В.Д. Ляховский,
А.А. Болохов

ГРУППЫ СИММЕТРИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

В.Д. Ляховский, А.А. Болохов

Группы симметрии и элементарные частицы

В.Д.Ляховскии, А.А.Болохов

ГРУППЫ СИММЕТРИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Пособие посвящено основным методам теории групп, применяемым в современной теории элементарных частиц. Изложен теоретико-групповой подход к исследованию элементарных частиц, рассмотрены групповые основы конкретных физических моделей.

Книга предназначена для студентов старших курсов физических факультетов университетов. Может быть полезна научным работникам, аспирантам, специализирующимся в области физики элементарных частиц.

НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\varnothing$ — пустое множество

Основные алгебраические структуры:

K — поле
Z — кольцо целых чисел
Z_+ — целые положительные числа
Z_p — поле целых чисел по модулю p
Q — поле рациональных чисел
R — поле вещественных чисел
R_+ — положительные вещественные числа
$R_* = R\backslash 0$ — мультипликативная группа вещественных чисел
C — поле комплексных чисел
$C_* = C\backslash 0$ — мультипликативная группа комплексных чисел
$\varkappa$ — тело кватернионов
Ω — алгебра октав

Линейные пространства:

$V_K^n,\ W_K^m,\ \ldots$ — линейные пространства над K размерности $n, m, \ldots$
$\mathscr{H}$ — гильбертово пространство
$V^{(*)}$ — пространство, дуальное к V
$\overset{(*)}{v} \in V^{(*)}$ — элемент дуального пространства
$\times$ — прямое произведение
$\oplus$ — прямая сумма
$\otimes$ — тензорное произведение
dim — размерность
$R^n,\ C^n$ — n-мерное вещественное (комплексное) пространство
Mat (n, K) — кольцо $n\times n$ матриц над K
$I,\ I_n$ — единичная матрица
$I_{p,q}$ — матрица вида $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$
F_n — матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$
E_k^i — матрица Окубо, $\left(E_k^i\right)_m^l = \delta_m^i\,\delta_k^l$
det — определитель
Tr — след
$\langle\, ,\, \rangle = f$ — форма
$\hat{f}$ — матрица формы
$\langle\cdot\rangle$ — форма полуторалинейная симметричная
$(\cdot)$ — форма билинейная симметричная
$\langle * \rangle$ — форма полуторалинейная антисимметричная
$(*)$ — форма билинейная антисимметричная
$(\cdot)_{p,q}$ — форма билинейная симметричная с матрицей $I_{p,q}$
$(\, ,\,)$ — скалярное произведение
S^n — сфера $(x, x) = 1$ в R^{n+1}
$L^2(G)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций на G

Отображения (морфизмы):

$\varphi : A \to B,\ \varphi(a) = b;\ a \in A,\ b \in B.$
$\circ$ — композиция отображений (например, $\psi \circ \varphi$)
id — тождественное отображение
φ^{-1} — отображение, обратное к φ ($\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$)
Ker φ — ядро φ
Im φ — образ φ
$\longleftrightarrow$ — изоморфизм
$\approx$ — изоморфизм и эквивалентность
$\sim$ — гомоморфность
$\mathrm{Hom}_K\ (V,\ W)$ — множество гомоморфизмов V в W над K
End — множество эндоморфизмов
Aut — множество всех автоморфизмов
Int — множество внутренних автоморфизмов

Сопряжения и инволюции:

$^{\mathrm{T}}$ — транспонирование
$(*)$ — дуальное сопряжение
$*$ — комплексное сопряжение
$\dagger$ — эрмитово сопряжение
$\bar{\ }$ — дираковское сопряжение
$\overline{}$ — кватернионное сопряжение
$\hat{C}$ — зарядовое сопряжение
$\hat{P}$ — пространственное отражение
$\hat{T}$ — отражение времени

Группы:

$G/K\ (K\backslash G)$ — однородное пространство левых (правых) классов по подгруппе K
G/K — факторгруппа G по нормальной подгруппе K
g_x — представитель класса $x = g_x K$
$k(g,\ x)$ — фактор
$Z(G)$ — центр группы G
$K(g)$ — (связная) компонента элемента $g \in G$
$\times$ — прямое произведение групп

$\triangleright$ — полупрямое произведение групп
$\widetilde{G}$ — расширение группы G
$\widehat{G}$ — накрывающая группа, пространство
$\widehat{G}$ — (универсальная) накрывающая группа, пространство
$D(G, V)$ — представление группы G в пространстве V
$\dim D$ — размерность представления
$d\mu_L$, $d\mu_R$ — мера Хаара левая, правая
D^L, D^R — регулярное представление левое, правое
D^{QL}, D^{QR} — квазирегулярное представление левое, правое
$\Delta_G(g)$ — модуль группы
$D_{G\downarrow K}$ — ограничение представления на подгруппу K
$D_{K\uparrow G}$ — индуцированное представление
$\chi_D(g)$ — характер представления
ζ — сплетающий оператор
$\zeta[D, B]$ — пространство операторов, сплетающих представления D и B
$D_{\uparrow C}$ — комплексная оболочка представления
$D_{\downarrow R}$ — вещественная форма представления
D_u — компактная вещественная форма представления

Алгебры:

$\cdot$ — ассоциативное умножение
$[,]$ — композиция Ли, матричный коммутатор
c^j_{kl} — структурная константа алгебры Ли
$\otimes$ — тензорное произведение операторов
$\wedge$ — внешнее (грассманово) произведение
$\oplus$ — прямая сумма алгебр
$\vdash$ — полупрямая сумма алгебр
$T(V)$ — тензорная алгебра
$S(V)$ — симметрическая алгебра
$\wedge(V)$ — внешняя алгебра
$C(V, f)$ — алгебра Клиффорда
$Z(A)$ — центр алгебры A
$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ — производный ряд
$A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots$ — центральный ряд
$\mathcal{R}$ — радикал
$\mathrm{Der}\, A$ — дифференцирования алгебры A
$\mathrm{der}\, A$ — внутренние дифференцирования алгебры
$\mathcal{K}$ — форма Киллинга
C_n — оператор Казимира
$\exp$ — экспоненциальное отображение
$\mathrm{Ad}\,(A)$ — присоединенное представление алгебры A
ad_v — присоединенный оператор элемента v

Классические группы, их алгебры Ли:

$GL(n, K)$, $gl(n, K)$ — общая линейная группа Ли и ее алгебра Ли
S — специальная группа (например, $SL(n, K)$)
s — алгебра бесследовых матриц
U — унитарная группа (например, $U(n)$)
u — алгебра эрмитовых матриц
O — ортогональная группа (например, $O(p, q)$)
o — алгебра антисимметричных матриц
Sp — симплектическая группа (например, $Sp(n, C)$)
sp — симплектическая алгебра

Группы и алгебры физической симметрии:

$\boldsymbol{R}$ — группа вращений
R_{jk} — матрица вращений
$\boldsymbol{r}$ — алгебра вращений
l_j — генератор группы вращений
$\boldsymbol{\Gamma}$ — группа Галилея
γ — алгебра Галилея
$\boldsymbol{\Lambda}$ — группа Лоренца
Λ^μ_ν — матрица преобразований Лоренца
$\boldsymbol{\Lambda}_+$ — собственная группа Лоренца
$\boldsymbol{\Lambda}^\uparrow_+$ — собственная ортохроная группа Лоренца
$\boldsymbol{L} \equiv \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^\uparrow_+$
$\boldsymbol{l}$ — алгебра Лоренца
$l_{\alpha\beta}$ — генератор группы Лоренца
$\boldsymbol{P}$ — группа трансляций
$\boldsymbol{p}$ — алгебра Ли группы трансляций
p_α — генератор группы трансляций
$\boldsymbol{\Pi}$ — группа Пуанкаре
$\boldsymbol{\Pi}^\uparrow_+$ — собственная ортохронная группа Пуанкаре
π — алгебра Пуанкаре
σ — матрицы Паули
$\tau_k \equiv \frac{\sigma_k}{2}$
$\boldsymbol{E}(2)$, $\boldsymbol{E}(3)$ — группа движения евклидовой плоскости, трехмерного пространства

M_4 — пространство Минковского

$\varepsilon^j_{kl} = \varepsilon_{jkl}$ — структурные константы алгебры σ-матриц

λ_a — матрицы Гелл — Манна

f^a_{bc} — структурные константы алгебры Ли λ-матриц

d^a_{bc} — структурные константы симметрической алгебры λ-матриц

$C(3, 1)$ — алгебра Дирака

γ_μ — образующая алгебры Дирака

Γ_A — базисный элемент алгебры Дирака

$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

$\gamma_5 \equiv i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$

J — спин

Y — гиперзаряд

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия групповые методы стали неотъемлемой частью фундамента квантовой физики. Особенно отчетливо их значение проявилось в теории элементарных частиц, где теоретико-групповой подход утвердился не только как плодотворный метод, но и как естественный язык, необходимый любому специалисту в области физики высоких энергий.

Предлагаемое учебное пособие создано на основе курса «Теория групп и элементарные частицы», который на протяжении ряда лет входит в учебный план подготовки студентов кафедры теории ядра и элементарных частиц Ленинградского университета.

Авторы ставили своей основной задачей изложить на доступном уровне результаты и методы теории представлений групп Ли, ориентируясь главным образом на группы, нашедшие широкое применение в теории элементарных частиц, показать эффективность группового описания явлений в квантовой физике, подготовить читателя к усвоению теории групп, необходимому для глубокого понимания теории элементарных частиц.

Книга предназначена для студентов III—IV курсов физических факультетов, овладевших основами линейной алгебры и математического анализа, знакомых с элементарными понятиями топологии и теории дифференцируемых многообразий.

Глава 1 на примере механики материальной точки знакомит читателя с важнейшими группами симметрий — Пуанкаре, Галилея и группой вращений. Здесь устанавливается органическая связь динамики механического объекта и структуры алгебры Ли группы симметрии. На этой основе формулируются важнейшие групповые задачи физической теории.

Глава 2 «Общая алгебра» содержит сведения из смежных разделов математики, необходимые для построения теории групп Ли и их представлений, которые, как правило, мало знакомы студентам.

Последовательному изложению теории групп Ли посвящены главы 3, 4 «Топологические группы и группы Ли» и «Алгебры Ли», где подробно рассматриваются топологические характеристики групп Ли, их локальные свойства, структура алгебр Ли и восстановление группы по алгебре. Наиболее изящные результаты теории алгебр Ли (теория Картана — Вейля) приведены в главе 5 «Полупростые алгебры Ли».

В главе 6 «Элементарная теория представлений» вводятся основные понятия и важнейшие классические результаты теории линейных представлений (леммы Шура, свойства унитарных представлений, инвариантное интегрирование).

В главе 7 подробно рассмотрены конечномерные представления полупростых алгебр Ли. Унитарные неприводимые представления компактных групп Ли (в частности, группы вращений и $SU(n)$) и конечномерные неприводимые представления группы Лоренца строятся с помощью инфинитезимального метода.

Результаты в главах 1—7 используются для анализа теоретико-групповых аспектов современных моделей квантовой теории элементарных частиц. В главе 8 «Симметрия в квантовой физике. Элементарные частицы» раскрываются роль симметрии в классической и квантовой механике и специфика квантовомеханических представлений групп (проективность, унитарность, связь элементарности физического объекта с неприводимостью представления группы симметрии).

Глава 9 «Индуцированные представления и релятивистская симметрия» посвящена построению неприводимых квантовомеханических представлений групп симметрии. Изложение теории представлений групп Ли завершается рассмотрением метода индуцированных представлений. С помощью этого метода строится система квантовомеханических представлений общей группы Пуанкаре. Разные способы выделения неприводимых подпространств в пространствах состояний локализуемых частиц порождают различные типы ковариантных уравнений движения.

Алгебраические методы в теории элементарных частиц достигли такого уровня развития, при котором для изучения оригинальных работ оказывается недостаточно поверхностного знания теории групп. Поэтому авторы стремились привести точные формулировки основных положений и теорем. Последние иллюстрируются множеством примеров и упражнений, представляющих физический интерес. В пособии затрагивается достаточно широкий круг математических вопросов, что позволит читателю составить общее представление о методах теории групп и подготовить его к работе со специальной литературой по теории элементарных частиц и при необходимости — по теории групп.

Проработка доказательств важнейших положений теории групп помогает глубже усвоить основные понятия и облегчает их дальнейшее использование в физических задачах (с которыми может встретиться читатель) как рабочего метода. С этой же целью отдельные этапы доказательств предлагаются в виде упражнений. Если доказательство в этом плане не представляет интереса или требует привлечения обширного дополнительного материала, оно вовсе опускается либо заменяется схемой рассуждений и снабжается ссылкой на специальную литературу.

Предлагаемое пособие не отменяет (более того, предполагает) необходимости обращения к другим литературным источникам, поскольку служит целям начального обучения теории групп. В этой связи прилагаемая библиография не претендует на полноту и ориентирована в основном на доступную читателю (не только в смысле изложения, но и в смысле досягаемости) литературу. К ней же мы отсылаем читателя за ссылками на пионерские работы и библиографически редкие (к настоящему времени) издания.

В книге принята поглавная нумерация элементов текста (теоремы, леммы, утверждения, примеры и др.). Исключение составляют таблицы и рисунки, имеющие сквозную нумерацию. Номера утверждений выделены полужирным шрифтом. Конец каждого утверждения, доказательства, примера и других элементов отмечается знаком ▼ или ▽. Последний используется, когда один выделяемый элемент содержится в другом (например, лемма внутри доказательства).

Авторы выражают глубокую признательность сотрудникам кафедры теории ядра и элементарных частиц физического факультета ЛГУ за полезные замечания и пожелания. Авторы чрезвычайно благодарны Н. В. Борисову, рекомендации которого помогли в работе над пособием.

ГЛАВА 1

СИММЕТРИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. Частица в ньютоновой механике. Наблюдаемые величины, инерциальные системы отсчета и группа Галилея. Активные и пассивные преобразования, принцип относительности и физическая симметрия. Алгебра наблюдаемых

Симметрия физической картины мира находит отражение в широком использовании теоретико-групповых методов в физике. Хотя их систематическое применение для получения конкретных физических результатов свойственно квантовой теории, обратимся сначала к групповым аспектам классической физики (которая традиционно развивается без явного обращения к теории групп). При этом подчеркнем следующее обстоятельство.

(1) Физика оперирует двумя основными понятиями: *наблюдаемыми* (такими характеристиками рассматриваемого физического объекта или системы, которые могут быть измерены каким-либо прибором) и *состояниями* данного объекта или системы. В классической физике состояние считается заданным, если указаны значения всевозможных наблюдаемых рассматриваемого объекта. Первоочередная задача любой физической теории — подобрать математическую реализацию указанных категорий. ▼

Простейшим объектом ньютоновой механики является *материальная точка* (в дальнейшем будем называть ее *частицей*). Важнейшими наблюдаемыми частицы служат ее *декартовы координаты* x_k, $k=1, 2, 3$, в какой-либо системе отсчета (СО) в данный момент времени t. Областью значений t является вещественная ось R^1. Основное свойство этой наблюдаемой соответствует эмпирическому факту — «однородности времени», заключающемуся в том, что последовательность и темп изменения взаимных положений системы взаимодействующих материальных тел не зависят от момента времени t_0, в котором было приготовлено начальное состояние. Это позволяет из всевозможных отображений $R^1 \to R^1$ выделить совокупность P_0 преобразований вида $g(\tau) : t \to t' = t + \tau$, которая обладает следующими очевидными свойствами:

(2) любые два преобразования можно провести последовательно, что определяет третье, также принадлежащее данной совокупности. Такое сопоставление называется *композицией* (умножением) преобразований $g(\tau_1)$ и $g(\tau_2)$ и обозначается значком $\circ$:

$$g(\tau_2) \circ g(\tau_1) = g(\tau_3), \ (\tau_3 = \tau_1 + \tau_2);$$

(**3**) существует тривиальное преобразование (заключающееся в том, что на самом деле ничего не преобразуется), называемое *тождественным*. Другое название выделенного элемента $e \equiv g(0)$ из рассматриваемой совокупности — *единичный элемент,* или *единица:*

$$g(\tau) \circ e = e \circ g(\tau) = g(\tau);$$

(**4**) для любого элемента $g(\tau)$ данная совокупность содержит преобразование, «возвращающее все на свои места», — *обратное преобразование (обратный элемент)*, обозначаемое $(g(\tau))^{-1}$ или $g^{-1}(\tau)$, т. е. $g^{-1}(\tau) \circ g(\tau) = e$. Очевидно, что обратным элементом по отношению к $g^{-1}(\tau)$ является $g(\tau)$, т. е. $g(\tau) \circ g^{-1}(\tau) = e$;

(**5**) для композиции более чем двух преобразований, вообще говоря, необходимо фиксировать последовательность их выполнения. Пусть сначала необходимо выполнить преобразование $g(\tau_1)$, затем — преобразование, являющееся композицией $g(\tau_3) \circ g(\tau_2)$. Удобным способом фиксации служит расстановка скобок:

$$g(\tau_4) = (g(\tau_3) \circ g(\tau_2)) \circ g(\tau_1).$$

В этом отношении совокупность преобразований $\boldsymbol{P}_0$ обладает свойством, называемым *ассоциативностью,* согласно которому результат не зависит от способа расстановки скобок. Например, для трех преобразований всегда

$$(g(\tau_3) \circ g(\tau_2)) \circ g(\tau_1) = g(\tau_3) \circ (g(\tau_2) \circ g(\tau_1)),$$

поскольку $g(\tau_2) \circ g(\tau_1) = g(\tau_2 + \tau_1)$. ▼

Свойствами (**2**) — (**5**) рассматриваемой совокупности преобразований $\boldsymbol{P}_0$ обладают практически все достаточно полные наборы преобразований эквивалентности геометрических объектов. В общем случае, если такие свойства присущи какому-либо множеству $G = \{g\}$, оно называется *группой*, а его элементы $g \in G$ — *элементами группы.* Таким образом, $\boldsymbol{P}_0$—группа.

(**6**) Замечание. В качестве закона композиции элементов (чисел) $\tau_1, \tau_2 \in R^1$ для вещественной оси R^1 можно взять операцию арифметического сложения. Множество R^1 с такой композицией, как нетрудно проверить, обладает свойствами (**2**) — (**5**) и, следовательно, является группой (единичным элементом которой служит число нуль). Именно этой группе мы сопоставили $\boldsymbol{P}_0$ при рассмотрении свойства (**5**). Это стандартный прием. Такие сопоставления (отображения) групп G и G', при которых согласованы законы композиции, называются изоморфизмами групп (в более общем случае — гомоморфизмами. Подробнее см. гл. 2).

(7) Замечание. Для любых элементов $g(\tau_1)$, $g(\tau_2) \in \boldsymbol{P}_0$ выполняется соотношение $g(\tau_1) \circ g(\tau_2) = g(\tau_2) \circ g(\tau_1)$. Это свойство называется *коммутативностью.* Для произвольной группы коммутативность не предполагается. ▼

Обратимся снова к механике. Областью значений координат x частицы является евклидово пространство R^3 (расстояние ρ между точками x и y определяется как $\rho = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{1/2}$. В классической механике возможность описания событий с помощью различных СО означает, что в момент времени t связь координат частицы в системе отсчета Σ и ее координат в Σ' выражается соотношениями *)

$$x'_k(t) = R_{kl}(t)\, x_l(t) + c_k(t) \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

Здесь R — произвольная ортогональная матрица (поскольку расстояние ρ предполагается не зависящим от выбора СО), а $\mathbf{c}$ — не зависящий от $\mathbf{x}$ вектор.

Существование класса физически выделенных СО (для данного класса формулируется принцип относительности) — важнейшее положение механики, выраженное первым законом Ньютона. Системы отсчета этого класса принято называть инерциальными (ИСО). Применение первого закона Ньютона к системе N не взаимодействующих частиц позволяет прийти к заключению, что связь (1) координат в классе ИСО возможна при R, не зависящих от t, а $\mathbf{c}$ — зависящих от него разве что линейно: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$. Такие R и $\mathbf{c}$ определяют некую совокупность преобразований класса ИСО в себя, которая представляет собой группу и объединяется с временны́ми трансляциями $\boldsymbol{P}_0$ в *группу Галилея* $\mathbf{\Gamma}$.

Рассмотрим основные ее преобразования:

$$\boldsymbol{P}_0\colon \quad t \to t' = t + \tau, \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{P}(3)\colon \quad t \to t' = t, \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{K}\colon \quad t \to t' = t, \quad x_k \to x'_k = -v_k t + x_k, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{R}\colon \quad t \to t' = t, \quad x_k \to x'_k = R_{kl}\, x_l. \tag{5}$$

Преобразования (2) и (3) соответствуют изменению начала отсчета времени и координат. Соотношение (4) связывает системы отчета, движущиеся с относительной скоростью $\mathbf{v}$.

(8) Упражнение. Установите, что каждая совокупность преобразований $\boldsymbol{P}(3)$ и $\boldsymbol{K}$, как и $\boldsymbol{P}_0$, является группой. ($\boldsymbol{P}_0$ — *группа временны́х трансляций,* $\boldsymbol{P}(3)$ — *группа пространственных трансляций,* $\boldsymbol{K}$ — *группа галилеевых преобразований.*) ▼

Преобразования (5) описывают поворот декартовых осей.

---

*) Здесь и далее по повторяющемуся индексу предполагается суммирование. Индексы, на которые нежелательно распространять это правило Эйнштейна, будем заключать в скобки.

Последнему соответствует ортогональная матрица R ($\det R = +1$, т. е. предполагаем, что все СО *ориентированы одинаково*). Композиция таких преобразований описывается матричным произведением матриц (которое, как известно, ассоциативно). Тождественному преобразованию соответствует единичная матрица I с матричными элементами $(I)_{kl} = \delta_{kl}$. Здесь δ_{kl} — δ-символ Кронекера. Наконец, для любого преобразования существует обратное, поскольку существует обратная матрица. Следовательно, множество таких преобразований есть группа. Она называется *специальной ортогональной группой трехмерного пространства* и обозначается $SO(3)$.

(9) Замечание. Группа $SO(3)$ некоммутативна. (Покажите это.) ▼

Совокупность координат $\mathbf{x}_{(\alpha)}$ каждой из частиц ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) за время наблюдения составляет *траекторию* ее *движения*. Установление уравнений траекторий движения является основной задачей механики. Для рассматриваемой системы эти уравнения имеют вид (второй закон Ньютона)

$$m_{(\alpha)} \ddot{\mathbf{x}}_{(\alpha)} = \mathbf{F}_{(\alpha)} (\mathbf{x}_{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{(N)}),$$

где $\mathbf{F}_{(\alpha)}$ — сила взаимодействия частицы (α) со всеми остальными, определяемая потенциалом $U : \mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{x}$; $m_{(\alpha)}$ — множитель пропорциональности, являющийся наблюдаемой величиной — *массой* частицы (α).

Для описания состояния частицы с массой $m_{(\alpha)}$ можно использовать значения наблюдаемых: координат $\mathbf{x}_{(\alpha)}$ и скоростей $\dot{\mathbf{x}}_{(\alpha)}$ или взаимно-однозначных функций от них, например координат $\mathbf{x}_{(\alpha)}$ и импульсов $\mathbf{p}_{(\alpha)} = m_{(\alpha)} \dot{\mathbf{x}}_{(\alpha)}$.

Действительно, в классической механике множеством наблюдаемых для частицы является совокупность функций от локальных характеристик ее траектории ($\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$, ...). При фиксированном характере взаимодействия (заданном потенциале $U(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{(N)})$) указанный набор характеристик полностью определяется, если известны координаты и импульс частицы в данный момент времени.

(10) Итак, множество состояний частицы (α) совпадает с множеством $\Phi_{(\alpha)}$ пар векторов $(\mathbf{x}_{(\alpha)}, \mathbf{p}_{(\alpha)}) = \varphi_{(\alpha)}$ и называется *фазовым пространством*. Динамика объекта $S_{0\to t} : \varphi(0) \to \varphi(t)$ (уравнения движения) задает на пространстве Φ семейство фазовых траекторий.

Преобразование фазовых пространств $\Phi_{(\alpha)} \to \Phi'_{(\alpha)}$ при переходе ИСО из одной в другую определяется действием группы Галилея на пространстве координат (соотношения (2)—(5)). На пространстве импульсов они имеют вид

$$\boldsymbol{P}_0 : \mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t + \tau), \tag{6}$$
$$\boldsymbol{P}(3) : \mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t), \tag{7}$$

$$K: \mathbf{p}' = \mathbf{p} - m_{(\alpha)} \mathbf{v}, \qquad (8)$$

$$R: \mathbf{p}'_k = R_{kl} \mathbf{p}_l. \qquad (9)$$

(Эти соотношения можно получить, продифференцировав (2)—(5) по t и выразив скорость через импульс.) ▼

До сих пор мы рассматривали преобразования систем отсчета — *«пассивные»* преобразования, т. е. относящиеся к одному и тому же состоянию. Однако наша задача состоит не столько в нахождении эквивалентных способов описания явления, сколько в отыскании классов эквивалентных явлений. Для этого будем рассматривать *активные* преобразования, т. е. связывающие разные состояния, вообще говоря, разных объектов (α) и (β).

(11) Пусть результаты физических исследований показывают, что, отвлекаясь от некоторых характеристик упомянутых объектов, можно увидеть сходство последних и установить эквивалентность их пространств состояний $\Phi_{(\alpha)} \sim \Phi_{(\beta)} \equiv \Phi$, причем динамика объекта (α) реализуется семейством фазовых траекторий, настолько близких к траекториям объекта (β), что их динамики также можно отождествить: $S_{(\alpha)} = S_{(\beta)} = S$.

Обратимое преобразование $g: \Phi \to \Phi$ будем называть *преобразованием физической симметрии,* если оно переводит фазовые траектории $\{\varphi_{(\alpha)}\}$ объекта (α) в фазовые траектории $\{\varphi_{(\beta)}\}$ объекта (β) (или в достаточно б л и з к и е (в подходящем смысле), когда симметрия нарушена). Другими словами, преобразования g физической симметрии должны удовлетворять соотношениям

$$g \circ S_{0 \to t} = S_{0 \to t} \circ g. \qquad (10)$$

Совпадение (близость) фазовых траекторий объектов (α) и (β) гарантирует, что результат многократного применения преобразований по-прежнему является преобразованием физической симметрии:

$$g\{\varphi_{(\alpha)}\} = \{\varphi_{(\beta)}\} \simeq \{\varphi'_{(\alpha)}\} \Rightarrow g_2 \circ g_1 \{\varphi_{(\alpha)}\} \simeq g_2 \{\varphi'_{(\alpha)}\}.$$

Это означает, что совокупность преобразований физической симметрии образует группу. ▼

Группа Галилея была введена нами как группа «пассивных» преобразований. Рассмотрим свободное движение частицы (α) в двух инерциальных системах отсчета Σ и Σ'.

(12) На рис. 1 $\{\varphi\}$ и $\{\varphi'\}$ представляют собой фазовую траекторию частицы (α) в системах Σ и Σ'. Воспроизведем **в Σ кривую $\{\psi\}$, идентичную кривой** $\{\varphi'\}$ из системы Σ'. Тогда согласно *принципу относительности* Галилея состояние $\psi(0)$, приготовленное в системе Σ, будет развиваться по траектории, совпадающей с линией $\{\psi\}$ (в противном случае системы Σ и

Σ' не были бы эквивалентны). Указанное построение может быть выполнено по любой исходной траектории $\{\varphi\}$, причем во всех случаях $\{\psi\}$ — фазовая траектория в системе Σ. Таким образом, преобразование группы Галилея $g: \Sigma \to \Sigma'$ индуцирует на пространстве Ф преобразование $\tilde{g}: \{\varphi\} \to \{\psi\}$ множе-

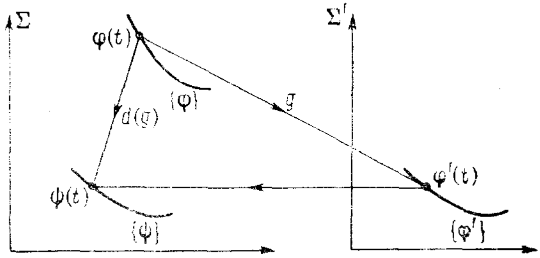


Рис. 1.

ства фазовых траекторий в себя. Мы построили «активную» реализацию группы Галилея и установили, что она является группой физической симметрии. ▼

Следствия из этого обстоятельства выразим в терминах скобок Пуассона, для чего нам потребуется алгебра Ли γ группы Галилея.

Характерной чертой данной группы является существование преобразований, сколь угодно мало отличающихся от тождественного. Скажем, можно лишь «немного» сдвинуть СО, «слегка» повернуть и т. д. Таким свойством не обладает, например, группа преобразований, заключающихся в отражении $x_k \to -x_k$ любого числа координатных осей (она содержит конечное число элементов!). Класс групп Ли, для которых такое свойство является необходимостью и которым принадлежит группа Галилея, выделяется еще и тем, что совокупность достаточно близких к единице элементов определяет естественную алгебраическую структуру — алгебру Ли.

Поясним это на примере вращений $\boldsymbol{R} = SO(3)$. Малое, или *инфинитезимальное*, преобразование $R \in SO(3)$ имеет вид

$$x_k \to x'_k = R_{km} x_m, \quad R = I + r,$$

где матричные элементы r_{km} — бесконечно малые числа. Их можно считать параметрами инфинитезимальных преобразований, разумеется, с учетом того, что не все они независимы. Условие ортогональности $R^{\mathrm{T}} R = I$ в первом порядке малости имеет вид $r^{\mathrm{T}} + r = 0$, т. е. требует антисимметричности r. В данном порядке малости произведение преобразований R и R' таково:

$$R \circ R' = I + (r + r').$$

Следовательно, множество (пространство) антисимметричных матриц r в некотором смысле линейно: по крайней мере его элементы r и r' можно складывать, и сумме снова соответствует инфинитезимальное вращение: $R \circ R'$. Этому множеству можно сопоставить линейное пространство. Для этого достаточно в матрицах r отделить какой-либо матричный базис e_η от малых параметров ω_η: $r = \sum\limits_\eta e_\eta \omega_\eta$ и образовать всевозможные линейные комбинации z с элементами базиса e_η, умноженными на конечные числа, скажем z_η:

$$z = \sum_\eta e_\eta z_\eta. \tag{11}$$

(Такая процедура, разумеется, в значительной степени неоднозначна.) Разобьем правую часть выражения (11) на такие слагаемые, каждое из которых соответствует вращению в определенной координатной плоскости. Отметим, что таких плоскостей ровно столько, сколько линейно независимых антисимметричных матриц. Действительно, пронумеровать эти плоскости можно, скажем, мультииндексом $\eta = (ij)$, составленным из упорядоченных $(i<j)$ номеров координатных осей, лежащих в данной плоскости. В качестве независимых матричных элементов антисимметричной матрицы r_{km} можно взять элементы, лежащие над диагональю $(k<m)$. Далее, в каждом слагаемом инфинитезимальным параметром $\omega_{(ij)}$ выберем бесконечно малый у г о л п о в о р о т а. (Для определенности положительным углом договоримся описывать поворот от координатной оси с меньшим номером к оси с большим.)

Поскольку конечный (активный) поворот $R(\omega_{(ij)})$ на угол $\omega_{(ij)}$ в указанной плоскости есть преобразование

$$R(\omega_{(ij)}): \begin{cases} x_k \to x'_k = x_k \qquad (k \neq i, j), \\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_i \\ x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_{(ij)} & -\sin\omega_{(ij)} \\ \sin\omega_{(ij)} & \cos\omega_{(ij)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{12}$$

то инфинитезимальное вращение имеет вид

$$\underset{\omega \to 0}{R(\omega_{(ij)})}: \begin{cases} x_k \to x'_k = x_k \qquad (k \neq i, j), \\ \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_i \\ x'_j \end{pmatrix} = \left[I_2 + \omega_{(ij)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{13}$$

Отметим, что мы не пользовались явным образом трехмерностью векторного пространства: все вышесказанное годится для произвольной размерности n. Группа вращений векторов в R^n, обозначаемая $SO(n)$, называется *специальной ортогональной группой n-мерного пространства.* *)

*) Специальность означает, что $n \times n$-ортогональные матрицы R преобразований из этой группы подчинены условию $\det R = 1$.

Таким образом, искомый базис инфинитезимальных преобразований группы $SO(n)$ состоит из $n(n-1)/2$ антисимметричных матриц

$$l_{(ij)} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \\ i \quad\quad j \end{array} \tag{14}$$

где указаны только ненулевые матричные элементы. Для записи матричных элементов базисных матриц в общем виде можно использовать δ-символы Кронекера:

$$(l_{(ij)})_{km} = \delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ik}\delta_{jm}. \tag{15}$$

Линейное пространство, определяемое этим базисом, называется *алгеброй Ли группы $SO(n)$* (алгебра обозначается строчными буквами: $so(n)$).

В общем случае *алгебра Ли A* — это линейное пространство, на котором задан билинейный закон композиции — *коммутатор* $[a, b]$ элементов $a, b, c, \ldots \in A$, обладающий свойствами:

(13) $\quad [a, b] \in A$;

(14) $\quad [a, b] = - [b, a]$;

(15) $\quad [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$. ▼

(Последнее требование носит название *тождества Якоби.*)

Разложение элементов A по базису l_α, где α — нумерующий (мульти)индекс $a = a^\alpha l_\alpha$, $b = b^\alpha l_\alpha$, … и билинейность лиевой композиции $[,]$ приводят к формулировке требования **(13)** в виде $[l_\alpha, l_\beta] = c^{\gamma}_{\alpha\beta} l_\gamma$, где коэффициенты разложения $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ правой части называются *структурными константами* данной алгебры Ли.

Элементы базиса алгебры Ли A какой-либо группы G принято называть *генераторами* данной группы.

(16) Замечание. В силу отмеченного выше произвола в выборе независимых (инфинитезимальных) параметров ω генератором допустимо называть любой элемент алгебры Ли. В гл. 2—4 будет показано, что каждый элемент $a \in so(n)$ определяет подгруппу в группе $SO(n)$ (именуемую *однопараметрической*) элементов $R_a(\tau)$ вида $R_a(\tau) = \exp(\tau a)$, где правая часть представляет собой матричный ряд. Композиция элементов из однопараметрической подгруппы имеет вид

$$R_a(\tau_1) \cdot R_a(\tau_2) = R_a(\tau_1 + \tau_2). \quad ▼$$

В случае $so(n)$ законом композиции является матричный коммутатор

$$[a,\ b] \equiv a \cdot b - b \cdot a \in so(n), \tag{16}$$

где $a = \sum\limits_{i<j} a^{(ij)} l_{(ij)}$, $b = \sum\limits_{k<m} b^{(km)} l_{(km)}$. При этом требование (15) удовлетворяется вследствие ассоциативности матричного умножения $\cdot$ в коммутаторе (16), а условие (14) тривиально.

Выражение (15) позволяет легко вычислить коммутатор базисных матриц

$$[l_{(ij)},\ l_{(km)}] = \delta_{ik} l_{(jm)} + \delta_{jm} l_{(ik)} - \delta_{im} l_{(jk)} - \delta_{jk} l_{(im)}. \tag{17}$$

Следовательно, структурные константы $so(n)$ имеют вид

$$c_{(ij)(km)}^{(rs)} = \delta_{ik} \delta_{jr} \delta_{ms} + \delta_{jm} \delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{im} \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{jk} \delta_{ir} \delta_{ms}. \tag{18}$$

Случай $so(3)$ уникален, поскольку при $n=3$ размерность $n(n-1)/2$ этой алгебры также равна 3. Поэтому мультииндекс (ij) можно заменить на векторный по тем же правилам, что и для векторного произведения соответствующих ортов в R^3:

$$l_{(23)} \equiv l_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad -l_{(13)} \equiv l_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \quad l_{(12)} \equiv l_3 = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Вычисление трех независимых коммутаторов генераторов l_i $(i=1, 2, 3)$ дает

$$[l_i,\ l_j] = \varepsilon_{ijk} l_k \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{20}$$

где для структурных констант алгебры Ли $so(3)$ (в базисе l_i) использовано общепринятое обозначение

$$c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}.$$

(17) Данные константы оказываются отличными от нуля в том (и только в том) случае, когда $i,\ j,\ k$ — какая-либо подстановка чисел 1, 2, 3. При этом ε_{ijk} принимает значение $(-1)^{\sigma(i,\,j,\,k)}$, где $\sigma(i,\ j,\ k)$ — четность указанной подстановки. ▼

Итак, соотношение (20) определяет структуру алгебры Ли группы вращений. Из общей теории алгебр Ли можно извлечь следующий рецепт воспроизведения Ли-алгебраической структуры для таких групп, как группа Галилея (подробнее см. гл. 4).

(18) Пусть n-параметрическая группа G задана как группа преобразований (движений) некоторого многообразия $\mathscr{M}$:

$$g : z \to z' = gz;\ z,\ z' \in \mathscr{M},\ g \equiv g(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \ldots,\ \vartheta_n) \in G.$$

Для частицы в качестве такого многообразия можно взять просто координатное пространство R^3, пространство-время R^4 или фазовое пространство $\Phi_{p,\,x} = R^6$. В качестве групповых параметров ϑ_ν можно взять четыре параметра $(\tau, \mathbf{a})$ в преобразованиях (2), (3) пространственно-временных трансляций, три параметра $\mathbf{v}$ преобразований Галилея (4), кроме того, имеется три параметра в подгруппе вращений $R = SO(3)$. Для вычисления алгебры Ли нам достаточно трех инфинитезимальных параметров $\omega_{(ij)} \sim \omega_k$ (см. соотношение (13)). Таким образом, $g \in \Gamma$ есть $g(\tau, \mathbf{a}; \mathbf{v}; \omega)$. Отметим, что единичному элементу соответствуют нулевые значения всех параметров: $e = g(0)$.

В линейном пространстве $\mathscr{F} = \{f(z)\}$ функций на многообразии $\mathscr{M}$ каждому элементу группы движений G можно сопоставить линейный оператор на $\mathscr{F}$ — *левый сдвиг* L_g:

$$(L_g f)(z) \equiv f(g^{-1} z). \tag{21}$$

Тогда генераторам l_ν группы G соответствуют (линейные) дифференциальные операторы

$$\hat{l}_\nu = \left(\frac{\partial z'_\alpha}{\partial \vartheta_\nu} \bigg|_{\vartheta=0} \right) \frac{\partial}{\partial z_\alpha}. \tag{22}$$

Коммутирование этих операторов и определяет структурные константы алгебры Ли исходной группы.

(19) Упражнение. Найдите указанные операторы для трех реализаций многообразия $\mathscr{M}$: $R^3_{\mathbf{x}}$, $R^4_{t,\mathbf{x}}$, Φ в случае группы Галилея. ▼

Введем следующие обозначения для генераторов группы Галилея. Через l_k по-прежнему будем обозначать генераторы вращений, для генераторов пространственно-временных трансляций используем обозначение P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и для генераторов преобразований Галилея — обозначение K_i ($i = 1, 2, 3$). Путем несложных выкладок приходим к следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} [l_k, l_m] = \varepsilon_{kmn} l_n, \ [l_k, P_m] = \varepsilon_{kmn} P_n, \ [l_k, K_m] = \varepsilon_{kmn} K_n, \\ [l_k, P_0] = [P_\mu, P_\nu] = [K_m, K_n] = [P_m, K_n] = 0, \\ [P_0, K_m] = P_m \ (k, m, n = 1, 2, 3; \ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \end{gathered} \tag{23}$$

(20) Упражнение. Получите данные соотношения.

(21) Поскольку γ есть алгебра Ли группы физической симметрии, то она оказывается естественным инструментом для построения наблюдаемых. Мы уже отмечали, что множество наблюдаемых, например для частицы (или системы частиц), совпадает с множеством функций на фазовом пространстве. Как известно, для подмножества $\mathscr{A}$ достаточно гладких (например, ∞-дифференцируемых) функций на фазовом пространстве введение *скобок Пуассона*

$$\{A(\mathbf{p}, \mathbf{x}), B(\mathbf{p}, \mathbf{x})\} \equiv \sum_{(\alpha)} \left(\frac{\partial A}{\partial p_{(\alpha)i}} \frac{\partial B}{\partial x_{(\alpha)i}} - \frac{\partial A}{\partial x_{(\alpha)i}} \frac{\partial B}{\partial p_{(\alpha)i}} \right), \ A, B \in \mathscr{A}, \tag{24}$$

наделяет эту совокупность структурой алгебры Ли (антисимметричность закона композиции (24) очевидна, а проверка выполнения тождества Якоби хотя и скучна, но принципиальных трудностей не представляет).

В полученной таким путем *алгебре наблюдаемых* $\mathscr{A}$ рассмотрим подалгебру, связанную с группой G физической симметрии рассматриваемой задачи. Каждой однопараметрической подгруппе $g_{l_a}(\lambda)$ этой группы с параметром λ и генератором l_a сопоставим совокупность преобразований $\mathscr{A}$ в себя: $A(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \to A(g_l(\lambda)\mathbf{p}, g_l(\lambda)\mathbf{x}) = A(\mathbf{p}(\lambda), \mathbf{x}(\lambda))$. Тогда

$$\frac{\delta A}{\delta \lambda} = \sum_{(\alpha)} \left(\frac{\partial A}{\partial x_{(\alpha)\, i}} \frac{dx_{(\alpha)\, i}}{d\lambda} + \frac{\partial A}{\partial p_{(\alpha)\, i}} \frac{dp_{(\alpha)\, i}}{d\lambda} \right) \tag{25}$$

есть скорость вариации любой наблюдаемой A по параметру λ. Генератору l_a сопоставим наблюдаемую $\chi_a(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — *преобразующую функцию,* такую, что для любой наблюдаемой A выполняется соотношение

$$\left.\frac{\delta A}{\delta \lambda}\right|_{\lambda=0} = \{\chi_a, A\} \tag{26}$$

(см. [10, с. 263—300]). Отсюда и из равенства (25) следует, что χ_a является решением системы уравнений

$$\frac{\partial \chi_a}{\partial x_{(\alpha)\, i}} = -\left.\frac{dp_{(\alpha)\, i}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}, \quad \frac{\partial \chi_a}{\partial p_{(\alpha)\, i}} = \left.\frac{dx_{(\alpha)\, i}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \tag{27}$$

и определяется с точностью до константы.

(22) Упражнение. Сформулируйте условие разрешимости этой системы. ∇

(23) С одной стороны, коммутатор преобразований, отвечающих генераторам l_a, l_b и параметрам λ, σ, порождает однопараметрическую подгруппу g_z (в окрестности единичного элемента) в соответствии со структурой алгебры Ли группы G (см. гл. 4), т. е. если $z = c^c_{ab} l_c$ и γ — параметр этой подгруппы, то

$$\left(\frac{\delta}{\delta\lambda} \frac{\delta}{\delta\sigma} - \frac{\delta}{\delta\sigma} \frac{\delta}{\delta\lambda} \right) A \Big|_{\lambda,\, \sigma=0} = \frac{\delta}{\delta\gamma} A \Big|_{\gamma=0} = c^c_{ab} \{\chi_c, A\}. \tag{28}$$

С другой стороны, для левой части соотношения (28), записанной с помощью повторных скобок Пуассона, можно использовать тождество Якоби. В результате получим соотношение

$$\{\{\chi_a, \chi_b\}, A\} = c^c_{ab} \{\chi_c, A\}.$$

Таким образом, алгебра преобразующих функций с точностью до констант воспроизводит структуру алгебры Ли группы физической симметрии:

$$\{\chi_a, \chi_b\} = c^c_{ab}\chi_c + \eta_{ab}. \qquad (29)$$

Симметрийное происхождение наблюдаемых χ_a не вызывает сомнений.

Свобода сдвига любой преобразующей функции на константу $\chi_a \to \chi_a + \delta_a$, которую допускают соотношения (26), указывает на возможность устранения хотя бы некоторых постоянных η_{ab}.

(24) Пример. Предположим, что для преобразующих функций $l_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, отвечающих генераторам вращения l_i, скобки Пуассона оказались равными

$$\{l_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}), l_j(\mathbf{p}, \mathbf{x})\} = \varepsilon_{ijk}\, l_k(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + \eta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \qquad (30)$$

Нетрудно заметить, что здесь всего лишь три произвольные константы, ибо скобки Пуассона антисимметричны: $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$. Поэтому в качестве констант можно выбрать комбинации $\delta_1 = {}^1/_2(\eta_{23} - \eta_{32}) = \eta_{23}$, $\delta_2 = {}^1/_2(\eta_{31} - \eta_{13}) = -\eta_{13}$, $\delta_3 = {}^1/_2(\eta_{12} - \eta_{21}) = \eta_{12}$, т. е. $\delta_k = {}^1/_2\, \eta_{ij}\, \varepsilon_{ijk}$. Тогда константы η следующим образом выражаются через δ:*)

$$\eta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, \delta_k.$$

Следовательно, скобки Пуассона для функций $\widetilde{\mathbf{l}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{l}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\delta}$ воспроизводят структурные соотношения для генераторов $\mathbf{l}$ точно.

В данном примере нам удалось исключить все константы, что не всегда возможно (ср. с **(26)**). Исчерпывающий ответ по этой проблеме дает теория проективных представлений (см. гл. 8, § 2). ▼

Выражения для преобразующих функций, связанных с группой Галилея (для системы взаимодействующих частиц), нетрудно получить, пользуясь соотношениями (2)—(5) и (6)—(9). Например, для трансляций (3) и (7) уравнения (27) приобретают вид

---

*) Здесь необходимо воспользоваться следующим свойством антисимметричного тензора ε_{abc}:

$$\varepsilon_{abk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi} \quad (a, b, i, j, k = 1, 2, 3). \qquad (31)$$

Напомним, что всевозможные соотношения для этих тензоров можно получить суммированием индексов в левой и правой частях следующего основного равенства:

$$\varepsilon_{a_1a_2\ldots a_n}\varepsilon_{b_1b_2\ldots b_n} = \det\begin{pmatrix} \delta_{a_1b_1} & \delta_{a_1b_2} & \cdots & \delta_{a_1b_n} \\ \delta_{a_2b_1} & \delta_{a_2b_2} & \cdots & \delta_{a_2b_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \delta_{a_nb_n} \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Так, при $n=3$ возможны, кроме того, соотношения $\varepsilon_{ajk}\varepsilon_{ijk} = 2\,\delta_{ai}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial x_{(\alpha)\,i}} = -\left.\frac{dp'_{(\alpha)\,i}}{da_k}\right|_{a=0} = 0, \quad \frac{\partial \chi_k}{\partial p_{(\alpha)\,i}} = \frac{dx'_{(\alpha)\,i}}{da_k} = \delta_{ik}.$$

Используя для решения обозначение $\chi_k \equiv P_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x})$, имеем

$$P_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \sum_{(\alpha)} p_{(\alpha)\,k}\,, \tag{33}$$

т. е. наблюдаемая $P_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x})$ имеет смысл *полного импульса системы*:

$$P_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \sum_{(\alpha)} m_{(\alpha)}\, v_{(\alpha)\,k}\,.$$

(25) Замечание. Именно в связи с этим обстоятельством в качестве основных наблюдаемых для частицы удобно брать не координату и скорость $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, а координату и импульс $m\mathbf{v}$. ∇

В случае преобразований (4), (8) приходим к уравнению

$$\frac{\partial K_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial x_{(\alpha)\,i}} = -\frac{dp'_{(\alpha)\,i}}{dv_k} = m_{(\alpha)}\,\delta_{ik}, \quad \frac{\partial K_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial p_{(\alpha)\,i}} = \frac{dx'_{(\alpha)\,i}}{dv_k} = -t\delta_{ik},$$

которому удовлетворяет функция

$$K_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = -tP_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) + \sum_{(\alpha)} m_{(\alpha)}\, x_{(\alpha)\,k}. \tag{34}$$

Назовем ее *галилеевым моментом*. С помощью этой наблюдаемой, как будет показано далее, описывается закон движения центра масс $\mathbf{x}_{\text{ц. м}} \equiv \sum\limits_{(\alpha)} m_{(\alpha)}\mathbf{x}_{(\alpha)} / \sum\limits_{(\alpha)} m_{(\alpha)}$ рассматриваемой системы частиц. Совершенно аналогично генераторам вращений сопоставляются наблюдаемые

$$l_i(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk} \sum_{(\alpha)} x_{(\alpha)\,j}\, p_{(\alpha)\,k}, \tag{35}$$

имеющие смысл компонент полного углового момента количества движения системы. Для краткости $\mathbf{l}(\mathbf{p},\ \mathbf{x})$ будем называть просто *угловым моментом*. Наконец, в случае трансляций во времени получаем уравнения

$$\frac{\partial P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial x_{(\alpha)\,i}} = -\left.\frac{dp'_{(\alpha)\,i}}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -\dot{p}_{(\alpha)\,i}, \quad \frac{\partial P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial p_{(\alpha)\,i}} = \left.\frac{dx'_{(\alpha)\,i}}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \dot{x}_{(\alpha)\,i}.$$

Сопоставляя их с уравнениями движения в гамильтоновой форме, можно сразу сделать вывод, что $P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x})$ может быть отождествлен с точностью до несущественной постоянной с *гамильтонианом* H рассматриваемой системы:

$$P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = H = \sum_{(\alpha)} \frac{1}{2m_{(\alpha)}} \mathbf{p}^2_{(\alpha)} + U(\mathbf{x}_{(\alpha)} - \mathbf{x}_{(\beta)}). \tag{36}$$

(26) Структура алгебры наблюдаемых (33)—(36) со скобками Пуассона $\{,\}$ в качестве закона композиции определяется непосредственным вычислением. К такому же результату приводит замена всех коммутаторов $[,]$ в (23) на скобки $\{,\}$ за исключением $[P, K]=0$. В этом случае имеем

$$\{P_i(\mathbf{p},\ \mathbf{x}),\ K_j(\mathbf{p},\ \mathbf{x})\} = -\delta_{ij} M, \tag{37}$$

где неустранимая константа M — *полная масса* системы частиц $M \equiv \sum\limits_{(\alpha)} m_{(\alpha)}$. Неустранимость констант в структурных соотношениях (37) является специфическим свойством группы Галилея. ▼

Таким образом, основным наблюдаемым в классической механике однозначно соответствуют генераторы группы симметрии рассматриваемой задачи. Остается только отметить, что вследствие указанной симметрии построенные наблюдаемые P_μ, K_i, l_j являются интегралами движения (обращаем внимание читателя на то, что стандартный вывод такого заключения основывается именно на симметрийных соображениях).

(27) Замечание. Не вся группа Галилея содержится в группе симметрии гамильтониана: генераторы K_i с P_0 не коммутируют:

$$\{P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x}),\quad K_i(\mathbf{p},\ \mathbf{x})\} = P_i(\mathbf{p},\ \mathbf{x}).$$

Тем не менее, сохранение во времени наблюдаемой $\mathbf{K}$ имеет место вследствие явной зависимости $\mathbf{K}$ от времени:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \{P_0,\ \mathbf{K}\} = -\mathbf{P} + \mathbf{P} = 0.$$

Постоянство величины $\mathbf{K} = -\mathbf{P}t + \sum\limits_{(\alpha)} m_{(\alpha)}\mathbf{x}_{(\alpha)} = \mathrm{const}$ эквивалентно утверждению, что точка, имеющая координаты центра масс

$$\mathbf{x}_{\text{ц. м}} \equiv \sum_{(\alpha)} m_{(\alpha)}\, \mathbf{x}_{(\alpha)}/M = \mathbf{V}t + \mathbf{K}/M \tag{38}$$

перемещается прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$. Скорость $\mathbf{V}$ можно приписать частице с массой $M = \sum\limits_{(\alpha)} m_{(\alpha)}$ и импульсом $\mathbf{P} = \sum\limits_{(\alpha)} \mathbf{p}_{(\alpha)}$, равными соответственно полной массе и полному импульсу рассматриваемой системы.

§ 2. Отличия механики специальной теории относительности от ньютоновой. Преобразования Лоренца и группа Пуанкаре. Алгебра Ли группы Пуанкаре и реконструкция наблюдаемых

Известно, что область применимости ньютоновой механики ограничена требованием малости скоростей объектов и скоростей систем отсчета относительно друг друга по сравнению со скоростью света. Следовательно, в реальном мире галилеева симметрия реализуется лишь как приближенная. Однако это не означает, что учет релятивистских эффектов приводит к уничтожению симметрии: просто специальной теории относительности (СТО) соответствует симметрия другого типа. Достаточно отметить, что в предыдущих рассуждениях мы опирались в основном на принцип относительности Галилея. В основе СТО также лежит принцип относительности — Эйнштейна.

Исследуя рассматриваемую систему материальных точек (частиц) в рамках СТО, прежде всего остановимся на тех моментах, которые нуждаются в изменениях или уточнениях.

Класс выделенных (инерциальных) систем отсчета в данном случае такой же, как и в ньютоновой механике. Обратимся к преобразованиям (4), описывающим переход от системы отсчета Σ к движущейся относительно нее со скоростью $\mathbf{v}$ системе Σ'. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ — координаты в системах Σ и Σ' соответственно.

Принцип постоянства скорости света в различных ИСО

$$c^2 dt^2 - (d\mathbf{x})^2 = c^2 (dt')^2 - (d\mathbf{x}')^2 = 0 \tag{39}$$

определяет на пространстве-времени форму, универсальную для всех таких систем. Использование данной формы для введения в пространстве-времени (псевдоевклидовой) метрики позволяет сформулировать геометрически проблемы СТО. При этом необходимы некоторые предварительные соглашения, поскольку матрица g этой формы (метрический тензор) диагональна, но не кратна единичной: $\operatorname{diag} g = (1, -1, -1, -1)$:

(28) координаты точки в пространстве-времени суть компоненты *контравариантного* вектора и отмечаются верхним индексом. (Как правило, с этой целью будем использовать греческие буквы μ, ν, ρ, σ);

(29) правило суммирования Эйнштейна (см. примечание на с. 11), уточняется: повторяющиеся индексы должны быть разной вариантности, т. е. один — верхний, а другой — нижний. (Сворачивание индексов одной вариантности будем проводить лишь в случаях, когда соответствующая метрика евклидова, и при условии, что это заведомо не вызовет недоразумений.) ▼

Таким образом, матричные элементы g следует писать с нижними индексами: $g_{\mu\nu}$. У единичной матрицы матричные элементы есть символ Кронекера. В силу соглашений **(28)** и

(29) их следует нумеровать индексами разной вариантности: $\delta^\mu{}_\nu$. Тогда у обратной к g матрицы индексы верхние. Ее матричные элементы $g^{\mu\nu}$ называются контравариантными компонентами метрического тензора. С помощью $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ можно «опускать» и «поднимать» индексы. Нижними индексами нумеруются *ковариантные* компоненты вектора:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Соотношение (39) теперь можно записать в виде

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = 0 \quad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{40}$$

(Здесь $dx^0 = cdt$, $dx'^0 = cdt'$.) Именно оно совместно с некоторыми другими естественными физическими предположениями и определяет закон N преобразования координат от ИСО Σ к Σ', движущейся с относительной скоростью $\mathbf{v}$ [30]:

$$N:\quad \begin{aligned} &x^0 \to x'^0 = \gamma(\mathbf{v})\, x^0 - \gamma(\mathbf{v})\, v_k x^k, \\ &x^k \to x'^k = -\gamma(\mathbf{v})\, v^k x^0 + \left[\delta^k_m + (\gamma(\mathbf{v}) - 1)\frac{v^k v_m}{\mathbf{v}^2}\right] x^m. \end{aligned} \tag{41}$$

Мы использовали стандартное обозначение $\gamma(\mathbf{v}) \equiv (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$ и распорядились масштабом длины $[l]$ и времени $[t]$ так, чтобы скорость света c равнялась $1[l]/[t]$.

Выпишем здесь же соотношения для пространственных вращений и пространственно-временных трансляций. Эти преобразования связывают покоящиеся относительно друг друга ИСО и поэтому имеют одинаковый вид и в ньютоновой, и в релятивистской механике:

$$\boldsymbol{R}:\quad \begin{aligned} &x^0 \to x^{0'} = x^0, \\ &x^k \to x'^k = R^k_m x^m \qquad (k,\ m = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{P}:\quad x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{43}$$

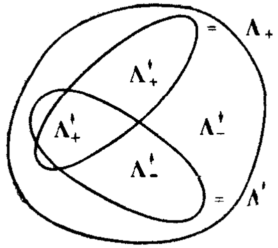
Совокупность преобразований (41) и (42) образует группу — собственную ортохронную группу Лоренца $\mathbf{\Lambda}^\uparrow_+$.

(30) Просто *группа Лоренца* $\mathbf{\Lambda}$ определяется как группа линейных преобразований $x \to x'$ в R^4, сохраняющих форму

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{44}$$

называемую квадратом *интервала*.

Как нетрудно убедиться, это требование допускает преобразования Λ, меняющие знак нулевой компоненты вектора: $\operatorname{sign} x'^0 = -\operatorname{sign} x^0$. При этом определитель матрицы преобразования может принимать значения ± 1. Требование *специальности:* $\det \Lambda = +1$ выделяет в $\mathbf{\Lambda}$ подгруппу, называемую *собственной* группой Лоренца $\mathbf{\Lambda}_+$. Подгруппа $\mathbf{\Lambda}^\uparrow \subset \mathbf{\Lambda}$, сохраняющая знак нулевой компоненты $x: \operatorname{sign} x'^0 = \operatorname{sign} x^0$, называется *ортохронной* группой Лоренца. Наконец, совокупность преобразований, удовлетворяющая обоим требованиям, носит название *собственной ортохронной группы Лоренца* $\Lambda_+^\uparrow$. Следующая схема демонстрирует разложение Λ в соответствии с собственностью ($+$), несобственностью ($-$), ортохронностью ($\uparrow$) и неортохронностью ($\downarrow$):

$\Lambda =$  (45)

Группа Λ вместе с трансляциями $\boldsymbol{P}$ (43) составляет *неоднородную* группу Лоренца — *группу Пуанкаре* Π. ▼

Как в случае ньютоновой, так и релятивистской механики мы выделили совокупность $\{\Sigma\}$ инерциальных систем отсчета в пространстве-времени R^4 (в последнем случае оно называется *пространством Минковского* M_4) и перечислили типы координатных преобразований (41)—(43), описывающих переходы $\Sigma \to \Sigma'$ и представляющих собой пассивную реализацию *собственной ортохронной группы Пуанкаре* $\Pi_+^\uparrow$. (В данной главе $\Pi_+^\uparrow$ для краткости будем именовать просто группой Пуанкаре).

Обратимся к динамическим аспектам релятивистской механики и в полную меру используем принцип относительности Эйнштейна. Для этого было бы достаточно дословно повторить для группы Пуанкаре все рассуждения (**12**) и:

(**31**) построить реализацию данной группы активными преобразованиями;

(**32**) установить, что она является группой физической симметрии. ▼

Необходимо только внести некоторые уточнения. Во-первых, воссоздавая в системе Σ' картину, аналогичную изображенной на рис. 1, следует учитывать, что параметром кривой $\{\varphi'\}$ является преобразованное время t'. Во-вторых, полагалось бы уточнить способ описания состояний (фазового пространства и фазовых траекторий), т. е. фактически дать определение релятивистского импульса частицы.

С этой целью используем наличие Пуанкаре-симметрии, поскольку результат (**32**) н е з а в и с и т от конкретного способа описания состояний. В качестве компонент импульса по-прежнему возьмем наблюдаемые, связанные с генераторами P_k группы пространственных трансляций (43). Тогда из предположения существования импульса как основной переменной гамильтоновой динамики и его симметрийном происхождении сможем фактически вывести форму зависимости импульса от скорости.

Таким образом, сначала необходимо реализовать алгебру Ли группы Пуанкаре и установить коммутационные соотношения для ее генераторов. Реализуем генераторы дифференциальными операторами на множестве функций, заданных на пространстве Минковского M_4, и для их вычисления используем формулы (22) и (41)—(43). Для генераторов Пуанкаре трансляций и преобразований Лоренца получим

$$P_\mu \equiv \left.\frac{\partial x'^\nu}{\partial a^\mu}\right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \quad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{46}$$

$$n_k \equiv \left.\frac{dx'^\nu}{dv^k}\right|_{v=0} \partial_\nu = -x_k\,\partial_0 + x_0\,\partial_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{47}$$

а для вращений, как и прежде,

$$l_m = \varepsilon_{ikm}\, x_i\, \partial_k \quad (i,\ k,\ m = 1,\ 2,\ 3). \tag{48}$$

В результате приходим к следующим структурным соотношениям *алгебры Ли* π *группы Пуанкаре*:

$$[l_i,\ l_k] = \varepsilon_{ikm}\, l_m,\ [l_i,\ n_k] = \varepsilon_{ikm}\, n_m,\ [n_i,\ n_k] = -\varepsilon_{ikm}\, l_m, \tag{49}$$

$$[l_k,\ P_0] = 0, \quad [l_i,\ P_k] = \varepsilon_{ikm}\, P_m, \tag{50}$$

$$[n_k,\ P_0] = 0, \quad [n_i,\ P_k] = -\delta_{ik}\, P_0, \tag{51}$$

$$[P_\mu,\ P_\nu] = 0 \quad (i,\ k,\ m = 1,\ 2,\ 3;\ \mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{52}$$

В 4-мерных обозначениях $l_{\mu\nu} = -l_{\nu\mu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$ ($n_k = l_{0k}$, $l_i = \varepsilon_{ikm}\, l_{km}$) эти соотношения записываются компактно:

$$[l_{\mu\nu},\ l_{\rho\sigma}] = -(g_{\mu\rho}\, l_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\, l_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}\, l_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}\, l_{\nu\rho}), \tag{53}$$

$$[l_{\mu\nu},\ P_\rho] = (g_{\nu\rho}\, P_\mu - g_{\mu\rho}\, P_\nu),\ [P_\mu,\ P_\nu] = 0 \quad (\mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma = 0, 1, 2, 3). \tag{54}$$

Теперь сформулируем исходные предположения.

(33) *Динамика системы свободных частиц* определяется гамильтоновыми уравнениями движения

$$\partial_0\, x^k_{(\alpha)} = \frac{\partial H}{\partial p_{(\alpha)\,k}}\,,\ \ \partial_0 p_{(\alpha)\,k} = -\frac{\partial H}{\partial x^k_{(\alpha)}}\,, \tag{55}$$

где гамильтониан $H = \sum\limits_{(\alpha)} H_{(\alpha)}$ и $H_{(\alpha)}$ — энергия частицы (α).

(34) *Алгебра наблюдаемых* $\mathscr{A}$ — множество функций f на фазовом пространстве $\Phi = \{(\mathbf{p}_{(1)},\ \mathbf{x}_{(1)};\ \ldots \mathbf{p}_{(N)},\ \mathbf{x}_{(N)})\}$ со скобками Пуассона в качестве закона композиции $(f_1,\ f_2) \to f_3$.

(35) *Скобки Пуассона*

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{(\alpha)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_{(\alpha)}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_{(\alpha)}} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_{(\alpha)}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_{(\alpha)}} \right) \tag{56}$$

не меняются при преобразованиях (41)—(43) (т. е. инвариантны относительно группы Пуанкаре). Как мы знаем, отсюда следует, что генераторам этой группы с точностью до константы соответствуют наблюдаемые в $\mathscr{A}$ — преобразующие функции. Скобки Пуассона для них воспроизводят (возможно, с точностью до константы) структурные соотношения для генераторов.

(36) *Импульс* $\mathbf{p}_{(\alpha)}$ совместно с $\mathbf{x}_{(\alpha)}$ описывает состояние частицы (α) (точку в фазовом пространстве $\Phi_{(\alpha)}$) и является независимой динамической переменной, взаимно-однозначно связанной с $\mathbf{v}_{(\alpha)} \equiv \partial_0 \mathbf{x}_{(\alpha)}$. В алгебре наблюдаемых импульсу соответствуют генераторы трансляций $\mathbf{P}$ для частицы (α). Это означает, что преобразующая функция

$$P_k(\mathbf{p}_{(1)}, \mathbf{x}_{(1)}; \ldots)\Big|_{\substack{\text{для единственной} \\ \text{частицы } (\alpha)}} = p_{(\alpha)\,k}. \quad \blacktriangledown \tag{57}$$

Отметим, что в **(35)** нами специально предусмотрена возможность отличия на константу скобочных структурных соотношений для преобразующих функций от Ли-алгебраических для соответствующих генераторов группы Пуанкаре. В случае группы Галилея мы столкнулись с неустранимостью таких констант, поэтому представляется принципиально важным остановиться на этой проблеме для группы Пуанкаре.

(37) Пусть скобки Пуассона, соответствующие коммутаторам (49)—(52), имеют вид

$$\begin{aligned}
&\{l_k, l_m\} = \varepsilon_{kmn} l_n, \quad \{l_{0k}, l_{0m}\} = -l_{km} + \gamma_{km}, \\
&\{l_k, l_{0m}\} = \varepsilon_{kmn} l_{0n} + \eta_{km}, \quad \{l_k, P_m\} = \varepsilon_{kmn} P_n + \lambda_{mn}, \\
&\{l_{0k}, P_0\} = -P_k + \alpha_k, \quad \{l_k, P_0\} = \vartheta_k, \\
&\{l_{0k}, P_m\} = -P_0 + \beta_{km}, \quad \{P_\mu, P_\nu\} = \varkappa_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{58}$$

где α, β, γ, λ, η, ϑ и $\varkappa$ — константы (здесь для краткости $l_k \equiv l_k(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \ldots$). Константы в первом соотношении (для l_k) мы устранили ранее (см. **(24)**). Произвол в выборе остальных констант ограничен, во-первых, антисимметричностью скобок (56), откуда $\gamma_{km} = -\gamma_{mk}$, $\varkappa_{\mu\nu} = -\varkappa_{\nu\mu}$, и, во-вторых, тождеством Якоби.

(38) Упражнение. Покажите, что переопределением функций P_μ, $\tilde{l}_{0k}$ устраняются все нетривиальные константы в правых частях (58). $\triangledown$

Возвращаясь к предположениям **(33)**—**(36)**, можно отбросить в **(35)** оговорку о возможности отличия на константу скобочных структурных соотношений от таковых в алгебре Ли группы Пуанкаре. Без ограничения общности можно полагать, что скобки Пуассона преобразующих функций воспроизводят лиевы скобки генераторов группы Пуанкаре точно. ▼

Вычислим преобразующие функции. Для пространственных трансляций в силу предположения (36) получим

$$P_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \sum_{(\alpha)} p_{(\alpha)\,k}. \tag{59}$$

Уравнения (27) для преобразующей функции трансляций во времени

$$\frac{\partial P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial x^k_{(\alpha)}} = -\left.\frac{dp'_{(\alpha)\,k}}{da^0}\right|_{a^0=0} = -\partial_0 p_{(\alpha)\,k},\quad \frac{\partial P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial p_{(\alpha)\,i}} = \partial_0 x^i_{(\alpha)},$$

как и прежде, совпадают с гамильтоновыми уравнениями движения (55), означая, что генератору временны́х трансляций в алгебре наблюдаемых соответствует полная энергия (гамильтониан) рассматриваемой системы частиц:

$$P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = H(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \sum_{(\alpha)} H_{(\alpha)}. \tag{60}$$

Для преобразующих функций поворотов в плоскости $\{ik\}$ уравнения (27) имеют вид

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial x^m_{(\alpha)}} = -\left.\frac{dp'_{(\alpha)\,m}}{d\omega^{ik}}\right|_{\omega=0}, \tag{61}$$

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial p_{(\alpha)\,m}} = \left.\frac{dx'_{(\alpha)\,m}}{d\omega^{ik}}\right|_{\omega=0} = \delta_{mk}\,x_{(\alpha)\,i} - \delta_{mi}\,x_{(\alpha)\,k}, \tag{62}$$

где ω — угол поворота.

На первый взгляд эта система определяет $l_{ik}(\mathbf{p},\ \mathrm{x})$ лишь с точностью до произвольной функции $c_{ik}(\mathrm{x})$, поскольку правая часть уравнений (61) не известна:

$$l_{ik}(\mathbf{p},\ \mathbf{x}) = \sum_{(\alpha)} \left(x_{(\alpha)\,i}\,p_{(\alpha)\,k} - x_{(\alpha)\,k}\,p_{(\alpha)\,i}\right) + c_{ik}(\mathbf{x}).$$

Однако из соотношения

$$\{l_{ik},\ P_m\} = -\sum_{(\alpha)} \frac{\partial l_{ik}(\mathbf{p},\ \mathbf{x})}{\partial x^j_{(\alpha)}}\,\delta_{jm} = \sum_{(\alpha)} \left(p_{(\alpha)\,k}\,\delta_{im} - p_{(\alpha)\,i}\,\delta_{km}\right) \tag{63}$$

следует, что функции $c_{ik}(\mathrm{x})$ могут быть лишь постоянными. (Обратим внимание на переход к равенству каждых слагаемых в левой и правой суммах по частицам (α) в равенстве (63). Для возможности такого перехода, вообще говоря, недостаточно отсутствия взаимодействия частиц: желательно, кроме того, предположить *аддитивность* наблюдаемых в (63)). Выбор постоянных c_{ik} фиксируется при устранении констант в правых частях (30): $c_{ik}=0$, т. е.

$$l_{ik}(\mathbf{p},\ \mathbf{x})=\sum_{(\alpha)}\left(x_{(\alpha)\,i}\,p_{(\alpha)\,k}-x_{(\alpha)\,k}\,p_{(\alpha)\,i}\right). \tag{64}$$

Подчеркнем, что отсутствие констант в правой части соотношений (63) существенно.

Аналогично если воспользоваться соотношением

$$\{l_{0k},\ P_m\}=-\delta_{km}P_0(\mathbf{p},\ \mathbf{x}), \tag{65}$$

то для функции l_{0k}

$$l_{0k}(\mathbf{p},\ \mathbf{x})=\sum_{(\alpha)}\left(x_0\,p_{(\alpha)\,k}-p_{(\alpha)\,0}\,x_{(\alpha)\,k}\right). \tag{66}$$

Таким образом, мы получили выражения для преобразующих функций группы Пуанкаре за исключением одной $P_0(\mathbf{p},\mathbf{x})$, являющейся гамильтонианом рассматриваемой системы. Проанализируем структурное соотношение

$$\{l_{0k},\ P_0\}=P_k(\mathbf{p},\ \mathbf{x}). \tag{67}$$

Поскольку для свободной (и, следовательно, равномерно движущейся) частицы гамильтониан $H_{(\alpha)}=p_{(\alpha)0}$ не может зависеть от $\mathbf{x}_{(\alpha)}$, равенство (67) означает, что

$$\sum_{(\alpha)}p_{(\alpha)\,0}\frac{\partial p_{(\alpha)\,0}}{\partial p_{(\alpha)\,k}}=\sum_{(\alpha)}p_{(\alpha)\,k}.$$

На основании аддитивности приходим к соотношениям

$$\left(p_{(\alpha)\,0}\right)^2=\left(\mathbf{p}_{(\alpha)}\right)^2+m^2_{(\alpha)}, \tag{68}$$

где $m^2_{(\alpha)}$ — константы, зависящие, может быть, от номера частицы. Величину $m_{(\alpha)}$ будем называть *инвариантной массой,* или *массой* частицы (α).

(39) Замечание. Отметим, что константы интегрирования выбраны положительными. ▼

В качестве $p_{(\alpha)0}$ далее будем рассматривать положительное значение корня от правой части (68)

$$p_{(\alpha)\,0}=\sqrt{\mathbf{p}^2_{(\alpha)}+m^2_{(\alpha)}}. \tag{69}$$

Поскольку в гамильтоновы уравнения движения входит скорость $\mathbf{v}_{(\alpha)}\equiv\partial_0\mathbf{x}_{(\alpha)}$, ее удается выразить через $\mathbf{p}_{(\alpha)}$:

$$\mathbf{v}_{(\alpha)}=\frac{\mathbf{p}_{(\alpha)}}{\sqrt{\mathbf{p}^2_{(\alpha)}+m^2_{(\alpha)}}}=\frac{\mathbf{p}_{(\alpha)}}{p_{(\alpha)\,0}},$$

что в свою очередь несложно разрешить относительно импульсов:

$$\mathbf{p}_{(\alpha)} = \frac{m_{(\alpha)} \mathbf{v}_{(\alpha)}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{(\alpha)}^2}} = m_{(\alpha)} \mathbf{v}_{(\alpha)} \gamma (\mathbf{v}). \tag{70}$$

Как и следовало ожидать, если для малых скоростей отождествить константы интегрирования $m_{(\alpha)}$ с ньютоновой массой частицы (α), то выражение для импульса совпадет с импульсом ньютоновой механики.

Таким образом, для системы частиц в СТО с группой симметрии Пуанкаре мы построили такой же набор наблюдаемых, как и в случае ньютоновой механики с группой симметрии Галилея. Все эти наблюдаемые суть интегралы движения, что нетрудно проверить. Наряду с введенными понятиями *энергии* и *импульса* $P_0(\mathbf{p}, \mathrm{x})$ и $P_k(\mathbf{p}, \mathrm{x})$ для величин $l_i(\mathbf{p}, \mathrm{x}) = \varepsilon_{ikm} l_{km}(\mathbf{p}, \mathrm{x})$ мы сохраним название компонент *углового момента,* тем более, что выражения для них совпадают с (35) (по форме зависимости от импульса, но не от скорости!). Как и для группы Галилея, переменные $l_{0k}(\mathbf{p}, \mathrm{x})$ (назовем их компонентами *лоренцева момента*) отличаются от предыдущих наблюдаемых явной зависимостью от времени $t \equiv x^0$. Однако частная производная лоренцева момента по t (равная P_k) точно компенсируется скобкой $\{P_0, l_{0k}\}$ в выражении для полной его производной по времени

$$\frac{dl_{0k}(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{dt} = \partial_0 l_{0k} + \{P_0, l_{0k}\} = 0.$$

Постоянство момента

$$l_{0k}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = x_0 P_k - \sum_{(\alpha)} p_{(\alpha)0} x_{(\alpha)k} = (\mathrm{const})_k \tag{71}$$

позволяет выделить точку $\mathrm{x}_{\text{ц.и}}$ — *центр инерции* системы частиц:

$$\mathbf{x}_{\text{ц. и}} = \Big(\sum_{(\alpha)} p_{(\alpha)0} \mathbf{x}_{(\alpha)}\Big) / P_0, \tag{72}$$

находящуюся в состоянии равномерного и прямолинейного движения (со скоростью $\mathbf{v}_{\text{ц.и}} = \mathbf{P}/P_0$).

Для завершения построений полагалось бы проверить совместность полученных результатов с исходными предположениями **(33)**—**(36)**. В частности, необходимо убедиться в соответствии скобочных соотношений (58) с законами преобразования импульса частицы, которые теперь могут быть в ы ч и с л е н ы, поскольку известна его связь со скоростью $\dot{\mathrm{x}}_{(\alpha)}$, и можно исходить из формул (41)—(43) преобразования координат (и времени) $x_{(\alpha)\mu}$. С этой задачей рекомендуем читателю справиться самостоятельно.

Рассмотрев в рамках ньютоновой механики систему свободных частиц, мы убедились, что принцип относительности означает наличие физической симметрии, важнейшие наблюдаемые указанной системы имеют симметрийное происхождение, а сама алгебра наблюдаемых теснейшим образом связана со структурой алгебры Ли группы симметрии — в данном случае группы Галилея. Вместе с тем в случае релятивистской механики системы свободных частиц знание группы симметрии позволило восстановить набор наблюдаемых и динамику физического объекта. Таким образом, без явного преувеличения можно заключить, что симметрия составляет основное содержание физики.

§ 3. Ковариантность и лагранжев формализм. Теория групп в классической механике

Симметрия, обусловленная принципом относительности (т. е. утверждением о независимости (инвариантности) законов физики по отношению к какой-либо группе преобразований G), делает возможной геометрическую классификацию наблюдаемых по группе G. Так, например, в случае СТО на основании формул преобразования (41), (42) время x^0 и координаты частицы x^k можно рассматривать как компоненты 4-*вектора*. Действительно, (41), (42) суть законы линейных преобразований в четырехмерном векторном пространстве, осуществляемых 4×4-(псевдо)ортогональными матрицами Λ^{μ}_{ν}: $x^{\mu}\to x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ ($\mu, \nu=0, 1, 2, 3$). Таким же свойством обладает и набор $\{p_\mu\}=(p_0, \mathbf{p})$, включающий энергию частицы и составляющие ее 3-импульса, т. е. 4-импульс $\{p_\mu\}$ — вектор. Инвариантные величины типа интервала ds (см. (44)) называются *скалярами,* а набор величин $l_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x})=(l_{0k}(\mathbf{p}, \mathrm{x});\ l_{km}(\mathbf{p}, \mathrm{x}))$, нумеруемых парой индексов μ, $\nu=0, 1, 2, 3$, представляет собой (антисимметричный) *тензор* второго ранга.

В соответствии с принципом относительности при переходе в другую систему отсчета уравнения, выражающие законы природы, должны сохранять свой вид: новые функции состояния от новых аргументов должны удовлетворять уравнениям того же вида, что и старые функции состояния от старых аргументов. Данное свойство носит название *ковариантности уравнений.* Оно предполагает жесткую взаимосвязь преобразовательных свойств различных наблюдаемых. (Наблюдаемые x_μ, p_μ, $l_{\mu\nu}$, ... обладают простейшими законами преобразования относительно группы Лоренца, а именно линейными.)

Ковариантность уравнений проще всего установить, если в них используются переменные, сами обладающие этим свойством (т. е. организованные в наборы, одинаково определяемые в различных ИСО). Компоненты 3-вектора x_i не ковариантны, что и служит основанием для перехода от параметризации траектории частицы с помощью времени x_0 к какому-либо другому параметру τ, взаимно-однозначно связанному с $x_0 = x_0(\tau)$, а в остальном произвольному. (Этот произвол, конечно, необходимо сужать в связи с неудобством использования для каждой частицы отдельного параметра $\tau_{(\alpha)}$: желательно иметь один параметр для всех частиц).

Уравнения движения классической механики могут быть получены на основании вариационного принципа (см., например, [10, 19]). Параметрическое задание траектории $\mathbf{x}_{(\alpha)} = \mathbf{x}_{(\alpha)}(\tau)$ (совместно с уравнением $x_0 = x_0(\tau)$ определяющее *мировую линию частицы*) позволяет сформулировать такой принцип в ковариантном виде. Для этого достаточно (и необходимо) потребовать инвариантность действия S:

$$S = \int d\tau\, \mathscr{L}(\tau;\ x_{(\alpha)\mu},\ \dot{x}_{(\alpha)\mu}),$$

где $\mathscr{L}$ — лагранжиан системы частиц; точкой обозначена производная $d/d\tau$.

Следовательно, лагранжев подход позволяет достаточно формализованно учесть наличие симметрии. При этом возникает теоретико-групповая задача — исследование преобразовательных свойств наблюдаемых. Она, как правило, сводится к задачам тензорной алгебры.

Инвариантность действия относительно n-параметрической группы преобразований G проявляется в существовании n независимых интегралов движения (теорема Эмми Нётер). Напомним, что инвариантность в гамильтоновом подходе позволила нам ввести все существенные наблюдаемые для системы частиц.

(40) Замечание. В данном параграфе мы исходили из принципа относительности и пассивной формы преобразований. Ранее мы убедились, что это равносильно принципу физической симметрии (напомним, что ее преобразования мы определили как активные). Разумеется, что при использовании принципа относительности различие активных и пассивных преобразований для физика не столь принципиально. Существуют, однако, физические симметрии, не имеющие пассивной реализации (в связи с чем на них не распространяется принцип относительности в стандартной формулировке).

(41) В механике примером этого является симметрия относительно преобразований $\hat{T}$ отражения времени: $x_0 \to -x_0$. ∇

Реализовать указанную симметрию пассивными преобразованиями означает «сконструировать» такую СО (или прибор), находясь в которой наблюдатель воспринимал бы каждую последовательность реально развивающихся событий как «прокручиваемую в обратную сторону». Устройство, обладающее данным свойством, читателю хорошо известно под названием «машина времени».

Другим примером симметрии, преобразования которой не реализуются пассивно, может служить известная из курса ядерной физики изотопическая симметрия нуклонов. ▼

Итак, на примере механики мы убедились, что симметрия составляет неотъемлемую часть здания физики, и, следовательно, для овладения последней необходимо знать теорию групп, являющуюся аппаратом теории симметрии. В первую очередь речь идет о строении и свойствах группы вращений $\boldsymbol{R} = SO(3)$, общей для симметрии Лоренца и Галилея (вследствие чего регламентируемые ею черты физической теории одинаковы в релятивистской и ньютоновой физике). Далее, имея в виду теорию элементарных частиц, следует отдать предпочтение изучению групп Лоренца и Пуанкаре. Действительно, кардинальные свойства элементарных частиц проявляются в процессах столкновения и взаимопревращения, причем наиболее интересные события происходят тогда, когда относительные скорости частиц не малы по сравнению со скоростью света.

Как мы убедились, инфинитезимальная структура группы симметрии сама позволяет выделить наиболее существенные для данного физического объекта наблюдаемые и определяет их свойства (алгебра этих наблюдаемых жестко связана с алгеброй Ли группы симметрии). Поэтому инфинитезимальный метод в теории групп, заключающийся в сведении групповой задачи к алгебраической, имеет также нетривиальное физическое значение.

Мы видели, что исследование свойств ковариантности уравнений физики предполагает установление законов преобразования наблюдаемых. Наиболее простыми законами являются линейные, и тогда описание свойств таких наблюдаемых (т. е. тензоров) есть одна из задач теории представлений групп. Вообще говоря, эти законы не должны быть обязательно линейными, и потому обращение к данной теории в рамках классической физики не представляется закономерным. Однако переход к квантовомеханическому описанию физической реальности почти полностью погружает проблемы симметрии в область теории линейных представлений.

ОБЩАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Понятие группы. Подгруппа. Пространство параметров. Группы движений

В нерелятивистской механике на примере преобразований Галилея мы убедились в существовании следующих свойств преобразований симметрии g:

(1) множество преобразований $G=\{g\}$ обладает бинарным законом композиции (законом умножения) $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$;

(2) закон композиции ассоциативен: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$;

(3) в множестве G имеется выделенный элемент e, такой, что $g \cdot e = g$ и $e \cdot g = g$;

(4) каждому элементу $g \in G$ можно сопоставить $g^{-1} \in G$, называемый *обратным* к g, такой, что $g^{-1} \cdot g = e$ и $g \cdot g^{-1} = e$.

Множество $G=\{g\}$, обладающее данными свойствами (*групповыми аксиомами*), называется *группой*, элемент e, удовлетворяющий свойству (3), называют *единичным элементом*, или *единицей* группы. Множества, характеризуемые только первыми тремя свойствами, называют *моноидами*, а при наличии только первых двух — *полугруппами*.

Отметим, что в конкретных случаях реализация абстрактной операции группового умножения может быть различной. Например, множество Z целых чисел (или множество R вещественных чисел) обладает групповой структурой с операцией арифметического сложения в качестве групповой композиции. О множестве Z (или R) с этой композицией говорят, что оно — *аддитивная группа целых* (или *вещественных*) *чисел*.

Это множество Z (или R) обладает еще одним законом композиции — арифметическим умножением. Очевидно, что при такой структуре Z — моноид. Если из R «выколоть» единственный необращаемый элемент (т. е. нуль), то множество $R_* \equiv R \setminus 0$ является группой и называется *мультипликативной группой вещественных чисел*. Читателю не составит труда дать определение аддитивной (C) и мультипликативной (C_*) групп комплексных чисел. Менее тривиальные примеры доставляют матричные множества с групповой композицией — матричным умножением.

Рассмотрим, в частности, множество вращений g в R^n $x'^i = g^i{}_k x^k$. Вращение не меняет скалярных произведений, следовательно, $\sum\limits_i x'^i y'^i = \sum\limits_i x^i y^i$, т. е. $g^{\mathrm{T}} = g^{-1}$, ибо $g^{\mathrm{T}} \cdot g = I = e$.

Такие преобразования координат и соответствующие матрицы g называют *ортогональными*. Поскольку $\det g^T = \det g$, то $\det g = \pm 1$. Нетрудно проверить, что все групповые аксиомы для рассматриваемого множества матриц, именуемого *ортогональной группой* n-мерного пространства или группой $O(n)$, выполнены.

Выберем из группы $O(n)$ множество только тех элементов g, для которых $\det g = +1$. Оказывается, что оно также удовлетворяет всем групповым аксиомам, т. е. замкнуто относительно отображений $g_1 \cdot g_2 \to g_3$ и $g \to g^{-1}$. Выделенная таким способом группа называется группой *специальных* ортогональных преобразований $SO(n)$. Сформулируем определение.

(5) Подмножество в группе G, замкнутое относительно групповых операций ($^{-1}$ и $\cdot$), называется *подгруппой* группы G. ▼

Отметим, что все групповые свойства формулируются абстрактно. Необходимо лишь указать абстрактное множество и задать таблицу умножения, т. е. бинарный закон композиции. Реализации у одной и той же группы могут быть различными.

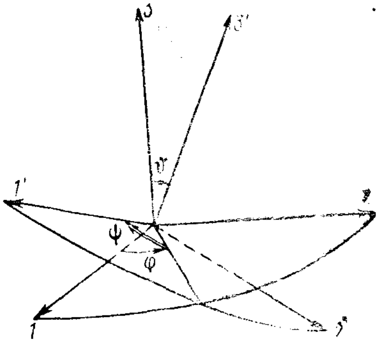


Рис. 2.

Задание реализации группы связано с введением «групповых параметров». Распространенной параметризацией группы вращений $SO(3)$ являются углы Эйлера φ, ϑ и ψ (рис. 2), с помощью которых может быть описано относительное положение исходной Σ и повернутой Σ' систем координат. Введем преобразования

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

$$g_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta < \pi, \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi.$$

Тогда вращение, переводящее Σ в Σ', может быть воспроизведено последовательными преобразованиями (1): $g(\varphi, \vartheta, \psi) = g_\psi g_\vartheta g_\varphi$. Нетрудно видеть, что каждая из матриц g_φ, g_ϑ, g_ψ сама порождает подгруппу. Если к группе SO (3) добавить отражение

$$w = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

и все произведения wg, gw, $g \in SO(3)$, то полученная совокупность преобразований совпадает со всей группой $O(3)$. Элементы w и e тоже образуют подгруппу в $O(3)$. Эта подгруппа W помимо того, что состоит всего из двух элементов, обладает замечательным свойством:

(6) каждый ее элемент коммутирует с каждым элементом исходной группы G, т. е. $wg = gw$, $w \in W$, $g \in G$. Подгруппа из **всех** таких элементов $W = Z(G)$ называется *центром*.

(7) Другую подгруппу, являющуюся центром, можно получить, рассмотрев группу $GL(n, K)$, называемую *общей линейной группой* над полем $K = R$ (или C) вещественных (или комплексных) чисел и состоящую из неособенных, т. е. обратимых, вещественных (комплексных) матриц $n \times n$. Групповым законом композиции в данном случае является матричное умножение, относительно которого групповой единицей служит единичная матрица

$$e = I \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(8) Покажите, что совокупность матриц вида λI, где $\lambda \in R_*$ ($\lambda \in C_*$), является центром в группе $GL(n, K)$. ▼

Если центр совпадает со всей группой, то группа называется *абелевой* (или *коммутативной*).

Абелевыми группами являются:

(9) группа трансляций $\boldsymbol{P}(n)$ в векторном пространстве R^n $\boldsymbol{P}(n) = \{t(a) : \forall\, x,\ x \to t(a)x = x + a,\ a \in R^n\}$. Элемент $e = t(0)$ — единичный элемент, $t^{-1}(a) = t(-a)$ — обратный. Область изменения параметров: $a \in R^n$.

(10) Группа вращений плоскости $SO(2)$ и $O(2)$. Группу $SO(2)$ можно рассматривать как подгруппу в $SO(3)$.

(11) Группа дискретных вращений плоскости — совокупность поворотов $\{g(\varphi)\}$ на угол φ, целый кратный фиксированному углу $\alpha : \varphi = m\alpha$. Если при этом число α — рациональное кратное π, то группа исчерпывается конечным числом таких вращений. Группа называется *конечной*, если содержит лишь конечное число элементов. ▼

Обратимся к *специальной* линейной группе $SL(n, K) \subset GL(n, K)$ (условие специальности выделяет в $GL(n, K)$ подмножество матриц с единичным детерминантом). Для $G' = SL(n, K)$ условие (6) не выполняется. Зато для G' справедливо $gG' = G'g$ или $gG'g^{-1} = G'$.*) Действительно, для любых

*) Произведение вида gS элемента группы g на какое-либо подмножество $S \subset G$ есть сокращенная запись множества $\{gs : s \in S\}$. Аналогично $RS \equiv \{rs : r \in R,\ s \in S\}$.

$g \in GL(n, K)$, $g' \in G'$ элемент $\widetilde{g} = gg'g^{-1}$ принадлежит G', поскольку $\det \widetilde{g} = \det g' = 1$.

Подгруппа G', удовлетворяющая условию $gG' = G'g$, $g \in G \supset G'$, называется *нормальной* (или *инвариантной*) подгруппой. Отметим, что центр всегда является нормальной подгруппой. В общем случае произвольной подгруппы $H \subset G$ множество $K = gHg^{-1} \equiv \{ghg^{-1},\ h \in H\}$ не совпадает с H. Не составляет труда проверить, что подмножество K само является подгруппой в G. Подгруппы H и K, связанные соотношением $K = gHg^{-1}$ для какого-либо $g \in G$, называются *сопряженными*.

Рассмотрим подгруппы $\{g_\varphi\}$ и $\{g_\vartheta\}$ в $SO(3)$. Чтобы убедиться, что они являются сопряженными, достаточно указать элемент $g \in SO(3)$, такой, что $g\{g_\varphi\}g^{-1} = \{g_\vartheta\}$. Очевидно, что в качестве g можно взять преобразование, переставляющее координаты *1* и *3*, например $g = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$:

$$g\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \{g_\vartheta\}.$$

Для матричных групп, таких, как $SO(3)$, не вызывает никаких затруднений введение экспоненциальной параметризации, поскольку для любой матрицы α абсолютно сходится ряд $\sum_k \frac{1}{k!}\alpha^k \equiv \exp\alpha$. Например, для матрицы $\varphi l_{12} = \varphi\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ существуют и легко вычисляются матричные элементы ряда $\exp\varphi l_{12}$ с произвольным параметром $\varphi \in R$:

$$\sum_n \frac{1}{n!}(\varphi l_{12})^n = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \{g_\varphi\}.$$

В этом представлении $\exp\varphi_1 l \exp\varphi_2 l = \exp(\varphi_1 + \varphi_2) l$. Таким образом, экспоненциальное отображение устанавливает некое соответствие (далее такое соответствие будем называть гомоморфизмом) аддитивной группы R с подгруппой $\{g_\varphi\} \subset G$. Подгруппы, характеризуемые таким свойством, будем называть *однопараметрическими*. Ясно, что подгруппа, сопряженная однопараметрической, и сама является таковой.

Матрица l, экспоненциальное отображение которой $\exp\varphi l$ порождает однопараметрическую подгруппу H матричной группы G, есть *генератор* группы G. В частности, l_{12} — один из генераторов группы $SO(3)$ (см. (1.19)). Поскольку операцию сопряжения можно применить к каждому слагаемому экспотенциального ряда и далее разнести к каждому множителю, то генератором сопряженной (относительно элемента $g\in G$) подгруппы $H'=gHg^{-1}$ является $l'=glg^{-1}$. В рассматриваемом примере матрица сопряженного l_{12} генератора в подгруппе $\{g_\vartheta\}$ имеет вид

$$l_{23}=g\,l_{12}\,g^{-1}=\begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}.$$

(12) Упражнение. Установите взаимную сопряженность однопараметрических подгрупп группы $SO(3)$ (что, вообще говоря, для произвольной группы не имеет места). С этой целью покажите, что преобразования из этих подгрупп суть вращения вокруг фиксированной оси. ▼

Установим, каково минимально необходимое число n вещественных параметров, с помощью которых можно охарактеризовать (задать) любой элемент группы вращений. В общем случае это число называется *размерностью* группы G, а сама группа — *n-параметрической.*

Поскольку для $SO(3)$ каждому преобразованию почти однозначно соответствует набор углов Эйлера φ, ϑ, ψ в области, указанной в (1), то этот набор минимален, т. е. $SO(3)$ — 3-параметрическая группа. Аналогичный вывод уже был сделан в гл. 1 относительно некоторого подмножества элементов из $SO(3)$, достаточно «близких» к единичному.

(13) Упражнение (12) приводит к иной параметризации группы $SO(3)$ путем задания угла поворота α и оси вращения $\mathbf{n}$ (определяется двумя параметрами). Необходимо только согласовать направления поворотов. Используем свойство преобразований $SO(3)$ не менять ориентации репера $h=\{\mathbf{h}_{(i)}\}$ ($i=1, 2, 3$) (ориентированный объем $V(h)$ параллелепипеда, построенного на векторах репера, при вращениях не меняется). Для положительных значений α в качестве поворота $g_\mathbf{n}(\alpha)$ выбираем тот, который осуществляет вращение в плоскости $\{\mathbf{h}_{(1)}, \mathbf{h}_{(2)}\}$ от вектора $\mathbf{h}_{(1)}$ к вектору $\mathbf{h}_{(2)}$, если $\mathbf{h}_{(3)}=\mathbf{n}$ и репер h имеет одинаковую ориентацию с репером ортов *1, 2* и *3*.

При рассмотрении однозначности такой параметризации необходимо учесть следующие очевидные соотношения: $[g_\mathbf{n}(\alpha)]^{-1}=g_\mathbf{n}(-\alpha)=g_{-\mathbf{n}}(\alpha)=g_\mathbf{n}(2\pi-\alpha)$. Таким образом, если вектор $\mathbf{n}$ пробегает всю единичную сферу S^2, то область изменения параметра α следует ограничить интервалом $[0, \pi]$. Значит, совокупность элементов группы $SO(3)$ может быть взаимно-однозначно отображена на внутренность сферы радиусом π: каждому вектору $\boldsymbol{\omega}=\alpha\mathbf{n}$ из этой области соответствует поворот $g_\mathbf{n}(\alpha)$ (рис. 3). Диаметрально противоположные точки на границе этой области необходимо отождествить, поскольку в $SO(3)$ справедливо соотношение $g_\mathbf{n}(\pi)=g_{-\mathbf{n}}(\pi)$.

Проследим поведение точек в рассматриваемой области соответствующих последовательному применению преобразования $g_n(\alpha)$, $\alpha\neq 0$, т. е. степеням $[g_n(\alpha)]^k$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ Все они лежат на прямой $\mathbf{n}$ и даже при небольшом α равномерно удаляются в пространстве параметров от центра сферы и проходят полуотрезки от 0 до $\pm\pi\mathbf{n}$ за конечное число шагов. Следовательно, любой элемент группы $SO(3)$ может быть представлен как конечная степень некоторого элемента, изображающая точка которого находится в ε-окрестности центра сферы.

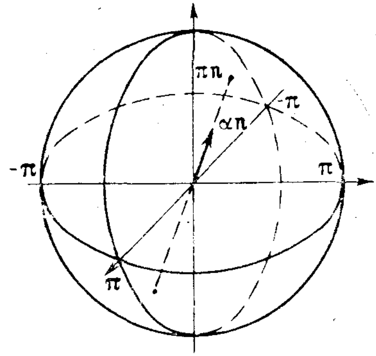


Рис. 3.

(14) Подмножество S элементов группы G называется *порождающим,* если достаточно конечного числа произведений элементов $s\in S$ и их обратных, чтобы получилось все множество G. Элементы порождающего множества называются *образующими* группы.

Если S — конечное множество, то группа называется *конечно-порожденной.*

(15) Пусть группа G является группой преобразований (движений) множества X с элементами (точками) $x, y, \ldots\in X$. Про G говорят, что она *действует* на X, а (левое) действие ее элементов, скажем, $g: x\to y$, обозначается так: $x\to gx=y\in X$. При этом предполагается, что $g_1(g_2x)=(g_1g_2)x$ и $ex=x$ для всех $x\in X$. (Для правого действия соответственно $(xg_1)g_2=x(g_1g_2)$ и $xe=x$). Само множество X называется *G-модулем* (или *G-пространством*).

Возьмем некоторую точку $x_0\in X$ и рассмотрим множество точек $Gx_0=\{gx_0: g\in G\}$. Оно называется *орбитой* группы G в X. Подмножество $Gx_0\subset X$ само является G-модулем. Характерным свойством орбиты является то, что для любой пары x, y принадлежащих ей точек всегда найдется элемент $g\in G$, такой, что $y=gx$. Это свойство называется *транзитивностью,* а G-модуль с таким свойством — *однородным.*

Рассмотрим для некоторой фиксированной точки $x_0\in X$ совокупность H элементов $h\in G$, таких, что $hx_0=x_0$. Как легко заметить, H является подгруппой в G. Она называется *группой стабильности точки* x_0 (*малой группой точки* x_0).

Возьмем в качестве примера $G=SO(3)$. Пространство R^3 является G-модулем. Сфера S^2_ρ с любым радиусом ρ в $R^3\supset S^2_\rho=\{\mathbf{x}: \mathbf{x}^2=\rho^2\}$ является однородным $SO(3)$-модулем. Наконец, группой стабильности любой точки $\mathbf{x}\in S_\rho$ является (однопараметрическая) подгруппа вращений вокруг оси $\mathbf{n}=\mathbf{x}/\rho$.

(16) Упражнение. Докажите, что группы стабильности H_x и H_y любых двух точек $x, y \in X$ однородного G-модуля X сопряжены в G.

§ 2. Отображения групп. Гомоморфизмы. Факторгруппа. Виды гомоморфизмов

(17) Рассмотрим группу $O(3)$. Известно, что у нее есть центр $W = \{e = I, \ w = -I\}$. Разобьем все множество элементов группы $O(3)$ на следующие классы: пусть $g \in O(3)$; возьмем элементы $g \cdot e$ и $g \cdot w = w \cdot g$ и объединим их в один класс. Поступим так со всеми $g \in O(3)$. Тогда если элемент g принадлежит некоторому классу, то он не принадлежит никакому другому.

Группа $O(3)$ оказалась разбитой на попарно непересекающиеся классы. Сопоставим всякому классу тот его элемент, определитель которого равен $+1$ (такой элемент g_+ есть в каждом классе). Полученный закон задает отображение множеств

$$O(3) \xrightarrow{\varphi} SO(3), \quad \varphi(g) = g_+.$$

Здесь мы использовали очень важный прием построения смежных классов в групповом множестве.

Дадим соответствующие определения.

(18) Пусть H — подгруппа в группе G. Тогда:

а) множество элементов $gH \equiv \{g \cdot h\}$ называется *левым смежным классом* в G по подгруппе H;

б) множество Hg называется *правым смежным классом* по той же подгруппе;

в) элемент g в gH (или в Hg) называется *представителем класса*.

(19) Смежные классы обладают следующими свойствами:

1) они разбивают множество элементов группы G на непересекающиеся подмножества;

2) представители этих классов определяются неоднозначно. Любой элемент из смежного класса может быть выбран представителем. Пусть $g' \in gH$, т. е. $g' = gh'$. Тогда $g'H = gh'H = gH$;

3) подгруппа H (как множество) является смежным классом единичного элемента e.

Множество (пространство), элементы которого суть левые (правые) классы смежности $gH(Hg)$ называется *левым* (*правым*) *факторпространством* G по H и обозначается G/H (соответственно $H \diagdown G$).

(20) существует естественное отображение φ: $G \to G/H$ (скажем, для левого):

$$\varphi(g) = gH \in G/H.$$

Данное отображение φ называется *каноническим*.

(**21**) Перейдем теперь к случаю, когда H — нормальная подгруппа в G. Свойства смежных классов по нормальной подгруппе таковы:

1) $gH=Hg$ по определению нормальной подгруппы;

2) $gHg^{-1}H=H=eH\equiv e'$;

3) $HgH=gH$ или $eHgH=gH$;

4) $g_1Hg_2H=g_1g_2H$, что позволяет ввести закон композиции на множестве смежных классов $(g_1H)\cdot(g_2H)=(g_1g_2H)$. Ассоциативность и указанные свойства означают, что этот закон композиции является групповым. Группа смежных классов в G по нормальной подгруппе H с законом композиции $(g_1H)\cdot(g_2H)=$ $=(g_1g_2H)$ называется *факторгруппой* G/H группы G по подгруппе H. ▼

Построенные в примере (**17**) смежные классы $O(3)/W$ образуют группу (центр всегда является нормальной подгруппой!).

Таким образом, если в группе G есть нормальная подгруппа H, то каноническое отображение $\varphi: G\to G/H$ обладает свойством

$$\varphi(g_1\cdot g_2)=\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2) \quad \text{и} \quad \varphi(e)=e'\equiv eH.$$

(**22**) Отвлечемся от метода построения φ и рассмотрим отображения групповых множеств с аналогичными свойствами:

1. $f(g_1\cdot g_2)=f(g_1)\cdot f(g_2)$, $g_1, g_2\in G$, $f(g)\in G'$.

Отсюда вытекают следующие соотношения.

2. $f(e)=e'$, где e и e' — единичные элементы групп G и G' соответственно;

3. $f(g^{-1})=(f(g))^{-1}$.

Отображение f группы G в группу G', обладающее указанными свойствами, называется *гомоморфизмом* группы G в G'. В частности, если H — нормальная подгруппа в G, то каноническое отображение $\varphi: G\to G/H$ является гомоморфизмом. Назовем его *каноническим гомоморфизмом* G в G/H. ▼

Приведем примеры гомоморфизмов:

(**23**) $O(3)\to SO(3)$ — построенное в примере (**17**) отображение;

(**24**) $Z\to Z_n$ — отображение аддитивной группы Z целых чисел в (аддитивную) *группу классов вычетов* по модулю n (см. также пример (**62**));

(**25**) $GL(n, C)\to C_*$, где $f(g)=\det g$, $g\in GL(n, C)$;

(**26**) $GL(n, C)\to C_*$, где $f(g)=|\det g|$, $g\in GL(n, C)$;

(**27**) $SO(2)\to SO(3)$. Здесь образ $f(g)$ для 2×2 матрицы $g\in SO(2)$

$$f(g)=\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{g}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \quad ▼$$

Образ гомоморфизма $\operatorname{Im} f$ есть множество $\{f(g),\ g \in G\}$ образов всех элементов из G. ($\operatorname{Im} f$ не обязательно совпадает с G'. — См. примеры **(26)** и **(27)**).

Прообраз $\operatorname{Ker} f$ единичного элемента называется *ядром гомоморфизма.*

Данные нами определения проиллюстрированы рис. 4, где условно изображен гомоморфизм f группы G в G'.

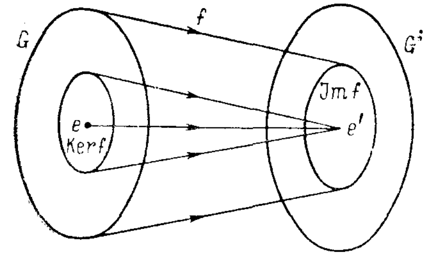


Рис. 4.

Основные свойства введенных объектов сформулируем в виде теоремы, доказательство которой предлагаем в качестве упражнения.

(28) Теорема. Образ $\operatorname{Im} f$ и ядро $\operatorname{Ker} f$ гомоморфизма $f: G \to G'$ являются подгруппами соответственно в G' и G, причем $\operatorname{Ker} f$ — нормальная подгруппа в G. ▼

Гомоморфизмам с некоторыми частными свойствами соответствуют специальные названия.

Мономорфизм (*инъекция,* или *инъективный гомоморфизм*)— это гомоморфизм, ядро которого тривиально: $\operatorname{Ker} f = e$ (рис. 5).

В примере **(27)** отображение f группы $SO(2)$ в $SO(3)$ является мономорфизмом.

Отметим, что для мономорфизма каждый элемент $g' \in \operatorname{Im} f$ имеет только один прообраз, и, следовательно, отображение f на подмножестве $\operatorname{Im} f$ обратимо.

Эпиморфизм (*сюръекция,* или *сюръективный гомоморфизм*) — это гомоморфизм $f: G \to G'$, образом которого является вся группа G', т. е. f есть отображение «на» (рис. 6). Предлагаем читателю указать эпиморфизмы в примерах **(23)**—**(27)**.

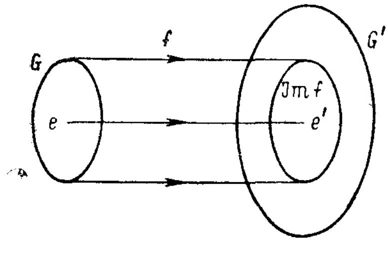


Рис. 5.

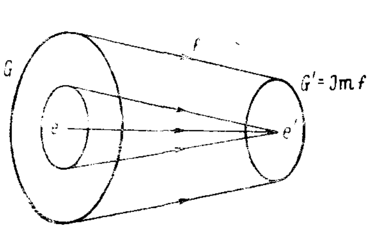


Рис. 6.

Отображение $f: G \to G'$, являющееся инъекцией и одновременно эпиморфизмом, называется *изоморфизмом* (*биективным* отображением, или *биекцией*), а сами группы G и G' — *изо-*

морфными. В этом случае $\mathrm{Ker}\, f = \acute{e}$ и $\mathrm{Im}\, f = G'$. Следовательно, f обратимо, и нетрудно проверить, что обратное отображение f^{-1} также является изоморфизмом. Таким образом, изоморфизм есть отношение эквивалентности. Для его обозначения будем использовать символ $\approx$. Символом $\sim$ будем обозначать наличие (нетривиального) гомоморфизма групп, скажем, $G \sim G'$ (когда «направление» отображения заведомо известно либо несущественно).

