по $d\sigma/dt$ извлекается только $\sum_{H_s} |A_{H_s}|^2$. Таким

образом, с помощью ПСКЭ можно прямо находить характеристики реджевского поведения различных спиновых амплитуд и определять их фазы без обращения к поляризованным или каким-либо другим измерениям величин, зависящих от спина. Таким образом, довольно значительную часть информации, содержащуюся в амплитудном анализе πN -рассеяния при энергии 6 ГэВ, который обсуждался в разд. 6.8н, можно также получить, по крайней мере качественно, экстраполируя с помощью ПСКЭ решения, полученные фазовым анализом при энергиях, меньших 2 ГэВ, в предположении о реджевском поведении.

Таким образом, ПСКЭ, особенно если они используются совместно с подгонками высокоэнергетических экспериментальных данных, оказывают очень ценную помощь при реджевском анализе (см. работу [36], в которой содержатся примеры их использования).

7.4. Модель Венециано

Значительный прогресс в понимании и обобщении концепции дуальности связан с именем Венециано [389]. Он построил простую модель для амплитуд рассеяния $2 \rightarrow 2$, которые удовлетворяют большей части требований дуальности.

Начнем наше рассмотрение с процесса $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, который имеет ρ - и f -полюса в s - и t -каналах. u -Канал $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$ является экзотическим, так как $I_u = 2$. Итак, в том случае если померонная компонента исключается при рассмотрении этого процесса упругого рассеяния, то мы ожидаем, что приближенно вырожденные ρ - и f -траектории дадут лидирующие вклады в обоих каналах, однако может еще существовать бесконечный набор резонансов с теми же самыми квантовыми числами.

Требование дуальности (7.3.4) состоит в том, что сумма по всем s -канальным полюсам должна равняться сумме по всем t -канальным полюсам, т. е.

$$A(s, t) = \sum_n G_n(s, t)/(s - s_n) = \sum_m G_m(t, s)/(t - t_m), \quad (7.4.1)$$

и что реджевское асимптотическое поведение возникает по обоим переменным, т. е.

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{\alpha(s)} (t - \text{фиксировано}), \quad A(s, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{\alpha(t)} (s - \text{фиксировано}). \quad (7.4.2)$$

Простейшей функцией, которая содержит бесконечный набор s -канальных полюсов, лежащих на траектории $\alpha(s)$ и возникающих, когда $\alpha(s)$ равняется положительному целому числу, является $\Gamma(1 - \alpha(s))$

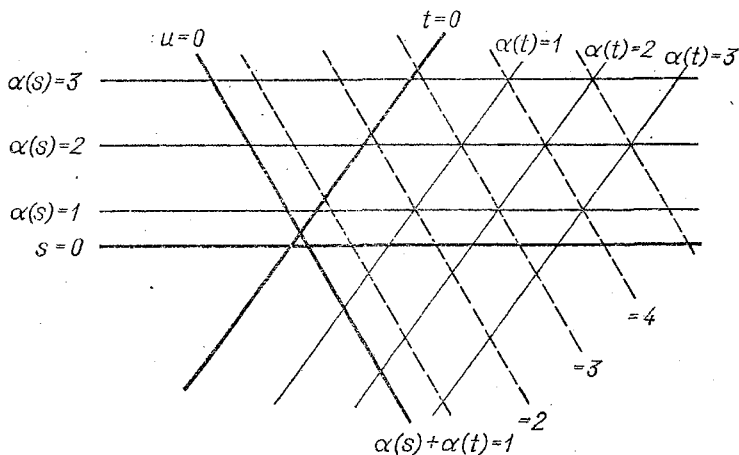


Рис. 7.4. Полюса амплитуды Венециано в плоскости $s-t$.

Полюса возникают, когда $\alpha(s)$ и $\alpha(t)$ принимают положительные целые значения, причем линии нулей пересекают точки пересечения полюсов для того, чтобы предотвратить возникновение двойных полюсов

Так как необходимо, чтобы полностью аналогичное поведение возникло и по t , то можно попробовать написать амплитуду

$$A(s, t) = \Gamma(1 - \alpha(s)) \Gamma(1 - \alpha(t)), \quad (7.4.3)$$

но это выражение может давать двойной полюс в плоскости $s-t$, когда как $\alpha(s)$, так и $\alpha(t)$ равняются положительным целым числам (рис. 7.4). Однако эти двойные полюса легко устраняются, если написать амплитуду в виде

$$A(s, t) = V(s, t) \equiv g \Gamma(1 - \alpha(s)) \Gamma(1 - \alpha(t)) / \Gamma(1 - \alpha(s) - \alpha(t)), \quad (7.4.4)$$

которая и есть амплитуда Венециано. Здесь g — произвольное число, которое задает масштаб сил связи, как это будет показано ниже [см. уравнение (7.4.12)].

Асимптотическое поведение этой амплитуды может быть выведено с помощью формулы Стирлинга [292]

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} (2\pi)^{1/2} e^{-x} x^{x-1/2} \quad (7.4.5)$$

(эта формула справедлива всегда, за исключением клина вдоль оси отрицательных значений x и содержащего эту ось, где при целых значениях x возникают полюса), которая дает

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x+b) \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} x^{a-b} (1+O(1/x)). \quad (7.4.6)$$

Следовательно, если $\alpha(s)$ — растущая функция s , то имеем при фиксированном t , используя (6.2.32):

$$V(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\rightarrow} g \frac{\pi(-\alpha(s))^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t)) \sin \pi \alpha(t)}. \quad (7.4.7)$$

Затем если положить, что $\alpha(s)$ — линейная функция s , т. е. $\alpha(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\rightarrow} \alpha^0 + \alpha' s$, то получим

$$V(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\rightarrow} g \frac{\pi(-\alpha' s)^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t)) \sin \pi \alpha(t)} = g \frac{\pi(\alpha' s)^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t)) \sin \pi \alpha(t)} \exp\{i\pi \alpha(t)\}, \quad (7.4.8)$$

которая приводит к требуемому реджевскому поведению. А так как формула (7.4.4) симметрична по s и t , то очевидно, что точно такой же результат действителен и в случае, когда $t \rightarrow \infty$, а s — фиксировано.

Формула (7.4.4) заслуживает особое внимание: а) она явно кроссинг-симметрична и, таким образом, имеет одинаковые полюса и одинаковое реджевское поведение как по s , так и по t ; б) для того чтобы получить нужное реджевское поведение, мы должны потребовать, чтобы траектория была асимптотически линейна. Это требование полностью соответствует наблюдаемому линейному поведению при малых $|s|$, что до сих пор является загадочным; в) она имеет полюса только при целых положительных значениях $\alpha(t)$, так как нефизический множитель $[\Gamma(\alpha(t))]^{-1}$ устраняет полюса при $\alpha(t) \leq 0$; г) она также имеет фазу (6.8.21), отвечающую сумме двух обменно-вырожденных траекторий. Это обеспечивает то, что при $s > 0$ $\text{Im}\{V(s, t)\} \sim s^{\alpha(t)}$, а при $s < 0$, т. е. в физической области u -канала, $\text{Im}\{V(s, t)\} = 0$, так как u -канал экзотический. Однако поскольку полюса расположены на действительной оси, то скачок как в s -, так и в t -каналах является просто суммой δ -функций, а двойная спектральная функция определена на множестве точек, где пересекаются траектории полюсов, как показано на рис. 7.4; д) масштабный фактор в асимптотическом поведении (7.4.8) дается

$$s_0 = (\alpha')^{-1}. \quad (7.4.9)$$

Ранее мы уже отмечали, исходя из эмпирических соображений, что $s_0 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$, а $\alpha' \approx 1 \text{ ГэВ}^{-2}$.

Для того чтобы получить спектр резонансов в s -канале, используем следующую формулу [292]:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a+1)}{\Gamma(x+a)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n)\Gamma(n+1)} \frac{1}{x+n},$$

$a > 0$ — действительное число. (7.4.10)

С помощью этой формулы можно написать

$$V(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g \frac{\Gamma(1-\alpha(t))}{\Gamma(n)\Gamma(1-n-\alpha(t))} \frac{(-1)^n}{\alpha(s)-n}. \quad (7.4.11)$$

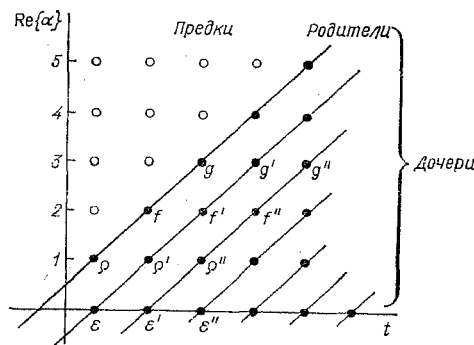
Таким образом, если $\alpha(s) \rightarrow n$ при $s \rightarrow s_n$, то имеется полюс следующего вида:

$$V(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow s_n} g \frac{(n+\alpha(t)-1)(n+\alpha(t)-2)\dots(+\alpha(t))}{(n-1)! \alpha'(s-s_n)}. \quad (7.4.12)$$

Итак, если $\alpha(t) = \alpha^0 + \alpha' t$, то вычет в полюсе является полиномом по t [$= -2q_s^2 (1-z_s)$] порядка n , а

$$V(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow s_n} \frac{g}{\alpha'(s-s_n)(n-1)!} [(2q_s^2 \alpha' z_s)^n + O(z_s^{n-1})] \quad (7.4.13)$$

и, следовательно, вычет может быть переписан в виде суммы по полиномам Лежандра $P_n(z_s)$, $P_{n-1}(z_s)$, ..., $P_0(z_s)$. Таким образом, полюс при $s = s_n$ соответствует последовательности $(n+1)$ вырожденного резонанса, которые имеют спины, равные $0, 1, 2, \dots$



..., n . Окончательный спектр резонансов представляет собой бесконечную последовательность пространственно раздвинутых дочерних траекторий, показанных на рис. 7.5, причем названная частиц с данным спином соответствуют названию частицы с наименьшей массой.

Рис. 7.5. Состояния $\varepsilon, \rho, f, g, \dots$, требуемые моделью Венециано для лл-рассеяния.

Открытыми кружочками показаны положения, где возникают предки, если, конечно, используются комплексные траектории a

Так как амплитуда Венециано является аналитической функцией по s и t , имеющей правильное асимптотическое поведение и содержащей только полюса, то совершенно ясно, что она должна была бы давать решение условия согласованности ПСКЭ (7.2.22). Это не совсем тривиально, потому что реджевское асимптотическое поведение нарушается на положительной полуоси s . Связь между вычетами двух каналов, каждый из которых пропорционален g , очень напоминает наше приближенное решение (7.2.27). Довольно полный обзор свойств формулы Венециано и проверка ПСКЭ можно найти в работе [363].

Наиболее очевидным дефектом модели Венециано является то, что полюса расположены на вещественной оси s и, таким образом, мы не получаем реджевского поведения именно там, где оно в действительности наблюдается экспериментально. Это происходит потому, что мы используем действительные траектории, тогда как известно (из рассмотрения, проведенного в разд. 3.2), что выше порога в каждом из каналов унитарность требует, чтобы траектории становились комплексными [$\text{Im} \{ \alpha(t) \}$ должна быть пропорциональна Γ , ширине резонанса, см. (2.8.7)] и полюса уходили с физического листа.

Поэтому кажется довольно очевидным, что необходимо ввести в рассмотрение комплексные траектории, удовлетворяющие дисперсионным соотношениям типа (3.2.12) в (7.4.4). Однако если это сделать, то вычеты полюсов при $s = s_n$ в (7.4.12) перестанут быть полиномами по t , тогда выражение (7.4.13) станет больше неприменимым, поскольку каждый полюс создает резонансы с произвольно высоким спином, в частности появятся полюса на рис. 7.5, отвечающие так называемым «предкам». Несмотря на появление этих предков, асимптотическое поведение все же остается в виде (7.4.8). Это указывает на то, что амплитуда больше не сходится при больших l , что необходимо для выполнения теоремы Карлсона (см. разд. 2.7). Кроме того, петли Аргана теперь довольно слабо связаны с резонансами (см. [131, 343] и рис. 7.6), а амплитуда не имеет гладкого реджевского асимптотического поведения, если только $\text{Im} \{ \alpha \}$ не растет очень быстро с увеличением s . В этом случае резонансы становятся настолько широкими, что исчезают.

Хотя было сделано много значительно более утонченных попыток, по сравнению с указанной выше, ввести резонансы с ненулевой шириной в формулу Венециано, ни одна из них не оказалась удовлетворительной, потому что связи, налагаемые аналитичностью и требованием реджевского асимптотического поведения по всем направлениям, оказываются слишком жесткими [29, 118]. Для того чтобы использовать модель феноменологически, необходимо признать достоверность асимптотического поведения (7.4.8), несмотря на то, что оно на самом деле несправедливо при положительных вещественных значениях s . Кроме того, для феноменологии очень существенно, чтобы можно было включить в рассмотрение внешние частицы с более высокими спинами, особенно со спином, равным $1/2$. Это уже сделано (см. Невье и Шварц [317]), однако, для того чтобы удовлетворить симметрии Мак-Дауэлла, в этих моделях пришлось ввести дублеты по четности. Вследствие того, что дочерние последовательности модели Венециано не соответствуют последовательности полюсов Толлера, необходимо, чтобы бесконечные суммы венециановских членов

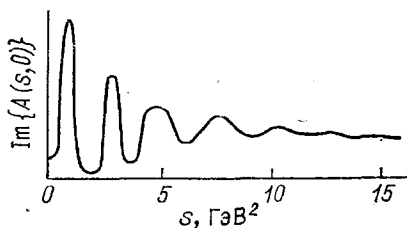


Рис. 7.6. Мнимая часть амплитуды $\alpha\alpha$ -рассеяния в модели Венециано с комплексными α

удовлетворяли соотношениям конспирации (6.5.7). В дальнейшем мы коснемся некоторых обобщений модели Венециано в гл. 9.

Кроме того, важно отметить, что выражение (7.4.4), конечно, не является единственным. Действительно, амплитуда

$$A(s, t) = \sum_{l, m, n \geq 0} C_{lmn} V_{lmn}(s, t), \quad n \leq l + m; \quad (7.4.14)$$

$$V_{lmn} \equiv g \Gamma(l - \alpha(s)) \Gamma(m - \alpha(t)) / \Gamma(n - \alpha(s) - \alpha(t)), \quad (7.4.15)$$

где C_{lmn} — произвольные коэффициенты, также удовлетворяет всем ПСКЭ и требованиям дуальности. Выражения V_{lmn} известны как «сателлитные» члены Венециано. Они отличаются от (7.4.4) тем, что имеют первый полюс по s при $\alpha(s) = l$, а асимптотическое поведение $s^{\alpha(t) + n - l}$ и т. д. Ясно, что $l = 0$ возможно только в том случае, если траектория пересекает линию $\alpha(s) = 0$ при $s > 0$ в отличие от того, что изображено на рис. 7.5. Эта произвольность демонстрирует слабость условий согласованности ПСКЭ по сравнению с полными бутстрапными требованиями, которые зависят от унитарности.

Несмотря на эти проблемы, которые сильно ограничивают феноменологические применения, модель Венециано является очень полезной теоретической «игрушкой», которая, как будет показано в гл. 9, может быть легко распространена на многочастичные процессы.

Пока модель подходит только для процесса $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, который имеет экзотический u -канал ($I_u = 2$). Если предположить, что f' не связан с системой ($\pi\pi$) (см. разд. 5.2), то полная амплитуда вследствие этого будет иметь только обменно-вырожденные $\rho - f$ -траектории в качестве лидирующих траекторий (раз уж померонная компонента вычтена), но необходимо также наложить требования, следующие из изоспиновых кроссинговых связей (6.7.10), и ограничение, связанное со статистикой Бозе, выражающееся в том, что амплитуда с четным изоспином является четной при пространственном отражении $z \rightarrow -z$, и наоборот. Таким образом, t -канальные изоспиновые амплитуды могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} A_s^0(s, t) &= a(V(s, t) + V(t, u)) + bV(s, u) \text{ четная при замене } s \leftrightarrow u; \\ A_s^1(s, t) &= c(V(s, t) - V(t, u)) \text{ нечетная при замене } s \leftrightarrow u; \\ A_s^2(s, t) &= V(s, u) \text{ четная при замене } s \leftrightarrow u, \text{ экзотический канал} \end{aligned} \right\} \quad (7.4.16)$$

(где a , b и c — константы), при условии, что $V(s, t)$ симметрична при замене $s \rightarrow t$ и т. д. Применяя затем соотношение кроссинга (6.7.10)

$$A_s^I = \sum_{I_t} M(I_s, I_t) A_t^I$$

к (7.4.16) с кроссинговой матрицей $\pi\pi$ из табл. 6.3, найдем, что, для того чтобы быть уверенными в отсутствии полюса в экзотической амплитуде A_s^2 , т. е. чтобы устранить из нее члены $V(s, t)$ и $V(s, u)$, необходимо, чтобы $a = (3/2)c$, а $b = -1/2$. В то же время для того

чтобы сделать амплитуду A_s^0 симметричной при замене $t \leftrightarrow u$, требуется, чтобы $c = 1$. Итак,

$$\begin{aligned} A_t^0(s, t) &= (3/2) (V(s, t) + V(t, u)) - (1/2) V(s, u); \\ A_t^1(s, t) &= V(s, t) - V(t, u); \\ A_t^2(s, t) &= V(s, u). \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

Этот результат получен Ловласом [289]. Вычеты t -канальных полюсов в (7.4.17), отвечающие трем изотопическим спином $I_t = (0, 1, 2)$, очевидным образом находятся в соотношении $3 : 2 : 0$, которое дает собственный вектор кроссинговой матрицы $\pi\pi$ -рассеяния с собственным значением, равным 1, т. е.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 1/2 & -5/6 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.4.18)$$

Когда $s \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow -\infty$) при фиксированном t , то, подставляя (7.4.7) в (7.4.17), получаем

$$A_t^i(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{g\pi(\alpha' s)^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t)) \sin \pi\alpha(t)} [\exp[i\pi\alpha(t)] - 1], \quad (7.4.19)$$

причем появление (-1) — следствие члена $V(t, u)$. В квадратных скобках (7.4.19) содержится, конечно, только сигнатурный фактор, ожидаемый для ρ -полюса, имеющего $I_t = 1$ и отрицательную сигнатуру. Подобным образом для амплитуды A_t^0 , четной при замене $s \leftrightarrow u$, получаем, что члены $V(s, t) + V(t, u) \sim [\exp(i\pi\alpha(t)) + 1] s^{\alpha(t)}$, т. е. появляется сигнатурный фактор f -траектории, имеющей положительную сигнатуру. Особой тщательности, однако, требует рассмотрение члена $V(s, u)$. Он не содержит никаких полюсов по t и, следовательно, не должен давать вклад в асимптотическое поведение в этом пределе. Из (7.4.6) находим

$$V(s, u) \sim e^{-cs}, \quad s \rightarrow \infty, \quad t \text{ — фиксировано}, \quad (7.4.20)$$

где c — константа при условии, если $\alpha'_s = \alpha'_u$, т. е. когда наклоны траекторий в s - и u -каналах одинаковы. Ясно, что для кроссинг-симметричной амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния это будет справедливо всегда.

Итак, $V(s, t)$ в (7.4.7) обращается в нуль, когда

$$\alpha(s) + \alpha(t) = 1, \quad \text{т. е. } 2\alpha^0 + \alpha's + \alpha't = 1. \quad (7.4.21)$$

Этот нуль совпадает с адлеровским нулем, требуемым алгеброй токов (см., например, работы Реннера [341] и Адлера и Дашена [15]), которая приводит к обращению в нуль амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния в нефизической точке $s = t = u = m_\pi^2$, если

$$\alpha^0 = 1/2 - \alpha'm_\pi^2 \quad (7.4.22)$$

(см. работу Вайнберга [401]). Так как траектория должна достигать значения $\alpha = 1$ при $t = m_\rho^2$, то имеем

$$\alpha' = (1/2)(m_\rho^2 - m_\pi^2) \approx 0,88 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \alpha^0 = 0,48 \quad (7.4.23)$$

в довольно хорошем согласии с (5.3.1) и рис. 5.5, 6.6. Используя эти параметры для траектории, находим, что имеется хорошее согласие между (7.4.4) и требованиями алгебры токов [289]. Итак, несмотря на очевидные дефекты, модель Венециано обладает, как это ни удивительно, многими правдоподобными свойствами лл-рассеяния.

7.5. Дуальность и $SU(3)$

При построении модели амплитуды лл-рассеяния (7.4.17) использовали тот факт, что раз уж вклад померона P не рассматривается, то имеется только одна лидирующая траектория во всех каналах лл-рассеяния — изотопически вырожденная ρ — f -траектория (так как предполагается, что f' -мезон не связан с системой лл). Таким образом, удобно обозначить $V(s, t)$ в (7.4.17) $V_{\rho\rho}(s, t)$, так как ρ - (или f -) полюса возникают по s и по t . Обменное вырождение необходимо потому, что если использовать очевидные обозначения для факторизованных констант связи траекторий с частицами

$$\left. \begin{aligned} \text{Im} \{A(\pi^+ \pi^-)\} &= (f_{\pi\pi})^2 + (\rho_{\pi\pi})^2; \\ \text{Im} \{A(\pi^+ \pi^0)\} &= (f_{\pi\pi})^2 - (\rho_{\pi\pi})^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.5.1)$$

то сильное обменное вырождение приводит к соотношению

$$(f_{\pi\pi})^2 = (\rho_{\pi\pi})^2 \quad (7.5.2)$$

и таким образом устраняет полюса в экзотической амплитуде лл-рассеяния с $I = 2$.

Если теперь рассмотреть $K\pi$ -рассеяние, связанное с лл-рассеянием $SU(3)$ -симметрией, то в этой реакции будет иметься в t -канале точно такая же ρ — f -траектория (t -канал — лл $\rightarrow K\bar{K}$), но как в s -, так и в u -канале появится обменно-вырожденная $K^* - K^{**}$ -траектория. Для того чтобы получить требуемую траекторию, мы должны написать

$$\begin{aligned} A_t^{\frac{1}{2}} &= a (V_{\rho K^*}(t, s) + V_{\rho K^*}(t, u)) \text{ четная при замене } s \leftrightarrow u; \\ A_t^{\frac{1}{2}} &= b (V_{\rho K^*}(t, s) - V_{\rho K^*}(t, u)) \text{ нечетная при замене } s \leftrightarrow u \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

где V_{ij} аналогичны V в (7.4.4), но нужно учесть, что различные траектории появляются в разных каналах (случай $I_t = 2$ невозможен для $K\bar{K}$). Однако, имея в виду (7.4.20), потребуем, чтобы $\alpha_\rho = \alpha_{K^*}$ и, таким образом, только пересечения траекторий могут быть различными. Для того чтобы получить s -канальные изотопические амплитуды, используем в соотношении кроссинга (6.7.10) кроссинговую матрицу лл-рассеяния табл. 6.3, а для того чтобы устранить полюса в экзотическом состоянии $I_s = 3/2$, необходимо положить $a = (\sqrt{3}/2) b$. Это дает

$$\begin{aligned} \text{Im} \{A(K^+ \pi^+)\} &= f_{KK} f_{\pi\pi} - \rho_{KK} \rho_{\pi\pi}; \\ \text{Im} \{A(K^+ \pi^0)\} &= f_{KK} f_{\pi\pi} + \rho_{KK} \rho_{\pi\pi} \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

и $f_{KK}f_{\pi\pi} = \rho_{KK}\rho_{\pi\pi}$, которое, вместе с нашим решением (7.5.2), приводит к

$$f_{KK} = \rho_{KK}. \quad (7.5.5)$$

Процессы упругого KK - и $\bar{K}K$ -рассеяния очень похожи, за исключением того, что при $I = 0$ имеются обмены f - и ω -траекториями, а при $I = 1$ — обмены ρ - и A_2 -траекториями. Итак, можно написать:

$$\begin{aligned} \text{Im} \{A(K+K^-)\} &= (f_{KK})^2 + (A_{2KK})^2 + (\omega_{KK})^2 + (\rho_{KK})^2; \\ \text{Im} \{A(K+K^+)\} &= (f_{KK})^2 + (A_{2KK})^2 - (\omega_{KK})^2 - (\rho_{KK})^2; \\ \text{Im} \{A(K+K^0)\} &= (f_{KK})^2 - (A_{2KK})^2 - (\omega_{KK})^2 + (\rho_{KK})^2; \\ \text{Im} \{A(K+\bar{K}^0)\} &= (f_{KK})^2 - (A_{2KK})^2 + (\omega_{KK})^2 - (\rho_{KK})^2, \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

причем знаки изменены в связи с требованиями, налагаемыми сигнатурой и зарядовым сопряжением обменов. Вследствие того что $K+K^+$ - и $K+K^0$ -системы экзотические ($S = 2$), потребуем

$$(f_{KK})^2 = (\omega_{KK})^2 \text{ и } (A_{2KK})^2 = (\rho_{KK})^2, \quad (7.5.7)$$

с тем чтобы ω - и A_2 -траектории были вырождены с f - и ρ -траекториями соответственно. На самом деле это приближенно справедливо (см. рис. 5.4). Однако (7.5.3) и (7.5.7) подразумевают

$$\rho_{KK} = \omega_{KK}, \quad (7.5.8)$$

в то время как точная группа $SU(3)$ для констант связи дала бы [201]

$$(\sqrt{3}) \rho_{KK} = \omega_{KK}. \quad (7.5.9)$$

Мы можем удовлетворить оба эти требования, если вспомнить, что в нарушенной $SU(3)$ -симметрии физическая частица ω может быть смесью октетного и синглетного состояний [см. (5.2.17)], а тогда требование $SU(3)$ -симметрии для констант связи приобретает вид

$$(\sqrt{3}) \rho_{KK} = \omega_{8KK}. \quad (7.5.10)$$

Таким образом, если взять идеальный угол смешивания, даваемый (5.2.18), $\cos \theta = 3^{-1/2}$, то как (7.5.8), так и (7.5.10) будут удовлетворены. Это означает, что в KK -рассеянии (но не в $\pi\pi$) будут также происходить обмены обменно-вырожденной $\Phi + f'$ -траекторией. А это очень желательно, поскольку из формул (7.5.5) и (7.5.7) следует, что $\text{Im} \{A(K+\bar{K}^0)\}$ в (7.5.6) обращается в нуль; все это означало бы, если бы не было $\Phi + f'$ -вклада, что в канале $K+\bar{K}^0$ отсутствуют резонансы, несмотря на неэкзотичность этого канала.

Все эти соотношения могут быть легко описаны, если разные частицы представляют исходя из их кваркового содержания, показанного в табл. 5.2 [223, 347]. Все входящие и выходящие мезоны могут быть представлены как состояние $q_i q_j$, где $q_i, q_j = p, n$ - или λ -кварки. Условие, которое налагается на соотношения (7.5.1), (7.5.4) и (7.5.6), состоит в том, что не должно быть никаких экзотических резонансов и, таким образом, все внутренние частицы должны также иметь квантовые

числа представлений $\{1\} \oplus \{8\}$ группы $SU(3)$, в которых также содержатся состояния $q\bar{q}$ [см. (5.2.16)]. Поэтому с помощью дуальной диаграммы рис. 7.7, *a* можно представить амплитуду $V(s, t)$ для любого, рассмотренного выше случая рассеяния псевдоскалярных мезонов друг на друге, так как эта диаграмма обеспечивает сохранение квантовых чисел и, следовательно, существование только неэкзотических состояний как в s -, так и в t -каналах. Линии не должны пересекать одна другую, как это показано на рис. 7.7, *б, в*, так как в противном случае возможно возникновение экзотики в одном из каналов.

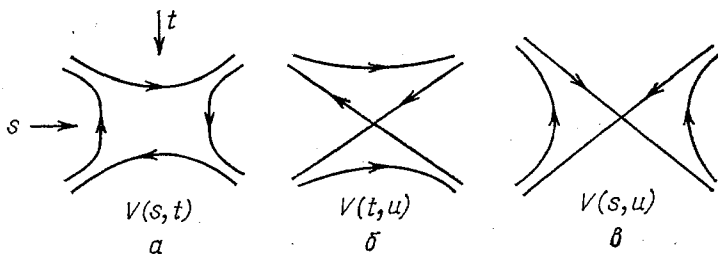


Рис. 7.7. Кварковые дуальные диаграммы для мезон-мезонного рассеяния. Стрелками показаны направления движения кварков, antiquarks движутся в направлениях, противоположных тем, которые указываются стрелками

Однако эти диаграммы с пересекающимися линиями вполне подходят для описания членов $V(s, u)$ и $V(t, u)$ соответственно. Диаграммы рис. 7.7 содержат в себе также наш результат (7.5.10), основанный на существовании угла смешивания, так как в упругом $K^+\bar{K}^0$ -рассеянии

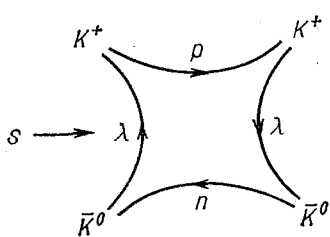


Рис. 7.8. Дуальная диаграмма для упругого $K^+\bar{K}^0$ -рассеяния

(рис. 7.8) имеется только $\lambda\bar{\lambda}$ -состояние, а следовательно, при идеальном смешивании [см. уравнение (5.2.19)] может осуществляться только обмен $\varphi - f'$ в t -канале. Другие траектории ρ, ω, f и A_2 не дают вклада в этот процесс.

В случае точной $SU(3)$ -симметрии мезон-мезонное рассеяние представляется прямым произведением двух октетов $\{8\} \oplus \{8\}$ с амплитудами A_{μ}^{μ} , $\mu = \{1\}, \{8_{ss}\}, \{8_{sa}\}, \{8_{as}\}, \{8_{aa}\}, \{10\}, \{\bar{10}\}, \{27\}$ (см. разд. 6.7). Однако так как состояния,

отвечающие $\{10\}, \{\bar{10}\}$ и $\{27\}$ экзотические, то необходимо найти решение, которое являлось бы собственным вектором кроссинговой матрицы $\{8\} \otimes \{8\}$ (см. табл. 6.4), имея при этом собственное значение, равное 1, и которое не содержало бы никаких траекторий, относящихся к $\{10\}, \{\bar{10}\}$ и $\{27\}$ [ср. (7.4.18) для изоспина]. Как следствие зарядового сопряжения, для тензора $\{8\}$ возможны только симметричные связи d -типа, а для вектора $\{8\}$ — только антисимметрич-

ные связи f -типа. Собственный вектор, который удовлетворяет всем указанным выше требованиям, имеет вид

$$A^\mu = (16, 5, 0, 0, 9, 0, 0, 0), \quad (7.5.11)$$

который позволяет получить отношение констант связей в синглетных и октетных траекториях.

Эти результаты могут быть легко распространены на процессы с участием других, не только псевдоскалярных мезонов [113], например $PS - V$ - или $V - V$ -рассеяния. Требования, налагаемые на обмены

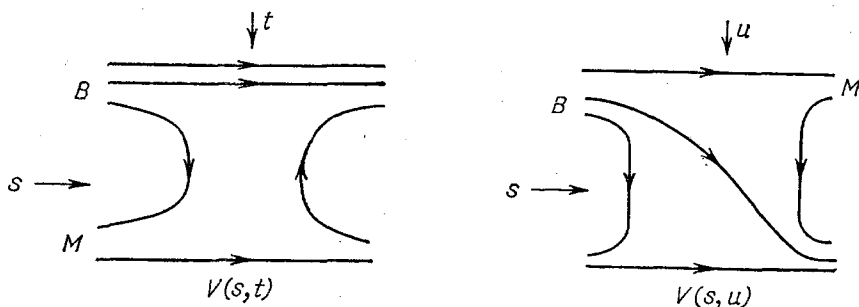


Рис. 7.9. Дуальные диаграммы для мезон-барионного рассеяния

с естественной четностью, идентичны тем, что были сформулированы выше, однако кроме этих обменов могут возникнуть обмены с неестественной четностью. Для этих обменов необходимо, чтобы PS -нонет (π, K, η, η') с естественной зарядовой четностью C_n был обменно вырожденным с A^- -нонетом ($B, Q, H?$) с естественной C_n , а в случае неестественной четности $C_n A^+$ -нонет ($A_1, Q, D?$) должен быть обменно вырожден с некоторым аксиальным тензорным нонетом. Картина нарушения симметрии для каждого нонета должна быть похожа на картину, которая наблюдается в случае естественной четности. Если теперь отвлечься от того факта, что многие из требуемых состояний до сих пор не обнаружены, то известно, например что $\eta - \eta'$ -смешивание далеко от идеального и поэтому может оказаться, что фактически эти дуальные ограничения имеют силу только для лидирующих мезонных траекторий с естественной четностью.

Дуальные диаграммы свидетельствуют также о том, как можно удовлетворить требованиям внутренней симметрии с точки зрения дуальности в мезон-барионном рассеянии, поскольку можно представить все внешние и внутренние барионы как состояния $q_i q_j q_k$, где с помощью индексов i, j, k нумеруются p -, n - и λ -кварки, как показано на рис. 7.9. Это обеспечивает нам то, что только неэкзотические барионы возникают в s -канале, а в t -канале — только неэкзотические мезоны. Отметим, что диаграмма, соответствующая s - и u -каналам, содержит только барионы в промежуточном состоянии.

Когда $SU(3)$ -симметрия нарушена, требования обменного вырождения, налагаемые на мезонные обмены в членах $V(s, t)$ и $V(t, u)$ в $PS - B$ -рассеянии, являются аналогичными тем, которые имели

место при рассмотрении $PS - PS$ -рассеяния [300]. Фактически, как уже было отмечено в табл. 7.1, требования обменного вырождения для ρ , ω , A_2 - и f -траекторий предотвращают появление экзотических состояний в K^+p и pp , так как эти требования точно такие же, что и в ранее рассмотренных случаях $K^+\pi^+$ и $\pi^+\pi^+$.

Ограничения на барионный спектр возникают от члена $V(s, u)$, который отвечает за рассеяние назад. Наиболее правдоподобное и полное решение, полученное Мандулой, Вейерсом и Цвайгом [301], требует, чтобы октет $J^P = 1/2^+$ был обменно вырожден с декуплетом

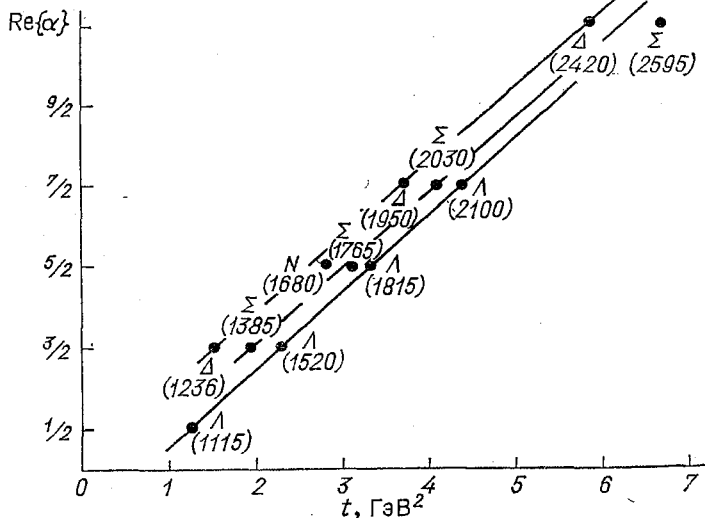


Рис. 7.10. Некоторые примеры обменно-вырожденных барионных траекторий. Расщепление является значительно более сильным в большинстве случаев

$3/2^+$, октетом $3/2^-$ и синглетом $3/2^-$. Однако очевидно, что это ограничение сильно нарушено, так как, например, Δ -траектория хорошо разделена с траекторией N (см. рис. 5.6), хотя оказывается, что Λ - и Σ -траектории удовлетворяют этому ограничению довольно хорошо (рис. 7.10). Модель Венециано может быть построена и для мезон-барионного рассеяния, если использовать $V(s, t)$ и т. д. [подобные тем, что были в (7.4.4)] для инвариантных амплитуд A' и B [см. (4.3.11)] при условии, что $\alpha \rightarrow \alpha - 1/2$ в каналах, содержащих барионы (см. для примера работу [405]). Достаточно подробный обзор самосогласованных и обладающих свойством факторизации решений для этих случаев дается в работе [343]. Однако кажется довольно вероятным, что требования, возникающие из необходимости существования факторизации, слишком жесткие, так как с точки зрения феноменологии (мы будем обсуждать это ниже) дуальность, по-видимому, включает в себя сумму разрезов и полюсов, а не только полюса.

Когда переходим к рассмотрению барион-антибарионного рассеяния, то сразу возникают серьезные трудности. Например, в случае

Δ -рассеяния возможны состояния с $I = 0, 1, 2, 3$, однако если потребовать отсутствия экзотических мезонов с $I = 2, 3$ как в s -, так и в t -каналах, то это приведет к тому, что все изотопические амплитуды обратятся в нуль [346]. Фактически, это довольно очевидным образом следует из дуальной диаграммы рис. 7.11, которая содержит $\overline{qq\overline{q}q}$ в качестве промежуточного состояния и, следовательно, приводит к экзотике. Таким образом, либо нужно признать, что дуальность несостоятельна при рассмотрении этих каналов, характеризующихся высокими порогами, либо мы должны заключить, что экзотические мезоны существуют, но слабо проявляют себя в мезон-мезонном рассеянии.

Сформулируем правила рисования «разрешенных» дуальных диаграмм в пределе $SU(3)$ -симметрии: кварк изображается \rightarrow —, антикварк \leftarrow —, поэтому каждый мезон представляется \Rightarrow —, а каждый барион \Rightarrow — \Rightarrow — \Rightarrow —. В случае $B=0$ должна быть возможность разрезать диаграмму на две с промежуточными состояниями только типа \overline{qq} (не должно быть $\overline{qq\overline{q}q}$ и т. д.), а в случае $B=1$ — только с состояниями qqq , так чтобы отсутствовала экзотика. Никакие кварковые линии не могут пересекаться, т. е. каждый венециановский член характеризуется планарными диаграммами, а два конца каждой линии должны принадлежать различным частицам, чтобы сохранить идеальное смешивание [347]. Все это работает для мезон-мезонного и мезон-барионного рассеяния, однако несправедливо для барион-барионного рассеяния. В разд 9.4 будет показано, как эти правила распространяются на случай многочастичных процессов.

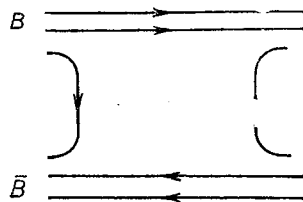


Рис. 7.11. Дуальная диаграмма для барион-антибарионного рассеяния

7.6. Феноменологические выводы дуальности

Есть много важных следствий гипотезы дуальности, которые подтверждены экспериментально. Они включают в себя доминирование полюсных членов в непомерной части амплитуд рассеяния, отсутствие экзотических резонансов (которое может помочь объяснить нам, почему кварковая модель работает), сильное обменное вырождение и «обращение вычетов в нуль в нефизических точках», идеальное смешивание представлений группы $SU(3)$ и факт, что $s_0 = (\alpha')^{-1}$. Однако мы также обнаружили, что когда мы начинаем хотеть слишком многого, то самосогласованность дуальной схемы нарушается, и поэтому важно постараться с помощью эксперимента открыть ту область, в которой идеи дуальности работают хорошо.

Мы уже отмечали, что обменное вырождение и идеальное смешивание, по-видимому, достоверны только для векторных и тензорных мезонов. Так как эти обмены являются доминирующими в мезон-барионном и барион-барионном рассеянии вперед, правила дуальности

довольно хорошо работают для таких процессов. Например, на рис. 6.4 показано, что полные сечения экзотических процессов pp - и K^+p рассеяния много более пологие, чем полные сечения процессов pp - и K^-p -рассеяния, а это кажется вполне естественным с точки зрения двухкомпонентной дуальности, потому что $\text{Im} \{A^{el}(K^+p)\}$ содержит только P . Однако $\sigma^{tot}(pp)$ при малых s падают. Это указывает на отсутствие сокращения между ω - и \bar{f} -обменами. Эти траектории, конечно, дают вклад в $\text{Re} \{A^{el}\}$ [см. (6.8.22)]. Минимумы в $d\sigma/dt$ при $|t| \approx 0,55 \text{ ГэВ}^2$, наблюдаемые при средних энергиях в pp - и K^-p -взаимодействиях и являющиеся следствием нефизического нулевого значения вклада R , совершенно отсутствуют в pp - и K^+p -взаимодействиях (см. рис. 6.5). Это является прямым указанием на важность s -канальных квантовых чисел при рассмотрении t -канальных обменов и, следовательно, подтверждает дуальность.

Уже предпринимали попытки подробно описать мезон-баррионное рассеяние, используя модель Венециано для члена R . Необходимую для этого «гладкость» амплитуды достигли тем, что асимптотическое поведение (7.4.8) считали справедливым даже для действительных положительных значений s . Чтобы учесть спиновую структуру баррионов модель Венециано обычно формулируют для каждой инвариантной амплитуды $A'(s, t)$ и $B(s, t)$, введенных в (4.3.11), а не для спиральных амплитуд, потому что первые имеют более простые кроссинговые свойства. Главная трудность заключается в том, что, поскольку разрезы не включены в рассмотрение, автоматически возникают баррионные дублеты по четности [см. (6.5.13)]. Для того чтобы получить наблюдаемое в эксперименте экспоненциальное падение $d\sigma/dt$ в зависимости от t , масштабный фактор α^{-1} должен быть изменен [заметим, что g в (7.4.4) — константа], должны быть введены сателлитные члены и тогда возникает проблема, связанная с кроссовером и изложенная в разд. 6.8 м [46]. Таким образом, количественные подгонки экспериментальных данных с помощью модели Венециано на самом деле невозможны.

Другое интересное следствие дуальности [35] состоит в том, что так как при идеальном смешивании ϕ состоит только из $\lambda\bar{\lambda}$ -кварков, то невозможен обмен парой $q\bar{q}$ в квазиупругом процессе $\gamma p \rightarrow \phi p$ и, следовательно, возможен лишь обмен помероном (рис. 7.12). Очень плавная энергетическая зависимость этого процесса даже при низких энергиях (рис. 7.13) это подтверждает.

В случае неупругих процессов, где P не дает вклада, сильное обменное выражение приводит к равенствам, связанным соотношениями кроссинга, которые описывались в разд. 6.8ж. В частности, $\text{Im} \{A(s, t)\}$ должна обращаться в нуль одинаковым образом для всех неупругих процессов с экзотическими квантовыми числами s -канала. Примерами являются процессы $K^+n \rightarrow K^0p$ и $Kp \rightarrow K\Delta$, для которых дуальные диаграммы с обменами мезонными состояниями ($q\bar{q}$) не могут быть нарисованы (рис. 7.14). Более интересны процессы, подобные

$$K^-p \rightarrow \pi^-\Sigma^+, K^-n \rightarrow \pi^-\Lambda, K^-n \rightarrow \pi^-\Sigma^0,$$

которые не являются экзотическими, но для которых никаких «разрешенных» дуальных программ нельзя нарисовать, так как должно быть сокращение между обменами K^* и K^{**} в $\text{Im}\{A\}$. Кроме того вклады резонансов, возникающих в этих процессах, должны иметь разные знаки, так чтобы $\langle A^r \rangle \approx 0$, когда проводится усреднение по нескольким резонансам.

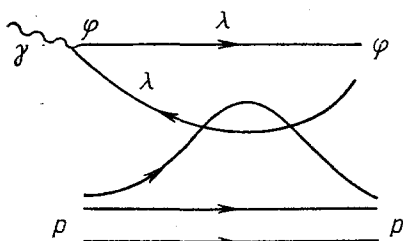


Рис. 7.12

Рис. 7.12. Представление померонного обмена P в реакции $\gamma p \rightarrow \phi p$.

Эта диаграмма характеризуется вакуумными квантовыми числами t -канального обмена, так как в t -канале не может пройти пара (qq) . Это связано с тем, что протон не содержит λ -кварков

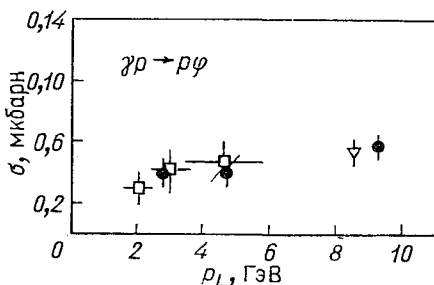


Рис. 7.13

Рис. 7.13. График зависимости сечения $\sigma(\gamma p \rightarrow \phi p)$ от импульса в лабораторной системе координат ρ_L [282]

Аналогично если t -канал является экзотическим, как в $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \Delta^-$ или $K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$, то вследствие того, что t -канальные обмены отсутствуют, можно ожидать, что в среднем резонансы будут сокращаться. Оказывается, что это приближенно выполняется для первого процесса, но не выполняется для второго [163,261]. Из дуальных диаграмм следует и другое предсказание: вследствие того что $\phi = \lambda\bar{\lambda}$, то ϕ не рождается в неупругих (без обмена P) процессах, в которых участвуют только нестранные кварки. Таким образом, процессы типа $\pi^- p \rightarrow \phi n$, $\pi^+ p \rightarrow \phi \Delta^{++}$ не должны происходить.

И на самом деле оказывается, что их сечения очень малы по сравнению с похожими разрешенными процессами, такими, как $\pi^- p \rightarrow \omega n$, $\pi^+ p \rightarrow \omega \Delta^{++}$.

Можно заключить, что требования дуальности, обменного вырождения и идеального смешивания неплохо удовлетворяются при рассмотрении V - и T -обменов, но, конечно, не являются точными. Однако для большинства других обменов, таких, как PS , A^\pm или барион, они довольно сильно нарушены.

Мы замечали, что сильное обменное вырождение требует обращения вычетов в нуль в нефизических точках, однако мы нашли

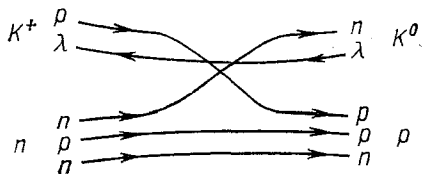


Рис. 7.14. Запрещенная дуальная диаграмма для процесса $K^+ n \rightarrow K^0 p$

в разд. 6.8к, что, по-видимому, гипотеза нефизического выбора несовместима с факторизацией, даже для V и T -обменов. Фактически кажется вероятным, что необходимо сокращение полюсов и разрезов, для того чтобы объяснить провал в $d\sigma/dt$ (πN) около точки $\alpha = 0$ (см. разд. 8.7в). Аналогичным образом можно предварительно заключить, что кроссовер с нулем в $\text{Im} \{A_{++}\}$ при $|t| \approx 0,15 \text{ ГэВ}^2$ является следствием сокращения полюсов и разрезов (см. разд. 6.8л). Однако, как уже упоминали в разд. 7.3, оба эти свойства присутствуют в низкоэнергетическом резонансном вкладе, и поэтому кажется, что как будто дуальность работает несколько лучше, чем гипотеза о том, что реджевские полюсные обмены доминируют. Поэтому, может быть, лучше написать

$$\langle A^r \rangle \approx A^R + A^c, \quad (7.6.1)$$

где A^c — реджевская амплитуда, отвечающая разрезам, а не (7.3.2).

Дальнейшие свидетельства в пользу этого возникают при рассмотрении процессов, в которых происходит обмен π -мезоном, т. е. процессов типа $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, $\pi p \rightarrow \rho p$ и т. д., где резонансы отвечают за образование пиков при рассеянии вперед, которые объясняли раньше (см. разд. 6.8 и, 8.7е) как следствие интерференции между π -полюсом и самоконспирирующимся разрезом π_c . Итак, мы имеем $\langle A^r \rangle \approx \pi + \pi^c$. Модель Венециано может дать объяснение этим процессам только при включении в рассмотрение конспирации траекторий [22], однако такие конспирации являются неудовлетворительными (см. разд. 6.8и). Таким образом, решения дуальных условий, в которых доминируют полюса, могут быть только грубой аппроксимацией.

Следующей проблемой модели Венециано является то, что отнюдь не все требуемые резонансы были наблюдаемы. Кажется несомненным, что лидирующие траектории ρ , ω , K^* растут линейным образом до уровня $J = 3$ или 4, а барионные траектории — возможно, вплоть до 19/2, однако нет никаких указаний, что резонансы с более высокими спинами будут в конце концов обнаружены. Это может быть отчасти связано с тем, что анализ непериферических парциальных волн (т. е. $J < (\sqrt{s})R$, см. разд. 2.2) довольно трудная задача из-за присутствия высших парциальных волн. Однако нет свидетельств, что дочерняя траектория ρ' (1275) траектории ρ вырождена с траекторией f (см. рис. 7.5), а фактически имеется сильное указание на то, что она не появляется в $\pi\pi$ -канале. Имеется свидетельство того, что более тяжелый и широкий резонанс ρ' (1600) связан сильнее с системой 4π , чем с 2π [327]. Это могла бы быть дочерняя траектория k g (1680), которая дает возможность предполагать, что возможны только нечетные дочерние траектории у траектории ρ .

Барионных резонансов известно значительно больше, чем мезонных, однако рис. 5.6 показывает, что провести их классификацию с помощью последовательностей дочерних траекторий отнюдь не простое дело. Во всяком случае ожидается, что резонансы с большими массами и небольшими спинами будут широкими из-за того, что для каждого из них имеется большое количество распадных каналов. И, таким образом, вероятно, что узкая резонансная аппроксимация

будет слишком плохой на дочернем уровне, и поэтому кажется значительно более правдоподобным, если мы будем рассматривать дочерние последовательности модели Венециано просто как δ -функциональную аппроксимацию скачков на разрезах от различных каналов. В следующей главе покажем, почему ожидается, что абсорбция будет много более сильной для низких парциальных волн, чем для высоких, и кажется вероятным, что доминирование полюсов наилучшим образом оправдывается для периферических парциальных волн, $J \approx (\sqrt{s})R$. Конечно, в случае линейных траекторий будут резонансы в высших периферических парциальных волнах вплоть до $J_{\max} \approx \alpha's$, таким образом доминирование полюсов может быть удовлетворительным фактически в области $\alpha's \gtrsim J \gtrsim (\sqrt{s})R$, однако в модели Венециано резонансы с $J \gg (\sqrt{s})R$ имеют довольно малую ширину и доминируют тогда те, для которых $J \approx (\sqrt{s})R$ (рис. 7.15). (Это должно быть так, потому что модель Венециано воспроизводит наблюдаемый периферический пик при рассеянии вперед.)

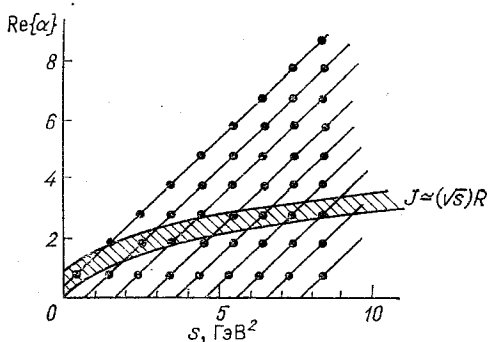


Рис. 7.15. Резонансы модели Венециано и область периферичности (заштриховано)

Несмотря на эти ограничения, модель Венециано оказывается успешной в одном довольно удивительном случае: она предсказывает нули амплитуд. В знаменателе выражения (7.4.15) стоит Γ -функция, которая означает, что амплитуда $V(s, t)$ имеет нуль вдоль линии

$$\alpha(s) + \alpha(t) = p, \quad (7.6.2)$$

где p равно целому числу $\geq n$. В случае параллельных линейных траекторий из (7.6.2) следует

$$\alpha_s^0 + \alpha_t^0 + \alpha'(s+t) = p \quad (7.6.3)$$

или из (1.7.21),

$$u = (\alpha_s^0 + \alpha_t^0 - p)/\alpha' + \Sigma = \text{const.} \quad (7.6.4)$$

Итак, предсказывается, что нули амплитуды расположены вдоль линии $u = \text{const.}$

Возникновение этих нулей в нефизической области $s, t > 0$, конечно, необходимо для того, чтобы предотвратить появление двойных нулей (см. рис. 7.4), однако предсказываемые нули продолжают также и в физическую область. Конечно, если добавить другие члены $V(s, u)$ и $V(t, u)$, то эти нули могут быть устранены. Однако в процессе, таком, как $K^{-p} \rightarrow \bar{K}^0 n$, для которого u -канал является экзотическим, возникает только член $V(s, t)$ и ожидается, что минимумы

в $d\sigma/dt$ при фиксированном u будут располагаться на расстоянии $\alpha'^{-1} \approx 1 \text{ ГэВ}^2$ друг от друга. Эти минимумы должны возникать не смотря на то, что отсутствуют u -канальные полюса, потому что они происходят от сокращения между s -канальными полюсами Λ , Σ^0 и t -канальными полюсами ρ , ω , f , A_2 . Фактически, фиксированные нули найдены при $u = -0,1, -0,7, -1,7 \text{ ГэВ}^2$ [320]. Они располагаются не точно там, где их предсказывает модель Венециано, однако в связи с приближенной природой модели некоторые смещения вполне возможны.

Одориго [321] показал, что такие фиксированные нули являются довольно общим свойством амплитуд рассеяния. Так как добавление поправочных членов любого типа будет приводить к смещению нуля, то совершенно замечательно, что это свойство модели является наблюдаемым, особенно если учесть различные трудности.

7.7. Заключение

Из предыдущей дискуссии совершенно очевидно, что статус концепции дуальности до сих пор является довольно неопределенным.

С одной стороны, кажется замечательным, что можно даже построить разумную самосогласованную модель типа (7.4.4), которая удовлетворяет столь многим требованиям дуальности и содержит так много успешных предсказаний. Фактически, когда модель пытаются сделать более «физической», с помощью введения 1) конечной ширины резонансов, 2) $SU(3)$ -нарушения для пересечений траекторий и 3) добавления померонного вклада, она начинает довольно хорошо описывать реальную физическую картину и дает правдоподобное объяснение таких фактов, как отсутствие экзотических резонансов, наличие идеального смешивания и параллельных линейных обменно-вырожденных траекторий и приводит к тому, что $\alpha'^{-1} \approx s_0$. Однако, к сожалению, эта физическая модель не является самосогласованной из-за существования проблемы предков, возникновения экзотики в канале $\overline{B\overline{B}}$ и т. д., она также не согласуется количественным образом с экспериментом.

Возможно, все это происходит потому, что дуальность является только приближенно достоверной. С другой стороны, вполне может быть, что дуальность является точным принципом, а все наши трудности происходят от неспособности включить надлежащим образом унитарность, особенно учесть реджевские разрезы. Однако каких-либо особенно убедительных аргументов в пользу дуальности как фундаментального закона сильных взаимодействий пока нет. Все эти очень жесткие ограничения дуальных моделей, которые дают их предсказательную силу, происходят от принятого нами требования мероморфности амплитуд рассеяния (см., например, [324], т. е. амплитуды содержат только полюса и не содержат разрезов), а в том случае, если разрешается существование разрезов, то еще не ясно, как сформулировать идею дуальности.

Наше предложение состоит в том, чтобы рассматривать модель Венециано как некоторый вид «борновского приближения» для силь-

ных взаимодействий, который можно было бы итерировать с помощью уравнений унитарности (как в разд. 3.5), чтобы образовать физическую S -матрицу. В этом случае будут возникать петлевые диаграммы типа тех, что показаны на рис. 1.11, б. Они соответствуют перенормировке масс, а также констант связи резонансов. Мы кратко рассмотрим некоторые из этих идей в гл. 9 и 11. Однако кажется, что они до сих пор страдают обычными неоднозначностями, связанными со сходимостью борновского ряда и двойным счетом членов, хотя в конце концов такие проблемы могут быть преодолены.

Имеется, однако, другое более важное свойство модели Венециано, которое будет рассматриваться в гл. 9. Она сравнительно легко обобщается на амплитуды многочастичных процессов и предусматривает такую параметризацию амплитуд, которая приводит к доминированию резонансов при низких энергиях, с одной стороны, и реджевскому асимптотическому поведению с факторизованными вычетами всех траекторий, с другой стороны, причем это справедливо во всех каналах. Это сильно облегчает применение теории Редже к многочастичным процессам. Итак, даже если окажется, что идея дуальности не является фундаментальным принципом динамики сильных взаимодействий, дуальные модели все же будут иметь некоторую область применимости: с одной стороны, как мнемонические модели для описания многих основных свойств двухчастичных процессов, а с другой стороны, как упрощенная модель для более сложных процессов.

8

РЕДЖЕВСКИЕ РАЗРЕЗЫ

8.1. Введение

В разд. 4.8 было показано, что наличие в нефизических точках чужой сигнатуры фиксированных полюсов Грибова—Померанчука, обусловленных третьей спектральной функцией ρ_{su} , приводит к появлению разрезов в плоскости углового момента t -канала. К тому же в разд. 6.8 отмечали, что, несмотря на большие успехи феноменологии реджевских полюсов, существуют некоторые экспериментальные данные, которые нельзя объяснить одними только полюсами. Это, в основном, отсутствие факторизации в некоторых процессах. Поэтому довольно естественно попытаться включить в рассмотрение реджевские разрезы, отвечающие обмену двумя или большим числом реджеонов. Амплитуда, учитывающая разрезы, не должна факторизоваться, что может улучшить описание указанных данных.

К сожалению, до сих пор свойства реджевских разрезов мы знаем значительно хуже, чем свойства полюсов. С феноменологической стороны это связано в основном с тем, что с уверенностью сказать, что именно отвечает за наблюдаемый эффект — полюса или разрезы — довольно трудно, поскольку большинство проверок, таких, как логарифмическое поведение амплитуды [см. (8.5.12)] и отсутствие факторизации,

плохо применимы. Хотя амплитуда с учетом разрезов и не должна факторизоваться, но в некоторых моделях факторизация, по крайней мере приближенно, выполняется. Некоторые из этих проблем будут рассмотрены в разд. 8.7.

Вдобавок, разнообразные теоретические модели, использовавшиеся, чтобы выяснить поведение полюсов Редже (рассмотренные в гл. 3), значительно труднее применить к случаю разрезов. Например, в случае потенциального рассеяния, когда есть только упругое условие унитарности и нет третьей спектральной функции, для потенциалов с гладким поведением вообще нет реджевских разрезов. Даже если потенциал обладает особенностью, например

$$U(r) = V_0 / r^2 + \bar{V}(r), \quad (8.1.1)$$

где $\bar{V}(r)$ не имеет особенностей при $r \rightarrow 0$, то уравнение Шредингера для радиальной части волновой функции принимает вид

$$\frac{d^2 \phi_l(r)}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1) + V_0}{r^2} - \bar{V}(r) \right] \phi_l(r) = 0. \quad (8.1.2)$$

Оно имеет тот же вид, что и (3.3.), если l заменить на L , определенное как

$$L(L+1) = l(l+1) + V_0, \quad (8.1.3)$$

так что решения будут мероморфны по L . Но при обращении (8.1.3) полюс по L в точке α дает корневую точку ветвления в l -плоскости при

$$l = (1/2) \{ -1 \pm [1 - 4V_0 + 4\alpha(\alpha+1)]^{1/2} \}, \quad (8.1.4)$$

поэтому сингулярная часть потенциала приводит к разрезам в l -плоскости. Однако нет никаких оснований полагать, что аналогичные разрезы будут существовать и в амплитуде сильных взаимодействий, так как эти разрезы не связаны с обменом несколькими реджеонами.

Для того чтобы исследовать свойства реджевских разрезов, нужно вместо потенциального рассеяния полагаться в основном на модели с диаграммами Фейнмана. Но, как будет видно из следующего раздела, существует целый ряд трудностей, связанных с неоднозначным соответствием между диаграммами Фейнмана и унитарными диаграммами и сходимостью рядов теории возмущений, что ограничивает применимость этих моделей к сильным взаимодействиям. Грибов [204] разработал замечательную схему включения самих реджевских полюсов в фейнмановские диаграммы, создав тем самым «реджеонное исчисление», с помощью которого можно получить скачки на разрезах в J -плоскости, аналогично тому, как диаграммы, получающиеся из условия унитарности, дают скачки на разрезах в s -плоскости. Эта схема, которая будет рассматриваться в разд. 8.3, позволила значительно продвинуться, хотя теория все еще не завершена.

Будут рассмотрены также некоторые распространенные приближенные методы вычисления вклада разрезов, в частности модель абсорбции и эйкональная модель. В последнем разделе будет приведено феноменологическое приложение этих идей. Большая часть материала

довольно сложна в техническом отношении и читателю рекомендуется пропускать наиболее сложные части при первом чтении. Если читателя интересует в основном феноменология, то он может сразу перейти к разд. 8.7 и возвращаться назад только при необходимости.

8.2. Реджевские разрезы и диаграммы Фейнмана *

В разд. 3.4 было выяснено, что обмену одним полюсом Редже соответствует набор лестничных диаграмм Фейнмана, аналогичных тем, которые изображены на рис. 8.1, просуммированных по всем возможным числам перекладин, как это сделано в выражении (3.4.12). Реджевские разрезы возникают от обмена двумя (или большим числом)

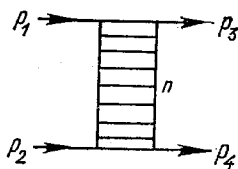


Рис. 8.1

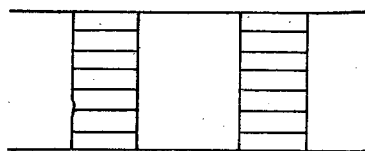


Рис. 8.2

Рис. 8.1. Лестничная диаграмма Фейнмана, дающая вклад в реджевский полюс в t -канале

Рис. 8.2. Двухлестничная диаграмма, которая, как можно было бы ожидать, приводит к реджевскому разрезу

реджеонами. Самый простой тип диаграммы, которая может привести к реджевскому разрезу, изображен на рис. 8.2. Это планарная диаграмма, а правила получения асимптотического поведения таких диаграмм относительно просты, потому что асимптотика зависит только от вклада конечных точек области интегрирования (см. разд. 3.4).

Асимптотическое степенное поведение лестничной диаграммы при $s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow \infty$ и фиксированном $t = (p_1 - p_3)^2$ имеет вид s^{-1} [как это следует из (3.4.11)] и не зависит от числа перекладин, потому что начальное и конечное состояния в диаграмме соединяются одночастичным пропагатором, а главный член по s имеет вид $s^{-1} (\ln s)^{n-1}$, так как существует n независимых способов, которыми можно перейти по одночастичному пропагатору от начальных частиц к конечным. Этот результат может быть обобщен на большинство планарных диаграмм следующим образом [157].

Будем искать пути по диаграмме (т. е. связанные наборы внутренних линий), такие, что если стянуть их в одну точку, то диаграмма расщепится на две части, имеющие общую вершину и не соединенные другими линиями, причем p_1 и p_3 связаны с одной частью диаграммы, а p_2 и p_4 — с другой (предполагается, что рассматриваем предел, когда $s \rightarrow \infty$, а t фиксировано). Три различных способа стягивания диаграммы, изображенной на рис. 8.3, *а*, показаны на рис. 8.3, *б*, *в* и *г*. Из этих путей выберем те, которые имеют наименьшую длину, т. е. те,

для стягивания которых нужно вычеркнуть наименьшее число линий. Таким образом, остаются диаграммы, изображенные на рис. 8.3, *в* и *г*, потому что при их стягивании сокращаются только две линии, а диаграмма на рис. 8.3, *б* исключается, потому что сокращаются три линии. Эти пути минимальной длины называются «*d*-линиями». Правило таково, что асимптотическое степенное поведение по *s* диаграммы, *d*-линии которой имеют длину *m*, имеет вид s^{-m} . Поэтому диаграмма, изображенная на рис. 8.3, *а* с *d*-линиями длины 2, ведет себя как s^{-2} , в то время как лестничная диаграмма на рис. 8.1 с *d*-линиями длины 1 обладает асимптотическим поведением s^{-1} .

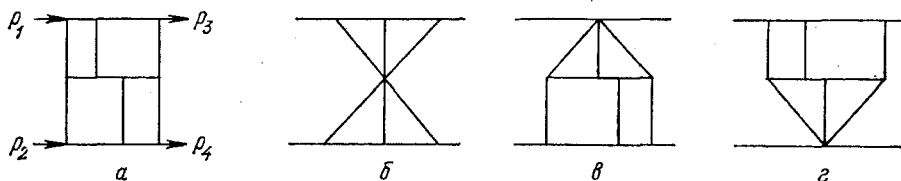


Рис. 8.3. *а* — Диаграмма Фейнмана. *б*, *в*, *г* — Три способа стягивания этой диаграммы, описанные в тексте

Если в данной диаграмме существует *n* таких *d*-линий (и все одной и той же минимальной длины *m*), то асимптотическое поведение будет иметь вид

$$s^{-m} (\ln s)^{n-1}, \quad m, n \geq 1. \quad (8.2.1)$$

Так, поскольку диаграмма на рис. 8.3, *а* имеет две *d*-линии, то ее поведение есть $s^{-2} \ln s$. Очевидно, что это правило для лестничных диаграмм приводит к формуле (3.4.11). Некоторые диаграммы, включающие так называемые «сингулярные конфигурации», являются исключениями из этого правила [157], но здесь нам не нужно будет их рассматривать.

Если применить (8.2.1) к графику с двумя лестницами (см. рис. 8.2), то ясно, что *d*-линиями в нем являются два пути вверх и вниз диаграммы, каждый из которых имеет длину 3, и поэтому $m = 3$, $n = 2$. Таким образом, все диаграммы, аналогичные диаграмме, изображенной на рис. 8.2, ведут себя как $s^{-3} \ln s$ независимо от числа перекладин в обеих лестницах. Поэтому можно ожидать (при условии сходимости ряда), что сумма всех таких диаграмм, со всеми возможными числами перекладин в лестницах, будет обладать таким же асимптотическим поведением и приводить к фиксированной особенности в точке $l = -3$ [см. (2.7.4)], а не к движущемуся реджевскому разрезу.

Реджевское поведение получается при суммировании по всем степеням $\ln s$ в (3.4.12), а в асимптотике всех диаграмм, аналогичных изображенной на рис. 8.2, появляется только первая степень $\ln s$, что мешает реджезации. Если просуммировать ряды диаграмм типа изображенных на рис. 8.4, то сумма приведет к реджевскому полюсу, аналогичному (3.4.12), но с $\alpha(\infty) = -3$. Малые лестницы просто перенормируют основную лестничную диаграмму, показанную на рис. 8.1. Это поясняет, почему планарные диаграммы, асимптотическое поведение которых возникает из-за особенностей в конечных точках, дают вклад только в полюса Редже, а не в разрезы.

Однако если мы возьмем скачок в диаграмме рис. 8.2 на разрезе, отвечающему двухчастичному промежуточному состоянию, как это показано на рис. 8.5, *а*, то двухчастичное условие унитарности (1.5.7) приведет к двухчастичному скачку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} (A^+ - A^-) = \Delta_2 \{A(s, t)\} = \\ & = \frac{q_s}{32\pi^2 \sqrt{s}} \int A^1(s, t_1) A^{2*}(s, t_2) d\Omega_s, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

где $d\Omega_s$ — элемент телесного угла в промежуточном состоянии (см. рис. 2.1); $A^1(s, t_1)$ и $A^2(s, t_2)$ — лестничные амплитуды, пока-

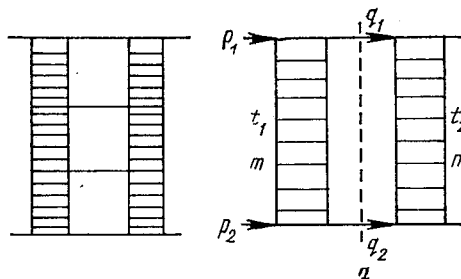


Рис. 8.4

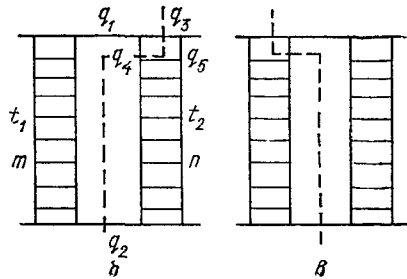


Рис. 8.5

Рис. 8.4. Диаграмма «лестница в лестнице», дающая вклад в перенормировку простой лестничной диаграммы с четырьмя перекладинами

Рис. 8.5. *а* — Диаграмма, изображенная на рис. 8.2, разрезанная по двухчастичному промежуточному состоянию. *б* — Разрез по трехчастичному промежуточному состоянию. *в* — Аналогичный разрез

занные на рисунке. Если это выражение разложить в ряд по s -канальным парциальным волнам, то получим [см. (2.2.7)]

$$\Delta_2 \{A_l(s)\} = \frac{2q_s}{\sqrt{s}} A_l^1(s) A_l^{2*}(s), \quad (8.2.3)$$

где

$$A_l^1(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A^1(s, t_1) P_l(z_1) dz_1, \quad z_1 = z_s(s, t_2), \quad (8.2.4)$$

и т. д., после суммирования ряда по парциальным волнам (2.2.2.) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2 \{A(s, t)\} &= 16\pi \sum_l (2l + 1) P_l(z_s) \Delta_2 \{A_l(s)\} = \\ &= 16\pi \sum_l (2l + 1) P_l(z_s) \frac{2q_s}{\sqrt{s}} \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A_1(s, t_1) P_l(z_1) dz_1 \times \\ &\quad \times \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A^{2*}(s, t_2) P_l(z_2) dz_2. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Но поскольку [197

$$\sum_l (2l+1) P_l(z_s) P_l(z_1) P_l(z_2) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta(\Delta)}{\sqrt{\Delta}}, \quad (8.2.6)$$

где

$$\Delta = 1 - z_s^2 - z_1^2 - z_2^2 + 2 z_s z_1 z_2, \quad (8.2.7)$$

а $\theta(\Delta)$ — ступенчатая функция

$$\theta(\Delta) = 0, \Delta < 0; \theta(\Delta) = 1, \Delta > 0, \quad (8.2.8)$$

то

$$\begin{aligned} \Delta_2 \{A(s, t)\} &= \frac{q_s}{16\pi^2 \sqrt{s}} \int_{-1}^1 dz_1 \times \\ &\times \int_{-1}^1 A^1(s, t_1) A^{2*}(s, t_2) \frac{\theta(\Delta)}{\Delta^{1/2}} dz_2. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Тогда для больших s и малых t из (1.7.22) следует:

$$z_1 \approx 1 + 2 t_1/s; \quad z_2 = 1 + 2 t_2/s; \quad z_s = 1 + 2 t/s, \quad (8.2.10)$$

так что (8.2.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_2 \{A(s, t)\} &= \frac{q_s}{16\pi^2 \sqrt{s}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 A^1(s, t_1) A^{2*}(s, t_2) \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t_2))^{1/2}} dt_2, \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

где

$$\lambda(t, t_1, t_2) = t^2 + t_1^2 + t_2^2 - 2(tt_1 + tt_2 + t_1t_2) \quad (8.2.12)$$

[см. (1.7.11)]. Результат, следующий из (1.5.3)—(1.5.7) и из (8.2.2)—(8.2.11), таков, что при $s \rightarrow \infty$ и малых t

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{(2\pi)^4} 2\pi\delta[(p_1+q)^2 - m^2] 2\pi\delta[(p_2-q)^2 - m^2] d^4q \rightarrow \\ &\rightarrow \int \frac{d^2q_{\perp}}{(2\pi)^2} \rightarrow \frac{1}{8\pi_2 |s|} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda)^{1/2}} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

Это выражение будет часто использоваться для интегрирования по фазовому пространству в предельном случае высоких энергий. Поэтому если, например, представить каждую сумму лестниц амплитудой с обменом полюсом Редже с линейной траекторией

$$A^i(s, t) \sim s^{\alpha_i t} = \exp[(\alpha_i^0 + \alpha_i^1 t) \ln s], \quad (8.2.14)$$

и, поскольку известно, что [322]

$$\int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 \exp(b_1 t_1 + b_2 t_2) \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda)^{1/2}} = \\ = \pi \frac{\exp[b_1 b_2 t / (b_1 + b_2)]}{b_1 + b_2}, \quad (8.2.15)$$

то (8.2.11), когда $\ln s \rightarrow \infty$, приводит к

$$\Delta_2 \{A(s, t)\} \sim s^{(\alpha_1^0 + \alpha_2^0 - 1) + \alpha_1' \alpha_2' t / (\alpha_1' + \alpha_2')} / [(\alpha_1' + \alpha_2') \ln s], \quad (8.2.16)$$

что соответствует реджевскому разрезу при

$$\alpha_c(t) = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 - 1 + \alpha_1' \alpha_2' t / (\alpha_1' + \alpha_2') \quad (8.2.17)$$

с конечным скачком на разрезе [см. (2.7.4)]. До тех пор пока траектории $\alpha_i(t_i)$ есть монотонно возрастающие функции t_i в интервале $-\infty < t_i < 0$, асимптотика выражения (8.2.11) будет определяться областью $\lambda = 0$, что благодаря (8.2.12) приводит к (так как $t_1, t_2, t \leq 0$)

$$\sqrt{-t} = \sqrt{-t_1} + \sqrt{-t_2}. \quad (8.2.18)$$

Так что в более общем случае

$$\alpha_c(t) = \max \{ \alpha_1(t_1) + \alpha_2(t_2) - 1 \}. \quad (8.2.19)$$

Читатель может легко проверить, что для линейных траекторий (8.2.19) приводит к (8.2.17).

Этот аргумент заставил Амати, Фубини и Стангеллини [19] предположить, что диаграмма, изображенная на рис. 8.2, приводит к появлению реджевского разреза (называемого теперь разрезом *AFS*). Однако мы знаем, что асимптотическое поведение этой диаграммы на самом деле имеет вид $s^{-3} \ln s$, а не (8.2.16), и поэтому реджевское поведение двухчастичного скачка должно сокращаться другими разрезами диаграммы на рис. 8.2, такими, как, например, изображенный на рис. 8.5, б [296]. Это сокращение было ясно продемонстрировано в работе [215].

Скачок на двухчастичном разрезе, изображенном на рис. 8.5, а, можно записать в виде

$$\Delta_2 \{A\} = \frac{1}{2} \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(q_1^2 - m^2) (2\pi) \times \\ \times \delta(q_2^2 - m^2) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) A_m A_n^*, \quad (8.2.20)$$

где, как обычно,

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2 = q^2. \quad (8.2.21)$$

Введем 4-векторы

$$p_1' = p_1 - (m^2/s) p_2, \quad p_2' = p_2 - (m^2/s) p_1 \quad (8.2.22)$$

со следующими свойствами:

$$p_1'^2 = p_2'^2 = 0 + O(1/s^2), \quad 2p_1' p_2' = s. \quad (8.2.23)$$

Тогда, вводя переменные Судакова α_i , β_i и $\mathbf{q}_{i\perp}$ для каждого 4-вектора q_i [216]:

$$q_i = \alpha_i p'_1 + \beta_i p'_2 + \mathbf{q}_{i\perp}, \quad i = 1, 2, \quad (8.2.24)$$

где $\mathbf{q}_{i\perp}$ — двумерный вектор, перпендикулярный плоскости, которая содержит p'_1 и p'_2 ; α_i и β_i — проекции q_i на направления p'_2 и p'_1 соответственно. Таким образом, получаем:

$$d^4 q_i \delta(q_i^2 - \mu_i^2) = (1/2) |s| d\alpha_i d\beta_i d^2 \mathbf{q}_{i\perp} \delta(\alpha_i \beta_i s - \mu_i^2), \quad (8.2.25)$$

где

$$\mu_i^2 = m_i^2 + \mathbf{q}_{i\perp}^2, \quad (8.2.26)$$

а

$$\delta^4(p_1 + p_2 - \Sigma q_i) = \delta(\Sigma \alpha_i - 1) \delta(\Sigma \beta_i - 1) \delta(\Sigma \mathbf{q}_{i\perp}) 2/|s|. \quad (8.2.27)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_2 \{A\} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d\alpha_1}{2\alpha_1} \frac{d\beta_1}{2\beta_1} \delta(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) \delta(\beta_1 + \beta_2 - 1) \times \\ &\times A_m A_n^* d^2 \mathbf{q}_{1\perp} d^2 \mathbf{q}_{2\perp} \delta(\mathbf{q}_{1\perp} + \mathbf{q}_{2\perp}). \end{aligned} \quad (8.2.28)$$

Импульс, переданный по левой лестнице, равен

$$t_1 = (p_1 - q_1)^2 \rightarrow (\alpha_1 - 1) \beta_1 s - \mathbf{q}_{1\perp}^2 \quad (8.2.29)$$

и при $s \rightarrow \infty$ должен оставаться конечным, поскольку мы находимся в реджевском режиме. Таким образом, мы интересуемся областью интегрирования $\beta_1 \sim 1/s$, $\alpha_1 \sim \text{const}$ и поэтому благодаря δ -функции в выражении (8.2.28) должно быть $\beta_2 \sim 1$, $\alpha_2 \sim 1/s$, $\alpha_1 \sim 1$. Так что при $s \rightarrow \infty$

$$\Delta_2 \{A\} = \frac{1}{16\pi^2 s} \int A_m A_n^* d^2 \mathbf{q}_{1\perp}. \quad (8.2.30)$$

Теперь, если подставить в качестве асимптотического выражения для лестничной диаграммы (3.4.11), получим

$$\Delta_2 \{A\} = \frac{g^4}{16\pi^2 s^3} \frac{(\ln s)^{m+n-2}}{(m-1)!(n-1)!} \int K(t_1)^{m-1} K(t_2)^{n-1} d^2 \mathbf{q}_{1\perp}, \quad (8.2.31)$$

что представляет собой результат, необходимый для получения (8.2.16) после суммирования по всем перекладинам.

Если рассмотреть скачок, изображенный на рис. 8.5, б, то амплитуда левой части диаграммы равна

$$A^L = A_m g / (q_1^2 - m^2),$$

а правая часть имеет на одну перекладину меньше, так что

$$A^R = A_{n-1} g / (q_s^2 - m^2).$$

После интегрирования по q_2 , q_3 и q_4 получаем

$$\begin{aligned} \Delta_3 \{A\} &= \frac{g^4}{16\pi^2 s^3} \frac{(\ln s)^{m+n-2}}{(m+n-2)!(m-1)!(n-2)!} \times \\ &\times \int K(t_1)^{m-1} K(t_2)^{n-1} d^2 \mathbf{q}_{1\perp}. \end{aligned} \quad (8.2.32)$$

Теперь, добавляя разрез, изображенный на рис. 8.5, *в*, который совпадает с этим с точностью до замены $m \leftrightarrow n$, получаем точное сокращение асимптотического поведения скачка на разрезе, изображенном на рис. 8.5, *а*, т. е. формулы (8.2.31). Аналогичным образом возникают сокращения между асимптотикой всех других возможных унитарных сечений диаграммы рис. 8.2 и, следовательно, у нее действительно отсутствует реджевский разрез. (На самом деле *AFS*-разрез существует на нефизическом листе, попасть на который можно, только пройдя под двухчастичным разрезом по *s*.)

Приведенный выше пример очень хорошо демонстрирует опасность неоднозначного соответствия между диаграммами Фейнмана и унитарными диаграммами.

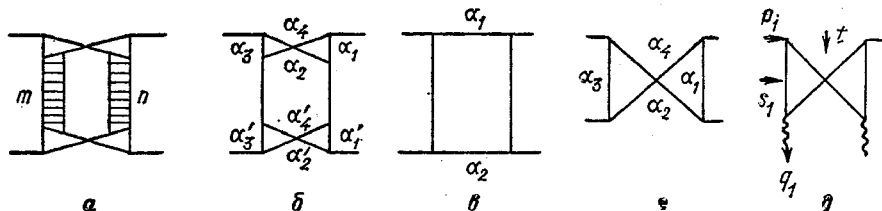


Рис. 8.6. *а* — Диаграмма Мандельстама — двойной крест. *б* — Наиболее простой вид диаграммы *а* с указанными фейнмановскими параметрами. *в* — Квадратная диаграмма, не обладающая асимптотическим поведением, возникающим из-за заземления контура. *г* — Диаграмма — крест. *д* — Диаграмма — крест в рассеянии реджеона на частице

Чтобы получить реджевский разрез, мы должны обратиться к непланарным диаграммам, в которых асимптотика получается из-за заземления контура интегрирования [157]. Самая простая диаграмма такого типа — диаграмма Мандельстама «двойной крест» (рис. 8.6, *а*), схема которой изображена на рис. 8.6, *б*. Она имеет шесть *d*-линий, каждая из которых имеет длину 2, и поэтому ее поведение, определяемое особенностями в концевых точках, имеет вид $s^{-2} (\ln s)^5$. Однако мы знаем, что крест — это простейшая диаграмма, которая может привести к фиксированному полюсу Грибова — Померанчука в точке $l = -1$ плоскости *t*-канального углового момента [см. (2.8.7)], так что эта диаграмма должна вести себя как s^{-1} .

Коэффициент при *s* в фейнмановском знаменателе в (3.4.4) равен

$$(\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4) (\alpha'_1 \alpha'_3 - \alpha'_2 \alpha'_4) = x_1 x_2, \quad (8.2.33)$$

и при интегрировании по α_i от 0 до 1 встретятся точки, где обращаются в нуль обе скобки x_1 и x_2 . В этой области интеграл имеет вид

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \frac{1}{(sx_1 x_2 + d)^2} = -\frac{1}{sd} \ln \left[\frac{(a_1 a_2 s + d)(b_1 b_2 s + d)}{(a_1 b_2 s + d)(a_2 b_1 s + d)} \right] + \dots \quad (8.2.34)$$

Когда *s* стремится к ∞ , аргумент логарифма стремится к 1 и, поскольку $\ln 1 = 0$, получаем ожидаемое поведение s^{-2} . Однако это верно только в том случае, когда все $a_i b_i > 0$ или все $a_i b_i < 0$. Если,

например, $a_1 a_2 < 0$ и $b_1 b_2 > 0$, то, когда s стремится к ∞ , числитель дроби под знаком логарифма стремится к $\infty + i\epsilon$, а знаменатель — к $\infty - i\epsilon$, так что весь логарифм стремится к $2\pi i$, что приводит вместо (8.2.34) к $-2\pi i (sd)^{-1}$. Поэтому обращение в нуль скобок в (8.2.33) дает асимптотическое поведение, определяемое защемлением контура и отличающееся от асимптотики, которая возникает из-за особенностей в конечных точках. В квадратной диаграмме, изображенной на рис. 8.6, v , x_1 и x_2 должны быть заменены на α_1 и α_2 соответственно, которые обращаются в нуль только в конечных точках.