Для закрепления этих понятий предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение.

(29) Теорема. Гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма (т. е. $\mathrm{Im}\, f \approx G/\mathrm{Ker}\, f$). ▼

Гомоморфизм f группы G в себя называется *эндоморфизмом.*

Инъективный эндоморфизм $f: G \to G$ по теореме **(29)** является изоморфизмом и называется *автоморфизмом.*

Ясно, что отображение $G \to G$, задаваемое последовательным применением двух разных автоморфизмов f_1 и f_2, также является автоморфизмом. Таким образом, множество автоморфизмов группы G естественным образом наделяется законом композиции (ассоциативным). Тождественное отображение $\mathrm{id}: G \to G$, $\mathrm{id}(g) = g$ относительно этого умножения является единицей, а обратный изоморфизм f^{-1}—обратным элементом к f.

Множество $\mathrm{Aut}\, G$ всех автоморфизмов группы G (с определенным выше законом композиции) называется *группой всех автоморфизмов* данной группы.

Свойства гомоморфизмов группы удобно формулировать в терминах диаграмм. Рассмотрим, например, диаграмму, порождаемую гомоморфизмом теоремы **(29)**:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \\ G/\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\psi^{-1}"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd} \qquad (3)$$

Здесь φ — канонический гомоморфизм G в $G/\mathrm{Ker}\, f$, а τ — тождественное вложение (мономорфизм) группы $\mathrm{Im}\, f$ в H. Диаграмма называется *коммутативной,* если для любой пары групп все соединяющие их цепочки гомоморфизмов таковы, что их образы на любом элементе исходной группы совпадают.

Если в диаграмме (3) ψ — изоморфизм, существование которого утверждается теоремой **(29)**, то данная диаграмма коммутативна. Наоборот, если потребовать, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \\ G/\mathrm{Ker}\, f \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \qquad (4)$$

была коммутативной, то гомоморфизм f', обеспечивающий такое свойство, единствен. (Он равен $\tau\circ\psi^{-1}$. — См. диаграмму (3).)

В теории групп важную роль играют *точные последовательности*

$$\ldots \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots,$$

такие диаграммы, у которых всякий образ предыдущего гомоморфизма является ядром последующего (см., например, рис. 7).

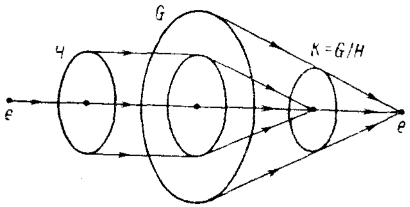


Рис. 7.

(30) Упражнение. Докажите, что точность для последовательности

а) $e \to G \xrightarrow{f} H$;

б) $G \xrightarrow{f} H \to e$;

в) $e \to G \xrightarrow{f} H \to e$

эквивалентна тому, что гомоморфизм f является: а) мономорфизмом; б) эпиморфизмом; в) изоморфизмом.

(31) Упражнение. Постройте такие гомоморфизмы f_i, чтобы последовательность $e \to Z_2 \xrightarrow{f_1} O(3) \xrightarrow{f_2} SO(3) \to e$ была точна. ▼

В последнем упражнении мы оперируем последовательностью вида

$$e \to H \to G \to K \to e. \tag{5}$$

(32) Упражнение. Покажите, что утверждение о точности последовательности (5) эквивалентно следующему:

1) H — нормальная подгруппа в G;

2) $K \approx G/H$.

(33) Если при данных группах K и H группа G может быть включена в точную последовательность вида (5), то она называется *расширением* группы K по группе H.

§ 3. Прямое произведение групп, прямая сумма абелевых групп. Полупрямое произведение. Двойные классы смежности

В (33) мы дали определение расширения G группы K по группе H. Всегда ли такая группа G существует? Каковы бы ни были группы K и H, существует хотя бы одно расширение G. (В зависимости от свойств K и H неизоморфных расширений может быть даже много.)

(**34**) Действительно, возьмем множество, являющееся прямым произведением множеств K и H: $G=K\times H=\{(k, h): k\in K, h\in H\}$, и определим в нем закон композиции для элементов $g'=(k', h')\in G$ и $g''=(k'', h'')\in G$, положив

$$g'\cdot g''=g=(k'k'', \ h'h''). \ \triangledown \tag{6}$$

Множество G содержит единичный элемент относительно умножения (6)

$$e=(e_K, \ e_H)\in G, \tag{7}$$

где e_K и e_H — единицы групп K и H соответственно.

Все остальные групповые аксиомы (**1**)—(**4**) также выполнены.

Далее, у построенной группы G есть естественные гомоморфизмы P_1, P_2 на исходные группы K и H:

$$\begin{aligned} &(k, \ h)\xrightarrow{P_1}k \quad (\operatorname{Ker}P_1=\{(e_K, \ h)\}),\\ &(k, \ h)\xrightarrow{P_2}h \quad (\operatorname{Ker}P_2=\{(k, \ e_H)\}). \end{aligned} \tag{8}$$

Ядра этих гомоморфизмов изоморфны соответственно группам $\operatorname{Ker}P_1\approx H$, $\operatorname{Ker}P_2\approx K$, что определяет мономорфизмы (вложения) групп K и H в G:

$$\begin{aligned} &K\xrightarrow{\tau_1}G \quad (\operatorname{Im}\tau_1=\operatorname{Ker}P_2),\\ &H\xrightarrow{\tau_2}G \quad (\operatorname{Im}\tau_2=\operatorname{Ker}P_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, G — расширение и не только K по H, но и H по K.

Определенная таким способом группа G называется *прямым произведением* групп K и H.

(**35**) Рассмотрим пример $G=SL(n, \ K)\times SL(m, \ K)$. Пусть k_{ij} и h_{rs} — матричные элементы матриц $k\in SL(n, K)$, $h\in SL(m, \ K)$. Элемент (k, h) прямого произведения также можно представить матрицей $(n+m)\times(n+m)$:

$$g=(k, \ h)=\begin{pmatrix} \|k_{ij}\| & 0 \\ 0 & \|h_{rs}\| \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что умножение этих матриц действительно реализует закон композиции (6). ▼

На основании определения (**34**) прямого произведения групп отметим, что элементы (k, e_H) и (e_K, h) коммутируют друг с другом. Такое свойство является одним из характеристических свойств групп, представляющих собой прямое произведение.

Сформулируем критерий представимости группы в виде прямого произведения подгрупп.

(36) Теорема. Пусть группа G имеет подгруппы K и H, такие, что:

1) $K \cap H = e$,
2) $KH = G$,
3) $kh = hk$ $(k \in K,\ h \in H)$.

Тогда отображение $K \times H \to G$ по правилу $(k,\ h) \to kh$ есть изоморфизм.

Доказательство теоремы предлагаем читателю провести самостоятельно. ▼

Отметим, что операцию прямого произведения групп можно определить для произвольного числа «прямых сомножителей», и данная операция ассоциативна. Специально отметим случай, когда все «прямые сомножители» суть абелевы группы. (Ясно, что при этом прямое произведение также принадлежит множеству абелевых групп.)

При конечном числе (аддитивных) абелевых групп их прямое произведение принято называть *прямой суммой*. (Подробнее см. [18, гл. 1]).

Приведем в качестве примера векторное пространство R^n (или C^n) — абелеву группу, которая есть прямая сумма n экземпляров аддитивной группы R (или C).

(37) Обратимся к менее тривиальному способу расширения группы K по H — *полупрямому произведению*, которое будем обозначать $K \triangleright H$. Для его построения необходимо существование нетривиального гомоморфизма $K \to \operatorname{Aut} H$, сопоставляющего любому элементу $k \in K$ автоморфизм группы H:

$$k : h \to h' \equiv \chi(k)\, h. \tag{11}$$

Тогда на прямом произведении множеств $K \times H = G$ определим композицию, положив

$$(k_1,\ h_1) \cdot (k_2,\ h_2) = (k_1 k_2,\ h_1 (\chi(k_1)\, h_2)). \tag{12}$$

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что это групповой закон композиции. (Проверьте, что единичным элементом в G является $(e_K,\ e_H)$, а обратным к $(k,\ h)$ — элемент $(k^{-1}, \chi(k^{-1})\, h^{-1})$.

(38) Важнейшим для нас примером полупрямого произведения является группа Пуанкаре **П**. В пространстве Минковского ее преобразования $\pi \in \mathbf{\Pi}$ имеют вид

$$\pi = \pi(a,\ \Lambda) : x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{13}$$

Здесь порядок выполнения операций Λ и трансляций общепринятый: $\pi(a,\ \Lambda) = \pi(a,\ e) \circ \pi(0,\ \Lambda)$. Если для подгруппы трансляций $\boldsymbol{P} \subset \mathbf{\Pi}$ (неоднородной части преобразований (13)) использовать аддитивность параметров $a \in R^4$ при групповой композиции, то любому элементу Λ группы Лоренца $\mathbf{\Lambda}$ можно сопоставить взаимно-однозначное отображение $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$:

$$\Lambda : t(a) \to t'(a) = t(\Lambda a), \quad \text{где} \quad (\Lambda a)^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$$

— автоморфизм группы $\boldsymbol{P}$. Последовательное применение преобразований (13), определяющее групповую композицию в $\mathbf{\Pi}$, дает

$$\pi(a_1, \Lambda_1) \circ \pi(a_2, \Lambda_2) = \pi(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2), \tag{14}$$

что совпадает с законом умножения (12) в полупрямом произведении $\mathbf{\Lambda} \triangleright \boldsymbol{P}$. ▼

Отметим, что расширение G группы K по H, являющееся прямым или полупрямым произведением, по построению содержит не только H, но и K в качестве подгруппы.

(39) Теорема. Пусть группа G содержит подгруппу K и нормальную подгруппу H, такие, что: 1) $K \cap H = e$; 2) $KH = G$. Тогда $G = K \triangleright H$. ▼

Итак, мы выявили простейшие способы расширения группы K по H.

Рассмотрим свойства факторпространства G/H по произвольной подгруппе H. На множестве классов $\{gH\} = G/H$ естественно определить *действие* группы G: $g \cdot (g'H) = (gg'H)$. Поскольку оно транзитивно, ибо для любых двух классов $(g_1 H)$ и $(g_2 H)$ имеем $(g_1 H) = (g_1 g_2^{-1})(g_2 H)$, то G/H — однородный (левый) G-модуль. Группой стабильности «точки» (eH) является сама подгруппа H.

(40) Пусть теперь X — произвольный однородный G-модуль, такой, что группа стабильности некоторой его точки $x_0 \in X$ есть H. Отображение $f : G \to X$ вида $g \to x = gx_0$ сопоставляет одну точку $x \in X$ всем элементам класса gH. При этом прообраз любой точки $x \in X$ в G/H единствен, ибо для $g' \neq gh$, $h \in H$, соотношения $x = gx_0$ и $x = g'x_0$ сразу приводят к противоречию.

Таким образом, отображение $\tilde{f} : G/H \to X$, определяемое коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \\ G/H \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

взаимно-однозначно и, что очевидно, коммутирует

$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "g"] \\ G/H \arrow[r, "\tilde{f}"] & X \end{tikzcd}$$

с действием группы G. Поэтому G-модуль X и факторпространство G/H можно не различать.

(41) Обозначим $G/H=X$ и через $x, y, \ldots$ — его элементы. Каждому классу $x \in X$ удобно сопоставить какой-либо (один!) элемент g_x группы G из этого класса — представитель класса смежности. Его выбор в значительной мере произволен. Удобно (но не обязательно) представителем класса $eH=x_0$ выбрать $e \in H \subset G$. Тогда любой другой элемент $g_i \in x_i$ однозначно представи́м в виде

$$g_i = g_{x_i} h_i. \tag{15}$$

Здесь $h_i = h(g_i) \in H$. Если при действии элемента группы $g: x \to y = gx$, то элемент gg_x принадлежит классу y:

$$gg_x = g_y h(g, x), \tag{16}$$

где элемент $h(g, x) \in H$, зависящий от способа выбора представителей $g_x \in x$, называется *фактором*, и его зависимость от g и x очевидно определяется соотношением

$$h(g, x) = g_{gx}^{-1} g g_x. \tag{17}$$

(42) Свойства фактора:

1) $$h(e, x) = e; \tag{18}$$
2) $$h(g_1 g_2, x) = h(g_1, g_2 x) h(g_2, x); \tag{19}$$
3) $$h(g^{-1}, gx) = h^{-1}(g, x); \tag{20}$$
4) $$h(g_x, x_0) = g_{x_0}. \tag{21}$$

Рекомендуем читателю вывести эти свойства самостоятельно. ▼

При произвольной подгруппе H класс, которому принадлежит произведение представителей $g_x g_y$, вообще говоря, зависит от способа их выбора.

(43) Упражнение. Докажите, что множество $g_x H g_y H$ тогда и только тогда принадлежит одному классу $g_z H$, когда подгруппа H нормальная. ▽

(44) Известно, что если H — нормальная подгруппа в G, то $X=G/H$ является группой с естественным умножением классов: $xy=z$.

Выбрав в каждом классе по одному представителю, в соответствии с разложением (15) получаем возможность «параметризации» элементов группы G с помощью элементов множества $X \times H$:

$$g_i \leftrightarrow (x_i, h_i).$$

Запишем произведение элементов g_1, g_2 в виде

$$g_1 g_2 = g_{x_1} h_1 g_{x_2} h_2 = g_{x_1} g_{x_2} \left(g_{x_2}^{-1} h_1 g_{x_2}\right) h_2 =$$
$$= g_{x_1 \cdot x_2} h(g_{x_1}, x_2) (g_{x_2}^{-1} h_1 g_{x_2}) h_2.$$

Поскольку подгруппа $H \subset G$ нормальная, то отображение

$$\chi(g): H \to g H g^{-1} \tag{22}$$

является ее автоморфизмом. Тогда групповую композицию в терминах элементов из $X \times H$ можно представить так:

$$(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) = (x_1 x_2, h(g_{x_1}, x_2) \{\chi(g_{x_2}^{-1}) h_1\} h_2). \tag{23}$$

(**45**) Как видим, при расширении $X = K$ по H общего вида отличие (23) от закона (12) для полупрямого произведения $K \triangleright H$ заключается в тривиальности фактора $h(g, x) = e$ из соотношения (16). В случае прямого произведения тривиален и автоморфизм (22) для $g \approx (x, e)$. В дальнейшем нам понадобится такое расширение, когда нормальная подгруппа $H \subset G$ принадлежит центру группы G, — *центральное*. Закон композиции в $X \times H$ предлагаем читателю вывести самостоятельно (см. также [15, 33]).

(**46**) В заключение рассмотрим разбиения группы G на классы смежности по разным подгруппам.

Пусть подгруппы K и H вложены одна в другую: $K \subset H \subset G$. Обозначим $X = G/K$, $Y = G/H$ и $Z = H/K$. Фиксация представителей g_y в классах $y \in Y$ приводит к однозначному разложению произвольного элемента $g \in G$:

$$g = g_y h.$$

Зафиксируем также представители $\{h_z\}$ в Z. Тогда

$$g = g_y h_z k.$$

Очевидно, что всегда возможен «согласованный» выбор представителей $\{g_x\}$ в X

$$g_x = g_y h_z, \tag{24}$$

сопоставляющий точкам x G-модуля X элементы (y, z) прямого произведения множеств $Y \times Z$. Действие группы G на $Y \times Z$ задается соотношением

$$g \cdot (y, z) = (gy, h(g, y) z), \tag{25}$$

где $h(g, y) \in H$ — фактор.

(**47**) Пусть теперь H и K — произвольные подгруппы в G. Множество HgK называется *двойным смежным классом* G по подгруппам H и K (их совокупность обозначается $H \setminus G/K$). Относя элементы группы G к содержащим их двойным классам, мы разбиваем всю группу G на непересекающиеся множества HgK.

Зафиксируем представители g_x в классах $x \in X = G/K$. Очевидно, что класс $x = g_x K$ целиком содержится в одном двойном классе $Hg_x K$. Как описать все левые классы x', содержащиеся в $Hg_x K$?

Это несложно сделать в случае $Hg_{x_0} K = HeK$. Если подгруппы H и K не пересекаются, то класс $HeK = \bigcup_{h \in H} hK$. Если же $H \cap K = L_0 \neq e$, то все множество элементов $hL_0 eK$ попадает в один класс смежности по K. Тогда $HeK = \bigcup_{z \in Z_0} h_z eK$, где $Z_0 = H/L_0$ и h_z — представитель в классе $z \in Z_0$.

Очевидно, что в общем случае двойного класса $y = HgyK \in Y = H \diagdown G/K$, где g_y — его представитель, задача сводится к отысканию условий, при которых элементам h и h' из H соответствуют совпадающие левые классы $hg_y K = h'g_y K$. Для совпадения этих классов необходимо и достаточно, чтобы любой элемент второго класса, скажем, $h'g_y e$, совпал с каким-нибудь элементом первого. Пусть это $hg_y k = h'g_y$. Взяв $h' = hl$, получим

$$h^{-1} h' = l = g_y k g_y^{-1}.$$

Это означает, что l, являясь элементом подгруппы H, одновременно принадлежит подгруппе K_y, сопряженной подгруппе K относительно элемента g_y:

$$K_y \equiv g_y K g_y^{-1}, \quad l \in H \cap K_y \equiv L_y. \tag{26}$$

Следовательно, совпадение классов $hg_y K = h'g_y K$ возможно тогда и только тогда, когда h и h' принадлежат одному и тому же классу z группы H по подгруппе L_y: $z \in Z_y \equiv H/L_y$. Зафиксировав представители $h_z \in z$, получим

$$\bigcup_{y \in H \diagdown G/K} \; \bigcup_{z \in H/L_y} h_z g_y K = G = \bigcup_{x \in G/K} g_x K. \tag{27}$$

Отсюда следует, что любой класс x имеет вид

$$x = g_x K = h_z g_y K.$$

Тем самым элементы левого G-модуля $X = G/K$ отождествляются с парами (y, z), $y \in Y = H \diagdown G/K$, $z \in Z_y = H/H \cap K_y$.

Отметим, что согласованный выбор представителей $g_x = h_z g_y$ всегда возможен.

§ 4. Кольца, тела, поля, кватернионы

Обозначим через $\mathrm{Mat}(n, R)$ ($\mathrm{Mat}(n, C)$) множество всех вещественных (комплексных) матриц размерности $n \times n$.

Отметим следующие его свойства:

(48) множество обладает двумя законами композиции (мультипликативным и аддитивным);

(49) по аддитивному закону оно абелева группа;

(50) по мультипликативному — моноид;

(51) согласование обоих законов композиции выражается свойством $(x+y)z = xz + yz$ и $z(x+y) = zx + zy$ для любых элементов x, y, z данного множества — *дистрибутивностью*.

Множество F, обладающее указанными свойствами, называется *кольцом*.*)

(52) $\mathrm{Mat}(n, R)$ и $\mathrm{Mat}(n, C)$ — кольца.

(53) Множество $R[t]$ (или $C[t]$) полиномов независимой переменной t с коэффициентами из R (или C) есть кольцо.

(54) Кольцом является множество Z целых чисел.

(55) Упражнение. Пусть $\mathrm{Mat}(n, A)$ — множество «матриц» над A, где A — какое-либо множество (т. е. элементы $m \in \mathrm{Mat}(n, A)$ суть подходящим образом занумерованные семейства из n^2 элементов $a_{ij} \in A$). Для наделения $\mathrm{Mat}(n, A)$ структурой кольца достаточно, чтобы кольцом было A. Покажите это. ▼

Аддитивная подгруппа кольца F, содержащая 1 и замкнутая относительно мультипликативного закона композиции, называется *подкольцом* кольца F.

(56) Например, $\mathrm{Mat}(n, R)$ — подкольцо в $\mathrm{Mat}(n, C)$.

Левым идеалом $J_{\text{л}}$ кольца F называется аддитивная подгруппа кольца F, такая, что множество $J_{\text{л}}$ замкнуто относительно операции левого умножения на любой элемент $x \in F$, т. е. $xJ_{\text{л}} \subseteq J_{\text{л}}$ или $FJ_{\text{л}} \subseteq J_{\text{л}}$.

Аналогично аддитивная подгруппа $J_{\text{пр}}$ — *правый идеал*, если $J_{\text{пр}}F \subseteq J_{\text{пр}}$.

Наконец, идеал J называется *двусторонним*, если он одновременно и левый, и правый (для краткости J называют просто *идеалом*).

(57) Например, пусть $J^{(k)} \subset \mathrm{Mat}\,(n, R)$ — множество матриц с нулевым k-м столбцом, тогда $J^{(k)}$ — левый идеал.

(58) Подмножество $J^{(i,k)}$ матриц с нулевым k-м столбцом и i-й строкой — двусторонний идеал в $\mathrm{Mat}(n, R)$.

(59) Если кольцо F коммутативно (т. е. $xy = yx$ для любых $x, y \in F$), то все идеалы в нем двусторонние. ▼

Отображение колец $f: F \to K$, гомоморфное по обоим законам композиции, называется *кольцевым гомоморфизмом*, т. е.

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x)\,f(y)$$

для любых $x, y \in F$. При этом

---

*) Точнее, *унитарным кольцом*, или *кольцом с единицей*, — требование (50). Будем рассматривать только такие кольца, в которых элемент 1 (*мультипликативная единица*) отличен от 0 — так в кольце обозначается аддитивная единица, называемая *нулем*.

$$f(0)=0'\in K,\quad f(1)=1'\in K.$$

Ядром $\operatorname{Ker} f$ кольцевого гомоморфизма f называют ядро аддитивного гомоморфизма, т. е. множество $f^{-1}(0)$.

(60) Упражнение. Докажите, что для кольцевого гомоморфизма $f: F\to K$: а) $\operatorname{Ker} f$ — двусторонний идеал в F; б) $\operatorname{Im} f$ — подкольцо в K. $\triangledown$

Для того чтобы кольцевой гомоморфизм $f: F\to K$ являлся *изоморфизмом*, достаточно потребовать взаимной однозначности отображения f.

(61) Упражнение. Пусть J — идеал в F. Рассмотрим аддитивную факторгруппу F/J. Определим на ее элементах мультипликативный закон композиции, положив $(x+J)\cdot(y+ +J)=(xy+J)$. Докажите, что F/J — мультипликативный моноид. $\triangledown$

Аддитивная факторгруппа F/J кольца F по идеалу J с определенной в **(61)** мультипликативной композицией называется *факторкольцом* кольца F по J.

(62) Например, аддитивная факторгруппа $Z_m=Z/mZ$ кольца целых чисел Z по идеалу $J=mZ$, состоящему из чисел, кратных числу m, есть факторкольцо. Умножение *классов вычетов* $\langle x\rangle \equiv x+mZ$ в соответствии с **(61)** есть $\langle x\rangle\langle y\rangle = =\langle xy\rangle$. $\blacktriangledown$

Пусть в кольце F элемент x обратим, т. е. $\exists\, x^{-1}\in F$ — такой, что $x^{-1}\cdot x = x\cdot x^{-1}=1$. Рассмотрим множество F_* всех обратимых элементов из F. Очевидно, что оно является группой. Группа F_* называется *группой обратимых элементов* кольца F.

(63) В кольце Z указанная группа состоит из двух элементов: $Z_*=\{1,\ -1\}$ и изоморфна аддитивной группе Z_2.

(64) Если множество $F_*=F\setminus 0$, то кольцо F называется *телом*. Кольцо Z целых чисел телом не является, но представляет собой подкольцо кольца Q рациональных чисел. Кольцо Q, а также R и C — тела. Эти примеры характеризуются, кроме того, *коммутативностью* (здесь и мультипликативная группа обратимых элементов F_* также абелева).

(65) Коммутативное тело называется *полем*. Следовательно, Q, R, C — поля.

(66) Простейшее тело, не являющееся полем, представляют *кватернионы* $\varkappa$. Аддитивная группа $\varkappa$ изоморфна аддитивной группе R^4, т. е. элементами $q\in\varkappa$ являются наборы четырех вещественных чисел $q\approx(q^0, q^1, q^2, q^3)$ с покомпонентным сложением в качестве аддитивного закона композиции. В естественном базисе e_α $(\alpha=0,1,2,3)$ в R^4

$$q=q^\alpha e_\alpha = q^0 e_0 + q^k e_k \equiv q^0 e_0 + \mathbf{q}.$$

Здесь элемент базиса e_0 будем считать мультипликативной единицей в $\varkappa$, т. е. для любого $q\in\varkappa$

$$qe_0 = e_0 q = q. \tag{23}$$

Наложив требование дистрибутивности (51) на композиции в $\varkappa$, можно определить умножение, задав его лишь на элементах базиса $\{e_\alpha\}$. Тогда из соотношения (28)

$$e_0 e_\alpha = e_\alpha e_0 = e_\alpha \quad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{29}$$

Положим

$$e_k^2 = -e_0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{30}$$

Элементы $e_k (k = 1, 2, 3)$ — аналоги мнимой единицы поля комплексных чисел (кратко их называют *мнимыми единицами* тела $\varkappa$); кватернионы вида $\mathbf{q} = q^k e_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ называют *чисто мнимыми*. Наконец, произведение двух разных мнимых единиц e_k, e_m $(k \neq m)$ равно (с точностью до знака) третьей:

$$e_k e_m = \varepsilon_{kmn} e_n, \tag{31}$$

где ε_{kmn} — полностью антисимметричный тензор (см. (**1.17**)). Тогда общий случай произведения мнимых единиц (30) и (31) можно записать в виде

$$e_k e_m = -\delta_{km} e_0 + \varepsilon_{kmn} e_n. \tag{32}$$

(**67**) Упражнение. Покажите, что определяемый соотношениями (29), (32) закон умножения ассоциативен. ▼

Таким образом, по мультипликативной композиции $\varkappa$ — моноид, и, следовательно, — кольцо $(1 = e_0)$.

(**68**) Введем в $\varkappa$ инволюцию — *кватернионное сопряжение* — и рассмотрим ее свойства. (Напомним, что *инволюцией* называется операция, квадрат которой есть тождественное отображение). Кватернион, сопряженный $q = q^0 e_0 + q^k e_k$, обозначим через $\bar{q}$ и положим

$$\bar{q} \equiv q^0 e_0 - q^k e_k. \tag{33}$$

Важнейшее свойство кватернионного сопряжения выражается соотношением

$$\overline{qq'} = \bar{q}' \cdot \bar{q}. \tag{34}$$

(Проверьте самостоятельно.)

(**69**) Взаимно-однозначное отображение f моноида (группы, кольца) F в G, такое, что $f(xy) = f(y) f(x)$, называется *антиизоморфизмом*.

(**70**) Кватернионное сопряжение — антиизоморфизм кольца $\varkappa$ на себя (т. е. *антиавтоморфизм*). Отметим, что инвариантными относительно операции (33) являются только элементы с нулевыми мнимыми компонентами, т. е. вида $q = q^0 e_0$, поэтому величина $\bar{q} q = q \bar{q}$ всегда вещественна:

$$\bar{q}q=\left[(q^0)^2+\sum_k (q^k)^2\right]e_0\equiv N^2(q)\,e_0. \tag{35}$$

Норму кватерниона $N(q)$ будем называть также *модулем кватерниона* и обозначать $N(q)=|q|$.

Важнейшими свойствами $N(q)$ являются:

(71) *невырожденность*, т. е. $N(q)=0\Leftrightarrow q=0$; отсюда следует, что $\varkappa$ — тело, поскольку любой ненулевой элемент в $\varkappa\setminus 0$ имеет обратный:

$$q^{-1}=\bar{q}/N^2(q)\quad (q\neq 0); \tag{36}$$

(72) *мультипликативность*, т. е.

$$N(qq')=N(q)\,N(q'). \tag{37}$$

Отображение $N: q\to N(q)$ есть гомоморфизм группы обратимых элементов тела $\varkappa$ на мультипликативную группу R_{*+} положительных вещественных чисел. Ядро $N^{-1}(1)$ этого гомоморфизма называется (мультипликативной) *группой унимодулярных кватернионов*.

(73) Упражнение. Покажите, что $\varkappa_*\sim R_{*+}\times N^{-1}(1)$. (Постройте мономорфизм $R_{*+}\to\varkappa_*$ и примените теорему **(36)**.)

§ 5. Модули, их гомоморфизмы и тензорные произведения. Кольцо матриц и эндоморфизмов модуля. Кватернионные единицы и матрицы Паули

(74) Абелева группа E (с аддитивной композицией) называется *левым* (*правым*) *модулем над кольцом* F (или *левым* (*правым*) F-*модулем*), если определено левое (правое) умножение $(F, E)\to E$ элементов $a\in E$ на элементы кольца $a\to xa$, $x\in F$, такое, что:

1) $x(a_1+a_2)=xa_1+xa_2$;
2) $(x+y)a=xa+ya$;
3) $1\cdot a=a$, $x(ya)=(xy)a$.

(Аналогично для правого умножения.)

(75) Пример. Любая абелева группа сама по себе является Z-модулем.

(76) Аддитивная группа $\mathrm{Mat}(n\times m, K)$ матриц с n строками и m столбцами есть левый модуль над $\mathrm{Mat}(n, K)$ и правый над $\mathrm{Mat}(m, K)$. (Для совокупности прямоугольных матриц будем использовать символ $\mathrm{Mat}(n\times m, K)$, сохранив простое обозначение $\mathrm{Mat}(n, K)$ в случае $n=m$.)

(77) Любой (левый или правый) идеал J кольца F естественно является (левым или правым) F-модулем.

(78) В частности, кольцо всегда есть левый (правый) модуль «над самим собой», равно как и над любым своим подкольцом. ▼

Подмодулем E' модуля E над F называется подгруппа $E' \subset E$, замкнутая относительно умножения на элементы кольца F. Например, подмножество матриц с одним или более нулевых столбцов в $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ является левым подмодулем в $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ над $\mathrm{Mat}(n, K)$.

(79) Если E' — подмодуль в F-модуле E, то *фактормодулем* называется аддитивная факторгруппа классов смежности $E/E' = \{(a + E')\}$, умножение которых (для определенности левое) на элементы кольца F задается соотношением

$$x(a + E') = (xa + E').$$

Если отображение $f: E \to C$ модулей C, E над одним и тем же кольцом F является гомоморфизмом аддитивных групп и при этом (скажем, в случае левых модулей)

$$f(xa) = xf(a), \quad x \in F, \quad a \in E, \tag{38}$$

то f называется *гомоморфизмом* модуля E в C (или *F-гомоморфизмом* модулей или *F-линейным отображением*).

Нетрудно проверить, что для гомоморфизма модулей $f: E \to C$ его ядро $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0)$ и образ $\mathrm{Im} f$ — подмодули в E и C соответственно.

(80) *Прямая сумма* (левых) *модулей* $E \oplus E'$ есть прямая сумма аддитивных групп E, E' с умножением на элементы кольца F:

$$x(a, a') = (xa, xa'), \quad x \in F, \quad a \in E, \quad a' \in E'.$$

(81) Модуль $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ можно рассматривать как прямую сумму m экземпляров левых $\mathrm{Mat}(n, K)$-модулей K^n. ▼

(82) Рассмотрим (для определенности левые) F-модули E и E' и множество их F-гомоморфизмов: $\mathrm{Hom}_F(E, E')$. Это множество естественно наделяется структурой абелевой группы (аддитивной): образ суммы гомоморфизмов f и g есть сумма образов:

$$(f + g)(a) \equiv f(a) + g(a) \in E', \quad a \in E, \quad f, g \in \mathrm{Hom}_F(E, E').$$

Введение аналогичным образом умножения на элементы кольца $k \in F$

$$(kf)(a) = kf(a) \in E', \quad a \in E,$$

наделяет $\mathrm{Hom}_F(E, E')$ структурой левого F-модуля, но только для коммутативного F. В противном случае kf, вообще говоря, не является гомоморфизмом левых модулей (см. определение (79)). (Нетрудно заметить, что для двустороннего F-модуля E' аддитивная группа F-гомоморфизмов левых модулей $\mathrm{Hom}_F(E, E')$ — правый F-модуль.) В частном случае $E' = F$ $\mathrm{Hom}_F(E, F) \equiv E^{(*)}$ называется *дуальным модулем*.

(83) Замечание. Любой модуль над коммутативным кольцом F можно считать двусторонним. Пусть, например, E — правый F-модуль. Определим левое умножение: $xa \equiv b = ax$, $a, b \in E$, $x \in F$. Требования (74) здесь выполнены.

(84) Замечание. В некоммутативном случае аналогичная конструкция определяет на E структуру левого модуля, но не над F, а над *противоположным* к F кольцом $F^{\textcircled{|}}$. Последнее совпадает с F как множество и отличается мультипликативной композицией $\textcircled{|}$, которая имеет вид $x \textcircled{|} y = yx$.

(85) Введем теперь тензорное произведение F-модулей E и E'. При этом пусть E — правый, а E' — левый модули. Возьмем прямое произведение множеств (E, E') в качестве порождающего множества некоторой абелевой группы, которую обозначим $E \hat{\oplus} E'$. Если для ее композиции использовать символ $\hat{+}$, то в качестве элементов из $E \hat{\oplus} E'$ мы понимаем всевозможные конечные «суммы»

$$(a_1, b_1) \hat{+} (a_2, b_2) \hat{+} \ldots \hat{-} (a_j, b_j) \hat{-} (a_{j+1}, b_{j+1}) \hat{-} \ldots$$

элементов $(a_i, b_i) \in (E, E')$ и «пустую сумму» в качестве единичного элемента группы $E \hat{\oplus} E'$ (нуля). Рассмотрим множество S элементов вида

$$(a_1 + a_2, b) \hat{-} (a_1, b) \hat{-} (a_2, b),$$
$$(a, b_1 + b_2) \hat{-} (a, b_1) \hat{-} (a, b_2),$$
$$(ax, b) \hat{-} (a, xb), \quad x \in F,$$

— порождающее множество некоторой абелевой подгруппы N в $E \hat{\oplus} E'$.

Факторгруппу $E \hat{\oplus} E'/N$ назовем *тензорным произведением* над F модулей E и E' и обозначим $E \otimes_F E'$. (Когда заведомо известно, о каком кольце идет речь, указывающий на него индекс в значке $\otimes$ обычно опускают.) Посредством $(a \otimes b)$ обозначим образ элемента (a, b) при каноническом гомоморфизме $\varphi : E \hat{\oplus} E' \to E \hat{\oplus} E'/N$.

Построенная абелева группа $E \otimes_F E'$, вообще говоря, никакой модульной структурой над F не обладает. Но если E' — двусторонний модуль, то $E \otimes_F E'$ естественным образом наделяется структурой правого F-модуля:

$$(a \otimes b) x = (a \otimes bx)$$

и левого, если двусторонним является E. Для коммутативного кольца F их тензорное произведение $E \otimes E'$ всегда является F-модулем. ▼

Подмножество $S \subset E$ называется *линейно независимым* над F, если равенство $\sum_{a \in S} x_a a = 0$ возможно лишь при всех $x_a \in F$, равных нулю.

Базисом над F модуля E называется линейно независимое множество S, порождающее модуль E (с помощью аддитивной композиции и умножения на элементы кольца). В этом случае любой элемент $a \in E$ представи́м единственной линейной комбинацией *образующих* $s \in S$ с *коэффициентами* x_s: $a = \sum_{s \in S} x_s s$.

(86) Утверждение. F-модули с равномощными базисами изоморфны. ▼

Если мощность базиса S конечна и равна числу $n(S)$, то минимальное такое n называется *размерностью* (над F) модуля E: $n \equiv \dim E$.

(87) Покажем, что тело кватернионов $\varkappa$ является C-модулем размерности 2. Построим мономорфизм $\sigma: C \to \varkappa$; $\operatorname{Im} \sigma \equiv C_\varkappa$. Такой σ существенно не единствен. Образом $i \in C$ может быть не только любая из базисных мнимых единиц e_k $(k = 1, 2, 3)$, но и их произвольная комбинация при условии $-e_0 = (\sigma(i))^2 = (x^k e_k)^2 = -|\mathbf{x}|^2 e_0$. Возьмем, например, $\sigma(i) = -e_3$. Определим умножение элементов $q \in \varkappa$ на комплексные числа $z = x + iy$:

$$qz \equiv q\sigma(z) = q(e_0 x - e_3 y).$$

Тем самым $\varkappa$ наделяется структурой правого C-модуля. В качестве базиса $\varkappa$ над C можно взять любые два элемента из $\varkappa$, составляющие вместе с e_3 линейно независимое (над C) множество. Для простоты возьмем $S = \{e_0, e_2\}$. Тогда любой $q \in \varkappa$ имеет единственное представление в виде

$$\begin{gathered} q = e_0 z^{(1)} + e_2 z^{(2)}, \quad z^{(\alpha)} = x^{(\alpha)} + i y^{(\alpha)} \in C \quad (\alpha = 1, 2), \\ q^0 = x^{(1)}, \ q^1 = -y^{(2)}, \ q^2 = x^{(2)}, \ q^3 = -y^{(1)}, \end{gathered} \tag{39}$$

и отображение

$$\gamma: q \to \check{q} = \begin{pmatrix} q^0 - iq^3 \\ q^2 - iq^1 \end{pmatrix} \in C^2 \tag{40}$$

взаимно-однозначно. ▼

Эта конструкция позволяет объяснить связь кватернионов с известными читателю матрицами Паули σ_k $(k = 1, 2, 3)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Рассмотрим отображения $L_u: q \to q' = uq$ $(u, q, q' \in \varkappa)$ (левые сдвиги). Эти отображения — гомоморфизмы правого C-модуля $\varkappa$ в себя. Дадим определения связанных с ними понятий.

(88) Гомоморфизмы F-модуля в себя называются *эндоморфизмами* модуля (или *операторами* в E). Как уже было показано, $\mathrm{Hom}_F(E, E')$ всегда является абелевой группой (аддитивной). В рассматриваемом частном случае $\mathrm{Hom}_F(E, E)$ существует мультипликативная композиция — композиция отображений, относительно которой единицей является тождественное отображение $\mathrm{id}: a \to a \in E$. Кольцо $\mathrm{Hom}_F(E, E) \equiv \mathrm{End}_F(E)$ называется *кольцом эндоморфизмов модуля* E (или *кольцом операторов* в E). Элементами группы U обратимых элементов кольца $\mathrm{Hom}_F(E, E)$ являются изоморфизмы E на E (над F) — *автоморфизмы* F-модуля E. Группа $U \equiv \mathrm{Aut}_F E$ называется *группой всех автоморфизмов* модуля, или *общей линейной группой* F-модуля: $\mathrm{Aut}_F E = GL(E, F)$. В частности, множество $L(\varkappa)$ всех левых сдвигов является подкольцом в $\mathrm{End}_C(\varkappa)$, а при $u \neq 0$ L_u — элементы группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}_C \varkappa$ правого C-модуля $\varkappa$. Отметим, что кольцо $L(\varkappa)$ изоморфно кольцу кватернионов $\varkappa$, и их можно не различать.

Вследствие изоморфизма модулей $\varkappa$ и C^2 каждому левому сдвигу L_u однозначно сопоставляется элемент кольца $\mathrm{End}_C(C^2)$. Этот эндоморфизм $d(u)$ можно определить из требования коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \varkappa & \xrightarrow{L_u} & \varkappa \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ C^2 & \xrightarrow[d(u)]{} & C^2 \end{array} . \tag{42}$$

(89) Упражнение. Покажите, что в общем случае n-мерного модуля E над F с базисом $S = \{s_i\}$ коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ F^n & \xrightarrow{d(f)} & F^n \end{array} \tag{43}$$

определяет гомоморфизм $d: \mathrm{End}_F(E) \to \mathrm{Mat}(n, F)$. Здесь $\gamma(a^i s_i) = (a^1, a^2, \ldots, a^n) \in F^n$.

(90) *Гомоморфизм* $L(\varkappa) \to \mathrm{Mat}(2, C)$ — *представление кольца* $L(\varkappa)$. Матрицы представления $\check{e}_\alpha \equiv d(e_\alpha) \in \mathrm{Mat}(2, C)$ для базисных единиц e_α в $\varkappa$ по R-линейности определяют и произвольную $d(u) = u^\alpha e_\alpha$. Их вычисление не представляет труда. Очевидно, что $\check{e}_0 = I$. Вычислим, например, $\check{e}_1$. Сдвиг элементом e_1 есть

$$L_{e_1} q = q' = -q^1 e_0 + q^0 e_1 - q^3 e_2 + q^2 e_3 \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} -q^1 - iq^2 \\ -q^3 - iq^0 \end{pmatrix}$$

(см. (40)). Поскольку

$$\check{q}' = \begin{pmatrix} -q^1 - iq^2 \\ -q^3 - iq^0 \end{pmatrix} = \check{e}_1 \begin{pmatrix} q^0 - iq^3 \\ q^2 - iq^1 \end{pmatrix},$$

то

$$\check{e}_1 = \begin{pmatrix} & -i \\ -i & \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляются и остальные матрицы:

$$\check{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{e}_1 = \begin{pmatrix} & -i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad \check{e}_2 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \check{e}_3 = \begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Как видим, матрицы представления мнимых кватернионных единиц отличаются от эрмитовых матриц Паули (41) множителем: $\check{e}_k = -i\sigma_k$. Следовательно, $\check{e}_k^{\dagger} = -\check{e}_k$. Заметим, что в построенной реализации кватернионному сопряжению соответствует операция эрмитового сопряжения:

$$\left(\check{\bar{q}}\right) = \left(\check{q}\right)^{\dagger}. \tag{45}$$

Действительно, инволюция $\overline{}$ не только отразится на способе вложения $\sigma: C \to \varkappa$ (где она эквивалентна комплексному сопряжению), но и превратит правый C-модуль в левый (в силу свойства (**34**)), что, в свою очередь, приведет к транспонированию матриц представления d.

§ 6. Векторное пространство, дуальное пространство. Билинейное отображение и билинейная форма, полуторалинейная форма. Классические группы. Группы $Sp(1)$, $SU(2)$, $SO(3)$

Рассмотренный случай модулей $\varkappa \approx C^2$ характерен тем, что они определены над кольцом С, которое является одновременно телом (и даже полем). Такого типа модули обладают рядом особенностей.

Модуль над телом F называется *линейным*, или *векторным, пространством* (над F).

Самым важным свойством векторных пространств является возможность всегда снабдить их базисом. Доказательство этого можно найти в [6, 18].

Любые два базиса векторного пространства V над F должны иметь одинаковую мощность (*размерность*) $\dim V = n$.

Подпространством W векторного пространства V (над F) называется подмодуль $W \subset V$, *факторпространством* V/W — фактормодуль. Очевидное свойство их размерностей выражается соотношением

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Прямая сумма и *прямое произведение* векторных пространств также вводятся в соответствии с модульной структурой.

(91) Дуальный модуль $V^{(*)}$ над телом F есть векторное пространство (над F), которое называется *дуальным* к V *пространством*, или *пространством функционалов* $V^{(*)} \equiv \mathrm{Hom}_F(V, F)$, а его элементы — *функционалами* на V. ▼

Простейшим функционалом является скалярное произведение в R^n элемента $x \in R^n$ с фиксированным элементом $a \in R^n$:

$$f_a(x) = (a, x) = \sum_k a^k x^k = \delta_{ik} a^i x^k. \tag{46}$$

Для значений функционалов $f \in V^{(*)}$ употребляют символическое обозначение $f(x) = \langle f, x \rangle$. (Элементы из дуальных пространств $V^{(*)}$, $W^{(*)}$, ... далее будем обозначать через $\overset{(*)}{v}$, $\overset{(*)}{w}$, ...). Следует иметь в виду сделанное в (82) уточнение структуры модуля $\mathrm{Hom}_F(V, F)$, в силу которого, скажем, в случае правого F-пространства V, элементы $\overset{(*)}{v}$ должны принадлежать левому — $V^{(*)}$.

Очевидно, что в случае конечномерного V вследствие F-линейности любой функционал $\overset{(*)}{v}$ однозначно восстанавливается по набору $\{c_i\}$ своих значений на элементах какого-либо базиса $S: c_i = \overset{(*)}{v}(e_i)$. Поэтому $\overset{(*)}{v} \in V^{(*)}$ представим в виде $\overset{(*)}{v} = \sum\limits_k \overset{(*)}{v}_k$, где $\overset{(*)}{v}_k \in V^{(*)}$ можно определить следующим образом: это функционал, принимающий значение $c_k \in F$ на элементе базиса e_k и равный нулю на остальных элементах базиса S, а на всем V определен по F-линейности. Иными словами,

$$\overset{(*)}{v} = c_k \overset{(*)}{e}{}^k, \tag{47}$$

где набор функционалов $\{\overset{(*)}{e}{}^k\}$ уже нормирован:

$$\overset{(*)}{e}{}^k(e_i) = \delta_i^k. \tag{48}$$

(Напомним, что для F, не являющегося полем, коэффициенты c_k в соотношении (47) следует писать слева, если $\overset{(*)}{e}{}^k$ — гомоморфизм правых F-пространств: $V \to F$.)

Линейная независимость набора $\{\overset{(*)}{e}{}^k\}$ в $V^{(*)}$ очевидна.

В силу разложения (47) $\{\overset{(*)}{e}{}^k\}$ порождают все $V^{(*)}$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

(92) **Теорема.** Если векторное пространство V над телом F конечномерно и $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — какой-либо базис в нем, то $\dim V^{(*)} = \dim V = n$ и функционалы $\{\overset{(*)}{e^k} : \overset{(*)}{e^k}(e_i) = \delta_i^k\}$ образуют базис в $V^{(*)}$. ▼

Базис $\{\overset{(*)}{e^k}\} = \overset{(*)}{S} \subset V^{(*)}$ называется *дуальным базисом* (к $S \subset V$).

(93) Следствие. Отображение $V \to V^{(**)} \equiv (V^{(*)})^{(*)}$, сопоставляющее каждому $x \in V$ функционал $\overset{(**)}{x} : \overset{(*)}{v} \to <\overset{(*)}{v}, x>$ на $V^{(*)}$, является изоморфизмом V на $V^{(**)}$. ▼

(94) Элемент тела $\overset{(*)}{v}(x) \equiv <\overset{(*)}{v}, x> \in F$ можно рассматривать как образ пары $(\overset{(*)}{v}, x) \in V^{(*)} \times V$ при отображении f прямого произведения $V^{(*)} \times V \to F : f(\overset{(*)}{v}, x) = <\overset{(*)}{v}, x> = \overset{(*)}{v}(x)$. Не будучи гомоморфизмом даже аддитивных групп $V^{(*)} \times V$ и F, это отображение является гомоморфизмом F-модулей по каждому аргументу $\overset{(*)}{v}$, x (при втором фиксированном), т. е.

$$
\begin{gathered}
f(\overset{(*)}{v}, xa + yb) = \langle \overset{(*)}{v}, xa + yb \rangle = \langle \overset{(*)}{v}, x \rangle a + \langle \overset{(*)}{v}, y \rangle b, \\
\langle a\overset{(*)}{v} + b\overset{(*)}{w}, x \rangle = a \langle \overset{(*)}{v}, x \rangle + b \langle \overset{(*)}{w}, x \rangle, \\
\overset{(*)}{v}, \overset{(*)}{w} \in V^{(*)}, \quad x, y \in V, \quad a, b \in F.
\end{gathered} \tag{49}
$$

Отображения f, обладающие свойством (49), называются *билинейными*. Билинейное отображение $f(V_1 \times V_2) \to F$ общего вида можно задать, если V_1 и V_2 являются пространствами F-линейных функционалов друг на друге. Тогда

$$
f(v_1, v_2) = v_1(v_2), \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2,
$$

что по-прежнему можно записать как $<v_1, v_2>$. (Для определенности будем считать, что V_2 — правое векторное пространство над F.) ▼

Элементы $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ называются *ортогональными относительно* f, если $<v_1, v_2> = 0$. Далее, v_1 называется *ортогональным (относительно f)* к какому-либо подмножеству $S_2 \subset V_2$, если он ортогонален к любому его элементу. Аналогично определяется ортогональность элементов из V_2 к подмножеству $S_1 \subset V_1$.

Заданное формулой (46) скалярное произведение $(x, y) \in R$ элементов x и y из R^n является билинейным отображением f вида $(V \times V) \to F$. Такое билинейное отображение называется *билинейной формой* на векторном пространстве V. Всегда ли такая существует?

При любом фиксированном аргументе, скажем, x, предполагаемая форма $f(x, y)$ определит функционал на V, который будет элементом противоположного относительно V модуля, а именно левого, если V — правый, т. е.

$$f(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle, \tag{50}$$

где $\varphi(x) \in V^{(*)}$. Свойства f относительно другого аргумента зависят от допустимых свойств отображения $\varphi: V \to V^{(*)}$.

Дадим определение. Пусть E — (левое) векторное пространство над телом F, а E' — левое над телом F' и пусть $\sigma: F \to F'$ — изоморфизм. Тогда гомоморфизм $\varphi: E \to E'$ аддитивных структур, такой, что

$$\varphi(ax) = \sigma(a)\varphi(x), \quad a \in F, \quad x \in E,$$

называется *полулинейным отображением* векторных пространств *относительно изоморфизма* σ. (Для правых пространств можно дословно повторить то же.)

В силу замечания (**84**) векторное пространство V мы всегда можем рассматривать как левое над противоположным к F телом $F^{\textcircled{\scriptsize I}}$. Очевидно, что максимально допустимое требование к φ — это требование полулинейности φ относительно изоморфизма $\tau: F^{\textcircled{\scriptsize I}} \to F$. Если τ существует, то он является антиавтоморфизмом тела F (см. (**69**)):

$$\tau(ab) = \tau(b \textcircled{\scriptsize I} a) = \tau(b)\tau(a).$$

(**95**) Пусть V — правое векторное пространство над телом F, допускающим антиавтоморфизм $\tau: a \to a^{\tau} \in F$, и $\varphi: V \to V^{(*)}$ — полулинейное отображение относительно изоморфизма $\tau: F^{\textcircled{\scriptsize I}} \to F$. Отображение $f: (V \times V) \to F$, задаваемое соотношением (50), называется *полуторалинейной формой* на V *относительно антиавтоморфизма* τ. Основные свойства полуторалинейной формы f выражаются соотношениями

$$\begin{gathered} f(x_1 a_1 + x_2 a_2, y) = a_1^{\tau} f(x_1, y) + a_2^{\tau} f(x_2, y), \\ f(x, y_1 a_1 + y_2 a_2) = f(x, y_1) a_1 + f(x, y_2) a_2, \\ a_1, a_2 \in F, \quad x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V. \end{gathered} \tag{51}$$

В частном случае, когда $F = K$ — поле и (анти)автоморфизм τ тождественный, форма f является билинейной.

Обратимся к полулинейному отображению φ. Пусть $S = \{e_i\}$ — базис в правом векторном пространстве V и $S^{(*)} = \{\overset{(*)}{e^k}\}$ — дуальный базис. Значения $\varphi(e_i)$ разложим по базису $S^{(*)}$:

$$\varphi(e_i) = f_{ik} \overset{(*)}{e^k}. \tag{52}$$

Совокупность коэффициентов этого разложения $f_{ik} = \langle \varphi(e_i), e_k \rangle = f(e_i, e_k)$ образует *матрицу* $\hat{f}$ *полуторалинейной* *формы* f в базисе S пространства V. В ее терминах значение формы на векторах $x = e_i x^i$, $y = e_k y^k$, $x^i, y^k \in F$, записывается так:

$$f(x, y) = (x^i)^\tau f_{ik} y^k = x^{\tau T} \hat{f} y \tag{53}$$

(где элементы x, y отождествлены с вектор-столбцами своих координат).

(96) Можно показать (см., например [13, § 1.6]), что при условии $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(y, x) = 0$ антиавтоморфизм τ есть инволюция, а для самой формы $f(x, y)$ существуют только две возможности:

$$f(x, y) = (f(y, x))^\tau, \tag{54}$$

$$f(x, y) = -(f(y, x))^\tau. \tag{55}$$

Если выполняется соотношение (54), форма называется *эрмитовой (относительно инволюции* τ). Обозначим ее $f(x, y) = \langle x \cdot y \rangle$. Если справедливо (55) — *антиэрмитовой.* Такую форму обозначим через $\langle x * y \rangle$.

Если в условиях (54), (55) $\tau = \mathrm{id}$ (что возможно лишь в случае коммутативного тела $F = K$, т. е. поля), то форма называется *симметричной* ($f = (x \cdot y)$) и *антисимметричной* ($f = (x * y)$) соответственно.

Форму f далее будем считать *невырожденной* (т. е. такой, что вектор x, ортогональный всему V, есть $x = 0$). В качестве тела F будем рассматривать только поля R и C и тело кватернионов $\varkappa$.

(97) Замечание. Если на векторном пространстве V с базисом $\{e_i\} = S$ задана билинейная невырожденная форма f, то бывает удобно в пространстве V ввести *дуальный базис* $\{e^i\} = S^{(f)}$ *относительно формы* f как такой набор векторов $e^i \in V$, что

$$f(e^i, e_j) = \delta^i_j. \tag{56}$$

Подчеркнем, что $e^i \in V$. В $V^{(*)}$ также вводится *дуальный базис* $S^{(*)}_{(f)} = \{\overset{(*)}{e}{}^i_{(f)}\}$ *относительно формы* f как набор функционалов $\overset{(*)}{e}{}^i_{(f)}$, определяемых формулой

$$\overset{(*)}{e}{}^i_{(f)}(x) = f(e^i, x). \tag{57}$$

(98) Формы f на V — инструмент для определения совокупности групп, которые называются *классическими.* А именно, совокупность автоморфизмов $u : V \to V$, таких, что

$$f(u(x), u(y)) = f(x, y), \quad x, y \in V, \tag{58}$$

является группой и называется *группой унитарных преобразований пространства* V (над F) *относительно формы* f (или *унитарной группой* V *относительно* f). Обозначим ее $U_f(n, F)$. Все классические группы, кроме пяти исключительных групп Картана, являются унитарными группами для стандартных форм при $F = R,\ C,\ \varkappa$.

(99) В частности, если форма f задана в некотором базисе S единичной матрицей $\hat{f} = I_n$, то ее унитарные группы над $F = R, C, \varkappa$ называются *ортогональной, унитарной, симплектической* соответственно.

Обозначения этих групп приведены в табл. 1.

Таблица 1

F	R	C	$\varkappa$	Ω
$U_f(n, F)$	$O(n)$	$U(n)$	$Sp(n)$	$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$

(100) В последнем столбце таблицы указывается связь исключительных групп Картана с алгеброй октав*) (октонионов, или чисел Кэли) Ω, которая замыкает серию из четырех алгебр с делением R, C, $\varkappa$, Ω.

Указанные в нем группы, как и $U_f(n, F)$, являются группами автоморфизмов «Ω-модулей». Метод применения этих структур в теории элементарных частиц обсуждается в [45]. ▼

*) *Алгебра октав* Ω — это модуль над $\varkappa$ размерности 2 с мультипликативной композицией. Пусть $\{e_0, e_7\}$ — базис в Ω над $\varkappa$, т. е.

$$\Omega = \{\omega = e_0 q^{(1)} + e_7 q^{(2)},\quad q^{(1)},\ q^{(2)} \in \varkappa\}.$$

Отождествим тело $\varkappa$ с его образом при вложении $\sigma : \varkappa \to \Omega$ вида $q \to \omega = e_0 q$ и выберем базис в Ω над $R : \{e_\mu \equiv \sigma(e_\mu),\ e_7 = e_7 e_0 = e_0 e_7,\ e_{3+i} = e_7 e_i\ (\mu = 0, 1, 2, 3,\ i = 1, 2, 3)\}$. Искомая композиция задается на базисе e_A ($A = 0, 1, \ldots, 7$) (на всей алгебре Ω определяется по R-линейности):

$$e_A e_B = -\delta_{AB} + f_{ABC} e_C, \tag{59}$$

где *полностью антисимметричный объект* f_{ABC} однозначно фиксируется следующими ненулевыми компонентами:

$$f_{123} = f_{246} = f_{435} = f_{367} = f_{651} = f_{572} = f_{714} = 1. \tag{60}$$

Октонионное сопряжение $\omega = \omega^0 e_0 + \omega^A e_A \to \omega^\square = \omega^0 e_0 - \omega^A e_A$ ($A = 1, 2, \ldots, 7$) обладает свойством

$$(\omega' \omega)^\square = \omega^\square \omega'^\square,$$

которое вместе с *альтернативностью* (т. е. *ослабленной ассоциативностью*)

$$(\omega' \omega)\omega = \omega'(\omega\omega),\quad \omega'(\omega'\omega) = (\omega'\omega')\omega$$

обеспечивает *мультипликативность невырожденной нормы* $N(\omega)$

$$N^2(\omega) = \omega^\square \omega \in e_0 R$$

и существование обратного элемента для любой октавы $\omega \neq 0$.

Указанные в табл. 1 группы $U_f(n, F)$ можно рассматривать как группы матриц над соответствующими телами. (Совокупность же матриц над алгеброй Ω группы образовать не может, поскольку умножение таких матриц не является ассоциативным!)

(101) Упражнение. Покажите, что в случае n-мерного векторного пространства V над F гомоморфизм кольца $\mathrm{End}_F(V)$ в $\mathrm{Mat}(n, F)$, определяемый соотношениями (43), является изоморфизмом. ▼

В свою очередь группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}_F(V)$ изоморфна $GL(n, F)$ — группе обратимых элементов в $\mathrm{Mat}(n, F)$. Следовательно, группу $U_f(n, F)$ можно отождествить с подгруппой в $GL(n, F)$.

(102) Форма f определяется своей матрицей $\hat{f}$ в каком-либо базисе. Классификация форм сводится к приведению матрицы формы к стандартному виду. Решение последней задачи (по крайней мере для $F = R$, C) известно читателю из курса линейной алгебры. Рассмотрим формы, соответствующие матрицам стандартного вида. Для эрмитовой формы: 1) $\hat{f} = I_n$; 2) $\hat{f} = I_{p,q}$, $p + q = n$, — диагональная матрица *сигнатуры* (p, q), т. е. p элементов (-1) и q — $(+1)$. Названия групп $U_f(n, F)$ при $\hat{f} = I_{p,q}$ те же, что и в случае $\hat{f} = I_n$ (см. **(99)**), только содержат приставку «псевдо» и указание сигнатуры.

Опустим случай нетривиальной сигнатуры у симметричной формы, поскольку для $F = R$ она совпадает с эрмитовой, при $F = C$ матрица $I_{p,q}$ приводится к I_n, а при $F = \varkappa$ билинейных форм не существует. Таким образом, симметричной форме $(\cdot)$ соответствует только одна новая для нас группа: при $\hat{f} = I_n, F = C$ унитарная группа $U_f(n, C) = O(n, C)$ и называется *комплексной ортогональной группой*.

Для антиэрмитовой формы над R: $\langle , \rangle = (*)$ (она невырожденна лишь при четной размерности $n = 2m$) в качестве стандартной матрицы возьмем *симплектическую* $\hat{f} = F_{2m}$:

$$F_{2m} = \begin{pmatrix} & I_m \\ -I_m & \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Соответствующая группа $U_f(n, R) = Sp(n, R)$ называется *вещественной симплектической*. В случае антисимметричной формы $(*)$ над C с той же матрицей $\hat{f} = F_{2m}$ группа называется *комплексной симплектической*: $U_f(n, C) \equiv Sp(n, C)$.

Антиэрмитову над C, но не билинейную форму $(f = \langle * \rangle)$ можно считать отличающейся от эрмитовой множителем i. Здесь новых ограничений не возникает, и мы имеем дело с уже встречавшейся группой $U(p, q)$.

Наконец, матрицу антиэрмитовой формы $\langle * \rangle$ над $\varkappa$ возьмем в виде $\hat{f} = \mathbf{i} I_n$, где $\mathbf{i}$ — некоторый чисто мнимый кватернион. Определяемую этой формой группу иногда называют *ортосимплектической*. Мы обозначим ее $O^{*}(2n)$.

Полученную классификацию представим в виде табл. 2. При этом в группах над R и C удобно выделить *специальные* подгруппы наложением условия $\det u = 1$ на их матрицы.

Таблица 2

<table>
<tr><th>$F \backslash f$</th><th>$\langle\cdot\rangle_{p,q}$</th><th>$\langle\cdot\rangle_n$</th><th>$(\cdot)$</th><th>$\langle * \rangle$</th><th>$(*)$</th></tr>
<tr><td>R</td><td>$SO(p, q)$</td><td colspan="2">$SO(n)$</td><td colspan="2">$Sp(n, R)$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$SU(p, q)$</td><td>$SU(n)$</td><td>$SO(n, C)$</td><td>$SU(p, q)$</td><td>$Sp(n, C)$</td></tr>
<tr><td>$\varkappa$</td><td>$Sp(p, q)$</td><td>$Sp(n)$</td><td>—</td><td>$SO^{*}(2n)$</td><td>—</td></tr>
</table>

(**103**) Рассмотрим группы в последней строке табл. 2. Выясним, как соотносятся они с предыдущими. С этой целью отметим, что изоморфизм C-модулей $\gamma : \varkappa \to C^2$ (см. (40)) влечет за собой изоморфизм пространств $\varkappa^n$ и C^{2n} (над C). Сохраним за ним обозначение γ и каждому вектору $x \in \varkappa^n$ с компонентами $x^i = e_0 X^i_{(1)} + e_2 X^i_{(2)}$ сопоставим $X \in C^{2n}$, компоненты которого

$$X^i = X^i_{(1)},$$
$$X^{i+n} = X^i_{(2)} \quad (i \leqslant n). \tag{62}$$

Тогда требование коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \varkappa^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\gamma"'] & \varkappa^n \arrow[d, "\gamma"] \\ C^{2n} \arrow[r, "\check{u}"] & C^{2n} \end{tikzcd} \tag{63}$$

определяет мономорфизм каждой из указанных групп матриц над $\varkappa$ в $GL(2n, C)$. Какие подгруппы $GL(2n, C)$ являются образами $Sp(p, q)$, $Sp(n)$ и $SO^{*}(2m)$?

Рассмотрим, например, форму, определяющую группу $Sp(p, q)$. Ее значение на элементах x, y можно представить в виде

$$\langle x \cdot y \rangle_{p,q} = \bar{x}^{\mathrm{T}} \hat{I}_{p,q}\, y = \left(X_1^{\dagger}\, e_0 - X_2^{\dagger}\, e_2\right) \hat{I}_{p,q} \left(e_0 Y_{(1)} + e_2 Y_{(2)}\right).$$

Раскрывая скобки и вынося e_2 влево (при этом необходимо воспользоваться очевидным соотношением $z e_2 = e_2 z^*, z \in C$), получаем

$$\langle x \cdot y \rangle_{p,\,q} = e_0 \left(X^{+}_{(1)} \hat{I}_{p,\,q} Y_{(1)} + X^{+}_{(2)} \hat{I}_{p,\,q} Y_{(2)} \right) -$$
$$- e_2 \left(X^{\mathrm{T}}_{(1)} \hat{I}_{p,\,q} Y_{(2)} - X^{\mathrm{T}}_{(2)} \hat{I}_{p,\,q} Y_{(1)} \right) = e_0 X^{+} \hat{I}_{2p,\,2q} Y - e_2 X^{\mathrm{T}} \hat{J}_{p,\,q} Y, \tag{64}$$

где через $\hat{J}_{p,q}$ обозначаем $2n \times 2n$ матрицу

$$\hat{J}_{p,\,q} = \begin{pmatrix} & I_{p,\,q} \\ -I_{p,\,q} & \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Относительно преобразований u из группы $Sp(p, q)$ инвариантны все компоненты кватерниона $<x \cdot y>_{p,q}$, и в частности обе комплексные компоненты в соотношении (64). Таким образом, индуцированный диаграммой (63) автоморфизм $\check{u} \in GL(2n, C)$ пространства C^{2n} является унитарным сразу относительно двух форм. Нетрудно проверить, что в свою очередь любому такому элементу $\check{u} \in GL(2n, C)$ соответствует матрица u симплектической группы.

Отметим, кроме того, что умножение на (—1) p элементов базиса приводит матрицу второй формы $J_{p,q}$ к F_{2n} (первая при этом не меняется). Следовательно, (псевдо)симплектическую группу $(Sp(p, q))$ $Sp(n)$ можно определить как пересечение комплексной симплектической группы $Sp(2n, C)$ с (псевдо)унитарной.

(104) Упражнение. Определите, пересечению каких матричных групп над C изоморфна $SO^{*}(2m)$.

(105) Рассмотрим простейший случай симплектической группы $Sp(1)$. Ее элементами являются кватернионы u, такие, что при сдвиге $x \to x' = ux$ выполняется $<x' \cdot y'> = <x \cdot y> = \bar{x}y$. Таким образом, группа $Sp(1)$ изоморфна группе унимодулярных кватернионов: $\bar{u}u = e_0$. В представлении d (см. диаграмму (42)) им соответствуют матрицы $\check{u} = d(u) = u^{\alpha}\check{e}_{\alpha}$, удовлетворяющие в силу соотношения (45) условию унитарности

$$\check{u}^{+} \check{u} = I.$$

Кроме того, определитель матрицы

$$\check{u} = \begin{pmatrix} u^0 - iu^3 & -i(u^1 - iu^2) \\ -i(u^1 + iu^2) & u^0 + iu^3 \end{pmatrix} \tag{66}$$

также равен квадрату модуля кватерниона $u : \det \check{u} = |u|^2 = 1$. Отсюда следует, что группа $Sp(1)$ изоморфна группе $SU(2)$.

(106) Упражнение. Покажите, что: 1) любая унитарная матрица вида (66) является унитарной и относительно симплектической формы в C^2; 2) утверждению 1) эквивалентно соотношение

$$\check{u} F_2 = F_2 \check{u}^*, \quad \check{u} \in SU(2). \tag{67}$$

(107) В заключение параграфа остановимся на связи этих групп с чрезвычайно важной для нас группой $SO(3)$.

Предварительно укажем некоторые полезные соотношения:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{68}$$
$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\sigma_0, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где матрица $\sigma_0 = \check{e}_0 = I$, а скобками $[,]$ и $\{,\}$ мы обозначили коммутатор и антикоммутатор матриц соответственно. (Далее кватернионы x, u и представляющие их матрицы $\check{x}$, $\check{u}$ не будем различать и опустим значок « $\vee$ ».)

Матрицы σ_k и e_k — бесследовые, поэтому

$$\operatorname{Tr} u = 2u^0.$$

Тогда компоненты кватерниона выражаются через матричные элементы следующим образом:

$$u^\mu = {}^1/_2 \operatorname{Tr}\left(\overline{e}^\mu u\right), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{69}$$

В частности,

$$N^2(u) = \left(\overline{u} u\right)^0 = {}^1/_2 \operatorname{Tr}\left(\overline{u} u\right).$$

Простое обобщение этого соотношения приводит к билинейной форме на $\varkappa$ как на R-модуле:

$$(x \cdot y) = {}^1/_2 \operatorname{Tr}\left(\overline{x} y\right), \quad x, y \in \varkappa. \tag{70}$$

Построим сужение этой формы на чисто мнимые кватернионы $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = -{}^1/_2 \operatorname{Tr}(\mathbf{x}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} I \mathbf{y}$ и рассмотрим преобразования вида

$$R_u : \mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \overline{u}\mathbf{x}u, \quad u \in Sp(1) = SU(2). \tag{71}$$

Они не выводят нас из подпространства R^3 мнимых кватернионов

$$\operatorname{Tr} \mathbf{x}' = \operatorname{Tr}\left(\overline{u}\mathbf{x}u\right) = \operatorname{Tr} \mathbf{x} = 0.$$

Отображение $u \to R_u$ — гомоморфизм группы $SU(2)$ в группу $O(3)$, поскольку преобразования R_u очевидно оставляют инвариантной форму $(\cdot)$ в R^3. Установим, чему равен определитель матрицы R_{ik} преобразования R_u:

$$x'^i = R^i_k x^k, \tag{72}$$

$$R^i_k = {}^1/_2 \operatorname{Tr}\left(\overline{e^i}\, \overline{u} e_k u\right) = {}^1/_2 \operatorname{Tr}\left(\sigma_i \overline{u} \sigma_k u\right). \tag{73}$$

С этой целью рассмотрим преобразование базисного репера $\{e_k\} \to \{e'_k\}$ или $\{\sigma_k\} \to \{\sigma'_k\}$:

$$\sigma'_k = \bar{u}\sigma_k u = R_{km}\sigma_m.$$

Закон композиции $\{e'_k\}$ очевидно такой же, как и для $\{e_k\}$:

$$[\sigma'_{i_1}, \sigma'_{i_2}] = 2i\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}\sigma'_{i_3}.$$

В левой части имеем

$$[\sigma'_{i_1}, \sigma'_{i_2}] = R_{i_1 k_1} R_{i_2 k_2} [\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}] = R_{i_1 k_1} R_{i_2 k_2} 2i\varepsilon_{k_1 k_2 k_3}\sigma_{k_3} =$$
$$= R_{i_1 k_1} R_{i_2 k_2} 2i\varepsilon_{k_1 k_2 k_3} (R^{-1})_{k_3 i_3}\sigma'_{i_3}.$$

Воспользовавшись ортогональностью R, приходим к соотношению

$$R_{i_1 k_1} R_{i_2 k_2} R_{i_3 k_3} \varepsilon_{k_1 k_2 k_3} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}.$$

Отсюда следует, что определитель R равен $+1$.

Таким образом, отображение $u \to R_u$ действительно является гомоморфизмом группы $SU(2)$ в $SO(3)$. Покажем, что оно является эпиморфизмом.

Рассмотрим унимодулярные кватернионы вида

$$u = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!, \quad z \in \varkappa. \tag{74}$$

Отсюда следует, что обратный элемент $u^{-1} = \exp(-z)$. Условие $\bar{z} = -z$ унимодулярности u означает, что кватернион z — чисто мнимый, т. е. $z = z^k e_k = \mathbf{z}$ и $\mathbf{z}^2 = -\bar{\mathbf{z}}\mathbf{z} = -|\mathbf{z}|^2 e_0$, что позволяет без труда свести матричный ряд (74) к обычным функциям:

$$u = \exp(z^k e_k) = e_0 \cos|\mathbf{z}| + \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}\sin|\mathbf{z}|. \tag{75}$$

Отсюда следует, что любой унимодулярный кватернион представим в виде экспоненты.

(**108**) Упражнение. Покажите, что элементу группы $SU(2)$

$$u(\mathrm{n}, \omega) = \exp\left(\frac{\omega}{2} n^k e_k\right), \quad |n^k e_k| = 1, \tag{76}$$

соотношения (71), (73) сопоставляют вращение вокруг оси $\mathbf{n}$ на угол ω.

Указание. Определение угла поворота можно свести к вычислению величины $(\mathbf{x}'_{(1)}\cdot\mathbf{x}_{(1)})$, где $\mathbf{x}_{(1)}$ — какой-либо вектор, ортогональный направлению $\mathbf{n}$ в R^3.

(**109**). В (**12**), (**13**) мы установили, что вращения $g_{\mathbf{n}}(\omega)$ $(0 \leqslant \omega \leqslant \pi)$ исчерпывают все преобразования из группы $SO(3)$. Таким образом, гомоморфизм (71) $SU(2) \to SO(3)$ является отображением «на», т. е. эпиморфизмом. Ядро этого отображения состоит из элементов $u = \pm e_0$.

Наконец, отметим, что при параметризации (76) пространство параметров группы $SU(2)$ является шаром радиусом 2π, в два раза большим по сравнению со случаем группы $SO(3)$ (см. (**13**)). Напомним, что в последнем случае при $\omega = \pi$ мы должны были «сшить» диаметрально противоположные точки сферы. В группе $SU(2)$

$$u(\mathbf{n},\ \omega = \pi) = n^k e_k,$$

т. е. соответствующие точки различаются на элемент центра $(-e_0)$. Граница группы $SU(2)$ в пространстве параметров также «сшивается», но принципиально иным образом — стягивается в одну точку: $u(\mathbf{n}, 2\pi) = -e_0$ (см. (75)).

§ 7. Алгебра над полем: ассоциативная, Ли, $T(V)$, $S(V)$, $\wedge(V)$. Алгебра Клиффорда и спинорная группа. Алгебра Дирака

В гл. 1 мы уже рассматривали алгебры Ли. Они представляют собой частный случай более общей конструкции.

(**110**) *Алгебра A над полем K* это:

1) векторное пространство A над K;

2) снабженное мультипликативным законом композиции;

3) дистрибутивным (справа и слева): $(x+y)z = xz + yz$, $z(x+y) = zx + zy$, x, y, $z \in A$;

4) K-билинейным $(kx)y = k(xy) = x(ky)$, $k \in K$, x, $y \in A$. ▼

Для мультипликативной композиции, т. е. отображения $A \times A \to A$, общепринято также обозначение μ $(\mu(x,y) \in A)$.

В частном случае, если умножение μ ассоциативно, то алгебра A называется *ассоциативной*. Если в A содержится единичный элемент 1 относительно этой композиции, то такая ассоциативная алгебра является кольцом.

Неассоциативная алгебра с антисимметричиым законом композиции $(\mu(x,y) = -\mu(y,x))$, удовлетворяющим тождеству Якоби

$$\mu(x,\ \mu(y,\ z)) + \mu(y,\ \mu(z,\ x)) + \mu(z,\ \mu(x,\ y)) = 0,$$

называется *алгеброй Ли*.

(**111**) Отметим, что любую ассоциативную алгебру $(A, \mu_{ас})$ можно снабдить структурой алгебры Ли $(A, \mu_{Ли})$, определив композицию

$$\mu_{Ли}(x,\ y) = \mu_{ас}(x,\ y) - \mu_{ас}(y,\ x). \tag{77}$$

Например, кольцо $\mathrm{Mat}(n, K)$ — ассоциативная алгебра. Взяв в качестве композиции матричный коммутатор $\mu_{Ли}(\cdot,\cdot) = [\cdot,\cdot]$, мы наделяем $\mathrm{Mat}(n, K)$ структурой алгебры Ли. Для ее обозначения используем символ $gl(n, K)$. По аналогии с $gl(n, K)$ лиев закон композиции в общем случае также обычно обозначают $[,]$ и называют *коммутатором.* ▼

Подалгеброй алгебры (A, μ) называется подпространство $V \subset A$, замкнутое относительно умножения μ. Например, в $gl(n, R)$ совокупность $so(n)$ антисимметричных матриц является подалгеброй.

Подалгебра $J \subset A$ называется *левым (правым) идеалом,* если $\mu(A, J) \subset J$ $(\mu(J, A) \subset J)$, и *двусторонним идеалом*, когда выполнены оба условия. В случае алгебры Ли все три понятия эквивалентны, и мы используем понятие просто «идеал».

(112) *Факторалгеброй* A/J называется факторпространство A/J по двустороннему идеалу J с законом композиции μ'

$$\mu'(x + J,\ y + J) = \mu(x,\ y) + J. \tag{78}$$

Гомоморфизмом f алгебры (A, μ) в (A', μ') над полем K называется гомоморфизм векторных пространств $f: A \to A'$, при котором

$$f(\mu(x,\ y)) = \mu'(f(x),\ f(y)), \quad x,\ y \in A.$$

Сформулировать свойства *ядра* и *образа* гомоморфизма алгебр мы предлагаем читателю самостоятельно. ▼

Итак, алгебра — это векторное пространство над полем с билинейным и дистрибутивным законом композиции.

С произвольным векторным пространством V над полем K естественным образом связываются некоторые алгебраические конструкции. Прежде всего это *тензорная алгебра над* V.

Определим тензорное произведение $V \otimes V'$ векторных пространств V и V' как тензорное произведение K-модулей (см. (85)). Тогда $V \otimes V'$ — также K-векторное пространство.

(113) Упражнение. Покажите, что совокупность элементов вида $\{e_i \otimes e'_j\}$, где e_i и e'_j — элементы базиса (соответственно в V и V'), является базисом в $V \otimes V'$.

(114) Упражнение. Докажите, что $(V \otimes V') \otimes V'' = V \otimes (V' \otimes V'')$.

(115) Будем считать поле K тензорным пространством над V ранга 0, само векторное пространство — тензорным пространством ранга 1 и по индукции определим тензорное пространство над V ранга r $T^{(r)}(V)$ как тензорное произведение

$$T^{(r)}(V) = V \otimes T^{(r-1)}(V).$$

Образ элемента $(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(r)})$ при каноническом гомоморфизме $(V \times V \times \ldots \times V) \to V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ по-прежнему обозначим через $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \ldots \otimes x_{(r)}$.

Произвольные элементы $T^{(r)}(V)$ (называемые *контравариантными тензорами ранга* r) однозначно представляются в виде

$$T^{(r)}(V) \ni x = x^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r},$$

где $\{e_i\}$ — элементы базиса в V и коэффициенты $x^{i_1 \dots i_r} \in K$. Эти коэффициенты называются *компонентами тензора.*

Рассмотрим прямую сумму векторных пространств (над K)

$$T(V) = \bigoplus_r T^{(r)}(V).$$

Определим на K-векторном пространстве $T(V)$ умножение, задав его на тензорах $x \in T^{(r)}(V)$, $y \in T^{(s)}(V)$:

$$x \otimes y = x^{i_1 \dots i_r} y^{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s} \in T^{(r+s)}(V)$$

и распространив на все $T(V)$ по линейности. $(T(V), \otimes)$ — (ассоциативная) алгебра над K, называемая (*контравариантной*) *тензорной алгеброй над* V.

Аналогичным образом построим тензорное произведение $T^{(s)}(V^{(*)})$ s экземпляров дуального к V пространства $V^{(*)}$, элементы которого

$$\overset{(*)}{x} = x_{i_1 i_2 \dots i_s} \overset{(*)}{e}{}^{i_1} \otimes \overset{(*)}{e}{}^{i_2} \otimes \dots \otimes \overset{(*)}{e}{}^{i_s}$$

— *ковариантные тензоры ранга* s. Прямая сумма

$$T(V^{(*)}) = \bigoplus_s T^{(s)}(V^{(*)})$$

также является *тензорной алгеброй над* V—*ковариантной.*

(116) Замечание. Обратим внимание читателя на то, что в литературе можно встретить эквивалентное определение ковариантного тензора ранга s как *полилинейной формы* на $V^s = V \times V \times \dots \times V$. Множество $\tau^{(s)}$ полилинейных форм $\overset{(*)}{a}$: $V \times V \times \dots \times V \to K$ есть множество функционалов на V^s, удовлетворяющих условию линейности по каждому аргументу. Контравариантный тензор также можно определить как полилинейную форму на $V^{(*)} \times V^{(*)} \times \dots \times V^{(*)}$.

(117) Наконец, обратимся к смешанной тензорной алгебре над V, которая порождается всевозможными тензорными произведениями элементов из $T^{(r)}(V)$ и $T^{(s)}(V^{(*)})$. Так возникают *смешанные тензоры,* например, вида

$$x = x^{i_1 \cdot \cdot k_1 k_2}_{\cdot j_1 j_2 \cdot \cdot} e_{i_1} \overset{(*)}{e}{}^{j_1} \overset{(*)}{e}{}^{j_2} e_{k_1} e_{k_2}$$

(значок $\otimes$ здесь для краткости опускаем).

Отметим, что тензоры с компонентами, скажем, $x^{i \cdot k}_{\cdot j \cdot}$ и $y^{ik \cdot}_{\cdot \cdot j}$, вообще говоря, принадлежат различным K-векторным пространствам. Смешанная тензорная алгебра $T(V, V^{(*)})$ является прямой суммой всех таких пространств.

Возможна и несколько иная конструкция. Она основана на вытекающем из утверждения (86) изоморфизме пространств, например, с базисами $\{e_i \otimes \overset{(*)}{e^j} \otimes e_h\}$ и $\{e_i \otimes e_h \otimes \overset{(*)}{e^j}\}$. Определим *смешанную тензорную алгебру* $T(V) \otimes T(V^{(*)})$ как прямую сумму пространств

$$T(V) \otimes T(V^{(*)}) = \underset{r,\, s}{\dotplus} T^{(r)}(V) \otimes T^{(s)}(V^{(*)}),$$

задав умножение $\otimes$ их элементов (*смешанных тензоров ранга* $r+s$) соотношением

$$\left(x^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \overset{(*)}{e}{}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \overset{(*)}{e}{}^{j_s}\right) \otimes$$

$$\otimes \left(y^{k_1 \ldots k_{r'}}{}_{m_1 \ldots m_{s'}} e_{k_1} \otimes \ldots \otimes e_{k_{r'}} \otimes \overset{(*)}{e}{}^{m_1} \otimes \ldots \otimes \overset{(*)}{e}{}^{m_{s'}}\right) =$$

$$= x^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} y^{k_1 \ldots k_{r'}}{}_{m_1 \ldots m_{s'}} \underbrace{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{k_{r'}}}_{r+r'} \otimes \underbrace{\overset{(*)}{e}{}^{j_s} \otimes \ldots \otimes \overset{(*)}{e}{}^{m_{s'}}}_{s+s'}. \ \blacktriangledown$$

Ранее мы рассматривали билинейное отображение $f: V^{(*)} \times \times V \to K$ (см. (94)): $f(\overset{(*)}{v}, x) = \overset{(*)}{v}(x)$, $\overset{(*)}{v} \in V^{(*)}$, $x \in V$. Его можно продолжить на $V^{(*)} \otimes V \to K$ (или $V \otimes V^{(*)} \to K$) : $f(\overset{(*)}{v} \otimes x) = \overset{(*)}{v}(x)$ (или $f(x, \overset{(*)}{v}) = \overset{(*)}{v}(x)$). В общем случае такая операция является гомоморфизмом смешанного тензорного пространства ранга $r+s$ в пространство ранга $(r-1)+(s-1)$ и называется *сверткой*:

$$f\left(\overset{(*)}{e}{}^{j_1} \otimes \ \ldots \ \underbrace{\otimes e_{i_\alpha} \otimes \ \ldots \ \otimes \overset{(*)}{e}{}^{k_\gamma}}\otimes \ \ldots\right) = \overset{(*)}{e}{}^{k_\gamma}(e_{i_\alpha})\, e^{j_1} \otimes \ldots$$

(соединенные скобкой тензорные сомножители в правой части отсутствуют). При этом компоненты тензора получаются свертыванием компонент исходного тензора по двум соответствующим значкам (поскольку $\overset{(*)}{e}{}^{k_\gamma}(e_{i_\alpha}) = \delta^{k_\gamma}_{i_\alpha}$).

(118) Рассмотрим некоторые свойства композиций $\oplus$ и $\otimes$ относительно операторов (эндоморфизмов) в векторных пространствах. Пусть в пространствах V_1 и V_2 заданы операторы $u_1 \in \mathrm{End}_K(V_1) \approx \mathrm{Mat}(n_1, K)$ и $u_2 \in \mathrm{End}_K(V_2) \approx \mathrm{Mat}(n_2, K)$. Тогда операторы $u_{1 \oplus 2} \equiv u_1 \oplus u_2 \in \mathrm{End}_K(V_1 \oplus V_2)$ и $u_{1 \otimes 2} \equiv u_1 \otimes u_2 \in \in \mathrm{End}_K(V_1 \otimes V_2)$, задаваемые соотношениями

$$u_{1 \oplus 2} : (x_1, \ x_2) \to (u_1 x_1, \ u_2 x_2),$$
$$u_{1 \otimes 2} : x_1 \otimes x_2 \to u_1 x_1 \otimes u_2 x_2, \quad x_i \in V_i,$$

называются соответственно *прямой суммой* и *тензорным произведением операторов* u_1 и u_2.

(119) Упражнение. Покажите, что при подходящем выборе базисов в пространствах V_1, V_2, $V_1 \oplus V_2$ и $V_1 \otimes V_2$ матрицам операторов $\check{u}_{1\oplus 2}$ и $\check{u}_{1\otimes 2}$ можно придать вид

$$\check{u}_{1\oplus 2} = \begin{pmatrix} \check{u}_1 & \\ & \check{u}_2 \end{pmatrix},$$

$$\check{u}_{1\otimes 2} = \begin{pmatrix} (\check{u}_1)^1_1 \check{u}_2 & (\check{u}_1)^1_2 \check{u}_2 & \dots & (\check{u}_1)^1_{n_1} \check{u}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\check{u}_1)^{n_1}_1 \check{u}_2 & & \dots & (\check{u}_1)^{n_1}_{n_1} \check{u}_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\check{u}_{1\otimes 2} = \begin{pmatrix} \check{u}_1 (\check{u}_2)^1_1 & \check{u}_1 (\check{u}_2)^1_2 & \dots & \check{u}_1 (\check{u}_2)^1_{n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \check{u}_1 (\check{u}_2)^{n_2}_1 & & \dots & \check{u}_1 (\check{u}_2)^{n_2}_{n_2} \end{pmatrix},$$

где $\check{u}_i$ — матрица оператора $u_i (i = 1, 2)$. ▼

Вернемся к рассмотрению тензорной алгебры $T(V)$. Нетрудно проверить, что ее подалгебра $\sigma(V)$, порожденная элементами вида $t \otimes (x \otimes y - y \otimes x)$, $x, y \in V$, $t \in T(V)$, является двусторонним идеалом. Идеалом будет также подалгебра $\alpha(V)$, порожденная элементами $t \otimes (x \otimes y + y \otimes x)$, $x, y \in V$, $t \in T(V)$ (и также двусторонним).

(120) Упражнение. Покажите, что $T(V)$ представимо прямой суммой: 1) $T(V) = S(V) \oplus \sigma(V)$,

2) $T(V) = \wedge(V) \oplus \alpha(V)$, где $S(V)$ (соответственно $\wedge(V)$) — прямая сумма пространств тензоров x, таких, что их компоненты $x^{\dots i_\alpha \dots i_\beta \dots}$ не меняются (соответственно меняют знак) при перестановке любых двух индексов $x^{\dots i_\alpha \dots i_\beta \dots} = +(-) x^{\dots i_\beta \dots i_\alpha \dots}$.

Ассоциативные факторалгебры $S(V) \approx T(V)/\sigma(V)$ и $\wedge(V) \approx$ $\approx T(V)/\alpha(V)$ называются соответственно *симметрической алгеброй над V* и *внешней алгеброй над V*. Последняя называется также *алгеброй Грассмана,* а элементы базиса $S = \{e_i\}$ пространства V называются *образующими* для этих алгебр. Композиция элементов $x, y \in \wedge(V)$ обозначается $x \wedge y$ и называется *внешним*, или *грассмановым, произведением*.

Рассмотрим разложение алгебры Грассмана в прямую сумму векторных подпространств. Положим $\wedge^{(r)}(V) = 0$ при $r < 0$, $\wedge^{(0)}(V) = K$, $\wedge^{(1)}(V) = V$ и $\wedge^{(r)}(V) = \{\wedge^{(r-1)}(V)\} \wedge V$. Из определения идеала $\alpha(V)$ и алгебры $\wedge(V)$ следует, что для $x, y \in V = \wedge^{(1)}(V)$

$$x \wedge y = -y \wedge x, \tag{79}$$

а значит, в качестве базиса в $\bigwedge^{(2)}(V)$ можно взять упорядоченные внешние произведения $\{e_i \wedge e_j;\ i < j\}$ элементов базиса в V, и в общем случае $\bigwedge^{(r)}(V)$ — упорядоченные произведения $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_r},\ i_1 < i_2 < \ldots < i_r\}$. Отсюда следует, что $\bigwedge(V)$ — конечномерное векторное пространство: $\bigwedge^{(r)}(V) = 0$ при $r > n$.

(**121**) Упражнение. Найдите размерность внешней (грассмановой) алгебры $\bigwedge(V)$ над векторным пространством V размерности n.

(**122**) Упражнение. Покажите, что внешнее произведение однородных элементов $x_{(r)} = x^{i_1 \ldots i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, $y_{(s)} = y^{j_1 \ldots j_s} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_s}$ есть

$$x_{(r)} \wedge y_{(s)} = (-1)^{rs} y_{(s)} \wedge x_{(r)}. \quad \blacktriangledown \tag{80}$$

Соотношение (80) делит однородные элементы на два класса: четные (степени **0**) и нечетные (степени **1**).

(**123**) Пусть $e_i \equiv \vartheta_i$ — образующие алгебры Грассмана Θ, умножение в которой запишем обычным образом: $\vartheta_i \wedge \vartheta_j \equiv \equiv \vartheta_i \vartheta_j = -\vartheta_j \vartheta_i$. Снабдим Z_2-градуировкой векторное пространство $\mathrm{Mat}(m, K)$, полагая, что элементам некоторого базиса $S = \{l_\alpha\} = \{l_\alpha^{(0)}\} \cup \{l_\beta^{(1)}\}$ можно присвоить степень **0** или **1**, причем так, что произведение матрицы из четного подпространства имеет степень, совпадающую со степенью второго сомножителя, а умножение на нечетную матрицу всегда эту степень меняет, т. е.

$$a^{(\nu)} b^{(\sigma)} = c^\alpha l_\alpha^{([\nu+\sigma] \bmod 2)}, \quad a^{(\nu)} = a^\alpha l_\alpha^{(\nu)}, \quad b^{(\sigma)} = b^\alpha l_\alpha^{(\sigma)}, \quad \nu, \sigma \in Z_2.$$

Приведем два примера возможной градуировки блоков

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Обозначим через $\mathrm{Mat}_{Z_2}(m, \Theta)$ множество таких линейных комбинаций $A = \sum\limits_a x_a^{(\nu)} a^{(\nu)}$ матриц из $\mathrm{Mat}(m, K)$ с коэффициентами из Θ, в которых матрицы $a^{(\nu)}$ с определенной градуировкой $\nu \in Z_2$ допустимо умножать лишь на грассмановы элементы $x^{(\nu)}$ той же степени. Очевидно, что $\mathrm{Mat}_{Z_2}(m, \Theta)$ — ассоциативная алгебра. Задав на этом же множестве композицию

$$\mu_{\text{сЛи}}(A, B) = AB - BA, \tag{81}$$

получим пример структуры, называемой *Z_2-градуированной алгеброй Ли* (*супералгеброй Ли*) со следующими характерными чертами:

1) суперлиевой композицией нечетных генераторов (базисных матриц) в соответствии с (81) является операторный (матричный) антикоммутатор:

$$\mu_{\text{сЛи}}\left(l_\alpha^{(1)},\ l_\beta^{(1)}\right)=\left\{l_\alpha^{(1)},\ l_\beta^{(1)}\right\};$$

2) тождество Якоби для генераторов принимает вид ($\mu_{\text{сЛи}}\equiv\mu$):

$$(-1)^{\nu\sigma}\mu\left(l_\alpha^{(\nu)},\ \mu\left(l_\beta^{(\rho)},\ l_\gamma^{(\sigma)}\right)\right)+(-1)^{\sigma\rho}\mu\left(l_\gamma^{(\sigma)},\ \mu\left(l_\alpha^{(\nu)},\ l_\beta^{(\rho)}\right)\right)+$$
$$+(-1)^{\rho\nu}\mu\left(l_\beta^{(\rho)},\ \mu\left(l_\gamma^{(\sigma)},\ l_\alpha^{(\nu)}\right)\right)=0.$$

Алгебру $\mathrm{Mat}_{Z_2}(m,\Theta)$ можно рассматривать как кольцо эндоморфизмов некоторого «Θ-модуля»—множества линейных комбинаций $X=\sum\limits_v x_v^{(\nu)}v^{(\nu)}$ элементов Z_2-градуированного векторного пространства V^m с коэффициентами $x_v^{(\nu)}$ из Θ. Группа автоморфизмов (т. е. обратимых элементов из $\mathrm{Mat}_{Z_2}(m,\Theta)$) такого Θ-модуля является примером *супергруппы* (подробнее см. [41]).

(**124**) Замечание. При описании состояний системы частиц с разными типами статистики используется грассманова алгебра: ее четные элементы — для бозонных степеней свободы, нечетные — для фермионных. Симметрия такой системы описывается супергруппой. ▼

(**125**) Перейдем к следующей конструкции — алгебре Клиффорда. Для этого обратимся к тензорной алгебре $T(V)$. Пусть на V задана билинейная форма $f: V\times V\to K$. Для определенности будем считать ее невырожденной и симметричной. Рассмотрим (двусторонний) идеал $J(f)$ в $T(V)$, порожденный элементами вида $x\otimes x-f(x,x)$, $x\in V$. Факторалгебра $C(V,f)=$ $=T(V)/J(f)$ называется *алгеброй Клиффорда*. Произведение ее элементов x, y обозначим через xy.

Алгебра Клиффорда $C(V,f)$ содержит поле K и векторное пространство V в качестве прямых слагаемых.

В качестве базисного элемента в подпространстве K возьмем 1. В V удобно выбрать тот базис $S=\{e_i\}$, в котором матрица формы f приведена к простейшему (стандартному) виду. Так, в случае $K=R$ будем считать, что матрица $\hat f$ есть

$$\hat f=\begin{pmatrix}I_q & \\ & -I_p\end{pmatrix}.$$

По определению алгебры Клиффорда квадрат любого элемента $x\in V$ есть

$$(x^i e_i)\cdot(x^k e_k) = f_{ik} x^i x^k.$$

Отсюда следует, что для произведения базисных элементов e_i, e_k при $i \neq k$ выполняется соотношение

$$e_i \cdot e_k + e_k \cdot e_i = 0 \qquad (i \neq k),$$

что можно переписать, сняв ограничение $i \neq k$, в виде

$$e_i \cdot e_k + e_k \cdot e_i = 2 f_{ik} \cdot 1. \tag{82}$$

Представляется очевидным, что при гомоморфизме $T(V) \to C(V, f) = T(V)/J(f)$ образ любого элемента из $T^{(2)}(V)$ можно представить линейной комбинацией упорядоченных произведений $e_{i_1} \cdot e_{i_2} (i_1 < i_2)$ и $1 \in K$. Пользуясь соотношением (82), читатель индуктивным путем докажет, что, как и в случае алгебры Грассмана, в качестве базиса в $C(V, f)$ можно взять набор всех упорядоченных произведений образующих

$$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_r} \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_r). \tag{83}$$

Таким образом, размерность $C(V, f)$ совпадает с размерностью $\wedge(V)$ и равна 2^n (см. (**121**)).

Итак, с симметричной формой f на векторном пространстве V можно связать некоторую конструкцию — алгебру Клиффорда $C(V, f)$. Ранее (см. табл. 2) с помощью таких форм мы дали определение ортогональных групп.

(**126**) Можно предполагать, что ортогональная группа $U_f(n, K)$ и алгебра $C(V, f)$ связаны друг с другом. Рассмотрим группу обратимых элементов $C_*(V, f) = \{u\}$ кольца $C(V, f)$ и каждому u сопоставим преобразование алгебры Клиффорда $C(V, f)$ в себя:

$$g(u): x \to x' = u x u^{-1}, \quad x = x^A e_A \in C(V, f), \quad u = u^B e_B \in C_*(V, f),$$

где A, B нумеруют базис $C(V, f)$, скажем (83). (В таком случае в качестве A можно использовать мультииндекс, являющийся упорядоченным подмножеством множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, нумерующего базис $S \subset V$. Пустому подмножеству $A = \varnothing$ следует сопоставить единицу поля K: $e_\varnothing = 1$.)

Очевидно, что $g(u)$ является автоморфизмом алгебры Клиффорда. В группе автоморфизмов $\{g(u)\} \sim C_*(V, f)$ выделим преобразования, переводящие подпространство $V \subset C(V, f)$ в себя:

$$g(u): \ u V u^{-1} \subset V. \tag{84}$$

Для сужения на V преобразования $g(u)\,|_V \equiv \widetilde{g}(u)$ соотношение (82) дает

$$(\widetilde{g}(u)\, x \cdot \widetilde{g}(u)\, x) = (x' \cdot x') = x'^k f_{km} x'^m =$$

$$= x' x' = (u x u^{-1})(u x u^{-1}) = x^k f_{km} x^m = (x \cdot x),$$

что эквивалентно ортогональности этого сужения.

Требованию (84) удовлетворяют, в частности, элементы $u(ij) \in C(V, f)$ вида

$$u(ij) = \exp\left(\frac{\omega}{2} e_i e_j\right). \tag{85}$$

Правую часть мы понимаем как формальный ряд, вычислить который в данном случае не составляет труда:

$$u(ij) = 1 \cos\frac{\omega}{2} + e_i e_j \sin\frac{\omega}{2} \text{ при } e_i^2 e_j^2 = +1, \tag{86}$$

$$u(ij) = 1 \operatorname{ch}\frac{\omega}{2} + e_i e_j \operatorname{sh}\frac{\omega}{2} \text{ при } e_i^2 e_j^2 = -1. \tag{87}$$

Группа, порожденная произведениями элементов вида (85), называется *спинорной группой* и обозначается $\mathrm{Spin}(V, f)$. В иной записи — $\mathrm{Spin}(n)$ или $\mathrm{Spin}(p, q)$, при этом имеются в виду стандартные случаи $\hat{f} = I_n$ или $\hat{f} = I_{p,q}$ (над R).

Отображение $u \to \tilde{g}(u) = g(u)|_V$ определяет гомоморфизм $\mathrm{Spin}(V, f)$ в ортогональную группу.

(127) Упражнение. Покажите, что этот гомоморфизм является эпиморфизмом группы $\mathrm{Spin}(n)$ ($\mathrm{Spin}(p, q)$) на группу $SO(n)$ ($SO(p, q)$), а его ядро состоит из элементов $\pm 1 \in C(V, f)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что группа $SO(n)$ порождается произведениями элементов вида (1.12). ▼

В квантовой теории электрона Паули и релятивистской теории электрона Дирака читатель уже встречался с представлениями алгебр Клиффорда $C(R^3, I_3)$ и $C(R^4, I_{3,1})$. Свойства (82) образующих алгебры Клиффорда воспроизводятся антикоммутаторами матриц Паули σ_i ($i = 1, 2, 3$) в первом случае и матриц Дирака γ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) — во втором. Переформулировав конструкцию (71), (72), (75) в терминах алгебры $C(R^3, I_3)$, нетрудно убедиться в изоморфности групп $\mathrm{Spin}(3) \approx SU(2)$. В последующих главах будет установлено, что в свою очередь $\mathrm{Spin}(3, 1) \approx SL(2, C)$.

(128) Матричные реализации алгебры Клиффорда одновременно являются представлениями спинорной группы. Для простоты в дальнейшем будем обозначать алгебру Клиффорда через $C(V, I_{p,q}) \equiv C(p, q)$, где $p + q = n$ — размерность V. Случай $\hat{f} = I_n$ будем описывать, полагая $p = 0$. Пусть имеется представление d алгебры Клиффорда, т. е. гомоморфизм $d: C(p, q) \to \to \mathrm{End}_K(W) = \mathrm{Mat}(m, K)$, где m — размерность W над K.

В качестве K рассмотрим поле C комплексных чисел.

Образы элементов базиса $e_A \in C(p, q)$ обозначим через $\Gamma_A \equiv d(e_A)$. Матрицы Γ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) воспроизводят соотношение (82) для образующих e_i:

$$\Gamma_i \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_i = 2 f_{ik} I, \tag{88}$$

и поэтому их основным свойством является $\operatorname{Tr} \Gamma_i = 0$. Действительно, из соотношения (88) при $i=k$ вытекает обратимость любой из них, а при $i \neq k$ это выражение переписывается в виде

$$\Gamma_k + \Gamma_i^{-1}\Gamma_k\Gamma_i = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Tr}\Gamma_k = 0$.

Очевидно, что наряду с представлением d должно существовать (вообще говоря, отличное от него) представление $d^{(*)}$, порожденное произведениями матриц $\Gamma_i^{\dagger} \equiv d^{(*)}(e_i)$. Для удобства бывает желательно на представление d наложить условие эрмитовости или антиэрмитовости матриц Γ_i. Поскольку $\Gamma_k^2 = f_{kk}I$ (суммирования нет), то очевидно, что допустимо требование лишь эрмитовости Γ_k, если $f_{kk} = 1$, и антиэрмитовости Γ_k при $f_{kk} = -1$.

Замена некоторого числа матриц $\Gamma_k \to i\Gamma_k$ антиэрмитовыми обеспечивает переход к представлению алгебры Клиффорда $C(p, q)$ с любой нетривиальной сигнатурой. В релятивистской квантовой теории необходимо представление $d(e_\mu) \equiv \gamma_\mu$ алгебры $C(3, 1)$ минимальной размерности. (В качестве матрицы формы f служит $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор в M_4.) Минимальная размерность представления алгебры $C(n)$ есть $\dim d(C(n)) = 2^{[n/2]}$, где $[n/2]$ — «целая часть» числа $n/2$. В случае $C(3, 1)$ она равна 4.

(129) Фундаментальная теорема Паули. В алгебре матриц $\mathrm{Mat}(4, C)$ любые два набора $\{\gamma_\mu\}$, $\{\gamma'_\mu\}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), реализующие представления образующих e_μ алгебры Клиффорда $C(3, 1)$

$$\begin{gathered}\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I,\\ \gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu = 2g_{\mu\nu}I,\end{gathered} \tag{89}$$

связаны преобразованием подобия $\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$, $S \in GL(4, C)$.

Доказательство аналогичной теоремы в общем случае $C(p, q)$ приводит к делению совокупности ортогональных групп на классы $\{SO(2k)\}$ и $\{SO(2k+1)\}$, которое проявляется в классификации полупростых групп Картана, при построении операторов Казимира для этих групп и т. д. Такое разбиение обусловливается различными свойствами «последнего» элемента базиса (83): $e_{12\ldots n} = e_1e_2 \ldots e_n$ коммутирует со всеми образующими e_i при нечетном $n = 2k+1$ и антикоммутирует со всеми e_i при $n = 2k$. ▼

Поскольку биспиноры Дирака — элементы пространства W представления алгебры Клиффорда $C(3, 1)$ — сами по себе не являются наблюдаемыми величинами [5] (наблюдаемые — их квадратичные комбинации), то, вообще говоря, физические величины не зависят от выбора базиса в $C(3, 1)$. По фундаментальной теореме Паули это означает, что мы вправе выбрать то представление $\{\gamma_\mu = d(e_\mu)\}$, которое наиболее удобно при конкретном расчете.

(**130**) Напомним, что представление, первоначально использованное самим Дираком, имеет вид

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} & -\sigma_k \\ \sigma_k & \end{pmatrix}. \tag{90}$$

Обращаем внимание читателя на то, что в физических приложениях выбор базиса (над C) в пространстве матриц $\mathrm{Mat}(4, C) \approx C(3, 1)$, называемом *алгеброй Дирака*, несколько отличается от представления образующих алгебры Клиффорда $\gamma_A = d(e_A)$. В частности, вместо антиэрмитового элемента γ_{0123}, как правило (но не всегда!), используется $\gamma_5 \equiv i\gamma_{0123}$ с квадратом $\gamma_5^2 = I$. Вместо матриц $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu\gamma_\nu (\mu < \nu)$ также переходят к $\sigma_{\mu\nu} = i\gamma_{\mu\nu} (\mu < \nu)$. При этом для удобства ковариантного сворачивания индексов снимают ограничение $(\mu < \nu)$, положив

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]. \tag{91}$$

Наконец отметим, что четыре элемента $\gamma_{\mu\nu\rho} (\mu < \nu < \rho)$ могут отличаться от произведений $\gamma_{\mu 5} \equiv i\gamma_\mu\gamma_5$ только знаками. Набор матриц

$$\{\Gamma_N\} \equiv \{I, \ \gamma_\mu, \ \sigma_{\mu\nu} (\mu < \nu), \ \gamma_{\mu 5}, \ \gamma_5\} \tag{92}$$

является базисом (над полем C) в алгебре Дирака, ортогональным относительно формы

$$\langle x \cdot y \rangle = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\,(x^\dagger y), \quad x, \ y \in \mathrm{Mat}(4, \ C). \tag{93}$$

(**131**) Кроме инволюции « + », являющейся антиавтоморфизмом алгебры Дирака, в пространстве $\mathrm{Mat}(4, C)$ нетривиальным физическим смыслом обладают также следующие операции: во-первых, $\Gamma_N \to \gamma_0\Gamma_N\gamma_0$. Поскольку при этом $\gamma_0 \to \gamma_0$, $\gamma_k \to -\gamma_k$ $(k = 1, 2, 3)$, в пространстве Минковского ей соответствует операция $\widehat{P}$ пространственного отражения. Во-вторых, операция зарядового сопряжения $\Gamma_N \to C^{-1}\Gamma_N C$, где C — 4×4 матрица, определяемая из условия $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^{\mathrm{T}}$ (см. [5, 23]).

(**132**) Для удобства записи закона умножения элементов базиса (92) можно ввести набор $\{\Gamma^N\}$ с верхними мультииндексами. Например, $\sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\sigma_{\alpha\beta}$ (ограничение $(\alpha < \beta)$ здесь снято). Кроме того, полезно использовать *полностью антисимметричный (псевдо)тензор* $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см. примечание на с. 20). Отметим, что для ковариантных индексов $\varepsilon_{0123} = -1$! В соответствии с указанным примечанием (при учете знака $\varepsilon_{\dots}$) читатель может получить следующие правила свертки:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = -24, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} = -6\delta_\nu^\sigma,$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2\left(\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu\right), \tag{94}$$

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu\tau}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -\left(\delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\tau + \delta^\lambda_\nu\delta^\rho_\tau\delta^\sigma_\mu + \delta^\lambda_\tau\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu - \delta^\lambda_\nu\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\tau - \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\tau\delta^\sigma_\nu - \delta^\lambda_\tau\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\mu\right).$$

С помощью $\varepsilon_{\dots}$ матрицу γ_5 можно определить так:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta. \quad \blacktriangledown$$

Мы предлагаем читателю самостоятельно провести некоторые вычисления в алгебре Дирака. Овладение такой техникой необходимо для освоения квантовополевой теории элементарных частиц.