Если теперь вернуться к диаграмме, изображенной на рис. 8.6, a , то главные особенности получаются вследствие защемления контура интегрирования в крестах и от конечных особенностей в лестницах (3.4.11). Найдено, что асимптотика этой диаграммы имеет вид

$$\frac{ig^4}{16\pi^2} \int dt_1 \int dt_2 \times \frac{[N(t, t_1, t_2)]^2 \theta(-\lambda) K(t_1)^{m-1} K(t_2)^{n-1} (1\pi s)^{m+n-2}}{(-\lambda(t, t_1, t_2))^{1/2} (m-1)! (n-1)! s^2}, \quad (8.2.35)$$

где $K(t)$ — амплитуда, отвечающая квадратной диаграмме (3.4.9), а N — фейнмановский интеграл, отвечающий кресту, изображенному на рис. 8.6, z вблизи точки защемления контура, т. е.

$$N = \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_4 \frac{\delta(\Sigma\alpha - 1) \delta(\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4)}{d(t, t_1, t_2, \alpha)}, \quad (8.2.36)$$

где d — фейнмановский знаменатель. Квадрат функции N возникает из-за того, что диаграмма 8.6, a содержит два одинаковых креста. Если теперь просуммировать (8.2.35) по всем возможным числам перекладки, то получим

$$A = \frac{ig^4}{16\pi^2} \int dt_1 \int dt_2 \frac{[N(t, t_1, t_2)]^2 \theta(-\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t_2))^{1/2}} s^{\alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1}, \quad (8.2.37)$$

что согласуется с результатом Амати, Фубини и Стангеллини (8.2.19) для положения разреза и приводит к выражению (8.2.17) в случае линейных траекторий.

Таким образом, диаграмма Мандельстама на рис. 8.6, a приводит к точке ветвления, положение которой в l -плоскости совпадает с AFS -разрезом (см. рис. 8.5, a). Выражение (8.2.37) отличается от (8.2.11) не только из-за наличия функции N^2 , но и потому, что (8.2.11) содержит амплитуду A_n^* , в то время как (8.2.35) ее не содержит. [Выражение (8.2.11) разделено на $2i$, потому что был взят скачок.] К тому же AFS -разрез может существовать только на нефизическом листе, в то время как разрез Мандельстама возникает на физическом листе и поэтому дает вклад в асимптотическое поведение амплитуды.

Другой способ убедиться, что необходима непланарная структура диаграмм, заключается в том, что можно записать

$$N(t, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 A_1(s_1, t, t_1, t_2), \quad (8.2.38)$$

где $A_1(s_1, t, t_1, t_2)$ — амплитуда рассеяния реджеона на частице, описываемая крестом на рис. 8.6, $\partial: s_1 = (p_1 - q_1)^2$, а контур интегрирования показан на рис. 8.7, *а*. Так как $A_1 \sim s^{-2}$, то можно развернуть контур, как это сделано на рис. 8.7, *б*, и получить

$$N(t, t_1, t_2) = 2i \int_{4m^2}^{\infty} \text{Im} [A_1(s_1, t, t_1, t_2)] ds_1, \quad (8.2.39)$$

что совпадает с вычетом в фиксированном полюсе Грибова — Померанчука в амплитуде A_1 , т. е. получается из (4.8.4) при $J_0 = -1$, $\lambda = \lambda' = 0$. Но, если амплитуда не имеет структуры креста и, следо-

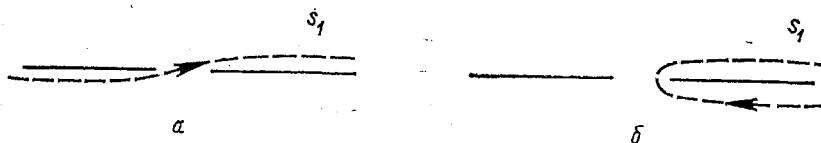


Рис. 8.7. *а* — Контур интегрирования вдоль действительной оси. *б* — Деформированный контур, огибающий разрез вдоль положительной полуоси s_1

вательно, обладает особенностями только при положительном s_1 , мы могли бы загнуть контур в верхней полуплоскости и получить $N = 0$, что и происходит в случае *AFS*-разреза. Вклад полюса в точке $q_1^2 = s = m^2$ на рис. 8.5, *а* сокращается с правым разрезом, обусловленным особенностями вершины реджеон — частица, простейший вклад в которую дается диаграммой на рис. 8.5, *б* [272, 348].

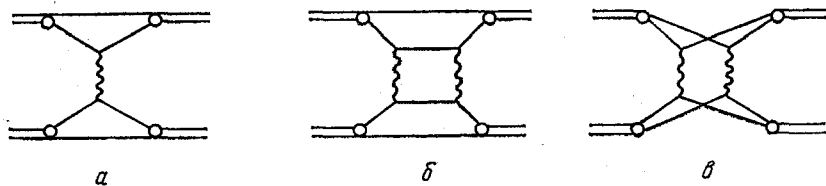


Рис. 8.8. Рассеяние дейтрона на дейтроне.

а — Единственное взаимодействие между парой нуклонов. *б* — Двойное взаимодействие между парой нуклонов. *в* — Двойное взаимодействие между различными парами нуклонов

Значительно более наглядная физическая интерпретация этого результата может быть получена при рассмотрении рассеяния составных частиц, например дейтронов. В *dd*-рассеянии, в дополнение к диаграмме с однократным обменом (рис. 8.8, *а*), возникают различные диаграммы с двойным рассеянием (рис. 8.8, *б*, *в*). Диаграмма рис. 8.8, *б* при высоких энергиях становится очень маловероятной, потому что

она требует, чтобы данная пара нуклонов рассеялась дважды друг на друге, несмотря на то, что они очень быстро пролетают мимо друг друга. С другой стороны, диаграмма рис. 8.8, *в* означает, что каждый нуклон испытал только однократное рассеяние, и этот процесс может существовать и при высоких энергиях. Итак, планарная диаграмма (*б*) вымирает при высоких энергиях, а диаграмма (*в*), зависящая от способа, которым нуклоны объединяются в дейтроне, выживает. Очевидно, что (*в*) имеет ту же структуру, что и диаграмма Мандельштама на рис. 8.6, *а*. (Связь между реджевскими разрезами и теорией многократного рассеяния Глаубера тем не менее довольно сложна [9, 192, 229].)

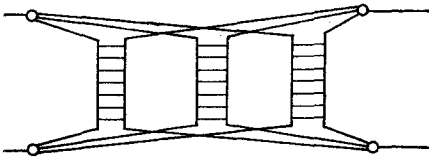


Рис. 8.9. Диаграмма, дающая трех-реджеонный разрез

Диаграмма с тремя лестницами с непланарными вершинами между ними (рис. 8.9) приводит к трех-реджеонному разрезу и т. д.

Приведенное выше обсуждение показывает, что с разрезами значительно сложнее иметь дело, чем с полюсами, так как, совершенно независимо от технических трудностей (которые мы опустили при этом

быстром изложении) при вычислении амплитуды, отвечающей вкладу ветвлений, необходимо использовать свойства фейнмановских интегралов вне массовой поверхности, а не только скачки интегралов, в которых частицы находятся на массовой поверхности. Так, например, возникает функция $N(t, t_1, t_2)$, которая определена только как фейнмановский интеграл, а не как физическая величина.

Несколько более регулярный способ исследования этой проблемы был предложен Грибовым — это реджеонное исчисление.

8.3. Реджеонное исчисление *

Реджеонное исчисление [204] использует фейнмановские интегралы для вычисления вершин связи реджеонов, но заменяет лестницы амплитудами, отвечающими обмену реджевскими полюсами. Такая замена кажется правдоподобной благодаря результатам типа (8.2.37).

Таким образом, диаграмма Мандельштама рис. 8.5 заменяется на рис. 8.10, где R_1 и R_2 — реджевские полюса. Тогда возникают три петли, две из которых отвечают крестам, а третья включает реджеоны, так что правила Фейнмана дают

$$A^c(s, t) = \frac{ig^4}{2} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \times \quad (8.3.1)$$

$$\times \frac{A^{R_1}(q_1, k_1, k_2) A^{R_2}(p - q_1, p_1 - k_1, p_2 - k_2)}{\prod_{m=1}^8 d_m}; \quad (8.3.1)$$

где d — фейнмановские пропагаторы

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= k_1^2 - m^2 + i\epsilon; \\ d_2 &= (p_1 - k_1)^2 - m^2 + i\epsilon \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.2)$$

Если ввести переменные Судакова, аналогично тому, как это сделано в (8.2.24),

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \alpha p'_2 + \beta p'_1 + \mathbf{q}_{1\perp}; \\ k_i &= \alpha_i p'_2 + \beta_i p'_1 + \mathbf{k}_{i\perp} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \quad (8.3.3)$$

знаменатели примут вид

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 \beta_1 s - \mu_1^2 + i\epsilon; \\ d_2 &= (\alpha_1 - m^2/s)(\beta_1 - 1)s - \mu_2^2 + i\epsilon \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.4)$$

где

$$\mu_i^2 = m^2 + \mathbf{k}_{i\perp}^2,$$

а элементы интегрирования равны

$$d^4 q_1 = (1/2) |s| d\alpha d\beta d^2 \mathbf{q}_{1\perp} \text{ и т. д.} \quad (8.3.5)$$

Поскольку $A^{R_1}(q_1, k_1, k_2)$ — амплитуда обмена реджевским полюсом, нужно, чтобы она обращалась бы в нуль при больших переданных импульсах $q_1^2 \gg m^2$, причем связанные с ними «массы» k_1^2 и k_2^2 также должны быть $\gg m^2$. Но поскольку соответствующая энергетическая переменная $s_1 = (k_1 + k_2)^2 \approx \approx 2 k_1 k_2 = \beta_1 \alpha_2 s$ велика, то основная область интегрирования в (8.3.1) это

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_{1\perp}^2, \mathbf{k}_{1\perp}^2, \mathbf{k}_{2\perp}^2 &\leq m^2 \alpha, \beta, \alpha_1, \\ \beta_2 &\sim m^2/s, \beta_1, \alpha_2 \sim 1. \end{aligned} \right.$$

Тогда с учетом факторизации амплитуды обмена реджеоном

$$\begin{aligned} A^{R_1}(q_1, k_1, k_2) &= \gamma(q_1^2, k_1^2, \\ &(q_1 - k_1)^2) \gamma(q_1^2, k_2^2, (q_1 + k_2)^2) \times \\ &\times \xi_{\alpha_1}(q_1^2) (2k_1 k_2)^{\alpha_1}(q_1^2), \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

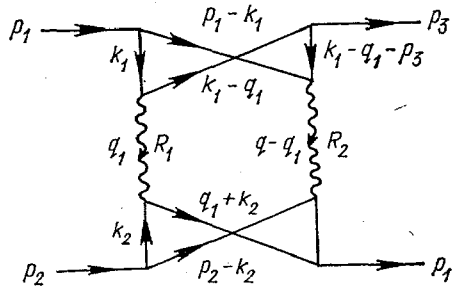


Рис. 8.10. Диаграмма, приводящая к двухреджеонному разрезу: $q_2 = q - q_1$; $q = p_1 - p_3$

где $\alpha_1(q_1^2)$ — реджевская траектория [не путать с переменными Судакова в выражениях (8.3.3)], а

$$\xi_{\alpha_1}(q_1^2) = \{ \exp[-i\pi\alpha_1(q_1^2)] + \xi_1 \} / \sin[\pi\alpha_1(q_1^2)] \quad (8.3.7)$$

— сигнатурный множитель. Аналогичное выражение можно записать для A^{R_2} и окончательно получим

$$A^c(s, t) = \frac{ig^4}{2|s|} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{1\perp}}{(2\pi)^2} N_{\alpha_1 \alpha_2}^2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{1\perp}) s^{\alpha_1(q_1^2) + \alpha_2(q_2^2)} \xi_{\alpha_1}(q_1^2) \xi_{\alpha_2}(q_2^2), \quad (8.3.8)$$

где

$$N_{\alpha_1 \alpha_2} = \int \frac{d^2 k_{1\perp}}{(2\pi)^2} \frac{d\beta_1 d\alpha_1 d\alpha s^2 \gamma^2 (\beta_1)^{\alpha_1 (q_1^2)} (1-\beta_1)^{\alpha_2 (q_2^2)}}{\prod_{m=1}^4 d_m} \quad (8.3.9)$$

есть фейнмановский интеграл по верхнему кресту. Он такой же, как (8.2.36), за исключением включения γ^2 и появления параметров Судакова, растущих в степени $\alpha (q^2)$, что связано со спинами реджеонов.

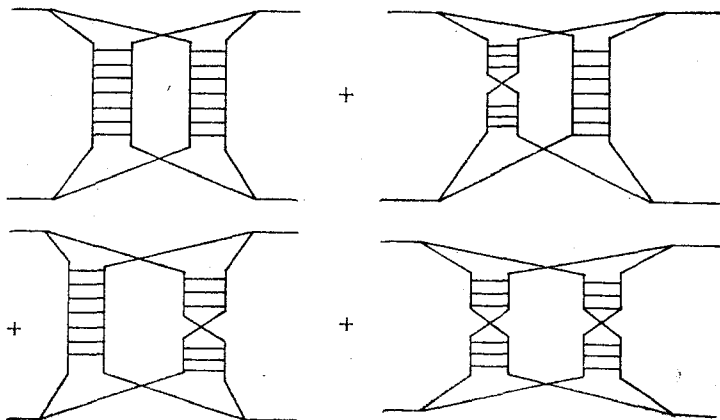


Рис. 8.11. Четыре диаграммы, включающие перекрестные члены $s \leftrightarrow u$, получающиеся из произведения сигнатурных множителей в выражении (8.3.8)

Ясно, что результат (8.3.8) согласуется с формулой (8.2.37), за исключением того, что теперь мы включили сигнатурные множители. Оставшиеся интегралы двумерны в соответствии с (3.4.9) и (8.2.13). Это вытекает из того обстоятельства, что после двойного разложения по парциальным волнам остаются только две переменные интегрирования из четырех. Очевидно, что сигнатура такого разреза есть просто произведение сигнатур двух полюсов, т. е.

$$\xi_c = \xi_1 \xi_2. \quad (8.3.10)$$

Это обусловлено тем, что в знаменателе появляется $|s|$, так что при замене $s \rightarrow -s$ A^c преобразуется как произведение двух полюсов. Четыре члена, получающиеся при перемножении двух сигнатурных множителей, показаны на рис. 8.11.

Чтобы исследовать структуру J -плоскости, сделаем преобразование Меллина (2.10.3):

$$A_J(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} D_s(s, t) s^{-J-1} ds, \quad (8.3.11)$$

где скачок по s выражения (8.3.8) дается формулой

$$D_s = \frac{g^4}{2|s|} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{1\perp}}{(2\pi)^2} N_{\alpha_1, \alpha_2}^2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{1\perp}) s^{\alpha_1(q_1^2) + \alpha_2(q_2^2)} \operatorname{Re} \{ \xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2} \} \quad (8.3.12)$$

и где из (8.3.7)

$$\operatorname{Re} \{ \xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2} \} = \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \sum_{i=1,2} \frac{1 - \xi_i}{2} \right) \right]. \quad (8.3.13)$$

Получим

$$A_J(t) = \frac{g^4}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{1\perp}}{(2\pi)^2} \frac{N_{\alpha_1, \alpha_2}^2(\mathbf{q}, \mathbf{k}_{1\perp}) \operatorname{Re} \{ \xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2} \}}{J + 1 - \alpha_1(q_1^2) - \alpha_2(q_2^2)}, \quad (8.3.14)$$

которая обладает разрезами при

$$\begin{aligned} J &= \max \{ \alpha_1(q_1^2) + \alpha_2((\mathbf{q} - \mathbf{q}_{1\perp})^2) - 1 \} = \\ &= \max \{ \alpha_1(-\mathbf{q}_{1\perp}^2) + \alpha_2(-(\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{q}_{1\perp})^2) - 1 \} \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

в соответствии с (8.2.19).

Скачок через двухреджеонный разрез равен

$$\begin{aligned} \Delta_2(J, t) = \Delta_{J_2} \{ A_J(t) \} = ig^4 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{1\perp}}{(2\pi)^2} N_{\alpha_1, \alpha_2}^2(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{1\perp}) \operatorname{Re} \{ \xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2} \} \delta(J + \\ + 1 - \alpha_1(q_1^2) - \alpha_2(q_2^2)), \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

что может быть переписано

$$\begin{aligned} \Delta_{J_2} \{ A_J(t) \} = (-1) \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(J - \sum_i \frac{1 - \xi_i}{2} \right) \right] ig^4 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{1\perp}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_{2\perp}}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \times \\ \times \delta^2(\mathbf{q}_{1\perp} + \mathbf{q}_{2\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) \delta(J + 1 - \alpha_1(-\mathbf{q}_{1\perp}^2) - \alpha_2(\mathbf{q}_{2\perp}^2)) N_{\alpha_n, \alpha_n}^2. \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

Аналогично для ветвлений более высокого порядка, типа показанных на рис. 8.12, скачок равен

$$\begin{aligned} \Delta_{J_n} \{ A_J(t) \} = (-1)^{n-1} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(J - \sum_i \frac{1 - \xi_i}{2} \right) \right] ig^{2n} \times \\ \times \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{1\perp}}{(2\pi)^2} \dots \int \frac{d^2 \mathbf{q}_{n\perp}}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{q}_{1\perp} + \dots + \mathbf{q}_{n\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) \times \\ \times \delta(J + n - 1 - \sum_i \alpha_i(-\mathbf{q}_{i\perp}^2)) N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^2. \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

Это выражение может рассматриваться как скачок на разрезе фейнмановской диаграммы (рис. 8.13), на которой каждый реджеон рассматривается как квазичастица в двумерном пространстве с импульсом $\mathbf{q}_{i\perp}$ и «энергией» $E_i = 1 - \alpha_i(-\mathbf{q}_{i\perp}^2)$, причем энергия и импульс в каждой вершине сохраняются, так как δ -функции в (8.3.18) соответствуют правилам Катковского (1.5.11). Элемент фазового объема равен

$$\prod_i \frac{d^2 \mathbf{q}_{i\perp}}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta(\sum_i \mathbf{q}_{i\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) 2\pi \delta(\sum_i E_i - E) = d\Phi_n^J, \quad (8.3.19)$$

где $E = 1 - J$ и (8.3.18) можно переписать:

$$\Delta_{J_n} \{A_J(t)\} = (-1)^{n-1} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - E - \sum_i \frac{1 - \xi_i}{2} \right) \right] i g^{2n} \int d\Phi_n^J N_{E_1 \dots E_n}^2 \quad (8.3.20)$$

Следующий шаг заключается в том, чтобы попытаться обобщить сделанное выше предположение и представить N не только как фейнмановский интеграл, но как амплитуду с обменом реджеонами. Таким

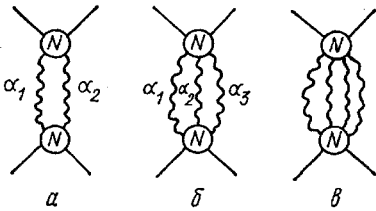


Рис. 8.12. Некоторые многореджеонные разрезы

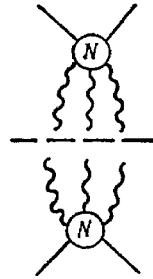


Рис. 8.13. Скачок на трехреджеонном разрезе. Каждый реджеон имеет импульс q_{\perp} и «энергию» $E_i = 1 - \alpha_i(-q_{i\perp}^2)$

образом, N содержит реджевские полюсы и разрезы, как это изображено на рис. 8.14. Сложность заключается в том, что необходимо выяснить, по какую сторону разреза должны находиться значения N , подставляемые в предыдущую формулу. Чтобы определить это, нужно рассмотреть реджеоны как двухчастичные состояния (по крайней мере) и таким образом двухчастичный реджеонный разрез включает двухчастичное условие унитарности в t -канале.

Выяснилось [209, 406, 409], что ответ полностью аналогичен формулам для скачков через разрезы в s -плоскости и, например, можно написать [ср. (1.3.16)]

$$\text{---} \bigoplus \text{---} - \text{---} \bigominus \text{---} = \text{---} \bigoplus \text{---} \text{---} \bigominus \text{---} \quad (8.3.21)$$

или

$$\Delta_{J_{\pm}} \{A_J(t)\} = (-1) \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \left[J - \sum_i (1 - \xi_i) / 2 \right] \right\} \int d\Phi_2^J N_{\alpha_1 \alpha_2}(J_{\pm}) \times N_{\alpha_1 \alpha_2}(J_{\mp}), \quad (8.3.22)$$

где $J_{\pm} = J \pm i\epsilon$ отвечает значению выше (ниже) разреза в вершине N . Это обобщение кажется достаточно очевидным, но на деле требуется большая аккуратность, чтобы убедиться, что взят правильный скачок особенно имея в виду свойства сигнатуры реджеонов.

Эта аналогия между условиями унитарности в s - и J -плоскости с правилами, аналогичными правилам Катковского, привела многих авторов к попытке построить реджеонную теорию поля в пространстве двух пространственных и одного временного измерения [1, 2, 81, 82, 205, 310]. Для линейных траекторий

$$\alpha(-k^2) = \alpha^0 - \alpha' k^2$$

реджевский полюс принимает вид

$$\frac{1}{J-\alpha} \rightarrow \frac{1}{[E-\alpha'k^2+(1-\alpha^0)]}, \quad (8.3.23)$$

что напоминает пропагатор нерелятивистской частицы с массой $m = (2\alpha')^{-1}$ [ср. (1.13.25)] и с «энергетической щелью» $1 - \alpha_0$, т. е. скорость частицы равна $v = [4\alpha'(E - 1 + \alpha^0)]^{1/2}$. Таким образом, можно построить теорию поля, в которой реджеонное поле удовлетворяет уравнению Шредингера. В дополнение к обычным проблемам перенормировок (см. рис. 8.14) и сходимости существует основная неопределенность, заключающаяся в том, что неясно, имеет ли смысл заменять лестницы голыми реджеонами и затем перенормировать их. Например, присутствие полюса или разреза в вершине N при значениях, больших $J = -1$, означает, что $A(s_1, t, t_1, t_2)$ в выражении (8.2.38) ведет себя как $s_1^{\alpha(t)}$ или $s_2^{\alpha(t)}$, так что определяющий N интеграл не будет сходиться без перенормировки. Еще хуже то, что P -полюс с $\alpha^0 = 1$ вообще не имеет энергетической щели, и поэтому померон аналогичен безмассовой частице в соответствующей теории поля и все особенности накапливаются в точке $J = 1$ совершенно так же, как это имеет место в проблеме инфракрасных расходимостей, вызванной безмассовым фотоном в квантовой электродинамике. Таким образом, асимптотическое поведение сечения зависит от решения вблизи критической точки $J = 1$. Эта задача была исследована с помощью методов ренормгруппы. К настоящему времени в этом направлении достигнут весьма ограниченный прогресс, и мы не будем более обсуждать эту тему (см. обзор [3]).

Суммируя и обобщая результаты, мы показали, что обмен n реджеонами R_1, \dots, R_n приводит к разрезу от точки ветвления при [что следует из (8.3.18)]

$$\alpha_{c_n}(t) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_i) - n + 1 \right\}, \quad (8.3.24)$$

где максимум берется в пределах разрешенной области интегрирования. Для возрастающих траекторий он ограничен значением [ср. (8.3.19)]

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{-t_i} = \sqrt{-t}. \quad (8.3.25)$$

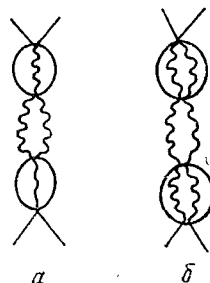


Рис. 8.14. Вклад полюса (а) и разреза (б) в вершинную функцию на рис. 8.12, а

Этот разрез мы будем часто называть реджевским разрезом вида $R_1 \otimes R_2 \otimes \dots \otimes R_n$, где знак \otimes означает интегрирование по фазовому объему (8.3.8) или (8.3.18). Если траектории одинаковы, то приведенные выше правила дают

$$\alpha_{c_n}(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1 \quad (8.3.26)$$

и если траектория линейна: $\alpha(t) = \alpha^0 + \alpha't$, то

$$\alpha_{c_n}(t) = \alpha't/n + n(\alpha^0 - 1) + 1. \quad (8.3.27)$$

Сигнатура разреза равна произведению сигнатур полюсов [ср. (8.3.10)]:

$$\xi_c = \prod_i \xi_i. \quad (8.3.28)$$

Во введении отмечалось, что реджевские разрезы нужны для согласования фиксированных полюсов Грибова — Померанчука с t -канальной унитарностью, и поэтому нужно проверить, что приведенные выше точки ветвления действительно обеспечивают это согласование [66, 238, 257, 357].

В случае рассеяния скалярных частиц самая правая особенность Грибова — Померанчука в амплитуде, например, с четной сигнатурой находится в точке $J = -1 = J_0$. Если реджевский разрез лежит над t -канальным унитарным разрезом, на-

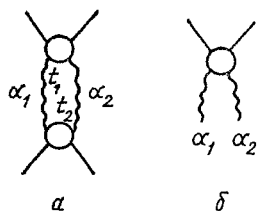


Рис. 8.15. *a* — Двухреджеонное промежуточное состояние в t -канале. *б* — Амплитуда рассеяния реджеон — частица

чинающимся на пороге $t = t_T = 4m^2$, то, очевидно, требуется, чтобы $\alpha_c(t_T) = J_0$. Если частицы, образующиеся на этом пороге (рис. 8.15), лежат на траекториях $\alpha(t)$, то для скалярных частиц должно быть $\alpha(m^2) = 0$. Подставляя это в формулу (8.3.26) при $n = 2$, получаем

$$\alpha_{c_2}(4m^2) = 2\alpha(m^2) - 1 = -1, \quad (8.3.29)$$

так что точка ветвления сокращается на пороге с фиксированным полюсом. Если теперь продолжить по t_1 и t_2 до значений, где α_1, α_2 равно целому числу, большему 0, то самый правый полюс Грибова — Померанчука в амплитуде диаграммы, изображенной на рис. 8.15, *a*, будет находиться в точке $J = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$, так как α_1 — это наибольшее возможное значение спиральности частицы со спином α_1 , и ясно, что реджеонная точка ветвления находится на нужном месте, чтобы не возникало противоречия с унитарностью. Разумеется, полная структура разреза существенно более сложна, чем указано в этом кратком рассмотрении, в частности для случая неравных масс [325, 357].

В t -плоскости точка ветвления возникает при $t = t_c(J)$, где $t_c(J)$ определяется так, что

$$\alpha_c(t_c(J)) = J. \quad (8.3.30)$$

Поэтому из (8.3.29) $t_c(-1) = 4m^2$. Когда J увеличивается от точки -1 , то t_c движется вдоль упругого разреза, пока не достигнет первого неупругого разреза t_I , после чего проходит под неупругим разрезом на нефизический лист. Таким образом, $\alpha_c(t)$ имеет точку ветвления при J_I , когда $t_c(J_I) = t_I$, а скачок на разрезе $\Delta_2(J, t)$ имеет здесь же точку ветвления.

Эта связь между полюсами Грибова—Померанчука и разрезами, конечно, не случайна. Она обусловлена тем, что разрезы возникают из-за фиксированных полюсов в диаграмме креста вершины N (см. рис. 8.6, ∂) благодаря условию унитарности. В работах [270, 325] показано, как все это происходит в теории возмущений. Если записать крест в виде:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = G_1(t, J)/(J+1)$$

то диаграмма следующего порядка равна

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = G_2(t, J)/(J+1)$$

скачок G_2 на разрезе должен содержать фиксированный полюс, так что

$$\text{Disc}_2 \{G_2\} = \rho G_1/(J+1),$$

где ρ — множитель, возникающий из-за фазового объема. Таким образом, из этих двух диаграмм выше порога получаем

$$A_J^I = (G_1 + G_2)/(J+1), \quad (8.3.31)$$

а ниже порога

$$A_J^{II} = (G_1 + G_2)/(J+1) + i\rho G_1^2/(J+1)^2. \quad (8.3.32)$$

Кажется, что это выражение дает полюс второго порядка, но, используя условие унитарности [как, например, (2.2.7), положив в нем $A_J^I = A_J(t_+)$, $A_J^{II} = A_J(t_-)$], получаем

$$A_J^{II} = A_J^I/(1 - i\rho A_J^I) = A_J^I + i\rho (A_J^I)^2 + (i\rho)^2 (A_J^I)^3 + \dots \quad (8.3.33)$$

Так что если во всех порядках

$$A_J^I = G/(J+1), \quad G = G_1 + G_2 + \dots, \quad (8.3.34)$$

то

$$A_J^{II} = \frac{G}{J+1 - i\rho G} = \frac{G}{J+1} + \frac{i\rho G^2}{(J+1)^2} + \dots, \quad (8.3.35)$$

т. е. A_J^{II} содержит последовательность многократных полюсов, которая суммируется и приводит к конечному значению A_J^{II} при $J \rightarrow -1$. Последовательность разрезов, показанная на рис. 8.16, приводит к фиксированному полюсу на физическом листе и не дает никакой другой особенности. Ясно, что такие разрезы важны в случае, когда

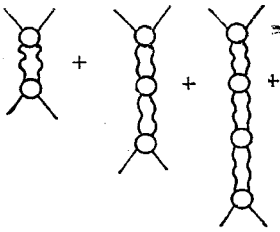


Рис. 8.16. t -Канальная итерация двухреджеонного разреза

продолжение по угловому моменту совместимо с условием t -канальной унитарности в любой теории, в которой имеется третья спектральная функция ρ_{su} .

Однако если наличие этого скачка через разрез совместимо с упругим условием унитарности в t -канале (8.3.33), то нужно, чтобы при $t > t_T$ [66]:

$$\Delta_t \{A_J(t)\} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_c(J). \quad (8.3.36)$$

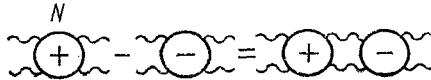
Таким образом,

$$\Delta_J \{A_J(t)\} \rightarrow 0, \quad J \rightarrow \alpha_c(t), \quad (8.3.37)$$

т. е. скачок на реджевском разрезе должен обращаться в нуль в точке ветвления. Для разреза (8.3.8) это не так, как было видно из (8.2.16):

$$A(s, t) \sim s^{\alpha_c} (\ln s)^{-1} \text{ и поэтому } A_J(t) \sim \ln(J - \alpha_c) \quad (8.3.38)$$

[из выражения (2.7.4)]. Конечно же, логарифм имеет конечный скачок, равный π , при переходе с одного листа на другой в точке $J = \alpha_c$. Однако t -канальная унитарность требует включения всей последовательности разрезов, показанных на рис. 8.16, и таким образом вершина $N_{\alpha_1 \alpha_2}$ в (8.3.8) сама будет содержать двухреджеонный разрез (см. рис. 8.14, б) и поэтому будет удовлетворять условию унитарности [406]



или

$$N(J_+) - N(J_-) \underset{J \rightarrow \alpha_c}{\sim} i\pi N(J_+) N(J_-), \quad (8.3.39)$$

так что

$$[N(J_+)]^{-1} - [N(J_-)]^{-1} \underset{J \rightarrow \alpha_c}{\sim} -i\pi,$$

т. е.

$$[N(J)]^{-1} \sim \ln(J - \alpha_c),$$

что при подстановке в (8.3.16) дает

$$\Delta \{A_J(t)\}_{J \rightarrow \alpha_c} \sim [\ln(J - \alpha_c)]^{-2}. \quad (8.3.40)$$

При подстановке в (2.7.8) это дает

$$\begin{aligned} A^c(s, t) &\underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \int_{\alpha_c}^{\alpha_c} dJ \frac{1}{(\ln(J - \alpha_c))^2} s^J \sim s^{\alpha_c} \int_0^0 dx \frac{\exp(x \ln s)}{(\ln x)^2} \sim \\ &\sim \frac{s^{\alpha_c}}{\ln s} \int_1^1 \frac{dy}{[\ln(\ln y) - \ln(\ln s)]^2} \sim \frac{s^{\alpha_c}}{\ln s [\ln(\ln s)]^2}, \end{aligned} \quad (8.3.41)$$

где сделаны удачные подстановки $x = J - \alpha_c$, $\ln y = x \ln s$. Поскольку $\ln(\ln s)$ меняется с увеличением s очень медленно, эта поправка не очень важна на практике, но нужно помнить, что совместимость с t -канальной унитарностью требует учета не только диаграммы рис. 8.15, но и всей бесконечной суммы, показанной на рис. 8.16. Для трех и большего числа реджеонных разрезов унитаризация приводит к еще меньшему отличию, так как выражение (8.3.20) дает $A_j^c(t) - (J - \alpha_c)^{n-2} \ln(J - \alpha_c)$, что при $n > 2$ уже имеет скачок, обращающийся в нуль в точке ветвления, и при подстановке в (2.7.4) приводит к асимптотическому поведению вида $s^{\alpha_c} (\ln s)^{-(n-1)}$.

8.4. Абсорбция и эйкональная модель

Хотя модели с диаграммами Фейнмана и реджеонное исчисление дали много информации об ожидаемых свойствах реджевских разрезов, они не дают возможности определить величину вклада разрезов по отношению к полюсам и поэтому не дают возможности определить, насколько важны разрезы в действительности.

Так, выражения (8.2.37) и (8.3.8) показывают, что амплитуда двухреджеонного разреза $R_1 \otimes R_2$ должна быть записана в виде

$$A^c(s, t) = \frac{i}{16\pi^2 |s|} \iint_{-\infty}^0 dt_1 dt_2 \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t_2))^{1/2}} (N(t, t_1, t_2))^2 \times \\ \times A^{R_1}(s, t) A^{R_2}(s, t_2), \quad (8.4.1)$$

где A^{R_i} — амплитуды обмена реджевскими полюсами. Величина g^2 включена в определение вершинной функции N , которая должна давать все вклады в ρ_{su} , и, разумеется, неизвестна (см., однако, разд. 10.9). Для вычисления вклада разрезов были предложены различные модели, воспроизводящие формулу типа (8.4.1) с определенными правилами вычисления N . Здесь будут рассмотрены две такие модели. Хотя ни одна из них не может быть выделена, обе дают возможность включить спиновые эффекты и т. п.

8.4а. Реджезованная абсорбционная модель

Эта модель используется для описания неупругих реакций с обменом невакуумными квантовыми числами. Основная идея заключается в том, чтобы использовать реджевский полюс R для переноса необходимых квантовых чисел и учесть поправки, вызванные упругим рассеянием в начальном и конечном состояниях, показанные на рис. 8.17. Поскольку упругая амплитуда в основном мнимая, учет этих поправок приводит к уменьшению вклада низших парциальных волн, что физически соответствует поглощению потока падающих частиц каналами, не участвующими в рассмотрении. Можно учесть всю упругую амплитуду рассеяния, но более привлекательно представить ее посредством обмена доминирующим полюсом Редже — помероном P .

Гипотеза, в частности, заключается в том, что парциальные волны в s -канале для процесса $1 + 2$ (канал i) $\rightarrow 3 + 4$ (канал f) могут быть записаны в виде [231]

$$A_j^{if}(s) = (S_j^{ii}(s))^{1/2} A_j^{ifR}(s) (S_j^{ff}(s))^{1/2}, \quad (8.4.2)$$

где $A_j^{ifR}(s)$ — разложение t -канального реджеона по парциальным волнам s -канала; $S_j^{ii(ff)}(s)$ — элемент разложения S -матрицы для упругого рассеяния по парциальным волнам в начальном (конечном) состоянии. Так как мы будем суммировать по всем спиральностям

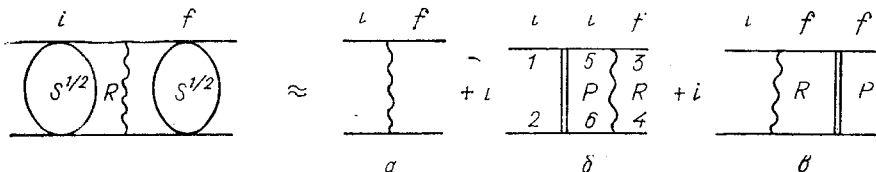


Рис. 8.17. Реджеоновая абсорбционная модель

частиц, удобно рассматривать индексы i и f как обозначения спиральностей, а формулу (8.4.2) как матричное произведение. Запишем теперь упругую S -матрицу в виде

$$S_j^{ii}(s) \approx 1 + 2i\rho(s) A_j^{iiP}(s), \quad (8.4.3)$$

где $A_j^{iiP}(s)$ — парциальное разложение амплитуды обмена попероном P ; $\rho^i(s) = 2 q_{s12} s^{-1/2}$ — кинематический множитель (2.2.9). Подставляя (8.4.3) и аналогичное выражение для S_j^{ff} в (8.4.2) и разлагая квадратный корень в ряд, получим

$$A_j^{if}(s) \approx A_j^{ifR}(s) + i\rho^i(s) A_j^{iiP}(s) A_j^{ifR}(s) + i\rho^f(s) A_j^{ifR}(s) A_j^{ffP}(s) + \dots \quad (8.4.4)$$

Первый член отвечает обмену реджеоном R , а второй и третий члены дают разрезы, обусловленные обменом как R , так и P -полюсами вместе, т. е. разрезу $R \otimes P$. Вся амплитуда получается суммированием ряда по парциальным волнам (4.4.9). Так, например, из первого члена в (8.4.4) получаем

$$A_{H_s}^{R \otimes P}(s, t) = i\rho^i(s) 16\pi \sum_J (2J+1) \sum_{\mu_5 \mu_6} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_5 \mu_6}^{iiP}(s) \times \\ \times A_{\mu_5 \mu_6 \mu_3 \mu_4}^{ifR}(s) d_{\mu \mu'}^J(z_s), \quad \mu = \mu_1 - \mu_2, \quad \mu' = \mu_3 - \mu_4. \quad (8.4.5)$$

Если теперь провести парциальное разложение амплитуды, отвечающей обмену полюсом (опуская для простоты индексы каналов), то получим

$$A_{H_s}^{R \otimes P}(s, t) = \sum_{\mu_5 \mu_6} i\rho(s) 16\pi \sum_J (2J+1) d_{\mu \mu'}^J(z_s) \times \\ \times \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A_{\mu_1 \mu_2 \mu_5 \mu_6}^P(s, z_1) d_{\mu \mu''}^J(z_1) dz_1 \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 A_{\mu_5 \mu_6 \mu_3 \mu_4}^R(s, z_2) \times \\ \times d_{\mu'' \mu'}^J(z_2) dz_2, \quad \mu'' = \mu_5 - \mu_6 \quad (8.4.6)$$

где z_1, z_2 — косинусы углов рассеяния между начальным и промежуточным, промежуточным и конечным состояниями соответственно (см. рис. 2.1), удовлетворяющие условию (2.2.4), а именно

$$z_1 = z z_2 + (1 - z^2)^{1/2} (1 - z_2^2)^{1/2} \cos \varphi. \quad (8.4.7)$$

Но поскольку справедливо равенство [231]

$$\sum_J (2J + 1) d_{\mu\mu'}^J(z_s) d_{\mu\mu''}^J(z_1) d_{\mu''\mu'}^J(z_2) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta(\Delta)}{\sqrt{\Delta}} \cos(\mu\varphi_1 + \mu'\varphi_2 + \mu''\varphi_3), \quad (8.4.8)$$

[ср. с (8.2.6)], то в пределе высоких энергий (8.2.10) зависимостью от φ можно пренебречь. Поскольку $\rho(s) \rightarrow 1$, получаем

$$A_{H_s}^{R \otimes P}(s, t) = \sum_{\mu_s \mu_6} \frac{i}{16\pi^2 |s|} \int_{-\infty}^0 dt_1 dt_2 A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^P(s, t_1) \times \\ \times A_{\mu_5 \mu_6 \mu_3 \mu_4}^R(s, t_2) \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t_2))^{1/2}}, \quad (8.4.9)$$

что аналогично формуле (8.4.1) для бесспиновых частиц с $N(t, t_1, t_2) = 1$. Это выражение согласуется также с результатом Амати, Фубини и Стангеллини (8.2.11), за исключением того, что реджевская амплитуда там входит под знаком комплексного сопряжения. В действительности выражение (8.2.11) соответствует выбору

$$\text{Im}\{A_J^c(s)\} = \rho^j(s) \text{Re}\{A_J^{iP}(s)(A_J^{jR}(s))^*\} \quad (8.4.10)$$

вместо (8.4.4). Однако, поскольку P -полюс почти чисто мнимый, комплексное сопряжение приводит к изменению знака у вклада разреза. Знак, получающийся в (8.4.9) при учете абсорбции, согласуется с результатом Мандельштама (8.2.37) и с реджеонным исчислением (8.3.8) и отличается от знака результата AFS (8.2.11).

В этом подходе есть несколько очевидных недостатков. Во-первых, диаграмма на рис. 8.17, б планарная, а, как было показано в разд. 8.2, планарные диаграммы не приводят к разрезам. Причина, по которой мы получили похожий ответ, заключается в том, что пропагаторы в верхней и нижней частях диаграммы ведут себя как s^{-1} и поэтому обладают тем же самым степенным поведением, что и кресты на рис. 8.6. В действительности диаграмма на рис. 8.17, б гораздо больше похожа на перенормировку вклада квадратной диаграммы в полюс Редже, показанный на рис. 8.1. Во-вторых, если рассматривать реджеон как лестницу, то он уже включает неупругие промежуточные вклады в s -канале, и поэтому учет абсорбции может привести к переучету. Это обстоятельство очевидным образом связано с перенормировкой. Однако в разд. 8.6 будет показано, что одним из самых больших недостатков полюсов Редже является то, что они дают слишком большой вклад в низшие парциальные волны, так что с феноменологической точки зрения действительно необходимо некоторое дополнительное поглощение. Возможно, что именно это поглощение и обуславливается разрезами. К тому же упругое промежуточное состояние $\{5,6\}$

является всего лишь одним из большого числа состояний, образованных дифракционным образом посредством обмена P -полосом, и поэтому не исключено, что нужно рассматривать всю сумму диаграмм, аналогичных показанной на рис. 8.18. Довольно грубо их можно оценить, умножая выражение (8.4.9) на фактор усиления $\lambda > 1$. Заметим, что λ должно не зависеть от s , потому что иначе менялось бы положение разреза, несмотря на то, что при увеличении s открывается все больше дифракционных каналов.



Рис. 8.18. Промежуточное состояние, образованное дифракционным образом в абсорбционной модели и соответствующее дополнительным членам в выражении (8.8.4)

В заключение отметим, что хотя идея абсорбции и подтверждает основную формулу (8.4.1), но она не может быть использована как количественная модель для вычисления реджевских разрезов.

8.4б. Эйкональная модель

Эта модель тесным образом связана с методом эйконала для потенциального рассеяния при высокой энергии, обсуждавшемся в разд. 1.14, и дает способ вычисления высокоэнергетического предела для суммы диаграмм, аналогичных показанной на рис. 8.19, соответствующих многореджеонным обменам [23]. Вид обмена на самом деле не очень важен, и поэтому мы начнем рассмотрение с обмена скалярными частицами, а не реджеонами [см. 6, 78, 96, 284, 379].

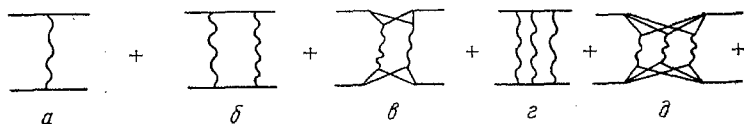


Рис. 8.19. Последовательность диаграмм с обменом несколькими реджеонами

Типичная диаграмма с n перекладинами показана на рис. 8.20. Она представляет собой обобщенную лестницу, в которой некоторые перекладины пересекаются. Правила Фейнмана дают

$$A^n(s, t) = g^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_i^2 - m^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_1' - \sum k_i) \times \\ \times \{[(p_1 - k_1)^2 - m^2] [(p_1 - k_1 - k_2)^2 - m^2] \dots [(p_1 - k_1 - \dots - k_n)^2 - m^2] [(p_2 + k_1)^2 - m^2] \dots [(p_2 + k_1 + \dots + k_n)^2 - m^2]\}^{-1}. \quad (8.4.11)$$

При высокой энергии рассеяние происходит на малые углы, так что по каждой перекладине передается очень малый импульс, поэтому отдача частиц после каждого последовательного перерассеяния невелика. В этом случае можно сделать замену

$$(p_1 \pm k)^2 - m^2 = \pm 2 p_1 k + k^2 \approx \pm 2 p_1 k \quad (8.4.12)$$

во всех пропагаторах. Ясно, что это соответствует эйкональным предположениям разд. 1.14. Теперь необходимо просуммировать по всем перестановкам перекладин, соединяющихся с частицей 2, при данном порядке $k_1 \dots k_n$ -соединения с частицей 1. Симметрия подынтегральной функции позволяет с учетом приближения (8.4.12) (подробнее

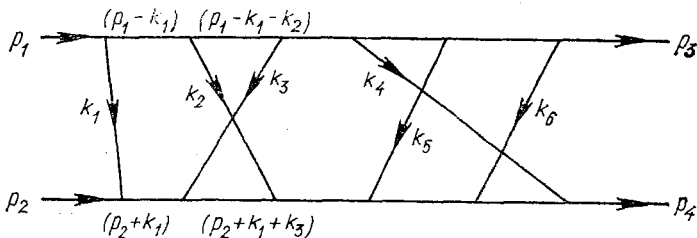


Рис. 8.20. Лестничная диаграмма с пересекающимися перекладинами

см. [284]) переписать сумму теории возмущений в очень простой форме. Интегрирование может быть произведено переходом в x -пространство:

$$1 / (k_i^2 - m^2) = \int d^4 x \Delta_F(x) \exp(-ik_i x), \quad (8.4.13)$$

где фейнмановский пропагатор равен

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \exp(ikx) / (k^2 - m^2 + i\epsilon) d^4 k. \quad (8.4.14)$$

Можно показать, что после суммирования получается

$$A^n(s, t) = (g^2 / n!) \int d^4 x \exp(-iqx) \Delta_F(x) (i\chi)^{n-1}, \quad (8.4.15)$$

где

$$q = p_1 - p_3;$$

$$\chi = -[U(x, p_1, p_2) + U(x, p_1, -p_4) + U(x, -p_3, p_2) + U(x, -p_2, -p_4)], \quad (8.4.16)$$

где

$$U(x, p_i, p_j) = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(ikx)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon) (-2p_i k + i\epsilon) (2p_j k + i\epsilon)}. \quad (8.4.17)$$

Ясно, что при рассеянии на малый угол при высокой энергии $p_3 \approx p_1$, $p_2 = p_4$ и, таким образом, χ зависит только от $2p_1 p_2$ (т. е. s), $p_1 k$ и $p_2 k$. При интегрировании по k вклады дают только полюса знамена-

теля, так что, заменяя $(2 p_i k + i\varepsilon)^{-1}$ на $2\pi i \delta(2 p_i k)$, получаем вклад от четырех членов в (8.4.16):

$$\chi(x, p_1, p_2) = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \int d^4 k \frac{\exp(ikx)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \delta(2p_1 k) \delta(2p_2 k). \quad (8.4.18)$$

После интегрирования по k в плоскости p_1 и p_2 (см. рис. 1.12) это выражение принимает вид

$$\chi(s, \mathbf{b}) = \frac{g^2}{8\pi^2 s} \int \frac{\exp(-ikb)}{t - m^2 + i\varepsilon} d^2 k. \quad (8.4.19)$$

Так же как и в (1.14.10), можно выполнить интегрирование по φ и получить

$$\chi(s, b) = \frac{1}{8\pi s} \int_{-\infty}^0 dt J_0(b\sqrt{-t}) \frac{g^2}{t - m^2}. \quad (8.4.20)$$

Обратное преобразование [из (1.14.14)] имеет вид

$$\frac{g^2}{t - m^2} = 4\pi s \int_0^\infty b db J_0(b\sqrt{-t}) \chi(s, b) = A^B(s, t), \quad (8.4.21)$$

что равно с учетом (8.4.13)

$$g^2 \int d^4 x \Delta_F(x) \exp(-iqx) \quad (8.4.22)$$

в высокоэнергетическом приближении при рассеянии на малый угол. Таким образом, выражение (8.4.15) приводит к

$$A^n(s, t) = \frac{4\pi s}{n!} \int_0^\infty b db J_0(b\sqrt{-t}) \chi(s, b) (i\chi(s, b))^{n-1} \quad (8.4.23)$$

и после суммирования по всем возможным числам переключений получаем

$$A(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n(s, t) = 8\pi s \int_0^\infty b db J_0(b\sqrt{-t}) \frac{\exp[i\chi(s, b)] - 1}{2i}. \quad (8.4.24)$$

Первый член этого ряда ($n = 1$) равен выражению (8.4.21) и является борновским приближением—амплитудой одночастичного обмена. Второй член есть сумма всех графиков с обменами двумя частицами

$$A^2(s, t) = 4\pi s \int_0^\infty b db J_0(b\sqrt{-t}) i\chi^2/2, \quad (8.4.25)$$

который после подстановки выражения (8.4.20) приводит к

$$\begin{aligned} A^2(s, t) &= 2\pi s i \int_0^\infty b db J_0(b\sqrt{-t}) \frac{1}{(8\pi s)^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 J_0(b\sqrt{-t_1}) A^B(s, t_1) \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 dt_2 J_0(b\sqrt{-t_2}) A^B(s, t_2). \end{aligned} \quad (8.4.26)$$

Но поскольку [161, 231]

$$\int_0^{\infty} b db J_0(b\sqrt{-t_1}) J_0(b\sqrt{-t_2}) J_0(b\sqrt{-t}) = \frac{2}{\pi} \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t_2))^{1/2}} \quad (8.4.27)$$

[ср. (8.2.6) и (8.4.8)], то

$$A^2(s, t) = \frac{i}{16\pi^2 s} \int_{-\infty}^0 dt_1 dt_2 A^B(s, t_1) A^B(s, t_2) \frac{\theta(-\lambda)}{(-\lambda(t_1, t_2, t))^{1/2}}, \quad (8.4.28)$$

что совпадает с выражением (8.4.1), если положить $N = 1$ и взять в качестве борновского приближения вместо амплитуды (8.4.21) амплитуду обмена реджевским полюсом. Это доказывает, что при условии справедливости приближения (8.4.12) точная форма амплитуды борновского приближения не существенна. Можно показать [378], что если заменить обмены частицами на рис. 8.20 на обмены лестницами, то лидирующими диаграммами будут те, у которых вершины на концах лестниц будут образовывать крест, как показано на рис. 8.19, *в, д*, а не планарные диаграммы, показанные на рис. 8.19, *б, г*, что можно было ожидать, исходя из результатов разд. 8.2. Таким образом, эйкональный ряд можно рассматривать как сумму реджевских разрезов, обусловленных любым числом реджеонов с перекрещенными вершинами.

Разумеется, существуют некоторые сомнения относительно применимости этих результатов к адронной физике. Во-первых, они несправедливы в теории поля с взаимодействием φ^3 , потому что там приближение (8.4.12) несправедливо. Например, рис. 8.21 имеет d -линию длиной 3 и, следовательно, ведет себя как s^{-3} . Однако в эйкональном приближении возможность передачи больших импульсов по диаграмме запрещена, поэтому импульс должен в основном проходить по сторонам диаграммы, которые представляют собой 4 пропатора, и в рамках приближения (8.4.12) она ведет себя как s^{-4} . Поэтому в теории поля с взаимодействием φ^3 такие диаграммы будут нарушать эйкональное приближение. Однако в гл. 6 было показано, что на опыте переданные импульсы экспоненциально подавлены, так что в этом отношении приближенная версия теории кажется более реалистичной, чем сама теория. Были исследованы также модели с обменом элементарным векторным мезоном [99, 100]. В этом случае зависимость от s пропаторов частиц, которыми производится обмен, гарантирует выполнение эйконального приближения без дополнительного обрезания, но при всех t реджеоны

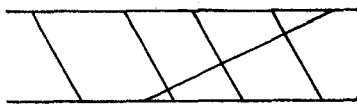


Рис. 8.21. Диаграмма, нарушающая эйкональное приближение в теории φ^3 .

Для того чтобы пройти от начала диаграммы к ее концу, нужны только три пропатора, а здесь их четыре с каждой стороны

оказываются лежащими выше 1. Это обстоятельство будет обсуждаться в следующем разделе.

Рис. 8.19 представляет собой только один набор существенных графиков. В предыдущем разделе обсуждали необходимость итерировать лестницы как в s -, так и в t -канале (как показано на рис. 8.16) чтобы согласовать результат с t -канальной унитарностью. Имеются также и более сложные диаграммы, аналогичные изображенной на рис. 8.22 (такие диаграммы называются «шахматной доской»), в которых обмениваемые реджеоны взаимодействуют друг с другом во время обмена, что нарушает эйкональное приближение [52, 370]. Существуют также диаграммы (примером которых может служить дифракционная диаграмма на рис. 8.18), в которых лидирующие частицы фрагментируют на составляющие и вновь рекомбинируют. Совершенно отдельно от трудностей, связанных с включением этих эффектов, существует обычное сомнение: на учтены ли уже эти диаграммы (может быть, частично) как эффекты перенормировки более простых диаграмм. Этот вопрос является основным в любой теоретико-полевой модели (обзор по этой теме см. в работе [53]).

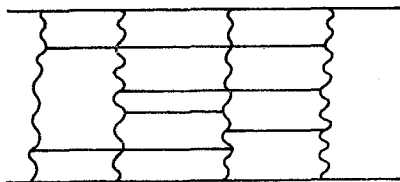


Рис. 8.22. Пример диаграммы «шахматная доска», в которой реджеоны взаимодействуют друг с другом

Несмотря на эти ограничения, эйкональная модель обладает определенными достоинствами. Во-первых, она гарантирует выполнение ограничений, налагаемых s -канальной унитарностью (по аналогии с разд. 1.14). Во-вторых, она легко обобщается в целях включения нескольких различных типов реджеонов и различных спиральных амплитуд. И в-третьих, эта модель относительно проста при расчетах. Чтобы продемонстрировать эти преимущества, удобно начать с s -канального ряда по парциальным волнам для спиральной амплитуды упругого рассеяния (4.4.9)

$$A_{H_s}(s, t) = 16\pi \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) A_{HJ}(s) d_{\mu\mu'}^J(z_s). \quad (8.4.29)$$

При рассеянии на малые углы при высоких энергиях $s \gg t$ и для больших J [154] справедливо соотношение

$$d_{\mu\mu'}^J(z_s) \approx J_n \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \theta_s \right), \quad n = |\mu - \mu'| \quad (8.4.30)$$

и $\cos \theta_s = z_s \approx 1 + t / (2q_s^2)$, так что $\theta_s \approx (-t / q_s^2)^{1/2}$. (8.4.31)

Классическое значение прицельного параметра (рис. 8.23) частицы, проходящей мимо мишени с угловым моментом J , равно

$$J = q_s b - 1/2 \quad (8.4.32)$$

(добавка $1/2$ несущественна, поскольку мы имеем дело с большими J) так что можно заменить Σ на $\int_0^\infty q_s db$ и таким образом выражение (8.4.29) принимает вид

$$A_{Hs}(s, t) = 16\pi \int_0^\infty q_s db 2q_s b A_{HJ}(s) J_n(b\sqrt{-t}). \quad (8.4.33)$$

Теперь с помощью условия унитарности выразим парциальную амплитуду через фазы (2.2.10)

$$A_{HJ}(s) = [\exp(2i\delta_{Hs}(s)) - 1] / [2i\rho(s)] \quad (8.4.34)$$

и определим эйкональную фазу $\chi_H(s, b)$ через фазу рассеяния с помощью выражения (8.4.32)

$$\chi_H(s, b) = 2\delta_{HJ}(s). \quad (8.4.35)$$

Это приводит к амплитуде в представлении прицельного параметра

$$A_H(s, b) = \frac{\exp[i\chi_H(s, b)] - 1}{2i\rho(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{\exp[i\chi_H(s, b)] - 1}{2i}. \quad (8.4.36)$$

Физически эта замена означает предположение, что каждая часть волнового фронта падающего пучка проходит через мишень не меняя своего прицельного параметра, а изменяется только фаза. Таким образом, благодаря (8.4.23) при высоких энергиях сохранение момента J заменяется на сохранение b . Это отвечает выводу, приведенному в разд. 1.14. Теперь, полагая $q_s \rightarrow \sqrt{s}/2$, получаем

$$\begin{aligned} A_{Hs}(s, t) &= 8\pi s \int_0^\infty b db A_H(s, b) J_n(b\sqrt{-t}) = \\ &= 8\pi s \int_0^\infty b db \frac{\exp(i\chi_H(s, b)) - 1}{2i} J_n(b\sqrt{-t}), \end{aligned} \quad (8.4.37)$$

что согласуется для амплитуды без переворота спина с (8.4.21) при $n = 0$, если определить эйкональные функции через борновское приближение для спиральных амплитуд, отвечающих обмену полюсом Редже [аналогично (8.4.20)]:

$$\chi_H(s, b) = \chi_H^R(s, b) = \frac{1}{8\pi s} \int_{-\infty}^0 dt J_n(b\sqrt{-t}) A_{Hs}^R(s, t). \quad (8.4.38)$$

Разложение экспоненты в (8.4.37) приводит к ряду по различным разрезам, даваемым R -полюсом, т. е. $R + R \oplus R + R \otimes R \otimes \otimes R + \dots$ Так как нужно просуммировать по всем спиральностям

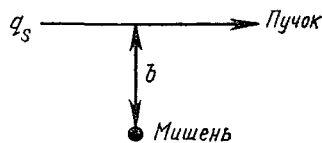


Рис. 8.23. Классический пучок, обладающий импульсом q_s и проходящий на прицельном расстоянии b от мишени, имеет угловой момент $J = qb$

в промежуточном состоянии, то предполагается, что берется матричное произведение всех эйкональных фаз в пространстве спиральностей.

Для неупругих процессов можно использовать так называемое «борновское приближение искаженных волн» [319] и заменить (8.4.36) на

$$A_H(s, b) = \chi_H^R(s, b) \exp(i\chi_H^{e_i}(s, b)) = \chi_H^R + i\chi_H^R \chi_H^{e_i} + \dots, \quad (8.4.39)$$

что отвечает, с точностью до членов второго порядка, правилам учета абсорбции (8.4.4) в случае, когда для упругой амплитуды использовано приближение обмена одним P -полюсом. Таким образом, объединяя (8.3.36) и (8.4.39), получаем формулу для реджевского разреза в эйкональном приближении с учетом абсорбции для n_1 реджеонов R_1 , n_2 реджеонов R_2 и т. д.:

$$A_{Hs}^c(s, t) = -4\pi i s \int_0^\infty b db J_n(b\sqrt{-t}) \frac{(i\chi_H^{R_1})^{n_1}}{n_1!} \frac{(i\chi_H^{R_2})^{n_2}}{n_2!} \dots, \quad (8.4.40)$$

где каждая эйкональная фаза χ вычислена в соответствии с формулой (8.4.38) и нужно просуммировать по всем спиральностям промежуточного состояния.

То, что нам удалось вычислить вклад разрезов в s -канальные спиральные амплитуды, может показаться удивительным, но объясняется это тем, что разрезы приводят к s -канальной унитаризации.

Некоторые свойства выражения (8.4.40) будут использованы в следующем разделе.

8.5. Вычисление амплитуд, обусловленных реджевскими разрезами

Поскольку реджевские полюса могут быть параметризованы достаточно просто, то амплитуда, отвечающая выражению (8.4.40), вычисляется довольно легко. Если траектория линейна, $\alpha = \alpha^0 + \alpha' t$, а вычет имеет экспоненциальную форму $\gamma(t) = G \exp(\alpha t)$, то с учетом фазы (6.8.15) получаем для амплитуды, отвечающей обмену полюсом Редже, выражение

$$A_{Hs}^R(s, t) = -x (-t)^{n/2} (s/s_0)^{\alpha^0} \exp(-i\pi\alpha^0/2) G \exp(ct), \quad (8.5.1)$$

где $x = 1 / (-i)$ при $\xi = \pm 1$, а

$$c = a + \alpha' (\ln(s | s_0) - i\pi / 2). \quad (8.5.2)$$

При подстановке в (8.4.38) это приводит к

$$\chi_{Hs}^R(s, b) = \frac{-xG (s/s_0)^{\alpha^0} \exp(-i\pi\alpha^0/2)}{8\pi s} \int_{-\infty}^0 dt J_n(b\sqrt{-t}) \times \\ \times (-t)^{n/2} \exp(ct). \quad (8.5.3)$$

Интеграл легко вычислить, используя следующее обстоятельство:

$$\int_0^{\infty} \exp(ct) (-t)^{n/2+m} J_n(b\sqrt{-t}) dt = \left(\frac{b}{2}\right)^n \left(-\frac{\partial}{\partial c}\right)^m \frac{\exp(-b^2/4c)}{c^{n+1}}. \quad (8.5.4)$$

Эта формула может быть получена с помощью работы [292] и отвечает тому, что умножение подынтегрального выражения на t эквивалентно дифференцированию его по $-c$. Итак,

$$x_{H_s}^R(s, b) = \frac{-xG(s/s_0)^{\alpha_0} \exp(i\pi\alpha_0/2) \left(\frac{b}{2c}\right)^n \exp(-b^2/4c)}{8\pi s} \quad (8.5.5)$$

Эта формула дает функцию профиля в пространстве прицельного параметра для обмена реджевским полюсом. Во всех случаях, кроме амплитуды без переворота спина ($n = 0$), она должна обращаться в нуль при $b = 0$, а для больших значений b все функции профиля имеют гауссову форму (из-за предположенной экспоненциальной зависимости от t), причем ширина кривой, определяемая значением c , увеличивается с ростом $\text{Im}s$. Это согласуется с тем, что обсуждали в разд. 6.8д.

Такие выражения для каждого реджеона подставляют в формулу (8.4.40), и интеграл можно вычислить, используя выражение (8.5.4) с заменой b на $\sqrt{-t}$, т. е.

$$\int_0^{\infty} \exp(-b^2/4c) (b^2)^{n/2+m} J_n(b\sqrt{-t}) b db = (-t)^{n/2} \left(-4c^2 \frac{\partial}{\partial c}\right)^m \times \\ \times [(2c)^{n+1} \exp(ct)]. \quad (8.5.6)$$

Так, при $n = 0$ для разреза $R_1 \otimes R_2$ получаем

$$A_{H_s}^{c_2}(s, t) = \frac{i}{8\pi s} \frac{x_1 G_1 x_2 G_2}{c_1 + c_2} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_1^0 + \alpha_2^0} \exp\left[-i \frac{\pi}{2} (\alpha_1^0 + \alpha_2^0)\right] \times \\ \times \exp\left[\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} t\right]. \quad (8.5.7)$$

Таким образом, видим, что разрез имеет более пологую зависимость от t , чем полюс, а функция профиля разреза имеет вид

$$\exp\left[-\frac{b^2}{4} \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}\right] \quad (8.5.8)$$

и более короткий радиус, чем функция профиля полюса (8.5.5).

Теперь в случае, когда $\text{Im}(s/s_0) \gg a/a'$ (что обычно равно 4)

$$\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \rightarrow \frac{\alpha_1' \alpha_2'}{\alpha_1' + \alpha_2'} \left(\ln \frac{s}{s_0} - i \frac{\pi}{2}\right)$$

и поэтому

$$A_{H_s}^{c_2}(s, t) \rightarrow -\frac{G_1 G_2}{8\pi s_0} \frac{(s/s_0)^{\alpha_c(t)} x_1 x_2 \exp(-i\pi/2\alpha_c(t))}{a_1 + a_2 + (\alpha_1' + \alpha_2') (\ln(s/s_0) - i\pi/2)} \sim \frac{s^{\alpha_c(t)}}{\ln s}, \quad (8.5.9)$$

$$\text{где} \quad \alpha_c(t) = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 - 1 + \left(\frac{\alpha_1' \alpha_2'}{\alpha_1' + \alpha_2'}\right) t, \quad (8.5.10)$$

что согласуется с выражениями (8.2.17) и (8.3.24) для положения разреза. Получаемый сигнатурный множитель $x_1 x_2 \exp(-i\pi\alpha_c/2)$ соответствует произведению сигнатурных множителей двух полюсов, как это имело место в формуле (8.3.28). Однако присутствие $(\ln s)^{-1}$ в асимптотике указывает на то, что разрез имеет конечный скачок в точке ветвления. Когда $\ln s \rightarrow \infty$, то фаза вклада разреза в амплитуду отвечает степенному поведению (как в разд. 6.8 е), а для конечных $\ln s$ знаменатель меняет фазу.

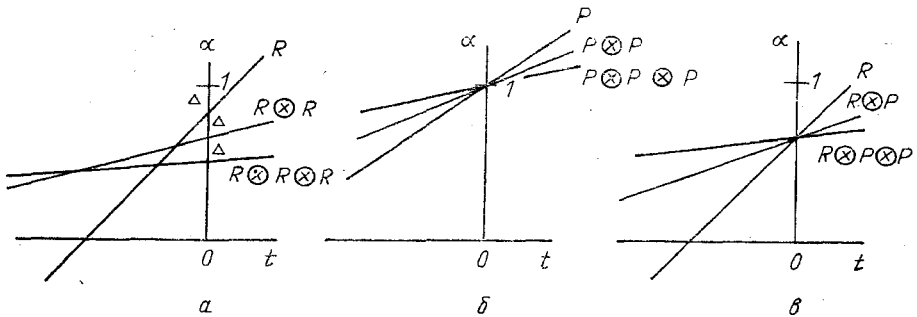


Рис. 8.24. а — Реджевская траектория R и разрезы $R \otimes R$, $R \otimes R \otimes R$. Величина $\Delta = (1 - \alpha^0)$ дает расщепление между разрезами в точке $t=0$, причем разрезы более высокого порядка имеют более пологую траекторию. б — Померонные разрезы, сгущающиеся в точке $\alpha=1$ при $t=0$. в — Реджеон R и последовательность разрезов $R \otimes P, R \otimes P \otimes P$, сгущающихся в точке α_R^0 при $t=0$

Аналогичным образом для n одинаковых реджеонов формула (8.4.40) с учетом (8.5.5) дает

$$A_{H_s}^{c_n}(s, t) = -i \frac{[-ixG(s/s_0)^{\alpha^0} \exp(-i\pi\alpha^0/2)]^n \exp(ct/n)}{(8\pi cs)^{n-1} nn!} \rightarrow \frac{(xG)^n}{(8\pi s_0 c)^{n-1}} \times \\ \times \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_c(t)} \exp(-i\pi/2\alpha_c(t)) \sim \frac{s^{\alpha_c(t)}}{(\ln s)^n}; \quad (8.5.11) \\ \alpha_c(t) = n\alpha^0 - (n-1) + \alpha't/n,$$

что снова согласуется с (8.2.17) и (8.3.24) и приводит к

$$\Delta(J, t) \sim (J - \alpha_c(t))^{n-1}$$

при $J \rightarrow \alpha_c$. Положение таких разрезов показано на рис. 8.24.

Наличие множителя $(-t)^{1/2i\mu - \mu'}$ в (8.5.6) свидетельствует о том, что во всех порядках разрезы обладают правильным фактором поворота спина, по крайней мере в том случае, если он есть в полюсах, приводящих к этим разрезам. Если же, однако, полюса содержат дополнительные множители, зависящие от t (см. разд. 6.5), то разрезы, генерируемые полюсами, как правило, не содержат таких дополнительных множителей. Это связано с тем, что разрезы не обладают определенной t -канальной четностью и поэтому не конспирируют.

Объединяя эти результаты, можно записать общее выражение для n -реджеонного разреза:

$$A_{Hs}^{c_n}(s, t) = (-1)^{|\mu - \mu' - 1/2|} F(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_c(t)} \exp\left(\frac{i\pi}{2} \alpha_c(t)\right) \times \\ \times \left(\ln \frac{s}{s_0} + d\right)^{-n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (8.5.12)$$

при $\xi_c = \prod_{i=1}^n \xi_i = \pm 1$; $\alpha_c(t)$ дается выражением (8.3.24); $F(t)$ свободно от кинематических особенностей; d — постоянная. Эйкональная и абсорбционная модели дают определенные значения d и $F(t)$ в предположении, что все вершинные функции $N(t, t_1 \dots t_n) = 1$.

8.6. Разрезы, образованные полюсом Померанчука, и абсорбция

Поскольку для померона $\alpha_P(0) \approx 1$, то разрезы, образованные полюсом Померанчука, обладают довольно специфическими свойствами. Так, если

$$\alpha_P(t) = 1 + \alpha_P' t, \quad (8.6.1)$$

то обмен n померонами дает точку ветвления при

$$\alpha_{c_n}(t) = 1 + \alpha_P' t / n, \quad (8.6.2)$$

что следует из (8.3.27). Поскольку теперь все разрезы совмещаются в точке $t = 0$ и так как траектории разрезов более высокого порядка более пологи, то при $t < 0$ они будут проходить выше разрезов более низкого порядка — это показано на рис. 8.24, б. Аналогично из (8.5.10) следует, что разрез $R \otimes P$ будет находиться при

$$\alpha_{c_2}(t) = \alpha_R^0 + \left(\frac{\alpha_R' \alpha_P'}{\alpha_R' + \alpha_P'}\right) t, \quad (8.6.3)$$

а разрез $R \otimes (P)^n$ при

$$\alpha_c(t) = \alpha_R^0 + \left(\frac{\alpha_R' (\alpha_P')^n}{\alpha_R' + n\alpha_P'}\right) t, \quad (8.6.4)$$

так что при $t = 0$ все разрезы будут совпадать с $\alpha_R(t)$ и при $t < 0$ их траектории будут лежать выше (см. рис. 8.24, в).

Это совпадение положений P -полюса и разрезов, им обусловленных, означает, что последовательные члены в сумме по всем возможным P -обменам отличаются не степенями s , а степенями $\ln s$. Поэтому проблемы перенормировок и ограничения, налагаемые условием унитарности, упомянутые в разд. 8.3, для померона гораздо более существенны, чем для других полюсов. Как было видно в разд. 10.8 и 11.7, наивная итерация P -обмена по t приводила бы к поведению, противоречащему ограничению Фруассара (заключающемуся в том, что $A(s, 0) \leq \leq \ln^2(s)$, и поэтому доминантность полюса, даже при $t = 0$, ка-

жется несамосогласованной. Отсюда ясно, что итерации в s -канале, приводящие к абсорбции у P -полюса, должны быть весьма существенны. К сожалению, унитаризация одновременно как в t -, так и в s -канале не выполнена. Реджевская теория поля, о которой упоминалось в разд. 8.3, подсказывает, что, возможно, $A(s, 0) \approx s (\ln s)^{\nu}$ (где в первом приближении $\nu \approx 1/6$ [3]), но это решение учитывает только t -канальную унитарность, а согласие его с s -канальной унитарностью не исследовано.

Так как ведущая особенность в J -плоскости должна быть самосогласована, то при подстановке в (8.3.24) она должна воспроизводить себя. Ясно, что линейная форма траектории не воспроизводит себя, но если взять траекторию в виде [357]

$$\alpha(t) = 1 \pm \alpha' \sqrt{-t}, \quad \alpha' = \text{const}, \quad (8.6.5)$$

то тогда

$$\alpha_{c_n}(t) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha(t_i) - n + 1 \right\} = \alpha(t) \text{ при всех } n, \quad (8.6.6)$$

где

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{-t_i} = \sqrt{t}. \quad (8.6.7)$$

Таким образом, при $t < 0$ полюса становятся комплексными, не нарушая при этом аналитичности Мандельштама, так как два полюса имеют одинаковые и противоположные по знаку мнимые части (см. разд. 3.2). Известно, что в общем случае, когда траектории полюсов и разрезов пересекаются, унитарность требует, чтобы траектории были бы комплексными [416]. То, что при $t < 0$ $\text{Im} \{\alpha\} \neq 0$, приводит к $s^{\alpha(t)} = s^{\alpha_R(t)} \exp\{i\alpha_I(t) \ln s\}$, где $\alpha_{R,I}$ — действительная и мнимая части α , и поэтому зависимость фазы от энергии (6.8.14) не будет выполняться. Таким образом степенное реджевское поведение будет модулировано осцилляциями по $\ln s$. До сих пор эти явления не проявлялись, и эффективная траектория на рис. 6.6 линейна по t . Конечно, может случиться, что для наблюдения таких эффектов нужно, чтобы $\ln s \gg a/\alpha'$, и в таком случае они могут быть подтверждены лишь в будущем.

Когда $\alpha_P(0) = 1$, $x = 1$ и для всех обменов помероном из выражения (8.5.11) получается следующее правило сумм:

$$A_{H_3}(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{c_n}(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{[-G(s/s_0)]^n \exp(ct/n)}{(8\pi cs)^{n-1} nn!}, \quad (8.6.8)$$

что после подстановки $s_0 = 1$ дает

$$\begin{aligned} \alpha_{12 \rightarrow \text{все}}^{tot}(s) &= \frac{1}{s} \text{Im} \{A^{12 \rightarrow 12}(s, 0)\} = G - \frac{G^2}{32\pi c} + \\ &+ \frac{G^3}{1152\pi^2 c^2} - \dots \rightarrow G \left(1 - \frac{G}{32\pi\alpha' \ln s} + \dots \right), \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

и если предположить сходимость ряда (что может быть неверно), то получается, что $\sigma^{tot}(s) \rightarrow \text{const}$ логарифмически и снизу. Рост σ^{tot} зависит критическим образом от знака разреза, который верно вычисляется в эйкональной и абсорбционной моделях и в реджеонном исчислении и противоположен AFS -знаку, который при чисто мнимой амплитуде P -обмена (при $t = 0$) приводил бы к положительному знаку второго члена. К сожалению, член, отвечающий разрезу в (8.6.9), недостаточен, чтобы описать наблюдаемый рост $\sigma^{tot}(pp)$ (см. рис. 6.4). Если, однако, использовать производ, подсказываемый выражениями (8.3.8) и (8.2.37), и умножить вклад разреза на произвольный множитель N^2 , то можно подобрать значение N , чтобы описать экспериментальные данные. Но при этом вклад разрезов очень велик и сходимость ряда кажется еще более сомнительной (см. разд. 8.7).

Если $\alpha_P(0) < 1$, то полюс и разрезы разделены конечным расстоянием $\Delta = (1 - \alpha_P(0))$ при $t = 0$ (см. рис. 8.24, а), но при этом трудно понять наблюдаемый рост σ^{tot} . Экспериментальные данные рис. 6.6 указывают, что $\alpha_P(0) > 1$, но это можно согласовать с ограничением Фруассара (2.4.9) только в том случае, когда в результате унитаризации возникает большой вклад разрезов, сокращающий вклад полюса. Можно увидеть, как это получается, следующим образом. Если $\alpha_P(0) > 1$, то из (8.5.5) при $n = 0$

$$\begin{aligned} \chi_H^P(s, b) &= - \frac{G_P(s/s_0)^{(\alpha_P^\beta - 1)} \exp(-i\pi\alpha_P\beta/2 - b^2/4c_P)}{8\pi s_0 c_P} = \\ &= - \frac{G_P}{8\pi s_0 c_P} \exp\{-i\pi\alpha_P\beta/2 - b^2/4c_P + (\alpha_P^\beta - 1) \ln(s/s_0)\}, \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

так что если

$$b^2 < b_0^2 = 4(\alpha_P^\beta - 1)\alpha_P' \ln^2 s/s_0, \quad (8.6.11)$$

то

$$\chi_H^P(s, b) \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

но при $b^2 > b_0^2$ $\chi_H^P(s, b) \rightarrow 0$. Таким образом, из (8.4.36) получаем

$$A_H(s, b) = \begin{cases} \rightarrow i/2, & b^2 < b_0^2; \\ 0, & b^2 > b_0^2. \end{cases} \quad (8.6.12)$$

Эта функция профиля похожа на функцию, отвечающую полному поглощению на черном диске радиуса b_0 . При $t \rightarrow 0$ $J_0(b\sqrt{-t}) \rightarrow 1$, так что из (8.4.37) получаем

$$\text{Im}\{A_{Hs}(s, 0)\} = 8\pi s \int_0^\infty b db \text{Im}\{A_H(s, b)\} \rightarrow 4\pi s \int_0^{b_0} b db = 2\pi s b_0^2 \quad (8.6.13)$$

и поэтому

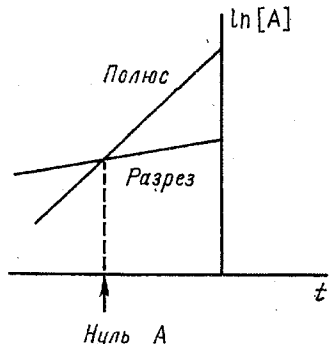
$$\sigma_{12}^{tot}(s) \rightarrow 8\pi\alpha_P'(\alpha_P^\beta - 1) \ln^2(s/s_0) \quad (8.6.14)$$

в соответствии с ограничением Фруассара. Однако при подстановке чисел, следующих из рис. 6.6: $\alpha'_p = 0,25 \text{ ГэВ}^{-2}$ и $\alpha\beta = 1,07$, это выражение дает

$$\sigma_{12}^{tot} (s) \rightarrow 3,6 \ln^2 (s/s_0) \text{ мбарн,}$$

что при $s_0 = 1$ много меньше современного значения полного сечения ($\sigma_{pp}^{tot} \approx 44$ мбарн при $\ln s \approx 8$, отвечающего энергиям ISR). Поэтому если эта модель правильная, то только при очень высоких энергиях наблюдаемое степенное поведение $\sigma_{pp}^{tot} \sim 27 s^{0,07}$ мбарн превратится в асимптотическое поведение $\ln^2 s$. Если существенны более сложные диаграммы, чем та, которая изображена на рис. 8.19, например типа рис. 8.22, то в случае $\alpha_p(0) > 1$ получается картина не черного, а серого диска $[\text{Im} \{A(s, b)\} < 1/2]$, но основные выводы остаются неизменными [64, 79].

Из выражения (8.4.40) ясно, что в случае неупругого рассеяния, где невозможен обмен P -полюсом, в дополнение к доминирующему обмену R -полюсом будет существовать последовательность разрезов типа $R \otimes (P)^n$, которые будут доминировать при $t < 0$, $s \rightarrow \infty$. Так, если для вклада R использовать (8.5.1) и положить $\alpha(0) = 1$, то из (8.5.7) разрез $R \times P$ будет иметь вид



$$A_{Hs}^{R \otimes P}(s, t) = \frac{\lambda x_R G_R G_P}{8\pi\alpha_0} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_R^0} \times \frac{\exp\{-i\pi\alpha_R^0/2\}}{c_R + c_P} \exp\{c_R c_P / (c_R + c_P) t\}, \quad (8.6.15)$$

Рис. 8.25. Вклад полюса и разреза в функции t при фиксированном s .

Различная экспоненциальная зависимость от t в выражении (8.6.16) приводит к тому, что в точке, где значения вклада полюса и разреза одинаковы (в пренебрежении разностью фаз, которая мала для малых $|t|$) в амплитуде имеется нуль

где λ — фактор усиления.

Это выражение имеет ту же асимптотическую фазу, что и полюс (8.5.1), но противоположный знак при $t = 0$ и при t вблизи нуля, где $\alpha_c \approx \alpha_R$. К тому же t -зависимость разреза более пологая, чем у полюса, так что если даже полюс превосходит разрез в точке $t = 0$, то при некотором $t < 0$ должно возникнуть сокращение между полюсом и разрезом (деструктивная интерференция), как показано на рис. 8.25. Приближенно, пренебрегая разрезами более высоких порядков

ду полюсом и разрезом (деструктивная интерференция), как показано на рис. 8.25. Приближенно, пренебрегая разрезами более высоких порядков

$$A_{Hs}(s, t) \approx R^R + A^{R \otimes P} = -x_R G_R \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_R^0} \exp(-i\pi\alpha_R^0/2) \times \left(\exp(c_R t) - \frac{\lambda G_P}{8\pi s_0} \exp\{[c_R c_P / (c_R + c_P)] t\} \right), \quad (8.6.16)$$

и при малых $|t|$, где фазы полюса и разреза одинаковы, будут существовать почти совмещенные нули в $\text{Re} \{A_{Hs}\}$ и $\text{Im} \{A_{Hs}\}$ и поэтому в $d\sigma/dt$ может возникнуть минимум. Как будет видно в следующем

разделе, так можно объяснить некоторые минимумы, рассматривавшиеся в разд. 6.8 л.

Интересно исследовать структуру этой амплитуды в представлении прицельного параметра. Исходя из (8.4.39) можно записать

$$\begin{aligned} A_H(s, b) &\approx \chi_H^R(s, b) + i\lambda\chi_H^R(s, b)\chi_H^P(s, b) = \\ &= \chi_H^R(s, b)[1 + i\lambda\chi_H^P(s, b)], \end{aligned}$$

и так как вклад P -полюса почти чисто мнимый, то это равно

$$\approx \chi_H^R(s, b)[1 - \lambda|\chi_H^P(s, b)|]. \quad (8.6.17)$$

График этой функции показан на рис. 8.26, откуда видно, что эффект абсорбции уменьшает реджеонную амплитуду при малых b вследствие деструктивной интерференции с разрезом более короткого радиуса.

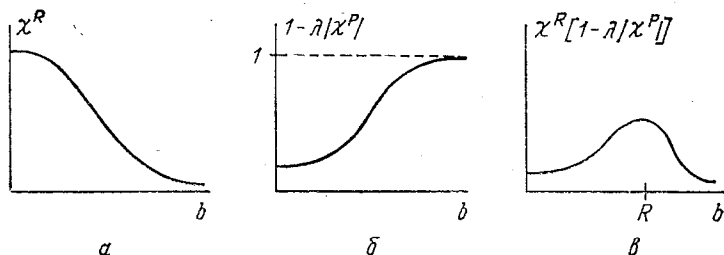


Рис. 8.26. a — Функция профиля в зависимости от прицельного параметра для полюса Редже из выражения (8.5.5) при $n=0$. $б$ — S -Матрица, соответствующая абсорбции. $в$ — Функция профиля амплитуды с учетом абсорбции (8.6.17).

Видно уменьшение амплитуды при малых b , т. е. при малых J . Результирующий максимум возникает в точке $b=R \approx 1$ Фм

С помощью подходящего выбора λ можно совсем исключить рассеяние при малых b (полное поглощение), так что основная часть амплитуды рассеяния будет отлична от нуля при $b \approx 1$ Фм на периферии мишени. Для амплитуд с переверотом спина кинематический множитель b^n в (8.5.5) означает, что сама полюсная амплитуда уже в достаточной степени периферична и поэтому эффект абсорбции в этом случае существенно меньше.

Можно грубо аппроксимировать эту периферическую функцию профиля δ -функцией в b -пространстве с радиусом R :

$$A_H(s, b) \approx \frac{-xG_H}{8\pi s} \exp(-i\pi\alpha/2) \left(\frac{s}{s_0}\right)^\alpha \frac{1}{R} \delta(b-R), \quad (8.6.18)$$

где $R = 1$ Фм, что после подстановки в (8.4.37) приводит к

$$A_H(s, t) = -xG_H \exp[(-i\pi/2)\alpha(t)] \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)} J_n(R\sqrt{-t}) \quad (8.6.19)$$

для суммы вклада полюса и разреза. При этом мы полностью игнорировали разницу между $\alpha_R(t)$ и $\alpha_c(t)$ как в фазе, так и в поведении с энергией и опустили множитель $\ln s$ в амплитуде разреза. При

$R = 1$ Фм первые нули функций Бесселя возникают в точках $-t = = 0,2, 0,55$ и $1,2$ ГэВ² при $n = 0, 1, 2$ соответственно [231]. Эффекты, отвечающие некоторым из этих нулей амплитуд, отмечали в разд. 6.8. Подробнее этот результат будет исследован в следующем разделе.

8.7. Феноменология реджевских разрезов

Установив общие свойства вклада реджевских разрезов, мы можем теперь попытаться исследовать, насколько они компенсируют недостатки описания экспериментальных данных одними только полюсами, отмечавшиеся в разд. 6.8.

Поскольку известны траектории Редже, то положения различных точек ветвления, а, следовательно, степенное поведение и асимптотическая фаза вкладов разрезов определяются выражением (8.3.24). К тому же для s -канальных спиральных амплитуд, использованных в (8.5.12), кинематические ограничения на вклады разрезов довольно просты. Это ставит перед нами две основные проблемы. Во-первых, нужно определить $F(t)$ и d в выражении (8.5.12). Значения этих величин предсказываются эйкональной и абсорбционной моделями, но если сравнить их предсказания (8.4.28) с результатом реджеонного исчисления (8.3.8), то возникают сомнения в применимости моделей. Если рассматривать N в (8.3.8) как неизвестную функцию, то неизвестными оказываются также $F(t)$ и d . Во-вторых, мы не знаем, при каких энергиях становятся применимыми выражения типа (8.5.12). При выводах, приведенных в разд. 8.2, 8.3 и 8.4, учитывали только главное логарифмическое приближение для каждой диаграммы, что справедливо только при $\ln s / s_0 \gg 1$. Это неравенство редко выполняется на практике. Для разрезов, включающих P -полюс, где последовательные члены эйконального разложения отличаются лишь множителем $\ln s / s_0$, эта проблема еще сложнее.

Имея в виду эти неопределенности, рассмотрим некоторые нерешенные проблемы из разд. 6.8.

8.7а. Полные сечения и упругое рассеяние

Растущие полные сечения $\sigma^{tot}(s)$, показанные на рис. 6.4, приводят либо к $\alpha_P(0) > 1$, что без учета поправок, связанных с разрезами, нарушает ограничение Фруассара, либо к $\alpha_P(0) = 1$ и очень большому вкладу разрезов [см. (8.6.9) и далее]. Так, для pp -рассеяния можно записать

$$\sigma_{pp}^{tot}(s) = iG_P \left(1 - \frac{\lambda G_P}{32\pi\alpha'_P \ln s} + \dots \right), \quad (8.7.1)$$

где λ — фактор усиления. Для описания экспериментальных данных нужно, чтобы $G_P \approx 85$ мбарн, $\lambda \approx 2$. Однако более пологая зависимость разреза от t означает, что при $|t| \approx 0,5$ ГэВ² разрез и полюс сокращают друг друга, что приводило бы к ненаблюдаемому на опыте минимуму в $d\sigma / dt$. Эта проблема не имеет простого решения

[125]. Все экспериментальные данные по σ^{tot} , однако, могут быть прекрасно описаны при $\alpha_p(0) = 1,07$. При малых $|t|$ нет никаких указаний на наличие разрезов, которые необходимы для выполнения ограничения Фруассара. Но поскольку полное сечение в виде $\sigma^{tot}(s) = 27^{0,07}$ мбарн не нарушает границу Фруассара $\sigma^{tot} \leq \leq 60 \ln^2 s$ мбарн вплоть до значений $s \sim 10^{75}$ ГэВ², это не удивительно.

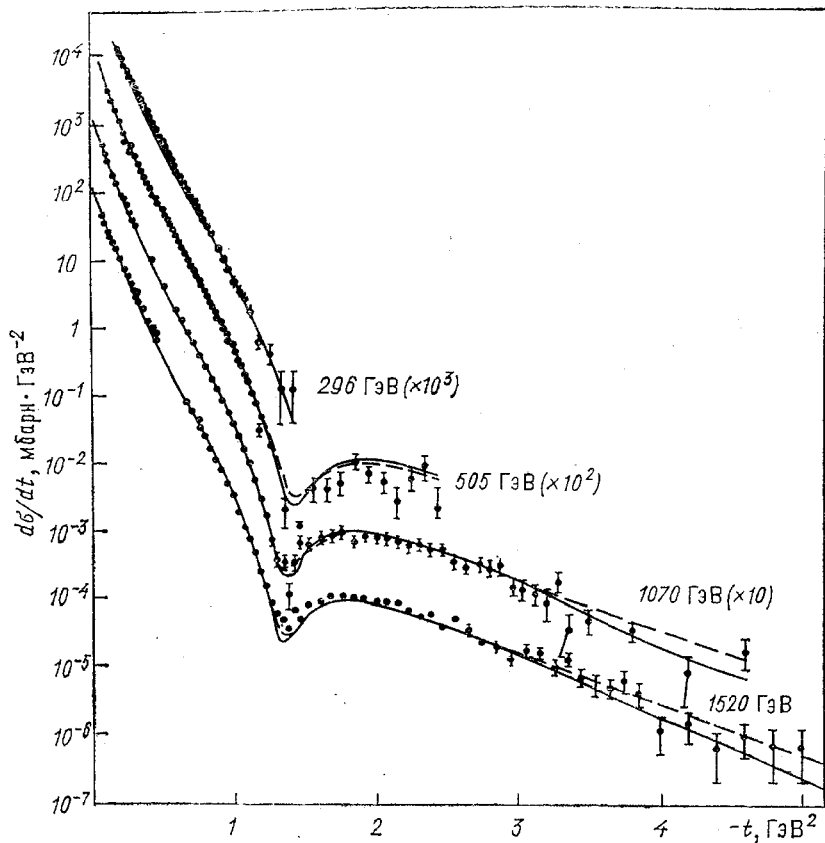
Можно объяснить наличие минимума в $d\sigma/dt(pp)$ при 1,4 ГэВ² (рис. 8.27, а) как результат интерференции между P -полюсом и разрезом $P \otimes P$ [как в выражении (8.6.16) с заменой $R \rightarrow P$]. График эффективной траектории (рис. 8.27, б) подтверждает это предположение. Но поскольку минимум существует при больших $|t|$, то нужно очень малое значение $\lambda \approx 1/15$. А так как в пике вперед $d\sigma/dt \sim e^{12t}$, в то время как при $|t| > 1,4$ ГэВ² $d\sigma/dt \sim e^{2t}$, то формула (8.6.16), которая дает $A^c \sim \exp(c_p t/2)$, не описывает эти данные. Нужно ввести некоторую зависимость от t в функцию N в выражении (8.4.1), например положить $N^2 = \lambda e^{bt}$ с $b < 0$. Так, приведенные на рис. 8.27 примеры вклада разрезов в упругое сечение показывают, что их свойства должны сильно отличаться от тех, которые предсказываются простой эйкональной моделью [125].

8.76. Нуль, возникающий из-за пересечения дифференциальных сечений

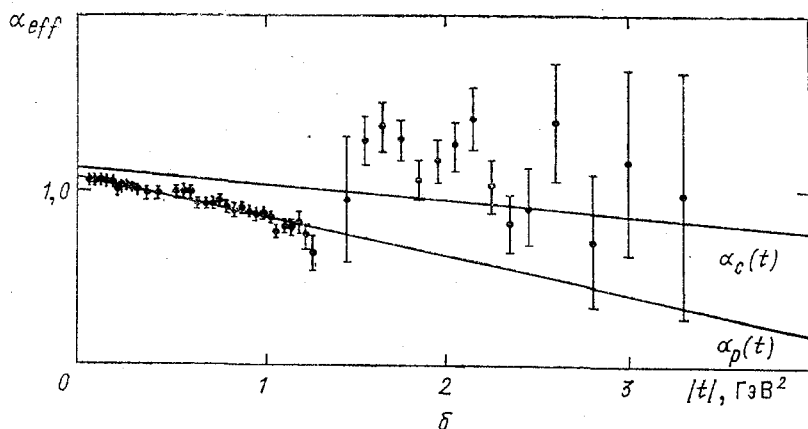
Этот нуль в вершинах связи ω - и ρ -реджеонов с нуклонами без переворота спина обсуждали в разд. 6.8 м. То, что он появляется при $|t| \approx 0,15$ ГэВ², можно было бы ожидать как результат деструктивной интерференции R -полюса и разреза $R \otimes P$ по формуле (8.6.19) при $n = 0$. Так как этот нуль не факторизуется, то его объяснение на основе разрезов является единственно возможным и, разумеется, этот факт подтверждает идею абсорбции [231].

8.7в. Нефизические минимумы

Из табл. 6.7 видно, что объяснение минимумов, аналогичных тому, который существует в дифференциальном сечении процесса $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ при $|t| \approx 0,55$ ГэВ² как результат нефизического нуля в A_{+-} , возникающего из-за обращения в нуль $\alpha_p(t)$, несовместимо с факторизацией. И опять, значение t , при котором наблюдается минимум, такое, что выражение (8.6.19) предсказывает в этой точке нуль в амплитуде с $n = 1$, и поэтому интерференция разреза с полюсом дает лучшее объяснение этому минимуму. Возникает, однако, некоторая сложность, связанная с тем, что кинематика A_2 -обмена в реакции $\pi^- p \rightarrow \eta n$ очень похожа на кинематику ρ -обмена в процессе $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, так что и в этом случае можно было бы ожидать появления минимума, обусловленного интерференцией полюса с разрезом, но на опыте он не наблюдается. (Так как точка $\alpha_{A_2} = 0$ есть точка своей сигнатуры, то нельзя ожидать появления нефизических нулей.) Это может быть связано с тем, что A_2 -обмен имеет меньший радиус ($m_{A_2}^2 > m_\rho^2$), так что $c_{A_2} > c_\rho$ и в выражении (8.6.16) минимум, связанный



a



b

Рис. 8.27. *a* — Подгонка данных по $d\sigma/dt(pp)$ с учетом P — полюса и разреза $P \otimes P$ (из [125]). *b* — Эффективные траектории, полученные из экспериментальных данных для α_p и α_c .

Вклад полюса доминирует при $|t| < 1,4$ ГэВ², а разреза — при $|t| > 1,4$ ГэВ²

с интерференцией A_2 -полюса и разреза $A_2 \otimes P$, проявлялся бы при больших $|t|$ [304]. Или, в другом случае, абсорбционная амплитуда может содержать не только чисто мнимый P -полюс, и разность фаз между ρ - и A_2 -обменами (связанная с различными сигнатурами) приводила бы к минимумам в разных местах [230]. Поскольку сигнатура есть существенное свойство дуальных моделей, Харари [225] предложил дуальную абсорбционную модель, в которой правила вычисления абсорбции (8.6.19) применяют только для $\text{Im} (A)$, т. е.

$$\text{Im} \{A_{Hs}(s, t)\} = G_H(s/s_0)^{\alpha(t)} J_n(R\sqrt{-t}), \quad (8.7.2)$$

а дисперсионные соотношения обуславливают вещественную часть, зависящую от сигнатуры [что следует из (6.8.18)] и поэтому

$$A_{Hs}(s, t) = -G_H \left[\frac{\exp(-i\pi\alpha) + \xi}{\sin \pi\alpha} \right] \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha(t)} J_n(R\sqrt{-t}) \quad (8.7.3)$$

имеет нуль при $\alpha_\rho = 0$ с $\xi = -1$ и не имеет нуля для A_2 с $\xi = +1$. Однако эта гипотеза не работает в случае обменов K^* и K^{**} , где $\alpha = 0$ для $|t| \approx 0,2 \text{ ГэВ}^2$, что не согласуется с наличием нуля в (8.7.3) при $n = 1$, так как в таком случае значение R выросло бы до $1,6 \text{ Фм}$ [246]. Поэтому, хотя объяснение появления минимумов в результате абсорбции может быть правильным, природа абсорбции должна быть довольно сложной.

8.7г. Поляризация и фазы

При чисто мнимом вкладе P -полюса выражение (8.6.16) приводит к совмещенным нулям в $\text{Re} \{A\}$ и $\text{Im} \{A\}$. Так, если правильно объяснение на основе абсорбции, в реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ поляризация (4.2.22) должна иметь нуль при $|t| \approx 0,15 \text{ ГэВ}^2$, совпадающий с точкой пересечения дифференциальных сечений. На опыте это не так и фазовый анализ, результаты которого показаны на рис. 6.10, показывает, что вплоть до $|t| \approx 0,5 \text{ ГэВ}^2$ в $\text{Re} \{A_{++}\}$ нуля нет, а при $|t| = 0,5 \text{ ГэВ}^2$ возникает двойной нуль. Эти эффекты могут быть объяснены в рамках абсорбционной модели только в том случае, если амплитуда, приводящая к абсорбции, имеет значительную вещественную часть, зависящую от t . Малый наклон P -траектории ($\alpha_\rho = 0,2 \text{ ГэВ}^{-2}$) не дает нужного значения фазы, но если включить в абсорбционную амплитуду и f -полюс, так что возникнет интерференция R и $(P + f) \otimes R$, то может быть получено удовлетворительное согласие с экспериментом [133]. Другое, более искусственное изменение фазы, было предложено в работе [230]. Но если справедлив подход такого типа, то, как обсуждалось в разд. 6.8 н, только $\text{Im} \{A_{++}\}$ отличается от значения, которое можно было бы ожидать при выборе нефизических значений для ρ -полюса. Представление амплитуды рис. 6.1 в плоскости прицельного параметра приводит к рис. 8.28. Поскольку полюс без нефизических множителей приводит к амплитуде рис. 8.26, а, ясно, что при малых b $\text{Im} \{A_{++}(s, b)\}$ не только обусловлена абсорбцией, но

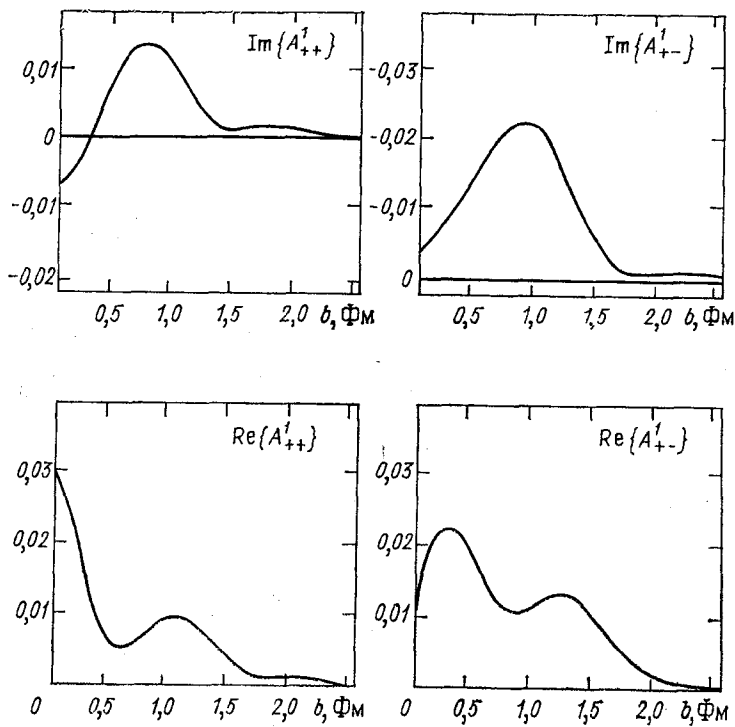


Рис. 8.28. Амплитуды упругого μN -рассеяния с $I_t=1$ при энергии 6 ГэВ в зависимости от прицельного параметра, соответствующие амплитудам в зависимости от t , приведенным на рис. 6.10 (из [218])

имеется даже перепоглощение (т. е. изменение знака амплитуды), что противоречит любому физическому представлению о природе абсорбции.

8.7д. Обменное вырождение и нарушение кроссинга

В разд. 6.8 з отмечали, что хотя обменное вырождение приводит к равенству сечений процессов, связанных соотношением кроссинга, причем амплитуда одного из них вещественна (6.8.22), а другая обладает меняющейся фазой (6.8.21), но на опыте это часто не так. Надеялись, что включение разрезов исправит этот недостаток, но в действительности они только ухудшают дело. Это получается потому, что в процессах, амплитуда которых обладает меняющейся фазой, деструктивный эффект не столь велик, как в процессах с вещественной амплитудой (которые в случае чисто мнимой абсорбционной амплитуды приводят к вещественному вкладу разрезов). Поэтому сечение процессов, где амплитуда имеет меняющуюся фазу, должно быть больше, чем сечение процессов с вещественной амплитудой. На опыте наблюдается обратное. Проблема усложняется еще и тем, что в действительности,

по крайней мере для ρ - и A_2 -траекторий (см. рис. 6.6) обменное вырождение нарушено и поэтому при низких энергиях должны быть существенны вклады лежащих ниже траекторий, разрезов $R \otimes f$ и т. п. [247, 268, 306].

8.7е. Конспирации

В разд. 6.8 к показано, что (в случае отсутствия конспираций) факторизация и ограничения, накладываемые четностью, могут привести к появлению дополнительных кинематических множителей в реджевских полюсных амплитудах, которые приводят к тому, что амплитуды при $t = 0$ обращаются в нуль. Это особенно важно в случае обмена π -полюсом в процессах типа $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, $\pi p \rightarrow \rho p$, $\bar{p} p \rightarrow \bar{\pi} n$, которые должны были бы иметь амплитуды вида

$$A(s, t) \sim t / (t - m_\pi^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (8.7.4)$$

Из табл. 6.6 было видно, однако, что в действительности в таких процессах в рассеянии вперед часто возникают пики. Поскольку разрезы конспирируют друг друга, то в амплитудах без переворота спина они не должны обращаться в нуль и, естественно, не будут содержать пионного полюса. Если рассмотреть интерференцию π -обмена и разреза $\pi \otimes P$, где амплитуда разреза $\pi \otimes P$ медленно меняется при $t = 0$, получим

$$A(s, t) \sim t / (t - m_\pi^2) - 1 = m_\pi^2 / (t - m_\pi^2), \quad (8.7.5)$$

которая обладает пионным полюсом, но не имеет множителя, обращающегося в нуль. Эффект разреза заключается в поглощении вклада пионного полюса в S -волну (этот вклад не зависит от t и, следовательно, от z_s), что иногда называют моделью Вильямса [413] или «абсорбцией бедняка». Этот механизм может работать в процессах, приведенных в табл. 6.6. При $t = 0$ амплитуда определяется только разрезами (а не полюсом), так что вклад разреза может быть определен из эксперимента и оказывается очень большим. Так, например, в процессе $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, описываемом моделью типа (8.6.17), требуется $\lambda \approx 3$ [260].

8.7ж. Сужение конуса и разрезы, малые по сравнению с полюсами

Поскольку разрезы дают более пологую зависимость от t , чем полюса (см. рис. 8.24), они должны доминировать при больших s и $|t|$ и можно было бы ожидать, что сужение конуса будет уменьшаться, и α_{eff} становится более пологим при увеличении $|t|$. Это действительно происходит в некоторых случаях, как, например, при упругом pp -рассеянии (см. рис. 8.27, б) и в фоторождении. Однако эти процессы совершенно не типичны, потому что большинство адронных неупругих процессов, аналогичных тем, которые приведены на рис. 6.6, приводят к линейной траектории α_{eff} с $\alpha' = 0,9 \text{ ГэВ}^{-2}$, причем это верно вплоть до наибольших измеренных значений $|t|$. Так, в реак-

ции $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ α_{eff} получается равной $\alpha_p = 0,55 + 0,9 t$, несмотря на то, что разрез $\rho \otimes P$ с

$$\alpha_c(t) \approx \alpha_p^0 + \frac{\alpha_p' \alpha_p'}{\alpha_p' + \alpha_p'} t \approx 0,55 + 0,2t \quad (8.7.6)$$

[см. (8.6.3)] как будто должен доминировать в амплитуде A_{++} при $|t| > 0,2 \text{ ГэВ}^2$ и в A_{+-} при $|t| > 0,55 \text{ ГэВ}^2$, если справедливы аргументы, приведенные в разд. 8.7 б, в. Такое полное поведение α_{eff} действительно озадачивает. Оно может указывать на то, что совершенно неправильно приписывать отсутствие факторизации вкладу разрезов. Но, возможно, объяснение заключается в том, что при существующих энергиях вклад разрезов получается в основном не из области скачка вблизи точки ветвления, как предполагалось в формуле (8.4.1). Одна из причин этого может заключаться в том, что скачок на разрезе должен обращаться в нуль вблизи точки ветвления (см. разд. 8.3), и это свойство не основано на вычислениях в эйкональной или абсорбционной моделях. Другая, более спорная возможность [80] заключается в том, что вершины N на рис. 8.12 определяются полюсами, так что ведущий вклад в амплитуду разреза дает рис. 8.14, а и

$$A_J(t) \sim \frac{(J - \alpha_c)^2}{(J - \alpha_R)^2} \ln(J - \alpha_c); \quad \Delta_J \{A_J(t)\} \sim \frac{(J - \alpha_c)^2}{(J - \alpha_R)^2}, \quad (8.7.7)$$

где $(J - \alpha_R)^{-1}$ — пропагатор реджеона; $\ln(J - \alpha_c)$ возникает из-за интегрирования по петле; $J - \alpha_c$ появляется в каждой трехреджеонной вершине, чтобы скачок обращался бы в нуль при $J = \alpha_c$. (Если подставить (8.7.7) в (4.6.2), то получим $A(s, t) \sim s^{\alpha_c} (\ln s)^{-3}$, когда $\ln s \rightarrow \infty$, но $A(s, t) \sim s^{\alpha_R}$ при конечных $\ln s$, так как основной вклад в скачок дает полюс. В рамках такой модели можно описать экспериментальные данные [122], но поскольку нет определенных правил, по которым скачок на разрезе выражается через параметры полюсов, то модель обладает значительной неопределенностью. К тому же рис. 8.14, а показывает, что сумма полюса и разреза должна факторизоваться, что, очевидно, является недостатком модели.

8.7з. Экзотические обмены

Вследствие неопределенности вклада разрезов было бы очень полезно иметь возможность исследовать амплитуды, где невозможен обмен реджевским полюсом и могут появляться только разрезы. Очевидно, что разрез $R \otimes P$ не годится для этого, потому что он имеет те же квантовые числа, что и R -полюс, поэтому следует искать разрезы типа $R \otimes R$. Если $\alpha_R(0) \approx 0,5$, то (8.6.3) дает $\alpha_{RR}(0) \approx 0$, поэтому следует ожидать, что эти сечения будут быстро убывать с энергией: $s^{-2} (\ln s)^{-2}$.

Например, процесс $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \Delta^-$ описывается обменом двухзарядной частицей с $I_t = 2$, поэтому ведущим обменом в этом случае должен быть $\rho \otimes \rho$ -разрез. К сожалению, дифференциальное сечение рассеяния вперед для этого процесса, как и для многих других процессов, приведенных в табл. 6.5, слишком мало, чтобы его можно было

измерить не только на пороге. Наблюдали процессы $\pi^-p \rightarrow K^+\Sigma^-$ и $K^-p \rightarrow \pi^-\Sigma^-$ (обмен $\rho \otimes K^*$ -разрезом) и $K^-p \rightarrow K^+\Sigma^-$ (обмен $K \otimes K^*$ -разрезом). Есть некоторые подтверждения того, что при $s > 5 \text{ ГэВ}^2$ устанавливается поведение s^{-2} и что величина вклада этого разреза сопоставима с оценками, полученными из формулы (8.4.1) при $N^2 = \lambda = 1-1,5$ [307, 330, 338]. Другим процессом, измеренным экспериментально, является процесс $K^-p \rightarrow pK^-$, требующий странного барионного обмена с зарядом 2, так что можно ожидать, что ведущей особенностью будет разрез $K^+ \otimes \Delta$, который ведет себя как s^{-3} . Однако на опыте найдено, что начиная с 6 ГэВ $d\sigma/dt$ убывает как s^{-10} .

Если в этом классе процессов будут получены лучшие экспериментальные данные, то наши представления о разрезах значительно прояснятся.

8.7и. Реджевские разрезы и дуальность

В разд. 7.6 отмечали, что поскольку такие свойства амплитуды, как нуль, связанный с пересечением дифференциальных сечений в $\text{Im} \{A_{++}(\pi^-p \rightarrow \pi^0n)\}$ и пик вперед в сечении процесса $\gamma p \rightarrow \pi^+n$, которые могут быть обусловлены разрезами, дают вклад в правила сумм при конечных энергиях, усредненные по s -канальным резонансам, то эти резонансы должны быть дуальны сумме $R + R \otimes P$, а не просто R -полюсу.

Дуальные диаграммы для этих $R \otimes P$ -разрезов изображены на рис. 8.29, а, где учтено также то обстоятельство, что каждый кварк рассеивается только один раз (ср. с рис. 8.8, в). Диаграмма для $R \otimes R$ -разреза в мезон-мезонном рассеянии (рис. 8.29, б) дуальна P -полюсу в s - или u -канале.

В случае мезон-барионного рассеяния существует только одна диаграмма типа $R \otimes R$, потому что все кварки, входящие в состав бариона, распространяются в одном направлении, и такая диаграмма может быть построена только, если s - и u -каналы неэкзотические, и можно думать, что разрез $R \otimes R$ дает вклад только в резонансы в этих каналах (в смысле дуальности). Это означает также, что в процессе типа $K^-p \rightarrow \bar{K}^0n$ не должно быть разрезов вида $R \otimes R$, так как λ -кварк должен пройти через всю диаграмму.

В работе [414] показано, что в некоторых процессах, таких, как $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, разрезы $R \otimes R$ должны сокращаться из-за обменного вырождения. Вот вкратце аргументы этой работы. Вследствие пересечений кварковых линий и того, что каждый полюс Редже с определенной сигнатурой является суммой двух членов

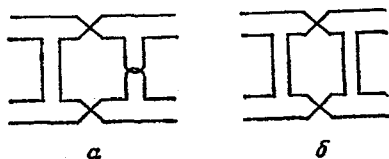
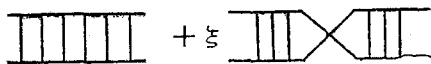


Рис. 8.29. Дуальные диаграммы для разреза $R \otimes P$ (а), $R \otimes R$ (б) для случая мезон-мезонного рассеяния



разрезы $f \otimes \rho$ и $\omega \otimes A_2$ будут сокращаться, если f , ω , ρ и A_2 обменно вырождены как по расположению траекторий, так и по вершинам. Хотя дуальные диаграммы справедливы только для $\text{Im} \{A\}$, соотношение между фазой и энергией приводит к тому, что это сокращение будет иметь место и в $\text{Re} \{A\}$. Это довольно неприятный результат, потому что, как упоминалось в разд. 8.7 г, многие проблемы, связанные с фазой амплитуды, в абсорбционной модели, учитывающей $R \otimes P$ -разрезы, могут быть решены при включении разрезов вида $R \otimes f$. Однако поскольку обменное вырождение неточно, то неясно, насколько серьезны эти аргументы.

8.7к. Фиксированные разрезы

В дополнение к движущимся реджевским разрезам существуют также фиксированные разрезы, положение которых не зависит от t . Это фиксированные корневые точки ветвления в фн-точках (см. разд. 4.8), корневые разрезы в которых идут от $J = M - 1$ до $-M$. Но поскольку $d_{\lambda\lambda}^J(z_i)$ обладает компенсирующими точками ветвления, то эти разрезы не дают вклада в асимптотику амплитуды рассеяния. Возможно, что наличие таких разрезов может привести к существованию фиксированных полюсов в нефизических точках, но подтверждений их существования нет и не существует никакого механизма, который приводил бы к появлению полюса в скачке на разрезе (как фиксированные полюса Грибова — Померанчука на реджевских разрезах).

Фиксированные разрезы предлагали также, как способ объяснить обобщенную симметрию Мак-Дауэлла для барионных полюсов Редже и отсутствие дублетов по четности [см. (6.5.13)]. В работе [83] предлагали амплитуду рассеяния, которая может иметь фиксированный разрез, начинающийся в точке $J = \alpha^0$ [где $\alpha^0 = \alpha(t=0)$], и, например, траектории с отрицательной четностью будут двигаться под разрез на нефизический лист при положительных \sqrt{t} , так что при этом не будет возникать физических полюсов. Например,

$$A_{HJ}^{\eta}(t) = \beta(t) \frac{(\alpha')^{1/2} \sqrt{t} + \eta(J - \alpha^0)^{1/2}}{(J - \alpha^0 - \alpha' t)(J - \alpha^0)^{1/2}} \quad (8.7.8)$$

обладает полюсом в точке $J = \alpha^0 + \alpha' t$ и разрезом, начинающимся в $J = \alpha^0$, и условие (6.5.13) автоматически выполняется. Но в амплитуде с $\eta = -1$ при положительных t нет полюсов. Однако феноменологически нет достаточных подтверждений справедливости таких моделей [217]. Позже было показано [353], что похожие разрезы возникают в реджевской теории поля вследствие взаимодействия фермионов с померонами. Эти разрезы не только поглощают состояния с неправильной четностью, но и превращают затравочную траекторию $\sim \sqrt{t}$ в перенормированную траекторию, которая почти пропорциональна t . Так можно объяснить рис. 5.6.

Из всего этого раздела можно сделать довольно грустное заключение, что, несмотря на развитие разнообразных моделей, которые

улучшили наше понимание структуры реджевских разрезов и соотношений унитарности в J -плоскости и несмотря на некоторый успех абсорбционной модели, улучшившей наиболее грубые дефекты описания экспериментальных данных при помощи одних только полюсов Редже, мы до сих пор не знаем, насколько существенны разрезы. Это, возможно, связано с тем, что реджевские полюса могут быть использованы, когда $s/s_0 \gg 1$, а теории с разрезами применимы, когда $\ln s/s_0 \gg 1$, но даже при энергиях $CERN-ISR$ максимальное значение $\ln s/s_0$ равно 8.

9

МУЛЬТИРЕДЖЕВСКАЯ ТЕОРИЯ

9.1. Введение

До сих пор мы наше рассмотрение ограничивали только четырех частичными амплитудами (т. е. рассматривали процессы типа $1+2 \rightarrow 3+4$). Эти амплитуды обладали очень важным достоинством, что кинематически они очень похожи на амплитуды в потенциальном рассеянии, для которых первоначально были сформулированы и развиты основные идеи реджевской теории. В частности, эти амплитуды зависят только от двух независимых переменных s и t , и поэтому имеется довольно ясное понимание того, как сделать аналитическое продолжение по J и t . Стоит также отметить, что есть богатая экспериментальная информация о процессах с двухчастичными конечными состояниями, которую можно сравнить с предсказаниями теории.

Начальное состояние любого физического процесса рассеяния практически всегда является двухчастичным (считая связанные состояния, такие, как дейтроны, одиночные частицы), но, за исключением очень низких энергий, всегда с достаточно большой вероятностью происходит рождение частиц. Причем с увеличением входной энергии доля двухчастичных и квазидвухчастичных конечных состояний в общем числе событий уменьшается. В связи с этим возникает большое желание расширить область применимости теории Редже с тем, чтобы получать предсказания для многочастичных конечных состояний. С теоретической точки зрения это даже является необходимым, так как модели полюсов Редже типа тех, что изображены на рис. 3.3, или модели реджевских ветвлений (см. рис. 8.6) демонстрируют то, как при рассмотрении амплитуд $2 \rightarrow 2$ в теории Редже существенно используется многочастичная унитарность. Таким образом, если имеется какая-либо надежда сделать теорию Редже самосогласованной (например, в смысле бутстрапа), то должна существовать возможность описать такие промежуточные состояния с помощью реджевских особенностей.

В принципе это сделать довольно просто, так как если рассмотреть в качестве примера амплитуду, изображенную на рис. 9.1, а, при ус-

ловии $s_{12}, s_{34}, s_{45} \rightarrow \infty$, то можно ожидать из рис. 9.1, б, что

$$A \sim (s_{34})^{\alpha_1(t_1)} (s_{45})^{\alpha_2(t_2)} \beta(t_1, t_2, s_{12}, s_{34}, s_{45}), \quad (9.1.1)$$

и это на самом деле верно. Однако есть несколько проблем, которые должны быть разрешены, прежде чем появится уверенность, что этот результат справедлив. Во-первых, необходимо понять, каким образом определить углы рассеяния и, исходя из этого, парциальные амплитуды для многочастичных процессов, а затем—как их аналитически продолжить по J и инвариантам различных каналов. Во-вторых, нужно ясно понимать, какие переменные необходимо устремить к бесконечности, а какие — держать фиксированными, когда берется не-

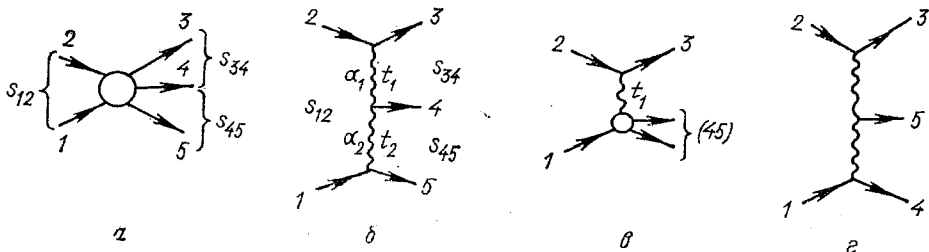


Рис. 9.1. а — Амплитуда реакции $1+2 \rightarrow 3+4+5$. б — Двухреджеонная модель для этого процесса. в — $1+2 \rightarrow 3+(45)$. г — Другая двухреджеонная модель

который конкретный реджевский предел; какова структура особенностей амплитуды по этим переменным и в каком порядке нужно переходить к пределам. Кроме того, нужно учитывать, что центральная вершина на рис. 9.1, б включает в себя реджеоны, спины и спиральности которых зависят от α , и поэтому мы должны проверить результирующие кинематические факторы.

Фактически, большая часть этих вопросов до сих пор не может быть корректно поставлена и рассмотрена, так как для того, чтобы это сделать, требуется значительно более глубокое понимание структуры особенностей многочастичных амплитуд по сравнению с тем, которое в настоящий момент имеется. По этой причине здесь будем рассматривать довольно разумный, но сильно упрощенный подход, а кроме того, будет предполагаться, что область применимости методов, которые использовали в гл. 1 и 2, может быть расширена наиболее очевидным образом и это не приведет к неудаче. Наиболее полный и основательный обзор современного состояния теоретических знаний в этой области можно найти в работе [69].

В следующем разделе будет дан обзор кинематики многочастичных процессов, а затем продолжено рассмотрение различных реджевских асимптотических пределов, которые могут быть рассмотрены. За этим следует более подробная дискуссия об амплитудах $2 \rightarrow 3$ и на основании этого обсуждения будут постулированы некоторые общие правила для любых мультiredжеонных амплитуд. Замечательным фактом является то, что дуальные модели гл. 7 могут быть легко распростра-

нены на случай многочастичных конечных состояний и, таким образом, они открывают хорошую возможность исследовать природу мультирежеонных связей. Основные результаты, полученные в этом направлении, представлены в одном из разделов. Глава заключается очень коротким обсуждением некоторых феноменологических применений теории.

9.2. Многочастичная кинематика

Вначале рассмотрим процесс $1+2 \rightarrow 3+4+5$, показанный на рис. 9.1. Для простоты предположим, что все внешние частицы — бесспиновые.

Квадрат энергии в системе центра масс равен [ср. (1.7.5)]

$$s = s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4 + p_5)^2 \equiv s_{345}. \quad (9.2.1)$$

Аналогично квадраты инвариантных масс (см. ниже) двухчастичных систем в конечном состоянии равны:

$$s_{34} = (p_3 + p_4)^2; \quad s_{45} = (p_4 + p_5)^2; \quad s_{35} = (p_3 + p_5)^2. \quad (9.2.2)$$

Кроме этого, существуют шесть инвариантов, характеризующих всевозможные кроссинговые каналы:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &\equiv t_{23} = (p_2 - p_3)^2; & t_{24} &= (p_2 - p_4)^2; & t_{25} &= (p_2 - p_5)^2; \\ t_2 &\equiv t_{15} = (p_1 - p_5)^2; & t_{14} &= (p_1 - p_4)^2; & t_{13} &= (p_1 - p_3)^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.3)$$

Ясно, что любой трехчастичный инвариант равняется некоторому двухчастичному инварианту [как в (9.2.1)] вследствие закона сохранения 4-импульса, и поэтому 10 инвариантов, определенных в (9.2.1), (9.2.2) и (9.2.3), включают в себя все независимые инварианты. Но совершенно очевидно, что все они не могут быть независимы, так как в разд. 1.4 было показано, что амплитуда с n внешними линиями содержит только $3n - 10$ независимых переменных, и поэтому в случае $n = 5$ только пять инвариантов могут рассматриваться как независимые. В системе центра масс частиц 4 и 5 вследствие того, что $q_4 + q_5 = 0$, s_{45} является квадратом полной энергии этих частиц, т. е.

$$s_{45} = (p_4 + p_5)^2 = (E_4 + E_5; 0)^2 = (E_4 + E_5)^2 = m_{45}^2 \quad (9.2.4)$$

и m_{45} называется «инвариантной массой» квазичастицы (45). Итак, если рассмотреть реакцию на рис. 9.1, а как процесс $1+2 \rightarrow 3+(45)$, который показан на рис. 9.1, в, то получается, подобно (1.7.21), соотношение

$$s_{12} + t_{23} + t_{13} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + s_{45} \equiv \Sigma_{45}. \quad (9.2.5)$$

Можно получить аналогичные соотношения и для других комбинаций из частиц конечного состояния.

Удобным набором независимых инвариантов, показанным на рис. 9.1, б, является следующий:

$$s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_1 \text{ и } t_2, \quad (9.2.6)$$

хотя выбор подходящего набора независимых инвариантов сильно зависит от области фазового пространства интересующей нас реакции, например рассмотрение реакции в области, которой отвечает диаграмма рис. 9.1, *з*, предполагает, что удобным набором независимых инвариантов будет набор, совершенно отличный от (9.2.6).

В системе центра масс всей реакции $q_1 + q_2 = 0$, и поэтому энергии и импульсы частиц 1 и 2 даются выражениями (1.7.8)–(1.7.10), т. е.

$$E_1 = (1/2\sqrt{s})(s + m_1^2 - m_2^2), \quad q_{s_{12}}^2 = (1/4s)\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \quad (9.2.7)$$

и т. д. Аналогично этому если рассмотрим систему (45) как одну частицу с массой $m_{45} = \sqrt{s_{45}}$, как это предполагалось выше, то ясно, что в этой системе отсчета

$$E_3 = (1/2\sqrt{s})(s + m_3^2 - s_{45}); \quad q_{s_{3}}^2 = (1/4s)\pi(s, m_3^2, s_{45}) \quad (9.2.8)$$

Отметим, что аналогичные выражения можно получить для частиц 4 и 5, рассматривая систему (35) или (34) как одну частицу.

Угол рассеяния, равный углу между направлениями движения частиц 3 и 2, дается выражением (1.7.17) с заменой m_4 на $\sqrt{s_{45}}$, т. е.

$$\begin{aligned} z_{23} &\equiv \cos \theta_{s_{23}} = \\ &= \frac{[s^2 + s(2t_1 - \Sigma_{45}) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - s_{45})]}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\lambda(s, m_3^2, s_{45})}}, \end{aligned}$$

а физическая область этого процесса рассеяния дается выражением (1.7.24) с очевидными заменами.

Закон сохранения 4-импульса (9.2.1)

$$s_{12} = (p_3 + p_4 + p_5)^2$$

вместе с (9.2.2) и (1.7.4) приводит к

$$s_{12} = s_{34} + s_{45} + s_{35} - m_3^2 - m_4^2 - m_5^2. \quad (9.2.10)$$

Таким образом, при некотором фиксированном s_{12} только два из трех квадратов инвариантных масс, характеризующих различные двухчастичные системы в конечном состоянии, являются независимыми. Граница физической области, реакции, определенная (1.7.24) с подстановками, описанными выше, показана на рис. 9.2. Этот рисунок известен как график Далица [138]. Если в конечном состоянии может рождаться некий резонанс r , который распадается, например, на частицы 4+5, как это показано на рис. 9.3, то можно ожидать, что при заданном фиксированном значении s_{12} в полном сечении, рассматриваемом как функция s_{45} , будет наблюдаться пик при $s_{45} = M_r^2$, что отвечает вертикальной линии на графике Далица. Аналогично если

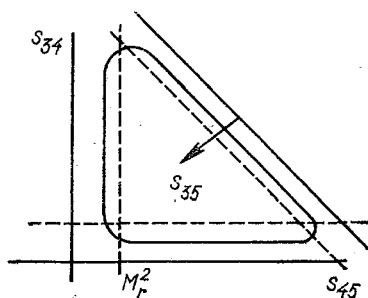


Рис. 9.2. График Далица изменений s_{34} , s_{45} и s_{35} при заданном s_{12} .

Область изменений находится из условия (9.2.10). Показанная граница физической области определяется условием (1.7.24), в котором сделаны очевидные замены. Пунктирными кривыми показаны области, где могут возникать резонансные пики

резонируют частицы 3 и 4, то пик будет при фиксированном s_{34} , а если резонанс в системе 3+5, то ему соответствует диагональная линия, пересекающая график при фиксированном s_{35} . Итак, график, подобный тому, который показан на рис. 9.2, очень удобен при исследовании конечных состояний трехчастичных реакций, в частности, при выяснении вопроса о резонансах в двухчастичных системах в конечном состоянии.

Однако основной вопрос, который нас интересует, — это исследо-

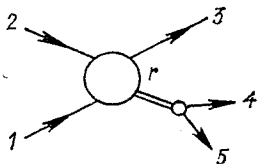


Рис. 9.3. Амплитуда реакции $1+2 \rightarrow 3+r$, $r \rightarrow 4+5$.

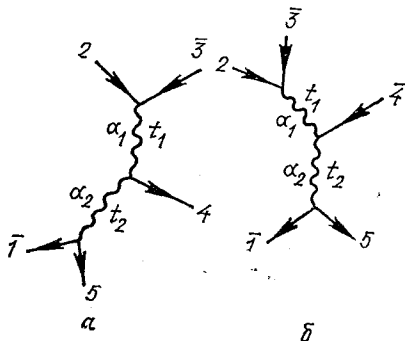


Рис. 9.4. *a* — Процесс, идущий в перекрестном канале $2+\bar{3} \rightarrow (\bar{15})+4$. *б* — Процесс, идущий в перекрестном канале $(2\bar{3})+4 \rightarrow \bar{1}+5$

вание реджевских обменов, подобных изображенным на рис. 9.1, б. Для этой цели нам необходимо определить угловые моменты для различных t -каналов. Один из процессов, связанных с помощью кроссинга с реакцией рис. 9.1, показан на рис. 9.4, *a*. Это процесс

$$2+\bar{3} \rightarrow (\bar{15})+4, \quad (9.2.11)$$

где система $(\bar{15})$ рассматривается как квазичастица с массой $(p_1 - p_5)^2 = t_2$. Энергии и импульсы в системе центра масс этой реакции могут быть получены с помощью (1.7.15), совершая очевидные подстановки, причем $t \rightarrow t_{23} = t_1$ и угол рассеяния в системе центра масс частицы 4 по отношению к направлению движения частицы $\bar{3}$ дается выражением (1.7.19), т. е.

$$\cos \theta_{34} \equiv z_{t34} \equiv z_1 = \frac{t_1^2 + t_1(2s_{34} - \Sigma_{15}) + (m_2^2 - m_3^2)(t_2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(t_1, m_2^2, m_3^2)\lambda(t_1, t_2, m_4^2)}}, \quad (9.2.12)$$

где

$$\Sigma_{15} \equiv m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + t_2.$$

Это выражение для угла рассеяния в системе центра масс частиц 2 $\bar{3}$, где $\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$. Стоит подчеркнуть, что процесс (9.2.11) отличается от обычной двухчастичной реакции с бесспиновыми частицами не только тем, что имеется изменяющаяся «масса» системы $(\bar{15})$, но и тем, что квазичастица $(\bar{15})$ уносит угловой момент, т. е. обладает как бы спином. Она будет затем «распадаться» на частицы $\bar{1}$ и 5 с угловым распределением, которое будет зависеть от спиральности системы $\bar{15}$ в системе центра масс частиц 2 и $\bar{3}$ [подобно (4.2.13)].

Затем для процесса

$$(\bar{23}) + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + 5 \quad (9.2.13)$$

(см. рис. 9.4, б) перейдем в систему центра масс частиц $\bar{1}$ и 5, в которой угол рассеяния частицы 5 по отношению к направлению движения частицы 4 равен

$$\cos \theta_{45} \equiv z_{t45} \equiv z_2 = \frac{t_2^2 + t_2(2s_{45} - \Sigma_{23}) + (t_1 - m_4^2)(m_1^2 - m_5^2)}{\sqrt{\lambda(t_2, t_1, m_4^2)\lambda(t_2, m_1^2, m_5^2)}}. \quad (9.2.14)$$

Азимутальный угол ω_{12} между плоскостями, содержащими частицы 4 и 5 и частицы 3 и 4 соответственно (рис. 9.5) называется углом Толлера (или углом спиральности) [384]. С некоторым усилием этот угол можно определить следующим образом (см. [89]).

Поскольку ω_{12} — угол около направления движения частицы 4, то он остается неизменным, если сделать лоренцев сдвиг и перейти в систему покоя частицы 4. (Это преобразование очень сильно упрощает кинематику.) В этой системе покоя угол Толлера определяется следующим образом:

$$\cos \omega_{12} = (\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3) (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_5) / (|\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3| |\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_5|), \quad (9.2.15)$$

т. е. в данном случае он имеет смысл угла между плоскостью, содержащей частицы 2 и 3, и плоскостью, содержащей частицы 1 и 5. Так как из (1.7.2) и (1.7.4) следует

$$\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = E_i E_j - p_i p_j, \quad \mathbf{q}_i^2 = -m_i^2 + E_i^2, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5, \quad (9.2.16)$$

то в системе покоя частицы 4, где $\mathbf{q}_4 = 0$, $E_4 = m_4$,

$$E_i = p_i p_4 / m_4. \quad (9.2.17)$$

Однако

$$s_{ij} \equiv (p_i + p_j)^2 = p_i^2 + p_j^2 + 2p_i p_j = m_i^2 + m_j^2 + 2p_i p_j, \quad (9.2.18)$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} E_i &= (1/2m_4)(s_{i4} - m_i^2 - m_4^2), \quad i = 3, 5 \\ E_i &= (1/2m_4)(t_{i4} - m_i^2 - m_4^2), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (9.2.19)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3| &= |\mathbf{q}_2| |\mathbf{q}_3| \sin \theta_{23} = |\mathbf{q}_2| |\mathbf{q}_3| (1 - \cos^2 \theta_{23})^{1/2} = \\ &= [\mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_3^2 - (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3)^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

а тождество Лагранжа дает

$$(\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3) (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_5) = (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1) (\mathbf{q}_3 \mathbf{q}_5) - (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_5) (\mathbf{q}_3 \mathbf{q}_1). \quad (9.2.21)$$

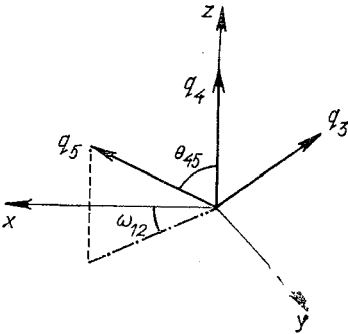


Рис. 9.5. Углы в системе центра масс частиц $\bar{1}$ —5.

Вектор \mathbf{q}_4 направлен по оси z , вектор \mathbf{q}_3 лежит в плоскости x — z , ω_{12} — угол между плоскостью, содержащей вектора \mathbf{q}_3 и \mathbf{q}_4 и плоскостью, содержащей вектора \mathbf{q}_4 и \mathbf{q}_5 , т. е. угол между \mathbf{q}_5 и плоскостью x — z .

Все эти скалярные произведения можно найти с помощью (9.2.16). Таким образом,

$$(\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3) = E_2 E_3 - p_2 p_3 = (1/2m_4) (t_{24} - m_2^2 - m_4^2) \times \\ \times (1/2m_4) (s_{34} - m_3^2 - m_4^2) - (t_{23} - m_2^2 - m_3^2)/2. \quad (9.2.22)$$

Следовательно,

$$(\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3)^2 \rightarrow (t_{24} s_{34} / 4m_4^2)^2 - t_{24} s_{34} t_{23} / 4m_4^2 \quad (9.2.23)$$

для $t_{24}, s_{34}, t_{23} \gg m_i^2$,

а

$$\mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_3^2 = (E_2^2 - m_2^2) (E_3^2 - m_3^2) \rightarrow s_{34}^2 t_{24}^2 / (2m_4)^4 \quad (9.2.24)$$

в том же самом пределе. Все это приводит к

$$|\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3| \rightarrow [t_{23} t_{24} s_{34} / (4m_4^2)]^{1/2}. \quad (9.2.25)$$

С другой стороны, аналогично (9.2.5) имеем

$$t_{24} + t_{23} + s_{34} = m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + t_{15}, \quad (9.2.26)$$

так что

$t_{24} \rightarrow -s_{34}, s_{34} \rightarrow \infty$ при фиксированном t_{23}, t_{15} . Следовательно,

$$|\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3| \rightarrow \frac{s_{34}}{2m_4} \sqrt{-t_{23}}. \quad (9.2.27)$$

Аналогично находим

$$|\mathbf{q}_4 \times \mathbf{q}_5| \rightarrow \frac{s_{45}}{2m_4} \sqrt{-t_{15}} \quad (9.2.28)$$

и с несколько большими усилиями, что

$$(\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3) (\mathbf{q}_4 \times \mathbf{q}_5) \rightarrow (1/8 m_4^2) \{s_{12} [(t_{23} + t_{15} - m_4^2)^2 - \\ - 4t_{23} t_{15}] + s_{34} s_{45} (t_{23} + t_{15} - m_4^2)\}. \quad (9.2.29)$$

Вспоминая определение (9.2.15) и называя $t_1 \equiv t_{23}, t_2 \equiv t_{15}$, получаем окончательное выражение для угла Толлера:

$$\cos \omega_{12} \approx \frac{1}{2\sqrt{-t_1}\sqrt{-t_2}} \left(t_1 + t_2 - m_4^2 + \frac{s_{12}}{s_{34} s_{45}} \lambda(t_1, t_2, m_4^2) \right) \quad (9.2.30)$$

в пределе $s_{12}, s_{34}, s_{45} \gg t_1, t_2, m_1^2, \dots, m_5^2$. При фиксированных значениях t_1, t_2 часто оказывается, что значительно более удобно использовать переменную η_{12} , определенную как

$$\eta_{12} \equiv s_{12} / (s_{34} s_{45}) = s_{345} / (s_{34} s_{45}), \quad (9.2.31)$$

а не угол ω_{12} .

Набор переменных

$$t_1, t_2, z_1, z_2 \text{ и } \eta_{12} \quad (9.2.32)$$

альтернативен по отношению к набору (9.2.6), но оказывается значительно более полезным при рассмотрении вопроса о реджезации.

Для того чтобы распространить данный подход на шестичастичную амплитуду (рис. 9.6, а), достаточно заметить, что эта амплитуда ста-

новится похожей на пятичастичную амплитуду рис. 9.1, если считать систему (1 $\bar{6}$) как одну частицу и заменить s_{12} на $s_{345} \equiv (p_3 + p_4 + p_5)^2$. Однако в этом случае помимо углов рассеяния z_1 и z_2 и переменной Толлера $\eta_{12} = s_{345}/s_{34}s_{45}$ появится переменная z_3 — угол рассеяния в системе центра масс реакции $(2\bar{3}\bar{4}) + \bar{5} \rightarrow \bar{1} + 6$ и угол Толлера ω_{23} — угол между плоскостью, содержащей частицы $\bar{5}$ и 6, и плоскостью, содержащей частицы $\bar{4}$ и $\bar{5}$ в системе покоя частицы (1 $\bar{6}$). Или вместо

последней можно использовать переменную Толлера $\eta_{23} \equiv s_{456}/s_{45}s_{56}$.
Наборы переменных

$$t_1, t_2, t_3, s_{34}, s_{45}, s_{56}, s_{345}, s_{456} \text{ или} \\ t_1, t_2, t_3, z_1, z_2, z_3, \eta_{12}, \eta_{23} \quad (9.2.33)$$

дают восемь независимых переменных, требуемые для амплитуды с шестью внешними концами. Конечно, эти наборы переменных удобны только в том случае, если рассматривается область фазового пространства, соответствующая диаграмме рис. 9.6, а, а не

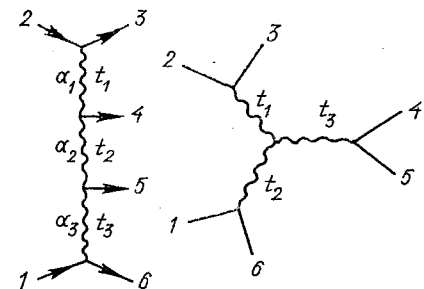


Рис. 9.6. а — Мультиреджеонная амплитуда процесса $1+2 \rightarrow 3+4+5+6$. б — Другая мультиреджеонная амплитуда

рис. 9.6, б, для которой подходящим является совершенно другой набор угловых переменных (см. ниже).

Как только число внешних концов начинает возрастать, тут же резко увеличивается число различных комбинаций частиц. Однако для любой заданной конфигурации полный набор независимых переменных всегда обеспечивается квадратами переданных импульсов t_i , косинусами углов рассеяния z_i и переменными Толлера η_{ij} , связанными с каждой соседней парой переменных t (скажем, t_i и t_j). А для заданных фиксированных величин t эти угловые переменные могут быть выражены в терминах переменных s .

9.3. Мультиреджеонные амплитуды рассеяния

Представление Грибова — Фруассара (2.5.3), с помощью которой были определены полюса Редже в двухчастичных реакциях, содержит интегрирование по разрезу в плоскости s амплитуды рассеяния (2.7.2). Полносная особенность проявляется в том, что скачок на разрезе имеет степенное поведение. И поэтому, когда мы хотим рассматривать мультиреджеонный предел многочастичного процесса рассеяния, мы должны быть готовы к встрече с разрезами одновременно по нескольким комплексным переменным.

Очень существенно, что эти разрезы должны быть независимыми в асимптотической области. В случае точек ветвления, отвечающих нормальным порогам, очень легко понять, когда они являются независимыми. Введем теперь понятие перекрывающихся каналов. В слу-

чае амплитуды рассеяния $n \rightarrow m$ (рис. 9.7) каналы x и y являются перекрывающимися. Инварианты, отвечающие этим каналам, определяются следующим образом:

$$s_x \equiv s_1, \dots, i \equiv (p_1 + p_2 + \dots + p_i)^2;$$

$$s_y \equiv s_{i-1}, i, \dots, j \equiv (p_{i-1} + p_i + \dots + p_j)^2,$$

причем частицы i и $(i - 1)$ входят в эти каналы в качестве общих частиц. В свою очередь, неперекрывающимися каналами являются каналы типа t , которым отвечают инварианты s_x и s_y и которые не содержат общих частиц. Эти каналы являются независимыми. Точка ветвления, отвечающая нормальному порогу некоторого канала, — это особенность, которая возникает только в плоскости инварианта, характеризующего этот канал [например, в канале (12) пороговая точка ветвления возникает при $s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (m_1 + m_2)^2$], и разрезы, отвечающие нормальным порогам перекрывающихся каналов, независимы один от другого. Однако, например, более сложные кривые Ландау, отвечающие аномальным порогам, не обладают свойством независимости. Например, в случае квадратной диаграммы (см. рис. 1.10, б) возникает двойной разрез, положение которого задается некоторой кривой в плоскости $s - t$ (1.12.10). Обычно предполагается, что учет разрезов, отвечающих нормальным порогам, достаточен для того, чтобы получить реджевское асимптотическое поведение, причем в этом случае только неперекрывающиеся каналы имеют одновременные реджевские разрезы. Этот факт является совсем тривиальным в случае рассеяния $2 \rightarrow 2$, так как очевидно, что в перекрывающихся $s \equiv (p_1 + p_2)^2$ - и $t \equiv (p_1 - p_3)^2$ -каналах нет одновременного реджевского поведения, однако этот факт не является строго установленным для некоторых, более сложных амплитуд, так как это утверждение полностью справедливо в некоторых простых моделях, таких, как лестничные диаграммы или дуальные модели (поэтому в дальнейшем мы его будем считать всегда достоверным) [69].

Вообще говоря, имеется несколько различных асимптотических пределов, которые могут быть рассмотрены для данной амплитуды, причем конфигурация частиц определяет, какие переменные устремляются к бесконечности, а какие — держатся фиксированными. Таким образом, в случае пятичастичной амплитуды рис. 9.1 имеются следующие возможности.

а. Однореджеонный предел. В этом случае $z_1 \rightarrow \infty$, а t_1 и другие углы и инварианты в (9.2.32) держатся фиксированными. Это означает, что $s_{34} \rightarrow \infty$ из (9.2.12) и, следовательно, $s_{12} \rightarrow \infty$ из (9.2.10), а s_{45} , t_1 и t_2 держатся фиксированными. Также можно держать фиксированным ω_{12} в (9.2.30) [или η_{12} в (9.2.31)]; для этого требуется держать фиксированным отношение s_{12}/s_{34} , когда s_{12} и s_{34} стремятся к бесконечности.

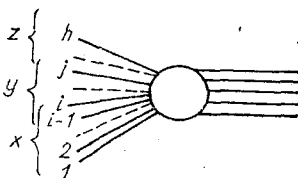


Рис. 9.7. Амплитуда перехода $n \rightarrow m$.

Инвариант $s_x \equiv (p_1 + p_2 + \dots + p_i)^2$ перекрывается с инвариантом $s_y \equiv (p_{i-1} + p_i + \dots + p_j)^2$, но не перекрывается с инвариантом $s_z \equiv (p_j + \dots + p_n)^2$

Этому пределу соответствует однореджеонный график рис. 9.1, в. Очевидно, что существуют три однореджеонных предела амплитуды в зависимости от того, что устремляется к бесконечности: s_{34} , s_{45} или s_{35} .

б. Двухреджеонный предел. В этом случае $z_1, z_2 \rightarrow \infty$, а другой угол—угол Толлера ω_{12} и инварианты в (9.2.32) остаются фиксированными. Или это означает, что s_{12}, s_{34} и $s_{45} \rightarrow \infty$, t_1, t_2 — фиксированы, а также неизменным является отношение $s_{12}/s_{34}s_{45}$, чтобы ω_{12} и η_{12} оставались фиксированными.

Этому случаю отвечает двухреджеонный график рис. 9.1, б, кроме того, можно получить другие двухреджеонные пределы типа рис. 9.1, г с помощью перестановки частиц в конечном состоянии.

в. Спиральный предел. В этом пределе ω_{12} (или η_{12}) $\rightarrow \infty$, а переменные z_1, z_2, t_1, t_2 — фиксированы, или по-другому: $s_{12} \rightarrow \infty$ при условии, что фиксированы s_{34}, s_{45}, t_1, t_2 . Так как в этом пределе $\cos \omega_{12} \rightarrow \infty$, то совершенно ясно, что это нефизический предел.

Очевидно, что однореджеонный предел (а) является очень похожим на обычный реджеонный предел в двухчастичном рассеянии; единственное отличие состоит в том, что одна из «частиц» в конечном состоянии на самом деле является двухчастичным состоянием с фиксированным квадратом инвариантной массы. Все это сильно напоминает образование резонансов в квазидвухчастичных процессах, и в дальнейшем мы еще обсудим это. Двухреджеонный и спиральный пределы (б) и (в) являются совершенно новыми и существенно зависят от того, какие три частицы образуются в конечном состоянии. Их мы подробно рассмотрим ниже.

Рассуждение, которое было проведено выше, легко обобщается на случай любого многочастичного конечного состояния. В однореджеонном пределе все инварианты, которые охватывают реджеонную линию (например, s_{12} и s_{34} на рис. 9.1, в), стремятся к бесконечности, причем их отношения должны оставаться фиксированными, тогда как все остальные независимые инварианты (типа t_1, t_2, s_{45}) удерживаются неизменными. В мультиреджеонном пределе те инварианты, которые охватывают любую реджеонную линию (например, s_{12}, s_{34}, s_{45} на рис. 9.1, б), все стремятся к бесконечности, тогда как все остальные держатся фиксированными. Отношения тех инвариантов, которые охватывают данный реджеон, мы также держим фиксированными, в то время как те инварианты, которые охватывают несколько реджеонов (например, s_{12} охватывает α_1 и α_2 на рис. 9.1, в), стремятся к бесконечности как произведение инвариантов, охватывающих отдельные индивидуальные реджеоны (например, $s_{12} \sim s_{34}s_{45}$). В спиральном пределе только те инварианты, которые охватывают сразу два реджеона, стремятся к бесконечности с фиксированным их отношением, так что угол Толлера между этими двумя реджеонами стремится к бесконечности.

Сейчас мы приступим к более детальному изучению вопроса о реджезации амплитуды $2 \rightarrow 3$ на рис. 9.1. Для того чтобы получить результаты в физической области s -канала, некоторые авторы предпочитают пользоваться теоретико-групповым методом и рассмотреть группу $O(2,1)$

(применение этой группы при рассеянии $2 \rightarrow 2$ изложено в разд. 6.6); см. [28, 256, 385]. Однако в дальнейшем будем использовать другой метод, основанный на использовании преобразования Зоммерфельда — Ватсона разложения по парциальным амплитудам в t -канале, при этом будем предполагать, что продолжение по t_i может быть проделано без каких-либо трудностей.

В однопорядковом пределе (а) мы будем исследовать t -канальный процесс $2 + \bar{3} \rightarrow (\bar{15}) + 4$, считая систему $(\bar{15})$ квазичастицей (см. рис. 9.4, а). Итак, следуя рассмотрению разд. 4.6, начинаем с разложения по парциальным волнам в t -канале (4.5.10):

$$A(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = \begin{cases} \sum_{J_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-J_1}^{\lambda=+J_1} (2J_1+1) A_{J_1}(t_1; t_2; z_2) d_{0\lambda}^{J_1}(z_1) \exp(i\lambda\omega_{12}); \\ \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{J_1 > |\lambda|} (2J_1+1) A_{J_1}(t_1; t_2; z_2) d_{0\lambda}^{J_1}(z_1) \exp(i\lambda\omega_{12}), \end{cases} \quad (9.3.1)$$

где J_1 — угловой момент частицы $\bar{3}$ по отношению к частице 2, причем помимо суммирования по всем парциальным волнам необходимо суммирование по всем возможным спиральностям λ квазичастицы $(\bar{15})$. Из сохранения углового момента следует, что $|\lambda|$ не может быть больше, чем J_1 . (Уместно напомнить, что ради простоты предполагали, что все частицы 1, 2, ..., 5 бесспиновые.) Второе выражение в (9.3.1) кажется несколько более подходящим для совершения продолжения по J_1 (хотя в действительности возможно, что лучше сначала совершить продолжение по λ [194, 405, 408]). Фактор $\exp(i\lambda\omega_{12})$ возникает потому, что [см. (4.4.7) и (4.2.14)] ω_{12} дает азимутальный угол при «распаде» системы $(\bar{15}) \rightarrow \bar{1} + 5$, а, по определению, λ измеряется при проектировании на направление движения системы (15).

Заменим сумму в (9.3.1) на интеграл Зоммерфельда—Ватсона (4.6.1) в комплексной плоскости J_1 и будем смещать контур интегрирования налево до тех пор, пока не захватим полюс Редже $\alpha_1(t_1)$, отвечающий главному члену асимптотического поведения амплитуды; вклад, даваемый этим полюсом, можно записать в виде

$$A^R(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = \Gamma(-\alpha_1(t_1)) \gamma_1(t_1)(z_1)^{\alpha_1(t_1)} \times \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda\omega_{12}) \gamma_{\lambda}(t_1; t_2, z_2), \quad (9.3.2)$$

где вычет в полюсе факторизуется, разделяясь на часть $\gamma_1(t_1)$, отвечающую вершине перехода $2 \rightarrow \bar{3}$, и на часть $\gamma_{\lambda}(t_1; t_2, z_2)$, соответствующую вершине перехода $(\bar{15}) \rightarrow 4$, и, кроме того, содержится нефизический фактор $\Gamma[-\alpha_1(t_1)]$. Если ввести функцию

$$\beta(t_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda\omega_{12}) \gamma_{\lambda}(t_1; t_2, z_2), \quad (9.3.3)$$

которая является преобразованием Фурье от γ_λ , и перейти к пределу

$$(z_1)^{\alpha_1} \sim (s_{34})^{\alpha_1},$$

то можно переписать выражение для амплитуды в более удобном виде

$$A^R(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_1, t_2) = \Gamma(-\alpha_1(t_1)) \gamma_1(t_1) \beta(t_1, \omega_{12}; t_2, z_2) (s_{34})^{\alpha_1(t_1)}, \quad (9.3.4)$$

очень напоминающем выражение для амплитуды $2 \rightarrow 2$ (6.8.1).

В случае двухреджеонной асимптотики начнем рассмотрение с двойного разложения амплитуды по парциальным волнам [262, 377], т. е.

$$A(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = \sum_{J_1, J_2=0}^{\infty} \sum_{\lambda} (2J_1 + 1)(2J_2 + 1) | \times \\ \times A_{J_1 J_2 \lambda}(t_1, t_2) d_{0\lambda}^{J_1}(z_1) d_{\lambda 0}^{J_2}(z_2) \exp(i\lambda \omega_{12}), \quad (9.3.5)$$

где $|\lambda| \leq J_1, J_2$. Если затем сделать преобразование Зоммерфельда — Ватсона по J_1 и J_2 и выделить основной реджевский полюс в каждом канале, то получится двухреджеонный асимптотический предел

$$A^R(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_1, t_2) = \Gamma(-\alpha_1(t_1)) \gamma_1(t_1) (s_{34})^{\alpha_1(t_1)} \times \\ \times \beta(t_1, \eta_{12}, t) \Gamma(-\alpha_2(t_2)) \gamma_2(t_2) (s_{45})^{\alpha_2(t_2)}, \quad (9.3.6)$$

где функция $\beta(t_1, \eta_{12}, t_2)$ задает связь в центральной вершине $(\alpha_1 \alpha_2 4)$, которая зависит от угла Толлера, а также и от инвариантов t_1 и t_2 .

Возможно, что помимо включения зависимости от η_{12} эти результаты окажутся такими же, какие мы должны бы были наивно ожидать из рассмотрения диаграмм рис. 9.1, б. Однако совершенно естественно, что в данный момент мы не можем ответить на этот вопрос с полной определенностью потому, что мы совершенно не беспокоились о скачках на разрезах в различных инвариантах и, в частности, полностью игнорировали тот факт, что реджеоны имеют сигнатуру и, следовательно, существуют разрезы амплитуды как при положительных, так и при отрицательных значениях s . Эти разрезы придают амплитуде некоторую фазу. Сейчас необходимо исправить этот недостаток.

Предположение о том, что отсутствуют одновременные реджевские скачки в инвариантах, характеризующих перекрывающиеся каналы, означает, например, то, что скачок по s_{34} сам не должен иметь скачка по s_{45} , хотя он может иметь скачок по s_{12} . Итак, ожидается, что скачок по s_{34} содержит члены типа

$$(-s_{34})^{\alpha_1 - \alpha_2} (-s_{12})^{\alpha_2} V_2(\eta_{12}) + (-s_{34})^{\alpha_1 - \alpha_2} (s_{12})^{\alpha_2} V_2'(\eta_{12}), \quad (9.3.7)$$

где V_2, V_2' — вещественные функции переменной η_{12} (при отрицательных t_1, t_2). Оба эти члена пропорциональны асимптотически $\sim |s_{34}|^{\alpha_1} |s_{45}|^{\alpha_2}$, так как в двухреджеонном пределе $s_{12} \sim s_{34} s_{45}$, однако первый член имеет разрез при положительных s_{12} (так же как и при положительных s_{34}), в то время как второй член

этого разреза не имеет. Также хотелось бы, чтобы реджеоны имели определенную сигнатуру, т. е. например, реджеон α_1 давал скачок при положительных s_{34} и такой же скачок при отрицательных s_{34} (с точностью до знака \pm , который определяется сигнатурой реджеона ξ_1), и тогда мы имели бы равные амплитуды при замене $2 \leftrightarrow 3$. Таким

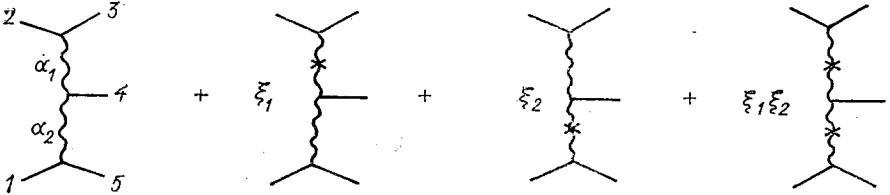


Рис. 9.8. Четыре различных члена в двухреджеонной амплитуде, появляющихся вследствие сигнатурных свойств реджеонов.

Крестик на реджеоне означает, что он переключен ($s \rightarrow -s$), подобно тому, как переключивались лестницы рис. 8.11

образом, имеются четыре различных члена (это наглядно видно из рис. 9.8), комбинируя которые в физической области, где все реджевские функции вещественны, получаем [152]

$$A^R(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_1, t_2) = \Gamma(-\alpha_1(t_1)) \gamma_1(t_1) (s_{34})^{\alpha_1(t_1)} \Gamma(-\alpha_2(t_2)) \times \\ \times \gamma_2(t_2) (s_{45})^{\alpha_2(t_2)} [\tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_{21} (\eta_{12})^{\alpha_1(t)} V_1(t_1, t_2, \eta_{12}) + \\ + \tilde{\xi}_2 \tilde{\xi}_{12} (\eta_{12})^{\alpha_2(t_2)} V_2(t, t_2, \eta_{12})], \quad (9.3.8)$$

где

$$\tilde{\xi}_i = \exp(-i\pi\alpha_i) + \xi_i; \quad \tilde{\xi}_{ij} = \exp[-i\pi(\alpha_i - \alpha_j)] + \xi_i \xi_j. \quad (9.3.9)$$

Это выражение может быть выражено в более удобной форме как

$$A^R(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_1, t_2) = \gamma_1(t_1) R_1(t_1, s_{34}) \times \\ \times G_{12}^4(t_1, t_2, \eta_{12}) R_2(t_2, s_{45}) \gamma_2(t_2), \quad (9.3.10)$$

где

$$R_i(t_i, s) \equiv \tilde{\xi}_i(t_i) \Gamma(-\alpha_i(t_i)) s^{\alpha_i(t_i)} \quad (9.3.11)$$

и

$$G_{ij}^4(t_i, t_j, \eta_{ij}) \equiv \tilde{\xi}_i^{-1} \tilde{\xi}_{ji} (\eta_{ij})^{\alpha_i(t_i)} V_1(t_i, t_j, \eta_{ij}) + \\ + \tilde{\xi}_j^{-1} \tilde{\xi}_{ij} (\eta_{ij})^{\alpha_j(t_j)} V_2(t_i, t_j, \eta_{ij}). \quad (9.3.12)$$

Выражение (9.3.11) можно считать реджеонным пропагатором, а все остальное объединено в функцию G_{12}^4 , которая задает вершину, связывающую частицу 4 с двумя реджеонами. В случае более сложных амплитуд, когда имеется цепочка реджеонов, следующих друг за другом, типа показанных на рис. 9.6, а, вычисления проводятся очевидным образом и сводятся просто к увеличению числа реджеонных про-

пагаторов и вершин G . Однако уже в случае шестичастичных амплитуд возникают конфигурации нового типа, в которых появляется связь трех реджеонов (см. рис. 9.6, б). В этом случае амплитуда пишется следующим образом [274]:

$$A^R = \gamma(t_1) R_1(t_1, s_{345}) \gamma(t_2) R_2(t_2, s_{456}) \gamma(t_3) \times \\ \times R_3(t_3, s_{234}) G_{123}(t_1, t_2, t_3, \eta_{12}, \eta_{23}, \eta_{31}), \quad (9.3.13)$$

причем, как и в предыдущем случае, все проблемы, связанные с фазами, скрыты в трехреджеонной вершине G_{123} . С помощью тщательного анализа [375] было найдено, что

$$G_{123}(t_1, t_2, t_3, \eta_{12}, \eta_{23}, \eta_{31}) = \tilde{\xi}_3^{-1} \tilde{\xi}_{312} \bar{V}_{12} + \\ + \tilde{\xi}_1^{-1} \tilde{\xi}_{123} \bar{V}_{23} + \tilde{\xi}_2^{-1} \tilde{\xi}_{231} \bar{V}_{31} + \tilde{\xi}_1^{-1} \tilde{\xi}_2^{-1} \tilde{\xi}_3^{-1} \times \\ \times \exp[-i\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] [1 + \tilde{\xi}_1 \exp(i\pi\alpha_1) + \\ + \tilde{\xi}_2 \exp(i\pi\alpha_2) + \tilde{\xi}_3 \exp(i\pi\alpha_3)] \bar{V}_{123},$$

где

$$\bar{V}_{ij} = (\eta_{ki})^{\alpha_i} (\eta_{jk})^{\alpha_j} V_{ij}; \\ \bar{V}_{ijk} = (\eta_{ij})^{\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k)} (\eta_{jk})^{\frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_k - \alpha_i)} (\eta_{ki})^{\frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_i - \alpha_j)} V_{ijk}; \quad (9.3.14)$$

$$\tilde{\xi}_{ijk} \equiv \exp[-i\pi(\alpha_i - \alpha_j - \alpha_k)] + \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j \tilde{\xi}_k.$$

Функции V — вещественные функции. Любая мультиреджеонная диаграмма может быть выражена с помощью γ_i , R_i , G_{ij} и G_{ijk} , которые, конечно, будут являться функциями соответствующих инвариантов [403, 404].

Теперь перейдем к обсуждению другого предела — спирального предела (в) [68]. Начнем рассмотрение с того, что напомним, как и в предыдущем случае, двойное разложение по парциальным волнам (9.3.5)

$$A(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{J_1=|\lambda|}^{\infty} \sum_{J_2=|\lambda|}^{\infty} (2J_1+1)(2J_2+1) \times \\ \times A_{J_1 J_2 \lambda}(t_1, t_2) d_{0\lambda}^{J_1}(z_1) d_{\lambda 0}^{J_2}(z_2) \exp(i\lambda\omega_{12}) \quad (9.3.15)$$

и выразим все три суммирования с помощью контурных интегралов типа (4.6.1)

$$A(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = \left(-\frac{1}{2i}\right)^3 \int d\lambda \int dJ_1 \int dJ_2 \times \\ \times \frac{(2J_1+1)(2J_2+1) A_{J_1 J_2 \lambda}(t_1, t_2)}{\sin(\pi\lambda) \sin(\pi(J_1-\lambda)) \sin(\pi(J_2-\lambda))} d_{0\lambda}^{J_1}(-z_1) d_{\lambda 0}^{J_2}(-z_2) \exp(i\lambda\omega_{12}). \quad (9.3.16)$$

Если в этом выражении взять интегралы по J_1 и J_2 , ограничиваясь лидирующими реджевскими полюсами в каждой из плоскостей и рассматривая асимптотическое поведение функций $d^{\alpha_i}(-z_i)$ (несмотря даже на то, что фактически аргумент z_i не будет большим), то получается

$$A^R(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = -\frac{1}{2i} \int d\lambda (-s_{34})^{\alpha_1(t_1)} (-s_{45})^{\alpha_2(t_2)} \times \\ \times \frac{\exp(i\lambda\omega_{12})}{\sin \pi\lambda} \Gamma(\lambda - \alpha_1) \Gamma(\lambda - \alpha_2) \beta_\lambda(t_1, t_2) \gamma_1(t_1) \gamma_2(t_2), \quad (9.3.17)$$

где β_λ — функция, характеризующая связь в центральной вершине. Используя затем условие

$$\cos \omega_{12} = [\exp(i\omega_{12}) + \exp(-i\omega_{12})]/2 \sim \eta_{12},$$

можно переписать все в следующем виде:

$$A^R(t_1, z_1; \omega_{12}; t_2, z_2) = (1/2\pi i) \int d\lambda (-s_{34})^{\alpha_1} (-s_{45})^{\alpha_2} (-\eta_{12})^\lambda \times \\ \times \Gamma(\lambda - \alpha_1) \Gamma(\lambda - \alpha_2) \Gamma(-\lambda) \beta_\lambda(t_1, t_2) \gamma_1(t_1) \gamma_2(t_2) = \\ = (1/2\pi i) \int d\lambda (-s_{34})^{\alpha_1 - \lambda} (-s_{45})^{\alpha_2 - \lambda} (-s_{12})^\lambda (\Gamma(\lambda - \alpha_1) \Gamma(\lambda - \alpha_2) \times \\ \times \Gamma(-\lambda) \beta_\lambda(t_1, t_2) \gamma_1(t_1) \gamma_2(t_2)) \quad (9.3.18)$$

(см. подробнее [69, 407]). Затем, переходя к пределу $s_{12} \rightarrow \infty$ при фиксированных значениях s_{34} , s_{45} , t_1 , t_2 , находим, если развернуть контур в плоскости λ , это главный член асимптотического поведения возникает от «спиральных полюсов» Γ -функций при $\lambda = \alpha_i$ и имеет вид

$$A^R \sim (s_{12})^{\alpha_1} \text{ и } \sim (s_{12})^{\alpha_2}.$$

Итак, в этом спиральном пределе реджевское поведение возникает из-за нефизических Γ -факторов, которые отвечают за связь каждого данного реджеона со спиральностью другого реджеона.

В следующей главе будет дан ответ на вопрос, какова польза от рассмотрения такого предела.

9.4. Многочастичные дуальные модели *

В гл. 7 была сформулирована идея дуальности: реджевские полюса в t -канале уже включают в себя резонансные полюса в s -канале по меньшей мере в некотором усредненном смысле и, таким образом, ошибочно пытаться добавить один вклад к другому. Модель Венециано, аналогичная (7.4.4), которая будет рассматриваться в этом разделе, определяется амплитудой

$$V(s, t) = g \Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t)) / \Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t)) \quad (9.4.1)$$

является конкретной, хотя и не единственной, реализацией этого свойства и обладает реджевским поведением как и при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , так и при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном s . Этот результат можно обобщить на случай многочастичных амплитуд [392, 358, 299].

Кажется ясным, что это сделать вполне возможно. Для этого достаточно вспомнить пример на рис. 9.4, *a*, в котором система $(\bar{1}5)$ считалась одной частицей, и выбрать такое положительное значение t_2 , что $\alpha_2(t_2)$ равна n — целому числу своей сигнатуры, тогда мы имеем физический процесс $2 \rightarrow 2$, который, по-видимому, можно рассмотреть с дуальной точки зрения.

Первое, что хотелось бы отметить, — это то, что при рассеянии $2 \rightarrow 2$ имеются различные дуальные амплитуды, отвечающие каждая своему способу планарного упорядочения частиц (см. рис. 7.7). Та-

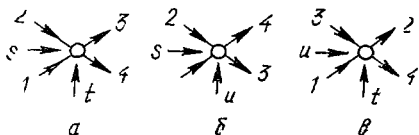


Рис. 9.9. Три неэквивалентных планарных упорядочения частиц, которые дают три члена в амплитуде Венециано для процесса $2 \rightarrow 2$ подобно (7.4.17).

ким образом, член $V(s, t)$ представляется диаграммой рис. 9.9, *a*, для которого замена $s \leftrightarrow t$ требует только циклической перестановки частиц 1, 2, 3, 4. Но так как замена $s \leftrightarrow u$ требует нециклической перестановки, то возникает член $V(s, u)$ (рис. 9.9, *b*), который должен быть добавлен в амплитуду отдельно. Аналогично должен быть добавлен член $V(t, u)$. Обобщая эту идею планарной дуальности на трехчастичные конечные состояния, можно ожидать, что набор диаграмм

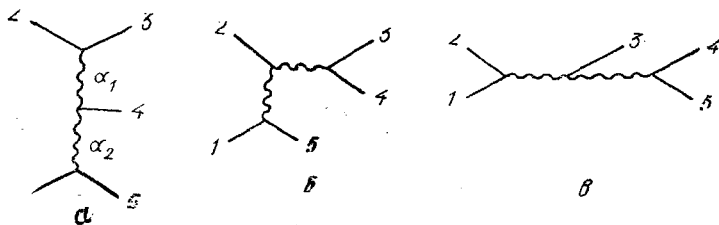


Рис. 9.10. Три различных реджеонных амплитуды, которые характеризуются одним и тем же планарным циклическим упорядочением частиц 1, ..., 5 и представляются одной дуальной амплитудой

рис. 9.10, которые все имеют одинаковое циклическое упорядочение частиц 1, ..., 5, будет содержать только дуальные друг другу диаграммы, кроме этого существуют и другие наборы диаграмм, каждому из которых отвечает отдельный дуальный член (в качестве примера можно рассмотреть набор диаграмм, показанный на рис. 9.11). Всего для реакций $2 \rightarrow 3$ имеется 12 неэквивалентных упорядочений частиц и, следовательно, в амплитуде содержится 12 дуальных членов. Вторых, два реджеона $\alpha_1(t_1)$ и $\alpha_2(t_2)$, изображенных на рис. 9.10, *a*, зависят от совершенно не связанных переменных t_{23} и t_{15} , и по этой причине совершенно очевидно, что они не могут быть дуальны друг другу. Реджеоны в перекрывающихся каналах типа t_{23} и s_{34} , кото-

рые содержат общую частицу 3 (см. рис. 9.10, б, в), будут дуальны друг другу.

Для того чтобы расширить сферу применимости (9.4.1), начнем с того, что перепишем его в виде

$$V(s, t) = gB_4(-\alpha(s), -\alpha(t)) \equiv g \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1}, \quad (9.4.2)$$

где B_4 — известная бета-функция Эйлера [389; 292, с. 4]. Этот интеграл определен только в области $\alpha(s), \alpha(t) < 0$. Если, скажем, $\alpha(s) \rightarrow 0$, то имеем

$$B_4(-\alpha(s), -\alpha(t)) \rightarrow \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} + (\text{члены, конечные при } \alpha(s) = 0) \\ = -1/\alpha(s) + \text{конечные члены}. \quad (9.4.3)$$

Следовательно, из-за расходимости подынтегрального выражения при $x = 0$ возникает полюс при $\alpha(s) = 0$. Эту сингулярность легко вычесть, если произвести интегрирование по частям

$$B_4(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \frac{\alpha(t)+1}{\alpha(s)} \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)} (1-x)^{-\alpha(t)-2}. \quad (9.4.4)$$

Это выражение имеет полюс при $\alpha(s) = 0$ и определено уже при $\alpha(s) < 1$. Конечно, в области $\alpha(s) \geq 1$ функция B_4 имеет еще полюса.

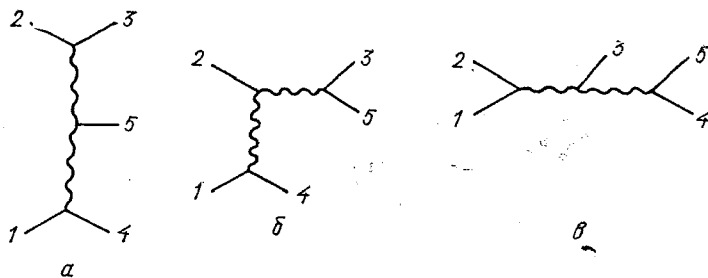


Рис. 9.11. Некоторые реджеонные амплитуды, которые дуальны одна другой, но не соответствуют изображенным на рис. 9.10

Если повторить этот процесс несколько раз, то получится последовательность полюсов при $\alpha(s) = 0, 1, 2 \dots$ Их можно получить и сразу, если разложить в ряд подынтегральное выражение

$$(1-x)^{-\alpha(t)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\alpha(t)) x^n, \quad (9.4.5)$$

где

$$P_n(-\alpha) \equiv [(-1)^n/n!] (-\alpha-1)(-\alpha-2) \dots (-\alpha-n).$$

Тогда интегрированием каждого члена получаем

$$B_4(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\alpha(t)) / [\alpha(s) - n]. \quad (9.4.6)$$

Итак, если траектория $\alpha(t)$ линейна, то вычет в полюсе при $\alpha(s) = n$ представляет собой полином по t (и, следовательно, по z_3) степени n [ср. (7.4.13)].