(133) Упражнение. Исходя из соотношения (89) и не используя явного представления γ-матриц, получите соотношения

$$\begin{gathered}
\mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) = 4g_{\alpha\beta}, \quad \mathrm{Tr}\left(\gamma_\rho\gamma_\alpha\gamma_\sigma\gamma_\beta\right) = 4\left(g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta} + g_{\sigma\alpha}g_{\rho\beta} - g_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma}\right),\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\sigma_{\mu\nu}\right) = 8i\left(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right),\\
\mathrm{Tr}\left(\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu}\right) = 4\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\right),\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\right) = 4i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad \mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\right) = -4\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \qquad (95)\\
\mathrm{Tr}\left(\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\right) = -4i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu},\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma_\rho\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\lambda\sigma_{\mu\nu}\right) = 4\left[-\varepsilon_{\rho\alpha\beta\sigma}g^{\sigma\tau}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\tau} + \right.\\
\left. + \left(g_{\rho\alpha}g_{\beta\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\rho\beta}g_{\alpha\nu}g_{\mu\lambda} - g_{\rho\alpha}g_{\beta\nu}g_{\lambda\mu} - g_{\rho\beta}g_{\alpha\mu}g_{\nu\lambda}\right)\right].
\end{gathered}$$

(134) Упражнение. Выведите следующие фрагменты закона умножения в алгебре Дирака:

$$\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5 = \gamma_5\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\sigma^{\mu\nu},\\
\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5 = g_{\alpha\beta}\gamma_5 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\sigma^{\mu\nu},\\
\sigma_{\mu\nu}\gamma_\alpha = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\beta\gamma_5 + i\left(g_{\nu\alpha}\gamma_\mu - g_{\mu\alpha}\gamma_\nu\right),\\
\gamma_\alpha\sigma_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\beta\gamma_5 - i\left(g_{\nu\alpha}\gamma_\mu - g_{\mu\alpha}\gamma_\nu\right),\\
\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu = -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}\gamma^\lambda\gamma_5 + g_{\mu\nu}\gamma_\alpha - g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu, \qquad (96)\\
\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5 = -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}\gamma^\lambda + \left(g_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\lambda} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\lambda}\right)\gamma^\lambda\gamma_5,\\
\sigma_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_5 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\beta + i\left(g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\right)\gamma^\beta\gamma_5,\\
\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = \left(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\right)I + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5 -\\
- i\left(g_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu}\right) + i\left(g_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha}\right) - i\left(g_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}\sigma_{\mu\beta}\right),\\
\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta} = \left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\right)I - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5 - i\left(g_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} -\right.\\
\left. - g_{\nu\alpha}\sigma_{\mu\beta}\right).
\end{gathered}$$

ГЛАВА 3

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ГРУППЫ ЛИ

§ 1. Свойства групповых операций в топологических группах

Группа физической симметрии, как правило, является группой движений топологического пространства. Это позволяет ввести естественное понятие близости для ее элементов и тем самым наделить группу G структурой топологического пространства. Непрерывность преобразований физической симметрии должна быть согласована с топологической структурой на G. Для этого оказывается достаточным потребовать, чтобы групповое умножение и переход к обратному элементу $g \to g^{-1}$ были непрерывными операциями в искомой топологии.

В главе 1 мы установили, что группа симметрии обеспечивает нас наблюдаемыми, если, во-первых, окрестность единичного элемента e отождествляется с окрестностью 0 в R^n, и, во-вторых, векторы ее касательного пространства в точке e являются генераторами однопараметрических подгрупп. Выделяемая благодаря такому свойству совокупность топологических групп известна под названием групп Ли. Некоторые их свойства являются общими для всего класса топологических групп. Этот класс сначала и рассмотрим.

(1) Итак, *топологическая группа* — это множество G, являющееся группой и одновременно топологическим пространством, причем групповые операции суть непрерывные отображения: а) $G \times G \to G$ для умножения и б) $G \to G$ для операции «$^{-1}$». Другими словами, пусть $g_3 = g_1 g_2$ и $U(g_3)$ — наперед заданная окрестность элемента g_3. Тогда можно указать окрестности $U(g_1)$, $U(g_2)$, такие, что

$$U(g_1) \cdot U(g_2) \subset U(g_3). \tag{1}$$

Далее, для любой окрестности $U(g^{-1})$ элемента g^{-1} всегда найдется $U(g)$, такая, что $(U(g))^{-1} \subset U(g^{-1})$.

(2) Замечание. В определении (1) условия а), б) можно заменить требованием непрерывности отображения $(g_1, g_2) \to g_1 \cdot g_2^{-1}$. ▼

Группу G называют компактной, локально компактной, связной, односвязной и т. д., если G — топологическая группа, являющаяся компактным (соответственно локально компактным, связным, односвязным и т. д.) пространством.

(3) Примеры. Множество R вещественных чисел является (аддитивной) группой и, как известно, топологическим пространством. Отображение $(x, y) \to x - y$, x, $y \in R$ непрерывно.

(4) Группа $GL(n, K)$ $(K = R, C)$ является множеством обратимых матриц в $\mathrm{Mat}(n, K)$. Последнее, как известно, — K-векторное пространство размерности n^2. Фундаментальные системы окрестностей точек a, b и $c = a \cdot b^{-1} \in GL(n, K) \subset \mathrm{Mat}(n, K)$:

$$U_\delta(a) = \{a' : |a'_{ik} - a_{ik}| < \delta\} \cap GL(n, K). \tag{2}$$

Аналогично определяются $U(b)$ и $U(c)$. Групповые операции непрерывны. (Покажите это.)

(5) Группу $SU(2) \approx Sp(1)$ мы отождествили с группой унимодулярных кватернионов $a, b, c, \ldots \in \varkappa : |a| = |b| = |c| = \ldots$ $\ldots = 1$. Множество последних совпадает со сферой $S^3 \subset R^4$, топологическая структура которой индуцирована из R^4. Следовательно, топологию на $SU(2)$ можно ввести, потребовав, чтобы изоморфизм множеств $SU(2) \leftrightarrow S^3$ был гомеоморфизмом. Непрерывность групповых операций нетрудно доказать, исходя из закона умножения:

$$ab = (a^0 e_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e})(b^0 e_0 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}) = (a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) e_0 + (a^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}, \tag{3}$$

$$|a| = |b| = 1,$$

где $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = a^i e_i$ $(i = 1, 2, 3)$. ▼

Из определения топологической группы G следует, что сдвиги $L_{g_0} : g \to g' = g_0 g$ и инволюция «$^{-1}$»$: g \to g^{-1}$ являются гомеоморфными отображениями $G \to G$. Поэтому:

(6) подмножества gU, Ug, $U^{-1} \subset G$ открыты (или замкнуты), если открытым (или замкнутым) является подмножество $U \subset G$;

(7) локальные свойства группы достаточно задавать на окрестности одного (любого) элемента, в частности e. Например:

(8) группа $GL(n, K)$, $K = R$, C — *локально компактна*, ибо точка $e \in U(e) \subset GL(n, K)$ обладает окрестностью $U(e)$ (см. (2)), замыкание которой компактно;

(9) топологическая группа G тогда и только тогда *дискретна*, когда для единичного элемента допустима окрестность $U(e) = e$;

(10) в любой окрестности единицы $W(e)$ содержится такая $U(e)$, что $U(e) \cdot U^{-1}(e) \subset W(e)$ (возьмите в (1) $g_1 = g_2^{-1} = e$);

(11) в любой окрестности $U(e)$ содержится симметричная $V(e) \subset U(e)$, т. е. вместе с каждым элементом $g \in V(e)$ содержащая и обратный к нему: $g^{-1} \in V(e) \subset U(e)$.

§ 2. Подгруппы, нормальные подгруппы, факторгруппы, естественные отображения, гомоморфизмы топологических групп. Прямые произведения

Пусть G — топологическая группа и H — подгруппа в группе G*). А. подгруппу H (или нормальную а. подгруппу H) назовем *топологической подгруппой* группы G (соответственно *нормальной топологической подгруппой*), если H одновременно является замкнутым подмножеством в топологическом пространстве G.

(12) Замечание. В топологической группе любая а. подгруппа является топологической группой в индуцированной топологии. В частности, все классические группы из табл. 2 реализуются как а. подгруппы $GL(n, C)$ и потому являются топологическими. Если индуцированная топология на подгруппе H оказывается дискретной, то H называется *дискретной подгруппой* группы G.

(13) Простейшей иллюстрацией нетривиальности указанных определений является группа $G = \{g(\tau_1, \tau_2) = \exp 2\pi i(\tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2)\}$, гомеоморфная тору $T^2 = S^1 \times S^1$. Здесь β_i — диагональные 2×2 матрицы

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Подгруппа $H_{a,b} = \{g_{a,b}(\tau) = g(a\tau, b\tau)\}$ называется *рациональной обмоткой тора* при $a/b \in Q$ и *иррациональной обмоткой тора* в противном случае. Исследование свойств обоих типов $H_{a,b}$ предлагаем читателю провести самостоятельно.

(14) **Теорема.** Пусть G — топологическая группа. Тогда:

а) если H — а. подгруппа (или нормальная а. подгруппа) в G, то ее замыкание H также является а. подгруппой (нормальной а. подгруппой) в группе G;

б) если а. подгруппа H является открытым подмножеством в G, то $\overline{H} = H$.

Доказательство. а) Покажем, что $a \cdot b^{-1} \in \overline{H}$ для элементов $a, b \in \overline{H}$. Пусть W — окрестность элемента $(a \cdot b^{-1})$. Тогда в G существуют окрестности $U(a)$ и $U(b)$, такие, что $U(a) \cdot (U(b))^{-1} \subset W$. Эти окрестности должны иметь нетривиальное пересечение с H, поэтому существуют $x, y \in H$, такие, что $x \in U(a)$, $y \in U(b)$. Поскольку $x \cdot y^{-1} \in H$ и $x \cdot y^{-1} \in W$, то любая окрестность элемента (ab^{-1}) имеет непустое пересечение с H, т. е. $ab^{-1} \in \overline{H}$.

---

*) При необходимости подчеркнуть, что данное понятие рассматривается в абстрактно-групповом смысле и безотносительно наличия в G структуры, скажем, топологического пространства или многообразия, будем употреблять сокращение «а. подгруппа».

б) Одновременно с H открытым подмножеством в G является каждый класс смежности gH. Объединение всех отличных от $H=eH$ смежных классов есть также открытое подмножество в G. Но оно является дополнением $G\setminus H$, следовательно, H — замкнуто. ▼

(15) Примеры. $GL(n, C)\supset GL(n, R)$ — замкнутая подгруппа.

(16) $SL(n, K)$, $K=R$, C — замкнутая подгруппа в $GL(n, K)$.

(17) $U(n)$ (или $SU(n)$) — в $GL(n, C)$ (соответственно в $SL(n, C)$).

(18) $O(n)$ (или $SO(n)$) — в $GL(n, R)$ (соответственно в $SL(n, R)$).

(19) Подгруппа $SO(3)$ в $O(3)$ открыта и замкнута одновременно. ▼

Топологическая факторгруппа G/H топологической группы G — это факторгруппа группы G по нормальной а. подгруппе H и факторпространство топологического пространства G по замкнутому в G подпространству H. Фактортопология по существу согласована с групповым умножением в факторгруппе, поэтому G/H — топологическая группа.

При факторизации $G\to G/H$ в общем случае (т. е. когда H не обязательно нормальная подгруппа и, возможно, незамкнутая) очевидны следующие свойства:

(20) А. факторпространство G/H топологической группы G однородно. (Напомним, что топологическое пространство X называется однородным, если для любой пары его элементов $a, b\in X$ найдется непрерывное отображение $X\to X$, при котором $a\to b$.)

(21) Отображение факторизации является непрерывным и открытым, но сохранять свойства отделимости не обязано. Действительно, при факторизации по а. подгруппе H, не являющейся ни открытым, ни замкнутым подмножеством, точка в G/H в фактортопологии не будет ни открыта, ни замкнута, ибо прообраз замкнутого (открытого) множества должен быть замкнут (открыт).

(22) Свойства компактности наследуются при факторизации по топологическим подгруппам. Если G — компактна (или локально компактна), то пространства G/H тоже компактны (соответственно локально компактны).

(23) Пример. Все факторпространства (и факторгруппы) группы $GL(n, K)$, $K=R$, C по топологическим подгруппам локально компактны.

(24) Пусть G — топологическая группа. Если ее подгруппа H компактна и пространство G/H также компактно (или хотя бы локально компактно), то сама группа G компактна (соответственно локально компактна), поскольку гомеоморфна прямому произведению $H\times G/H$ топологических пространств.

(25) Возьмем в качестве примера $G=SO(n)$, $H=SO(n-1)$

и $X=SO(n)/SO(n-1)$. Рассмотрим орбиту Y группы G в G-модуле R^n, содержащую какую-либо точку $y_{(0)}\in R^n$. Для простоты выберем вектор $y^{\mathrm{T}}_{(0)}=(0, \ldots, 0, 1)$. Отметим, что группе стабильности этой точки соответствует группа $H=SO(n-1)$, поэтому G-модули X и Y изоморфны.

Из ортогональности преобразований $g\in SO(n)$ следует, что все точки $gy_{(0)}$ орбиты Y принадлежат сфере S^{n-1} в пространстве $R^n: S^{n-1}=\{y: y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=1\}$. Чтобы установить совпадение $Y=S^{n-1}$, достаточно показать, что любую точку сферы $y\in S^{n-1}$ можно представить в виде $y=gy_{(0)}$, $g\in SO(n)$. Если y имеет компоненту $y_n=-1$, эта задача тривиальна: все остальные компоненты $y_k=0$ $(k\neq n)$, и в качестве искомого $g\in SO(n)$ можно взять преобразование отражения четного числа осей в R^n, включающего ось n, поэтому положим $y_n\neq -1$.

Каждому $(n-1)$-компонентному вектору x сопоставим антисимметричную матрицу:

$$\hat{x}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & -x \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 0 \end{array}\right). \tag{4}$$

Взяв в качестве x вектор с компонентами

$$x_k=-y_k/(1+y_n) \quad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

нетрудно проверить, что матрица Клейна

$$g=\frac{1-\hat{x}}{1+\hat{x}} \in SO(n) \tag{5}$$

выполняет искомое преобразование $y_{(0)}\to y=gy_{(0)}$.

Итак, $X=SO(n)/SO(n-1)$ и сфера S^{n-1} в R^n изоморфны как множества и как G-модули. Одновременно они являются топологическими пространствами. Введенная с помощью (2) топология в $GL(n, R)$, индуцирует топологию в замкнутой ее подгруппе $SO(n)$, фактортопология которой и определяет на X структуру топологического пространства. Эта структура эквивалентна индуцированной на сфере S^{n-1} из R^n, в чем нетрудно убедиться, используя элементы (4) в качестве представителей классов $SO(n)/SO(n-1)$.

Сфера S^{n-1} — компактное топологическое пространство. Исходя из вырожденного случая $SO(1)=1$, индукцией по n получаем, что все группы $SO(n)$ компактны.

(26) Дословное повторение сказанного применительно к случаю $G=U(n)$, $H=U(n-1)$ позволяет прийти к выводу о гомеоморфизме $U(n)/U(n-1)\simeq S^{2n-1}$ и компактности всех групп $U(n)$.

(27) $G=U(n)$, $H=\{\exp i\lambda I_n\}\approx U(1)$. Группа G является прямым произведением $G=U(1)\times SU(n)$. Из свойства (22) следует, что $SU(n)\approx G/H$ компактна.

Здесь же напомним, что группа $Sp(n)$ (см. табл. 1 и 2) является подгруппой в $SU(2n)$. Множество ее элементов выделяется дополнительным условием сохранения симплектической формы с матрицей F_{2n} (см. (2.61)), значит, $Sp(n)$ в $SU(2n)$ замкнута и потому компактна.

(28) Пусть G и H — топологические группы. *Гомоморфизмом топологических групп* называется непрерывный а. гомоморфизм групп $f: G\to H$. Следует учесть, что топология в образе $\operatorname{Im} f\subset H$, вообще говоря, может оказаться слабее индуцированной отображением f, поэтому основную роль играют открытые гомоморфизмы, в частности *изоморфизм топологических групп* — групповой изоморфизм, являющийся гомеоморфизмом топологических пространств.

Только для открытых гомоморфизмов имеет смысл сформулировать теорему, повторяющую теорему (2.29), и ее утверждение будет справедливо. ▼

В качестве примера предлагаем читателю рассмотреть отображение $U(n)\to SU(n)$.

Эта же группа $U(n)=U(1)\times SU(n)$ иллюстрирует понятие *прямого произведения топологических групп*. Определим его как топологическое пространство $G_1\times G_2$ с топологией произведения и групповой структурой — прямым произведением групп. Групповые операции в $G_1\times G_2$ непрерывны. Таким образом, $G_1\times G_2$ — топологическая группа.

Отметим очевидное свойство: проекторы (2.8) — открытые гомоморфизмы.

§ 3. Многообразия: гладкость, координаты, локальная размерность, карты, атласы. Группы Ли. Параметризация. Общая линейная группа и классические группы как группы Ли

В главе 1 подчеркивалось, что нас интересуют группы с гладкой окрестностью единичного элемента.

Исходное понятие — гладкая зависимость функций на рассматриваемом множестве (в данном случае пусть это будет окрестность $U(e)$). Непрерывная функция $f: U(e)\to R$ называется гладко*) зависящей (т. е. аналитически, ∞-дифференцируемо или r-кратно дифференцируемо зависящей) от непрерывной функции $f^1: U(e)\to R$, если для всех точек $g\in U(e)$

$$f(g)=F(f^1(g)), \tag{6}$$

где функция $F: R\to R$, называемая выражением f через f^1 — со-

*) Здесь и далее для краткости термин «гладкость» употребим для обозначения как аналитичности, так и собственно гладкости.

ответственно аналитична, ∞-дифференцируема или r-кратно дифференцируема в точке $x^1=f^1(g)$. Подобным образом понимается и гладкая зависимость f от нескольких функций $f^1, f^2, \ldots, f^n$.

(29) Гладкость $U(e)$ означает, что можно указать класс функций $C(e)$ ($C^\omega(e)$, $C^\infty(e)$, $C^r(e)$ — в соответствующих случаях), определенных на $U(e)$, такой, что:

1) $C(e)$ содержит любую функцию, гладко зависящую от конечного числа функций из $C(e)$;

2) существует набор координатных функций ($f^1, f^2, \ldots, f^n$) из $C(e)$, называемый *системой координат* на $U(e)$, гомеоморфно отображающий $U(e)$ на некоторый куб в $R^n: g\to x$ ($x^k=f^k(g)$)

$$|x^k - f^k(e)| < a,$$

причем каждая функция из $C(e)$ гладко зависит от $f^1, f^2, \ldots, f^n$ на $U(e)$.

Окрестность $U(e)$ тогда называется *кубической*, число a — *шириной куба* (относительно системы координат $\{f^i\}$), а число n — *локальной размерностью* $U(e)$.

Отметим, что $\{f^i\}$ является системой координат в любой точке из $U(e)$.

(30) Утверждение. Для того чтобы набор функций $f'^1, f'^2, \ldots, f'^m \in C(e)$, выражающихся через координаты посредством функций F'^k

$$f'^k(g) = F'^k(f^1(g), \ldots, f^n(g)) \quad (g \in U(e)),$$

также был системой координат на $U(e)$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $m=n$; 2) функциональный определитель

$$\frac{D(F'^1, \ldots, F'^n)}{D(f^1, \ldots, f^n)} = \det \left\| \frac{\partial F'^i}{\partial f^j} \right\| \tag{7}$$

при $f^i=f^i(g)$ был отличен от нуля. ▼

Рассмотрим свойства группы глобально. Из однородности топологического пространства группы G следует, что гладкая структура, задаваемая кубической окрестностью $U(g_0)$, классом $C(g_0)$ гладких функций и системой координат $f^1, f^2, \ldots, f^n \in C(g_0)$ на $U(g_0)$, имеется во всех точках $g_0 \in G$, если только она имеется в точке e.

Действительно, сдвиг на g_0 определяет $U(g_0)$ как совокупность всех элементов g' вида $g'=g_0 g$, $g \in U(e)$ и гладкие функции $\tilde{f}$ на $U(g_0)$:

$$\tilde{f}(g') \equiv f(g), \quad f \in C(e).$$

(31) Пусть при этом гладкие структуры во всех случаях, когда окрестности $U(g_1)$, $U(g_2)$, ... нетривиально пересекают-

ся, согласованы, т. е. классы $C(g')$ и $\widetilde{C}(g')$ на пересечении $U(g')\cap\widetilde{U}(g')$ совпадают (рис. 8). ▼

Тогда топологическое пространство G по определению есть гладкое многообразие. В силу утверждения **(30)** локальная размерность во всех точках связного многообразия G одинакова и называется *глобальной размерностью* (или *размерностью*) многообразия.

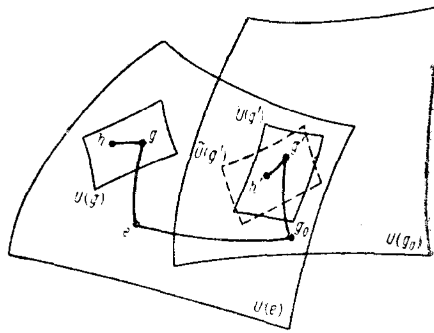


Рис. 8.

Очевидно, что из требования **(31)** вытекает следующее:

(32) если $\{x^i\}$, $\{y^m\}$ и $\{x'^k\}$ — координаты точек h, g и h' группы G, принадлежащих соответственно гладким окрестностям U_1, U_2, U_3 и $h'=gh$, то локальные координаты

$$x'^k=f^k(gh)=f^k(y^1,\ \dots,\ y^n;\ x^1,\ \dots,\ x^n)\equiv f^k(\{y^i\};\ \{x^j\})\quad (8)$$

являются гладкими (класса C^ω, C^∞ или C^r) функциями локальных координат сомножителей. ▽

Нетрудно заметить, что верно и обратное: при условии **(32)** топологическая группа G наделяется структурой гладкого (класса C^ω, C^∞ или C^r) многообразия, с которой согласованы групповые операции. Такие группы G и носят название *групп Ли* (соответственно *аналитических* или *дифференцируемых*).

(33) Замечание. Для исключения некоторых патологических случаев предполагается, что база топологии в G счетна. ▽

Мы исходили из гладкости окрестности $U(e)$ единичного элемента. Вместо $U(e)$ всегда можно взять «меньшую» окрестность $W(e)\subset U(e)$ с наследственной гладкостью, и в частности системой координатных функций $\{f^i\}:W(e)\to R^n$. Напомним, что окрестность W какой-либо точки многообразия и гомеоморфное отображение $\{f^i\}:W\to\Omega\subset R^n$ на область Ω в R^n называются *картой* на многообразии в данной точке.

Всевозможные сдвиги $W(e)\to W(g)=gW(e)$ образуют покрытие картами всего многообразия G, и в частности окрестности $U(e)$, причем в случае пересечения $W(g_1)$ с какой-либо картой $W(g_2)$ согласованы гладкие структуры, или если $f'=\{f'^i\}$ и $f''=\{f''^k\}$ — координатные функции соответственно на $W(g_1)$ и $W(g_2)$, то для сужения f' и f'' на пересечение $W(g_1)\cap W(g_2)$ композиция

$$f' \circ (f'')^{-1} : R^n \to R^n \tag{9}$$

— гладкое отображение.

Вследствие компактности куба $U(e)$ из его покрытия $\{W(g)\} g \in U(e)$ можно выбрать конечное: $\{W_\alpha = W(g_\alpha)\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$. Взяв в качестве $W(e)$ окрестность S, являющуюся порождающим множеством, нетрудно убедиться, что из покрытия $\{W(g)\} g \in G$ группы G можно выбрать не более чем счетное подпокрытие $\{W_\alpha\}$. Для компактной группы G из него можно выбрать даже конечное.

Напомним, что набор карт $\{W_\alpha\}$, покрывающий все многообразие и такой, что для любых пересекающихся карт W_1 и W_2 определяемое в (9) отображение удовлетворяет требованию гладкости, называется *атласом* на многообразии.

(34) Замечание. При отождествлении гладкой окрестности $W(e)$ с порождающим множеством S мы ограничили себя классом групп, являющихся связными многообразиями. (Напомним, что связным топологическим пространством (многообразием) называется такое, которое непредставимо в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.) В приведенном определении группы Ли свойство связности многообразия предполагать необязательно. Тогда в круг рассмотрения попадут и такие группы, как группа $O(3)$, являющаяся объединением классов смежности $\{SO(3), w \cdot SO(3)\}$ (см. **2.17**)).

(35) Введение локальных координат на группе Ли тесно связано с *параметризацией* данной группы. Локально, например, в $U(e)$ — это просто взаимно-обратные процедуры: координатные функции $\{f^i\}$ осуществляют гомеоморфное (и, следовательно, взаимно-однозначное) отображение $U(e) \to R^n : g \to \to \{x^i = f^i(g)\}$. Тогда отображение $x \to g = g(x)$ $(g(x) = = g(x^1, x^2, \ldots, x^n))$ является параметризацией элементов из $U(e)$.

В качестве *пространства параметров* рассматриваемой группы возьмем минимальную область D в R^n, характеризуемую тем, что $g(x)$ пробегает все элементы группы G (хотя бы один раз), если x пробегает всю D. Рассчитывать на то, что параметризация $x \to g(x)$ произвольной группы Ли во всех точках $x \in D$ является гладким (или хотя бы гомеоморфным) отображением $D \to G$, не приходится. Для примера здесь можно сослаться на параметризацию группы $SO(3)$ углами Эйлера (см. рис. 2) $g = g(\varphi, \vartheta, \psi)$. Она вырождена при $\vartheta = 0$. Параметризация $g_{\mathbf{n}}(\omega)$ этой же группы теряет взаимную однозначность на границе шара при $\omega = \pi$.

(36) Предположим, что заданы группа симметрии G и ее параметризация $D \to G$. Пусть из физических соображений следует, что G допускает (согласованную с групповой) структуру непрерывного многообразия класса C^0, и в частности, что ее параметризация определяет некоторую карту $(W(e), f)$ в окрестности $U(e)$ единичного элемента, где $f=\{f^k\}$ гомеоморфно отображает $W(e)$ на некоторую область $\Omega\subset D$ пространства R^n.

В этих условиях, как оказывается, нет необходимости специально проверять, является ли G аналитической или хотя бы ∞-дифференцируемой группой Ли. По теореме Глиссона — Монтгомери — Циппина всякая топологическая группа со структурой C^0-многообразия, согласованной с групповой, допускает структуру аналитической группы Ли. ▼

Мы не имеем возможности остановиться здесь на рассмотрении этой теоремы [9]. Для нас существен лишь вывод, что группы физической симметрии можно считать аналитическими группами Ли. В дальнейшем будем именовать их просто *группами Ли*.

Отметим основные свойства, которые следуют из существования атласа аналитических координат, т. е. таких, что функции в правой части (8) — аналитические.

(**37**) Всякая а. подгруппа группы Ли, являющаяся замкнутым подмногообразием, сама есть группа Ли (назовем ее *подгруппой Ли*).

(**38**) Всякая факторгруппа группы Ли по нормальной подгруппе Ли — группа Ли.

(**39**) Всякая группа Ли локально компактна и локально связна.

(**40**) Прямое произведение $G\times H$ групп Ли является группой Ли. Проекторы (2.8) — аналитические отображения многообразий (см. (**66**)).

(**41**) Одной из важнейших групп Ли является группа $GL(n, R)$. Ранее для задания топологии в $GL(n, R)$ мы использовали пространство R^{n^2}, образованное наборами матричных элементов матриц $g\in GL(n, R)$. Любую матрицу $g\in\mathrm{Mat}(n, R)$ удобно представить в виде

$$(g)^i_k=(I)^i_k+x^i_k, \quad \{x^i_k\}\in R^{n^2}. \tag{10}$$

Тогда пространством параметров группы $GL(n, R)$ является все R^{n^2} за вычетом подмногообразия меньшей размерности, выделяемого алгебраическим уравнением

$$\det(I+x)=0$$

Любой элемент g_0 обладает кубической окрестностью $U(g_0)\subset GL(n, R)$. Координатные функции

$$\xi^i_k(g)=(x-x_0)^i_k \quad (g=I+x\in U(g_0)\subset GL(n, R))$$

гомеоморфно отображают $U(g_0)$ на куб в R^{n^2} подходящей ширины ε. Отметим, что глобальные координаты произведения $g'=I+x'=gh$ выражаются аналитически через координаты

x^i_k, y^i_k сомножителей $h=I+x$, $g=I+y$:

$$x'^i_k = y^i_k + x^i_k + y^i_j x^j_k. \tag{11}$$

Таким образом, группа $GL(n, R)$ является группой Ли. Аналогично комплексные координаты

$$\zeta^i_k(g) = (z - z_0)^i_k,$$
$$g = I + z \in U(g_0) \subset GL(n, C), \quad g_0 = I + z_0 \tag{12}$$

наделяют группу $GL(n, C)$ структурой комплексного многообразия, причем групповая композиция с нею согласована. Такие группы называются *комплексными* группами Ли.

Группу $GL(n, C)$ можем рассматривать и как вещественную $2n^2$-параметрическую группу Ли с пространством параметров R^{2n^2}, образованным вещественными и мнимыми частями матричных элементов z^i_k.

(42) Напомним, что классические группы из табл. 2 являются подгруппами в $GL(n, C)$ (или в $GL(n, R)$). Условия, их выделяющие, имеют вид системы алгебраических уравнений для матричных элементов группы $GL(n, C)$ ($GL(n, R)$). Следовательно, любая классическая группа является замкнутым подмногообразием в $GL(n, C)$ ($GL(n, R)$), т. е. подгруппой Ли.

Например, в случае группы $SO(n, C)$ упомянутые уравнения имеют вид

$$\det g = 1, \quad \sim \det g - 1 = 0, \tag{13}$$
$$g^{\mathrm{T}} I g = I, \quad \sim g^{\mathrm{T}} I g - I = 0.$$

Левые части уравнений (13) являются комплексно-аналитическими функциями координат комплексного многообразия $GL(n, C)$. Следовательно, $SO(n, C)$ также может рассматриваться и как (вещественная) группа Ли, и как комплексная группа Ли.

Это не относится, например, к группе $SU(n)$, поскольку левые части соответствующих уравнений

$$\det g - 1 = 0, \quad g^{\dagger} I g = I \tag{14}$$

не являются комплексно-аналитическими функциями. Но они представляют собой аналитические функции $2n^2$ координат (вещественного) многообразия $GL(n, C)$.

(43) Упражнение. Укажите все группы из табл. 2, являющиеся комплексными группами Ли.

§ 4. Связные компоненты топологической группы, $K(e)$. Теорема о конечной порожденности. Свойства дискретных нормальных подгрупп. Компоненты группы Лоренца

Перейдем к рассмотрению свойств группы физической симметрии, вытекающих из связности или несвязности ее многообразия. Напомним сначала, что *компонентой* элемента g топологического пространства (топологической группы) G называется максимальное связное множество $K(g)$, содержащее этот элемент (оно всегда замкнуто).

(44) **Утверждение.** Компонента единицы $K(e)$ является нормальной топологической подгруппой группы G.

Доказательство. Свойство замкнутости $\overline{K(e)}=K(e)$ — характеристическое свойство компоненты [24, с. 97]. Необходимо показать, что $K(e)$ — нормальная подгруппа.

Поскольку отображение $g \to g^{-1}$ является гомеоморфизмом $G \to G$, то множество $K^{-1}(e)=\{h^{-1},\ h \in K(e)\}$ связно. Оно содержит e, а тогда $K^{-1}(e) \subseteq K(e)$ в силу максимальности компоненты $K(e)$. Следовательно, $K(e)$ наряду с каждым элементом h содержит и обратный к нему h^{-1}. Далее пусть $h \in K(e)$. Сдвиг $G \to hG$ также является гомеоморфизмом, поэтому множество $hK(e)$ связно. Оно также содержит $e=hh^{-1}$, поэтому $hK(e) \subseteq K(e)$, т. е. $K(e)$ — подгруппа.

Наконец, для любого $g \in G$ отображение $G \to gGg^{-1}$ — также гомеоморфизм. При этом $gK(e)g^{-1}$ связно, содержит единицу $e = geg^{-1}$, и потому $gK(e)g^{-1} \subseteq K(e)$. ▼

В силу однородности факторпространства $G/K(e)$ его элементы (классы смежности) сами являются компонентами в G. Факторгруппа $G/K(e)$ называется *группой компонент* топологической группы G.

(45) Свойство $K(e) = G$ является характеристическим для *связной группы* G.

(46) Свойство $K(e) = e$ характеризует *вполне несвязную группу.*

(47) Упражнение. Покажите, что группа компонент $G/K(e)$ топологической группы G вполне несвязна. ▼

В частном случае локально связной группы G, т. е. допускающей связную окрестность единицы $U(e)$ (как известно, таковы группы Ли), справедливо более сильное утверждение.

(48) **Утверждение.** Группа компонент $G/K(e)$ локально связной топологической группы G дискретна.

В самом деле, образ $U(e)$ при каноническом отображении $G \to G/K(e)$, с одной стороны, является точкой (ибо $U(e) \subset \subset K(e) \to eK(e)$), а с другой — окрестностью единицы в $G/K(e)$ (поскольку каноническое отображение открыто). ▼

Рассмотрим теперь свойство связных групп, впервые установленное нами для группы $SO(3)$.

(49) Теорема о конечной порожденности. Связная топологическая группа порождается любой окрестностью своей единицы.

Доказательство. Пусть $U(e)=U$ — окрестность единичного элемента связной топологической группы G. Рассмотрим подгруппу $H\subseteq G$, порожденную элементами этой окрестности. Группа H — объединение множеств вида $(U)^m$. В свою очередь каждое $(U)^m$ есть объединение множеств вида $u\cdot(U)^{m-1}$, $u\in U$, поэтому все $(U)^m$ вместе с H открыты одновременно с U. Но тогда по теореме **(14)** H замкнута. Вместе с H открытостью и замкнутостью обладает дополнение $G\setminus H$.

Если $G\neq H$, то группа G является объединением непустых замкнутых множеств $H\cup G\setminus H$ (поскольку $H\supset U$ заведомо непусто), что противоречит предположенной условием теоремы связности. ▼

Полезным критерием, позволяющим во многих случаях устанавливать связность той или иной группы, является следующая теорема.

(50) Теорема. Пусть H — топологическая подгруппа группы G. Если группа H и факторпространство G/H связны, то сама группа G также связна.

(51) Упражнение. Докажите теорему (50). ▼

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим случай $G=SO(n)$, $H=SO(n-1)$. В примере **(25)** мы установили, что G/H гомеоморфно сфере S^{n-1}. Последняя, как известно, связна при всех $n>1$. Поскольку в тривиальном случае $H=SO(1)$ эта группа содержит лишь один (единичный) элемент и безусловно связна, то следствием доказанной теоремы является такое утверждение.

(52) **Утверждение.** Все группы $SO(n)$ $(n\geqslant 1)$ связны.

(53) Упражнение. Покажите, что группы $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ $(n\geqslant 1)$ связны. ▼

Чтобы сформулировать еще одно свойство связных групп, отметим, что в любой топологической группе G ее центр $Z(G)$ всегда является замкнутым множеством, что следует из регулярности топологического пространства G [24, с. 140]. Подгруппы, принадлежащие центру $Z(G)$, будем называть *центральными*.

(54) **Теорема.** Любая дискретная нормальная подгруппа H связной топологической группы G является центральной нормальной подгруппой.

Доказательство. В силу дискретности H у любого ее элемента $h\in H$ найдется окрестность $V(h)$, не содержащая других элементов из H, кроме h. Вследствие непрерывности отображения $h\to ghg^{-1}$ как по h, так и по g найдется окрестность единицы $U(e)$, такая, что $U(e)hU^{-1}(e)\subset V(h)$. Тогда для любого элемента $u \in U(e)$ необходимо, чтобы $uhu^{-1} \in V(h)$ и $uhu^{-1} \in H$ в силу инвариантности подгруппы H. Значит, $uhu^{-1} = h$, поскольку в $V(h)$ других элементов из H нет. Воспользовавшись теперь теоремой **(49)** о конечной порожденности, приходим к выводу, что h коммутирует со всеми элементами группы G, т. е. принадлежит ее центру. ▼

Итак, наиболее важное свойство связных топологических групп (и групп Ли) выражается теоремой о конечной порожденности. Она же лежит и в основе инфинитезимального метода теории групп.

(55) Для нас интерес представляют также несвязные группы Ли — их устройство описывается в утверждениях **(44)** и **(48)**, откуда следует, что в общем случае группа Ли G является расширением некоторой дискретной группы F с помощью связной группы $G_0 = K(e)$ — компоненты единицы в G. Таким образом, для задания порождающего множества S группы G необходимо к любой окрестности $U(e) \in K(e)$ добавить образующие дискретной группы F.

Возьмем, например, несвязную группу $O(3)$. Указанное расширение является прямым произведением $SO(3) \times Z_2$ компоненты единицы $K(e) = SO(3)$ на группу отражений $W = \{e, w\}$ (см. **(2.17)**).

(56) Рассмотрим группу Лоренца $\mathbf{\Lambda} = O(3, 1)$ (см. **1.30**)). Топологическая группа является объединением замкиутых множеств — собственной группы Лоренца $\mathbf{\Lambda}_+ = SO(3, 1)$ и совокупности несобственных преобразований Лоренца $\mathbf{\Lambda}_-$ (не составляющих группы!): $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_+ \cup \mathbf{\Lambda}_-$, причем $\mathbf{\Lambda}_+$ и $\mathbf{\Lambda}_-$ не имеют общих элементов. В $\mathbf{\Lambda}_-$ содержится столько же компонент, сколько и в $\mathbf{\Lambda}_+$, ибо $\mathbf{\Lambda}/\mathbf{\Lambda}_+ \approx Z_2$. Отметим, что в качестве представителей классов смежности $\mathbf{\Lambda}/\mathbf{\Lambda}_+$ удобно выбрать тождественное преобразоваиие e и преобразование $\hat{P}$ отражения пространственных осей, матричные элементы которого численно совпадают со значениями метрического тензора:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} => \hat{P}^{\mu}_{\nu} = g_{\mu\nu}. \qquad (15)$$

(57) Возьмем в пространстве Минковского M_4 точку $y^{\mathrm{T}}_{(0)} = (1, 0, 0, 0)$ и рассмотрим орбиту группы $SO(3, 1)$, ее содержащую. Малой группой (группой стабильности) точки $y_{(0)}$ очевидно является группа $\boldsymbol{R} = SO(3)$ чисто пространственных вращений. Все точки орбиты $\mathbf{\Lambda}_+/\boldsymbol{R}$ прииадлежат гиперболоиду Y:

$$y^2 \equiv g_{\mu\nu} y^{\mu} y^{\nu} = 1, \qquad (16)$$

представляющему собой несвязное множество. Его компоненты $Y^{\uparrow}$ и $Y^{\downarrow}$ выделяются дополнительными условиями

$$Y^{\uparrow} : y^0 \geqslant 1, \tag{17}$$

$$Y^{\downarrow} : y^0 \leqslant -1. \tag{18}$$

В пространстве $Y^{\uparrow}$ содержатся все точки орбиты собственной ортохронной группы Лоренца $\Lambda_+^{\uparrow}$.

(58) Упражнение. Покажите, что точку $y_{(0)}$ можно перевести в любую точку $y \in Y^{\uparrow}$ подходящим преобразованием вида (1.41). ∇

Итак, факторпространство $\Lambda_+^{\uparrow}/R$ и компонента гиперболоида $Y_+^{\uparrow}$ изоморфны как множества. Используя матрицы преобразований (1.41) в качестве представителей классов смежности, нетрудно убедиться, что индуцированная топология на $\Lambda_+^{\uparrow}/R$ эквивалентна топологии на $Y^{\uparrow}$ в R^4.

Поскольку пространство $Y^{\uparrow} = \Lambda_+^{\uparrow}/R$ связно и этим же свойством, как известно, обладает группа $R = SO(3)$, то по теореме (50) собственная ортохронная группа Лоренца $\Lambda_+^{\uparrow}$ связна.

Теперь нетрудно установить, что указанные в (1.45) множества $\Lambda_+^{\uparrow}$, $\Lambda_+^{\downarrow}$, $\Lambda_-^{\uparrow}$ и $\Lambda_-^{\downarrow}$ являются связными компонентами группы Лоренца Λ.

(59) Упражнение. Постройте таблицу умножения группы компонент $\Lambda/\Lambda_+^{\uparrow}$. В качестве представителя второго класса в $\Lambda_+/\Lambda_+^{\uparrow}$ полезно использовать преобразование $\hat{S} = \hat{P}\hat{T}$ полного отражения в M_4:

$$(\hat{P}\hat{T}) = -I \Rightarrow (\hat{P}\hat{T})^{\mu}_{\nu} = -\delta^{\mu}_{\nu}, \text{ где } \hat{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

§ 5. Локальная группа, локальные изоморфизмы. Свойства локальных групп

Исключительная роль, которую играет окрестность единицы $U(e)$ в связной топологической группе, побуждает отвлечься от всех иных групповых отношений, кроме тех, что наследуются в $U(e)$. Получаемый при этом математический объект, для задания которого необходимо указать топологическую группу (или группу Ли) G и окрестность единицы $U(e) \in G$, называется *локальной группой* (или *локальной группой Ли*) и является классом эквивалентности по определяемому ниже отношению локального изоморфизма.

(60) Топологические группы (группы Ли) G_1 и G_2 называются *локально изоморфными*, если существует такое гомеоморфное отображение $f: U_1(e_1) \to U_2(e_2)$ (локальный изо-

морфизм) окрестности единицы $U_1(e_1) \in G_1$ на окрестность единицы $U_2(e_2)$ группы G_2, которое удовлетворяет следующим требованиям:

а) если в окрестности $U_1(e_1)$ наряду с элементами $g, h \in \in U_1(e_1)$ содержится и их произведение $gh \in U_1(e_1)$, то $f(gh) = =f(g)f(h)$;

б) если элементы $g, h \in U_1(e_1)$ таковы, что $f(gh) \in U_2(e_2)$, то их произведение gh также принадлежит $U_1(e_1)$. ▼

Обобщение локального изоморфизма — *локальный гомоморфизм* f (в определении (**60**) вместо гомеоморфного отображения «на» следует взять непрерывное «в»).

Отметим, что $\operatorname{Ker} f \equiv f^{-1}(e)$ обладает свойством, в соответствии с которым для $g \in U_1(e_1)$, $h \in \operatorname{Ker} f$ элемент ghg^{-1} принадлежит $\operatorname{Ker} f$ во всех случаях, когда он содержится в $U_1(e_1)$. Подгруппа H в локальной группе G, пересечение которой с $U(e)$ обладает тем же свойством, называется *локальной нормальной подгруппой*. Объединение в один класс смежности по H элементов g', g'' из $U(e)$, для которых $g'(g'')^{-1} \in H$, приводит к понятию локальной факторгруппы G/H с естественным умножением классов смежности.

Наконец, отметим, что при открытом локальном гомоморфизме G_1 и G_2 $f: U_1 \to U_2$ существует локальный изоморфизм $G_1/\operatorname{Ker} f \approx \operatorname{Im} f$.

(**61**) Рассмотрим установленный в (**2.107**) гомоморфизм f группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ (см. (2.71)). Можно видеть, что его ограничение на окрестность $U_1^{\rho} \subset SU(2)$, соответствующую шару радиусом $\rho < \pi$ в пространстве параметров $\{\mathbf{n}, \omega\}$ (см. соотношение (2.102)), удовлетворяет требованиям (**60**).

(**62**) З а м е ч а н и е. Группы $SO(3)$ и $SU(2)$ связны (см. упражнение (**53**)), т. е. в этом примере локально изоморфны связные группы, отнюдь не изоморфные глобально. ▼

Проанализируем свойства локальных групп.

(**63**) **Теорема.** Пусть N — дискретная нормальная подгруппа топологической группы G. Тогда естественный гомоморфизм $G \to G/N$ является локальным изоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вследствие дискретности N найдется такая окрестность единицы $W(e) \subset G$, что кроме e она не имеет с N других общих элементов. В соответствии с (**10**) в $W(e)$ содержится окрестность $U(e)$, такая, что $U(e) \cdot U^{-1}(e) \subset W(e)$. Рассмотрим сужение естественного гомоморфизма $f: G \to G/N$ на окрестность $U(e)$. Пусть $U'(e') \subset G/N$ — ее образ. Предположим, что элементы $u_1, u_2 \in U(e)$ имеют совпадающие образы $u_1' = f(u_1)$ и $u_2' = f(u_2) = u_1'$. Тогда элемент $u_1 \cdot u_2^{-1} \in N$. Но окрестность $U(e) \ni u_1, u_2$ выбрана так, что $u_1 \cdot u_2^{-1} \in W(e)$. Следовательно, $u_1 = u_2$, так как e — единственная общая точка N и $W(e)$.

Таким образом, каноническое отображение f, будучи непрерывным и открытым, на $U(e)$ к тому же взаимно-однозначно, т. е. является гомеоморфизмом $U(e) \to U'(e')$. Удовлетворение требований (60) есть простое следствие гомоморфности f. ▼

Доказанная теорема обобщает случай локального изоморфизма, упомянутый в примере $SU(2) \sim SO(3)$. Действительно, как известно, $SO(3) \approx SU(2)/Z_2$, где $Z_2 \approx \{e_0, -e_0\}$ — центр группы $SU(2)$.

(64) **Теорема.** Если G_1 и G_2 — локально изоморфные связные топологические группы, то существует топологическая группа $\widehat{G}$ с такими дискретными инвариантными нормальными подгруппами N_1 и N_2, что $\widehat{G}/N_1 \approx G_1$ и $\widehat{G}/N_2 \approx G_2$.

Приведем схему доказательства. Пусть $U \subset G_1$ и $V \subset G_2$ — те окрестности единиц в группах G_1 и G_2 и $f: U \to V$ — то отображение, существование и соответствующие свойства которых предполагает локальный изоморфизм.

Образуем множество $W = \{(U, f(u))\}$ пар элементов $u \in U$, $f(u) \in V$, а также W^n, понимая под произведением пар следующее:

$$(u, f(u)) \cdot (v, f(v)) \equiv (uv, f(u) \cdot f(v)).$$

Рассмотрим множество $\widehat{G}$, являющееся объединением всех W^n. Оно является группой и, как можно показать (подробнее об этом см. [24, с. 144]), допускает введение топологии, причем так, что проекторы $\varphi_1: (u_1 \cdot \ldots \cdot u_m, f(u_1) \cdot \ldots \cdot f(u_m)) \to \to u_1 \cdot \ldots \cdot u_m \in G_1$ и $\varphi_2: (u_1, \cdot \ldots \cdot u_m, f(u_1 \cdot \ldots \cdot f(u_m)) \to \to f(u_1) \cdot \ldots \cdot f(u_m) \in G_2$, которые являются а. гомоморфизмами $\widehat{G}$ соответственно в G_1 и G_2, являются гомоморфизмами топологических групп. Но во всевозможных парах $(u_1 \cdot \ldots \cdot u_m, f(u_1) \cdot \ldots \cdot f(u_m))$ встретятся все элементы группы G_1 на первом месте и все элементы G_2 — на втором, ибо U и V — порождающие множества для этих групп (поскольку последние связны), т. е. $G_i \approx \widehat{G}/N_i$ $(i=1, 2)$. Дискретность инвариантных подгрупп $N_i \equiv \operatorname{Ker} \varphi_i$ при этом является следствием того, что в окрестности $W \subset \widehat{G}$ отображения φ_i взаимно-однозначны, а значит, W не содержит других элементов из подгрупп N_1, N_2 кроме единицы $e = (e_1, e_2)$.

(65) Следствие. Если в условии теоремы (64) группы G_1 и G_2 не только связны, но и локально связны, то: а) группа $\widehat{G}$ связна; б) нормальные подгруппы N_1, N_2 — центральные.

Доказательство. а) В отличие от просто связности локальная связность [1, с. 294] предполагает в каждой окрестности любой точки пространства G наличие связной окрестности. Пусть в G_1 такой окрестностью единицы является U. Одновременно связны U и окрестность W, порождающая $\widehat{G}$.

Тогда W принадлежит компоненте единицы $K(e)\subset\widehat{G}$. Так как любой элемент $g\in\widehat{G}$ представим (конечным) произведением элементов из W, а последние принадлежат подгруппе $K(e)$, то $g\in K(e)$, т. е. $G=K(e)$.

Пункт б) есть следствие а) и теоремы (**54**). ▼

Следствие (**65**) особенно важно потому, что группы Ли (а именно они и представляют для нас интерес) локально связны.

§ 6. Однопараметрические подгруппы. Единственность однопараметрической подгруппы с заданным направляющим вектором. Канонические координаты I и II рода

Ограничим рассмотрение группами Ли. Предварительно напомним следующие определения.

(**66**) Пусть H и G — многообразия размерности соответственно m и n, а Φ — отображение H в G. Если локальные координаты x^h любой точки $g=\Phi(h)$, принадлежащей образу $\operatorname{Im}\Phi\subset G$, являются гладкими (класса C^ω, C^∞ или C^r) функциями $x^h=\Phi^h(y^1, \ldots, y^m)$ локальных координат $\{y^i\}$ точки $h\in H$, то Φ называется гладким отображением (соответствующего класса) многообразия H в G. Если при этом ранг матрицы $\|\partial\Phi^h/\partial y^i\|$ во всех точках h принимает одно и то же максимальное значение, то Φ называется регулярным отображением. Если регулярное отображение Φ инъективно (что возможно лишь при $m\leqslant n$), то оно называется вложением многообразия H в G. Если $m=n$ и к тому же Φ отображает H на все G, причем Φ^{-1} также регулярно, то такое вложение называется диффеоморфизмом.

Гладкой кривой в группе Ли G назовем гладкое отображение $R^1\to G: t\to g(t)\in G$, $t\in R^1$. Локальные координаты $x^i=f^i(g)$ точек кривой — гладкие функции параметра t. Нас в основном будут интересовать кривые, проходящие через единичный элемент группы, поэтому отображение $R^1\to G$ нормируем условием $g(0)=e$. В свою очередь систему координат в $U(e)$ также удобно подчинить требованию $f^i(e)=0$, чтобы совместить ее центр с единицей группы. Иногда для обозначения координат элемента g будем использовать ту же корневую букву: $x^i(t)=f^i(g(t))=g^i(t)$.

Касательная к гладкой кривой (класса C^r, $r>0$) в точке $g(t_0)$ определяется прямой в пространстве параметров, проходящей через точку $x_0=\{g^i(t_0)\}\in R^n$ с направляющим вектором

$$a^i=\left.\frac{dg^i(t)}{dt}\right|_{t=t_0}. \qquad (20)$$

(67) Таким образом, с каждой точкой группы $g \in G$ ассоциируется векторное пространство V_g^n направляющих векторов к дифференцируемым кривым в G, проходящим через эту точку. Назовем его касательным пространством к G в точке g. Эта конструкция эквивалентна обычно вводимому понятию касательного пространства к многообразию G (более подробно об этом см., например, в [15]).

Однопараметрическая подгруппа в G — это гладкая кривая, являющаяся гомоморфизмом топологических групп $R^1 \to G$. При соглашении о нормировке последнее требование принимает вид

$$g(t+s) = g(t)\, g(s) \quad (t,\ s \in R^1). \tag{21}$$

Ограничиваясь локальным рассмотрением, изучим ее свойства в пределах одной карты $U(e)$ (проблема продолжения рассматривается, например, в [32]).

(68) Замечание. При указанном условии в определении однопараметрической подгруппы отображение $\{t\} \to \{g(t)\}$ достаточно считать локальным гомоморфизмом. Именно это в конечном итоге приводит к тому, что алгебра Ли (см. § 7 и гл. 4) оказывается сопоставленной сразу всему классу групп Ли, локально изоморфных данной. ∇

Нетрудно показать [24, с. 294], что кривая $g(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dg^i(t)}{dt} = u_j^i(g(t))\, g^j(t), \quad g^i(0) = 0, \tag{22}$$

где $u_j^i(g(t)) \equiv \left.\frac{\partial f^i(\{g(t)\};\{g(s)\})}{\partial(g^j(s))}\right|_{s=0}$, а аналитические функции f^i — координаты элемента $g(t+s)$ (см. (8)). Тогда известные теоремы анализа приводят к следующим выводам.

(69) Каждый направляющий вектор $a \in V_e^n$ определяет однопараметрическую подгруппу группы Ли G.

(70) Существует только одна однопараметрическая подгруппа $g_a(t)$ с заданным направляющим вектором $a \in V_e^n$.

(71) Всякая однопараметрическая подгруппа $g_a(t)$ группы Ли — аналитическая кривая. Функции $g^i(a_1, a_2, \ldots, a_n;\ t)$ аналитично зависят от всех своих аргументов.

(72) Однопараметрические подгруппы следует считать независимыми, если их направляющие векторы линейно независимы.

(73) Свойства (69) — (72) сохраняются при аналитическом преобразовании координат $\{f^i\} \to \{\widetilde{f^i}\}$, $\widetilde{f^i} \in C^\omega(e)$. ▼

Итак, совокупность однопараметрических подгрупп группы Ли G в области параметров $\Omega \subset R^n$ (значений координат $x^i(g) = g^i$, $g \in U(e)$) является пучком аналитических кривых, проходящих через начало. В этой точке у каждой кривой есть своя касательная прямая, и в области Ω они представимы рядом Тейлора.

Как известно, существует аналитическое преобразование координат, которое переводит такое семейство кривых в прямые во всей области $\Omega \subset R^n$. Искомая система локальных координат группы Ли G называется *канонической* (I *рода*).

Таким образом, если система координат $x^i(g) = g^i$ — каноническая, то ее основное свойство заключается в том, что любая однопараметрическая подгруппа $g(t)$ в $U(e)$ имеет координаты

$$g^i(t) = a^i t, \tag{23}$$

где $a^i \in V_e^n$.

Рассмотрим примеры.

(74) В группе $SU(2) \approx Sp(1)$ вводимые соотношением (2.76) координаты

$$x^i = \omega n^i \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{24}$$

канонические.

(75) В группе $GL(n,\ C)$ мы ввели аналитические координаты соотношением (12). Экспонента $e^{\alpha t}$ осуществляет универсальный изоморфизм аддитивной (R^1) и мультипликативной (R_*) групп. Это наводит на мысль представить элементы $g \in GL(n,\ C)$ в экспоненциальном виде.

Экспоненту от матрицы $x \in \mathrm{Mat}(n,\ C)$ определим сначала формальным рядом

$$\exp x \equiv I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{25}$$

(76) Упражнение. Покажите, что каждый из n^2 рядов для матричных элементов в правой части (25) сходится абсолютно и равномерно для матриц x из любой ограниченной области в $\mathrm{Mat}(n,\ C)$. ∇

Очевидно, что соотношение (25) определяет обратимую матрицу $g = \exp x \in GL(n,\ C)$, поскольку ряд $g' = \exp(-x)$ также абсолютно сходящийся, и перемножение рядов дает $g' \cdot g = I = g \cdot g'$.

(77) Таким образом, соотношение (25) определяет отображение $\mathrm{Mat}(n,\ C)$ в $GL(n,\ C)$. Покажем, что в действительности любой элемент $g \in GL(n,\ C)$ представим в виде экспоненты $g = \exp x$ от некоторой матрицы $x \in \mathrm{Mat}(n,\ C)$.

Приведем комплексную матрицу $g \in GL(n,\ C)$ преобразованием подобия $g \to \widetilde{g} = \gamma g \gamma^{-1}$ к нормальной форме [6]:

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \tau_{(\alpha_1)} & & & \\ & \tau_{(\alpha_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau_{(\alpha_S)} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где блоки $\tau_{(\alpha)}$ соответствуют $r_{(\alpha)}$-кратно вырожденным собственным значениям α и являются треугольными (для определенности верхними треугольными) $r_{(\alpha)} \times r_{(\alpha)}$ матрицами с числами α на диагонали:

$$\tau_{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Поскольку собственные значения обратимой матрицы g отличны от нуля, каждая такая матрица τ имеет вид $\tau = e^{\ln\alpha}(I + N)$, где матрица N нильпотентна: ее степень r обращается в нуль: $(N)^r = 0$. Очевидно, что $\tau_{(\alpha)} \leqslant n$, поэтому в представлении $\tau = e^{\ln\alpha}\exp\nu$ матрица ν является полиномом степени не выше n:

$$\nu = \ln(I + N) = N - \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{3} - \ldots \frac{N^n}{n},$$

т. е. проблема сходимости не возникает, и матрица ν однозначно определена по N.

Представив в экспоненциальном виде каждый блок, заметим, что и вся блочно-диагональная матрица $\tilde{g}$ представляется экспонентой:

$$\tilde{g} = \exp \bigoplus_{\alpha} (\ln \alpha I_{(\alpha)} + \nu_{(\alpha)}) = \exp \tilde{x},$$

т. е.

$$g = \gamma^{-1}\tilde{g}\gamma = \exp x, \tag{28}$$

где
$$x = \gamma^{-1}\tilde{x}\gamma.$$

(78) Замечание. Вычислим определитель матрицы (28):

$$\det g = \det \tilde{g} = \prod_{\alpha} (\alpha)^{r_{(\alpha)}} = \exp \sum_{\alpha} r_{(\alpha)} \ln \alpha = \exp \operatorname{Tr} \tilde{x} = \exp \operatorname{Tr} x.$$

Соотношение

$$\det g = e^{\operatorname{Tr} x} = e^{\operatorname{Tr} \ln g} \tag{29}$$

в случае конечномерных матриц g является тождеством. В квантовой теории поля при отсутствии конструктивного способа введения определителя оператора соотношение (29) служит его определением.

(79) Для перестановочных матриц X, $Y \in \mathrm{Mat}(n, C)$

$$\exp(\alpha X + \beta Y) = \exp \alpha X \cdot \exp \beta Y. \tag{30}$$

Следовательно, все кривые

$$g_X(t) = \exp(tX) \tag{31}$$

являются однопараметрическими подгруппами, а $2n^2$ координат

$$g = \exp x \to \{\operatorname{Re} x^i_j, \quad \operatorname{Im} x^i_j\} \tag{32}$$

— каноническими I рода. (Напомним, что $GL(n, C)$ можно рассматривать и как комплексную группу Ли. Тогда канонические координаты — комплексные числа $\{x^i_j\}$.) В достаточно малой окрестности единицы $e = I$ эти координаты совпадают с координатами z^i_j в (12), поэтому функциональный определитель (7) отличен от нуля (и равен 1 при $g = e$).

(80) Нам понадобятся также канонические координаты II рода — их можно ввести, если известна совокупность однопараметрических подгрупп $\{g_a(t)\}$ рассматриваемой группы Ли G в какой-либо аналитической координатной системе $x^i(g)$. Возьмем любые n независимых подгрупп $g_k(t_k) \equiv g_{a_k}(t_k)$ (т. е. отвечающих линейно независимым векторам $\{a_k\}$) и параметризуем элементы $g \in U(e)$ координатами $(t^1, \ldots, t^n)$, положив

$$g(t^1, t^2, \ldots, t^n) = g_1(t^1) \cdot g_2(t^2) \cdot \ldots \cdot g_n(t^n). \tag{33}$$

Такие координаты $g \to (t^1, t^2, \ldots, t^n)$ называются *каноническими координатами* II *рода*.

(81) Упражнение. Покажите, что старые координаты $x^i(g) = x^i(t^1, \ldots, t_n)$ элемента в левой части (33) являются аналитическими функциями параметров $\{t^i\}$ и функциональный определитель (6) отличен от нуля.

§ 7. Подгруппы и факторгруппы в канонических координатах, группа Лоренца

Проанализируем свойства подгрупп Ли группы G, представляющих собой замкнутые подмногообразия.

Рассмотрим сначала подгруппу Ли H как группу Ли, а затем свойства ее тождественного вложения в G. Как и любая группа Ли, H обладает аналитическими координатами $\{z^k\}$: $W(e)\to R^m$, где $W(e)$ — карта и m — размерность H. Пусть координаты $\{z^k\}$ — канонические II рода, т. е. любой элемент $h\in W(e)$ есть

$$h(z^1, z^2, \ldots, z^m)=h_1(z^1)\cdot h_2(z^2)\cdot\ldots\cdot h_m(z^m), \tag{34}$$

где $\{h_k(z^k)\}$ — совокупность независимых однопараметрических подгрупп.

Установим теперь, как H может быть вложена в группу G. Значения аналитических координат $x^i(h)=h^i$ в G точек $h\in U(e)\cap W(e)$ являются функциями координат $z^k(h)$ в H:

$$x^i(h)=h^i(z^1, z^2, \ldots, z^m). \tag{35}$$

Представив эти функции в виде (см. (8))

$$h^i(z^1, z^2, \ldots, z^m)=f^i(\{h_1(z^1)\}, \{h_2(z^2)\cdot\ldots\cdot h_m(z^m)\}),$$

можно последовательно показать, что они аналитически зависят от каждого z^k $(k=1, 2, \ldots, m)$, и убедиться, что в окрестности $W(e)\subset H\subset G$ ранг матрицы $\|\partial h^i/\partial z^k\|$ точно равен m.

Отметим теперь, что все направляющие векторы b однопараметрических подгрупп в подгруппе H — это те и только те $\{b^i\}\in V_e^n$, которые одновременно лежат в касательном подпространстве в точке $0=x(e)$ к подмногообразию в $\Omega\subset R^n$, определяемому системой уравнений

$$x^i-h^i(z^1, z^2, \ldots, z^m)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

Таким образом, совокупность $\{b\}=V_e^m$ является линейным подпространством в V_e^n (размерности m). Всегда существует такой базис в V^n, что его первые m образующих являются базисом в V_e^m, а остальные ортогональны V_e^m. Тогда из определения (23) канонических координат I рода вытекает следующее утверждение.

(82) **Утверждение.** Пусть H — подгруппа Ли (размерности m) в группе Ли G (размерности n). Тогда:

а) в G существуют такие локальные канонические координаты I рода $\{x^i(g)\}$, что при

$$x^{m+1}=\ldots=x^n=0 \tag{37}$$

первые m из них являются одновременно (локальными) каноническими координатами I рода на подгруппе Ли H;

б) отображение

$$(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n)\to(y^1, \ldots, y^{n-m}), \tag{38}$$

где $y^k(gH)\equiv x^{m+k}(g)$ вводит локальные аналитические координаты на однородном пространстве G/H. (G/H очевидно является многообразием.)

(83) **Утверждение.** Если в условиях предыдущего утверждения подгруппа Ли H — нормальная, то определяемые отображением (38) координаты являются локальными каноническими I рода на группе Ли G/H. ∇

Полученные выводы удобно проиллюстрировать группой $GL(n, C)$. Канонические координаты на $GL(n, C)$ мы ввели с помощью экспоненциального представления (28). Однопараметрические подгруппы определяются соотношением (31):

$$g_X(t) = \exp(tX), \quad X \in \mathrm{Mat}(n, C). \tag{39}$$

(Чтобы не путать направляющие векторы $X = \{X^i_j\}$ с координатами в группе, последние обозначаем строчными буквами: $x = \{x^i_j\}$.)

(84) Считаем $G = GL(n, C)$ комплексной группой. Подгруппа $H = SL(n, C)$ выделяется условием $\det g = 1$, что в силу соотношения (29) эквивалентно

$$\mathrm{Tr}\, x = 0, \quad \mathrm{Tr}\, X = 0. \tag{40}$$

Очевидно, что

$$y = \mathrm{Tr}\, x \tag{41}$$

— локальная координата в (комплексном) многообразии $G/H \approx C_*$. В факторгруппе G/H она же является (тривиальной) канонической I рода. (В вещественной группе Ли G/H — две координаты: $(\mathrm{Re}\, y, \mathrm{Im}\, y)$.)

Очевидно, что все недиагональные матричные элементы x войдут в число канонических координат $SL(n, C)$. Тогда в силу соотношения (40) произвольный элемент $g \in SL(n, C)$ имеет вид

$$g = \exp x, \quad \mathrm{diag}\, x = \left(x^1_1, \ldots, x^{n-1}_{n-1}, -\sum_{h=1}^{n-1} (x^h_k)\right). \tag{42}$$

(85) $H = SL(n, R)$, $G = SL(n, C)$. Очевидно, что локальными (причем существенно локальными) координатами подгруппы $H = SL(n, R)$ являются вещественные части координат группы $SL(n, C)$. Последнюю здесь необходимо считать вещественной ($2n^2$-параметрической).

(86) $H = SO(n, C)$, $G = SL(n, C)$. Требование сохранения формы $(\cdot)$ над C

$$g^{\mathrm{T}} I g = I \tag{43}$$

в экспоненциальном представлении матрицы $g = \exp x$ имеет вид

$$x^{\mathrm{T}} + x = 0. \tag{44}$$

Подобная задача уже рассматривалась в § 1, гл. 1 для вещественного случая $SO(n)$, где был построен базис из линейно независимых матриц $l_{(ij)}$ в пространстве направляющих векторов X этой группы (см. (1.14), (1.15)). Представив с их помощью общее решение уравнения (44)

$$x = \sum_{i<j} x^{(ij)} l_{(ij)}, \tag{45}$$

получим $n\cdot(n-1)/2$ вещественных канонических координат $x^{(ij)} (i<j)$ группы $SO(n)$. Их продолжение на комплексные значения дает канонические координаты $SO(n, C)$.

(87) Замечание. Удвоение числа матриц $l_{(ij)}$ и параметров $x^{(ij)}$ позволяет придать выражению (45) формально тензорный вид

$$x = {}^1/_2\, x^{(ij)} l_{(ij)}.$$

Здесь $l_{(ij)} = -l_{(ji)}$ и $x_{(ij)} = -x_{(ji)}$.

(88) $G = \mathbf{\Lambda}_+ = SO(3, 1)$. В качестве H будут фигурировать те подгруппы, факторпространства G/H по которым встречаются в расслоении M_4 на $\mathbf{\Lambda}_+$-однородные пространства.

Очевидно, что любая орбита $\mathscr{O}$ группы Лоренца в M_4 содержится в подмногообразии Y_a пространства R^4, определяемом уравнением

$$(x\cdot y)_{3,1} = a \tag{46}$$

(в действительности совпадает с ним).

(89) Начало координат $y^{\tau} = (0, 0, 0, 0)$ само по себе является орбитой $\mathscr{O}_0$ вследствие однородности преобразований $SO(3, 1)$. Группой стабильности H_0 его единственной точки является вся группа $\mathbf{\Lambda}_+$. Элементы группы $\mathbf{\Lambda}_+ = SO(3,1)$ обозначим здесь через $\Lambda = \|\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\|$ (для матрицы формы $I_{3,1}$ используем введенное нами стандартное обозначение $g_{\mu\nu} = (I_{(3,1)\mu\nu})$.

Уравнения $\Lambda^{\tau} g \Lambda = g$, выделяющие $SO\,(3, 1)$ как подгруппу в $SL\,(4, R)$, в канонических координатах последней имеют вид

$$g_{\mu\rho}\, x^{\rho}_{\nu} + g_{\nu\rho}\, x^{\rho}_{\mu} = 0. \tag{47}$$

Таким образом, матрица $x_{\mu\nu}$ с нижними индексами удовлетворяет уравнению (44). Следовательно, значения канонических координат $SL\,(4, R)$ на подгруппе $SO\,(3, 1)$ можно представить в виде

$$x^{\mu}_{\nu}(\Lambda) = g^{\mu\rho}\left(\sum_{\alpha<\beta} \omega^{(\alpha\beta)}\, l_{(\alpha\beta)}\right)_{\rho\nu} \tag{48}$$

$$(\mu,\ \nu,\ \rho,\ (\alpha),\ (\beta) = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

и шесть параметров $\omega^{(\alpha\beta)} (\alpha<\beta)$ взять в качестве канонических координат на $SO(3, 1)$. Удобно удвоить их число (см. замечание (87)), положив

$$\omega^{(\beta\alpha)} = -\omega^{(\alpha\beta)}, \quad l_{(\beta\alpha)} = -l_{(\alpha\beta)}, \tag{49}$$

и поменять знаки некоторых матриц $l_{(\alpha\beta)}$ в определении (1.15):

$$(l_{(\alpha\beta)})_{\rho\nu} = g_{\beta\rho}\, g_{\alpha\nu} - g_{\alpha\rho}\, g_{\beta\nu}. \tag{50}$$

Введя для координат ω в частных случаях обозначения

$$\vartheta^i = \omega^{0i}, \quad \omega^k = \omega_k = \frac{1}{2}\, \varepsilon_{ijk}\, \omega^{(ij)} \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{51}$$

выражение (48) для значений координат $x(\Lambda)$ можно записать в виде

$$\| x^{\mu}_{\nu} \| = x = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \vartheta^1 & \vartheta^2 & \vartheta^3 \\ \hline \vartheta^1 & 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ \vartheta^2 & -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \vartheta^3 & \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{array}\right). \tag{52}$$

(90) При $a = 0$ уравнение (46) определяет конус $\mathcal{O}_c$ в R^4 (рис. 9), из которого мы должны выколоть точку $y^{\mathrm{T}} = (0,\ 0,\ 0,\ 0) = \mathcal{O}_0$. В классе взаимно сопряженных подгрупп H_y — групп стабильности всевозможных точек $y \in \mathcal{O}_c$ — нам достаточно рассмотреть одну. Выберем ее, руководствуясь простотой: $y^{\mathrm{T}}_c = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$.

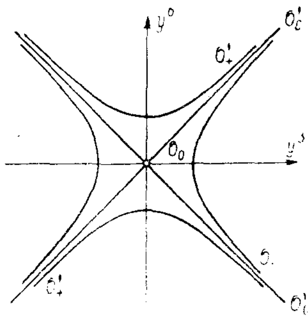


Рис. 9.

Для того чтобы однопараметрическая подгруппа $\Lambda(t) = \exp tX$, проходящая через элемент $\exp x = \exp tX|_{t=t_1}$, принадлежала группе стабильности H_c точки y, необходимо $xy_{(c)} = 0$, т. е. $\vartheta^1 - \omega^2 \equiv 2\lambda^1 = 0, \quad \vartheta^2 + \omega^1 \equiv 2\lambda^2 = 0$, $\vartheta^3 \equiv \lambda^3 = 0$. Очевидно, что замена $\omega \to (\nu^1,\ \nu^2,\ \nu^3,\ \lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)$, где $2\nu^1 = \vartheta^1 + \omega^2$, $2\nu^2 = \vartheta^2 - \omega^1$, $\nu^3 = \omega^3$, приводит к координатам в $SO\,(3,\ 1)$, которые обладают описанными в утверждении (82) свойствами. Значения $\lambda^i = 0$ имеют координаты элементов из подгруппы H_c:

$$\Lambda = \exp\left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \hline \nu_1 & 0 & \nu_3 & -\nu_1 \\ \nu_2 & -\nu_3 & 0 & -\nu_2 \\ \hline 0 & \nu_1 & \nu_2 & 0 \end{array}\right) \in H_c. \tag{53}$$

Совокупность $\{\lambda^i\}$ есть локальные координаты в окрестности $y_{(c)} \in \mathcal{O}_c \approx \mathbf{\Lambda}_+/H_c$.

(91) При $a > 0$ все орбиты являются двуполостными гиперболоидами. Достаточно рассмотреть одну из них, скажем, $\mathcal{O}_+$, положив $a = 1$ и взяв точку $y_{(+)}$ в виде $y^{\mathrm{T}}_{(+)} = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$

(рис. 9). Этот случай был рассмотрен в (**57**). Остается только добавить, что координатами в группе $H_+ = SO(3) = \boldsymbol{R}$ очевидно являются $\boldsymbol{\omega} = \{\omega^k\}$. Связь локальных координат $\boldsymbol{\vartheta} = \{\vartheta^i\}$ в $\Lambda_+/\boldsymbol{R}$ с координатами точек гиперболоида $y \in \mathcal{O}_+^{\uparrow} = Y^{\uparrow}$ (см. 17)) нетрудно установить из соотношения

$$y = \left\{\exp\left(\frac{0}{\vartheta}\middle|\frac{\vartheta^{\mathrm{T}}}{0}\right)\right\} y_{(+)} = \left\{I \operatorname{ch}|\vartheta| + \left(\frac{0}{\boldsymbol{\vartheta}}\middle|\frac{\vartheta^{\mathrm{T}}}{0}\right)\frac{\operatorname{sh}|\boldsymbol{\vartheta}|}{|\boldsymbol{\vartheta}|}\right\} y_{(+)}, \quad (54)$$

где $|\vartheta|^2 = (\vartheta^1)^2 + (\vartheta^2)^2 + (\vartheta^3)^2$.

(**92**) Как и в предыдущем случае, из совокупности однополостных гиперболоидов, описываемых уравнением (46) при $a<0$, достаточно выбрать один: $a = -1$. Взяв в качестве стандартного вектор $y^{\mathrm{T}}_{(-)} = (0, 0, 0, 1)$, нетрудно отождествить его группу стабильности $H_{(-)}$ с группой $SO(2, 1)$. Более подробное исследование этой орбиты $\mathcal{O}_- \approx \Lambda_+/SO(2, 1)$ мы предлагаем читателю провести самостоятельно. ▼

Итак, мы установили, что в канонических координатах все группы Ли локально имеют одинаковое строение: в окрестности точки $x(e) = 0$ пучок всех прямых, проходящих через нее, представляет собой все семейство однопараметрических подгрупп данной группы. Различие групп Ли фиксированной размерности n состоит в том, что в разных группах Ли по-разному замыкаются «параллелограммы» $g_2^{-1}(t) g_1^{-1}(t) g_2(t) g_1(t)$, составленные из отрезков однопараметрических подгрупп g_1, g_2 при $t \to 0$. Кроме того, возможны различия в глобальных свойствах многообразий, которыми являются группы Ли, а именно в связности и односвязности.

§ 8. Накрывающее пространство. Принцип монодромии. Универсальная накрывающая группа

(**93**) В замечании (**68**) отмечалось, что алгебра Ли сопоставляется всему классу групп Ли, локально изоморфных данной. Обозначим его через $\{G\}$. В этом классе достаточно рассмотреть только связные группы: все несвязные в соответствии с утверждениями (**44**), (**48**) реализуются как расширения дискретных групп с помощью связных групп Ли. Таким образом, возникает проблема описания класса локально изоморфных связных групп Ли (обозначим его $\{G\}_{\text{св}}$). ▼

Для любых двух связных групп G_1, $G_2 \in \{G\}_{\text{св}}$ теоремы (**54**), (**64**) и следствие (**65**) утверждают существование связной группы $\widehat{G}$, такой, что $G_i \approx \widehat{G}/N_i$, где N_i ($i = 1, 2$) — дискретные нормальные подгруппы в $\widehat{G}$ (принадлежащие ее центру).

Прежде чем обсуждать проблему существования универсальной группы Ли $\widehat{G}$ сразу для всего класса $\{G_i\}_{\text{св}}$, рассмотрим свойства отображений вида $\widehat{G} \to G_i \approx G/N_i$.

(**94**) Связное пространство (или C^ω-многообразие) $\widehat{G}$, для которого определено непрерывное (или C^ω-гладкое) отображение $\omega : \widehat{G} \to G$, называется *накрывающим пространством* (*накрывающим многообразием*) пространства G, если любая точка $g \in G$ обладает такой окрестностью $U \ni g$, что:

1) полный прообраз $\omega^{-1}(U) = \bigcup_\alpha U_\alpha \subset G$ есть объединение попарно непересекающихся компонент U_α;

2) ограничение ω_α отображения ω на каждую компоненту U_α является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом) U_α на всю U. При этом окрестность U, существование которой предполагает данное определение, называется *правильно накрытой* (или *допустимой*) относительно ω, а само отображение ω — *накрывающим*. Каждая U_α называется *правильно накрывающей компонентой*.

(**95**) Известным примером накрывающего отображения является $\omega : R \to S^1$ (рис. 10).

(**96**) Формула (2.71) реализует накрывающее отображение ω многообразия $SU(2)$ на многообразие $SO(3) \approx \approx SU(2)/Z_2$. Из нее видно, что каждая точка $R \in SO(3)$ обладает правильно накрытой относительно ω окрестностью $U(R)$ и имеются точно две правильно накрывающие компоненты: принадлежащие им матрицы $SU(2)$ различаются знаком. ▼

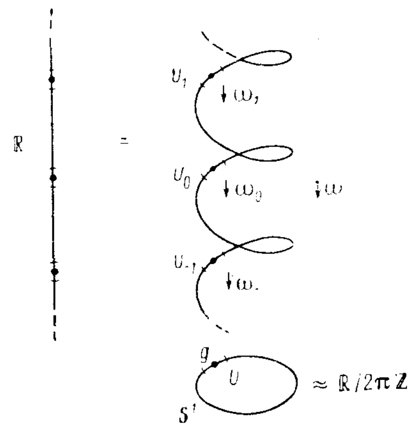


Рис. 10.

Отметим, что число правильно накрывающих компонент одинаково для правильно накрытых окрестностей всех точек связного пространства G. Это число $z(\omega)$ называется *числом накрытия*.

(**97**) Значением $z(\omega) = 2$ характеризуется гомоморфизм $\omega : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ (см. (**2.126**), (**2.127**)), также являющийся накрывающим отображением. ▼

Накрытия $(\widehat{G}, \omega)$ и $(\widehat{G}', \omega')$ пространства (многообразия) G назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\varphi : \widehat{G}' \to \widehat{G}$, такой, что накрывающее отображение ω' представимо композицией $\omega' = \varphi \circ \omega$. Например, $SU(2)$ и группа унимодулярных кватернионов $Sp(1)$ — эквивалентные накрывающие многообразия для $SO(3)$.

(**98**) Связное и локально связное пространство G назовем *односвязным*, если при любом его накрытии $(\widehat{G}, \omega)$ число накрытия $z(\omega)=1$, т. е. ω взаимно-однозначно и является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом) $\widehat{G}\approx G$ (или любое накрывающее пространство односвязного пространства G с точностью до эквивалентности совпадает с ним самим).

Односвязное накрывающее пространство $\widehat{G}$ для произвольного связного G называется также *универсальным накрывающим*. ▼ Решение проблемы (93) сводится к решению следующих задач.

(99) Необходимо установить, допускает ли пространство группы G, представляющей класс $\{G\}_{св}$, универсальное накрывающее $\widehat{G}$.

(100) Выяснить возможность восстановления на пространстве $\widehat{G}$ групповой структуры, при которой накрывающее отображение — гомоморфизм групп $\widehat{G}\to G$.

(101) Дать описание всех групп из класса $\{G\}_{св}$. ▼

Первая задача имеет следующее решение.

(102) **Теорема.** Всякое связное локально односвязное*) пространство G обладает универсальным накрывающим пространством $\widehat{G}$.

Доказательство этой теоремы громоздко и требует получения ряда промежуточных результатов, поэтому мы отсылаем читателя к книге [35, т. 1, § 29]. ▼

Обратимся к более наглядному гомотопическому определению односвязности. Исходным объектом этой теории является *путь* — непрерывное отображение f отрезка $[0, 1]\in R^1$ в топологическое пространство (или многообразие) G. Последнее предполагается линейно связным, т. е. таким, что любые его две точки $g_1, g_2\in G$ могут быть связаны непрерывным путем $f:[0,1]\to G$ и $f(0)=g_1$, $f(1)=g_2$. На множестве всех путей в G можно ввести композицию, сопоставив двум путям f, f' результирующий. Разумеется, такое умножение определено лишь для тех пар путей, у которых начало второго пути совпадает с концом первого: $f'(0)=f(1)$.

Замкнутым путем называется путь, у которого конец совпадает с началом: $f(1)=f(0)$. Для совокупности Φ_g всех замкнутых путей с общим началом, скажем, точкой $g=f(0)=$ $=f(1)$, $f\in\Phi_g$, введенное умножение определено для любой пары путей, и результат также является путем из этой совокупности. Тривиальный путь, состоящий из одной точки g, называется *единичным*. Отметим, что путь $f^{-1}:f^{-1}(t)=$ $=f(t-1)$, называемый обратным путем к f, отнюдь не является обратным элементом в Φ_g относительно рассматриваемого умножения.

*) Локально односвязным в данном случае считается такое пространство G, у которого любая точка обладает по крайней мере одной односвязной окрестностью.

Множество всех путей, и в частности Φ_g, разбивается на классы эквивалентности отношением гомотопии: два пути f, f' *гомотопны*, если существует непрерывное семейство путей $\{\varphi_s\}$, $s \in [0, 1]$, такое, что $\varphi|_{s=0} = f$ и $\varphi|_{s=1} = f'$ (т. е. пути f, f' можно непрерывно деформировать или стягивать друг в друга).

Композиция в Φ_g естественным образом определяет умножение на множестве π_g классов замкнутых гомотопных путей. Совокупность π_g в отличие от Φ_g оказывается группой!

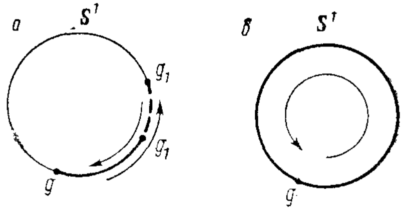


Рис. 11.

(103) Пример. На рис. 11, *а* показан замкнутый путь на сфере S^1 (окружности), составленный из пути от точки g до g_1 и обратного. Семейство путей φ_s из точки g до g_s (и обратно) стягивает этот путь в единичный. Путь на рис. 11, *б* очевидно принадлежит классу, отличному от единичного. Его n-кратные произведения порождают новые классы. Вместе с классами обратных к ним путей (и единичным классом на рис. 11, *а*) их множество образует группу, изоморфную Z. ▼

Группа классов гомотопных путей, как оказывается, не зависит (с точностью до изоморфизма) от начальной точки $g \in G$ и называется *фундаментальной группой топологического пространства (многообразия)* G. Она обозначается через $\pi^1(G)$.

(104) В примере **(103)** фундаментальной группой сферы S^1 является Z. Однако при $n > 1$ все сферы S^n обладают тривиальной фундаментальной группой: любой замкнутый путь на них стягивается в точку (покажите).

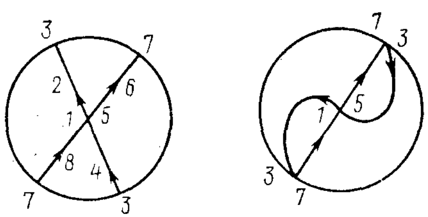


Рис. 12.

(105) Групповое пространство $SO(3)$ мы представили шаром с отождествленными концами диаметров. Кроме единичного класса такое пространство допускает и еще один класс путей: его представителем может быть любой диаметр. Произведение таких путей очевидно принадлежит единичному классу — группа $\pi^1(SO(3)) \approx Z_2$ (рис. 12). ▼

Пространство $G \equiv \widehat{G}$ называется односвязным, если его фундаментальная группа $\pi^1(\widehat{G}) \approx e$ тривиальна. Эквивалентность этого определения данному ранее в **(98)** следует из того, что любое накрытие односвязного (в гомотопическом смысле) пространства есть гомеоморфизм. Это доказывается в [24, теорема 77]. В этой же теореме устанавливается также универсальность пространства $\widehat{G}$: любое накрывающее пространство $\widetilde{G}$ данного линейно связного, локально связного пространства G в свою очередь накрывается его односвязным накрывающим $\widehat{G}$. ▼

Перейдем к задаче **(100)**.

(106) Теорема. Пусть линейно связное пространство $\widehat{G}$ является накрывающим пространством линейно связной, локально связной топологической группы G. Тогда на топологическом пространстве $\widehat{G}$ существует единственная с точностью до изоморфизма групповая структура, относительно которой накрывающее отображение $\omega : \widehat{G} \to G$ есть гомоморфизм топологических групп, причем его ядро $\omega^{-1}(e)$ дискретно. (Доказать эту теорему можно гомотопическим методом [24, теорема 79].) ▼

Такая группа $\widehat{G}$ называется *накрывающей группой* топологической группы G.

В решении задачи **(101)** центральную роль играет односвязная накрывающая группа. Это видно из теоремы, которую мы назовем *принципом монодромии* (ее доказательство читатель найдет в [35, т. 1, с. 74; 24, теорема 80]).

(107) Принцип монодромии. Пусть G — односвязная топологическая группа и φ — локальный гомоморфизм группы G в связную группу H $\varphi : U \to V$, $U \subset G$, $V \subset H$. Если при этом окрестность U связна, то существует продолжение $f : G \to H$ локального гомоморфизма φ $(f|_U = \varphi)$ до глобального, и оно единственно. ▼

Односвязная накрывающая группа $\widehat{G}$ топологической группы G называется ее *универсальной накрывающей группой.* Следующее утверждение связывает свойства универсального накрывающего отображения $\omega : \widehat{G} \to G$ с фундаментальной группой пространства G.

(108) Утверждение. Пусть $\widehat{G}$ — универсальная накрывающая группа топологической группы G и $\omega : \widehat{G} \to G$ — (универсальный) накрывающий гомоморфизм. Тогда фундаментальная группа пространства G изоморфна ядру гомоморфизма $\omega : \pi^1(G) \approx \operatorname{Ker} \omega$.

(109) Универсальная накрывающая группа $\widehat{G}_i$ какой-либо группы Ли G_i из класса $\{G\}_{\text{св}}$ в действительности должна быть универсальной накрывающей для любой его группы. Это следует из того, что для любой пары локально изоморфных групп Ли G_1, G_2 группа G из теоремы **(64)** является накрывающей как для G_1, так и для G_2. Тогда она в в свою очередь может быть накрыта универсальной накрывающей, скажем, группы $G_1 : \widehat{G}_1$. В силу единственности универсальной накрывающей $\widehat{G}_2$ должен существовать изоморфизм $\widehat{G}_1 \approx \widehat{G}_2$, равно как и для любой группы $G_i \in \{G_1\}_{\text{св}}$. Итак, мы установили, что каждый класс локально изоморфных групп $\{G\}_{\text{св}}$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет группу $\widehat{G}$ — общую универсальную накрывающую для содержащихся в нем групп. Вместе с тем эта группа вполне характеризует содержимое данного класса $\{G\}_{\text{св}}$.

(110) **Теорема.** Пусть G — односвязная топологическая группа, и связная группа G_1 локально изоморфна ей (т. е. $G_1 \in \{G\}_{\text{св}}$). Тогда G_1 изоморфна факторгруппе G по дискретной нормальной подгруппе N_1, принадлежащей ее центру: $N_1 \subset Z(G)$.

Несложное доказательство, основанное на принципе монодромии, предлагается в качестве самостоятельного упражнения. ▼

Итак, класс связных локально изоморфных групп Ли $\{G\}_{\text{св}}$ полностью определяется свойствами универсальной накрывающей.

(111) В гл. 8 будет показано, что группа квантовомеханической симметрии односвязна. Таким свойством не обладает группа вращений $R = SO(3)$: ее фундаментальная группа $\pi^1(SO(3)) \approx Z_2$. Группа $SU(2) \approx Sp(1)$ является односвязной (в качестве одной из реализаций ее группового пространства мы рассматривали сферу S^3 (см. (**5**) и (**105**))) и накрывает группу $SO(3) \approx SU(2)/Z_2$. Именно она предсказывает наблюдаемые значения собственных угловых моментов (спинов) элементарных частиц.

(112) Группа $SO(n)\,(n > 3)$ имеет строение, аналогичное строению $SO(3)$: однопараметрические подгруппы $g_X(t)$, где t — угол поворота (см. § 1 гл. 1) «склеиваются» в диаметрально противоположных точках $t = \pm\pi$. Ее фундаментальная группа также изоморфна Z_2, а универсальной накрывающей является группа Spin (n). Этот вопрос строго рассматривается в [24, 35]. Отметим, что класс $\{SO(n)\}_{\text{св}}$ содержит (с точностью до изоморфизма) две (при n нечетном) либо четыре группы (при четном n), поскольку тогда центр $\mathrm{Spin}(n)$ есть $Z_2 \times Z_2$ при $n = 4k$ и Z_4 — при $n = 2 + 4k$ (см. там же). ▼

Односвязность групп $SU(n)$ выявляется с помощью следующего утверждения.

(113) **Утверждение.** Пусть G — связная группа Ли и H — ее связная подгруппа Ли. Если однородное пространство G/H гомеоморфно сфере S^m (при $m \geqslant 3$), то $\pi^1(G) \approx \pi^1(H)$.

Доказательство целиком основано на гомотопическом методе [24, с. 376].

(114) Группа $SU(2)$ сама гомеоморфна сфере S^3, поэтому $\pi^1(SU(2)) \approx e$. Отметим, что $SU(n)/SU(n-1) \approx U(n)/U(n-1)$.

Это пространство гомеоморфно сфере S^{2n-1} (см. (**26**)), поэтому односвязность всех групп $SU(n)$ является следствием утверждения (**113**).

(**115**) Поскольку группа $U(1)$ гомеоморфна окружности в $C \approx R^2$, то $\pi^1(U(1)) \approx \pi^1(S^1) \approx Z$. Следовательно, все группы $U(n)$ неодносвязны: их фундаментальные группы $\pi^1(U(n)) \approx Z$. ▼

Одним из полезных критериев односвязности является следующее утверждение.

(**116**) **Утверждение.** Прямое произведение $G = K \times H$ топологических пространств K и H односвязно тогда и только тогда, когда K и H односвязны [35, т. I].

(**117**) Например, представим общую линейную группу в виде $GL(n, C) = C_* \times SL(n, C)$. Поскольку C_* гомеоморфно R^2 с выколотой точкой и очевидно неодносвязно $(\pi^1(C_*) \approx Z)$, то группа $GL(n, C)$ также не является односвязной.

(**118**) Возьмем группу $SL(n, C) = G$. Отметим, что она тривиально односвязна при $n=1$, и рассмотрим ее орбиту $Y(n)$ в пространстве C^n, содержащую точку $y^{\mathrm{T}}_{(0)} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Несложно проверить, что преобразованием $g: y_{(0)} \to y = g y_{(0)}$, $g \in G = SL(n, C)$ точку $y_{(0)}$ можно перевести в любую точку $y \in C^n$ за исключением начала $y=0$. Минимальное нетривиальное значение n для данного случая равно 2, а пространство $C^n \setminus 0 \approx R^{2n} \setminus 0 \approx Y(n)$ при $n \geqslant 2$ очевидно односвязно. Таким образом, в разложении пространства $SL(n, C) \approx \approx Y(n) \times G_0$ необходимо рассмотреть G_0 — группу стабильности точки $y_{(0)}$. Она представляет собой множество матриц вида

$$g_0 = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array} \right), \tag{55}$$

где очевидно $h \in SL(n-1, C) = H$ и $x^{\mathrm{T}} = (x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}) \in \in C^{n-1}$. Заодно отметим, что из закона композиции преобразований $g_0 = (h, x)$ вида (55)

$$(h_1, x_1) \cdot (h_2, x_2) = (h_1 h_2, h_2 x_1 + x_2) \tag{56}$$

следует, что $G_0 = SL(n-1, C) \triangleright \boldsymbol{P}(n-1)$ есть полупрямое произведение группы $SL(n-1, C)$ и группы трансляций $\boldsymbol{P}(n-1)$ в C^{n-1}. Последняя изоморфна аддитивной группе C^{n-1} и поэтому односвязна. В итоге приходим к выводу, что односвязность группы $SL(n, C)$ определяется односвязностью $SL(n-1, C)$ и, следовательно, все группы $SL(n, C)$ односвязны.

(**119**) Подчеркнем, что первая нетривиальная группа в рассмотренной серии $SL(2, C)$, точнее, ее вещественная реализация, обозначаемая $SL(2, C)_R$ — одна из важнейших в квантовой теории элементарных частиц, поскольку она является универсальной накрывающей для связной компоненты группы Лоренца — собственной ортохронной группы $\boldsymbol{\Lambda}^{\uparrow}_{+}$. Построим гомоморфизм ω, осуществляющий универсальное накрытие.

Обратимся к R-линейному подпространству Φ эрмитовых матриц $\hat{x}=\hat{x}^{\dagger}\in\text{Мат}(2, C)$.

Разложим их по базису, составленному из матриц Паули σ и σ_0 (см. (2.41))

$$\hat{x}=x^{\mu}\sigma_{\mu} \quad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{57}$$

С помощью инволюции $\sigma\to\widetilde{\sigma}=(\sigma_0,-\sigma)$ зададим R-билинейную форму $(\cdot)_f$ на Φ, положив

$$(\hat{x}\cdot\hat{y})_f=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\hat{\tilde{x}}\hat{y})=g_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}. \tag{58}$$

Матрица этой формы совпадает с метрическим тензором в пространстве Минковского M_4, что позволяет отождествить его с Φ.

Рассмотрим R-линейные преобразования в $\text{Mat}(2, C)$, переводящие Φ в себя:

$$\Lambda(g):\hat{x}\to\hat{x}'=g\hat{x}g^{\dagger}, \tag{59}$$

где матрица $g\in SL(2, C)$. Покажем, что при такой реализации действия группы $SL(2, C)_R$ на Φ форма (58) инвариантна. Напомним, что линейное преобразование тогда и только тогда сохраняет симметричную форму $(\cdot)_f$, когда оно сохраняет определяемую ею норму $|x|^2=(x\cdot x)_f$ для всех векторов линейного пространства. Отметим, что $|x|^2$ совпадает с определителем матрицы $\hat{x}$:

$$|x|^2=|x^{\mu}\sigma_{\mu}|=\begin{vmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{vmatrix}=x_0^2-\mathbf{x}^2. \tag{60}$$

Следовательно, соотношение (59) определяет гомоморфизм ω группы $SL(2, C)_R$ в группу Лоренца Λ.

Обозначим через $\widetilde{\sigma}^{\mu}$ элементы базиса в Φ, дуального к $\{\sigma_{\nu}\}$ относительно формы (58). Тогда

$$x^{\mu}=(\widetilde{\sigma}^{\mu}\cdot\hat{x})_f. \tag{61}$$

Явное выражение матричных элементов $\Lambda(g)$ через матричные элементы матрицы $g\in SL(2, C)_R$ имеет вид

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(g)=(\widetilde{\sigma}^{\mu}\cdot g\sigma_{\nu}g^{\dagger})_f=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\widetilde{\sigma}^{\mu}g\sigma_{\nu}g^{\dagger}). \tag{62}$$

Из аналитичности этих функций следует, что ω отображает связную группу $SL(2, C)_R$ в компоненту единицы группы Лоренца — $\Lambda^{\uparrow}_{+}$. Покажем, что ω — отображение «на». Подгруппа $SU(2)\subset SL(2, C)_R$ посредством ω отображается на всю подгруппу $SO(3)=R\subset\Lambda^{\uparrow}_{+}$ (см. (2.107)—(2.109)). Поэтому достаточно удостовериться в транзитивности действия (59) группы $SL(2, C)_R$ на орбите $Y_+^\uparrow \approx \Lambda_+^\uparrow / R$, содержащей точку $x_{(0)}^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0, 0)$. Поскольку уравнение

$$\hat{x} = g_x \hat{x}_{(0)} g_x^\dagger = g_x \cdot g_x^\dagger$$

для любой эрмитовой матрицы $\hat{x}$ (при $\det \hat{x} = 1$ и $x^0 > 0$), как известно, всегда имеет решение $g_x \in SL(2, C)_R$ (более того, среди всех таких g_x существует по крайней мере одна эрмитова матрица $g_x^\dagger = g_x$), то искомая транзитивность тем самым установлена. Ядром отображения ω очевидно является центр группы $SL(2, C)_R$

$$Z(SL(2, C)) = \{e, -e\} \approx Z_2 \approx \pi^1(\Lambda_+^\uparrow).$$

Итак, мы убедились, что группа $SL(2, C)_R$ является универсальной накрывающей для собственной ортохронной группы Лоренца: $\widehat{\Lambda}_+^\uparrow \approx SL(2, C)_R$.

АЛГЕБРЫ ЛИ

§ 1. Локальные свойства группы Ли и ее алгебра Ли

Выберем в группе G размерности n окрестность единицы U_e в пределах одной карты. Пусть $\{x^i\}$, $\{y^i\}$ и $\{z^i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ — значения аналитических локальных координат элементов g_x, g_y и $g_z = g_x g_y$, принадлежащих U_e. Напомним, что $z^i(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n)$ — аналитические функции переменных $\{x^i\}$, $\{y^i\}$. Разложим функцию z^i в ряд Тейлора вблизи единицы $e = g(0)$

$$z^i(x, y) = x^i + y^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^i(x, y)}{\partial x^j \partial y^k}\bigg|_{x=y=0} x^j y^k + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Здесь ε — параметр, определяемый размерами окрестности U_e. Числа

$$c^i_{jk} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial y^k} - \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^j}\right) z^i(x, y)\big|_{x=y=0} \tag{1}$$

называются *структурными константами группы* G в заданных локальных координатах.

(1) Упражнение. Покажите, что структурные константы группы Ли удовлетворяют тождеству Якоби:

$$c^i_{jk} c^k_{lm} + c^i_{lk} c^k_{mj} + c^i_{mk} c^k_{jl} = 0. \tag{2}$$

Указание. Тождество Якоби — это переформулированное в терминах структурных констант свойство ассоциативности группового закона умножения. ▼

Отметим два тривиальных свойства структурных констант:

(2) абелевой группе Ли соответствуют структурные константы, равные нулю;

(3) координаты $\{w^i\}$ элемента $q = g_x g_y g_x^{-1} g_y^{-1}$ выражаются через координаты $\{x^i\}$ и $\{y^i\}$ (при условии $q \in U_e$) и структурные константы:

$$w^i(x, y) = c^i_{jk} x^j y^k + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{3}$$

Последнее свойство позволяет сформулировать процедуру построения алгебры Ли по группе Ли.

Рассмотрим в окрестности U_e n независимых однопараметрических подгрупп $g_i(t)$, соответствующих базису $\{v_i\}$ направляющих векторов в V_e^n. Построим кривую

$$q(t) = g_j(t)\, g_k(t)\, g_j^{-1}(t)\, g_k^{-1}(t), \tag{4}$$

которую в U_e можно считать однопараметрической подгруппой с параметром $s=t^2$. Нетрудно убедиться, что кривая $\widetilde{q}(s) \equiv \equiv q(t)$ имеет касательный вектор $v \in V_e^n$, координаты которого совпадают со структурными константами группы G:

$$v^i = c^i_{jk}.$$

Иными словами, композиция (4) однопараметрических подгрупп индуцирует в пространстве V_e^n композицию Ли их касательных векторов $[v_j,\ v_k] = c^i_{jk} v_i$.

Описанная конструкция явно зависит от выбора координат в группе G. В дальнейшем, введя понятие изоморфизма алгебр Ли, сможем убедиться, что алгебры Ли, построенные в разных координатных системах и в разных точках группы G, эквивалентны. Следовательно, можем назвать алгебру, определенную структурными константами группы Ли G на n-мерном векторном пространстве $V(n,\ K)$ (K — основное поле), *алгеброй Ли группы Ли G.*

(4) Пример. Пусть $G \approx SU(2) \approx Sp(1)$ — группа унимодулярных кватернионов (см. (3.5)). В окрестности единицы пространства G построим полный набор независимых однопараметрических подгрупп $\{u_i(t)\}$. Удобно выбрать их в виде

$$u_i(t) = \exp(te_i) \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Тогда при гомоморфизме $SU(2) \to SO(3)$ элементам $u_i(t)$ будут сопоставляться вращения на малый угол $\vartheta = 2t$ вокруг осей x, y и z соответственно. Касательные векторы к подгруппам $u_i(t)$ образуют базис $\{e_i\}$ трехмерного касательного векторного пространства. Построим однопараметрические подгруппы

$$\widetilde{q}_{jk}(s) = u_j(\sqrt{s})\, u_k(\sqrt{s})\, u_j^{-1}(\sqrt{s})\, u_k^{-1}(\sqrt{s}) =$$
$$= e_0 + 2s\varepsilon^l_{jk} e_l + \ldots \quad (j,k = 1,\ 2,\ 3;\ s = t^2).$$

Найдем координаты касательного вектора к подгруппе $\widetilde{q}_{jk}(s)$:

$$v^l = +2\varepsilon^l_{jk}.$$

Мы построили алгебру Ли $su(2)$ группы $SU(2)$ — трехмерное действительное векторное пространство с законом композиции

$$[e_j,\ e_k] = +2\varepsilon^l_{jk} e_l, \tag{6}$$

который перевыбором базиса $l_k \equiv e_k/2$ приводится к виду

$$[l_j,\ l_k] = \varepsilon^p_{jk} l_p. \qquad (7)$$

Та же алгебра возникает на пространстве комплексных бесследовых антиэрмитовых 2×2 матриц с базисом $\{-\frac{i}{2}\sigma_k\}$ (σ_k — матрицы Паули) и матричным коммутатором в качестве композиции.

(5) Упражнение. Покажите, что для $G = SO(3,\ 1)$ композиция (4) порождает матричный коммутатор касательных векторов $l_{\alpha\beta} \in \mathrm{Mat}(4,\ R)$ к подгруппам вращений в плоскости $(\alpha,\ \beta)$ (см. (3.50)):

$$[l_{\mu\nu},\ l_{\lambda\rho}] = -g_{\mu\lambda} l_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} l_{\mu\lambda} + g_{\mu\rho} l_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda} l_{\mu\rho}. \ ▼ \qquad (8)$$

Очевидно, что если группа G абелева, то всякая подгруппа $q(t)$ типа (4) является тривиальной: $q(t) = e$. Следовательно, всякая композиция в алгебре Ли $A = ([\,],\ V)$ группы G также тривиальна: $[v_1,\ v_2] = 0$. Алгебра Ли с тривиальным законом композиции называется *абелевой*.

(6) Пример. Алгебра Ли группы $\boldsymbol{P}(n)$ трансляций в n-мерном векторном пространстве представляет собой абелеву n-мерную алгебру $\boldsymbol{p}(n) = ([\,] = 0,\ V^n)$. ▼

Алгебра Ли компактной группы Ли называется *компактной*. В частности, компактной является алгебра Ли $su(2)$, построенная в примере (4).

Если H — подгруппа группы Ли G, то касательное пространство $V(e,\ H)$ содержится в пространстве $V(e,\ G)$. Пусть $B = ([\,]_B,\ V(e,\ H))$ — алгебра Ли группы H. Очевидно, что ее композиция $[\,]_B$ является ограничением на $V(e,\ H)$ композиции $[\,]_A$ алгебры $A = ([\,]_A,\ V(e,\ G))$ группы G, т. е. всякой подгруппе Ли H группы Ли G соответствует подалгебра B ее алгебры Ли A. В частности, всякой однопараметрической подгруппе соответствует одномерная абелева подалгебра в A.

§ 2. Гомоморфизмы алгебр Ли

Как и во всякой алгебре над полем (см. (2.110)), *гомоморфизм алгебр Ли* есть гомоморфизм их векторных пространств, коммутирующий с законом композиции.

Если $f: A \to B$ — гомоморфизм алгебры $A = ([\,]_A,\ V)$ в алгебру $B = ([\,]_B,\ W)$, то подпространство $\mathrm{Ker} f \subset V$ вместе с ограничением закона композиции $[\,]_{A \downarrow \mathrm{Ker} f}$ образует *идеал* J алгебры A. Аналогично образ $\mathrm{Im} f$ должен быть замкнут относительно композиции $[\,]_B$ и составляет подалгебру $C = ([\,]_{B \downarrow \mathrm{Im} f},\ \mathrm{Im} f)$, содержащуюся в B. Обычно знак ограничения в законах композиции подалгебр и идеалов опускается: $J = ([\,]_A,\ V_J)$, $C = ([\,]_B,\ W_C)$, $V_J \subset V$, $W_C \subset W$. Очевидно, что всякий идеал в алгебре Ли двусторонний. Следовательно, для любого $J \subset A$ существует *факторалгебра Ли* A/J на фактор-пространстве V/V_J с композицией (2.78).

В категории алгебр Ли специальные типы гомоморфизмов (эпиморфизмы ($\operatorname{Im} f = B$), мономорфизмы ($\operatorname{Ker} f = 0$) и изоморфизмы ($\operatorname{Ker} f = 0$ и $\operatorname{Im} f = B$)) сохраняют обычный смысл. Легко показать, что все алгебры Ли одной и той же группы Ли G, получаемые при разном выборе базиса в касательном пространстве $V(e)$, а также в любом другом касательном пространстве $V(g)$, изоморфны. Группе Ли сопоставляется единственная с точностью до изоморфизма алгебра Ли.

(7) Упражнение. Докажите, что гомоморфный образ алгебры Ли изоморфен ее факторалгебре по ядру гомоморфизма.

(8) Упражнение. Пусть A — алгебра Ли группы G, B — алгебра Ли нормальной подгруппы N группы G. Покажите, что подалгебра B — идеал в A. ▼

Идеал называется абелевым, если он является абелевой подалгеброй.

(9) Примеры. В группе $\boldsymbol{E}(3)$ содержится инвариантная подгруппа трансляций $\boldsymbol{P}(3)$. В алгебре $\boldsymbol{e}(3)$ группы $\boldsymbol{E}(3)$ ей соответствует абелев идеал $\boldsymbol{p}(3)$.

(10) Инвариантной подгруппе трансляций $\boldsymbol{P}$ в группе $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Lambda} \rhd \boldsymbol{P}$ соответствует абелев четырехмерный идеал $\boldsymbol{p}$ в алгебре Ли $\boldsymbol{\pi}$ группы Пуанкаре. Факторалгебра $\boldsymbol{\pi}/\boldsymbol{p}$ эквивалентна алгебре Ли $so(3,1)$ группы Лоренца $\Lambda \approx \boldsymbol{\Pi}/\boldsymbol{P}$. ▼

Сопоставим каждому элементу $v \in A$ эндоморфизм пространства V по правилу

$$v' \to v'' = [v, v'] \equiv \operatorname{ad}_v \cdot v', \tag{9}$$

где для эндоморфизма вида (9) введено специальное обозначение — ad_v. Операторы ad_v называются *присоединенными операторами.*

Пусть $J = ([\,], W)$ — идеал в алгебре A, $W \subset V$. Тогда для всякого элемента $v \notin W$ присоединенный оператор ad_v переводит подпространство W в себя, а ad_w, $w \in W$, — осуществляет отображение $V \to W$. Если всякий оператор ad_w аннулирует пространство V, то идеал J называется *центральным идеалом* алгебры A. Максимальный центральный идеал в A носит название *центра алгебры* A и обозначается $Z(A)$. Элементы $w \in Z(A)$ коммутируют со всеми элементами алгебры A.

(11) Упражнение. Покажите, что центральной нормальной подгруппе Ли группы G соответствует центральный идеал ее алгебры Ли. ▼

Рассмотрим алгебру A, содержащую абелеву подалгебру B. Пусть C — максимальная подалгебра, $C \subset A$, содержащая B в качестве центра, $B = Z(C)$. Будем называть C *централизатором* B в A.

Утверждение, сформулированное в упражнении (8), устанавливает связь между нормальными подгруппами в группах и идеалами в их алгебрах. В примерах (9), (10) факторалгебры оказывались алгебрами соответствующих факторгрупп. В действительности справедлива более общая теорема.

(12) Теорема. Всякий локальный гомоморфизм (эпиморфизм, мономорфизм или изоморфизм) групп Ли индуцирует гомоморфизм (эпиморфизм, мономорфизм или изоморфизм соответственно) их алгебр Ли. При глобальном гомоморфизме групп Ли происходит факторизация алгебры Ли по идеалу, являющемуся алгеброй Ли ядра гомоморфизма.

Доказательство. Пусть $f: G \to H$ — локальный гомоморфизм групп Ли, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — однопараметрические подгруппы (заданные локально) в G, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — их образы в группе H. Обозначим через a_1, a_2 и b_1, b_2 касательные векторы к подгруппам $g_1(t)$, $g_2(t)$ и $h_1(t)$, $h_2(t)$ соответственно. Построим локальную подгруппу $\tilde{q}_G(s) = g_1(\sqrt{s})g_2(\sqrt{s})g_1^{-1}(\sqrt{s}) \times \times g_2^{-1}(\sqrt{s})$ с касательным вектором a_3 и подгруппу $\tilde{q}_H(s) = = h_1(\sqrt{s})h_2(\sqrt{s})h_1^{-1}(\sqrt{s})h_2^{-1}(\sqrt{s})$ с касательным вектором b_3. Всякому элементу a алгебры Ли A группы G однозначно сопоставляется локальная однопараметрическая подгруппа в G (см. **(3.69)**). Пусть B — алгебра Ли группы H. Каждому элементу $a \in A$ поставим в соответствие элемент $b \in B$, являющийся касательным вектором к образу однопараметрической подгруппы в G с касательным вектором a. Такое отображение очевидно является гомоморфизмом векторных пространств алгебр A и B, причем $\hat{f}(a_i) = b_i$. Кроме того, так как $f(\tilde{q}_G(s)) = \tilde{q}_H(s)$, то $\hat{f}(a_3) = b_3$ или

$$\hat{f}([a_1, a_2]) = [\hat{f}(a_1), \hat{f}(a_2)].$$

Следовательно, $\hat{f}$ — гомоморфизм алгебр Ли. Остальные утверждения первой части теоремы читатель без труда докажет самостоятельно.

Рассмотрим теперь глобальный гомоморфизм $f: G \to H$. Если ядро его дискретно, то группа G локально изоморфна группе H. Следовательно, изоморфны и их алгебры Ли. Если же $\mathrm{Ker}\, f \equiv L$ — подгруппа Ли, то всякой однопараметрической подгруппе в L соответствует касательный вектор, принадлежащий $V(e, L) \subset V(e, G)$. Следовательно, гомоморфизм f индуцирует такой гомоморфизм $\hat{f}$ алгебр Ли, ядром которого является алгебра Ли группы $L = \mathrm{Ker}\, f$. ▼

(13) Следствие. Локально изоморфные группы Ли имеют изоморфные алгебры Ли. Алгебра Ли характеризует свойства класса локально изоморфных групп в целом.

(14) Примеры. В примере **(4)** была построена алгебра Ли группы $SU(2)$. Ту же алгебру имеет и группа $SO(3, R) \approx SU(2)/Z_2 : so(3, R) \approx su(2)$.

(**15**) Алгебры групп $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Lambda}_+ \equiv SO(3, 1)$ и $SL(2, C)_R$ изоморфны: $so(3, 1) \approx sl(2, C)_R$. ▼

Рассмотрим алгебры $A = ([]_A, V)$ и $B = ([]_B, W)$. На прямой сумме их пространств $V \oplus W$ естественным образом возникает структура алгебры Ли с законом композиции $[]_C$:

$$[(v_1, w_1), (v_2, w_2)]_C \equiv ([v_1, v_2]_A, [w_1, w_2]_B). \tag{10}$$

Алгебра Ли $C = ([]_C, V \oplus W)$ называется *прямой суммой алгебр* A и B, $C = A \oplus B$. В алгебре C каждое прямое слагаемое является идеалом, поскольку композиция (10) любого элемента $v \in A$ с любым элементом $w \in B$ равна нулю. Отображения вложения $A \to A \oplus B$, $B \to A \oplus B$ и проектирования $A \oplus B \to A$, $A \oplus B \to B$ являются гомоморфизмами алгебр Ли. В свою очередь, если пространство алгебры Ли C представимо в виде прямой суммы подпространств V и W, причем всякий элемент $v \in V$ коммутирует с любым элементом $w \in W$: $[v, w]_C = 0$, то $C \approx A \oplus B$, где $A \equiv ([]_C, V)$, а $B \equiv ([]_C, W)$. В прямой сумме алгебр Ли присоединенные операторы любого из прямых слагаемых действуют тривиально на другом прямом слагаемом. Легко проверить, что алгебра Ли прямого произведения групп Ли всегда представима в виде прямой суммы алгебр Ли сомножителей.

(**16**) Упражнение. Покажите, что алгебра Ли $so(4, R)$ изоморфна прямой сумме двух алгебр Ли $su(2)$. ▼

Предположим, что пространство алгебры A представимо в виде прямой суммы подпространств $V \oplus W$, причем каждое из прямых слагаемых замкнуто относительно ограничения закона композиции $[\,]_A$, т. е. и $B = ([\,]_A, V)$, и $J = ([\,]_A, W)$ — подалгебры в A. Если подалгебра J является к тому же идеалом алгебры A, то A называется *полупрямой суммой алгебр* B и J. В полупрямой сумме $A = B \vdash J$ оператор ad_v переводит каждое из подпространств V и W в себя. Следовательно, структура полупрямой суммы алгебр B и J задана тогда и только тогда, когда известен гомоморфизм f алгебры B в алгебру $\mathrm{End}\,J$. Элементы подалгебры $f(B) \subset \mathrm{End}\,J$ отождествляются с ограничениями на W операторов ad_v:

$$[v, w] = f(v)\,w.$$

(**17**) **Утверждение.** Если группа Ли G представима в виде полупрямого произведения подгрупп Ли H и N, $G \approx \approx H \rhd N$, то ее алгебра Ли A изоморфна полупрямой сумме алгебр Ли B и J подгрупп H и N соответственно, $A \approx B \vdash J$.

(**18**) Упражнение. Докажите утверждение (**17**).

Структура полупрямой суммы характерна для пространственно-временных симметрий.

(**19**) Примеры. Алгебра Ли $\boldsymbol{e}(3)$ группы $\boldsymbol{E}(3)$ изоморфна алгебре $so(3) \vdash \boldsymbol{p}(3)$.

(20) Алгебра Ли π группы Пуанкаре изоморфна полупрямой сумме $so(3, 1) \vdash p$. ▼

В § 4 с помощью понятия полупрямой суммы будет сформулирован рецепт для стандартного разложения произвольной алгебры Ли — разложения Леви.

§ 3. Линейные алгебры Ли. Алгебры дифференцирований. Присоединенное представление

Линейной алгеброй Ли называется алгебра Ли линейной группы Ли.

Построим прежде всего алгебру Ли общей линейной группы $GL(n, K)$, $K = R$, C. На n^2-мерном (действительном или комплексном) аналитическом многообразии $GL(n, K)$ локальные канонические координаты мы ввели с помощью экспоненциального отображения (3.33), (3.37).

Касательным пространством $V(e, GL(n, K))$, т. е. линейным пространством алгебры Ли группы $GL(n, K)$, является $\mathrm{Mat}(n, K)$. Выберем матрицы X_i, $X_j \in \mathrm{Mat}(n, K)$ в качестве направляющих векторов однопараметрических подгрупп. Чтобы определить закон композиции искомой алгебры, найдем касательный вектор к однопараметрической подгруппе $\widetilde{q}(s) = \exp(\sqrt{s}\; X_i)\exp(\sqrt{s}\; X_j)\exp(-\sqrt{s}\; X_i)\exp(-\sqrt{s}\; X_j)$:

$$\widetilde{q}(s) = \left[I + \sqrt{s}\, X_i + \frac{s}{2} X_i^2 + \ldots\right)\left(I + \sqrt{s} X_j + \frac{s}{2} X_j^2 + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(I - \sqrt{s}\, X_i + \frac{s}{2} X_i^2 - \ldots\right)\left(I - \sqrt{s}\, X_j + \frac{s}{2} X_j^2 - \ldots\right) =$$
$$= I + s\,[X_i, X_j] + \mathcal{O}(t^3), \qquad (11)$$

где [ ] — матричный коммутатор. Итак, алгебра Ли группы $GL(n, K)$ представляет собой пространство $\mathrm{Mat}(n, K)$ с матричным коммутатором в качестве закона композиции: $gl(n, K) = ([\ ], \mathrm{Mat}(n, K))$. Мы будем стремиться сохранить в обозначении линейной алгебры Ли те же символы (строчные), что и в обозначении (прописными буквами) соответствующей группы Ли.

(21) Поскольку всякая линейная группа Ли является подгруппой общей линейной группы, то всякая линейная алгебра Ли — подалгебра алгебры $gl(n, K)$, и ее композиция — матричный коммутатор. Для определения соответствующего подпространства напомним, что любой элемент окрестности $U_e \in GL(n, K)$ представим в виде $\exp tX$ (см. **(3.75)—(3.79)**). Это позволяет сформулировать условия, накладываемые на элементы $g \in GL(n, K)$ при выделении тех или иных подгрупп, в виде ограничений на матрицы X пространства алгебры $gl(n, K)$. ▼

Алгебры Ли важнейших линейных групп приведены в табл. 3. (Условия для элементов неунимодулярных групп и алгебр легко получить, сняв требование $\det g = 1$ и $\operatorname{Tr} X = 0$ соответственно.)

Таблица 3

Группа	Условия, наложенные на элементы $g \in GL(n, K)$	Условия, наложенные на элементы $X \in gl(n, K)$	Алгебра
$SL(n, K)$	$\det g = 1$	$\operatorname{Tr} X = 0$	$sl(n, K)$
$SU(n)$	$\det g = 1$ $g^{\dagger} = g^{-1}$	$\operatorname{Tr} X = 0$ $X^{\dagger} = -X$	$su(n)$
$SU(p, q)$ $p+q=n$	$\det g = 1$ $I_{p,q}^{-1} g^{\dagger} I_{p,q} = g^{-1}$	$\operatorname{Tr} X = 0$ $I_{p,q}^{-1} X^{\dagger} I_{p,q} = -X$	$su(p, q)$
$SU^{*}(2r)$ $2r=n$	$\det g = 1$ $F^{-1} g^{*} F = g$	$\operatorname{Tr} X = 0$ $F^{-1} X^{*} F = X$	$su^{*}(2r)$
$SO(n, K)$	$\det g = 1$ $g^{-1} = g^{\mathrm{T}}$	$X^{\mathrm{T}} = -X$	$so(n, K)$
$SO(p, q)$ $p+q=n$	$\det g = 1$ $I_{p,q}^{-1} g^{\mathrm{T}} I_{p,q} = g^{-1}$	$I_{p,q}^{-1} X^{\mathrm{T}} I_{p,q} = -X$	$so(p, q)$
$SO^{*}(2r)$ $2r=n$	$\det g = 1$ $F^{-1} g^{*} F = g;\ g^{\mathrm{T}} = g^{-1}$	$X^{\mathrm{T}} = -X$ $F^{-1} X^{*} F = X$	$so^{*}(2r)$
$Sp(r, K)$	$F^{-1} g^{\mathrm{T}} F = g^{-1}$	$F^{-1} X^{\mathrm{T}} F = -X$	$sp(r, K)$
$Sp(p, q)$ $p+q=n/2$	$F^{-1} g^{\mathrm{T}} F = g^{-1}$ $K_{p,q} g^{\dagger} K_{p,q} = g^{-1}$	$F^{-1} X^{\mathrm{T}} F = -X$ $K_{p,q} X^{\dagger} K_{p,q} = -X$	$sp(p, q)$

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}, \quad F_{2r} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{p,q} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}$$

Простой способ построения структурных констант линейных алгебр Ли основан на введении специального базиса, который в физической литературе получил название *базиса Окубо.*

Построим в пространстве $\mathrm{Mat}(n, K)$ алгебры $gl(n, K)$ базис $\{E_k^i\}$, состоящий из матриц вида

$$\left(E_k^i\right)_m^l = \delta_m^i \delta_k^l \quad (i, k, l, m = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Композиции элементов E_k^i в $gl(n, K)$ принимают простой вид

$$[E^i_k,\ E^p_q] = \delta^i_q E^p_k - \delta^p_k E^i_q \qquad (13)$$

со структурными константами

$$c^{\binom{l}{m}}_{\binom{i}{k}\binom{p}{q}} = \delta^i_q \delta^l_p \delta^m_k - \delta^p_k \delta^l_i \delta^m_q. \qquad (14)$$

В пространстве алгебры $so(n, K)$, состоящем из антисимметричных матриц (табл. 3), базис Окубо представляет собой антисимметричный вариант базиса $\{E^i_k\}$:

$$M^i_k \equiv E^i_k - E^k_i. \qquad (15)$$

Здесь число базисных элементов очевидно равно $\frac{1}{2}(n^2-n)$. Их композиции имеют стандартный вид при любом значении n:

$$[M^i_k,\ M^p_q] = \delta^i_q M^p_k - \delta^p_k M^i_q + \delta^p_i M^k_q - \delta^k_q M^p_i, \qquad (16)$$

как и структурные константы

$$c^{\binom{l}{m}}_{\binom{i}{k}\binom{p}{q}} = \delta^i_q \delta^l_p \delta^m_k - \delta^p_k \delta^l_i \delta^m_q + \delta^p_i \delta^l_k \delta^m_q - \delta^k_q \delta^l_p \delta^m_i. \qquad (17)$$

Рассмотрим алгебру $so(p, q)$ (табл. 3). Базис Окубо удобно выбрать в ней в виде

$$M_{ik} \equiv \hat{f}_{lu} E^u_k - \hat{f}_{kv} E^v_i, \qquad (18)$$

где $\hat{f} \equiv I(p, q)$ — матрица формы $\hat{f}$ (метрический тензор). Выражение для композиции базисных элементов аналогично формуле (16):

$$[M_{ik},\ M_{pq}] = \hat{f}_{ip} M_{kq} + \hat{f}_{kq} M_{ip} - \hat{f}_{iq} M_{kp} - \hat{f}_{kp} M_{iq}. \qquad (19)$$

Коммутационные соотношения алгебры $so(3, 1)$ в упражнении (5) формула (8)) были приведены в базисе Окубо с метрическим тензором g.

Перейдем к алгебре $sl(n, K)$. Для обеспечения равенства нулю следа матрицы преобразуем базисные матрицы Окубо

$$A^i_k \equiv E^i_k - \frac{1}{n} \delta^i_k I. \qquad (20)$$

(На индексы диагональных матриц Окубо соглашения о суммировании (см. (**1.29**)) не распространяются.) Очевидно, что матрицы A^i_k не независимы:

$$\sum_{i=1}^{n} A^i_i = 0. \qquad (21)$$

Этот недостаток компенсируется простотой и универсальностью записи композиции в базисе Окубо:

$$[A^i_k,\ A^p_q] = \delta^i_q A^p_k - \delta^p_k A^i_q. \tag{22}$$

Рассмотрим случай $K=C$ и построим с помощью элементов A^i_k набор антиэрмитовых матриц $\{\Lambda^i_k\}$:

$$\begin{gathered}\Lambda^j_j \equiv iA^j_j, \quad \Lambda^{j\,(+)}_k \equiv i\left(A^j_k + A^k_j\right),\\ \sum_{i=1}^{n} \Lambda^j_j = 0, \quad \Lambda^{j\,(-)}_k \equiv A^j_k - A^k_j.\end{gathered} \tag{23}$$

Они образуют базис Окубо в алгебре $su(n)$. Выпишем коммутационные соотношения базисных элементов

$$\begin{gathered}[\Lambda^i_i,\ \Lambda^k_k] = 0,\\ [\Lambda^i_i,\ \Lambda^{p\,(+)}_q] = -\delta^i_q \Lambda^{p\,(-)}_q + \delta^p_i \Lambda^{p\,(-)}_q,\\ [\Lambda^i_i,\ \Lambda^{p\,(-)}_q] = \delta^i_q \Lambda^{p\,(+)}_q - \delta^p_i \Lambda^{p\,(+)}_q,\\ [\Lambda^{i\,(+)}_k,\ \Lambda^{p\,(-)}_q] = \delta^i_q \Lambda^{p\,(+)}_k - \delta^p_k \Lambda^{i\,(+)}_q + \delta^k_q \Lambda^{p\,(+)}_i - \delta^p_i \Lambda^{k\,(+)}_q\end{gathered} \tag{24}$$

(в последней строке для сокращения записи использовано очевидное равенство $\Lambda^{r\,(+)}_r = 2\Lambda^r_r$).

В заключение введем базис Окубо в алгебре $su(p,\ q)$. Вновь обозначим через $\hat{f} = I(p,\ q)$ метрический тензор и рассмотрим базис

$$\begin{gathered}\Lambda_{jj} \equiv i\hat{f}_{jk} A^k_j, \quad \Lambda^{(+)}_{jk} \equiv i\left(\hat{f}_{jq} A^q_k + \hat{f}_{kq} A^q_j\right),\\ \Lambda^{(-)}_{jk} \equiv \hat{f}_{jq} A^q_k - \hat{f}_{kq} A^q_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{jj} = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Композиции элементов Λ_{jk} легко получить из формул (24):

$$\begin{gathered}[\Lambda_{jj},\ \Lambda_{kk}] = 0,\\ [\Lambda_{jj},\ \Lambda^{(+)}_{pq}] = -\hat{f}_{jq} \Lambda^{(-)}_{pj} + \hat{f}_{pj} \Lambda^{(-)}_{jq},\\ [\Lambda_{jj},\ \Lambda^{(-)}_{pq}] = \hat{f}_{jq} \Lambda^{(+)}_{pj} - \hat{f}_{pj} \Lambda^{(+)}_{jq},\\ [\Lambda^{(+)}_{jk},\ \Lambda^{(-)}_{pq}] = \hat{f}_{jq} \Lambda^{(+)}_{pk} - \hat{f}_{pk} \Lambda^{(+)}_{jq} + \hat{f}_{kq} \Lambda^{(+)}_{pj} - \hat{f}_{pj} \Lambda^{(+)}_{kq}.\end{gathered} \tag{26}$$

Базис Окубо можно ввести и в других линейных алгебрах Ли, названных в табл. 3. Однако для них закон композиции матриц Окубо становится слишком громоздким.

Пусть $A = ([\,],\ V^n_K)$. Выберем в пространстве $\mathrm{Mat}(n,\ K)$ такие эндоморфизмы m, для которых выполняется равенство

$$m \cdot [v_1,\ v_2] = [m \cdot v_1,\ v_2] + [v_1,\ m \cdot v_2]. \tag{27}$$

Они называются *дифференцированиями алгебры A*. В силу билинейности лиевой композиции [,] множество всех таких матриц образует подпространство в $\mathrm{Mat}(n, K)$. Если m_1 и m_2 удовлетворяют условию (27), то, как легко заметить, тем же свойством обладает и коммутатор $[m_1, m_2]$. Следовательно, множество всех дифференцирований (с композицией в виде матричного коммутатора) образует подалгебру в $gl(n, K)$. Она называется *алгеброй всех дифференцирований* алгебры A и обозначается через $\mathrm{Der}\, A$.

Множество элементов группы $GL(n, K)$ (группы автоморфизмов пространства V_K^n), сохраняющих композицию алгебры A, образует подгруппу $\mathrm{Aut}\, A$ в $GL(n, K)$. Она называется *группой (всех) автоморфизмов* алгебры A.

(22) Упражнение. Докажите, что $\mathrm{Der}\, A$ есть алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}\, A$. ▼

Введенные в § 2 присоединенные операторы (см. формулу (9)) также являются дифференцированиями:

$$\mathrm{ad}_v [v_1, v_2] = [v [v_1, v_2]] = [[v, v_1] v_2] + [v_1 [v, v_2]] = \\ = [\mathrm{ad}_v v_1, v_2] + [v_1, \mathrm{ad}_v v_2].$$

Множество присоединенных операторов оказывается замкнутым относительно матричного коммутатора, т. е. в свою очередь образует подалгебру в алгебре $\mathrm{Der}\, A$. Эта подалгебра носит название *алгебры внутренних дифференцирований* $\mathrm{der}\, A$ алгебры $A : \mathrm{der}\, A \subset \mathrm{Der}\, A$.

(23) Упражнение. Покажите, что подалгебра $\mathrm{der}\, A$ является идеалом в $\mathrm{Der}\, A$. ▼

Применим оператор $\mathrm{ad}_{[v_1, v_2]}$ к вектору $v \in V$:

$$\mathrm{ad}_{[v_1, v_2]} v = [[v_1, v_2] v] = \mathrm{ad}_{v_1} \mathrm{ad}_{v_2} v - \\ - \mathrm{ad}_{v_2} \mathrm{ad}_{v_1} v = [\mathrm{ad}_{v_1}, \mathrm{ad}_{v_2}] v. \qquad (28)$$

Из равенства (28) следует, что отображение $v \to \mathrm{ad}_v$ алгебры A в алгебру ее внутренних дифференцирований есть гомоморфизм алгебр Ли.

Пусть L — кольцо линейных операторов l, действующих в пространстве W. На пространстве L естественно вводится структура алгебры Ли с композицией

$$[l_1, l_2] = l_1 l_2 - l_2 l_1$$

(см. § 7 (**2.111**)). Гомоморфизм d алгебры Ли A в алгебру Ли $\mathscr{L} = ([,], L)$ линейных операторов называется (линейным) *представлением* $d(A, W)$ алгебры A в пространстве W. Представление называется *точным*, если $\mathrm{Ker}\, d = 0$.

Гомоморфизм $\mathrm{Ad} : v \to \mathrm{ad}_v$ алгебры A в алгебру ее внутренних дифференцирований носит название *присоединенного представления* $\mathrm{Ad}\,(A)$ алгебры A. Ядро присоединенного представления совпадает с $Z(A)$.

Выберем базис $\{v_i\}$ в пространстве V алгебры A и вычислим матрицу оператора ad_{v_i} в этом базисе:

$$\mathrm{ad}_{v_i} v_j = [v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k.$$

Присоединенный оператор базисного элемента алгебры действует на V как матрица, составленная из структурных констант алгебры.

§ 4. Разрешимые, нильпотентные, простые и полупростые алгебры Ли. Радикал. Теорема Леви—Мальцева

Пусть W_1 и W_2 — подпространства в пространстве V алгебры Ли $A=([\,],\ V)$. Под $[W_1, W_2]$ будем понимать подпространство в V, являющееся линейной оболочкой элементов вида $[w_1, w_2]$ $(w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2)$. Построим следующие два ряда подпространств в V:

а) *производный ряд*

$$\begin{aligned}
&[V, V] \equiv V^{(1)},\\
&\left[V^{(1)}, V^{(1)}\right] \equiv V^{(2)},\\
&\left[V^{(2)}, V^{(2)}\right] \equiv V^{(3)}, \ldots\\
\ldots &\left[V^{(n-1)}, V^{(n-1)}\right] \equiv V^{(n)} \ldots\\
&V \supset V^{(1)} \supset \ldots\\
\ldots &\supset V^{(n-1)} \supset V^{(n)} \supset \ldots
\end{aligned}$$

б) *центральный* (убывающий) *ряд*

$$\begin{aligned}
&[V, V] \equiv V_{(1)} = V^{(1)},\\
&[V, V_{(1)}] \equiv V_{(2)},\\
&[V, V_{(2)}] \equiv V_{(3)} \ldots\\
\ldots &[V, V_{(n-1)}] \equiv V_{(n)} \ldots\\
&V \supset V_{(1)} \supset \ldots\\
\ldots &\supset V_{(n-1)} \supset V_{(n)} \supset \ldots
\end{aligned} \tag{29}$$

Алгебра A называется ***разрешимой***, если существует целое положительное n, такое, что $V^{(n)}=0$, т. е. производный ряд обрывается. В частности, если алгебра абелева, то $V^{(1)}=0$.

Алгебра A называется ***нильпотентной***, если существует целое положительное n, такое, что $V_{(n)} = 0$, т. е. обрывается центральный ряд. Очевидно, что для абелевой алгебры A, как и в предыдущем случае, $V_{(1)} \approx V^{(1)}=0$. Отметим, что из условия $V_{(n)} = 0$ сразу следует, что алгебра A имеет нетривиальный центр $Z(A) = ([\,]_A, V_{(n-1)})$.

Из сравнения рядов (29а) и (29б) вытекает, что нильпотентная алгебра всегда разрешима, но не наоборот.

Существуют другие эквивалентные определения разрешимости и нильпотентности [25]. Например, алгебра A нильпотентна, если существует такое целое положительное n, что для любого набора n элементов $v_1, \ldots, v_n \in V$ справедливо равенство

$$\mathrm{ad}_{v_1}\mathrm{ad}_{v_2} \ldots \mathrm{ad}_{v_{n-1}}\mathrm{ad}_{v_n} = 0. \tag{30}$$

Перечислим важнейшие свойства разрешимых и нильпотентных алгебр Ли.

(24) Всякое производное подпространство $V^{(i)}$ алгебры замк-

нуто относительно ограничения на $V^{(i)}$ ее закона композиции. Полученные таким образом подалгебры $\ldots A^{(n)} \subset A^{(n-1)} \subset \ldots \subset \subset A^{(1)} \subset A$ называются *производными подалгебрами* алгебры A.

(25) Производная подалгебра $A^{(i)}$ является идеалом в алгебре A.

(26) Факторалгебра $A^{(i)}/A^{(i+1)}$ абелева.

(27) Если A разрешима, т. е. $A^{(n)}=0$, то $A^{(n-1)}$ — абелев идеал в A. Разрешимая алгебра всегда содержит нетривиальный абелев идеал.

(28) Если A разрешима, то всякая ее подалгебра и всякая ее факторалгебра разрешимы.

(29) Алгебра A разрешима, если она содержит разрешимый идеал J, такой, что факторалгебра A/J разрешима.

(30) Всякое подпространство $V_{(i)}$ центрального ряда (29б) замкнуто относительно ограничения композиции $[\,]_A$ на $V_{(i)}$.

(31) Подалгебра $A_{(i)}$ является идеалом в A.

(32) Факторалгебра $A_{(i)}/A_{(i+1)}$ — центр в алгебре $A/A_{(i+1)}$. $\triangledown$

Все эти свойства легко получить, используя только определения подпространств $V^{(i)}$ и $V_{(j)}$ (см. формулу (29)). Докажем в качестве иллюстрации свойство **(25)**.

Из формул (29а) и свойства **(24)** следует, что $A^{(1)}$ — идеал в A. Предположим, что $A^{(i-1)}$ — идеал в A. Тогда, используя тождество Якоби, получаем

$$[V,\ V^{(i)}] = [V\,[V^{(i-1)},\ V^{(i-1)}]] = [V^{(i-1)}\,[V,\ V^{(i-1)}]] + \\ + [V^{(i-1)}\,[V^{(i-1)}, V]] = [V^{(i-1)},\ V^{(i-1)}] = V^{(i)},$$

т. е. $A^{(i)}$ — идеал в A. ▼

Очевидно, что абелева алгебра разрешима и нильпотентна.

(33) Примеры. Подалгебра A верхних (нижних) треугольных матриц в алгебре $gl(n,\ K)$ разрешима. Ее производный ряд обрывается на n-м шаге, $A^{(n)}=0$. Подалгебра $A^{(n-1)}$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & k \\ & 0 \\ 0 & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

является одномерным абелевым идеалом в A. Пространство первой производной подалгебры $A^{(1)}$ состоит из строго верхних (нижних) треугольных матриц (с равными нулю элементами главной диагонали).

(34) Подалгебра A строго верхних (нижних) треугольных матриц в $gl(n,\ K)$ нильпотентна. Центральный ряд обрывается в этом случае на $(n-1)$-м шаге, $A_{(n-1)}=0$. Здесь подалгебра $A_{(n-2)}$ матриц вида (31) — одномерный центр в A. ▼

Отметим, что в примере **(33)** первая производная подалгебра сама оказалась нильпотентной алгеброй. Это свойство справедливо и в общем случае.

(35) Первая производная подалгебра разрешимой алгебры нильпотентна. (Доказательство см. в [15].)

(36) Пример. Алгебра Ли операторов координат и импульсов в квантовой механике, порожденная скобкой $[\hat{p}, \hat{x}] = \hat{e}$, нильпотентна. ▼

Алгебра Ли A называется *полупростой*, если не содержит нетривиальных разрешимых идеалов.

(37) Алгебра Ли полупроста, если в ней нет абелевых идеалов (кроме нуля).

(38) Упражнение. Докажите свойство **(37)**, предварительно установив, что производная подалгебра $J^{(i)}$ идеала J алгебры A является в свою очередь идеалом алгебры A.

(39) Полупростая алгебра Ли совпадает со своей первой производной.

(40) Замечание. Обратное неверно. Например, алгебра $\boldsymbol{\pi}$ содержит абелев идеал $\boldsymbol{p}$. В то же время $\boldsymbol{\pi}^{(1)} \approx \boldsymbol{\pi}$ (см. **(1.49)** — **(1.52)**). ▼

Производный ряд алгебры, которая не является ни полупростой, ни разрешимой (содержит разрешимые идеалы), может стабилизироваться на любом конечном шаге.

Алгебра Ли $A = ([\,], V)$ называется *простой*, если не содержит нетривиальных идеалов и $\dim V > 1$.

Среди известных нам алгебр Ли физических симметрий отметим простые алгебры $su(2)$ и $\boldsymbol{l} \equiv sl(2, C)_R$. Критерий простоты и полная классификация простых алгебр Ли будут приведены в главе 5.

(41) Алгебра полупроста, если представима в виде прямой суммы простых (см. также **(5.6)**). ▼

Так, например, полупроста алгебра $so(4, R)$. Она изоморфна прямой сумме двух алгебр $su(2)$ (см. упражнение **(16)**).

Рассмотрим множество всех неэквивалентных разрешимых идеалов алгебры A. Если алгебра A конечномерна, то среди разрешимых идеалов найдется единственный идеал максимальной размерности, так называемый *радикал* алгебры Ли A.

(42) Всякий разрешимый идеал алгебры Ли содержится в ее радикале.

(43) Если $\mathscr{R}$ — радикал алгебры A, то факторалгебра $A/\mathscr{R}$ полупроста.

(44) Упражнение. Докажите эти утверждения, используя свойства **(28)** и **(29)**. ▼

Понятие радикала позволяет сформулировать очень важную структурную теорему.

(45) Теорема (Леви — Мальцева). Всякая алгебра Ли A, не являющаяся разрешимой, представима в виде полупрямой суммы $A \approx S \mathbin{|\!\!-} \mathscr{R}$ (*разложение Леви*), где S — **полупростая**

подалгебра, $\mathcal{R}$ — радикал алгебры A. Доказательство этой теоремы можно найти в [11].

(46) Примеры. Изоморфизмы $e(3) \approx so(3) \vdash p(3)$, $\pi \approx so(3, 1) \vdash p(4)$ есть разложения Леви. Радикалы $p(3) \subset \subset e(3)$ и $p(4) \subset \pi$ абелевы.

(47) Алгебра Ли группы $E(2)$ представима в виде полупрямой суммы $so(2) \vdash p(2)$, но это не есть разложение Леви, так как алгебра $so(2)$ одномерна (а значит, абелева). Алгебра $e(2)$ разрешима.

§ 5. Восстановление группы Ли по алгебре Ли. Ряд Кэмпбелла—Хаусдорфа. Экспоненциальное отображение

В (21) с помощью матричной экспоненты мы всякому элементу линейной алгебры Ли сопоставили локально элемент соответствующей группы Ли. Матрицы x линейной алгебры Ли служили аналитическими координатами элемента $g = \exp x$ в окрестности единицы. По закону композиции линейной алгебры можно восстановить (локально) закон композиции группы в канонических координатах $\{x\}$:

$$\exp x \exp y = \exp z, \quad z = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \ldots \qquad (32)$$

Таким образом, всякой линейной алгебре Ли сопоставляется локальная группа Ли. В формуле (32) функция $z(x, y)$ выписана лишь с точностью до членов второго порядка по матричным элементам матриц x и y (максимум модуля матричных элементов x и y определяется размерами окрестности U_e, в которой строится локальная группа). Оказывается, зная закон композиции $[,]$, можно найти все члены разложения функции $z(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k_i + l_i \geq 1 \\ k_i \geq 0,\ l_i \geq 0}} \frac{[\ldots[\overbrace{x, \ldots x}^{k_1}] \overbrace{y] \ldots y}^{l_1}] \overbrace{x] \ldots x}^{k_2}] \overbrace{y] \ldots}^{l_2} \ldots \overbrace{x] \ldots x}^{k_m}] \overbrace{y] \ldots y}^{l_m}]}{(k_1 + \ldots + k_m + l_1 + \ldots + l_m)\, k_1!\, l_1! \ldots k_m!\, l_m!} \qquad (33)$$

$$(k_1 = 0,\ 1).$$

Доказательство формулы (33) — *формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа* и оценку ее сходимости можно найти в [22, 25].

Ряд (33) неудобен для вычислений, но его существование доказывает возможность восстановления умножения в локальной группе сколь угодно точно по ее алгебре Ли. С помощью формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа можно получить полезные соотношения

$$\exp(tX)\cdot Y\cdot\exp(-tX)=\exp(t\,\mathrm{ad}\,X)\,Y, \tag{34}$$

$$\exp X\exp Y\exp(-X)=\exp(\exp(X)\,Y\cdot\exp(-X))=$$
$$=\exp(\exp(\mathrm{ad}\,X)\,Y), \tag{35}$$

где $\mathrm{ad}X$ — присоединенный оператор элемента X в линейной алгебре A.

Обобщим описанную выше процедуру восстановления локальной группы Ли на случай произвольной алгебры Ли. Введем понятие *экспоненциального отображения*, аналогичное матричной экспоненте. Пусть $A=([\,],\ V)$ — алгебра Ли, v — окрестность $0\in V$, в которой ряд (33) сходится для x, $y\in v$. Определим формально множество $\exp v$, изоморфное v, и зададим на нем топологию, потребовав, чтобы отображение $\exp: v\leftrightarrow\overline{G}$ было гомеоморфизмом. На топологическом пространстве $\overline{G}$ с помощью формул (32), (33) построим аналитический закон композиции, который снабдит $\overline{G}$ структурой локальной группы Ли. (При этом матричные коммутаторы следует заменить композициями алгебры A.) Сформулируем вывод в виде теоремы.

(48) **Теорема.** Всякая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой локальной группы Ли.

Подробное доказательство см. в [24, 25]. ▼

Известно, что всякой локальной группе Ли однозначно сопоставляется связная односвязная группа Ли (см. § 3.8).

(49) **Теорема.** Всякой алгебре Ли однозначно сопоставляется связная односвязная группа Ли, алгеброй Ли которой она является. ▼

Таким образом, задача восстановления группы Ли по алгебре Ли получает окончательное решение. Всякая связная группа Ли G с заданной алгеброй A есть факторгруппа $\widehat{G}/N$ по дискретной нормальной подгруппе $N\subset\widehat{G}$ (см. (**3.110**)). Напомним, что несвязная группа эквивалентна расширению некоторой дискретной группы по связной группе Ли $K(e)\subset G$ (см. утверждение (**3.48**)). Классификация групп Ли сводится к классификации алгебр Ли и дискретных групп.

При экспоненциальном отображении прямой tX, проходящей через начало координат в пространстве V, сопоставляется в U_e однопараметрическая подгруппа $g(t)=\exp tX\subset G$, единственная, имеющая касательный вектор X (см. (**3.70**)). Пусть элементы $\exp tX$, $\exp tY$ и $\exp tZ$ принадлежат U_e и $\exp(tX)\times\times\exp(tY)=\exp(tZ)$. Тогда tZ совпадает с рядом Кэмпбелла — Хаусдорфа от tX и tY. Рассмотрим гомоморфизм $f: A\to B$ алгебр Ли. Сопоставим алгебре B локальную группу H с помощью экспоненциального отображения и выделим в H элементы $\exp(tf(X))$, $\exp(tf(Y))$ и $\exp(tf(Z))$. В силу гомоморфности отображения f элемент $tf(Z)$ отождествляется с рядом Кэмпбелла—

Хаусдорфа от $tf(X)$ и $tf(Y)$ (см. формулу (16)). Следовательно, $\exp(tf(X))\exp(tf(Y)) = \exp(tf(Z))$, т. е., гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм $\varphi \equiv \exp f$, такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \tag{36}$$

коммутативна. Сопоставим согласно теореме (49) алгебрам A и B единственные связные односвязные группы Ли $\widehat{G}$ и $\widehat{H}$. Группы G и H — локальные подгруппы в $\widehat{G}$ и $\widehat{H}$. В соответствии с теоремой о монодромии (теорема (**3.107**)) локальному гомоморфизму φ однозначно сопоставляется глобальный гомоморфизм $\Phi : \widehat{G} \to \widehat{H}$. Окончательно приходим к следующему выводу.

(50) Теорема. Конечномерные представления связных односвязных групп Ли находятся во взаимно-однозначном соответствии с представлениями их алгебр Ли. ▼

Это утверждение играет решающую роль в инфинитезимальном методе теории представлений (см. § 6.5).

(51). Пример. Отождествим пространство присоединенного представления алгебры $su(2)$ с подпространством бесследовых эрмитовых матриц в $\mathrm{Mat}(2, C)$ (см. табл. 3). С помощью экспоненциального отображения представлению $\mathrm{Ad}(su(2))$ сопоставляется представление $\mathcal{A}d$ группы $SU(2)$ в том же пространстве с операторами

$$\mathcal{A}d(g) : Y \to gYg^{-1}$$

(см. формулу (34)). Сопоставление это взаимно-однозначно, так как группа $SU(2)$ связна и односвязна. Представление $\mathcal{A}d$ называется *присоединенным представлением группы*. ▼

ГЛАВА 5

ПРОСТЫЕ И ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Разложение Леви позволяет свести изучение произвольной алгебры Ли к анализу полупростой подалгебры и радикала. При построении индуцированных представлений будет выяснено, что структура неприводимых представлений алгебры Ли почти полностью определяется свойствами фактора Леви — полупростой подалгебры.

Важнейшим свойством полупростых алгебр Ли является существование аналога скалярного произведения — формы Киллинга, — инвариантного относительно присоединенного представления алгебры.

§ 1. Форма Киллинга. Критерий Картана

Пусть $d(A, W)$ — представление алгебры A в пространстве W. *Инвариантным элементом* пространства W назовем $w \in W$, такой, что $d(a)w = 0$ для всех $a \in A$.

(1) Пример. В присоединенном представлении $\mathrm{Ad}(gl(2, C))$ матрицы вида $\lambda I \in \mathrm{Mat}(2, C)$ — инвариантные элементы пространства представления. ▼

Рассмотрим два представления $d(A, V)$ и $b(A, W)$ алгебры A. На их тензорном произведении $V \otimes W$ можно реализовать представление c алгебры A по правилу

$$c(a)(v \otimes w) = d(a) v \otimes w + v \otimes b(a) w = \\ = (d(a) \otimes I + I \otimes b(a))(v \otimes w). \tag{1}$$

Легко проверить, что отображение c — гомоморфизм $A \to gl(V \otimes \otimes W)$. Представление $c(A, V \otimes W)$ называется *тензорным произведением представлений* d и b, $c \equiv d \otimes b$.

Пусть на пространствах представлений V и W задана билинейная форма $\langle , \rangle$. Рассмотрим ее как отображение $V \otimes W \xrightarrow{\langle , \rangle} K$ (K — основное поле). Форма называется *инвариантной*, если индуцирует на K тривиальное представление алгебры A. Это означает, что образ всякого элемента $c(a)(v \otimes \otimes w)$ в K равен нулю:

$$\langle d(a) v, w \rangle + \langle v, b(a) w \rangle = 0. \tag{2}$$

В частности, инвариантной формой является *форма следа*, строящаяся на пространстве V алгебры $A=([\,], V)$ с помощью конечномерного представления $d(A, W)$:

$$\langle v_1, v_2\rangle = \mathrm{Tr}\,(d(v_1), d(v_2)). \tag{3}$$

Она инвариантна относительно действия A на V как на пространстве присоединенного представления.

(2) Упражнение. Покажите инвариантность формы следа. ▼

Из определения (3) следует, что форма следа симметрична. Частным случаем формы следа является *форма Киллинга*

$$\mathscr{K}(v_1, v_2) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{v_1}\mathrm{ad}_{v_2}). \tag{4}$$

Здесь в роли представления d выступает присоединенное представление.

Теперь можно сформулировать два фундаментальных положения теории полупростых алгебр Ли.

(3) Критерий Картана разрешимости. Линейная алгебра Ли $A=([\,], V)$ разрешима в том и только в том случае, если форма $\mathrm{Tr}\,(vv_{(1)})$ обращается в нуль для всех $v\in V$ и $v_{(1)}\in V^{(1)}$ (см. формулу (4.29)). ▼

Иными словами, необходимым и достаточным условием разрешимости линейной алгебры является ортогональность пространств $V^{(1)}$ и V по форме $\mathrm{Tr}\,(vv')$.

(4) Критерий Картана полупростоты. Алгебра Ли A полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена. ▼

Доказательство критериев Картана [25, 28] выходит за рамки предлагаемого курса.

(5) Пусть $A=([\,], V)$ — полупростая алгебра Ли, $J=([\,], W)$ — ее идеал. Тогда ограничение композиции $[\,]_A$ на подпространство $W_\perp$, ортогональное к W в V по форме $\mathscr{K}$, задает идеал $J_\perp=([\,], W_\perp)$, причем $A\approx J\oplus J_\perp$.

Доказательство. По условию $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_w\mathrm{ad}_u)=0$ для всех $w\in W$ и $u\in W_\perp$. Рассмотрим величину $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_w\mathrm{ad}_{[v,u]})$ при произвольном $v\in V$ и воспользуемся инвариантностью формы $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K}(w, [v,u]) = -\mathscr{K}([v,w],u) = -\mathscr{K}(w',u) = 0.$$

Отсюда следует, что элемент $[v, u]$ также принадлежит $W_\perp$, т. е. $J_\perp=([\,], W_\perp)$ — идеал. Пересечение пространств W и $W_\perp$ равно нулю, так как на нем невырожденная форма $\mathscr{K}$ тождественно равна нулю. Очевидно также, что всякая композиция $[w, u]$ тривиальна. Кроме того, поскольку $\mathscr{K}$ билинейна, невырождена и симметрична, пространство V можно представить в виде $V\approx W\oplus W_\perp$. Следовательно, $A\approx J\oplus J_\perp$ (см. § 2.6). ▼

(**6**) Полупростая алгебра представима в виде прямой суммы простых единственным образом (ср. с (**4.41**)).

Доказательство. Поскольку размерность алгебры Ли конечна, то процесс последовательного выделения идеалов в ней ограничен. В итоге приходим к представлению алгебры A в виде такой прямой суммы $J_1 \oplus \ldots \oplus J_m$, где каждое слагаемое не имеет нетривиальных идеалов. Размерность $\dim J_k > 1$, так как всякая одномерная алгебра абелева, а абелев идеал не может содержаться в полупростой A.

Единственность разложения $A \approx J_1 \oplus \ldots \oplus J_m$ следует из «минимальности» прямых слагаемых J_k. ▼

(**7**) Всякий идеал полупростой алгебры полупрост. Это утверждение легко получить с помощью свойства (**6**).

(**8**) Первая производная подалгебра $A^{(1)}$ полупростой алгебры $A = ([\,],\ V)$ совпадает с A.

Доказательство тривиально.

(**9**) Форма следа точного конечномерного представления полупростой алгебры A невырождена.

(**10**) Упражнение. Докажите утверждение (**9**), используя инвариантность формы следа и свойство (**7**).

(**11**) Пусть $B = ([\,],\ V_B)$ — полупростая подалгебра произвольной алгебры Ли $A = ([\,],\ V)$. Ортогональное дополнение $V_\perp$ к V_B по форме Киллинга $\mathscr{K}$ алгебры A обладает следующими свойствами: $V_\perp \oplus V_B \approx V$, $[V_\perp,\ V_B] \subset V_\perp$, и если B — идеал в A, то и $([\,],\ V_\perp)$ — идеал в A.

Доказательство. Ограничение $\mathscr{K}_B$ формы $\mathscr{K}$ на подпространство V_B есть форма следа представления d алгебры B, где $d \approx \mathrm{Ad} A_{\downarrow V_B}$ — ограничение присоединенного представления на V_B. Так как B полупроста, то представление d точное и $\mathscr{K}_B$ невырождена (см. свойство (**9**)). Следовательно, $V \approx \approx V_B \oplus V_\perp$. Тогда из инвариантности $\mathscr{K}$ легко выводятся два последних свойства $V_\perp$. ▼

(**12**) Всякое дифференцирование полупростой алгебры A внутреннее.

Доказательство. Алгебра внутренних дифференцирований $\mathrm{der}\, A = ([\,],\ M)$ реализует точное представление полупростой алгебры A и является идеалом алгебры $\mathrm{Der}\, A = ([\,],\ N)$. Следовательно, $N \approx M \oplus M_\perp$ и $[M,\ M_\perp] = 0$ (см. свойство (**11**)). Рассмотрим элемент $\mathrm{ad}_{(m_\perp v)} w$, где $m_\perp \in M_\perp$, $v,\ w \in A$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{(m_\perp v)} w &= [m_\perp v,\ w] = \\ &= -[v,\ m_\perp w] + m_\perp [v,\ w] = [m_\perp,\ \mathrm{ad}\, v]\, w = 0. \end{aligned}$$

Так как v и w произвольны, полученное равенство означает, что $m_\perp = 0$. ▼

(**13**) Действительная полупростая алгебра Ли **компактна** тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга отрицательно определена. ∇

Приведем доказательство первой части этого утверждения, которое наглядно демонстрирует связь между свойствами формы Киллинга и топологией соответствующей группы Ли. (Полное доказательство см. в [32, гл. 2].)

Пусть A — полупростая алгебра Ли с отрицательно определенной формой $\mathscr{K}$. Алгебра A изоморфна $\operatorname{der} A$ (свойство (**12**)), причем в данном случае $\operatorname{der} A$ является алгеброй Ли группы $\operatorname{Aut} A$ (см. упражнение (**4.22**)). Так как форма $\mathscr{K}$ инвариантна, группа $\operatorname{Aut} A$ сохраняет $\mathscr{K}$, т. е. $\operatorname{Aut} A$ — подгруппа в $U_{\mathscr{K}}(V, R)$, выделяемая условием (**4.27**) (системой алгебраических уравнений). Для знакоопределенной формы $\mathscr{K}$ группы $U_{\mathscr{K}}(V, R)$ и $\operatorname{Aut} A$ компактны. $\blacktriangledown$

(**14**) Замечание. Отрицательная определенность формы $\mathscr{K}$ связана с тем, что матрицы присоединенных операторов антисимметричны — этого требует инвариантность формы. След квадрата нетривиальной антисимметричной матрицы отрицательно определен. $\blacktriangledown$

(**15**) Пример. Присоединенное представление алгебры $su(2)$ (см. пример (**4.4**)) имеет вид

$$\mathrm{ad}_{l_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_{l_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_{l_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Форма Киллинга на базисных элементах обладает свойством

$$\mathscr{K}(l_i, l_i) = \operatorname{Tr}\left(\mathrm{ad}_{l_i} \mathrm{ad}_{l_i}\right) = -1.$$

Алгебра $su(2)$ компактна.

(**16**) Упражнение. Постройте алгебру $\operatorname{Der} \pi$ (π — алгебра Ли группы Пуанкаре (см. (1.49)—(1.52) и пример (**4.46**)).

Указание. Алгебра $\operatorname{Der} \pi$ содержит подалгебру $\operatorname{Der} so(3, 1)$ — алгебру дифференцирований простой алгебры Лоренца. Следовательно, $\operatorname{Der} \pi \supset so(3, 1)$.

Ответ. $\operatorname{Der} \pi \approx \pi \mathbin{|\!\!-} a$, где a — одномерная абелева подалгебра. Физический смысл преобразований a — изотропное растяжение координатных осей.

§ 2. Комплексификации, овеществления и вещественные формы

Основным инструментом исследования полупростых алгебр Ли является система собственных векторов и собственных значений операторов присоединенного представления. Пространство вещественной алгебры Ли может не содержать соответствующих собственных векторов. Это вынуждает при изучении вещественных полупростых алгебр переходить от пространства V_R к его комплексному расширению $V_{R\uparrow C}$. Рассмотрим алгебраические свойства этой процедуры.

Пусть $A=([\,], V_R)$ — вещественная алгебра Ли. Распространим по линейности закон композиции [,] на пространство V_C:

$$[v_1+iv_2,\ v_3+iv_4]\equiv[v_1,\ v_3]-[v_2,\ v_4]+i\,[v_2,\ v_3]+i\,[v_1,v_4],$$

где $v_i\in V_R$. Тем самым мы задали комплексную алгебру Ли $A_{\uparrow C}=([\,],\ V_C)$, которая называется *комплексификацией* вещественной *алгебры* A. Очевидно, что размерность алгебры при этом не меняется. Выясним, как отражается комплексификация на структурных свойствах алгебры.

(17) Подалгебры, идеалы, а также свойства разрешимости и нильпотентности (в том числе наличие радикала) сохраняются при комплексификации.

Доказательство. Расширение поля скаляров не может отразиться на существовавших в вещественной алгебре Ли подалгебрах и идеалах и изменить вид производного и центрального рядов алгебры. ▼

(18) Если вещественная алгебра A полупроста (разрешима), **то и** ее комплексификация $A_{\uparrow C}$ полупроста (разрешима), и наоборот. (Формы Киллинга алгебр A и $A_{\uparrow C}$ невырождены (вырождены) одновременно.) ▼

Следует подчеркнуть, что подалгебры и идеалы в $A_{\uparrow C}$ могут не иметь аналогов в исходной алгебре A.

(19) Пример. Алгебра $so(3,\ R)$ при комплексификации остается трехмерной простой алгеброй Ли: $so(3,\ R)_{\uparrow C}\approx$ $\approx so(3,\ C)$. Комплексифицируем вещественную простую алгебру $so(3,\ 1)$. Выберем в алгебре $so(3,\ 1)_{\uparrow C}$ базис $\{l_j,\ n_k\}$ (см. формулы (1.49)). Используя композицию (1.49), легко проверить, что линейные оболочки элементов $^1/_2(l_j+in_j)$ и $^1/_2(l_j-$ $-in_j)$ составляют подпространства идеалов в алгебре $so(3,\ 1)_{\uparrow C}$, в то время как в исходной вещественной алгебре нетривиальные идеалы отсутствовали. Каждая из полученных подалгебр эквивалентна $so(3,\ R)_{\uparrow C}$, так что $so(3,\ 1)_{\uparrow C}\approx$ $\approx so(3,\ C)\oplus so(3,\ C)$. ▼

Пусть теперь $A=([\ ],\ V_C)$ — комплексная алгебра Ли. Сузим поле скаляров до R, т. е. рассмотрим V_C как вещественное пространство вдвое большей размерности $(V)_R$. Всякий элемент $v\in(V)_R$ является в то же время элементом V_C, тем самым закон композиции алгебры A переносится на $(V)_R$. Очевидно, что полученная конструкция является алгеброй Ли. Назовем ее *овеществлением* $(A)_R$ комплексной *алгебры* Ли $A:(A)_R=$ $=([\ ],\ (V)_R)$. Нетрудно установить связь между свойствами комплексной алгебры A и ее овеществления $(A)_R$.

(20) При овеществлении подалгебра переходит в подалгебру, идеал — в идеал. Разрешимая (нильпотентная) алгебра имеет разрешимое (нильпотентное) овеществление.

(21) Если A полупроста, то $(A)_R$ полупроста, и наоборот.

Доказательство. Если алгебра содержит разрешимый идеал, то она содержит абелев идеал (см. свойство (**4.27**)). Если же A содержит абелев идеал, то тем же свойством обладает и $(A)_R$, т. е. из полупростоты $(A)_R$ следует полупростота A. Пусть форма Киллинга $\mathscr{K}$ алгебры $(A)_R$ вырождена. В этом случае $\operatorname{Ker}\mathscr{K}$ ортогонально всякому базисному элементу v_k пространства V алгебры. В свою очередь всякий элемент $w \in \operatorname{Ker}\mathscr{K}$ разложим в базисе $\{v_k, iv_k\}$. Форма $\mathscr{K}$ на базисных элементах $\{v_k\}$ совпадает со значениями исходной формы Киллинга $\mathscr{K}_0$ алгебры A на $\{v_k\}$. Следовательно, вырожденность формы $\mathscr{K}$ алгебры $(A)_R$ влечет за собой вырожденность $\mathscr{K}_0$: из полупростоты A следует полупростота $(A)_R$. ▼

(22) Если A проста, то $(A)_R$ проста, и наоборот.

(23) Упражнение. Докажите свойство (22).

(24) Пример. Выберем в комплексной простой алгебре $sl(2, C)$ базис в виде матриц $-{}^i/_2\,\sigma_k$. В алгебре $sl(2, C)$ число базисных элементов увеличивается вдвое: $\{-{}^i/_2\,\sigma_k, {}^1/_2\,\sigma_k\}$. Структурные константы алгебры $sl(2, C)_R$ в этом базисе совпадают со структурными константами алгебры $so(3, 1)$ в базисе $\{l_k, n_k\}$ (см. (**1.49**)). Иными словами, $sl(2, C)_R \approx so(3, 1)$. ▼

Перейдем к рассмотрению операции, которая в известном смысле является обратной к комплексификации.

Пусть $A = ([\;], V_C)$ — комплексная алгебра Ли. Построим ее овеществление $(A)_R$. Выберем в $(A)_R$ такую подалгебру $A_{\downarrow R}$, чтобы ее комплексификация $A_{\downarrow R \uparrow C}$ была изоморфна исходной алгебре A. Алгебра $A_{\downarrow R}$ носит название *вещественной формы* комплексной *алгебры* A. Размерности алгебр A и $A_{\downarrow R}$ совпадают. Поскольку $A_{\downarrow R \uparrow C} \approx A$, то всякой подалгебре (идеалу) в $A_{\downarrow R}$ соответствует подалгебра (идеал) в A, но не наоборот (см. пример (**19**)). Разрешимость и нильпотентность алгебр $A_{\downarrow R}$ и A одинаковы. Очевидно также, что алгебра A и ее вещественная форма $A_{\downarrow R}$ полупросты и неполупросты одновременно (см. свойство (**18**)). Построение вещественной формы эквивалентно выбору в алгебре A такого базиса, в котором все структурные константы действительны.

(25) Замечание. В приложениях нас будут интересовать как эрмитовы, так и антиэрмитовы представления алгебр симметрии. Но в представлении вещественной алгебры Ли переход от эрмитова к антиэрмитову оператору (и наоборот), осуществляемый умножением на i, приводит к тому, что все структурные константы становятся мнимыми. Так что мы часто будем встречаться с представлениями d вещественных алгебр Ли A, для которых

$$d([a_1, a_2]) = i[d(a_1), d(a_2)].$$

Желательно по-прежнему считать представление d гомоморфизмом вещественных алгебр. Поэтому алгебру Ли с мнимыми структурными константами будем рассматривать как эквивалентную реализацию вещественной алгебры. ▼

Следующее утверждение является тривиальным следствием свойства (**17**).

(**26**). Если алгебра A проста, то и ее вещественная форма $A_{\downarrow R}$ проста. ▼

Известно, что всякая комплексная группа Ли G может рассматриваться как вещественная группа Ли $(G)_R$ вдвое большей локальной размерности. Назовем группу $(G)_R$ *овеществлением* комплексной *группы* Ли G. Следующее свойство оправдывает введение этого термина.

(**27**) Алгебра Ли группы $(G)_R$ изоморфна овеществлению $(A)_R$ алгебры Ли A группы G. ▼

Вещественной формой $G_{\downarrow R}$ комплексной *группы* Ли G называется подгруппа группы $(G)_R \supset G_{\downarrow R}$, алгебра Ли которой совпадает с вещественной формой $A_{\downarrow R}$ алгебры Ли A группы G. Если группа $G_{\downarrow R}$ компактна, то она носит название *компактной вещественной формы группы* G. В этом случае алгебра Ли $A_{\downarrow R}$ называется *компактной вещественной формой алгебры* A.

(**28**) Примеры. Группы $SU(n)$ и $SO(n, R)$ являются компактными вещественными формами групп $SL(n, C)$ и $SO(n, C)$ соответственно. Их алгебры Ли $su(n)$ и $so(n, C)$ — компактные вещественные формы алгебр $sl(n, C)$ и $so(n, C)$.

(**29**) Группа $SO(3, R)$ не является вещественной формой группы $SL(2, C)$, несмотря на то, что алгебра $so(3, R) \approx su(2)$. Группа $SO(3, R)$ — компактная вещественная форма группы $SO(3, C)$.

§ 3. Подалгебры Картана. Разложение Картана

В дальнейшем, если не оговорено противное, $A = ([\ ], V_C)$ будет означать комплексную простую алгебру Ли.

Основным инструментом исследования простых алгебр является присоединенное представление. Сопоставим всякому присоединенному оператору $\mathrm{ad}_v (v \in V_C)$ характеристический полином

$$P_v(\lambda) = \det(\lambda I - \mathrm{ad}_v) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k c_k(v), \tag{5}$$

где $n = \dim V$, $c_k(v)$ — однородная степени $n-k$ полиномиальная функция компонент вектора v. В соответствии с теоремой Келли — Гамильтона [5] всякий присоединенный оператор является решением своего характеристического уравнения:

$$P_v(\mathrm{ad}_v) = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{ad}_v)^k c_k(v) = 0. \tag{6}$$

Предположим, что характеристические полиномы построены для всех операторов присоединенного представления $\mathrm{Ad}(A)$. Тем самым определены $n+1$ числовых функций $c_k(v)$ на пространстве V. Наименьший номер функции $c_k(v)$, не равной тождественно нулю, называется *рангом алгебры* A.*) Для вычисления ранга достаточно построить характеристические полиномы базисных элементов алгебры.

(30) Пример. Если в алгебре $sl(2, C)$ в качестве базиса выбрать матрицы $\{{}^1\!/_2\sigma_k = l_k\}$, то ее структурные константы будут мнимыми и равными $i\varepsilon^l_{jk}$ (ср. пример **(4.14)**). Диагонализуем оператор ad_{l_3} и перейдем к базису его собственных векторов:

$$\{l_3,\ l_\pm = (1/\sqrt{2})\,(l_1 \pm il_2)\},$$

$$[l_3,\ l_\pm] = \pm l_\pm,\ [l_+, l_+] = [l_-, l_-] = 0,\ [l_+, l_-] = l_3. \tag{7}$$

В этом базисе матрицы присоединенных операторов и их характеристические полиномы имеют вид

$$\mathrm{ad}_{l_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}_{l_+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}_{l_-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{l_3}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda,\ P_{l_+}(\lambda) = \lambda^3,\ P_{l_-}(\lambda) = \lambda^3.$$

Сравнивая полученные выражения с формулой (5), находим наименьший номер нетривиальной функции. Ранг алгебры $sl(2, C)$ равен единице. ▼

(31) Ранг r алгебры A удовлетворяет неравенству $0 < r \leqslant n$, где $n = \dim V$. (Определитель присоединенного оператора всегда равен нулю, так как всякий элемент алгебры коммутирует сам с собой). ▼

Пусть алгебра $A = ([\ ], V_C)$ имеет ранг r. Назовем *регулярным элементом* вектор $v \in V$, на котором функция $c_r(v) \neq 0$. Например, в алгебре $sl(2, C)$ элемент l_3, а также любая линейная комбинация, его содержащая, являются регулярным элементом.

Рассмотрим на пространстве V алгебры A действие целых неотрицательных степеней характеристической матрицы $(ad_v - \lambda I)^p$, $p \in Z_+$, $v \in V$, $\lambda \in C$. Множество элементов $w \in V$, аннулируемых достаточно большой степенью $p \in Z_+$ оператора $(\mathrm{ad}_v - \lambda I)$, образует подпространство V_v^λ пространства V. Назовем V_v^λ *нильпространством оператора* $(\mathrm{ad}_v - \lambda I)$. В частности, V_v^0 — нильпространство присоединенного оператора ad_v.

(32) Размерность пространства V_v^0 совпадает с наименьшим номером k функции $c_k(v)$, отличной от нуля в точке v.

---

*) Это определение справедливо для любой алгебры Ли, не обязательно простой.

Доказательство. Приведем матрицу ad_v к нормальной форме (3.26), т. е. к блочно-диагональному виду, где каждый блок $\tau(\alpha)$ имеет стандартную структуру (3.27). Все блоки, соответствующие ненулевым собственным значениям оператора ad_v регулярны, блок τ_0 с $\alpha=0$ — нильпотентная матрица с единицами над главной диагональю. Степень нильпотентности блока τ_0 равна кратности r нулевого собственного значения: $(\tau_0)^r=0$. Следовательно, оператор $(\mathrm{ad}_v)^p$ при всех $p\geqslant r$ аннулирует подпространство размерности r. Кратность нулевого собственного значения матрицы ad_v очевидно совпадает с наименьшим номером k функции c_k, для которой $c_k(v)\neq 0$. ▼

(33) Пример. В алгебре $sl(2, C)$ одномерное подпространство с базисным элементом l_3 является нильпространством оператора ad_{l_3}, причем низший ненулевой коэффициент в полиноме $P_{l_3}(\lambda)$ есть $c_1(l_3)=-1$.

(34) Ограничение закона композиции [,] алгебры A на подпространство V_v^0 определяет подалгебру $A_v^0\subset A$. ▽

Это свойство непосредственно следует из формулы

$$(\mathrm{ad}_v-(\lambda+\mu)I)^p[w_2, w_1]=$$
$$=\sum_{k=0}^{p} b_k^{(p)}[(\mathrm{ad}_v-\lambda I)^k w_2, (\mathrm{ad}_v-\mu I)^{p-k}w_1], \tag{8}$$

где λ и μ — собственные значения оператора ad_v; $w_1, w_2\in V$; $b_k^{(p)}\in C$; $p, k\in Z_+$. Действительно, пусть $w_1, w_2\in V_v^0$, $\lambda=\mu=0$. Тогда при $p>2r$ каждый член суммы содержит оператор ad_v в степени больше r, и правая часть формулы (8) обращается в нуль. ▼

(35) Упражнение. Получите формулу (8), используя свойства матрицы ad_v как оператора дифференцирования. ▼

Пусть в характеристической матрице $(\mathrm{ad}_v-\lambda I)$ параметр λ равен какому-либо собственному значению присоединенного оператора ad_v. Совокупность нильпространств $\{V_v^\lambda\}$, где λ принадлежит спектру оператора ad_v, обладает следующими свойствами.

(36) $V=\bigoplus\limits_{\lambda} V_v^\lambda$ $(\lambda\in\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}_v))$.

(37) $[V_v^\lambda, V_v^\mu]\subset V_v^{\lambda+\mu}$ $(\lambda, \mu\in\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}_v))$. ▽

Первое из этих свойств является следствием структуры матрицы ad_v в нормальной форме. Второе может быть легко получено из формулы (8), если положить в ней $w_1\in V_v^\lambda$, $w_2\in V_v^\mu$. ▼

(38) Ограничение формы Киллинга $\mathscr{K}$ простой алгебры A на нильпространство V_v^0 регулярного элемента v невырождено.

Доказательство. Пусть v — регулярный элемент алгебры A. Построим оператор $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$, где $x\in V_v^\mu$; $y\in V_v^\nu$; $\mu, \nu\in\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}_v)$. Если $z\in V_v^\xi$, то $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y z\in V^{\xi+\mu+\nu}$ (см. свойство

(**37**)). Поскольку подпространства V_v^λ с разными λ не пересекаются, оператор $\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$ будет нильпотентным, если $\lambda + \mu \neq 0$. Следовательно, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) = \mathscr{K}(x, y) = 0$. Разложение пространства V алгебры A на нильпространства оператора $(\mathrm{ad}_v - \lambda I)$ можно переписать в виде

$$V = V_v^0 \oplus \left\{ \bigoplus_{\lambda > 0} W_v^\lambda \right\} \quad \left(W_v^\lambda = V_v^\lambda \oplus V_v^{-\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Spec}(\mathrm{ad}_v) \right). \tag{9}$$

Прямую сумму (9) будем называть *разложением Картана* пространства V алгебры A. Полученный результат означает, что все прямые слагаемые в разложении (9) взаимно ортогональны по $\mathscr{K}$. Если в пространстве V_v^0 содержится подпространство, ортогональное V_v^0 по форме $\mathscr{K}$, то оно ортогонально всему пространству V. Последнее невозможно, так как $\mathscr{K}$ невырождена. Следовательно, невырождено и ограничение $\mathscr{K}_{\downarrow V_v^0}$. ▼

Подалгеброй Картана B простой алгебры A называется максимальная абелева подалгебра алгебры A, содержащая регулярный элемент.

(39) **Теорема.** Если v — регулярный элемент алгебры A, то алгебра A_v^0 является подалгеброй Картана B алгебры A. Размерность подалгебры B равна рангу алгебры A.

Доказательство. Рассмотрим ограничения $\mathrm{ad}_w^{(0)}$ и $\mathrm{ad}_w^{(1)}$ оператора ad_w для $w \in V_v^0$ на подпространства V_v^0 и $\bigoplus_{\lambda \neq 0} V_v^\lambda$ соответственно. Пусть W^0 — множество элементов $w \in V_v^0$, для которых $\mathrm{ad}_w^{(0)}$ не нильпотентно, и W^1 — множество элементов $w \in V_v^0$ с отличным от нуля детерминантом матрицы $\mathrm{ad}_w^{(1)}$. Оба множества открыты, так как являются дополнениями к алгебраическим подмножествам в V_v^0. По той же причине каждое из них либо плотно в V_v^0, либо пусто. Однако W^1 заведомо непусто, так как содержит v, для которого $\det(\mathrm{ad}_v^{(1)}) = \prod_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i^{r_i}$. Если W^0 тоже непусто, то оно нетривиально пересекается с W^1, поскольку оба множества — дополнения к алгебраическим в V_v^0. Пусть $u \in W^1 \cap W^0$, $\mathrm{ad}_v^{(0)}$ имеет собственное значение, равное нулю ($[v, u] = 0$), причем его кратность строго меньше ранга r алгебры A (так как $u \in W^0$). Поскольку $u \in W^1$, то кратность нулевого собственного значения оператора ad_u та же, что для оператора ad_u^0, т. е. строго меньше r. Последнее противоречит определению ранга r алгебры A. Следовательно, W^0 пусто, и всякий оператор $\mathrm{ad}_w^{(0)}$ нильпотентен. Тогда в силу теоремы Энгеля [11] алгебра матриц ad_w нильпотентна. Согласно критерию Картана (**3**) это означает, что $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_{w'}) = 0$ для всех $w \in V_v^0$,

$w' \in V_v^{0(1)}$. В то же время $\mathcal{K}_{\downarrow A_v^0}$ невырождено. Следовательно, $V_v^{0(1)} = 0$, и алгебра A_v^0 абелева.

По построению A_v^0 — максимальная абелева подалгебра в A, содержащая v.

Последнее утверждение теоремы является следствием свойства **(32)** и определения регулярного элемента. ▼

(40) Пример. Разложение Картана алгебры $sl(2, C)$ имеет вид

$$V = V_{l_3}^0 \oplus V_{l_3}^{+1} \oplus V_{l_3}^{-1}$$

каждое из подпространств одномерно. Подалгебра A_{l_3} является максимальной абелевой подалгеброй, содержащей регулярный элемент l_3, т. е. подалгеброй Картана.

(41) Если B — подалгебра Картана простой алгебры A, то все операторы ad_b, $b \in B$, можно диагонализовать, причем одновременно.

Доказательство. Матрицу ad_b в нормальной форме запишем в виде суммы диагональной s и нильпотентной n матриц:

$$\mathrm{ad}_b = \mathbf{s} + n.$$

Матрицы ad_b, s и n коммутируют друг с другом.

Покажем, что существуют такие b_1, $b_2 \in B$, что $\mathrm{ad}_{b_1} = s$, $\mathrm{ad}_{b_2} = n$. Матричные элементы λ_i матрицы s представляют собой собственные значения оператора ad_b, и всякий вектор $v_{(\lambda)}$, принадлежащий нильпространству V_b^λ, является собственным вектором матрицы s с собственным значением λ. Пусть $v_{(\lambda)} \in V_b^\lambda$, $v_{(\mu)} \in V_b^\mu$. Тогда $[v_{(\lambda)}, v_{(\mu)}] \in V_b^{\lambda+\mu}$ (см. свойство **(37)**). Следовательно, справедливо равенство

$$s\left[v_{(\lambda)}, v_{(\mu)}\right] = (\lambda + \mu)\left[v_{(\lambda)}, v_{(\mu)}\right] = \left[sv_{(\lambda)}, v_{(\mu)}\right] + \left[v_{(\lambda)}, sv_{(\mu)}\right],$$

т. е. $s \in \mathrm{Der}\, A$. Поскольку все дифференцирования алгебры A внутренние, $s = \mathrm{ad}_{b_1}$ для некоторого $b_1 \in A$. Кроме того, s коммутирует со всеми операторами ad_b, $b \in B$:

$$[\mathrm{ad}_b, s]\, v_{(\lambda)} = \lambda\, \mathrm{ad}_b v_{(\lambda)} - s\, \mathrm{ad}_b v_{(\lambda)} = 0.$$

Представление $\mathrm{Ad}\, A$ точное, следовательно, $[B, b_1] = 0$, т. е. b_1 принадлежит подалгебре Картана. Матрица n оказывается равной

$$n = \mathrm{ad}_b - \mathrm{ad}_{b_1} = \mathrm{ad}_{b-b_1} \equiv \mathrm{ad}_{b_2}.$$

Так как матрица ad_{b_2} нильпотентна, то и всякое произведение матриц $\mathrm{ad}_{b_2}\mathrm{ad}_b$, $b \in B$, тоже нильпотентно и $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{b_2}\mathrm{ad}_b) = 0$ для всех $b \in B$. В силу свойства **(38)** это означает, что $b_2 = 0$, т. е. приведение к нормальной форме диагонализует матрицу ad_b. Этот результат справедлив для любого $b \in B$.

Поскольку все ad_b коммутируют друг с другом, то они диагонализуются одновременно. ▼

Пусть $\{v_i\}$ — базис пространства V алгебры A, в котором диагональны все операторы ad_{v_j}, $\{v_j\}$ — базис пространства V_B подалгебры Картана B. Всякому базисному элементу v_i соответствует r собственных значений операторов $\{\mathrm{ad}_{v_j}\}$. Таким образом, всякой простой алгебре Ли можно сопоставить набор, состоящий из n r-мерных векторов. Взаимное расположение и относительные длины этих векторов оказываются однозначно связанными со свойствами простой алгебры. Совокупность указанных векторов в целом обладает свойствами корневой системы, с которыми мы познакомимся в следующем параграфе. Можно доказать существование в пространстве V_B такого базиса, в котором все корневые векторы системы вещественны ([32], с. 166, см. также теоремы **(57)** и **(59)**).

§ 4. Корневые системы. Схемы Дынкина

Рассмотрим конечномерное действительное векторное пространство V и вектор $\alpha \in V$. Автоморфизм $s_\alpha \in \mathrm{Aut}\, V$ называется *отражением*, связанным с α, если множество $H(\alpha)$ инвариантных относительно s_α векторов образует гиперплоскость в V и выполняется равенство

$$s_\alpha \alpha = -\alpha. \tag{10}$$

Легко проверить следующие свойства:

(42) $V \approx H(\alpha) \oplus \alpha R$.

(43) $(s_\alpha)^2 = \mathrm{id}$.

(44) если $(\,,\,)$ — скалярное произведение в V, то с его помощью на V можно задать невырожденную билинейную форму $\langle\,,\,\rangle$

$$\alpha^{(*)}(v) = \langle \alpha, v \rangle = 2\frac{(\alpha, v)}{(\alpha, \alpha)} \tag{11}$$

и выразить через нее оператор отражения

$$s_\alpha v = v - \langle \alpha, v \rangle \alpha. ▼ \tag{12}$$

(45) Пример. В трехмерном евклидовом действительном пространстве операция s_α эквивалентна обычной процедуре отражения относительно плоскости H, ортогональной вектору α. Плоскость H играет при этом роль инвариантной гиперплоскости $H(\alpha)$. ▼

Назовем *системой корней* пространства V множество L векторов $\alpha \in V$, таких, что:

1) $s_\alpha L = L$ для любого $\alpha \in L$;
2) $s_\alpha \beta = \beta + m\alpha$, где $\alpha, \beta \in L$, $m \in Z$;
3) линейная оболочка L совпадает с V;
4) $0 \notin L$.

Из определения отражений и систем корней непосредственно следует:

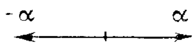
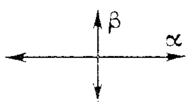
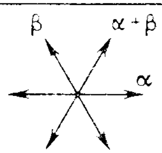
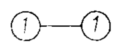
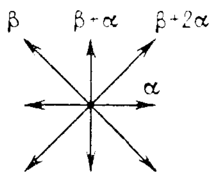
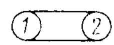
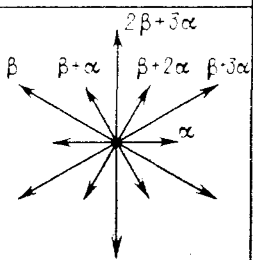
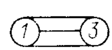
(46) для любых двух корней $\alpha, \beta \in L$ величина $< \alpha, \beta > = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ — целое число.

(47) Если $\alpha \in L$, то $(-\alpha) \in L$. ▼

Корневая система называется *приведенной*, если в ней отсутствуют параллельные корни (корни α и $-\alpha$ считаются антипараллельными).

(48) Примеры. В табл. 4 изображены приведенные одно-

Таблица 4

Пространство	Корневая система	Обозначение	Базис	Угол $\varphi_{\alpha\beta}$	Схема Дынкина
R^1		A_1	α	—	
R^2		$A_1 + A_1$	α, β	$\pi/2$	
		A_2	α, β	$2\pi/3$	
		B_2	α, β	$3\pi/4$	
		G_2	α, β	$5\pi/6$	

мерные и двумерные корневые системы. Отношение длин корней в случае A_1+A_1 произвольно. ▼

Возможно лишь восемь вариантов относительного расположения двух корней приведенных корневых систем. Введем обозначение

$$m(\alpha, \beta) \equiv \langle\alpha, \beta\rangle \doteq 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}. \tag{13}$$

Подставив в формулу (13) выражение для скалярного произведения $(\alpha, \beta) = |\alpha|\,|\beta|\cos\varphi$, получим

$$m(\alpha, \beta)\, m(\beta, \alpha) = 4\cos^2\varphi. \tag{14}$$

Левая часть этого равенства есть целое число, значение правой части меняется в интервале $[0, +4]$. Следовательно, выражение (14) может принимать лишь пять дискретных значений: 0, 1, 2, 3, 4. Если α и β — корни, принадлежащие приведенной системе L, то последняя возможность не представляет интереса, так как случай $\varphi = 0$ отпадает (корни параллельны), а случай $\varphi = \pi$ тривиален в силу свойства (47). Оставшиеся четыре значения позволяют построить семь вариантов взаимного расположения пары корней (табл. 5).

Таблица 5

$m(\alpha, \beta)$	$m(\beta, \alpha)$	φ	$\lvert\alpha\rvert \div \lvert\beta\rvert$
0	0	$90^\circ = \pi/2$	Произвольны
1	1	$60^\circ = \pi/3$	$\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$
-1	-1	$120^\circ = 2\pi/3$	$\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$
2	1	$45^\circ = \pi/4$	$\sqrt{2}\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$
-2	-1	$135^\circ = 3\pi/4$	$\sqrt{2}\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$
3	1	$30^\circ = \pi/6$	$\sqrt{3}\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$
-3	-1	$150^\circ = 5\pi/6$	$\sqrt{3}\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$

Указанные варианты иллюстрируются диаграммами табл. 4.

В табл. 5 $|m(\alpha, \beta)| \geqslant |m(\beta, \alpha)|$. Очевидно, что случай $|m(\alpha, \beta)| < |m(\beta, \alpha)|$ сводится к предыдущему заменой $\alpha \rightleftarrows \beta$.

Подмножество S системы корней $L \supset S$, являющееся базисом пространства V, называется *базисом системы* L, если каждый корень $\beta \in L$ представим в виде суммы $\beta = \sum\limits_{\alpha\in S} k_\alpha \alpha$, $k_\alpha \in Z$, причем либо все $k_\alpha \geqslant 0$, либо все $k_\alpha \leqslant 0$. В конкретной системе L можно построить базис по следующему правилу. Выделим в L подсистему L^+ положительных корней, т. е. таких, что $(\mathbf{x}, \alpha) > 0$ для некоторого стандартного вектора $\mathbf{x} \in V$. В L^+ в свою очередь выделим подмножество неразложимых корней, т. е. таких, которые нельзя представить в виде суммы других положительных корней. Полученное множество S неразложимых положительных корней будет удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к базису системы L.

(49) Пример. Обратимся вновь к табл. 4. Вектор α в случае A_1 и векторы α и β в остальных диаграммах играют роль базисных элементов соответствующих систем. ▼

Пусть $V \approx V_1 \oplus V_2$, а векторы корневой системы L пространства V содержатся в объединении $V_1 \bigcup V_2$. В этом случае система L называется *приводимой*. Она представима в виде объединения $L_1 \bigcup L_2$, причем подсистемы L_1 и L_2 являются корневыми системами подпространств V_1 и V_2 соответственно. В противном случае корневая система называется *неприводимой*. Изучение произвольной корневой системы сводится к анализу ее неприводимых компонент.

(50) Пример. В табл. 4 лишь одна система $A_1 + A_1$ является приводимой. ▼

Для удобства сравнения и классификации каждой корневой системе сопоставляется граф, вершины которого взаимно-однозначно соответствуют базисным элементам системы. Каждая пара вершин графа будет соединяться разными способами в зависимости от величины угла между базисными векторами (см. табл. 4). Цифры в вершинах графа указывают отношение квадратов модулей корневых векторов. Вершины не помечаются числами, если отношение длин базисных векторов произвольно, например в системе $A_1 + A_1$. Построенные по таким правилам графы называются *схемами Дынкина*. Очевидно, что всякой приведенной неприводимой системе корней соответствует связная схема Дынкина. Простейшие схемы Дынкина приведены в табл. 4.

Приведем формулировку теоремы, завершающей классификацию приведенных неприводимых корневых систем.

(51) **Теорема.** Всякая непустая связная схема Дынкина изоморфна одной из следующих (табл. 6).

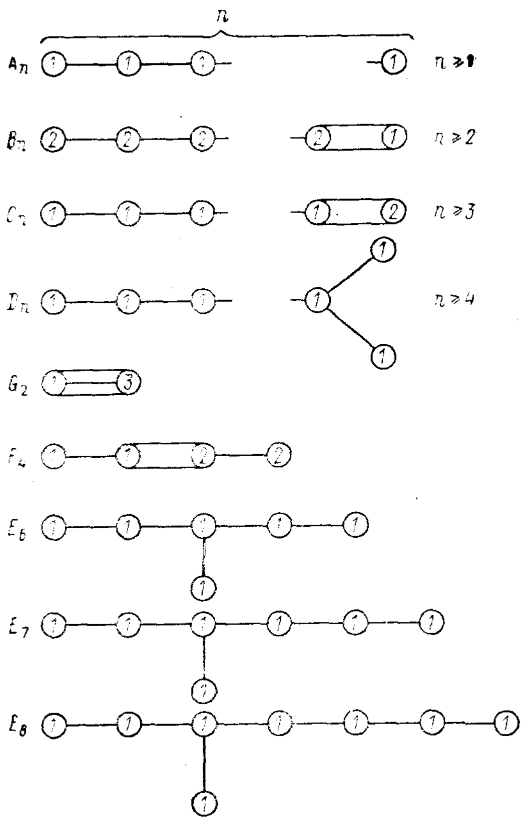
Доказательство этой теоремы можно найти в [22, 24]. ▼

Отметим, что среди неэквивалентных приведенных неприводимых корневых систем содержатся четыре *бесконечные серии* однотипных систем: A_n, B_n, C_n и D_n и пять *исключительных схем*: G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8.

Сформулируем рецепт явного построения корневых систем. Рассмотрим евклидово пространство R^n со скалярным произведением (,) и стандартным ортонормированным базисом $\{v_i\}$. Пусть множество $Z^{(n)}$ — сетка точек в R^n с целочисленными координатами.

Система A_n. Рассмотрим в пространстве R^{n+1} вектор $\sum\limits_{i=1}^{n+1} v_i \equiv v$ и построим в точке с координатами вектора v гиперплоскость H, ортогональную v. На пересечении множеств $Z^{(n+1)} \bigcap H$ выберем точки l, для которых $(l, l) = 2$. Множество

Таблица 6



векторов $\{\mathrm{l}\} \equiv L$ образует корневую систему A_n. Нетрудно видеть, что всякий элемент $\mathrm{l} \in L$ имеет вид $(v_i - v_j)$, $i \neq j$, а в качестве базиса S можно выбрать множество $\{(v_i - v_{i+1})\}$.

Система B_n. Рассмотрим в пространстве R^n сетку точек $Z^{(n)}$ и выберем в множестве векторов с координатами из $Z^{(n)}$ те, для которых $(\mathrm{l}, \mathrm{l}) = 1$ либо $(\mathrm{l}, \mathrm{l}) = 2$. Всякий такой вектор $\mathrm{l} \in L$ имеет вид $\{\pm v_i, \pm v_i \pm v_j\}$, $i \neq j$. Базис системы L может быть выбран в виде $S = \{(v_1 - v_2), (v_2 - v_3), \ldots, (v_{n-1} - v_n), v_n\}$.

Для остальных систем ниже указаны множества L их векторов в R^n и один из вариантов базиса S.

Система C_n. $L = \{l \in Z^{(n)} \mid (\mathbf{l}, \mathbf{l}) = 2,4\} = \{(\pm 2v_i), (\pm v_i \pm v_j)_{i \neq j}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$:

$$S = \{(v_1 - v_2), (v_2 - v_3), \ldots, (v_{n-1} - v_n), 2v_n\}.$$

Система D_n. $L=\{l\in Z^{(n)}\,|\,(\mathbf{l},\,\mathbf{l})=2\}=\{(\pm v_i\pm v_j)_{i\neq j}\}$, i, $j=1,\ \ldots,\ n$:

$$S=\{(v_1-v_2),\ (v_2-v_3),\ \ldots,\ (v_{n-1}-v_n),\ (v_{n-1}+v_n)\}.$$

Система G_2 (см. табл. 4).

Система F_4. $L=\{(\pm v_i),\,(\pm v_i\pm v_j)_{i\neq j},\ {}^1/_2(\pm v_1\pm v_2\pm v_3\pm \pm v_4)\}$, $i,\ j=1,\ldots,\ 4$:

$$S=\{(v_2-v_3),\ (v_3-v_4),\ v_4,\ {}^1/_2(v_1-v_2-v_3-v_4)\}.$$

Система E_6. $L=\left\{(\pm v_i\pm v_j)_{i\neq j},\quad i,j=1,\ \ldots,\ 5;\ \pm{}^1/_2\left(v_8-\right.\right.$

$$\left.\left.-v_6-v_7+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{m(i)}v_i\right),\ \ \sum m(i)=2n\right\}:$$

$$S=\left\{(v_1+v_2);\ (v_{i+1}-v_i),\ i=1,\ \ldots,\ 4;\ {}^1/_2\left(v_1+v_8-\sum_{i=2}^{l}v_i\right)\right\}.$$

Система E_7. $L=\left\{(\pm v_i\pm v_j)_{i\neq j},\ i,\ j=1,\ \ldots,6;\ \pm(v_7-v_8);\right.$

$$\left.\pm{}^1/_2\left(v_7-v_8+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{m(i)}v_i\right),\ \sum m(i)=2n\right\}:$$

$$S=\left\{(v_1+v_2);\ (v_{i+1}-v_i),\ i=1,\ \ldots,\ 5;\ {}^1/_2\left(v_1+v_8-\sum_{i=2}^{7}v_i\right)\right\}.$$

Система E_8. $L=\left\{(\pm v_i\pm v_j)_{i\neq j};\ {}^1/_2\sum_{i=1}(-1)^{m(i)}v_i,\ \sum_{i=1}m(i)=2n\right\}$, $i,\ j=1,\ldots,\ 8$:

$$S=\left\{(v_1+v_2);\ (v_{i+1}-v_i),\ i=1,\ \ldots,\ 6;\ {}^1/_2\left(v_1+v_8-\sum_{i=2}^{7}v_i\right)\right\}.$$

§ 5. Корневые системы и простые алгебры Ли. Разложение Картана—Вейля. Базис Вейля, стандартный базис

Обратимся вновь к системе векторов, сопоставляемых комплексной простой алгебре Ли $A=([\ ],\,V)$ (см. § 3).

Пусть $\{v_i\}$ — базис пространства V $(i=1,\ \ldots,\ n)$, в котором все операторы ad_{v_j} подалгебры Картана $B\subset A$ диагональны. Если r — ранг алгебры A, то пусть первые r базисных элементов $\{v_j\}$ $(j=1,\ \ldots,\ r)$ образуют базис пространства V_B подалгебры B. Всякому базисному элементу v_k сопоставим r-мерный вектор λ_k с компонентами $\lambda_k(v_j)\equiv\lambda_k^j$ $(j=1,\ \ldots,\ r;\ k=1,\ \ldots,\ n)$, определяемыми по формуле

$$\mathrm{ad}_{v_j} v_k = \lambda_k^j v_k. \qquad (15)$$

В этой системе векторов $\{\lambda_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ первые r равны нулю. Обозначим через L подсистему ненулевых векторов $\{\lambda_k\}$ $(k = r+1, \ldots, n)$.

(52) **Теорема.** Система L векторов $\{\lambda_k\}$ $(k = r+1, \ldots, n)$, соответствующая простой комплексной алгебре Ли A, является приведенной неприводимой корневой системой в действительном r-мерном векторном пространстве R^r.

Доказательство этой теоремы [22, 28] требует привлечения большого числа дополнительных сведений. ▼

Проанализируем взаимосвязь свойств алгебры A и ее корневой системы L. Построим разложение Картана пространства V (формула (9)) для каждого базисного элемента v_j подалгебры B:

$$V = V_B \oplus \left\{ \bigoplus_{\lambda_k^j > 0} \left(V_{v_j}^{\lambda_k^j} \oplus V_{v_j}^{-\lambda_k^j} \right) \right\} = V_B \oplus \left\{ \bigoplus_{\lambda_k^j > 0} W_{v_j}^{\lambda_k^j} \right\}, \qquad (16)$$

где суммирование идет по несовпадающим собственным значениям $\lambda_k(v_j)$. Рассмотрим пересечение пространств $\bigcap_{j=1}^{r} W_{v_j}^{\lambda_k^j} \equiv W^{\lambda_k}$ при фиксированном k. Поскольку все подпространства $W_{v_j}^{\lambda_k^j}$ и V_B при фиксированном j взаимно ортогональны по форме $\mathscr{K}$ (см. доказательство свойства (38)), то совокупность $\{W^\lambda, V_B\}_{\lambda \in L^+}$ — также система взаимно ортогональных по $\mathscr{K}$ подпространств. Напомним, что среди $\lambda \in L^+$ нет совпадающих корней и для всякого $\lambda \in L$ вектор $-\lambda$ принадлежит L, так что подпространство W^λ состоит из одномерных подпространств V^λ и $V^{-\lambda}$. Окончательно получаем разложение пространства V на ортогональные по $\mathscr{K}$ подпространства

$$V = V_B \oplus \left\{ \bigoplus_{\lambda} W^\lambda \right\} \quad (\lambda \in L^+),$$
$$W^\lambda = V^\lambda \oplus V^{-\lambda}. \qquad (17)$$

Формулу (17) будем называть *разложением Картана—Вейля*. Применяя свойство (37) к этому разложению, получаем следующее свойство.

(53) $[V^\lambda, V^\mu] \subset V^{\lambda+\mu}$ $(\lambda+\mu, \lambda, \mu \in L)$.

(54) **Теорема.** Пусть $A = ([\ ], V)$ — комплексная простая алгебра Ли, L — ее корневая система, $V = V_B \oplus \{\oplus(V^\lambda \oplus V^{-\lambda})\}$ — разложение Картана — Вейля. Тогда для каждого $\lambda \in L^+$ под-

пространства V^{λ}, $V^{-\lambda}$, $[V^{\lambda}, V^{-\lambda}] \equiv V_B^{(\lambda)}$ одномерны. Ограничение закона композиции $[,]$ на всяком подпространстве $V_B^{(\lambda)} \oplus V^{\lambda} \oplus \oplus V^{-\lambda} (\lambda \in L^+)$ образует подалгебру алгебры A. Базисные элементы b_λ, x_λ и y_λ пространств $V_B^{(\lambda)}$, V^{λ} и $V^{-\lambda}$ можно выбрать так, что закон композиции в указанной подалгебре примет вид

$$
\begin{gathered}
[b_\lambda, x_\lambda] = 2x_\lambda, \quad [b_\lambda, y_\lambda] = -2y_\lambda, \\
[x_\lambda, y_\lambda] = b_\lambda. \triangledown
\end{gathered} \tag{18}
$$

Первые два утверждения этой теоремы непосредственно следуют из свойств разложения Картана — Вейля. Доказательство последней части теоремы можно найти в [22, 25, 28]. ▼

(55) Пример. Положим в алгебре $sl(2, C)$ (см. пример **(30)**)

$$
b = 2l_3 = \sigma_3, \quad x = \sqrt{2}\, l_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \text{ и } y = \sqrt{2}\, l_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2).
$$

Одномерные подпространства V^1, V^{-1} и V_b с базисными элементами x, y и b соответственно реализуют разложение Картана — Вейля $V = V_b \oplus V^1 \oplus V^{-1}$, причем структурные константы алгебры $sl(2, C)$ в этом базисе совпадают с приведенными в формуле (18).

Отсюда следует, что подалгебра (18), являющаяся по теореме **(54)** стандартным структурным блоком простой комплексной алгебры Ли, изоморфна $sl(2, C)$. ▼

(56) Теорема. Приведенные неприводимые системы корней L в пространстве R^r и классы изоморфных простых комплексных алгебр Ли A ранга r находятся во взаимно-однозначном соответствии. ▼

Всякой корневой системе L можно однозначно сопоставить векторное пространство V, представимое в виде (17), где $\lambda \in L^+$, $\dim V^{\lambda} = \dim V^{-\lambda} = 1$, $\dim V_B = r$. Теорема (56) утверждает, что закон композиции Ли на пространстве V, согласованный с разложением (9), восстанавливается по корневой системе L с точностью до эквивалентности. Задача построения простой алгебры Ли по корневой системе имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Для ее решения в общем виде необходимо ввести универсальный базис в пространство V, причем так, чтобы максимально упростить вычисления. Одним из таких базисов является *базис Вейля.**)

(57) Теорема о базисе Вейля. Пусть V — линейное векторное пространство $V = V_B \oplus \{\bigoplus_{\lambda} (V^{\lambda} \oplus V^{-\lambda})\}$, сопоставляемое приведенной неприводимой системе L размерности $r = \dim V_B$. Каждому

*) Для универсальных базисов не существует общепринятой терминологии. Мы в основном придерживаемся терминологии Серра [25].

базисному корню λ_i ($i = 1, \ldots, r$) сопоставим тройку базисных элементов $\{b_i, x_i, y_i\}$ в пространстве $V_B^{(\lambda_i)} \oplus V^{\lambda_i} \oplus V^{-\lambda_i}$. Следующие композиции однозначно определяют простую алгебру $A = ([\ ], V)$ с корневой системой L:

$$[b_i, b_j] = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, r),$$
$$[x_i, y_i] = b_i, \quad [x_i, y_j]\,|_{i \neq j} = 0, \tag{19}$$
$$[b_i, x_j] = m(i, j)\, x_j, \ [b_i, y_j] = -m(i, j)\, y_j,$$

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{ad}_{x_i})^{(1-m(i,j))}\, x_j &= 0\\ (\mathrm{ad}\, y_i)^{(1-m(i,j))}\, y_j &= 0\end{aligned}\right\} \quad (i \neq j), \tag{20}$$

$$x_\lambda \equiv (\mathrm{ad}_{x_r})^{c_r} \ldots (\mathrm{ad}_{x_3})^{c_3} (\mathrm{ad}_{x_2})^{c_2 - 1} (\mathrm{ad}_{x_1})^{c_1} x_2,$$
$$\lambda = \sum c^i \lambda_i \in L^+,$$
$$[x_\lambda, y_\lambda] = b_\lambda, \ [b_\lambda, x_\lambda] = 2x_\lambda. \tag{21}$$

Доказательство приведено в [11]. ▼

Теорема (57) предполагает следующий порядок построения структурных констант. Для всякого базисного корня λ_j компонента $(\lambda_j)^i$ определяется как

$$(\lambda_j)^i = \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle = \frac{2(\lambda_i, \lambda_j)}{(\lambda_i, \lambda_i)} \equiv m(i, j). \tag{22}$$

Тем самым задаются композиции элементов b_i и x_j ($i, j = 1, \ldots, r$). Относительная нормировка элементов x_i и y_i фиксируется так, чтобы выполнялись соотношения (18) теоремы (**54**). Поскольку разность базисных корней не может быть корнем, то все композиции (19) согласованы с корневой системой L.

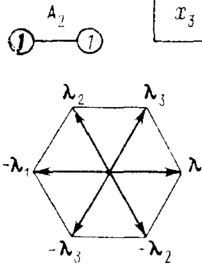
Соотношения (20) означают, что коэффициенты разложения всякого корня по базисным корням ограничены по модулю. Следует иметь в виду, что корневая диаграмма содержит значительно более наглядную информацию: на ней легко указать все пары корней, сумма которых не содержится в L. Аналогичная информация может быть получена из формулы (20) с помощью тождества Якоби.

Рассмотрим важное следствие теоремы (**57**). В формулах (21) содержится утверждение, что всякая композиция $[x_\lambda, x_\mu] \neq 0$, если $\lambda + \mu \in L^+$. Легко проверить его справедливость для любой пары элементов базиса $\{v_\lambda\}$, $\lambda \in L$. Очевидно, что всякий элемент b_λ принадлежит подалгебре Картана и $\{b_i\}$ — ее базис.

Проиллюстрируем рецепт построения структурных констант в базисе Вейля на примере системы A_2. Искомую алгебру Ли будем обозначать тем же символом A_2, что и корневую систему (табл. 7).

Таблица 7

	b_1	b_2	x_1	x_2	x_3	y_3	y_2	y_1
b_1		0	$2x_1$	$-x_2$	x_3	$-2y_1$	y_2	$-y_3$
b_2			$-x_1$	$2x_2$	x_3	y_1	$-2y_2$	$-y_3$
x_1				x_3	0	$-y_2$	0	b_1
x_2					0	y_1	b_2	0
x_3						b_1+b_2	x_1	$-x_2$
y_3							0	0
y_2								y_3



(58) Пример. Подалгебра Картана B алгебры A_2 двумерна, так что размерность пространства V равна восьми. Сопоставим базисным корням λ_1 и λ_2 две тройки образующих $\{b_i, x_i, y_i\}$ $(i = 1, 2)$ с композициями (19). Формула (13) и табл. 5 позволяют найти числа $m(i, j)$:

$$\{m(i, j)\} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы фиксировали координаты векторов λ_1 и λ_2 и композиции

$$[b_i, x_{\lambda_3}] = (\lambda_1 + \lambda_2)^i x_{\lambda_3},$$
$$[b_i, y_{\lambda_3}] = -(\lambda_1 + \lambda_2)^i y_{\lambda_3}.$$

Выразим x_3 через образующие x_1 и x_2 по формуле (21):

$$x_3 = [x_1, x_2]$$

и потребуем, чтобы

$$[b_3, x_3] = 2x_3, \quad b_3 \equiv [x_3, y_3], \quad y_3 \sim [y_1, y_2].$$

Тогда b_3 оказывается равным $b_1 + b_2$, а композиция

$$[y_1, y_2] = -y_3.$$

Все остальные структурные константы легко найти с помощью тождества Якоби:

$$[x_3, y_1] = [[x_1, x_2] y_1] = [b_1, x_2] = -x_2,$$
$$[x_3, y_2] = [[x_1, x_2] y_2] = -[b_2, x_1] = x_1,$$

$$[x_1,\ y_3] = -[x_1[y_1,\ y_2]] = [y_2,\ b_1] = -y_2,$$
$$[x_2,\ y_3] = -[x_2[y_1,\ y_2]] = -[y_1,\ b_2] = y_1.$$

Как уже отмечалось, явный вид корневой диаграммы во многих случаях избавляет от вычислений:

$$[x_3,\ x_1] = [y_3,\ y_1] = [x_3,\ x_2] = [y_3,\ y_2] = 0.$$

Если же не пользоваться корневой диаграммой, то согласно формуле (21) следует положить равными нулю первые две из этих композиций и применить тождества Якоби для определения остальных.

Окончательный результат представлен в табл. 7, где на пересечении строки v и столбца w приведена композиция $[v,\ w]$. Так как лиево умноженне антисимметрично, достаточно заполнить клетки таблицы, лежащие над главной диагональю. ▼

Базис Вейля рассчитан на минимальное использование явного вида корневой диаграммы: достаточно знать, как положительные корни разлагаются по базисным (с коэффициентами из Z). Если диаграмма доступна для рассмотрения, предпочтительнее строить алгебру в *стандартном базисе*. При этом удается резко сократить объем вычислений.

(59) Теорема о стандартном базисе. Сопоставим приведенной неприводимой системе L векторное пространство $V = V_B \oplus \oplus \{\bigoplus_{\lambda}(V^{\lambda} \oplus V^{-\lambda})\}$, $\dim V_B = r$. В подпространстве $W \equiv \bigoplus_{\lambda}(V^{\lambda} \oplus \oplus V^{-\lambda})$ можно ввести такой базис $\{x_\lambda\}$ $(\lambda \in L)$ и такой набор элементов $\{b_\lambda\} \subset V_B$, что

$$\begin{aligned} &[x_\lambda,\ x_{-\lambda}] = b_\lambda, \\ &[b_\lambda,\ x_\mu] = (\lambda,\ \mu)\, x_\mu, \\ &[x_\lambda,\ x_\mu] = \begin{cases} 0, & \lambda + \mu \notin L, \\ N_{\lambda\mu} x_{\lambda+\mu}, & \lambda + \mu \in L. \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

Структурные константы $N_{\lambda\mu}$ будут обладать следующими свойствами:

$$N_{\lambda\mu} = -N_{\mu\lambda}, \tag{24}$$

$$N_{\lambda\mu} = N_{-\lambda,\ -\mu}. \tag{25}$$

Для всякой тройки корней $\lambda,\ \mu,\ \nu \in L$, таких, что $\lambda + \mu + \nu = 0$,

$$N_{\lambda\mu} = N_{\mu\nu} = N_{\nu\lambda}. \tag{26}$$

Для всякой четверки корней $\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho \in L$, таких, что $\lambda + \mu + \nu + \rho = 0$ и ннкакая пара из них в сумме не равна 0,

$$N_{\lambda\mu} N_{\nu\rho} + N_{\mu\nu} N_{\lambda\rho} + N_{\nu\lambda} N_{\mu\rho} = 0. \tag{27}$$

Для всякой серии корней $\lambda + k\mu$, где $\lambda + \mu \neq 0$ и $p \leqslant k \leqslant q$,

$$N_{\mu\lambda}^2 = \frac{q(1-p)}{2}(\mu, \mu). \tag{28}$$

Определенные таким образом структурные константы задают простую алгебру Ли $A = ([\;], V)$ с корневой системой L.

Доказательство этой теоремы можно найти в [22, 28, 32]. ▼

Формулы (23) не фиксируют базис в подалгебре Картана. Удобно выбрать b_λ для $\lambda \in S$ в качестве базисных элементов пространства V_B. Компоненты корней в композиции $[b_\lambda, x_\mu] = (\mu)^\lambda x_\mu$ определяются с помощью обычного скалярного произведения $(\mu)^\lambda = (\lambda, \mu)$ в корневом пространстве. Структурные константы очевидно зависят от нормировки корней в L, что позволяет подобрать для них наиболее удобные числовые значения. Формула (28) определяет лишь модуль структурной константы $N_{\mu\nu}$. Выбор знака $N_{\mu\nu}$ остается произвольным, если он не противоречит условию (27). Единственное число, определенное по формуле (28), после фиксации знака задает 12 структурных констант алгебры A с помощью формул (23)—(26).

(60) Пример. Для сравнения обоих методов ((57) и (59)) построим стандартный базис в алгебре A_2. Воспользуемся свободой в нормировке корней и положим $|\lambda_i| = \sqrt{2}$. Для удобства сравнения обозначим через $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ набор базисных элементов в пространствах V^λ и $V^{-\lambda}$.

Найдем структурную константу N_{12}. λ_1 — серия корня λ_2 состоит из двух векторов: λ_2 и $\lambda_2 + \lambda_1 = \lambda_3$, $p = 0 \leqslant k \leqslant q = 1$. По формуле (28) находим $N_{12} = {}^1/_2(\lambda_1, \lambda_1) = 1$. Выберем $N_{12} = +1$. Тогда $N_{-1,-2} = +1$. Сумма корней λ_1, λ_2 и $-\lambda_3$ равна нулю, так что

$$\begin{aligned} N_{12} = N_{2,-3} = N_{-3,1} = +1, \\ N_{-1,-2} = N_{-2,3} = N_{3,-1} = +1. \end{aligned} \tag{29}$$

Из условия (23) следует, что в алгебре A_2 все остальные структурные константы типа $N_{\lambda\mu}$ равны нулю. Для определения композиций $[b, x]$ достаточно выписать скалярные произведения (λ, μ).

Если в стандартном базисе совершить преобразование $\{x_k, y_k\} \to \{x_k, -y_k\}$, то часть констант $N_{\lambda\mu}$ изменит знак, и тогда закон композиции алгебры A_2 совпадет с построенным в (58) в базисе Вейля. ▼

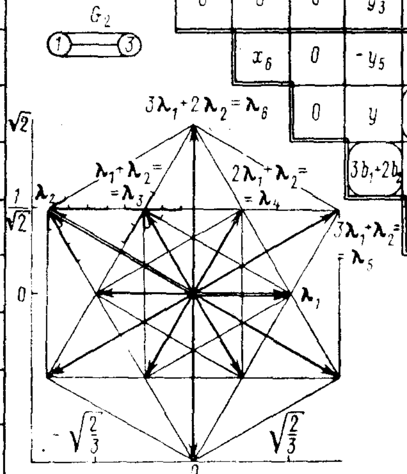
(61) Упражнение. Постройте закон композиции алгебры G_2 в стандартном базисе. (Модули корней удобно выбрать в виде $|\lambda_1| = \sqrt{{}^2/_3}$ и $|\lambda_2| = \sqrt{2}$.)

Ответ приведен в табл. 8, где в условном масштабе показаны основные серии корней. ▼

Отсутствие обозримого графика для корневых систем большой размерности ($r > 2$) не создает принципиальных трудно-

Таблица 8

	x_1	x_3	x_4	x_2	x_5	x_6	y_6	y_5	y_2	y_4	y_3	y_1
b_1	$\frac{2}{3}x_1$	$-\frac{1}{3}x_3$	$+\frac{1}{3}x_4$	$-x_2$	x_5	0	0	$-y_5$	y_2	$-\frac{1}{3}y_4$	$\frac{1}{3}y_3$	$-\frac{2}{3}y_1$
b_2	$-x_1$	x_3	0	$2x_2$	$-x_5$	x_6	$-y_6$	y_5	$-2y_2$	0	$-y_3$	y_1
x_1		$\frac{2}{\sqrt{3}}x_4$	x_5	x_3	0	0	0	$-y_4$	0	$-\frac{2}{\sqrt{3}}y_3$	$-y_2$	b_1
x_3			x_6	0	0	0	$-y_4$	0	x_1	$\frac{2}{\sqrt{3}}y_1$	b_1+b_2	$-x_2$
x_4				0	0	0	y_3	y_1	0	$2b_1+b_2$	$\frac{2}{\sqrt{3}}x_1$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}x_3$
x_2					x_6	0	$-y_5$	0	b_2	0	y_1	0
x_5						0	y	$3b_1+b_2$	0	x_1	0	$-x_4$
x_6							$3b_1+2b_2$	x_2	$-x_5$	x_3	$-x_4$	0
y_6								0	0	0	0	0
y_5									y_6	0	0	0
y_2										0	0	y_3
y_4											y_6	y_5
y_3												$\frac{2}{\sqrt{3}}y_4$
$3b_1+b_2$				$-x_2$	$2x_5$	x_6	$-y_6$	$-2y_5$	y_2			



стей при построении стандартного базиса алгебры Ли. В частности, явные реализации систем, приведенные в § 4, позволяют произвести все вычисления, указанные в теореме (54). Естественно, что их объем при этом резко возрастает. Вместе с тем, как будет показано, большинство комплексных простых алгебр Ли реализуется как классические линейные алгебры Ли. Их структурные константы проще получать, пользуясь, например, базисом Окубо (см. гл. 4, § 3). Преимущества вычислений в базисах Вейля и стандартном связаны с явным выделением подалгебры Картана и согласованностью с корневой диаграммой, что особенно важно при построении представлений.