Симметрия выражения (9.4.2) относительно замены $\alpha(s)$ на $\alpha(t)$ и наоборот обеспечивает то, что каналы s и t , которые связаны циклическим переопределением частиц 1, ..., 4, имеют идентичные полюса; из-за того, что полюса по t возникают на другом конце области интегрирования при $x \rightarrow 1$, мы избегаем одновременных полюсов по s и t . Очень полезно переписать (9.4.2) в следующем виде:

$$V(s_{12}, t_{23}) = g \int_0^1 dx_{12} dx_{23} (x_{12})^{-\alpha(s_{12})-1} (x_{23})^{-\alpha(t_{23})-1} \delta(x_{12} + x_{23} - 1), \quad (9.4.7)$$

где каждая переменная x соотнесена с каждым данным каналом, который содержит полюс, возникающий при $x \rightarrow 0$. Однако для того чтобы быть уверенным, что в перекрывающихся каналах s_{12} и t_{23} не возникает одновременных полюсов, вводится δ -функция. Также возможно ввести в подынтегральное выражение (9.4.7) произвольную функцию $f(x_{12}, x_{23})$, аналитическую в области $0 \leq x \leq 1$, которая при разложении в степенные ряды по различным x давала бы последовательность членов типа «сателлитов» Венециано (7.4.15).

Выражение для пятичастичной амплитуды (см. рис. 9.10) можно написать аналогично предыдущему [31, 394]:

$$V(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_{23}, t_{15}) = g B_5(-\alpha(s_{12}), -\alpha(s_{34}), -\alpha(s_{45}), -\alpha(t_{23}), -\alpha(t_{15})) \equiv g \int_0^1 dx_{12} dx_{34} dx_{45} dx_{23} dx_{15} (x_{12})^{-\alpha(s_{12})-1} \dots \times (x_{15})^{-\alpha(t_{15})-1} f(x_{12}, \dots, x_{15}). \quad (9.4.8)$$

Это выражение имеет полюса для каждого из возможных спариваний внешних частиц (в данной планарной конфигурации). Функцию f нужно выбирать так, чтобы отсутствовали одновременные полюса в перекрывающихся каналах, подобных, например, каналам s_{34} , t_2 и s_{45} ; таким образом, необходимо устранить возможность одновременного обращения в нуль переменных x_{34} и x_{23} (или x_{45}). Итак, необходимо потребовать, чтобы функция f обращалась в нуль в тех случаях, когда

$$\left. \begin{aligned} x_{34} &= 1 - x_{23} x_{45}; & a \\ x_{45} &= 1 - x_{34} x_{15}; & b \\ x_{15} &= 1 - x_{45} x_{12}; & c \\ x_{12} &= 1 - x_{15} x_{23}; & d \\ x_{23} &= 1 - x_{12} x_{34}. & e \end{aligned} \right\} \quad (9.4.9)$$

Выражение (9.4.9) содержит пять уравнений для пяти неизвестных, однако не все эти уравнения независимы, и, фактически, два неизвестных являются произвольными. Обычно в качестве свободных переменных берут x_{23} и x_{15} . Тогда уравнение d дает выражение для x_{12} в терминах этих переменных, а уравнения e и a дают

$$x_{34} = (1 - x_{23}) / (1 - x_{15} x_{23}); \quad x_{45} = (1 - x_{15}) / (1 - x_{15} x_{23})$$

соответственно; уравнения b и c превращаются в тождества, если в них подставить упомянутые выше результаты. Итак, исходя из уравнений a , b и e , можно написать выражения для функции f :

$$f(x_{12}, \dots, x_{15}) = \delta(1 - x_{34} - x_{23} x_{45}) \times \\ \times \delta(1 - x_{45} - x_{34} x_{15}) \delta(1 - x_{23} - x_{12} x_{34}). \quad (9.4.10)$$

Чтобы получить члены типа сателлитов, мы должны умножить это выражение на любую, аналитическую по всем переменным x функцию. Эти δ -функции позволяют произвести интегрирование по переменным x_{34} , x_{45} и x_{23} . Ответ имеет вид

$$B_5(-\alpha(s_{12}), -\alpha(s_{34}), -\alpha(s_{45}), -\alpha(t_{23}), -\alpha(t_{15})) = \\ = \int_0^1 dx_{23} dx_{15} (1 - x_{15} x_{23})^{-\alpha(s_{12})-1} \left(\frac{1 - x_{23}}{1 - x_{15} x_{23}} \right)^{-\alpha(s_{34})-1} \times \\ \times \left(\frac{1 - x_{15}}{1 - x_{15} x_{23}} \right)^{-\alpha(s_{45})-1} (x_{23})^{-\alpha(t_{23})-1} (x_{15})^{-\alpha(t_{15})-1} (1 - x_{15} x_{23})^{-1}, \quad (9.4.11)$$

или

$$B_5(-\alpha(s_{12}), -\alpha(s_{34}), -\alpha(s_{45}), -\alpha(t_{23}), -\alpha(t_{15})) = \\ = \int_0^1 dx_{23} dx_{15} (x_{23})^{-\alpha(t_{23})-1} (x_{15})^{-\alpha(t_{15})-1} (1 - x_{23})^{-\alpha(s_{34})-1} \times \\ \times (1 - x_{15})^{-\alpha(s_{45})-1} (1 - x_{15} x_{23})^{-\alpha(s_{12}) + \alpha(s_{34}) + \alpha(s_{45})}. \quad (9.4.12)$$

Полная пятиточечная дуальная амплитуда содержит сумму 12 членов, аналогичных (9.4.12) и отвечающих различным планарным упорядочиваниям внешних частиц. Эти члены необходимы, чтобы придать реджеонам сигнатуру, аналогично тому, как, например, свойства сигнатуры реджеонов $\alpha(t_{23})$ и $\alpha(t_{15})$ требуют присутствия четырех диаграмм рис. 9.8.

Чтобы исследовать полюса этой амплитуды, положим

$$-\alpha(s_{12}) + \alpha(s_{34}) + \alpha(s_{45}) \equiv -\beta. \quad (9.4.13)$$

Напишем разложение

$$(1 - x_{15} x_{23})^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (x_{15} x_{23})^n P_n(-\beta), \quad (9.4.14)$$

а затем почленно проинтегрируем и в результате имеем [234]

$$B_5 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\beta) \int_0^1 dx_{23} dx_{15} (x_{23})^{-\alpha(t_{23})-1+n} (x_{15})^{-\alpha(t_{15})-1+n} \times \\ \times (1-x_{23})^{-\alpha(s_{34})-1} (1-x_{15})^{-\alpha(s_{45})-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\beta) B_4(-\alpha(t_{23}) + \\ + n, -\alpha(s_{34})) B_4(-\alpha(t_{15}) + n, -\alpha(s_{45})). \quad (9.4.15)$$

Если теперь разложить первую B_4 таким же образом, как и в (9.4.6), то

$$B_5 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{-\alpha(t_{23}) + m} \sum_{n=0}^m P_n(-\beta) P_{m-n}(-\alpha(s_{34})) B_4(-\alpha(t_{15}) + n, \\ -\alpha(s_{45})).$$

Следовательно, получаем, что вычет в полюсе $\alpha(t_{23}) = m$ является по переменной t_{23} полиномом степени m и, кроме того, имеем целую последовательность дочерних траекторий со спинами $k = 0, 1, \dots, m$. Вычет содержит также амплитуду Венециано для четырехчастичной реакции $(\bar{2}\bar{3}) + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + 5$, как это и ожидалось из факторизации на рис. 9.10, а. Однако в то время как высшая траектория содержит только резонансы при $\alpha(t_{23}) = m$, все дочерние траектории являются многократно вырожденными [181, 182] и, таким образом, свойство факторизации амплитуды справедливо только для лидирующей траектории. Если теперь исключить спутники Венециано, то спектр дочерних траекторий получается наиболее простым, насколько это возможно [212], но тем не менее он содержит очень большое число частиц. Фактически, при некотором заданном значении m число уровней дается числом способов, которыми можно выбрать неотрицательные числа n_i , удовлетворяющие условию $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = m$. В случае больших m это число растет как $\exp[(2\pi/\sqrt{6})m]$. Конечно, то, как относиться к этому результату, — спорный вопрос: нужно ли считать этот результат предсказанием модели либо это просто отражение того факта, что мы нереалистическим образом стараемся аппроксимировать разрез, идущий от точки ветвления, последовательностью полюсов.

Для того чтобы получить двухреджеонный предел (9.4.12), сделаем замену:

$$\alpha(s) = \alpha^0 + \alpha' s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \alpha' s; \quad x_{23} \equiv -y_{23}/s_{34}; \\ x_{15} \equiv -y_{15}/s_{45}.$$

Тогда

$$(1-x_{23})^{-\alpha(s_{34})-1} \rightarrow (1+y_{23}/s_{34})^{-\alpha' s_{34}} \rightarrow \exp\{-y_{23} \alpha'\}; \\ (1-x_{15})^{-\alpha(s_{45})-1} \rightarrow \exp\{-y_{15} \alpha'\}; \\ (1-x_{23} x_{15})^{-\alpha(s_{12})+\alpha(s_{34})+\alpha(s_{45})} \rightarrow \exp\{-(y_{23} y_{15} s_{12}/s_{34} s_{45}) \alpha'\}$$

и, следовательно,

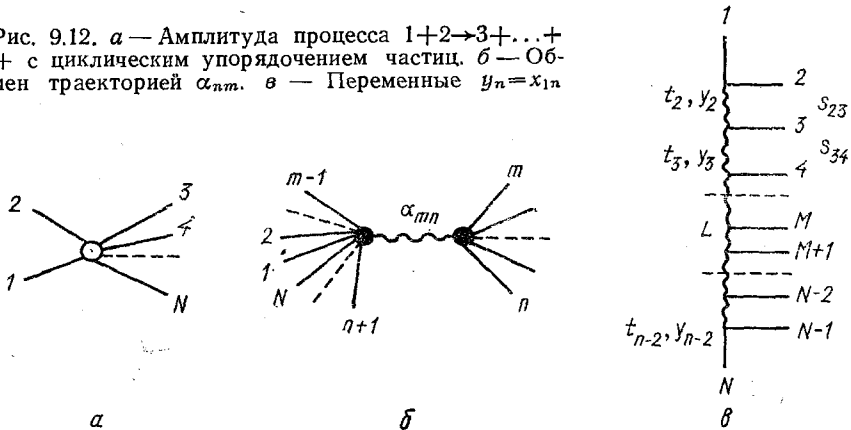
$$B_5 \rightarrow (-s_{34})^\alpha (s_{23}) (-s_{45})^\alpha (t_{15}) \int_0^\infty dy_{23} dy_{15} (y_{23})^{-\alpha (t_{23})-1} (y_{15})^{-\alpha (t_{15})-1} \times \\ \times \exp \{ -[y_{23} + y_{15} + (y_{23} y_{15} s_{12}/s_{34} s_{45})] \alpha' \}. \quad (9.4.16)$$

Это соотношение имеет вид двухреджеонного предела (9.3.10) с явным выражением для зависимости от угла Толлера в V_1 , которая, как можно показать [151], будет следующей:

$$V_1(t_1, t_2, \eta_{12}) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_1) \Gamma(-\alpha_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha_1 - n) \Gamma(-\alpha_2 + \alpha_1 - n)}{n! (\eta_{12})^n}. \quad (9.4.17)$$

Аналогичная зависимость наблюдается и для V_2 , где $t_1 = t_{23}$, $t_2 = t_{15}$, $\alpha_1 = \alpha(t_{23})$, $\alpha_2 = \alpha(t_{15})$.

Рис. 9.12. *a* — Амплитуда процесса $1+2 \rightarrow 3+\dots+$ с циклическим упорядочением частиц. *b* — Обмен траекторией α_{mn} . *в* — Переменные $y_n = x_{1n}$



Для того чтобы обобщить (9.4.8) на случай N -частичной амплитуды, для данного циклического переобозначения всех внешних частиц (рис. 9.12, *a*) напомним [87, 263]

$$V_N = g B_N = g \int_0^1 f(x) \prod_{m,n} (x_{mn})^{-\alpha_{mn}-1} dx_{mn}, \quad (9.4.18)$$

причем полная амплитуда будет являться суммой $(N-1)!/2$ членов, отвечающих всем неэквивалентным, нециклическим перестановкам внешних частиц. Данная $\alpha_{mn} \equiv \alpha(s_{mn})$ будет зависеть от инварианта канала

$$s_{mn} \equiv (p_m + p_{m+1} + \dots + p_n)^2, \quad (9.4.19)$$

как показано на рис. 9.12, *б*. Для того чтобы помешать возникновению одновременных полюсов в перекрывающихся каналах, в функцию $f(x)$ вводится множитель

$$\delta \left(x_{mn} + \prod_{k,l} x_{kl} - 1 \right), \quad (9.4.20)$$

где индекс kl отвечает каналу, перекрывающемуся с каналом mn . Чтобы это показать, введем $N - 3$ переменных

$$y_n \equiv x_{1n}, \quad n = 2, 3, \dots, N - 2, \quad (9.4.21)$$

как показано на рис. 9.12, *в*. Все переменные x с другими индексами связаны с этими следующим образом [95]:

$$x_{mn} = a_{m,n-1} a_{m-1,n} / (a_{m,n} a_{m-1,n-1}), \quad (9.4.22)$$

$$2 \leq m < n \leq N - 1,$$

где

$$a_{mn} \equiv 1 - \prod_{k=m}^n y_k, \quad y_1 = y_{N-1} \equiv 0. \quad (9.4.23)$$

Тогда находим, что ограничение (9.4.20) можно учесть, написав

$$B_N = \int_0^1 dy_2 \dots dy_{N-2} \prod_{i=2}^{N-3} (1 - y_i y_{i+1})^{-1} \prod_{m,n} (x_{mn}(y))^{-\alpha_{mn}-1}. \quad (9.4.24)$$

В случае $N = 5$ это выражение соответствует (9.4.12) и окончательный вид мультiredжевской асимптотики, отвечающий ситуации, показан на рис. 9.12, *в*;

$$B_N \rightarrow \Gamma(-\alpha(t_2)) (-s_{23})^{\alpha(t_2)} V(t_2, t_3, \eta_{23}) \Gamma(-\alpha(t_3)) (-s_{34})^{\alpha(t_3)} \times \\ \times V(t_3, t_4, \eta_{34}) \dots \Gamma(-\alpha(t_{N-2})) (-s_{N-2, N-1})^{\alpha(t_{N-2})}, \quad (9.4.25)$$

где функции V даются (9.4.17). Это выражение находится в соответствии с (9.3.10), естественно, с оговоркой, что в нашей единственной планарной амплитуде отсутствуют сигнатурные факторы.

В многочастичные дуальные модели можно также ввести и внутреннюю симметрию. Это достигается включением кварковой структуры мезонов таким же способом, как это было сделано в разд. 7.5 [92].

Каждый мезон представляется матрицей, строки которой соответствуют кварковым индексам, а столбцы — антикварковым. Если рассмотреть только изотопическую симметрию, то, так как кварки являются изодублетами $I = 1/2$ (5.2.2), мезон будет представляться матрицей 2×2 ; в случае если мезон является изоскаляр $I = 0$ [см. (5.2.7)], то эта матрица просто $\delta_{\alpha\beta}$ -функция Кронеккера, и если мезон изовекторный $I = 1$, то он представляется изоспиновыми матрицами Паули (5.2.5) $(\tau_i)_{\alpha\beta}$, где $i = 1, 2, 3$ в зависимости от компоненты изотриплета [см. (5.2.8)]. Ясно, что значения полного изоспина I могут равняться 0 и 1, так как только эти значения могут получаться при сложении двух изоспинов $1/2$, отвечающих кваркам. В противном случае возникают экзотические состояния, которые нежелательны. Удобно ввести обозначение $(\tau_0)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ с тем, чтобы набор τ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) включал все четыре возможных изоспиновых состояния, в которых частица может находиться.

Сформулируем правило Чана — Патона, дающее рецепт введения изоспина в многочастичную дуальную амплитуду: для того чтобы включить изоспин в амплитуду B_N , отвечающую данному цикличес-

кому упорядочиванию частиц $1, 2, \dots, N$, необходимо умножить B_N на фактор $(1/2) \text{tr}(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \tau_{i_3}, \dots, \tau_{i_N})$ (где под обозначением tr понимается взятие шпура матрицы). Этот фактор обладает точно такой же симметрией относительно циклических перестановок, что и B_N и дает правильную структуру $q\bar{q}$ без какой-либо экзотики в любом промежуточном состоянии. Это можно увидеть, если рассмотреть обмен некоторой частицей L (см. рис. 9.12, θ);

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\tau_{i_1} \dots \tau_{i_N}) = \sum_{i_L=0}^3 \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\tau_{i_1} \dots \tau_{i_M} \tau_{i_L}) \right] \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\tau_{i_L} \tau_{i_{M+1}} \dots \tau_{i_N}) \right]. \quad (9.4.26)$$

Очевидно, что имеются желаемая факторизация и правильные изотопические зависимости в вычетах частицы L , причем наблюдается обменное вырождение между частицами с $I = 0$ и $I = 1$. Все эти результаты можно распространить с группы $SU(2)$ на $SU(3)$, просто заменяя матрицы τ на матрицы λ из табл. 5.1. Конечно, этот метод применим только в пределе точного $SU(3)$ -вырождения, что очень далеко от реального эксперимента.

За последние несколько лет этот дуальный формализм претерпел некоторые изменения и получил значительное развитие в различных направлениях, которые не найдут сколь-нибудь подробного отражения в этой книге. Читатель, который пожелает изучить и разобраться во всем этом, может найти все необходимое в таких прекрасных обзорах, как следующие: [299, 358, 359, 392].

Как уже упоминали в разд. 3.3, в релятивистском гармоническом осциллятором потенциале возникают прямолинейные траектории, подобные тем, которые имеются в дуальной модели. Доказано, что можно перевыразить дуальную модель в терминах операторного формализма, в котором состояния, отвечающие частицам, производятся бесконечным набором гармонических осцилляторных операторов рождения a_μ^n , $n = 0, 1, \dots, \infty$, действующих на основное вакуумное состояние [181, 183, 184]. При этом подходе, конечно, много проще обсуждать такие свойства, как резонансный спектр и, в частности, вырождение дочерних траекторий. Однако имеется фундаментальная проблема, заключающаяся в том, что для обеспечения лоренц-ковариантности теории необходимо, чтобы операторы рождения были четырехмерными ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Однако включение временной координаты приводит к возникновению так называемых духовых состояний, которые имеют отрицательные вычеты и таким образом нарушают причинность (см. разд. 1.4). Аналогичная проблема существует и в электродинамике, когда рождаются времениподобные фотоны. Однако трудности легко преодолеваются, так как введение лоренцевой калибровки гарантирует исчезновение духовых состояний [51]. Возможно, это следствие того, что из-за безмассовой природы фотона не бывает продольных и скалярных квантов (т. е. разрешена спиральность $\lambda = \pm 1$ и запрещена $\lambda = 0$).

Подобным образом в дуальных моделях было найдено, что если $\alpha(0) = 1$ для лидирующей траектории, то можно наложить бесконечный ряд калибровочных условий, которые устраняют все духи. Однако этот факт справедлив только в 26-мерном пространстве-времени. Естественно, это ограничение является нефизическим и совершенно невозможно рассматривать эту модель как прототип реальной физической картины даже в «мероморфном пределе». Однако это означает, что полученная дуальная теория поля близко связана с другими полевыми теориями, в которых имеются безмассовые частицы, в частности, с квантовой электродинамикой с безмассовыми электронами и фотонами, теорией

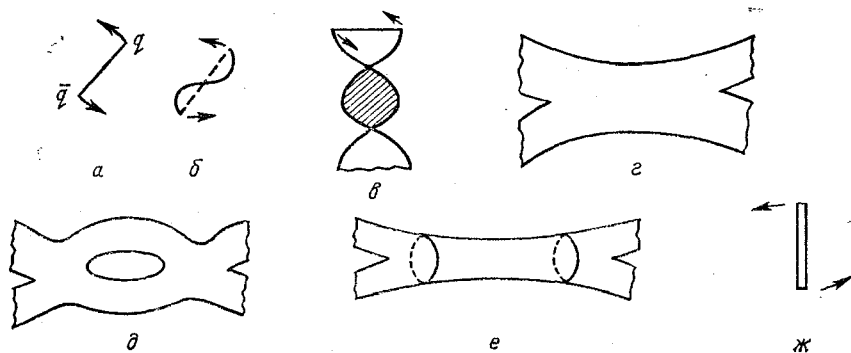


Рис. 9.13. *а* — Вращающаяся струна с кварками на концах. *б* — Вибрационная мода струны. *в* — Мировая поверхность вращающейся струны. *г* — Взаимодействие двух струн. *д* — Неперенормируемая петля во взаимодействии двух струн. *е* — Труба (цилиндр), отвечающая померону. *ж* — Состояние замкнутой струны с наивысшим угловым моментом

Янга—Миллса, квантовой гравитацией с безмассовыми гравитонами со спином равным 2. Фактически, эти полевые теории могут быть получены как различные пределы дуальной теории поля, когда наклон траектории $\alpha' \rightarrow 0$ [393].

Другим, отчетливо представляемым направлением развития этого операторного формализма является описание движения квантованной безмассовой релятивистской струны [193, 298, 359]. Мезон можно представить как движущуюся струну со свободными концами, испытывающую внутреннее растягивающее напряжение из-за центробежной силы, обусловленной вращением струны (рис. 9.13). Максимальный угловой момент при данной энергии возникает, когда струна абсолютно жесткая, как показано на рис. 9.13, *а*, и просто вращается, в то время как меньшие угловые моменты при той же самой энергии имеют состояния, обладающие также вибрационными модами (подобно скрипичной струне), которые кратны некоторой фундаментальной частоте вращения. Эти вибрационные моды ответственны за возникновение дочернего спектра при данной массе. Если ввести в рассмотрение еще внутреннюю симметрию, то можно вообразить, что струна связывает кварки, расположенные на ее концах.

Движение струны во времени будет характеризоваться мировой поверхностью, похожей на перекрученную ленту (см. рис. 9.13, в). Калибровочные условия оказываются эквивалентны требованию, что возникают только перпендикулярные мировой поверхности вибрации. Согласованную унитарную квантовую теорию такой струны можно построить, только если $\alpha(0) = 1$, а размерность пространства — времени D равна 26.

Можно нарисовать картину, как эти струны взаимодействуют (см. рис. 9.13, г). Эта картина очень похожа на дуальную диаграмму рис. 7.7, а [326]. Для того чтобы унитаризовать эту теорию, необходимо, конечно, включить в рассмотрение петли, подобные изображенным на рис. 9.13, д, но такие петли дают бесконечный вклад, который не поддается рассмотрению в рамках обычной техники перенормировок стандартной квантовой теории поля, из-за того что есть бесконечный набор промежуточных состояний. Однако имеется также и другой тип петель, а именно трубы (см. рис. 9.13, е), которые представляют мировую поверхность замкнутой струны. Максимальный угловой момент такой замкнутой струны при данной энергии возникает, когда она стремится деформироваться, как показано на рис. 9.13, ж, причем этот момент равен удвоенному угловому моменту соответствующей открытой струны, т. е. $\alpha(0) = 2$. Фактически, можно показать, что

$$\alpha_{\text{tube}} = 2 + \alpha' t/2,$$

где α' — наклон, который отвечает траектории, соответствующей открытой струне. Поскольку замкнутая струна не имеет концов, то она может не нести кварков, и таким образом имеет квантовые числа вакуума и может ассоциироваться с помероном. Тот факт, что ее пересечение равно 2, а не единице, приводит к другой трудности, однако если пересечение обычных реджеонов можно положить равным $\alpha(0) = 1/2$, то померон имел бы в этом случае пересечение равное единице, как этого хотелось бы. В пределе нулевого наклона померонная теория поля приводит к гравитону.

Эта дуальная теория поля могла бы являться первым приближением к фундаментальной теории сильных взаимодействий, в которой дуальные реджеоны играют центральную роль. Однако то, что в теории встречаются только траектории с целыми пересечениями, что она справедлива только в пространстве—времени с высокой размерностью (хотя имеются некоторые варианты теории, в которых D может быть уменьшено с 26 до 10) и непонятно, каким образом выполнить перенормировку, — все это заставляет нас воздержаться от каких-либо высказываний по ее поводу и, поэтому мы не будем больше возвращаться к этой теории в дальнейшем.

9.5. Мультиреджевская феноменология

Вследствие того что при рассмотрении многочастичных реакций число независимых инвариантов очень быстро нарастает с увеличением количества частиц (равных $3N - 10$ для N -частичной амплитуды), эти реакции значительно менее подробно исследованы, чем те, где

в конечном состоянии имеются две частицы ($N = 4$). Для того чтобы исследовать хотя бы амплитуду $2 \rightarrow 3$, необходимо такое количество событий, которых было бы достаточно, чтобы нарисовать распределение вероятности, зависящее от пяти различных независимых переменных или от четырех, если энергия падающего потока зафиксирована. Далее, так как двухреджеонный предел наступает при условии $s_{12}, s_{34}, s_{45} \rightarrow \infty$, когда отношение $s_{12}/s_{34}s_{45}$ фиксировано, то для того чтобы s_{34} и s_{45} были достаточно большими, необходимы очень большие значения энергии s_{12} . Но при достаточно большой энергии данное трехчастичное конечное состояние будет составлять только очень малую долю всех событий, полученных при столкновении начальных частиц. По этой причине значительно более полезно провести анализ многочастичных реакций «инклюзивным» способом, который будет описан в следующей главе, а не концентрировать внимание на каждом данном конечном состоянии отдельно. Тем не менее очень важно установить, какие предсказания дает теория Редже для отдельных многочастичных процессов.

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow 3$ (см. рис. 9.1). Исходя из (1.8.5) двойное дифференциальное сечение, проинтегрированное по t_{23}, t_{15} при фиксированном s_{12} , равно [см. (1.8.17)]

$$\frac{d^2 \sigma}{ds_{34} ds_{45}}(s_{12}, s_{34}, s_{45}) = \frac{1}{2 \sqrt{\lambda(s_{12}, m_1^2, m_2^2)}} \int \prod_{i=3}^5 \left(\frac{d^3 p_i}{2p_{i0} (2\pi)^3} \right) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5) \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2) \times \\ \times \delta(s_{45} - (p_4 + p_5)^2) |A(1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5)|^2. \quad (9.5.1)$$

Оно определяет распределение событий на графике Далица (см. рис. 9.2) как функцию переменных s_{34} и s_{45} при заданном s_{12} . [Если частицы имеют спин, то подразумевается, как обычно, суммирование по квадратам амплитуд, отвечающих разным спиральностям, — см. (4.2.5).]

Однореджеонные пределы типа тех, которые изображены на рис. 9.1, σ , характеризуются тем, что один из этих инвариантов, скажем s_{45} , имеет малое фиксированное значение, тогда как $s_{34} \sim s_{12} \rightarrow \infty$. Таким образом, имеются три различных однореджеонных предела, которые изображены на рис. 9.14, a . Например, для реакции $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p$ имеем $\pi^+ p \rightarrow (\pi^0 \pi^+) p$, $\pi^+ p \rightarrow \pi^0 (\pi^+ p)$, $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ (\pi^0 p)$. В отдельных случаях, когда две из частиц конечного состояния могут находиться в резонансном состоянии (например, $(\pi^+ \pi^0) = \rho^+$ или $(\pi^+ p) = \Delta^{++}$), мы получаем просто квазидвухчастичные реакции типа тех, которые уже были рассмотрены в гл. 6; фактически, однореджеонный анализ идентичен анализу, который проводили ранее для двухчастичных конечных состояний, за исключением того, что имеется зависимость от $s_{45} = m_{45}^2$ и угловое распределение «распада» системы (45).

Наибольший интерес представляют различные двухреджеонные пределы, что изображены на рис. 9.1, b , которые характеризуются тем, что $s_{12}, s_{34}, s_{45} \rightarrow \infty$ при условии, что $\eta_{12} = s_{12}/s_{34}s_{45}$ — фиксировано.

Из (9.2.30) следует, что η_{12} связано с ω_{12} , а так как ω_{12} представляет собой физически наблюдаемый и могущий быть измеренным угол, то он ограничен условием $\cos\omega_{12} \geq -1$, которое (после некоторых манипуляций, см. [89]) может быть сформулировано в виде

$$(\sqrt{-t_{23}} + \sqrt{-t_{15}})^2 + m_4^2 \geq s_{34} s_{45} / s_{12} = 1/\eta_{12}. \quad (9.5.2)$$

В настоящее время теория Редже применима только в том случае, когда взаимодействие является периферическим и мы ожидаем, что амплитуды будут пренебрежимо малыми при больших значениях t . С эмпирической точки зрения это является отчасти следствием экспоненциальной зависимости от t реджевских вершин, а отчасти — следст-

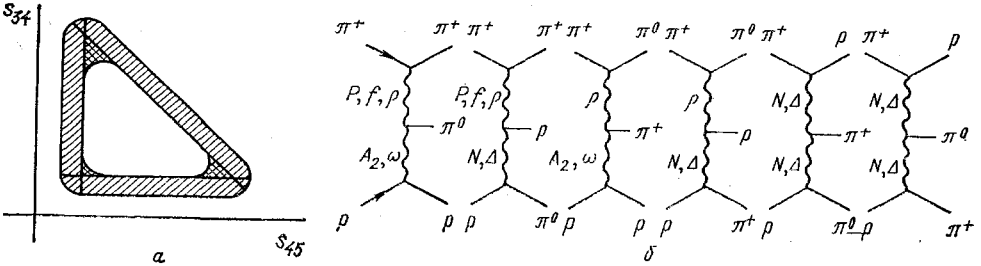


Рис. 9.14. а — График Далица при больших s_{12} . Штриховкой показаны три однореджеонные области, а двойной штриховкой — три двухреджеонные области. б — Диаграммы для реакции $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p$ с обменами двумя реджеонами

вием реджевского сужения конуса дифракционного рассеяния, хотя, конечно, должны иметься и теоретические основания для того, чтобы считать, что $s \gg t$ для каждого реджеона. Следовательно, мы должны иметь малые значения $|t_{23}|, |t_{15}|$ (т. е. $\geq 1 \text{ ГэВ}^2$), а это приводит к тому, что $1/\eta_{12}$ в (9.5.2) ограничивается подобными малыми значениями. Итак, трем двухреджеонным пределам соответствуют события, лежащие в углах графика Далица (как на рис. 9.14, а), где произведения $s_{34} s_{45}$ и т. д. принимают не очень большие значения из-за того, что s_{12} имеет большое, но фиксированное значение. Отметим, что s_{34} и s_{45} должны быть достаточно большими для того, чтобы можно было попасть в соответствующие реджевские области, т. е. $s_{34}, s_{45} \gg 1 \text{ ГэВ}^2$. Этот эффект «углов» появляется как следствие периферической кинематики взаимодействий и отнюдь не есть подтверждение мультиреджевской теории как таковой.

Шесть графиков, содержащих обмены двумя реджеонами и отвечающих реакции $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p$, показаны на рис. 9.14, б.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, необходимо ввести хотя бы некоторые ограничения на реджевские параметры, потому что описание экспериментальных данных при учете всех диаграмм со всеми возможными переменными, которые можно было бы разумным образом ввести в выражение (9.3.10), потребовало бы слишком много времени. Один из возможных способов сделать это — использовать дуальную модель. Конечно, тогда необходимо сгладить полюса, чтобы

получить реджевское поведение на действительной оси. Кроме того, необходимо устранить обмен P -полюсом, так как померон отсутствует в простых дуальных моделях.

В качестве примера таких анализов можно привести анализ Петерсона и Торнквиста [329] для процесса $K^-p \rightarrow \pi^0\pi^+\Delta$ и процессов, с ним связанных, которые были выбраны из-за отсутствия в них вакуумных обменов, и анализ Чана и др. [94], которые рассмотрели реакции $K^+p \rightarrow K^0\pi^+p$, $K^-p \rightarrow \bar{K}^0\pi^-p$ и $\pi^-p \rightarrow \bar{K}^0K^-p$. Планарные диаграммы, разрешенные для этих процессов, изображены на рис. 9.15. Было показано, что использование таких диаграмм позволяет получить хорошее согласие с экспериментальными данными. Отметим, что в подобных случаях после введения известных траекторных функций

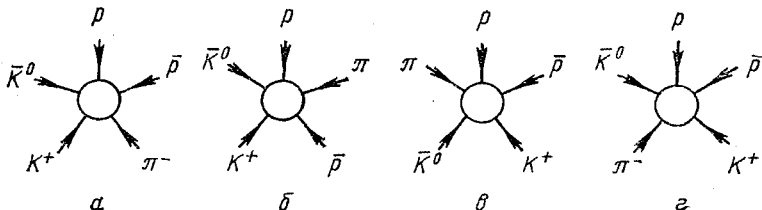


Рис. 9.15. Различные упорядочения для процесса $K^+p \rightarrow K^0\pi^+p$ (все частицы показаны как входящие) в предположении об отсутствии экзотических спариваний. Все эти планарные диаграммы являются разрешенными с точки зрения дуальности, но диаграмма γ — не разрешенная дуальная диаграмма (см. гл. 7), потому что λ -кварк должен перейти от K^0 к K^+

оставался только один свободный параметр — общая нормировка (для полного обзора полученных результатов см. работу Бергера [44]).

Более простым вариантом, у которого много похожих свойств, является модель Чана — Лоскевича — Аллисона [90], названная в честь авторов, которую, если для удобства обозначить частицы так же, как и на рис. 9.12, σ , можно написать в следующем виде:

$$A_N = \prod_{i=2}^{N-2} (G_i s_i + F_i) (s_i + 1)^{\alpha_i^0 - 1} (e^{\alpha} s_i + 1)^{\alpha' t_i}, \quad (9.5.3)$$

где

$$s_i \equiv s_{i,i+1} \equiv (p_i + p_{i+1})^2, \quad t_i = [p_1 - (p_2 + p_3 + \dots + p_i)]^2. \quad (9.5.4)$$

Эта амплитуда обладает свойством, что если $s_i \gg 1$, то она переходит в мультiredжевскую формулу

$$A_N \sim \prod_{i=2}^{N-2} G_i (s_i)^{\alpha_i^0} \exp\{(a + \ln s_i) \alpha' t_i\}, \quad (9.5.5)$$

подобную (9.3.6). Отметим, что в этой модели пренебрегают зависимостями от углов Толлера и всеми спиновыми зависимостями. В пределе $s_i \rightarrow 0$ i -й член стремится к константе F_i , которая дает очень грубую параметризацию низкоэнергетических эффектов (при низких энергиях происходит основная масса событий), причем, естественно, отсутствует резонансная структура, которую необходимо учесть для

того, чтобы получить действительно хорошее описание экспериментальных данных. Полная амплитуда содержит сумму членов, подобных A_N , по всем неэквивалентным перестановкам частиц. Хотя эта модель совершенно недостаточна для получения подробного количественного описания, она приводит к довольно разумным аппроксимациям, содержащим много качественно правильных свойств. В работе Плахте и Робертса [333] предложен улучшенный вариант этой модели.

Сформулируем теперь основные выводы. Вполне возможно, что мультиреджевская теория является согласованной, хотя в настоящее время для того, чтобы это вывести, нужно принять без доказательств достаточно правдоподобные, но все-таки предположения о структуре сингулярностей, которые определяют реджевское асимптотическое поведение. Можно построить дуальные модели с такой мультиреджевской структурой, хотя внутренне самосогласованные факторизованные варианты этой модели имеют, самое большее, довольно ограниченное сходство с физической природой. Однако в конце концов это могло бы привести к фундаментальной теории сильных взаимодействий. С феноменологической точки зрения мультиреджевскую теорию можно проверить только с помощью довольно малой доли событий, относящихся к данной реакции, т. е. с помощью событий, которые возникают в мультиреджевской области фазового объема. Оказывается, что наблюдается удовлетворительное согласие теории с экспериментом и дуальные модели, несмотря на свои очевидные ограничения, могут праздновать некоторый феноменологический успех. Однако развить этот успех не удастся, так как многочисленные амплитуды зависят от слишком большого количества переменных для того, чтобы провести действительно подробное сравнение теории с экспериментом. Для примера можно сказать, что до сих пор можно в общем-то игнорировать поправки от реджевских разрезов к доминирующим вкладам обменов реджевскими полюсами.

Очевидно, что необходимо предложить лучший способ проведения анализа процессов неупругого рассеяния. Таким способом является подход Мюллера — Редже в инклюзивных реакциях, рассмотрению которого будет посвящена следующая глава.

10

ИНКЛЮЗИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ

10.1. Введение

Хотя многочастичные конечные состояния составляют основную долю сечения рассеяния при высоких энергиях, анализ индивидуальных конечных состояний довольно затруднителен. Это связано со сложностью идентификации конечного состояния, потому что существенным моментом экспериментального анализа является проверка (с помощью рассмотрения квантовых чисел, а также энергетических и импульсных характеристик) того, что частицы конечного состояния,

наблюдаемые в регистрирующей аппаратуре, образованы в данной реакции; кроме того, необходимо исключить все остальные события другого типа, которые, возможно, могли бы произойти. В частности, довольно трудно зарегистрировать образование нейтральных частиц. Имеются также теоретические трудности при анализе конечных многочастичных состояний: с одной стороны, число независимых инвариантов быстро нарастает с увеличением числа частиц, а с другой стороны, только часть событий попадает в те области фазового объема, в которых их легко параметризовать. К таким областям относятся области резонансных эффективных масс различных комбинаций, частиц и различные области, где справедлива реджевская теория.

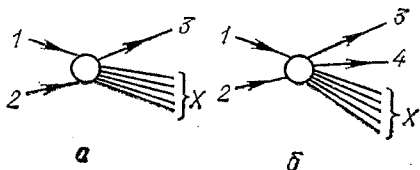


Рис. 10.1. *а* — Одночастичная инклюзивная реакция $1+2\rightarrow 3+X$. *б* — Двухчастичная инклюзивная реакция $1+2\rightarrow 3+4+X$

Принимая во внимание эти проблемы, намного полезнее рассматривать так называемые инклюзивные реакции, т. е. процессы, в которых данная частица или данный набор частиц содержится в конечном состоянии, однако нам совершенно не интересны остальные частицы, которые могут также присутствовать в этих конечных состояниях. Таким образом, мы будем иметь одночастичное инклюзивное сечение процесса

$$1 + 2 \rightarrow 3 + X \quad (10.1.1)$$

(рис. 10.1, *а*), где 3 — определенный тип частицы (например, это может быть π^- -мезон или, в более общем случае, любая отрицательно заряженная частица), а X включает в себя все частицы, которые могли бы быть образованы вместе с частицей 3, если учесть законы сохранения энергии, импульса и квантовых чисел. Очевидно, вследствие сохранения 4-импульса и заряда

$$p_X = p_1 + p_2 - p_3; \quad Q_X = Q_1 + Q_2 - Q_3 \quad (10.1.2)$$

и т. д. Аналогично двухчастичный инклюзивный процесс имеет вид

$$1+2\rightarrow 3+4+X, \quad (10.1.3)$$

где 3 и 4 — заданные типы частиц (рис. 10.1, *б*).

Такие процессы довольно легко экспериментально идентифицировать, так как единственное, в чем мы должны удостовериться, это то, что частица или частицы заданного типа зарегистрированы. Необходимо измерять только импульс (импульсы) детектируемой частицы (частиц) (конечно, импульс пучка также необходимо знать) для того, чтобы полностью определить событие, потому что для процесса (10.1.1), например, имеются только три независимых переменных (s_{12} , t_{13} и M_X), как это будет показано в следующем разделе.

При помощи довольно бесхитростного обобщения оптической теоремы, предложенного Мюллером, удивительно просто получают пред-

сказания теории Редже для высокоэнергетического поведения таких процессов. Таким образом, в последние годы был достигнут значительно больший прогресс в понимании многочастичных процессов посредством этого инклюзивного подхода, чем при проведении анализа отдельных эксклюзивных конечных состояний, таких, как $1+2 \rightarrow 3+4+5$.

Эта глава посвящена реджевскому анализу инклюзивных процессов. Она начинается с обсуждения их кинематики и определения инклюзивных сечений. Затем рассматривается теорема Мюллера, которая потом используется для того, чтобы сделать некоторые предсказания при высоких энергиях. Интересные обзоры на эту тему сделаны Хорном [235], Фрезером и др. [173] и Моррисоном [312].

10.2. Кинематика инклюзивных процессов

Рассмотрим процесс (10.1.1), изображенный на рис. 10.1, а. Как обычно, будем работать в s -канальной системе центра масс (с. ц. м.), в которой 4-импульсы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= (E_1, 0, 0, p_z), & p_1^2 &= E_1^2 - p_z^2 = m_1^2; \\ p_2 &= (E_2, 0, 0, -p_z), & p_2^2 &= E_2^2 - p_z^2 = m_2^2; \\ p_3 &= (E_3, p_{3T}, p_{3L}), & p_3^2 &= E_3^2 - p_{3T}^2 - p_{3L}^2 = m_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.1)$$

Ось z определяется направлением движения частицы 1, а импульс частицы 3 (как это показано на рис. 10.2) разложим на его продольную компоненту p_{3L} вдоль оси z и поперечную к этой оси компоненту, которая представляется двухкомпонентным вектором p_{3T} . Это разложение вектора p_3 оказывается очень полезным, так как экспериментально обнаружено, что при высоких энергиях p_{3L} может принимать почти любое кинематически разрешенное значение, причем $p_{3L} \approx p_z$, если частица 3 образуется как фрагмент частицы 1, и $p_{3L} \approx -p_z$, если она является фрагментом частицы 2. При этом поперечная компонента обычно оказывается довольно малой: имеется немного событий, для которых $|p_{3T}| > \beta 0,5$ ГэВ/с. Фактически, $|p_{3T}| \approx 0,3 \div 0,4$ ГэВ/с при любой энергии налетающих частиц.

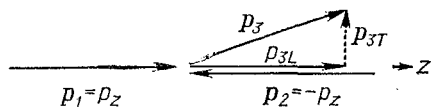


Рис. 10.2. Импульсы в реакции $1+2 \rightarrow 3+X$: $p_1 = p_z$, $p_2 = -p_z$. Оба импульса направлены вдоль оси z , импульс p_3 разложен на компоненты: p_{3L} — вдоль оси z и p_{3T} перпендикулярно оси z .

Обычно основную массу частиц конечного состояния составляют пионы, по-видимому, потому, что они легчайшие из адронов. Число остальных находящихся в конечных состояниях каонов, барионов и т. п. значительно меньше, т. е. обычно $m_3 \lesssim 1$ ГэВ/с². Удобно ввести определение «продольной массы» μ_3 :

$$\mu_3 \equiv (m_3^2 + p_{3T}^2)^{1/2} \quad (10.2.2)$$

и тогда из (10.2.1) видно, что μ_3 дает эффективную массу, связанную с продольным движением, т. е.

$$E_3^2 = \mu_3^2 + p_{3L}^2. \quad (10.2.3)$$

Как обычно, $s = s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2$, а так как E_1 и E_2 даются (1.7.8) и (1.7.9), тогда как $p_z = q_{s12}$ определяется (1.7.10), то

$$p_z^2 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} s/4, \quad E_1, E_2 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sqrt{s}/2 \text{ для } s \gg m_1^2, m_2^2. \quad (10.2.4)$$

Для конечного состояния

$$s = (p_3 + p_X)^2, \quad (10.2.5)$$

и определим «недостающую массу» следующим образом:

$$M^2 \equiv M_X^2 \equiv (p_1 + p_2 - p_3)^2 = s + m_3^2 - 2E_3 \sqrt{s}, \quad (10.2.6)$$

используя (10.2.1) и определение (1.7.5). Очевидно, что если вместо m_4 в выражениях (1.7.9) и (1.7.12) для энергии и импульса конечного состояния подставить M , то получится:

$$p_3^2 = p_{3T}^2 + p_{3L}^2 = (1/4s) [s - (m_3 + M)^2] \times \\ \times [s - (m_3 - M)^2] \xrightarrow{s, M^2 \rightarrow \infty} (s - M^2)^2 / (4s) \xrightarrow{s \gg M^2} s/4; \quad (10.2.7)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_3^2 - M^2) \xrightarrow{s, M^2 \rightarrow \infty} \frac{s - M^2}{2\sqrt{s}} \xrightarrow{s \gg M^2} \frac{\sqrt{s}}{2}. \quad (10.2.8)$$

Так как p_{3T}^2 — малая величина, то

$$p_{3L}^2 \approx p_3^2 \rightarrow (s - M^2)^2 / (4s)$$

и поэтому

$$M^2/s \approx 1 - 2p_{3L}/\sqrt{s}. \quad (10.2.9)$$

Другой независимой переменной является

$$t_{13} \equiv t \equiv (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 p_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + \\ + 2p_z p_{3L} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\sqrt{s} (E_3 - p_{3L}) = -\sqrt{s} (E_3^2 - p_{3L}^2) / (E_3 + p_{3L}) = \\ = -s\mu_3^2 / (s - M^2). \quad (10.2.10)$$

Эти выражения можно получить, используя для вывода (10.2.4), а затем (10.2.3), (10.2.7) и (10.2.8). Аналогичным образом

$$u \equiv (p_2 - p_3)^2 \rightarrow -\sqrt{s} (E_3 + p_{3L}) \quad (10.2.11)$$

и подобно (1.7.18) получаем

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + M^2. \quad (10.2.12)$$

Итак, s , t и M^2 образуют полный набор переменных, с помощью которых все другие кинематические переменные могут быть легко выражены.

Однако имеются две другие переменные, которые также часто используются. Одна из них — так называемая фейнмановская перемен-

ная, или «приведенный продольный импульс» x , определяется, согласно Фейнману [164], как

$$x_3 \equiv p_{3L}/p_{3L \max}. \quad (10.2.13)$$

Теперь из (10.2.9) находим, что максимальная величина p_{3L} возникает, когда $M^2 \rightarrow 0$, и тогда

$$x_3 \approx 2p_{3L}/\sqrt{s} \text{ или } x_3 \approx 1 - M^2/s. \quad (10.2.14)$$

(Хотя на самом деле минимальное значение M_{min}^2 определяется массой легкой частицы, которая может образоваться в системе X , и поэтому $M_{min}^2 > 0$.)

Иногда переменная x определяется с помощью (10.2.14), а не (10.2.13), однако в этом случае уравнения будут эквивалентны только в том смысле, что $m_{1,2,3}$ и $|p_{3T}|$ малы и ими можно пренебречь по сравнению с s и M^2 . Ясно, что $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. В случае, если $x_3 \approx 1$, т. е. когда частица 3 уносит большую часть (или почти весь) импульс частицы 1, можно сказать, что частица 3 — фрагмент частицы 1; в противоположном случае, т. е. когда $x_3 \approx -1$, частица 3 — фрагмент частицы 2 (см. рис. 10.3). «Центральная область», где $x_3 \approx 0$, характеризуется тем, что частица 3 почти неподвижна в с.ц.м. и, следовательно, не связана прямо с частицами 1 и 2. Ниже это будет сформулировано несколько более точно. Из (10.2.10) и (10.2.14) имеем

$$t \rightarrow -\mu_3^2/x_3, \quad (10.2.15)$$

и, таким образом, s , x_3 и p_{3T}^2 образуют полный набор независимых переменных.

Другой обычно используемой переменной является быстрота, определенная как [373]

$$y_3 \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_3 + p_{3L}}{E_3 - p_{3L}} \right). \quad (10.2.16)$$

из которой получаем с помощью (10.2.17)

$$\sinh y_3 = p_{3L}/\mu_3; \quad \cosh y_3 = E_3/\mu_3. \quad (10.2.17)$$

Следовательно, вектор p_3 имеет следующие компоненты:

$$p_3 = (\mu_3 \cosh y_3; \quad p_{3T}, \mu_3 \sinh y_3). \quad (10.2.18)$$

Преимущество этой переменной перед другими состоит в том, что при лоренцевом сдвиге вдоль оси z , характеризуемом приведенной скоростью v (мы используем обычные обозначения: $c = 1$, $\beta \equiv v$, $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$), импульс p_3 преобразуется как

$$p_3 = (E_3, p_{3T}, p_{3L}) \xrightarrow{\text{преобразование Лоренца}} (\gamma(E_3 + vp_{3L}), p_{3T}, \gamma(p_{3L} + vE_3)), \quad (10.2.19)$$

однако если эти преобразованные величины подставить в (10.2.16), то

$$y_3 \xrightarrow{\text{преобразование Лоренца}} y_3 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right). \quad (10.2.20)$$

Таким образом, быстрота обладает очень простыми трансформационными свойствами при сдвиге вдоль направления движения налетающих частиц. В самом деле, частица с массой покоя m , движущаяся вдоль оси z со скоростью v , имеет $E = \gamma m$, $p_L = \gamma m v$ и, следовательно,

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \xrightarrow{v \ll 1} v,$$

и в нерелятивистском пределе $v \ll c \equiv 1$ быстрота переходит в скорость (этим и объясняется ее название). Однако в отличие от скорости, значения быстроты просто складываются подобно (10.2.20), даже в релятивистском случае.

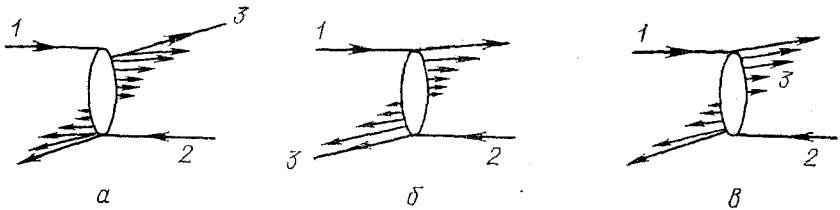


Рис. 10.3. Различные способы образования частицы 3:

a — как фрагмента частицы 1; *б* — как фрагмента частицы 2; *в* — в центральной области, где она непосредственно не связана ни с одной из налетающих частиц 1 и 2

В системе центра масс

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_1 + p_z}{E_1 - p_z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(E_1 + p_z)^2}{E_1^2 - p_z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(E_1 + p_z)^2}{m_1^2} \right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{m_1^2} \right), \end{aligned} \quad (10.2.21)$$

и затем, используя (10.2.1) и (10.2.4) и, кроме того, $y_2 \rightarrow (1/2) \ln (m_2^2/s)$, получаем

$$y_1 - y_2 \rightarrow \ln (s/m_1 m_2), \text{ или } s \rightarrow m_1 m_2 \exp (y_1 - y_2). \quad (10.2.22)$$

Таким же образом из (10.2.15) и (10.2.2) в с.ц.м. находим, что

$$y_3 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(E_3 + p_{3L})^2}{\mu_3^2} \right), \quad (10.2.23)$$

а так как из (10.2.8) и (10.2.7) следует, что предельные значения (которые возникают, когда $M^2 \rightarrow 0$) есть $E_3 \approx \sqrt{s}/2$, $p_{3L} \approx \pm \sqrt{s}/2$, приходим к

$$y_{3 \max} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{\mu_3^2} \right), \quad y_{3 \min} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{\mu_3^2} \right) \quad (10.2.24)$$

и, таким образом, область значений y_3 является следующей:

$$Y_3 \equiv y_{3 \max} - y_{3 \min} = \ln (s/\mu_3^2). \quad (10.2.25)$$

Максимальное значение возникает, когда частица 3 уносит весь импульс частицы 1, а минимальное значение — когда она уносит весь импульс частицы 2, как это показано на рис. 10.3, *a*, *б*, в то время как

значение $y_3 = 0$ соответствует тому, что частица 3 покоится в системе центра масс реакции. Иногда оказывается удобным ввести приведенную быстроту

$$\tilde{y}_3 \equiv 2y_3/Y_3, \quad (10.2.26)$$

которая подобно x_3 изменяется в пределах $-1 \leq \tilde{y}_3 \leq 1$. Однако \tilde{y}_3 и x_3 не одинаковы, за исключением трех точек: $-1, 0$ и $+1$; так как, когда $s \rightarrow \infty$, все частицы, чьи импульсы $|p_{3L}| \neq \infty$, движутся по направлению к $x = 0$. Сдвиг из с.ц.м. в лабораторную систему (где частица 2 покоится) заключается единственно в замене [см. (10.2.20)]

$$y_3 \rightarrow y_3 + (t/2) \ln(s/\mu_3^2), \quad (10.2.27)$$

как это показано на рис. 10.4, а. Из (10.2.10) и (10.2.11) следует, что y_3 связана с s , t , u и M^2 посредством

$$y_3 \rightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u}{t} \right) \rightarrow \ln \left(\frac{M^2 - s - t}{t} \right). \quad (10.2.28)$$

Таким образом, величины s , y_3 , p_{3T}^2 образуют другой полный набор независимых переменных для одночастичной инклюзивной реакции.

10.3. Инклюзивные сечения

Формула (1.8.5) представляет собой выражение для сечения процесса $1 + 2 \rightarrow n$ и дает в расчете на единичный падающий поток частиц вероятность образования n -частичного конечного состояния; в выражении (1.8.7) мы просуммировали эти сечения для того, чтобы получить полное сечение $\sigma_{12 \rightarrow all}^{tot} \equiv \sigma_{12 \rightarrow all}$. Сечение образования, по крайней мере одной частицы типа 3, плюс все, что угодно, дается формулой

$$\sigma_{12 \rightarrow 3X} = \frac{1}{4q_s \sqrt{s}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} d\Phi_{n+n_3} \langle p'_1 \dots p'_n, p_3^1 \dots p_3^{n_3} | A | p_1 p_2 \rangle, \quad (10.3.1)$$

где p_3^l при $l = 1, 2, \dots, n_3$ — импульсы n_3 -частиц типа 3 в конечном состоянии; p'_1, \dots, p'_n — импульсы других n -частиц, которые также образовались в данном конечном состоянии ($n + n_3 \geq 2$). Таким образом, вероятность, деленная на единственный поток падающих частиц, детектирования частицы типа 3 в элементе фазового объема d^3p_3

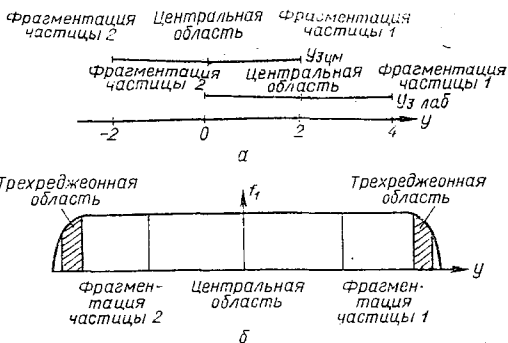


Рис. 10.4. а — Переход из лабораторной системы, где частица 2 покоится, в систему центра масс при полной быстрой V равной 4; переход сводится к замене $U_{3л аб}$ на $U_{3л} = U_{3л аб} - 2$. б — Различные области пространства быстрой, которые будут обсуждаться в дальнейшем

(т. е. в элементе телесного угла $d\Omega$ с импульсами между p_3 и $p_3 + dp_3$) дается выражением [ср. (1.8.17)]

$$\frac{d^3\sigma}{d^3p_3} = \frac{1}{4q_s V_s} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \int d\Phi_{n+n_3} \sum_{l=1}^{n_3} \delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}'_l) |\langle |A| \rangle|^2, \quad (10.3.2)$$

где просуммировано по всем n_3 -частицам типа 3 в конечном состоянии. Однако полученное выражение зависит от системы координат и вместо него желательно, используя инвариантность $d^3p/2E$ $(2\pi)^3$ [показанную в (1.2.7)], определить инвариантное одночастичное инклюзивное сечение

$$f_1^{12 \rightarrow 3X}(\mathbf{p}_3, s) \equiv 16\pi^3 E_3 d^3\sigma/d^3p_3. \quad (10.3.3)$$

Это выражение можно также переписать в терминах других переменных. Например, используя $d^3p_3 = \pi |\mathbf{p}_3| d|p_3|^2 d\cos\theta$ с учетом (10.2.10) и (10.2.7), получим

$$f_1 = 16\pi^3 \frac{2p_z \sqrt{s}}{\pi} \frac{d^2\sigma}{dt dM^2} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 16\pi^2 s \frac{d^2\sigma}{dt dM^2} \quad (10.3.4)$$

или, написав $d^3p_3 = \pi dp_{3T}^2 dp_{3L}$ и заметив из (10.2.18), что

$$\frac{dp_{3L}}{dy_3} = \mu_3 \frac{d(\sinh y_3)}{dy_3} = \mu_3 \cosh y_3 = E_3,$$

получим

$$f_1 = 16\pi^2 \frac{d^2\sigma}{d(p_{3T}^2 dy)}. \quad (10.3.5)$$

Или, так как из (10.2.14), (10.2.17) и (10.2.3) следует

$$\frac{dx_3}{dy_3} = \frac{2\mu_3}{\sqrt{s}} \cosh y_3 = \frac{2E_3}{\sqrt{s}} = \left(x_3^2 + \frac{4\mu_3^2}{s} \right)^{1/2},$$

то находим

$$f_1 = 16\pi^2 \left(x^2 + \frac{4\mu_3^2}{s} \right)^{1/2} \frac{d^2\sigma}{dx d(p_{3T}^2)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 16\pi^2 x_3 \frac{d^2\sigma}{dx_3 d(p_{3T}^2)}. \quad (10.3.6)$$

Все эти выражения (10.3.3)—(10.3.6) используются в литературе.

Полное одночастичное инклюзивное сечение равно

$$\int f_1(\mathbf{p}_3, s) \frac{d^3p_3}{16\pi^3 E_3} = \frac{1}{4q_s V_s} \sum_{n+n_3=2}^{\infty} \int d\Phi_{n+n_3} \sum_{l=1}^{n_3} \int d^3p_3 \times \\ \times \delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}'_l) |\langle |A| \rangle|^2 = \sum_{n_3=1}^{\infty} n_3 \sigma(1+2 \rightarrow n_3 + X'), \quad (10.3.7)$$

где $\sigma(1+2 \rightarrow n_3 + X')$ — полное сечение образования n_3 -частиц типа 3 плюс X' , которое (X') представляет все, что еще образуется в реакции помимо частиц типа 3. (Таким образом, σ дается выражением, (10.3.1), просуммированным по n , но не по n_3). Вес, с которым входит каждое n_3 , возникает как следствие дополнительного суммирования

по l в (10.3.2). Итак, если мы введем определение средней множественности частиц типа 3

$$\langle n_3 \rangle = \frac{\sum_{n_3=0}^{\infty} n_3 \sigma(1+2 \rightarrow n_3 + X')}{\sum_{n_3=0}^{\infty} \sigma(1+2 \rightarrow n_3 + X')} = \frac{\sum_{n_3=0}^{\infty} n_3 \sigma(1+2 \rightarrow n_3 + X')}{\sigma_{12 \rightarrow all}^{tot}}, \quad (10.3.8)$$

то в таком случае

$$\int f_1(\mathbf{p}_3, s) \frac{d^3 p_3}{16\pi^3 E_3} = \langle n_3 \rangle \sigma_{12}^{tot}, \quad (10.3.9)$$

и, следовательно, полное инклюзивное сечение равно полному сечению, умноженному на среднюю множественность. Физическая причина этого состоит, конечно, в том, что если детектирующая аппаратура представляет собой установку, которая регистрирует события, когда образуется хотя бы одна частица типа 3, то те события, в которых наблюдаются две частицы типа 3, нужно считать дважды и т. д. Этот многократный счет приводит к возникновению в инклюзивных сечениях многих специфических свойств.

Иногда удобно ввести

$$\rho_1(\mathbf{p}_3, s) \equiv f_1(\mathbf{p}_3, s) / \sigma_{12}^{tot}(s), \quad (10.3.10)$$

так что

$$F_1(s) \equiv \int \rho_1(\mathbf{p}_3, s) \frac{d^3 p_3}{16\pi^3 E_3} = \langle n_3(s) \rangle. \quad (10.3.11)$$

Эмпирически было найдено (рис. 10.5), что при больших значениях $\langle n_3 \rangle$ и s

$$\langle n_3(s) \rangle \approx A + B \ln s.$$

Это соотношение вследствие $\sigma_{12}^{tot} \approx \text{const}$, означает, что $\int f_1 d^3 p_3 / 16\pi^3 E_3$ возрастает с увеличением энергии как $\ln s$. Итак, с увеличением энергии соударения все меньшая ее доля идет на образование новых частиц, тогда как основная часть уносится в виде кинетической энергии частиц конечного состояния. Ниже мы увидим, как это можно было бы объяснить.

Таким же образом можно определить двухчастичные инклюзивные распределения. Для этого нужно взять вероятность, деленную на единичный поток, образования в реакции $1+2 \rightarrow 3+4+X$ частицы типа 3 в элементе фазового объема ($\sim d^3 p_3$) и частицы типа 4 в элементе фазового объема ($\sim d^3 p_4$):

$$f_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \equiv 4(2\pi)^6 E_3 E_4 \frac{d^3 \sigma}{d^3 p_3 d^3 p_4} = \frac{1}{4q_s \sqrt{s}} \times \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \sum_{n_4=1}^{\infty} d\Phi_{n+n_3+n_4} \sum_{l=0}^{n_4} 2E_3 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}'_l) \sum_{m=1}^{n_4} 2E_4 (2\pi)^3 \times \\ \times \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}'_m) |\langle p'_1 \dots p'_n; p_3^1 \dots p_3^{n_3}; p_4^1 \dots p_4^{n_4} | A | p_1 p_2 \rangle|^2. \quad (10.3.12)$$

Совершая процедуру, подобную (10.3.7), получим

$$\int f_2(p_3, p_4, s) \frac{d^3 p_3}{16\pi^3 E_3} \frac{d^3 p_4}{16\pi^3 E_4} = \sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + X') +$$

$$+ 2\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 3 + 4 + X') + 2\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 4 + X') +$$

$$+ 4\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 3 + 4 + 4 + X') + \dots \equiv \langle n_3 n_4 \rangle \sigma_{12}^{tot}(s), \quad (10.3.13)$$

где X' не включает в себя частицы типа 3 и 4 и где $\langle n_3 n_4 \rangle$ — среднее от произведения множественностей частиц 3 и 4. Предполагается, что частицы 3 и 4 различного типа (например, под частицей 3 можно по-

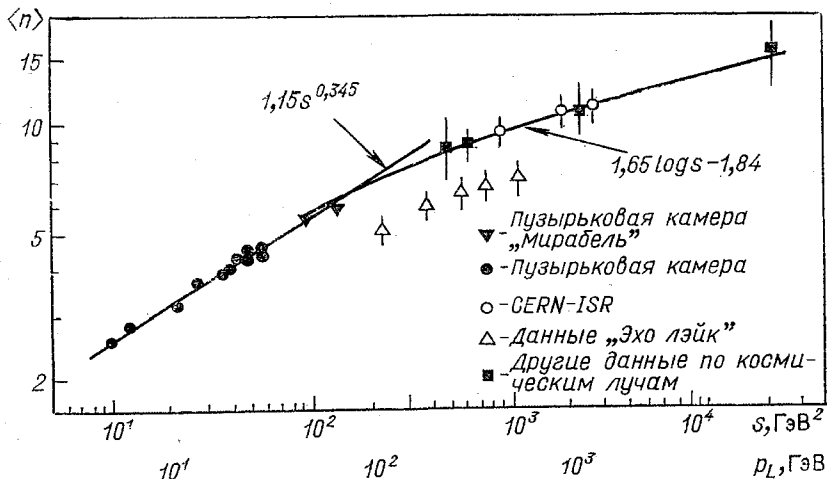


Рис. 10.5. Средняя множественность заряженных частиц $\langle n \rangle$ в протон-протонных столкновениях в зависимости от s .

Видно, что множественность возрастает логарифмическим образом. Рисунок взят из работы Моррисона [312]

нимать пионы, а под частицей 4 — протоны или 3 могут быть отрицательно заряженными частицами, а 4 — положительно заряженными). Если же частицы 3 и 4 являются частицами одинакового типа, то

$$\int f_2(p_3, p_4, s) \frac{d^3 p_3}{16\pi^3 E_3} \frac{d^3 p_4}{16\pi^3 E_4} = 2\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 3 + X') +$$

$$+ 6\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 3 + 3 + X') + \dots \equiv \langle n_3(n_3 - 1) \rangle \sigma_{12}^{tot}(s), \quad (10.3.14)$$

так как если в данном событии содержится n_3 частиц типа 3, то имеется n_3 различных способа выбрать первую частицу и $(n_3 - 1)$ способа, чтобы выбрать вторую.

Аналогично (10.3.10) можно определить величину

$$\rho_2(p_3, p_4, s) \equiv f_2(p_3, p_4, s) / \sigma_{12}^{tot}(s), \quad (10.3.15)$$

и, комбинируя (10.3.13) и (10.3.14), получим

$$F_2(s) \equiv \int \rho_2 \frac{d^3 p_3}{16\pi^3 E_3} \frac{d^3 p_4}{16\pi^3 E_4} = \langle n_3 n_4 - \delta_{34} n_3 \rangle. \quad (10.3.16)$$

Эти результаты легко обобщить на случай инклюзивных распределений образования любого числа типов частиц m ; в процессе $1+2 \rightarrow 3+4+\dots+(m+2)+X$, для которого в случае, если $3, 4, \dots, (m+2)$ — одинаковые частицы:

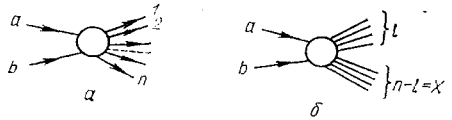
$$F_m(s) \equiv \int \rho_m \prod_{i=3}^{m+2} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \langle n_3(n_3-1) \dots (n_3-m+1) \rangle, \quad (10.3.17)$$

причем

$$\rho_m(p_3 \dots p_{m+2}, s) \equiv \frac{1}{\sigma_{tot}^{10.1}} (16\pi^3)^m E_3 \dots E_{m+2} \frac{d^3 m \sigma}{d^3 p_3 \dots d^3 p_{m+2}}, \quad (10.3.18)$$

Так как большая часть частиц, образовавшихся в конечном состоянии X , ненаблюдаема в эксперименте, можно было бы думать, что эти инклюзивные измерения должны всегда давать меньше информации о процессе рассеяния, чем эксклюзивные измерения, однако в действительности это не так.

Рис. 10.6. a — n -частичное инклюзивное сечение. b — Вклад n -частичного конечного состояния в l -частичное инклюзивное сечение



Напишем эксклюзивное сечение процесса $a + b \rightarrow 1+2+\dots+n$ (рис. 10.6) в виде

$$(16\pi^3)^n E_1 \dots E_n d^3 n \sigma_{ex} / d^3 p_1 \dots d^3 p_n.$$

Однако если наблюдаем, скажем, только l из них, то инклюзивное сечение $a + b \rightarrow l + X$ равно

$$(16\pi^3)^l E_1 \dots E_l \frac{d^3 l \sigma^{ln}}{d^3 p_1 \dots d^3 p_l} = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{(n-l)!} \int (16\pi^3)^l E_1 \dots E_l \times \\ \times \frac{d^3 n \sigma_{ex}}{d^3 p_1 \dots d^3 p_n} d^3 p_{l+1} \dots d^3 p_n, \quad (10.3.19)$$

если считаем все n частиц одинаковыми. Итак, как и ожидалось, инклюзивные сечения могут быть получены из эксклюзивных. Однако если делать наоборот, то данное n -частичное эксклюзивное сечение может быть получено из всех $(n+l)$ инклюзивных сечений, так как

$$(16\pi^3)^n E_1 \dots E_n \frac{d^3 n \sigma_{ex}}{d^3 p_1 \dots d^3 p_n} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int (16\pi^3)^n E_1 \dots E_n \times \\ \times \frac{d^3 (n+l) \sigma^{ln}}{d^3 p_1 \dots d^3 p_{n+l}} d^3 p_{n+1} \dots d^3 p_{n+l}. \quad (10.3.20)$$

Пояснения даны на примере $n=3$ (рис. 10.7): берем трехчастичный инклюзивный процесс и затем вычитаем из него все те процессы, где образуется по меньшей мере четыре частицы, вспоминая при этом, что

из-за тождественности частиц пятичастичное эксклюзивное сечение умножается на 2, когда считается его вклад в трехчастичное инклюзивное сечение, и т. д.

Следовательно, полный набор инклюзивных сечений содержит точно ту же самую информацию, что и полный набор эксклюзивных сечений. Конечно, многочастичные инклюзивные сечения так же трудны для измерений и анализа, как и многочастичные эксклюзивные сечения.

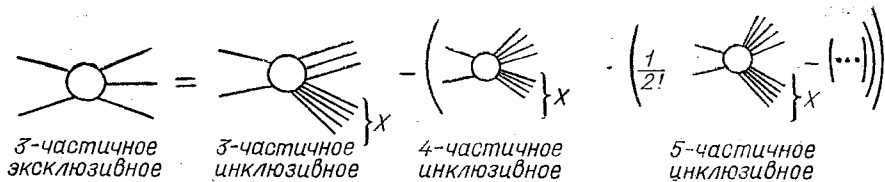


Рис. 10.7. Трехчастичное эксклюзивное сечение, выраженное через трех- и более частичные инклюзивные сечения, как было получено в формуле (10.3.20)

ния, и поэтому на практике малочастичные инклюзивные реакции дают дополнительную информацию о малочастичных эксклюзивных сечениях.

Следующий шаг — вывод теоремы Мюллера, которая позволит сделать реджевские предсказания для этих инклюзивных распределений.

10.4. Обобщенная оптическая теорема Мюллера

В разд. 1.9, а графически на рис. 1.6 мы дали вывод оптической теоремы, связывающей полное сечение $\sigma(12 \rightarrow X)$ с мнимой частью амплитуды упругого рассеяния вперед $A^{el}(12 \rightarrow 12)$. Мюллер [314] получил обобщение этого результата, которое является основой реджевских предсказаний для инклюзивных распределений. Его результат (рис. 10.8) гласит:

$$f_1(\mathbf{p}_3, s) = \frac{1}{2q_s \sqrt{s}} \text{Disc}_X \{A(12\bar{3})\} \rightarrow \frac{1}{s} \text{Disc}_X \{A(12\bar{3})\}, \quad (10.4.1)$$

где $A(12\bar{3})$ — амплитуда процесса $1 + 2 + \bar{3} \rightarrow 1' + 2' + \bar{3}'$.

В качестве первого шага используем соотношение полноты для величины $\Sigma |A(12 \rightarrow 3X)|^2$. На втором шаге используем кроссинговое свойство амплитуды, изложенное в разд. 1.6, об аналитическом продолжении амплитуды, с помощью которого выходящая частица 3 заменяется входящей частицей $\bar{3}$; затем используется соотношение унитарности (1.9.3), чтобы связать инклюзивное сечение со скачком амплитуды упругого рассеяния вперед процесса $1 + 2 + \bar{3} \rightarrow 1 + 2 + \bar{3}$ по переменной

$$M_X^2 = M^2 = (p_1 + p_2 - p_3)^2 = s_{12\bar{3}}.$$

Здесь

$$\text{Disc}_X \{A(12\bar{3}; s_{12\bar{3}}, s, t)\} \equiv \frac{1}{2i} A(12\bar{3}; s_{12\bar{3}} + i\epsilon, s, t) - \\ - A(12\bar{3}; s_{12\bar{3}} - i\epsilon, s, t), \quad (10.4.2)$$

т.е. скачок берется на разрезе от точки ветвления в плоскости $s_{12\bar{3}}$, однако при этом необходимо находиться по одну и ту же сторону от разрезов по переменным s и t . Поскольку конечное состояние должно быть идентичным начальному, то мы должны иметь $t_{11'} = t_{22'} = t_{33'} = 0$ [где $t_{11'} \equiv (p_1 - p_{1'})^2$ и т. д.] точно так же, как необходимо, чтобы $t = 0$ в выражении (1.9.6).

$$f_t = \frac{1}{4q_s \sqrt{s}} \sum_X \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \circ \text{---} \\ 2 \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 3 \\ \text{---} X \end{array} \right)^2 = \frac{1}{4q_s \sqrt{s}} \sum_X \left(\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} A \\ \text{---} X \\ \text{---} A^+ \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 3 \\ \text{---} 3' \\ \text{---} 1' \\ \text{---} 2' \end{array} \right) = \\ = \frac{1}{4q_s \sqrt{s}} \sum_X \left(\begin{array}{c} \bar{3} \\ \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} A \\ \text{---} X \\ \text{---} A^+ \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bar{3}' \\ \text{---} 1' \\ \text{---} 2' \end{array} \right) = \frac{1}{2q_s \sqrt{s}} \text{Disc}_X \left(\begin{array}{c} \bar{3} \\ \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \bar{3}' \\ \text{---} 1' \\ \text{---} 2' \end{array} \right)$$

Рис. 10.8. Вывод теоремы Мюллера:

a — Определение функции f_t , где множитель $4q_s \sqrt{s}$ имеет смысл потока (1.8.4). *б* — Для того чтобы получить это представление используется соотношение полноты, тогда как рис. *в* получается с помощью кроссинга частиц 3 и 3', а рис. *г* возникает как условие унитарности для амплитуды $3 \rightarrow 3$. (Множитель 2 появляется как следствие определения (10.4.2))

Очевидная трудность, связанная с этим выводом оптической теоремы, не показанная на рис. 1.6, состоит в том, что мы должны делать аналитическое продолжение по p_3 , чтобы получить нефизическую амплитуду рассеяния $A(12\bar{3})$. Поэтому мы не можем быть уверены в том, что не будет изменяться при этом скачок. Скачок (10.4.2) через разрез по переменной M^2 берется по одну и ту же сторону от разрезов по переменной $s \equiv s_{12}$, в то время как следует из рис. 10.8, *б*, что мы находимся выше порогового разреза по этой переменной в амплитуде A , однако ниже него в A^+ . Независимость от скачков нормальных порогов, упомянутая в разд. 9.3, гарантирует, что скачок по одной переменной не оказывает никакого влияния, когда берется скачок по другой переменной, однако аномальные пороги и т. п. могли бы испортить результат. Однако общее мнение специалистов склоняется к тому, что это будет маловероятным (см. [71, 72, 336]).

Тем не менее ясно, что обобщение более трудно использовать, чем обычную оптическую теорему, потому что в (1.9.6) полное сечение при заданных p_1 и p_2 связывается с упругой амплитудой при тех же самых физических значениях p_1 и p_2 , в то время как соотношение (10.4.1) связывает инклюзивное распределение для процесса $1+2 \rightarrow 3+X$ с (в любом случае неизмеримым) процессом $1+2+\bar{3} \rightarrow 1+2+\bar{3}$ в нефизи-

ческой области $p_{\bar{3}}$. Однако, даже если мы не можем измерить \bar{A} (12 $\bar{3}$), можно, конечно, написать для нее реджевскую параметризацию, так же как мы использовали реджевские параметры для A^{el} (12), чтобы предсказать поведение $\sigma_{12}^{tot}(s)$ в (6.8.4). Это является именно тем, что позволяет использовать инклюзивные реакции для проверки основ реджевской теории, как будет видно в следующих разделах.

До сих пор мы пренебрегали спинами частиц. Для того чтобы получить более точные выражения, нужно провести усреднение по всем возможным спиральностям частиц 1 и 2 и просуммировать по спиральностям частицы 3. Таким образом, (10.3.2) дает

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{p}_3, s) &= \frac{1}{4q_s \sqrt{s} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \sum_X \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} |A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(12 \rightarrow 3 + X)|^2 = \\ &= \frac{1}{2q_s \sqrt{s} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \text{Disc}_X [\langle \mu_1 \mu_2 \mu_3 | A(12\bar{3} \rightarrow \\ &\quad \rightarrow 12\bar{3}) | \mu_1 \mu_2 \mu_3 \rangle] \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

при помощи оптической теоремы (10.4.1). До сих пор, однако, сделано довольно мало измерений поляризации и матриц плотности в инклюзивных реакциях. Поэтому в дальнейшем будем просто пренебрегать спином, подразумевая, строго говоря, что в каждой реджеонной вершине проведено усреднение по всевозможным различным спиральностям. Если, например, частица 3 имеет спин 1/2, то ее поляризация P_{3y} дается следующим выражением [ср. (4.2.22)]:

$$\begin{aligned} P_{3y} f_1(\mathbf{p}_3, s) &= \frac{1}{4q_s \sqrt{s} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \times \\ &\times \sum_{\mu_1 \mu_2} \text{Im} \{ \text{Disc}_X [\langle \mu_1 \mu_2 - A | (12\bar{3} \rightarrow 12\bar{3}) | \mu_1 \mu_2 + \rangle] \}, \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

где $\pm \equiv \pm 1/2$. Инклюзивные матрицы плотности могут быть определены подобно (4.2.10) и ясно, что они будут давать информацию о спиральной зависимости связей реджеонов с частицами [198, 331].

10.5. Фрагментация и однореджеонный предел

В области, где x_3 или $\tilde{y}_3 \approx 1$, т. е. частица 3 почти покоится в лоренцевой системе частицы 1, можно рассматривать частицу 3 как фрагмент частицы 1 (см. рис. 10.3, а). Эта область называется «областью фрагментации» частицы 1, и инклюзивное распределение иногда пишется как $f_1(1 \rightarrow \bar{3})$, т. е. $1 \rightarrow 3$ на частице 2. В самом деле, вполне возможна ситуация, когда 3 имеет точно такие же квантовые числа, что и 1, и поэтому не происходит обмена никакими квантовыми числами. Частое появление частицы пучка в конечном состоянии с большим p_L и малым p_T , т. е. летящей почти вперед, называется «эффектом лидирующей частицы».

В этой области будем рассматривать случай высоких энергий при $s = s_{12} \rightarrow \infty$, тогда $t = t_{13}$ фиксированы и малы. Из (10.2.14) следует, что при фиксированном x_3 , когда $M^2 \rightarrow \infty$, отношение M^2/s остается неизменным. Теперь M^2 является полной энергией процесса упругого рассеяния abc , изображенного на рис. 10.8, z , и тогда при больших M^2 и малых t предполагается картина с обменом единственным полюсом Редже, показанная на рис. 10.9, a . Таким образом, можно написать

$$f_1(1 \rightarrow 3; p_3, s) = \sum_i \gamma_i(t, M^2/s) (M^2/s_0)^{\alpha_i(0)-1}, \quad (10.5.1)$$

где проведено суммирование по всем реджеонам, которыми можно обменяться. Аргумент α_i равен нулю, потому что всегда $t_{22'} = 0$ для трехчастичного процесса рассеяния вперед. Это условие не нужно пу-

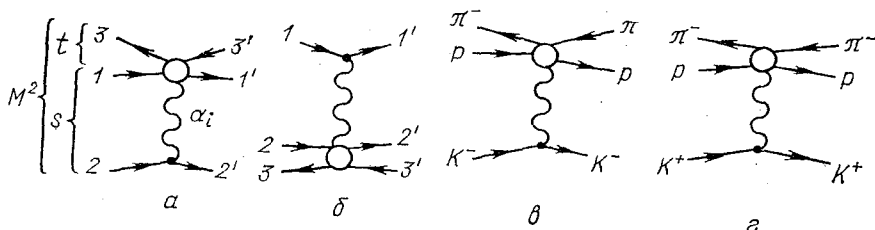


Рис. 10.9. a — Диаграмма с обменом реджеоном для скачка $\text{Disc}_x \{A(1\bar{2}\bar{3} \rightarrow 1\bar{2}\bar{3})\}$ в том случае, когда частица 3 находится в области фрагментации 1, т. е. когда величина $t_{13} = (p_1 - p_3)^2$ мала. $б$ — Аналогичная диаграмма, но когда 3 находится в области фрагментации 2. $в, г$ — Диаграммы Мюллера — Редже для реакций $\bar{K}^{\pm} p \rightarrow \pi^{\pm}$

тать с $t \equiv t_{13}$, которое дает фиксированную инвариантную массу квазичастицы ($\bar{1}\bar{3}$). Из подобия рис. 9.1, a и 9.1, $б$, а также (9.2.30) и (9.2.31) следует, что величина M^2/s определяет угол между плоскостями, содержащими ($\bar{1}\bar{3}$) и ($2\bar{3}$). В (10.5.1) s_0 является обычным масштабным фактором, который, как следует из рассмотрения рассеяния $2 \rightarrow 2$, должен быть $s_0 \approx 1 \text{ ГэВ}^2$. Мы предполагаем, что можно пренебречь возможным существованием реджевских разрезов, которые модифицировали бы (10.5.1), приводя к появлению факторов, содержащих $\ln M^2$.

Справедливость этой формулы требует выполнения условий

$$s, M^2 \text{ и } u = (p_2 - p_3)^2 \gg m_3^2, t \text{ и } s_0.$$

Итак, требуем, чтобы s , как обычно, было большим, а отношение $M^2/s = (1-x)$ — конечным. Кроме того, M^2 также должно быть большим, однако не слишком, так как когда $M^2 \rightarrow s$, то $x \rightarrow 0$ [а из (10.2.12) следует, что u становится малым] и мы уходим из области фрагментации. Очевидно, что для $x_3, \tilde{y}_3, \approx -1$, мы имеем процесс $2 \rightarrow 3$, т. е. частица 3 является фрагментом частицы 2 и возникает реджевская картина, показанная на рис. 10.9, $б$, и поэтому мы можем рассмотреть обе фрагментационные области. Однако ясно: чтобы можно было про-

вести вычисления, необходимо эти области хорошо отделить друг от друга; для этого, как будет показано (см. разд. 10.10), требуется, чтобы $Y = y_{max} - y_{min} > 4$ или, другими словами, чтобы $s > > 60 \text{ ГэВ}^2$ из (10.2.25).

В процессе упругого рассеяния доминирующим обменом должен являться обмен помероном P . Если $\alpha_P(0) \approx 1$, то имеем

$$f_1(p_3, s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \gamma_P(t, M^2/s). \quad (10.5.2)$$

Следовательно, подобно $\sigma_{12}^{tot}(s)$ инклюзивное сечение $f_1(p_3, s)$ должно быть приближенно независимым от s , когда $s \rightarrow \infty$, а t и M^2/s — фиксированы, т.е. f_1 должно обладать свойством «скейлинга».

Сечение называется «скейлинговым», если его численное значение не зависит от используемых энергетических единиц. Таким образом, $\sigma_{12}^{tot}(s)$ принимает значения, которые выражены как функция s , не зависят от единиц, в которых s измеряется. Это происходит только в том случае, когда $\sigma_{12}^{tot}(s)$ не зависит от s и приближенно справедливо при высоких энергиях. Подобным образом в (10.5.2) $f_1 = f_1(t, M^2/s)$ только тогда, когда f_1 , хотя и зависит от s при фиксированном M^2 (и наоборот) при любом изменении единиц, в которых s и M^2 измеряются, отношение M^2/s не будет меняться. Таким образом, только в этом случае f_1 — скейлинговая функция. Вообще говоря, это, конечно, несправедливо для (10.5.1).