§ 6. Классификация и каноническая реализация простых алгебр Ли

Теорема (56) устанавливает взаимно-однозначное соответствие множеств неэквивалентных приведенных неприводимых корневых систем с неэквивалентными простыми комплексными алгебрами Ли. Классификация корневых систем, представленная в табл. 6, служит одновременно классификационной схемой для простых комплексных алгебр Ли.

Итак, существуют четыре *бесконечные серии* и пять *исключительных простых алгебр* Ли над C (см. табл. 6). По-прежнему будем обозначать алгебру тем же индексом, что и соответствующую ей схему Дынкина. Классификация становится особенно наглядной ввиду эквивалентности бесконечных серий простых алгебр Ли и множеств линейных классических алгебр.

(**62**) Упражнение. Покажите, что корневая система L алгебры $sl(n, C)$ эквивалентна $A_{(n-1)}$.

Указание. Постройте в базисе Окубо (см. § 3 гл. 4) элемент $b = \sum_{i=1}^{n} c_i E_i^i$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$, где все комплексные числа c_i различны. Покажите, что b — регулярный элемент. Линейная оболочка матриц $\{A_i^i\}$ есть подалгебра Картана B, содержащая b. Базисные элементы в B удобно выбрать в виде $b_q \equiv A_q^q - A_{q+1}^{q+1}$. Компоненты корневых векторов $\boldsymbol{\alpha}_q^p$ задайте формулой

$$\left[b_s, A_q^p\right] = \left(\boldsymbol{\alpha}_q^p\right)^s A_q^p = \alpha_q^p (b_s) A_q^p. \tag{30}$$

Постройте изоморфизм φ корневого пространства и V_B, при котором $b_s \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{\alpha}_s^{s+1}$. Тогда формула (30) определит билинейную форму $\langle , \rangle$ на корневом пространстве, причем $\langle \boldsymbol{\alpha}_q^p, \boldsymbol{\alpha}_s^{s+1} \rangle = (\boldsymbol{\alpha}_q^p)^s$. С помощью табл. 5 покажите, что корни $\{\boldsymbol{\alpha}_s^{s+1}\}$ $(s = 1, \ldots, n-1)$ образуют в пространстве $V_B^{(*)}$ базис системы $A_{(n-1)}$. ▼

Приведенная выше схема доказательства может быть использована для построения схем Дынкина симплектических $sp(n, C)$ и ортогональных $so(n, C)$ линейных алгебр Ли. Окончательный результат представлен в табл. 9.

Линейные алгебры, изоморфные G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8, не считаются классическими, поскольку не задаются условиями сохранения билинейной (или полуторалинейной) формы над R или C.

Полученная нами полная классификация простых комплексных алгебр Ли позволяет классифицировать и все простые вещественные алгебры Ли.

(**63**) **Теорема.** Всякая простая вещественная алгебра Ли является вещественной формой либо овеществлением комплексной простой алгебры Ли.

Серия	Каноническая реализация	Овеществления и вещественные формы	Компактные вещественные формы
A_n $n \geqslant 1$	$sl(n+1, C)$	$sl(n+1, C)_R$	
		$sl(n+1, R)$	
		$su(p, q), p+q=n+1$	$su(n+1)$
		$su^*(n+1), n+1=2k$	
B_n $n \geqslant 2$	$so(2n+1, C)$	$so(2n+1, C)_R$	
		$so(p, q), p+q=2n+1$	$so(2n+1)$
C_n $n \geqslant 3$	$sp(n, C)$	$sp(n, C)_R$	
		$sp(n, R)$	
		$sp(p, q), p+q=n$	$sp(n)$
D_n $n \geqslant 4$	$so(2n, C)$	$so(2n, C)_R$	
		$so(p, q), p+q=2n$	$so(2n)$
		$so^*(2n)$	

Доказательство. Пусть $A=([\ ], V_R)$ — простая вещественная алгебра Ли. Рассмотрим ее комплексификацию $A_{\uparrow C}= ([\ ], V_{\uparrow C})$ (см. § 2). Алгебра $A_{\uparrow C}$ либо проста, либо представима в виде прямой суммы простых $A_{\uparrow C}=\oplus L_k$.

Если $A_{\uparrow C}$ проста, то утверждение теоремы тривиально, так как A является одной из вещественных форм $A_{\uparrow C \downarrow R}$.

Пусть $A_{\uparrow C}$ полупроста. Если L_1 — простое прямое слагаемое $A_{\uparrow C}$, то в разложении $\oplus L_k$ содержится также простая подалгебра L_1^*, которая получается из $L_1=([\ ], V_1)$ заменой пространства V_1 на комплексно сопряженное ему пространство V_1^*. Алгебра L_1 не может совпадать с L_1^*, так как это означало бы наличие в исходной алгебре A нетривиального идеала. Алгебра A содержится в $A_{\uparrow C}$ и инвариантна относительно комплексного сопряжения. Следовательно, элементы соответствующего подпространства в $V_{\uparrow C}$ должны иметь вид $v+v^*$. Построим отображение $f: v_1 \to v_1+v_1^*$, где $v_1 \in V_1$.

(64) Упражнение. Покажите, что f коммутирует с композицией $[,]$ алгебры $(L_1)_R$. ∇

Отсюда следует, что $A_{\uparrow C}$ не может содержать других идеалов кроме L_1 и L_1^*, так как A не имеет нетривиальных идеалов. Следовательно, $V_{\uparrow C} \approx V_1 \oplus V_1^*$, и образ $\operatorname{Im} f$ совпадает с $A: A \approx (L_1)_R$, что и требовалось доказать. ▼

Итак, среди вещественных форм и овеществлений комплексных простых алгебр Ли бесконечных серий (табл. 9) содержатся все вещественные простые классические алгебры Ли. Их следует дополнить вещественными формами и овеществлениями исключительных комплексных алгебр Ли [32].

Если на числа n в сериях B_n, C_n и D_n (см. табл. 6, 9) не накладывать ограничений, то в классификации схем Дынкина возникнут перекрывания. Например, схема D_3 эквивалентна

Таблица 10

Эквивалентные схемы Дынкина и изоморфизмы комплексных алгебр	Изоморфизмы вещественных форм и овеществлений
$A_1 \approx B_1 \approx C_1$ $sl(2, C) \approx so(3, C) \approx sp(1, C)$	$su(2) \approx so(3, R) \approx sp(1)$
	$sl(2, R) \approx su(1, 1) \approx so(2, 1) \approx sp(1, R)$
$B_2 \approx C_2$ $so(5, C) \approx sp(2, C)$	$so(5, R) \approx sp(2)$
	$so(3, 2) \approx sp(2, R)$
	$so(4, 1) \approx sp(1, 1)$
$D_2 \approx A_1 \oplus A_1$ $so(4, C) \approx sl(2, C) \oplus sl(2, C)$	$so(4, R) \approx so(3, R) \oplus so(3, R)$
	$so(2, 2) \approx sl(2, R) \oplus sl(2, R)$
	$sl(2, C)_R \approx so(3, 1)$
	$so^*(4) \approx sl(2, R) \oplus su(2)$
$A_3 \approx D_3$ $sl(4, C) \approx so(6, C)$	$su(4) \approx so(6, R)$
	$sl(4, R) \approx so(3, 3)$
	$su(2, 2) \approx so(4, 2)$
	$su(3, 1) \approx so^*(6)$
	$su^*(4) \approx so(5, 1)$
	$so^*(8) \approx so(6, 2)$

A_3 и т. п. Это означает, что линейная алгебра $so(6, C)$, сопоставляемая схеме D_3, является простой алгеброй, эквивалентной $sl(3, C) \equiv A_3$. Изоморфизм $so(6, C) \approx sl(3, C)$ в свою очередь индуцирует изоморфизм вещественных простых алгебр Ли. Например, $su(4) \approx so(6, R)$ и т. д. Подобные изоморфизмы предоставляют возможность выбора наиболее удобной матричной реализации простой алгебры в зависимости от условий задачи (табл. 10). Существует единственный изоморфизм простых действительных алгебр Ли, не индуцированный совпадением схем Дынкина, $so^*(8) \approx so(6, 2)$.

Легко заметить, что среди вещественных форм простой комплексной алгебры всегда присутствует компактная алгебра. Это свойство присуще не только классическим алгебрам Ли.

(65) **Теорема.** Всякая простая комплексная алгебра Ли имеет компактную вещественную форму. ▼

Введем в простой комплексной алгебре A стандартный базис (см. теорему (59)) и рассмотрим ее вещественную форму A_u на линейной оболочке базисных элементов $\{ib_\lambda, (x_\lambda - x_{-\lambda}), i(x_\lambda + x_{-\lambda})\}$. Доказательство теоремы сводится к следующему.

(66) Упражнение. Покажите, что форма Киллинга алгебры A отрицательно определена на подпространстве алгебры A_u и $\mathscr{K}(A)_{\downarrow A_u} = \mathscr{K}(A_u)$. ▼

Компактные вещественные формы классических простых комплексных алгебр Ли приведены в табл. 9.

Поскольку всякая полупростая алгебра представима в виде прямой суммы простых слагаемых (см. (11)), ее свойства целиком определяются свойствами простых компонент. Проведенная классификация простых алгебр является в то же время основой классификации полупростых алгебр Ли.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ 1. Основные понятия

Пусть задан гомоморфизм $\widetilde{D}$ группы G в группу движений некоторого множества X. Гомоморфизм $\widetilde{D}$ и множество X назовем *представлением группы* G и обозначим $\widetilde{D}(G, X)$. Основным объектом нашего исследования будут *линейные представления* $D(G, V)$, где V — линейное пространство, называемое *пространством представления*, а D — гомоморфизм в группу $\operatorname{Aut} V$.

(1) Линейные представления группы G можно строить по представлениям общего вида $\widetilde{D}(G, X)$. Для этого рассмотрим линейное пространство $F(X, V)$ векторнозначных функций $f: X \to V$ на множестве X. Представление $\widetilde{D}(G, X)$ индуцирует гомоморфизм группы G в группу автоморфизмов линейного пространства $F(X, V)$, т. е. линейное представление $D(G, F(X, V))$. В зависимости от того, является X левым или правым G-модулем, преобразования $f \to f'$, индуцируемые в $F(X, V)$, различны:

$$f'(x) = (D(g) f)(x) = \begin{cases} f(xg) \text{ — для правого } G\text{-модуля}, \\ f(g^{-1}x) \text{ — для левого } G\text{-модуля}. \end{cases} \tag{1}$$

Легко проверить, что при таком действии оператора $D(g)$ $(g \in G)$ отображение D является гомоморфизмом. ▼

Другим методом построения линейного представления по G-модулю является погружение последнего в линейное пространство, представимое в виде объединения G-модулей.

(2) Пример. *Группа де Ситтера.* Рассмотрим группу G непрерывных преобразований в пространстве Минковского, сохраняющих форму:

$$dr^2 = h^2 dx_\mu dx^\mu = h^2 [(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2],$$
$$h = \left(1 + \frac{1}{4r^2}((x^0)^2 - (\boldsymbol{x})^2)\right), \quad r \in R_+. \tag{2}$$

Очевидно, что G содержит нелинейные преобразования, так что пространство M_4, будучи G-модулем, не может служить пространством представления. Построим объединение G-модулей $M_4(r)$ для всех $r \in R_+$. В полученном пятимерном пространстве введем координаты $y^\lambda (\lambda = 0, 1, 2, 3, 5)$ так, что

$$\sum_\lambda y^\lambda \gamma^\lambda = r \frac{1 + \gamma_5 \gamma^\mu x_\mu (2r)^{-1}}{1 - \gamma_5 \gamma^\mu x_\mu (2r)^{-1}}. \tag{3}$$

Определение матриц γ см. в § 2.8. В этих координатах преобразования группы G сохраняют билинейную форму

$$f(y) = (y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^5)^2 = r^2, \tag{4}$$

так что каждому элементу $g \in G$ можем сопоставить (линейное) ортогональное преобразование в пространстве R^5 с метрикой $(+, -, -, -, -)$, т. е. построить (линейное) представление группы G. В соответствии с классификацией линейных групп (см. табл. 2) группа инвариантности формы (4) есть $O(4, 1)$. ▼

(3) Упражнение. Докажите, что отображение $G \to O(4, 1)$, индуцированное соотношением (3), есть изоморфизм. ▼

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем называть представлениями лишь линейные представления.

Размерность пространства V представления $D(G, V)$ называется также *размерностью представления*: $\dim D \equiv \dim V$.

Представление называется *вещественным* (*комплексным*), если пространство представления вещественное (соответственно комплексное).

Представлением топологической группы (группы Ли) G будем считать такой гомоморфизм $D(G, V)$ в группу $\mathrm{Aut}\, V$, для которого отображение $D: (g, v) \to D(g)v$ пространства $G \times V$ в V непрерывно (аналитично).

Определение всякой линейной группы является одновременно заданием ее представления (в виде группы линейных операторов, т. е. группы матриц). Такие представления будем называть *определяющими*.

Одной из задач теории представлений является изучение свойств группы с помощью ее линейной модели. При этом естественно стремление строить такие гомоморфизмы, в которых не терялась бы информация об исходной структуре. Представление $D(G)$, удовлетворяющее условию $\mathrm{Ker}\, D = e$ (e — единица группы G), называется *точным*. Если образ $\mathrm{Im}\, D$ в группе $\mathrm{Aut}\, V$ есть тождественное преобразование $\mathrm{Im}\, D = \mathrm{id}$, представление называется *тривиальным*.

В приложениях часто встречается ситуация, когда пространство V представления $D(G, V)$ имеет несколько эквивалентных реализаций V_i. С помощью отображения, осуществляющего эквивалентность $\varphi_i: V \approx V_i$, легко построить представления $D_i(G, V_i)$ с операторами

$$D_i(g) = \varphi_i D(g)\varphi_i^{-1}. \qquad (5)$$

Удобно рассматривать равенство (5) как отношение эквивалентности в множестве представлений группы G. Сформулируем определение. Пусть $D(G, V)$ и $B(G, W)$ — представления группы G в пространствах V и W соответственно. Если существует изоморфизм, такой, что

$$\zeta: V \approx W,$$
$$B(g)\zeta = \zeta D(g) \qquad (6)$$

для всех $g \in G$, то представления D и B считаются *эквивалентными.*

Равенство (6) интересно рассмотреть и в том случае, когда пространства V и W неизоморфны и представления D и B' неэквивалентны. Будем называть отображение $\zeta: V \to W$, удовлетворяющее условию (6), *сплетающим оператором* независимо от того, является ζ изоморфизмом или гомоморфизмом. Множество сплетающих операторов образует линейное пространство $\zeta[D, B] \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ (см. (2.82)). Размерность пространства сплетающих операторов $\dim \zeta[D, B]$ называется *числом сплетения*. Изоморфизм, осуществляющий эквивалентность представлений (если таковой существует), является частным случаем сплетающего оператора.

Для топологических групп (групп Ли) сплетающим будем называть непрерывный (аналитический) оператор, удовлетворяющий равенству (6). Если представления эквивалентны, то ζ^{-1} наряду с ζ является сплетающим оператором.

Если G — группа симметрии системы квантовых объектов (преобразующихся по различным представлениям группы G), то отображения ζ описывают их инвариантные связи.

(4) Пример. Для группы $SU(2)$ тождественный изоморфизм D в группу унитарных унимодулярных комплексных 2×2 матриц реализует определяющее представление $D(SU(2), C^2)$ в двумерном комплексном пространстве. Рассмотрим пространство F однородных линейных функций $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных. Сопоставим всякому элементу

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

линейное преобразование

$$(B(g)f)(z_1, z_2) = f(g_{11}z_1 + g_{21}z_2,\ g_{12}z_1 + g_{22}z_2). \qquad (7)$$

Легко убедиться, что изоморфизм $g \to B(g)$ определяет представление $B(SU(2), F)$, эквивалентное $D(SU(2), C^2)$. Сплетающий оператор $\zeta: C^2 \to F$ имеет вид

$$\zeta(v_1, v_2) = f_{v_1v_2} \in F, \quad f_{v_1v_2} = v_1z_1 + v_2z_2, \quad (v_1, v_2) \in C^2. \ ▼$$

Пусть на пространствах V_1 и V_2 заданы представления D_1 и D_2 группы G. Рассмотрим тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$ и сопоставим всякому $g \in G$ оператор $C(g)$:

$$C(g)(v_1 \otimes v_2) = D_1(g)\, v_1 \otimes D_2(g)\, v_2. \tag{8}$$

Отображение $G \to \{C(g)\}$ есть гомоморфизм групп: оно задает на пространстве $V_1 \otimes V_2$ представление $C(G,\ V_1 \otimes V_2)$, которое мы назовем *тензорным произведением представлений* D_1 и D_2; $C \equiv D_1 \otimes D_2$.

На пространствах V_1 и V_2 зададим невырожденную билинейную (или полуторалинейную) форму $f: V_1 \otimes V_2 \to K$. Пусть на V_2 действует представление D группы G. Всякому оператору $D(g)$ можем сопоставить *дуальный оператор* $D^{(*)}(g)$, действующий на пространстве V_1:

$$f\left(D^{(*)}(g)\, v_1,\ v_2\right) = f\left(v_1,\ D(g)\, v_2\right). \tag{9}$$

В частности, если пространства V_1 и V_2 конечномерны и $\hat{f}$ — матрица формы f, то

$$\begin{gathered} v_1^{\mathrm{T}} D^{(*)\,\mathrm{T}}(g)\, \hat{f} v_2 = v_1^{\mathrm{T}} \hat{f} D(g)\, v_2, \\ D^{(*)}(g) = (\hat{f}^{-1})^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}}(g)\, \hat{f}^{\mathrm{T}} \end{gathered} \tag{10}$$

для билинейной формы и

$$\begin{gathered} v_1^{\dagger} D^{(*)\,\dagger}(g)\, \hat{f} v_2 = v_1^{\dagger} \hat{f} D(g)\, v_2, \\ D^{(*)}(g) = (\hat{f}^{-1})^{\dagger} D^{\dagger}(g)\, \hat{f}^{\dagger} \end{gathered} \tag{11}$$

для полуторалинейной.

Отображение $\varphi: G \to \{D^{(*)}(g)\}$ не является групповым гомоморфизмом. Однако его можно дополнить отображением $\xi: G \to G^{-1}$, чтобы поменять порядок действия операторов. Композиция $\varphi \circ \xi$ задает п р е д с т а в л е н и е $D^{\langle * \rangle f}$ группы G на пространстве V_1:

$$D^{\langle * \rangle f}(g) \equiv D^{(*)}(g^{-1}). \tag{12}$$

Представление $D^{\langle * \rangle f}(G,\ V_1)$ называется *сопряженным* к представлению $D(G,\ V_2)$ *относительно формы* f. Поскольку f невырождена, размерности представлений D и $D^{\langle * \rangle f}$ совпадают. Для конечномерных представлений матрицы операторов $D^{\langle * \rangle f}(g)$ имеют вид

$$D^{\langle * \rangle f}(g) = (\hat{f}^{-1})^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}}(g^{-1})\, \hat{f}^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

если f билинейна, и

$$D^{\langle * \rangle f}(g) = (\hat{f}^{-1})^{\dagger} D^{\dagger}(g^{-1}) \hat{f}^{\dagger}, \tag{14}$$

если f полуторалинейна.

Представление

$$D^{\langle * \rangle} \equiv (D^{\dagger})^{-1}, \tag{15}$$

сопряженное к D относительно формы скалярного произведения в гильбертовом пространстве, будем называть просто *сопряженным* к D.

Форма f очевидно инвариантна относительно действия тензорного произведения представлений $D^{\langle * \rangle f} \otimes D$:

$$f\left(D^{\langle * \rangle f}(g) v_1,\ D(g) v_2\right) = f(v_1,\ v_2).$$

Для конечномерных пространств и билинейной формы f существует естественный изоморфизм $\varphi: V_2 \leftrightarrow V_1$, при котором базису $\{v_{2j}\}$ сопоставляется базис $\{v_1^i\}$, такой, что $f(v_1^i, v_{2j}) = \delta_j^i$ (см. (**2.97**)). С помощью этого изоморфизма представлению $D^{\langle * \rangle f}$ можно сопоставить представление $D_{(*)}$ группы G операторами $\varphi^{-1} D^{\langle * \rangle f} \varphi$, действующее в V_2. Из формулы (12) следует, что представление

$$D_{(*)} = \varphi^{-1} D^{\langle\ \rangle f} \varphi \tag{16}$$

эквивалентно представлению группы G операторами $D^{\mathrm{T}}(g^{-1})$ в том же пространстве V_2.

Если f полуторалинейна, то существует естественный антиизоморфизм $\varphi^*: V_2 \to V_1$, т. е. $\varphi^*(a^i v_{2i}) = a^{*i} v_{1i}$. Представление

$$D_{(*)} = \varphi^{*-1} D^{\langle * \rangle f} \varphi^*, \tag{17}$$

действующее в пространстве V_2, вновь оказывается эквивалентным представлению $D^{\mathrm{T}}(g^{-1})$ (а не $D^{\langle * \rangle}$).

Таким образом, всякому представлению D можно в том же пространстве сопоставить представление $D_{(*)} \approx (D^{\mathrm{T}})^{-1}$, которое назовем *контраградиентным* представлению D.

Рассмотрим представление $D(G, \mathscr{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и скалярное произведение (,) в качестве формы f. Скалярное произведение инвариантно относительно тензорного произведения $D^{\langle * \rangle} \otimes D$. Пусть теперь все операторы представления D унитарны. Тогда $D^{\langle * \rangle}$ будет совпадать с D и скалярное произведение (,) инвариантно относительно D:

$$(D(g) h_1,\ D(g) h_2) = (h_1,\ h_2).$$

Такое представление называется *унитарным*.

Обобщим понятие унитарного представления. Пусть f — произвольная (билинейная или полуторалинейная) форма на пространстве V, инвариантная относительно представления $D(G, V)$. Построим представление $D^{\langle * \rangle f}$. Из инвариантности f следует

$$D^{\langle * \rangle f} = D. \tag{18}$$

Назовем такое представление *самосопряженным*. Унитарное представление есть частный случай самосопряженного.

Отметим существенное различие свойств самосопряженных представлений для билинейной и полуторалинейной форм. Из равенств (13) — (18) следует, что

$$D_{(*)} \approx (D^{\mathrm{T}})^{-1} \approx D^{\langle * \rangle f} = D, \quad f \text{ — билинейна;} \tag{19}$$

$$D_{(*)} \approx (D^{\mathrm{T}})^{-1} \not\approx (D^{+})^{-1} \approx D^{\langle * \rangle f} = D, \quad f \text{ — полуторалинейна,} \tag{20}$$

т. е. в последнем случае из самосопряженности D не следует эквивалентность D и $D_{(*)}$. Представление $D_{(*)}$ эквивалентно здесь такому D^*, операторы которого получаются из операторов $D(g)$ комплексным сопряжением

$$D_{(*)}(g) \approx D^*(g) \equiv (D(g))^*.$$

Будем называть представление D^* *комплексно сопряженным* представлению D.

(5) Пример. Пусть D — определяющее (унитарное) представление группы $SU(2)$ в пространстве C^2. Представление $D_{(*)} = D^{\mathrm{T}}(g^{-1}) = D^*(g)$ не совпадает с $D(g)$. Примем во внимание изоморфизм групп $SU(2)$ и $Sp(1)$ (см. **(2.105)** и **(2.106)**). Представление D группы $SU(2)$, являющееся одновременно определяющим представлением группы $Sp(1)$, сохраняет билинейную симплектическую форму в C^2 с матрицей F. Следовательно, $D = D^{\langle * \rangle F} = (F^{\mathrm{T}})^{-1}(D^{\mathrm{T}})^{-1} F^{\mathrm{T}} \approx \approx (D^{\mathrm{T}})^{-1} = D^*$, т. е. $D \approx D^*$. Установленная эквивалентность не зависит от вида билинейной формы.

(6) Пример. Определяющее представление ортогональной группы $O(p, q)$, $p+q=n$, является самосопряженным относительно билинейной формы с матрицей $I_{p,q}$:

$$D = D^{\langle * \rangle f} = I_{p,q}^{-1}(D^{\mathrm{T}})^{-1} I_{p,q} = I_{p,q}^{-1} D_{(*)} I_{p,q}, \tag{21}$$

где $I_{p,q}$ играет роль матрицы формы и оператора, сплетающего представления $D^{\langle * \rangle f}$ и $D_{(*)}$.

Определяющее представление группы $U(p, q)$, $p+q=n$, обладает очевидными свойствами:

$$D = D^{\langle * \rangle f} = I_{p,q}^{-1} (D^{\dagger})^{-1} I_{p,q},$$
$$D_{(*)} = (D^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{22}$$

В общем случае представления D и $D_{(*)}$ не эквивалентны. Действительно, их эквивалентность означала бы существование билинейной инвариантной формы в пространстве определяющего представления. Последнее справедливо только в случае групп $SU(2)$ и $SU(1, 1)$ $(SU(1, 1) \approx Sp(1, R))$. ▼

(7) Пример. Рассмотрим унитарное представление $D(U(n), V)$ группы $U(n)$. Относительно формы скалярного произведения в V представления $D^{\langle * \rangle}$ и $D_{(*)}$ обладают свойствами (22), т. е. $D_{(*)} = D^*$. Представление $D_{(*)} \otimes D$ унитарно и вещественно:

$$(D_{(*)} \otimes D)^* = (D^* \otimes D)^* = D \otimes D^* \approx D^* \otimes D \approx D_{(*)} \otimes D.$$

Тогда для контраградиентного представления справедливо свойство, аналогичное (15):

$$((D_{(*)} \otimes D)^{\mathrm{T}})^{-1} = (((D_{(*)} \otimes D)^{\dagger})^{-1})^* \approx D_{(*)} \otimes D.$$

Следовательно, помимо полуторалинейной формы представление $D_{(*)} \otimes D$ сохраняет билинейную форму на $V \otimes V$. Такие представления приведены в гл. 7, их физическая интерпретация рассмотрена в гл. 8. ▼

Пусть гомоморфизм D групп Ли G и $\mathrm{Aut}\, V$ реализует представление $D(G, V)$. Сопоставим гомоморфизму групп Ли гомоморфизм их алгебр Ли по теореме (**4.12**). В результате получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{D(G,\ V)} & \mathrm{Aut}\, V \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{d(A,\ V)} & gl(V) \end{array}, \tag{23}$$

где $d(A, V)$ — дифференциал аналитического отображения D — осуществляет представление алгебры Ли в пространстве V. Таким образом, всякому представлению группы Ли G соответствует представление ее алгебры Ли в том же пространстве: если $a \in A$ — направляющий вектор подгруппы $g(t) \subset G$, то оператор $d(a)$ должен быть равен направляющему вектору подгруппы $D(g(t))$ линейных операторов:

$$\frac{d}{dt} D(g(t)) \Big|_{t=0} = d(a). \tag{24}$$

(8) Упражнение. Пусть $d(A, V)$ и $c(A, W)$ — дифференциалы представлений $D(G, V)$ и $C(G, W)$ группы Ли G. Покажите, что формула (24) сопоставляет представлению

$D(G, V)\otimes C(G, W)$ тензорное произведение представлений $d(A, V)\otimes c(A, W)$ (см. (5.1)). ▼

Если на пространствах V_1 и V_2 заданы невырожденная форма f и представление $D(G, V_2)$, то представлению $D^{\langle*\rangle f}(G)$ можно по правилу (24) сопоставить представление $d^{\langle*\rangle f}(A, V_1)$ алгебры Ли A группы G. Будем называть представление $d^{\langle*\rangle f}(A, V_1)$ *сопряженным* представлению $d(A, V_2)$ *относительно формы* f. Из формулы (12) следует, что операторы $d^{\langle*\rangle f}(a)$ связаны с дуальными операторами $d^{(*)}(a)$ равенством

$$d^{\langle*\rangle f}(a) = -d^{(*)}(a), \tag{25}$$

где дуальный оператор $d^{(*)}(a)$ определяется по форме f (см. (9)—(11)). Форма f инвариантна относительно $d^{\langle*\rangle f}\otimes \boldsymbol{d}$, в чем легко убедиться, применяя формулу (24) к условию инвариантности (18).

С помощью изоморфизма λ (антиизоморфизма λ^*) пространств V_2 и V_1 построим представления $d_{(*)}$ в V_2:

$$d_{(*)} = \lambda^{-1} d^{\langle*\rangle f}\lambda \approx -d^{\mathrm{T}}, \quad f \text{ — билинейна}, \tag{26}$$

$$d_{(*)} = \lambda^{*-1} d^{\langle*\rangle f}\lambda^* \approx -d^{\mathrm{T}}, \quad f \text{ — полуторалинейна}. \tag{27}$$

Унитарному представлению группы Ли G сопоставляется такое представление $d(A)$ ее алгебры, для которого

$$d^{\langle*\rangle} = -d^{\dagger} = d. \tag{28}$$

В квантовой механике предпочтительнее иметь дело с эрмитовым оператором. Этого легко достичь, считая однопараметрические подгруппы $g(t)$ зависящими от мнимого параметра $\tau = (-it)$. Переопределим оператор $d(a)$:

$$\frac{d}{d(\tau)} D(g(t(\tau)))\Big|_{\tau=0} \equiv d(a). \tag{29}$$

Тогда унитарному представлению группы будет соответствовать *эрмитово* представление ее алгебры Ли

$$d = d^{\dagger} = d^{\langle*\rangle}. \tag{30}$$

(9) Замечание. Эрмитово представление вещественной алгебры, сопоставленное унитарному представлению группы, только в том случае является вещественным гомоморфизмом, если вместо исходной алгебры рассматривается ее реализация с мнимыми структурными константами (см. замечание **(5.25)**). ▼

Представление алгебры Ли $d(A)$ назовем *самосопряженным,* если оно совпадает с представлением, сопряженным относительно некоторой (билинейной или полуторалинейной) невырожденной формы.

Отметим, что в случае антиэрмитова представления d представление $d_{(*)}$ можно связать с исходным операцией комплексного сопряжения

$$d_{(*)} \approx d^{*}. \tag{31}$$

Если же представление d эрмитово, то

$$d_{(*)} \approx -d^{*}. \tag{32}$$

Из формул (26), (27) следует, что для самосопряженных представлений $d = d^{\langle * \rangle f}$ справедливы соотношения

$$d_{(*)} \approx d, \ f\text{—билинейна}, \tag{33}$$

$$(d_{(*)})^{*} \approx d, \ f\text{—полуторалинейна}. \tag{34}$$

(10) Примеры. В примере **(4.4)** мы построили три независимые однопараметрические подгруппы $\varkappa_j$ в группе $SU(2)$ (см. формулу (4.5)). Их направляющие векторы $l_j (j = 1, 2, 3)$ составляют базис в алгебре $su(2)$. Рассмотрим определяющее представление D подгрупп $\varkappa_j$

$$D(\varkappa_j(t)) = \exp(-it\sigma_j) \tag{35}$$

и построим операторы, представляющие базис алгебры $su(2)$:

$$d(l_j) = -i\sigma_j. \tag{36}$$

В эрмитовом базисе по формуле (29) получим

$$d(\mathbf{l}) = \sigma. \tag{37}$$

Так что алгебра матриц Паули с учетом предыдущего замечания реализует представление алгебры $su(2)$, соответствующее определяющему представлению группы $SU(2)$. Комплексно сопряженному представлению D^{*} сопоставляется представление $-d^{*}$ алгебры $su(2)$ (оно эквивалентно $d_{(*)}(su(2))$).

Матрица F симплектической билинейной формы, инвариантной относительно представления D, сплетает представления d и $-d^{*}(\mathbf{l}) = -\sigma^{*}$, поскольку $F\sigma F^{-1} = -\sigma^{*}$. ▼

(11) Выберем в группе $SL(2, C)$ независимые однопараметрические подгруппы $\exp z_{(k)}\sigma_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Овеществим $SL(2, C)$, т. е. будем рассматривать ее как вещественную группу вдвое большей размерности. Построим в $SL(2, C)_R$ шесть независимых однопараметрических подгрупп:

$$\begin{gathered} L_k(t_{(k)}) = \exp(-t_{(k)}\sigma_k), \quad R_k(s_{(k)}) = \exp(-is_{(k)}\sigma_k), \\ t_{(k)} = \operatorname{Re} z_{(k)}, \quad s_{(k)} = \operatorname{Im} z_{(k)}. \end{gathered} \tag{38}$$

Матрицы (38) можно рассматривать как операторы определяющего представления D группы $SL(2, C)_R$. В примере (**5.24**) был построен базис алгебры $sl(2, C)_R$ в виде $\{-i\sigma_k/2, \sigma_k/2\}$. Применяя формулу (24), видим, что дифференциал d отображения D совпадает с определяющим представлением алгебры $sl(2, C)_R$:

$$d(\mathbf{l}) = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad d(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{39}$$

По представлению d определяются представления $d_{(*)}$ и d^*. Кроме того, по форме f можно построить представление $d^{\langle * \rangle f}$. Из соотношений (13), (14) видно, что представления $d^{\langle * \rangle f}$ для всякой билинейной формы эквивалентны $d_{(*)}$, а в случае полуторалинейной — сопряженному представлению $d^{\langle * \rangle} = -d^{\dagger}$. Из четырех возможностей d, $d_{(*)}$, d^* и $d^{\langle * \rangle}$ первые два представления (как и в случае $SU(2)$) сплетаются матрицей F симплектической формы (в чем проявляется изоморфизм $sl(2, C) \approx sp(2, C)$ — см. табл. 10). Так как матрица F вещественна, то она же сплетает представления $d^{\langle * \rangle} = (d_{(*)})^*$ и d^*.

Отметим, что вследствие изоморфизма $sl(2, C)_R \approx so(3, 1)$ операторы $d(a)$, $a \in sl(2, C)_R$ являются одновременно операторами представления алгебры $so(3, 1)$ в C^2. ▼

Рассмотрим подпространство $V_1 \subset V$ в пространстве представления $D(G, V)$. Пусть операторы $D(g)$ не выводят из V_1. Тогда ограничения $D_1(g) \equiv D|_{V_1}(g)$ операторов D образуют подгруппу линейных преобразований пространства V_1. Сопоставляя всякому $g \in G$ оператор $D_1(g)$, получаем представление $D_1(G, V_1)$ группы G, которое называется *подпредставлением* представления D.

Для топологической группы подпредставление может быть реализовано только на з а м к н у т о м подпространстве $V_1 \subset V$.

Представление называется *приводимым*, если содержит нетривиальные подпредставления.

(**12**) Упражнение. Пусть $D_1(G, V_1)$ — подпредставление представления $D(G, V)$. Покажите, что гомоморфизм D индуцирует гомоморфизм группы G в группу линейных операторов на факторпространстве V/V_1. Полученная конструкция называется *факторпредставлением* D по D_1. ▼

Представление $D(G, V)$ называется *разложимым*, если содержит подпредставления $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$, такие, что $V \approx V_1 \oplus V_2$. В этом случае говорят также, что представление эквивалентно (прямой) *сумме представлений* D_1 и $D_2 : D \approx \approx D_1 \oplus D_2$.

Если в представлении D для в с я к о г о подпредставления D_1 существует D_2, такое, что $D \approx D_1 \oplus D_2$, то представление называется *вполне приводимым*. В таком представлении всякое инвариантное (относительно действия группы) подпространство имеет инвариантное дополнение.

(13) Утверждение. Всякое конечномерное представление, сохраняющее (как группа линейных операторов) невырожденную билинейную (или полуторалинейную) форму, вполне приводимо. В частности, вполне приводимо всякое конечномерное унитарное представление.

(14) Упражнение. Докажите это утверждение. ▼

Если представление $D(G, V)$ не содержит нетривиальных подпредставлений, то оно называется *неприводимым*. Наличие подпредставления в представлении топологической группы означает существование замкнутого инвариантного подпространства в пространстве представления. Будем различать *алгебраическую* неприводимость, т. е. отсутствие инвариантных подпространств, и *топологическую* неприводимость, при которой пространство представления не должно содержать замкнутых инвариантных подпространств.

(15) Упражнение. Покажите, что определяющее представление всякой простой классической линейной группы алгебраически неприводимо. Воспользуйтесь утверждением (13). ▼

Пусть на пространствах V_1 и V_2 задана невырожденная билинейная (полуторалинейная) форма f. Предположим, что на пространстве V_2 действует представление $D(G, V_2)$. Построим представления $D^{\langle * \rangle f}(G, V_1)$ и $D_{(*)}(G, V_2)$.

(16) Представления D, $D^{\langle * \rangle f}$ и $D_{(*)}(d, d^{\langle * \rangle f}$ и $d_{(*)})$ неприводимы, приводимы, вполне приводимы одновременно. ▼

Предлагаем читателю проверить это утверждение самостоятельно.

При определенных условиях аналогичная связь может быть установлена между свойствами представления D группы Ли и представления d ее алгебры (см. диаграмму (23)).

§ 2. Общие свойства неприводимых представлений и подпредставлений. Сплетающий оператор. Леммы Шура. Теорема Бернсайда

Изучение произвольного представления $D(G, V)$ существенно упрощается, если его можно разложить в прямую сумму. Совокупность свойств прямых слагаемых содержит практически всю информацию об исходном представлении. Задача, следовательно, состоит в выделении неприводимых подпредставлений D, сумма которых эквивалентна исходному представлению.

Первый шаг состоит в распознавании неприводимых представлений. Для этого обратимся к свойствам неприводимых представлений и сплетающих операторов.

(17) Лемма Шура I. Если $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$ алгебраически неприводимы, то всякий сплетающий оператор $\zeta[D_1, D_2]$ равен нулю либо обратим.

Доказательство. Пусть W_1 — ядро оператора ζ, $\operatorname{Ker}\zeta = W_1$. Тогда

$$\zeta D_1 W_1 = D_2 \zeta W_1 = 0,$$

т. е. W_1 инвариантно относительно D_1. Из неприводимости D_1 следует, что W_1 либо тривиально, либо совпадает с пространством V_1.

Пусть $W_2 = \operatorname{Im}\zeta$. Тогда

$$D_2 W_2 = D_2 \zeta V_1 = \zeta D_1 V_1.$$

Иными словами, W_2 — инвариантное подпространство в V_2. Неприводимость D_2 означает, что W_2 — либо нуль, либо V_2.

Зная возможные значения ядра и образа оператора ζ, можно утверждать, что ζ либо аннулирует V_1, либо изоморфно отображает его на V_2. В последнем случае существует обратное отображение ζ^{-1}. ▼

(18) Следствие. Алгебраически неприводимые представления либо эквивалентны, либо не сплетаются. ▼

Итак, для алгебраически неприводимого представления D все элементы пространства $\zeta[D, D] \equiv \zeta[D]$, кроме нуля, обратимы. Следовательно, ζ является телом.

(19) Теорема. Пусть размерность алгебраически неприводимого представления $D(G, V_K)$ не более чем счетна. Тогда для $K = C$ пространство $\zeta[D]$ изоморфно C. Если же $K = R$, то $\zeta[D]$ может быть изоморфно R, C или $\varkappa$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [15]. ▼

Будем различать три типа вещественных неприводимых представлений: *вещественный, комплексный и кватернионный* — в зависимости от того, будет $\zeta[D] \approx R$, C или $\varkappa$.

С помощью теоремы (18) нетрудно доказать следующее утверждение, широко используемое в приложениях.

(20) Следствие. Если *овеществление* $D(G, V_{\downarrow R})$ алгебраически неприводимого комплексного (кватернионного) представления неприводимо, то оно есть вещественное неприводимое представление комплексного (кватернионного) типа. *Комплексификация* $D(G, V_{\uparrow C})$ вещественного алгебраически неприводимого представления является неприводимой суммой двух неэквивалентных неприводимых или суммой двух эквивалентных неприводимых в зависимости от того, было $D(G, V_R)$ вещественного, комплексного или кватернионного типа. ▼

Для топологически неприводимых представлений лемма Шура в общем случае неверна, так как не всякий сплетающий оператор имеет замкнутый образ. Однако в двух важных для нас частных случаях можно доказать аналог леммы Шура.

(21) Лемма Шура II. Пусть D — конечномерное неприводимое комплексное представление в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Всякий оператор $\zeta\in\zeta[D]$ имеет вид $\zeta=\lambda I$, $\lambda\in C^1$.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора ζ. Рассмотрим множество $M=\{x\in\mathscr{H},\ \zeta x=\lambda x\}$. Оно непусто, замкнуто (как множество решений алгебраического уравнения) и инвариантно:

$$\zeta D(g)\,x=D(g)\,\zeta x=\lambda D(g)\,x\qquad (x\in M).$$

Тогда из неприводимости D следует $M=\mathscr{H}$, т. е. $\zeta x=\lambda x$ на всем $\mathscr{H}$.▼

Известно, что для бесконечномерных представлений топологических групп сплетающий оператор не обязательно имеет дискретный спектр, так что доказать лемму Шура II в общем случае не удается. Однако если представление D унитарно и $\zeta\in\zeta[D]$, то $\zeta^{\dagger}\in\zeta[D]$ и $\xi={}^1/_2(\zeta+\zeta^{\dagger})\in\zeta\ [D]$. Оператор ξ — самосопряженный и, следовательно, имеет дискретные собственные значения. Более того, можно доказать [2] неприводимость унитарного представления, если все его нетривиальные сплетающие операторы кратны I.

(22) Лемма Шура III. Унитарное представление D неприводимо тогда и только тогда, когда всякий $\zeta\in\zeta[D]$ имеет вид λI $(\lambda\in C)$.

(23) Следствие. Унитарные неприводимые представления абелевой группы одномерны. ▼

Будем называть *операторно неприводимым* такое представление $D(G,\ V_K)$, для которого пространство $\zeta[D]$ состоит из операторов λI $(\lambda\in K)$. Лемма Шура III утверждает, что понятия неприводимости и операторной неприводимости для унитарных представлений эквивалентны. В этих терминах можно переформулировать и другие утверждения данного параграфа. Отметим, что из операторной неприводимости неприводимость не следует, если представление не является вполне приводимым.

(24) Пример. Рассмотрим одномерное кватернионное представление $D: SU(2)\to\varkappa_*$ в правом $\varkappa$-модуле $\varkappa^1$,

$$D(g)\,q=\varkappa(g)\,q,\quad q,\ \varkappa\in\varkappa^1,\ \varkappa(g)=u^{\mu}e_{\mu}\in\varkappa_*,\ \sum(u^{\mu})^2=1.$$

Оно эквивалентно определяющему представлению группы $SU(2)$ в C^2 (см. (**2.105**))

$$B(g)=\begin{pmatrix}u^0-iu^3 & -u^2-iu^1\\ u^2-iu^1 & u^0+iu^3\end{pmatrix}.$$

Овеществим представление B. Пронумеровав координаты базиса $\{v_1, v_2\}\in C^2$ над R $r_1=\operatorname{Re}v_1$, $r_2=\operatorname{Re}v_2$, $r_3=\operatorname{Im}v_1$, $r_4=\operatorname{Im}v_2$, для матриц $B(SU(2),\ C^2_{\downarrow R}\ )$ получим

$$C(g)=\begin{pmatrix} u^0 & -u^2 & u^3 & u^1 \\ u^2 & u^0 & u^1 & -u^3 \\ -u^3 & -u^1 & u^0 & -u^2 \\ -u^1 & u^3 & u^2 & u^0 \end{pmatrix}=u^0 I+u^1\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+u^2\begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}+u^3\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(25) Упражнение. Покажите, что представление C неприводимо над R, пользуясь тем, что всякое его подпредставление есть вещественное представление алгебры кватернионов. ▽

Представление C есть овеществление кватернионного представления D. Следовательно (см. (20)), это неприводимое вещественное представление кватернионного типа, т. е. $\zeta[C]\approx \varkappa^1$. Действительно, линейно независимые вещественные матрицы

$$\zeta_0=I,\ \ \zeta_1=\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ \ \zeta_2=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\ \ \zeta_3=\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}$$

сплетают представление C.

Комплексификация $C(SU(2), R^4_{\uparrow C})$ — приводимое представление. Матрица

$$a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} iI & -I \\ iI & I \end{pmatrix}$$

приводит его к виду $B\oplus B^*$. Напомним, что $B^*\approx B$ (см. (5)). ▼

(26) Если представление приводимо и вполне приводимо, то проекторы на инвариантные подпространства являются его сплетающими операторами. Таким образом, для комплексного вполне приводимого представления отсутствие нетривиальных сплетающих операторов может служить критерием неприводимости.

(27) В примере (2) мы рассмотрели способ построения линейного представления D группы де Ситтера $O(4, 1)$. Представление D неприводимо (см. (15)). Построим представление спинорной группы $\widehat{G}$ (см. (2.126), (2.127)) — универсальной накрывающей для связной компоненты группы де Ситтера. Введем матрицы σ^{AB}, где $A, B=0, 1, 2, 3, 5$, $\sigma^{\mu5}\equiv {}^1/_2[\gamma^\mu, \gamma^5]$ и $\sigma^{\mu\nu}\equiv {}^i/_2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Их коммутационные соотношения имеют вид

$$[\sigma^{AB}, \sigma^{CD}]=2i(g^{AD}\sigma^{BC}+g^{BC}\sigma^{AD}-g^{AC}\sigma^{BD}-g^{BD}\sigma^{AC}), \qquad (40)$$

где матрица метрического тензора $g=I_{4,1}$. Сравним соотношения (40) с композицией алгебры $so(4, 1)$ в базисе Окубо (см. (4.19)). Согласно замечанию (9) мы получили четырехмерное комплексное представление алгебры Ли группы де Ситтера. С помощью экспоненциального отображения построим группу линейных операторов $\exp(i\omega_{AB}\sigma^{AB})$, реализующую представление D группы $\widehat{G}$.

Рассмотрим преобразования $x \equiv x^A\gamma_A \to x' = D(g)xD(g^{-1}) \in \in C(3, 1)$, представляющие элементы $g \in \widehat{G} = \mathrm{Spin}(4, 1)$ вида (2.85)—(2.87). Для каждого $x \neq \lambda I$ легко указать элемент g этого вида, такой, что $x \neq x' = D(g)xD(g^{-1})$. Отсюда следует, что оператор, коммутирующий со всеми матрицами представления, кратен единичному. В силу свойства (13) это доказывает неприводимость представления D. ▼

Предыдущий пример тесно связан со следующим утверждением, имеющим широкое практическое применение.

(28) **Теорема Бернсайда.** Если $D(G, V)$ — неприводимое комплексное конечномерное представление, то линейная оболочка операторов $\{D(g)\}$ совпадает с пространством $\mathrm{End}\, V$ (доказательство см. в [15]).

(29) Пример. В определяющем представлении D группы $SU(2)$ всякая матрица $D(g)$ представима в виде

$$D(g(a)) = \begin{pmatrix} a^0 - ia^3 & -a^2 - ia^1 \\ a^2 - ia^1 & a^0 - ia^3 \end{pmatrix} = a^0 I - i(\mathrm{a}, \sigma), \quad \sum (a^\mu)^2 = 1.$$

Совокупность матриц $\{I, \sigma_j\}$ образует базис (над C в пространстве $\mathrm{End}\, C^2$). Аналогичная ситуация складывалась в предыдущем примере.

§ 3. Прямой интеграл представлений. Инвариантное интегрирование. Мера Хаара. Фактормера и интегрирование на однородном пространстве. Регулярное представление

В приложениях приходится оперировать такими представлениями, для которых процесс выделения инвариантных подпространств существенно бесконечен. Оказывается, что если они унитарны, то в известном смысле их можно разложить на неприводимые.

Обобщим понятие прямой суммы представлений.

Пусть X — топологическое пространство с мерой μ [4]. Зададим семейство $\{\mathscr{H}_x\}$ $(x \in X)$ гильбертовых пространств. Определим новое пространство H:

$$H \equiv \int_X \mathscr{H}_x d\mu(x) \tag{41}$$

как пространство измеримых функций f на X, значение которых в каждой точке $x \in X$ есть вектор соответствующего гильбертова пространства $\mathscr{H}_x$. Введем скалярное произведение в H:

$$(f_1, f_2)_H = \int\limits_X \left(f_1(x),\ f_2(x) \right)_{\mathscr{H}_x} d\mu(x). \tag{42}$$

Будем называть пространство H *прямым интегралом гильбертовых пространств* $\mathscr{H}_x$.

Пусть задано семейство представлений $\{D^x(G, \mathscr{H}_x)\}$, причем всякая скалярная функция $(D^x(g)f(x), h(x))_{\mathscr{H}_x}$ измерима для f, $h \in H$, $g \in G$. Определим оператор $D(g)$ на H по формуле

$$\begin{gathered}(D(g)f)(x) = D^x(g)f(x),\\ D(g) = \int\limits_X D^x(g)\, d\mu(x).\end{gathered} \tag{43}$$

Гомоморфизм группы G в группу линейных операторов $D(g)$ называется *прямым интегралом представлений* D^x.

Понятие прямого интеграла представлений позволяет установить разложимость унитарных представлений сепарабельных локально компактных групп [15]. Приведем соответствующее утверждение для групп Ли.

(30) Теорема. Всякое унитарное представление группы Ли может быть разложено в прямой интеграл неприводимых. ▼

Эта теорема не только обобщает утверждение (**13**), но и позволяет с помощью формализма C^*-алгебр построить разложение (43) для операторов произвольного унитарного представления D и тем самым полностью решить стоящую перед нами задачу [12, § 13]. Такое решение, имеющее важное теоретическое значение, редко бывает конструктивным.

Свойства неприводимых унитарных представлений тесно связаны со свойствами функций на группе. Пусть в пространстве $\mathscr{H}$ унитарного представления $D(G, \mathscr{H})$ фиксирован ортонормированный базис $\{h_i\}$. Введем понятие *матричного элемента представления*

$$D_{ik}(g) = (h_i,\ D(g)h_k). \tag{44}$$

Матричные элементы представления — это скалярные функции на группе. Пространство функций $\{D_{ik}(g)\}$ инвариантно относительно левых (правых) сдвигов на группе, т. е. на $\{D_{ik}(g)\}$ реализуется представление группы G. Нам важен случай, когда это представление унитарно. Тогда на пространстве $\{D_{ik}(g)\}$ должно существовать инвариантное скалярное произведение, которое естественно задать в виде

$$(D_{ik},\ D_{jl}) = \int\limits_G D^*_{ik}(g)\, D_{jl}(g)\, d\mu(g), \tag{45}$$

где в силу унитарности представления мера $d\mu(g)$ должна быть инвариантна относительно сдвигов на группе. Так возникает проблема инвариантного интегрирования на группе и построения инвариантных мер.

Мера μ на локально компактном хаусдорфовом пространстве W есть линейное отображение в R множества $C_K(W)$ непрерывных функций на W с компактным носителем, причем для каждого компактного подмножества $K \subset W$ должно существовать такое $N_K \in R_+$, что

$$|\mu(f)| \leqslant N_K \sup|f(x)|, \quad f \in C_K \subset C^0, \quad x \in W.$$

Мера называется *положительной*, если $\mu(f) \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$.

Рассмотрим группу Ли G как аналитическое многообразие размерности n. Определим на G n-форму ω через внешнее произведение 1-форм $dx_i \in V^{(*)}(g)\,(dx_i : V(g) \to R)$, т. е. для каждой карты U положим

$$\omega|_U = \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad \varphi \in C^\infty(G). \tag{46}$$

На множестве C_U функций с компактным носителем, накрываемым картой U, введем меру с помощью отображения μ:

$$\mu : f \to \int_G f\omega_U = \int_U f(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{47}$$

Здесь интегрирование ведется по координатам точек компактного носителя функций $f \in C_U$, под $f(x)$ следует понимать $f(g(x))$, а $dx_1 \ldots dx_n$ есть значение функционала $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ на тензорном произведении векторов инфинитезимального репера в $V(x)$. Для распространения отображения μ на все множество $C^0(G)$ представим всякую $f \in C^0(G)$ в виде суммы $\sum\limits_i f_i$, где каждая f_i имеет компактный носитель, накрываемый некоторой картой атласа группы G. Окончательно мера μ на группе Ли G задается отображением

$$\begin{gathered} \mu : C^0(G) \to R, \\ \mu(f) = \int_G f\omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega. \end{gathered} \tag{48}$$

Мера (47), (48) не зависит от выбора аналитических координат в G. Она положительна, если функция $\varphi(x)$ в формуле (46) положительна «на атласе $\{U_i\}$».

Рассмотрим в окрестности U_e единицы группы G систему канонических координат $\{x(g)\}$ как гомеоморфизм U_e и окрестности нуля в касательном векторном пространстве $V(e)$. Совершим левый сдвиг окрестности U_e на элемент $h \in G$. В окрестности $U_h \equiv hU_e$ введем координаты $\{y(g)\}$ так, чтобы для $g \in U_h$

$$y(g) \equiv x(h^{-1}g). \tag{49}$$

Система карт подобного вида образует атлас. В нем мы сможем построить функцию $\varphi(x)$ так, что мера (48) будет инвариантна относительно сдвигов:

$$f'(g)=f(hg), \quad \mu(f)=\mu(f'),$$

$$\sum_i \int_{U_i} f_i(hg)\,\omega(g)=\sum_i \int_{U_i} f_i(g')\,\omega(h^{-1}g')=\sum_i \int_{U_i} f_i(g)\,\omega(g). \tag{50}$$

Как явствует из соотношения (50), *левоинвариантная мера* порождается левоинвариантной формой ω. Аналогично определяется правоинвариантная мера. Значение функционала ω на произведении векторов инфинитезимального репера в точке есть мера на инфинитезимальной окрестности этой точки, поэтому сама инвариантная форма (а также ее значение на тензорном произведении векторов инфинитезимальной окрестности точки) также называется *инвариантной мерой* и обозначается $d\mu$.

Для нахождения вида функции $\varphi(x)$ в инвариантной мере $d\mu$ рассмотрим такой сдвиг $g'=hg$, при котором $U_e\cap U_h=W\neq\varnothing$. Координаты точки $k'\in W$ должны удовлетворять условию

$$y(k')=x(k).$$

Пусть в U_h форма $d\mu$ имеет вид

$$d\mu=\Psi(y)\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n.$$

Напишем условие инвариантности для $d\mu$ относительно сдвига $k\to k'=hk$:

$$\begin{aligned}\varphi(x(k))\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n|_k=\Psi(y(k'))\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n|_{k'}=\\ =\Psi(x(k))\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n|_k,\end{aligned} \tag{51}$$

откуда следует, что $\varphi=\Psi$, и в частности

$$\begin{aligned}\varphi(x(k'))\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n|_{k'}=\varphi(y(k'))\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n|_{k'}=\\ =\varphi(y(k'))\det\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right]\Big|_{k'}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n|_{k'}.\end{aligned}$$

Перепишем полученное соотношение в виде

$$\varphi(x(h^{-1}k'))=\varphi(x(k'))\det{}^{-1}\left[\frac{\partial x^i(h^{-1}g')}{\partial x^k(g')}\right]_{g'=k'}.$$

Пусть $k'=e$, $h^{-1}\equiv g$. Воспользуемся произволом в нормировке инвариантной меры $d\mu$ и положим $\varphi(x(e))=1$. Предыдущее равенство позволяет найти функцию φ:

$$\varphi(x(g))=\det{}^{-1}\left[\frac{\partial x^i(gg')}{\partial x^k(g')}\Big|_{g'=e}\right]. \tag{52}$$

Итак, левоинвариантная мера на группе Ли G может быть вычислена по формуле

$$d\mu_L(g)=\det{}^{-1}\left[\frac{\partial x^i(gg')}{\partial x^k(g')}\Big|_{g'=e}\right]dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n. \tag{53}$$

Это выражение справедливо в пределах карты U_e и распространяется на весь атлас многообразия G соотношением (51). Аналогично строится правоинвариантная мера на G:

$$d\mu_R(g) = \det^{-1}\left[\frac{\partial x^i(g'g)}{\partial x^k(g')}\Big|_{g'=e}\right] dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{54}$$

Приведенные выше рассуждения составляют основу доказательства следующей теоремы.

(31) Теорема Хаара. На всякой группе Ли существует единственная с точностью до множителя ненулевая левоинвариантная (правоинвариантная) мера. ▼

Эту меру называют *левой (правой) мерой Хаара.*

(32) Примеры. Пусть G — группа матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in R_*, \quad b \in R.$$

Найдем координаты «сдвинутой» матрицы $g'' = gg'$:

$$a'' = aa', \quad b'' = ab' + b.$$

Полученные функции подставим в формулу (53):

$$d\mu_L(g) = a^{-2} da \wedge db.$$

Аналогично строится правая мера Хаара. Здесь она не совпадает с левой:

$$d\mu_R(g) = a^{-1} da \wedge db. \ ▼$$

(33) В группе $GL(n, C; R)$ в качестве координат матрицы g вновь можно выбрать численные значения ее матричных элементов. $n^2 \times n^2$ матрица преобразования координат

$$\frac{\partial (gg')_{ik}}{\partial (g')_{lm}} \qquad (i, k, l, m = 1, \ldots, n)$$

легко приводится к блочно-диагональному виду. Все n диагональных блоков равны между собой и совпадают с матрицей g. Окончательно имеем

$$d\mu_L(g) = (\det g)^{-n} \bigwedge_{i, k=1}^{n} d(g)_{ik} = d\mu_R(g).$$

Отметим, что здесь правая и левая меры совпали, т. е. мера Хаара оказалась двусторонне инвариантной. ▼

Исследуем подробнее связь между правой и левой мерами Хаара.

Пусть $d\mu_R$ — правая мера Хаара на G. Под действием левого сдвига $d\mu_R$ перейдет в другую, по-прежнему правую меру Хаара:

$$d\mu_R(hg) = d\nu_R(g) \qquad (h, g \in G).$$

В силу теоремы Хаара мера $d\nu_R(g)$ может отличаться от исходной лишь на числовой множитель, зависящий только от элемента h и структуры группы G:

$$d\mu_R(hg) = \Delta_G(h)\, d\mu_R(g). \tag{55}$$

Элементарные выкладки показывают, что числовая функция $\Delta_G(h)$ реализует одномерное представление группы G. Рассмотрим произведение $\Delta_G^{-1}(g)\, d\mu_R(g)$. Оно инвариантно относительно левых сдвигов и, следовательно, является левой мерой Хаара:

$$d\mu_L(g) = \Delta_G^{-1}(g)\, d\mu_R(g). \tag{56}$$

В свою очередь

$$d\mu_R(g) = \Delta_G(g)\, d\mu_L(g). \tag{57}$$

Легко убедиться, что форма $d\mu_R(g^{-1})$, рассматриваемая как функция g, инвариантна относительно левых сдвигов, так что правая и левая меры Хаара связаны соотношением

$$d\mu_R(g^{-1}) = d\nu_L(g). \tag{58}$$

Функция Δ_G называется *модулем группы* G. Для двусторонней инвариантности меры Хаара на группе необходимо и достаточно, чтобы ее модуль был тождественно равен единице. Такие группы носят название *унимодулярных*. К унимодулярным группам относятся, в частности, компактные группы Ли, связные полупростые, а также нильпотентные [32, гл. 10, § 1]. Функцию Δ_G можно вычислить с помощью присоединенного представления $\mathscr{A}d(G)$ группы G, т. е. представления линейными операторами в касательном пространстве к группе G, индуцированного преобразованиями подобия $g' \to gg'g^{-1}$ в G (см. (**4.51**)).

(**34**) Упражнение. Докажите справедливость формулы

$$\Delta_G(g) = \det \mathscr{A}d_g(G). \tag{59}$$

(**35**) Пример. Выразим координаты элемента g' группы матриц в примере (**32**) через координаты (χ, ρ) вектора ее алгебры Ли с помощью экспоненциального отображения:

$$g' = \begin{pmatrix} \exp\chi & \rho\exp\chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совершим преобразование подобия

$$gg'g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\chi & \rho\exp\chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp\chi & \exp\ \chi(a\rho - b) + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим явный вид оператора $\mathcal{A}d_g$:

$$\mathcal{A}d_g = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Найдем модуль группы по формуле (59):

$$\Delta_G(g) = \det \mathcal{A}d_g = a.$$

Тот же результат можно получить с помощью соотношения (57), если известен явный вид правой и левой мер (см. пример **(32)**). ▼

Обобщим понятие инвариантной меры на случай, когда группа действует транзитивно на некотором G-модуле с индуцированной на нем структурой аналитического многообразия. Всякий однородный (левый) G-модуль X можно рассматривать как факторпространство $X \approx G/H$, где H — подгруппа стабильности точки (см. **(2.15)**, **(2.40)** и § 3.2). Естественно попытаться связать меру на X с мерами Хаара на G и H. Введем понятие *квазиинвариантной меры* $d\lambda$ на однородном G-модуле X, т. е. m-формы ($m = \dim X$), преобразования которой при сдвигах сводятся к умножению на положительный числовой множитель (зависящий в общем случае от координат точки x и элемента g группы G). Пусть $d\mu_R$ и $d\nu_R$ — правые меры Хаара групп G и H. Тогда справедлива следующая теорема.

(36) **Теорема**. На однородном пространстве $X \approx G/H$ существует такая квазиинвариантная мера $d\lambda(x)$, что

$$d\mu_R(g) = \Delta_G(g_x)\, d\lambda(x) \wedge d\nu_R(h), \quad g = g_x h. \; ▼ \tag{60}$$

Форма $d\lambda$ называется *фактормерой* $d\mu_R$ по $d\nu_R$.

(37) Замечание. Положив множитель пропорциональности мер $d\mu$ и $d\lambda \wedge d\nu$ равным $\Delta_G(g_x)$ и фиксировав представителей классов, мы исчерпали произвол в выборе фактормеры $d\lambda$. ▼

Как преобразуется квазиинвариантная фактормера при сдвигах (левых для левого G-модуля X)?

(38) Упражнение. Докажите, что закон преобразования фактормеры выражается через факторы $h(g, x)$ (см. (2.16), (2.17)):

$$d\lambda(gx) = \frac{\Delta_G(h(g, x))}{\Delta_H(h(g, x))}\, d\lambda(x). \; ▼ \tag{61}$$

Если $\Delta_G = \Delta_H$, то из соотношения (61) следует, что фактормера $d\lambda$ левоинвариантна (и не зависит более от выбора представителей g_x). Ее можно вычислить так же, как меру Хаара на группе. В канонических координатах $\{y^1, \ldots, y^m\}$ левоинвариантная фактормера $d\lambda$ имеет вид

$$d\lambda_L(x) = \det{}^{-1}\left[\frac{\partial y^i(gx')}{\partial y^k(x')}\Big|_{x'=H}\right] dy' \wedge \ldots \wedge dy^m, \tag{62}$$
$$g = g_x h.$$

Воспользовавшись формулой (**57**) и определением (60), можно найти связь фактормеры $d\lambda$ с левыми мерами Хаара на G и H:

$$\begin{gathered}\Delta_G(g)\, d\mu_L(g) = \Delta_G(g_x)\,\Delta_H(h)\, d\lambda(x) \wedge d\nu_L(h),\\ d\mu_L(g) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\, d\lambda(x) \wedge d\nu_L(h),\ g = g_x h.\end{gathered} \tag{63}$$

Если H — нормальная подгруппа в $G = K\cdot H$ (см. (**2.44**)), например $G = K \rhd H$, то фактормера $d\lambda$ становится левой мерой Хаара на $K = X = G/H$:

$$d\lambda(k'k) = \frac{\Delta_G(e)}{\Delta_H(e)}\, d\lambda(k) = d\lambda(k).$$

Формула (60) принимает вид

$$d\mu_R(g) = \Delta_G(k)\, d\lambda_L(k) \wedge d\nu_R(h), \quad g = kh, \tag{64}$$

который еще более упрощается для унимодулярной группы G:

$$d\mu(g) = d\lambda_L(k) \wedge d\nu_R(h). \tag{65}$$

Все приведенные рассуждения легко переносятся на случай правого однородного G-модуля $Y = H \diagdown G$.

Продемонстрируем, как свойства факторизации облегчают задачу построения меры Хаара на группе Ли.

(**39**) Пример. Параметризуем пространство группы $G = SO(3, R)$ углами Эйлера $(\vartheta, \varphi, \psi)$. Выделим в G однопараметрическую подгруппу H вращений с параметром ψ. Поскольку всякий $g \in G$ представим в виде $g = k(\vartheta, \varphi)h(\psi)$, то $k(\vartheta, \varphi) \in G$ могут быть выбраны в качестве представителей классов $X = G/H$. Углы ϑ и φ — координаты на факторпространстве X (сферические координаты вектора, в который переходит орт e_z евклидовой системы координат при преобразовании $g(\vartheta, \varphi, \psi)$). Очевидно, что $X \approx S^2$. Группы G и H унимодулярны. Следовательно, мера Хаара на G факторизуется в виде (см. формулу (60))

$$d\mu(g(\vartheta, \varphi, \psi)) = d\lambda_L(k(\vartheta, \varphi)) \wedge d\nu(h(\psi)),$$

где $d\lambda_L$ — левоинвариантная мера на S^2, $d\nu$ — мера Хаара на H. Воспользуемся известным выражением для инвариантного относительно вращений элемента поверхности сферы $S^2: d\lambda_L(k(\vartheta, \varphi)) = \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$. Нормируем объем группы $SO(3, R)$ на единицу. Тогда окончательное выражение для меры Хаара $d\mu(g)$ имеет вид

$$d\mu(g(\vartheta, \varphi, \psi)) = \frac{1}{8\pi^2}\sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi \wedge d\psi. \blacktriangledown \tag{66}$$

(40) Упражнение. Покажите, что форма

$$d\mu(g(\vartheta, \varphi, \psi)) = \frac{1}{16\pi^2}\sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi \wedge d\psi \tag{67}$$

есть нормированная на единицу инвариантная мера на группе $SU(2)$, параметризованной углами Эйлера.

(41) Пример. В другой известной параметризации группы $SU(2)$ (см. (2.76))

$$g = \exp i\frac{\omega}{2}(\mathbf{n}, \sigma) \tag{68}$$

мера Хаара легко вычисляется непосредственно. Удобно начать с группы $U(2)$, где всякий элемент представим в виде

$$u(a_0, \mathbf{a}) = a_0 I - i(\mathbf{a}, \sigma) \quad (a_\alpha \in R, \ \alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{69}$$

Преобразование координат $\{a_\alpha\}$ при левом сдвиге $u'' = u'u$ имеет вид

$$a_0'' = a_0' a_0 - (\mathbf{a}', \mathbf{a}),$$
$$\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' a_0 + a_0' \mathbf{a} + [\mathbf{a}' \times \mathbf{a}].$$

По формуле (53) получаем выражение для меры Хаара на $U(2)$:

$$d\mu(u(a)) = (a_0^2 + \mathbf{a}^2)^{-2}\, da_0 \wedge da_1 \wedge da_2 \wedge da_3.$$

Перейдем к переменным $c = \sqrt{a_0^2 + \mathbf{a}^2}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{a}/c$:

$$d\mu(u(c, \mathbf{b})) = \frac{dc}{c^3} \wedge \frac{db_1 \wedge db_2 \wedge db_3}{\sqrt{1 - \mathbf{b}^2}}.$$

Под действием сдвига на элемент $g \in SU(2) \subset U(2)$ первый сомножитель в разложении $d\mu$ не меняется. Следовательно, второй сомножитель представляет собой инвариантную меру на группе $SU(2)$. Подпространство группы $SU(2)$ в $U(2)$ выделяется условием $c = 1$. Сравнивая выражение (69) для $g \in SU(2)$ с параметризацией (68), $g = \sqrt{1 - \mathbf{b}^2}\, I - i(\mathbf{b}, \sigma) = \cos{}^{\omega}/_2 I + i\sin{}^{\omega}/_2\, (\mathbf{n}, \sigma)$, получаем

$$d\mu(g) = \frac{\bigwedge_i db_i}{\sqrt{1 - \mathbf{b}^2}} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}\, d\omega \wedge d\Omega. \tag{70}$$

Здесь $d\Omega$ — инвариантный элемент поверхности сферы радиусом $|\mathbf{n}| = 1$. $\blacktriangledown$

(42) Упражнение. Тем же методом получите выражение для меры Хаара на группе $SL(2, C)_R$:

$$d\lambda(b) = |b_{22}|^{-2}(2i)^{-3}\, db_{12}^* \wedge db_{12} \wedge db_{21}^* \wedge db_{21} \wedge db_{22}^* \wedge db_{22}.$$

Здесь матрица $\{b_{ik}\}\in SL(2, C)$. Меру на $GL(2, C)$ см. в примере (**33**).

(**43**) Пример. Рассмотрим собственную ортохронную группу Пуанкаре как полупрямое произведение $\mathbf{\Pi}_+^\uparrow \approx \mathbf{\Lambda}_+^\uparrow > \boldsymbol{P}$. Всякий элемент $\Pi\in\mathbf{\Pi}_+^\uparrow$ однозначно представим в виде $\Pi(\Lambda, a)=\Pi(\Lambda, 0)\Pi(I, a)$ ($\Lambda\in\mathbf{\Lambda}_+^\uparrow$, $a\in\boldsymbol{P}$). Пусть $d\nu$ и $d\xi$ — меры Хаара на группах $\Lambda_+^\uparrow$ и $\boldsymbol{P}$ соответственно. Рассмотрим форму $d\nu(\Lambda)\wedge d\xi(a)$ и подействуем на нее левым сдвигом на элемент $\Pi'(\Lambda', a')$. Воспользуемся явным видом закона композиции полупрямого произведения:

$$\Pi(\Lambda'', a'')=\Pi(\Lambda', a')\Pi(\Lambda, a)=\Pi((\Lambda'\Lambda), \Lambda^{-1}a'+a).$$

Координаты элемента Λ преобразуются только сдвигом на Λ', так что $d\nu(\Lambda)$ остается инвариантной. Инвариантна и $d\xi(a)$, поскольку изменение координат элемента a свелось к аддитивному сдвигу. Теперь подействуем на исходную форму правым сдвигом на $\Pi(\Lambda', a')$. Координаты Λ'' будут определяться правым сдвигом Λ на Λ', и форма $d\nu$ вновь останется инвариантной, так как группа $\mathbf{\Lambda}_+^\uparrow$ унимодулярна. Преобразование $a\to a''$ состоит из автоморфизма $\mathrm{aut}_{(\Lambda')^{-1}}$ и аддитивного сдвига на a'. Автоморфизм действует на вектор a как унимодулярная матрица $(\Lambda')^{-1}$. Следовательно, и на этот раз $d\xi$ инвариантна.

Мы доказали, что форма

$$d\mu(\Pi=\Lambda a)=d\nu(\Lambda)\wedge d\xi(a), \tag{71}$$

есть двусторонне инвариантная мера Хаара на $\mathbf{\Pi}_+^\uparrow$, установив тем самым, что группа Пуанкаре унимодулярна. ▼

(**44**) Нормальная подгруппа $\boldsymbol{P}\subset\mathbf{\Pi}_+^\uparrow$ есть $\mathbf{\Pi}_+^\uparrow$-модуль относительно преобразований подобия $\Pi\boldsymbol{P}\Pi^{-1}$. При этом трансляции действуют на $\boldsymbol{P}$ тривиально, т. е. $\boldsymbol{P}$ является эффективно $\mathbf{\Lambda}_+^\uparrow$-модулем

$$(\Lambda, b)(I, a)(\Lambda, b)^{-1}=(I, \Lambda a).$$

Следовательно, $\mathbf{\Lambda}_+^\uparrow$-инвариантная мера на $\boldsymbol{P}$ — в то же время и $\mathbf{\Pi}_+^\uparrow$-инвариантная мера.

(**45**) Воспользуемся тем, что $\boldsymbol{P}\approx R^4$ является однородным пространством группы $SL(4, R)$. Легко непосредственно проверить, что $d\mu(a)=\bigwedge_\alpha da^\alpha$ — инвариантная мера на $\boldsymbol{P}$ относительно группы $SL(4, R)$. Перейдем к координатам $\{s^2\equiv a^\alpha a_\alpha, a^1, a^2, a^3\}$:

$$d\mu(a)=\frac{d(s^2)\wedge da^1\wedge da^2\wedge da^3}{2\sqrt{s^2+\mathbf{a}^2}}.$$

Отсюда с помощью стандартных рассуждений находим $SO(3, 1)$-инвариантную меру $d\nu(a)$, которая очевидно и $\mathbf{\Lambda}_+^\uparrow$-инвариантна:

$$d\nu(a)=\frac{\bigwedge\limits_i da^i}{2\sqrt{s^2+\mathbf{a}^2}}. \tag{72}$$

Для каждой конкретной орбиты параметр s^2 является фиксированной величиной. ▼

Инвариантное интегрирование позволяет построить для произвольной группы Ли унитарные представления стандартного вида.

Пусть $d\mu$ — мера Хаара на группе G. Рассмотрим пространство $L^2(G)$ интегрируемых с квадратом скалярных функций. Поскольку G является G-модулем, то на пространстве $L^2(G)$ индуцируется структура линейного G-модуля. Обозначим через $D^R(g)$ (соответственно $D^L(g)$) оператор преобразования в $L^2(G)$, порожденного правым (левым) сдвигом на элемент g:

$$D^R(g)f(g')=f(g'g),$$
$$D^L(g)f(g')=f(g^{-1}g').$$

Как отмечалось в § 1, группа операторов $D^R(g)$ (или $D^L(g)$) образует линейное представление группы G в пространстве $F(G, C)$. В силу инвариантности меры Хаара подпространство $L^2(G)\subset F(G, C)$ инвариантно. Представление группы G операторами $D^R(g)$ $(D^L(g))$ на пространстве $L^2(G)$ называется *правым (левым) регулярным представлением*.

Снабдим пространство $L^2(G)$ скалярным произведением

$$(f_1, f_2)=\int\limits_G f_1^*(g)f_2(g)\,d\mu(g). \tag{73}$$

Регулярные представления унитарны относительно этой полуторалинейной формы:

$$(f_1, f_2)=\left(D^R(g')f_1,\ D^R(g')f_2\right)=\int\limits_G f_1^*(gg')f_2(gg')\,d\mu_R(g).$$

Если $G\supset H$ и $\Delta_G=\Delta_H$, то на однородном пространстве $X\approx G/H$ существует левоинвариантная фактормера $d\lambda$ (см. формулу (60)). По аналогии с предыдущим случаем построим *левое квазирегулярное представление* группы G в пространстве $L^2(X)$:

$$D^{QL}(g)f(x)=f(g^{-1}x).$$

Оно сохраняет скалярное произведение

$$(f_1, f_2)=\int\limits_X f_1^*(x)f_2(x)\,d\lambda(x)=\int\limits_X f_1^*(g^{-1}x)f_2(g^{-1}x)\,d\lambda(x).$$

Точно так же с помощью правого G-модуля $Y=H\diagdown G$ строится правое квазирегулярное представление $D^{QR}(G)$.

§ 4. Унитарные представления компактных групп. Теорема о конечномерности

Если группа G компактна, то любому ее представлению B можно сопоставить унитарное представление D, эквивалентное B. Конкретная конструкция представления D не имеет практического значения, поэтому мы не приводим ее описание [15, § 9]. Для нас важно, что изучение представлений компактной группы сводится к изучению ее унитарных представлений.*) В свою очередь свойства унитарного представления (в силу теоремы (**30**)) полностью определяются свойствами его неприводимых компонент.

Компактность топологического пространства группы G дает возможность нормировать ее меру Хаара (компактные группы унимодулярны):

$$\int_G d\mu(g) = 1.$$

Обозначим через $D(G, \mathscr{H})$ топологически неприводимое унитарное представление компактной группы G. Введем в $\mathscr{H}$ ортонормированный базис $\{h_i\}$ и построим матричные элементы $D_{ik}(g)$ представления D (см. формулу (44)). Теорема о свойствах матричных элементов, которую мы сейчас сформулируем, представляет собой важнейший этап в изучении унитарных неприводимых представлений.

(**46**) **Теорема**. Всякое топологически неприводимое унитарное представление компактной группы G конечномерно. Его матричные элементы D_{ik} удовлетворяют условию

$$\int_G (D_{ik}(g))^* D_{lm}(g)\, d\mu(g) = \frac{1}{\dim D} (h_i, h_l)^* (h_k, h_m). \tag{74}$$

Если представления $D'(G, \mathscr{H}')$ и $D''(G, \mathscr{H}'')$ не эквивалентны, то всякий матричный элемент D'_{ik} ортогонален всякому D''_{lm}.

Доказательство. Левая часть выражения (74) есть непрерывная числовая функция $A(h_i, h_k, h_l, h_m)$. Так как она линейна по h_m, то в пространстве $\mathscr{H}$ представления D должен существовать такой элемент p, зависящий от h_k, h_i и h_l, что

$$A(h_i, h_k, h_l, h_m) = (p(h_i, h_k, h_l), h_m)_{\mathscr{H}}.$$

В свою очередь вектор p как непрерывная линейная функция от h_k может быть изображен действием на h_k некоторого линейного оператора $\zeta(h_i, h_l)$:

$$A = (\zeta(h_i, h_l)\, h_k, h_m)_{\mathscr{H}}. \tag{75}$$

*) В действительности для существования унитарного, эквивалентного $B(G, V)$ представления D необходима локальная выпуклость пространства V. В приложениях это требование всегда выполняется, и мы будем рассматривать только такие представления.

Покажем, что ζ — сплетающий оператор представления D. Подействуем на аргументы h_k и h_m функции A оператором $D(g')$:

$$(\zeta(h_i, h_l) D(g') h_k, D(g') h_m) =$$
$$= \int_G (D_{h_i, D(g') h_k}(g))^* D_{h_l, D(g') h_m}(g) d\mu(g) =$$
$$= \int_G (h_i, D(g) D(g') h_k)^* (h_l, D(g) D(g') h_m) d\mu(g) =$$
$$= \int_G (D_{ik}(gg'))^* D_{lm}(gg') d\mu(g) = (\zeta(h_i, h_l) h_k, h_m)_{\mathscr{H}}.$$

Это равенство можно продолжить, используя унитарность представления D:

$$(\zeta(h_i, h_l) h_k, h_m)_{\mathscr{H}} = (D(g') \zeta(h_i, h_l) h_k, D(g') h_m)_{\mathscr{H}}.$$

Сравнивая исходное и конечное выражения, видим, что оператор ζ коммутирует с любым оператором унитарного неприводимого представления D. Это означает, что $\zeta = bI$, где $b \in C$ (см. лемму Шура III).

Множитель b есть непрерывная функция векторов h_i и h_l, линейная по первому и антилинейная по второму аргументам. Следовательно, ее можно записать в виде матричного элемента некоторого линейного оператора η:

$$b(h_l, h_l) = (\eta h_i, h_l)_{\mathscr{H}}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что η также принадлежит пространству сплетающих операторов $\zeta[D]$, т. е. $\eta = cI$, $c \in C$. Подставим полученные выражения для операторов η и ζ в формулу (75):

$$A = (b(h_i, h_l) h_k, h_m)_{\mathscr{H}} = b^*(h_i, h_l)(h_k, h_m)_{\mathscr{H}} =$$
$$= (h_l, \eta h_i)_{\mathscr{H}} (h_k, h_m)_{\mathscr{H}} = c(h_l, h_i)_{\mathscr{H}} (h_k, h_m)_{\mathscr{H}}. \quad (76)$$

Используя унитарность представления и инвариантность меры $d\mu$, легко показать, что константа c должна быть вещественной и положительной.

Пусть $h_1, \ldots, h_n$ — любое конечное подмножество базиса $\{h_i\}$ пространства $\mathscr{H}$. Так как оператор $D(g)$ унитарен, для всякого $h_k \in \{h_i\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |D(g) h_k, h_j)|^2 \leqslant \|D(g) h_k\|^2 = \|h_k\| = 1,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} |D_{jk}(g)|^2 \leqslant 1.$$

Проинтегрируем это неравенство по группе G и воспользуемся соотношением (76):

$$nc \leqslant 1 \Rightarrow c \leqslant 1/n.$$

Константа c должна быть больше нуля, так как в противном случае норма всех матричных элементов операторов $D(g)$ обратится в нуль. Следовательно, представление D конечномерно. Положив $\dim D = n$, окончательно получим $c = 1/\dim D$.

Пусть D' и D'' — неэквивалентные унитарные неприводимые представления. Рассмотрим величину

$$\widetilde{A} = \int\limits_G \left(D''_{ik}(g)\right)^* D''_{lm}(g)\, d\mu(g).$$

Вновь вводя оператор $\zeta(h_i, h_l)$ и повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\zeta \in \zeta[D', D''] = 0,$$

т. е. $\tilde{A} = 0$. ▼

Утверждение о конечномерности неприводимого унитарного представления D компактной группы Ли G можно распространить на любое топологически неприводимое представление $B(G)$, поскольку, как отмечалось в этом параграфе, всякое $B(G)$ эквивалентно неприводимому унитарному представлению.

Совсем иначе обстоит дело, когда группа некомпактна. Ее точное унитарное представление осуществляет эквивалентность ее топологического пространства и пространства группы операторов, сохраняющих форму скалярного произведения. Последнее компактно, если пространство представления конечномерно (см. (**3.26**)).

(**47**) **Теорема.** Всякое точное унитарное представление некомпактной группы бесконечномерно. ▼

В теореме (**46**) утверждается, что матричные элементы неэквивалентных неприводимых унитарных представлений D компактной группы G образуют ортонормированную систему в пространстве скалярных функций $L^2(G)$. Можно надеяться, что эта система окажется полной. Для исследования этого вопроса необходимо описать все неэквивалентные представления $D(G)$.

(**48**) **Утверждение.** Множество неэквивалентных неприводимых представлений группы Ли G (матричные элементы которых принадлежат $L^2(G)$) не более чем счетно (доказательство см. [15, § 10]).

(**49**) **Утверждение.** Всякое неприводимое унитарное представление $D(G, \mathscr{H})$ компактной группы G эквивалентно подпредставлению ее правого регулярного представления $D^R(G)$.

Доказательство. С помощью матричных элементов $D_{ik}(g^{-1})$ с фиксированным первым индексом $i = 1$ построим в $L^2(G)$ ортонормированную систему функций $\sqrt{n}D_{1k}(g)$, где

$n = \dim D$. Рассмотрим подпространство $L^2(D) \subset L^2(G)$ — линейную оболочку системы $\{\sqrt{n} D_{1k}(g)\}$. На $L^2(D)$ реализуется неприводимое подпредставление в $D^R(G)$, эквивалентное $D(G)$:

$$D^R(g')(\sqrt{n} D_{1k}(g)) = \sqrt{n} D_{1k}(gg') =$$
$$= \sqrt{n} \sum_l D_{1l}(g) D_{lk}(g') = \sqrt{n}(h_1, D(g) D(g') h_k).$$

Мы видим, что каждому оператору $D^R(g')$ однозначно сопоставляется оператор $D(g')$, действующий в пространстве $\mathscr{H}$, и наоборот. ▼

Итак, матричные элементы операторов неэквивалентных неприводимых компонент в разложении правого (или левого) регулярного представления образуют ортонормированную систему функций на компактной группе G. Максимальность такого набора есть следствие предыдущего утверждения. Для построения на этой основе обобщенного Фурье-анализа на группе G необходима полнота указанной системы функций в $L^2(G)$.

(50) **Теорема Петера—Вейля.** Пусть $\{D^s(G)\}$ — система всех неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G. Функции

$$\sqrt{n_s} D^s_{ik}(g) \qquad (i, k = 1, \ldots, n_s),$$

где $n_s = \dim D^s$, образуют полный ортонормированный базис в пространстве $L^2(G, d\mu)$ (доказательство см. в [34, гл. 7]). ▼

Практический рецепт построения полной системы неприводимых унитарных представлений, который мы рассмотрим в следующей главе, основан на инфинитезимальном методе.

§ 5. Инфинитезимальный метод. Унитарный трюк

Принципиальная возможность перехода от представления алгебры Ли к представлению группы обсуждалась в гл. 4. Там было установлено (см. теорему (**4.50**)) взаимно-однозначное соответствие конечномерных представлений связных односвязных групп Ли и их алгебр Ли.

Ограничимся рассмотрением полупростых групп Ли и покажем, что свойства всякого конечномерного представления полупростой группы G могут быть определены, если известны свойства неприводимых неэквивалентных эрмитовых представлений алгебры Ли A_u ее компактной вещественной формы G_u. Расчленим задачу на несколько этапов.

(**51**) **Утверждение.** Пусть G — связная группа Ли, A — ее алгебра Ли, $D(G, V)$ — конечномерное представление группы G, $d(A, V)$ — представление алгебры A, являющееся дифференциалом отображения D. Всякое D-инвариантное подпространство в V d-инвариантно, и наоборот. Представления D и d неприводимы, приводимы и вполне приводимы одновременно.

Доказательство. Предположим сначала, что подпространство $W\subset V$ инвариантно относительно d. Рассмотрим элемент $a\in A$ и построим $\exp(a)\in G$. Воспользуемся свойством экспоненциального отображения

$$D(\exp(a)) = \exp(d(a)).$$

Для конечномерного представления экспоненциальное отображение строится в виде матричной экспоненты

$$D(\exp(a)) = I + d(a) + \frac{1}{2!}d^2(a) + \ldots,$$

так что всякое W инвариантно относительно операторов $D(\exp(a))$. Итак, существует окрестность $U_e\in G$, такая, что W инвариантно относительно операторов $D(U_e)$. Группа G связна, следовательно, пространство W инвариантно относительно всей группы операторов $D(G)$ (см. теорему **(3.49)**).

Справедливость обратного утверждения почти очевидна. Дифференциал d отображения D не может выводить из подпространства, инвариантного относительно D.

Так же просто доказывается и вторая часть утверждения **(51)**. ▼

(52) **Утверждение.** Пусть $D(G, V)$ и $C(G, W)$ — представления связной группы Ли G, $d(A, V)$ и $c(A, W)$ — их дифференциалы. *Из эквивалентности представлений алгебры $d\approx c$ следует эквивалентность представлений группы $D\approx C$, и наоборот.*

Доказательство. Сплетающий оператор $\zeta\in\zeta[d, c]$ сохраняет свойства при экспоненциальном отображении. Он остается сплетающим для операторов $D(U_e)$ и $C(U_e)$, где U_e — окрестность единицы, накрываемая экспоненциальным отображением. Так как группы операторов $D(G)$ и $C(G)$ связны, то свойство, установленное локально, оказывается справедливым для представлений D и C в целом.

Доказательство обратного утверждения проводится аналогично. ▼

В § 2 были введены понятия комплексификации и овеществления представлений, связанные с изменением поля скаляров пространства представления. Выясним теперь, что происходит при изменении поля скаляров в пространстве алгебры L линейных операторов $l(a)$, реализующих представление в комплексном пространстве V. Построим комплексификации $A_{\uparrow C}$ и $L_{\uparrow C}$ алгебр A и L и распространим по линейности гомоморфизм d на $A_{\uparrow C}$. Полученное представление $d_{\uparrow C}$ будем называть ***комплексной оболочкой*** представления d. Обратив эту процедуру, построим по представлению $d(A, V)$ комплексной алгебры A представление $d_{\downarrow \mathbf{R}}(A_{\downarrow \mathbf{R}}, V)$ вещественной формы $A_{\downarrow \mathbf{R}}$. Представление $d_{\downarrow R}$ называется *вещественной формой* представления d (соответственно *компактной вещественной формой* d_u, когда $A_{\downarrow R}=A_u$ компактна). Построение комплексной оболочки возможно лишь для комплексных представлений. Только такие представления будем рассматривать в этом параграфе.

Пусть теперь $D(G)$ — представление комплексной группы G, $G_{\downarrow R}$ — ее вещественная форма. Сопоставим гомоморфизму D вещественно аналитическое отображение $\widetilde{D}$ вещественных многообразий вдвое большей размерности. Таким образом, получим представление группы $(G)_R$, содержащей подгруппу $G_{\downarrow R}$. Ограничение $\widetilde{D}(G_{\downarrow R})\equiv D_{\downarrow R}$ называется *вещественной формой* представления D группы G. «Сопряженное» ему понятие комплексной оболочки представления группы будет введено в конце параграфа.

(53) Пример. Алгебра $sl(2, C)$ является комплексификацией алгебры $su(2)$. Комплексная оболочка $d_{\uparrow C}$ определяющего представления d алгебры $su(2)$ совпадает с определяющим представлением b алгебры $sl(2, C)$ (алгеброй бесследовых комплексных 2×2 матриц). В свою очередь представление d является вещественной формой $b_{\downarrow R}$ представления b. Аналогично определяющее представление $D(SU(2))$ можно интерпретировать как (компактную) вещественную форму $B_{\downarrow R}$ определяющего представления B группы $SL(2, C)$ (см. примеры **(10)** и **(11)**).

(54) **Утверждение.** Комплексная оболочка $d_{\uparrow C}(A_{\uparrow C})$ представления $d(A)$ неприводима тогда и только тогда, когда $d(A)$ неприводимо. Представления $d_{\uparrow C}(A_{\uparrow C})$ и $b_{\uparrow C}(A_{\uparrow C})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны исходные представления $d(A)\approx b(A)$.

Доказательство тривиально.

(55) **Утверждение.** Всякая связная комплексная полупростая группа Ли имеет компактную вещественную форму.

(56) Упражнение. Докажите утверждение (**55**), используя теорему (**5.65**).

(57) **Утверждение.** Компактная вещественная форма G_u односвязной комплексной полупростой группы Ли G односвязна [22].

(58) **Утверждение.** Всякое конечномерное представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо.

Доказательство (**Вейль. Унитарный трюк**). Пусть A — комплексная полупростая алгебра Ли, d — ее конечномерное представление, G — односвязная группа Ли, соответствующая A. Представлению d однозначно сопоставляется представление $D(G)$ группы G (см. теорему (**4.50**)). Построим компактную вещественную форму G_u группы G (см. утверждение (**55**)) и компактную вещественную форму группы операторов $D(G, V)$, изоморфную группе G_u. В результате получим конечномерную компактную вещественную форму $D_u(G_u)$ представления $D(G)$. Представление D_u вполне приводимо (см. теорему (**30**)). Рассмотрим алгебру A_u группы G_u и дифференциал d_u отображения D_u, т. е. представление $d_u(A_u)$, которое вполне приводимо одновременно с D_u (утверждение (**51**)). Комплексная оболочка $d_{u\uparrow C}$ является вполне приводимым представлением алгебры A (утверждение (**54**)).

(**59**) Упражнение. Докажите, что представления d и $d_{u\uparrow C}$ совпадают. ∇▼

(**60**) Утверждение. Пусть G — односвязная комплексная полупростая группа Ли, G_u — ее компактная вещественная форма. Всякому конечномерному неприводимому представлению D_u группы G_u однозначно сопоставляется конечномерное неприводимое представление D группы G, и наоборот.

Доказательство. Построим алгебру Ли A_u группы G_u. Дифференциал d_u отображения D_u реализует неприводимое представление алгебры A_u (утверждение (**51**)). Комплексная оболочка $d_{u\uparrow C}$ представления d_u есть неприводимое представление алгебры Ли группы G (утверждение (**54**)). Так как группа G односвязна, то по теореме (**4.50**) конечномерному представлению $d_{u\uparrow C}(A)$ однозначно соответствует представление $D(G)$. Из неприводимости $d_{u\uparrow C}$ следует неприводимость D (утверждение (**51**)).

В свою очередь, если D — неприводимое конечномерное представление группы G, то ему однозначно сопоставляется неприводимое представление d алгебры A. Компактная вещественная форма d_u представления d также неприводима. Группа G_u односвязна, так что по представлению $d_u(A_u)$ ее неприводимое представление D_u вновь восстанавливается однозначно.

Легко убедиться, что представление D_u является компактной вещественной формой представления D, представление D естественно назвать *комплексной оболочкой* представления $D_u : D = D_{u\uparrow C}$.

С помощью теоремы Бернсайда (**28**) можно показать, что описанная выше процедура сопоставляет эквивалентным представлениям $D_u \approx D_u'$ эквивалентные представления $D \approx D'$, и наоборот. ▼

(**61**) Пример. Определяющее представление группы $SL(2, C)$ было построено в примере (**11**) в виде комплексной оболочки определяющего представления компактной вещественной формы $SU(2)$ группы $SL(2, C)$. ▼

Проанализируем полученные результаты.

Пусть группа G компактна и односвязна. Основная задача теории представлений состоит в построении полной системы неприводимых унитарных представлений. Поскольку эти представления конечномерны, утверждения (**51**), (**52**) и теорема (**4.50**) позволяют свести исходную задачу к построению системы неэквивалентных неприводимых конечномерных эрмитовых (антиэрмитовых) представлений алгебры Ли группы G. Каждому полученному представлению алгебры взаимно-однозначно сопоставляется унитарное неприводимое представление группы. Локально представление группы можно построить с помощью экспоненциального отображения. Задача глобального восстановления представления группы значительно сложнее. Однако существуют обширные области физических приложений (классификация частиц, законы сохранения и т. д.), где всю необходимую информацию можно извлечь из алгебры A физической симметрии и ее представлений.

Рассмотрим связную компактную группу Ли G. В этом случае на основании утверждений (51), (52) также можно применить инфинитезимальный метод исследования представлений. Здесь, однако, не всякое представление алгебры Ли A будет дифференциалом представления группы G. В полной системе неприводимых эрмитовых конечномерных представлений необходимо выбрать «интегрируемые». Практически это всегда удается сделать.

Пусть, наконец, G — полупростая вещественная односвязная группа Ли. При построении конечномерных представлений ее алгебры Ли A (однозначно соответствующих представлениям группы) воспользуемся тем, что A является овеществлением либо вещественной формой некоторой комплексной полупростой алгебры B. Во втором случае задача сводится к построению неприводимых конечномерных представлений алгебры B, что в свою очередь эквивалентно заданию системы неприводимых представлений ее компактной вещественной формы. Если же алгебра A есть овеществление алгебры B, то не все неприводимые представления $d(A)$ можно получить из представлений $d(B)$. Здесь полезно рассмотреть комплексификацию $A_{\uparrow C}$ алгебры A. С помощью представлений $d(A_{\uparrow C})$ удается построить все неприводимые конечномерные представления $d(A)$, хотя для этого приходится использовать приводимые представления $d(A_{\uparrow C})$.

Если группа G полупроста, вещественна и связна, то в полученной системе представлений $d(A)$, как и в предыдущих случаях, необходимо произвести отбор.

Не будем останавливаться на случае несвязной группы, поскольку известно, что она есть расширение некоторой дискретной группы по связной. Характерные для него проблемы и способы их решения проще всего проследить на примере построения представлений общей группы Пуанкаре (см. гл. 9).

ГЛАВА 7

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

§ 1. Веса, старшие веса, их свойства. Фундаментальные представления

Пусть $A = ([\ ], W)$ — комплексная простая алгебра Ли, L — ее корневая система и

$$W = W_B \oplus \left\{ \bigoplus_{\lambda \in L^+} (W^\lambda \oplus W^{-\lambda}) \right\} = W_B \oplus W^+ \oplus W^- \tag{1}$$

— разложение Картана — Вейля (см. формулу (5.16)).

Рассмотрим представление $d(A, V_C)$. Обозначим через V_ν подпространство векторов v, собственных для всех операторов $d(b)$ $(b \in B)$:

$$d(b)\, v = \nu(b)\, v. \tag{2}$$

Если $V_\nu \neq 0$, то линейная форма $\nu \in W_B^{(*)}$ называется *весом* представления d.

(1) Всякое конечномерное представление d простой комплексной алгебры Ли A имеет по крайней мере один вес.

Доказательство этого свойства основывается на теореме Ли [35, т. III, гл. 5, § 1] о полной приводимости представлений разрешимых алгебр. Алгебра B абелева, ограничение $d_{A \downarrow B}$ вполне приводимо, конечномерно. Оно разлагается в прямую сумму неприводимых одномерных представлений алгебры B. Следовательно, форма ν, определяемая равенством (2), всегда существует. ▼

(2) Если ν — вес представления $d(A, V)$, λ — корень алгебры A, то $d(W^\lambda) V \subset V_{\nu+\lambda}$

Доказательство. Пусть $w \in W^\lambda$ $v \in V_\nu$. Тогда

$$d(b)\, d(w)\, v = d(w)\, d(b)\, v + d([b, w])\, v = \\ = (\nu(b) + \lambda(b))\, d(w)\, v. \ ▼$$

Отметим, что функционал $\nu+\lambda$ является весом в том и только в том случае, когда вектор $d(w)v$ отличен от нуля.

Предположим, что в представлении $d(A, V)$ существует такой вес μ, что всякий его сдвиг $\mu+\lambda$ на положительный корень $\lambda \in L^+$ уже не является весом. Будем также считать, что в пространстве V_μ найдется вектор u, порождающий все пространство представления под действием операторов $d(a)$. В этом случае вес μ называется *старшим весом*, а вектор u — *старшим вектором* представления d.

(3) Операторы $d(w^-)$, $w^- \in W^-$, действуя на старший вектор u представления $d(A, V)$, порождают все пространство V.

Доказательство. Если u — старший вектор представления $d(A, V)$, то для любого $v \in V$ найдется такое целое положительное число k, что

$$v = d(w_1)\, d(w_2) \ldots d(w_k)\, u \quad (w_i \in W,\ i = 1, \ldots, k). \tag{3}$$

Всякий элемент w_i представим в виде суммы $w_i = w_i^B + w_i^- + w_i^+$ (см. формулу (1)). Предположим, что в выражении (3) $k=1$. Тогда

$$v = d(w)\, u = d(w^B)\, u + d(w^-)\, u + d(w^+)\, u = \\ = \mu(w^B)\, u + d(w^-)\, u,$$

т. е. v порождается действием операторов $d(w^-)$. Пусть сказанное справедливо для $k=m$. Тогда, как легко проверить, то же верно и для $k=m+1$. ▼

Введем в пространстве $W_{(B}^{*)}$ частичное упорядочение. Для пары функционалов $\alpha, \beta \in W_B^{(*)}$ будем считать выполненным неравенство $\alpha \leqslant \beta$, если

$$\beta - \alpha = \sum_i m_i \lambda_i, \tag{4}$$

где $\lambda_i \in S$ — базисные корни, $m_i \in Z_+$. Тогда старший вес μ будет больше любого сравнимого с ним веса.

(4) Всякое конечномерное неприводимое представление $d(A, V)$ простой алгебры $A = ([\quad], W_C)$ имеет старший вес.

Доказательство. Число различных весов представления d конечно. Выберем среди них какой-либо максимальный (по упорядочению (4)) вес μ. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V_\mu$. Так как $d(A, V)$ неприводимо, вектор v (под действием операторов $d(a)$) порождает все пространство V. Следовательно, μ — старший вес, v — старший вектор представления d. ▼

Вес ν называется *простым*, если соответствующее ему пространство V_ν одномерно.

Следующие три свойства весов неприводимого конечномерного представления $d(A, V)$ доказываются одновременно.

(5) Старший вес представления $d(A, V)$ прост.

(6) Все веса представления $d(A, V)$ сравнимы, и всякий вес можно записать в виде

$$\nu = \mu - \sum_i m_i \lambda_i, \quad m_i \in Z_+, \quad \lambda_i \in S. \tag{5}$$

(7) Старший вес μ сопоставляется представлению $d(A, V)$ однозначно.

Доказательство. Пусть v — старший вектор представления d. Рассмотрим пространства V_ν для всех весов ν представления d, сравнимых с μ. Построим подпространство $U \subseteq V$:

$$V = Cv \oplus \left\{ \bigoplus_{\nu<\mu} V_\nu \right\}. \tag{6}$$

Пространство U содержит вектор v и очевидно инвариантно относительно действия операторов $d(W^-)$. Следовательно, $U \approx V$ (см. свойство (3)). В прямой сумме (6) подпространство V_μ одномерно, что указывает на простоту старшего веса μ. Всякий вес ν имеет вид (5), поскольку он меньше μ (см. формулу (4)). Так как все веса представления d оказались сравнимы, старший вес определяется однозначно (как максимальный вес). ▼

(8) Множество $N(d)$ весов ν представления $d(A, V)$ инвариантно относительно группы отражений s_λ в $W_B^{(*)}(\lambda \in L)$.

(9) Если $\nu_2 = s_\lambda \nu_1$, $\nu_i \in N(d)$, то

$$\dim V_{\nu_1} = \dim V_{\nu_2}.$$

(10) Если ν и $\nu + \lambda$ — веса, $w^\lambda \in W^\lambda$, $v_\nu \in V_\nu$ и $v_\nu \neq 0$, то $d(w^\lambda) v_\nu \neq 0$.

Доказательства этих утверждений приведены в [28, гл. 14]. ▼

Применим оператор s_λ к старшему весу μ неприводимого конечномерного представления $d(A, V)$ (см. (5.12)):

$$s_\lambda \mu = \mu - 2\frac{(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)}\lambda = \mu - \langle\lambda, \mu\rangle\lambda.$$

Сравнивая это выражение с формулой (5), приходим к выводу, что

$$\langle\lambda_i, \mu\rangle = 2\frac{(\lambda_i, \mu)}{(\lambda_i, \lambda_i)} \in Z_+, \quad \lambda_i \in S. \tag{7}$$

(11) Всякий функционал $\mu \in W_B^{(*)}$ однозначно (с точностью до эквивалентности) определяет неприводимое представление $d(A, V)$. Размерность представления d конечна в том и только в том случае, когда μ удовлетворяет условию (7).

Доказательство см. в [25, ч. III, гл. 7]. ▼

Итак, классу эквивалентных неприводимых конечномерных представлений $d(A, V)$ простой комплексной алгебры Ли A взаимно-однозначно сопоставляется конечная система $N(d)$ векторов ν в пространстве $W_B^{(*)}$. Она инвариантна относительно отражений s_λ и содержит максимальный вектор μ (старший вес). Всякий вектор $\nu \in N(d)$ может быть получен из μ сдвигом по «решетке» корневых векторов λ алгебры A. Система $N(d)$ называется *весовой диаграммой* представления d.

Пусть μ — старший вес неприводимого конечномерного представления $d(A, V)$. Построим в пространстве $W_B^{(*)}$ два вспомогательных вектора χ и ρ:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{L^+} \lambda, \quad \chi = \mu + \rho.$$

(12) **Формула Вейля.** Размерность конечномерного представления $d(A, V)$ со старшим весом μ

$$\dim d = \prod_{\lambda \in L^+} \frac{(\lambda, \chi)}{(\lambda, \rho)}. \tag{8}$$

Доказательство формулы Вейля основывается на свойствах инфинитезимальных характеров [28, гл. 15, § 6]. ▼

В качестве базиса пространства $W_B^{(*)}$, где строится весовая диаграмма, можно выбрать систему S базисных корней $\{\lambda_i\}$. Если компоненты весов считать по формуле (5.22) (как для корней в базисе Вейля (теорема (5.57))

$$\nu^i \equiv \nu(b_i) = \langle \lambda_i, \nu \rangle = 2 \frac{(\lambda_i, \nu)}{(\lambda_i, \lambda_i)},$$

то компоненты старшего веса μ будут целыми неотрицательными числами. Помимо S удобно ввести в $W_B^{(*)}$ такой базис $\{\alpha_i\}$, в котором всякий вес ν представлялся бы линейной комбинацией элементов базиса с целыми неотрицательными коэффициентами.

Определим элемент α_i как дуальный к b_i относительно формы $<,>$:

$$\alpha_i(b_j) = (\alpha_i)^j = \langle \lambda_j, \alpha_i \rangle = 2 \frac{(\lambda_j, \alpha_i)}{(\lambda_j, \lambda_j)} = \delta_i^j. \tag{9}$$

Всякому базисному вектору α_i (*фундаментальному весу*) можно сопоставить неприводимое представление d_i (*фундаментальное представление*) со старшим весом α_i. Ранг алгебры A совпадает с числом ее неэквивалентных фундаментальных представлений. Неприводимое представление d задается своим старшим весом μ или последовательностью $\{m_i\}$ целых неотрицательных чисел

$$m_i = \langle \lambda_i, \mu \rangle \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{10}$$

— коэффициентами разложения веса μ по фундаментальным весам α_i:

$$\mu = \sum m_i \alpha_i. \tag{11}$$

Конец всякого вектора, являющегося весом неприводимого представления, лежит в узле решетки, ребрами которой служат фундаментальные веса.

Фундаментальные представления играют роль элементарных конструкций при построении полной системы неприводимых представлений.

(13) Каково бы ни было неприводимое конечномерное представление $d(A, V)$, всегда можно построить тензорное произведение фундаментальных представлений d_i, содержащее d в качестве неприводимой компоненты.

Доказательство. Пусть представление d имеет старший вес μ с координатами $\{m_1, \ldots, m_r\}$. Построим представление $t(A, T) \equiv \otimes d_i$ так, чтобы всякое фундаментальное представление d_i встречалось в t сомножителем m_i раз. Легко проверить, что максимальный вес ν представления t совпадает с μ. Действуя операторами $t(a)$ на вектор, соответствующий весу μ, получим неприводимое подпространство $U \subseteq T$. Подпредставление, реализующееся на U, будет эквивалентно d в силу совпадения старших весов.