Вывод о возможном скейлинге находится в согласии с предсказаниями Амати и др. [18, 19], Янга и соавт. [43] и Фейнмана [164]. Предсказание Янга основывалось на гипотезе о предельной фрагментации, т.е. что распределение частицы 3 в системе покоя частицы 1 при больших s должно не зависеть от s . Это происходило потому, что он рассматривал рассеиваемые частицы 1 и 2 как два лоренцево сжатых диска, проходящих друг через друга и при этом возбуждающихся с последующим распадом каждого диска. Так как σ^{el} , $\sigma^{tot} \rightarrow \text{const}$, силы взаимодействия между дисками, очевидно, не меняются при $s \rightarrow \infty$, и, таким образом, распад каждого диска должен приводить к ограниченному распределению (в его собственной системе покоя) без какого-либо многократного рассеяния. Точка зрения Фейнмана подобна той, которую имели Амати и его соавторы, и основана на наблюдении, что мультипериферическая и аналогичные модели (они будут обсуждаться в следующей главе) приводят к распределениям частицы 3 по x_3 и p_{3T} , которые перестают не зависеть от s , когда $s \rightarrow \infty$. Это согласуется с гипотезой Янга и с однородным пределом (10.5.2) для $x_3^2 \gg 4 \mu_3^2/s$, однако эти заключения справедливы и в других областях, в частности в области $x_3 = 0$, которая не будет рассматриваться в этом разделе.

Гипотеза о скейлинге приближенно выполняется во многих процессах. Например, в реакции $pp \rightarrow \pi^+ X$, показанной на рис. 10.10, мы видим, что f_1 не зависит от s в области фрагментации в диапазоне энергий s от 50 до 3000 ГэВ^2 . Конечно, $\sigma_{pp}^{tot}(s)$ не является строго постоянным при высоких энергиях, так что эффективное значение $\alpha_P(0) > 1$ и можно ожидать, что r_1 , определенное в (10.3.10), а не f_1 ,

должно быть распределением, в котором лучше наблюдается скейлинговое поведение. Однако, вообще говоря, экспериментальная информация, существующая в настоящее время, недостаточно точна, для того чтобы различить эти возможности.

Большое достоинство этого реджевского взгляда на скейлинг состоит в том, что с его помощью можно предсказать, как быстро наступает скейлинговое поведение [67,91] при условии, если пренебрегаем вкладом разрезов. Следующим членом в ряду (10.5.1) будет вклад от нормальных реджеонов $R = f, \omega, \rho, A_2$, которые все содержат

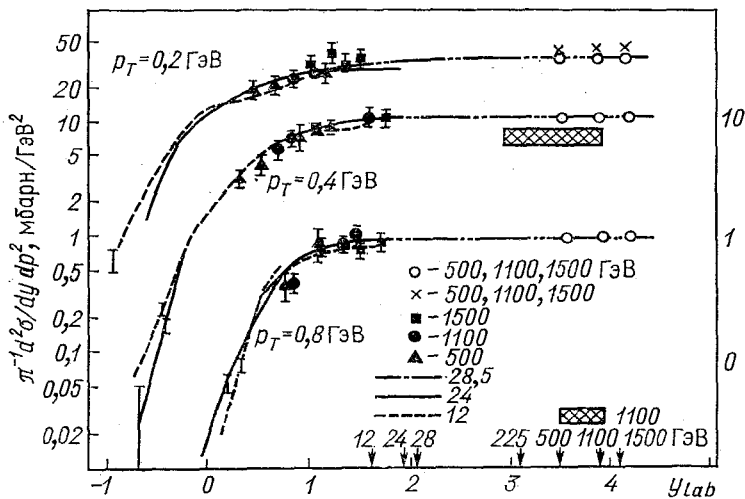


Рис. 10.10. Экспериментальные данные для реакции $pp \rightarrow \pi^+ X$ в области фрагментации.

Рисунок взят из работы [312]

$\alpha_R(0) \approx 0,5$ и приблизительно одинаковые вычеты вследствие обменного вырождения и, следовательно, если они все складываются (как в процессе $p \rightarrow \pi^-$, см. рис. 10.9, в), то получаем

$$f_1(p_3, s) = \gamma_P(t, M^2/s) + 4\gamma_R(t, M^2/s) (M^2/s_0)^{-1/2}. \quad (10.5.3)$$

Если теперь заменить 2 на $\bar{2}$ (т. е. K^- заменяется на K^+ , как на рис. 10.9, г), вклады ω и ρ изменят знаки, потому что они являются нечетными при зарядовом сопряжении, и окончательно будем иметь

$$f_1(1 \rightarrow \bar{3}) - f_1(1 \rightarrow 3) = 4\gamma_R(t, M^2/s) (M^2/s_0)^{-1/2}. \quad (10.5.4)$$

Сравнивая, например, $p \rightarrow \pi^-$ и $p \rightarrow \pi^+$, получаем, что $\gamma_R/\gamma_P \approx 1/3$ и необходимо иметь $s \approx 2000 \text{ ГэВ}^2$, для того чтобы скейлинг выполнялся не хуже, чем с 10%-ной погрешностью. Однако при рассмотрении двухчастичных процессов было найдено, что из-за дуальности могут

происходить многочисленные сокращения этих вкладов вторичных траекторий в экзотических процессах (см. разд. 7.5), т. е. если $1+2$ имеют экзотические квантовые числа, как, например, в K^+p , то скейлинг возникает значительно раньше в $\sigma_{12}^{tot}(s)$ при очень малых значениях s . Можно ожидать, что это справедливо и в инклюзивных реакциях, т. е. что ранний скейлинг возникает, если система $(12\bar{3})$ имеет экзотические квантовые числа, когда отсутствуют резонансы по M^2 . Это в действительности аналогично двухчастичному рассеянию только в том случае, если система $(1\bar{3})$ также является неэкзотической, и поэтому ее можно трактовать как квазичастицу. В связи с этим необходимо более систематическое исследование, которое мы отложим до разд. 10.6.

Поскольку доминируют полюса, а не разрезы, можно получить дополнительные ограничения на инклюзивные распределения из факторизации. Таким образом, вклад диаграммы на рис. 10.9, a можно выразить в форме

$$f_1(1 \rightarrow 3; \mathbf{p}_3, s) = \sum_i \gamma_{22}^i G_{1\bar{3}}^i(t, M^2/s) (M^2/s_0)^{\alpha_i(0)-1}, \quad (10.5.5)$$

где $\gamma_{22}^i = \gamma_{22}^i(t_{22} = 0)$ — вершина, дающая связь реджеона с системой $(\bar{2}\bar{2})$; $G_{2\bar{3}}^i$ — верхняя вершина. При $s \rightarrow \infty$ это переходит при $\alpha_P(0) = 1$ в

$$f_1(1 \rightarrow 3) \rightarrow \gamma_{22}^P G_{1\bar{3}}^P(t, M^2/s). \quad (10.5.6)$$

Из (6.8.4) также имеем

$$\sigma_{12}^{tot}(s) = \sum_i \gamma_{11}^i \gamma_{22}^i s^{\alpha_i(0)-1} \rightarrow \gamma_{11}^P \gamma_{22}^P, \quad (10.5.7)$$

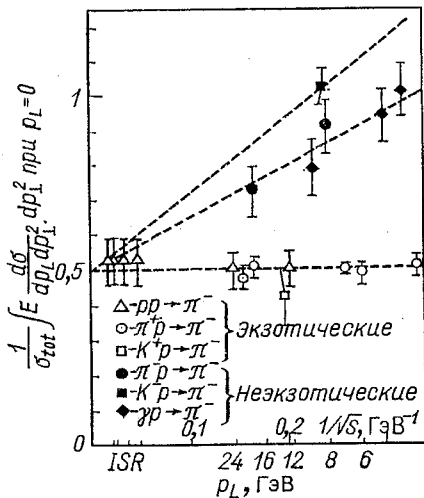
а из (10.3.10) следует

$$\rho_1(1 \rightarrow 3) \rightarrow G^P(t, M^2/s) / \gamma_{11}^P, \quad (10.5.8)$$

Рис. 10.11. Энергетическая зависимость ρ_1 [уравнение (10.5.7)], проинтегрированное по p_2^2 для различных процессов.

Видно, что рассматриваемая величина не зависит от вида частицы 2 по крайней мере для экзотических каналов. Рисунок взят из работы [309]

которое является независимым от частицы 2, и $\rho_1(1 \rightarrow 3)$ должно быть независимым от a при $s \rightarrow \infty$. Это утверждение можно проверить при конечных энергиях только в экзотических $(12\bar{3})$ процессах, в которых должно наблюдаться раннее наступление скейлинга, таких, как $p \rightarrow \pi^+$, $p \rightarrow \pi^-$, $p \rightarrow \pi^+$. Обнаружено, что ρ_1 для этих процессов на самом деле одинаковы (рис. 10.11).



Кроме того, вклады вторичных траекторий связываются с помощью обменного вырождения [88, 308]. Поэтому

$$f_1(p \rightarrow \pi^-) = \gamma_{\pi^+ \pi^+}^{\pi^+} G_{p\pi^+}^P + \gamma_{\pi^+ \pi^+}^f G_{p\pi^+}^f (M^2/s_0)^{-1/2} - \gamma_{\pi^+ \pi^+}^p G_{p\pi^+}^p (M^2/s)^{-1/2}, \quad (10.5.9)$$

где отрицательный знак последнего члена связан с тем, что система $(\pi^+ \pi^+ p)$ является экзотической [тогда как $(\pi^+ p)$ — неэкзотическая] и члены, отражающие вклады вторичных траекторий f и p , должны сокращаться. Однако из рассмотрения $\pi^+ \pi^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+$ известно, что $\gamma_{\pi^+ \pi^+}^f = \gamma_{\pi^+ \pi^+}^p$ [см. (7.5.2)] и поэтому также имеем

$$G_{p\pi^+}^p = G_{p\pi^+}^f. \quad (10.5.10)$$

Из аналогичного рассмотрения процессов $p \rightarrow \pi^-$ и $p \rightarrow \pi^-$ можно вывести

$$G_{p\pi^+}^f = G_{p\pi^+}^{\omega} = G_{p\pi^+}^{A_2},$$

и что все γ_{KK}^R являются одинаковыми и, следовательно,

$$f_1(p \rightarrow \pi^-) - f_1(p \rightarrow \pi^-) = 4\gamma_{KK}^R G_{p\pi^+}^R (M^2/s_0)^{-1/2}. \quad (10.5.11)$$

Для любого аналогичного процесса фрагментации можно написать

$$f_1(p \rightarrow \pi^-) = \gamma_{aa}^p G_{p\pi^+}^p + \sum_R \gamma_{aa}^R G_{p\pi^+}^R (M^2/s_0)^{-1/2}, \quad (10.5.12)$$

а так как из поведения полных сечений σ_{ap}^{tot} выводится значение γ_{aa}^R , то можно предсказать все $f_1(p \rightarrow \pi^-)$. Обнаружено, что это выполняется, например, для пучков $a = \gamma, K^-, \pi^-$.

Свойство факторизации оказывается много более полезным для инклюзивных реакций, чем для двухчастичных процессов, поскольку мишенью фактически является система $(\bar{1}\bar{3})$. Таким образом, даже если реально используемые мишени (частица 1) ограничиваются p (или n), мы можем все же изменять обе вершины на рис. 10.9, a , заменяя как налетающую частицу 2, так и детектируемую частицу 3.

Проверка факторизации указывает на то, что она довольно хорошо выполняется. Это представляется очень интересным, хотя стоит отметить, что экспериментальные данные не отличаются высокой точностью. Это можно частично объяснить тем, что мы ограничились областью $t_{22} = 0$, где более важны полюса, или это может быть результатом усиления полюсов разрезами (см. разд. 8.7ж).

10.6. Центральная область и двухреджеонный предел

В качестве следующего этапа рассмотрим область $x \approx 0$, где p_{3L} мало. Когда $s \rightarrow \infty$, имеем из (10.2.10) и (10.2.11)

$$t \rightarrow -\sqrt{s}(E_3 - p_{3L}), \quad u \rightarrow -\sqrt{s}(E_3 + p_{3L}), \quad (10.6.1)$$

т. е. $|t|$, $|u| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, однако величина

$$ut/s \rightarrow (E_3 - p_{3L})(E_3 + p_{3L}) = \mu_3^2 \quad (10.6.2)$$

является фиксированной. Итак, подобно η_{12} в (9.2.31) величина μ_3^2 представляет угол между плоскостью, содержащей частицы 1 и 3, и плоскостью, содержащей частицы 2 и 3. Величина $\mu_3^2 \leq 1$ ГэВ², вообще говоря, мала, поэтому требуется довольно большое значение s , чтобы получить большие $|t|$ и $|u|$, в частности, это особенно очевидно, если m_3 мало.

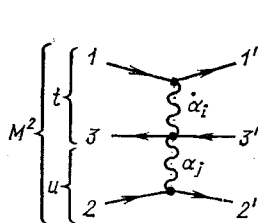


Рис. 10.12. Диаграмма Мюллера — Редже для центральной области (уравнение (10.6.3))

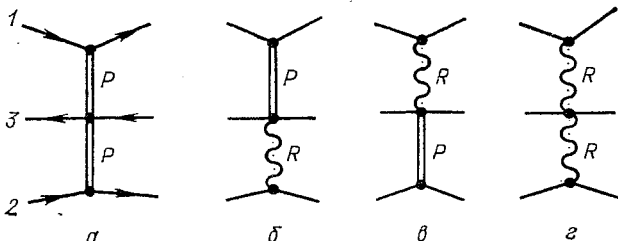


Рис. 10.13. Диаграмма Мюллера — Редже для центральной области:

рис. а дает скейлинговое поведение в асимптотической области, в то время как другие диаграммы дают поправки к скейлинговому поведению, поскольку они содержат обмены траекторией R

Двухреджеонная модель этой области показана на рис. 10.12 и дает

$$f_1(p_3, s) = \sum_{ij} \frac{1}{s} \gamma_{ij}(p_{3T}) \left| \frac{t}{s_0} \right|^{\alpha_i(0)} \left| \frac{u}{s_0} \right|^{\alpha_j(0)} \left(\frac{s_0}{\mu_3^2} \right), \quad (10.6.3)$$

где γ_{ij} представляет собой произведение трех вершин, а дополнительный фактор (s_0/μ_3^2) является произвольным, однако очень удобен, потому что, используя (10.6.2), мы затем получаем при $s \rightarrow \infty$

$$f_1(p_3, s) \rightarrow \sum_{i,j} (\gamma_{ij}(\mu_3^2) |t/s_0|^{\alpha_i(0)-1} |u/s_0|^{\alpha_j(0)-1}). \quad (10.6.4)$$

Если асимптотически доминирует вклад от P , то это приводит к фейнмановскому скейлингу (рис. 10.13, а)

$$f_1(p_3, s) \rightarrow \gamma_{PP}(\mu_3^2), \quad (10.6.5)$$

т. е. одночастичное инклюзивное сечение не зависит от s , t и u (рис. 10.14). Используя факторизацию, выражение (10.6.5) можно переписать в виде

$$f_1(p_3, s) \rightarrow \gamma_{11}^P \gamma_{33}^{PP}(\mu_3^2) \gamma_{22}^P \quad (10.6.6)$$

или, используя (10.3.10) и (10.5.7), получаем

$$\rho_1(p_3, s) \rightarrow \gamma_{33}^{PP}(\mu_3^2), \quad (10.6.7)$$

которое не зависит от частиц 1 и 2. Кроме того, так как из (10.2.28) следует $y_3 \rightarrow (1/2) \ln(u/t)$, то это означает, что $f_1(p_{3T}, y_3, s)$ не зависит от y_3 и s при малых y_3 , т. е. $d\sigma/dy_3$ при фиксированном p_{3T} имеет

плато в центральной области, как показано на рис. 10.4, б. Однако для того, чтобы оно возникло (в промежутке между областями фрагментации, каждая из которых имеет ширину $\Delta y \approx 2$ — см. разд. 10.10), необходимо, чтобы $Y_3 \equiv y_{3max} - y_{3min} > 4$. Таким образом, при $\mu_3^2 \approx 1$ ГэВ² это означает, что $s > 60$ ГэВ².

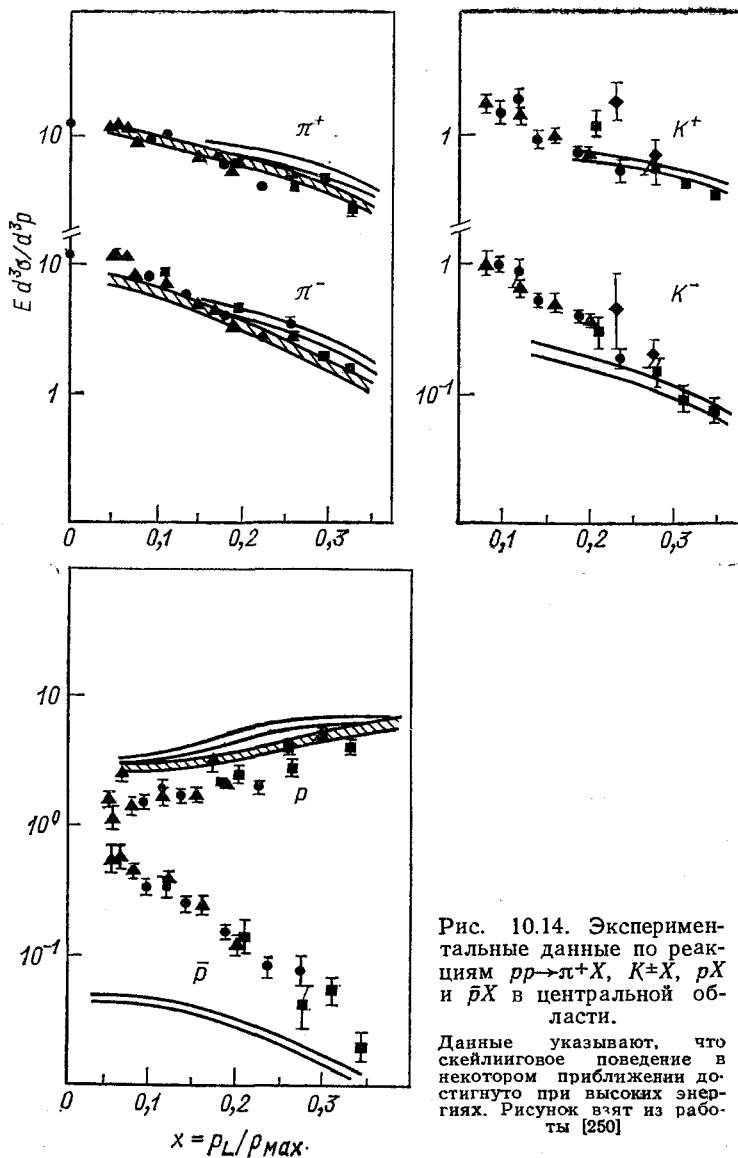


Рис. 10.14. Экспериментальные данные по реакциям $pp \rightarrow \pi^+ X, K^\pm X, pX$ и $\bar{p}X$ в центральной области.

Данные указывают, что скейлинговое поведение в некотором приближении достигнуто при высоких энергиях. Рисунок взят из работы [250]

Вторичные реджеоны $R (= f, \omega, \rho, A_2)$ с $\alpha_R(0) \approx 0,5$ приводят к поправкам к скейлингу:

$$f_1(p_3, s) = \gamma_{PP}(\mu_3^2) + \gamma_{PR}(\mu_3^2) \left| \frac{t}{s_0} \right|^{-1/2} + \gamma_{RP}(\mu_3^2) \left| \frac{u}{s_0} \right|^{-1/2} + \\ + \gamma_{RR}(\mu_3^2) \left| \frac{t}{s_0} \right|^{-1/2} \left| \frac{u}{s_0} \right|^{-1/2} \sim \gamma_{PP}(\mu_3^2) + \gamma_{PR}(\mu_3^2) \left(\frac{s}{s_0} \right)^{-1/4} + O(s^{-1/2}),$$

(10.6.8)

так как из (10.6.1) следует, что $t, u \sim \sqrt{s}$. Согласно Фербелу [162], подход к скейлингу как $\sim s^{-1/4}$ хорошо подтверждается в области вблизи $x = 0$, однако такое приближение к скейлингу значительно медленнее, чем в области фрагментации, где поправки убывают как $s^{-1/2}$. В реакции $pp \rightarrow \pi^\pm X$ сечение растет в зависимости от s вплоть до $s \approx 1000 \text{ ГэВ}^2$, а при больших энергиях появляется довольно стабильное плато (см. рис. 10.14), но сечение тем не менее продолжает довольно медленно возрастать. Для реакций $pp \rightarrow K^+, K^-, p$ или \bar{p} плато все еще четко не проявилось даже при энергиях CERN-ISR; итак, оказывается, что только очень легкий пион, возможно, показывает, что скейлинг возникает, да и то только при самых высоких энергиях, достигнутых на современных ускорителях.

Кажется вполне естественным, что все полные сечения возрастают с увеличением энергии при низких энергиях, так как очевидно, что с ростом энергии все более легко рождаются тяжелые частицы. Однако, как уже было замечено ранее, $\langle n \rangle \sim \ln s$ (см. разд. 10.3). Это поведение, если вспомнить (10.3.9), предполагает, что f_1 должно не зависеть от y_3 , так как $\sigma_{12}^{tot} \rightarrow \text{const}$ и область y_3 , по которой нужно проинтегрировать [см. (10.2.25)], возрастает как $\ln s$. Но в области фрагментации имеются положительные нескейлинговые члены, и поэтому в этой области должны быть отрицательные нескейлинговые члены, для того чтобы произошли сокращения в центральной области, ибо в противном случае мы не получим поведение $\langle n \rangle \sim \ln s$. К сожалению, этот эффект довольно трудно воспроизвести в реджевском подходе, потому что там ожидается, что нескейлинговые члены будут положительными (см. рис. 10.13, б, в, г) вследствие требований дуальности. Это происходит потому, что такие члены возникают из квадрата амплитуды реакции (рис. 10.15, а), которая должна быть положительной в случае, если в системе X возникают резонансы, и равняться нулю в противном случае, точно так же, как для вкладов вторичных траекторий в $\sigma_{12}^{tot}(s)$. Итак, подход к скейлингу в центральной области (10.6.8) должен происходить, как следует из вышеприведенного, в согласии с реджевской теорией.

Эта трудность привела Чана и др. [88] к предположению о существовании новой вакуумной траектории $Q [\alpha_Q(0) \approx 0,5]$ с отрицательным вычетом, так что диаграмма рис. 10.15, б дает отрицательный вклад $f_1 \sim -\gamma_{QP} |t/s_0|^{-1/2}$. Предполагается, что эта траектория описывает пороговые эффекты образования тяжелых частиц в центральной области. Однако в действительности факт, что большинство сечений

все еще растет, должен рассматриваться как свидетельство того, что подход Мюллера — Редже еще не полностью применим в центральной области.

Нормальные вторичные траектории R можно наблюдать, если взять разности сечений, такие, как показаны на рис. 10.16 для реакций

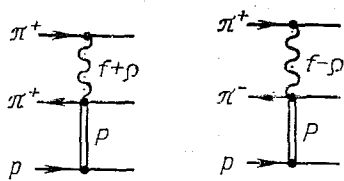
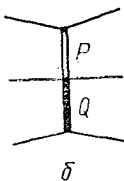
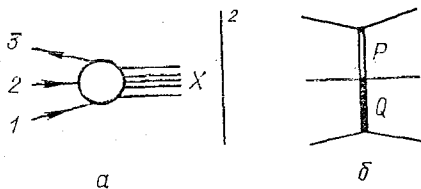


Рис. 10.15. a — Нефизическая амплитуда образования частиц, квадрат которой дает вклад в инклюзивное распределение. b — Обмен траекторией Q , которая введена для того, чтобы учесть пороговые эффекты

Рис. 10.16. Знаки вкладов диаграмм с обменом траекториями R , изображенных на рис. 10.13, b , для реакций $\pi^+ p \rightarrow \pi^\pm X$

$\pi^+ p \rightarrow \pi^\pm X$. Так как вычет ρ -траектории изменяет знак при замене $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$, то будем иметь

$$f(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ X) - f(\pi^+ p \rightarrow \pi^- X) = 2\gamma_{RP} \left| \frac{s}{s_0} \right|^{-1/4} \equiv \Delta(\pi^+ p \rightarrow \pi^\pm X). \quad (10.6.9)$$

Используя затем предположение о факторизации (обозначения см. на рис. 10.16), напомним

$$\gamma_{RP}(\pi^+ p \rightarrow \pi^- X) = \gamma_{\pi^+ \pi^+}^R + \gamma_{\pi^- \pi^-}^{RP} - \gamma_{pp}^P$$

и, вспомнив о дуальности, получим, что $\gamma_{\pi^- \pi^-}^{RP} = -\gamma_{\pi^+ \pi^+}^P$. В общем случае из $SU(3)$ и обменного вырождения для вычетов выводятся соотношения типа

$$\frac{\Delta(\pi^\pm p \rightarrow \pi^+ X)}{\Delta(\rho p \rightarrow \pi^+ X)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{\pi\pi}^P}{\gamma_{PP}^P} \pm \frac{\gamma_{\pi\pi}^R}{\gamma_{PP}^R} \right),$$

$$\frac{\Delta(K^\pm p \rightarrow \pi^+ X)}{\Delta(\rho p \rightarrow \pi^+ X)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_{KK}^P}{\gamma_{PP}^P} \pm \frac{\gamma_{KK}^R}{\gamma_{PP}^R} \right), \quad (10.6.10)$$

где разность сечений определена как $\Delta(12 \rightarrow 3X) \equiv f(12 \rightarrow 3X) - f(12 \rightarrow \bar{3}X)$. Эти соотношения хорошо выполняются даже при довольно низких энергиях [244]. Это предполагает, что выделение кинематического эффекта Q при $I = 0$ имеет смысл, даже если Q не может серьезно рассматриваться как реджевский полюс. Итак, это должно наблюдаться для части, которая соответствует обменам с $I = 0$ и которая до сих пор еще не вышла на свое асимптотическое поведение.

Так как в центральной области f_1 зависит от $\gamma_{ij}(\mu_3^2)$ [см. выражение (10.6.4)], где μ_3^2 определено в (10.2.2), и поскольку эксперименталь-

но обнаружено, что $f_1 \sim \exp(-4 p_{\perp}^2)$ при малых p_T (см. рис. 10.17), то можно ожидать, что

$$\gamma_{ij}(\mu_3^2) \sim \exp(-4\mu_3^2). \quad (10.6.11)$$

Итак, вычет должен сильно зависеть от массы образуемой частицы. Подстановка m_3^2 вместо μ_3^2 дает отношение выходов при образовании $\pi, K, p(\bar{p})$, а именно: $\pi, K, p(\bar{p})$ относятся друг к другу как 80:15:5 в процентном отношении, что находится по крайней мере в качественном согласии с экспериментом.

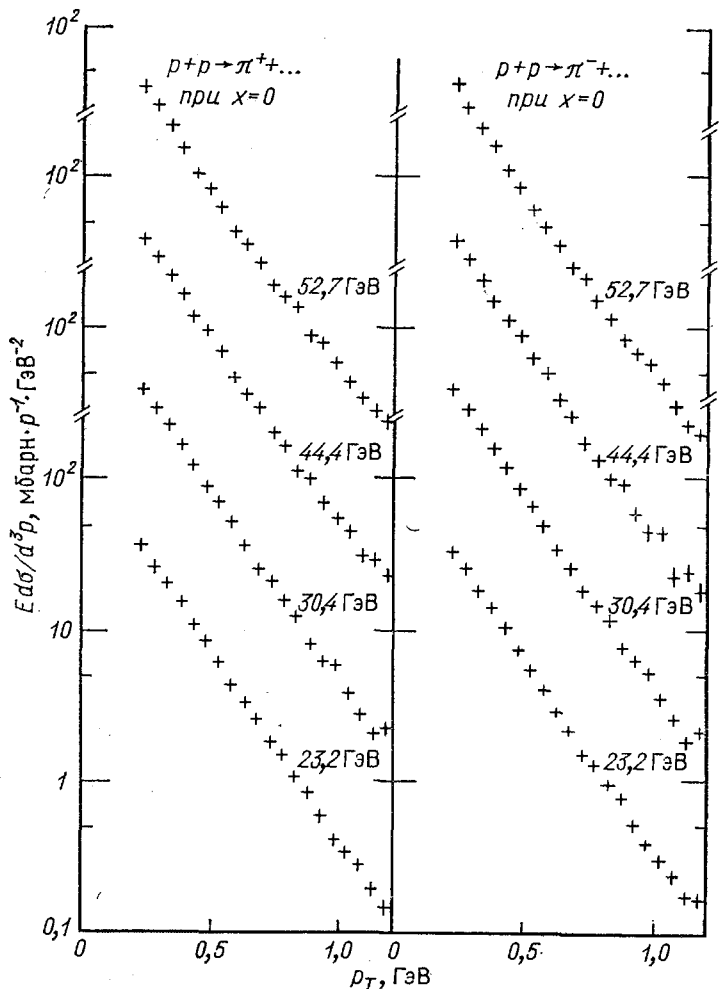


Рис. 10.17. Зависимость f_1 от p_{\perp} для реакций $pp \rightarrow \pi \pm X$. Данные указывают на сильное обрезание по p_{\perp}

Рисунок взят из работы [250]

10.7. Скейлинг и дуальность

Полные сечения таких процессов, как $K^+p \rightarrow X$ и $pp \rightarrow X$, рано выходят на скейлинговый режим, т. е. являются слабо зависящими от s при довольно малых значениях s . Это связано с тем фактом, что они являются экзотическими каналами. В то же время полные сечения неэкзотических каналов $K^-p \rightarrow X$, $\bar{p}p \rightarrow X$ быстро падают

$$\sigma_{12}^{tot} \sim \sum_X \left| A(12 \rightarrow X) \right|^2 = \sum_X \left[\begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ 2 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} R \end{array}$$

Рис. 10.18. Дуальная диаграмма для вклада траекторий R в σ_{12}^{tot} , который получается с помощью оптической теоремы

$$A(12 \rightarrow X) = \begin{array}{c} \uparrow X_1 \\ \text{---} \\ \downarrow X_2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array}$$

$$\sigma_{12}^{tot} \sim \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} P \end{array}$$

Рис. 10.19. Дуальная диаграмма для померонного вклада в σ_{12}^{tot} , который получается с помощью оптической теоремы.

Отметим, что никакие кварковые линии не проходят в диаграмме снизу вверх или наоборот, поэтому t -каналу отвечают вакуумные квантовые числа (ср. рис. 7.12)

Рис. 10.20. Кросс-член, который получается как альтернатива диаграммам, изображенных на рис. 10.18 и 10.19, и который запрещен правилами рисования дуальных диаграмм

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array}$$

при низких энергиях (см. рис. 6.4). Это может быть легко объяснено с помощью дуальных диаграмм (типа тех, что показаны на рис. 10.18), которых полные сечения связываются с мнимой частью диаграммы, отвечающей обмену реджеоном в амплитуде упругого рассеяния, с помощью оптической теоремы. Эта диаграмма может быть нарисована с промежуточным состоянием X , представляющим сумму резонансов, только если система (12) неэкзотична. Диаграмма дает поправки типа R к скейлинговому члену P . Другая возможная диаграмма изображена на рис. 10.19. Она приводит к члену типа P и возникает независимо от того, является система (12) экзотической или нет. Заметим, однако,

$$A(12\bar{3} \rightarrow X) = \begin{array}{c} \bar{3} \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} X + 2 \text{ других} \\ \searrow \\ 2 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} X_1 \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bar{3} + 2 \text{ других} \\ \searrow \\ 2 \\ X_2 \end{array} + \begin{array}{c} X_1 \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bar{3} \\ \searrow \\ X_3 \\ 2 \\ X_2 \end{array}$$

a

$$f_1 \sim \left| A(12\bar{3} \rightarrow X) \right|^2 = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + 2 \text{ других}$$

$$+ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + 2 \text{ других} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

b

Рис. 10.21. *a* — Семь членов амплитуды $A(12\bar{3} \rightarrow X)$.

В каждом случае под словами «другие» понимаются только циклические неэквивалентные перестановки частиц.

b — Семь соответствующих вкладов в инклюзивное распределение f_1 при условии, что кросс-члены исключены.

Затем эти вклады перерисованы на языке дуальных диаграмм, а потом на языке диаграмм с обменами реджеонами и померонами

$$\begin{array}{c} \bar{3} \\ \nearrow \\ 1 \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} R \\ \searrow \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \\ \bar{3} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} R \\ \searrow \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} R \text{ или } P \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ R \end{array}$$

Рис. 10.22. Однореджеонные диаграммы для реакции $1 \rightarrow 3$ и соответствующие дуальные диаграммы

что перекрестные члены, подобные тем, что показаны на рис. 10.20; и которые вполне могли бы возникать, запрещаются правилами рисования дуальных диаграмм (см. разд. 7.5). Кварковые петли не могут начинаться и кончаться на одной и той же частице. Итак, в согласии с предположением Харари — Фройэнда имеются только два члена в σ_{12}^{tot} [см. (7.3.1)].

Соответственно, согласно Венециано [390], имеется семь членов в процессе $12\bar{3} \rightarrow X$, которые изображены на рис. 10.21, а. Вклады в f_1 , полученные с помощью обобщенной оптической теоремы (10.4.1) в пренебрежении всеми перекрестными членами, показаны на рис. 10.21, б.

Таблица 10.1

Скейлинговое поведение и экзотика

| 1 | 3 | Экзотичность ? | | | | Скейлинг ? | | |
|---------|--------------|----------------|-----|------------|------------|--------------------------|---------------------|------------------------|
| | | $12\bar{3}$ | 12 | $2\bar{3}$ | $1\bar{3}$ | Область фрагментации p | Центральная область | Область фрагментации 1 |
| π^+ | π^+ | Нет | Нет | Нет | Нет | ↓ | ↓ | ↓ |
| | π^- | Да | Нет | Нет | Да | — | ↑ | ↓ |
| | K^0 | Да | Нет | Нет | Нет | — | ↑ | ↓ |
| π^- | ρ | Нет | Нет | Нет | Нет | ↓ | ↓ | ↓ |
| | π^+ | Да | Нет | Нет | Да | ↑ | ↑ | ↑ |
| | π^- | Нет | Нет | Нет | Нет | ↓ | — | ↓ |
| K^+ | K^0 | Нет | Нет | Нет | Нет | ↑ | ↑ | ↑ |
| | π^+ | Нет | Да | Нет | Нет | — | ↑ | — |
| | π^- | Да | Да | Нет | Да | — | ↑ | — |
| K^- | K^0 | Да | Да | Нет | Да | ↓ | — | ↓ |
| | π^+ | Нет | Нет | Нет | Да | ↓ | ↑ | ↓ |
| | π^- | Нет | Нет | Нет | Нет | — | ↑ | ↑ |
| ρ | K^0 | Нет | Нет | Нет | Нет | ↓ | ↑ | ↓ |
| | π^+ | Да | Да | Нет | Нет | ↓ | ↑ | ↓ |
| | π^- | Да | Да | Нет | Нет | ↓ | ↑ | ↓ |
| | K^0 | Да | Да | Нет | Нет | ↑ | ↑ | ↑ |
| | ρ | Нет | Да | Нет | Нет | ↓ | ↓ | ↓ |
| | $\bar{\rho}$ | Да | Да | Да | Да | ↑ | ↑ | ↑ |

Примечание. Рассматриваются процессы вида $1+p \rightarrow 3+X$. Для них показаны различные тенденции инклюзивных распределений в областях фрагментации мишени p , центральной области и области фрагментации пучка (частица 1); рост сечения с энергией показан как ↑, ↓ означает уменьшение сечения с ростом энергии, а прочерк указывает на то, что обнаружено приближенное скейлинговое поведение, т. е. сечение в зависимости от энергии практически постоянно. Пропуск означает, что соответствующие экспериментальные данные отсутствуют. (Эта таблица основана на результатах, изложенных в работе Залевски [417]).

Строго говоря, мы получаем ранний скейлинг, если присутствует только один последний член. Это эквивалентно требованию, чтобы системы 12 , $2\bar{3}$ и $1\bar{3}$ все были бы экзотическими. Однако в области фрагментации частицы 1 существенны только диаграммы, показанные на рис. 10.22. Они не возникают в случае, если 12 и $2\bar{3}$ являются экзотическими, что приводит к раннему скейлингу в этой области. Более полное обсуждение этих вопросов дано в работах Эйнхорна и др. [160] и Тье и Венециано [388]. В табл. 10.1 дано сравнение экзотичности и скейлинга в существующих экспериментальных данных.

Можно увидеть, что если $\bar{3}$ является π^\pm , то критерий экзотичности $1\bar{2}\bar{3}$ работает, даже если $1\bar{3}$ — экзотическая система, и, таким образом, не может образовываться квазичастица. Однако, с другой стороны, оказывается, что для реакции $pp \rightarrow \bar{p}X$ нарушаются все правила; по-видимому, это происходит потому, что для такой тяжелой частицы необходима очень высокая энергия, чтобы достаточно интенсивно образовывались пары $p\bar{p}$, т. е. чтобы скейлинг мог развиваться. Тот же факт, что для пиона ранний скейлинг оказался возможным, связан с его легкостью.

То, что соотношения дуального обменного вырождения для реджевских вычетов оказались справедливыми при довольно малых s как в области фрагментации, так и в центральной области, указывает на то, что это является следствием недостаточного понимания природы и структуры померонного члена, исследование которого вызывает трудности.

10.8. Трехреджеонное поведение

В трехреджеонной области $1 \rightarrow 3$ при фиксированной недостающей массе M^2 и $s \rightarrow \infty$ мы должны были бы ожидать реджевское поведение, соответствующее диаграмме рис. 10.23, *a*:

$$A(12 \rightarrow 3X) \rightarrow \sum_{s \rightarrow \infty} \gamma'_{13}(t) \gamma'_{2M}(t) \xi_i(t) P_{\alpha_i}(t) (\text{эос } \theta_i), \quad (10.8.1)$$

где

$$\tilde{\xi}_i(t) = [\exp \{-i\pi\alpha_i(t)\} + \xi_i] / \sin \pi\alpha_i(t) \quad (10.8.2)$$

является сигнатурным множителем; $\gamma'_{2M}(t)$ — нижняя вершина на рис. 10.23, *a*. Если включить (10.8.1) в оптическую теорему (10.4.1), как это показано на рис. 10.23, *b*, то получим

$$\begin{aligned} f_1(p_3, s) &= \frac{1}{2q_3 \sqrt{s}} \text{Disc}_{M^2} \{A(12\bar{3} \rightarrow 12\bar{3})\} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{s} \sum_{i,j} \gamma'_{13}(t) \gamma'^*_{13}(t) \tilde{\xi}_i(t) \tilde{\xi}_j^*(t) (\cos \theta_i)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t)} \times \\ &\quad \times \text{Disc}_{M^2} \{A(i2 \rightarrow j2; t, M^2, t_{22'} = 0)\}, \end{aligned} \quad (10.8.3)$$

где $A(i2 \rightarrow j2)$ — амплитуда рассеяния реджеона на частице, находящейся в нижней части рис. 10.23, б. Если теперь $s \gg M^2 \gg t \gg m_{1,2,3}^2$, то из выражения (1.7.19) следует

$$\cos \theta_i \rightarrow \frac{s - M^2/2}{q_{t13} q_{t2M}} \xrightarrow{s \gg M^2} \frac{s}{2q_{t13} q_{t2M}} \xrightarrow{M^2 \gg t} \frac{s}{M^2}. \quad (10.8.4)$$

А в том случае, если $M^2 \rightarrow \infty$, можно написать (см. рис. 10.23, в)

$$\text{Disc}_{M^2} \{A(i2 \rightarrow j2)\} = \sum_k \gamma_{23}^k(0) \gamma^{ij,k}(t, 0) \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_k(0)}, \quad (10.8.5)$$

используя затем (10.3.4), получаем.

$$\begin{aligned} f_1(p_3, s) &= 16\pi^2 s \frac{d^2 \sigma}{dt dM^2} = \frac{1}{s} \sum_{i,j,k} \gamma_{13}^i \gamma_{13}^{j*}(t) \times \\ &\times \tilde{\xi}_i(t) \tilde{\xi}_j^*(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t)} \gamma_{22}^k(0) \gamma^{ij,k}(t, 0) \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_k(0)} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{s} \sum_{i,j,k} G_{13,2}^{ij,k}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t)} \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_k(0) - \alpha_i(t) - \alpha_j(t)}. \end{aligned} \quad (10.8.6)$$

Заметим, что масса реджеонов i и j равна $t \equiv (p_1 - p_3)^2$, но реджеон k имеет массу $t_{22'} = 0$ вследствие требований, налагаемых оптической теоремой. Все вычеты и сигнатурные множители содержатся в $G_{13,2}^{ij,k}(t)$.

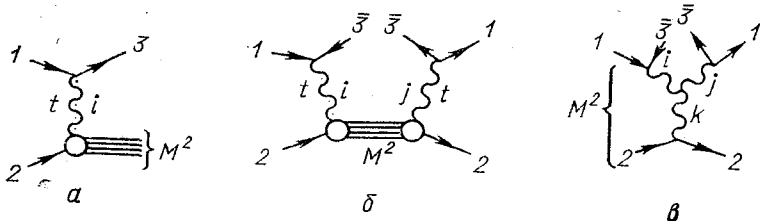


Рис. 10.23. а — В реакции $1+2 \rightarrow 3+X$ при больших s , когда частица 3 находится в области фрагментации частицы 1 происходит обмен одним реджеоном i . б — Диаграмма, которая получается, если для а написать оптическую теорему, изображенную на рис. 10.8. в — Трехреджеонная аппроксимация диаграммы, показанной на рис. б. Эта аппроксимация отвечает случаю больших M^2 . В выражении (10.8.1) и последующих константы связи реджеона с частицами обозначаются как γ_{13}^i и т. п., а трехреджеонная константа обозначается как $\gamma^{ij,k}$.

Это выражение справедливо в так называемом «трехреджеонном пределе», т. е. когда M^2 и $(M^2/s)^{-1} \rightarrow \infty$. Однако в действительности этот термин не совсем точно отражает имеющуюся ситуацию: как было замечено в разд. 10.5, отношение s/M^2 определяет угол между плоскостями, содержащими $1\bar{3}$ и $2\bar{3}$, и, устремляя этот угол к бесконечности, мы действительно попадаем в спиральный предел (см. разд. 9.3). Однако лидирующий спиральный полюс возникает при $\lambda = \alpha$ [см. (9.3.18)], и, таким образом, факт, что мы берем смешанный ред-

жевский полюсной и спиральный предел в (10.8.6), не приводит к каким-либо различиям в формуле для главного члена асимптотики по M^2 (см. работу де Тара и Вейса [375]).

Из выражения (10.2.14) видно, что предел $s/M^2 \rightarrow \infty$ подразумевает, что $x_3 \rightarrow 1$, $y_3 \rightarrow y_{3max}$, т. е. эта трехреджеонная область занимает очень малую часть в распределении по x_3 и y_3 вблизи кинематической границы. Ясно, что (10.8.6) можно применять только при больших s . Если рассмотрим область $M^2/s_0 > 10$ и $s/M^2 > 10$ (для того чтобы реджевское разложение было достоверно), то это при $s_0 = 1$ ГэВ² приводит к тому, что $s > 100$ ГэВ².

Используя (10.2.14), выражение (10.8.6) может быть переписано в виде

$$f_1(\mathbf{p}_3, s) = \frac{1}{s} \sum_{i, j, k} G_{13, 2}^{ij, k}(t) (1-x)^{\alpha_k(0) - \alpha_i(t) - \alpha_j(t)} (s/s_0)^{\alpha_k(0)}. \quad (10.8.7)$$

В том случае если M^2 достаточно велико, то в сумме по k можно ограничиться только померонным вкладом P . Причем если лидирующие траектории i и j с квантовыми числами системы $\bar{13}$ обозначить как i , то

$$f_1(\mathbf{p}_3, s) \rightarrow \frac{1}{s} |\gamma_{13}^i(t)|^2 |\tilde{\xi}_i(t)|^2 \gamma_{22}^P(0) \gamma^{i, P}(t, 0) \times \\ \times \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_i(t) - 1} \sim \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_i(t) - 1} = (1-x)^{1 - 2\alpha_i(t)}. \quad (10.8.8)$$

Таким образом, f_1 является функцией только x или M^2/s , что соответствует фейнмановскому скейлингу. Рассматривая вариации s при фиксированном M^2 или наоборот, изменение M^2 при фиксированном s для различных значений t можно определить непосредственно $\alpha_i(t)$.

Довольно всесторонние и исчерпывающие описания высокоэнергетических экспериментальных данных с помощью формулы (10.8.6) сделаны Роем и Робертсом [349] и Филдом и Фоксом [167]. В реакции $pp \rightarrow pX$ вследствие того, что система $\bar{13} = \bar{p}p$ имеет вакуумные квантовые числа, лидирующим членом является трехпомеронный член

$$f_1^{PP, P}(\mathbf{p}_3, s) = \frac{1}{s} G_{pp, p}^{PP, P}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha_P(t)} \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_P(0) - 2\alpha_P(t)}, \quad (10.8.9)$$

который при $\alpha_P(t) \approx 1 + \alpha_P'(0)t$ дает

$$f_1^{PP, P}(p_3, s) \approx \frac{1}{s_0} G_{pp, p}^{PP, P}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{1 - 2\alpha_P' t} \quad (10.8.10)$$

или

$$\frac{d^2 \sigma}{dt dM^2} \approx \frac{G_{pp, p}^{PP, P}(t)}{16\pi^2 s_0} \frac{s^{2\alpha_P' t}}{(M^2)^{1 + 2\alpha_P' t}}. \quad (10.8.11)$$

Заменяя i, j, k на R , где $\alpha_R(t) \approx 0,5 + \alpha_R' t$, получаем различные вклады вторичных траекторий, которые можно записать:

$$f_1 = f_1^{PP, P} + f_1^{RR, P} + f_1^{PP, R} + f_1^{RR, R}, \quad (10.8.12)$$

где, например,

$$f_{1}^{RR, P} = \frac{1}{s} G_{pp, p}^{RR, P}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha_R(t)} \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_P(0) - 2\alpha_R(t)} \approx \approx \frac{1}{s_0} G_{pp, p}^{RR, P}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha'_R(t)}. \quad (10.8.13)$$

Для всех членов в выражении (10.8.12) $i = j$. Конечно, могли бы также быть перекрестные члены типа $f^{RP, P}$, но обычно этими членами пренебрегают.

Ясно, что, используя различные типы частицы 3, можно исследовать большой диапазон квантовых чисел системы $i = 1\bar{3}$: заряженные обмены, странные обмены, барионные обмены и т.п. До сих пор, однако, имеется довольно ограниченное разнообразие экспериментальных данных, но тем не менее некоторые подгонки уже сделаны (см., например, [236, 237]).

Хотя изложенный только что метод непосредственно применим только при $s > 100 \text{ ГэВ}^2$, можно распространить его на более низкие значения s , если привлечь аргументы дуальности. Так, например, при малых значениях M^2 можно ожидать, что будут рождаться резонансы (r), дуальные траекториям α_k ($k = R$) в амплитуде $i + 2 \rightarrow j + 2$ (см. рис. 10.23, в). Итак, ожидаем для случая $i = j$ в выражении (10.8.6), что

$$\left\langle \frac{d\sigma}{dt} \right\rangle^r \sim \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_R(0) - 2\alpha_i(t)} \sim \sim (M^2)^{(\alpha_R^0 - 2\alpha_i^0)} \exp\{-2\alpha'_i t \ln(M^2/s_0)\} \quad (10.8.14)$$

для линейных траекторий. Это выражение говорит о том, как должно изменяться дифференциальное сечение двухчастичного процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + X$ с изменением M^2 при фиксированном значении s : оно должно расширяться по t , когда M^2 увеличивается (рис. 10.24). Итак, трехреджеонное поведение также ограничивает квазидвухчастичное рассеяние.

В трехреджеонных описаниях процесса $pp \rightarrow pX$ обнаружено, что всегда в области малых t $G^{PP, P}(t) \ll G^{RR, P}(t)$, но обе вершины не обращаются в нуль при $t = 0$ (см., например, рис. 10.25). Точное значение трехпомеронной вершины при $t = 0$ зависит от предположений относительно вторичных траекторий, однако в настоящее время этот результат подтверждается различными подгонками (ср. [167, 349, 76, 280]). Так как $\gamma_{pp}^P(t)$ известно из описаний дифференциальных сечений упругого pp -рассеяния, то прямо определяется $\gamma^{PP, P}(t, 0)$ [см. (10.8.6)]. Затем если при данной фиксированной величине t мы устраним известные множители $\gamma_{pp}^P(t)$, $\xi_P(t)$ и $(s/M^2)^{\alpha_P(t)}$, соответствующие вычетам и пропагаторам реджеонов i, j на рис. 10.23, б, то оставшееся дает (если использовать (10.8.5) и оптическую теорему (1.9.6).]

$$\sigma_{pp}^{tot}(M^2, t) \rightarrow \sum_k \gamma_{2,2}^k(0) \gamma^{PP, k}(t, 0) \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_k(0) - 1} \quad k = P, R \quad (10.8.15)$$

(где s_0/M^2 можно рассматривать как поток). Это выражение является полным сечением рассеяния померона на протоне как функция «энергии» M и квадрата «массы» померона t . Оно построено на рис. 10.26, из которого мы видим, что при больших M^2 при $t \rightarrow 0$ $\sigma_{pp}^{tot} \rightarrow 1$ мбарн. Сравнение этой величины с $\sigma_{pp}^{tot} \simeq 40$ мбарн показывает, что трехпомеронная константа $\gamma^{PP,P}(0, 0) \approx (1/40) \gamma_P^P(0)$, т. е. помероны связаны друг с другом значительно более слабо, чем с частицами, но связь хотя и очень слаба, тем не менее не нулевая.

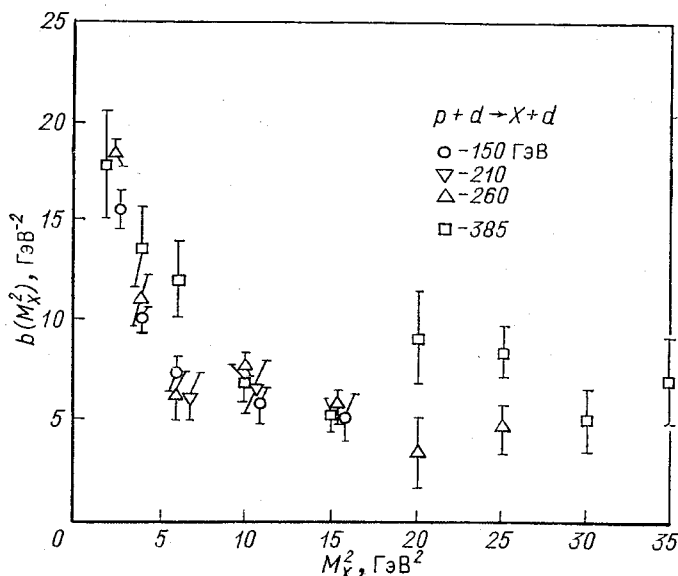


Рис. 10.24. Параметр наклона b распределения $d^2\sigma/dtdM^2$ в предположении, что распределение $\sim \exp\{b(M^2)t\}$ как функция M^2 в реакции $p+d \rightarrow X+d$.

Рисунок взят из работы [288]

Все это поднимает довольно трудный вопрос о самосогласованности померонного обмена. Дифракционное сечение реакции $1+2 \rightarrow 3+X$ (см. рис. 10.23, а с $i = P$) равно из (10.8.6)]

$$\frac{d^2\sigma}{didM^2} = \frac{G_{13,2}^{PP,P}(t)}{16\pi^2 s_0^2} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2\alpha_P(t)-2} \left(\frac{M^2}{s_0}\right)^{\alpha_P(0)-2\alpha_P(t)}. \quad (10.8.16)$$

Итак, если положить $\alpha_P(t) = \alpha_P^0 + \alpha_P' t$, полное сечение дифракционного рассеяния равно

$$\sigma_{12}^D(s) = \frac{s^{2\alpha_P^0-2}}{16\pi^2 (s_0)^{\alpha_P^0}} \int_{s_0}^s \frac{dM^2}{(M^2)^{\alpha_P^0}} \int_{-\infty}^0 dt G_{13,2}^{PP,P}(t) \times \exp\{2\alpha_P' t \ln(s/M^2)\}. \quad (10.8.17)$$

Рис. 10.25. Различные трехреджеонные константы G^{ijk} , найденные Филдом и Фоксом [167] при описании экспериментальных данных по реакции $p+p \rightarrow p+X$

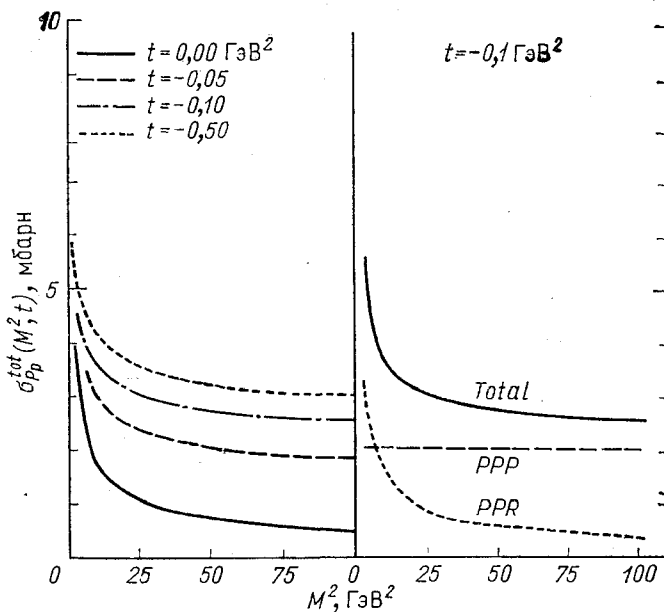
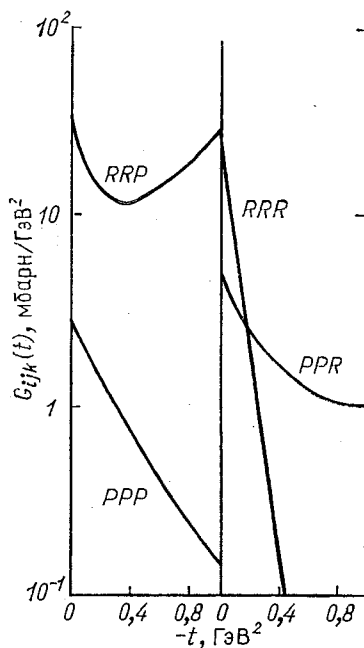


Рис. 10.26. Полное сечение рассеяния померона на протоне $\sigma_{pp}^{tot}(M^2, t)$, определение которого дано в (10.8.15), как функция M^2 при различных значениях t . Рисунок взят из работы [167]

Верхний предел интегрирования по M^2 равен s , т. е. соответствует $x = 1$, а нижний предел равен некоторой величине ε , которая характеризует начало области, где трехреджеонная аппроксимация нарушается. Если затем для простоты положить $G_{13,2}^{PP,P}(t) = Ge^{at}$, то (см. рис. 10.25)

$$\sigma_{12}^D(s) = \frac{Gs^{2\alpha'_P-2}}{16\pi^2(s_0)^{\alpha'_P}} \int_{\varepsilon}^s \frac{dM^2}{(M^2)^{\alpha'_P} [a + 2\alpha'_P \ln(s/M^2)]} \sim s^{2\alpha'_P-2}, \quad (10.8.18)$$

если $\alpha'_P < 1$. Но если $\alpha'_P = 1$, то используем

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) \quad (10.8.19)$$

найдем

$$\sigma_{12}^D(s) \sim \frac{1}{2\alpha'_P} \ln \left(1 + \frac{2\alpha'_P}{a} \ln s \right) \sim \ln(\ln s). \quad (10.8.20)$$

Хотя это поведение не противоречит ограничению Фруассара (2.4.10), очевидно, что имеется несогласованность, потому что $\alpha'_P = 1$ дает

$$\sigma_{12}^{tot}(s) \rightarrow \text{const} - O \ln^{-1} s$$

[см. (8.6.9)], и ясно, что когда $s \rightarrow \infty$, мы должны иметь $\sigma_{12}^D(s) < \sigma_{12}^{tot}(s)$. В самом деле, никакая реджевская сингулярность не может дать поведение полного сечения как $\sigma^{tot} - \ln(\ln s)$. С другой стороны, если $G_{13,2}^{PP,P}(t)$ исчезает при $t = 0$, например, следующим образом:

$$G_{13,2}^{PP,P}(t) = (-t) Ge^{at},$$

то тогда (10.8.17) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \sigma_D \sim \int_{\varepsilon}^s \frac{dM^2}{(M^2)^{\alpha'_P} (a + 2\alpha'_P \ln(s/M^2))^2} &\sim \frac{1}{2\alpha'_P a} \\ &- \frac{1}{2\alpha'_P (a + 2\alpha'_P \ln s)} \rightarrow \text{const} - O \ln^{-1} s, \end{aligned} \quad (10.8.21)$$

которое является вполне совместимым с доминантностью обмена помером P . Эта проблема, впервые отмеченная при изучении мультипериферической модели (см. разд. 11.4) Финкельштейном и Каянти [168, 169], была потом переосмыслена многими авторами; для примера упомянем работы [4, 195, 1]. Полезный обзор на эту тему написан Бровером и Вейсом [70]. Таким образом, даже несмотря на малость величин $\gamma^{PP,P}(t)$ эмпирический факт, что она не обращается в нуль при $t = 0$, приводит к серьезной трудности, которая будет исследована в следующей главе.

10.9. Правила сумм при конечной массе

Итак, сочетание модели обмена полюсами Редже в области фрагментации с теоремой Мюллера, изображенной графически на рис. 10.23, приводит нас к необходимости изучения скачка по M^2 амплитуды рассеяния реджеона на частице A ($i2 \rightarrow j2$). С этой точки зрения функция частиц 1 и 3 состоит просто в том, чтобы образовывать виртуальные реджеоны i и j . Это очень напоминает электророжение, в котором возникают амплитуды с участием виртуальных фотонов (см. рис. 12.1).

Энергия в с.ц.м. для этой амплитуды рассеяния реджеона на частице равна M , т. е. недостающей массе в реакции $1+2 \rightarrow 3+X$, а так как для того, чтобы сохранить предел $s/M^2 \rightarrow \infty$, часто необходимо рассматривать экспериментальные данные при довольно малых значениях M^2 , было бы очень полезно иметь возможность получать информацию о реджевских сингулярностях α_k с помощью ПСКЭ, проведя при этом усреднение по резонансной области M^2 по аналогии с тем, что рассматривалось в разделе 7.2, а не стараясь сделать реджевские подгонки для больших M^2 . Эти правила сумм называются правилами сумм при конечной массе (ПСКМ) (см. работу Хоера [237]).

Начнем с того, что введем кроссинг-симметричную переменную [ср. (7.2.3)]

$$v \equiv p_2(p_1 - p_2), \quad (10.9.1)$$

а так как

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2; \quad u \equiv (p_2 - p_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 - 2p_2 p_3, \quad (10.9.2)$$

то эту переменную можно выразить с помощью (10.2.12) как

$$v = (1/2)(M^2 - t - m_2^2) \rightarrow (1/2)M^2 \text{ для } M^2 \gg t, m_2^2. \quad (10.9.3)$$

Затем из (10.8.6), взяв только лидирующую траекторию системы $\bar{13}$, при $i = j$, получаем

$$\frac{d^2 \sigma}{dt dM^2} = \frac{1}{16\pi^2 s^2} |\gamma_{13}^i(t)|^2 |\xi_i(t)|^2 \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_i(t)} \times \\ \times \text{Disc}_{M^2} \{A(i2 \rightarrow i2; t, M^2, 0)\}. \quad (10.9.4)$$

Если теперь использовать выражение (10.8.5) для $\text{Disc}_{M^2} \{A(i2 \rightarrow i2)\}$, то приходим в случае траектории с четной сигнатурой $\xi_{\bar{k}} = +1$ к [ср. (7.2.8), (7.2.15)]

$$\int_0^N v dv \left(\frac{d^2 \sigma(12 \rightarrow 3X)}{dt dM^2} + \frac{d^2 \sigma(32 \rightarrow 1X)}{dt dM^2} \right) = \sum_k \frac{G_{13,2}^{H,k}}{16\pi^2 (s_0)^{\alpha_k(0)}} \times \\ \times s^{(2\alpha_i(t)-2)} 2 \int_0^N (M^2)^{\alpha_k(0) - 2\alpha_i(t)} \frac{M^2}{4} dM^2. \quad (10.9.5)$$

Множитель 2 в правой части возникает потому, что, так же как и в (7.2.9), мы складываем вклады от разрезов как при положительных M^2 , так и при отрицательных M^2 , которые описывают процессы $12 \rightarrow 3 X$ и $32 \rightarrow 1 X$ соответственно, конечно, при $t_{22'} = 0$. Эти вклады

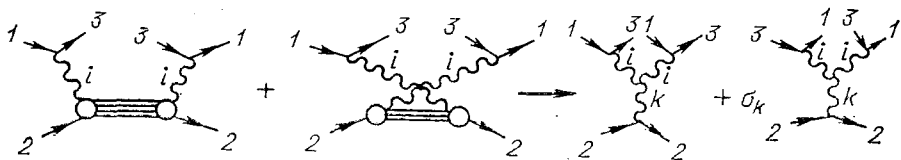


Рис. 10.27. Трехреджеонное представление реакций $1+2 \rightarrow 3+X$ и $3+2 \rightarrow 1+X$, используемые для получения оценок с помощью ПСКМ

представляют собой скачки на разрезах траектории k с четной сигнатурой (см. рис. 10.27). Если теперь произвести интегрирование в правой части, то получится, что она равна

$$\sum_k \frac{G_{13,2}^{ii,k}(t) s^{2\alpha_i(t)-2}}{16\pi^2 (s_0)^{\alpha_k(0)}} \frac{1}{2} \frac{N^{\alpha_k(0)-2\alpha_i(t)+2}}{\alpha_k(0)-2\alpha_i(t)+2}. \quad (10.9.6)$$

В действительности обычно невозможно пройти до достаточно больших энергий, рассматривая вклад только одной траектории i , а необходимо заменить \sum_k на $\sum_{i,i,k}$ в (10.9.6). Кроме того, мы можем взять и высшие моменты [подобно (7.2.14) и (7.2.16)] и тогда получим (положив $s_0 \equiv 1$ для удобства)

$$\int_0^M v^n dv \left[\frac{d^2 \sigma(12 \rightarrow 3X)}{dt dM^2} + (-1)^{n+1} \frac{d^2 \sigma(32 \rightarrow 1X)}{dt dM^2} \right] = \sum_{i,j,k} \frac{G_{13,2}^{ij,k}(t)}{32\pi^2} s^{\alpha_i(t)+\alpha_j(t)-2} \frac{N^{\alpha_k(0)-\alpha_i(t)-\alpha_j(t)+n+1}}{\alpha_k(0)-\alpha_i(t)-\alpha_j(t)+n+1}. \quad (10.9.7)$$

где $n = 1, 3, 5 \dots$ для $\xi_k = 1$ и $n = 0, 2, 4 \dots$ для $\xi_k = -1$.

Эти ПСКМ были введены Эйнхорном и др. [159] и Санда [352] и широко используются в дополнение к трехреджеонным подгонкам. Например, Рой и Робертс [349] и Филд и Фокс [167] использовали их при получении результатов, упомянутых в предыдущем разделе.

Довольно интересны дуальные свойства этих сумм. Для $i, j = R$ (т. е. обычные реджеоны без P) можно ожидать, что остается справедливой обычная двухкомпонентная дуальность, которая использовалась в двухчастичных реакциях (см. разд. 7.3), т. е. резонансы по M^2 будут дуальны реджеонам $k = R$, в то время как нерезонансный фон должен быть дуален $k = P$, так как все, что мы делали, заключается в движении по t вдоль траекторий i и j в точки, не соответствующие физическим частицам. По-видимому, это может быть оправдано (см. работу Хоера [237]). Однако остается вопрос о

том, как быть с амплитудой рассеяния померона на частице $P + 2 \rightarrow \rightarrow P + 2$? Эйнхорн и др. [159, 160] на основании рассмотрения дуальных диаграмм (рис. 10.28, *а*, *б*) аргументировали, что резонансы по M^2 образуют померонный обмен P . С другой стороны, если померон P присоединяется посредством f , то резонансы должны быть дуальны R , а P дуален фону, как это изображено на рис. 10.28, *в*. Однако эта диаграмма содержит замкнутую петлю и поэтому при обычном рассмотрении должна быть исключена. «Теория», тем самым, является неоднозначной и, таким образом, в настоящий момент она представляет собой феноменологию (см. работу Хоера [237]).

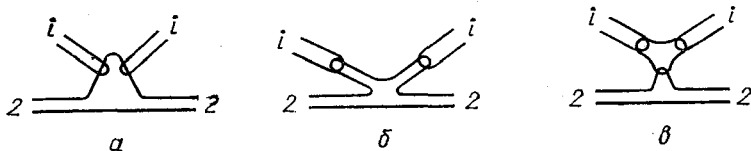


Рис. 10.28. *а* — Дуальная диаграмма для обмена помероном в $i2 \rightarrow i2$. *б* — Рис. *а*, перерисованный в предположении, что связь померона с частицей может быть дуальна резонансам. *в* — Альтернативная дуальная диаграмма, содержащая замкнутую петлю, которая предполагает, что обмен P , как обычно, дуален фону

Если взять правила сумм с неправильными моментами (т. е. n — четное для $\xi_k = +1$ и n — нечетное для $\xi_k = -1$), то можно изучать фиксированные полюса, которые могут присутствовать в амплитудах рассеяния реджеона на частице [ср. (7.2.21)]. Например если в амплитуде с четной сигнатурой взять нулевой момент, то получится при $i = j$ (если снова положить $s_0 = 1$):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^N dv \left(\frac{d^2 \sigma(12 \rightarrow 3X)}{dt dM^2} + \frac{d^2 \sigma(32 \rightarrow 1X)}{dt dM^2} \right) = \\
 & = \sum_{i, k} \frac{1}{16\pi^2 s^2} |\gamma_{13}^i(t)|^2 |\tilde{\xi}_i(t)|^2 s^{2\alpha_i(t)} \gamma_{22}^k(0) \times \\
 & \times \frac{1}{2} \left[G_1^{ii}(t) + \gamma^{ii, k}(t, 0) \frac{N^{\alpha_k(0) - 2\alpha_i(t) + 1}}{\alpha_k(0) - 2\alpha_i(t) + 1} \right], \quad (10.9.8)
 \end{aligned}$$

где $G_m^{ii}(t)$ — вычеты фиксированных полюсов в амплитуде рассеяния реджеона на частице $i2 \rightarrow i2$ в нефизических точках $J - 2\alpha_i t = m$, $m = 1, 3, 5 \dots$ [так как t -канальные спиральности траекторий равны $\alpha_i(t)$]. Вычет $G_1^{ii}(t)$ связывается с вычетом $N_1(t, t_1, t_2)$ фиксированного полюса при рассеянии реджеона на частице, который возникает в выражениях (8.2.37) и (8.3.8) для реджеовского разреза в реджеонной диаграммной технике Грибова [см. (8.2.39).] Эта связь следующая:

$$G_1^{ii}(t) = N_1^{ii}(0, t, t) (\gamma_{22}^i)^{-1}. \quad (10.9.9)$$

Таким образом, сравнивая правила сумм для правильных и неправильных моментов, можно, в принципе, оценить N и подставить его в выражение (8.4.1), получив при этом выражение для реджевского разреза. Это пытались сделать Робертс и Рой [344], которые использовали экспериментальные данные по инклюзивным реакциям $K^+ \xrightarrow{p} K^0$ и $K^- \xrightarrow{p} \bar{K}^0$, для того чтобы оценить разрезы $\rho \otimes \rho$ и $A_2 \otimes A_2$ в упругой реакции $pp \rightarrow pp$, а также Мюзинич и др. [316], которые старались оценить разрез $P \otimes P$ в $pp \rightarrow pp$. Они нашли, что вклад разреза примерно равен только 40% вклада соответствующего разреза в эйкональной модели [$N_1^{PP}(t, t_1, t_2) = 1$, см. разд. 8.4]. Однако неопределенности в трехреджеонных вершинах делают погрешность этих оценок довольно большой. Кроме того, процедура не является самоогласованной, так как вклад от разрезов обычно опускается в инклюзивных правилах сумм и, таким образом, этот подход может быть даже только приближенно успешным в случае, если вклад разрезов много меньше вклада полюсов.

Итак, после прочтения предыдущих разделов этой главы стало ясно, что, несмотря на ограничение $t_{22}' = 0$, этот трехреджеонный режим в конце концов дает много полезного для понимания реджеонной динамики.

10.10. Корреляции и корреляционная длина

В формуле (10.3.12) было определено двухчастичное инклюзивное распределение для реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + X$. Очевидно, что динамике образования частиц можно изучать, исследуя всевозможные корреляции, которые возникают между наблюдаемыми частицами в конечном состоянии. Например, если бы частицы 3 и 4 в основном производились из распада некоторого резонанса: $1 + 2 \rightarrow r + X$, $r \rightarrow 3 + 4$, то импульсы этих частиц были бы сильно скоррелированы.

Можно определить двухчастичную корреляционную функцию как

$$c_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \equiv \rho_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) - \rho_1(\mathbf{p}_3, s) \rho_1(\mathbf{p}_4, s), \quad (10.10.1)$$

где функции ρ определяются в (10.3.10) и (10.3.15). Если корреляции в образовании частиц 3 и 4 отсутствуют, то вероятность рождения обеих равна произведению вероятностей образования каждой, т. е.

$$\rho_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) = \rho_1(\mathbf{p}_3, s) \rho_1(\mathbf{p}_4, s), \quad (10.10.2)$$

что приводит к тому, что $c_2 = 0$, как и должно быть. Также удобно ввести функцию

$$C_2(s) \equiv \int c_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{16\pi^2 E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{16\pi^2 E_4} = \langle n_3 n_4 - \delta_{34} n_3 \rangle - \langle n_3 \rangle \langle n_4 \rangle. \quad (10.10.3)$$

Последнее равенство легко получается из (10.10.1), (10.3.16) и (10.3.11). Если частицы 3 и 4 одинаковы, то

$$C_2(s) = F_2(s) - F_1^2(s). \quad (10.10.4)$$

На рис. 10.5 было видно, что F_1 зависит от s приблизительно логарифмически и аналогично $C_2(s) \sim (\ln s)^2$ (рис. 10.29) (или возможна степенная зависимость от s с небольшим показателем степени).

Кроме того, можно определить трехчастичную корреляционную функцию

$$c_3(p_3, p_4, p_5, s) = \rho_3(p_3, p_4, p_5, s) - \rho_1(p_3, s) c_2(p_4, p_5, s) - \\ - \rho_1(p_4, s) c_2(p_3, p_5, s) - \rho_1(p_5, s) c_2(p_3, p_4, s) - \rho_1(p_3, s) \rho_1(p_4, s) \rho_1(p_5, s) \text{ и т. д.} \quad (10.10.5)$$

Некоторые корреляции должны появляться как следствие кинематики (т. е. из-за сохранения E , p и др.) или из-за сохранения квантовых чисел (B, Q, S, I, G и др.). (см. де Тар, Фридман и Венециано [374]). Например, так как для процесса $1+2 \rightarrow 3+4+\dots+(m+2)$ имеем

$$\sum_{n=3}^{m+2} E_n = \sqrt{s}, \quad (10.10.6)$$

т. е. полная энергия в с. ц. м. всех вылетающих частиц должна равняться полной энергии начального состояния, значит имеется инклюзивное правило сумм, отвечающее сохранению энергии:

$$\sum_l \int E_l \rho_1(p_l, s) \frac{d^3 p_l}{16\pi^2 E_l} = \sqrt{s}. \quad (10.10.7)$$

Смысл его в том, что левая часть дает вероятность образования частицы типа l с энергией E_l , эта вероятность проинтегрирована по всем возможным энергиям и просуммирована затем по всем возможным типам частиц. Кроме того, так как

$$\left(\sum_{n=3}^{m+2} E_n \right)^2 = s, \quad (10.10.8)$$

то аналогично имеем

$$\sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} \int E_k E_l \rho_2(p_k, p_l, s) \frac{d^3 p_k}{16\pi^2 E_k} \frac{d^3 p_l}{16\pi^2 E_l} + \\ + \sum_l \int E_l^2 \rho_1(p_l, s) \frac{d^3 p_l}{16\pi^2 E_l} = s. \quad (10.10.9)$$

Но, поскольку с помощью (10.10.1) можно выразить ρ_2 в терминах c_2 и ρ_1 , а кроме того, поскольку

$$\sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} \int E_k E_l \rho_1(p_k, s) \rho_1(p_l, s) \frac{d^3 p_k}{16\pi^2 E_k} \frac{d^3 p_l}{16\pi^2 E_l} = s, \quad (10.10.10)$$

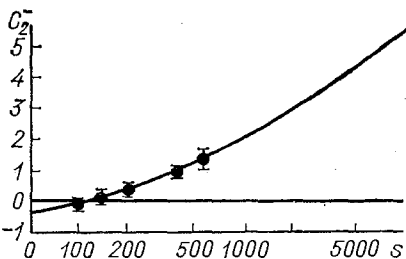


Рис. 10.29. Экспериментальные данные по $C_2(s)$ в зависимости от s для отрицательно заряженных частиц. Рисунок взят из работы Харари [266]. Кривая отвечает параметризации $G_2^-(s) = 0,14 \ln^2 s - 0,65 \ln s + 0,06$

получаем из (10.10.9)

$$\sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} \int E_k E_l c_2(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l, s) \frac{d^3 \mathbf{p}_k}{16\pi^3 E_k} \frac{d^3 \mathbf{p}_l}{16\pi^2 E_l} + \\ + \sum_l \int E_l^2 \rho_1(\mathbf{p}_l, s) \frac{d^3 \mathbf{p}_l}{16\pi^2 E_l} = 0. \quad (10.10.11)$$

Ясно, что второй член этого выражения положительно определен. Поэтому c_2 должно быть отрицательным. То, что получилась отрицательная корреляция, можно было бы ожидать заранее. Рассмотрим в качестве примера энергию: если частица 3 несет большую энергию, то более вероятно, что энергия частицы 4 будет малой. Аналогичные утверждения можно сделать для любых сохраняющихся величин.

Подобным образом из закона сохранения заряда имеем [подобно (10.10.7)]

$$\sum_l \int Q_l \rho_1(\mathbf{p}_l, s) \frac{d^3 \mathbf{p}_l}{16\pi^3 E_l} = \sum_l Q_l \langle n_l \rangle = Q_1 + Q_2, \quad (10.10.12)$$

если используем (10.3.11). Получившееся выражение приводит к отрицательной корреляции между зарядами частиц, родившихся в реакции.

Помимо этих кинематических корреляций могут быть динамические корреляции, которые являются следствием механизма образования частиц. В качестве иллюстрации можно упомянуть пример с распадом резонанса, рассмотренный выше. Оказывается, что такие корреляции являются много менее вероятными, если частицы образуются на большом расстоянии в пространстве быстрот (см. рис. 10.4). В связи с этим важно постараться определить расстояние в пространстве быстрот, на котором можно было бы ожидать появления сильных корреляций. Это называется «корреляционной длиной» Λ , которая определена таким образом, что корреляция между частицами 3 и 4 пренебрежимо мала, если

$$|y_3 - y_4| \gg \Lambda. \quad (10.10.13)$$

Таким образом, область фрагментации налетающей частицы, показанная на рис. 10.4, б, лежит в пространстве быстрот, когда

$$y_{3max} \geq y_3 > (y_{3max} - \Lambda) = (1/2) \ln(s/\mu_3^2) - \Lambda,$$

а область фрагментации мишени при

$$y_{3min} \leq y_3 < (y_{3min} + \Lambda) = -(1/2) \ln(s/\mu_3^2) + \Lambda.$$

Отметим, что, поскольку мы берем Λ , которое не зависит от s , естественно предположить существование скейлинга и в центральной области. Но для малых s $\Lambda > \ln(s/\mu_3^2)$, поэтому две области фрагментации перекрываются и предполагается, что в этом случае скейлинг не возникает.

Диаграмма Мюллера — Редже, описывающая центральную область в процессе

$$1+2 \rightarrow 3+4+X,$$

является тройной реджевской диаграммой (рис. 10.30), где $s_{12}, t_{13}, s_{34}, t_{24} \rightarrow \infty$ при условии, что отношения t_{13}, s_{34}, t_{24} к s_{12} и т. д. остаются фиксированными. Итак [ср. (10.6.4)],

$$f_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \rightarrow \sum_{i, j, k} \gamma_{ijk}(\mu_3^2, \mu_4^2) |t_{13}/s_0|^{\alpha_i(0)-1} \times \\ \times |t_{34}/s_0|^{\alpha_j(0)-1} |t_{24}/s_0|^{\alpha_k(0)-1}. \quad (10.10.14)$$

В том случае, если энергия достаточно высока, можно отделить центральную область от областей фрагментации. Для этого необходимо

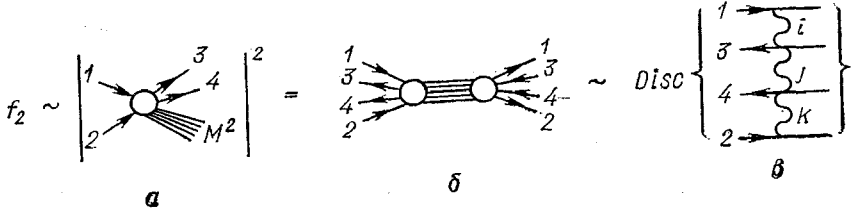


Рис. 10.30. Тройное реджевское представление двухчастичного инклюзивного процесса $1+2 \rightarrow 3+4+X$

только рассмотреть в качестве реджеонов i и k померон, потому что $t_{13}, t_{24} \rightarrow \infty$ и в случае, если $\alpha_P(0) = 1$, получается

$$f_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \rightarrow \sum_j \gamma_{PjP}(\mu_3^2, \mu_4^2) \left(\frac{s_{34}}{s_0} \right)^{\alpha_j(0)-1} \xrightarrow{s_{34} \rightarrow \infty} \gamma_{PPP}(\mu_3^2, \mu_4^2), \quad (10.10.15)$$

что дает ожидаемое скейлинговое поведение в центральной области. То, как быстро это поведение наступает, зависит от вклада вторичных траекторий R в сумму по j .

Если использовать факторизацию, то можно написать [ср. (10.6.6)]

$$\gamma^{PjP}(\mu_3^2, \mu_4^2) = \gamma_{11}^P \gamma_{33}^{Pj}(\mu_3^2) \gamma_{44}^{jP}(\mu_4^2) \gamma_{22}^P. \quad (10.10.16)$$

Таким образом, используя (10.5.7) и исходя из (10.3.5) и (10.10.15), приходим к

$$\rho_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \rightarrow \gamma_{33}^{PP}(\mu_3^2) \gamma_{44}^{PP}(\mu_4^2). \quad (10.10.17)$$

Это выражение не зависит от природы частиц 1 и 2. Затем с помощью (10.6.7) находим, что

$$\rho_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \rightarrow \rho_1(\mathbf{p}_3, s) \rho_1(\mathbf{p}_4, s), \quad (10.10.18)$$

а из (10.10.1) тогда следует, что $c_2(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, s) \rightarrow 0$ и, следовательно, корреляция отсутствует. Это происходит потому, что мы предположили, что асимптотически единственный факторизуемый полюс доминирует и поэтому каждая вершина является полностью независимой.

Однако при более низких энергиях s_{34} мы можем ожидать, что к реджевскому поведению появятся поправки из-за низколежащих траекторий R , которые также будут приводить к появлению корреляций

между частицами при неасимптотических многочастичных инвариантных массах. Чтобы определить длину в пространстве быстрот, на которой такие корреляции будут возникать, отметим, что в терминах быстроты с помощью (10.2.18) можно получить следующие выражения:

$p_3 = (\mu_3 \cosh y_3, p_{3T}, \mu_3 \sinh y_3)$; $p_4 = (\mu_4 \cosh y_4, p_{4T}, \mu_4 \sinh y_4)$
и тогда

$$s_{34} \equiv (p_3 + p_4)^2 = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3 p_4 = m_3^2 + m_4^2 + 2\mu_3 \mu_4 \cosh y_3 \times \\ \times \cosh y_4 - 2p_{3T} p_{4T} - 2\mu_3 \mu_4 \sinh y_3 \sinh y_4 = m_3^2 + m_4^2 + 2\mu_3 \mu_4 \times \\ \times \cosh (y_3 - y_4) - 2p_{3T} p_{4T} \xrightarrow{s_{34} \rightarrow \infty} 2\mu_3 \mu_4 \cosh (y_3 - y_4) \rightarrow (10.10.19) \\ \rightarrow \mu_3 \mu_4 \exp \{ |y_3 - y_4| \}.$$

Следовательно, (10.10.15) дает

$$f_2(p_3, p_4, s) \rightarrow \sum_j \gamma_{PIP} (\mu_3^2, \mu_4^2) \left(\frac{\mu_3 \mu_4}{s_0} \right)^{\alpha_j(0)-1} \times \\ \times \exp \{ (\alpha_j(0) - 1) |y_3 - y_4| \}. \quad (10.10.20)$$

Первый член в этой сумме, который отвечает $j = P$ с $\alpha_P(0) = 1$, не приводит к корреляциям, как мы уже видели ранее, но второй член с $j = R$ с $\alpha_R(0) \approx 0,5$ дает вклад

$$\rho(p_3, p_4, s) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y_3 - y_4| \right\}, \quad (10.10.21)$$

который, если его подставить в (10.10.1), приводит к

$$c_2(p_3, p_4, s) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y_3 - y_4| \right\}. \quad (10.10.22)$$

Поэтому, если определить корреляционную длину Λ как расстояние по быстроте, на котором корреляция падает в e раз по сравнению со своим максимальным значением, то теория Редже предсказывает

$$\Lambda = [\alpha_P(0) - \alpha_R(0)]^{-1} = 2. \quad (10.10.23)$$

Оказывается, что это довольно хорошо выполняется во многих процессах. В качестве примера приведем рис. 10.31, на котором показано, что максимальные значения корреляции достигаются в областях, где $y_3 \approx y_4$. Число Λ является довольно важным, так как оно дает ширину областей фрагментации в пространстве быстрот и указывает, что необходимо иметь $Y \approx 8$ (как на ускорителе CERN-ISR), для того чтобы можно было бы хорошо разделить центральную область и области фрагментации.