§ 2. Конечномерные неприводимые представления алгебр sl (2, C) и sl (3, C). Компактные вещественные формы. Фундаментальные представления su (3)

Ранг алгебр $sl(2, C)$ и $sl(3, C)$ равен соответственно единице и двум (их схемы Дынкина см. в табл. 4). Если модули корней выбрать равными $\sqrt{2}$, как было предложено в § 5.4, то коммутационные соотношения в базисе Вейля и в стандартном базисе будут совпадать с точностью до знака (см. пример **(5.60)**).

В алгебре $sl(2, C)$ существует единственное с точностью до эквивалентности фундаментальное представление. Фундаментальный вес α легко найти по формуле (9), его модуль равен половине модуля корня:

$$\alpha(b) = \langle \lambda, \alpha \rangle = 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\lambda, \lambda)} = \frac{2|\alpha|}{|\lambda|} = 1, \qquad |\alpha| = \frac{|\lambda|}{2}. \tag{12}$$

Вес α вместе с отраженным весом $-\alpha$ составляет весовую диаграмму фундаментального представления (рис. 13), поскольку пара $(\alpha, -\alpha)$ очевидно удовлетворяет свойствам **(5)** и **(7)**.

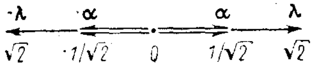


Рис. 13.

Всякому числу $m \in Z_+$ соответствует неприводимое конечномерное представление $d(sl(2, C), V)$ со старшим весом $\mu = m\alpha$. Воспользуемся выражением (5) для произвольного веса ν представления d:

$$\nu = \mu - n\lambda = m\alpha - n\lambda = \left(\frac{m}{2} - n\right)\lambda \quad (n \in Z_+).$$

Под действием оператора s_λ вектор ν очевидно меняет знак: $s_\lambda \nu = -\nu$. Вес $-\nu$ не должен превышать μ, и так как все веса сравнимы, то

$$-\nu \leqslant \mu, \ \left(n - \frac{m}{2}\right)\lambda \leqslant m\frac{\lambda}{2} \quad (n \leqslant m).$$

Число различных весов равно $m+1$. Окончательно весовая диаграмма $N(d)$ представления d имеет вид

$$N(d) = \left\{\frac{m}{2}\lambda, \ \frac{m-2}{2}\lambda, \ \ldots, \ -\frac{m}{2}\lambda\right\}. \tag{13}$$

Построим матрицы базисных операторов $d(b, x, y)$ в базисе Вейля. Пусть $v_0 \in V_\mu$ — старший вектор представления. Пространство V_μ одномерно, так как старший вес прост. В каждом из пространств $V_{\mu - n\lambda}$ $(n = 0, 1, \ldots, m)$ выберем образующую

$$v_n \equiv \frac{(d(y))^n v_0}{n!}. \tag{14}$$

Под действием операторов $d(b)$, $d(x)$ и $d(y)$ векторы v_0, $v_1, \ldots, v_m$ преобразуются по формулам

$$d(b)v_n = (m - 2n)v_n, \tag{15}$$

$$d(y)v_n = (n+1)v_{n+1}, \tag{16}$$

$$d(x)v_n = (m - n + 1)v_{n-1}. \tag{17}$$

Первые два равенства — тривиальные следствия определения веса и формул (13) и (14).

(14) Упражнение. Докажите соотношение (17) индукцией по n. ▼

Построим линейную оболочку U образующих $\{v_n\}$. Из формул (15)—(17) следует, что пространство U инвариантно относительно действия операторов $d(a)$. Следовательно, $U = V$. Множество $\{v_n\}$ составляет базис пространства представления d, а формулы (15)—(17) определяют матричные элементы операторов $d(a)$ в этом базисе. Одновременно мы доказали, что подпространства V_ν одномерны, т. е. все веса ν простые.

Теперь можно построить любое конечномерное неприводимое представление алгебры $su(2)$ в виде компактной вещественной формы d_u соответствующего представления $d(sl(2, C))$. Для этого удобно перейти к новому базису в пространстве V.

Обозначим через J коэффициент пропорциональности старшего веса μ и корня λ: $J \equiv m/2$. Нумеровать новые базисные векторы η будем индексом $j = J - n$:

$$j = J,\ J-1,\ \ldots,\ -J. \tag{18}$$

Положим

$$\eta_j = \eta_{J-n} = n!\, v_n \left(\prod_{k=1}^{n} c_{J-k+1} \right)^{-1}, \tag{19}$$

где $c_j = \sqrt{(J+j)(J-j+1)}$.

Найдем выражения для матричных элементов операторов представления d в новом базисе:

$$\begin{aligned} d(b)\,\eta_j &= 2j\eta_j, \\ d(y)\,\eta_j &= c_j\eta_{j-1}, \\ d(x)\,\eta_j &= c_{j+1}\eta_{j+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

В компактной вещественной форме $su(2)$ алгебры $sl(2, C)$ выберем базис

$$l_1 = \frac{x+y}{2}, \quad l_2 = i\,\frac{(y-x)}{2}, \quad l_3 = \frac{b}{2},$$

в котором структурные константы мнимые, а унитарному представлению группы соответствует эрмитово представление алгебры (см. замечания (**5.25**), (**6.9**)). Представления $d_u(su(2))$ принято нумеровать индексом J, принимающим целые и полуцелые положительные значения (значок u для простоты записи опускается). С помощью формул (20) получаем

$$\begin{aligned} d^J(l_3)\,\eta_j &= j\eta_j, \\ d^J(l_1)\,\eta_j &= \frac{1}{2}c_{j+1}\eta_{j+1} + \frac{1}{2}c_j\eta_{j-1}, \\ d^J(l_2)\,\eta_j &= -\frac{i}{2}c_{j+1}\eta_{j+1} + \frac{i}{2}c_j\eta_{j-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Матрицы $d^J(l_i)$ эрмитовы. Мы построили полную систему (см. (**11**), а также § 6.5) неприводимых эрмитовых представлений $\{d^J\}$ алгебры $su(2)$. Пространство V представления d^J будем рассматривать как гильбертово, $\dim V = 2J+1$. Всякое представление d^J будет самосопряженным относительно скалярного произведения в V (см. формулу (6.30)).

Построим контраградиентное представление $d^J_{(*)}$ по формуле (6.27):

$$d^J_{(*)} = -(d^J)^{\mathrm{T}} = -(d^J)^*.$$

Представление $d^J_{(*)}$ неприводимо (см. свойство (**6.15**)). Его комплексная оболочка $d^J_{(*)\uparrow C}$ является неприводимым (см. (**6.54**)) представлением алгебры $sl(2, C)$. Из формулы (21) следует, что $d^J_{(*)\uparrow C}(b)=2d^J_{(*)\uparrow C}(l_3)=-d^J(b)$, т. е. весовая диаграмма $N(d^J_{(*)\uparrow C})$ может быть получена из весовой диаграммы $N(d)$ отражением в начале координат пространства весов $W_B^{(*)}$. Всякая $N(d)$ (формула (13)) инвариантна относительно такого отражения. Следовательно,

$$d^J_{(*)\uparrow C}\approx d, \quad d^J_{(*)}\approx d^J. \tag{22}$$

Эквивалентность представлений $d^J_{(*)}$ и d^J можно установить непосредственно.

(15) Упражнение. Покажите, что оператор

$$F^J\equiv\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ (-1)^{2J} & & & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

сплетает представления $d^J_{(*)}$ и d^J.

(16) Замечание. Оператор F^J можно рассматривать как матрицу инвариантной билинейной формы на пространстве представления d^J. При таком подходе эквивалентность $d^J_{(*)}$ и d^J вновь выступает как проявление изоморфизма групп $SU(2)$ и $Sp(1)$ (см. пример **(6.5)**). ▼

Приведем простейшие примеры неприводимых представлений d^J алгебры $su(2)$.

(17) Представление $d^{1/2}(su(2))$ по аналогии с представлениями $d(sl(2, C))$ называется *фундаментальным* (или *спинорным*). Собственные значения j оператора $d^{1/2}(l_3)$ равны $\pm {}^1/_2$. Векторы пространства фундаментального представления называются *спинорами*. В базисе $\{\eta_j\}$ матрицы $d^{1/2}(l_i)$ имеют вид (см. (21))

$$d^{1/2}(l_i)=\frac{1}{2}\sigma_i. \tag{24}$$

Таким образом, спинорное представление алгебры $su(2)$ совпадает с определяющим. ▼

(18) Положим $J=1$ $(j=1, 0, -1)$ и построим трехмерное представление

$$d^1(l_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \quad d^1(l_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$d^1(l_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Это представление эквивалентно присоединенному представлению алгебры $su(2)$ (с мнимыми структурными константами). Сплетающий оператор имеет вид

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown$$

Перейдем к рассмотрению неприводимых конечномерных представлений алгебры $A_2 = sl(3, C)$ (ее корневую диаграмму и коммутационные соотношения см. в табл. 7). Алгебра A_2 ранга 2 имеет два фундаментальных веса $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$. С помощью формулы (9) легко найти ортогональные проекции векторов $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ на базисные корни $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$:

$$\frac{(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}{|\boldsymbol{\lambda}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{|\boldsymbol{\lambda}_1|} = 0,$$

$$\frac{(\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\alpha}_1)}{|\boldsymbol{\lambda}_2|} = 0, \quad \frac{(\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)}{|\boldsymbol{\lambda}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для удобства пользования весовыми диаграммами увеличим масштаб в $\sqrt{2}$ раз: величина $\langle \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\nu} \rangle$ станет равной ортогональной проекции веса $\boldsymbol{\nu}$ на направление корня $\boldsymbol{\lambda}_i$. Тогда из формулы (9) непосредственно можно получить координаты фундаментальных весов (рис. 14).

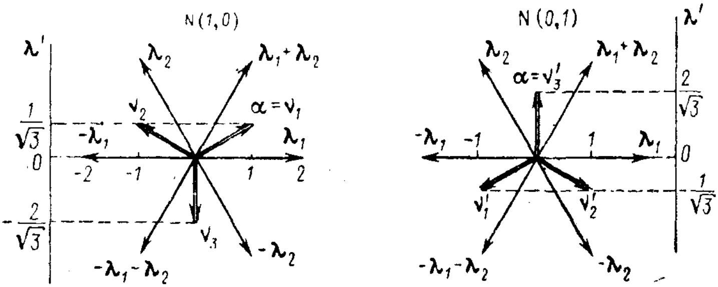


Рис. 14.

Всякой паре чисел $m_1, m_2 \in Z_+$ соответствует неприводимое конечномерное представление $d^{(m_1, m_2)}$. Построим весовые диаграммы фундаментальных представлений $c^{(1, 0)}$ и $c^{(0, 1)}$. В множествах $\{\boldsymbol{\alpha}_1 - n_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - n_2 \boldsymbol{\lambda}_2\}$ и $\{\boldsymbol{\alpha}_2 - n_1 \boldsymbol{\lambda}_1 - n_2 \boldsymbol{\lambda}_2\}$ $(n_1, n_2 \in Z_+)$ нужно отобрать такие $\boldsymbol{\nu}$, для которых отражения $s_\lambda \boldsymbol{\nu}$ не превосходят старших весов $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ соответственно. Проще всего это сделать графически. Весовые диаграммы на рис. 14 позволяют также найти кратность весов фундаментальных представлений, т. е. размерность пространств V_ν. Всякий вес $\boldsymbol{\nu} \in N(c^{(0, 1)}) \equiv \equiv N(0, 1)$ можно получить из фундаментального $\boldsymbol{\alpha}_2$ с помощью отражений s_λ. Следовательно, все веса ν простые, и $\dim c^{(0,1)}=3$. То же верно и для второго фундаментального представления $c^{(1,0)}$.

Столь же легко построить графически весовую диаграмму (рис. 15) представления $c^{(1,1)}$ со старшим весом $\mu=\alpha_1+\alpha_2$. Более сложные весовые диаграммы приведены на рис. 16 и 17.

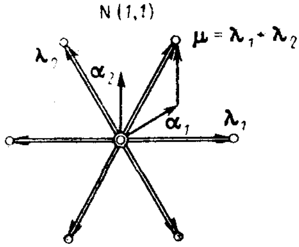


Рис. 15.

Для нахождения размерности представления, заданного весовой диаграммой, необходимо определить кратности ее весов. В случае алгебры A_2 с этой целью используется правило, которое мы сформулируем без доказательства.

(19) Утверждение. Всякая диаграмма $N(m_1, m_2)$ конечномерного неприводимого представления алгебры A_2 распадается на последовательность вложенных друг в друга шестиугольных и тре-

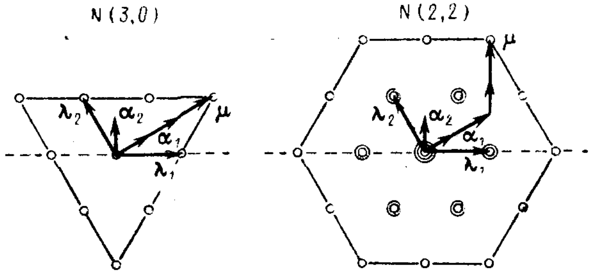


Рис. 16.

угольных контуров. Пронумеруем их извне внутрь. Кратность весов всякого шестиугольника равна его номеру. Кратность весов первого треугольника также равна его номеру и остается постоянной для всех следующих. Нулевой вес считается вырожденным треугольником или шестиугольником в зависимости от того, находится он внутри треугольного или шестиугольного контура. ▼

Продемонстрируем это правило на примере диаграммы $N(3, 2)$. Она содержит три контура: внешний шестиугольный, содержащий 15 простых весов, второй

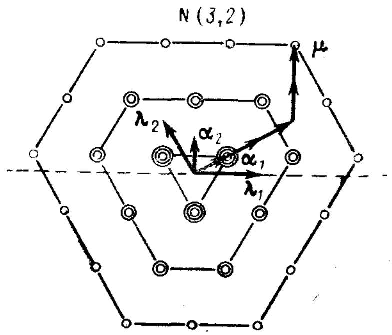


Рис. 17.

шестиугольный — девять двукратных весов и внутренний треугольный, составленный из трех трехкратных весов. Размерность представления $c^{(3,2)}$ равна 42.

На рис. 15—17 кратность веса ν неприводимого представления равна числу кружков на конце вектора ν.

Нулевой вес представления $c^{(1,1)}$ имеет кратность 2, так что $\dim c^{(1,1)}=8$. Старший вес μ этого представления совпадает с корнем $\lambda_1+\lambda_2$. С точки зрения теории представлений вектор $\lambda_1+\lambda_2$— старший вес присоединенного представления алгебры A_2. Следовательно, $c^{(1,1)}$ эквивалентно присоединенному представлению $\mathrm{Ad}(A_2)$. Двукратный нулевой вес, отличающий весовую диаграмму $N(1,1)$ от корневой, по определению не содержащей нулевых векторов, описывает подпространство подалгебры Картана $V_0\equiv W_B$.

(20) Упражнение. Покажите, что для алгебры $sl(3, C)$ формула Вейля (свойство **(12)**) принимает вид

$$\dim c^{(m_1,m_2)}=\left[1+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\right](1+m_1)(1+m_2). \quad \blacktriangledown \tag{26}$$

Построим матрицы операторов фундаментального представления $c^{(1,0)}$ $(sl(3, C), V)$. Каждому весу ν_i

$$\nu_{1,2,3}=\{\alpha_1,\ \alpha_1-\lambda_1,\ \alpha_1-\lambda_1-\lambda_2\}$$

сопоставим базисный вектор $q^i\in V$

$$q^{1,2,3}=\{q^1,\ c(y_1)\,q^1,\ c(y_2)c(y_1)\,q^1\}. \tag{27}$$

Операторы $c(a)$ легко определяются в этом базисе по весовой диаграмме $N(1,0)$ и табл. 7 структурных констант. Например, оператор $c(y_1)$, переводящий вес ν_i в $\nu_i-\lambda_1$, имеет лишь один отличный от нуля матричный элемент, соответствующий серии $\{\alpha_1, \alpha_1-\lambda_1\}$. Так как $c(y_1)q^1=q^2$, этот матричный элемент равен $+1$. Операторы $c(b_j)$ диагональны, их собственные значения совпадают с проекциями весов на направления λ_1 и λ_2. В результате имеем

$$\begin{gathered}
c(b_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad c(b_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\\
c(y_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad c(y_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\\
c(y_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad c(x_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{28}$$

$$c(x_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad c(x_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Построенное фундаментальное представление $c^{(1,0)}$ алгебры $sl(3, C)$ эквивалентно определяющему. Если среди диагональных матриц Окубо $A_i{}^i$ $(i=1, 2, 3)$ (см. (4.20)) в качестве базисных комбинаций выбрать $A_1^1-A_2^2$ и $A_2^2-A_3^3$, то операторы (28) полностью совпадут с базисными матрицами Окубо алгебры $sl(3, C)$.

Для фундаментального представления $c^{(0,1)}\equiv\bar{c}$ удобно выбрать базис пространства представления в виде

$$q_{1,2,3}=\{q_1,\ -\bar{c}(x_1)\,q_1,\ \bar{c}(x_2)\,\bar{c}(x_1)\,q_1\},\tag{29}$$

где q_i соответствует весу $\bar{\boldsymbol{\nu}}_i$:

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\lambda}_2-\boldsymbol{\lambda}_1,\quad \bar{\boldsymbol{\nu}}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\lambda}_2,\quad \bar{\boldsymbol{\nu}}_3=\boldsymbol{\alpha}_2.$$

Как и в предыдущем случае, с помощью весовой диаграммы $N(0, 1)$ получаем матричные элементы операторов $\bar{c}$:

$$\bar{c}(b_1)=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\quad \bar{c}(b_2)=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix},$$

$$\bar{c}(x_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \bar{c}(x_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \bar{c}(x_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\bar{c}(y_1)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \bar{c}(y_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \bar{c}(y_3)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\tag{30}$$

Сравнение формул (28) и (30) позволяет установить, что представление $\bar{c}$ является контраградиентным к представлению c:

$$c^{(0,1)}=c^{(1,0)}_{(\ )}=-(c^{(1,0)})^{\mathrm{T}}.\tag{31}$$

В отличие от алгебры $sl(2, C)$ представления $c^{(1,0)}$ и $c^{(1,0)}_{(*)}$ неэквивалентны. Представление $c^{(0,1)}$ также можно считать определяющим для $sl(3, C)$.

Построим компактные вещественные формы c_u, $\bar{c}_u$ — фундаментальные представления алгебры $su(3)$. Как и в случае алгебры $su(2)$, выберем в $su(3)$ базис $\{a_k\}$ $(k=1, \ldots, 8)$

$$\{a_k\}\equiv\{b_1,\ b_2,\ x_j^+\equiv(x_j+y_j),\ x_j^-\equiv i\,(y_j-x_j)\},\tag{32}$$

в котором структурные константы мнимые.

Закон композиции алгебры $su(3)$ с мнимыми структурными константами в базисах $\{a_i\}$ и $\{\lambda_i\}$, приведен в табл. 11.

Таблица 11

		λ_1	λ_4	λ_6	λ_7	λ_5	λ_2
		x_1^+	x_2^+	x_3^+	x_3^-	x_2^-	x_1^-
λ_3	b_1	$2x_1^-$	$-x_2^-$	x_3^-	$-x_3^+$	x_2^+	$-2x_1^+$
$\sqrt{3/2}\lambda_8 - 1/2\,\lambda_3$	b_2	$-x_1^-$	$2x_2^-$	x_3^-	$-x_3^+$	$-2x_2^+$	x_1^+
λ_1	x_1^+		x_3^-	x_2^-	$-x_2^+$	$-x_3^+$	$2b_1$
λ_4	x_2^+			$-x_1^-$	x_1^+	$2b_2$	x_3^+
λ_6	x_3^+				$2(b_1+b_2)$	x_1^+	$-x_2^+$
λ_7	x_3^-	$c = i\times$				x_1^-	$-x_2^-$
λ_5	x_2^-						x_3^-
λ_8	$(1/\sqrt{3})(b_1 + 2b_2)$	0	$\sqrt{3}\,x_2^-$	$\sqrt{3}\,x_3^-$	$-\sqrt{3}\,x_3^+$	$-\sqrt{3}\,x_2^+$	0

Выпишем матрицы операторов $c_u^{(1,0)} \equiv d^{(1,0)}$:

$$d(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad d(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$d(x_1^+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(x_2^+) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(x_3^+) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$d(x_1^-) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d(x_2^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad d(x_3^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Точно так же из представления $c^{(0,1)}$ в качестве компактной вещественной формы получим представление $d^{(0,1)}$, контраградиентное к $d^{(1,0)}$:

$$d^{(0,1)} = d^{(1,0)}_{(\ )} = -\left(d^{(1,0)}\right)^{\text{т}}. \tag{34}$$

Представления $d^{(1,0)}$ и $d^{(0,1)}$ эрмитовы, так что

$$d^{(0,1)} = -\left(d^{(1,0)}\right)^{*}. \tag{35}$$

В специальной литературе неприводимые представления d алгебры $su(3)$ и соответствующие им представления D группы $SU(3)$ обозначаются одинаково: например, $d^{(1,0)} \equiv (3)$. В физическом базисе (см. замечание (6.9)) $D = \exp id$, и комплексно сопряженному представлению D^* сопоставляется представление $-d^*$ алгебры $su(2)$. Поэтому представление $d^{(0,1)}$ обозначается (3^*).

(21) Замечание. При использовании таких обозначений следует помнить, что существуют неэквивалентные представления одинаковой размерности (например, $\dim d^{(2,1)} = 15 = \dim d^{(0,4)}$). ▼

Антиэрмитово определяющее представление алгебры $su(3)$ было построено в § 4.3 в терминах матриц Окубо Λ^i_k. Домножив базисные операторы $\{\Lambda^i_i, \Lambda^{i\,(+)}_k, \Lambda^{i\,(-)}_k\}$ на $-i$ и выбрав в качестве независимых диагональных матриц $-i(\Lambda^1_1 - \Lambda^2_2)$ и $-i(\Lambda^2_2 - \Lambda^3_3)$, получим алгебру эрмитовых матриц Окубо, тождественную представлению $d^{(1,0)}$.

(22) В пространстве весов можно рассмотреть ортогональный нормированный базис $\{\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}' \equiv {}^1/\sqrt{3}\ (\boldsymbol{\lambda}_1 + 2\boldsymbol{\lambda}_2)\}$ и дуальный к нему $\{b_1, b' \equiv {}^1/\sqrt{3}\ (b_1 + 2b_2)\}$ в W_B. В модели $SU(3)$-симметрии адронов операторы $d({}^1/\sqrt{3}\ b') \equiv Y$ и $d({}^1/{}_2 b_1) \equiv T_3$ приобретают физический смысл гиперзаряда и третьей проекции изотопического спина соответственно (см. § 8.3, 4).

Матрицы определяющего представления алгебры $su(3)$ в этом базисе были впервые построены М. Гелл-Манном [8] и получили название *λ-матриц:*

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = d\left(x_1^+\right),\ \lambda_2 = d\left(x_1^-\right),\ \lambda_3 = d\left(b_1\right), \\ &\lambda_4 = d\left(x_2^+\right),\ \lambda_5 = d\left(x_2^-\right), \\ &\lambda_6 = d\left(x_3^+\right),\ \lambda_7 = d\left(x_3^-\right),\quad \lambda_8 = d\left(b'\right) = {}^1/\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{36}$$

Базисы $\{\lambda_i\}$ и $\{a_i\}$ мало различаются, так что почти все структурные константы $su(3)$ годятся одновременно для обоих базисов (см. табл. 11). В физической литературе для структурных констант в базисе $\{\lambda_i\}$ принято обозначение

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2if_{jkl}\lambda_l. \tag{37}$$

По теореме Бернсайда (6.26) линейная оболочка операторов $D = \exp id$ совпадает с $\mathrm{Mat}(3, C)$. Действительно, матрицы $\{I, d(a_i)\}$ (в частности, $\{I, \lambda_i\}$) составляют базис в пространстве $\mathrm{Mat}(3, C)$ ассоциативной алгебры 3×3 матриц.

(23) Упражнение. Используя свойства матриц Окубо, покажите, что

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i \lambda_k) = 2\delta_{ik}, \tag{38}$$

$$\{\lambda_j, \lambda_k\} \equiv \lambda_j \lambda_k + \lambda_k \lambda_j = 2d_{jkl}\lambda_l + \frac{4}{3}\delta_{jk} I, \tag{39}$$

$$\lambda_j \lambda_k = i f_{jkl}\lambda_l + d_{jkl}\lambda_l + \frac{2}{3}\delta_{jk} I. \tag{40}$$

Числа d_{jkl} называются структурными константами антикоммутационных соотношений. Для них справедливо равенство

$$d_{jkl} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\{\lambda_j, \lambda_k\}\lambda_l). \quad \blacktriangledown \tag{41}$$

Фундаментальные представления (*3*) и (*3**) были построены по весовым диаграммам. В общем случае при наличии кратных весов удобнее пользоваться методом тензорных произведений.

§ 3. Тензорные произведения представлений $d(su(2))$ и $d(su(3))$ и их разложение на неприводимые

Пусть $d(A, V)$ и $c(A, W)$ — неприводимые конечномерные представления простой алгебры A, $N(d)$ и $N(c)$ — их весовые диаграммы, $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ и $\{v_i \otimes w_j\}$ — базисы пространств V, W и $V \otimes W$ соответственно. Рассмотрим тензорное произведение представлений $t(A, V \otimes W) \equiv d \otimes c$. Если базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ согласованы с разложением (6) пространств представлений, т. е. всякий v_i (или w_j) имеет вес $\nu_i \in N(d)$ ($\xi_j \in N(c)$), то вектор $v_i \otimes w_j$ имеет вес $\tau_{ij} = \nu_i + \xi_j$. Это следует из выражения (51) для оператора $t(b)$:

$$t(b) = d(b) \otimes I + I \otimes c(b).$$

(24) Весовая диаграмма $N(t)$ представления $t(A, V \otimes W) \approx \approx d(A, V) \otimes c(A, W)$ совпадает с множеством векторов $\{\nu_i + \xi_j\}$, $\nu_i \in N(d)$, $\xi_j \in N(c)$. ▼

Графическое построение весовой диаграммы $N(t)$ можно начать с диаграммы любого сомножителя, например $N(c)$. Далее необходимо, последовательно принимая конец каждого весового вектора $\xi_j \in N(c)$ за начало координат, воспроизводить диаграмму $N(d)$, сохраняя масштаб и направление осей. Ассоциативность тензорного произведения позволяет распространить это правило на любое число сомножителей. На рис. 18 показан порядок построения весовых диаграмм тензорных произведений фундаментальных представлений алгебры $su(3)$: $3 \otimes 3^*$, $3 \otimes 3$. Более сложная весовая диаграмма тензорного

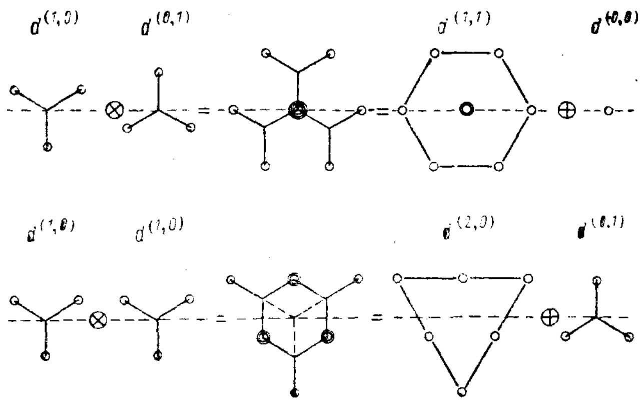


Рис. 18.

произведения $t = 8 \otimes 8$ изображена на рис. 19. Пунктиром показан контур исходной диаграммы $N(8)$, сплошной линией — контур диаграммы $N(8)$, построенной на конце старшего веса исходной диаграммы. Числа означают кратности весов.

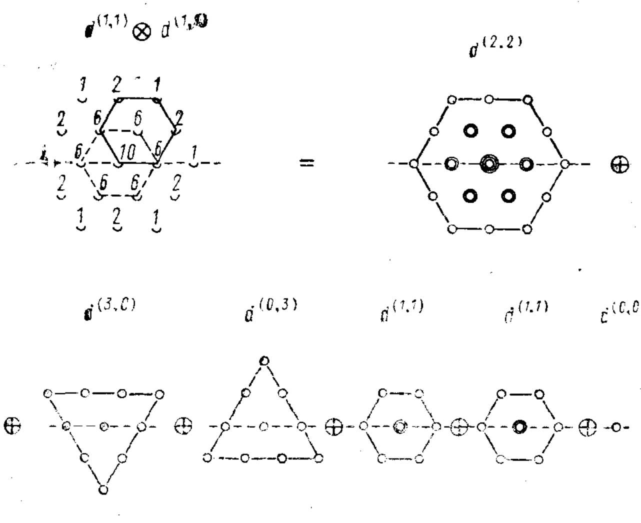


Рис. 19.

Графический анализ позволяет без особого труда найти коэффициенты разложения представления t на неприводимые. Если $\mu \in N(t)$ — старший вес представления t, то соответствующее неприводимое представление $d(\mu)$ содержится в t с кратностью, равной кратности веса μ. Вычтем диаграммы $N(d(\mu))$ из $N(t)$. В силу полной приводимости рассматриваемых представлений мы вновь получим диаграмму некоторого представления и сможем повторить всю процедуру сначала.

(25) Примеры. Рассмотрим представление $t(su(2)) = d^{1/2} \otimes \ldots \otimes d^{1/2}$, содержащее n сомножителей. Весовая диаграмма $N(t)$ содержит векторы $\{n\alpha, (n-2)\alpha, \ldots, -n\alpha\}$, так что разложение представления $t(su(2))$ на неприводимые можно записать в виде

$$t = d^{1/2} \otimes \ldots \otimes d^{1/2} = \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n/2} r_{(n/2-k)} d^{(n/2-k)}. \tag{42}$$

Кратность веса $(n-2k)\alpha \in N(t)$ равна биномиальному коэффициенту $C_n^k = n!\,(k!\,(n-k)!)^{-1}$. Поскольку все веса неприводимых представлений d^J просты, коэффициент $r_{(n/2-k)}$ определяется кратностями соседних весов:

$$r_{(n/2-k)} = C_n^k - C_n^{k-1} = \frac{n!\,(n-2k+1)}{k!\,(n-k+1)!}. \quad ▼ \tag{43}$$

(26) На рис. 18—20 весовые диаграммы представлений $3 \otimes 3^*$, $3 \otimes 3$, $8 \otimes 8$ и $3 \otimes 3 \otimes 3$ разлагаются на неприводимые

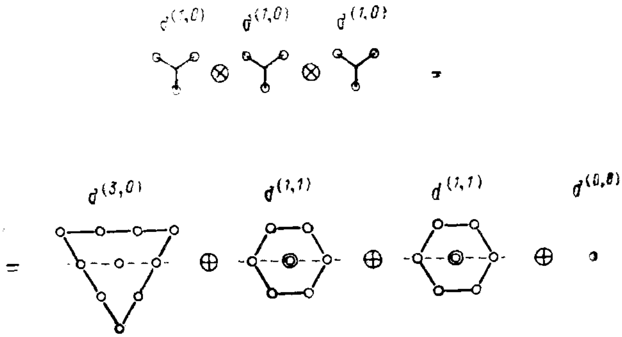


Рис. 20.

графическим методом. При выделении диаграммы неприводимого подпредставления применяется правило подсчета кратности весов (утверждение (19)). ▼

Полностью решить задачу разложения представления t на неприводимые графически не удается. Для выделения неприводимых инвариантных подпространств воспользуемся алгебраическими свойствами тензорных произведений, инвариантностью относительно действия $t(a)$ пространств симметричных и антисимметричных тензоров.

Начнем с алгебры $su(2)$. Пусть t — n-кратное тензорное произведение представлений $d^{1/2}$, η_j — базисные спиноры. Базис пространства T представления t состоит из тензоров $T_{j_1, \ldots, j_k} \equiv {}^1/_n\, \eta_{j_1} \otimes \ldots \otimes \eta_{j_n}$. Построим инвариантное подпространство $S(n) \subset T$ полностью симметризованных тензоров с базисом $T_{\{j_1, \ldots, j_n\}}$. Тензор $T_{1/2, \ldots, 1/2}$ принадлежит подпространству старшего веса $\mu \in N(t)$, $\mu = n\alpha$. Следовательно, $S(n)$ должно содержать подпространство неприводимого представления $d^{n/2}$. Размерность представления $d^{n/2}$, равная $n+1$, совпадает с мощностью базиса $\{T_{\{j_1, \ldots, j_n\}}\}$. Таким образом, пространство $S(n)$ неприводимо, и на нем реализуется подпредставление, эквивалентное $d^{n/2}$. Аналогично можно показать, что всякое подпространство $S(p, k)$ тензоров, симметричных по p значкам и антисимметричных по k парам значков, $p+2k=n$, неприводимо. Число независимых подпространств $S(p, k)$ в T равно $r_{(n/2-k)}$ (см. формулу (43)). Пространство антисимметричных тензоров второго ранга $T_{[jl]}$ одномерно. На нем реализуется тривиальное представление алгебры $su(2)$. Так что всякое пространство $S(p, k)$ изоморфно $S(p=n-2k)$ и реализует неприводимое представление $d^{(n/2-k)}$.

Итак, мы можем построить полный набор неприводимых инвариантных подпространств, соответствующих разложению (42). Операторы $t(a)$ есть сумма тензорных произведений единичных матриц и матриц фундаментального представления $d^{1/2}$ (см. формулу (5.1)). Матрица перехода от базиса $\{T_{j_1, \ldots, j_n}\}$ к базису $\{T_{\{j_1, \ldots, j_n\}}, T_{[j_1, j_2]\{j_3, \ldots, j_n\}}, \ldots\}$ приводит операторы $t(a)$ к блочно-диагональному виду, где каждый блок реализует неприводимое подпредставление $d^{(n/2-k)}$ и встречается $r_{(n/2-k)}$ раз. Отметим, что для построения любого неприводимого представления d^J достаточно пространства симметричных тензоров $T_{\{j_1, \ldots, j_n\}}$, где $n=2J$.

Если $t(su(2)) = d^{J_1} \otimes d^{J_2}$, то базис пространства представления каждого сомножителя удобно записать в виде $T_{\{j_1, \ldots, j_n\}}$ $(n = 2J_1, 2J_2)$. Тогда пространство T представления t с базисом $T_{\{j_1, \ldots, j_{n_1}\}\{l_1, \ldots, l_{n_2}\}}$ будет содержать инвариантные неприводимые подпространства

$$T = S(n_1+n_2) \oplus S(n_1+n_2-2,1) \oplus \ldots \oplus S(n_1-n_2, n_2) \quad (44)$$

при $n_1 \geqslant n_2$. Кратность каждого слагаемого в (44) равна единице. Действительно, все базисы типа $T_{\{j_1, \ldots, \overline{j_{n_1}\}\{l_1}, \ldots, l_{n_2}\}}$ с одной антисимметризованной парой индексов совпадают вследствие симметризации наборов $\{j\}$ и $\{l\}$.

Итак, мы доказали известную формулу

$$t = d^{J_1} \otimes d^{J_2} \approx d^{J_1+J_2} \oplus d^{J_1+J_2-1} \oplus \ldots \oplus d^{J_1-J_2}, \quad J_1 \geqslant J_2. \quad (45)$$

Перейдем к анализу тензорных произведений $t(su(3))$ фундаментальных представлений (3) и (3^*) алгебры $su(3)$.

(27) Рассмотрим два примера. Пусть $t=3\otimes 3$. На рис. 18 показано, как разлагается это представление на неприводимые. Базисный элемент $T^{11}=q^1\otimes q^1$ — старший вектор, так что базис представления $(6)\equiv d^{(2,0)}$ состоит из симметризованных тензоров $T^{\{i_1,i_2\}}$. Следовательно, антисимметризованные тензоры $T^{[i_1,i_2]}$ образуют базис представления $d^{(0,1)}\equiv(3^*)$. С помощью диаграммы, приведенной на рис. 18, легко уточнить соответствие между базисами $\{q_i\}$ (формула (29)) и $\{T^{[i_1,i_2]}\}$:

$$q_i=\varepsilon_{ijl}T^{[j,l]}. \tag{46}$$

Точно так же устанавливается изоморфизм пространства антисимметричных тензоров с базисом $T_{[i_1,i_2]}$ и пространства представления $d^{(1,0)}\equiv(3)$:

$$q^i=\varepsilon^{ijl}T_{[j,l]}. \quad ▼ \tag{47}$$

(28) Следующий важиый пример — представление $t=3\otimes 3^*$, разлагающееся в сумму октетного (8) и тривиального (1) представлений (рис. 18).

Представление $(3^*)=-(d^{(1,0)})^{\mathrm{T}}$ совпадает с представлением $(d^{(1,0)})^{\langle * \rangle I}$, сопряженным $d^{(1,0)}$ относительно билинейной формы с матрицей I. Следовательно, тензор $T^i_j\delta^j_i=T^1_1+T^2_2+T^3_3$ является инвариантным элементом в пространстве представления $3\otimes 3^*$ (см. пример **(6.7)**). Он порождает пространство тривиального подпредставления $d^{(0,0)}\equiv(1)$.

Изоморфизмы (46), (47) позволяют иначе сформулировать полученное свойство. Перепишем базис T^i_j в виде $T^{i[l,k]}$. Тогда инвариантный тензор $T^i_j\delta^j_i$ перейдет в эквивалентный тензор третьего ранга:

$$T^{1\,[2,3]}+T^{2\,[3,1]}+T^{3\,[1,2]}=T^{ijl}\varepsilon_{ijl}. \tag{48}$$

Инвариантность тензора (48) означает, что он аннулируется операторами представления $d^{(1,0)}\otimes d^{(1,0)}\otimes d^{(1,0)}$. Из рис. 20 видно, что скалярное подпредставление (1) действительно содержится в разложении на неприводимые представления $3\otimes 3\otimes 3$. Тем же свойством обладает и $3^*\otimes 3^*\otimes 3^*$. ▼

(29) Упражнение. Используя свойства весовых диаграмм тензорных произведений фундаментальных представлений алгебры $su(3)$, покажите, что ассоциативная алгебра инвариантных тензоров порождается элементами $T^i_j\delta^j_i$ и $T^{ijk}\varepsilon_{ijk}$. ▼

Перейдем к анализу тензорного произведения произвольного числа фундаментальных представлений

$$t=\underbrace{3\otimes\ldots\otimes 3}_{n}\otimes\underbrace{3^*\otimes\ldots\otimes 3^*}_{l}$$

и соответствующих им базисных тензоров $T^{i_1,\ldots,i_n}_{j_1,\ldots,j_l}$. Симметричные тензоры с компонентами $a^{\{i_1,\ldots,i_n\}}_{\{j_1,\ldots,j_l\}}$, как и прежде, порождают инвариантное подпространство S. На этот раз наличие инвариантного тензора δ^i_j делает подпространство S приводимым. Свертки с δ^i_j порождают инвариантные подпространства тензоров меньшего ранга. Для алгебры $su(3)$ существует единственный смешанный инвариантный тензор. Следовательно, подпространство $S(n, l) \subset S$ симметричных (n раз контравариантных и l раз ковариантных) тензоров, удовлетворяющих условиям

$$a^{\{i_1,\ldots,s,\ldots,i_n\}}_{\{j_1,\ldots,r,\ldots,j_l\}}\delta^r_s = 0, \tag{49}$$

неприводимо. Дополнительное к S подпространство в T состоит из частично антисимметризованных тензоров. Антисимметризовать можно только пары или тройки индексов (одной валентности). Эта процедура эквивалентна свертке с тензором ε_{ijl} по двум или трем индексам, т. е. понижение ранга тензора. В редуцированном таким образом пространстве вновь выделяется подпространство $S(k, p)$ и т. д.

(30) Упражнение. Покажите, что всякое неприводимое подпространство в T имеет вид $S(k, p)$, $k+p \leqslant n+l$. ▼

Найдем числа (m_1, m_2), характеризующие неприводимое подпространство $S(k, p)$. Его старший вектор имеет вид $T^{1,\ldots,1}_{3,\ldots,3}$, следовательно, $\mu = m_1\boldsymbol{\alpha}_1 + m_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k\boldsymbol{\alpha}_1 + p\boldsymbol{\alpha}_2$. Итак, $S(k, p)$ — пространство неприводимого представления $d^{(k,p)}$.

(31) Примеры. В разложении представления

$$t = 3 \otimes 3 \otimes 3 = (10) \oplus (8) \oplus (8) \oplus (1)$$

тензоры $T^{\{i_1,i_2,i_3\}}$ образуют базис декуплета, $T^{\{i_1[i_2\}i_3]}$ и $T^{[i_1\{i_2]i_3\}}$ порождают пространства двух октетов и, наконец, $T^{[i_1,i_2,i_3]}$ — синглет.

(32) Представим в тензорном произведении $t = (8) \otimes (8)$ пространства октетных сомножителей в виде $S(1, 1)$ (компоненты его тензоров $T = a^j_i T^i_j$ удовлетворяют условию $a^i_j\delta^j_i = 0$). Тогда неприводимые пространства представления

$$(8) \otimes (8) = (27) \oplus (10) \oplus (10^*) \oplus (8) \oplus (8) \oplus (1)$$

(см. рис. 19) порождаются тензорами

$$\left\{ a^{\{i_1,i_2\}}_{\{j_1,j_2\}},\ a^{\{i_1,i_2\}}_{\{j_1,j_2\}}\delta^{j_1}_{i_2} = 0 \right\},$$

$$\left\{ a^{\{i_1,i_2\}}_{[j_1,j_2]} \right\} \approx \left\{ a^{\{i_1,i_2,i_3\}} \right\} + \left\{ a^{\{i_1[i_2\}i_3]} \right\},$$

$$\left\{ a^{[i_1,i_2]}_{\{j_1,j_2\}} \right\} \approx \left\{ a_{\{j_1,j_2,j_3\}} \right\} + \left\{ a_{\{j_1[j_2\}j_3]} \right\},$$

$$\left\{ a^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}\delta^{j_1}_{i_2}\delta^{j_2}_{i_1} \right\}. \quad ▼$$

§ 4. Схемы Юнга

При тензорном анализе представлений больших размерностей удобно пользоваться методом схем Юнга. Сформулируем его для случая алгебры $su(n)$.

Алгебра $su(n)$ имеет ранг $r = n - 1$. Ее комплексификация совпадает с алгеброй A_r. Следовательно, существует r неэквивалентных фундаментальных представлений алгебры $su(n)$ и столько же фундаментальных весов α_i. Пусть d — фундаментальное представление со старшим весом α_1. Построим тензорное произведение N таких фундаментальных представлений

$$t = \underbrace{d \otimes d \otimes \ldots \otimes d}_{N}.$$

Базис пространства представления t состоит из тензоров

$$T^{i_1, \ldots, i_N} \quad (i_k = 1, \ldots, l, \quad l = \dim d).$$

Используя симметризацию и антисимметризацию индексов, построим оператор, который, как будет показано, является проектором на неприводимое инвариантное подпространство.

Зададим невозрастающую последовательность целых неотрицательных чисел q_s:

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_r \quad (q_1 + \ldots + q_r = N, \ r = n - 1). \tag{50}$$

Каждому числу q_s сопоставим строку из q_s клеток и объединим все r строк в схему, изображенную на рис. 21. Пронумеруем клетки схемы от 1 до N. Каждому числу $1 \leqslant k \leqslant N$ сопоставим индекс i_k базисного тензора $T^{i_1, \ldots, i_N}$. Будем считать, что построенная схема задает оператор Y, симметризующий индексы с номерами в каждой строке и затем антисимметризующий индексы с номерами, попавшими в один столбец. Такой оператор называется *симметризатором Юнга*, а задающая его схема — *схемой Юнга*.

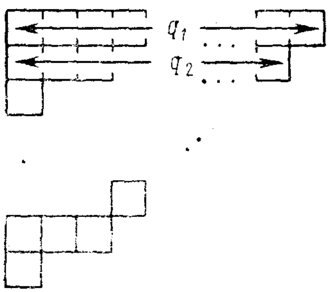


Рис. 21.

Симметризатор Юнга Y очевидно является оператором проектирования и выделяет в пространстве представления t подпространство, которое мы обозначим через $S(Y)$. Это подпространство инвариантно.

(33) Утверждение. Пространство $S(Y)$ неприводимо. Симметризатор Y однозначно задает неприводимое представление $t^Y(su(n), \ S(Y)) = c^{(q_1-q_2,\ q_2-q_3, \ldots,\ q_{n-2}-q_{n-1},\ q_{n-1})}$. В свою очередь всякому неприводимому представлению $d^{(m_1, \ldots, m_{n-1})}$ однозначно соответствует схема Юнга Y' с числами

$$q_1' = \sum_{s=1}^{n-1} m_s, \quad q_2' = \sum_{s=2}^{n-1} m_s, \quad \ldots, \quad q_{n-1}' = m_{n-1}. \tag{51}$$

Доказательство. Пронумеруем базисные корни λ_s алгебры A_n в порядке расположения их в схеме Дынкина (см. табл. 4).

Все веса $\{\nu_j(d)\}$ фундаментального представления $d \equiv d^{(1,0,\ldots,0)}$ простые. Они равны

$$\alpha_1, \ \alpha_1 - \lambda_1, \ \alpha_1 - \lambda_1 - \lambda_2, \ \ldots, \ \alpha_1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{n-1}. \tag{52}$$

Итак, $\dim d = n$. Пусть тензор T^j образует базис подпространства с весом $\nu_j = \alpha_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_{j-1}$.

Всякий вес ξ представления t^Y можно записать как линейную комбинацию весов ν_j фундаментального представления d (свойство (24)). Формула (52) убеждает нас в том, что все веса $\{\xi\}$ сравнимы. Тогда конечномерное представление t^Y имеет максимальный вес

$$\mu(Y) = q_1\nu_1 + q_2\nu_2 + \ldots + q_n\nu_n \quad (q_j \in Z_+, \ \sum q_j = N). \tag{53}$$

Подставим выражения (52) в формулу (53):

$$\mu(Y) = N\alpha_1 - (N - q_1)\lambda_1 - \ldots - (N - q_1 - \ldots - q_{n-1})\lambda_{n-1}. \tag{54}$$

Для любого веса

$$\xi = \sum_j \tilde{q}_j\nu_j = N\alpha_1 - (N - \tilde{q}_1)\lambda_1 - \ldots - (N - \tilde{q}_1 - \ldots - \tilde{q}_{n-1})\lambda_{n-1} \tag{55}$$

разность

$$\mu(Y) - \xi = (q_1 - \tilde{q}_1)\lambda_1 + (q_1 - \tilde{q}_1 + q_2 - \tilde{q}_2)\lambda_2 + \ldots$$
$$\ldots + (q_1 - \tilde{q}_1 + q_2 - \tilde{q}_2 + \ldots + q_{n-1} - \tilde{q}_{n-1})\lambda_{n-1}$$

должна быть линейной комбинацией базисных корней с положительными коэффициентами (свойство (6)). Отсюда следует, что q_1 в разложении (53) имеет максимальное значение, допустимое в представлении t^Y. Фиксируем его. Среди всех весов с максимальной величиной q_1 вес $\mu(Y)$ имеет максимально допустимое значение коэффициента q_2 и т. д. В принятой нами нумерации базисных тензоров T^j весу ξ (см. формулу (55)) соответствует тензор, где $\tilde{q}_1$ индексов равны 1, $\tilde{q}_2$ индексов — 2, ..., $\tilde{q}_n$ индексов — n. Среди индексов $i_1, \ldots, i_N$ тензора с весом $\mu(Y)$ должно быть максимально возможное число q_1 единиц, максимальное, не превосходящее q_1, число q_2 двоек и т. д. С помощью схемы Юнга (рис. 21) легко установить, что число индексов этого базисного тензора, имеющих значение j, равно числу q_j клеток j-й строки, т. е. коэффициенты q_j в разложении (53) веса $\mu(Y)$ совпадают с длинами строк схемы Y. Очевидно, что в пространстве $S(Y)$ существует единственный базисный тензор с такими свойствами. Вес $\mu(Y)$ прост. Пусть $c(\mu)$ — неприводимое представление, соответствующее весу $\mu(Y)$. Мы показали, что $S(Y)$ содержит подпространство V, изоморфное пространству представления $c(\mu)$. Предположим, что $S(Y)$ приводимо. Так как оно вполне приводимо (утверждение (6.58)), то $S(Y) \approx V \oplus V_1$, где подпространство V_1 также инвариантно. Подпредставление, действующее на V_1, имеет максимальный вес $\xi \in N(t^Y)$

$$\xi = q_1'\alpha_1 + q_2'(\alpha_1 - \lambda_1) + \ldots + q_n' (\alpha_1 - \lambda_1 \ldots - \lambda_{n-1}).$$

Соответствующий базисный тензор имеет q_1' индексов, равных 1, q_2' индексов, равных 2, и т. д.

Построим схему Z со строками длиной $q_1', \ldots, q'_n$:

$$q_1' \geqslant q_2' \geqslant \ldots \geqslant q'_{n-1} \geqslant q'_n, \quad \sum q_j' = N. \tag{56}$$

В общем случае она не является схемой Юнга для алгебры $su(n)$, так как число ее строк равно n. Симметризатор, который мы обозначим тем же символом Z, является проектором, как и симметризаторы Юнга. Пространство $S(Z)$ инвариантно и содержится в V_1. Тогда $S(Y) \cap S(Z) \neq 0$. Вместе с тем, схемы Y и Z имеют одинаковое число клеток и $Y \neq Z$. Произведение YZ таких проекторов равно нулю. Предположение приводимости $S(Y)$ привело к противоречию.

Итак, симметризатор Юнга Y определяет единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление $c(\mu) \approx t^Y$ со старшим весом μ. С помощью формул (10) и (54) легко выразить индексы m_s представления $c(\mu)$ через длины строк схемы Y:

$$m_s = 2\frac{(\lambda_s, \mu)}{(\lambda_s, \lambda_s)} = q_s - q_{s+1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n-1. \tag{57}$$

Рассмотрим теперь произвольное неприводимое эрмитово представление $d^{\left(m_1', \ldots, m_{n-1}'\right)}$ алгебры $su(n)$. Построим схему Юнга Y', у которой m_1' одноклеточных столбцов, m_2' двуклеточных и т. д.

(34) Упражнение. Покажите, что представления $t^{Y'}$ и $d^{\left(m_1', \ldots, m_{n-1}'\right)}$ эквивалентны. ∇

Таким образом, между схемами Юнга алгебры $su(n)$ и классами эквивалентных неприводимых эрмитовых ее представлений установлено взаимно-однозначное соответствие. ▼

Поскольку множество схем Юнга оказалось полным, обсудим вопрос о роли введенных схем Z с $q_n \neq 0$. Пространства

$S(Z)$ неприводимы так же, как и $S(Y)$. Схема Z содержит q_n столбцов с n клетками. Каждому из них соответствует n антисимметризованных индексов в базисном тензоре $T^{i_1,\dots,i_N}$ пространства $S(Z)$. Тензорный сомножитель $T^{[i_1,\dots,i_n]}$ остается инвариантным под действием операторов представления t^Z. Вес тензора $T^{[i_1,\dots,i_n]}$ равен нулю, поскольку он равен сумме весов ν_j фундаментального представления d. Пространство с базисным элементом $T^{[i_1,\dots,i_n]}$ — это пространство тривиального (одномерного) представления алгебры $su(n)$. Следовательно, элементы неприводимого пространства $S(Z)$ преобразуются как тензоры ранга $(N-nq_n)$. Схема Юнга неприводимого представления t^Z получается из Z вычеркиванием всех q_n столбцов, состоящих из n клеток. Нормированный инвариантный тензор n-го ранга будем обозначать $\varepsilon^{i_1,\dots,i_n}$. Знаки его ненулевых компонент фиксируются условием

$$\varepsilon^{1,2,\dots,n} = +1.$$

(35) Пример. Для тензорного произведения $3\otimes3\otimes3$ фундаментальных представлений алгебры $su(3)$ можно построить две схемы Юнга (рис. 22). Схема присоединенного представления $d^{(1,1)}$ допускает два неэквивалентных варианта распределения индексов по клеткам. В итоге получаем три нетривиальных неприводимых подпредставления. Для построения всех неприводимых подпространств необходимо учесть существование инвариантного тензора с коэффициентами ε^{ijk} — столбца из трех клеток. ▼

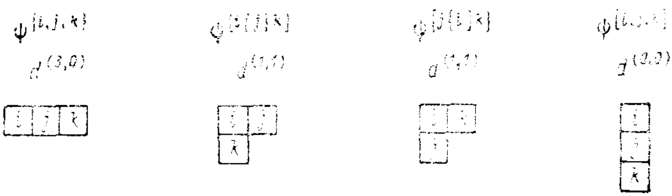


Рис. 22.

Мы рассмотрели тензорные произведения представлений $d^{(1,0,\dots,0)} \equiv d$. С тем же успехом можно было положить в основу конструкции фундаментальное представление $d^{(0,\dots,0,1)}$, свойства которого аналогичны d.

(36) Упражнение. Покажите, что представление $d^{(0,\dots,0,1)}$ контрградиентно представлению $d^{(1,0,\dots,0)}$:

$$d_{(*)}^{(1,0,\dots,0)} \approx d^{(0,\dots,0,1)}. \quad ▼ \tag{58}$$

Базисные элементы пространства представления $d^{(0,\dots,0,1)}$

удобно нумеровать нижними индексами: $\{T_j\}$. Как ранее, можно доказать существование инвариантного тензора с компонентами $\varepsilon_{i_1, \ldots, i_n}$. Поскольку форма скалярного произведения тоже инвариантна относительно $d_{(*)} \otimes d$ (см. (**28**)), то всякая свертка выделяет в пространстве смешанных тензоров $T^{i_1, \ldots, i_k}_{j_1, \ldots, j_l}$ инвариантные подпространства. В частности, тензоры $T^{i_1, \ldots, i_{n-1}} \varepsilon_{i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n}$ составляют базис фундаментального представления $d^{(0, \ldots, 1)}$. Иными словами, тензор $T^{[i_1, \ldots, i_{n-1}]}$ ведет себя под действием операторов представления как T_j. К тому же результату можно прийти, используя правило, сформулированное в утверждении (**33**): схема Юнга представления $d^{(0, \ldots, 0, 1)}$ состоит из одного столбца высотой $n-1$. Аналогично для других фундаментальных представлений алгебры $su(n)$ схема Юнга всякий раз будет состоять из одного столбца. (Например, для $su(5)$ см. рис. 23, *а — г*.)

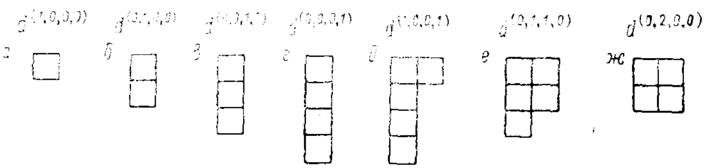


Рис. 23.

Перепишем формулу Вейля (8) в терминах параметров схем Юнга.

(37) Формула Вейля. Пусть $Y(d)$ — схема Юнга неприводимого эрмитова представления d алгебры $su(n)$. Составим таблицу:

q	q_1	q_2	...	q_{n-1}	0
p	$p_1 = q_1 + n - 1$	$p_2 = q_2 + n - 2$	...	$p_{n-1} = q_{n-1} + 1$	$p_n = 0$
l	$l_1 = n - 1$	$l_2 = n - 2$	...	$l_{n-1} = 1$	$l_n = 0$

Размерность представления

$$\dim d = \prod_{i<j} \frac{(p_i - p_j)}{(l_i - l_j)}. \blacktriangledown \qquad (59)$$

(38) Пример. Представление, схема Y которого изображена на рис. 23, *д*, эквивалентно присоединенному представлению алгебры $su(5)$ (см. упражнение (49)). Вычислим размерность присоединенного представления по формуле (59):

q	2	1	1	1	0
p	6	4	3	2	0
l	4	3	2	1	0

$$\dim(\mathrm{ad}) = \frac{6\cdot4\cdot3\cdot2\cdot4\cdot2\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2} = 24. \ \blacktriangledown$$

(39) Упражнение. Покажите, что размерность фундаментального представления со схемой Y (рис. 23, *б*) и контраградиентного ему представления Y' (рис. 23, *в*) равна 10.

(40). Упражнение. Вычислите размерность представлений $d^{(0,1,1,0)}$ и $d^{(0,2,0,0)}$ (рис. 23, *е, ж*) по формуле Вейля (59).

Ответ: 75, 50. ▼

Перейдем к основной задаче — разложению тензорных произведений неприводимых представлений в терминах схем Юнга. Начнем с простого случая, когда один из сомножителей равен $d^{(1,0,\ldots,0)}$ с одноклеточной схемой $Y(d)$, а второй — произвольное неприводимое представление $c^{(m_1,\ldots,m_{n-1})}$ со схемой $Y(c)$. Пусть

$$T\underbrace{\{i_1,\ldots\}}_{q_1}\underbrace{\{\ldots\}}_{q_2}\cdots\underbrace{\{\ldots,\ i_N\}}_{q_{n-1}}$$

— базисный тензор пространства представления c (антисимметризация по столбцам не обозначена). Для выделения в пространстве представления $d\otimes c$ неприводимых подпространств необходимо симметризовать по Юнгу базисные тензоры $T^{\{i_1,\ldots\}\{\ldots\}\{\ldots\,i_N\}i_{N+1}}$, т. е. построить все неэквивалентные операторы Z (а не только Y!), содержащие симметризатор $Y(c)$. Если теперь в схемах Z (с числом клеток $(N+1)$) вычеркнуть все n-клеточные столбцы, получим полный набор неприводимых подпространств.

(41) Схемы Юнга всех неприводимых подпредставлений в тензорном произведении представлений $c^{(m_1,\ldots,m_n-1)}$ (со схемой Y) и $d^{(1,0,\ldots,0)}$ получают добавлеиием одной клетки к схеме Y всеми способами, совместимыми с условием (56), и последующим вычеркиванием n-клеточных столбцов. Схема, целиком состоящая из n-клеточного столбца, описывает тривиальное подпредставление. ▼

(42) Пример (рис. 24).

В представлении $d^{(1,1)}\otimes d^{(1,0)}$ неприводимая компонента $d^{(1,0)}$ получена вычеркиванием трехклеточного столбца в последней схеме Z. ▼

Следующие правила разложения (тензорных) произведений схем Юнга устанавливаются аналогично свойству (**41**). Мы приведем их без доказательств.

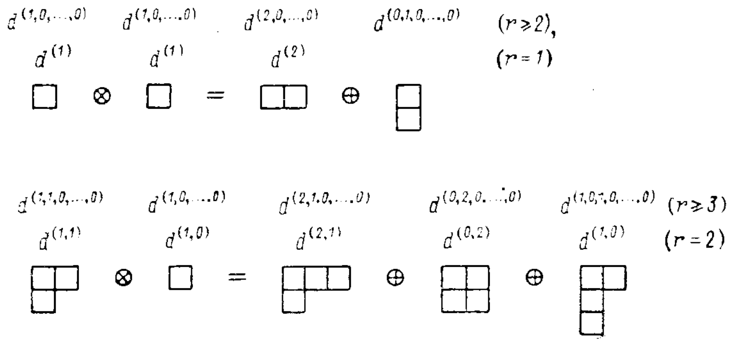


Рис. 24.

(**43**) Разложение произведения схемы Y на строку (представление $d^{(q_1, 0, \dots, 0)}$) содержит те и только те схемы Z, которые получаются последовательным добавлением к Y каждой клетки по правилу (**41**), но не более одной клетки строки в один столбец. Схемы Z, различающиеся лишь порядком расположения клеток строки, учитываются только один раз.

(**44**) Пример (рис. 25).

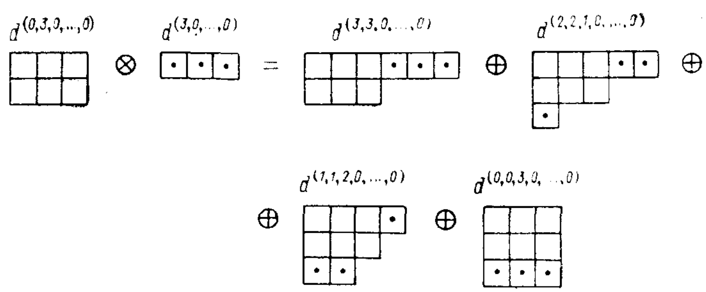


Рис. 25.

(**45**) Рассмотрим произведения произвольных схем Y и Y'. В каждой клетке одного из сомножителей (например, Y') поставим номер ее строки. Перемножим последовательно Y на каждую строчку схемы Y' по правилу (**43**). Для всякой построенной таким образом схемы выпишем цепочку номеров в ее клетках справа налево построчно сверху вниз. В разложении нужно оставить только те схемы, для которых полученная последовательность чисел удовлетворяет условию: для любого члена последовательности число единиц перед ним больше или равно числу двоек, число двоек больше или равно числу троек и т. д.

(46) Пример (рис. 26).

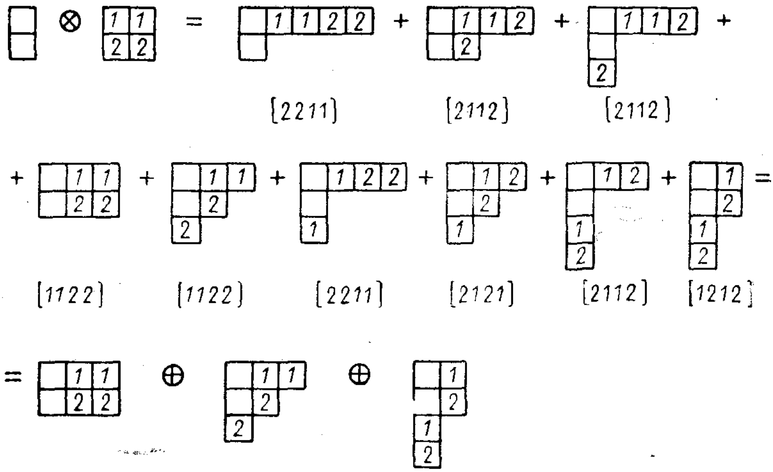


Рис. 26.

(47) Упражнение. Разложите тензорное произведение присоединенных (октетных) представлений алгебры $su(3)$ с помощью схем Юнга. Ответ приведен на рис. 27.

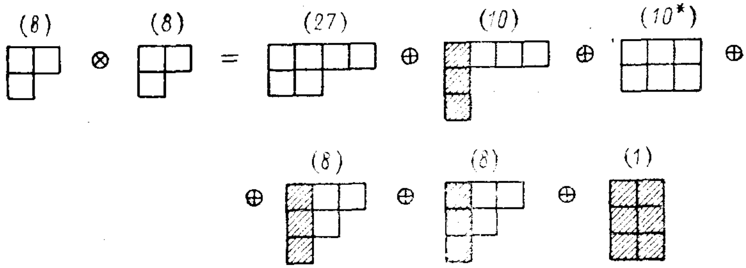


Рис. 27.

(48) Упражнение. Постройте разложения тензорных произведений представлений алгебры $su(5)$, приведенные на рис. 28. ▼

Некоторые свойства неприводимых представлений можно установить по внешнему виду их схем Юнга. Мы уже отмечали, что схемы Юнга системы фундаментальных представлений алгебры $su(n)$ — это столбцы высотой от 1 до $n-1$. Характерный вид имеют также схемы присоединенных представлений. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим тензорное произведение фундаментальных представлений $d^{(0,\ldots,0,1)}$ и $d^{(1,0,\ldots,0)}$.

(49) Упражнение. Используя контраградиентность представлений $d^{(0,\ldots,0,1)}$ и $d^{(1,0,\ldots,0)}$ и формулу (52), покажите, что максимальный вес μ представления $t \equiv d^{(1,0,\ldots,0)} \otimes d^{(0,\ldots,0,1)}$ равен сумме базисных корней. ▼

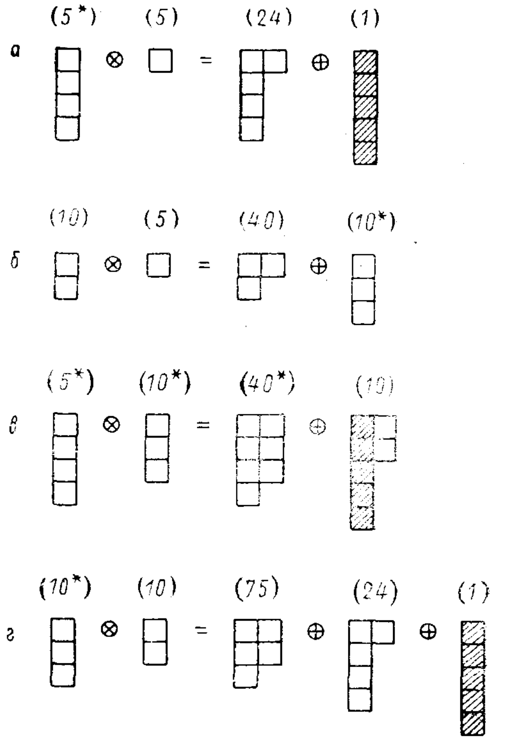


Рис. 28.

«Старший корень» корневой диаграммы алгебры $su(n)$ также равен сумме базисных корней (см. § 5.5). Так что определяемое весом μ неприводимое подпредставление в t эквивалентно присоединенному. Итак, для построения схемы $Y(\mathrm{Ad})$ нужно выделить подпредставление максимальной размерности в тензорном произведении столбца высотой $n-1$ на клетку. С помощью свойства (41) получим параметры схемы $Y(\mathrm{Ad})$: $q_1=2$, $q_2=q_3=\ldots=q_{n-1}=1$. Отметим, что представление t всегда разлагается на два подпредставления — присоединенное и тривиальное (см., например, рис. 28, a).

Наличие тривиального подпредставления является специфической чертой тензорного произведения контраградиентных представлений. Действительно, если представления контраградиентны, то существует форма, инвариантная относительно их тензорного произведения, т. е. тривиальное подпредставление. Если схема $Y(d)$ задается числами $\{q_s\}$, то схема $Y(d_{(*)})$ должна «дополнять» $Y(d)$ до схемы тривиального представления, состоящей из n-клеточных столбцов. Для этого длины строк $\{q_s'\}$ схемы $Y(d_{(*)})$ положим равными

$$q_1'=q_1,\ q_2'=q_1-q_{n-1},\ q_3'=q_1-q_{n-2},\ \ldots,\ q_{n-1}'=q_1-q_2. \quad (60)$$

Можно найти $Y(d_{(*)})$ графически. Впишем $Y(d)$ в прямоугольник со сторонами q_1 и n. Отрежем схему $Y(d)$. Если оставшуюся систему клеток повернуть на 180°, то получится схема $Y(d_{(*)})$.

Очевидно, что $Y(d_{(*)}) = Y(d)$ в том и только в том случае, если $d \approx d_{(*)}$, т. е. $d \approx d_{(*)} = -d^{\mathrm{т}} = -d^*$. В физической литературе такие представления называются просто *самосопряженными*.

(50) Примеры. Присоединенные представления $d^{(1,0,\ldots,0,1)}$ являются самосопряженными: (*8*) в $su(3)$, (*24*) в $su(5)$ и т. д.

(51) Упражнение. Покажите, что индексы $\{m_j\}$ самосопряженных представлений образуют симметричную последовательность $(m_1, m_2, \ldots, m_2, m_1)$. ▼

В заключение обсудим роль различных фундаментальных представлений алгебры $su(n)$. Представления $d^{(1,0,\ldots,0)}$ и $d^{(0,\ldots,0,1)}$ выделены. Они имеют минимальную размерность и могут рассматриваться как определяющие представления алгебры $su(n)$. Мы показали, что тензорных степеней представления $d^{(1,0,\ldots,0)}$ достаточно для построения любого конечномерного неприводимого представления. Очевидно, что то же справедливо и для $d^{(0,\ldots,0,1)}$. Назовем такие представления *порождающими*. С помощью схем Юнга легко установить, какие из фундаментальных представлений

$$d_1 \equiv d^{(1,\,0,\,\ldots,\,0)},\ d_2 \equiv d^{(0,\,1,\,0,\,\ldots,\,0)},\ \ldots,\ d_{n-1} \equiv d^{(0,\,\ldots,\,0,\,1)}$$

являются порождающими.

(52) Фундаментальные представления $d_s(su(n))$ являются порождающими, если и только если числа n и s взаимно простые.

(53) Упражнение. Пользуясь методом схем Юнга, докажите свойство (52). ▼

Для алгебры $su(6)$, например, порождающими являются лишь представления d_1 и d_5. Если же число n простое, то всякое фундаментальное представление алгебры $su(n)$ — порождающее.

§ 5. Ограничения неприводимых представлений алгебр $su(n)$. Частные случаи

Ограничением $d_{A\downarrow B}$ представления $d(A, V)$ алгебры A на подалгебру B назовем ограничение на B гомоморфизма d. Операторы $d_{A\downarrow B}(b)$ действуют в пространстве представления V.

Необходимость изучать ограничения представлений связана с иерархией симметрий. При построении симметрии, обобщающей исходную, алгебра последней оказывается подалгеброй в алгебре новой симметрии. При этом важно знать, какие физические объекты, классифицированные по старой схеме, входят в пространство неприводимого представления (элементарный объект) новой алгебры симметрии.

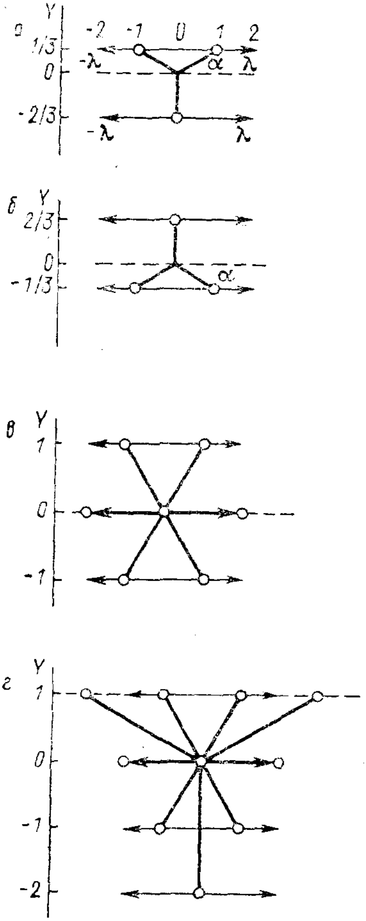
В этом параграфе рассматриваются лишь регулярные вложения, то есть те, что согласованы с разложением Картана исходной алгебры. Они играют фундаментальную роль в физических приложениях. Схемы Дынкина позволяют найти все регулярные полупростые подалгебры в $su(n)$ (а после некоторой модификации схем — во всех простых алгебрах Ли).

Регулярной подалгебре соответствует подпространство корневого пространства исходной алгебры. Если согласовать базисы алгебры A и подалгебры B: $\{v_i^A\}\subset\{v_i^L\}$, то на исходной корневой диаграмме $L(A)$ фиксируются поддиаграмма $L(B)\subset L(A)$ и соответствующее корневое подпространство. Пусть алгебра A имеет корневое пространство W, а подалгебра $B\subset A$ — корневое подпространство $W'\subset W$. Весовая диаграмма ограничения $d_{A\downarrow B}$ равна проекции весовой диаграммы $N(d)$ исходного представления на подпространство W'.

(54) Пример. В алгебре $su(3)$ единственной регулярной полупростой подалгеброй является $su(2)$. Корневая система $L(su(2))$ может быть вложена в $L(su(3))$ тремя неэквивалентными способами в зависимости от того, отождествим ли базисный корень $\boldsymbol{\lambda}$ подалгебры $su(2)$ с $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ или $\boldsymbol{\lambda}_3=\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$ (см. рис. 13 и 14). Пусть $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1$ (рис. 29). Тогда операторы представления $d_{su(3)\downarrow su(2)}\equiv c$ на весовой диаграмме осуществляют сдвиги по горизонтали. Весовая диаграмма $N(d)$ исходного представления расслаивается на поддиаграммы $N(c)$. Вместо проектирования на горизонтальную ось всей $N(d)$ удобнее воспользоваться готовыми инвариантными подпространствами (соответствующими каждой из $N(c)$). На рис. 29, *а, б, г* показано, как диаграммы $N((3))$, $N((3^*))$ и $N((10))$ расслаиваются на диаграммы неприводимых представлений алгебры $su(2)$. Здесь сразу получаем ограничение c представления d разложенным на неприводимые. В общем случае поддиаграммы $N(c)$ соответствуют приводимым представлениям. Их разложение не представляет труда, так как все веса неприводимых представлений $c^J(su(2))$ простые. На рис. 29, *в* показано построение ограничения $c^{(1,1)}$ неприводимого представления $d^{(1,1)}$. Одна из поддиаграмм $N(c)$ соответствует прямой сумме представлений c^1 и c^0. ▼

Графический метод построения ограничений и разложения их на неприводимые компоненты прост и удобен. С его помощью можно получить в тензорной форме базисные элементы каждой неприводимой компоненты.

В пространстве фундаментального представления $d^{(1,0)}$ при стандартной нумерации базисных элементов (см. формулу (27)) операторы $c^{(1,0)}$ не выводят из подпространств с базисными векторами $\{T^1, T^2\}$ и $\{T^3\}$. Следовательно, для всякой тензорной степени представления $d^{(1,0)}$ ограничение $t_{su(3)\downarrow su(2)}$ не мо-



$c^{(1,0)} = c^{1/2} \oplus c^{0}$,
$\tilde{c}^{(1,0)} = (2, 1/3) \oplus (1, -2/3)$.

$c^{(0,1)} = c^{1/2} \oplus c^{0}$,
$\tilde{c}^{(0,1)} = (2, -1/3) \oplus (1, 2/3)$

$c^{(1,1)} = c^{1} \oplus c^{1/2} \oplus c^{1/2} \oplus c^{0}$,
$\tilde{c}^{(1,1)} = (3,0) \oplus (2,1) \oplus (2,-1) + (1,0)$.

$c^{(3,0)} = c^{3/2} \oplus c^{1} \oplus c^{1/2} \oplus c^{0}$,
$\tilde{c}^{(3,0)} = (4,1) \oplus (3,0) \oplus (2,-1) \oplus (1,-2)$

Рис. 29.

жет изменить в тензоре $T^{i_1, \ldots, i_N}$ число индексов со значением $i=3$. Из диаграммы $N(d^{(1,0)})$ видно, что это число однозначно задает инвариантные подпространства с поддиаграммами $N(c)$. Проиллюстрируем это на примере присоединенного представления $d^{(1,1)}$. Классифицируем его тензоры $\{T^{[i_1 \{i_2] i_3\}}\}$ по указанному признаку:

$$\left\{T^{[1\{2]2\}},\ T^{[2\{1]1\}}\right\},$$
$$\left\{T^{[3\{2]1\}} + T^{[3\{1]2\}},\ T^{[3\{1]1\}},\ T^{[3\{2]2\}},\ T^{[1\{2]3\}}\right\},$$
$$\left\{T^{[1\{3]3\}},\ T^{[2\{3]3\}}\right\}.$$

Легко убедиться, что тензор $T^{[1\{2]3\}}$ аннулируется операторами $c^{(1,1)}(l)$. Он порождает пространство скалярного подпредставления c^0. Три других тензора того же типа задают базис подпредставления c^1. Первое и третье подмножества порождают подпространства спинорных представлений $c^{1/2}$.

Поскольку ранг алгебр $su(3)$ и $su(2)$ отличается на единицу, в подалгебре Картана алгебры $su(3)$ существует одномерное подпространство элементов, коммутирующих с фиксированной подалгеброй $su(2)$, — подалгебра $u(1)$. Вместе с $su(2)$ она составляет подалгебру $A\approx su(2)\oplus u(1)\in su(3)$, максимальную среди содержащих $su(2)$ в качестве прямого слагаемого.

Для выяснения структуры ограничения $d_{su(3)\downarrow A}$ обобщим понятие тензорного произведения представлений. Пусть $c_1(A_1, V_1)$ и $c_2(A_2, V_2)$ — представления алгебр A_1 и A_2 соответственно. Назовем их тензорным произведением представление t алгебры $A_1\oplus A_2$ в пространстве $V_1\otimes V_2$:

$$t((a_1, a_2)) = c_1(a_1)\otimes I + I\otimes c_2(a_2). \tag{61}$$

(55) Упражнение. Докажите, что $t=c_1\otimes c_2$ неприводимо тогда и только тогда, когда $c_1(A_1)$ и $c_2(A_2)$ неприводимы. ▼

Если $\{c_1\}$ и $\{c_2\}$ — полные системы неприводимых представлений алгебр A_1 и A_2, то множество $\{c_1\otimes c_2\}$ есть полная система неприводимых представлений алгебры $A\approx A_1\oplus A_2$. Отметим, что ограничение неприводимого представления t на одно из прямых слагаемых, например $t_{A\downarrow A_1}$, состоит из операторов $c_1(a_1)\otimes I$. Это означает, что представление $t_{A\downarrow A_1}$ эквивалентно прямой сумме представлений c_1 с кратностью $\dim c_2$. Ограничение $t_{A\downarrow A_1}$ неприводимо в том и только в том случае, когда c_2 одномерно.

Эрмитовы неприводимые (одномерные) представления алгебры $u(1)$ реализуются операторами умножения на действительные числа. Выберем базисный элемент подалгебры $u(1)\subset su(3)$ в виде $b_Y={}^1/_2(b_1+2b_2)$ (см. (22)). Пусть $e_1(u(1))$ и $e_2(u(1))$ — неприводимые представления, причем

$$Y_1 v = e_1(b_Y)v = y_1 v,\ \ Y_2 v = e_2(b_Y)v = y_2 v \quad (y_1,\ y_2\in R).$$

Представления e_1 и e_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $y_1=y_2$, т. е. множество неэквивалентных неприводимых эрмитовых представлений алгебры $u(1)$ можно параметризовать действительными числами $y\in R$: $\{e^{(y)}\}$.

Построим ограничение $\tilde{c}^{(m_1,\, m_2)} = d^{(m_1,\, m_2)}_{su(3)\downarrow A}$. Всякое подпространство, неприводимое относительно ограничения $c^{(m_1,\, m_2)} = d^{(m_1,\, m_2)}_{su(3)\downarrow su(2)}$, составляет прямую сумму эквивалентных неприводимых представлений $e^{(y)}$. Если известно разложение представления $c^{(m_1,\, m_2)}$ на неприводимые компоненты c^J, то для построения неприводимых компонент ограничения $\tilde{c}^{(m_1,\, m_2)}$

достаточно для каждого c^J найти соответствующее ему представление $e^{(y)}$. Индексы представлений $e^{(y)}$ (собственные значения оператора Y) легко найти по весовой диаграмме, поделив на $\sqrt{3}$ ортогональные проекции соответствующих весов на ось $\boldsymbol{\lambda}'$ ($\boldsymbol{\lambda}'$ — вектор, дуальный к элементу Y). В физической литературе представления $c^J \otimes e^{(y)}$ нумеруют парой чисел ($\dim c^J$, y). В этих обозначениях ограничения $\widetilde{c}^{(1,0)}$ и $\widetilde{c}^{(0,1)}$ имеют следующую структуру:

$$\widetilde{c}^{(1,0)} = \left(2, \ \frac{1}{3}\right) \oplus \left(1, \ -\frac{2}{3}\right),$$
$$\widetilde{c}^{(0,1)} = \left(1, \frac{2}{3}\right) \oplus \left(2, \ -\frac{1}{3}\right).$$

Эти и подобные им разложения приведены на рис. 29.

Вернемся к общему случаю $L \supset A = A_1 \oplus A_2$. Пусть d и d' — представления алгебры L, c и c' — их ограничения на A. Рассмотрим ограничение $c'' \equiv t_{L\downarrow A}$ тензорного произведения $t = d \otimes d'$. Если известны разложения $c = \oplus\ (c_1 \otimes c_2)$ и $c' = \oplus\ (c_1 \otimes c_2)$, то неприводимые компоненты представления c'' можно построить, не прибегая к помощи весовой диаграммы $N(t)$.

(56) Упражнение. Проверьте следующие равенства:

$$c'' = c \otimes c', \tag{62}$$
$$(c_1 \otimes c_2) \otimes (c_1' \otimes c_2') = \left((c_1 \otimes c_1') \otimes (c_2 \otimes c_2')\right). \ \blacktriangledown \tag{63}$$

(57) Ограничения $\widetilde{c}$ неприводимых представлений $d(su(3))$ позволяют однозначно классифицировать базисные векторы пространства представления d. Базисный элемент v^i полностью характеризуется неприводимой компонентой $c^J \otimes e^{(y)}$, которой он принадлежит, и весом j в пространстве представления c^J. Итак, чтобы задать вектор v^i, достаточно указать три числа: J, j и y. $\blacktriangledown$

Если ранг алгебры больше двух, графическое изображение весовых диаграмм становится затруднительным. В этой ситуации полезно использовать свойства тензорных произведений, полученные в упражнении **(56)**.

Рассмотрим для определенности алгебру $su(5)$. Схема Дынкина позволяет сразу найти простые подалгебры, которые можно вложить в $su(5)$: это $su(4)$, $su(3)$ и $su(2)$. Так как базисные корни $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ ортогональны корню $\boldsymbol{\lambda}_4$ (не соединены с ним линиями), то в $su(5)$ можно вложить полупростую подалгебру $su(3) \oplus su(2)$. Ранг алгебры $su(3) \oplus su(2)$ на единицу меньше ранга алгебры $su(5)$. Следовательно, как и в предыдущем случае, в подалгебре Картана алгебры $su(5)$ существует подалгебра $u(1)$, коммутирующая с $su(3) \oplus su(2)$. Прямая сумма $A \equiv su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ — максимальная подалгебра в $su(5)$, содержащая прямое слагаемое $su(3) \oplus su(2)$.

Именно эта подалгебра представляет интерес с точки зрения объединенной $su(5)$-симметрии слабых и электромагнитных взаимодействий (см. § 8.4).

Начнем с ограничения фундаментального представления $d \equiv d^{(1,0,0,0)} \equiv (5)$ на подалгебру $A: c \equiv d_{su(5)\downarrow A}$.

Выпишем веса фундаментального представления d (см. формулу (52)):

$$\begin{gathered} \nu_1 = \alpha, \quad \nu_2 = \alpha - \lambda_1, \quad \nu_3 = \alpha - \lambda_1 - \lambda_2, \\ \nu_4 = \alpha - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3, \quad \nu_5 = \alpha - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4. \end{gathered} \tag{64}$$

Здесь α — первый фундаментальный вес. Будем считать λ_1 и λ_2 базисными корнями подалгебры $su(3)$, а λ_4 — базисным корнем подалгебры $su(2)$.

Вектор

$$b' = \frac{1}{\sqrt{15}}(2b_1 + 4b_2 + 6b_3 + 3b_4)$$

коммутирует с подалгеброй $su(3) \oplus su(2)$, поскольку дуальный к нему вектор λ' удовлетворяет условию $(\lambda', \lambda_{1,2,4}) = 0$. В приложениях физический смысл приписывается оператору

$$Y \equiv d\left(-\frac{\sqrt{15}}{3} b'\right) = -d\left(\frac{2}{3} b_1 + \frac{4}{3} b_2 + 2b_3 + b_4\right). \tag{65}$$

Его собственными значениями y мы и будем нумеровать неприводимые представления $e^{(y)}$ алгебры $u(1)$.

Всякая неприводимая компонента представления c эквивалентна тензорному произведению $t \equiv d^{(m_1, m_2)} \otimes c^J \otimes e^{(y)}$. Его ограничение на любое из прямых слагаемых A_i в A представимо в виде прямой суммы эквивалентных неприводимых представлений алгебры A_i. Кратность неприводимой компоненты равна произведению размерностей двух других тензорных сомножителей в t. Как и раньше, неприводимые представления t будем нумеровать тройкой чисел $(\dim d^{(m_1, m_2)},\ \dim c^J,\ y)$.

Для определения тензорных сомножителей $d^{(m_1, m_2)}$, c^J и $e^{(y)}$ нужно предварительно построить ограничения $d_{su(5)\downarrow su(3)}$ и $d_{su(5)\downarrow su(2)}$ и разложить их на неприводимые компоненты. Затем в пространстве V исходного представления $d(su(5))$ выделяются подпространства W_k неприводимых подпредставлений $d^{(m_1, m_2)} \otimes c^J$ алгебры $su(3) \oplus su(2)$. Наконец, в каждом из подпространств W_k определяется собственное значение оператора $d(Y)$.

Если на весовой диаграмме (64) проследить действие операторов $d_{su(5)\downarrow su(3)}$ (см. свойство (2)), то выделятся три неприводимые поддиаграммы $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$, $\{\nu_4\}$ и $\{\nu_5\}$:

$$d_{su(5)\downarrow su(3)} = (3) \oplus (1) \oplus (1). \tag{66}$$

Аналогично для ограничения на подалгебру $su(2)$ получим

$$d_{su(5)\downarrow su(2)} = (1) \oplus (1) \oplus (1) \oplus (2). \tag{67}$$

Сравнивая разложения (66) и (67), находим неприводимые подпредставления $d(su(3) \oplus su(2))$ в виде тензорных произведений $t = d^{(m_1, m_2)} \otimes c^J$:

$$d_{su(5)\downarrow (su(3) \oplus su(2))} = (3, 1) \oplus (1, 2). \tag{68}$$

По формулам (5.22), (2) и (64) вычислим собственные значения y для неприводимых подпространств в (68). Теперь можем записать окончательное разложение для ограничения c:

$$c \equiv (5)_{\downarrow A} = \left(3, 1, -\frac{2}{3}\right) \oplus (1, 2, 1). \tag{69}$$

Итак, базис пространства представления d состоит из $su(3)$-триплета, где каждая компонента преобразуется по скалярному представлению подалгебры $su(2)$ и является собственным вектором оператора Y с $y = -{}^2/_3$ и $su(2)$-дублета, каждая компонента которого ведет себя как $su(3)$-скаляр с $y = +1$.

Отражение в начале координат преобразует диаграмму $N(5)$ в диаграмму $N((5^*))$ представления $d^{(0, 0, 0, 1)}$. При этом поддиаграммы ограничений $d_{su(5)\downarrow su(3)}$ переходят в поддиаграммы для контраградиентных представлений, поддиаграммы ограничений $d_{su(5)\downarrow su(2)}$ не изменяются, а знак чисел y меняется. Так что разложение представления $d^{(0, 0, 0, 1)}_{su(5)\downarrow A}$ следует из формулы (69):

$$(5^*)_{\downarrow A} = \left(3^*, 1, \frac{2}{3}\right) \oplus (1, 2, -1). \tag{70}$$

Разложение ограничений других неприводимых представлений $d^{(m_1, \ldots, m_4)}$ можно найти, не обращаясь к весовым диаграммам. Так, следующее фундаментальное представление $(10) \equiv d^{(0, 1, 0, 0)}$ содержится в тензорном произведении $(5) \otimes (5) = (10) \oplus (15)$. Правила (62), (63) приводят к разложению

$$(10)_{\downarrow A} \oplus (15)_{\downarrow A} = \left(3 \otimes 3, 1, -\frac{4}{3}\right) \oplus \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus (1, 2 \otimes 2, 2).$$

Пространства представлений (10) и (15) можно отделить, если учесть, что первое состоит из антисимметричных тензоров $T^{[i, k]}$, а второе — из симметричных $T^{\{i, k\}}$ (см. схемы Юнга, рис. 24). Следовательно,

$$(10)_{\downarrow A} = \left(3^*, 1, -\frac{4}{3}\right) \oplus \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus (1, 1, 2), \tag{71}$$

$$(15)_{\downarrow A} = \left(6, 1, -\frac{4}{3}\right) \oplus \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \oplus (1, 3, 2). \tag{72}$$

С помощью схем Юнга можно выяснить структуру произвольного представления алгебры $su(5)$. Однако чем сложнее схема Юнга, тем более громоздкой становится процедура выделения неприводимых подпространств $S(Y)$. Вычисления можно упростить, применяя тензорный метод к каждой неприводимой компоненте, кроме «старшей».

Найдем, например, разложение ограничения $d^{(0,\,1,\,1,\,0)}_{su(5)\downarrow A}$. Представление $d^{(0,\,1,\,1,\,0)} \equiv (75)$ содержится в тензорном произведении $(10^*) \otimes (10) = (75) \oplus (24) \oplus (1)$. Ограничение синглета имеет очевидную структуру

$$(1)_{\downarrow A} = (1,\ 1,\ 0).$$

Представление $(24) \equiv d^{(1,\,0,\,0,\,1)}$ в свою очередь содержится в тензорном произведении $(5^*) \otimes (5) = (25) \oplus (1)$. Подставим в эту формулу выражения (69) и (70), воспользуемся правилами (62), (63) и вычтем компоненту $(1,\ 1,\ 0)$:

$$(24)_{\downarrow A} = (8,\ 1,\ 0) \oplus (1,\ 1,\ 0) \oplus \left(3^*,\ 2,\ +\frac{5}{3}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(3,\ 2,\ -\frac{5}{3}\right) \oplus (1,\ 3,\ 0).$$

Ту же процедуру применим к произведению $(10^*) \otimes (10)$ и получим искомое разложение

$$(75)_{\downarrow A} = \left(3^*,\ 1,\ -\frac{10}{3}\right) \oplus \left(6^*,\ 2,\ -\frac{5}{3}\right) \oplus (8,\ 3,\ 0) \oplus$$
$$\oplus \left(3,\ 2,\ -\frac{5}{3}\right) \oplus (8,\ 1,\ 0) \oplus (1,\ 1,\ 0) \oplus$$
$$\oplus \left(6,\ 2,\ \frac{5}{3}\right) \oplus \left(3^*,\ 2,\ \frac{5}{3}\right) \oplus \left(3,\ 1,\ \frac{10}{3}\right).$$

(58) Упражнение. Разложите ограничение $d^{(1,\,1,\,0,\,0)}_{su(5)\downarrow A}$ на неприводимые компоненты.

Ответ.

$$(40)_{\downarrow A} = (8,\ 1,\ -2) \oplus \left(6,\ 2,\ -\frac{1}{3}\right) \oplus \left(3^*,\ 2,\ -\frac{1}{3}\right) \oplus$$
$$\oplus \left(3,\ 3,\ \frac{4}{3}\right) \oplus \left(3,\ 1,\ \frac{4}{3}\right) \oplus (1,\ 2,\ 3). \ \blacktriangledown$$

Отметим, что ограничения $d_{su(5)\downarrow A}$ не позволяют однозначно классифицировать векторы пространства неприводимого представления d даже с привлечением ограничения $d^{(m_1,\,m_2)}_{su(3)\downarrow(su(2)\oplus u(1))}$ в каждом тензорном произведении $d^{(m_1,\,m_2)} \otimes c^J \otimes e^{(y)}$. Эту ситуацию проще продемонстрировать на примере алгебры $su(4)$. В ограничении $d_{su(4)\downarrow su(2)\oplus su(2)\oplus u(1)}$ вектор пространства представления характеризуется числами J_1, J_2, y, j_1 и j_2. Этого, однако, недостаточно для его однозначной фиксации. Обратимся к ограничению $d_{su(4)\downarrow su(3)\oplus u(1)}$. Здесь базисный вектор задается набором из шести чисел: m_1, m_2, y_1, y_2, J, j (учтена редукция $su(3)\downarrow su(2)\oplus u(1)$). Сравним эти два ограничения. Неприводимые представления $d(su(3))$ имеют кратные веса, тогда как все веса $d(su(2)\oplus su(2))$ простые. Следовательно, ограничение $d_{su(4)\downarrow su(2)\oplus su(2)\oplus u(1)}$ не позволяет до конца расщепить кратные веса неприводимого представления алгебры $su(5)$. Добиться однозначности можно, только рассматривая последовательность вложенных друг в друга максимальных простых подалгебр. Окончательный результат приведем без доказательства.

(59) Утверждение. Пусть d — неприводимое представление простой алгебры L ранга r. Построим цепочку простых подалгебр $L\supset L_1\supset L_2\supset\ldots\supset L_{r-1}$ ранга $r-1$, $r-2$, ..., 1 и набор ограничений $d_{L\downarrow L_i}\equiv c_i$. Разложим каждое из ограничений c_i на неприводимые компоненты. Для расщепления кратного веса ν представления d достаточно указать, пространству какого неприводимого подпредставления принадлежит вектор с весом ν в каждом из ограничений c_i. ▼

Сколько чисел нужно задать для фиксации вектора? Неприводимое представление алгебры ранга r задается r числами (например, $\{m_j\}$), и r параметров определяют вес ν. Неприводимое подпредставление подалгебры L_i задается $(r-i)$ числами. В результате имеем

$$R=2r+\sum_{i=1}^{r-1}(r-i)=\frac{r(r+3)}{2}. \tag{73}$$

Для алгебры $su(3)$ величина $R=5: m_1$, m_2, ν^1, ν^2 (координаты веса ν), J. То же число параметров было получено при использовании ограничения на подалгебру $su(2)\oplus u(1)$. Здесь оба пути приводят к эквивалентным результатам.

Для алгебры $su(5)$ величина $R=14$. Ограничение на подалгебру $A\equiv su(3)\oplus su(2)\oplus u(1)$ (с последующей редукцией $su(3)\downarrow su(2)\oplus u(1)$) дает лишь 12 параметров. Это означает, что в общем случае ограничение $d_{su(5)\downarrow A}$ содержит кратные неприводимые компоненты, которые при таком подходе не удается различить. Этот эффект проявляется лишь при большой размерности представления d. В физических приложениях, где эта размерность обычно мала, для идентификации вектора достаточно рассмотреть ограничение на подалгебру A (см. гл. 8).

§ 6. Элементы Казимира. Универсальная обертывающая алгебра. Операторы Казимира и их собственные значения

Неприводимые представления простых алгебр Ли нумеровались до сих пор координатами старшего веса. Другой способ классификации представлений основан на использовании собственных значений операторов Казимира. Он применим и в случае неполупростых алгебр. Главное же его преимущество состоит в том, что операторы Казимира реализуют инвариантные квантовомеханические наблюдаемые.

Пусть $A=([\ ],\ V)$ — алгебра Ли, $T(V)$ — ассоциативная тензорная алгебра (см. (2.115)). Построим двусторонний идеал $J\subset T(V)$, порождаемый элементами

$$v_1\otimes v_2-v_2\otimes v_1-[v_1,\ v_2]\quad (v_1,\ v_2\in V). \tag{74}$$

Факторалгебра $U(A)\equiv T(V)/J$ называется *универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли* A. Произведение элементов $u_1,\ u_2\in U(A)$ записывается как u_1u_2.

Всякое представление $d(A,\ W)$ алгебры A естественным образом продолжается до представления $d(T(V),\ W)$ тензорной алгебры $T(V)$:

$$d(v_1\otimes v_2\otimes\ldots\otimes v_i)=d(v_1)\,d(v_2)\ldots d(v_i). \tag{75}$$

При этом оператор, соответствующий элементу (74), обращается в нуль: $d_{T\downarrow J}=0$, и формула (75) определяет представление универсальной обертывающей алгебры $d(U(A),\ W)$.

Пусть $\{v_i\}$ — базис алгебры A, $\{u_i\}$ — его образ при естественном вложении пространства V в $U(A)$. Мономы

$$\begin{gathered}1,\quad u_i,\ u_{i_1}u_{i_2},\ \ldots,\ u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_r},\ \ldots,\\ i_1\leqslant i_2,\ \ldots,\ i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_r,\ \ldots\end{gathered} \tag{76}$$

образуют базис универсальной обертывающей алгебры $U(A)$ (теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта [11, гл. 5, § 2]). В приложениях часто оказывается полезным базис, составленный из симметризованных тензоров

$$1,\ u_i,\ {}^1/_2(u_iu_k+u_ku_i),\ \ldots,\ \frac{1}{r!}\sum_{\sigma(i_1,\ldots,i_r)}u_{i_1}\ldots u_{i_r},\ \ldots \tag{77}$$

Здесь суммирование производится по всем перестановкам σ индексов $(i_1,\ \ldots,\ i_r)$. Нетрудно убедиться, что базисы (76) и (77) эквивалентны. Как во всякой ассоциативной алгебре в $U(A)$ можно ввести композицию $[u,\ u']=uu'-u'u$ и превратить алгебру $U(A)$ в бесконечномерную алгебру Ли.

Элементы C центра $Z(U(A))$ универсальной обертывающей алгебры называются *элементами Казимира* алгебры A.

Доопределим присоединенные операторы ad_v алгебры A на пространстве алгебры $U(A)$ по формуле $\mathrm{ad}_u u'=[u,\ u']$. Чтобы элемент C алгебры $U(A)$ принадлежал центру $Z(U(A))$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathrm{ad}_{u_i}C=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n=\dim V.$$

Запишем разложение для элемента Казимира C в базисе (81):

$$C = \mathrm{const} + g^i u_i + g^{ik} u_i u_k + \ldots \tag{78}$$

Под действием присоединенных операторов ad_u члены разложения будут вести себя как тензоры соответствующего ранга. Каждое слагаемое в выражении (78) аннулируется оператором ad_u. Таким образом, каждый член этого разложения является инвариантным тензором над пространством V представления $\mathrm{Ad}\, A$, т. е. элементом Казимира.

Существует стандартный метод построения элементов Казимира для простых комплексных алгебр Ли.

Для всякой простой алгебры A нам известен инвариантный тензор третьего ранга. Его компоненты — структурные константы алгебры: c_{ik}^{l}. Он ковариантен по двум нижним индексам и контравариантен по верхнему (относительно Ad). Сворачивая индексы в произведении матриц структурных констант, можно построить компоненты $g_{i_1, \ldots, i_r}$ инвариантного тензора любого ранга. С помощью формы $\mathscr{K}$ поднимем индексы базисных векторов (77) и получим инвариантные элементы Казимира в виде $g_{i_1, \ldots, i_r} u^{i_1} \ldots u^{r}$.

В простой алгебре A элемент Казимира первого порядка $C_1 = g_i u^i$ всегда равен нулю (иначе существовало бы одномерное инвариантное подпространство в V). Компоненты инвариантного тензора второго ранга совпадают с матричными элементами формы Киллинга:

$$C_2 = g_{ik} u^i u^k \equiv \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, v_i \,\mathrm{ad}\, v_k) u^i u^k = u^i u_i. \tag{79}$$

Аналогично получают элементы Казимира любого порядка:

$$C_r = g_{i_1 \ldots i_r} u^{i_1} \ldots u^{i_r} = c_{i_1 k}^{l_1} c_{i_2 l_1}^{l_2} \ldots c_{i_r l_{r-1}}^{k} u^{i_1} \ldots u^{i_r} =$$
$$= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{u_{i_1}} \mathrm{ad}_{u_{i_2}} \ldots \mathrm{ad}_{u_{i_r}}) u^{i_1} \ldots u^{i_r}. \tag{80}$$

Выберем в пространстве V алгебры A ортонормированный базис $\{b_i, x_j, y_j\}$, согласованный с разложением Картана — Вейля (формула (5.17)). В этом базисе элемент Казимира C_2 имеет стандартный вид

$$C_2 = \hat{f}^{i_1 i_2} b_{i_1} b_{i_2} + \sum_j (y_j x_j + y_j x_j), \tag{81}$$

где $\hat{f}$ — ограничение формы $\mathscr{K}$ на V_B. Отметим, что $\hat{f}$ можно диагонализовать (свойство (**5.38**)).

(**60**) Упражнение. Получите формулу (81), записав форму $\mathscr{K}$ в базисе $\{b_i, x_j, y_j\}$ и воспользовавшись свойством (**5.37**). ▼

Помимо формы $\mathscr{K}$ каждому неприводимому представлению $d(A, W)$ можно сопоставить инвариантную форму следа (см. § 5.1) $(v_i, v_k) = \mathrm{Tr}(d(v_i) d(v_k))$. Форма следа неприводимого представления невырождена. В самом деле, ядро инвариантной формы составляет идеал алгебры A и, следовательно, тривиально. Поскольку инвариантная билинейная симметричная форма на V единственна [35, т. III, гл. 3, § 10], то форма следа всякого неприводимого представления d пропорциональна $\mathcal{K}$. Множитель пропорциональности зависит лишь от представления d.

Мы убедились, что в качестве компонент инвариантного тензора $g_{ik}u^i u^k$ можно выбрать матричные элементы формы следа любого неприводимого представления d алгебры A.

Приведенные выше рассуждения автоматически переносятся на элементы Казимира произвольного порядка. Сформулируем окончательный результат.

(61) Утверждение. Пусть $d(A, W)$ — произвольное неприводимое представление простой алгебры A. Тогда числа

$$g_{i_1 \ldots i_r} = \operatorname{Tr}\left(d(v_{i_1}) \ldots d(v_{i_r})\right) \tag{82}$$

— компоненты инвариантного элемента C_r. ▼

Формула (82) облегчает построение элементов Казимира, если в качестве d выбрать представление минимальной размерности.

(62) Упражнение. Постройте элемент C_2 алгебры $sl(3, C)$ с помощью фундаментального представления $c^{(1,0)}$ (выражения (28)).

Ответ.

$$C_2 = \frac{2}{3}\left(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2\right) + \sum_{i=1}^{3}(x_i y_i + y_i x_i). \ ▼$$

В разложении (78) (см. также (80)) число инвариантных слагаемых неограничено. Среди них можно выделить конечный набор порождающих элементов C так, что всякий элемент Казимира будет их алгебраической функцией.

(63) Теорема. Число элементов, порождающих центр $Z(U)$ обертывающей алгебры $U(A)$ простой алгебры Ли A, равно рангу алгебры A.

Доказательство этого утверждения см. в [3, гл. VIII, § 8]. ▼

Как мы уже отмечали, всякое представление $d(A, W)$ продолжается до представления $d(U(A), W)$ универсальной обертывающей алгебры. Оператор $d(C)$, сопоставляемый элементу Казимира C в представлении $d(U(A), W)$, называется *оператором Казимира* в представлении d.

Порождающими операторами Казимира назовем операторы $d(C)$, где C — порождающие элементы центра $Z(U)$. Всякий оператор Казимира в конечномерном представлении d имеет вид $d(C) = cI$ (лемма Шура II).

(64) Теорема. Множество классов эквивалентности конечномерных неприводимых представлений простой алгебры A и множество наборов собственных значений порождающих операторов Казимира находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Доказательство см. в [35, гл. 5, § 1]. ▼

Итак, набор собственных значений порождающих операторов Казимира может служить для нумерации неприводимых представлений простых алгебр так же, как и координаты старшего веса.

Продемонстрируем на примере алгебры $sl(n, C)$, как связаны собственные значения операторов C_l с числами $m_1, \ldots$ $\ldots, m_r$ (см. формулу (10)).

Воспользуемся базисом Окубо в алгебре $sl(n, C)$ (см. § 4.3) и с помощью формулы (86) построим элемент Казимира l-го порядка. Его удобно факторизовать в виде

$$C_l = A_{k_1}^{k_l} A_{k_2}^{k_1} \ldots A_{k_{l-1}}^{k_{l-2}} A_{k_l}^{k_{l-1}} = F_{(l-1)\, k_{l-1}}^{k_l} A_{k_l}^{k_{l-1}}. \tag{83}$$

Формулы (4.22) позволяют убедиться, что под действием присоединенных операторов $\mathrm{ad}(A_k^i)$ элемент $F_{(l-1)}{}_q^p$ ведет себя как A_q^p. Иными словами, свертка индексов в тензоре $F_{(l-1)}$ выделяет в тензорном произведении $l-1$ присоединенных представлений неприводимую компоненту, эквивалентную $\mathrm{Ad}(sl(n, C))$.

Пусть $d^{(m_1, \ldots, m_{n-1})}$ — неприводимое представление алгебры $sl(n, C)$ и w — его старший вектор. Подействуем на w оператором Казимира

$$d(C_l)\, w = d\left(F_{(l-1)\, q}^{p}\right) d\left(A_p^q\right) w =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} d\left(F_{(l-1)\, p}^{p}\right) d\left(A_p^p\right) w + \sum_{p \neq q} d\left(F_{(l-1)\, q}^{p}\right) d\left(A_p^q\right) w. \tag{84}$$

Положительным корням α_{pq}, $p > q$, алгебры $sl(n, C)$ соответствуют базисные элементы A_q^p (см. упражнение (5.62)). Поэтому во втором слагаемом выражения (84) остается сумма вида

$$\sum_{q<p} d\left(F_{(l-1)\, q}^{p}\right) d\left(A_p^q\right) w = \sum_{q<p} d\left(\left[F_{(l-1)\, q}^{p}, A_p^q\right]\right) w =$$

$$= \sum_{q<p} \left(d\left(F_{(l-1)\, q}^{q}\right) - d\left(F_{(l-1)\, p}^{p}\right)\right) w.$$

Выразим матрицы Окубо A_p^p через базисные элементы $\{b_j\}$ подалгебры Картана (в базисе Вейля):

$$A_p^p = \frac{1}{n}\left(-b_1 - 2b_2 - 3b_3 - \ldots - (p-1)\, b_{p-1} + \right.$$

$$\left. + (n-p)\, b_p + (n-(p+1))\, b_{p+1} + \ldots + b_{n-1}\right). \tag{85}$$

Это позволит найти зависимость собственных значений $\widetilde{m}_p$, $d(A_p^p)\, w = \widetilde{m}_p w$ от чисел $\{m_j\}$ — собственных значений операторов $\{d(b_j)\}$:

$$d(C_l)w = \sum_{p=1}^{n} \widetilde{m}_p\, d\left(F^p_{(l-1)\,p}\right)w + \sum_{p=1}^{n} (n+1-2p)\, d\left(F^p_{(l-1)\,p}\right)w =$$
$$= \sum_p (\widetilde{m}_p + n + 1 - 2p)\, d\left(F^p_{(l-1)\,p}\right)w. \qquad (86)$$

Вектор $d(F_{(s)}{}^p_p)w$ допускает редукцию по s:

$$d\left(F^p_{(s)\,p}\right)w = \sum_q d\left(F^p_{(s-1)\,q}\right) d\left(A^q_p\right)w = d\left(F^p_{(s-1)\,p}\right) d\left(A^p_p\right)w +$$
$$+ \sum_{q<p} d\left(\left[F^p_{(s-1)\,q},\ A^q_p\right]\right)w = (\widetilde{m}_p - (p-1))\, d\left(F^p_{(s-1)\,p}\right)w +$$
$$+ d\left(F^1_{(s-1)\,1}\right)w + \ldots + d\left(F^{p-1}_{(s-1)\,p-1}\right)w \equiv \sum_{q=1}^{n} a_{pq}\, d\left(F^q_{(s-1)\,q}\right)w. \quad (87)$$

Матрица a чисел a_{pq}

$$a_{pq} = \delta_{pq}(\widetilde{m}_p - (p-1)) + \sigma_{pq} \left(\sigma_{pq} = \begin{cases} 1, & q < p, \\ 0, & q \geqslant p, \end{cases} \quad p, q = 1, \ldots, n \right) \qquad (88)$$

обладает свойствами

$$\sum_{p=1}^{n} a_{pq} = \widetilde{m}_q + n + 1 - 2q,$$
$$\sum_{q=1}^{n} a_{pq} = \widetilde{m}_p, \qquad (89)$$

что позволяет произвести полную редукцию операторов $d(F_{(l-1)}{}^p_p)$ в соотношении (86):

$$d(C_l)w = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{qp}\, d\left(F^p_{(l-1)\,p}\right)w =$$
$$= \sum_{q,\,p} (a^l)_{qp}\, w = c_l(m_1, \ldots, m_{n-1})w. \qquad (90)$$

Итак, собственное значение c_l оператора Казимира $d(C_l)$ равно сумме матричных элементов l-й степени матрицы a. Легко проверить, что любые нетривиальные функции $c_{l_1}, c_{l_2}, \ldots$ $\ldots, c_{l_{n-1}}$, где все l_i различны, независимы. В качестве набора порождающих элементов Казимира можно выбрать множество $C_2, C_3, \ldots, C_n$ (элемент C_1 тривиален) и нумеровать неприводимые представления числами $c_2, \ldots, c_n$.

Если выразить матрицы A^p_q через матрицы Окубо вещественной формы $sl(n, C)_{\downarrow R}$ и подставить эти выражения в формулу (83), то получим элемент Казимира алгебры $sl(n, C)_{\downarrow R}$.

При переходе к вещественной форме собственные значения c_l не изменяются, поскольку не меняются собственные значения $\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ операторов $d(b_j)$.

(65) Пример. Порождающий элемент Казимира алгебры $sl(2, C)$

$$C_2 = A^p_q A^q_p = {}^1/_2\, b^2 + yx + xy$$

в базисе $\{l_1, l_2, l_3\}$ компактной вещественной формы $su(2)$ (см. (5.25), **(6.9)**) имеет вид

$$C_2 = 2\sum_{i=1}^{3} l_i^2. \tag{91}$$

С помощью формулы (85) найдем числа $\widetilde{m}_p$

$$\widetilde{m}_1 = \frac{1}{2} m = J, \quad \widetilde{m}_2 = -\frac{1}{2} m = -J$$

и построим матрицу a (см. (88)). Формула (90) дает ответ, хорошо известный из курса квантовой механики:

$$c_2 = 2J(J+1). \ \blacktriangledown \tag{92}$$

(66) Упражнение. Алгебра $sl(3, C)$ имеет два порождающих элемента Казимира: $C_2 = A^p_q A^q_p = {}^1/_2\, \lambda_j \lambda_j$, $C_3 = A^p_q A^q_j A^j_p = {}^1/_2\, d^{abc} \lambda_a \lambda_b \lambda_c$. Получите собственые значения операторов Казимира в представлении $d^{(m_1, m_2)}$.

Ответ.

$$c_2 = \frac{2}{3}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 + 3m_1 + 3m_2\right), \tag{93}$$

$$c_3 = \frac{1}{9}(m_1 - m_2)(2m_1 + m_2 + 3)(2m_2 + m_1 + 3). \ \blacktriangledown \tag{94}$$

С помощью матриц Окубо можно построить стандартные выражения для элементов Казимира других комплексных простых классических алгебр Ли и их вещественных форм [2].

В § 5.6 (теорема **(5.63)**) было показано, что всякая простая вещественная алгебра Ли есть либо вещественная форма, либо овеществление простой комплексной алгебры Ли. Зная элементы C_r комплексной простой алгебры Ли A, можно построить элементы Казимира ее овеществления $(A)_R$. Рассмотрим, например, элемент Казимира C_2 алгебры A.

Запишем его в виде

$$C_2 = g_{lk} u^l u^k = \frac{1}{4} g_{lk}(u^l - i(iu^l))(u^k - i(iu^k)) =$$
$$= \frac{1}{4} g_{lk}(u^l u^k - (iu^l)(iu^k)) - \frac{i}{2} g_{lk} u^l (iu^k). \tag{95}$$

Ограничим поле скаляров в A. Вещественная и мнимая части выражения (95) инвариантны как относительно $\mathrm{ad}(u^q)$, так и относительно $\mathrm{ad}(iu^q)$. Следовательно,

$$\tilde{C}_2 = g_{lk}(u^l u^k - (iu^l)(iu^k)), \quad \tilde{\tilde{C}}_2 = g_{lk} u^l (iu^k)$$

— элементы Казимира алгебры $A\downarrow_R$.

(67) Упражнение. Постройте элементы Казимира алгебры Ли группы Лоренца $sl(2, C)_R$:

$$\tilde{C}_2 = \mathbf{l}^2 - \mathbf{n}^2, \quad \tilde{\tilde{C}}_2 = \mathbf{ln}. \ \blacktriangledown \tag{96}$$

Если алгебра A неполупроста, нахождение элементов Казимира становится значительно более сложной задачей, поскольку форма Киллинга $\mathcal{K}_A$ вырождена и присоединенное представление приводимо.

В частном случае, когда идеал J в разложении Леви $A = ([\ ], V) = S \mathbin{⊢} J$ абелев и присоединенные операторы ad_s реализуют на пространстве V_J неприводимое представление подалгебры S, сохраняющее билинейную форму f, элемент Казимира второго порядка имеет естественный вид $\hat{f}_{jk} v^j v^k$ ($\{v_j\}$ — базис в V_J). Для получения элементов Казимира высших порядков необходимо построить ограничение $\mathrm{Ad}_{A\downarrow S}$ и разложить на неприводимые компоненты пространство V и его тензорные произведения нужной степени. Тривиальному подпредставлению соответствует тензор T, инвариантный относительно $\mathrm{Ad}_{A\downarrow S}$. Он будет элементом Казимира алгебры A, если $\mathrm{Ad}_{A\downarrow J} T = 0$ и образ тензора T при естественном отображении $T(V) \to U(A)$ не равен нулю.

Применив описанную процедуру к алгебре Пуанкаре $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{l} \mathbin{⊢} \mathbf{p}$, получим два порождающих элемента Казимира:

$$c_2 = p_\mu p^\mu, \quad c_4 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\nu\rho} p^\sigma \varepsilon^{\mu\eta\xi\varkappa} l_{\eta\xi} p_\varkappa, \tag{97}$$

записанные в базисе (1.53), (1.54).

§ 7. Коэффициенты Клебша—Гордана. Скалярные факторы

Задача разложения тензорного произведения представлений унитарных групп возникает в квантовой физике при описании картины рассеяния. Поскольку физическим частицам сопоставляются базисные элементы пространств неприводимых представлений, необходимо определить вклад тензорного произведения пары базисных элементов в базисный элемент каждой неприводимой компоненты.

Пусть $\{d^I\}$ — полная система конечномерных неприводимых представлений алгебры A и разложение произведения $d^P \otimes d^L$ имеет вид

$$d^P \otimes d^L = \bigoplus_I a_I d^I. \tag{98}$$

Здесь a_I — кратность неприводимой компоненты d^I. В каждом пространстве V^I представления d^I введем ортонормированный базис $\{v_i^I\}$. Формула (98) означает, что

$$V^P \otimes V^L \approx \bigoplus_I a_I V^I, \tag{99}$$

где $a_I V^I$ — прямая сумма a_I экземпляров пространства V^I. В пространстве представления $d^P \otimes d^L$ естественно возникло два базиса, соответствующих правой и левой частям равенства (99):

$$v_p^P \otimes v_l^L \text{ и } v_i^{I,\,s} \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, \dim d^P; & l = 1, \ldots, \dim d^L \\ i = 1, \ldots, \dim d^I; & s = 1, \ldots, a_I \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов разложения элементов $v_i^{I,\,s}$ по базису $\{v_p^P \otimes v_l^L\}$ — *коэффициентов Клебша — Гордана* (К—Г):

$$v_i^{I,\,s} = \sum_{p,\,l} \left\langle \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \right\rangle v_p^P \otimes v_l^L. \tag{101}$$

Совокупность коэффициентов К—Г (при фиксированных P и L) образует квадратную матрицу U (с числом строк $\dim d^P \times \dim d^L$). В силу ортонормированности базисов (100) матрица U унитарна, поэтому матричные элементы матрицы обратного преобразования

$$v_p^P \otimes v_l^L = \sum_{I,\,s,\,i} \left\langle \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \right\rangle v_i^{I,\,s} \tag{102}$$

связаны с коэффициентами К—Г соотношениями

$$\left\langle \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \right\rangle^*, \tag{103}$$

$$\sum_{p,\,l} \left\langle \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I', & s' \\ i' & \end{matrix} \right\rangle = \delta_{II'} \delta_{ss'} \delta_{ii'}, \tag{104}$$

$$\sum_{I,\,s,\,i} \left\langle \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P & L \\ p' & l' \end{matrix} \right\rangle = \delta_{pp'} \delta_{ll'}. \tag{105}$$

Матрица U есть преобразование, которое приводит оператор $d^P(v) \otimes d^L(v)$ к блочно-диагональному виду

$$U\left(d^P(v) \otimes d^L(v)\right) U^{-1} = \sum_I \oplus a_I d^I(v). \tag{106}$$

Пусть представления d^I являются дифференциалами представлений D^I связной группы Ли G с алгеброй A. Та же матрица U осуществляет разложение $D^P \otimes D^L$ на неприводимые компоненты (утверждение **(6.51)**).

Перепишем соотношение (106) в виде

$$D^P(g)\otimes D^L(g)=U^{-1}\bigoplus_I a_I D^I(g)\,U$$

и приравняем матричные элементы правой и левой частей:

$$D^P_{pp'}(g)\,D^L_{ll'}(g)=\sum_{I,\,i,\,i',\,s}\left\langle \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix}\middle| \begin{matrix} I, & s \\ i & \end{matrix}\right\rangle D^I_{ii'}(g)\left\langle \begin{matrix} I, & s \\ i' & \end{matrix}\middle| \begin{matrix} P & L \\ p' & l' \end{matrix}\right\rangle. \quad (107)$$

Здесь мы воспользовались возможностью связать все кратные неприводимые подпространства тождественным отображением так, чтобы в каждом из $V^{I,s}$ оператор $D^I(g)$ задавался одной и той же матрицей.

Пусть группа G компактна, а представления $\{D^I\}$ унитарны. Домножим обе части равенства (107) на $(D^Q_{qq'}(g))^*$ и проинтегрируем по мере Хаара на G (см. теорему (**6.46**)):

$$\begin{gathered}\dim D^Q\int D^P_{pp'}(g)\,D^L_{ll'}(g)\left(D^Q_{qq'}(g)\right)^* d\mu(g)=\\ =\sum_s\left\langle \begin{matrix} P & L \\ p & l \end{matrix}\middle| \begin{matrix} Q, & s \\ q & \end{matrix}\right\rangle\left\langle \begin{matrix} Q, & s \\ q' & \end{matrix}\middle| \begin{matrix} P & L \\ p' & l' \end{matrix}\right\rangle. \end{gathered}\quad (108)$$

Эта формула может быть использована для вычисления коэффициентов К—Г. Соотношения (101) и (108) не фиксируют коэффициенты К—Г однозначно. В каждом неприводимом подпространстве тензоры $v^P_p\otimes v^L_l$ сопоставляются с базисными элементами v^I_i с точностью до унитарного преобразования в V^I. Кроме того, допустимы унитарные преобразования, перемешивающие векторы эквивалентных неприводимых компонент. Если матрицы операторов $d(v)$ (или $D(g)$) во всех эквивалентных неприводимых пространствах совпадают, произвол резко уменьшается. Так, для однократных неприводимых компонент V^I остается неопределенным общий множитель, равный по модулю единице.

Построим оператор ζ, сплетающий представление (98) и сохраняющий структуру прямой суммы в правой части:

$$\zeta\left(\bigoplus_J a_J d^J\right)\zeta^{-1}=\bigoplus_J a_J d^J.$$

Матрица ζ должна иметь блочно-диагональную структуру (следствие (**6.18**)). Обозначим через ζ^J оператор, действующий на подпространстве $a_J V^J$, и выделим в нем блоки, соответствующие каждому из эквивалентных подпространств V^J:

$$\zeta^J=\begin{pmatrix} \zeta^J_{11} & \dots & \zeta^J_{1a_J} \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta^J_{a_J1} & \dots & \zeta^J_{a_Ja_J}\end{pmatrix}.$$

Каждый блок ζ^J_{kl} сплетает представления, эквивалентные d^J. Так как во всех подпространствах V^J (с фиксированным J)

матрицы операторов $d^J(a)$ совпадают, то по лемме Шура II блоки ζ^J_{kl} кратны единичной матрице:

$$\zeta^J=\begin{pmatrix}\lambda_{11}I & \lambda_{12}I & \dots & \lambda_{1a_J}I\\ . & . & . & . \\ \lambda_{a_J1}I & \lambda_{a_J2}I & \dots & \lambda_{a_Ja_J}I\end{pmatrix}\quad(\lambda_{qm}\in C). \qquad (109)$$

Применим сплетающий оператор ζ к равенству (106):

$$\zeta U\left(d^P(v)\otimes d^L(v)\right)U^{-1}\zeta^{-1}=\bigoplus_J a_J d^J(v).$$

Потребуем, чтобы матрица ζ была унитарной. Тогда матричные элементы $(\zeta U)_{pl,\,Jjs}$ составят набор коэффициентов К—Г, эквивалентный исходному. Каждый блок ζ^J унитарной матрицы ζ зависит от $a_J{}^2$ произвольных вещественных параметров, т. е. для устранения неопределенности в наборе коэффициентов К—Г необходимо фиксировать $n=\sum\limits_J a_J^2$ параметров. Рассмотрим один из возможных способов.

Выберем a_J базисных элементов $v_p\otimes v_l$ и в каждом экземпляре $V^{J,s}$ пространства V^J — базисный элемент $v_i^{J,s}$. Из коэффициентов К—Г, соответствующих этим базисным элементам, составим $a_J\times a_J$ матрицу

$$B=\begin{pmatrix}\langle p_1 l_1\,|\,v_j^{J,1}\rangle & \langle p_1 l_1\,|\,v_j^{J,2}\rangle & \dots & \langle p_1 l_1\,|\,v_j^{J,a_J}\rangle\\ \langle p_2 l_2\,|\,v_j^{J,1}\rangle & \dots & & \\ . & . & . & . \\ \langle p_{a_J} l_{a_J}\,|\,v_j^{J,1}\rangle & \dots & & \langle p_{a_J} l_{a_J}\,|\,v_j^{J,a_J}\rangle\end{pmatrix}. \qquad (110)$$

Преобразование $U\to\zeta U$ индуцирует преобразование матрицы B, $B\to B\Lambda$, где матрица Λ составлена из чисел $\lambda_{m,q}$ (см. формулу (109)):

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \dots & \lambda_{1a_J}\\ . & . & . \\ \lambda_{a_J1} & \dots & \lambda_{a_Ja_J}\end{pmatrix}.$$

Если ζ унитарна, то унитарна и матрица Λ.

Представим B в виде $B=RY$, где R — эрмитова положительно определенная матрица, Y — унитарная матрица, и обе они однозначно определяются по B. Положим $\Lambda=Y^{-1}$ и совершим переход к эквивалентной системе коэффициентов К—Г так, чтобы $B\to B\Lambda=BY^{-1}=R$. Таким образом, мы всегда можем предполагать, что матрица B, составленная из коэффициентов К—Г, эрмитова и положительно определена. Наложение этого условия исчерпывает произвол в определении коэффициентов К—Г, если матрица B невырождена. Легко убедиться, что всегда существует набор $\{v_j\otimes v_n,\ v_k^l\}$, для которого B невырождена.

Как уже отмечалось, для нахождения коэффициентов К—Г алгебры Ли L может быть использована формула (108). Процедура вычисления существенно упрощается, если известны коэффициенты К—Г максимальной простой подалгебры $L_1 \subset L$. Искомые величины выражаются тогда через коэффициенты К—Г алгебры L_1 и некоторые численные множители более простой природы.

Пусть L — простая алгебра ранга r, $\{d^I(L, V^I)\}$ — полная система ее конечномерных неприводимых представлений. Для нумерации базисных элементов пространств V^I в § 5 использовались цепочка простых подалгебр $L \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_{r-1}$ ранга $r-1$, $r-2$, ..., 1 и ограничения $c_i^{(I)} \equiv d^I_{L \downarrow L_i}$ представления d^I (упражнение (59)). Будем задавать базисный вектор следующим набором чисел: мультииндекс I представления d^I (или координаты старшего веса $\mu^I(d^I)$), старшие веса μ^j неприводимых компонент во всех ограничениях $c_j^{(I)}$ и номера k^j, разделяющие кратные неприводимые компоненты, вес m в неприводимой компоненте представления $c_{r-1}^{(I)}$ алгебры $L_{r-1} \approx \approx sl(2, C)$. (Числа $k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$, m однозначно фиксируют вес ν в представлении d^I.) Всякий базисный элемент будем обозначать символом

$$\left| \begin{matrix} I \\ \mu k, \ \lambda \end{matrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{matrix} I \\ \mu^1 k^1, \ \mu^2 k^2, \ldots, \mu^{r-1} k^{r-1}, \ m \end{matrix} \right\rangle,$$
$$\mu \equiv \mu^1, \quad k \equiv k^1, \quad \lambda \equiv \{\mu^2 k^2, \ldots, \mu^{r-1} k^{r-1}, \ m\}.$$

Перепишем в этих обозначениях формулу (101)

$$\left| \begin{matrix} I, \ s \\ \mu k, \ \lambda \end{matrix} \right\rangle = \sum_{\substack{\mu' k' \lambda' \\ \mu'' k'' \lambda''}} \left\langle \begin{matrix} I, \ s \\ \mu k, \ \lambda \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P & Q \\ \mu' k', \ \lambda'; & \mu'' k'', \ \lambda'' \end{matrix} \right\rangle \times$$
$$\times \left| \begin{matrix} P \\ \mu' k', \ \lambda' \end{matrix} \right\rangle \otimes \left| \begin{matrix} Q \\ \mu'' k'', \ \lambda'' \end{matrix} \right\rangle. \tag{111}$$

Теперь рассмотрим тензорные сомножители в правой части с точки зрения подалгебры L_1. Разложим тензорное произведение пространств $V^{\mu'}$ и $V^{\mu''}$:

$$V^{\mu'} \otimes V^{\mu''} \approx \bigoplus_{\tilde{\mu}} a_{\tilde{\mu}} V^{\tilde{\mu}}.$$

Сравним определяющее уравнение для коэффициентов К—Г алгебры L_1

$$\left| \begin{matrix} \tilde{\mu}, \ t \\ \tilde{\lambda} \end{matrix} \right\rangle_{k' k''} = \sum_{\lambda' \lambda''} \left\langle \begin{matrix} \tilde{\mu}, \ t \\ \tilde{\lambda} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mu' \mu'' \\ \lambda' \lambda'' \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} P \\ \mu' k', \lambda' \end{matrix} \right\rangle \otimes \left| \begin{matrix} Q \\ \mu'' k'', \ \lambda'' \end{matrix} \right\rangle \tag{112}$$

с формулой (111). Если $\tilde{\mu} = \mu$, то левые части равенств (111) и (112) принадлежат пространствам эквивалентных неприводимых представлений алгебры L_1. Используем базис, в котором матрицы операторов эквивалентных представлений совпадают и сплетающий их оператор ζ пропорционален единичному: $\zeta = \chi I$, $\chi \in C$.

Пусть кратность представления d^{μ} в разложении $d^{\mu'} \otimes d^{\mu''}$ равна a_{μ}. Оператор ζ', сплетающий d^{μ} и $\bigoplus\limits_{k',\,k'',\,t} d^{\mu,\,t}_{(k'k'')}$ в разложении $(d^P \otimes d^Q)_{\downarrow L_1}$, представляет собой строку из $(a_{\mu} a_{\mu'} a_{\mu''})$ квадратных блоков вида $\chi_{tk'k''} I$. Множители $\chi_{tk'k''}$ могут зависеть от индексов представлений P, Q, J, μ, μ', μ'' и меняться при переходе к другим кратным компонентам представлений d^J, $d^{\mu'}$, $d^{\mu''}$ и d^{μ}. Важно подчеркнуть, что $\chi_{.t}$ не зависят от индексов, обозначенных символом λ. Оператор ζ' осуществляет отображение пространства $\bigoplus\limits_{t,\,k',\,k''} V^{\mu,\,t}_{k'\,k''}$ в $V^{\mu,\,k}$:

$$\left|\begin{matrix} J & s \\ \mu k, & \lambda \end{matrix}\right\rangle = \sum_{t,\,k'\,k''} \zeta'^{\,k}_{tk'\,k''} \left|\begin{matrix} \mu & t \\ \lambda & \end{matrix}\right\rangle_{k'\,k''} \equiv$$

$$\equiv \sum_{t,\,k',\,k''} \left(\begin{matrix} J & s \\ \mu & k \end{matrix}\left|\begin{matrix} P & & Q & \\ \mu' & k' & \mu'' & k'' \end{matrix}\right|_t\right) \left|\begin{matrix} \mu & t \\ \lambda & \end{matrix}\right\rangle_{k'\,k''}. \tag{113}$$

Матричные элементы оператора ζ' носят название *L_1-скалярных факторов.* Подставляя разложение (112) в формулу (113) и сравнивая полученное соотношение с определяющим уравнением (111), получаем

$$\left\langle\begin{matrix} J & s & \\ \mu & k, & \lambda \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} P & & & Q & & \\ \mu' & k', & \lambda' & \mu'' & k'', & \lambda'' \end{matrix}\right\rangle =$$

$$= \sum_t \left(\begin{matrix} J & s \\ \mu & k \end{matrix}\left|\begin{matrix} P & & Q & \\ \mu' & k' & \mu'' & k'' \end{matrix}\right|_t\right) \left\langle\begin{matrix} \mu & t \\ \lambda & \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} \mu' & \mu'' \\ \lambda' & \lambda'' \end{matrix}\right\rangle. \tag{114}$$

Коэффициенты К—Г алгебры L оказались выраженными через коэффициенты К—Г подалгебры L_1 и L_1-скалярные факторы.

Используя свойства (104), (105), получаем условия нормировки для L_1-скалярных факторов:

$$\sum_{\substack{\mu,\,\mu',\,\mu'' \\ k',\,k''}} \left(\begin{matrix} J & s \\ \mu & k \end{matrix}\left|\begin{matrix} P & & Q & \\ \mu' & k' & \mu'' & k'' \end{matrix}\right|_t\right) \times$$

$$\times \left(\begin{matrix} J' & s' \\ \mu & k' \end{matrix}\left|\begin{matrix} P & & Q & \\ \mu' & k' & \mu'' & k'' \end{matrix}\right|_t\right)^* = \delta_{JJ'}\,\delta_{ss'}\,\delta_{kk'}, \tag{115}$$

$$\sum_{J,\,s,\,k} \left(\begin{matrix} J & s \\ \mu & k \end{matrix}\left|\begin{matrix} P & & Q & \\ \mu' & k' & \mu'' & k'' \end{matrix}\right|_t\right) \left(\begin{matrix} J & s \\ \mu & k \end{matrix}\left|\begin{matrix} P & & Q & \\ \rho' & r' & \rho'' & r'' \end{matrix}\right|_{t'}\right)^* =$$

$$= \delta_{\mu'\rho'}\,\delta_{\mu''\rho''}\,\delta_{k'r'}\,\delta_{k''r''}\,\delta_{tt'}. \tag{116}$$

Если коэффициенты К—Г алгебр L и L_1 зафиксированы, то соотношения (114) однозначно определяют L_1-скалярные факторы.

Процедуру редукции коэффициентов К—Г можно продолжить по цепочке простых подалгебр в L вплоть до $sl(2, C)$.

Для алгебры $su(3)$ формула (114) позволяет выразить коэффициенты К—Г через соответствующие коэффициенты подалгебры $su(2)$, домноженные на $su(2)$-скалярные факторы:

$$\left\langle \begin{matrix} m_1 & m_2, & s \\ J & y, & j \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_1' & m_2' \\ J' & y', j' \end{matrix} \quad \begin{matrix} m_1'' & m_2'' \\ J'' & y'', j'' \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} m_1 & m_2, & s \\ J & y & \end{pmatrix}\!\!\!\left.\begin{matrix} m_1' & m_2' & m_1'' & m_2'' \\ J' & y' & J'' & y'' \end{matrix}\right) \left\langle \begin{matrix} J \\ j \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J' & J'' \\ j' & j'' \end{matrix} \right\rangle. \quad (117)$$

Здесь мы использовали нумерацию базисных векторов неприводимых представлений алгебры $su(3)$, введенную в (57). В моделях $su(3)$-симметрии подалгебра $su(2)$ чаще всего ассоциируется с алгеброй Ли группы изотопических преобразований, поэтому в физической литературе множители пропорциональности коэффициентов К—Г алгебр $su(3)$ и $su(2)$ носят название *изоскалярных факторов.*

Таблицы коэффициентов К—Г и изоскалярных факторов приведены в [23, 40] и периодических обзорных справочниках свойств элементарных частиц [37]. Свойства коэффициентов К—Г и их применения в квантовой физике подробно рассматриваются в [16, 36].

§ 8. Конечномерные представления алгебры $so(3, 1)$. Связь с представлениями группы Лоренца

В этом параграфе мы построим систему конечномерных неприводимых представлений некомпактной вещественной алгебры $\mathfrak{l}$ группы Лоренца Λ. В примере (5.24) она вводилась как овеществление $sl(2, C)_R$ простой комплексной алгебры. Между представлениями $d(sl(2, C))$ и $d(sl(2, C)_R)$ не существует столь простой связи, как между представлениями комплексной алгебры и ее вещественной формы (см. утверждение (6.54)), поэтому удобнее рассматривать алгебру $\mathfrak{l}$ как вещественную форму полупростой алгебры $so(4, C)$ (табл. 9, 10):

$$\mathfrak{l} = so(3, 1) = so(4, C)_{\downarrow R} \approx (sl(2, C) \oplus sl(2, C))_{\downarrow R}.$$

Построим фундаментальные представления алгебры $so(4, C)$. Ее корневая диаграмма приводима и равна объединению ортогональных друг к другу диаграмм подалгебр $sl(2, C)$. Легко найти фундаментальные веса $\boldsymbol{\alpha}'$ и $\boldsymbol{\alpha}''$ (рис. 30). По-прежнему всякое конечномерное неприводимое представление c однозначно задается своим старшим весом $\boldsymbol{\mu}$ с координатами

(m', m'') в базисе $\{\alpha', \alpha''\}$. Мы будем пользоваться индексами $J' \equiv m'/2$ и $J'' \equiv m''/2$.

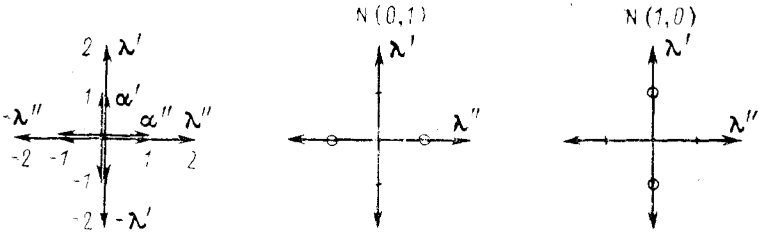


Рис. 30.

Введем в алгебре $sl(2, C) \oplus sl(2, C)$ базис Вейля $\{b', x', y', x'', y'', b''\}$. Фундаментальное представление $c^{(1/2, 0)}$ не является точным, поскольку все операторы подалгебры $sl(2, C)''$ тривиальны (рис. 30). Следовательно, $c^{(1/2, 0)}$ эквивалентно представлению $c^{1/2}$ подалгебры $sl(2, C)$ (см. (15)—(17)):

$$c^{(1/2, 0)}(b') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c^{(1/2, 0)}(x') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c^{(1/2, 0)}(y') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Эти операторы действуют в спинорном пространстве C^2.

Выразим генераторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$ группы Лоренца (см. (1. 49)) через элементы базиса Вейля:

$$l_1 = -\frac{i}{2}(x' + y' + x'' + y''), \quad n_1 = -\frac{1}{2}(x' + y' - x'' - y''),$$
$$l_2 = -\frac{i}{2}(-ix' + iy' - ix'' + iy''), \quad n_2 = \frac{i}{2}(x' - y' - x'' + y''),$$
$$l_3 = -\frac{i}{2}(b' + b''), \quad n_3 = -\frac{1}{2}(b' - b''). \quad (119)$$

Вещественная форма $c_{\downarrow R}^{(1/2, 0)} \equiv d^{(1/2, 0)}$ представления $c^{(1/2, 0)}$ называется *фундаментальным (спинорным) представлением алгебры* $\mathbf{l}$. Его операторы имеют знакомый нам вид (см. (6.11))

$$d^{(1/2, 0)}(\mathbf{l}) = -\frac{i}{2}\sigma, \quad d^{(1/2, 0)}(\mathbf{n}) = -\frac{1}{2}\sigma, \quad (120)$$

или в базисе с мнимыми структурными константами

$$d^{(1/2, 0)}(\mathbf{l}) = \frac{1}{2}\sigma, \quad d^{(1/2, 0)}(\mathbf{n}) = -\frac{i}{2}\sigma. \quad (121)$$

Мы установили, что это представление сохраняет билинейную симплектическую форму с матрицей F. Следовательно. с помощью F можно построить инвариант представления $d^{(1/2, 0)}$

$$\xi_\alpha F^{\alpha\beta} \eta_\beta \equiv \xi_\alpha \eta^\alpha \quad (122)$$

и тем самым ввести спинор с верхним индексом $\eta^\beta \equiv F^{\beta\alpha}\eta_\alpha$. На пространстве спиноров с верхними индексами действует контраградиентное представление

$$d_{(*)}^{(1/2,\,0)} = -d^{T(1/2,\,0)} = \{d^*(\mathbf{l}),\ -d^*(\mathbf{n})\}. \qquad (123)$$

Матрица F сплетает представления d и $d_{(*)}$ (F^{-1} опускает, а F поднимает спинорные индексы).

Аналогично строятся второе фундаментальное представление алгебры $sl(2,\,C)\oplus sl(2,\,C)$ и соответствующее ему представление алгебры $\boldsymbol{l}$. По весовой диаграмме (рис. 30) находим матричные элементы нетривиальных операторов:

$$c^{(0,\,1/2)}(b'') = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad c^{(0,\,1/2)}(x'') = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad c^{(0,\,1/2)}(y'') = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (124)$$

Выделив в $c^{(0,\,1/2)}$ нужную нам вещественную форму $c_{\downarrow R}^{(0,\,1/2)} \equiv d'^{(0,\,1/2)}$, получим выражения

$$d'^{(0,\,1/2)}(\mathbf{l}) = -\frac{i}{2}\sigma,\quad d'^{(0,\,1/2)}(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\sigma \qquad (125)$$

в случае вещественных структурных констант и

$$d'^{(0,\,1/2)}(\mathbf{l}) = \frac{1}{2}\sigma,\quad d'^{(0,\,1/2)}(\mathbf{n}) = \frac{i}{2}\sigma \qquad (126)$$

— в случае мнимых.

Легко непосредственно убедиться, что матрица F сплетает представление $d'^{(0,\,1/2)}$ с представлением $d^{(1/2,\,0)*}$, комплексно сопряженным первому фундаментальному:

$$Fd'^{(0,\,1/2)}F^{-1} = \left(d^{(1/2,\,0)}\right)^*.$$

В приложениях чаще используется именно представление $d^{(1/2,\,0)*} \equiv d^{(0,\,1/2)}$. Пространство его составляют комплексно сопряженные спиноры ξ^*. Для удобства их компоненты нумеруются пунктирными индексами $\xi_{\dot\alpha}$ (при этом знак комплексного сопряжения не пишется). Представление $d^{(0,\,1/2)}$ сохраняет форму с матрицей F, с помощью которой можно поднять (матрицей F^{-1} опустить) индекс пунктирного спинора и построить инвариант

$$\xi_{\dot\alpha}\eta^{\dot\alpha} = \xi_{\dot\alpha}F^{\dot\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta},\quad \eta^{\dot\alpha} = F^{\dot\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta}. \qquad (127)$$

Всякое представление $c^{(J',\,0)}$ является точным неприводимым представлением подалгебры $sl(2,\,C)\subset so(4,\,C)$. На это указывает структура его весовой диаграммы. Как и прежде, для построения операторов $c^{(J',0)}(a')$ можно воспользоваться готовыми выражениями для $d^{J'}(a')$ (см. (21))

$$c^{(J',0)}(a') = d^{J'}(a')$$

и выделить вещественную форму $d^{(J',0)} \equiv c_{\downarrow R}^{(J',0)}$. Отсюда непосредственно следует, что представление $d^{(J',0)}$ алгебры l можно реализовать в пространстве симметричных тензоров (*спин-тензоров*) ранга $2J'$ над пространством спиноров C^2. Для их компонент введем обозначение $\xi_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2J'}\}}$.

Операторы представления в пространстве спин-тензоров строятся по формуле (5.1):

$$d^{(J',0)}(a) = \overbrace{d^{(1/2,0)}(a) \otimes I \otimes \ldots \otimes I}^{2J'} +$$

$$+ I \otimes d^{(1/2,0)}(a) \otimes I \otimes \ldots \otimes I + \ldots + I \otimes \ldots \otimes I \otimes d^{(1/2,0)}(a). \quad (128)$$

Аналогично по представлениям $c^{(0,J'')}$ строятся вещественные формы $d^{(0,J'')}$ на симметричных пунктирных спин-тензорах ранга $2J''$:

$$\eta_{\{\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_{2J''}\}}.$$

Очевидно, что $d^{(J',0)}$ и $d^{(0,J'')}$ связаны комплексным сопряжением

$$(d^{(J',0)})^* = d^{(0,J')}. \quad (129)$$

Обратимся к весовым диаграммам представлений $d^{(J',0)}$, $d^{(0,J'')}$ и $d^{(J',0)} \otimes d^{(0,J'')}$. Старший вес тензорного произведения совпадает со старшим весом неприводимого представления $d^{(J',J'')}$. Все веса рассматриваемой диаграммы простые, т. е. представление $d^{(J',0)} \otimes d^{(0,J'')}$ неприводимо и

$$d^{(J',0)} \otimes d^{(0,J'')} \approx d^{(J',J'')}. \quad (130)$$

Следовательно, пространство представления $d^{(J',J'')}$ состоит из смешанных спин-тензоров

$$\eta_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2J'}\}\{\dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_{2J''}\}}.$$

Комплексное сопряжение меняет порядок индексов J', J'':

$$d^{(J',J'')*} = d^{(J'',J')}. \quad (131)$$

(68) Упражнение. Покажите эквивалентность представлений $d^{(J,0)}$ и $-d^{\mathrm{T}(J,0)}$ (соответственно $d^{(0,J)}$ и $-d^{\mathrm{T}(0,J)}$). Если представления d и $-d^{\mathrm{T}} \approx d_{(*)}$ эквивалентны, то форма, соответствующая сплетающему оператору, инвариантна. Найдите ее.

Ответ.

$$\zeta = d^{(J,\,0)}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & +1 \\ & & -1 & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ (-1)^{2J} & & & 0 \end{pmatrix},$$

где F отождествляется с элементом $i\sigma_2$ алгебры $sl(2, C)_R$ в определяющем представлении. Матрица ζ может быть использована для поднятия мультииндекса спин-тензора в пространстве представления $d^{(J,\,0)}$. ▼

(69) Упражнение. Всякий элемент $a \in \boldsymbol{l}$ можно отождествить с комплексной матрицей в $sl(2, C)_R$. Покажите, что оператор $d^{(J,\,0)}(a)$ является эрмитовым или антиэрмитовым в зависимости от того, эрмитова или антиэрмитова матрица a. ▼

При равенстве нулю одинаковых индексов сомножителей тензорного произведения представлений $d(\boldsymbol{l})$ разложение на неприводимые компоненты сводится к такой же задаче для алгебры $sl(2, C)$ (см. формулу (45)):

$$d^{(J_1,\,0)} \otimes d^{(J_2,\,0)} = \bigoplus_{J=J_1+J_2}^{|J_1-J_2|} d^{(J,\,0)}, \tag{132}$$

$$d^{(0,\,J_1)} \otimes d^{(0,\,J_2)} = \bigoplus_{J=J_1+J_2}^{|J_1-J_2|} d^{(0,\,J)}. \tag{133}$$

Объединяя формулы (130), (132) и (133), в общем случае получаем

$$d^{(J_1',\,J_1'')} \otimes d^{(J_2',\,J_2'')} = \bigoplus_{J'=J_1'+J_2',\ J''=J_1''+J_2''}^{J'=|J_1'-J_2'|,\ J''=|J_1''-J_2''|} d^{(J',\,J'')}. \tag{134}$$

Это правило можно установить графически, анализируя весовые диаграммы.

Диаграммный метод облегчает также построение ограничений представлений $d(\boldsymbol{l})$. Рассмотрим подалгебру $so(3) \subset so(3, 1)$. Элемент b ее подалгебры Картана в базисе Вейля имеет вид $b = {}^1\!/_2(b' + b'')$. Следовательно, сопоставляемый b базисный корень равен ${}^1\!/_2(\lambda' + \lambda'')$ (рис. 31).

Зафиксируем корневое пространство подалгебры $so(3)$ на весовой диаграмме представления $d(\boldsymbol{l})$. С помощью метода, описанного в **(54)**, без труда находим ограничения $d_{\boldsymbol{l}\downarrow so(3)}$. Для неприводимых представлений $d^{(J',\,0)}$, $d^{(0,\,J'')}$ и $d^{(J',\,J'')}$ результат можно записать в общем виде:

$$d^{(J',\,0)}_{\downarrow so(3)} = c^{J'}, \quad d^{(0,\,J'')}_{\downarrow so(3)} = c^{J''}, \quad d^{(J',\,J'')}_{\downarrow so(3)} = \bigoplus_{J=|J'-J''|}^{J'+J''} c^{J}. \tag{135}$$

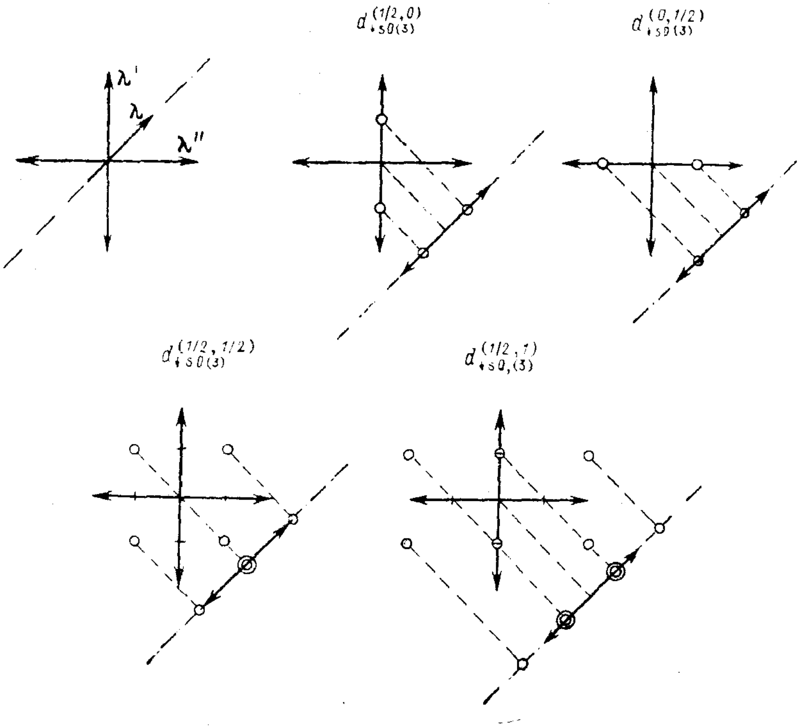


Рис. 31.

Если для представления d известно разложение (135), то его индексы восстанавливаются с точностью до порядка. Иными словами, структура ограничения $d_{\downarrow so(3)}$ определяет неприводимое представление $d^{(J',J'')}$ с точностью до комплексного сопряжения.

Проанализируем с этой точки зрения определяющее представление b алгебры $so(3, 1)$. Оно неприводимо и вещественно. Структура ограничения $b_{\downarrow so(3)}$ очевидна:

$$b_{\downarrow so(3)} = c^1 \oplus c^0. \tag{136}$$

Отсюда непосредственно следует

$$b \approx d^{(1/2,\ 1/2)}. \tag{137}$$

Пространство представления b состоит из векторов $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, тогда как $d^{(1/2,\ 1/2)}$ действует в пространстве спин-тензоров $\xi_{\alpha\dot\beta}$. Оператор ζ, сплетающий эти представления, легко найти по формулам (136), (130) и (25).

(70) Упражнение. Постройте оператор ζ.

Ответ.

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown \tag{138}$$

Представление $d^{(1/2,\,1/2)}$ сохраняет инвариантной билинейную форму $F \otimes F$. В $R^4 = \{x\}$ ей соответствует форма

$$\zeta^{\mathrm{T}} (F \otimes F)\, \zeta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

совпадающая, как и следовало ожидать, с метрическим тензором $\{g_{\mu\nu}\}$.

Строки и столбцы матрицы ζ^{-1} нумеруются индексами μ и $(\alpha\dot{\beta})$. Зафиксируем μ и будем рассматривать α и $\dot{\beta}$ как индексы матрицы 2×2. Мы получим четыре матрицы Паули σ^{μ}. Это позволит переписать действие оператора ζ^{-1} в виде

$$x = \zeta^{-1} \xi \eta, \quad x^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma^{\mu\,\mathrm{T}})^{\alpha\dot{\beta}}\, \xi_{\alpha} \eta_{\dot{\beta}}\,. \tag{139}$$

Аналогичные выкладки с матрицей ζ приводят к известной формуле

$$(\sigma x) = x^{\mu} \sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \tag{140}$$

однозначно сопоставляющей вектору x эрмитову 2×2 матрицу.

С помощью тензорных степеней представления b можно построить любое представление $d^{(J',\,J'')}$, в котором сумма $(J' + J'')$ — целое число. Например,

$$b \otimes b \approx d^{(1/2,\ 1/2)} \otimes d^{(1/2,\ 1/2)} = d^{(1,\ 1)} \oplus d^{(1,\ 0)} \oplus d^{(0,\ 1)} \oplus d^{(0,\ 0)}. \tag{141}$$

Пространство представления $b \otimes b$ состоит из тензоров с компонентами $x^{\mu\nu}$.

(71) Упражнение. Покажите, что представления $d^{(1,\,1)}$ и $d^{(0,\,0)}$ реализуются на тензорах $x^{\{\mu\nu\}}$ и x^{μ}_{μ} соответственно. $\blacktriangledown$

Обратим внимание на эквивалентность присоединенного представления алгебры $so(3,\ 1)$ прямой сумме неприводимых представлений $d^{(1,\,0)} \oplus d^{(0,\,1)}$. После выделения вещественной формы $so(3,\ 1)$ в $so(4,\ C)$ пространства представлений остаются комплексными. Комплексифицированное пространство алгебры $so(3,1)$ в самом деле приводимо. Инвариантные подпространства строятся на базисных векторах $\{l_k + in_k\}$ и $\{l_k - in_k\}$.

С помощью экспоненциального отображения построим из представлений $d^{(J', J'')}(so(3, 1))$ систему конечномерных неприводимых представлений $D^{(J', J'')}$. Они будут однозначными представлениями группы $\boldsymbol{L} \approx SL(2, C)_R$, универсальной накрывающей в классе локально изоморфных групп с алгеброй $so(3, 1)$ (см. (3.119)).

(72) Какие из представлений $D^{(J', J'')}$ являются однозначными на факторгруппе $\boldsymbol{L}/Z_2 \approx \boldsymbol{\Lambda}_+^\uparrow$? Очевидно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} SL(2,\mathbb{C}) \arrow[rr] \arrow[dr, "D^{(J',J'')}"'] & & \boldsymbol{\Lambda}_+^\uparrow = SL(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}_2 \arrow[dl, "\tilde{D}^{(J',J'')}"] \\ & GL(V) & \end{tikzcd} \tag{142}$$

определяет однозначное представление $\widetilde{D}$ группы Лоренца $\boldsymbol{\Lambda}_+^\uparrow$ только при условии $D^{(J', J'')}(Z_2) = I$, где $Z_2 = \{e, -e\} \subset SL(2, C)$. Поскольку степень симметризованных тензорных сомножителей типа $D^{(1/2, 0)}$ и $D^{(0, 1/2)}$ в $D^{(J', J'')}$ известна, то

$$D^{(J', J'')}(-e) = (-1)^{2(J'+J'')} I. \tag{143}$$

Таким образом, искомыми представлениями являются те и только те, у которых число $J' + J''$ целое. ▼

В частности, $\widetilde{D^{(1/2, 1/2)}}$ эквивалентно определяющему представлению группы $\boldsymbol{\Lambda}_+^\uparrow$.

Отметим, что ограничение $\widetilde{D}\boldsymbol{\Lambda}_+^\uparrow \downarrow so(3) = \oplus C^J$ всякого однозначного представления группы $\boldsymbol{\Lambda}_+^\uparrow$ является однозначным представлением группы $SO(3)$ и содержит неприводимые компоненты C^J только с целыми спинами J (см. (135)), что и следовало ожидать, поскольку именно такие (и только такие) представления $C^J \equiv \exp c^J$ группы $SU(2)$ являются однозначными представлениями группы вращений $SO(3) \approx SU(2)/Z_2$. (Для доказательства достаточно воспроизвести соотношения (142), (143), взяв за основу отображение $SU(2) \to SO(3)$.)

В квантовой физике важную роль играют все представления группы $\boldsymbol{L}$. Здесь всякое представление $d^{(J', J'')}$ интегрируемо. Построим с помощью экспоненциального отображения определяющее представление $D^{(1/2, 0)}(\boldsymbol{L})$. Всякий его оператор представим в виде произведения унитарной и эрмитовой матриц:

$$D^{(1/2, 0)}(\boldsymbol{L}) = L = \widehat{R}H = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_j r_j\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_j h_j\right). \tag{144}$$

Подгруппа $\widehat{\boldsymbol{R}} = \{\widehat{R}\} = SU(2) \subset SL(2, C)_R$. Разложение (144) можно интерпретировать как определение класса смежности $y \in Y \equiv \widehat{R} \setminus L$ для каждого $L \in \boldsymbol{L}$.

Перейдем к представлению $D^{(1/2,\, 1/2)}(\boldsymbol{L})$. Операторы его дифференциала $d^{(1/2,\, 1/2)}(a)$ в M_4 имеют вид

$$\zeta^{-1}\left(d^{(1/2,\, 0)}(a) \otimes I + I \otimes d^{(0,\, 1/2)}(a)\right)\zeta. \tag{145}$$

Отождествим $d^{(1/2,\, 0)}(a)$ с матрицей $a \in sl(2, C)_R$. Тогда оператор $d^{(0,\, 1/2)}(a) = a^*$. Вектор x запишем как эрмитову матрицу (140) и подействуем на него оператором (145):

$$\begin{gathered}(x'\sigma) = a\,(x\sigma) + (x\sigma)\,a^{\dagger},\\ x' = \zeta^{-1}\, d^{(1/2,\, 1/2)}(a)\,\zeta x.\end{gathered} \tag{146}$$

Применив экспоненциальное отображение, получим известное правило (3.59) преобразования матрицы $(x\,\sigma)$ унимодулярными матрицами группы $SL(2, C)_R$:

$$\exp a\,(x\sigma)\exp a^{\dagger} = (x'\sigma), \quad x' = \Lambda\,(a)\,x. \tag{147}$$

Здесь Λ — преобразование группы Лоренца, сопоставляемое матрице $\exp a$ при гомоморфизме $\boldsymbol{L} \to \boldsymbol{\Lambda}$. Матрицу $(x\,\sigma)$ при $x^2 = \det(x\,\sigma) = 1$ также можно рассматривать как элемент группы $\boldsymbol{L}$. (Она соответствует элементу $h \in H$ в разложении (144).) Равенство (147) интерпретируется при этом как свойство умножения в $\boldsymbol{L}$. Оно выполняется в произвольном представлении D:

$$D\,(\exp a)\,D\,(x\sigma)\,D^{\dagger}\,(\exp a) = D\,(x'\sigma). \tag{148}$$

Нам потребуется аналогичное соотношение для $x' = \Lambda^{-1}(a)\,x$:

$$D\,(x'\sigma) = D(\exp(-a))\,D\,(x\sigma)\,D^{\dagger}\,(\exp(-a)).$$

Воспользуемся свойством матрицы

$$\begin{gathered}\{\tilde{\sigma}_{\alpha}\} = \{\sigma^0,\ -\sigma^1,\ -\sigma^2,\ -\sigma^3\},\\ (x\sigma)^{-1} = (x\tilde{\sigma})\end{gathered} \tag{149}$$

и перепишем предыдущее равенство для обратных операторов:

$$D\,(x'\tilde{\sigma}) = D^{\dagger}\,(\exp a)\,D\,(x\tilde{\sigma})\,D\,(\exp a). \tag{150}$$

В приложениях наряду с $D^{(J',\, J'')}$ удобно использовать представления $D'^{(J',\, J'')} = D^{(J',\, 0)} \otimes D'^{(0,\, J'')}$, где

$$D'^{(0,\, J'')} = \exp\left(d'^{(0,\, J'')}\right)$$

(см. формулы (125), (126)). При этом оператору

$$(x\sigma) = D^{(1/2,\,0)}(x\sigma)$$

в представлении $D'^{(0,\,1/2)}$ соответствует матрица

$$D'^{(0,\,1/2)}(x\sigma) = \left(D^{(1/2,\,0)}(x\sigma)\right)^{-1} = \\ = D^{(1/2,\,0)}(x\tilde{\sigma}) = (x\tilde{\sigma}). \qquad (151)$$

Все рассмотренные в этом параграфе представления конечномерны и, следовательно, неунитарны (см. теорему **(6.47)**). Однако их ограничения на подгруппу $SU(2)$ унитарны, что позволяет использовать их при построении унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре.

ГЛАВА 8

СИММЕТРИЯ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

§ 1. Квантовомеханическое описание и преобразования симметрии. Теорема Вигнера и проективность представления группы симметрии. Унитарность. Элементарные частицы и неприводимые представления

Теория элементарных частиц основывается на квантовомеханическом описании физических явлений.

Основные аксиомы квантовой механики предполагают, что состоянию физической системы соответствует вектор $|\psi>$ (вектор состояния) гильбертова пространства $\mathscr{H} \ni |\psi>$, а наблюдаемой χ — оператор $\hat{\chi}$ в этом пространстве. Принцип суперпозиции приводит к необходимости сопоставления наблюдаемым линейных операторов.

Наблюдаемой χ соответствует некоторый прибор для ее измерения. С квантовомеханической точки зрения роль прибора активна. В процессе измерения, как правило, создается новое состояние, такое, что повторное измерение этой наблюдаемой (если оно возможно) должно дать тот же результат. Поэтому предполагается, что для каждой наблюдаемой χ должны существовать собственные состояния ее оператора $\hat{\chi}$:

$$\hat{\chi}\,|\psi_X> = X\,|\psi_X>,$$

и результатом любого измерения наблюдаемой χ в любом состоянии $|\psi>$ может быть лишь число, принадлежащее спектру $\hat{\chi}$. В разложении произвольного состояния $|\psi>$ по набору нормированных собственных состояний $|\psi_X>$ (или просто $|X>$) наблюдаемой χ

$$|\psi> = \sum_j \psi_j |X_j> \qquad (1)$$

коэффициенты ψ_j интерпретируются как *амплитуды вероятности* того, что $|\psi>$ совпадает с $|X_j>$. (Сама вероятность равна $|\psi_j|^2$.) Функция $\psi(X_j) \equiv \psi_j$ на спектре наблюдаемой χ называется *волновой функцией* состояния $|\psi>$.

Набор наблюдаемых, значениями которых можно характеризовать состояния, ограничен требованием одновременной измеримости этих наблюдаемых. Таким наблюдаемым $\{\alpha, \beta, \ldots\}$ соответствуют взаимно коммутирующие операторы $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, ...

Следовательно, α, β, ... обладают общей системой собственных состояний $|a_j, b_k, \ldots\rangle$, которые могут быть пронумерованы с помощью собственных чисел a_j, b_k, ... операторов $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, ...

(1) Если минимальный набор A независимых наблюдаемых содержит лишь коммутирующие наблюдаемые и любая наблюдаемая, не содержащаяся в A и коммутирующая со всеми наблюдаемыми набора A, есть функция последних, то он называется *полным набором.*

(2) Замечание. Напомним, что различным способам выбора полного набора соответствует разнообразие *представлений* (волновых функций) в квантовой механике.

(3) Замечание. Разложение (1) следует тогда понимать как разложение по системе общих собственных состояний наблюдаемых полного набора. ▼

Нормируемым состояниям соответствуют квадратично суммируемые волновые функции на спектре наблюдаемых полного набора. Их множество и представляет собой квантовомеханическое фазовое пространство. (В действительности оно несколько шире, поскольку приходится для удобства включать в него собственные состояния основных наблюдаемых, скажем, p_i или x_j, принадлежащие непрерывному спектру и нормируемые только в обобщенном смысле.)

(4) Описание квантовомеханических состояний с помощью векторов $|\psi\rangle$ гильбертова пространства нуждается в одном существенном уточнении. Предсказаниями теории являются вероятности переходов

$$w_{12} = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \tag{2}$$

и математические ожидания $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, ... (средние значения) наблюдаемых

$$\overline{\beta} = \langle\psi|\hat{\beta}|\psi\rangle, \ \ldots \tag{3}$$

Отсюда следует, что векторы $|\psi\rangle$ и $|\psi'\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle$ приводят к одним и тем же предсказаниям для всех наблюдаемых и, таким образом, соответствуют одному и тому же состоянию объекта, т. е., строго говоря, физические состояния в квантовой механике описываются не вектором $|\psi\rangle$, а *лучом* — совокупностью векторов

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = \{e^{i\delta}|\psi\rangle\}. \tag{4}$$

Вектор состояния $|\psi\rangle$ — только представитель класса векторов, соответствующих данному состоянию. Это обстоятельство, как мы увидим, приводит к отличию квантовомеханической симметрии от классической.

(5) Обратимся к преобразованиям симметрии в квантовой

физике (ср. (**1.11**)). Будем считать их активными, т. е. преобразованиями множества состояний

$$g : |\psi\rangle \to |\psi_g\rangle.$$

Тогда преобразованию соответствует некий оператор, который мы обозначим через $\hat{U}_g$, и новое состояние запишем так:

$$|\psi_g\rangle = \hat{U}_g |\psi\rangle.$$

Определяющее свойство преобразований физической симметрии (см. (1.10)) можно теперь сформулировать как перестановочность (с точностью до фазового множителя!) $\hat{U}_g$ с оператором развития

$$\hat{U}_g \hat{S}_{0\to t} = \hat{S}_{0\to t} \hat{U}_g e^{i\delta}. \tag{5}$$

Как и прежде, отсюда следует, что совокупность преобразований симметрии является группой.

(**6**) Замечание. Следует различать приборы, создающие состояния, и собственно измерительные, используемые для наблюдения за развитием состояний. ▼

Динамика исходного и преобразованного состояний прослеживается по временной зависимости средних значений наблюдаемых в этих состояниях. Соответствующие измерения можно мыслить как проводимые одним наблюдателем одним и тем же набором измерительных приборов. Таким образом, активное преобразование есть преобразование только векторов $|\psi\rangle$, а операторы, описывающие наблюдаемые, при этом не меняются.

Иное положение возникает при рассмотрении пассивных преобразований. В этом случае наблюдатели в СО Σ и Σ' имеют дело с состоянием (точнее, с ансамблем состояний), приготовленным одним и тем же прибором, и пользуются (одинаковыми) измерительными приборами. Последние находятся в различной взаимной ориентации (или состоянии движения) и по отношению к создающему прибору и потому соответствуют, вообще говоря, разным наблюдаемым. Поэтому пассивное преобразование h описывается отображением множества наблюдаемых (операторов) на себя:

$$h : \hat{\beta} \to \hat{\beta}_h$$

при неизменных векторах состояния $|\psi\rangle$.

Ранее было показано, что принцип относительности любому пассивному преобразованию симметрии сопоставляет некоторое активное, и различать их имеет смысл, лишь поскольку обратное верно не всегда. Квантовомеханическое описание формально стирает это различие. Действительно, любому преобразованию $g: |\psi\rangle \to |\psi_g\rangle$ в $\mathscr{H}$ можно сопоставить преобразование операторов $\hat{\beta} \to \hat{\beta}_g$, потребовав выполнения равенства

$$\langle\psi\,|\,\hat{\beta}_g\,|\,\psi'\rangle = \langle\psi_g\,|\,\hat{\beta}\,|\,\psi'_g\rangle. \tag{6}$$

Это позволяет говорить о преобразовательных свойствах наблюдаемых без необходимости перехода к пассивной точке зрения.

(7) Особо важную роль в квантовой механике играют совокупности наблюдаемых $\{\hat{\beta} = (\hat{\beta}^1,\ \hat{\beta}^2, \ldots, \hat{\beta}^m)\} \approx V^m$, для которых соотношение (6) задает линейное представление группы симметрии

$$\langle\psi_g\,|\,\hat{\beta}^a\,|\,\psi'_g\rangle = D^a_b\,(g)\,\langle\psi\,|\,\hat{\beta}^b\,|\,\psi'\rangle. \tag{7}$$

Здесь $D(g)$ — матрица линейного представления группы G. Такие операторы $\{\hat{\beta}^a\}$ называют (*контравариантными*) *тензорными операторами*. (*Ковариантные тензорные операторы* $\{\hat{\beta}_a\}$ — те, для которых преобразование (6) эквивалентно контраградиентному к D преобразованию $D^{\mathrm{T}}(g^{-1})$.)

(8) Пример. Операторы координат $\hat{x}_j$ или углового момента l_{ik} — тензорные операторы относительно группы вращений. ▽

Обратимся к основному свойству преобразований симметрии в квантовой механике. Вероятности переходов $w_{1\to2} = |\langle\psi_2|\psi_1\rangle|^2$ для исходных состояний и преобразованных $w_{1'\to2'} = |\langle U_g\,\psi_2|\,U_g\,\psi_1\rangle|^2$ должны совпадать (противное означало бы несоответствие динамик состояний $|\psi\rangle$ и $U_g|\psi\rangle$):

$$|\,\langle\psi_2\,|\,\psi_1\rangle\,|^2 = |\,\langle U_g\psi_2\,\|\,U_g\,\psi_1\rangle\,|^2. \tag{8}$$

Исключительную важность этого свойства подчеркивает следующая теорема.

(9) **Теорема Вигнера**. Пусть преобразование U в $\mathscr{H}$ удовлетворяет соотношению (8). Тогда найдется унитарное или антиунитарное преобразование U_0, такое, что

$$(U_0^{-1}\,U)\,|\,\psi\rangle = e^{i\delta\,(\psi)}\,|\,\psi\rangle \tag{9}$$

(отсюда следует, что с точностью до постоянной фазы такое преобразование U_0 единственно). Доказательство см. в [7], а также в [38]. ▽

Напомним, что преобразование U_0 называется *антиунитарным*, если

$$\langle U_0\psi_2\,|\,U_0\psi_1\rangle = (\langle\psi_2\,|\,\psi_1\rangle)^* = \langle\psi_1\,|\,\psi_2\rangle. \tag{10}$$

Соответствующий оператор $\hat{U}_0$ обладает свойством антилинейности:

$$\hat{U}_0 (a_1 \mid \psi_1\rangle + a_2 \mid \psi_2\rangle) = a_1^* \hat{U}_0 \mid \psi_1\rangle + a_2^* U_0 \mid \psi_2\rangle. \qquad (11)$$

(10) Замечание. Композиция двух антиунитарных преобразований — преобразование унитарное. ▼

Теорема Вигнера утверждает, что мы не в состоянии отличить преобразования симметрии от унитарных (или антиунитарных) преобразований в $\mathscr{H}$, и потому можно (и даже следует) отождествлять их с таковыми.

Посмотрим, к чему это приводит для всей совокупности преобразований U_g. Из соотношения (9) следует, что отображение G в группу $\{U_g\}$ всех унитарных преобразований в $\mathscr{H}$ будет воспроизводить закон композиции только на состояниях, т. е. лучах $|\Psi\rangle$, но не на их представителях $|\psi\rangle \in |\Psi\rangle$. Таким образом, произведение операторов $\hat{U}_{g_1} \cdot \hat{U}_{g_2}$ совпадает с $\hat{U}_{g_1 \cdot g_2}$ лишь с точностью до фазового множителя:

$$\hat{U}_{g_1} \cdot \hat{U}_{g_2} = \tau(g_1, g_2)\, \hat{U}_{g_1 \cdot g_2}. \qquad (12)$$

Здесь $|\tau(g_1, g_2)| = 1$, но этого не требуется для следующей, более общей структуры.

(11) Отображение группы G в группу обратимых линейных и антилинейных операторов $GLA(\mathscr{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, при котором закону композиции в G соответствует соотношение (12) в $GLA(\mathscr{H})$, где τ — численный множитель, называется *проективным представлением* группы G. Множители $\tau(g_1, g_2)$ называются *мультипликаторами* проективного представления. ▼

Свойства проективных представлений, такие, как приводимость, полная приводимость и т. д., формулируются так же, как и в случае обычных представлений. (Последние при необходимости подчеркнуть их отличие от проективных называют *векторными*.)

Например, проективное представление называется унитарным, если осуществляется унитарными операторами (матрицами). Очевидно, что мультипликаторы τ такого представления по модулю равны 1.

(12) Таким образом, в квантовой механике мы имеем дело с проективным представлением группы симметрии. Его почти всегда можно считать унитарным, поскольку допускаемая теоремой Вигнера альтернатива может относиться лишь к существенно дискретным преобразованиям (таким, как $\hat{T}$- и $\hat{P}$-отражения). Действительно, пусть G_0 — связная подгруппа Ли группы симметрии G (например, связная компонента единицы в G). Поскольку любой элемент $g \in G_0$ является произведением некоторых $g_1, g_2, \ldots, g_r \in V(e)$, где $V(e)$ — окрестность единичного элемента, то оператор $\hat{U}_g$ представим в виде

$$\hat{U}_g = e^{i\delta} \hat{U}_{g_1} \hat{U}_{g_2} \ldots \hat{U}_{g_r}, \qquad (13)$$

где δ — совокупная фаза. Напомним, что окрестность $V(e)$ всегда может быть выбрана так, что любой ее элемент g_s есть квадрат некоторого элемента $h_s=\sqrt{g_s}$, ей же принадлежащего. Тогда в силу замечания (10) только унитарные операторы соответствуют элементам из $V(e)$ и на основании соотношения (13) любому элементу $g\in G_0$.

(13) Как видим, лишь некоторые элементы дискретной группы симметрии могут быть представлены антиунитарными операторами в $\mathscr{H}$. Оказывается, если группа симметрии содержит операцию $\hat{T}$ обращения времени (см. (1.41)), искомый оператор с необходимостью антиунитарен. Элементарные соображения, приводящие к такому выводу, основаны на положительности энергии физических состояний, что исключает перемену знака оператора энергии $\hat{H}$ при перестановке с $\hat{T}$. Совпадение динамик исходных и преобразованных состояний (оператор развития имеет вид $\hat{S}_{0\to t}=\exp i\hat{H}t$) при наличии $\hat{T}$-отражения $t\to -t$ в этих условиях можно обеспечить, лишь допустив, что «пронесение» оператора преобразования симметрии через $\hat{S}_{0\to t}$ сопровождается заменой $i\to -i$. ▼

Итак, основными свойствами преобразований симметрии в квантовой механике являются их линейность (антилинейность) в пространстве $\mathscr{H}$ векторов состояния и унитарность (антиунитарность) соответствующих операторов. Именно поэтому допустимы непосредственная теоретико-групповая формулировка и решение задач квантовой механики в рамках теории представлений групп. Свойство проективности этих представлений обсудим в следующем параграфе.

Важная особенность квантовомеханической симметрии заключается в том, что она позволяет дать простую формулировку такого свойства, как элементарность рассматриваемых физических объектов — фундаментальных частиц. Поскольку представление группы симметрии G в $\mathscr{H}$ оказывается унитарным, то оно полностью приводимо, и $\mathscr{H}$ распадается на неприводимые подпространства $\mathscr{H}_A$:

$$\mathscr{H}=\bigoplus_A \mathscr{H}_A.$$

Неизбежно возникает вопрос о роли (эрмитовых) операторов $\hat{X}_{(AB)}$ с нетривиальными матричными элементами, связывающими различные неприводимые подпространства. Соответствующие наблюдаемые осуществляют дополнительную детализацию структуры «элементарного» объекта (помимо той, что заложена в группе G). Возможно, мы недооценили симметрию рассматриваемого объекта («элементарный» объект с группой симметрии $G'\supset G$, конечно, обладает более богатой внутренней структурой). Тогда либо получим неприводимое представление более широкой группы симметрии G', либо вновь придется решать проблему происхождения операторов типа $\hat{X}_{(AB)}$. В последнем случае может оказаться, что по некоторым причинам таким операторам не соответствуют никакие наблюдаемые, однако отсутствие наблюдаемых типа $X_{(AB)}$ может быть гарантировано лишь в случае неприводимости $\mathscr{H}$.

(14) Замечание. Нам известна лишь одна причина такого запрета — *принцип суперотбора,* формулируемый для таких (*центральных*) наблюдаемых Z_i ($i=1, 2, \ldots, r$), измерение которых всегда возможно (т. е. они входят в любой полный набор. — См. (1)). Это, например, электрический заряд Q, барионный заряд B и т. д. Принцип суперотбора ограничивает область применимости принципа суперпозиции, накладывая запрет на образование линейных комбинаций векторов из подпространств $\mathscr{H}_z, \mathscr{H}_{z'}$, соответствующих различным собственным значениям z, z' хотя бы одного центрального оператора $\hat{Z}$. (Такая комбинация не может описывать физическое состояние, поскольку тогда вероятность для наблюдаемой Z иметь определенное значение отличалась бы от 1.) Равным образом невозможно существование наблюдаемой, оператор которой имеет ненулевые матричные элементы, связывающие подпространства $\mathscr{H}_z$ и $\mathscr{H}_{z'}$: он не коммутирует с оператором Z, что противоречит определению центральной наблюдаемой. Следовательно, по принципу суперотбора нежелательные наблюдаемые можно исключить, отнеся G-неприводимые подпространства $\mathscr{H}_A$ к различным собственным значениям какой-либо центральной наблюдаемой. Тогда объект, описываемый прямой суммой двух и более таких $\mathscr{H}_A$, заведомо неэлементарен.

(15) На основании изложенного объект (частицу) следует считать *элементарным,* если пространство его векторов состояния $\mathscr{H}$ неприводимо относительно группы G физической симметрии.

(16) Замечание. В таком случае элементарными, строго говоря, можем считать только стабильные частицы. Действительно, как будет показано в следующей главе, неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре характеризуются фиксированным значением массы (собственным значением оператора Казимира этой группы $\hat{P}^2=\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu$). Нестабильным же частицам в силу теоремы Фока — Крылова (см., например, [31, с. 160, 161]) должно соответствовать непрерывное распределение по энергии и, следовательно, по массе. Равноправное рассмотрение стабильных и распадающихся частиц как элементарных может быть оправдано следующим. Объединение тех и других производится при обнаружении признаков более высокой симметрии (скажем, изотопической, унитарной и т. д.), которую можно рассматривать лишь как приближенную (нарушенную). Нестабильность части состояний из ее мультипле-

та — (неприводимого) представления соответствующей группы — обусловлена той же причиной, что и нарушение симметрии. Можно думать, что если бы (в каком-либо гипотетическом мире) симметрия не нарушалась, то все состояния из данного мультиплета были бы стабильны.

(17) Формализм квантовой механики отражает единство понятий симметрии и наблюдаемых. Действительно, наблюдаемым сопоставлены эрмитовы операторы в $\mathscr{H}$. Преобразования симметрии реализуются тоже операторами в $\mathscr{H}$ — унитарными. Тогда генераторы l_k группы симметрии G представлены антиэрмитовыми операторами $\hat{l}_k$. Эрмитовы операторы $i\hat{l}_k = \hat{\chi}_k$ естественным образом определяют набор (основных) наблюдаемых. Алгебра наблюдаемых χ_k совпадает с алгеброй Ли A группы G

$$[\chi_k, \ \chi_m] = ic^r_{km}\chi_r$$

в базисе, упомянутом в замечании (5.25). (Здесь предполагается, что представление G в $\mathscr{H}$ — векторное. Обоснование этому будет дано в следующем параграфе.)

Наблюдаемым, зависящим от χ_k, т. е. (функциям), соответствуют элементы обертывающей алгебры $\mathscr{I}(A)$. Разумно предположить, что алгебра наблюдаемых не содержит иных, т. е. не связанных с какой бы то ни было физической симметрией. ▼

В рамках квантовомеханического описания оказывается возможным сопоставить наблюдаемые существенно дискретным симметриям (что лишено смысла в классической теории).

(18) Рассмотрим, например, $\hat{P}$-отражения. (Строго говоря, соответствующая симметрия в природе отсутствует.)

Отражение $\hat{P}$ трех пространственных осей представимо комбинацией отражения относительно одной оси и вращения. Следовательно, при наличии $R = SO(3)$-симметрии свойства операции $\hat{P}$ определяются свойствами зеркального отражения. Экспериментальная проверка такой симметрии заключается в установлении совпадения динамики $S(\alpha^P)$ точной (до последнего существенного «винтика») зеркальной копии (α^P) рассматриваемого объекта (α), поставленного в соответствующие («$\hat{P}$-отраженные») внешние условия, с наблюдаемой в зеркале динамикой исходного.

Для макроскопических объектов $\hat{P}$-симметрия имеет место и проявляется в инвариантности уравнений движения классической механики относительно преобразований

$$\hat{P}\colon x^i_{(\alpha)} \to -x^i_{(\alpha)}, \quad p^i_{(\alpha)} \to -p^i_{(\alpha)}, \ \ldots \tag{14}$$

Не исключено, что в микромире найдутся объекты, не имеющие «зеркального» двойника.

Возможно, что такими объектами являются нейтрино, например электронное ν_e — частица спина $^1/_2$ с практически нулевой массой m. Точнее, при $m=0$ следует говорить не о спине, а о спиральности (см. (**9.21**)). Спиральность $\lambda \sim (\mathbf{s}\cdot\mathbf{p})$ есть проекция спина частицы на направление ее движения. Спин частицы $\mathbf{s}$, орбитальный момент $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, полный угловой момент $\mathbf{L}=\mathbf{l}+\mathbf{s}$ и спиральность λ при операции (14) преобразуются так:

$$\hat{P}: \mathbf{s} \to +\mathbf{s}, \quad \mathbf{l} \to +\mathbf{l}, \quad \mathbf{L} \to +\mathbf{L}, \quad \lambda \to -\lambda.$$

Следовательно, для самой постановки вопроса о $\hat{P}$-симметрии необходимо существование нейтрино с $\lambda = {}^1/_2$ (правых) и $\lambda = -{}^1/_2$ (левых). Только тогда будет иметь смысл операция $\hat{P}$-отражения в пространстве состояний. Четких экспериментальных свидетельств существования правых нейтрино до сих пор не получено. В любом случае поведение других частиц, скажем, правых и левых электронов, в процессах слабого взаимодействия несимметрично. Напротив, сильное и электромагнитное взаимодействия демонстрируют симметрию относительно $\hat{P}$-отражения.

Поскольку двукратное отражение приводит к исходному состоянию и оператор $\hat{P}$ унитарен, то

$$\hat{P}^2 = \omega_P \hat{I}, \quad |\omega_P| = 1. \tag{15}$$

Строгое рассмотрение проективности представления операции $\hat{P}$ будет проведено в гл. 9, а здесь для простоты положим $\omega_P = 1$. Тогда векторы состояний

$$\psi^\pm = |\psi\rangle \pm \hat{P}\,|\psi\rangle \tag{16}$$

— собственные для оператора $\hat{P}$. Его собственные значения $+1$ и -1 называются *$\hat{P}$-четностью* (или просто *четностью*) состояний $\psi^\pm$. Это (мультипликативное) квантовое число сохраняется в процессах сильного и электромагнитного взаимодействий. Его можно приписать всем состояниям участвующих в таких процессах частиц. (В действительности вследствие проективности в случае частиц полуцелого спина речь может идти лишь об относительной четности.) ∇

Аналогично в квантовой физике возникают наблюдаемые, соответствующие другим дискретным симметриям, например зарядовой $\hat{C}$ для состояний частиц и античастиц.

§ 2. Изотопическая симметрия и операторные лучи. Мультипликаторы и коциклы проективного представления. Фазовые расширения. Эквивалентность проективных представлений группы и векторных представлений ее универсальной накрывающей

(19) Уже установлено, что представление группы симметрии в пространстве векторов состояния $\mathscr{H}$ является проективным. Таким образом, возникает задача классификации неэквивалентных (неприводимых, унитарных) проективных представлений заданной группы симметрии. ▼

Уточним это на примере изотопической симметрии адронов (сильновзаимодействующих частиц). Ядра атомов можно считать состоящими из частиц двух сортов — протонов p и нейтронов n, связанных ядерными силами (сильным взаимодействием), не зависящими от сорта частиц. Различие во взаимодействии, скажем, протона с протоном — (pp), протона с нейтроном — (pn), вполне объяснимо действием электромагнитных сил (вследствие различия электрического заряда Q у протона $(Q=1)$ и нейтрона $(Q=0)$). Сужение матрицы оператора заряда $\hat{Q}$ на прямую сумму $\mathscr{H}_N$ подпространств состояний протона $\mathscr{H}_p$ и нейтрона $\mathscr{H}_n$, таким образом, имеет вид

$$Q=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор барионного заряда $\hat{B}$ (здесь он совпадает с нуклонным зарядом) представится в таком случае единичной матрицей. При этом состояния протона и нейтрона (как собственные состояния оператора Q они ортогональны) имеют вид

$$|p\rangle=\begin{pmatrix} |\psi_p\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ |\psi_n\rangle \end{pmatrix}. \tag{17}$$

(Нас пока не интересуют другие квантовые числа и структура волновых функций для $|\psi_p\rangle$ и $|\psi_n\rangle$.) Отметим, что вследствие суперотбора по Q векторам

$$\begin{pmatrix} \alpha\,|\psi_p\rangle \\ \beta\,|\psi_n\rangle \end{pmatrix}=\alpha\,|p\rangle+\beta\,|n\rangle \tag{18}$$

не соответствуют реальные состояния. Однако этот суперотбор является практически единственной причиной, накладывающей запрет на такие комбинации (если не считать нестабильности нейтрона, вызванной слабым взаимодействием). Сильные взаимодействия нечувствительны к величине электрического заряда. Можно думать, что в воображаемом мире, где «выключены» слабые и электромагнитные силы, комбинации вида (18) равноправны с векторами (17), и подстановки

$$\hat{U}: |p\rangle \to |p'\rangle, \quad |n\rangle \to |n'\rangle, \tag{19}$$

$$|p'\rangle = \alpha\,|p\rangle + \beta\,|n\rangle, \quad |n'\rangle = \gamma\,|p\rangle + \delta\,|n\rangle \tag{20}$$

не сказываются на структуре ядерной материи. Этим комбинациям соответствуют отличные от 1 и 0 средние значения электрического заряда, что, повторяем, с точки зрения ядерных сил несущественно. Существенным следует считать лишь необходимость рассматривать две такие комбинации: (внутреннее) пространство состояний нуклонов двумерно (см. (17)). Оно называется *изотопическим*.

(20) Итак, ограничиваясь рассмотрением ядерных сил, преобразование (19) можно считать преобразованием физической (*изотопической*) симметрии. При этом должны сохраняться вероятности переходов. Амплитуды этих вероятностей означают нормировку $|p\rangle$ и $|n\rangle$ и их ортогональность. Следовательно, 2×2 матрица $\hat{U}$ преобразования (19) в $\mathscr{H}_N$ должна быть унитарной.

Эти операторы $\hat{U}$ осуществляют проективное представление группы G^T изотопической симметрии:

$$\hat{U}(g_1)\,\hat{U}(g_2) = \tau(g_1, g_2)\,\hat{U}(g_1 g_2) \quad (|\tau| = 1;\ g_1, g_2 \in G^T). \tag{21}$$

Установить, что это за группа, в данном случае сравнительно несложно. Следует исходить из того, что представление $\hat{U}(g)$ является определяющим и потому точным.

На суперпозиции (20) нет иных ограничений кроме унитарности: все они, как уже подчеркивалось, равноправны. Однако множество $U(2)$ содержит матрицы $\hat{U} = e^{i\varphi}I$, кратные единичной. Они описывают тривиальные фазовые преобразования векторов $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$, не отражающиеся на физических состояниях. Для векторного представления группы G^T сразу последовал бы вывод: $G^T \approx U(2)/\{e^{i\varphi}\} \approx SU(2)$.

Убедимся, что и в данном случае $G^T \approx SU(2)$.

По аналогии с состояниями — лучами (4) в $\mathscr{H}$ — введем *операторные* лучи $\mathbf{U}(g)$ — классы операторов вида

$$\mathbf{U}(g) = \{e^{i\varphi}\hat{U}(g)\}. \tag{22}$$

Естественный закон композиции

$$\mathbf{U}(g_1)\cdot\mathbf{U}(g_2) \equiv \{\hat{U}_1\cdot\hat{U}_2:\quad \hat{U}_1 \in \mathbf{U}(g_1),\quad \hat{U}_2 \in \mathbf{U}(g_2)\} \tag{23}$$

наделяет множество лучей $\{U\}$ структурой группы и очевидно точно воспроизводит закон композиции в G^T:

$$\mathbf{U}(g_1)\,\mathbf{U}(g_2) = \mathbf{U}(g_1 g_2).$$

Вместе с тем очевидно, что операторные лучи совпадают с классами смежности $U(2)/U(1) = SU(2)$ $(U(1) = \{e^{i\varphi}\})$ и произведение (21) является произведением в группе $SU(2) \approx \approx G^T \equiv SU^T(2)$.

(21) В рассмотренном примере $SU^T(2)$ заложена схема действий, необходимых для установления структуры группы той или иной симметрии. Предположим, например, что каждый кварк (из которых по современным воззрениям «составлены» адроны) может пребывать в трех независимых («цветных») состояниях, к различию которых нечувствительны межкварковые силы. Рассуждая аналогично предыдущему, читатель убедится, что группа цветной симметрии изоморфна $SU(3)$ (она обозначается через $SU^c(3)$).

(22) Вернемся к исследованию проективных представлений. На примере $SU^T(2)$ мы фактически установили, что группа операторных лучей $\mathbf{U}(G)$, однозначно определяемая точным проективным представлением $g \to U(g)$, изоморфна группе симметрии G. Очевидно, что одной и той же группе $\mathbf{U}(G)$ соответствуют разные представления G в $\mathscr{H}$ — согласно выбору представителей в классах (22). Столь же очевидно, что все они физически эквивалентны и в данной задаче классификации проективных представлений не имеет смысла различать их.

(23) Совокупность лучей $|\psi>$ не образует линейного пространства, поэтому действующие на них операторные лучи $\mathbf{U}(g)$ не образуют векторного представления группы G. Однако если бы $\mathbf{U}(G)$ всегда восстанавливалась по содержащемуся в ней векторному представлению $U(G_0)$ некоторой группы G_0 (необязательно совпадающей с G), то наша задача (**19**) полностью свелась бы к классификации векторных представлений групп. ▼

Итак, *эквивалентными* мы считаем представления $\hat{U}(G)$ и $\hat{U}'(G)$, связанные соотношением

$$\hat{U}'(g) = e^{i\zeta(g)}\hat{U}(g), \tag{24}$$

где фаза $\zeta(g)$ — произвольная функция. Можно доказать (см., например, [39]), что класс $\mathbf{U}$ эквивалентных представлений должен содержать хотя бы одно такое, в котором операторнозначная функция $\hat{U}(g)$ на G сильно непрерывна в подходящей окрестности $V(e) \subset G$. Доказательство основывается на физически естественном предположении, что средние значения наблюдаемых в состояниях $|\psi_g>$ непрерывно зависят от g.

В этом случае мультипликаторы $\tau(g_1, g_2)$ такого представления должны быть непрерывными по обоим аргументам. Мультипликаторы τ и τ' эквивалентных представлений назовем *эквивалентными.*

Ассоциативность группового умножения накладывает на функции $\tau(g_1, g_2)$ ограничение

$$\tau(g_1, g_2 g_3)\,\tau(g_2, g_3) = \tau(g_1, g_2)\,\tau(g_1 g_2, g_3), \tag{25}$$

которое следует из сравнения двух способов расстановки скобок в произведении $\widehat{U}(g_1)\widehat{U}(g_2)\widehat{U}(g_3)$.

Ограничение $|\tau|=1$ (см. (21)) удобно удовлетворить тождественно, положив

$$\tau(g_1,\ g_2)=e^{i\Omega(g_1,\ g_2)}.$$

Функцию $\Omega(g_1,\ g_2)$ (она непрерывна, если такова $\tau(g_1,\ g_2)$) будем называть *коциклом* данного проективного представления. Требование ассоциативности применительно к Ω имеет вид

$$\Omega(g_1,\ g_2g_3)+\Omega(g_2,\ g_3)=\Omega(g_1,\ g_2)+\Omega(g_1g_2,\ g_3). \qquad (26)$$

Из соотношения (24) следует, что между эквивалентными мультипликаторами существует связь

$$\tau'(g_1,\ g_2)=(e^{i\zeta(g_1)}\,\tau(g_1,\ g_2)\,e^{i\zeta(g_2)})\,e^{-i\zeta(g_1g_2)},$$

автоматически согласованная с условием (25). Тогда для эквивалентных коциклов получаем

$$\Omega'(g_1,\ g_2)=\Omega(g_1,\ g_2)+\zeta(g_1)+\zeta(g_2)-\zeta(g_1g_2)\equiv\Omega+\Delta[\zeta], \qquad (27)$$

где

$$\Delta[\zeta](g_1,\ g_2)\equiv\zeta(g_1)+\zeta(g_2)-\zeta(g_1g_2). \qquad (28)$$

Коцикл Ω' удовлетворяет требованию ассоциативности (26) тогда и только тогда, когда ему удовлетворяет Ω.

Для исключения тривиальной эквивалентности, соответствующей постоянной фазе $\zeta(g)=\mathrm{const}$ в (24), (27), потребуем, чтобы

$$\Omega(e,\ e)=0. \qquad (29)$$

Это ограничивает фазы преобразований эквивалентности условием

$$\zeta(e)=0. \qquad (30)$$

Всюду в дальнейшем требования (29), (30) будут предполагаться выполненными.

При исследовании класса эквивалентных коциклов основная идея заключается в изучении локальных свойств коциклов Ω, а затем в рассмотрении того, в какой мере их можно распространить на группу G в целом. Остановимся на узловых моментах (несложные доказательства читатель найдет в оригинальной работе [39]).

Класс эквивалентности любого коцикла Ω, как уже известно, содержит хотя бы один непрерывный.

(24) Теорема. Для любого коцикла Ω группы Ли G его класс эквивалентности содержит дифференцируемый локальный коцикл.*) ▼

(25) Можно установить, что в классах эквивалентности всегда содержатся коциклы специального вида. Коцикл Ω будем называть *каноническим*, если:

1) Ω — дифференцируемый коцикл;

2) $\Omega(g_1, g_2)=0$ для элементов g_1, g_2 из одной и той же однопараметрической подгруппы.

(26) **Лемма.** Любой локальный коцикл Ω группы Ли G эквивалентен каноническому локальному коциклу. ▼

Сужение отношения эквивалентности на канонические коциклы приводит к важному результату.

(27) **Лемма.** Если локальный коцикл Ω канонический и коцикл $\Omega'=\Omega+\Delta[\lambda]$ эквивалентен ему, где $\lambda(g)$ — фаза преобразования, то коцикл Ω' является локальным каноническим тогда и только тогда, когда $\lambda(g)$ — линейная форма канонических координат группы G (в соответствующей окрестности единицы). ▼

Для установления аналитичности локального канонического коцикла конструируется вспомогательная группа. (Она же помогает выяснить, в какой мере глобальный коцикл восстанавливается по локальным свойствам.)

(28) Происхождение этой вспомогательной группы можно пояснить, рассмотрев умножение операторных лучей (22). Проективное представление $\hat{U}(g)$ фиксирует представителей в классах $\mathbf{U}(g)$. Произведение произвольных операторов

$$\hat{W}\equiv\hat{W}(\vartheta,\ g)=e^{i\vartheta}\hat{U}(g)\in\mathbf{U}\,(g)$$

имеет вид

$$\hat{W}_1\cdot\hat{W}_2=\exp i\,(\vartheta_1+\vartheta_2+\Omega\,(g_1,\ \ g_2))\ \hat{U}\,(g_1g_2). \tag{31}$$

Множество операторов $W\in\mathbf{U}(G)$ образует представление группы $G_\Omega=\{\tilde{g}:\tilde{g}=(\vartheta,\ g)\}$ с композицией

$$(\vartheta_1,\ g_1)\cdot(\vartheta_2,\ g_2)=(\vartheta_1+\vartheta_2+\Omega\,(g_1,\ g_2),\ g_1g_2). \tag{32}$$

Справедливость групповых аксиом (**2.1**)—(**2.4**) для умножения (32) вытекает из свойств коцикла Ω: соотношения (26) и нормировки (29).

Назовем группу G_Ω *фазовым расширением* группы G. Множество T элементов вида $t=(\vartheta,\ e)$ принадлежит ее центру, и факторгруппа по нему изоморфна исходной группе $G_\Omega/T\approx G$, т. е. фазовое расширение G_Ω является центральным расширением группы G (см. (**2.45**)).

*) Если рассматриваемое свойство коцикла определено или существенно только в окрестности единичного элемента группы, коцикл будем называть *локальным. Дифференцируемый коцикл* — дифференцируемая функция канонических координат группы.

Очевидно, что эквивалентные коциклы Ω и $\Omega'=\Omega+\Delta[\zeta]$ определяют изоморфные фазовые расширения G_Ω и $G_\Omega{}'$ — изоморфизм выражается соотношением

$$f:(\vartheta,\ g)\to(\vartheta',\ g')=(\vartheta-\zeta(g),\ g). \tag{33}$$

Удобно не различать эти группы, т. е. фазовое расширение $\widetilde{G}\sim\{G_\Omega\}$ поставить в соответствие всему классу эквивалентных коциклов, интерпретируя соотношение (33) как репараметризацию $\widetilde{G}$.

(29) Зафиксируем в $\widetilde{G}$ параметризацию элементов $\widetilde{g}=\widetilde{g}(x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$:

$$\widetilde{g}(x)\cdot\widetilde{g}(y)=\widetilde{g}(z)\Rightarrow z^\alpha=f^\alpha(\{x^\beta\};\ \{y^\gamma\}),\ \alpha,\ \beta,\ \gamma=0,\ 1,\ldots,\ n, \tag{34}$$

взяв в качестве x^k $(k=1,\ \ldots,\ n)$ канонические координаты группы G, а в качестве x^0 — параметр ϑ при условии, что коцикл Ω в (32) — локальный канонический. Тогда $\widetilde{G}$ — локальная группа Ли, и канонические локальные коциклы в классе $\{\Omega\}$ определяют (локальные) канонические координаты на $\widetilde{G}$. (Проверка этого утверждения элементарна.) Как известно, в канонических координатах группы Ли функции f^α, и в частности $f^0(\{x^i\};\ \{y^j\})=x^0+y^0+\Omega(g(x^i),\ g(y^j))$,— аналитические, т. е. справедлива следующая теорема.

(30) **Теорема.** Локальный канонический коцикл Ω — аналитическая функция локальных канонических координат группы G. ▼

Структурные константы $\widetilde{c}^\gamma_{\alpha\beta}$ (4.1) локальной группы $\widetilde{G}$ имеют вид

$$\begin{gathered}\widetilde{c}^m_{ik}=c^m_{ik},\quad \widetilde{c}^m_{i0}=\widetilde{c}^m_{0i}=0,\\ \widetilde{c}^0_{ik}\equiv\omega_{ik}=\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^i\partial y^k}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^i\partial x^k}\right)\Big|_{x,\ y=0},\\ i,\ k,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\end{gathered} \tag{35}$$

где c^m_{ik} — структурные константы исходной группы G.

(31) Матрица $\|\omega_{ik}\|$ определяет антисимметричную билинейную форму ω на алгебре Ли A группы G:

$$\omega(x,\ y)=\omega_{ik}\,x^iy^k,\quad x,\ y\in A. \tag{36}$$

Форму ω назовем *инфинитезимальным коциклом*.

Определим по ней (трилинейную) форму $d\omega$:

$$d\omega(x,y,z)\equiv\omega([x,y],z)+\omega([y,z],x)+\omega([z,x],y). \tag{37}$$

Тогда основное свойство ω кратко записывается в виде

$$d\omega = 0.$$

Действительно, последнее эквивалентно требованию

$$c_{ij}^{k}\omega_{km} + c_{mi}^{k}\omega_{kj} + c_{jm}^{k}\omega_{ki} = 0, \tag{38}$$

которое есть тождество Якоби для структурных констант $\tilde{c}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ алгебры Ли A группы G. Итак, каждому (локальному) каноническому коциклу Ω проективного представления группы G соответствует инфинитезимальный коцикл ω: билинейная антисимметричная функция на алгебре A, удовлетворяющая соотношению $d\omega=0$. Верно и обратное утверждение (доказательство сводится к задаче восстановления локальной группы Ли $\widetilde{G}$ по ее алгебре Ли).

(32) Отношение эквивалентности коциклов Ω и Ω' индуцирует эквивалентность инфинитезимальных коциклов ω и ω':

$$\omega' \approx \omega \Longleftrightarrow \omega' = \omega - d[\zeta],$$

где $d[\zeta]$ — некоторая билинейная антисимметричная форма на A. Напомним (см. лемму **(27)**), что фаза преобразования, связывающего канонические коциклы $\zeta(g) = \Lambda(x) = \lambda_i x^i$, есть линейная форма канонических координат (в $V(e)$).

Определим линейную форму Λ на A: $x = x^i v_i \to \Lambda(x) = \lambda_i x^i$. В соответствии с (35) матрицу $\|\gamma_{ik}\|$ формы $d[\zeta] = d[\Lambda]$ можно получить дифференцированием выражения

$$\Delta[\zeta] = \Lambda(x) + \Lambda(y) - \Lambda(\ln\{(\exp x)(\exp y)\}),$$

откуда

$$\gamma_{ik} = c_{ki}^{m}\lambda_m \tag{39}$$

(см. формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа (4.32) и (4.33). «Выживает» только вклад коммутатора $\frac{1}{2}[x, y]$.), т. е.

$$d[\Lambda](x, y) = \Lambda([x, y]). \tag{40}$$

(33) Итак, исследование классов эквивалентных проективных представлений сведено к построению классов эквивалентности инфинитезимальных коциклов ω. Множество таких ω — линейное пространство, размерность r' которого не может превышать числа $r = n(n-1)/2$, поскольку матрицы $\|\omega_{ik}\|$ антисимметричны и подчинены системе линейных соотношений (38). (Она тривиальна лишь в случае абелевой группы G, т. е. в остальных случаях $r' < r$.) Размерность r_0 линейного пространства классов $H_2(A, R) \equiv \{\omega\}$ эквивалентных инфинитезимальных коциклов

$$r_0 = r' - r'',$$

где r'' — размерность подпространства коциклов вида (40).

(Для абелевой группы, как это следует из (39), $r''=0$, т. е.

$$r_0 = r = n(n-1)/2.)$$

(34) Упражнение. Покажите, что коциклы Ω и $\Omega'=k\Omega$ ($k\in R_*$) определяют изоморфные фазовые расширения. ∇▼

(35) Задача построения классов эквивалентности $H_2(A, R)$ допускает решение для каждой конкретной группы G. Она фактически решена нами для группы вращений $\boldsymbol{R}=SO(3)$, Галилея и Пуанкаре. Действительно, в проективном представлении $g\to\hat{U}(g)=\exp\{x^k\hat{U}(v_k)\}$ коммутационные соотношения для генераторов группы G воспроизводятся в виде

$$[\hat{U}(v_i),\ \hat{U}(v_k)] = c_{ik}^m \hat{U}(v_m) + i\omega_{ik}.$$

К такому же виду скобочных структурных соотношений мы пришли в **(1.23)** (см. формулу (1.29)). (Отметим, что принцип соответствия скобке Пуассона $\{,\}$ сопоставляет $^1/_i\,[,]$.) Сдвигу преобразующих функций (генераторов) на постоянную точно соответствует преобразование эквивалентности $e^{i\Lambda}$, порождающее сдвиг

$$\hat{U}(v_k) \to \hat{U}(v_k) + i\lambda_k.$$

Результат проведенного в **(1.24)**, **(1.26)**, **(1.37)**, **(1.38)** исследования устранимости констант в структурных соотношениях можно переформулировать следующим образом. В проективном представлении алгебры Ли γ группы Галилея возможна только одна неустранимая константа, следовательно, пространство $H_2(\gamma, R)$ одномерно: $r_0=1$. Для группы вращений $\boldsymbol{R}=SO(3)$ и группы Пуанкаре, у которых все константы устранимы, $r_0=0$. Все инфинитезимальные коциклы этих групп эквивалентны нулевому.

(36) Замечание. В калибровочных теориях элементарных частиц наиболее привлекательными физическими чертами обладают модели с полупростой группой симметрии. Для таких групп справедлива следующая теорема.

(37) **Теорема.** Любой инфинитезимальный коцикл полупростой группы Ли эквивалентен нулю.

Для доказательства используется невырожденность матрицы $\hat{\mathscr{K}}$ формы Киллинга полупростой группы G. Тогда в левой части (38) условия $d\omega=0$ можно обратить «коэффициент» при ω в каком-либо слагаемом и переписать это условие:

$$\omega_{sm} = c_{sm}^k \operatorname{Tr}(\omega \operatorname{ad} v_k).$$

Следовательно, ω имеет вид $d[\Lambda]$. ▼

Итак, задачу нахождения классов эквивалентных инфинитезимальных коциклов группы симметрии будем считать решенной. Предположим, что все коциклы эквивалентны нулевому. Это означает, что фазовое расширение $\widetilde{G} \approx \{G_\Omega\}$ локально изоморфно прямому произведению $\{e^{i\vartheta}\} \times G$. Тогда всякое проективное представление группы G эквивалентно векторному представлению ее локальной группы (и алгебры Ли). Как известно, эти представления совпадают с векторными представлениями исходной группы G только для односвязных групп.

(38) Утверждение. Проективное представление связной группы G при $H_2(A, R) = 0$ эквивалентно векторному представлению ее универсальной накрывающей $\widehat{G}$. ▼

До обсуждения случая $H_2(A, R) \neq 0$ установим, что при определенных условиях задача **(19)** не требует обращения к свойствам $H_2(A, R)$.

(39) Теорема. Конечномерное непрерывное проективное представление $T(G)$ связной односвязной группы Ли G эквивалентно векторному ее представлению.

Доказательство. Пусть τ — мультипликатор представления $T(G)$ (не предполагаемого унитарным):

$$T(g_1)\, T(g_2) = \tau(g_1, g_2)\, T(g_1, g_2), \ \dim T = m$$

(τ — непрерывная функция, поскольку представление T непрерывно). Определители конечномерных матриц $T(g)$ удовлетворяют соотношению

$$\det T(g_1) \det T(g_2) = (\tau(g_1 g_2))^m \det T(g_1 g_2).$$

Определим матрицы $T'(g)$, положив

$$T'(g) = (\det T(g))^{1/m}\, T(g). \tag{41}$$

Отображение $\varphi: T \to T'$ в подходящей окрестности $V(e)$ можно сделать непрерывным, выбрав фиксированную ветвь корня m-й степени. Отображение φ однозначно и непрерывно продолжается на всю группу G в силу ее односвязности. Мультипликатор τ' представления T'

$$\tau'(g_1, g_2) = \tau(g_1, g_2) \frac{(\det T(g_1))^{1/m} (\det T(g_2))^{1/m}}{(\det T(g_1 g_2))^{1/m}}$$

непрерывен. Так как он удовлетворяет соотношению $(\tau'(g_1, g_2))^m = 1$, то является константой: $\tau' = c = \sqrt[m]{1}$. Тогда мультипликатор τ_0 представления T_0

$$g \to T_0(g) = (1/c)\, T'(g) \tag{42}$$

равен единице. ▼

Применение подобной процедуры к случаю группы вращений $SO(3)$ подчеркивает роль односвязности. Действительно, в $V(e)$ соотношения (41), (42) определяют представление с мультипликатором τ_0, равным единице. Однако невозможно гарантировать совпадения непрерывного продолжения функции $(\det T(g))^{1/m}$ в точку g вдоль двух негомотопных путей. В таком случае придется отказаться либо от непрерывности, либо от однозначности представления T_0.

(40) Замечание. В случае группы вращений $R=SO(3)\approx \approx SU(2)/Z_2$ среди неприводимых представлений ее универсальной накрывающей $\widehat{SO(3)}\approx SU(2)$ содержатся (при полуцелом спине) двузначные, не являющиеся векторными представлениями в обычном смысле. Их можно интерпретировать как проективные представления $SO(3)$ с дискретным мультипликатором $\tau\in Z_2$. Как видим, возможность существования объектов (элементарных частиц), описываемых такими представлениями, вытекает из самых общих принципов квантовой механики и не имеет аналога в классической физике.

(41) Обсудим общий случай $H_2(A,\ R)\neq 0$. Проективное представление $\hat{U}(G)$ определяет векторное представление $\hat{W}(\widetilde{G})$ фазового расширения $\widetilde{G}$ (по построению). Определив классы $\{\omega\}\approx/\approx$ нетривиальных инфинитезимальных коциклов, построим соответствующие расширения $\widetilde{G}=\widetilde{G}(\{\omega\})$ и исследуем их векторные (неприводимые унитарные) представления. (Как и прежде, речь должна идти о представлениях односвязной накрывающей $\widehat{\widetilde{G}}$, которая также представляет собой расширение, но уже по дискретной подгруппе.) Из последних отберем лишь такие, для которых сужение на центральную подгруппу $T=\{(\vartheta,\ e)\}$ состоит из скалярных операторов $\{e^{i\vartheta}\}$ (см. (28) — построение операторов $\hat{W}=\hat{W}(\widetilde{g})$). Таким образом, квантовомеханическая проблема классификации (неприводимых, унитарных) проективных представлений группы симметрии сводится к стандартной задаче теории линейных представлений для накрывающей $\widehat{\widetilde{G}}$.

Поэтому группу $\widehat{\widetilde{G}}$ принято называть группой квантовомеханической симметрии. В частности, $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ называется *квантовомеханической группой Пуанкаре;* $\widehat{\mathbf{\Lambda}}{}^{\uparrow}_{+}\sim SL(2,\ C)$ — *квантовомеханической группой Лоренца.*

Для абелевой группы размерности $n>1$ $H_2(A,\ R)\neq 0$ (см. (33)). Однако в частном случае, который потребуется в дальнейшем, справедливо следующее утверждение.

(42) Теорема Баргмана. Проективное представление компактной связной абелевой группы G эквивалентно ее векторному представлению. (Доказательство см. в [39].) ▼

Другим примером группы с $H_2(A, R) \neq 0$ является группа Галилея $\mathbf{\Gamma}$. В силу соотношения

$$[K_i, P_j] = i\delta_{ij} m \tag{43}$$

(см. (1.37)) дополнительному генератору расширения $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ следует придать смысл оператора массы $\hat{m}$.

(43) Замечание. Этим устраняется неравноправие наблюдаемой m в нерелятивистском случае: массе m до сих пор мы не могли сопоставить ни генератор группы симметрии, ни элемент обертывающей алгебры. ▼

Различные значения $m \neq 0$ определяют изоморфные расширения $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(m)$ (см. упражнение **(34)**), так что достаточно исследовать представления $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(m)$ при какой-либо фиксированной массе.

(44) В случае симметрии Галилея есть веские основания ограничиться только указанными представлениями, т. е. не рассматривать класс эквивалентности нулевого коцикла и соответствующих векторных представлений группы $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ [43]. Действительно, в неприводимом представлении группы Галилея оператор Казимира $|\mathbf{P}|^2 = P_i P_i$ является числом, поэтому волновые функции $\psi(\mathbf{p})$ в импульсном представлении заданы на сфере

$$|\mathbf{p}|^2 = \text{const}. \tag{44}$$

В силу канонических квантовомеханических коммутационных соотношений

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\,\delta_{ij} \tag{45}$$

переход к координатному представлению $\psi(\mathbf{p}) \to \psi(\mathbf{x})$ осуществляется преобразованием Фурье. Как известно, при наличии ограничения (44) функция $\psi(\mathbf{x})$ не может быть локализована.

Такая трудность не возникает в проективном представлении группы $\mathbf{\Gamma}$ с нетривиальным коциклом $\omega(K_i, P_j) \to \delta_{ij} m$. Действительно, в силу соотношения (43) любое ограничение типа (44) оказывается невозможным, p_i может принимать любое значение из R и $\psi(\mathbf{x})$ может быть локализована. Таким образом, симметрия Галилея (по необходимости) является примером нетривиального отличия квантовомеханической группы симметрии от соответствующей классической.

§ 3. Изотопические мультиплеты, формула Гелл-Манна—Нишиджимы. Зарядовое сопряжение и G-четность

В случае изотопической $SU^T(2)$-симметрии результаты предыдущего параграфа означают, что пространство векторов состояния сильновзаимодействующих частиц (адронов) является пространством векторного представления группы $SU^T(2)$. Генераторы T_a ($a = 1, 2, 3$) этой группы

$$[T_a, T_b] = i\varepsilon_{abc} T_c \tag{46}$$

суть наблюдаемые — компоненты изоспина. В полный набор может войти лишь их линейная комбинация, коммутирующая с электрическим зарядом Q. Пусть это будет T_3.

Двумерное (внутреннее) подпространство состояний нуклонов реализует спинорное представление группы $SU^T(2)$. Здесь операторы $\hat{T}_a$ имеют вид

$$\hat{T}_{a\,|\mathscr{H}_N} = \hat{\tau}_a = {}^1/_2\,\sigma_a\ (a = 1,\ 2,\ 3), \tag{47}$$

где σ_a — матрицы Паули.

Отметим, что в $\mathscr{H}_N$ операторы наблюдаемых Q и T_3 оказываются связанными соотношением $\hat{Q} = \hat{\tau}_3 + \hat{I}/2$, где единичную 2×2 матрицу I можно рассматривать как сужение на $\mathscr{H}_N$ некоторого оператора, называемого оператором *гиперзаряда* Y. *Эмпирическое соотношение*

$$Q = T_3 + Y/2 \tag{48}$$

называется *формулой Гелл-Манна — Нишиджимы.*

В $\mathscr{H}_N$ действует фундаментальное представление $d^{1/2}$. Следующее представление d^t $(t = 1)$ имеет размерность $n = 2t + 1 = 3$. Оно вещественно (см. 5.15)), а векторы состояний должны быть собственными для T_3, т. е., вообще говоря, комплексными.

Для определенности рассмотрим триплет π-мезонов — псевдоскалярных частиц (скалярность означает, что спин $J = 0$, а приставка «псевдо» — внутреннюю четность $P(\pi) = -1$). Для пионов $Y = 0$.

Пусть $|\pi_b\rangle \in \mathscr{H}_\pi$ $(b = 1,\ 2,\ 3)$ — базисные векторы неприводимого представления группы $SU^T(2)$:

$$\hat{T}_b\,|\,\pi_a\rangle = d^1\,(v_b)\,|\,\pi_a\rangle = -\,i\varepsilon_{bac}\,|\,\pi_c\rangle\ (a,\ b,\ c = 1,\ 2,\ 3).$$

Пространство $\mathscr{H}_\pi$ наряду с каждым вектором $|\pi_b\rangle$ содержит луч $\{e^{i\varphi}|\pi_b\rangle\}$, а следовательно, и нормированные собственные векторы оператора $\hat{T}_3$:

$$|\,\pi^{(\pm)}\rangle = (1/\sqrt{2})(\,|\,\pi_1\rangle \mp i\,|\,\pi_2\rangle),\quad |\,\pi^{(0)}\rangle = |\,\pi_3\rangle, \tag{49}$$

соответствующие собственным значениям ± 1 и 0. Именно эти векторы описывают реальные состояния. Их совокупность называется изотопическим мультиплетом π-мезонов. Напомним, что вследствие нарушенного характера изотопической симметрии они разделены в силу суперотбора по Q. В приближении симметрии, что эквивалентно пренебрежению правилом этого суперотбора, связь векторов мультиплета π с векторами $|\pi_a\rangle$ имеет смысл и взаимно-однозначна.