Это предсказание существенно зависит от факта, что каждый реджевский полюсный вклад является факторизованным, и, таким образом, корреляции возникают только вследствие нефакторизованности суммы реджевских полюсных вкладов. Однако вклады от реджевских разрезов будут, вообще говоря, не факторизованными и поэтому, например, $P \otimes P$ -разрезы должны приводить к корреляциям с бесконечной корреляционной длиной. Явное отсутствие очень сильных далеких корреляций должно означать, что померонная сингулярность P

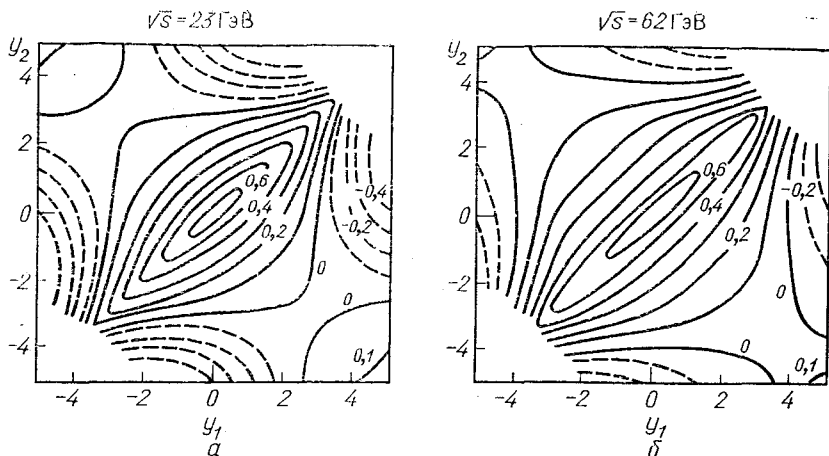


Рис. 10.31. Контуры, отвечающие постоянным значениям корреляций $c_2(y_3, y_4; s)$ в плоскости y_3-y_4 , для пар заряженных частиц (в основном пионов), рожденных в pp -столкновениях при энергиях встречных пучков CERN-ISR (Рисунок взят из работы Залевски [417])

по крайней мере приближенно факторизуется; этот вывод служит сильной поддержкой точки зрения, утверждающей, что при существующих энергиях померонную сингулярность можно аппроксимировать полюсом. Однако в следующей главе мы увидим, что существуют некоторые эффекты, связанные с далекими корреляциями.

II

РЕДЖЕВСКИЕ МОДЕЛИ МНОГЧАСТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

11.1. Введение

В гл. 3 было показано, как реджевские траектории могут образовываться при наложении требований унитарности на силу обменного взаимодействия в перекрестном канале, когда обменные силы представляются либо нерелятивистским потенциалом, либо фейнмановской диаграммой с одночастичным обменом в теории поля, либо даже когда эти силы обусловлены однореджеонным обменом в бутстрапной модели. Однако различные бутстрапные модели, рассмотренные в разд. 3.5, страдают очень серьезным недостатком: они ограничиваются только двухчастичной унитарностью в каждом из каналов. В гл. 9 и 10 мы нашли, что теория Редже может также успешно предсказывать вид асимптотического поведения, ожидаемый при исследовании многочастичных амплитуд рассеяния. Итак, сейчас можно возвратиться к некоторым из фундаментальных вопросов теории Редже. В частности, можно исследовать вопрос о том, являются ли реджевские сингуляр-

ности самосогласованными с точки зрения унитарности, может ли идея бутстрапа, введенная в разд. 2.8, быть корректной.

Для этой цели необходимы модели многочастичного рождения, и поэтому следующие два раздела этой главы посвящены изучению двух таких моделей. Одна из них — дифракционная модель, несмотря на несовершенство, описывает эффекты, связанные с померонным обменом, а также область фрагментации инклюзивных реакций. Другая модель — мультипериферическая. Хотя эта модель применима только в некоторых областях фазового пространства, она позволяет приближенно описать эффекты мультиреджеонных обменов. Оказывается, что так называемая «двухкомпонентная модель», которая объединяет в себе обе эти модели, довольно хорошо объясняет основную структуру многочастичных сечений, но не является полностью адекватной при детальном рассмотрении.

Итак, нужно сконструировать самосогласованную бутстрапную модель, основанную как на дуальности, так и на унитарности. Это очень важная задача, которая до сих пор еще не решена. В последних разделах сделаем обзор результатов, отражающих прогресс в этой области.

11.2. Дифракционная модель

Эту модель предлагали разные авторы. Она называлась: модель дифракционного возбуждения [199, 12, 239—241], модель предельной фрагментации [43], модель фэйрболов [213], новая модель [251, 252]. Каждая из них имела несколько различную физическую основу. Первоначально надеялись, что модель позволит объяснить большую часть структуры высокоэнергетических сечений, но сейчас уже ясно, что это не так. Однако, как мы в дальнейшем увидим, модель отвечает

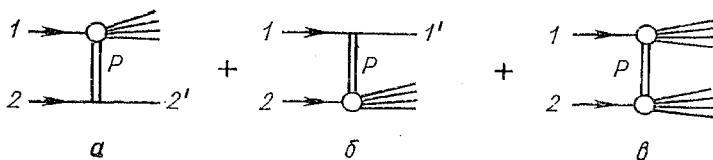


Рис. 11.1. Дифракционная модель, в которой входящие частицы возбуждаются с помощью обмена P , становясь «новой» (фэйрболом) с большой массой, которая затем распадается на обычные частицы

довольно большой доле событий ($\approx 20\%$). Вариант этой модели, который будет использован в дальнейшем, основан в большой степени на так называемой новой модели (см., например, работу [45]).

Модель содержит три диаграммы с обменом помероном (рис. 11.1), в которых налетающие частицы возбуждаются для того, чтобы образовать «новые» или «фэйрболы», которые затем распадаются на частицы, наблюдаемые в конечном состоянии. Ясно, что это позволяет воспроизвести эффект лидирующей частицы. Предполагается, что три диаграммы складываются некогерентным образом. Кроме того, полага-

ется, что неупругость достаточно мала, так что имеется немного частиц в конечном состоянии (это справедливо, так как эмпирически известно, что $\langle n \rangle \propto \ln s$), причем большая часть образующихся частиц рождается с малым поперечным импульсом (это также справедливо, см. рис. 10.17), также считается, что одномеронный обмен, приводящий к полным сечениям, не зависящим от энергии, и скейлингу, существен (на самом деле это утверждение неверное).

Сечение образования фэйрбола с массой M из частицы i обозначим $\rho_i(M)$, тогда полное неупругое сечение может быть представлено в виде суммы диаграмм, изображенных на рис. 11.1:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{in}(s) &= \int_{M_0}^{\sqrt{s}-m_1} \rho_1(M) dM + \int_{M_0}^{\sqrt{s}-m_2} \rho_2(M) dM + \\ &+ \int_{M_0}^{M_1+M_2=\sqrt{s}} \rho_1(M_1) \rho_2(M_2) R(M_1, M_2) dM_1 dM_2 \approx \\ &\approx \sum_{i=1,2} \int_0^{\sqrt{s}} \rho_i(M) dM. \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

При получении последней формулы мы ради простоты предположили, что вкладом третьей диаграммы можно пренебречь, считая R малым. В данном случае $M_0 \geq m_1, m_2$ — наименьшая возможная масса фэйрбола, а верхний предел интегрирования приближенно равен кинематическому пределу, следующему из закона сохранения энергии.

Если теперь предположить, что $N(M)$ — среднее число частиц, образующихся при распаде фэйрбола с массой M , то средняя множественность частиц равна

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_i \int N(M) \rho_i(M) dM / \int \rho_i(M) dM = \\ &= 2 \int N(M) \rho(M) dM / \sigma_{12}^{in}, \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

если положить, что все ρ_i одинаковы.

Распад фэйрбола, скажем, в пионы, описывается функцией d^3D/d^3q , которая дает вероятность того, что данный пион испускается в элемент фазового объема d^3q в системе центра фэйрбола. Итак, распределение пионов в с.ц.м. будет (для каждого фэйрбола) следующим:

$$\frac{d^3\sigma}{d^3p} = \int N(M) \rho(M) \frac{d^3D}{d^3q} \left(\frac{\partial^3 q}{\partial^3 p} \right) dM. \quad (11.2.3)$$

Последний множитель в этом выражении является якобианом для преобразования Лоренца из системы центра фэйрбола в общую с.ц.м., причем это преобразование явно зависит от массы M . Итак, выражение (11.2.3) дает распределение пионов, выраженное через три функции N , ρ и d^3D/d^3q , которые должны быть определены.

Так как в дальнейшем нас не будет интересовать распределение по p_T , которое очень просто можно построить с помощью функции

d^3D/d^3q , и поскольку q_T является неизменным при лоренцевом преобразовании вдоль оси z , то удобно определить величину,

$$A(M, y) \equiv \int \frac{d^3 D}{d^3 q} \left(\frac{\partial^3 q}{\partial^3 p} \right) d^2 p_T, \quad (11.2.4)$$

а затем пренебречь любым поперечным движением фэйрбола, т. е. положить $q_T = p_T$, что приводит к формуле

$$'d\sigma/dy \approx \int_0^{\sqrt{s}} N(M) \rho(M) A(M, y) dM. \quad (11.2.5)$$

Однако рассмотрение этих аппроксимаций не обязательно и поэтому, если необходимо, может быть использована более точная кинематика.

Простейшее предположение относительно распада фэйрбола заключается в том, что он считается изотропным в системе покоя фэйрбола, и можно положить

$$\begin{aligned} d^3D/d^3q &\propto \exp(-q^2/K^2) = \exp[-(q_L^2 + q_T^2)/K^2] \approx \\ &\approx \exp(-q_L^2/K^2) \exp(-p_T^2/K^2), \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

где K для того, чтобы описать наблюдаемое распределение по p_T , должно быть примерно равно 0,45 ГэВ/с (в качестве примера см. рис. 10.17). Написав [см. (10.2.18)]

$$q_{3L} = \mu_3 \sinh y_0, \quad (11.2.7)$$

где y_0 — быстрота пиона в системе покоя фэйрбола, а затем совершив интегрирование по q_T^2 , получим

$$dD/dy_0 \sim \exp(\mu_3 \cosh y_0/K)^2. \quad (11.2.8)$$

Теперь в с. ц. м. y_0 переходит в $y = y_0 \pm y_M$, где y_M — быстрота фэйрбола (знак \pm отвечает фрагментации в области частицы 1 или 2), и тогда из (10.2.17) и (10.2.7), пренебрегая поперечным движением фэйрболов, получаем для фрагментов частицы 1, что

$$\begin{aligned} \sinh y_M = p_{LM}/M &\approx p_M/M \approx [s^2 - 2(M^2 + m_3^2)s + (M^2 - \\ - m_3^2)^2]^{1/2}/2\sqrt{sM} &\approx_{M \gg m_3^2} (s - M^2)/(2\sqrt{s}M) \approx_{s \gg M^2} \sqrt{s}/2M. \end{aligned} \quad (11.2.9)$$

Тогда, так как $\sinh y_M \approx (1/2) \exp(y_M)$ при $y_M \gg 1$, приходим к

$$y_M \approx (1/2) \ln s/M^2. \quad (11.2.10)$$

Это выражение справедливо для тяжелых фэйрболов при высоких энергиях.

Среднее значение импульсов $q_{x,y,z}$ в (11.2.6) равно K и поэтому энергия, уносимая пионом, получившимся из распада фэйрбола, должна быть равной

$$Q \approx K\sqrt{3/2} \approx 0,5 \text{ ГэВ} \quad (11.2.11)$$

(при этом пренебрегаем массой пиона), что находится в согласии с экспериментальными данными. Итак, если при распадах фэйрболов испускаются только пионы, то среднее их число при распаде фэйрбола с массой M будет равно

$$N(M) = \gamma (M - M_0), \quad (11.2.12)$$

где M_0 — энергия основного состояния (вполне вероятно, что она равна $m_{1,2}$), а $\gamma = 1/Q \simeq 2$. Однако мы хотим, чтобы средняя множественность пионов возрастала не очень быстро с увеличением s . Для этого при заданном законе зависимости множественности от массы фэйрбола (11.2.12), существенна малая вероятность образования фэйрболов с

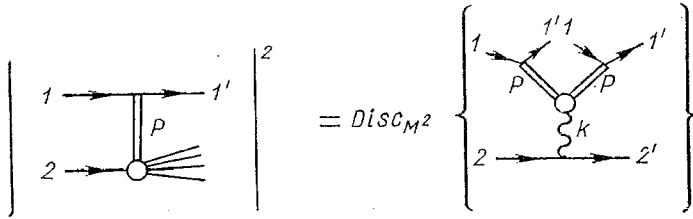


Рис. 11.2. Вклад, который дает диаграмма рис. 11.1, б, в оптическую теорему Мюллера (ср. рис. 10.23)

большими массами. Фактически если (11.2.12) подставить в (11.2.2), то, чтобы средняя множественность росла логарифмически, мы должны иметь $\rho(M) \sim 1/M^2$ и тогда

$$\langle n \rangle \rightarrow \int_0^{\sqrt{s}} \gamma \frac{dM}{M} \rightarrow \frac{\gamma}{2} \ln s. \quad (11.2.13)$$

Итак, с помощью одной эмпирической величины K , можно определить вид функций A , N и ρ .

Интересно взглянуть на изложенные выше требования с точки зрения теории Редже, так как, например, диаграмма рис. 11.1, б дает сечение инклюзивной реакции $1+2 \rightarrow 1' + X$ с $M_X = M$ в трехрежеонной области $x_1 \approx 1$, т. е. (рис. 11.2)

$$\rho_2(M) = \int_{-\infty}^0 \frac{d^2 \sigma}{dt dM} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{2Md^2 \sigma}{dt dM^2} dt = \sum_k \frac{1}{16\pi^2} \times \int_{-\infty}^0 G_{11,2}^{PP,k}(t) s^{2\alpha_P(t)-2} 2(M^2)^{\alpha_k(0)-2\alpha_P(t)+1/2} dt, \quad (11.2.14)$$

как это следует из (10.8.6). Основной вклад в интеграл по t дает область $t = 0$, так как $G(t)$ падает экспоненциально с увеличением $-t$. Лидирующая траектория k должна быть помероном, однако при $\alpha_k(0) = 1$ падение в (11.2.14) с увеличением M^2 является слишком медленным. Но мы вполне можем пренебречь этим членом на том основании, что трехмеронная константа довольно мала (вспомним также, что ненулевая константа $\gamma^{PP,P}(t=0)$ является несамосогласованной,

по крайней мере в полюсном приближении, которое мы используем). Таким образом, при современных экспериментально достижимых значениях M^2 доминирующий вклад будет при $k = R (= \rho, \omega, A_2, f)$ с $\alpha_R \approx 0,5$, что приводит к

$$\rho_2(M) \sim 1/M^2. \quad (11.2.15)$$

Итак, с этой точки зрения видно, что модель как будто работает только при промежуточных M^2 , но никак не для больших M^2 . При этом нужно помнить, что при $M^2 \rightarrow s$ мы уже не находимся в трехреджеонной области.

Жакоб и др. [251, 252] использовали параметризацию

$$\rho_i(M) = c_i \frac{\exp[-\beta_i/(M-m_i)]}{(M-m_i)^2}, \quad i=1,2, \quad (11.2.16)$$

которая обладала требуемым асимптотическим поведением M^{-2} , причем при $M = m_i + \beta_i/2$ это распределение имело максимальное значение; c_i и β_i — свободные параметры, которые подбирали из условия описания экспериментальных данных по σ_{12}^{in} инклюзивным распределениям и т. п.

Только из-за того, что функция $\rho(M)$ имеет поведение M^{-2} при больших M , можно воспроизвести инклюзивные распределения и, в частности, их плоскую центральную область. Вследствие того что $y = y_0 \pm y_M$, из (11.2.8) следует, что $y_M \approx 0$ в центральной области $y \approx 0$. Причем из рассмотрения (11.2.9) получается, что последнее требование означает $M \approx \sqrt{s}$. Итак, эта область должна быть занята фэйрболами с максимально возможными массами. Поскольку $\rho(M) N(M) \sim M^{-1}$, то от этой области имеется конечный вклад в интеграл в выражении (11.2.5), и, таким образом, центральное плато может образоваться таким способом, как изображено на рис. 11.3.

Поскольку из (11.2.2), (11.2.13) следует

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\sigma_{12}^{in}} \int \frac{d\sigma}{dy} dy \rightarrow \frac{\gamma}{2} \ln s, \quad (11.2.17)$$

Рис. 11.3. Хвосты распределений от распада двух «новых» (фэйрболов), которые образуют плато в центральной области пространства быстрот

имеем выражение

$$\frac{1}{\sigma_{12}^{in}} \frac{d\sigma}{dy} \Big|_{\text{плато}} \approx \frac{\gamma}{2} \approx 1,$$

которое согласуется с экспериментальными данными с точностью до фактора, равного двум.

Конечно, третья диаграмма рис. 11.1 также может быть включена в рассмотрение. Некоторые авторы (например, Хуа) считают эту диаграмму наиболее важной, другие, — по крайней мере, столь же существенной при высоких энергиях, как и остальные учтенные нами диаграммы. Однако так как даже с такими модификациями невозможно объяснить многие характерные и существенные свойства многочастичных реакций, мы не будем обсуждать здесь эти варианты.

Первая проблема связана с корреляциями частиц. Из (10.3.4) и (11.2.2) получаем с учетом (11.2.12) и (11.2.15)

$$\langle n(n-1) \rangle = 2 \int \frac{N(M)(N(M)-1)\rho(M)dM}{\sigma_{12}^{in}} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} dM \rightarrow \sqrt{s}. \quad (11.2.18)$$

Следовательно, несмотря на то что $F_1 \sim \ln s$, $F_2 \sim \sqrt{s}$, из (10.10.4) получается, что и $C_2 \sim \sqrt{s}$. Фактически, модель предсказывает

$$C_n \sim F_n \sim (\sqrt{s})^{n-1}, \quad n > 1, \quad (11.2.19)$$

что противоречит экспериментальным данным при высоких энергиях (см., например, рис. 10.29).

Кроме того, поскольку $\rho(M) \sim M^{-2}$ и $N(M) \sim M$, то сечения образования n частиц σ_n ведут себя при больших n и фиксированных s как

$$\sigma_n(s) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} d\sigma_{12}^{in}/dn \sim d\sigma_{12}^{in}/dM \sim 1/M^2 \sim 1/n^2. \quad (11.2.20)$$

Это выражение получается, если вспомнить (11.2.1). Однако экспериментально обнаружено (рис. 11.4), что это сечение падает значительно быстрее при больших n , чем предсказывается (11.2.20). Кажется бы, данная проблема является недостатком рассматриваемой версии модели, обусловленным тем, что не принимаются во внимание ограничения, налагаемые конечностью фазового объема при образовании большого числа частиц. Однако, как было показано Ля Беллаком и Меньером [278], даже используя правильную кинематику, не удается получить одновременно описание плоского распределения $d\sigma/dy$ при $y \approx 0$ и σ_n .

Если при больших M^2 включить трехмерный член в (11.2.14), то становится совершенно ясно, что невозможно сохранить поведение $N(M) \sim M$, если мы также хотим оставить $\langle n \rangle \sim \ln s$. Если рассматривать померон как обычную частицу, то диаграмма рис. 11.1, б соответствует всего-навсего процессу $P_v + 2 \rightarrow X$, где P_v — виртуальный померон, тогда как M — полная энергия данного процесса. В этом случае можно было бы ожидать

$$\langle n \rangle \approx C \ln M^2, \quad (11.2.21)$$

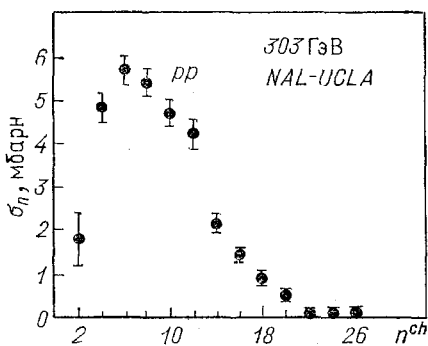


Рис. 11.4. Экспериментальные данные по σ_n в зависимости от n при фиксированном s (n — число заряженных частиц)

где C — некоторая константа, причем оказывается, что это соотношение подтверждается экспериментально (рис. 11.5). Тогда $dn = 2 CdM/M$ и, таким образом, при больших n

$$\sigma_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d\sigma_{1,2}^n}{dn} \sim M \frac{d\sigma}{dM} = 2M^2 \frac{d\sigma}{dM^2} = \int_{-\infty}^0 2M^2 \frac{d^2\sigma}{dt dM^2} dt. \quad (11.2.22)$$

Используя затем (10.8.6) с $G_{11,2}^{PP,P}(t) \sim \exp(at)$ и $\alpha_P(t) = 1 + \alpha'_P t$, найдем

$$\sigma_n \sim [a + 2\alpha'_P \ln(s - n/c)]^{-1}. \quad (11.2.23)$$

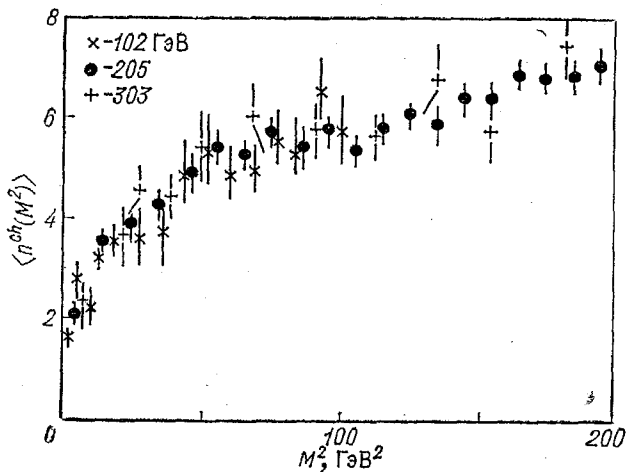


Рис. 11.5. Среднее число заряженных частиц, образующихся в реакции $pp \rightarrow pX$ как функция M^2 при различных энергиях. Это распределение описывается функцией $\langle n \rangle = B + C \ln M^2$ (рисунок взят из работы [170])

Итак, несмотря на то что

$$\langle n \rangle \sim \int n \sigma_n dn \propto \ln s,$$

каждое $\sigma_n \sim (\ln s)^{-1}$. С другой стороны, считая трехпомеронную вершину обращаемой в нуль при $t = 0$:

$$G_{11,2}^{PP,P}(t) \sim (-t) \exp(at),$$

получаем

$$\sigma_n \sim [a + 2\alpha'_P \ln(s - n/c)]^{-2}. \quad (11.2.24)$$

Эти результаты аналогичны выводам, которые будут сделаны в следующем разделе из мультипериферической модели. Таким образом, ясно, что обмен помероном не может привести к согласованному описанию зависимости σ_n от множественности n . Итак, даже принимая во внимание тот факт, что трехреджеонный формализм строго применим только при $M^2/s \ll 1$, тем не менее ясно, почему «новая» модель является некорректной.

Но, возможно, наиболее серьезный недостаток дифракционной модели с экспериментальной точки зрения — это предсказание, что данное дифракционное событие имеет распределение по быстроте,

подобное изображенным на рис. 11. 6, *а, б* или *в*. Характерной чертой этих распределений является большой промежуток между фрагментами частиц 1 и 2, причем эти фрагменты будут собираться внутри интервала размером y_0 [см. (11.2.8)], даже если после проведения усреднения по большому числу событий может быть получено плоское распределение по быстротам. В действительности, только некоторая доля наблюдаемых событий имеет такую структуру, тогда как значительно большая часть событий имеет более однородное распределение, характерное для мультипериферической модели рис. 11. 6, *г, д*.

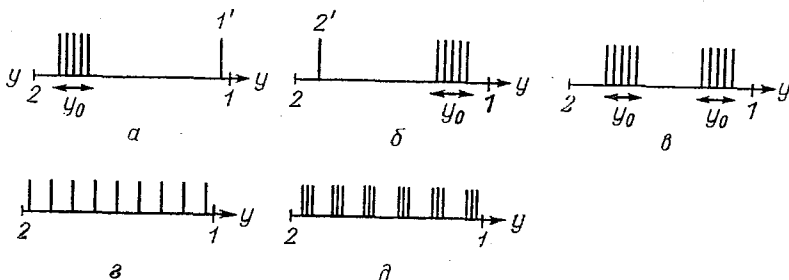


Рис. 11.6. Распределения по быстротам:

а — соответствует диаграмме рис. 11.1, *б*, в которой частица 1 имеет быстру, близкую к быстрой частицы 1, в то время как фрагменты частицы 2 сосредотачиваются внутри области размером y_0 ; *б* — соответствует диаграмме рис. 11.1, *а*; *в* — отвечает диаграмме рис. 11.1, *в*; *г* — распределение по быстротам в мультипериферической модели; *д* — распределение по быстротам для кластеров, образующихся мультипериферическим образом

Таким образом, совершенно ясно, что дифракционная модель может объяснить в лучшем случае только малую часть сечений при высоких энергиях. В разд. 11.6 будет построена модель, в которой дифракционный померонный вклад, сосредоточенный на краях спектра, будет скомбинирован с мультипериферическим вкладом, доминирующим в центральной области.

11.3. Мультипериферическая модель

Основная идея, лежащая в основе мультипериферической модели, состоит в том, что при высоких энергиях доминирующим механизмом образования является механизм типа изображенного на рис. 11.7. В этом механизме каждая частица вдоль цепочки образуется периферически, т. е. обладает малым переданным импульсом по отношению к соседним с ней частицам. Первоначальная версия этой модели, предложенная Бертоцци, Фубини и Тонином [48] и Амати и др. [18, 19] и часто называемая в литературе как «модель ABFST» по первым буквам фамилий авторов, содержит обмен элементарным пионом между двумя последовательно испущенными частицами. Сейчас считается более правильным ввести обмен реджеонами вместо пионов [110, 108, 111, 214, 216, 373], а в конце концов хотелось бы включить также и реджевские разрезы.

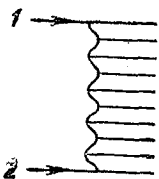


Рис. 11.7.
Мультипериферическая модель с обменов частицами R

Двухчастичная амплитуда, подобная изображенной на рис. 11.8, a , часто может быть представлена при фиксированном значении s как [ср. (6.8.11)]

$$A(s, t) \sim \exp(ct), \quad (11.3.1)$$

где $c \approx 2 \div 6 \text{ ГэВ}^{-2}$. Это представление указывает на доминирующую роль сингулярностей при малых t и, следовательно, на большой радиус действия сил. Как уже обсуждалось в разд. 2.4, можно думать, что пучок взаимодействует сильным образом с периферийной областью мишени и амплитуда быстро затухает с увеличением $-t$. В этом смысле можно считать взаимодействие периферическим, если сказать, что подавляющая часть событий содержится в области $|t| \leq \tau \equiv 0,5 \text{ ГэВ}^2$.

Читатель, должно быть, обратил внимание, что в данном случае слово «периферический» используется несколько в ином смысле, чем в разд. 8.6, где под этим словом понимали доминирование прицельного параметра $b \approx R = 1 \text{ Фм}$, что приводило к зависимости от t вида $J_n(R\sqrt{-t})$. Довольно огорчительно, что в настоящее время оба значения этого слова одинаково часто используют в литературе.

Аналогично можно сказать, что многочастичная амплитуда, показанная на рис. 11.8, b , будет периферической, если $|t| \leq \tau$, и можно ожидать, что эта область будет доминирующей областью в распределении по t при $s \gg s_1, s_2$. Однако минимально возможное значение $|t|$, т. е. $|t_{min}|$, определяется кинематикой и зависит от s_1 и s_2 . Из

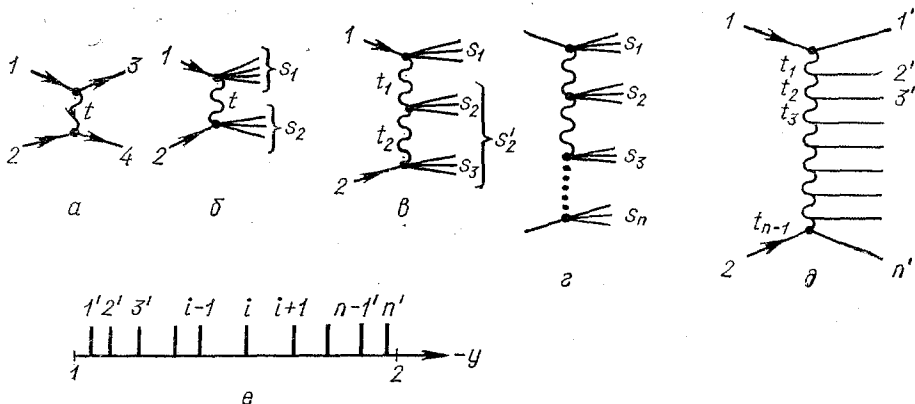


Рис. 11.8. a — Периферический обмен при рассеянии $2 \rightarrow 2$. b — Периферическая амплитуда процесса $2 \rightarrow n$. c — Дважды периферический процесс. d — Мультипериферическое образование единичных частиц, $1+2 \rightarrow 1'+2'+\dots+n'$. e — Сильное упорядочение, которое возникает, когда упорядочение частиц по быстротам точно такое же, как упорядочение по их константам связи, т. е. аналогичное тому, что показано на рис. d

(1.7.17), если заменим m_3^2 и m_4^2 соответственно на s_1 и s_2 , имеем

$$z_s = \frac{s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(s_1 - s_2)}{\{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2][s - (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2][s - (\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2})^2]\}^{1/2}}, \quad (11.3.2)$$

где

$$\Sigma \equiv m_1^2 + m_2^2 + s_1 + s_2.$$

Взяв тогда $s_1, s_1, s_2 \gg m_1^2, m_2^2$, получим

$$z_s \approx (s + 2t - s_1 - s_2) / \{[s - (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2][s - (\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2})^2]\}^{1/2}, \quad (11.3.3)$$

а в случае, когда $s \gg t_1, s_1, s_2$ и рассеяние происходит в направлении вперед, т. е. $z_s = 1$, тогда

$$t = t_{min} \approx -s_1 s_2 / s. \quad (11.3.4)$$

(Отметим, что для s -канального процесса физическими значениями t являются $t < 0$, поэтому $t_{min} \equiv -|t|_{min}$ есть на самом деле максимально возможное значение t). Поэтому процесс, показанный на рис. 11.8, б, может быть периферическим, только если $|t_{min}| \leq \tau$, т. е. если

$$s_1 s_2 / s \leq \tau, \quad (11.3.5)$$

что соответствует однородному пределу, рассмотренному в разд. 9.3.

Развивая эту идею дальше, можно сказать, что процесс является дважды периферическим (типа того, что изображен на рис. 11.8, в), если

$$|t_{1min}| = s_1 s'_2 / s \leq \tau \quad \text{и} \quad |t_{2min}| = s_2 s_3 / s'_2 \leq \tau, \quad (11.3.6)$$

и, таким образом,

$$(s_1 s'_2 / s)(s_2 s_3 / s'_2) = s_1 s_2 s_3 / s \leq \tau^2. \quad (11.3.7)$$

Отметим как следствие способа, который выбран для анализа диаграммы, что s'_2 — энергия, при которой происходит обмен с переданным импульсом равным t_2 , а не s , однако в окончательное выражение (11.3.7) переменные s_1, s_2, s_3 входят симметрично. В случае n кластеров (рис. 11.8, г) необходимо, чтобы

$$s_1 s_2 \dots s_n / s \leq \tau^{n-1}. \quad (11.3.8)$$

Непосредственное следствие этой гипотезы состоит в том, что если предположить, что все кластеры имеют некоторую среднюю массу, скажем $\langle s_i \rangle = s_A, i = 1, 2, \dots, n$, то (11.3.7) дает

$$s_A^{\langle n \rangle} / s \leq \tau^{\langle n \rangle - 1}, \quad (11.3.9)$$

где $\langle n \rangle$ — среднее число родившихся кластеров. Тогда

$$\langle n \rangle \ln s_A - \ln s \leq (\langle n \rangle - 1) \ln \tau,$$

или

$$\langle n \rangle \leq \ln(s/\tau) \ln(\tau/s_A). \quad (11.3.10)$$

Итак, среднее число кластеров растет с ростом энергии s не быстрее, чем логарифмически. Этот результат очень желателен с экспериментальной точки зрения, в частности, если под «кластерами» подразумевать обычные частицы, как это было сделано на рис. 11.8, ∂ .

В этом случае амплитуда процесса $1 + 2 \rightarrow 1' + \dots + n'$ в мультипериферической модели записывается в том же самом виде в мультиреджеонной модели (9.3.10):

$$A^{2 \rightarrow n}(p_1, p_2; p'_1, \dots, p'_n) = \gamma(t_1) R(t_1, s_{12}) G(t_1, t_2, \eta_{12}) \times \\ \times R(t_2, s_{23}) G(t_2, t_3, \eta_{23}) \dots R(t_{n-1}, s_{n-1, n}) \gamma(t_{n-1}), \quad (11.3.11)$$

где γ_i и G_i — константы связи, а

$$R(t_i, s_{i, i+1}) \equiv R_i \quad (11.3.12)$$

отвечает i -му реджеонному обмену. За исключением вершин, стоящих в концах диаграммы, все вершины зависят как от масс реджеонов, так и от угловых переменных Толлера (9.2.31):

$$\eta_{i, i+1} = s_{i, i+1, i+2} / (s_{i, i+1} s_{i+1, i+2}). \quad (11.3.13)$$

Ясно, что при написании формулы (11.3.11) мы предположили, что имеет место факторизация, так же как и мультипериферичность. Эта формула получилась довольно сложной из-за существования сигнатурных свойств реджеонов. Простейший вариант модели основан на рассмотрении обменов элементарным скалярным мезоном. При этом все константы связи γ_i и G_i просто равны g — некоторой константе, задающей силу взаимодействия, а $R_i = 1/(t - m_i^2)$ в соответствии с правилами Фейнмана, сформулированными в разд. 1.12.

Формула (11.3.11) может быть приближенно справедливой только в области, где $|t_i| \leq \tau$, $s_{i, i+1} \gg s_0$ при $i = 1, \dots, (n - 1)$. Однако эта область представляет собой только малую часть существующего фазового объема, а, как уже обсуждали в разд. 9.2, вероятно, многие события будут иметь меньшие парные энергии, например, из-за резонансного рождения. Итак, для того чтобы применять модель в более широкой области кинематических переменных, необходимо сделать некоторые предположения дуального типа о том, что эта форма амплитуды с большими парными энергиями применима также, по крайней мере в некотором усредненном смысле, для малых значений $s_{i, i+1}$.

Если теперь предположить, что модель приближенно справедлива во всем фазовом объеме, то с помощью (1.8.5) можно вычислить сечение образования n частиц:

$$\sigma_n \equiv \sigma_{12 \rightarrow n} \approx \frac{1}{2s} \int d\Phi_n |A^{2 \rightarrow n}|^2, \quad (11.3.14)$$

где $d\Phi_n$ — элемент n -частичного фазового объема (1.8.6). Если теперь перейти в систему покоя частицы 1, то можно написать [216]:

$$p_1 = (m_1, 0, 0, 0); \\ p_2 = (m_2 \operatorname{ch} Y, 0, 0, m_2 \operatorname{sh} Y), \quad (11.3.15)$$

где [см. (10.2.22)]

$$Y \equiv y_2 - y_1 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \ln [s / (m_1 m_2)], \quad (11.3.16)$$

а для частиц в конечном состоянии [см. (10.2.18)]

$$p_i' = (\mu_i \cosh y_i, \mathbf{p}_{iT}, \mu_i \sinh y_i). \quad (11.3.17)$$

Затем из (1.8.6) и (10.3.5) получается

$$d\Phi_n = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^3 \mathbf{p}_{iT} dy_i}{16\pi^3} \right) (2\pi)^2 \delta^2 \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{iT} \right) \frac{1}{2} 2\pi \times \\ \times \delta \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \exp(y_i) - m_1 - m_2 \exp Y \right). \quad (11.3.18)$$

Для того чтобы упростить ситуацию, напомним для реджеонной амплитуды приближенное выражение

$$\gamma_i R_i \approx g (s_{i,i+1})^\alpha, \quad (11.3.19)$$

полностью игнорируя зависимости γ_i , G_i и α_i от t_i и углов Толлера (11.3.13). Тогда формула (11.3.11) приобретает вид

$$A^{2 \rightarrow n} \approx g^n \sum_{i=1}^{n-1} (s_{i,i+1})^\alpha, \quad (11.3.20)$$

В этом выражении

$$s_{i,i+1} \equiv (p_i' + p_{i+1}')^2 \approx \mu_i \mu_{i+1} \exp(y_{i+1} - y_i) \quad (11.3.21)$$

[см. (10.2.22)] и если каждое $s_{i,i+1}$ имеет большое значение, то $y_{i,i+1} \gg y_i$ для всех i . В этой области фазового пространства мы имеем так называемое «сильное упорядочение» по быстрой, т. е. когда частицы упорядочены по быстрой (рис. 11.8, е), что соответствует упорядочению по их вершинам в диаграмме на рис. 11.8, д. Однако ясно, что это справедливо только в некоторой части фазового пространства. В таком случае

$$\prod_{i=1}^{n-1} s_{i,i+1} = \mu_1 \mu_2^2 \dots \mu_{n-1}^2 \mu_n \exp(y_n - y_1), \quad (11.3.22)$$

и максимальный вклад в интеграл по (11.3.18) дает область $\mathbf{p}_{iT} \approx 0$. Из (10.2.2) тогда следует $\mu_i^2 \approx m_i^2 = m^2$, если считать, что частицы $1'$, $2'$, ..., n' имеют одинаковые массы. Следовательно,

$$A^{2 \rightarrow n} \approx g^n [(m^2)^{n-2} \mu_1 \mu_2 \exp(y_n - y_1)]^\alpha. \quad (11.3.23)$$

Учет δ -функций (11.3.18) приводит к

$$\mu_i \exp(-y_i) \approx m_1 \quad \text{и} \quad \mu_n \exp(y_n) \approx m_2 \exp(Y).$$

(учитывая, что $y_{i+1} \gg y_i$ для всех i , поэтому всеми другими членами в δ -функциях можно пренебречь) и, таким образом

$$A^{2 \rightarrow n} \approx g^n [(m^2)^{n-2} m_1 m_2 \exp(-Y)]^\alpha = g^n [(m^2)^{n-2} s]^\alpha, \quad (11.3.24)$$

как это следует из (11.3.16). Итак, с помощью приведенных выше аппроксимаций мы устранили все зависимости $A^{2 \rightarrow n}$ от парных энергий и переданных импульсов.

Положив затем

$$z_i = y_{i+1} - y_i \quad (11.3.25)$$

и игнорируя p_{iT} в формуле (11.3.18), получим после довольно простых манипуляций

$$d\Phi_n \sim \frac{\exp(-Y)}{2m_1 m_2} \prod_{i=1}^{n-1} dz_i \delta\left(Y - \sum_{i=1}^{n-1} z_i\right). \quad (11.3.26)$$

Таким образом,

$$\sigma_n \sim g^{2n} s^{2\alpha-2} \int_0^Y \prod_{i=1}^{n-1} dz_i \delta\left(Y - \sum_{i=1}^{n-1} z_i\right). \quad (11.3.27)$$

Теперь из соотношения Фейнмана (1.12.4)

$$\int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(\Sigma\alpha - 1) = 1/(n-1)!$$

с помощью подстановки $\alpha_1 = z_i/Y$ получаем

$$\int_0^Y dz_1 \dots dz_{n-1} \delta(\Sigma z_i - 1) = Y^{n-2}/(n-2)!. \quad (11.3.28)$$

Заменяя g на \bar{g} , которое является средним значением g в той области фазового объема, по которой идет интегрирование, приходим к выражению

$$\sigma_n = s^{2\alpha-2} \bar{g}^4 (\bar{g}^2 Y)^{n-2}/(n-2)! \quad (11.3.29)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{12}^{tot} = \sum_n \sigma_n = \sum_{n=2}^{\infty} s^{2\alpha-2} \bar{g}^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^{n-2}}{(n-2)!} = \bar{g}^4 \exp(Y(2\alpha-2 + \bar{g}^2)). \quad (11.3.30)$$

Поэтому, для того чтобы получить постоянное полное сечение, необходимо

$$2\alpha-2 + \bar{g}^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = 1 - \bar{g}^2/2. \quad (11.3.31)$$

Следовательно, $\alpha < 1$ и амплитуда, которая получилась, не может преобладать над вкладом от многократного обмена помероном. Последовательный обмен P должен был бы дать $\sigma_n \sim (\ln s)^{n-2}$ и $\sigma_{12}^{tot} \sim \sim s^{\bar{g}^2}$, что противоречит ограничению Фруассара [168, 169].

Если (11.3.31) подставить в (11.3.29), то найдем ($Y = \ln s$)

$$\sigma_n = \bar{g}^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^{n-2}}{(n-2)!} \exp(-\bar{g}^2 Y), \quad (11.3.32)$$

и, таким образом,

$$\langle n \rangle = \sum_n n \sigma_n / \sum_n \sigma_n = \bar{g}^2 Y \sim (2 - 2\alpha) \ln s. \quad (11.3.33)$$

Это выражение дает требуемый логарифмический рост средней множественности с увеличением s [110]. Фактически, этот результат не зависит как-либо серьезно от подробностей модели. Так как если положить, скажем, (см. работу Фубини [179])

$$\sigma_2 = \lambda \bar{\sigma}_2, \quad (11.3.34)$$

где λ — некоторый переменный параметр (например, $\lambda = g^2$), то исходя из факторизации (рис. 11.9) получается

$$\sigma_n = \lambda^n \bar{\sigma}_n \quad (11.3.35)$$

и, следовательно,

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_n n \lambda^n \bar{\sigma}_n}{\sum_n \lambda^n \bar{\sigma}_n} = \lambda \left. \frac{d\sigma/d\lambda}{\sigma} \right|_{\lambda=1}. \quad (11.3.36)$$

Следовательно, если

$$\sigma(s) = \beta(\lambda) s^{\alpha(\lambda)} = \exp [a(\lambda) \ln s + \tilde{\beta}(\lambda)], \quad (11.3.37)$$

где α, β — произвольные функции λ , причем $\beta(\lambda) = \exp [\tilde{\beta}(\lambda)]$, то

$$\langle n \rangle = (\lambda d\alpha/d\lambda) \ln s + \lambda d\tilde{\beta}/d\lambda \Big|_{\lambda=1}. \quad (11.3.38)$$

Таким образом, пока имеется некоторая (неважно какая) динамическая связь между степенным поведением $\sigma(s)$ и некоторой факторизуемой силой связи, всегда будем получать, что

$$\langle n \rangle \sim \ln s \quad (11.3.39)$$

вне зависимости от деталей модели.

Подстановка (11.3.33) в (11.3.32) дает

$$\sigma_n = \bar{g}^n \langle n \rangle^{n-2} \exp(-\langle n \rangle) / (n-2)! \quad (11.3.40)$$

т. е. при фиксированном s распределение σ_n в зависимости от n имеет вид пуассоновского распределения, ширина которого растет с увеличением s подобно $\ln s$. А среднее расстояние между частицами в пространстве быстро равно

$$\Delta y = Y / \langle n \rangle = 1 / \bar{g}^2, \quad (11.3.41)$$

как это следует из (11.3.33).

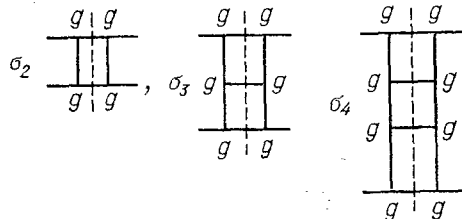


Рис. 11.9. Разрезы, которые дают различные многочастичные сечения в мультипериферической модели.

Каждый последующий член содержит на один множитель g^2 больше, чем предыдущий

Вероятность того, что i -я частица имеет быстроту $y_i = \sum_{j=1}^{i-1} z_j$, получается следующей:

$$\frac{d\sigma_{n,i}}{dy} = \exp[Y(2\alpha - 2)] \bar{g}^{2n} \int_0^Y \sum_{j=2}^{n-1} dz_j \delta\left(Y - \sum_{j=1}^{n-1} z_j\right) \times \\ \times \delta\left(y - \sum_{j=1}^{i-1} z_j\right) = \exp[Y(2\alpha - 2)] \bar{g}^{2n} \frac{(y)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{(Y-y)^{n-i-2}}{(n-i-2)!}, \quad (11.3.42)$$

как это следует из (11.3.28). Причем вычисления основаны на том, что $(i-1)$ частиц имеют быстроту $y < y_i$, а $(n-i)$ частиц имеют быстроту y в интервале (y_i, Y) , как это показано на рис. 11.8, е. Это распре-

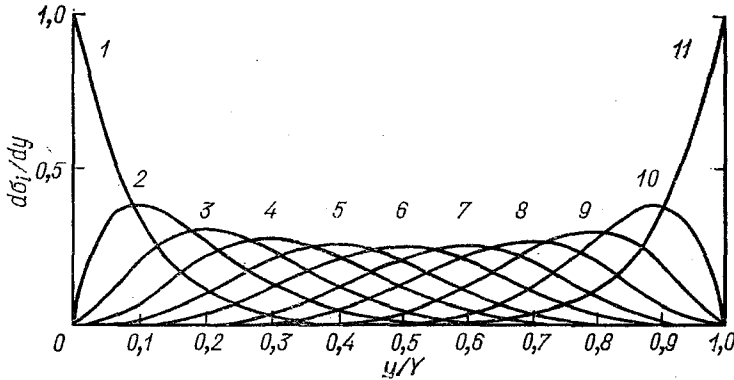


Рис. 11.10. Распределение по быстротам для i -образовавшихся частиц $d\sigma_i/dy$ (в произвольных единицах) в мультипериферической модели для 11 образовавшихся частиц.

Рисунок взят из работы [373]

деление показано на рис. 11.10. Итак, полное инклюзивное распределение имеет следующую формулу:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{n=3}^{\infty} d\sigma_{n,i}/dy = \sum_{n=3}^{\infty} \exp[Y(2\alpha - 2)] \bar{g}^{2n} Y^{n-3}/(n-3)!, \quad (11.3.43)$$

поскольку биномиальное разложение дает

$$Y^{n-3}/(n-3)! = (Y-y+y)^{n-3}/(n-3)! = \\ = \sum_{i=1}^{n-2} (Y-y)^{n-i-2} y^{i-1}/[(n-i-2)!(i-1)!],$$

и поэтому

$$d\sigma/dy = \bar{g}^6 s^{2\alpha-2} + \bar{g}^3 = \bar{g}^6, \quad (11.3.44)$$

если, конечно, считать, что (11.3.31) выполняется; это приводит к тому, что $\bar{\sigma}_{12}^{tot}(s) \rightarrow \bar{g}^4$. Тогда получается плоское однородное скейлинговое распределение частиц в центральной области. Комбинируя (11.3.30) и (11.3.41), получаем

$$\frac{1}{\sigma_{12}^{tot}} \frac{d\sigma}{dy} = \bar{g}^{-2} = \frac{\langle n \rangle}{\ln s}. \quad (11.3.45)$$

Эта формула совпадает с аналогичным результатом, полученным в дифракционной модели [см. (11.2.17)]. Конечно, поскольку размер пространства быстрот растет с увеличением входной энергии как $\ln s$, любая модель со скейлинговым распределением в центральной области и $\langle n \rangle \sim \ln s$ должна подчиняться (1.3.45).

Аналогичным образом можно рассмотреть $d^2\sigma/dy_i dy_j$ и найти (и в этом нет ничего удивительного), что отсутствуют корреляции между образующимися частицами в этой факторизованной модели. Более простым способом это будет показано в разд. 11.5 (см. ниже).

Наиболее очевидным дефектом этой модели является то, что в ней отсутствует указание на какой-либо эффект лидирующей частицы, т. е. она не предсказывает никакого специфического усиления в распределении вероятности для частиц, имеющих быстроты, близкие к тем, которые имеют частицы пучка или мишени. В дифракционной модели это усиление возникает очень естественным образом. Следовательно, необходимо попытаться скомбинировать эти две модели, чем мы и будем заниматься в разд. 11.6. Однако первое, что необходимо все-таки было бы сделать, — это проверить внутреннюю самосогласованность мультипериферической модели.

11.4. Мультипериферический бутстрап

При написании мультипериферической амплитуды в мультиреджеонном виде (11.3.11) мы можем использовать любые реджевские полюса R . А затем при возведении в квадрат амплитуды в (11.3.14) и последующем суммировании по n можно получить поведение (11.3.30) полного сечения. Таким образом, в (11.3.31) содержится условие самосогласованности поведения полного сечения с точки зрения траектории, которую мы использовали. Но очевидно, что самосогласованность отсутствует, потому что для постоянства $\sigma^{tot}(s)$ требуется обмен помером с $\alpha(0) = 1$, тогда как (11.3.31) требует, чтобы

$$\alpha(0) = 1 - \bar{g}^2/2 < 1. \quad (11.4.1)$$

Вместо этого можно было бы потребовать самосогласованности реджеонов на входе и на выходе и потребовать, сравнивая (6.8.4) и (11.3.30), чтобы

$$\sigma_{12}^{tot}(s) \sim s^{\alpha-1} = \sum_n \sigma_n \sim s^{2\alpha-2-\bar{g}^2}, \quad (11.4.2)$$

и тогда [110]

$$\alpha(0) = 1 - \bar{g}^2 < 1. \quad (11.4.3)$$

Все это является простым примером бутстрапных вычислений. Входные реджеоны, стоящие в мультипериферической цепочке, используются в соотношении унитарности, чтобы построить лестницы (рис. 11.11), которые, будучи просуммированы, снова дают реджеон; для самосогласованности этот реджеон должен быть идентичен входным реджеонам. Ясно, что это может осуществляться в лучшем случае приближенно, потому что для полной самосогласованности мы должны были бы включить разрезы в мультипериферические цепочки и рассмотреть диаграммы с пересекающимися перекладинами, которые также дают на выходе разрезы. Мы вновь рассмотрим эту проблему в последнем разделе. Но здесь мы хотим исследовать проблему в рам-

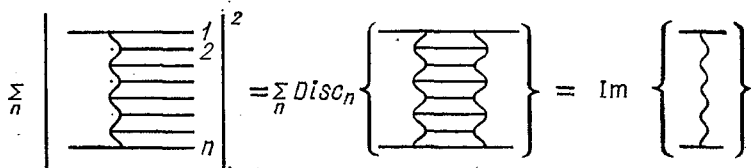


Рис. 11.11. Мультипериферический бутстрап для реджевской траектории

ках аппроксимации, которая наиболее близка к полюсной, и поэтому мы будем придерживаться сильного упорядочения [см. (11.3.21) и следующие формулы] с непересекающимися перекладинами.

Если принять модель с обменами полюсами Редже (11.3.11) для всех амплитуд $2 \rightarrow n$, то скачок через двухчастичный разрез (рис. 11.12, б) дается формулой [ср. (8.2.11)]

$$D_2(s, t) = \frac{1}{16\pi^2 s} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{dt_1 dt'_1 \theta(-\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t'_1)^{1/2})} \gamma^2(t_1) \times \\ \times R(t_1, s) \gamma^{*2}(t'_1) R^*(t'_1, s), \quad (11.4.4)$$

а выражение для полного s -канального скачка (см. рис. 11.12) имеет вид

$$D(s, t) = \sum_{n=2}^{\infty} D_n(s, t) = D_2(s, t) + \sum_{n=3}^{\infty} \int d\Phi_n \gamma(t_1) \times \\ \times RGR \dots \gamma(t_{n-1}) \gamma^*(t'_1) R^* G^* R^* \dots \gamma^*(t'_{n-1}). \quad (11.4.5)$$

Поскольку эта бесконечная сумма содержит повторения одного и того же вклада двухреджеонного обмена, можно переписать ее рекурсионным способом [ср. (1.13.27), (3.4.20)], как показано на рис. 11.12, е, в форме, предложенной Чу и др. [108] и Гольдбергером [196]:

$$D(s, t) = D_2(s, t) + D_2 \otimes D, \quad (11.4.6)$$

где знак \otimes означает интегрирование по t_2, t'_2 , проводимое способом, похожим на (11.4.4). Строго говоря, можно было бы ожидать, что при интегрировании D_2 и D зависят от t_2, t'_2 , однако для простоты будем здесь не учитывать любые такие зависимости. Интегрирование упро-

щается, если рассмотреть t -канальные парциальные волны, определяя их [из (2.5.3)] как

$$\left. \begin{aligned} A_2(J, t) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty D_2(s, t) Q_J(z_i) ds, \\ A(J, t) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty D(s, t) Q_J(z_i) ds. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.7)$$

Тогда уравнение (11.4.6) становится [ср. (2.2.7)] следующим:

$$A(J, t) = A_2(J, t) + A_2(J, t) A(J, t)$$

и, следовательно,

$$A(J, t) = \frac{A_2(J, t)}{1 - A_2(J, t)}, \quad (11.4.8)$$

что выражает $A(J, t)$ через $A_2(J, t)$ (конечно, при условии, что мы считаем приемлемым приближения, сделанные в процессе вычисления). Отметим, что мы использовали t -канальные парциальные волны в физической области s -канала, поэтому в действительности это является проекцией $O(2,1)$, а не $O(3)$ (см. разд. 6.6).

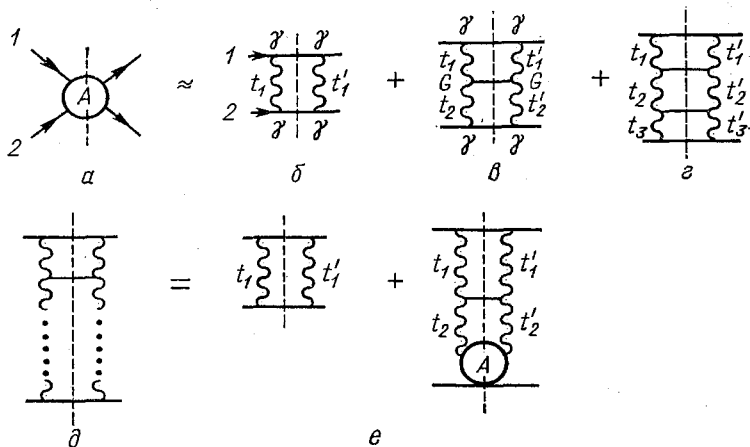


Рис. 11.12. s -Канальный разрез амплитуды (а) в мультиреджевском приближении (б)—(д). Это все может быть переписано рекурсионным образом (е)

Некоторые опасения при рассмотрении (11.4.4) и рис. 11.12, б возникают, если вспомнить о том, что эти диаграммы генерируют AFS -разрез (8.2.17), который, как мы знаем, должен был бы сокращаться с разрезами более высокого порядка, проходящими через сами реджеоны (см. разд. 8.2). Но если мы не обратим внимания на эту трудность, то тогда фиксированный полюс на входе в (11.4.4), т. е.

$$\gamma^2(t) R(t, s) \approx \gamma^2(t) s^{\alpha_0}, \quad (11.4.9)$$

дает

$$D_2(s, t) = \bar{\beta}(t) s^{2\alpha_0 - 1}, \quad (11.4.10)$$

где

$$\bar{\beta}(t) \equiv \frac{1}{16\pi^2} \int \int_{-\infty}^0 \frac{dt_1 dt'_1 \theta(\lambda)}{(-\lambda(t, t_1, t'_1))^{1/2}} \gamma^2(t_1) \gamma^2(t'_1). \quad (11.4.11)$$

Таким образом, из (11.4.7) и (2.7.2) с $\beta(t) \equiv \bar{\beta}/16 \pi^2$ получаем

$$A_2(J, t) = \beta(t) / (J - (2\bar{\alpha}_0 - 1)), \quad (11.4.12)$$

что, будучи подставлено в (11.4.8), дает

$$A(J, t) = \beta(t) / [J - (2\alpha_0 - 1) - \beta(t)], \quad (11.4.13)$$

т. е. в результате получился движущийся полюс при

$$J = \alpha(t) \equiv 2\alpha_0 - 1 + \beta(t). \quad (11.4.14)$$

Отметим, что если $\alpha_0 = 0$, то это выражение переходит в

$$\alpha(t) = -1 + \beta(t)$$

в согласии с результатами, полученными в рамках теории поля (3.4.19).

Итак, учет унитарности заменяет входной фиксированный полюс (11.4.10) на движущийся. Самосогласованность входа и выхода при $t = 0$ [область, где набирается основной вклад в интеграле (11.4.11), если $\gamma(t)$ падает достаточно быстро с ростом $|t|$] требует, чтобы

$$\alpha_0 = \alpha(0) = 2\alpha_0 - 1 + \beta(0), \text{ т. е. } \alpha_0 = 1 - \beta(0), \quad (11.4.15)$$

и, таким образом, $\alpha(0) < 1$ в согласии с (11.4.3).

Если, с другой стороны, мы попробуем в качестве затравочного взаимодействия взять движущийся полюс

$$\gamma^2(t) R(t, s) \approx \gamma^2(t) s^{\alpha(t)}, \quad (11.4.16)$$

то из (8.2.17) следует

$$D_2(s, t) = \bar{\beta}(t) s^{\alpha_c(t)} / \ln s, \quad (11.4.17)$$

где $\alpha_c(t) \equiv 2\alpha(t/4) - 1$, а это с помощью (2.7.4) дает

$$A_2(J, t) = \beta(t) \ln(J - \alpha_c(t)) \quad (11.4.18)$$

и окончательно

$$A(J, t) = \beta(t) \ln(J - \alpha_c(t)) / [1 - \beta(t) \ln(J - \alpha_c(t))]. \quad (11.4.19)$$

Таким образом, на выходе имеем AFS-разрез, который сдвигается от своего первоначального положения при $J = \alpha_c(t)$, т. е. опять самосогласованность не достигнута.

По-видимому, проблема является следствием, по крайней мере частично, того факта, что для получения даже грубого описания амплитуды рассеяния необходимо включить как померон, так и вторичные реджеоны R . Например, если рассмотреть (11.4.9) как некоторое приближение реджеонного входа $\alpha_0 = \alpha_R(0)$, то тогда (11.4.14) может

быть рассмотрено как первое приближение для померона. Затем если ввести A_2 в формуле (11.4.8) как этот фиксированный полюс, так и (11.4.13), то получится AFS -разрез, который образован померонами и который также должен быть включен в рассмотрение, и т. д. Окончательно самосогласованное решение характеризуется лидирующей траекторией вида

$$\alpha_P(t) = \alpha_R(t) + F(t) \ln [\alpha_P(t) - \alpha_c(t)], \quad (11.3.20)$$

где $\alpha_R(t)$ — вторичная реджевская траектория, а $\alpha_c(t) \equiv \equiv 2 \alpha_P(t/4) - 1$ — разрез $P \otimes P$. Для того чтобы это уравнение выполнялось, мы должны иметь

$$\alpha'_P(0) < \alpha'_R(0), \quad \alpha_R(0) < \alpha_P(0) < 1, \quad (11.4.21)$$

в противном случае $\alpha_c(0) > \alpha_P(0)$. Свойства траектории $\alpha_P(t)$ в (11.4.20) сильно отличаются при $t > 0$ и $t < 0$, и этот померон был назван Чу и Снайдером [112] «шизофреническим».

Однако, так как обнаружено, что сечения до сих пор продолжают расти при высоких энергиях, такого вида решение проблемы самосогласованности померона больше уже не кажется столь привлекательным. Во всех вариантах этого подхода, если не считать вычислительных сложностей, которые, вообще говоря, приводят к упрощению интегрирования по фазовому объему, кажется, имеются две серьезные трудности. Одна из них состоит в том, что генерируются AFS -разрезы, которые, как мы знаем из разд. 8.2, не должны были бы присутствовать, если учитывать s -канальные скачки самих реджеонов. Другая трудность заключается в необходимости предположения о сильном упорядочении, которое гарантирует присутствие только планарных диаграмм. Однако так как известно, что малые парные энергии дают наиболее важный вклад в интегралы, то все это не внушает особого доверия, особенно потому, что мы знаем о существенности вклада непланарных диаграмм, в частности, если нужно получить корректную структуру реджевских разрезов (см. работу Холлидея [214]).

11.5. Производящая функция

Очень полезным инструментом для изучения корреляций в моделях этого вида является метод производящих функций, предложенный Мюллером [315].

По аналогии со статистической механикой производящая функция $Q(z, Y)$ определяется так:

$$Q(z, Y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sigma_{n+2}(Y), \quad (11.5.1)$$

где $\sigma_{n+2}(Y)$ — сечение образования n частиц (потому что в конечном состоянии имеется $n + 2$ частиц) при данном $Y \equiv \ln(s/m_1 m_2)$ (которое определяет размер распределения по быстротам при фиксированной входной энергии s); z — произвольный параметр.

Ясно, что точка $z = 1$ особо выделена, потому что

$$Q(1, Y) = \sum_n \sigma_{n+2}(Y) = \sigma_{1\frac{1}{2}}^{tot}(Y); \quad (11.5.2)$$

$$(dQ/dz)_{z=1} = \sum_n n \sigma_{n+2}(Y) = \langle n \rangle \sigma_{1\frac{1}{2}}^{tot}(Y) = F_1 \sigma_{1\frac{1}{2}}^{tot}(Y); \quad (11.5.3)$$

$$\begin{aligned} (d^2 Q/dz^2)_{z=1} &= \sum_n n(n-1) \sigma_{n+2}(Y) = \langle n(n-1) \rangle \sigma_{1\frac{1}{2}}^{tot}(Y) = \\ &= F_2 \sigma_{1\frac{1}{2}}^{tot}(Y) \end{aligned} \quad (11.5.4)$$

и т. д. Эти выражения получаются с помощью формул (10.3.11) и (10.3.16). Таким образом, поведение функции Q в окрестности $z=1$ дает среднюю множественность образующихся частиц и поэтому можно переписать (11.5.1) как

$$Q(z, Y) = \sigma_{1\frac{1}{2}}^{tot}(Y) \sum_{n=0}^{\infty} F_n(Y) \frac{(z-1)^n}{n!} \quad (11.5.5)$$

(где, по определению, мы положим $F_0 \equiv 1$).

Если взять n -кратную производную (11.5.1) по z , а затем положить z равной нулю, то получим

$$\sigma_{n+2}(Y) = (1/n!) (d^n Q(z, Y)/dz^n)_{z=0} \quad (11.5.6)$$

и, следовательно, (11.5.1) можно рассматривать как ряд Тейлора для функции $Q(z, Y)$ около точки $z = 0$; выделенность точки $z = 0$ еще и в том, что поведение Q в окрестности этой точки дает все многочастичные сечения.

Другой ряд полезных соотношений получается, если рассмотреть

$$\ln Q(z, Y) = \ln \left[\sum_n z^n \sigma_{n+2}(Y) \right], \quad (11.5.7)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \ln Q}{dz} \right)_{z=1} &= \frac{1}{Q} \left(\frac{dQ}{dz} \right)_{z=1} = \frac{\sum_n n z^{n-1} \sigma_{n+2}}{\sum_n z^n \sigma_{n+2}} \Bigg|_{z=1} = \\ &= \frac{\sum_n n \sigma_{n+2}}{\sum_n \sigma_{n+2}} = \langle n \rangle = F_1 = C_1; \end{aligned} \quad (11.5.8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 (\ln Q)}{dz^2} \right)_{z=1} &= \left[-\frac{1}{Q^2} \left(\frac{dQ}{dz} \right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dz^2} \right) \right]_{z=1} = \\ &= -\frac{\left(\sum_n n \sigma_{n+2} \right)^2}{\left(\sum_n \sigma_{n+2} \right)^2} + \frac{\sum_n n(n-1) \sigma_{n+2}}{\sum_n \sigma_{n+2}} = \\ &= -\langle n \rangle^2 + \langle n(n-1) \rangle = C_2(s), \end{aligned} \quad (11.5.9)$$

а в общем случае

$$(d^n (\ln Q)/dz) |_{z=1} = C_n(s). \quad (11.5.10)$$

Итак, функция $Q(z, Y)$ позволяет прямо получить все корреляционные коэффициенты и дает способ получения коэффициентов C_n из σ_n , и наоборот.

В качестве тривиального примера можно рассмотреть мультипериферическую модель, в которой мы ожидаем отсутствия корреляций, потому что каждая частица испускается независимо. Из (11.3.32) следует

$$\sigma_{n+2} = \bar{g}^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^n}{n!} \exp(-\bar{g}^2 Y), \quad (11.5.11)$$

Подстановка этого выражения в определение (11.5.1) дает

$$Q(z, Y) = \bar{g}^4 \exp(-\bar{g}^2 Y) \sum_n \frac{z^n (\bar{g}^2 Y)^n}{n!} = \bar{g}^4 \exp(\bar{g}^2 Y (z-1)). \quad (11.5.12)$$

Следовательно, в согласии с (11.3.33) имеем

$$\langle n \rangle = (d \ln Q/dz)_{z=1} = \bar{g}^2 Y, \quad (11.5.13)$$

однако

$$C_2 = \left(\frac{d^2 (\ln Q)}{dz^2} \right)_{z=1} = \left[-\frac{1}{Q^2} \left(\frac{dQ}{dz} \right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{d^2 Q}{dz^2} \right) \right]_{z=1} = 0. \quad (11.5.14)$$

Аналогичным способом вычисляются все остальные корреляционные коэффициенты, которые оказываются равными нулю вследствие свойства факторизации, заложенного в этой модели.

Вообще говоря, из-за наличия только коротких корреляций можно ожидать, что все C_i возрастают логарифмически типа $\ln s$, поскольку, например, если $c_2(y_3, y_4, s)$ (10.10.1) обращается в нуль при $|y_3 - y_4| > \Lambda$ (Λ — корреляционная длина), то интеграл в (10.10.3) будет пропорционален длине полного быстрого интервала. Это подразумевает, что можно написать формулу

$$\ln Q(z, Y) = P(z) Y + S(z), \quad (11.5.15)$$

где P, S — полиномы по z . Мультипериферическая модель согласно (11.5.12) имеет в качестве этих полиномов следующие:

$$P(z) = \bar{g}^2 (z-1), \quad S(z) = \ln \bar{g}^4. \quad (11.5.16)$$

Выражение (11.5.15) очень напоминает зависимость для статистической механики газа [см. книгу Харари [226)]. Большой термодинамический потенциал Q связан со свободной энергией Гельмгольца A с помощью соотношения

$$A = kT \ln Q \quad (11.5.17)$$

Эта энергия Гельмгольца может быть представлена как сумма объемной энергии PV и поверхностной энергии S , т. е.

$$A = PV + S = kT \ln Q, \quad (11.5.18)$$

а

$$P = kT \frac{\partial}{\partial V} (\ln Q). \quad (11.5.19)$$

Если теперь мы рассмотрим пространство быстрот (см., например, рис. 11.10) как сосуд, содержащий одномерный «газ», причем этот сосуд имеет длину $V = Y$ (положение его стенок определяется быстротами налетающих частиц), то (11.5.18) может быть идентифицировано с (11.5.15) (если энергия измеряется в единицах $kT = 1$). Результат (11.5.18), полученный в рамках статистической механики, предполагает, что имеются только короткие корреляции между молекулами газа вследствие короткодействующего взаимодействия как между молекулами, так и между молекулами и стенками сосуда. Поэтому $\ln Q \sim V$ при $V \rightarrow \infty$.

Конечно, применимость этих статистических идей при существующих энергиях является довольно сомнительной, потому что даже при энергиях CERN-ISR

$$\ln s_{max} \approx Y = 8,$$

а, как мы видели раньше, корреляционная длина $\Lambda \approx 2$ [см. (10.10.23)]. Поэтому, конечно, совершенно ясно, что очень трудно найти оправдание использованию методов статистической механики для газа в сосуде, длина которого всего в четыре раза больше радиуса межмолекулярных сил. Однако, как мы увидим позднее, метод производящей функции — очень полезный технический прием при вычислении корреляций и других характеристик при изучении различных моделей.

11.6. Двухкомпонентная модель

Итак, хотя как дифракционная, так и мультипериферическая модели обладают многими свойствами, аналогичными тем, что встречаются в природе, объяснение же всех фактов в рамках одной из этих моделей получить невозможно. В этом нет ничего удивительного, потому что мы видели из дуальности, как возникает померон, который объясняет дифракционное рассеяние на реджевском языке, и что он имеет совершенно другой статус, чем другие реджеоны. И в самом деле, двухкомпонентная дуальность, в которой имеются как померон, так и реджеоны R , работает довольно хорошо не только в двухчастичном рассеянии (см. гл.7), но также и в инклюзивных реакциях (см. гл. 10). Поэтому кажется довольно вероятным, что модели, в которых складываются дифракционные и мультипериферические компоненты, могут оказаться вполне успешными при описании многочастичных сечений [227, 166] (обзор результатов на эту тему содержится в работе Харари [226]). Очевидные проблемы, которые должны будут преодолены в будущем, — это вычисление многократных обменов при учете

абсорбции и несогласованность многократного померонного обмена (см. разд. 8.6).

Мы предполагаем, что мультипериферическая компонента в амплитуде $2 \rightarrow n$ (она обозначается через R_n) дается многократным обменом траекторией R (см. рис. 11.11) и, как следует из (11.3.29), ее вклад в сечение равен

$$\sigma_n^R \sim s^{2\alpha_R - 1} \quad (11.6.1)$$

(с точностью до логарифмических поправок), где α_R — лидирующая непомеронная траектория, поэтому $\alpha_R(0) \approx 0.5$. Дуальная диаграмма, отвечающая этому члену, показана на рис. 11.13.

Дифракционная компонента P_n будет содержать много различных типов вкладов. В зависимости от того, как многопомеронные обмены возникают, а также где они возникают (рис. 11.14) компонента должна дать следующий вклад:

$$\sigma_n^P \sim \text{const} \quad (\text{с точностью до членов типа } \ln s). \quad (11.6.2)$$

Двухкомпонентная гипотеза для амплитуды $2 \rightarrow n$ гласит, что

$$A^{2 \rightarrow n} = R_n + P_n, \quad (11.6.3)$$

и, таким образом, n -частичное сечение можно символически записать, скажем, в следующем виде, если вспомнить (11.3.14):

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (1/s^2) \int d\Phi'_n (|R_n|^2 + |P_n|^2 + 2 \text{Re} \{R_n P_n^*\}) \equiv \\ &\equiv (1/s^2) (R_n^2 + P_n^2 + R_n \cdot P_n). \end{aligned} \quad (11.6.4)$$

где под знаком умножения подразумевается интегрирование по n -частичному фазовому объему, а кроме того, введено, что $d\Phi'_n \equiv \equiv d\Phi_n s/2$ [см. (11.3.26)].

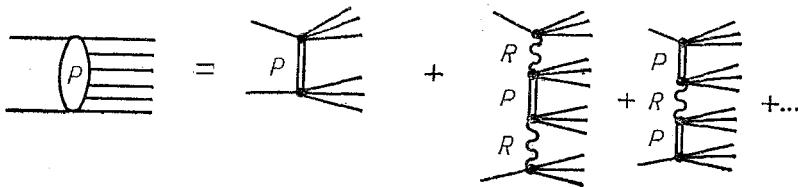


Рис. 11.14. Некоторые из вкладов в дифракционную мультипериферическую амплитуду с померонными обменами.

Члены с P и R и члены с многократными померонными обменами все включаются в дифракционную компоненту

Для амплитуды упругого рассеяния $2 \rightarrow 2$ имеем

$$\text{Im} \{A^{el}\} = \text{Im} \{P_2 + R_2\}, \quad (11.6.5)$$

и поэтому из оптической теоремы (1.9.6) мы получаем условие самоогласованности (бутстрапа): поскольку

$$\sigma^{tot} = \frac{1}{s} \text{Im} \{A^{el}\} = \sum_n \sigma_n,$$

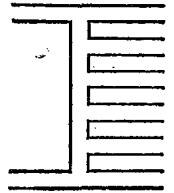


Рис. 11.13. Дуальная диаграмма для мультипериферической амплитуды с обменами реджеонами R

мы должны иметь

$$\frac{1}{s} \operatorname{Im} \{P_2 + R_2\} = \sum_n \frac{1}{s^2} \{R_n^2 + P_n^2 + P_n \cdot R_n\}. \quad (11.6.6)$$

Далее, асимптотически $P_2 \sim s$, $R_2 \sim s^{\alpha_R}$, в то время как $R_n^2 \sim s^{2\alpha_R}$, $P_n^2 \sim s^2$ и $R_n \cdot P_n \sim s^{\alpha_R+1}$ (все оценки с точностью до членов типа $\ln s$). Однако мы, конечно, не можем быть уверенными в том, что нам известно, как себя будет вести сумма \sum_n в правой части (11.6.6). Кажется вполне определенным, что часть вклада в $\operatorname{Im} \{P_2\}$ должна возникать от $\sum_n P_n^2$, а часть вклада в $\operatorname{Im} \{R_2\}$ — от $\sum_n R_n^2$, но мы видели, как в мультипериферической модели (11.3.30)

$$\frac{1}{s^2} \sum_n R_n^2 \sim s^{2\alpha_R - 2 + \bar{g}^2}, \quad (11.6.7)$$

т. е. если \bar{g}^2 достаточно большое ($\bar{g}^2 = 1$, если $\alpha_R = 0,5$), то эта сумма может также дать вклад в $\operatorname{Im} \{P_2\}$. На самом деле кажется весьма вероятным, что этот вклад будет очень важным, потому что большая часть многочастичных сечений дается частицами с малыми парными энергиями ($s_{i,i+1} < 2 \text{ ГэВ}^2$), причем в этой области энергий в рассеянии $2 \rightarrow 2$ вклад от обмена R является много большим, чем от помeronного обмена.

Итак если рассматриваются процессы типа $pp \rightarrow pp + n (\pi^+\pi^-)$, которые будут составлять наибольшую часть событий в неупругих pp -столкновениях (с заряженными частицами в конечном состоянии), то можно написать

$$\sigma_n^{inel} \approx \frac{1}{s^2} (P_n^2 + R_n^2) \equiv \sigma_n^P + \sigma_n^R, \quad (11.6.8)$$

если, конечно, мы отбросим интерференционный член $P_n \cdot R_n$. Это может быть оправдано на том основании, что обмены R дают, в основном, вклады в большие множественности, которые равномерно заполняют весь интервал быстрот (подобно тому как это показано на рис. 11.6, з), в то время как P_n дает вклад в основном в события с малой множественностью, которые сосредоточиваются в области фрагментации (см. рис. 11.6, а, б, в). Таким образом, перекрытие этих двух типов событий в интеграле (11.6.4) является, по всей вероятности, довольно малым. Относительные величины этих двух членов обозначаются p и r соответственно и определяются как

$$\sum_n \sigma_n^R = r \sigma^{inel} \quad \text{и} \quad \sum_n \sigma_n^P = p \sigma^{inel}, \quad (11.6.9)$$

очевидно, что

$$r + p = 1.$$

Множественности, к которым приводит каждая из этих двух компонент, определяются как

$$\langle n \rangle \equiv \frac{\sum_n n \sigma_n^R}{\sum_n \sigma_n^R} = \frac{\sum_n n \sigma_n^R}{r \sigma^{inel}}; \quad (11.6.10)$$

$$\langle n \rangle_P = \frac{\sum_n n \sigma_n^P}{\sum_n \sigma_n^P} = \frac{\sum_n n \sigma_n^P}{p \sigma^{inel}}$$

и, следовательно, из (10.3.8) получается, что средняя множественность пионов равна

$$\langle n \rangle = p \langle n \rangle_P + r \langle n \rangle_R, \quad (11.6.11)$$

т. е. просто среднему от множественностей каждой из компонент с соответствующим весом. Подобным образом определяются корреляции, связанные с каждой компонентой [см. (10.10.3)]:

$$\left. \begin{aligned} C_{2P} &= \langle n(n-1) \rangle_P - \langle n \rangle^2 = \sum_n n(n-1) \sigma_n^P / p \sigma^{inel}; \\ C_{2R} &= \langle n(n-1) \rangle_R - \langle n \rangle_R^2 = \sum_n n(n-1) \sigma_n^R / r \sigma^{inel}, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.12)$$

давая при этом

$$\begin{aligned} C_2 &\equiv \frac{\sum_n n(n-1) (\sigma_n^P + \sigma_n^R)}{\sigma^{inel}} - \left(\frac{\sum_n n (\sigma_n^P + \sigma_n^R)}{\sigma^{inel}} \right)^2 = \\ &= p C_{2P} + r C_{2R} + p \langle n \rangle_P^2 + r \langle n \rangle_R^2 - (p \langle n \rangle_P + r \langle n \rangle_R)^2 = \\ &= p C_{2P} + r C_{2R} + r p (\langle n \rangle_P - \langle n \rangle_R)^2, \end{aligned} \quad (11.6.13)$$

($r + p = 1$), что не является взвешенным средним от (11.6.12). Это довольно важный результат, потому что даже если $C_{2P} \sim \text{const}$ и $C_{2R} = 0$ [см. (11.5.14)], то мы будем все равно получать $C_2 \sim \ln^2 s$, подразумевающее, что имеются некоторые длинные корреляции [при этом $\langle n \rangle_R \sim \ln s$, как ожидается из (11.3.33)]. Все это приводит к довольно хорошему согласию с экспериментальными данными (см. рис. 10.29). Отметим, что длинные корреляции возникают потому, что имеется сумма двух типов обменов: P и R — таким образом факторизация является нарушенной.

Харари и Рабинович [227] (см. также [226]) описывали экспериментальные данные, полученные в pp -столкновениях, в модели такого вида, предполагая, что $\sigma_n^P = d_n$ (d_n — константы при $n = 0, 1, 2$, т. е. для двух-, четырех- и шести лучевых событий), а при $n > 3$ $\sigma_n^P = 0$ (т. е. дифракционная компонента дает вклад только в очень малые множественности), тогда как $\langle n \rangle_R = c_1 \ln s/s_1$ и $C_{2R} =$

$= c_2 \ln s/s_2$, $C_{mR} = 0$ при $m > 2$. Семь параметров $d_0, d_1, d_2, c_1, c_2, s_1, s_2$ дали возможность описать $\langle n \rangle$, C_2 и σ_n при $\rightarrow 0 \leq n \leq 6$.

Из (11.6.9) имеем

$$\rho = (d_0 + d_1 + d_2)/\sigma^{inel}. \quad (11.6.14)$$

Было найдено, что $\rho = 0,16$ и, следовательно, мультипериферическая компонента доминирует. Это вполне очевидно заранее, поскольку

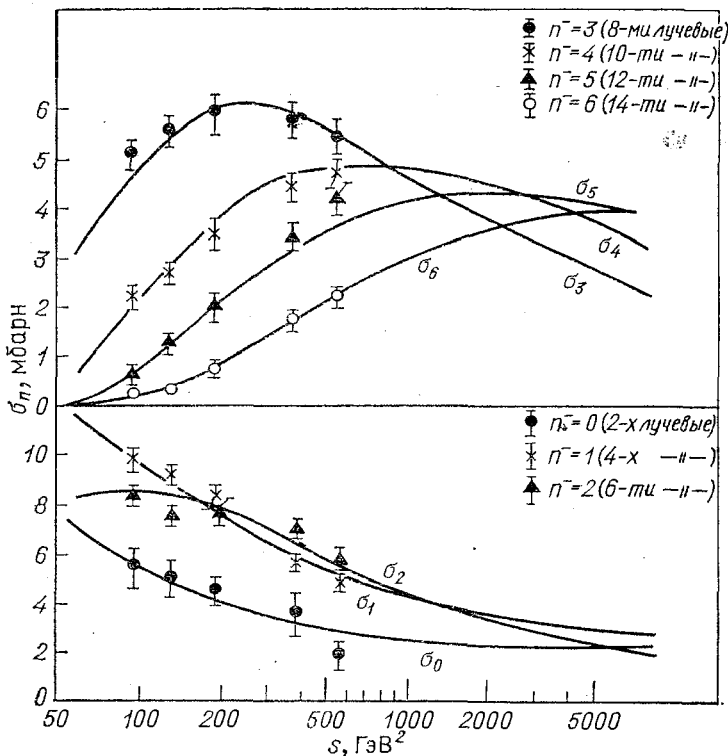


Рис. 11.15. Описание энергетической зависимости сечений рождения пар заряженных пионов в процессе $pp \rightarrow pp + n(\pi^+ \pi^-)$ в двухкомпонентной модели.

Рисунок взят из работы Харари [226]

наблюдается падение топологических сечений (сечений рождения n -частиц) (рис. 11.15). Кроме того, из (11.6.11) следует

$$\langle n \rangle = rc_1 \ln(s/s_1) + (d_1 + 2d_2)/\sigma^{inel} \rightarrow rc_1 \ln(s/s_1), \quad (11.6.15)$$

а из (11.6.13) получается

$$C_2 = rrc_1^2 (\ln(s/s_1))^2 + rc_2 \ln(s/s_2) - 2r[(d_1 + 2d_2)/\sigma^{inel}] \ln(s/s_1) + \\ + rC_2P_1 + rp \langle n \rangle^2 \rightarrow rrc_1^2 (\ln(s/s_1))^2. \quad (11.6.16)$$

Таким образом, двухкомпонентная модель дает

$$C_2/\langle n \rangle^2 \rightarrow p/r = \text{const.} \quad (11.6.17)$$

Это соотношение довольно хорошо выполняется экспериментально, причем даже значительно лучше, чем соотношение $C_2/\langle n \rangle^2 \sim (\ln s)^{-1}$, которое следует из мультипериферической модели или $\sim \sqrt{s} (\ln s)^{-2}$ получаемое из дифракционной модели (11.2.17), (11.2.19).

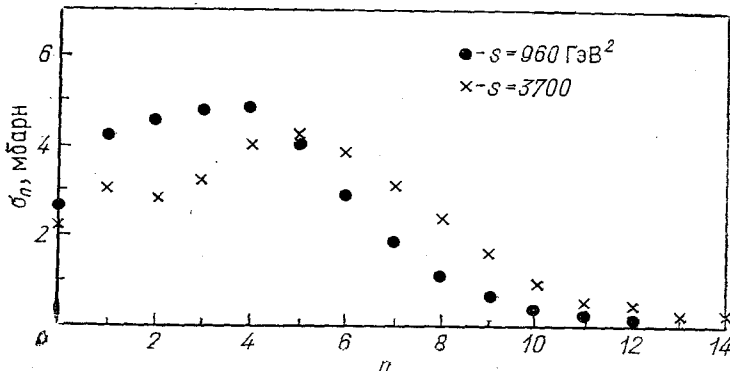


Рис. 11.16. Предсказания двухкомпонентной модели для топологических сечений (сечений рождения n частиц) при высоких энергиях.

Рисунок взят из работы Харари [226]

Из (11.5.1) и (11.5.5) имеем

$$Q_R(z, Y) = r\sigma^{inel} \exp \left\{ \sum_i [(z-1)^i / i!] C_{iR} \right\} = \\ = r\sigma^{inel} \exp \left[(z-1) \langle n \rangle_R + \frac{1}{2} (z-1)^2 C_{2R} \right] \sim s^{-c_1 + c_2/2}, \quad (11.6.18)$$

а так как [это следует из (11.5.6)]

$$\sigma_n^R = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n Q_R(z, Y)}{dz^n} \right)_{z=0}, \quad (11.6.19)$$

то все

$$\sigma_n^R \sim s^{-c_1 + c_2/2}. \quad (11.6.20)$$

С учетом (11.6.1) это означает, что $2\alpha_R - 2 = -c_1 + c_2/2$ и параметры, требуемые для описания экспериментальных данных ($c_1 = 1,0$, $c_2 = 0,35$), дают $\alpha_R(0) = 0,59$ в разумном согласии с нашими ожиданиями.

Так как из (11.6.8) и (11.3.40) следует, что

$$\sigma_n^{inel} = \sigma_n^P + \sigma_n^R = d_n + r\sigma^{inel} \langle n \rangle^n \exp \{ -\langle n \rangle \} / n!, \quad (11.6.21)$$

получаем, что двухкомпонентная модель предсказывает распределение по множественности, подобное изображенному на рис. 11.16. Распределение имеет при больших значениях $\ln s$ провал в области небольших множественностей, а пик, отвечающий мультипериферической

части, при этом отодвигается в сторону больших множественностей. Однако мы пренебрегли, между прочим, возможной зависимостью d_n от $\ln s$, учет которой может сделать это заключение неверным. Если в члене σ_n^P разрешить последовательные обмены P , то такие логарифмические члены должны возникать [см., например, (10.8.20)], но из-за того, что трехмеронная вершина мала, эти члены могут привести только к малому эффекту. Все это зависит от того, каким образом пытаться решить проблему самосогласованности для вклада P_n в (11.6.6): рассматривается $\alpha_P(0) < 1$ как в (11.4.3), $\alpha_P(0) = 1$ как в (8.6.9) или $\alpha_P(0) > 1$ как в (8.6.14), причем все эти случаи характеризуются различным поведением $\sigma^{tot}(s)$.

Однако если не обращать большого внимания на такого типа проблемы, то тогда двухкомпонентная модель, по-видимому, является довольно хорошим первым приближением при рассмотрении экспериментальных данных.

11.7. Дуальный бутстрап

Двухкомпонентная модель, которая строится с помощью дифракционной и мультипериферической моделей, и двухкомпонентная дуальность, кажется, дают правильное направление развития проблемы. Однако не ясно, как все-таки полностью использовать содержание гипотезы дуальности в том смысле, как это обсуждалось в разд. 7.3 и 10.7. Дуальность нельзя рассматривать как самосогласованную, поскольку многократный померонный обмен и планарная природа мультипериферической модели несовместимы с требованиями унитарности.

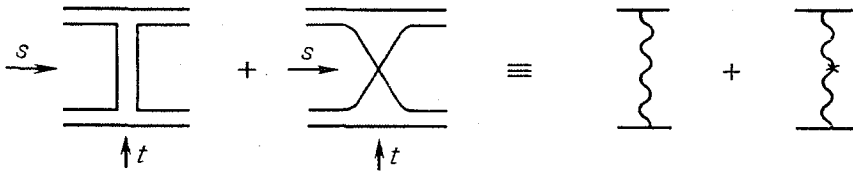


Рис. 11.17. Планарные дуальные диаграммы $s-t$ и $t-u$, которые дают два вклада в сигнатурный множитель t -канального реджеона

Недавно был достигнут некоторый прогресс в преодолении этих трудностей, что привело к лучшему пониманию дуальности [279, 391, 393, 93, 251].

При рассеянии $2 \rightarrow 2$ имеются только две диаграммы с обменом реджеоном R в t -канале (рис. 11.17): одна $s-t$ -планарная, другая $t-u$ -планарная, которые дают два скачка (в s - и u -каналах) для реджеона с определенной сигнатурой. Далее, при рассеянии $2 \rightarrow 3$ имеем четыре диаграммы, показанные на рис. 11.18, и в общем случае при исследовании n -частичного конечного состояния имеется 2^{n-1} различных диаграмм. Однако только одна из них $s-t$ -планарная, а все остальные

$(2^{n-1} - 1)$ диаграммы непланарные. Все эти диаграммы вносят одинаковые вклады в σ_n и, таким образом, аналогично (11.3.29) имеем

$$\sigma_n = 2^{n-1} g^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^{n-2}}{(n-2)!} s^{2\alpha_R - 2}, \quad (11.7.1)$$

если пренебрегаем интерференцией между различными членами.

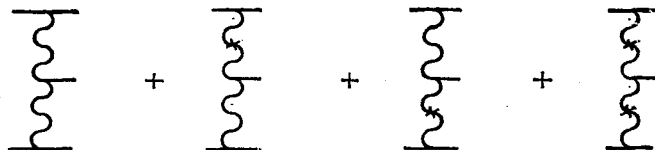


Рис. 11.18. Четыре различных вклада в сигнатурный множитель в дважды редеонную амплитуду реакции $2 \rightarrow 3$

Однако диаграмма с перекрестом, изображенная на рис. 11.19, а, не дает вклада в σ^{tot} , потому что она не вносит вклад в $\text{Im} \{A^{2 \rightarrow 2}\}$ при $s > 0$, а только при $s < 0$. Из формулы (11.6.6) имеем

$$\text{Im} \{A^{2 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \text{Im} \{R_2 + P_2\}; & (11.7.2) \\ \sum_{n=2}^{\infty} A^{2 \rightarrow n} A^{* 2 \rightarrow n}. & (11.7.3) \end{cases}$$

Графически это представлено на рис. 11.19, б, где снова пренебрегаем членами с перекрестами типа показанного на рис. 11.19, в [см. (11.6.8) и последующие формулы]. Только первая диаграмма в каждой группе является планарной и поэтому может дать вклад в R , а все остальные (непланарные) диаграммы участвуют в построении P . Следовательно,

$$\sigma^{tot}(s) = (1/s) \text{Im} \{A^{2 \rightarrow 2}\} = (1/s) \text{Im} \{R_2 + P_2\} \quad (11.7.4)$$

$$\sigma^{tot} = \sum_n \sigma_n = \sum_n 2^{n-1} g^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^{n-2}}{(n-2)!} s^{2\alpha_R - 2}, \quad (11.7.5)$$

но для каждого n только один член дает вклад в R , а остальные $(2^{n-1} - 1)$ члены в P , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \text{Im} \{R_2\} &\sim s^{\alpha_P - 1} = \sum_n (2^{n-1} - 1) g^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^{n-2}}{(n-2)!} s^{2\alpha_R - 2} \sim \\ &\sim s^{2\alpha_R - 2 + 2\bar{g}^2}, \end{aligned} \quad (11.7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \text{Im} \{P_2\} &\sim s^{\alpha_P - 1} = \sum_n (2^{n-1} - 1) g^4 \frac{(\bar{g}^2 Y)^{n-2}}{(n-2)!} s^{2\alpha_R - 2} \sim \\ &\sim s^{2\alpha_R - 2 + 2\bar{g}^2}, \end{aligned} \quad (11.7.7)$$

и, таким образом,

$$\alpha_R = 1 - \bar{g}^2, \quad \alpha_P = 2\alpha_R - 1 + 2\bar{g}^2 = 1. \quad (11.7.8)$$

Поэтому, в отличие от (3.4.13), (11.3.30) и (11.4.14), высота траектории α_R уменьшается, когда константа связи \bar{g}^2 увеличивается и, что еще более замечательно, $\alpha_P = 1$ вне зависимости от значения константы связи.

$$\text{Im}\{A^{2 \rightarrow 2}\} = \underbrace{\overline{R} \overline{P}}_a + \underbrace{\overline{P} \overline{R}}$$

$$\sum_n A^{2 \rightarrow n} A^{n \rightarrow 2} = \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} + \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} \left(= \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} + \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} \right)$$

$$+ \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} + \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} + \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} + \overline{\text{---} \text{---} \text{---}}$$

$$+ \overline{\text{---} \text{---} \text{---}} + \dots$$

$$\vdots$$

$$\overline{\text{---} \text{---} \text{---}}$$

δ Рис. 11.19. a — Вклады $R+P$ в $\text{Im}\{A^{2 \rightarrow 2}\}$. b — Дуальные диаграммы для мультиреджеонных вкладов в $\sum_n A^{2 \rightarrow n} A^{n \rightarrow 2}$.

ϵ — Члены с перекрестами типа тех, которыми пренебрегли на рис. δ

δ

Несколько более детальное рассмотрение этого подхода было предпринято Чаном и соавт. (см. [25]). В качестве каждой из амплитуд $A^{2 \rightarrow n}$ они использовали дуальные амплитуды, однако при малых парных энергиях, скажем, когда $s_{i, i+1} < s$, они аппроксимировали дуальную амплитуду ее резонансными вкладами в $s_{i, i+1}$ -канал. А когда $s_{i, i+1} > s$, то использовали реджевскую аппроксимацию (рис. 11.20, a). Кроме того, они включили в рассмотрение $SU(N)$ -симметрию ($N=2$ или 3) с помощью введения везде, где это необходимо, τ - (или λ -) матриц для каждого кварка. Эту процедуру уже описывали, когда получали формулу (9.4.26); она обеспечивает то, что $I=0$ для P и выраженные траектории с $I=0, 1$ для R , и т. д. Эта конструкция естественно приводит к тому, что

$$\alpha_P(0) > \alpha_R(0), \quad \alpha_P^1 \alpha_R^1.$$

Авторы также подставляли реджеон в интегральные уравнения, похожие на (11.4.6) (см. рис. 11.21), и проводили интегрирование по петлям аналогично тому, как это было сделано в (11.4.4). При этом требовалось, чтобы выходной реджеон был точно такой же, как входной. Это позволило определить параметры померонной траектории P , которая, при $\alpha_R^k = 0,5$ и $\alpha_R' = 1$ на входе оказалась равной $\alpha_P^k = 1,12$ и $\alpha_P' = 0,1$ на выходе. Такие параметры померонной траектории не слишком далеки от наблюдаемых на опыте значений.

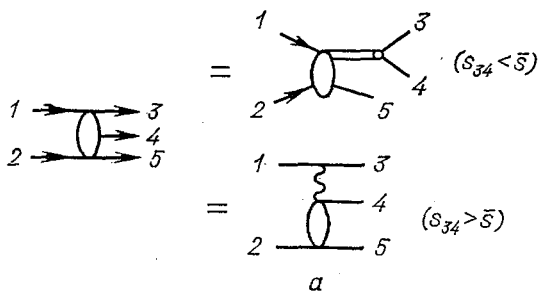
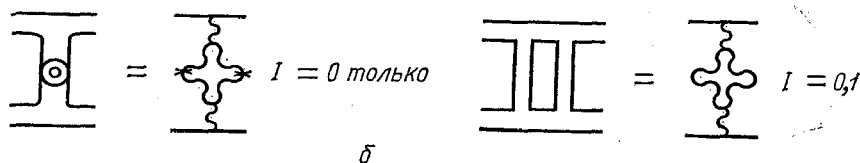


Рис. 11.20. a — Амплитуда реакции $12 \rightarrow 345$, которая представляется амплитудой резонансного образования при $s_{34} < \bar{s}$ и обменом траекторией R при $s_{34} > \bar{s}$. b — Померон с $I=0$ образуется только «перекрученными» петлями, а траектория с R с $I=0$ или I образуется неперекрученными петлями



Однако следующая итерация, включающая померон в качестве заправки, будет приводить к появлению разрезов с $\alpha_c(0) > 1$, которые возвращают нас снова к проблеме, появлявшейся уже несколько раз по ходу нашего изложения, как померон P с $\alpha_P(0) \approx 1$ может быть согласован с требованиями унитарности (см., например, (11.3.31) и

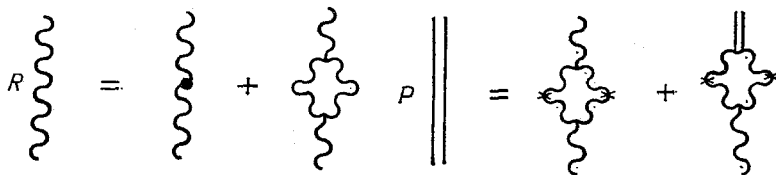


Рис. 11.21. Схематическое представление интегральных уравнений, использованных Ауэрчем и др. [25], для получения вкладов R и P . Для линий с черными кружками $s < \bar{s}$, т. е. включается только входной резонансный вклад, поскольку при $s > \bar{s}$ резонансы эквивалентны обмену траекториями R (ср. рис. 11.12, e)

последующие формулы]. Если $\alpha_P(0) < 1$, то в принципе эта проблема отсутствует, потому что при очень высоких энергиях самосогласованное решение будет выглядеть довольно похожим на мультиперифери-

ческий бутстрап с единственным доминирующим полюсным обменом померонной траекторией и $\alpha_P(0) = 1 - \bar{g}^2$ как в (11.4.3). Продолжающийся рост $\sigma^{tot}(s)$ при энергиях CER-N-ISR нужно рассматривать в этом случае как эффект, связанный с еще не асимптотическим поведением; в конце концов $\sigma^{tot}(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Если $\alpha_P(0) = 1$, то полюс не может доминировать в асимптотической области, если только трехпомеронная константа связи не обращается в нуль $\gamma^{PP,P}(t)$ при $t \rightarrow 0$ [см (10.8.21)], что позволяет запретить многопомеронные обмены, однако с феноменологической точки зрения это кажется неоправданным.

Итак, самосогласованное решение предполагает доминирующую роль разрезов, аналогично тому как было в реджеонной теории поля, упомянутой в разд. 8.3, а полное сечение $\sigma^{tot}(s) \sim (\ln s)^v$ с $v > 0$ и $\alpha_P(t) = 1 + \alpha'(t)^k$. (см. [3]), т. е. траектория померона совершенно не похожа на ту, что изображена на рис. 6.6, *e*. Или если $\alpha(0) > 1$, то мы имеем полюсную доминантность и все проблемы, связанные с абсорбционными поправками, обсуждавшиеся в разд. 8.6, возникают не только для разрезов $P \otimes P$, но и для разрезов $R \otimes P$. Таким образом, очевидная доминантность полюсов при существующих энергиях становится неасимптотическим эффектом. Фактически, как уже было отмечено в разд. 8.3 и 10.8, эти проблемы самосогласованности требуют рассмотрения не только того, что происходит при больших значениях $\ln s$, но и при больших значениях $\ln(\ln s)$. Эти энергии недостижимы даже в принципе.

В настоящее время оказалось, что реджевские полюса описывают экспериментальные данные значительно лучше, чем можно было бы ожидать. Это очень приятный сюрприз для физиков, занимающихся феноменологией. Но, с другой стороны, это означает, что имеется довольно слабая надежда взглянуть с помощью эксперимента на природу унитарных ограничений, которые должны взаимно связывать полюса и разрезы, а также ограничить реджеонные параметры. Возможно, что с помощью этих унитарных ограничений реджеонные параметры даже полностью определяются в смысле полного бутстрапа. Модели, обсужденные в этой главе, представляют собой только малое продвижение в направлении такой самосогласованной унитаризации и хотя объединение этих моделей с гипотезой дуальности оказывается полезным для теории померона, тем не менее мы все еще далеки от построения этой теории. Эти задачи до сих пор рассматриваются только в рамках теории возмущений, при этом эффективным параметром разложения является $\gamma^{PP,P}(t) \ln s$, а не, скажем, вычет в (11.3.20), см. [104]).

Таким образом, поскольку $\gamma^{PP,P}(0)$ мало, то имеется довольно хорошая сходимость при малых $\ln s$, но это разложение не будет сходиться при достаточно больших $\ln s$, и поэтому мы не добьемся самосогласованного асимптотического поведения.

В свете этих проблем довольно сложно понять, почему дуальные модели, которые основаны на наложении требований желаемого асимптотического поведения неунитарных амплитуд, отвечающих узким резонансам, оказываются столь успешными. В частности, почему все

дуальные модели требуют, даже в борновском приближении, прямолинейности траекторий, т. е. $\alpha_B(t) = \alpha_B^0 + d_B' t$, где $\alpha_B^0 \approx 1 \text{ ГэВ}^{-2}$ представляет собой характерный масштаб в адронных реакциях. Если унитарность приводит только к малым изменениям этих траекторий $|\alpha(t) \approx \alpha_B(t)$ при всех t , то они должны удовлетворять дисперсионному соотношению (3.2.12) с двумя вычитаниями с малой мнимой частью $\text{Im} \{\alpha\}$. Однако реджевские траектории, которые образуются при итерациях основной обменной силы в лестнице некоторого типа, как в потенциальном рассеянии (см. разд. 3.3) и теории поля (см. разд. 3.4) или реджезованной мультипериферической модели (см. разд. 11.3), подчиняются дисперсионному соотношению (3.3.11) с одним вычитанием, где n — константа, которая зависит от асимптотического поведения борновского приближения [см. (3.3.32), (3.4.19)]. Но положение траектории (а следовательно, и $\alpha'(0)$) зависит от константы связи g^2 через соотношение унитарности, а $\alpha' \rightarrow 0$, когда $g^2 \rightarrow 0$.

Предполагалось [см. [392)], что величину $\sqrt{\alpha'} \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}$, возможно, нужно рассматривать как фундаментальную длину, причем на расстояниях, больших ее, концепция точечных частиц теряет какой-либо смысл.

Однако если α_B^{-1} является фундаментальным энергетическим масштабом в адронной физике, то трудно представить, как можно было бы построить траектории, исходя из условий унитарности, как это требуется бутстрапными моделями [128, 121].

Еще более непонятной является связь между кварковой моделью, которая описывает структуру внутренней симметрии дуального борновского приближения, и динамикой унитарных моделей. Потенциал осцилляторного типа (как у гармонического осциллятора) между кварками, который необходим для образования линейных траекторий и воспроизведения резонансного спектра (см. разд. 3.3) и который в действительности должен предотвратить рождение кварков в экспериментах по рассеянию частиц, — этот потенциал физически совсем не очевиден при рассмотрении процессов рассеяния частиц. По-видимому, силы, действующие между частицами (из-за обменов реджеонами), совершенно отличны от сил между кварками, несмотря на предположение, что частицы состоят из кварков. Предложены различные схемы, где невылетающие кварки находятся в «мешках», однако значимость этих моделей для реджеонной динамики до сих пор не ясна [86].

Таким образом, мы все еще далеки от понимания того, почему теория Редже и, в частности, гипотеза о доминировании реджевских полюсов, дает такие хорошие результаты. При всем при этом унитаризация, которая вначале привела к возникновению реджеонов и использованию именно реджеонов, а не элементарных частиц с фиксированным спином, оказалась не очень важной. Однако, по крайней мере, стало значительно более понятно, какие именно вопросы в теории сильных взаимодействий нужно поставить; это позволяет надеяться, что некоторые из этих фундаментальных вопросов могут быть разрешены в недалеком будущем.

ПОЛЮСА РЕДЖЕ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

12.1. Введение

До сих пор мы рассматривали только адронные взаимодействия представляющие собой основную сферу приложения реджевской теории. Предполагая, что изоспиновая симметрия в процессах рассеяния выполняется точно, мы игнорировали электромагнитные эффекты, и поэтому не возникало необходимости рассматривать слабые взаимодействия частиц, как, например, β -распад и т. п. Конечно же, любое исследование электромагнитных или слабых взаимодействий адронов обязательно включает и излучение их адронных свойств, потому что именно сильные взаимодействия в основном обуславливают составную структуру адронов. Теория Редже играла малую, но не пренебрежимо малую роль в развитии теории этих слабых взаимодействий. Поэтому если и существует какая-либо возможность объединения всех взаимодействий, то она должна быть согласована с теорией Редже. В этой главе мы кратко обсудим возникающие проблемы.

В основном существуют две проблемы. Во-первых, слабые взаимодействия (а с этого момента мы будем использовать термин «слабые» по отношению как к электромагнитным, так и к слабым взаимодействиям) в общем случае формулируются в терминах лагранжевой теории поля для взаимодействий фундаментальных частиц. Это лептоны l (т.е. электрон e , мюон μ и нейтрино ν_e, ν_μ), фотон γ , векторный бозон W и т. п. и фундаментальные адроны (которые, по крайней мере вначале, не лежат на реджевских траекториях, а возникают как символы Кронекера $\delta_{\sigma J}$ в J -плоскости). Адроны, в свою очередь, могут быть составлены из фундаментальных частиц — кварков, связанных друг с другом посредством обмена «глюонами». При этом возникает вопрос о том, могут ли эти фундаментальные частицы реджезоваться в результате взаимодействия, т. е. можно ли их разместить на траекториях Редже. Ясно, что при попытке объединить теорию поля с реджевской физикой эта проблема является основной, и мы исследуем ее в разд. 12.3.

Во-вторых, теории слабого взаимодействия адронов обычно используются только с точностью до членов первого порядка по слабой константе связи (e^2 или G), и поэтому ограничения, налагаемые унитарностью, не работают. Это значит, что фиксированные полюса в J -плоскости ($J - J_0$)⁻¹ не обязательно запрещены и некоторые теории, как, например, алгебра токов, действительно приводят к их появлению. Однако если интересоваться, что произойдет, если просуммировать все порядки по константе связи, то результаты разд. 3.4 и 4.7 подсказывают, что унитарность должна приводить к реджезации таких фиксированных полюсов. Но если это так, то какие именно частицы

лежат на возникающих при этом траекториях? Эти вопросы будут исследованы в разд. 12.4.

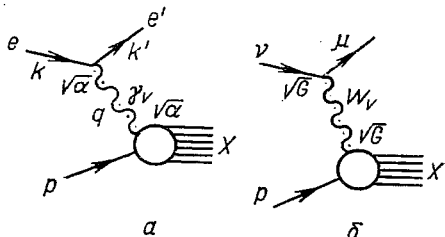
Основное значение теории Редже заключается в том, что она предсказывает ожидаемое асимптотическое поведение амплитуды рассеяния, и поэтому мы закончим эту главу очень коротким обзором реджевских предсказаний для слабых амплитуд рассеяния. Эти предсказания будут относиться к электромагнитным процессам типа «глубоко неупругого рассеяния» электрона $ep \rightarrow eX$ (рис. 12.1, а), которые, после выделения известной константы связи электрона с фотоном $\sqrt{\alpha}$ и пропагатора фотона, зависят только от сечения поглощения виртуального фотона протоном, т. е. процесса $\gamma_V p \rightarrow X$. Может быть рас-

Рис. 12.1. а — Глубоко неупругое рассеяние электрона на протоне $ep \rightarrow eX$ в однофотонном приближении.

Константа связи в каждой вершине равна $\sqrt{\alpha} = (137)^{-1/2}$, а нижняя часть диаграммы есть амплитуда процесса $\gamma_V p \rightarrow X$, где γ_V — виртуальный фотон с массой q^2 (Реальные фотоны, разумеется, имеют массу $q^2 = 0$).

б — Глубоко неупругое рассеяние нейтрино $\nu p \rightarrow \mu X$ в приближении однопобозонного векторного обмена.

В каждой вершине стоит фермиевская константа связи \sqrt{G}



смотрен также процесс рассеяния нейтрино $\nu p \rightarrow lX$ (где $l = e$ или μ в зависимости от того, является ли ν нейтрино электронного или мюонного типа), который можно описать, по крайней мере формально, как процесс $W_V p \rightarrow X$, где W^\pm — гипотетический «промежуточный векторный бозон», рассматриваемый в некоторых теориях как переносчик слабого взаимодействия (см. рис. 12.1, б). Таким образом, γ_V и W_V связаны соответственно с электромагнитным и слабым адронными «токами», которые будут рассмотрены в этой главе.

Мы не будем пытаться, однако, давать полное введение в теорию слабого взаимодействия, а читатель, не знакомый с этими вопросами, может изучить их по очень полезным книгам [61, 186, 47, 165], дополняющим приведенные в этой главе ссылки.

12.2. Фоторождение и векторная доминантность

Не рассматривая до сих пор взаимодействия лептонов, мы сделали одно исключение. В табл. 6.5 и в других местах, где рассматривали реджевскую феноменологию, были исследованы и процессы фоторождения типа $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$. Причина этого в том, что при высоких энергиях фотоны ведут себя почти как адроны, за исключением того, что их константы связи меньше. Объяснить это поведение можно тем, что фотоны связываются с адронами в основном посредством векторных мезонов, как это показано на рис. 12.2, а (см., например, [191]).

Фотон имеет квантовые числа $Q = B = S = 0$, $(J^P) C_n = (1^-)$, но, не будучи адроном, не обладает определенным изоспином. Извест-

но, что он ведет себя как смесь состояний с $I = 0$ и 1, и нет свидетельств о наличии компонент с $I > 1$. Адронами, обладающими этими свойствами, являются векторные мезоны: ρ -мезон с $I = 1$ и ω - и ϕ -мезоны с $I = 0$ (а также любые их возбужденные по спину состояния). Рис. 12.2, а подсказывает, что можно записать

$$A_H(\gamma^2 \rightarrow 34) = \sum_V \frac{e}{f_V} A_H(V^2 \rightarrow 34), \quad (12.2.1)$$

где

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} = (e^2/\hbar)^{1/2} \rightarrow (4\pi/137)^{1/2} \quad (12.2.2)$$

(поскольку в наших единицах $\hbar = c = 1$). В выражении (12.2.1) f_V — константа связи векторного мезона с фотоном, а $V = \rho, \omega, \phi$ и

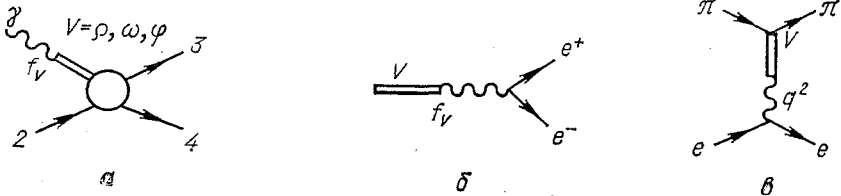


Рис. 12.2. а — Гипотеза векторной доминантности в процессе $\gamma^2 \rightarrow 34$. Фотон связан с адронами посредством векторных мезонов $V = \rho, \omega, \phi$. б — Распад $V \rightarrow e^+e^-$. в — Электромагнитный формфактор пиона, определяемый в процессе $e\pi \rightarrow e\pi$. Предполагается, что пион связан с виртуальным фотоном через V

любые другие векторные мезоны. Рис. 12.2, б показывает, что константа связи f_V непосредственно связана с парциальной шириной $\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)$:

$$\Gamma = 4\pi\alpha \frac{m_V^2}{3f_V^2}, \quad (12.2.3)$$

так что f_V может быть определена независимо. Электромагнитные формфакторы, описывающие связь фотона с данным адроном, также могут быть аппроксимированы обменом векторным мезоном, как это показано на рис. 12.2, в. Так, электромагнитный форм-фактор пиона может быть записан в виде

$$F_\pi(q^2) \approx \frac{eg_{\rho\pi\pi}}{f_\rho} \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2}. \quad (12.2.4)$$

Это выражение обладает полюсом при $q^2 = m_\rho^2$.

Формула (12.2.1) обладает очевидным недостатком, заключающимся в том, что фотон, не имея массы вследствие градиентной инвариантности, может обладать только спиральностями $\mu_\gamma = \pm 1$, в то время как векторные мезоны имеют $\mu = 1, 0, -1$, так что формула может быть справедлива только для поперечно поляризованных мезонов. Не ясно, в какой лоренцевой системе должно выполняться это равенство, но обычно предполагается, и это подтверждается экспериментально, что (12.2.1) выполняется в системе центра масс s -канала, т. е. в спиральной системе.

Таким образом, мы можем записать реджевские формулы для амплитуд фоторождения, рассматривая фотон как смесь векторных мезонов с $I = 0, 1$ (см. рис. 12.3). Они могут быть проверены, например, с помощью соотношения [42, 141]

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\sigma_{\perp}}{dt} (\gamma p \rightarrow \pi^+ n) + \frac{d\sigma_{\parallel}}{dt} (\gamma n \rightarrow \pi^- p) \right] = \frac{e^2}{f_\rho^2} (\rho_{11} \pm \rho_{1-1}) \frac{d\sigma}{dt} (\pi^- p \rightarrow \rho^0 n), \quad (12.2.5)$$

где индексы \perp (\parallel) означают поляризацию фотона перпендикулярно (параллельно) плоскости рождения частиц. Предполагалось, что из-за малости констант связи вкладом ω - и ϕ -мезонов можно пренеб-

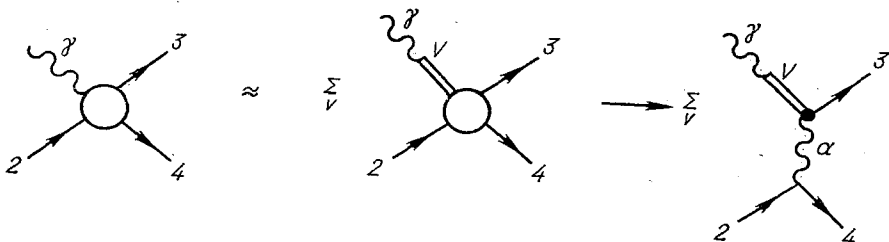


Рис. 12.3. Представление амплитуды фоторождения реджевскими полюсами, основанное на векторной доминантности

речь; к тому же при суммировании сечений фоторождения π^+ и π^- -мезонов интерференционный $\rho - \omega$ -член выпадает из квадрата модуля выражения (12.2.1). Комбинации $\rho_{11} \pm \rho_{1-1}$ для матрицы плотности в ρ -распаде дают требуемые спиральности ρ -мезона (см. разд. 4.2). В общем случае такие соотношения выполняются довольно хорошо.

Другое интересное следствие (12.2.1) заключается в том, что

$$A_H(\gamma 2 \rightarrow V 2) = \sum_V \frac{e}{f_V} A_H(V 2 \rightarrow V 2). \quad (12.2.6)$$

Таким образом, пренебрегая спиновой зависимостью и вероятностями переходов типа $V_i 2 \rightarrow V_j 2$, $i \neq j$, получаем

$$\frac{d\sigma}{dt}(\gamma 2 \rightarrow V 2) = \frac{e^2}{f_\rho^2} \frac{d\sigma}{dt}(V 2 \rightarrow V 2) \quad (12.2.7)$$

и при $t = 0$, используя оптическую теорему (1.9.6), имеем

$$\frac{d\sigma}{dt}(\gamma 2 \rightarrow V 2)_{t=0} = \frac{e^2}{f_\rho^2} \frac{1}{16\pi} (\sigma_{V 2}^{tot})^2. \quad (12.2.8)$$

При этом предполагали (для простоты), что при высоких энергиях амплитуда $A(V 2 \rightarrow V 2)$ обусловлена обменом P -полюсом и чисто мнимая. Таким образом, дифференциальное сечение фоторождения вектор-

ных мезонов на протонах определяет, например, полное сечение pp -рассеяния. Сделаем следующий шаг:

$$A_H(\gamma^2 \rightarrow \gamma^2) = \sum_V \frac{e}{f_V} A_H(\gamma p \rightarrow V p), \quad (12.2.9)$$

что в пренебрежении зависимостью от спина и действительными частями амплитуд приводит к

$$\frac{d\sigma}{dt}(\gamma p \rightarrow \gamma p) = e^2 \left\{ \sum_V \frac{1}{f_V} \left[\frac{d\sigma}{dt}(\gamma p \rightarrow V p) \right]^{1/2} \right\}^2 \quad (12.2.10)$$

(это соотношение выполняется не так хорошо).

Успех гипотезы векторной доминантности позволяет рассматривать процессы фоторождения при высоких энергиях как обычные процессы адронного рассеяния.

12.3. Реджезация элементарных частиц *

В лагранжевой теории поля пропагатор элементарной частицы с массой m и спином σ имеет вид [ср. (2.3.1) и Приложение Б в книге [51]]

$$(2\sigma + 1) g^2 P_\sigma(z_s)/(s - m^2) \quad (12.3.1)$$

(где g — константа связи) и поэтому вследствие (2.2.1) и (A.20) дает вклад только в s -канальную парциальную волну с $J = \sigma$. Следовательно, этот вклад нельзя аналитически продолжить в J -плоскости и его нужно рассматривать как кронекеровский член $\delta_{J\sigma}$:

$$A_J(s) = \delta_{J\sigma} \frac{g^2}{16\pi(s - m^2)}. \quad (12.3.2)$$

Мы выяснили, что в адронной физике нет подтверждений существования таких членов, что свидетельствует о том, что лагранжева теория поля неприменима к сильным взаимодействиям.

Однако это заключение может быть чересчур поспешным, потому что выражение (12.3.1) является только борновским приближением, первым членом в ряду теории возмущений, и вполне возможно, что другие члены могут сократить $\delta_{J\sigma}$ и заменить ее на движущийся полюс Редже:

$$A_J(s) \sim \beta(s)/(J - \alpha(s)), \quad \alpha(m^2) = \sigma. \quad (12.3.3)$$

В этом случае благодаря унитаризации полевой теории исходная элементарная частица будет реджезована. Чтобы это произошло, в теории должен образоваться кронекеровский член, который сократит соответствующий член в пропагаторе частицы. В действительности такие члены $\delta_{J\sigma}$ могут возникать в нефизических точках [189, 187, 188].

В разд. 4.8 мы выяснили, что в физических-нефизических, т. е. в фн-точках, своей сигнатуры J_0 , так как $e_{\mu\nu}^J \sim (J - J_0)^{-1/2}$, для сокращения бесконечностей необходимы свержсходящиеся соотношения, которые противоречат унитарности, приводя к $A_J \sim (J - J_0)^{1/2}$, и вычеты обращаются в нуль в фн-точках, как это описано в разд. 6.3.

Однако предположим, что мы рассматриваем только левый разрез парциальной амплитуды $A_{JJ}^L(s)$ [ср. (3.5.1)], который получается из-за перекрестных особенностей t - и u -каналов и может рассматриваться как «потенциал» при вычислении парциальных амплитуд N/D -методом (см. разд. 3.5). Унитарность не ограничивает величину $A_{JJ}^L(s)$ и поэтому из представления Грибова—Фруассара (4.5.7) можно ожидать, что

$$\left. \begin{aligned} \langle s | A_J^L | s \rangle &\sim \text{const}; \\ \langle s | A_J^L | n \rangle &\sim (J - J_0)^{-1/2}; \\ \langle n | A_J^L | n \rangle &\sim (J - J_0)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (12.3.4)$$

при $J \rightarrow J_0$, где $|s\rangle$ и $|n\rangle$ обозначают соответственно физические и нефизические спиральные состояния при $J = J_0$.

Например, при рассеянии частиц со спинами $1 + 1/2 \rightarrow 1 + 1/2$ (рис. 12.4, а) u -канальный борновский член с обменом спином $1/2$ (рис. 12.4, в) пропорционален $s^{-1/2}$ и приводит к фиксированной особенности, аналогичной (12.3.4) в точке $J = 1/2$, которая является точкой для спиральной амплитуды процесса $1 + 1/2 \rightarrow 1 + 1/2$. В случае составных частиц можно ожидать, что эта особенность будет сокращаться с другими вкладами и получатся свержходящиеся соотношения типа (4.8.3), но для элементарных частиц это не обязательно. Ясно, что при $g^2 \rightarrow 0$ должны доминировать борновские члены.

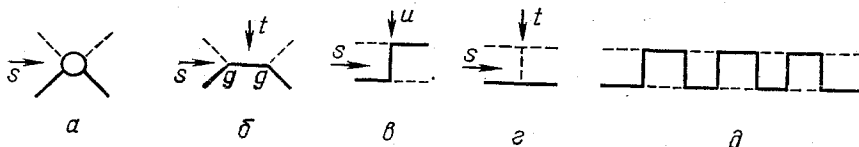


Рис. 12.4. а — Амплитуда процесса $1 + 1/2 \rightarrow 1 + 1/2$ в s -канале (— — — частица со спином $1/2$, — — — — частица со спином 1). б — s -Канальный борновский член. в — u -Канальный борновский член, г — t -Канальный борновский член. д — Унитаризация u -канального борновского члена

Тогда если рассмотрим рис. 12.4, в как первый член ряда теории возмущений по g^2 , высшие члены которого имеют вид, изображенный на рис. 12.4, д, то можно записать решение [74]:

$$\langle s | A_J | s \rangle = \langle s | A_J^{nn} | s \rangle \left[1 + \sum_n \langle s | A_J^L | n \rangle \langle n | A_J | s \rangle \right], \quad (12.3.5)$$

где A_J^{nn} — амплитуда, получающаяся при исключении нефизических промежуточных значений из ряда теории возмущений, так что сумма берется только по нефизическим состояниям. Теперь из (12.3.4) следует, что $\langle s | A_J^L | n \rangle \sim (J - J_0)^{-1/2}$, но унитарность требует, чтобы $\langle n | A_J | s \rangle \sim (J - J_0)^{1/2}$, так что второй член в скобках конечен и не обращается в нуль. Таким образом, для теории с фундамен-

тальными частицами нефизические состояния дают конечный вклад в аналитически продолженную (по J) нн-парциальную амплитуду $\langle s | A_J | s \rangle$. что отличает ее от физической парциальной амплитуды, которая равна $\langle s | A_J^{nn} | s \rangle$.

В некоторых случаях эта разность может быть в точности равна кронекеровскому члену $\delta_{J\sigma}$ (12.3.2), где $\sigma = 1/2$ для полюса в s -канале (см. рис. 12.4, б), так что

$$\langle s | A_J^{nn} | s \rangle = \delta_{J\sigma} \langle s | A_\sigma | s \rangle = \langle s | A_J | s \rangle. \quad (12.3.6)$$

Теперь физическая амплитуда совпадает с аналитически продолженной амплитудой, а решение обладает реджевским поведением, что в общем случае не обязательно, но в некоторых случаях это так.

Хотя как A_J^{nn} , так и A_J обладают одним и тем же левым разрезом, они не обязательно совпадают вследствие неоднозначности Кастильехо—Далица—Дайсона (КДД), рассмотренной в разд. 3.5. В действительности амплитуда A_J может рассматриваться как решение N/D -уравнений в случае, когда из условия унитарности исключены нефизические состояния, но в точке $J = J_0 = \sigma$ имеется полюс КДД, соответствующий обмену элементарной частицей (см. рис. 12.4, б). Общая черта решений метода N/D заключается в том, что полюса, возникающие как связанные или резонансные состояния, в данном канале проявляются как полюса КДД в перекрестных каналах (см., например, [366, 24, 255]). Необходимое число КДД-полюсов равно числу независимых спиральных амплитуд, для которых $J = J_0$ есть нефизическая точка. Однако парциальные амплитуды должны иметь правильное пороговое поведение, определяемое l , а не J [см. (4.7.6)]. Мандельстам [297] указал, что в некоторых случаях имеется единая амплитуда, содержащая не более одного КДД-полюса, которая удовлетворяет этим пороговым условиям, и равенство (12.3.6) должно выполняться.

Это справедливо для упомянутого выше случая рассеяния частиц со спинами $1+1/2$ и неверно в случае, когда в t -канале имеется векторный мезон (рис. 12.4, в), который не реджезуется таким образом. Аберс и Теплиц [11] (см. также [10]) проанализировали проблему спина в общем случае и выяснили, что когда $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0), (0, 1/2)$, и $(1/2, 1/2)$, эта процедура не работает. Но для более высоких спинов, как, например, $(1/2, \sigma)$, $\sigma \geq 1$, когда есть подходящие нефизические состояния, условие (12.3.6) будет выполнено. Однако для таких высоких спинов теории поля в общем случае неперенормируемы и поэтому не ясно, насколько полезны эти результаты. Разумеется, даже если решение КДД не удовлетворяет уравнению (12.3.6) автоматически, то решение уравнения может быть получено при некоторых частных значениях масс и констант связи, подобранных так, чтобы выполнялись свержходящиеся соотношения; решение при этом имеет характер бутстрапа. Однако для теорий с малой константой связи таких решений нет.

Таким образом, реджезация элементарных частиц происходит лишь в некоторых теориях поля. Однако в работе [210] было показано, что правила реджезации применимы в случае перенормируемых объеди-

ненных калибровочных теорий сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий (см. [243] как обзор по этой теме). В этих теориях адроны рассматривают как частицы из элементарных кварков со спином $1/2$, связанных друг с другом элементарными векторными глюонами со спином 1. В калибровочных теориях, в отличие от рассмотренного выше случая, во взаимодействиях реджезуются как частицы со спином $1/2$, так и со спином 1. Поэтому то обстоятельство, что в адронной физике наблюдаются только реджеоны, не обязательно мешает существованию внутренней структуры у элементарных частиц

12.4. Фиксированные полюса *

Диаграммы рис. 12.1 и 12.3 отличаются от амплитуд адронного рассеяния тем (хотя и предполагается, что блоки содержат полный набор адронных особенностей, требуемых унитарностью), что слабая константа связи $e^2/4\pi = \alpha = 1/137$ или $G \approx 1 \cdot 10^{-5} m_N^2$ (фермиевская константа слабого взаимодействия) появляется только в первом порядке. Фотон (или W -бозон) является внешней частицей по отношению

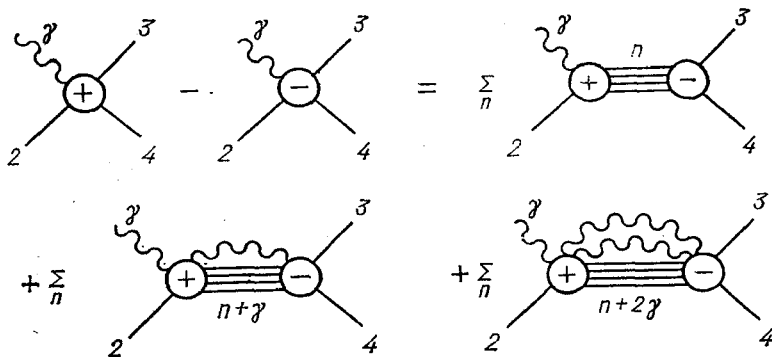


Рис. 12.5. Условие унитарности для амплитуды $A(\gamma 2 \rightarrow 34)$ с учетом членов высшего порядка по слабой константе связи

к блоку сильных взаимодействий. Поэтому, например, условие унитарности для амплитуды (рис. 12.5) обычно записывается в виде

$$\text{Im} \{A(\gamma 2 \rightarrow 34)\} = \sum_n A(\gamma 2 \rightarrow n) A^*(n \rightarrow 34) \quad (12.4.1)$$

как сумма по одним только адронным промежуточным состояниям. Если включить также наряду с другими членами в правой части рис. 12.5 и фотон, то получим

$$\begin{aligned} \text{Im} \{A(\gamma 2 \rightarrow 34)\} = & \sum_n A(\gamma 2 \rightarrow n) A^*(n \rightarrow 34) + \\ & + \sum_n A(\gamma 2 \rightarrow \gamma n) A^*(\gamma n \rightarrow 34) + \dots, \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

причем члены во второй сумме будут меньше членов в первой на дополнительный множитель α (или G в случае слабых взаимодействий) и поэтому ими в общем случае пренебрегаем. Таким образом, если ограничиться, оставаясь ниже неупругого порога, только двухчастичными промежуточными состояниями $3+4$ (рис. 12.6) (т. е. пока энергия процесса $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ ниже порога образования системы $\pi\pi$) и разложить амплитуду в ряд по парциальным волнам, то вместо выражения (4.7) получим

$$A_{NJ}(s) - (A_{NJ}(s))^* = 2i\rho_H(s) A_{NJ}(s) (A_{NJ}^{el}(s))^*, \quad (12.4.3)$$

где $A^{el} = A(34 \rightarrow 34)$. Аналогичное уравнение выполняется в t -канале для процесса $\gamma \bar{3} \rightarrow \bar{2}4$.

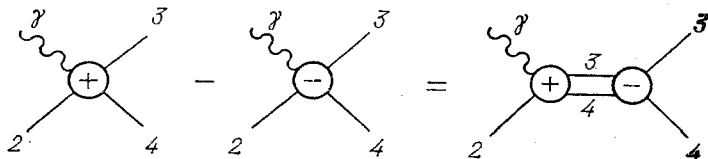


Рис. 12.6. Двухчастичное условие унитарности для амплитуды процесса $\gamma 2 \rightarrow 34$ ниже неупругого порога

Тот факт, что амплитуда $A_{NJ}(s, \gamma 2 \rightarrow 34)$ в правой части (12.4.3) появляется только в первой степени, означает, что теоремы разд. 4.7 об отсутствии фиксированных полюсов на вещественной оси (за исключением полюсов в нефизических точках чужой сигнатуры, накрытых разрезами) не справедливы для этих слабых амплитуд. Поэтому в точках своей сигнатуры могут существовать фиксированные полюса, и в этом случае они будут давать вклад в асимптотическое поведение амплитуды. Другими словами, сверхсходящиеся соотношения, которые должны существовать для адронных амплитуд, чтобы предотвратить появление таких полюсов, не должны выполняться в слабых амплитудах.

В работах [66, 362] было показано, что алгебра токов предсказывает появление таких полюсов. (Введение в алгебру токов см. в книгах [341] или [151].) Это получается потому, что алгебра токов связывает значение константы связи с током с двухтоковой амплитудой; в частности, для амплитуды процесса $\gamma_V + 2 \rightarrow \gamma_V + 2$ (рис. 12.7) она дает [180, 142]

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_T}^{\infty} dz_t D_{sH}^{I_t=1}(s, t, q^2, q'^2) = F(t), \quad (12.4.4)$$

где γ_V — изовекторный фотон; 2 — бесспиновая частица [можно рассматривать выражение (12.4.4) как результат усреднения по спину]; $F(t)$ — изовекторный форм-фактор частицы 2; $D_{sH}^{I_t=1}$ — скачок по s части с нечетной сигнатурой ($= D_s - D_u$) приведенной t -канальной спиральной амплитуды $\hat{A}_{N_t}(s, t, q^2, q'^2)$ процесса $\gamma(q^2) + \gamma'(q'^2) \rightarrow 2\bar{2}$.

Это спиральная амплитуда, множитель половинного угла которой равен

$$\xi_{\lambda\lambda'}(z_t) = ((1+z_t)/2)^{|\lambda+\lambda'|/2} ((1-z_t)/2)^{|\lambda-\lambda'|/2} = [(1-z_t^2)/4]^{\lambda/2} \quad (12.4.5)$$

[см. (4.4.1), где $\lambda_\gamma = \pm 1$, $\lambda_2 = 0$, так что $\lambda = 0$ или 2] и изоспин в t -канале равен 1. Мы ожидаем, что основной обмен с $I_t = 1$ дается ρ -траекторией. Это так, потому что мы имеем дело с изовекторными (заряженными) фотонами: для реальных фотонов ρ -обмен запрещен за-

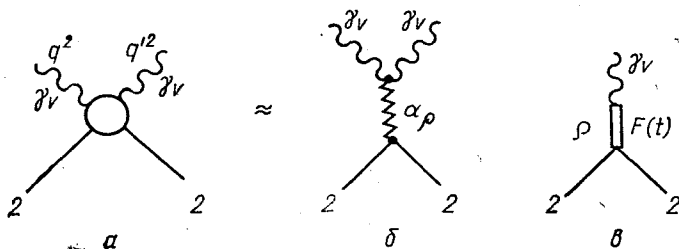


Рис. 12.7. а — Комptonовское рассеяние виртуального фотона $\gamma_V 2 \rightarrow \gamma_V 2$. б — Приближение к амплитуде, основанное на обмене ρ -полюсом. в — Вклад ρ -полюса в электромагнитный формфактор частицы 2

рядовым сопряжением. Так, для $\lambda_\gamma = -\lambda_{\gamma'} = 1$, т. е. $\lambda = 2$, мы ожидаем, что $D_{sH} \sim s^{\alpha_\rho(t)-2}$, что при подстановке в выражение (12.4.4) дает

$$F(t) \sim 1/[\alpha_\rho(t) - 1] \sim 1/[\sigma'(t - m_\rho^2)] \text{ при } t \rightarrow m_\rho^2, \quad \alpha_\rho \rightarrow 1, \quad (12.4.6)$$

так что форм фактор имеет полюс при массе ρ -мезона, что изображено на рис. 12.7, в. Однако точка $J=1$ есть фн-точка для этой амплитуды ($\lambda = |\lambda_\gamma - \lambda_{\gamma'}| = 2$, $\lambda' = |\lambda_2 - \lambda_{2'}| = 0$ и можно ожидать, что будет выполняться сверхсходящееся соотношение. Если частицы 2 и 2' — протоны и значение t зафиксировано и равно 0, а в этой точке D_s благодаря оптической теореме (1.9.6) можно заменить на $\sigma_{\gamma p}^{tot}$, то сверхсходящееся соотношение принимает вид

$$\int_0^\infty \frac{dv}{v} (\sigma_P(v) - \sigma_A(v)) = 2\pi^2 e^2 \mu'_p / m_p^2, \quad (12.4.7)$$

где σ_P и σ_A есть полные γp -сечения с параллельными и антипараллельными (соответственно) спинами; μ'_p — аномальный магнитный момент протона (т. е. форм-фактор при $t = 0$). Уравнение (12.4.7) — это известное правило сумм Дрелла — Харна [148], которое хорошо выполняется на опыте и показывает, что в вычете ρ -полюса нефизический множитель $\alpha_\rho(t) - 1$ сокращает знаменатель выражения (12.4.6).

Левая часть (12.4.4) есть вычет фиксированного полюса в фн-точке $J = 1$, и, поскольку форм-фактор $F(t)$ не обращается в нуль, алгебра

токов предсказывает, что должен быть фиксированный полюс своей сигнатуры, который дает вклад в асимптотическое поведение амплитуды

$$\operatorname{Re}\{\hat{A}(\gamma_2 \rightarrow \gamma_2)\} \sim -F(t)/z_t. \quad (12.4.8)$$

Таким образом, амплитуда с отрицательной сигнатурой ведет себя как

$$\begin{aligned} \hat{A}(\gamma p \rightarrow \gamma p) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{dz'_i D_{sH} s'(t)}{z'_i - z_t} = -\frac{1}{z_t} \frac{1}{\pi} \int dz'_i D_{sH}(s', t) + \\ &+ \frac{1}{z_t} \frac{1}{\pi} \int \frac{dz'_i z'_i}{z'_i - z_t} D_{sH}(s', t) \rightarrow -\frac{F(t)}{z_t} + \frac{G_p(t) (z_t)^{\alpha_p(t)-2}}{\sin \pi \alpha_p(t)}. \end{aligned} \quad (12.4.9)$$

Итак, существует движущийся полюс Редже $\alpha_p(t)$ и фиксированный полюс в точке $J = 1$, но нет особенности в точке $t = m_p^2$, $\alpha_p = 1$, потому что если $F(t)$ ведет себя как указывает выражение (12.4.6), то два члена в формуле (12.4.9) сокращаются.

Алгебра токов предсказывает, что в нефизических точках своей сигнатуры будут фиксированные полюса, которые не будут давать вклад в D_{sH} и, следовательно, не будут влиять на полные сечения, но будут существенны для асимптотики действительной части амплитуды. Это едва ли удивительно, потому что из рис. 12.7, в видно, что ρ -мезон связан с током, спин которого фиксирован.

Но тогда возникает вопрос, что было бы, если бы мы рассмотрели не только первый порядок по e^2 , а просуммировали бы все порядки в t -канальном условии унитарности, аналогичном (12.4.2). Рассмотрение теорий с малой константой связи (3.4.17) подсказывает, что фиксированный полюс в точке $J = 1$ должен превратиться в движущийся полюс Редже, положение которого стремится к 1, когда $e^2 \rightarrow 0$, т. е.

$$\alpha(t) = 1 + e^2 f(t), \quad (12.4.10)$$

где $f(t)$ — некоторая функция от t , похожая на (3.4.19), порядка 1. Итак, мы получили траекторию с наклоном $\alpha' = 0$ (e^2) = $O(1/137)$. Такая траектория не видна в асимптотике амплитуд и не проявляет себя в массах частиц. Если же, в противоположном случае, полюс останется неподвижным, то он должен дать кронекеровские члены δ_{J,J_0} в фф-амплитудах, как это было описано в предыдущем разделе. Все это подсказывает, что алгебра токов может быть несправедлива, хотя мы в действительности не знаем, как поступать с фотоном с нулевой массой в промежуточном состоянии.

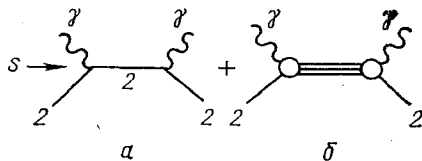
Конечно же, фиксированные полюса существуют в точках чужой сигнатуры и, разумеется, полюс в точке $J = 1$ может быть важен в асимптотическом поведении амплитуды комптоновского рассеяния с четной сигнатурой [1, 2]. Для процесса $\gamma + 2 \rightarrow \gamma + 2$ (где 2 — бесспиновая частица) существуют две независимых s -канальных спиральных амплитуды $\langle 1,0 | A^s | 1,0 \rangle$ и $\langle 1,0 | A^s | -1,0 \rangle$. Спиральная матрица кроссинга, аналогичная (4.3.4) [14], связывает эти амплиту-

ды со спиральными амплитудами t -канального процесса $\gamma\gamma \rightarrow \bar{2}2$. В точке $t = 0$ эта связь имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \langle 1,0 | A^s | 1,0 \rangle &= \langle 1, -1 | A^t | 0,0 \rangle \lambda = 2; \\ \langle 1,0 | A^s | -1,0 \rangle &= \langle 1,1 | A^t | 0,0 \rangle \lambda = 0 \end{aligned} \quad (12.4.11)$$

и, поскольку амплитуда с переворотом спина $\langle 1,0 | A^s | -1,0 \rangle$ должна обращаться в нуль в точке $t = 0$ вследствие закона сохранения углового момента, остается только амплитуда $\langle 1, -1 | A^t | 0,0 \rangle$. Для этой амплитуды точка $J_t = 1$ есть фн-точка. Основным обменом с четной сигнатурой в этой упругой амплитуде будет обмен помероном, так что если $\alpha_P(0) = 1$ и вычет P -полюса имеет нефизиче-

Рис. 12.8. a — s -Канальный борновский член в процессе $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2$. b — Другие s -канальные промежуточные состояния, дающие вклад в D_s при $s > s_I$ — выше неупругого порога



ский множитель, обращающийся в нуль в точке $\alpha_P(t) = 1$, то вклад P -полюса в амплитуду $\langle 1,0 | A^s | 1,0 \rangle$ будет обращаться в нуль при $t = 0$. Оптическая теорема дает

$$\sigma_{\gamma_2}^{tot} = (1/s) \text{Im} \{ \langle 1,0 | A^s | 1,0 \rangle \}, \quad (12.2.12)$$

так что при обращении в нуль вычета P -полюса $\sigma_{\gamma_2}^{tot} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, чем отличается от других полных сечений.

Однако это совершенно противоречит замечанию в разд. 12.2 о том, что фотон при высоких энергиях ведет себя как адрон, и наблюдаемому приблизительно постоянству $\sigma_{\gamma_2}^{tot}(s)$ при больших s . Поэтому либо существует фиксированный полюс Грибова — Померанчука в точке $J = 1$, который перемещает обращающийся в нуль множитель (см. табл. 6.2) и в этом случае $\sigma_{\gamma_2}^{tot}(s)$ определяется только третьей спектральной функцией, что кажется довольно маловероятным, либо вычет P -полюса имеет особенность в точке $t = 0$. В действительности вычет фиксированного полюса в точке $J = 1$ в представлении Грибова — Фруассара для амплитуды с $\lambda = 2$ может быть записан в виде

$$G_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{m_2^2}^{\infty} dz'_i D_{SH}(s', t) = \frac{Ke^2}{t} + \int_{s_I}^{\infty} dz'_i D_{SH}(s, t), \quad (12.4.13)$$

где K — константа; s_I — неупругий порог. Кинематический множитель t^{-1} из борновской диаграммы, показанной на рис. 12.8, получается вследствие кинематики безмассового фотона [$q_{i13}^2 = t/4$ из (1.7.15)]. Поэтому если $G_1(t)$ обращается в нуль, то вычет P -полюса в D_{SH} должен вести себя как t^{-1} , так что правая часть также может обратиться в нуль. Ясно, что $t = 0$ — выделенная точка, потому что

она совпадает с порогом начального состояния в процессе $\gamma\gamma \rightarrow \bar{2}2$, а фотонные амплитуды могут иметь необычное пороговое поведение (см. [123] и далее). Более полное обсуждение этого вопроса см. в работе [272].

Предполагалось также, что в фн-точке $J_t = 0$ этой амплитуды может быть также фиксированный полюс [140]. Поскольку точка $J = 0$ есть точка своей сигнатуры, то это приводило бы к действительному постоянному вкладу в амплитуду комптоновского рассеяния

$$A(\gamma_2 \rightarrow \gamma_2, s, t) = \sum_i A^{R_i}(s, t) + G_0(t), \quad (12.4.14)$$

где $A^{R_i}(s, t)$ — обычные амплитуды обмена реджеонами P, A_2 ; $G_0(t)$ — вклад фиксированного полюса, не зависящий от s при всех t . Гилман с сотрудниками провели подгонку дифференциального сечения рассеяния вперед $d\sigma/dt$ ($\gamma p \rightarrow \gamma p$) при $\alpha_P(0) = 1$ и $\alpha_{A_2}(0) = 1/2$ и получили, что такая действительная часть необходима. Они положили

$$G_0(t) = -e^2/m_P, \quad (12.4.15)$$

что является томпсоновским выражением для амплитуды комптоновского рассеяния на протоне при нулевой энергии фотона, когда структура протона еще не проявляется. Однако изменение значений траекторий в нуле может привести к исчезновению постоянного члена [115], так что пока нет убедительных свидетельств в пользу существования фиксированного полюса (см. также работы [63, 273]).

Фиксированные полюса искали также в процессах фоторождения, аналогичных процессу $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$. В рассеянии назад в этой реакции имеется обмен нуклоном при $J_u = 1/2$, что приводит к $d\sigma/du \sim 1/s$ при фиксированном u , в то время как на опыте $d\sigma/du \sim s^{-2.6}$ при $u \approx 0$, что отвечает $\alpha_N(0) \approx -0.3$.

Особенно интересно рассеяние вперед, потому что, как обсуждалось в разд. 6.8 к и 8.7 е, этот процесс описывается обменом π -полюсом и конспирирующим разрезом $\pi \otimes P$. Быстрое изменение $d\sigma/dt$ около точки $t = 0$ требует присутствия члена, отвечающего пионному полюсу [см. (8.7.5)]. Однако точка своей сигнатуры $\alpha_\pi(t) = 0$ есть нефизическая точка для всех t -канальных амплитуд процесса $\gamma\pi \rightarrow \bar{p}n$, так как $\lambda_\gamma - \lambda_\pi = 1$, поэтому в обычном случае можно ожидать появления нефизического множителя, а не пионного полюса. Одно время казалось, что фиксированный полюс должен присутствовать, чтобы убрать нефизический множитель (как в описанном выше случае комптоновского рассеяния). Но так как точка $J = 0$ есть точка своей сигнатуры, то такой фиксированный полюс должен был бы проявляться в асимптотике амплитуды, что на опыте не наблюдается. Поэтому мы опять должны предположить, что вершины связи с фотоном имеют необычный вид. Теперь значение $t = m_\pi^2$ совпадает с одним из порогов в реакции $\gamma\pi \rightarrow \bar{p}n$. Вместе с приведенным выше примером комптоновского рассеяния создается впечатление, что необычное пороговое поведение запрещено (см. ссылки в [124]).

Подводя итоги, следует сказать, что (за исключением алгебры токов) мы не обнаружили достаточно серьезных подтверждений сущест-

вования необычных фиксированных полюсов в слабых амплитудах и вместе с тем есть некоторые свидетельства против них. Теоретически [350, 146, 272] есть основания предполагать, что когда токи взаимодействуют с составными частицами, например с частицами, построенными с помощью лестничного графика, как это показано на рис. 12.9, а, б, то фиксированные полюса могут существовать только в нефизических точках $J = \sigma_\nu - n$ и $J = \sigma_\nu + \sigma_{\nu_2} - n$, $n = 1, 2, \dots$ соответственно. Последние полюса имеют отношение к масштабнo-инвариантному поведению, наблюдаемому в глубоко неупругом рассеянии электронов (см. разд. 12.5). Однако все аргументы в пользу фиксированных полюсов возникают только при учете членов первого порядка по e^2 и могут быть неправильными. Поэтому при исследовании асимптотического реджевского поведения можно совершенно спокойно рассматривать фотон как адрон.

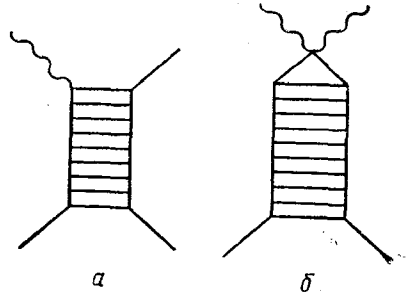
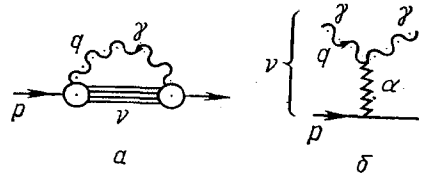


Рис. 12.9. а — Теоретико-полевая модель для вершины связи фотона с составным реджеоном. б — Вершина связи фотонов с лестницей, приводящая к фиксированному полюсу в точке $l=1$ (с точностью до членов первого порядка по e^2)

Интересным следствием является электромагнитная разность масс в изотопических мультиплетах. Коттингем [134] показал, каким образом электромагнитный вклад в собственную энергию (т. е. в массу) частицы в первом порядке теории возмущений, получающийся при

Рис. 12.10. а — Однофотонная петля, приводящая к поправкам первого порядка к электромагнитной массе, перенормирующей пропагатор частицы. б — Модель для амплитуды виртуального комптоновского рассеяния α , основанная на обмене реджеонами



учете графиков испускания и поглощения фотона (рис. 12.10), может быть непосредственно связан с амплитудой комптоновского рассеяния вперед фотона с массой q^2 на данной частице:

$$\delta M = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sum_{\mu} \frac{A_{\mu\mu}(\nu, q^2)}{q^2 - i\epsilon}, \quad (12.4.16)$$

где $\nu = pq$. Амплитуду $A_{\mu\mu}$ можно выразить с помощью дисперсионного соотношения по ν следующим образом:

$$A_{\mu\mu}(\nu, q^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\nu' d\nu' D_{SH}(\nu', q^2)}{\nu'^2 - \nu^2}. \quad (12.4.17)$$

Если амплитуды без переверота спина определяются при высоких энергиях полюсами Редже, то можно ожидать, что скачки амплитуд с четной сигнатурой ведут себя как

$$D_{sH}(v, q^2) \rightarrow \gamma_i(q^2) v^{\alpha_i(0)}. \quad (12.4.18)$$

Например, электромагнитная разность масс между протоном и нейтроном зависит от доминирующего обмена с четной сигнатурой и с $\Delta I = 1$, т. е. от A_2 -траектории с $\alpha(0) \approx 0,5$ [221], так что ясно, что интеграл (12.4.17) будет расходиться и, следовательно, это выражение не даст возможности определить электромагнитную разность масс, пока не определена вычитательная константа. Однако разность масс $m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0}$ с $I = 2$ определяется обменом с $\Delta I = 2$, и, поскольку такие траектории не известны, доминирующий обмен (возможно, посредством реджевского разреза) обладает $\alpha(0) < 0$, поэтому интеграл сходится. Это дает основание сделать вывод, что $m_{\pi^\pm} > m_{\pi^0}$, как можно было ожидать (т. е. электромагнитные эффекты увеличивают массу пиона). Однако $m_\pi > m_p$, что противоречит этим предсказаниям. Этот критерий, основанный на величине $\alpha(0)$ реджеона, которым осуществляется обмен, может быть использован и для определения знака разности масс и в других случаях.

Описанное выше всего лишь один пример способа, с помощью которого известное реджевское асимптотическое поведение помогает пониманию природы слабых взаимодействий, в частности устанавливая определенные правила сумм.

12.5. Глубоко неупругое рассеяние

Наиболее интересные результаты относительно структуры адронов получены в экспериментах по глубоко неупругому рассеянию на нуклонах, $ep \rightarrow eX$ и в меньшей степени $\nu p \rightarrow \mu X$. Эти процессы рассматриваются в приближении однофотонного или однобозонного обмена, как это показано на рис. 12.1 (см. обзоры по этим процессам, например, [151, 287, 272]).

Для 4-импульса, указанного на рисунке, имеем

$$k^2 = k'^2 = m_e^2 \approx 0 \text{ и } q = k - k'. \quad (12.5.1)$$

В лабораторной системе (где протон покоится) можно записать:

$$\begin{aligned} p &= (m_p, 0, 0, 0); \quad k = (E, \mathbf{k}); \quad k' = (E, \mathbf{k}'); \\ q &= (E - E', \mathbf{k} - \mathbf{k}'); \quad k^2 = E^2 - \mathbf{k}^2 \approx 0; \quad k'^2 = E'^2 - \mathbf{k}'^2 \approx 0, \end{aligned} \quad (12.5.2)$$

следовательно,

$$v = pq = (E - E') m_p \quad (12.5.3)$$

дает энергию виртуального фотона, в то время как его масса равна

$$\begin{aligned} q^2 &= (E - E')^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' - \mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + \\ &+ 2|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \cos\theta = -4EE' \sin^2 \theta/2. \end{aligned} \quad (12.5.4)$$

[здесь использовано выражение (12.5.2)]; q^2 зависит от θ — угла рассеяния между направлениями движения лептонов в начальном и конечном состояниях. [Читатель заметит, что многие авторы, в том числе Гилман, определяют ν без множителя m_p в (12.5.3) и берут q^2 с противоположным знаком в (12.5.4)].

Для процесса рассеяния в нижней части диаграммы, $\gamma_V p \rightarrow X$, квадрат эффективной энергии в системе центра масс равен

$$s = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = m_p^2 + q^2 + 2\nu = M_X^2. \quad (12.5.5)$$

После усреднения по спинам электрона и протона дифференциальное сечение процесса $ep \rightarrow eX$ равно [149]:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4e^4 E^{12}}{q^4} (2W_1(\nu, q^2) \sin \theta/2 + W_2(\nu, q^2) \cos \theta/2), \quad (12.5.6)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, в котором детектируется электрон конечного состояния с энергией E' ; $W_{1,2}$ — глубоко неупругие структурные функции нуклона. Они непосредственно связаны с полным сечением рассеяния поперечно и продольно поляризованных виртуальных фотонов на протоне (σ_T и σ_L соответственно):

$$\left. \begin{aligned} W_1(\nu, q^2) &= (K_1/4\pi e^2) \sigma_T(\nu, q^2); \\ W_2(\nu, q^2) &= (K_2/4\pi e^2) [\sigma_T(\nu, q^2) + \sigma_L(\nu, q^2)], \end{aligned} \right\} \quad (12.5.7)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{m_p} \left(\nu + \frac{q^2}{2} \right); \quad K_2 = m_p \left(\nu + \frac{q^2}{2} \right) \left(\frac{q^2}{m_p^2 q^2 - \nu^2} \right), \quad (12.5.8)$$

когда $q^2 \rightarrow 0$, то $\sigma_L \rightarrow 0$, а σ есть настоящее полное сечение γp -рассеяния.

Ясно, что при упругом ep -рассеянии (рис. 12.11) $M_X^2 = m_p^2$ и поэтому из (12.5.5) имеем

$$q^2 = -2\nu. \quad (12.5.9)$$

При этом W_1 и W_2 связаны с электромагнитными форм-факторами протона G_E и G_M следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} W_1(\nu, q^2) &= -\frac{q^2 G_M^2(q^2)}{4m_p^2} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2}\right); \\ W_2(\nu, q^2) &= \left[G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4m_p^2} G_M^2(q^2) \right] \left(1 - \frac{q^2}{4m_p^2} \right)^{-1} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (12.5.10)$$

Самый важный результат экспериментов по глубоко неупругому рассеянию заключается в масштабной инвариантности W_1 и νW_2 при ν , $|q^2| \rightarrow \infty$ (в физической области q^2 отрицательно):

$$\left. \begin{aligned} W_1(\nu, q^2) &\rightarrow F_1(2\nu/|q^2|); \\ \nu W_2(\nu, q^2) &\rightarrow F_2(2\nu/|q^2|), \end{aligned} \right\} \quad (12.5.11)$$

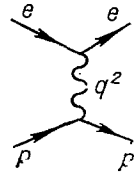


Рис. 12.11. Диаграмма однофотонного обмена для процесса $ep \rightarrow ep$

где F_1 и F_2 — функции, зависящие только от безразмерного отношения

$$\omega = 2\nu/|q^2| = 1/x, \quad (12.5.12)$$

а не от значений ν и $|q^2|$ по отдельности. Это значит, что когда ν и $|q^2|$ изменяются так, что их отношение постоянно, значения W_1 и νW_2 не меняются (см. по поводу масштабной инвариантности или скейлинга разд. 10.5).

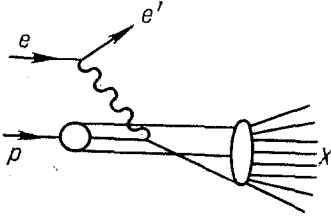


Рис. 12.12. Партонное описание процесса $ep \rightarrow eX$.

Протон составлен из бесструктурных партонов (кварков) и фотон поглощается одним из этих партонов. В блоке справа кварки рекомбинируют в обычные адроны X .

Самое простое объяснение масштабнo-инвариантных эффектов дается партонной моделью [165], в которой протон предполагается состоящим из некоторого числа бесструктурных, точечных заряженных частиц (партонов) i , каждый из которых несет долю x_i импульса протона:

$$p_i = x_i p, \quad 0 \leq x_i \leq 1. \quad (12.5.13)$$

Если партон не имеет структуры, то его масса и заряд Q_i не будут меняться при рассеянии (рис. 12.12), и поэтому он будет давать вклад в W , аналогичный (12.5.10), но без зависимости форм-факторов от q^2 (так что $G_E = Q_i$). Например,

$$W_2^i(\nu, q^2) = Q_i^2 \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2x_i}\right) = \frac{Q_i^2 x_i}{\nu} \delta\left(x_i - \frac{|q^2|}{2\nu}\right). \quad (12.5.14)$$

Если теперь $f(x)$ — вероятность того, что партон несет долю x импульса протона, то получаем

$$\begin{aligned} \nu W_2 &= \sum_i Q_i^2 \int_0^1 dx_i f(x_i) x_j \delta(x_i - |q^2|/(2\nu)) = \\ &= \sum_i Q_i^2 x f(x) \Big|_{x=|q^2|/(2\nu)} = F_2(x=|q^2|/(2\nu)). \end{aligned} \quad (12.5.15)$$

Этот результат существенным образом зависит от того, что партоны не обладают структурой, так как в противном случае в выражении (12.5.14) так же, как и в (12.5.10), появились бы форм-факторы, которые, будучи функциями от q^2 , разрушили бы скейлинг.

Успех партонной модели связан не только с «объяснением» скейлинга, но и с возможностью понять, если предположить, что партоны — это кварки со спином $1/2$, многие свойства зависимости сечений от спина и внутренние симметрии сечений. Основная проблема, конечно, в том, что кварки не наблюдаются, и не ясно, какой механизм отвечает за то, что все кварки, включая тот, который рассеялся, в бло-

ке, изображенном на рис. 12.12 справа, объединятся в обычные ад-роны.

Однако нас в основном интересуют реджевские свойства этих сечений. Поскольку, отвлекаясь от кинематических факторов в (12.5.7), структурные функции W являются полными сечениями γp -рассеяния, то можно надеяться описать эти сечения, построив для амплитуды

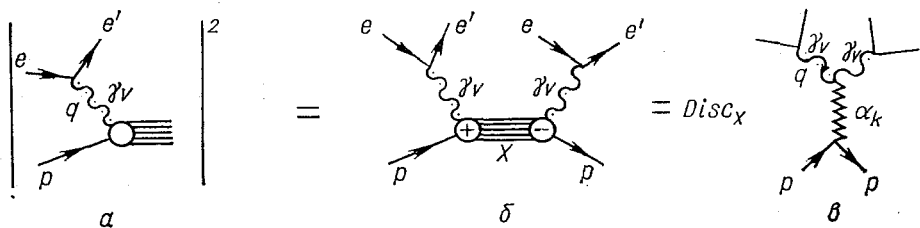


Рис. 12.13. Описание глубоко неупругого ep -рассеяния, выраженного через амплитуду процесса $\gamma_V p \rightarrow \gamma_V p$, посредством обмена реджеонами.

В амплитуду упругого процесса дают вклад лидирующие траектории $k=P, f$ и A_2

ды упругого $\gamma_V p$ -рассеяния реджевскую модель, как это показано на рис. 12.13 (ср. рис. 10.23). В реджевском пределе $\nu \rightarrow \infty$, а q^2 фиксировано, так что $x \rightarrow 0$ и мы ожидаем, что

$$\sigma_T, \sigma_L \sim \sum_k \nu^{\alpha_k(0)-1}, \quad (12.5.16)$$

так что

$$W_1(\nu, q^2) \sim \nu \sigma_T \rightarrow \sum_k \beta_1^k(q^2) \left(\frac{\nu}{s_0}\right)^{\alpha_k(0)};$$

$$\nu W_2(\nu, q^2) \sim |q^2| (\sigma_T + \sigma_L) \rightarrow \sum_k |q^2| \beta_2^k(q^2) \left(\frac{\nu}{s_0}\right)^{\alpha_k(0)-1}. \quad (12.5.17)$$

Поэтому если ведущей особенностью является померон с $\alpha_P(0) = 1$, то νW_2 и $x W_1$ стремятся к постоянному значению при $x = q^2/(2\nu) \rightarrow 0$. Область, в которой существует скейлинг ($|q^2|$, $\nu \rightarrow \infty$ x фиксировано), может перекрываться с реджевской асимптотической областью ($\nu \rightarrow \infty$, q^2 фиксировано). Очевидно, что это зависит от поведения вычетов $\beta_{1,2}^k(q^2)$ при $|q^2| \rightarrow \infty$, но если перекрытие есть, то необходимо

$$\beta_1^P(q^2) \xrightarrow{|q^2| \rightarrow \infty} \frac{g_1}{(|q^2|)^{\alpha_P(0)}}; \quad \beta_2^P(q^2) \rightarrow \frac{g_2}{(|q^2|)^{\alpha_P(0)}}, \quad (12.5.18)$$

где g_1 и g_2 — константы, так что W_1 , νW_2 стремятся к масштабным функциям, зависящим только от x , т. е.

$$W_1(\nu, q^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{g_1}{(2s_0 x)^{\alpha_P(0)}};$$

$$\nu W_2(\nu, q^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{g_2}{(2s_0 x)^{\alpha_P(0)}}. \quad (12.5.19)$$

Это согласуется с поведением, полученным в теоретико-полевых моделях с электромагнитным взаимодействием с точечными частицами [5].

Необходимо отметить, что хотя рис. 12.13, *в* похож на трехреджеонную диаграмму рис. 10.23, *в*, но на самом деле эти процессы совершенно различны. На рис. 10.23 изображены траектории $\alpha_i(t)$, $\alpha_j(t)$, так что угловой момент меняется в зависимости от t , в то время как на рис. 12.13, *в* изображены фотоны $\gamma(q^2)$, момент которых остается постоянным и равным 1 при изменении q^2 . Таким образом, из электроорождения получается совсем другая информация. Однако если принять мультипериферический тип модели (рис. 12.14), то только в верхней части графика вершина будет зависеть от q^2 (потому что в гребенке имеются только короткодействующие корреляции), и многие свойства, такие, как множественность и другие, будут аналогичны свойствам адронных реакций. Наибольшая разница между процессами должна проявляться в области фрагментации фотона (более подробное обсуждение см. в работе [73]).

Рис. 12.14. Мультипериферическая модель процесса $ep \rightarrow e'X$

Реджевская теория предсказывает также, что существуют важные непостоянные поправки к выражению (12.5.19), которые получаются при $k = R$ (f или A_2) с $\alpha_R(0) \approx 0,5$. Двухкомпонентная дуальность предсказывает, что дуальные свойства глубоко неупругого рассеяния будут такими, как на рис. 12.15, где P дуален фону b , а R дуальны резонансам r [224]. Поскольку, как было установлено, реджевская область перекрывается с областью скейлинга, то это обстоятельство накладывает серьезные ограничения на зависимость от q^2 сечения обра-

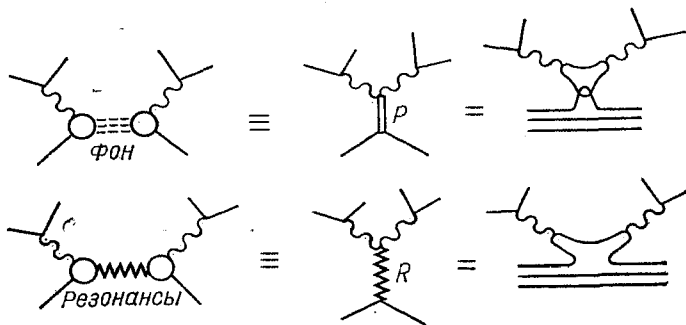


Рис. 12.15. Дуальные диаграммы процесса $ep \rightarrow eX$

зования резонансов и, следовательно, на форм-факторы переходов $\gamma_V(q^2) + p \rightarrow r$. Способ, которым сглаживаются резонансные вклады и устанавливается масштабное поведение при возрастании $|q^2|$ (и, следовательно, ν) при фиксированном ω , показан на рис. 12.16. Это напоминает сглаживание резонансных вкладов в модели Венециано с $\text{Im}\{\alpha\} \neq 0$ (см. рис. 7.6). Модель Венециано успешно описывает зависимость R -члена от ν и q^2 [271, 272]. Однако существует довольно

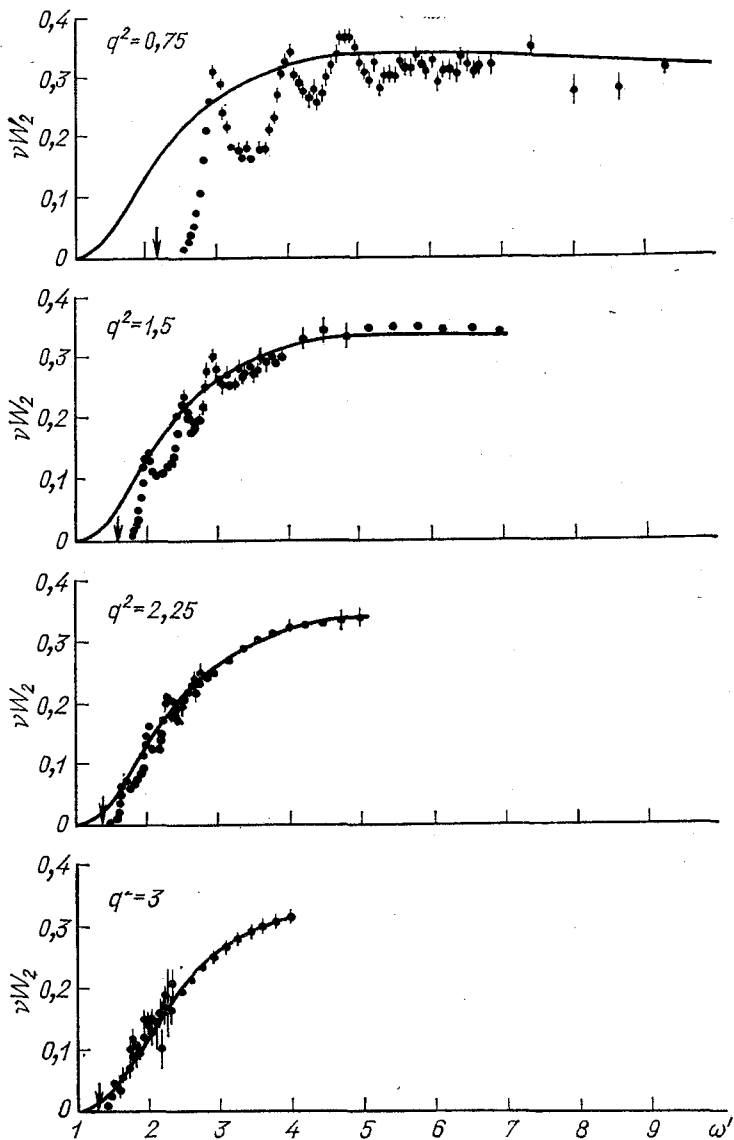


Рис. 12.16. Зависимость $\nu W_2(\nu, q^2)$ при различных значениях $|q^2|$ в гигаэлектронвольтах от $\omega = \omega + m_N/q$. Сплошная линия — это масштабно инвариантная кривая, полученная при больших значениях $|q^2|$, а осцилляции, отвечающие резонансам, приближаются к этой кривой при возрастании $|q^2|$ (из работы [191]).

важная проблема, заключающаяся в том, что модель Венециано построена для факторизующихся реджевских вершин, в то время как нам нужны вершины связи с частицей с заданным спином равным 1. Поэтому даже если приписать $J = 1$ одной из внешних линий в модели Венециано, то возникнут проблемы с разницей между вершинами взаимодействия с составными и элементарными частицами [150].

Поскольку в глубоко неупругом рассеянии нейтрино $\nu p \rightarrow \mu X$ четность не сохраняется, то возникает дополнительная структурная функция и вместо (12.5.6) дифференциальное сечение записывается в виде

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega dE'} = \frac{G^2 E'^2}{2\pi^2 m_p^2} \left[2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \theta/2 + W_2(\nu, q^2) \cos^2 \theta/2 \mp \right. \\ \left. \mp \frac{E+E'}{m_p} W_3(\nu, q^2) \sin^2 \theta/2 \right], \quad (12.5.20)$$

где \mp относится соответственно к ν и $\bar{\nu}$. Дополнительная функция W_3 нечетна относительно C_n и поэтому обращается в нуль при $\nu \rightarrow \infty$, так как обмен P -полусом невозможен. Кварк-партоновая модель и в этом случае дает хорошие результаты, а реджевская теория использовалась, чтобы предсказать поведение при больших ν (см. [287]). Наиболее интересные для реджевской теории результаты могут быть получены при высоких энергиях (если они будут достигнуты), так как феноменологическая теория Ферми, которая может быть использована только в первом порядке по G , нарушает унитарность при $E_{\nu lab} > > 10^5$ ГэВ. Поэтому должны возникать поправки, которые, возможно, приведут к ограничениям на фиксированные полюса, обсуждавшимся в разд. 12.4.

В заключение следует отметить, что до сих пор реджевская теория в слабых взаимодействиях играла довольно скромную, хотя и почетную, роль в основном по той причине, что во всех процессах можно было обходиться членами первого порядка по слабой константе связи (e^2 или G). Однако, когда придет время построить унитарную теорию слабого взаимодействия или объединенную теорию всех взаимодействий, реджезация войдет в нее как необходимый элемент.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Представлением функций орбитального углового момента [355, 158, 345] являются сферические гармоники

$$Y_{lm}(\theta, \Psi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(z) \exp(im\varphi), \quad (\text{A.1})$$

$$z \equiv \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

где $P_l^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра. Их свойства обсуждаются с большими подробностями в книге Бейтмена и Эрдейи «Высшие трансцендентные функции», т. I, на которую далее мы будем часто ссылаться с указанием номера страницы [161].

Задачи рассеяния бесспиновых частиц симметричны относительно направления падающего пучка, которое обычно выбирается в качестве оси z . Вследствие этого устраняется зависимость от угла φ и поэтому достаточно рассмотреть в дальнейшем только

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_l(z). \quad (\text{A.3})$$

Эти функции Лежандра являются собственными функциями оператора квадрата углового момента L^2 , т. е.

$$L^2 P_l(z) = l(l+1) P_l(z), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

и, например в координатном представлении,

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dP_l(z)}{dz} \right] + l(l+1) P_l(z) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Это уравнение называется уравнением Лежандра [161, с. 125]. В случае, когда l — целое число, функции Лежандра являются полиномами по z , регулярными на всей конечной плоскости z . Выпишем несколько первых полиномов:

$$P_0(z) = 1; \quad P_1(z) = z; \quad P_2(z) = (3z^2 - 1)/2; \quad P_3(z) = (5z^3 - 3z)/2. \quad (\text{A.6})$$

Уравнение (A.5) имеет решения и в случае, когда l не является целым числом. Это решение [161, с. 149] может быть представлено с помощью гипергеометрической функции

$$P_l(z) = F(-l, l+1; 1; (1-z)/2) \quad (\text{A.7})$$

и сингулярно в точках $z = -1$ и $z = \infty$. Эти решения называются функциями Лежандра первого рода.

Кроме этих решений уравнения (A.5) имеются другие, которые сингулярны в точках $z = \pm 1$ и $z = \infty$, называемые функциями Лежандра второго рода [161, с. 127]:

$$Q_l(z) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} (2z)^{-l-1} F(l/2+1/2, l/2+1, l+3/2; z^{-2}). \quad (\text{A.8})$$

В случае целых значений l несколько первых функций имеет вид [161, с. 152—153]:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(z) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right); & Q_1(z) &= \frac{z}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - 1; \\ Q_2(z) &= \frac{1}{2} P_2(z) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - \frac{3}{2} z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Эти функции удовлетворяют *inter alia* следующим условиям, которые нам понадобятся в этой книге:

Соотношение отражения [161, с. 141] дает

$$P_l(-z) = \exp(-i\pi l) P_l(z) - (2/\pi) \sin \pi l Q_l(z) \quad (\text{A.10})$$

$$P_l(-z) = (-1)^l P_l(z), \quad l = \text{целое число}. \quad (\text{A.11})$$

Поскольку уравнение (A.5) инвариантно при замене $l \rightarrow -l-1$, то [161, с. 140]

$$P_l(z) = P_{-l-1}(z). \quad (\text{A.12})$$

Кроме того, для действительных l [161, с. 145]:

$$\text{Im} \{P_l(z)\} = \begin{cases} -P_l(-z) \sin \pi l, & z < -1; \\ 0 & z \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

В случае целых l два типа решений связаны друг с другом соотношением Неймана [161, с. 154].

$$Q_l(z) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz'}{z'-z} P_l(z'), \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.14})$$

которое является как бы «дисперсионным соотношением» для функции $Q_l(z)$. Это с очевидностью следует из того факта [161, с. 145], что

$$\text{Im} \{Q_l(z)\} = \begin{cases} 0 & |z| > 1, \quad l=0, 1, 2, \dots; \\ -\pi/2 P_l(z), & -1 < z < 1. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Для случая нецелых l

$$\text{Im} \{Q_l(z)\} = \begin{cases} \sin \pi l \cdot Q_l(-z), & -\infty < z < -1; \\ -(\pi/2) P_l(z), & -1 < z < 1. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Соотношение отражения для функций второго типа формулируется следующим образом [161, с. 141]:

$$Q_l(-z) = \begin{cases} -\exp(-i\pi l) Q_l(z); \\ (-1)^{l+1} Q_l(z), & l - \text{целое число}. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Другими полезными результатами являются следующие [161, с. 140]:

$$\frac{P_l(z)}{\sin \pi l} - \frac{1}{\pi} \frac{Q_l(z)}{\cos \pi l} = -\frac{1}{\pi} \frac{Q_{-l-1}(z)}{\cos \pi l} \quad (\text{A.18})$$

и

$$Q_l(z) = Q_{-l-1}(z), \quad l - \text{полуцелое число}. \quad (\text{A.19})$$

Для полиномов Лежандра имеется соотношение ортогональности [161, с. 171]

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(z) P_l(z) dz = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad l, l' - \text{целые} \quad (\text{A.20})$$

и некоторые другие интегральные соотношения [161, с. 171]:

$$\int_{-1}^1 P_{\alpha}(-z) P_l(z) dz = \frac{1}{\pi} \frac{2 \sin \pi \alpha}{(\alpha - l)(\alpha + l + 1)}, \quad l - \text{целое, } \alpha - \text{любое} \quad (\text{A.21})$$

$$\int_1^{\infty} P_{\alpha}(z) Q_l(z) dz = \frac{1}{(l - \alpha)(\alpha + l + 1)}, \quad l, \alpha - \text{любые}, \quad (\text{A.22})$$

$$P_{\alpha}(-z) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dz' P_{\alpha}(z')}{z' - z}. \quad (\text{A.23})$$

Асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$ и фиксированном l можно получить, если переписать (A.7) как [161, с. 127].

$$P_l(z) = \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+1)} (2z)^l F(-l/2, -l/2+1/2, -l+1/2; z^{-2}) + \\ + \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(-l-1/2)}{\Gamma(-l)} (2z)^{-l-1} F(l/2+1/2, l/2+1, l+3/2; z^{-2}). \quad (\text{A.24})$$

И так как $F \rightarrow 1$, когда $z \rightarrow \infty$, то мы получаем [161, с. 165]

$$P_l(z) \rightarrow \begin{cases} \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+1)} (2z)^l, & \operatorname{Re}\{l\} \geq -1/2; \\ \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(-l-1/2)}{\Gamma(-l)} (2z)^{-l-1}, & \operatorname{Re}\{l\} \leq -1/2. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$P_l(z) \rightarrow \begin{cases} \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(l+1/2)}{\Gamma(l+1)} (2z)^l, & \operatorname{Re}\{l\} \geq -1/2; \\ \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(-l-1/2)}{\Gamma(-l)} (2z)^{-l-1}, & \operatorname{Re}\{l\} \leq -1/2. \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Аналогичным образом получаем из (A.8)

$$Q_l(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} (2z)^{-l-1}. \quad (\text{A.27})$$

Асимптотическое поведение при $l \rightarrow \infty$ и фиксированном z является намного более сложным [161, с. 142, 163; [318]]:

$$P_l(z) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} (2\pi l)^{-1/2} (z^2 - 1)^{-1/4} e^{\xi}, \quad \operatorname{Re}\{l\} > 0, \quad (\text{A.28})$$

где

$$\xi \equiv 2(\operatorname{Re}\{l\} + 1) \ln \left[\left(\frac{z+1}{2} \right)^{1/2} + \left(\frac{z-1}{2} \right)^{1/2} \right], \quad z > 1;$$

$$\xi \equiv 2|\operatorname{Im}\{l\}| \operatorname{arctg} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{1/2}, \quad z^2 < 1,$$

итак,

$$|P_l(z)| \underset{l \rightarrow \infty}{<} l^{-1/2} \exp\{|\operatorname{Im}\{l\} \operatorname{Re}\{\theta\} + \operatorname{Re}\{l\} \operatorname{Im}\{\theta\}|\} f(z) \quad (\text{A.29})$$

$$\left| \frac{P_l(z)}{\sin \pi l} \right| \underset{l \rightarrow \infty}{<} l^{-1/2} \exp\{|\operatorname{Im}\{l\} \operatorname{Re}\{\theta\} + \\ + \operatorname{Re}\{l\} \operatorname{Im}\{\theta\} - \pi |\operatorname{Im}\{l\}|\} f(z). \quad (\text{A.30})$$

Кроме того,

$$Q_l(z) \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} l^{-1/2} \exp\{-(l+1/2)\zeta(z)\}, \quad (\text{A.31})$$

где $\zeta(z) \equiv \ln [z + (z^2 - 1)^{1/2}]$.

Из выражения (А.7) видно, что $P_l(z)$ является целой функцией l , тогда как из (А.8) следует, что функция $Q_l(z)$ — мероморфная, так как она имеет полюса при отрицательных целых значениях l вследствие того, что в числителе стоит Γ -функция и из (А.18) следует

$$Q_l(z) \approx \pi \frac{\cos \pi l}{\sin \pi l} P_{-l-1}(z), \text{ при } l = -1, -2, -3 \dots \quad (\text{А.32})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ФУНКЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Состояние с угловым моментом J и с проекцией углового момента на ось z , равной m при произвольном вращении, характеризуемом углами Эйлера α, β, γ преобразуется по следующей формуле (см. книгу Эдмондса [158, с. 54]):

$$D(\alpha, \beta, \gamma) |Jm\rangle = \sum_{m'=-J}^J |Jm'\rangle \langle Jm' | D(\alpha, \beta, \gamma) |Jm\rangle, \quad (\text{Б.1})$$

причем оператор вращения имеет вид

$$D(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \exp(i\alpha J_z) \exp(i\beta J_y) \exp(i\gamma J_z), \quad (\text{Б.2})$$

т. е. сначала происходит поворот на угол γ вокруг оси z , затем — поворот на угол β вокруг y и снова поворот вокруг оси z , но на угол α .

Так как собственное значение оператора J_z равно m , то матричные элементы оператора $D(\alpha, \beta, \gamma)$ могут быть записаны в виде

$$\langle Jm' | D(\alpha, \beta, \gamma) |Jm\rangle \begin{cases} \equiv D_{m'm}^J(\alpha, \beta, \gamma) \\ = \exp(im'\alpha) d_{m'm}^J(\beta) \exp(im\gamma), \end{cases} \quad (\text{Б.3})$$

$$= \exp(im'\alpha) d_{m'm}^J(\beta) \exp(im\gamma), \quad (\text{Б.4})$$

причем матрицы вращения можно определить как

$$d_{m'm}^J(\beta) \equiv \langle Jm' | \exp(i\beta J_y) |Jm\rangle. \quad (\text{Б.5})$$

Эти матричные элементы легко определить в случае, когда $J = 1/2$. Для этого нужно вместо J_y подставить матрицу Паули и разложить экспоненту в ряд [см. ниже (Б.19)]. Для того чтобы получить выражения для более высоких моментов J , можно воспользоваться рядом Клебша — Гордона (см. например, книгу Вигнера [412, с. 167])

Найдено, что [158, с. 57]

$$d_{m'm}^J(\beta) = \left[\frac{(J+m')!(J-m)!}{(J+m)!(J-m)!} \right]^{1/2} \sum_{\sigma} \binom{J+m}{J-m'-\sigma} \binom{J-m}{\sigma} (-1)^{J-m'-\sigma} \times \\ \times \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2\sigma+m'+m} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2J-2\sigma-m'-m}. \quad (\text{Б.6})$$

Если плоскость рассеяния является плоскостью xz , то угол β соответствует углу рассеяния θ , который, в свою очередь, равен углу между направлениями движения в начальном и конечном состояниях. В связи с этим значительно более удобно писать матрицы рассеяния как функции $z \equiv \cos \theta$, а не самого угла θ . Кроме того, двухчастичные спиральные состояния m' и m соответствуют разностям спиральностей λ и λ' , определенным в (4.4.15). Итак, будем обычно заменять выражение (Б.6) на $d_{\lambda\lambda'}^J(z)$, исходя из изложенного выше.

Функции, определенные в (Б.6), удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$\left. \begin{aligned} d_{\lambda\lambda'}^J(z) &= (-1)^{\lambda-\lambda'} d_{-\lambda-\lambda'}^J(z) = (-1)^{\lambda-\lambda'} d_{\lambda'\lambda}^J(z); \\ d_{\lambda\lambda'}^J(\pi-\theta) &= (-1)^{J-\lambda} d_{-\lambda\lambda'}^J(-\theta) = (-1)^{J-\lambda} d_{\lambda'\lambda}^J(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.7})$$

Выражение (Б.6) можно переписать в терминах полиномов Якоби $P_c^{(a,b)}(z)$

$$\begin{aligned} d_{\lambda\lambda'}^J(z) &= \left[\frac{(J+\lambda)!(J-\lambda)!}{(J+\lambda')!(J-\lambda')!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \left(\frac{1-z}{2} \right)^{\frac{1}{2}(\lambda-\lambda')} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')} P_{J-\lambda}^{(\lambda-\lambda', \lambda+\lambda')}(z), \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

но это представление справедливо только для неотрицательных значений $(\lambda - \lambda')$ и $(\lambda + \lambda')$. В других случаях можно воспользоваться соотношениями симметрии (Б.7) и окончательное выражение будет иметь вид

$$d_{\lambda\lambda'}^J(z) = (-1)^\Lambda \left[\frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+N)!(J-N)!} \right]^{1/2} \xi_{\lambda\lambda'}(z) P_{J-M}^{(|\lambda-\lambda'|, |\lambda+\lambda'|)}(z), \quad (\text{Б.9})$$

где

$$M \equiv \max\{|\lambda|, |\lambda'|\}, \quad N \equiv \min\{|\lambda|, |\lambda'|\}, \quad \Lambda \equiv \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' - |\lambda - \lambda'|) \quad (\text{Б.10})$$

и так называемый «фактор половинных углов» $\xi_{\lambda\lambda'}(z)$ определяется как

$$\xi_{\lambda\lambda'}(z) \equiv \left(\frac{1-z}{2} \right)^{\frac{1}{2}|\lambda-\lambda'|} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\frac{1}{2}|\lambda+\lambda'|}. \quad (\text{Б.11})$$

Выражение (Б.9) — очень удобное представление функций $d_{\lambda\lambda'}^J(z)$, потому что в случае целых $(J - M)$ функции Якоби — целые функции переменной z , и поэтому единственно возможными сингулярностями функций $d_{\lambda\lambda'}^J(z)$ являются сингулярности фактора половинных углов (Б.11) при $z = \pm 1$.

Однако, так как в дальнейшем придется делать аналитическое продолжение по J , очень полезно выразить (Б.9) в терминах гипергеометрической функции (см. [21])

$$\begin{aligned} d_{\lambda\lambda'}^J(z) &= (-1)^\Lambda \left[\frac{(J+M)!(J-M+|\lambda-\lambda'|)!}{(J-M)!(J+M-|\lambda-\lambda'|)!} \right]^{1/2} \frac{1}{|\lambda-\lambda'|!} \times \\ &\times \xi_{\lambda\lambda'}(z) F(-J+M, J+M+1, |\lambda-\lambda'|+1; (1-z)/2). \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Гипергеометрическая функция является целой функцией по J , и поэтому единственным источником сингулярностей служит выражение в квадратных скобках, в котором содержится факториальные функции, имеющие сингулярности при целых отрицательных значениях своих аргументов.

Так как известно асимптотическое поведение гипергеометрической функции, то можно легко найти, что

$$\begin{aligned} d_{\lambda\lambda'}^J(z) &\xrightarrow{z \rightarrow \infty} (-1)^\Lambda \times \\ &\times \frac{(2J)!}{[(J+M)!(J-M+|\lambda-\lambda'|)!(J-M)!(J+M-|\lambda-\lambda'|)!]^{1/2}} \times \\ &\times \xi_{\lambda\lambda'}(z) \left(\frac{z}{2} \right)^{J-M} (1 + O(z^{-2})) + O(z^{-J-1}) \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

и так как из (Б.11) следует, что $\xi_{\lambda\lambda'}(z) \sim z^M$, то

$$d_{\lambda\lambda'}^J(z) \sim z^J, \quad J > -1/2$$

для $(J - \nu)$ — не равных целому числу и меньших $M - d_{\lambda\lambda'}^J(z)$ исчезает [$\nu \equiv 0 (1/2)$ для физических J , равных целому (полуцелому) числу, т. е. для четного (нечетного) числа фермионов].

Эти функции также удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^1 d_{\lambda\lambda'}^J(z) d_{\lambda\lambda''}^{J'}(z) dz = \delta_{JJ'} \frac{2}{2J+1}; \quad (\text{Б.14})$$

$$\frac{1}{2} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(z) d_{\lambda\lambda''}^J(z') = \delta(z-z'); \quad (\text{Б.15})$$

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda\lambda'}^J(z) d_{\lambda\lambda''}^J(z) = \delta_{\lambda' \lambda''}. \quad (\text{Б.16})$$

Выпишем несколько функций d_{mm}^J , при частных значениях параметров, которые нам окажутся полезными далее. При целых значениях J

$$d_{m0}^J = \left[\frac{(J-m)!}{(J+m)!} \right]^{1/2} P_J^m(z); \quad (\text{Б.17})$$

$$d_{00}^J(z) = P_J(z) \quad (\text{Б.18})$$

и при нецелых

$$d_{1/2}^{1/2}{}_{1/2}(z) = (1+z)/2 = \cos(\theta/2) d_{1/2}^{1/2}{}_{-1/2}(z) = (1-z)/2 = \sin(\theta/2). \quad (\text{Б.19})$$

Мы также будем использовать функции вращения второго рода $e_{\lambda\lambda'}^J(z)$, аналогичные функциям Лежандра второго рода $Q_l(z)$, введенным в Приложении А (см. [21]). Они определяются с помощью функций Якоби второго рода $Q_c^{(a,b)}(z)$ и имеют вид

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) = (-1)^{\Lambda+\lambda-\lambda'} \times \\ \times \left[\frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+N)!(J-N)!} \right]^{1/2} \xi_{\lambda\lambda'}(z) Q_{J-M}^{(\lambda-\lambda', 1, 1, \lambda+\lambda')}(z). \quad (\text{Б.20})$$

При целых $(J - M) \geq 0$ эти функции связаны с $d_{\lambda\lambda'}^J(z)$ с помощью обобщенного соотношения Неймана

$$\xi_{\lambda\lambda'}(z) e_{\lambda\lambda'}^J(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz'}{z-z'} d_{\lambda\lambda'}^J(z') \xi_{\lambda\lambda'}(z') \quad (\text{Б.21})$$

и обладают следующими свойствами симметрии:

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) = (-1)^{\lambda-\lambda'} e_{-\lambda-\lambda'}^J(z) = (-1)^{\lambda-\lambda'} e_{\lambda\lambda'}^J(z); \quad (\text{Б.22})$$

$$e_{\lambda\lambda'}^J(-z) = (-1)^{J-\lambda+1} e_{-\lambda-\lambda'}^J(z). \quad (\text{Б.23})$$

Определение (Б.20) может быть переписано в терминах гипергеометрической функции как

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) = (-1)^\Lambda \frac{1}{(2J+1)!} [(J+M)!(J-M)!(J+N)!(J-N)!]^{1/2} \times \\ \times \xi_{\lambda\lambda'}^{-1}(z) \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{2} \right)^{-J-1+M} \times \\ \times F\left(J-M+1, J-M+|\lambda-\lambda'|+1, 2J+2; \frac{2}{1-z}\right), \quad (\text{Б.24})$$

Эта форма записи позволяет сразу увидеть сингулярности в плоскости J и, так как $F \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, асимптотическое поведение этих функций

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\rightarrow} (-1)^{(\lambda-\lambda')/2} \frac{1}{(2J+1)!} \times \\ \times [(J+M)!(J-M)!(J+N)!(J-N)!]^{1/2} \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{-J-1} \quad (\text{Б.25})$$

и [ср. (А.31)]

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) \underset{J \rightarrow \infty}{\rightarrow} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{\exp(\pm i\pi(\lambda-\lambda'))}{J^{1/2}} \frac{1}{(z^2-1)^{1/4}} \exp\left\{-\left(J+\frac{1}{2}\right)\zeta(z)\right\}, \quad \arg J < \pi, \quad (\text{Б.26})$$

где $\zeta(z) \equiv \ln[z + \sqrt{z^2-1}]$ и мы использовали \pm для $\text{Im}\{z\} \geq 0$.

Для полуцелых значений $(J-v)$ эти функции подчиняются следующему соотношению симметрии:

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) = (-1)^{\lambda-\lambda'} e_{\lambda\lambda'}^{-J-1}(z). \quad (\text{Б.27})$$

Кроме того, аналогично (А.18) имеется связь

$$\frac{d_{\lambda\lambda'}^J(z)}{\sin \pi(J-\lambda)} = \frac{e_{\lambda\lambda'}^J(z)}{\pi \cos \pi(J-\lambda)} - \frac{e_{-\lambda-\lambda'}^{-J-1}(z)}{\pi \cos \pi(J-\lambda)} \quad (\text{Б.28})$$

и можно найти

$$e_{\lambda\lambda'}^J(z) \approx \frac{d_{\lambda\lambda'}^J(z)}{J-J_0} \quad (\text{Б.29})$$

для $J \rightarrow$ к целому $(J_0 - v)$ при условии, что $J_0 < -M$. Подобные полюса или факторы $(J - J_0)^{1/2}$ возникают при $J \rightarrow$ к целому $(J_0 - v)$ и при условии, если $-M \leq J_0 < M$. Все это может быть получено из рассмотрения (Б.24) [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. D. I. Abarbanel, J. B. Bronzan. — Phys. Rev, 1974, v. D9, p. 2397.
2. H. D. I. Abarbanel, J. B. Bronzan. — Ibid, p. 3304.
3. H. D. I. Abarbanel, J. B. Bronzan, R. L. Sugar, A. R. White. Phys. Rep., 1975, v. 21C, p. 120.
4. H. D. I. Abarbanel, G. F. Chew, M. L. Goldberger, L. M. Saunders. — Phys. Rev. Letters, 1971, v. 26, p. 937.
5. H. D. I. Abarbanel, M. L. Goldberger, S. B. Trieman. — Ibid, 1969, v. 22, p. 500.
6. H. D. I. Abarbanel, C. Itzykson. — Ibid, 1969, v. 23, p. 53.
7. H. D. I. Abarbanel, F. E. Low, I. Muzinich, S. Mussinov, J. Schwarz. — Phys. Rev., 1967, v. 160, p. 1329.
8. W. J. Abbe, P. Kaus, P. Nath, Y. N. Srivastava. — Ibid, 1967, v. 154, p. 1515.
9. E. S. Abers, H. Burkhardt, V. L. Teplitz, C. Wilkin. — Nuovo Cimento, 1966, v. 42, p. 365.
10. E. S. Abers, D. Keller, V. L. Teplitz. — Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 1757.
11. E. S. Abers, V. L. Teplitz. — Ibid, 1967, v. 158, p. 1365.
12. R. K. Adair. — Ibid, 1968, v. 172, p. 1370.
13. M. Ademollo, H. R. Rubinstein, G. Veneziano, M. A. Virasoro. — Ibid, 1968; v. 176, p. 1904.
14. J. P. Ader, M. Capdeville, H. Navelet. — Nuovo Cimento, 1968, v. 56A, p. 315.
15. S. L. Adler, R. F. Dashen. — Current algebras and applications to particle physics, Benjamin, 1968. (Рус. пер.: Адлер С., Дашен П. Алгебры токов и их применение в физике частиц. М., Мир., 1970).
16. A. Ahmadzadeh, P. G. Burke, C. Tate. — Phys. Rev. 1963, v. 131, p. 1315.
17. V. de Alfaro, T. Regge. Potential scattering, North-Holland, 1965. (Рус. пер.: Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. М., Мир, 1966).
18. D. Amati, A. Stanghellini, S. Fubini. — Nuovo cimento, 1962, v. 26, p. 6.
19. D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini. — Phys. Letters, 1962, v. 1, p. 29.
20. I. Ambats e. a. — Nucl. Phys., 1974, v. B77, p. 269.
21. M. Andrews, J. Gunson. — J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 1391.
22. M. Armad, Fayyazuddin, Riazuddin. — Phys. Rev. Letters, 1969, v. 23, p. 504.
23. R. C. Arnold. — Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 1523.
24. D. Atkinson, K. Dietz, D. Morgan. — Ann. Phys., 1966, v. 37, p. 77.
25. P. Aurenche e.a. Building a general framework for hadron collisions. — In: Proceedings of the 6th international colloquium on multi-particle reactions, Oxford U. P., 1975.
26. L. A. P. Balazs. — Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 1939.
27. L. A. P. Balazs. — Ibid, 1963, v. 129, p. 872.
28. N. F. Bali, G. F. Chew, A. Pignotti. — Ibid., 1967, v. 163, p. 1572.
29. N. F. Bali, D. D. Coon, J. W. Dash. — Phys. Rev. Letters, 1969, v. 23, p. 900.
30. J. S. Ball, W. R. Frazer, M. Jacob. — Ibid, 1968, v. 20, p. 518.
31. K. Bardakci, H. Ruegg. — Phys. Letters, 1968, v. 28B, p. 342.
32. V. Barger. In: Proceedings of the 17th international conference on higher energy physics, London, Rutherford Laboratory, J. R. Smith (ed.), 1974.
33. V. Barger, D. Cline. — Phys. Rev. Letters, 1966, v. 16, p. 913.
34. V. Barger, D. Cline. — Phys. Rev., 1967, v. 155, p. 1792.
35. V. Barger, D. Cline. — Phys. Rev. Letters, 1970, v. 24, p. 1313.
36. V. Barger, R. J. M. Phillips. — Phys. Rev., 1969, v. 167, p. 2210.
37. V. Barger, R. J. N. Phillips. — Phys. Letters, 1974, v. 53B, p. 195.
38. V. Bargmann. — Ann. Math., 1947, v. 48, p. 568.
39. M. B. Bari, M. S. K. Razmi. — Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 2054.
40. A. O. Barut. The theory of the scattering matrix. — Mac. Millan, 1967.
41. A. O. Barut, D. E. Zwanziger. — Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 974. (Рус. пер.: в кн.: Теория сильных взаимодействий при больших энергиях. М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
42. D. S. Beder. Ibid, 1966, v. 149, p. 1203.

43. J. Benecke, T. T. Chou, C. N. Yang, E. Yen.— *Ibid*, 1969, v. 188, p. 2159.
44. E. L. Berger. Phenomenology in particle physics.— California Institute of Technology, 1971.
45. E. L. Berger. In: Colloquium on multi-particle dynamics, Helsinki, 1971.
46. E. L. Berger, G. C. Fox.— *Phys. Rev.*, 1969, v. 188, p. 2120.
47. J. Bernstein. Elementary particles and their currents. Freeman, 1968. (Рус. пер.: Дж. Бернштейн. Элементарные частицы и их токи. М., Мир., 1970.)
48. L. Bertocchi, S. Fubini, M. Tonin.— *Nuovo Cimento*, 1962, v. 25, p. 626.
49. H. Bethe, E. E. Salpeter.— *Phys. Rev.*, 1951, v. 84, p. 1232.
50. K. M. Bitar, G. L. Tindle.— *Ibid.*, 1968, v. 175, p. 1835.
51. J. D. Bjorken, S. Drell. Relativistic quantum fields. McGraw-Hill, 1965. (Рус. пер.: Бьёркен Дж. Д., Дрелл. С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 2, М., Наука, 1978.)
52. R. Blankenbecler, H. M. Fried.— *Phys. Rev.*, 1973, v. D8, p. 678.
53. R. Blankenbesler, J. R. Fulco, R. N. Sugar.— *Ibid*, 1974, v. D 9, p. 736.
54. R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, N. N. Khuri, S. B. Trieman.— *Ann. Phys.*, 1960, v. 10, p. 62. (Рус. пер.: в кн. Теория сильных взаимодействий при больших энергиях. М., Изд-во иностр. лит., 1963).
55. J. M. Blatt, V. F. Weisskopf. Theoretical nuclear physics, Wiley, 1952. (Рус. пер.: Блатт Дж., Вейскопф В. Ф. Теоретическая ядерная физика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.)
56. M. J. Bloxam, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne.— *J. Math. Phys.*, 1969, v. 10, p. 494, 545, 553.
57. P. Bonamy e. a.— *Nucl. Phys.*, 1973, v. B52, p. 392.
58. M. Borghini e. a.— *Phys. Letters*, 1970, v. 31B, p. 405.
59. M. Borghini e. a.— *Ibid*, 1971, v. 36B, p. 493.
60. J. F. Boyce.— *J. Math. Phys.*, 1967, v. 8, p. 675.
61. B. H. Branden, D. Evans, J. V. Major. The fundamental particles. Van Nostrand. Reinhold, 1973.
62. W. E. Britten, A. O. Barut (eds.). Lectures in theoretical physics. V. 7A. University of Colorado Press, 1964.
63. S. J. Brodsky, F. E. Close, J. E. Gunion.— *Phys. Rev.*, 1972, v. D 5, p. 1384.
64. J. B. Bronzan.— *Ibid.*, 1974, v. D10, p. 746.
65. J. B. Bronzan, I. S. Gerstein, B. W. Lee, F. E. Low.— *Ibid.*, 1967, v. 157, p. 1448.
66. J. B. Bronzan, C. E. Jones.— *Ibid*, 1967, v. 160, p. 1494.
67. R. C. Brower, R. N. Cahn, J. Ellis.— *Ibid*, 1973, v. D 7, p. 2080.
68. R. C. Brower, M. Einhorn, M. Green, A. Patroscioiu, J. H. Weis.— *Ibid.*, 1973, v. D8, p. 2524.
69. R. C. Brower, C. E. de Tar, J. H. Weis.— *Phys. Rev.*, 1974, v. 14C, p. 257.
70. R. C. Brower, J. H. Weis.— *Rev. Mod. Phys.*, 1975, v. 47, p. 605.
71. K. E. Cahill, H. P. Stapp.— *Phys. Rev.*, 1972, v. D 6, p. 1007.
72. K. E. Cahill, H. P. Stapp.— *Ibid.*, 1973, v. D 8, p. 2714.
73. R. Cahn. In: Proceedings of the 17th international conference on high-energy physics, London, J. R. Smith. (ed.), 1974.
74. F. Calogero, J. M. Charap, E. J. Squires. In: Proceedings of the Sienna conference, CERN, 1963.
75. F. Calogero, J. M. Charap, E. J. Squires.— *Ann. Phys.*, 1963, v. 25, p. 325.
76. A. Capella.— *Phys. Rev.*, 1973, v. D6, p. 2047.
77. A. Capella, J. Tran Thanh Van, A. P. Contogouris.— *Nucl. Phys.*, 1969, v. B12, p. 1.
78. J. L. Cardy.— *Ibid.*, 1971, v. B28, p. 455, 477.
79. J. L. Cardy.— *Ibid.*, 1974, B75, p. 413.
80. J. L. Cardy.— *Ibid.*, 1974, v. B79, p. 319.
81. J. L. Cardy, A. R. White.— *Phys. Letters*, 1973, v. 47B, p. 445.
82. J. L. Cardy, A. R. White.— *Nucl. Phys.*, 1974, v. B80, p. 12.
83. R. Carlitz, M. Kisslinger.— *Phys. Rev. Letters*, 1970, v. 24, p. 186.
84. P. Carruthers. Introduction to unitary symmetry, Wiley, 1966.
85. L. Castillejo, R. H. Dalitz, F. J. Dyson.— *Phys. Rev.*, 1956, v. 101, p. 453.
86. A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. Weisskopf.— *Ibid*, 1974, v. D9, p. 3471.

87. H.-M. Chan.— *Phys. Letters*, 1968, v. 28B, p. 425.
88. H.-M. Chan., P. Hoyer, H. I. Miettinen, D. P. Roy.— *Ibid.*, 1972, v. 40B, p. 406.
89. H.-M. Chan., K. Kajantie, G. Ranft.— *Nuovo cimento*, 1967, v. 49A, p. 157.
90. H.-M. Chan, J. Loskiewicz, W. W. M. Allison.— *Ibid.*, 1968, v. 57A, p. 93.
91. H.-M. Chan, H. I. Miettinen, W. S. Lam.— *Phys. Letters*, 1972, v. 40B, p. 112.
92. H.-M., Chan, J. Paton.— *Nucl. Phys.*, 1969, v. B10, p. 519.
93. H.-M. Chan, J. E. Paton, S. T. Tsou.— *Ibid.*, 1975, v. B68, p. 479.
94. H.-M. Chan, R. O. Raitio, G. H. Thomas, N. A. Tourngvist.— *Ibid.*, 1970, v. B19, p. 173.
95. H.-M. Chan, S. T. Tsou.— *Phys. Letters*, 1969, v. 28B, p. 485.
96. S. J. Chang, T. M. Yan.— *Phys. Rev. Letters*, 1970, v. 25, p. 1586.
97. J. M. Charap, E. J. Squires.— *Phys. Rev.*, 1962, v. 127, p. 1387.
98. H. Cheng, D. Sharp.— *Ibid.*, 1963, v. 132, p. 1854; *Ann. Phys.*, 1963, v. 22, p. 481.
99. H. Cheng, T. T. Wu.— *Ibid.*, 1969, v. 186, p. 1611.
100. H. Cheng, T. T. Wu.— *Phys. Rev. Letter.*, 1970, v. 24, p. 1456.
101. G. F. Chew. *S-Matrix theory of strong interactions*, Benjamin, 1962. (Рус. пер.: Чью Д. Аналитическая теория S-матрицы. М., Мир, 1968).
102. G. F. Chew. In: *High energy physics, les Houches Lectures*. Gordon and Breach., B. de Witt and M. Jacob (eds). 1965.
103. G. F. Chew.— *Phys. Rev. Letters*, 1966, v. 16, p. 60.
104. G. F. Chew. In: *Proceedings of the 5th international conference on high-energy collisions*, Stoney Brook, 1973.
105. G. F. Chew, S. C. Frautschi.— *Phys. Rev. Letters*, 1961, v. 7, p. 394.
106. G. F. Chew, S. C. Frautschi.— *Ibid.*, 1962, v. 8, p. 41.
107. G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. Low, Y. Nambu.— *Phys. Rev.*, 1957, v. 106, p. 1337.
108. G. F. Chew, F. E. Low, M. L. Goldberger.— *Phys. Rev., Letters*, 1969, v. 22, p. 208.
109. G. F. Chew, S. Mandelstam.— *Phys. Rev.*, 1960, v. 119, p. 476. (Рус. пер. в кн.: Новый метод в теории сильных взаимодействий. М., Изд-во иностр. лит., 1960).
110. G. F. Chew, A. Pignotti.— *Ibid.*, 1968, v. 176, p. 2112.
111. G. F. Chew, T. Rogers, D. R. Snider.— *Ibid.*, 1970, v. D2, p. 765.
112. G. F. Chew, D. R. Snider.— *Ibid.*, 1971, v. D 3, p. 420.
113. C. B. Chiu, J. Finkelstein.— *Phys. Letters*, 1968, v. 27B, p. 510.
114. C. B. Chiu, A. Kotanski.— *Nucl. Phys.*, 1968, v. B7, p. 615; v. B8. p. 553.
115. F. E. Close, J. F. Gunion.— *Phys. Rev.*, 1971, v. D 4, p. 742.
116. G. Cohen-Tannoudji, A. Morel, H. Navelet.— *Ann. Phys.*, 1968, v. 46, p. 239.
117. G. Cohen-Tannoudji, Ph. Salin, A. Morel.— *Nuovo cimento*, 1968, v. 55A, p. 412.
118. G. Cohen-Tannoudji, F. Henyey, G. L. Kane, W. J. Zakrzewski.— *Phys. Rev. Letters*, 1971, v. 26, p. 112.
119. S. Coleman, R. E. Norton.— *Nuovo cimento*, 1965, v. 38, p. 438.
120. P. D. B. Collins.— *Phys. Rev.*, 1966, v. 142, p. 1163.
121. P. D. B. Collins.— *Phys. Rep.*, 1971, v. 1C, p. 105.
122. P. D. B. Collins, A. Fitton.— *Nucl. Phys.*, 1975, v. B91, p. 332.
123. P. D. B. Collins, F. D. Gault.— *Nuovo cimento*, 1972, v. 10A, p. 189.
124. P. D. B. Collins, F. D. Gault. *A bibliography of Regge phenomenology*, University of Durham report, 1975.
125. P. D. B. Collins, F. D. Gault, A. Martin.— *Nucl. Phys.*, 1974, v. B80, p. 136, v. B83, p. 241.
126. P. D. B. Collins, R. C. Johnson.— *Phys. Rev.*, 1968, v. 169, p. 1222.
127. P. D. B. Collins, R. C. Johnson.— *Ibid.*, 1969, v. 182, p. 1755.
128. P. D. B. Collins, R. C. Johnson, E. J. Squires.— *Phys. Letters*, 1968, v. 26B, p. 223.
129. P. D. B. Collins, R. C. Johnson, E. J. Squires.— *Ibid.*, 1968, v. 27B, p. 23.
130. P. D. B. Collins, K. L. Mir.— *Nucl. Phys.*, 1970, v. B19, p. 509.
131. P. D. B. Collins, G. G. Ross, E. J. Squires.— *Ibid.*, 1969, v. B10, p. 475.

132. P. D. B. Collins, E. J. Squires. — Regge poles in particle physics, Springer, 1968. (Рус. пер. — Коллинз П., Сквайрс Э. Полюса Редже в физике частиц. М., Мир. 1971.)
133. P. D. B. Collins, R. A. Swetman. — Lettere al Nuovo cimento, 1972, v. 5, p. 793.
134. W. N. Cottingham. — Ann. Phys., 1963, v. 25, p. 424.
135. R. E. Cutkosky. — J. Math. Phys., 1960, v. 1, p. 429.
136. R. E. Cutkosky. — Rev., Mod. Phys., 1961, v. 33, p. 446.
137. R. E. Cutkosky, B. B. Deo. — Phys. Rev. Letters, 1967, v. 19, p. 1256.
138. R. H. Dalitz. — Phil. Mag., 1953, v. 44, p. 1068.
139. R. H. Dalitz. In: High energy physics, les Houches Lectures, Gordon and Breach, B. de Witt, M. Jacob (eds.), 1965.
140. M. Damashek, F. J. Gilman. — Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 1319.
141. A. Dar, V. F. Weisskopf, C. A. Levinson, H. J. Lipkin. — Phys. Rev. Letters, 1968, v. 20, p. 1261.
142. R. F. Dashen, M. Cell-Mann. — Ibid., 1966, v. 17, p. 340.
143. R. Dolen, D. Horn, C. Schmid. — Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 1768.
144. G. Domokos, G. L. Tindle. — Ibid., 1968, v. 165, p. 1906.
145. A. Donnachie, G. G. Kirsopp. — Nucl. Phys., 1969, v. B10, p. 433.
146. H. Dosh. — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1595.
147. W. Drechsler. — Nuovo cimento, 1968, v. 53A, p. 115.
148. S. D. Drell, A. C. Hearn. — Phys. Rev. Letters, 1966, v. 16, p. 908.
149. S. D. Drell, J. D. Walecka. — Ann. Phys., 1964, v. 28, p. 18.
150. I. T. Drummond. In: Proceedings of the 16th international conference on highenergy physics, Batavia, Batavia Laboratory, 1972.
151. I. T. Drummond, P. V. Landshoff, W. J. Zakrzewsky. — Nucl. Phys., 1969, v. B11, p. 383.
152. I. T. Drummond, P. V. Landshoff, W. J. Zakrzewski. — Phys. Letters, v. 28B, p. 676.
153. L. Durand. — Phys., Rev. Letters, 1967, v. 18, p. 58.
154. L. Durand, Y. T. Chiu. — Phys. Rev., 1965, v. 139, p. B646.
155. R. J. Eden. High energy collisions of elementary particles, Cambridge U.P., 1967. (Рус. пер.: Иден Р. Дж. Столкновения элементарных частиц при высоких энергиях. М., Наука, 1970.)
156. R. J. Eden. — Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 15.
157. R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne. The analytic S-matrix, Cambridge U. K., 1966.
158. A. R. Edmonds. Angular momentum in quantum mechanics. Princeton U. P., 1960. (Рус. пер. — В сб.: Деформация атомных ядер. М., Изд-во иностр. лит., 1958).
159. M. B. Einhorn, J. Ellis, J. Finkelstein. — Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 2063.
160. M. B. Einhorn, M. Green, M. A. Virasoro. — Ibid., 1972, v. D6, p. 1675.
161. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. C. Tricomi (eds.). Higher transcendental functions. V. 3. McGraw Hill., 1953. (Рус. пер.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 1973 (т.1), 1974 (т. 2), 1967 (т. 3).)
162. T. Ferbel. — Phys. Rev. Letters, 1972, v. 29, p. 448.
163. M. Ferro-Luzzi e. a. — Phys. Letters, 1971, v. 34B, p. 534.
164. R. P. Feynman. Phys. Rev. Letters, 1969, v. 23, p. 1415.
165. R. P. Feynman. Photon-hadron interactions. Benjamin, 1972. (Рус. пер.: Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. М., Мир. 1975).
166. K. Fialkowski, H. I. Miettinen. — Phys. Letters, 1973, v. 43B, p. 61.
167. R. D. Field, G. C. Fox. — Nucl. Phys., 1974, v. B80, p. 367.
168. J. Finkelstein, K. Kajantie. — Nuovo cimento, 1968, v. 56A, p. 659.
169. J. Finkelstein, K. Kajantie. — Phys. Letters, 1968, v. 26B, p. 305.
170. G. C. Fox. In: Proceedings of Stony Brook conference on high energy collisions. American Institute of Physics, C. Quigg (ed.), 1973.
171. W. M. Frank, D. J. Land, R. M. Spector. — Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 36.
172. S. C. Frautschi, P. Kaus, F. Zachariasen. — Phys. Rev., 1964, v. 133, p. B1607.
173. W. R. Frazer e. a. — Rev. Mod. Phys., 1972, v. 44, p. 284.

174. D. Z. Freeman, J. M. Wang.— Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 1596.
175. P. G. O. Freund.— Phys. Rev. Letters, 1968, v. 20, p. 235.
176. P. G. O. Freund.— Ibid., 1968, v. 21, p. 1375.
177. M. Froissart. La Jolla conference on weak and strong interactions. Unpublished, 1961.
178. M. Froissart.— Phys. Rev., 1961, v. 123, p. 1053. (Рус. пер.: В кн.: Теория сильных взаимодействий при больших энергиях. М., Изд-во иностр. лит., 1963).
179. S. Fubini. In: Strong interactions and high energy physics. Oliver and Boyd, R. G. Moorhouse (ed.), 1963).
180. S. Fubini.— Nuovo cimento, 1966, v. 43, p. 475.
181. S. Fubini, D. Gordon, G. Veneziano.— Phys. Letters, 1969, v. 29B, p. 679.
182. S. Fubini, G. Veneziano.— Nuovo cimento, 1969, v. 64A, p. 811.
183. S. Fubini, G. Veneziano.— Ibid, 1970, v. 67A, p. 29.
184. S. Fubini, G. Veneziano.— Ann. Phys., 1971, v. 63, p. 12.
185. M. K. Gaillard, B. W. Lee, J. L. Rosner.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 277
186. S. Gasiorowicz. Elementary particle physics, Wiley, 1966. (Рус. пер. — Газворович С. Физика элементарных частиц. М., Наука, 1969).
187. M. Gell-Mann. In: CERN conference on high-energy physics, CERN, 1962.
188. M. Gell-Mann.— Phys. Letters, 1964, v. 8, p. 214.
189. M. Gell-Mann, M. L. Goldberger.— Phys. Rev. Letters, 1962, v. 9, p. 275.
190. M. Gell-Mann, F. E. Low, E. Marx, V. Singh, F. Zachariasen.— Phys. Rev., 1964, v. 133, p. B145, B16.
191. F. J. Gilman.— Phys. Rev., 1972, v. 4C, p. 95.
192. R. J. Glauber. In: Lectures in theoretical physics, Interscience, W. E., Britten and L. G. Dunham (eds.), 1959.
193. P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. B. Thorn.— Nucl. Phys., 1973, v. B56, p. 109.
194. P. Goddard, A. R. White.— Nuovo cimento, 1971, v. 1A, p. 645.
195. P. Goddard, A. R. White.— Phys. Letters, 1972, v. 38B, p. 93.
196. M. L. Goldberger. Multiperipheral dynamics. Princeton University report, 1969.
197. M. L. Goldberger, K. M. Watson. Collision theory, Wiley, 1964. (Рус. пер.: Гольдбергер М. Л., Ватсон К. М. Теория столкновений. М., Мир, 1967).
198. G. R. Goldstein, J. F. Owens.— Nucl. Phys., 1976, v. B1V3, p. 145.
199. M. L. Good, W. D. Walker.— Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 1857.
200. K. Gottfried, J. D. Jackson.— Nuovo cimento, 1964, v. 33, p. 309.
201. M. Gourdin. Unitary symmetries. North-Holland, 1967.
202. В. Н. Грибов.— Журн. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 41, с. 667.
203. В. Н. Грибов — Ядерная физ., 1967, т. 5, е. 197.
204. В. Н. Грибов. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1967, v. 53, с. 654.
205. В. Н. Грибов, А. А. Мигдал. — Ядерная физ., 1968, v. 8, с. 1002.
206. В. Н. Грибов, А. А. Мигдал. — Ядерная физ., 1968, т. 8, с. 1218.
207. V. N. Gribov, I. Ya. Pomeranchuk. In: CERN conference on high-energy physics, CERN, 1962.
208. V. N. Gribov, I. Ya. Pomeranchuk.— Phys. Rev. Letters, 1962, v. 9, p. 238.
209. V. N. Gribov, I. Ya. Pomeranchuk, K. A. Ter-Martirosyan.— Phys. Rev. 1965, v. 139, p. B184.
210. M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, H. S. Tsao.— Ibid., 1973, v. D8, p. 4498.
211. D. Gross.— Phys. Rev. Letters, 1967, v. 19, p. 1303.
212. D. Gross.— Nucl. Phys., 1969, v. B13, p. 467.
213. R. Hagedorn.— Suppl. Nuovo cimento, 1965, v. 3, p. 147; 1968, v. 6, p. 169; 1968, v. 6, p. 311.
214. I. G. Halliday.— Nuovo cimento, 1969, v. 60, p. 177.
215. I. G. Halliday, C. T. Sachrajda.— Phys. Rev., 1973, v. 8, p. 3598.
216. I. G. Halliday, L. M. Saunders.— Nuovo cimento, 1969, v. 60A, p. 115.
217. F. Halzen, A. Kumar, A. D. Martin, C. Michael.— Phys. Letters., 1970, v. 32B, p. 111.
218. F. Halzen, C. Michael.— Phys. Letters, 1971, v. 36B, p. 367.
219. D. Hankins, P. Kaus, C. J. Pearson.— Phys. Rev., 1965, v. 137, p. B1034.
220. Y. Hara.— Ibid., 1964, v. 136, p. 507.

221. H. Harari.— Phys. Rev. Letters, 1966, v. 17, p. 1303.
222. H. Harari.— Ibid., 1968, v. 20, p. 1395.
223. H. Harari.— Ibid., 1969, v. 22, p. 562.
224. H. Harari.— Ibid., 1970, v. 24, p. 286.
225. H. Harari.— Ann. Phys., 1971, v. 63, p. 432.
226. H. Harari. In: Phenomenology of particles at high energies. Academic Press, R. L. Crawford and R. Jennings (eds.), 1974.
227. H. Harari, E. Rabinvoici.— Phys. Letters, 1973, v. 43B, p. 49.
228. H. Harari, Y. Zarmi.— Phys. Rev., 1969, v. 187, p. 2230.
229. D. R. Harrington.— Ibid., 1970, v. D1, p. 260.
230. B. J. Hartley, G. L. Kane.— Nucl. Phys., 1973, v. B57, p. 157.
231. F. Henyey, G. L. Kane, J. Pumphin, M. H. Ross.— Phys. Rev., 1969, v. 182, p. 1579.
232. A. Herglotz.— Ber. Verk. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Naturw Kl, 1911, v. 63.,
233. D. Hill e.a.— Phys. Rev. Letters, 1973, v. 30, p. 239.
234. J. F. L. Hopkinson, E. Plahte.— Phys. Letters,, 1968, v. 28B, p. 489.
235. D. Horn.— Phys. Rep., 1972, v. 4C, p.11.
236. P. Hoyer, R. G. Roberts, D. P. Roy.— Nucl. Phys., 1973, v. B56, p. 173.
237. P. Hoyer. In: Proceedings of 17th International Conference on High-energy Physics, London, J. R. Smith (ed.), Rutherford Laboratory, 1974.
238. R. Hwa.— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1706.
239. R. Hwa.— Ibid., 1970, v. D1, p. 1790.
240. R. Hwa, C. B. Chiu.— Ibid., 1971, v. D4, p. 224.
241. R. HWA, W. S. Lam.— Ibid., 1972, v. D5, p. 766.
242. K. Igi, S. Matsuda.— Phys. Rev. Letters, 1967, v. 19, p. 928.
243. J. Iliopoulos. In: Proceedings of the 17th International Conference on High-energy Physics, London, J. R. Smith (ed.), 1974.
244. T. Inami.— Nucl. Phys., 1974, v. B77, p. 337.
245. E. Inonu, E. P. Wigner.— Nuovo cimento, 1952, v. 9, p. 707.
246. A. C. Irving, A. D. Martin, V. Barger.— Ibid., 1973, v. 16A, p. 573.
247. A. C. Irving, A. D. Martin, C. Michael.— Nucl. Phys., 1971, v. B32, p. 1.
248. J. D. Jackson. In: High-energy physics, les Houches Lectures. Gordon and Breach, de Witt and M. Jacob (eds.), 1965.
249. J. D. Jackson, G. E. Hite.— Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1248.
250. M. Jacob. In: Proceedings of the 16 th International Conference on High-energy Physics, Batavia, Batavia Laboratory, 1972.
251. M. Jacob, E. Berger, R. L. Slansky.— Phys. Rev., 1972, v. D 6, p. 2580.
252. M. Jacob, R. L. Slansky.— Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 1847.
253. M. Jacob, G. C. Wick.— Ann. Phys., 1959, v. 7, p. 404.
254. C. J. Jochain, C. Quigg.— Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 279.
255. C. E. Jones, J. B. Hartle.— Phys. Rev., 1965, s. 140, p. B90.
256. C. E. Jones, F. F. Low, J. E. Young.— Phys. Rev., v. D4, p. 2358.
257. C. E. Jones, V. L. Teplitz.— Ibid., 1967, v. 159, p. 1271.
258. H. F. Jones, M. Scadron.— Nucl. Phys., 1967, v. B4, p. 267.
259. H. Joos. In: Lectures in theoretical physics, v. 8A, University of Colorado, Britten and Barut (eds.), 1964.
260. G. L. Kane, F. Henyey, D. R. Richards, M. Ross, G. Williamson.— Phys. Rev. Letters, 1970, v. 25, p. 1519.
261. A. Kernan, H. K. Sheppard.— Ibid., 1969, v. 23, p. 1314.
262. T. W. B. Kibble.— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 2282.
263. Z. Koba, H. B. Nielsen.— Nucl. Phys., 1969, v. B10, p. 633.
264. J. J. Kokkedee. The quark model, Benjamin, 1969. (Рус. пер.: Я. Коккедэ. Теория кварков. М., Мир., 1971).
265. H. A. Kramers.— Atti. Congr. Intern. Fisici Como, 1927, v. 2, p. 545.
266. R. Kronig.— J. Opt. Soc. Amer., 1926, v. 12, p. 547.
267. P. K. Kuo, P. Suranyi.— Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 3416, 3424.
268. K. W. Lai, J. Louie.— Nucl. Phys., 1970, v. B19, p. 205.
269. L. D. Landau.— Ibid., 1959, v. 13, p. 181.
270. P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne.— Phys. Rev., 1969, v. 181, p. 1989
271. P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne.— Nucl. Phys., 1970, v. B19, p. 432

272. P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne.— Phys. Rep., 1972, v. 5, C.
273. P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne.— Phys., Rev., 1972, v. D5, p. 2056.
274. P. V. Landshoff, W. J. Zakrzewski.— Nucl. Phys., 1969, v. B12, p. 216.
275. E. Leader.— Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 1599.
276. M. Le Bellac.— Phys. Letters, 1967, v. 25B, p. 524.
277. M. Le Bellac.— Nuovo cimento, 1968, v. 55A, p. 318.
278. M. Le Bellac, J. L. Meunier.— Phys. Letters, 1973, v. 43B, p. 127.
279. H. Lee.— Phys. Rev. Letters, 1973, v. 30, p. 719.
280. J. Lee-Franzini. In: Proceedings of 5th International Conference on high energy collisions. Stony Brook, 1973.
281. H. Lehmann.— Nuovo cimento, 1958, v. 10, p. 579.
282. D. W. G. S. Leith. In: The Pomeron CNRS. J. Tran Thanh Van (ed.), 1973.
283. N. Lewinson.. Kgl. Dansk, vidensk selskab. Mat.-fys. medd., 1949, v. 25, p. 9.
284. M. Levy, J. Sucher.— Phys. Rev., 1969, v. 186, p. 1653.
285. J. M. Levy-Leblond.— Nuovo cimento, 1966, v. 45, p. 772.
286. Y. M. Lin, S. Okubo.— Phys. Rev. Letters, 1967, v. 19, p. 190.
287. C. H. Llewellyn-Smith.— Phys. Rep., 1972, v. 3C, p. 261.
288. F. K. Loebinger. In: Proceedings of 17th international conference on high energy physics, London, J. R. Smith (ed.), 1974.
289. C. Lovelase.— Phys. Letters, 1968, v. 28B, p. 264.
290. C. Lovelase, D. Masson.— Nuovo cimento, 1962, v. 26, p. 472
291. S. MacDowell.— Phys. Rev., 1959, v. 116, p. 774.
292. W. Magnus, F. Oberhettinger.— Functions of mathematical physics, Chelsea, 1949.
293. S. Mandelstam.— Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 1344. (Рус. пер.: в кн.: Новый метод в теории сильных взаимодействий. М., Изд-во иностр. лит., 1960.)
294. S. Mandelstam.— Ibid, 1959, v. 115, p. 1741, 1752. (Рус. пер.: в кн.: Новый метод в теории сильных взаимодействий. М., Изд-во иностр. лит., 1960.)
295. S. Mandelstam.— Ann. Phys., 1962, v. 19, p. 254. (Рус. пер.: в кн.: Новый метод в теории сильных взаимодействий. М., Изд-во иностр. лит., 1960.)
296. S. Mandelstam.— Nuovo cimento, 1963, v. 30, p. 1127, 1148.
297. S. Mandelstam.— Phys. Rev., 1965, v. 137, p. B949.
298. S. Mandelstam.— Nucl. Phys., 1973, v. B64, p. 205.
299. S. Mandelstam.— Phys. Rep., 1974, v. 13C, p. 259.
300. J. Mandula, C. Rebbi, R. Slansky, J. Weyers, G. Zweig.— Phys. Rev. Letters, 1969, v. 22, p. 1147
301. J. Mandula, J. Weyers, G. Zwieg.— Ibid., 1970, v. 23, p. 266.
302. A. Martin. In: Strong interactions and high energy physics, Oliver and Boyd G. Moorhouse (ed.), 1963.
303. A. Martin.— Nuovo cimento, 1966, v. 42, p. 930; v. 44, p. 1219.
304. A. Martin, P. R. Stevens.— Phys. Rev., 1972, v. D 5, p. 147.
305. A. D. Martin T. D. Spearman.— Elementary particle theory. North-Holland, 1970.
306. C. Michael.— Nucl. Phys., 1969, v. B13, p. 644.
307. C. Michael.— Phys. Letters, 1969, v. 29B, p. 230.
308. H. I. Miettinen.— Phys. Letters, 1972, v. 38B, p. 431.
309. H. I. Miettinen. Helsinki Thesis, 1973.
310. A. A. Migdal, A. M. Polyakov, K. A. Ter-Martirosyan.— Phys. Letters, 1974, v. 48B, p. 239.
311. D. R. O. Morrison.— Phys. Letters, 1967, v. 25B, p. 238.
312. D. R. O. Morrison. In: Proceedings of 4th international conference on high-energy collisions. Rutherford Laboratory, J. R. Smith (ed.), 1972.
313. P. M. Morse, H. Feshbach. Methods of theoretical physics. McGraw-Hill, 1953. (Рус. пер. П. М. Морс, Х. Фешбах. Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., Т. 1, 1958; Т. 2, 1960).
314. A. H. Mueller.— Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 2963.
315. A. H. Mueller.— Ibid., 1971, v. D 4, p. 150.
316. I. J. Muzinich, F. E. Paige, T. L. Trueman, L. L. Wang.— Phys. Rev., 1972, v. D6, p. 1048.

317. A. Neveu, J. H. Schwarz. — Phys. Rev., 1971, v. D4, p. 1109.
318. R. G. Newton. The complex J-plane, Benjamin, 1964.
319. R. G. Newton. Scattering theory of waves and particles. McGraw-Hill, 1966. (Рус. пер.: Р. Дж. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. М., Мир, 1969).
320. R. Odorico. — Phys. Letters, 1971, v. 34B, p. 65.
321. R. Odorico. — Nucl. Phys., 1972, v. B37, p. 509.
322. P. J. O'Donovan. — Phys. Rev., 1969, v. 185, p. 1902.
323. R. Oehme, G. Tiktopoulos. — Phys. Letters, 1962, v. 2, p. 86.
324. R. Oehme. — Nucl. Phys., 1970, v. B16, p. 161.
325. D. I. Olive, J. C. Polkinghorne. — Phys. Rev., 1968, v. 171, p. 1475.
326. D. Olive. In: Proceedings of the 17th international conference on high-energy physics, London, J. R. Smith (ed.), 1974.
327. Particle Data Group. — Phys. Letters, 1974, v. 50B, p. 1.
328. Particle Data Group. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 535.
329. B. Peterson, N. A. Tornqvist. — Nucl. Phys., 1969, v. B13, p. 629.
330. R. J. N. Phillips. — Phys. Letters, 1967, v. 24B, p. 342.
331. R. J. N. Phillips, G. A. Ringland, R. P. Worden. — Ibid, 1972, v. 40B, p. 239.
332. H. Pilkuhn. The interactions of hadrons, Wiley, 1967.
333. E. Plahte, R. G. Roberts. — Nuovo cimento, 1969, v. 60A, p. 33.
334. J. H. Poincaré. — Acta Math., 1884, v. 4, p. 213.
335. J. C. Polkinghorne. — J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 431.
336. J. C. Polkinghorne. — Nuovo cimento, 1972, v. 7A, p. 555.
337. И. Я. Померанчук. — Журн. эксперим. и теор. физ. 1958, т. 34, с. 725.
338. C. Quigg. — Nucl. Phys., 1971, v. B34, p. 77.
339. T. Regge. — Nuovo cimento, 1959, v. 14, p. 951.
340. T. Regge. — Ibid, 1960, v. 18, p. 947. (Русс. пер.: в кн. Теория сильных взаимодействий при больших энергиях. М. Изд-во иностр. лит., 1963).
341. B. Renner. — Current algebras and their applications. Pergamon Press, 1968.
342. M. Rimpault, Ph. Salin. — Nucl. Phys., 1970, B22, p. 235.
343. G. A. Ringland, R. J. N. Phillips. — Ibid., 1969, v. B13, p. 274.
344. R. G. Roberts, D. P. Roy. Phys. Letters, 1972, v. 40B, p. 555.
345. M. E. Rose. Elementary theory of angular momentum. Wiley, 1957.
346. J. L. Rosner. — Phys. Rev. Letters, 1968, v. 21, p. 950.
347. J. L. Rosner. — Ibid, 1969, v. 22, p. 689.
348. H. J. Rothe. — Phys. Rev., 1967, v. 159, p. 1471.
349. D. P. Roy, R. G. Roberts. — Nucl. Phys., 1974, v. B77, p. 240.
350. H. R. Rubinstein, G. Veneziano, M. A. Virasoro. — Phys. Rev., 1968, v. 167, p. 1441.
351. A. de Rujala, H. Georgi, S. L. Glashow, H. R. Quinn. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 391.
352. A. I. Sanda. — Phys. Rev., 1972, v. D6, p. 280.
353. R. Savit, J. Bartels. — Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 2300.
354. M. D. Scadron, H. F. Jones. — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1734.
355. L. I. Schiff. Quantum mechanics, McGraw-Hill, 1968. (Русс. пер.: Л. И. Шифф. Квантовая механика. М., Изд-во иностр. лит., 1957).
356. C. Schmid. — Phys. Rev. Letters, 1968, v. 20, p. 689.
357. J. H. Schwarz. — Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1671.
358. J. H. Schwarz. — Phys. Rep., 1973, v. 8C, p. 269.
359. J. Scherk. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 123.
360. H. Sclarrino, M. Toller. — J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 1252.
361. V. Singh. — Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 632.
362. V. Singh. — Phys. Rev. Letters, 1967, v. 18, p. 36.
363. D. Sivers, J. Yellin. — Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 125.
364. A. Sommerfeld. Partial differential equations in physics. Academic Press, 1949, p. 282. (Русс. пер.: Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., Изд-во иностр. лит., 1950).
365. E. J. Squires. Complex angular momentum and particle physics. Benjamin, 1963.

366. E. J. Squires. — Nuovo cimento, 1964, v. 34, p. 1751.
367. J. K. Storrow. — Nucl. Phys., 1972, v. B47, p. 174.
368. J. K. Storrow. — Ibid., 1975, v. B96, p. 77.
369. J. J. de Swart. — Nuovo cimento, 1964, v. 31, p. 420.
370. A. R. Swift. — Nucl. Phys., 1975, v. B84, p. 397.
371. A. R. Swift, R. W. Tucker. — Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 2894; v. D2, p. 2486.
372. A. R. Swift, R. W. Tucker. — Ibid., 1971, v. D4, p. 1707.
373. C. E. de Tar. — Ibid., 1971, v. D3, p. 128.
374. C. E. de Tar, D. Z. Freedman, G. Veneziano. — Ibid., 1971, v. D4, p. 906.
375. C. E. de Tar, J. H. Wiis. — Ibid., 3141.
376. J. C. Taylor. — Nucl. Phys., 1967, v. B3, p. 504.
377. K. A. Ter-Martirosyan. — Nucl. Phys., 1965, v. 68, p. 591.
378. G. Tiktopoulos, S. B. Trieman. — Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 805.
379. G. Tiktopoulos, S. B. Trieman. — Ibid., 1971, v. D3, p. 1037.
380. E. C. Titchmarsh. The theory of Fourier integrals. Oxford U. P., 1937. (Рус. пер.: Титчмарш Е. К. Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехиздат, 1948.)
381. E. C. Titchmarsh. The theory of functions, 2nd ed. Oxford U.P., 1939. (Рус. пер.: Титчмарш Е. К. Теория функций. М., Гостехиздат, 1951).
382. M. Toller. — Nuovo cimento, 1965, v. 37, p. 631.
383. M. Toller. — Ibid., 1967, v. 53A, p. 671.
384. M. Toller. — Ibid., 1968, v. 54A, p. 295.
385. M. Toller. — Riv. Nuovo cimento, 1969, v. 1, p. 403.
386. T. L. Trueman. — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1684 (Erratum *ibid.*, 1969, v. 181, p. 2154).
387. T. L. Trueman, G. C. Wick. — Ann. Phys., (N. Y.) 1964, v. 26, p. 322.
388. S. H. Tye, G. Veneziano. — Nuovo cimento, 1973, v. 14A, p. 711.
389. G. Veneziano. — Ibid., 1968, v. 57A, p. 190.
390. G. Veneziano. — Phys. Letters, 1972, v. 38B, p. 30.
391. G. Veneziano. — Ibid., 1973, v. 43B, p. 413.
392. G. Veneziano. — Phys. Rep., 1974, v. 9C, p. 201.
393. G. Veneziano. — Nucl. Phys., 1974, v. B74, p. 355.
394. M. A. Virasoro. — Phys. Rev. Letters, 1969, v. 22, p. 37.
395. J. M. Wang, L. L. C. Wang. — Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 663.
396. L. L. Wang. — Phys. Rev., 1966, v. 142, p. 1187.
397. A. E. A. Warburton. — Ibid., 1964, v. 137, p. B993.
398. G. N. Watson. — Proc. Roy. Soc., 1918, v. 95, p. 83.
399. B. R. Webber. — Phys. Rev., 1971, v. D3, p. 1971.
400. H. A. Weidenmuller. — Phys. Letters, 1967, v. 24B, p. 441.
401. S. Weinberg. — Phys. Rev. Letters, 1966, v. 17, p. 616.
402. S. Weinberg. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 255.
403. J. H. Weis. — Phys. Letters, 1973, v. 43B, p. 487.
404. J. H. Weis. — Nucl. Phys., 1974, v. B71, p. 342.
405. A. R. White. — Ibid., 1971, v. B39, p. 432, 461.
406. A. R. White. — Ibid., 1972, v. B50, p. 93, 130.
407. A. R. White. — Ibid., 1973, v. B50, p. 130.
408. A. R. White. — Ibid., 1973, v. B67, p. 189.
409. A. R. White. — Phys., Rev., 1974, v. D10, p. 1236.
410. J. N. J. White. — Lett. al Nuovo cimento, 1971, v. 1, p. 20.
411. E. P. Wigner. — Ann. Math., 1939 v. 40, p. 159.
412. E. P. Wigner. — Group theory, Academic Press, 1959. (Рус. пер.: Вигнер Е. Теория групп. М., Изд-во иностр. лит. 1961.)
413. P. W. Williams. — Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 1312.
414. R. Worden. — Nucl. Phys., 1973, B58, p. 205.
415. F. Zachariasen. — Phys. Rev. Letters, 1961, v. 7, p. 112; 268 (E).
416. F. Zachariasen. — Schladming Lectures, CERN report Th. 1290, 1971.
417. K. Zalewski. In: Proceedings of 17th international conference on high-energy physics. London, J. R. Smith (ed.), 1974.
418. G. Zweig. CERN reports Th. 401, 412, unpublished, 1964.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсорбция 273
 — бедняка *см.* Модель Вильямса
 Адрон 7
 Алгебра токов 230, 400
 Амплитуда 22, 29
 — инвариантная 119
 — мультиреджеонная 294
 — нефизическая-нефизическая (нн) 132
 — парциальная 57, 61, 94, 96, 97, 212
 — — приведенная 69, 72, 73, 137
 — — со спином 127
 — — с определенной сигнатурой 66
 — распада 123
 — рассеяния 20, 23, 50, 94, 97, 119
 — свободная от кинематических особенностей 135
 — спиральная 11, 112
 — с определенной четностью 135
 — тройная реджеонная 355
 — физическая-нефизическая (фн) 132, 166, 396
 — физическая-физическая (фф) 132, 166, 396
 Аналитическое продолжение в плоскость углового момента 73
 Аналитичность амплитуд 22, 74
 — реджевских вычетов 90, 159
 — реджевских траекторий 88, 89, 157
 Античастица 28
 Асимптотическое поведение и особенности в T -плоскости 25, 80, 185
 — — в теории Редже 80, 133, 185, 225

 Барийное число 141
 Бароны 7, 149
 β -Функция Эйлера *см.* Функция Эйлера β
 Борновское приближение 51, 55, 99, 105, 107, 116, 117, 137, 240, 266, 269, 391
 — — искаженных волн 270
 Бутстрап 82, 108, 112, 117, 228, 287, 373, 386
 — дуальный 386
 — мультипериферический 373
 Быстрота 319, 320
 — приведенная 321

 Векторная доминантность 393
 Вещественная аналитичность 27, 39, 40, 41, 96, 97
 Внутренняя четность *см.* Четность внутренняя
 Выбор нефизических значений 168, 169, 200, 204
 Вычет реджевский 90, 112
 — — приведенный 90
 — физически-нефизический (фн) 167
 — физический-физический (фф) 167
 Вычитания 41, 45, 63, 81, 89

 Гармонический осциллятор 100, 156, 391
 Гиперзаряд 146

 Глубоко неупругое рассеяние электрона 393
 Глюоны 393
 Границы физической области 32
 График Далица 290, 313
 — Чу-Фраучи 151
 Группа вращений 177
 — E_2 177
 — Лоренца 177
 — малая 177
 — $O(2,1)$ 177, 178, 375
 — $O(3)$ 177, 178, 375
 — $O(3,1)$ 178, 177
 — Пуанкаре 177
 — $SU(2)$ 143, 180, 201, 177, 303, 388
 — $SU(3)$ 145, 180, 183, 203, 230, 309, 358

 Двойная спектральная функция 45, 48, 114
 Двухкомпонентная дуальность *см.* Дуальность двухкомпонентная
 Двухкомпонентная модель *см.* Модель двухкомпонентная
 Двухреджеонный предел *см.* Предел двухреджеонный
 Двухчастичное инклюзивное распределение 323, 324
 Действительная аналитичность *см.* Вещественная аналитичность
 Диаграмма Аргана 213
 — блочная 17
 — Далица *см.* График Далица
 — Двойной крест 249, 296, 298, 306, 312, 333
 — квадратная 43, 46, 249, 295
 — лестничная 105, 243
 — планарная 105, 235, 244, 314, 377, 386, 387
 — Чу-Фраучи *см.* График Чу-Фраучи
 — «шахматная доска» 268
 Диаграммы дуальные 232, 233, 235, 237, 285, 311, 340, 351, 381, 386, 410
 — унитарные 38, 49
 — Фейнмана 45, 46, 49, 103, 243, 244, 249
 Дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд 68, 72, 102, 109
 — — для траекторий 89, 107, 157, 158
 — — по двум переменным 44
 — — по одной переменной 39, 67, 198, 214
 Дифракционная модель *см.* Модель дифракционная
 Дифракционное сечение *см.* Сечение дифракционное
 Дифференциальное сечение *см.* Сечение дифференциальное
 Дуальность 209, 219, 230, 285, 301, 339
 — в среднем 211
 — двухкомпонентная 219, 236, 350, 410
 — локальная 212, 217.
 Дуальный бутстрап *см.* Бутстрап дуальный
 Дуальные диаграммы *см.* Диаграммы дуальные

- Единицы 12, 13
 Естественная четность *см.* Четность естественная
 G-Четность 141, 142, 148, 189
- Заряд 141
 Зарядовая четность 141, 148, 189
 Зарядовое сопряжение 29, 142
- Идеальный угол смешивания *см.* Угол смешивания идеальный
 Изоспин 141, 143, 180, 189
 Изоспিনовая (изотопическая) матрица кроссинга *см.* Матрица кроссинга изотопическая
 Изотопический спинор 143
 Инвариантная амплитуда *см.* Амплитуда инвариантная
 Инвариантная масса 289
 Инвариантность относительно обращения времени 121
 Инклюзивное сечение *см.* Сечение инклюзивное
 Инклюзивные процессы 315
 Интеграл Зоммерфельда — Ватсона 297
 — Фейнмана 45, 250
 — фоновый 77, 113, 133, 134
- Квантовые числа 13, 14, 141
 Кварки 82, 100, 145, 146, 147, 148, 150, 231, 232, 308, 391, 399, 408
 Кварковая структура мезонов 147, 148
 Кварковая структура барионов 150
 КДД-неоднозначность 110, 398
 КДД-полус 110, 398
 Кинематика двухчастичная 29,
 — инклюзивных процессов 317
 — многочастичная 289
 Кинематические множители *см.* Множители кинематические
 Кинематические особенности *см.* Особенности кинематические
 Ковариантная реджезаия 119
 Комптоновское рассеяние 404
 Конспирации 203, 238, 272, 283
 Конспирирующие траектории *см.* Траектории конспирирующие
 Корреляции 352, 373, 379, 383
 Корреляционная длина 354, 356, 380
 Коэффициенты Клебша — Гордона 162, 180, 201
 Кривые Ландау 295
 Кроссинг 28
 — спиральных амплитуд 125
- Лабораторная система 33
 Лептон 7, 392
 Лестничная диаграмма *см.* Диаграмма лестничная
 Лидирующая реджевская траектория *см.* Траектория реджевская лидирующая
 Локальная дуальность *см.* Дуальность локальная
 Лоренц-инвариантность 22
- Малая группа *см.* Группа малая
 Массовая поверхность 14
 Масштабная инвариантность 330, 331, 334, 339, 407, 408
 Масштабный множитель *см.* Множитель масштабный
 Матрица кроссинга
 — — изотопическая 189, 228
 — — октетная 184, 232
 — — спиральная 126, 172
 — Паули 144
 — — плотности спиновая 122, 123, 203, 395
 — — рассеяния 11, 13, 17, 94, 262
 Мезон 7, 147
 — векторный 147, 148, 183
 — псевдоскалярный 147, 148
 — скалярный 147, 148
 — тензорный 147
 Метод Винера — Хопфа 110
 Механизм Чу 168, 169
 Мешки 391
 Микропричинность 28
 Множители кинематические 165
 — нефизические 166
 — уничтожающие духовые состояния 167, 200
 Множитель масштабный 162, 186, 225
 — половинного угла 129, 171, 417
 — сигнатурный 79, 229, 342
 Модель Венециано 223, 226, 227, 228, 230, 234, 236, 238, 239, 240, 301
 — Вильямса 283
 — двухкомпонентная 358, 380, 385, 386
 — дифракционная 358
 — мультипериферическая 358, 365, 379, 382, 385
 — новая 358
 — партонная 408
 — предельной фрагментации 358
 — фибролов 358
 — Чана — Лоскевича — Аллисона 314
 — эйкональная 264
 Момент своей сигнатуры 217, 222
 Мультипериферическая модель *см.* Модель мультипериферическая
 Мультипериферический бутстрап *см.* Бутстрап мультипериферический
 Мультиреджеонная амплитуда *см.* Амплитуда мультиреджеонная
- Недостающая масса 318
 Нестественная четность *см.* Четность неестественная
 Несвязность 25
 Нефизическая-нефизическая (нн) амплитуда *см.* Амплитуда нефизическая-нефизическая (нн)
 Нефизические множители *см.* Множители нефизические
 Новая модель *см.* Модель новая
 Нормировка состояния 14, 15, 35
 Нуль Адлера 229
 — нефизический 204, 222
 — Одорико 240
- Область взаимодействия 13, 19, 58, 64
 Обмен зарядом 336
 — реджевской траекторией 190
 Обменно-вырожденные траектории *см.* Траектории обменно-вырожденные
 Обменное вырождение 200, 202, 230, 282, 330, 333,
 — — сильное 200, 220, 228, 230, 235, 237
 — — слабое 200
 Ограничение Фруассара 64, 273, 275, 348, 370
 Ограничения при $t=0$ 174
 — пороговые 161
 Однореджеонный предел *см.* Предел однореджеонный
 Одночастичное инклюзивное распределение 382
 Операторный формализм дуальных моделей 309
 Оптическая теорема *см.* Теорема оптическая
 Ортогональность состояний 14
 Особенность (сингулярность) амплитуды 24, 27, 47, 48
 — в конечной точке 47, 243
 — интеграла 47, 48, 104
 — кинематическая 120, 159
 — парциальной амплитуды 69, 70
 — Пинча (защемления) 47, 104, 105, 250, 251
 Отсутствие компенсаций 169

- Паргонная модель см. Модель партонная
 Парциальная амплитуда см. Амплитуда парциальная
 Парциальное сечение см. Сечение парциальное
 Перекрывающиеся каналы 294, 298, 302, 304, 307
 Переменная Толлера 293, 294, 368
 — Феймана 318
 Петля Аргана 227
 Пион-нуклонное рассеяние 33
 Пион-пионное рассеяние 33, 112, 113
 Планарная диаграмма см. Диаграмма планарная
 Плоскость Мандельстама 34, 43
 Поведение пороговое 162
 Поглощение на черном диске 275
 Полное сечение см. Сечение полное
 Полус 24, 25
 — Померанчука см. Померон
 — реджевский 7, 78, 97, 102, 103, 112, 134, 136, 185, 211, 287, 297
 — Толлера 179
 Поляризация 125, 201, 206, 281, 328
 Померон 186, 219, 261, 262, 273, 278, 330, 334, 344, 351, 370, 377, 380, 389, 409
 Порог 18, 32
 Пороговое поведение амплитуд 69, 161
 — траекторий 91, 114
 Постулаты теории S-матрицы 13, 14, 16, 22
 Потенциал Юкавы 31, 35, 96, 97, 99
 Потенциальное рассеяние 49, 92
 Поток 35, 321, 323
 Правила
 — Катковского 27, 255
 — Ландау 27
 — сумм непрерывного момента (ПСНМ) 216
 — при конечной массе (ПСКМ) 349
 — — — энергии (ПСКЭ) 213, 222, 226, 228
 — — — нечетных моментах 216
 — — — четных моментах 213, 215, 222, 223, 226
 — с неправильными моментами 217, 351
 Правило Грибова — Моррисона 188
 — сумм Дрелла — Харна 401
 — Чана — Патона 308
 Предел двухреджеонный 296, 298, 306, 312, 333
 — однореджеонный 295, 297, 313, 328, 367
 — спиральный 296, 300, 343
 Представление Грибова — Фруассара 62, 130
 — Зоммерфельда — Ватсона 77, 84, 85, 132, 209
 — Мандельстама 42, 67, 114
 — Меллиа 85, 254
 Приведенная быстрота см. Быстрота приведенная
 — парциальная амплитуда см. Амплитуда парциальная приведенная
 Прицельный параметр 268, 281
 Причинность 23, 309
 ПСКЭ-бутстрал 219
 Равенство Фейнмана 47, 370
 Разложение по парциальным волнам 58, 61, 128, 130, 131, 132, 209, 262, 297, 300
 — эйкональное 53
 Разрезы Амати — Фубини — Стангелини (AFS-разрезы) 247, 250, 263, 275, 375, 377
 — малые по сравнению с полюсами 283
 — от точки ветвления 257, 272
 — реджевские 77, 133, 138, 176, 238, 243, 272, 273, 278
 — с конечным скачком 272
 — фиксированные 286
 Расщепление масс 150
 Реджевский вычет см. Вычет реджевский
 Реджевский разрез см. Разрез реджевский
 Реджеон 80
 Реджеонная теория поля 257
 Реджеонное исчисление 252
 Резонанс Брейта — Вигнера 25, 60, 78, 209, 213, 220
 S-канал 29
 Сателлиты Венециано 228, 236, 304, 305, 306
 Сверхсходящиеся соотношения 139, 396, 397, 400
 Сечение дифракционное 346
 — дифференциальное 36, 122, 127, 185, 312, 407, 412
 — инклюзивное 325
 — парциальное 36
 — полное 35, 36, 42, 122, 185
 — эксклюзивное 325
 Сигнатура 65, 131, 135
 — разреза 26, 27, 48, 254, 294
 Сигнатурный множитель см. Множитель сигнатурный
 Сильное упорядочение по быстрой 369, 374
 Симметрия Мак-Дауэлла 157, 176
 — Мандельстама 84, 95, 218
 Скачок амплитуды на разрезе 40
 — — — в Γ -плоскости 255
 — на разрезе 26, 27, 48, 294
 Скейлинг см. Масштабная инвариантность
 Слабые взаимодействия 392
 Соотношение Гелл — Манна — Нишиджимы 146
 — Неймана 414, 418
 — Фейнмана см. Равенство Фейнмана
 Состояния свободных частиц 13
 Спин 8, 117
 Спиновая матрица плотности см. Матрица плотности спиновая
 Спиральная амплитуда см. Амплитуда спиральная
 Спиральность 110
 Спиральный предел см. Предел спиральный
 Средняя множественность 323, 359, 371, 382, 383
 Статистика Бозе 228
 Странность 141
 Струна 310
 Теорема Карлсона 74, 131, 137, 227
 — Коши 40, 47, 76, 215
 — Левинсона 110
 — Мюллера 326
 — оптическая 36, 61, 326, 339
 — Пуанкаре 92, 94
 — сложения для функций Лежандра 59
 t -Канал 29
 Точка ветвления 25
 — — — своей сигнатуры 66, 222
 — — — чужой сигнатуры 66, 217
 Траектории дочерние 156, 159, 173, 226, 238, 306, 309
 — конспирующие 159, 173, 175
 — обменно-вырожденные 225, 230
 — предков 226, 227, 240
 — родительские 156, 174, 226
 — эффективные 194
 Траектория Померанчука 186
 — реджевская 8, 79, 87, 100, 106, 113, 141, 189
 — — в дуальных моделях 226, 227
 — — в потенциальном рассеянии 98
 — — в теории поля 107
 — для барионов 156
 — для мезонов 151
 — лидирующая 189
 Трехпомеронная вершина 344, 364
 Трехреджеонная вершина 300, 343
 Тройная реджеонная амплитуда см. Амплитуда тройная реджеонная

Угловое распределение продуктов распада

124

Угловой момент 7, 56

Угол рассеяния 31, 290

— смешивания 148

— идеальный 148, 231, 236

и-Канал 29

— Толлера 292, 293, 296, 298, 307, 314, 369

Унитарная симметрия 143, 183

Унитарность 15

— для парциальных амплитуд 58, 73, 97,

129, 136, 138

Унитарные диаграммы см. Диаграммы

унитарные

Уравнение Липпмана — Швингера 50, 52,

108

— N/D 102, 109

— Шредингера 7, 50, 56, 108

Условие Ландау 48

— унитарности 18, 19, 38, 81, 107, 129, 241

Фаза амплитуды, отвечающей обмену

полосом Редже 197, 206, 207

— — рассеяния 60, 109, 110, 212, 213, 220,

223, 269

— — эйконольная 269

Фазовое пространство 14, 35, 255, 368

Фазовый анализ 211, 212, 221, 222, 223

Фактор неупругости 60

Факторизация вычетов 25

— реджевских вычетов 138, 161, 178, 175,

199, 241, 332, 333, 371

Фейнмановская переменная см. Перемен-

ная Фейнмана

Фейнмановская диаграмма см. Диаграм-

ма Фейнмана

Фейнмановский пропагатор 25, 27

Физическая-нефизическая (фн) амплитуда

см. Амплитуда физическая-нефизическая

(фн)

Физическая-физическая (фф) амплитуда

см. Амплитуда физическая-физическая

(фф)

Физический лист 26, 29

Фиксированные полюса 134, 137, 139, 140,

167, 168, 169, 211, 217, 351, 376, 392, 399

— — Грибова — Померанчука 140, 167, 251,

258

Фиксированные разрезы см. Разрезы фик-

сированные

Формула Брейта — Вигнера 25, 60, 78, 209,

213, 220

— Стирлинга 225

Форм-фактор 394, 407

Фоторождение 399, 393

Фрагментация 328, 354, 382

Функции вращения 416

— Лежандра 58, 413

Функция Бесселя 55, 93

— Грина 50, 93

— Йоста 94, 95, 99

— производящая 377, 380

— треугольника 31

— эйконольная 55

— Эйлера β 303

Центральная область 319, 321, 333

Четность 121, 135, 141, 142, 148

— внутренняя 142

— естественная 135, 233,

— неестественная 135, 233

Четырех-импульс (4-импульс) 14, 22

Число Толлера 175, 179

Шарм 151

Ширина резонанса 60, 78, 158, 227

Эйконольная модель см. Модель эйконоль-

ная

— фаза см. Фаза эйконольная

— функция см. Функция эйконольная

Эйконольное разложение см. Разложение

эйконольное

Экзотические квантовые числа 151, 194,

219, 284, 332

Эксклюзивное сечение см. Сечение экс-

ксклюзивное

Электромагнитные взаимодействия 392

Элементарная частица 103, 396

Эллипс Лемана — Мартена 65, 129, 209

Эффект лидирующей частицы 328, 358

Эффективная траектория см. Траектория

эффективная

Явление Грибова — Померанчука 91

Ядерная демократия 82

ИБ № 1046

Питер Дональд Брюс Коллинз (Великобритания)

Введение в реджевскую теорию
и физику высоких энергийРедактор *О. П. Дунаева*Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*Переплет художника *И. И. Каледина*Технические редакторы *О. Н. Адашкина, Л. Ф. Шкилевич*Корректор *Г. М. Соколова*

Сдано в набор 01.04.80. Печисано к печати 05.11.80.

Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 27.0. Уч.-изд. л. 29.69. Тираж 2400 экз. Зак. изд. 77530. Зак. тип. 1759

Цена 4 р. 70 к.

Атомиздат 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва Б. Переяславская ул. д. 46