(45) В общем случае G-симметрии ее мультиплеты состоят из частиц, векторы состояний которых — собственные для ее

генераторов, допускающих включение в полный набор наблюдаемых. Без ограничения общности в качестве этих генераторов можно взять элементы базиса подалгебры Картана группы G. Тогда ее весовые диаграммы адекватно отражают содержание мультиплетов. ▼

Изотриплет пионов удобно представлять в виде эрмитовой 2×2 матрицы

$$\check{\pi} = (1/\sqrt{2})\,\pi_a\sigma_a, \tag{50}$$

где π_a — волновая функция для вектора $|\pi_a\rangle$. Множитель $(\sqrt{2})^{-1}$ здесь введен для нормировки на единицу волновых функций независимых состояний $|\pi_a\rangle$ относительно скалярного произведения $(\pi'\cdot\pi)=\mathrm{Tr}(\check{\pi}'\check{\pi})$. Преобразование $u\in SU^T(2)$ реализуется операцией

$$u:\check{\pi}\to\check{\pi}'=(1/\sqrt{2})\,\pi'_a\sigma_a=u\check{\pi}u^{+}. \tag{51}$$

Выразив матричные элементы $\check{\pi}$ через волновые функции состояний мультиплета

$$\pi_3=\pi^0,\quad \pi_1\mp i\pi_2=\sqrt{2}\,\pi^{\pm},$$

получим

$$\check{\pi}=\begin{pmatrix}\pi^0/\sqrt{2} & \pi^+\\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2}\end{pmatrix}. \tag{52}$$

Представлением вида (51) является также изотриплет Σ-*гиперонов*

$$\check{\Sigma}=\begin{pmatrix}\Sigma^0/\sqrt{2} & \Sigma^+\\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{53}$$

— частиц с такими же спином и четностью, как и нуклоны: $J=1/2$, $P(\Sigma)=+P(N)$ (что кратко обозначается как $(J^P)=(1/2^+)$). Для этого триплета гиперзаряд Y также равен нулю и заряд $Q=T_3=\{-1,\ 0,\ +1\}$. Однако в отличие от матрицы волновых функций пионов (52) выражение (53) неэрмитово. Эрмитово сопряженной $\check{\Sigma}$ следует считать матрицу волновых функций античастиц $\overline{\Sigma}$:

$$\check{\overline{\Sigma}}=\begin{pmatrix}\overline{\Sigma}^0/\sqrt{2} & \overline{\Sigma}^+\\ \overline{\Sigma}^- & -\overline{\Sigma}^0/\sqrt{2}\end{pmatrix}. \tag{54}$$

В данном случае имеем дело с операцией $\hat{C}$ зарядового сопряжения. Она сопоставляет состояниям частицы (α) состояния соответствующей античастицы $(\overline{\alpha})$:

$$\hat{C}\,|\alpha\rangle=\zeta(\alpha)\,|\overline{\alpha}\rangle,\quad |\zeta(\alpha)|=1 \tag{55}$$

с комплексно сопряженными волновыми функциями (с точностью до фазового множителя $\zeta(\alpha)$, который для простоты будем считать равным ± 1 [23]).

В рамках релятивистской квантовой теории поля необходимость введения античастиц связана с требованием полноты системы состояний (массивных) частиц с положительной энергией. Вообще говоря, допустимо совпадение состояния частицы (α) и античастицы $(\bar{\alpha})$. Такие частицы называются *истинно нейтральными.* (Например, π^0-*мезон.*) *Нейтральным* называется также мультиплет, если для каждой входящей в него частицы он содержит и ее античастицу. (Изотриплет пионов обладает данным свойством.)

(**46**) Убедимся, что нейтральной частице (мультиплету) соответствуют нулевые значения аддитивных центральных наблюдаемых. (Для нейтрального мультиплета — только тех, что коммутируют с группой симметрии. Например, не все состояния в изотриплете $\check{\pi}$ соответствуют нулевому электрическому заряду Q, но, как отмечалось, именно эта наблюдаемая теряет право на суперотбор в приближении изотопической симметрии.)

Напомним, что по определению центральные наблюдаемые Z_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ коммутируют друг с другом и со всеми остальными наблюдаемыми. Их аддитивность позволяет предположить, что наблюдаемые Z_j суть генераторы некоторой абелевой группы симметрии $G(Z)$. Подчеркнем, что $G(Z)$ должна быть компактна, поскольку спектр зарядов Z_i дискретен. Достаточно рассмотреть только ее связную компоненту единицы $G_0(Z)$ — с существенно дискретными элементами мы связываем м у л ь т и п л и к а т и в н ы е квантовые числа.

Итак, $G_0(Z)$ — связная компактная абелева группа. Пусть φ_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ — канонические координаты на ней. В силу теоремы (**42**) ее квантовомеханическое представление эквивалентно векторному. На подпространствах состояний элементарных частиц оно унитарно и неприводимо, а потому одномерно:

$$\hat{U}_g = \exp i\, q_j \varphi_j \quad (g \in G_0(Z)). \tag{56}$$

Здесь «заряды» $q_j = q_j(\alpha)$ — значения наблюдаемых Z_j, характеризующие данную частицу (α).

Тогда матрица волновых функций, эрмитово сопряженная, скажем, к матрице пионов (52) (или Σ-гиперонов (53)), описывает состояния мультиплета, являющегося представлением группы $G_0(Z)$, комплексно сопряженным (56). Таким образом, античастица $(\bar{\alpha})$ характеризуется противоположными по знаку зарядами $q_j(\bar{\alpha}) = -q_j(\alpha)$, и ее состояния могут совпасть с состояниями частицы лишь в случае нулевых значений всех q_j. Последнее выполняется для триплета пионов, но не для Σ-гиперонов, у которых нетривиально значение барионного заряда $B(\Sigma) = 1$.

(47) О $\hat{C}$-симметрии следует сказать примерно то же, что и в случае $\hat{P}$-отражений (см. (18)).

Обозначим вектор состояния, например нейтрино (антинейтрино) со спиральностью λ, через $|\nu; \lambda>$ ($|\bar{\nu}; \lambda>$). Динамика процессов слабого взаимодействия не позволяет говорить о симметрии относительно операций:

$$\hat{P}: |\nu; -{}^1/_2> \quad \to |\nu; +{}^1/_2>, \tag{57}$$

$$\hat{C}: |\nu; -{}^1/_2> \quad \to |\bar{\nu}; -{}^1/_2>. \tag{58}$$

(48) Замечание. «Комбинированное» преобразование

$$(\hat{C}\hat{P}): |\nu; -{}^1/_2> \to |\bar{\nu}; +{}^1/_2> \tag{59}$$

можно считать преобразованием симметрии в слабых взаимодействиях. Хотя динамики состояний $|\alpha>$, $\hat{C}\hat{P}|\alpha>$ и не коммутируют с операцией $\hat{C}\hat{P}$, соответствующие процессы еще менее интенсивны, чем процессы слабого взаимодействия (вызывающее их взаимодействие названо сверхслабым). Отметим, что в силу CPT теоремы (см., например, [27]) нарушение $\hat{C}\hat{P}$-симметрии эквивалентно нарушению $\hat{T}$-симметрии. ∇

(49) Как и в случае $\hat{P}$-отражений, зарядовая симметрия приводит к (мультипликативному) квантовому числу — *$\hat{C}$-четности,* сохраняющемуся в электромагнитных и сильных взаимодействиях. Согласно правилу суперотбора аналогичные (16) $\hat{C}$-собственные состояния существуют лишь для истинно нейтральных частиц, и только они характеризуются определенной $\hat{C}$-четностью. ∇

(50) Приписывание определенной $\hat{C}$-четности нейтральному мультиплету (например, изотриплету π), вообще говоря, несостоятельно.

Это станет очевидным, если на примере пионов рассмотреть действие операции $\hat{C}$ на состояниях $|\pi_a>$ ($a=1, 2, 3$). Воспользовавшись соотношениями (49), можно получить

$$\hat{C}\begin{pmatrix} |\pi_1> \\ |\pi_2> \\ |\pi_3> \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} |\pi_1> \\ -|\pi_2> \\ \pi_3> \end{pmatrix} \; (\zeta^2 = 1),$$

т. е. по существу $\hat{C}$-сопряжение есть зеркальное отражение второй оси в трехмерном изотопическом пространстве $\mathscr{H}_\pi$ представления d^1. Очевидно, что такая операция не может коммутировать с группой $SU^T(2)$. Указанный недостаток можно устранить, дополнив $\hat{C}$-сопряжение поворотом вокруг второй оси до полного отражения $\hat{C}$ в $\mathscr{H}_\pi$:

$$\hat{G} = \exp(i\hat{T}_2\pi)\,\hat{C}. \tag{60}$$

Наблюдаемая, соответствующая этой операции, называется G-четностью и является важной характеристикой нейтральных изомультиплетов с целым (и только целым!) значением изоспина. В общепринятой краткой нотации указывается только знак $\hat{G}$-четности частицы, равно как и знаки $\hat{P}$-четности и $\hat{C}$-четности (C_n) его нейтральной компоненты: $t^G(J^P)C_n$. Например, для пионов записываем $1^-(0^-)^-$.

§ 4. Унитарная симметрия и унитарные мультиплеты. Эволюция унитарной симметрии

Существование нескольких совокупностей изомультиплетов с примерно одинаковыми пространственными свойствами (одинаковыми спин-четностями (J^P) и близкими по величине массами) наводит на мысль, что реальная симметрия сильных взаимодействий шире, чем $SU^T(2)$.

Изомультиплеты, скажем, со спин-четностью ($^1/_2{}^+$), кроме нуклонов N и Σ-гиперонов, — это Ξ-гипероны $^1/_2(^1/_2{}^+)$ и изосинглет Λ $0(^1/_2{}^+)$, известные еще в начале 60-х годов, различаются значениями гиперзаряда Y: 1, 0, —1 и 0 соответственно (барионный заряд B равен единице для всех названных частиц).

Практически идентичные свойства этих частиц в процессах сильного взаимодействия позволили предположить, что истинная симметрия G^F последнего шире $SU^T(2)$. Неприводимое унитарное представление ее группы, содержащее изомультиплеты N, Σ, ..., конечномерно, следовательно, G^F компактна. Ранг минимальной такой группы не меньше двух, поскольку в полный набор наблюдаемых кроме T_3 должно войти не меньше одной независимой, скажем, гиперзаряд Y. Группа $SU^T(2)\times U^Y(1)$ служит для классификации частиц, однако рассматриваемое представление относительно нее по-прежнему приводимо. Оставалось выбрать G^F из четырех простых (полупростых) компактных групп ранга 2. Это группы $SU(3)$, G_2, $O(5)\approx Sp(2)$ и $O(4)\approx SU(2)\times SU(2)$.

Все группы, кроме первой, не подошли либо из-за несоответствия содержания изомультиплетов в их неприводимых представлениях реальным состояниям, либо из-за нефизических (не наблюдаемых в действительности) запретов. (Более подробно с этими вопросами можно ознакомиться в [29].)

Указанные барионы N, Σ, Ξ и Λ погружаются в восьмимерное представление группы $SU^F(3)$ (симметрия получила название «унитарной»). Аналогичная (53) 8×8 матрица

$$\check{B} = \begin{pmatrix} \Sigma^0/\sqrt{2} + \Lambda^0/\sqrt{6} & \Sigma^+ & p^+ \\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2} + \Lambda^0/\sqrt{6} & n^0 \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\Lambda^0/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (61)$$

нормируется по форме $\mathrm{Tr}(A^{\dagger} B)$ во внутреннем пространстве. (Здесь не рассматривается проблема согласованного выбора фаз векторов для каждого состояния мультиплета: унитарной симметрией он не фиксируется и определяется удобством реализации операций типа зарядового сопряжения [23, гл. 8].)

Преобразования симметрии имеют вид

$$\check{B} \to \check{B}' = u\check{B}u^{\dagger}, \quad u \in SU(3).$$

Изотопической подгруппе соответствуют унитарные 3×3 матрицы

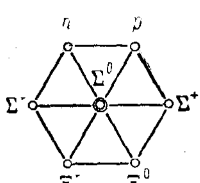
$$\{u\} = \begin{pmatrix} SU^T(2) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}.$$

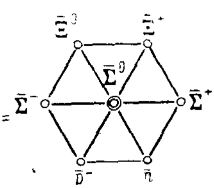
Аналогичным образом заполняется октет Φ псевдоскалярных (0^-)- и октет Φ^* векторных (1^-)-мезонов [37]:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} + \eta^0/\sqrt{6} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2} + \eta^0/\sqrt{6} & K^0 \\ \overline{K}^- & \overline{K}^0 & -2\eta^0/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \rho^0/\sqrt{2} + \varphi^0/\sqrt{6} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\rho^0/\sqrt{2} + \varphi^0/\sqrt{6} & K^{*0} \\ \overline{K}^{*-} & \overline{K}^{*0} & -2\varphi^0/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \quad (63)$$

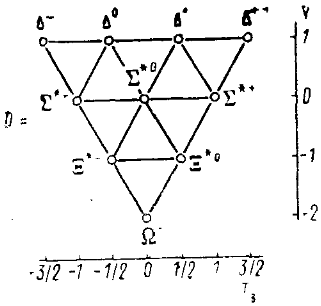
Как уже было показано в (45), содержание мультиплета группы симметрии G можно описывать весовой диаграммой ее представления. Обозначив веса символами соответствующих состояний, например, октетам B, $\overline{B}$ сопоставляем диаграммы

$B =$ 

, $\bar{B} =$ 

(64)

(51) Отметим десятимерное представление $d^{(3,0)}$ (декуплет) с $(J^P) = (^3/_2{}^+)$:



(65)

Напомним, что классификация (65) резонансов Δ, Σ^* и Ξ^* позволила предсказать существование частицы Ω^- с $t(J^P)=0(^3/_2{}^+)$ и $Y=-2$. В силу эквидестантности масс Δ, Σ^* и Ξ^* ожидаемое значение массы этой частицы ~ 1680 МэВ. Обнаружение Ω^--гиперона с требуемыми свойствами явилось триумфом унитарной симметрии. ▼

Дальнейшее развитие $SU^F(3)$-симметрии происходило в нескольких направлениях. Укажем следующие.

(52) Интенсивно разрабатывалась теория калибровочных полей (или полей Янга — Миллса), основанная на *калибровочной* (или *локальной*) симметрии (см., например, [26]). Последняя отличается от ортодоксальной G-симметрии относительно преобразований u: $\psi\to\psi'=u\psi$ тем, что ее преобразования на состояниях существенно зависят от координат x_μ, $x\in M_4$, характеризующих эти состояния, т. е. преобразования волновых функций в координатном представлении

$$\psi(x)\to\psi'(x)=u(x)\,\psi(x),$$

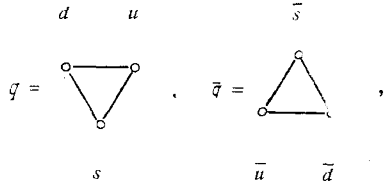
где $u(x)\in G$ при всех $x\in M_4$. С формальной точки зрения группа калибровочной симметрии $G[M_4]$ есть прямое произведение по точкам пространства Минковского:

$$G[M_4]=\underset{x\in M_4}{\times} G_x,$$

причем все G_x изоморфны G. (Обычную G-симметрию при этом называют глобальной.)

(53) Второе направление было обусловлено тем, что совокупность известных адронных состояний заполняет далеко не все представления $SU(3)$ низшей размерности. В частности, не обнаружены кандидаты для представлений (*6*), (*6**), а также для фундаментальных представлений (*3*) и (*3**). Это находит объяснение в кварковой модели. В рамках последней унитарная симметрия мыслится как симметрия в мире адронов

$\{N, \Sigma, \ldots, \pi, K, \ldots\}$, составленных из («унитарного») триплета кварков $q = (q_1, q_2, q_3) = (u, d, s)$ *)



(66)

каждый из которых в свою очередь может находиться в одном из трех («цветных») состояний. Этому соответствует симметрия нового уровня — цветная $SU^C(3)$ (см. (**21**)). (Калибровочная теория с группой $SU^C(3)$ [M_4] называется *хромодинамикой*.)

(**54**) Прогресс техники эксперимента также отразился на статусе группы $SU^F(3)$: ее следует считать лишь подгруппой в более широкой группе ароматов. Были обнаружены мезонные состояния (в частности, J/ψ-мезон), с которыми следует связать новые наблюдаемые (не содержащиеся в алгебре Картана группы $SU(3)$), т. е. группа ароматов G^F имеет ранг $r > 2$. На языке кварков это означает, что кроме (u, d, s) должны существовать и кварки, соответствующие нетривиальным значениям новых наблюдаемых ($\hat{c}$—«*charm*», $\hat{b}$—«*beauty*», $\hat{t}$—«*truth*»). Кварки, существование которых в настоящее время мы имеем основания предполагать, см. в табл. 12.

Таблица 12

Кварки ($\lambda = 1, 2, 3$)	B	Q	T_3	Y	$\hat{c}$	$\hat{b}$	$\hat{t}$
u_λ	1/3	+2/3	1/2	1/3	0	0	0
d_λ	1/3	−1/3	−1/2	1/3	0	0	0
s_λ	1/3	−1/3	0	−2/3	0	0	0
c_λ	1/3	+2/3	0	0	1	0	0
b_λ	1/3	−1/3	0	0	0	1	0
t_λ	1/3	+2/3	0	0	0	0	1

Экспериментальные данные хорошо согласуются с предположением, что группа симметрии ароматов есть $SU^F(6)$. Перечисленные в таблице кварки принадлежат ее фундаментальному мультиплету.

(**55**) Интенсивная разработка моделей слабого взаимодействия элементарных частиц привела к построению единой тео-

*) Ставшие традиционными обозначения первых двух кварков соответствуют знаку третьей компоненты изоспина: $T_3 = 1/2$—«up», $T_3 = -1/2$—«down». s-кварк обладает нетривиальной странностью $S \equiv Y - B = -1$ — «strange». Для отличия от цветных степеней свободы $u = \{u_\lambda\}$ ($\lambda = 1, 2, 3$), ... типы состояний u, d, s названы «ароматами» («flavour»), а группа унитарной симметрии — группой ароматов SU^F (3).

рии слабого и электромагнитного взаимодействия (модели Вайнберга — Салама [14]) и возродила надежды на построение единой теории вообще всех взаимодействий.

Как уже отмечалось, процессы слабого взаимодействия не обладают $\widehat{P}$-симметрией. Это приводит к тому, что состояния (или их волновые функции) с одним значением спиральности и противоположным (если таковое существует) входят в теорию несимметрично. (Для краткости принято использовать индексы «L» («левый») или «R» («правый») в зависимости от знака спиральности.) Скажем, e_L^- — волновая функция «левого» позитрона с $\lambda = -{}^1/_2$.

Объединенная теория слабого и электромагнитного взаимодействия — это калибровочная теория, основанная на глобальной группе симметрии $G^W = (SU(2) \times U(1))^W$. Лептоны (ν_e, e^-), (ν_μ, μ^-), (ν_τ, τ^-) образуют ее приводимое представление. Оно приводимо и для каждого «поколения» — указанных пар лептонов. Например, левые частицы $L_1 = \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix}$ являются дублетом, а правый электрон e_R^- — синглетом. Преобразовательные свойства остальных поколений точно такие же. Если генератор подгруппы $U^W(1)$, обозначаемый через Y^W, считать слабым гиперзарядом, то для лептонов существует аналог формулы Гелл-Манна — Нишиджимы (48):

$$Q = T_3^W + Y^W/2. \tag{67}$$

Тогда дублеты L_i имеют $Y^W(L_i) = -1$, а синглеты (скажем, e_R^-) — $Y^W(e_R^-) = -2$. (Для античастиц знаки следует заменить на противоположные.)

Необходимым атрибутом калибровочной $G[M_4]$-теории являются векторные частицы (кванты калибровочного поля), реализующие присоединенное представление (глобальной) группы G. Они служат «переносчиками» взаимодействия. В рассматриваемом случае их должно быть четыре: $SU^W(2)$-триплет $A_{\mu i}$ и синглет B_μ (μ — индекс Лоренц-вектора). Поскольку $U^W(1)$ входит в G^W прямым сомножителем, то эти частицы обладают нулевым слабым гиперзарядом $Y^W = 0$, и спектр Q совпадает со спектром $T_3^W = \{-1, 0, 1; 0\}$.

Включение в данную теорию адронов подразумевает установление их классификации относительно группы G^W.

В общепринятой модели [42] (где оказалось необходимым предположить существование четвертого кварка — c) электромагнитное и слабое взаимодействие адронов есть взаимодействие составляющих их кварков с теми же калибровочными частицами A и B, с которыми взаимодействуют и лептоны. При этом кварки u, d, s и c сгруппированы в два дублета и четыре синглета (относительно G^W). Синглетами являются правые состояния этих кварков, а дублеты q_L^1, q_L^2 образованы левыми:

$$q_L^1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \cos\vartheta + s_L \sin\vartheta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L ,$$
$$q_L^2 = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \cos\vartheta - d_L \sin\vartheta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L .$$

Здесь ϑ — угол Кабиббо — феноменологический параметр. Его величина $\vartheta \sim 13°$ до сих пор не нашла удовлетворительного теоретического объяснения. С физическим содержанием модели читатель может познакомиться в работах [14, 42]. Отметим только, что данная схема позволяет добавлять и другие новые кварки, но исключительно парами. Так, пару $q_L^3 = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L' \end{pmatrix}$ можно считать G^W-дублетом (t_R и b_R — синглеты), причем компоненты d', s', b' мультиплетов q_L^i с $T_3^W = -1/2$ соответствуют смеси, вообще говоря, всех трех кварков d, s, b. Впрочем, это смешивание невелико, поэтому далее мы его не учитываем.

Подчеркнем, что формирование мультиплетов q_L^i призвано прежде всего удовлетворить экспериментальным фактам, при этом набор кварков вслед за лептонами расщепился на три поколения:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}!$$

Таким образом, унификация всех видов взаимодействий (исключая гравитационное) должна основываться на существовании трех поколений фундаментальных частиц:

$$\left[\begin{array}{c|c} \nu & u \\ e & d \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} \nu_\mu & c \\ \mu & s \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} \nu_\tau & t \\ \tau & b \end{array}\right]. \tag{68}$$

Они состоят из синглетов (лептоны) и триплетов (кварки) относительно цветной группы $SU^c(3)$. Относительно G^W, как уже отмечалось, левые состояния этих частиц реализуют дублеты, а правые — синглеты. Для каждого поколения нетрудно написать разложение по представлениям группы $(SU^c(3) \times \times SU^W(2) \times U^W(1))$. Например,

$$\left[\begin{array}{c|c} \nu & u \\ e & d \end{array}\right] = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + e_R + u_R + d_R =$$
$$= (1, 2, -1) + \left(3,\ 2, \frac{1}{3}\right) + (1,\ 1,\ -2) + \left(3, 1, \frac{4}{3}\right) + \left(3,\ 1, -\frac{2}{3}\right). \tag{69}$$

Эти мультиплеты должны содержаться в представлении (желательно неприводимом) группы симметрии G^E единой теории. Группа G^E должна быть простой (только в таком случае в теории возможна единственная константа взаимодействия). Ранг минимальной такой G^E равен рангу группы $(SU^c(3) \times G^W)$, т. е. четырем. Минимальными (по размерности) простыми группами ранга 4 и более являются $SU(5)$ и $SO(10)$. Модели объединенной теории сильного, слабого и электромагнитного взаимодействия, основанные на этих группах симметрии, в настоящее время наиболее популярны.

(**56**) Проанализируем $SU(5)$-классификацию фундаментальных фермионов (69) (остальные «поколения» рассматриваются совершенно аналогично). Они не укладываются в неприводимое представление, что вынуждает перейти к совокупности двух фундаментальных представлений этой группы. Обратимся к $(SU(3)\times(SU(2)\times U(1)))$ содержанию 5-плета и 10-плета $SU(5)$ (см. (7.69), (7.71)):

$$(5)=(1,\ 2,\ 1)+\left(3,\ 1,-\frac{2}{3}\right),$$

$$(10)=\left(3^*,1,-\frac{4}{3}\right)+\left(3,\ 2,\ \frac{1}{3}\right)+(1,1,2). \qquad (70)$$

Как видим, это не совсем совпадает с разложением (69). Соответствие восстановится, если к набору частиц (69) добавить разложение для набора их античастиц. Можно убедиться, что им взаимно-однозначно сопоставляется содержание мультиплетов *(5)*, *(10)*, *(10*)* и *(5*)*.

(**57**) Упражнение. Заполните указанные мультиплеты частицами и античастицами первого поколения. ▽

(**58**) Замечание. При заполнении представлений $SU(5)$ неизбежно приходится наряду с кварками включить в *(10)* антикварки. В результате приходим к несохранению барионного числа B. ▼

(**59**) Замечание. Для моделей, подобных $SU^E(5)$, характерно выделение одного «поколения» — существование других фактически рассматривается как проявление некоего вырождения.

Унитарная $SU^F(3)$-симметрия присутствует здесь лишь в неявном виде. Она, разумеется, становится явной в более широких схемах (включающих все «поколения» фундаментальных фермионов). ▼

Таковы характерные особенности современного статуса унитарной симметрии, т. е.: а) $SU^F(3)$ следует рассматривать как локальную (калибровочную) симметрию $SU^F(3)[M_4]$; б) элементарные объекты, реализующие фундаментальное представление группы симметрии, суть кварки; другие неприводимые представления реализуются связанными состояниями кварков; в) число кварков больше трех, а соответствующая симметрия G^F шире, чем $SU^F(3)$; г) в единой теории $SU^F(3)$ не выдвигается на первый план.

§ 5. Гипотеза кваркового строения адронов. Массовые формулы и теорема Вигнера—Эккарта

Изложим кварковую модель строения адронов. Исходный постулат: наблюдаемые адроны являются связанными состояниями кварков и антикварков, реализующих фундаментальные представления (3) и (3*) группы $SU^F(3)$:

$$\hat{U}: q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to q' = \begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U}q \ (\hat{U} \in SU(3)). \qquad (71)$$

Тем самым для кварков зафиксированы значения наблюдаемых T_3 и Y (см. табл. 12). Барионный заряд B коммутирует с $SU^F(3)$, поэтому он одинаков для всех кварков.

Преобразовательные свойства их связанных состояний $|\psi(q_{(1)}, q_{(2)}, \ldots; \bar{q}_{(1)}, \ldots)>$ должны совпадать со свойствами тензорного произведения представлений группы симметрии на свободных состояниях:

$$|\psi(q_{(1)}, \ldots, q_{(N)}; \bar{q}_{(1)}, \ldots, \bar{q}_{(N')})> \sim \bigotimes_{(\alpha)} |q_{(\alpha)}> \bigotimes_{(\beta)} |\bar{q}_{(\beta)}>. \qquad (72)$$

На вопросе о существовании состояний $|q>(|\bar{q}>)$ свободных кварков (антикварков) останавливаться не будем.

Вне радиуса действия сил, связывающих кварки, состояния $|\psi>$ практически ничем (а в случае их стабильности — абсолютно ничем) не отличаются от состояний элементарных объектов. Следовательно, в совокупности $\{|\psi>\}$ нас прежде всего интересуют пространства, неприводимые относительно группы симметрии. Таким образом, кварковая модель адронов в качестве одной из основных содержит задачу разложения тензорного произведения представлений группы симметрии на неприводимые.

Подчеркнем, что сказанное относится и к группе пространственно-временной симметрии частиц — группе Пуанкаре. Ее квантовомеханические представления будут построены в гл. 9.

В задаче разложения этих представлений [21] сейчас более важной является часть, относящаяся к описанию внутреннего углового момента связанного состояния — спина составной частицы. Поскольку подгруппа вращений $R = SO(3)$ — общая для групп симметрий Пуанкаре и Галилея, воспользуемся известным читателю правилом сложения углового момента в нерелятивистской квантовой механике.

Итак, полагаем, что состояния кварков реализуют представление группы вращений $SO(3)$, в котором операторы углового момента имеют вид

$$\hat{J}_{(\alpha)} = \hat{L}_{(\alpha)} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{l}_{(\alpha)},$$

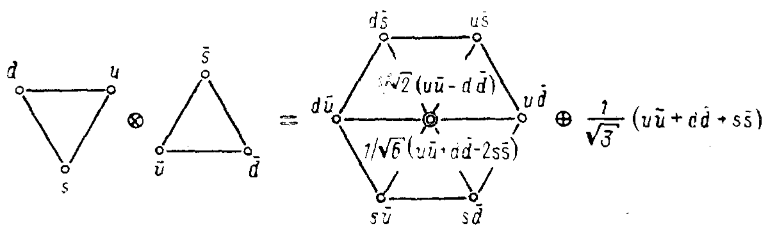
где $\hat{l}_{(\alpha)}$ — (неприводимые) операторы собственного углового момента кварка (спина), а $\hat{L}_{(\alpha)}$ — операторы орбитального. Совместим начало отсчета с центром масс системы кварков (и антикварков). В этом случае оператор полного момента

$$\hat{J} = \sum_{(\alpha)} \overbrace{\hat{I}_{(1)} \otimes \ldots \otimes \hat{J}_{(\alpha)}}^{(\alpha)} \otimes \ldots \otimes \hat{I}_{(N)}$$

совпадает с оператором собственного углового момента адрона.

Известно, что низшим (по энергии) состояниям, скажем, в атомах, соответствуют полные орбитальные моменты $L = \sum_{(\alpha)} \hat{I}_{(1)} \otimes \ldots \otimes (\hat{L}_{(\alpha)} \otimes \hat{I}) \otimes \ldots$, равные нулю: $L^2 = L(L+1) = 0$. Можно полагать, что тем же свойством обладает и связанная система кварков. Значениям $L = 1, 2, \ldots$ соответствуют более высокие по энергии (а следовательно, и по массе) состояния. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $L = 0$. Тогда собственный угловой момент адрона составляется лишь из спинов кварков: $\hat{J} = \hat{l} = \sum_{(\alpha)} \hat{I}_{(1)} \otimes \ldots \otimes (\hat{I} \otimes \hat{l}_{(\alpha)}) \otimes \ldots$ Для последних разумно выбрать минимальное значение $l_{(\alpha)} = 1/2$. Мезонные состояния обладают целым спином, т. е. должны быть составлены из четного числа фундаментальных частиц. При этом поскольку их барионный заряд должен быть нулевым, число кварков и антикварков в них должно быть одинаковым. Простейшей такой системой является двухчастичная: $q\bar{q}$.

(**60**) Тогда (при $L = 0$) возможны два значения спина J: $J = 0$ и $J = 1$. $SU(3)$-свойства этих состояний определяются разложением (см. рис. 18)



(73)

В центре диаграммы унитарного октета мы выделили нормированную компоненту изотриплета $1/\sqrt{2}\,(u\bar{u} - d\bar{d})$ и изосинглет $1/\sqrt{6}\,(u\bar{u} + d\bar{d} - 2\,s\bar{s})$ (см. § 7.5). Соответствующие (73) состояния можно отождествить с нонетом $(\Phi \oplus \eta')$ псевдоскалярных мезонов при $J = 0$ и с нонетом векторных мезонов $(\Phi^* \oplus \omega)$ при $J = 1$, если установить их $\hat{P}$- и $\hat{C}$-четность.

Пространственная четность $\hat{P}(q\bar{q})$ определяется орбитальной четностью $(-1)^L$ связанного состояния и произведением внутренних четностей. Последнее для частицы и античастицы спина $^1/_2$ равно -1 (см. (**9.30**)). В результате имеем

$$\hat{P}(q\bar{q}) = (-1)^{L+1} = -1, \tag{74}$$

что и наблюдается у нонетов $(\Phi \oplus \eta')$ и $(\Phi^* \oplus \omega)$.

$\hat{C}$-четность системы частица — античастица выражается равенством

$$\hat{C}(q\bar{q}) = (-1)^{L+l}, \tag{75}$$

где l — значение суммарного внутреннего момента кварков. (Элементарный вывод этого соотношения см., например, в [23, с. 277].) Для нейтральных компонент в (73) получаем значения $\hat{C}$-четности, согласующиеся с экспериментально известными свойствами нонетов $(\Phi + \eta')$ и $(\Phi^* \oplus \omega)$:

$$l = J = 0 \Rightarrow \hat{C}(\Phi \oplus \eta') = +1, \quad l = J = 1 \Rightarrow \hat{C}(\Phi^* \oplus \omega) = -1.$$

(**61**) Замечание. Формулы (74) и (75) показывают, что в кварковой модели в мезонных состояниях не появляются некоторые комбинации $(J^P)\,c_n$. Такие комбинации называют «экзотическими». Отметим, что состояний с экзотическими квантовыми числами обнаружить не удалось.

(**62**) Замечание. В разложении (73) синглетное состояние и одна из нейтральных компонент октета (восьмая) являются суперпозициями одних и тех же комбинаций кварков. Если существуют взаимодействия, нарушающие симметрию, то нет оснований полагать, что в реальные состояния эти комбинации входят именно с указанным в (73) весом. Физические состояния, диагонализующие полную энергию, вклад в которую дают и потенциалы упомянутых взаимодействий, могут оказаться суперпозицией («смесью»), скажем, синглета и некоторой компоненты мультиплета (тогда говорят, что «существует смешивание»). Отметим, что речь может идти лишь о нейтральных компонентах: смешивание остальных запрещено суперотбором по центральным наблюдаемым из подалгебры Картана группы симметрии.

(**63**) Обратимся к рассмотрению барионов. Минимальное нетривиальное число связанных кварков, обеспечивающих полуцелое значение спина, равно трем. Если барион составлен исключительно из кварков, то барионный заряд кварка $B(q) = ^1/_3$.

В данном случае одна из основных теорем квантовой теории поля (теорема о связи спина и статистики. — См., например, [27]) приводит к нетривиальным ограничениям, которые заключаются в требовании антисимметричности волновой функции рассматриваемых состояний относительно перестановки пары кварков.

Представим волновую функцию в виде

$$\psi = \Psi(x_{(\alpha)}, x_{(\beta)}, x_{(\gamma)}) \cdot (q_{(\alpha)} \otimes q_{(\beta)} \otimes q_{(\gamma)}) \cdot (\eta_{(\alpha)} \otimes \eta_{(\beta)} \otimes \eta_{(\gamma)}). \quad (76)$$

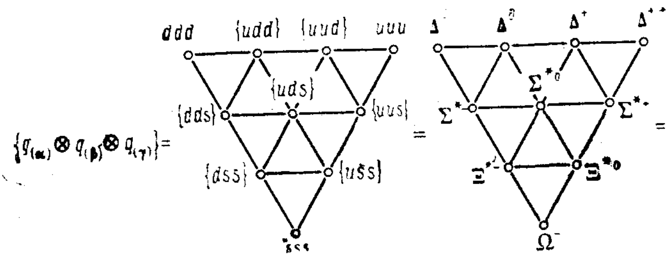
Здесь мы выделили координатную часть Ψ и волновые функции q, η в унитарном и спиновом пространствах. Для низших по массе барионных состояний по-прежнему положим $L=0$. Волновые функции Ψ при $L=0$ следует считать симметричными относительно перестановок координат кварков, поскольку предположение антисимметричности Ψ при $L=0$ приводит к появлению некоторых свойств адронов, не подтверждаемых экспериментально.

При симметричной Ψ волновые функции в унитарном и спиновом пространствах должны бы быть в целом антисимметричными. Тогда, скажем, в состоянии с полным спином $l=J={}^3/_2$, спиновая волновая функция полностью симметрична. Следовательно, унитарная волновая функция должна быть антисимметризована. Но в разложении представления $q_{(\alpha)}\otimes q_{(\beta)}\otimes \otimes q_{(\gamma)}$ полностью антисимметрично лишь синглетное состояние (см. пример **(7.31)**), что резко противоречит реальному положению вещей: состояния спина ${}^3/_2$ образуют декуплет (65). Напомним, что такой мультиплет в произведении $(3)\otimes(3)\otimes(3)$ полностью симметричен.

Таким образом, чтобы привести наивную кварковую модель в соответствие с реальной системой состояний, необходима модификация. Она основывается на предположении существования трех дополнительных кварковых степеней свободы (цветных), реализующих представление (3) группы $SU^c(3)$. Последняя входит в группу симметрии сильных взаимодействий $G^S = G^F \times SU^c(3)$ прямым множителем. Следовательно, неприводимые представления G^S имеют вид $D^S = D^F \otimes D^C$, где D^F и D^C неприводимы. Цветные степени свободы в реальных физических состояниях ненаблюдаемы, т. е. последние «бесцветны». (Есть основания считать, что это свойство может быть получено как следствие в калибровочной теории $SU^c(3)$ [M_4] с сильной связью.)

Пусть $\xi_{(\alpha)\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ — волновая функция кварка в цветном пространстве. Бесцветность состояний адронов означает, что они являются синглетами относительно $SU^c(3)$. Тогда наличие цветных степеней свободы практически не вносит изменений в кварковую картину строения мезонов. В разложении (73) достаточно каждую унитарную волновую функцию дополнить цветной и свернуть у них индексы. Например, $u\bar{d} \to u\xi_\lambda \bar{\xi}^\lambda \bar{d}$.

В случае барионов единственный $SU^c(3)$-синглет в произведении $(\xi_{(\alpha)} \otimes \xi_{(\beta)} \otimes \xi_{(\gamma)})$ антисимметричен. Таким образом, волновую функцию (76) следует дополнить множителем $\varepsilon^{\lambda\eta\varkappa}\, \xi_{(\alpha)\lambda}\, \xi_{(\beta)\eta}\, \xi_{(\gamma)\varkappa}$. В результате приходим к требованию совместной симметричности унитарной и спиновой частей относительно перестановок кварков. Для спина $J={}^3/_2$ это дает едиственное неприводимое представление $SU^F(3)$ — декуплет. Обозначая операцию симметризации символом $\{\}$, имеем



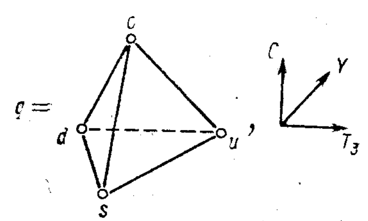
(77)

Здесь для удобства установления кваркового состава каждой частицы декуплета D мы добавили выражение (65).

В случае $J = l = {}^1/_2$ спиновая часть $(\eta_{(\alpha)} \otimes \eta_{(\beta)} \otimes \eta_{(\gamma)})$ обладает смешанной симметричностью, а в разложении унитарной волновой функции $(3) \otimes (3) \otimes (3)$ в свою очередь имеются два октета со смешанной симметричностью (см. пример **(7.31)**). Нетрудно проверить, что каждой октетной комбинации соответствует только одна спиновая, приводящая к итоговой симметричности спиновой и унитарной частей волновой функции. Барионам (61), (64) можно сопоставить любой из этих октетов. (В рамках нерелятивистской $SU(6)$-схемы появляются естественные основания рассматривать только один из них [17].)

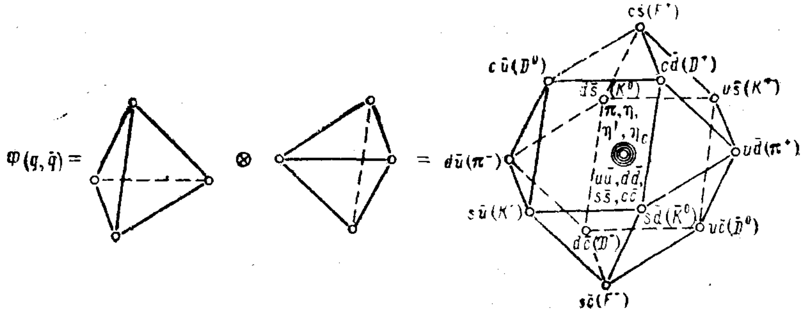
Итак, в предположении существования цветных степеней свободы кварковая модель способна описать состояния адронов в интервале масс $0{,}135 \div 1{,}67$ ГэВ для значений спинов 0, 1; ${}^1/_2$, ${}^3/_2$. Как видим, представления типа (6) и (6^*) при этом действительно не появляются. Другие адронные состояния также представимы системами из двух или трех кварков (с нетривиальным орбитальным моментом L) [17]. Однако, как выяснилось, все-таки не все — потребовалось ввести новые ароматы.

(64) Ограничимся рассмотрением строения мезонных состояний с симметрией $SU^F(4)$. Пусть кварки $q^\tau = (u, d, s, c)$ реализуют фундаментальное представление (4) группы $SU^F(4)$:



(78)

Тогда мезоны $\Phi(q; \bar{q})$ образуют представление $(15) \oplus (1)$ этой группы:



(79)

В скобках здесь проставлены символы частиц со спином $J=0$ — скалярных мезонов [37]. $SU^F(4)$-синглетное состояние не выделено. Эта же диаграмма описывает $(15)\oplus(1)$ представление $SU^F(4)$ на векторных (1^-)-мезонах. Проставить символы частиц на диаграмме читателю не составит особого труда. ▼

До сих пор вопросы, связанные с нарушением рассматриваемых симметрий, практически не затрагивались. Между тем в физике оно играет, пожалуй, более важную роль, чем идеальная симметрия.

Например, для унитарной $SU^F(3)$-симметрии возможность различия эквивалентных состояний связана не только с наличием наблюдаемых (скажем, Y, Q), различающих эти состояния, но и с существованием взаимодействий, чувствительных именно к этим наблюдаемым. (В данном случае это соответственно умеренносильное и электромагнитное взаимодействия). В результате реальные состояния, которые должны быть «диагональны» для всей совокупности взаимодействий, характеризуются не только различными значениями наблюдаемых из подалгебры Картана группы внутренней симметрии, но и, вообще говоря, разной собственной (внутренней) энергией, т. е. массой.

(65) Таким образом, расщепление масс частиц одного мультиплета группы внутренней симметрии является естественным следствием того, что ее нарушение также имеет внутреннюю природу. Из приведенных рассуждений следует, что наблюдаемая M — масса (или ее квадрат $M^2=P^2$) во внутреннем пространстве является некоторым элементом обертывающей алгебры группы внутренней симметрии.

Разумеется, нарушение этой симметрии проявляется не только в расщеплении масс, но и в различии значений других наблюдаемых (например, магнитных моментов). Здесь мы ограничимся рассмотрением массовых соотношений.

Точное определение $\hat{M}$ как элемента обертывающей алгебры по существу эквивалентно точному решению квантовополевых

уравнений для взаимодействующих элементарных частиц (кварков). При феноменологическом описании частиц достаточно сосредоточить неизвестные нам аспекты динамики в нескольких параметрах и установить соотношения, которые с точки зрения (нарушенной) симметрии должны выполняться во всяком случае.

Относительно малая интенсивность электромагнитного взаимодействия обусловливает незначительность его влияния на величину масс адронов. Действительно, массы частиц, различающихся только электрическим зарядом (т. е. принадлежащих одному изомультиплету), можно считать одинаковыми. В таком случае оператор $\hat{M}$ при учете лишь сильного и умеренно-сильного взаимодействий должен коммутировать не только с подалгеброй Картана (T_3, Y), но и с остальными генераторами изоспиновой подгруппы $SU^T(2)$. Следовательно, в обертывающей алгебре группы $SU^F(3)$ — это элемент вида

$$\hat{M} = M_0\hat{1} + \hat{\Delta}, \tag{80}$$

где M_0 — функция только операторов Казимира C_a рассматриваемой группы, а Δ коммутирует лишь с $SU^T(2) \otimes U^Y(1)$.

(66) Для простоты предположим, что $\Delta = \Delta_8$ — тензорный оператор (см. **(7)**), преобразующийся, как оператор гиперзаряда Y — восьмая компонента октета.

(67) В общем случае такие элементы обертывающей алгебры формально представимы производными $\hat{\Delta}_8 = (\partial/\partial\lambda_8 \hat{\Delta}_0)$ от инвариантного элемента Δ_0 по генератору $\lambda_8 = b = \hat{Y}$. Воспользовавшись тем, что Δ_0 от λ_8 зависит лишь через операторы Казимира C_a, а также явным выражением (см. **7.66**) для последних, можем записать

$$\Delta_8 = \sum_a \frac{\partial\Delta_0}{\partial C_a}\frac{\partial C_a}{\partial\lambda_8} = \alpha\lambda^8 + \beta d^{8ij}\lambda_i\lambda_j \ (i, j = 1, 2, \ldots, 8). \tag{81}$$

Здесь α и β — функции операторов Казимира рассматриваемой группы. Имея в виду кварковую структуру адронов, следует предположить, что α и β могут зависеть также от спина J частиц мультиплета, полного орбитального момента кварков L и других наблюдаемых. Таким образом, M_0, α, β суть феноменологические параметры, вообще говоря, свои для каждого мультиплета $SU^F(3)$. Выразив величину (81) через значения изоспина T и гиперзаряда Y, в результате для M получим выражение

$$\hat{M} = M_0\hat{1} + \tilde{\alpha}\,\hat{Y} + \tilde{\beta}\left[\hat{T}^2 - \frac{1}{4}\hat{Y}^2\right], \tag{82}$$

которое с хорошей точностью описывает массы барионных состояний. В случае мезонов формула (82) должна быть записана для оператора квадрата массы ($M \to m^2$, $M_0 \to m_0^2$).*) Необходимо, кроме того, учесть, что формулы вида (82) пригодны только для состояний одного мультиплета, тогда как некоторые из реальных мезонных состояний могут представлять собой набор компонент мультиплета и синглета (см. замечание (62)). Следовательно, в этом случае появляется еще один неизвестный нам параметр, описывающий смешивание.

(68) Пусть, например, $|\eta\rangle$, $|\eta'\rangle$ — физическое состояние (0^-)-мезонов η и η'. Представим их суперпозицией синглета $|\eta_0\rangle$ и компоненты октета $|\eta_8\rangle$:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \cos\vartheta\,|\eta_8\rangle - \sin\vartheta\,|\eta_0\rangle, \\ |\eta'\rangle &= \sin\vartheta\,|\eta_8\rangle + \cos\vartheta\,|\eta_0\rangle. \end{aligned} \tag{83}$$

При вычислении матричных элементов $\hat{m}^2$ для физических состояний достаточно дополнительно учесть, что функция m_0^2 для синглета, вообще говоря, может принимать иное значение, чем для октета. В результате для мезонных нонетов $(\Phi \oplus \eta)$ и $(\Phi^* \oplus \omega)$ имеем столько же параметров, сколько и независимых изомультиплетов, т. е. можем определить только величины этих параметров, в том числе параметр смешивания ϑ.

(69) Обсудим предположение (66). Первая часть его, согласно которой оператор $\hat{\Delta}$ — тензорный, означает, что Δ принадлежит конечномерному представлению $SU^F(3)$ и носит физический характер. На основании второй в разложении упомянутого представления предполагаем существенной лишь октетную компоненту. Для оценки такого приближения выясним, какие представления содержатся в этом разложении в самом общем случае. С этой целью обратимся к теореме, чрезвычайно полезной для вычисления матричных элементов тензорных операторов.

(70) **Теорема Вигнера — Эккарта.** Матричные элементы неприводимого тензорного оператора T_a^F между базисными векторами состояния $|F_i, a_i\rangle$ неприводимых унитарных представлений D^{F_i} компактной группы G в пространствах $\mathscr{H}_F$ имеют вид

$$\langle F_1, a_1 | T_a^F | F_2, a_2\rangle = \sum_{s_K, K} \left\langle \begin{matrix} F_1 & F \\ a_1 & a \end{matrix} \middle| \begin{matrix} K, & s_K \\ & a_2 \end{matrix} \right\rangle T(K, s_K | F_1, F), \tag{84}$$

*) В рамках теории калибровочных полей механизм спонтанного нарушения симметрии приводит именно к линейным формулам масс для барионов и квадратичным — для мезонов (см., например, [14]).

где $\left\langle \begin{matrix} F_1 F \\ a_1 a \end{matrix} \middle| \begin{matrix} K, s_K \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle$ — коэффициенты Клебша—Гордана; $T(K, s_K | F_1, F)$ — скалярные функции, а суммирование распространяется на те (и только те) представления D^K в разложении $\mathscr{H}_{F_1} \otimes \mathscr{H}_F = \bigoplus_{K, s_K} \mathscr{H}_{K, s_K}$, которые эквивалентны представлению D^{F_2}. (Инвариантные относительно G величины $T(K, s_K | F_1, F)$ принято называть редуцированными матричными элементами тензорного оператора.)

Доказательство основано на инвариантности тензорных операторов (см. (7)) относительно преобразования:

$$D^{Fa}_{\ \ b}(g)\, \hat{U}_g \hat{T}^{Fb}\, \hat{U}_g^{-1} = T^{Fa}. \tag{85}$$

(Без ограничения общности представление D^F в условии теоремы можно считать унитарным и значок опустить: $D^a_b = D_{ab}$.)

Если матричные элементы сужения $\hat{U}$ на $\mathscr{H}_F$ обозначить через $D^{F_i}_{a_i b_i}$:

$$\hat{U}_g | F_i, a_i \rangle = | F_i, b_i \rangle D^{F_i}_{b_i a_i}(g), \tag{86}$$

то для матричного элемента в (84) из соотношения (85) вытекает

$$\langle F_1, a_1 | T^F_a | F_2, a_2 \rangle =$$
$$= D^{F_1}_{a_1 b_1}(g)\, D^F_{ab}(g)\, D^{*F_2}_{a_2 b_2}(g) \langle F_1, b_1 | T^F_b | F_2, b_2 \rangle. \tag{87}$$

Ввиду фактической независимости правой и левой частей этого соотношения (87) от g напрашивается интегрирование обеих его частей по группе. Предварительно следует воспользоваться разложением (7.107):

$$D^{F_1}_{a_1 b_1}(g)\, D^F_{ab}(g) = \sum_{K, s_K} \left\langle \begin{matrix} F_1 & F \\ a_1 & a \end{matrix} \middle| \begin{matrix} K, & s_k \\ & a' \end{matrix} \right\rangle D^K_{a' b'}(g) \left\langle \begin{matrix} K, & s_K \\ & b' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} F_1 & F \\ b_1 & b \end{matrix} \right\rangle.$$

(Здесь и далее указано суммирование лишь по символу, нумерующему представления. Суммирование по другим повторяющимся индексам подразумевается.) Тогда в силу соотношения ортогональности матричных элементов неприводимых представлений группы G (теорема (6.46)) в сумме по (K, s_K) останутся лишь слагаемые для представлений (K, s_K), эквивалентных представлению F_2. В результате получим искомую форму (84), где

$$T(K, s_K | F_1, F) = \frac{1}{\dim D^{F_2}} \left\langle \begin{matrix} K, s_K \\ b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} F_1 & F \\ b_1 & b \end{matrix} \right\rangle \langle F_1, \ b_1 \ | \ T^F_b \ | \ F_2, \ b_2 \rangle. \tag{88}$$

(71) Следствие. Если группа G в теореме **(70)** однократно приводима, то рассматриваемый там матричный элемент пропорционален коэффициенту Клебша — Гордана:

$$\langle F_1, a_1 \mid T_a^F \mid F_2, a_2 \rangle = \left\langle \begin{matrix} F_1 & F \\ a_1 & a \end{matrix} \middle| \begin{matrix} F_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle T(F_2 \mid F_1, F). \qquad (89)$$

(72) Итак, по теореме Вигнера — Эккарта в разложении тензорного оператора $\hat{\Delta}$ содержатся те неприводимые представления (α), для которых коэффициенты Клебша — Гордана в правой части соотношения вида (84) отличны от нуля. Нетрудно установить, исходя из свойств указанных коэффициентов, что в этом (и только в этом) случае представление (α) должно содержаться в произведении представлений $(\alpha_i^*) \otimes (\alpha_i)$. Например, для октета барионов $\check{B}$ в массовом операторе существенны компоненты из неприводимых представлений

$$\hat{M} \in (8^*) \otimes (8) = (1) \oplus (8) \oplus (8) \oplus (10) \oplus (10^*) \oplus (27).$$

Требованию коммутативности с $SU^T(2) + U^Y(1)$ удовлетворяет лишь

$$\hat{\Delta} \in (8) \oplus (8) \oplus (27).$$

Следовательно, предположение, что $\Delta \sim Y$ (его называют *октетной доминантностью*) эквивалентно отбрасыванию компоненты из (*27*). В этом случае массовая формула (82) предсказывает одно соотношение для масс изомультиплетов N, Σ, Ξ, Λ^0.

В случае декуплета барионов D $M \in (10^*) \otimes (10) = (1) \oplus (8) \oplus (27) \oplus (64)$, октетная доминантность (отбрасывание (*27*) и (*64*)) приводит к возможности получения двух предсказаний на основе формулы (82) (одно из них — значение массы Ω^--гиперона, см. (**51**)). ▼

В заключение отметим, что по такой же схеме можно рассматривать соотношения масс в любой группе внутренней симметрии. В частности, в случае $SU^F(4)$ естественным обобщением октетной является 15-плетная доминантность. Направление в алгебре Ли $su^F(4)$, «вдоль» которого расщеплены массы, есть комбинация элементов (Y, C) подалгебры Картана, коммутирующих с изоспиновой подгруппой $SU^T(2)$. Определение элемента обертывающей алгебры $\mathcal{J}(su^F(4))$ с соответствующими свойствами повторяет процедуру, проделанную для $SU^F(3)$ (см. (81)), и в рамках данной схемы не содержит ничего принципиально нового.

Мы рассмотрели некоторые особенности описания симметрии при квантовомеханическом подходе к теории элементарных частиц. Взаимопревращение последних, проявляющееся в их взаимодействии, обусловливает переход к формализму вторичного квантования — квантовой теории поля. Эта теория должна основываться на группе Пуанкаре релятивистской симметрии.

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИММЕТРИЯ

Унитарные представления, играющие особую роль в квантовой теории, строились в гл. 7 для полупростых компактных групп Ли. Для некомпактных и неполупростых групп построение неприводимых унитарных представлений основано на методе индуцированных представлений.

§ 1. Алгебраическая конструкция индуцированных представлений. Унитарные представления. Простейшие свойства

Для любой группы G всегда можно построить регулярные (правое и левое) представления. Лишь для полупростых групп удается удовлетворительно провести разложение регулярного представления на неприводимые. Обобщим схему построения регулярного представления. Пусть для подгруппы K группы G известно представление $D(K, V)$. В пространстве $F(G; V)$ функций на G со значениями в V выделим подпространство $F(G, K; D)$ таких функций, что

$$f(gk) = D(k^{-1}) f(g), \text{ где } g \in G,\ k \in K. \tag{1}$$

Пусть X — факторпространство классов G/K. Условие (1) означает, что значения $f(g)$ во всех точках $g \in x \equiv g_x K$ можно получить из $f(g_x)$ с помощью операторов представления $D(K)$ (рис. 32).

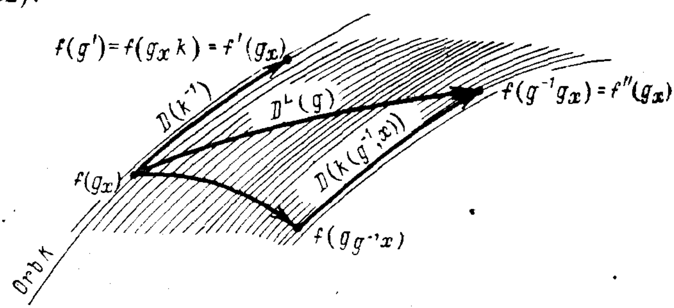


Рис. 32.

Рассмотрим действие левого регулярного представления D^L группы на $f(g) = f(g_x k) \in F(G, K; D)$ и покажем, что свойство (1) инвариантно относительно действия операторов $D^L(g)$:

$$D^L(g_1) f(g) = f(g_1^{-1} g_x k) = D^L(g_1) D(k^{-1}) f(g_x) = D(k^{-1}) f(g_1^{-1} g_x). \tag{2}$$

Подпредставление левого регулярного представления группы G, действующее на пространстве функций $F(G, K; D)$, называется *представлением группы G, индуцированным представлением D подгруппы K*. Обозначим его через $D_{K\uparrow G}$.

В частном случае $K=e$, $\dim V=1$ пространство $F(G, K; D)$ совпадает с пространством скалярных функций на группе G и индуцированное представление $D_{K\uparrow G}$ эквивалентно регулярному D^L. Аналогично для произвольной подгруппы K и одномерного тривиального представления $D(K)$ индуцирование приводит к квазирегулярному представлению D^{QL}.

Индуцированное представление можно реализовать на пространстве $F(X, V)$ функций на $X=G/K$ со значениями в V. Для этого всякой $f(g)\in F(G, K; D)$ сопоставим функцию $\varphi(x)\in F(X, V)$ по правилу

$$\varphi(x)=f(g_x). \tag{3}$$

(1) Упражнение. Покажите, что пространства $F(X, V)$ и $F(G, K; D)$ изоморфны. ▼

Пусть отображение $z: F(G, K; D)\to F(X, V)$ осуществляет указанный изоморфизм. Тогда представление $zD_{K\uparrow G}z^{-1}\equiv D^X_{K\uparrow G}$ в пространстве $F(X, V)$ эквивалентно $D_{K\uparrow G}$:

$$\begin{aligned} zD_{K\uparrow G}(g)\,z^{-1}\varphi(x) &= zD_{K\uparrow G}(g)\,f(g_x)=zf(g^{-1}g_x)= \\ &= zf\left(g_{g^{-1}x}\,k(g^{-1}, x)\right)=zD\left(k^{-1}(g^{-1}, x)\right)f\left(g_{g^{-1}x}\right)= \\ &= D\left(g_x^{-1}\,g g_{g^{-1}x}\right)\varphi(g^{-1}x). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь использованы свойства факторов (2.16), (2.17). Итак, операторы индуцированного представления $D^X_{K\uparrow G}$ в пространстве функций на X со значениями в V имеют вид

$$D^X_{K\uparrow G}(g)\,\varphi(x)=D\left(g_x^{-1}gg_{g^{-1}x}\right)\varphi(g^{-1}x). \tag{5}$$

(Там, где это не приведет к недоразумениям, не будем явно указывать символ X в операторе $D^X_{K\uparrow G}(g)$.)

Нетрудно убедиться, что представления, получаемые для разных систем представителей $\{g_x\}$ в формуле (3), эквивалентны. Аналогичная конструкция возникает при использовании правых сдвигов и правого регулярного представления D^R.

Далее мы убедимся, что при определенном выборе подгруппы K и представления D индуцирование позволяет получить унитарные неприводимые представления группы G.

(2) Сформулируем условия, при которых в пространствах $F(X, V)$ и $F(G, K; D)$ можно ввести скалярные произведения так, чтобы представления $D^X_{K\uparrow G}$ и $D_{K\uparrow G}$ стали унитарными. Излагаемый ниже метод называется *методом Макки* [44], а соответствующие представления — *индуцированными в смысле Макки*.

Начнем рассмотрение с простейшего случая, когда группа G унимодулярна, а подгруппа K компактна. Пусть представление $D(K, V)$ унитарно, $F(G, K; D)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом по мере Хаара на G. Тогда скалярное произведение на пространстве $F(G, K; D)$ естественно определить по формуле

$$(f_1, f_2)_F = \int_G (f_1(g), f_2(g))_V \, d\mu(g). \tag{6}$$

Унитарность представления $D_{K\uparrow G}$ на гильбертовом пространстве $F(G, K; D)$ очевидна.

Подынтегральное выражение в (6) постоянно на классах $x = g_x K$, поэтому факторизация меры $d\mu(g)$ приводит скалярное произведение $(,)_F$ к виду

$$\begin{aligned}(f_1, f_2)_F = \int d\mu(x) \int d\mu(k) (f_1(g_x k), f_2(g_x k))_V = \\ = \int d\mu(x) (\varphi_1(x), \varphi_2(x))_V.\end{aligned} \tag{7}$$

Если K некомпактна, скалярное произведение (6) теряет смысл, однако форма (7) как определение скалярного произведения (φ_1, φ_2) в пространстве $F(X, V)$ остается справедливой. (Тогда унитарность $D^X_{K\uparrow G}$ обеспечена унитарностью $D(K, V)$.)

В случае неунимодулярных групп G и K по унитарному представлению $D(K)$ необходимо построить неунитарное $C(K)$:

$$C(K) \equiv \sqrt{\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}} \, D(k), \tag{8}$$

где Δ_G и Δ_K — модули соответствующих групп (см. (**6.55**)). Затем на пространстве $F(G, K; C)$ стандартно строится индуцированное представление $C_{K\uparrow G}$. ▼

(3) Упражнение. Покажите, что $C_{K\uparrow G}$ унитарно относительно скалярного произведения (7) с квазиинвариантной мерой (6.61) в качестве меры интегрирования.

(4) **Транзитивность индуцирования.** Если группа G содержит вложенные друг в друга подгруппы $H \supset K$, то представление группы G можно индуцировать как непосредственно с подгруппы K, так и через промежуточное представление $D_{K\uparrow H}$ подгруппы H, в свою очередь индуцированное с K. Оба пути приводят к эквивалентным результатам:

$$D_{K\uparrow G} \approx D_{K\uparrow H\uparrow G}. \ ▼ \tag{9}$$

(5). **Теорема о подгруппах.** Рассмотрим ограничение $D_{K\uparrow G\downarrow H}$ индуцированного представления $D_{K\uparrow G}$ на произвольную подгруппу $H \subset G$. Для описания его структуры воспользуемся свойствами двойных смежных классов $Y \equiv H \diagdown G \diagup K$ (**2.47**). Напомним их.

Если определить $K_y \equiv g_y K g_y^{-1}$ и $L_y \equiv K_y \cap H$, то каждый двойной класс y представляет собой дизъюнктное объединение классов $x \in X \equiv G/K$ вида $h_{z(y)} g_y K$, где $z(y) \in Z_y \equiv H/L_y$:

$$y = \bigcup_{z(y) \in Z_y} h_{z(y)}\, g_y K. \tag{10}$$

Согласованный выбор представителей классов x означает

$$g_x = h_{z(y)}\, g_y. \tag{11}$$

Пусть D_K — унитарное представление, $D^y_{K_y}$ — представление группы K_y определяемое формулой $D^y_{K_y}\ (k_y = g_y k g_y^{-1}\ ) = D(k)$. Построим ограничение $D^y_{K_y \downarrow L_y}$ и индуцированное им представление $D^y_{K_y \downarrow L_y \uparrow H}$. С его помощью ограничение $D_{K \uparrow G \downarrow H}$ можно разложить в прямой интеграл представлений (доказательство см. в [20]):

$$D_{K \uparrow G \downarrow H} = \int_Y d\mu(y)\, D^y_{K_y \downarrow L_y \uparrow H}. \blacktriangledown \tag{12}$$

Для анализа приводимости индуцированных представлений нам потребуются свойства сплетающих операторов для представлений, индуцированных с разных подгрупп.

(6) Теорема о переплетении индуцированных представлений. Пусть K и H — такие подгруппы в G, что пространства $X = G/K$ и $X_1 = G/H$ компактны. Пусть представления D_K и B_H конечномерны, а представления $D_{K \uparrow G}$ и $B_{H \uparrow G}$ реализованы в пространствах функций $f \in F(G, K;\ D)$ и $\psi \in F(G, H;\ B)$ соответственно. Пусть $z(g)$ — обобщенная функция на группе G со значениями в $\mathrm{Hom}(V_D, V_B)$ и структурным условием

$$z(hgk) = B(h)\, z(g)\, D(k). \tag{13}$$

Тогда сплетающие операторы $\zeta \in \varsigma[D_{K \uparrow G}, B_{H \uparrow G}]$ имеют вид

$$(\zeta \cdot f)(g') = \int_G z(g)\, f(g'g)\, d\mu(g) = \int_G z(g'^{-1} g)\, f(g)\, d\mu(g) =$$

$$= \int_X z(g'^{-1} g_x)\, f(g_x)\, d\mu(x). \tag{14}$$

Доказательство см. в [15]. ▼

(7) З а м е ч а н и е. Если подгруппа K некомпактна, то оператор ζ может существовать только в виде интеграла по факторпространству X. ▼

В силу структурного условия функция z задана, если известны ее значения на представителях g_y двойных классов $y = Hg_yK$. Элементы hg_yk и $h'g_yk'$ могут совпадать, если $h' = hl$, а $k' = g_y^{-1} l^{-1} g_y k$, где $l \in L_y$ (см. § 2.4). Следовательно,

$$B(l)\, z(g_y)\, D(g_y^{-1}\, l^{-1}\, g_y) = z(g_y). \tag{15}$$

Здесь D можно считать оператором ограничения $D^y_{K_y \downarrow L_y}$ представления $D^y_{K_y}$ на подгруппу L_y. Иными словами,

$$z(g_y) \in \varsigma\left[D^y_{K_y \downarrow L_y},\ B_{H \downarrow L_y}\right]. \tag{16}$$

Отметим, что для $G=H \triangleright K$, когда $Y=H\diagdown G/K$ состоит из одного элемента, в качестве которого удобно выбрать e, функция $z(g)$ определяется значением в одной точке e.

(8) Приведем аналогичный результат для неунимодулярных групп. Пусть Δ_G, Δ_K и Δ_H — модули соответствующих групп. Рассмотрим пространство сплетающих операторов ζ для представлений $E_{K\cdot G}$ и $C_{H\uparrow G}$, где E_K и C_H определяются с помощью представлений D_K и B_H по формулам вида (8). Построим дополнительно представление группы K с операторами

$$\widetilde{E}(k) \equiv \sqrt{\frac{\Delta_G(k)}{\Delta_K(k)}}\, D(k). \tag{17}$$

Свойство (3) справедливо для представлений $C_{K\uparrow G}$ и $E_{H\uparrow G}$, если в его формулировке видоизменить структурное условие (13):

$$z(hgk) = E(h)\, z(g)\widetilde{C}(k), \tag{18}$$

и выражение для оператора ζ записывать в виде интеграла по факторпространству X:

$$(\zeta f)(g) = \int\limits_X z(g^{-1}g_x)\, f(g_x)\, d\mu(x) = \int\limits_X z(g_x)\, f(gg_x)\, d\mu(x). \tag{19}$$

Здесь функция $z(g)$ также полностью определяется своими значениями на пространстве Y и должна удовлетворять условию

$$z(g_y) \in \zeta\left[\widetilde{E}^y_{K_y\downarrow L_y},\quad C_{H\downarrow L_y}\right]. \ \blacktriangledown \tag{20}$$

В частном случае $K=H$ и $B=D$ теорему о переплетении можно использовать для вывода критерия неприводимости индуцированного представления.

(9) Утверждение. Представление $D_{K\uparrow G}$ операторно неприводимо, если D_K унитарно, неприводимо и $\zeta\left[D^y_{K_y\downarrow L_y},\right.$ $\left.D_{K\downarrow L_y}\right]=0$ ($\zeta\left[\widetilde{C}^y_{K_y\downarrow L_y},\ E_{K\downarrow L_y}\right]=0$ для неунимодулярных групп) для всех классов $y\in Y$ кроме тривиального. $\triangledown$

Доказательство. В данном случае $D_{K\uparrow G}$ — унитарное представление. Оно неприводимо, если всякий оператор $\zeta\in\zeta[D_{K\uparrow G}]$ вида (14) кратен единичному (см. (6.22)). Для этого достаточно, чтобы представление D было неприводимо и зависимость $z(g_y)$ от $y\in K\diagdown G/K$ имела вид $\delta(y-e)$.

Действительно,

$$(\zeta\cdot f)(g) = \int\limits_X d\mu(x)\, z(g_x)\, f(gg_x) =$$

$$= \int_Y d\mu(y) \int_{Z_y} d\mu(z)\, z(k_{z(y)} g_y) f(g k_{z(y)} g_y) =$$

$$= \int_Y d\mu(y) \int_{Z_y} d\mu(z)\, D(k_{z(y)})\, z(g_y)\, f(g k_{z(y)} g_y). \qquad (21)$$

Подставим в это выражение $z(g_y) = \delta(y-e)$:

$$\int_Y d\mu(y) \int_{Z_y} d\mu(z)\, D(k_{z(y)})\, \delta(y-e)\, f(g k_{z(y)} g_y) =$$

$$= \int_{Z_e} d\mu(z)\, D(k_{z(e)}) f(g k_{z(e)}) = f(g) \int_{Z_e} d\mu(z).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что L_y при $y=e$ совпадает с K и $\zeta[D_K] \approx C$ для неприводимого представления D_K. ▼

Аналогично доказывается следующее утверждение.

(10) Неприводимые индуцированные представления $D_{K\uparrow G}$ и $B_{H\uparrow G}$ неэквивалентны, если $\zeta[D^y_{K_y\downarrow L_y}, B_{H\downarrow L_y}] = 0$ при всех $y \in Y$. ▼

Нетрудно переформулировать это утверждение для неунимодулярных групп.

Одним из важнейших результатов в общей теории индуцированных представлений является теорема взаимности, впервые доказанная Фробениусом для конечных групп.

(11) Теорема Фробениуса. Пусть B_G — представление группы G, D_K — унитарное, неприводимое представление подгруппы K. Тогда

$$\dim \zeta[D_{K\uparrow G}, B] = \dim \zeta[D, B_{G\downarrow K}]. \blacktriangledown \qquad (22)$$

Это свойство представляет собой сокращенный вариант теоремы Макки (полную формулировку см. в [2, гл. 18 § 3]).

Остановимся на важном следствии теоремы Фробениуса.

(12) Пусть группа G компактна. Напомним, что регулярное представление D^L группы G эквивалентно $D_{e\uparrow G}$, индуцированному тривиальным представлением подгруппы $K=e$. Если $B(G, V)$ — неприводимое представление, то размерность пространства $\zeta[D(e), B_{G\downarrow e}] = \zeta[I_D, I_B]$ совпадает с размерностью оператора I_B, т. е. пространства V_B. Теорема Фробениуса позволяет утверждать, что регулярное представление содержит любое неприводимое представление B группы G с кратностью, равной $\dim V_B$ (ср. с **(6.49)**).

§ 2. Метод малой группы. Представления группы $E(2)$. Группа Пуанкаре, ее орбиты. Представления собственной группы Пуанкаре для $m \neq 0$ и $m=0$. Представления общей группы Пуанкаре

Процедура построения неприводимых унитарных представлений групп, содержащих нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу, называется методом малой группы. Он был разработан Е. П. Вигнером [7] специально для группы Пуанкаре. В пятидесятых годах Г. Макки предпринял детальное систематическое исследование индуцированных представлений, и в частности метода малой группы, получившего широкое распространение в теории групп и квантовой физике.

Пусть G — связная группа Ли. Тогда по теореме Леви—Мальцева (см. теорему **(4.45)**) $G \approx S \triangleright N$, где подгруппа S полупроста, а подгруппа N разрешима. Пусть D_N — неприводимое представление нормальной подгруппы. Всякому элементу $g \in G$ сопоставим представление $D_N^g(n) = D_N(g^{-1}ng)$. Совокупность представлений $\{D_N^g;\ g \in G\}$ называется *орбитой представления* D_N.

Среди D_N^g очевидно присутствуют представления, эквивалентные D_N, например, D_N^m, где $m \in N$. Выделим совокупность всех таких $h \in G$, что $D_N^h \approx D_N$. Как легко убедиться, множество $\{h\}$ составляет подгруппу $H \subset G$. Подгруппа H носит название *малой группы представления* D_N. Очевидно, что N содержится в H как нормальная подгруппа. Факторгруппа H/N называется *малой когруппой*.

Если в качестве исходного представления выбрать любой другой элемент D_N^g орбиты $\{D_N^g\}$, то его малая группа H' будет сопряжена группе $H: H' = gHg^{-1}$. Все малые группы представления одной орбиты изоморфны.

(13) Теорема. Пусть разложение Леви—Мальцева связной группы G имеет вид $G \approx S \triangleright N$. Пусть D_N — неприводимое (одномерное) представление нормальной подгруппы N. Построим его малую группу H и малую когруппу $R = H/N$. Рассмотрим неприводимое представление D_R группы R и представление B_H вида

$$B_H\ (nh_r) = D_N\ (n)\, D_R\ (r). \tag{23}$$

Индуцированное представление $B_{H\uparrow G}$ является неприводимым, и тем же методом можно получить всякое неприводимое представление группы G. При этом каждой орбите $\{D_N^g\}$ взаимно-однозначно сопоставляется класс эквивалентных неприводимых представлений группы G.

Всякое унитарное представление группы G можно построить в виде $B_{H\uparrow G}$ с помощью унитарных представлений D_N и D_R. ∇

Приведем алгебраическую часть доказательства. Подробное доказательство см. в [2, гл. 17, § 1].

Построим представление $D_{N\uparrow H} \equiv C_H$. По теореме о подгруппах (5) его ограничение $C_{H\downarrow N}$ разлагается в прямой интеграл

$$C_{H\downarrow N} = D_{N\uparrow H\downarrow N} = \int\limits_{Y'} d\mu(y')\, D^{y'}_{N_{y'}\downarrow L_{y'}\uparrow N} (Y' = N \diagdown H / N).$$

Поскольку N — нормальная подгруппа в H, то $N_{y'} \approx N \approx L_{y'}$,

$$C_{H\downarrow N} = \int\limits_{Y'} d_\mu(y')\, D^{y'}_N, \tag{24}$$

и все $D^{y'}_N$ эквивалентны унитарному неприводимому представлению D_N. Свойство (24) очевидно справедливо и для всякой неприводимой компоненты $C^{(n)}_H \equiv B_H$ представления C_H.

Покажем, что индуцированное представление $B_{H\uparrow G}$ неприводимо. Используем утверждение (9) в качестве критерия неприводимости. Рассмотрим пространство $Y = H \diagdown G/H$, найдем группы $H_y = g_y H g_y^{-1}$, $L_y = H_y \cap H$ и построим представления $B^y_{H_y}, B^y_{H_y}(g_y h g_y^{-1}) = B(h)$. Всякая группа H_y очевидно содержит нормальную подгруппу N. Тем же свойством обладает и всякая группа L_y. Для нетривиальных классов $y \in Y$ достаточным условием обращения в нуль пространства $\mathfrak{I}\,[B^y_{H_y\downarrow L_y}, B_{H\downarrow L_y}]$ является отсутствие нетривиальных сплетающих операторов для ограничений $B^y_{H_y\downarrow L_y\downarrow N}$ и $B_{H\downarrow L_y\downarrow N}$. Поскольку для $B_{H\downarrow N}$ справедливо разложение (24), то всякое представление $B^y_{H_y\downarrow N}$ также разлагается в прямой интеграл

$$B^y_{H_y\downarrow N} = \int D^{(y)\,y'}_N\, d\mu(y'). \tag{25}$$

Представления $D^{(y)y'}_N$ образованы из $D^{y'}_N \approx D_N$ с помощью элементов $g_y \notin H$. Следовательно, если $y \neq \{H\}$, то во множестве $\left\{\left(D^{(y)\,y'_1}_N \sim D^{y'_2}_N\right)\right\}$ нет эквивалентных пар представлений. Неприводимость представления $B_{H\uparrow G}$ доказана.

Итак, неприводимое унитарное представление группы G может быть индуцировано неприводимой компонентой B_H представления $D_{N\uparrow H}$. Покажем, что для представления B_H справедлива формула (23). Малая группа H содержит нормальную подгруппу N. Следовательно, H, как и G, представима в виде полупрямого произведения $H \approx R \triangleright N$. Элементы r подгруппы R могут быть выбраны в качестве представителей классов H/N, причем все факторы $n(r_1, r_2)$ тривиальны (см. (2.45)).

Реализуем представление C_H на пространстве $F(H, N; D)$. Так как всякий элемент $h \in H$ представим в виде $h = nr$, то произвольная функция $f \in F(H, N; D)$ в силу структурного условия полностью определяется своими значениями на факторгруппе R. Поэтому достаточно рассмотреть действие операторов $C_H(h)$ на $F(R, N; D)$:

$$C_H(h) f(r_1) = D_{N\uparrow H}(h = nr) f(r_1) = f(r^{-1}n^{-1} r_1) =$$
$$= f(r^{-1}r_1\gamma_{r_1}(n^{-1})) = D_N^{-1}(\gamma_{r_1}(n^{-1})) f(r^{-1} r_1) = D_N^{r_1}(n) f(r^{-1} r_1).$$

Представление D_N неприводимо и, следовательно, одномерно. По определению малой группы представление $D_N^{r_1}(n)$ эквивалентно D_N и в силу одномерности совпадает с ним, так что

$$C_H(h = nr) f(r_1) = \dot{D}_N(n) f(r^{-1} r_1). \tag{26}$$

Отсюда следует, что $C_H(n)$ есть оператор умножения на число, в то время как $C_H(r)$, осуществляющий левый сдвиг на скалярных функциях f, является оператором левого регулярного представления группы R, так что подпространство в $F(H, N; D)$, неприводимое относительно представления $C_{H\downarrow R}$, неприводимо и относительно C_H. Иными словами, выделение неприводимой компоненты B_H сводится к аналогичной задаче для левого регулярного представления группы R.

Предположим, что эта задача решена — неприводимое унитарное представление $D(R, V)$ построено. Пусть B_H — неприводимая компонента представления C_H, такая, что $B_{H\downarrow R} \approx D(R, V)$. Формула (26) справедлива и для подпредставления B_H:

$$D_N(n) D_R(r) v = B_H(nr) v \quad (v \in V). \tag{27}$$

Следовательно, операторы $B_H(h)$ обладают структурой (23).

Всякое неприводимое представление D_G может быть выделено из представления, индуцированного его ограничением $D_{G\downarrow N}$, в виде неприводимой компоненты. Мы предлагаем читателю самостоятельно провести детальное доказательство этой части теоремы.

(14) Упражнение. Покажите, что всякое унитарное неприводимое представление группы G представимо в виде $B_{H\uparrow G}$, где B_H определяется формулой (27). ∇

Вновь вернемся к рассмотрению неприводимого представления $D(G, W)$ и его ограничения $D_{G\downarrow N}$. Очевидно, что какую бы неприводимую компоненту $D^{(n)}_{G\downarrow N}$ мы ни выбрали для построения операторов B_H вида (27), индуцированное представление $B_{H\uparrow G}$ будет эквивалентно D_G.

Пусть $D^{(n)}_{G\downarrow N}$ действует в пространстве $W^n \subset W$. В силу неприводимости D_G всякий вектор $w^m \in W^m$ (соответствующий неприводимой компоненте $D^{(m)}(G\downarrow N, W^m)$) представим в виде $D_G(g) w^n$. Следовательно, всякое подпредставление $D^{(m)}_{G\downarrow N}$ эквивалентно $D^{(n)g}_{G\downarrow N}$. Для получения неприводимых представлений группы G (из каждого класса эквивалентности) достаточно выбрать по одному представлению D_N из каждой орбиты неприводимого представления группы N. ▼

(15) Замечание. При доказательстве теоремы мы не использовали полупростоту подгруппы S. Утверждения теоремы остаются в силе и тогда, когда группа изоморфна полупрямому произведению разрешимой нормальной подгруппы N и произвольной подгруппы K.

(16) Проиллюстрируем метод малой группы простейшим примером. Построим неприводимые унитарные представления группы $\boldsymbol{E}(2)$. В данном случае справедливо разложение Леви — Мальцева $\boldsymbol{E}(2) \approx U(1) \triangleright \boldsymbol{P}(2)$, несмотря на то, что фактор Леви $U(1)$ оказался абелевой группой.

Пусть $\mathbf{b}$ и $\mathbf{t}$ — двумерные вещественные векторы пространств $P(2)$ и $P(2)^{(*)}$ соответственно. Вектор $\mathbf{t}$ параметризует неприводимые унитарные представления группы $\boldsymbol{P}(2)$:

$$D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)}(\tau_{\mathbf{b}}) = \exp i\,(\mathbf{t},\ \mathbf{b}). \tag{28}$$

Поскольку подгруппа $\boldsymbol{P}(2)$ нормальна, ее топологическое пространство $P(2)$ является $\boldsymbol{E}(2)$-модулем относительно преобразований подобия

$$\chi_{(g=\tau_{\mathbf{c}}u)}:\begin{cases}\tau_{\mathbf{b}} \to g^{-1}\tau_{\mathbf{b}}g = u^{-1}\tau_{\mathbf{b}}u = \tau_{(u^{-1}\mathbf{b})},\\ \mathbf{b} \to u^{-1}\,\mathbf{b},\end{cases}$$

где u действует на векторы $\mathbf{b} \in P(2)$ как оператор вращения в определяющем представлении. На дуальном пространстве $P(2)^{(*)} \equiv T(2)$ реализуется дуальный $\boldsymbol{E}(2)$-модуль:

$$\chi_{(g=\tau_{\mathbf{b}}u)}: \mathbf{t} \to u^{\mathrm{T}}\mathbf{t}. \tag{29}$$

Орбиты группы $\boldsymbol{E}(2)$ в пространстве $T(2)$ — окружности радиусом r. Множество орбит распадается на два класса: $r>0$ и $r=0$. Всякой орбите $\mathrm{Orb}\,\boldsymbol{E}(2)$ в $T(2)$ соответствует орбита $\{(D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)})^g\}$ $(\mathbf{t} \in \mathrm{Orb}\,\boldsymbol{E}(2))$ представления $D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)}$:

$$(D^{\mathbf{t}})^g(\tau_{\mathbf{b}}) = D^{\mathbf{t}}(g^{-1}\tau_{\mathbf{b}}g) = D^{\mathbf{t}}(u^{-1}\tau_{\mathbf{b}}u) = D^{\mathbf{t}}(\tau_{(u^{-1}\mathbf{b})}) = D^{(u^{\mathrm{T}}\mathbf{t})}(\tau_{\mathbf{b}}). \tag{30}$$

Рассмотрим случай $r>0$. Здесь подгруппа стабильности точки (она же малая группа H представления) совпадает с $\boldsymbol{P}(2)$ в силу соотношений (29), (30). Малая когруппа тривиальна, и представление $B^{\mathbf{t}}_H$ имеет вид

$$B^{\mathbf{t}}_H(\tau_{\mathbf{b}}) = D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)}(\tau_{\mathbf{b}}).$$

Индуцированное представление реализуем в пространстве скалярных функций на $X \approx \boldsymbol{E}(2)/H \approx U(1) \approx S^1$:

$$B^{\mathbf{t}}_{H\uparrow \boldsymbol{E}(2)}\left(\tau_{\mathbf{b}}u_{\alpha}\right)\varphi(\beta)=D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)}\left(u_{\beta}^{-1}\tau_{\mathbf{b}}u_{\alpha}u_{\left(u_{\alpha}^{-1}\ \tau_{\mathbf{b}}^{-1}\ \beta\right)}\right)\times$$

$$\times\varphi\left(u_{\alpha}^{-1}\tau_{\mathbf{b}}^{-1}\beta\right)=D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)}\left(u_{\beta}^{-1}\tau_{\mathbf{b}}u_{\beta}\right)\varphi(\beta-\alpha)=$$

$$=D^{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{P}(2)}\left(\tau_{\left(u_{\beta}^{-1}\mathbf{b}\right)}\right)\varphi(\beta-\alpha)=\exp i\left((u_{\beta}\mathbf{t}),\ \mathbf{b}\right)\varphi(\beta-\alpha), \qquad (31)$$

где $\alpha,\ \beta\in[0,\ 2\pi)$, u_{β} играют роль представителей классов $x\approx S^{1}$.

Перейдем к рассмотрению орбиты с $r=0$. В этом случае группа $\boldsymbol{E}(2)$ целиком составляет малую группу H (см. формулу (62)). Малая когруппа R изоморфна $U(1)$. Запишем ее унитарные неприводимые представления в виде

$$D^{j}_{R}(u_{\alpha})=\exp ij\alpha\quad(\alpha\in[0,\ 2\pi),\quad j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \qquad (32)$$

В силу совпадения малой группы с исходной группой $\boldsymbol{E}(2)$ искомое индуцированное представление эквивалентно B_{H}:

$$B^{j}_{H\uparrow \boldsymbol{E}(2)}(g)\approx B^{j}_{H}\left(g=\tau_{\mathbf{b}}u_{\alpha}\right)=D^{j}_{R}(u_{\alpha})=\exp ij\alpha. \qquad (33)$$

Мы построили полную систему неприводимых унитарных представлений группы $\boldsymbol{E}(2)$. ▼

В группе Пуанкаре закон композиции определяется умножениями в группах $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\boldsymbol{P}$ и автоморфизмами χ_{Λ}:

$$\Pi'\Pi=(\Lambda',\ \tau_{a'})(\Lambda,\ \tau_{a})=(\Lambda'\Lambda,\ \chi_{\Lambda}(\tau_{a'})\tau_{a})=\left(\Lambda'\Lambda,\ \tau_{\Lambda^{-1}a'},\tau_{a}\right)=$$

$$=\left(\Lambda'\Lambda,\ \tau_{(\Lambda^{-1}a'+a)}\right). \qquad (34)$$

Метод малой группы применим для связных групп Ли. Поэтому конструирование представлений группы Пуанкаре начнем с построения неприводимых представлений ее связной компоненты — собственной ортохронной группы Пуанкаре $\boldsymbol{\Pi}^{\uparrow}_{+}\approx\approx\boldsymbol{\Lambda}^{\uparrow}_{+}\rhd\boldsymbol{P}$.

В гл. 8 было установлено, что нам необходимы унитарные проективные представления группы Пуанкаре и что они эквивалентны векторным унитарным представлениям, ее универсальной накрывающей. Здесь и далее для краткости квантово-механическую группу Пуанкаре будем обозначать буквой $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\boldsymbol{\Pi}\equiv\widehat{\boldsymbol{\Pi}}^{\uparrow}_{+}\approx SL\ (2,\ C)_{R}\rhd\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{L}\rhd\boldsymbol{P}.$$

Рассмотрим группу $\boldsymbol{\Pi}$ как $\boldsymbol{\Pi}$-модуль относительно преобразований подобия. Тогда нормальная подгруппа $\boldsymbol{P}$ также приобретает структуру $\boldsymbol{\Pi}$-модуля. Очевидно, что сама подгруппа $\boldsymbol{P}$ действует на $\boldsymbol{P}$ тривиально. Действие $\boldsymbol{L}$ на $\boldsymbol{P}$ соответствует автоморфизмам χ_{L}. Выпишем явный вид преобразований пространства $\boldsymbol{P}$ группы $\boldsymbol{P}$ и дуального ему пространства $P^{(*)}\ni p$ со структурой дуального $\boldsymbol{\Pi}$-модуля:

$$L:\tau_a\to\chi_L(\tau_a)=L^{-1}\tau_a L=\tau_{\left(\Lambda_L^{-1}a\right)},$$
$$L:a\to\Lambda_L^{-1}a,\quad L:p\to\Lambda_L p, \tag{35}$$
$$\tau_b:a\to a,\quad \tau_b:p\to p.$$

$\boldsymbol{L}$-модуль $P^{(*)}$ эквивалентен $\boldsymbol{L}$-модулю M_4.

Классификация орбит группы $\boldsymbol{\Pi}$ на $P^{(*)}$ совпадает с классификацией орбит $\boldsymbol{L}$ на M_4 (см. (3.88)—(3.92)):

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \mathcal{O}_m^+\equiv\{p\mid p^2=m^2;\quad m^2>0;\quad p_0>0\};\\
&2.\quad \mathcal{O}_m^-\equiv\{p\mid p^2=m^2;\quad m^2>0;\quad p_0<0\};\\
&3.\quad \mathcal{O}_{im}\equiv\{p\mid p^2=-m^2;\quad m^2>0\};\\
&4.\quad \mathcal{O}_0^+\equiv\{p\mid p^2=0;\quad p_0>0\};\\
&5.\quad \mathcal{O}_0^-\equiv\{p\mid p^2=0;\quad p_0<0\};\\
&6.\quad \mathcal{O}_0^0\equiv\{p=(0,\,0,\,0,\,0)\}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

В указанных $\boldsymbol{L}$-однородных топологических пространствах подгруппами стабильности стандартного вектора являются $SU(2)$ для $\mathcal{O}_m^+$ и $\mathcal{O}_m^-$, $SL(2,\,R)\approx SU(1,\,1)$ — для $\mathcal{O}_{im}$, $\widetilde{\boldsymbol{E}}(2)$ (двукратная накрывающая группы $\boldsymbol{E}(2)$) — для $\mathcal{O}_0^+$ и $\mathcal{O}_0^-$ и, наконец, сама $\boldsymbol{L}$ — для $\mathcal{O}_0^0$. Поскольку подгруппа $\boldsymbol{P}$ тривиально действует на векторы $p\in P^{(*)}$, то подгруппами стабильности $\boldsymbol{\Pi}$-однородных пространств (36) являются:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \mathcal{O}_m^+ \text{ и } \mathcal{O}_m^- - SU(2)\rhd\boldsymbol{P},\ \text{стандартный вектор } p=(m,\,0,\,0,\,0);\\
&2.\quad \mathcal{O}_0^+ \text{ и } \mathcal{O}_0^- - \widetilde{\boldsymbol{E}}(2)\rhd\boldsymbol{P},\ \text{стандартный вектор } p=(1,\,0,\,0,\,1);\\
&3.\quad \mathcal{O}_{im} - SU(1,\,1)\rhd\boldsymbol{P},\ \text{стандартный вектор } p=(0,\,m,\,0,\,0);\\
&4.\quad \mathcal{O}_0^0 - \boldsymbol{\Pi}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Приступим к построению неприводимых представлений группы $\boldsymbol{\Pi}$. Запишем неприводимое унитарное представление группы $\boldsymbol{P}$ в виде

$$D_{\boldsymbol{P}}(\tau_a)=\exp\ i\,(p\cdot a). \tag{38}$$

Здесь вектор p, нумерующий представления, очевидно принадлежит дуальному $\boldsymbol{\Pi}$-модулю $P^{(*)}$. Отметим, что в представлении $D_{\boldsymbol{P}}$ всякий генератор группы трансляций $\boldsymbol{P}$ реализуется оператором умножения на число — компоненту вектора p. Построим орбиту представления $D_{\boldsymbol{P}}$:

$$D^{\Pi}(\tau_a)=D(\Pi^{-1}\tau_a\,\Pi)=D(L^{-1}\tau^{-1}\,\tau_a\tau L)=D(L^{-1}\tau_a L)=D(\chi_L(\tau_a))=$$
$$=D\left(\tau_{\left(\Lambda_L^{-1}\,a\right)}\right)=\exp i\left(p\cdot(\Lambda_L^{-1}\,a)\right)=\exp i\left((\Lambda_L p)\cdot a\right). \tag{39}$$

Соотношение (39) означает, что множество неприводимых представлений $\{D_{\boldsymbol{P}}^{\Pi}\}$ нумеруется параметрами p, принадлежащими одной орбите группы Пуанкаре в пространстве $P^{(*)}$.

(17) Пусть $p \in \mathscr{O}_m^+$. Выберем исходное представление D_P с индексом p (стандартным вектором $\mathring{p} = (m, 0, 0, 0)$). Тогда из формулы (39) следует, что малая группа H представления D_P изоморфна подгруппе стабильности стандартного вектора однородного пространства $\mathscr{O}_m^+$, а малая когруппа R совпадает с $SU(2)$:

$$H \approx SU(2) \rhd \boldsymbol{P}, \quad R \approx \widehat{\boldsymbol{R}} \approx SU(2). \tag{40}$$

Полная система неприводимых унитарных представлений $D^J_{\widehat{R}}$ группы $SU(2)$ была построена в § 7.2. С помощью операторов $D^J_{\widehat{R}}(r)$ и $D^{\mathring{p}}_P(\tau)$ по формуле (23) построим неприводимое унитарное представление B_H:

$$B_H^{J\mathring{p}}(\tau h_r) = D_P^{\mathring{p}} \qquad {}_{\widehat{R}}(r). \tag{41}$$

Неприводимое унитарное представление группы Пуанкаре $B^{J\mathring{p}}_{H\uparrow \Pi}$ реализуем в пространстве $F(X, V)$ интегрируемых с квадратом функций φ на $X = \Pi/H \approx L/\widehat{R}$ со значениями в пространстве V представления $B_H^{J\mathring{p}}$. Формула (41) позволяет отождествить пространство $V^{J\mathring{p}}$ с пространством V^J представления $D^J_{\widehat{R}}$, так как $\dim D_P^{\mathring{p}} = 1$. В свою очередь факторпространство X изоморфно орбите $\mathscr{O}_m^+$ (или $\mathscr{O}_m^-$) (см. классификацию (36)).

Как отмечалось в (13), всякое представление, индуцированное с $\left(D_P^{\mathring{p}}(\tau)\right)^{\Pi} D^J_{\widehat{R}}(r)$, эквивалентно $B^{J\mathring{p}}_{H\uparrow\Pi}$. Следовательно, множество $\{B^{Jp}_{H\uparrow\Pi}\}$, $p \in \mathscr{O}_m^+$ состоит из представлений группы Пуанкаре, эквивалентных $B^{J\mathring{p}}_{H\uparrow\Pi}$, т. е. индуцированное представление надлежит снабдить индексами $(J, m, +)$ (или для краткости (J, m)).

Итак, рассмотрим индуцированное представление $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}$, реализованное в пространстве функций на $\mathscr{O}_m^+$ со значениями в V^J:

$$B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}(\Pi)\,\varphi(p) = B^{J\mathring{p}}\left(\Pi_p^{-1}\,\Pi\Pi_{(\Pi^{-1}p)}\right)\varphi(\Pi^{-1}p). \tag{42}$$

В качестве представителей классов Π_p, входящих в аргумент оператора $B^{J\mathring{p}}(\Pi)$, удобно выбрать бусты L_p, эрмитовы матрицы из $SL(2, C)_R$, такие, что $L_p(\mathring{p}\sigma)L_p = (p\sigma)$ (см. (7.147)).

Преобразуем аргумент оператора $B^{J\overset{\circ}{p}}$, используя формулы (35) и определение факторов (2.17):

$$L_p^{-1}\,\Pi L_{(\Pi^{-1}p)} = L_p^{-1}\,\tau_a L L_{\left(L^{-1}\tau_a^{-1}p\right)} = L_p^{-1}\,\tau_a L_p L_p^{-1}\,L L_{(L^{-1}p)} =$$
$$= \tau_{\left(\Lambda_p^{-1}a\right)}\,r\,(L,\ L^{-1}p).$$

Подставим полученное выражение в формулу (42) и упростим аргумент функции φ в соответствии со структурой Π-модуля P:

$$B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}(\Pi)\,\varphi(p) = B^{J\overset{\circ}{p}}\left(\tau_{\left(\Lambda_p^{-1}a\right)}\,r\,(L,\ L^{-1}p)\right)\varphi\left(L^{-1}\tau_a^{-1}\,p\right) =$$
$$= D_P^{\overset{\circ}{p}}\left(\tau_{\left(\Lambda_p^{-1}a\right)}\right)D^J_{\hat{R}}\left(r\,\left(L,\,L_p^{-1}\right)\right)\varphi\,(L^{-1}p) =$$
$$= \exp i\left(\overset{\circ}{p}\cdot\left(\Lambda_p^{-1}\,a\right)\right)D^J_{\hat{R}}\,\left(r\,(L,\ L^{-1}\,p)\right)\varphi\,(L^{-1}p) =$$
$$= \exp i\,(p\cdot a)\,D^J_{\hat{R}}\,\left(r\,(L,\,L^{-1}\,p)\right)\varphi\,(L^{-1}p). \qquad (43)$$

Функции $\varphi(p)$ описывают состояния элементарной релятивистской квантовой частицы. Каждому пространству $F(X,\ V)\approx\approx F(\mathcal{O},\ V)$ неприводимого представления $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}$ можно приписать индексы $(J,\ m,\ \pm)$ и, таким образом, классифицировать элементарные частицы по их пространственно-временным характеристикам. Каков физический смысл этой классификации?

Напомним, что вектор $p\in P$ в формуле (38) реализует генератор трансляции в представлении D_P.

Аргумент функции состояния $\varphi(p)$ принадлежит $\mathcal{O}_m^+$ как факторпространству $X\approx\Pi/H$. Удостоверимся, что и здесь вектор p имеет смысл импульса частицы. Подействуем на функцию $\varphi(p)$ оператором $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi\downarrow P}$:

$$B^{Jm}_{H\uparrow\Pi\downarrow P}(\tau_a)\,\varphi\,(p) = \exp\,i\,(p\cdot a)\,\varphi\,(p). \qquad (44)$$

Отметим, что собственное значение оператора импульса в представлении $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}$ совпадает с аргументом функции состояния. Векторы Π-модуля $P^{(*)}$ имеют физический смысл импульсов релятивистских квантовых систем. Инвариант m, с помощью которого классифицируются орбиты модуля $P^{(*)}$, очевидно есть масса частицы.

Для расшифровки значения индекса J достаточно рассмотреть действие оператора $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi\downarrow\hat{R}}$ на вектор состояния частицы в системе покоя:

$$B^{Jm}_{H\uparrow\Pi\downarrow\hat{R}}\,(r)\,\varphi\,(\overset{\circ}{p}) = D^J_{\hat{R}}\,(r)\,\varphi\,(\overset{\circ}{p}). \qquad (45)$$

Полученный закон преобразования означает, что функция $\varphi(\overset{\circ}{p})$ описывает частицу со спином J. Итак, классификация элементарных частиц по свойствам симметрии пространства-времени производится по спину, массе (и знаку энергии).

(18) Замечание. Множество векторов $\varphi(p)$ можно в известном смысле считать волновой функцией релятивистской квантовой частицы. При этом набор наблюдаемых ограничен пространственной симметрией и предполагается, что $\varphi(p)$ задана на спектре их значений, причем $\varphi(p, m, J)$ отлична от нуля лишь при m и J, равных индексам представления $B^{Jm}(\mathbf{\Pi})$. Индекс J связан с собственным значением оператора Казимира $B(C_4)$ алгебры Пуанкаре (см. (7.97)) формулой

$$B(C_2C_4)\varphi(p) = -4J(J+1)\varphi(p). \tag{46}$$

(19) Упражнение. Докажите соотношение (46). $\nabla\nabla$

Представление $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}$ унитарно относительно скалярного произведения вида (5):

$$(\varphi_1, \varphi_2)_F = \int\limits_{\mathcal{O}_m^+} d\mu(p)\,(\varphi_1(p), \varphi_2(p))_{V^J}. \tag{47}$$

Здесь $d\mu(p)$ — инвариантная мера на гиперболоиде $\mathcal{O}_m^+$ (см. упражнения (6.44), (6.45)):

$$(\varphi_1, \varphi_2)_F = \int\limits_{P(3)} \frac{d^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}(\varphi_1(p), \varphi_2(p))_{V^J} = \int\limits_{P(3)} \frac{d^3p}{2p_0}\varphi_1^{\dagger}(p)\varphi_2(p), \tag{48}$$

в подынтегральном выражении 4-импульс p имеет вид $(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}, p^1, p^2, p^3)$. ▼

(20) В формуле (43) оператор представления $B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}$ записан так, что функция состояния преобразуется как спинор только в системе покоя. Для выявления спинорных свойств $\varphi(p)$ при любом значении импульса p выполним преобразование базиса в пространстве $F(X, V^J)$. Предварительно перепишем выражение для оператора представления:

$$B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}(\Pi)\varphi(p) = \exp i(pa)\, D^J_{\widehat{R}}\left(L_p^{-1} L L_{(L^{-1}p)}\right)\varphi(L^{-1}p). \tag{49}$$

Дополним представление $D^J_{\widehat{R}}$ до представления $D^{(J,0)}_{L}$ группы L (см. § 7.8), которое действует в том же пространстве $V^{(J,0)} \approx V^J$. Ограничение $D^{(J,0)}_{L\downarrow\widehat{R}}$ совпадает с $D^J_{\widehat{R}}$. Следовательно, в формуле (49) оператор $D^J_{\widehat{R}}(r)$ можно рассматривать как ограничение на $\widehat{R}$ соответствующего оператора представления группы L:

$$B^{Jm}_{H\uparrow\Pi}(\Pi)\varphi(p) = \exp i(pa)\, D^{(J,0)}_{L}\left(L_p^{-1} L L_{(L^{-1}p)}\right)\varphi(L^{-1}p) =$$
$$= \exp i(pa)\, D^{(J,0)}_{L}(L_p^{-1})\, D^{(J,0)}_{L}(L)\, D^{(J,0)}_{L}\left(L_{(L^{-1}p)}\right)\varphi(L^{-1}p).$$

Перейдем к новым базисным функциям

$$\psi(p) \equiv D_L^{(J,\,0)}(L_p)\,\varphi(p). \tag{50}$$

Тогда оператор индуцированного представления имеет вид

$$B_{H\uparrow\Pi}^{Jm}(\mathrm{II})\,\psi(p) = \exp i\,(pa)\,D_L^{(J,\,0)}(L)\,\psi(L^{-1}p). \tag{51}$$

В этой формуле отчетливо проявляются свойства функции $\psi(p)$ как релятивистского спинора. Базис (50) носит название *спинорного базиса.*

Перепишем скалярное произведение (48) в терминах спинорных функций состояния:

$$(\psi_1,\,\psi_2)_F = \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\psi_1^\dagger(p)\,D^{\dagger -1}(L_p)\,D^{-1}(L_p)\psi_2(p) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\psi_1^\dagger(p)\,D^{-1}\left(L_p\,\frac{(\sigma\overset{\circ}{p})}{m}\,L_p^\dagger\right)\psi_2(p) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\psi_1^\dagger(p)\,D\left(\frac{\sigma p}{m}\right)\psi_2(p). \tag{52}$$

При выводе этой формулы мы воспользовались свойствами матриц Паули и бустов в группе $\boldsymbol{L}$ (см. (7.147)—(7.150)). ▼

(21) Проведенное выше построение для орбит $\mathcal{O}_m^+$ практически без изменений переносится на орбиты $\mathcal{O}_m^-$ (с той же группой стабильности), так что формулы (43) и (51) описывают преобразования состояний релятивистских элементарных квантовых частиц с массой покоя $m \neq 0$ и спином J как в случае положительной, так и отрицательной энергии. Представления, соответствующие орбитам $\mathcal{O}_{im}$ и $\mathcal{O}_0^0$ (т. е. частицам с мнимой массой и частицам с импульсом, тождественно равным нулю) не играют существенной роли в квантовой физике. Остается рассмотреть орбиты $\mathcal{O}_0^+$ и $\mathcal{O}_0^-$ с подгруппой стабильности $\widetilde{\boldsymbol{E}}(2) \rhd \boldsymbol{P}$ для стандартных векторов $\overset{\circ}{p} = (1,\,0,\,0,\,1)$ и $\overset{\circ}{p} = (-1,\,0,\,0,\,-1)$.

Пусть в представлении $D_{\boldsymbol{P}}^{\overset{\circ}{p}}$ (см. формулу (38)) стандартный вектор имеет вид $\overset{\circ}{p} = (1,\,0,\,0,\,1)$. Тогда с помощью соотношений (39) и (32) можно найти структуру малой группы и малой когруппы:

$$H \approx \widetilde{\boldsymbol{E}}(2) \rhd \boldsymbol{P}, \quad R \approx \widetilde{\boldsymbol{E}}(2).$$

Полная система неприводимых унитарных представлений группы $\boldsymbol{E}(2)$ была построена в **(16)**. Поскольку группа $\boldsymbol{\Pi}$ является двукратным накрытием собственной группы Пуанкаре, то подгруппа стабильности стандартного вектора $\overset{\circ}{p}$ в $\boldsymbol{\Pi}$ — также двукратная накрывающая соответствующей подгруппы стабильности в $\Pi_+^\uparrow$. Для представлений первого класса (см. формулу (31)) переход к накрывающей группе $\widetilde{E}(2)$ означает появление нетривиальной малой когруппы Z_2.

В этом случае (при $r>0$) представления $B^{\mathbf{t}}_{H\uparrow\widetilde{E}(2)}$ бесконечномерны. Следовательно, индуцированное представление $B^{\mathbf{t}}_{\widetilde{E}(2)\uparrow\Pi}$ должно быть реализовано в пространстве функций с бесконечным числом компонент, т. е. бесконечнокомпонентных спиноров. Элементарные частицы с такими свойствами не обнаружены, и мы не будем подробно рассматривать эти представления.

В случае $r=0$ при переходе к группе $\widetilde{E}(2)$ малая когруппа также двукратно накрывается. Обозначим ее $\widetilde{U}(1)$. Соответственно изменяются области значения параметров представлений (32) и (33):

$$D^{\lambda}_{\widetilde{U}(1)}(u_\alpha)=\exp i\lambda\alpha \quad (\alpha\in[0,\ 4\pi),\ \lambda=0,\ \pm 1/2,\ \pm 1,\ \pm 3/2,\ \ldots),$$

$$B^{\lambda}_{\widetilde{E}(2)}(\tau_{\mathbf{b}}u_\alpha)=D^{\lambda}_{\widetilde{U}(1)}(u_\alpha)=\exp i\lambda\alpha. \tag{53}$$

Построим представление

$$B^{\lambda,\,0}_{H}(\tau_a h_r)=B^{\lambda,\,0}_{H}(\tau_a\tau_{\mathbf{b}}\,u_\alpha)=D^{\mathring{p}}_{\mathbf{P}}(\tau_a)\,D^{\lambda}_{\widetilde{U}(1)}(u_\alpha)=\exp i\,[(\mathring{p}a)+\lambda\alpha]$$

и индуцируем представление группы Пуанкаре

$$\begin{aligned}B^{\lambda,\,0}_{H\uparrow\Pi}(\Pi)\,\varphi(p)&=B^{\lambda,\,0}_{H}\left(\Pi_p^{-1}\,\Pi\Pi_{(\Pi^{-1}p)}\right)\varphi\left(\Pi^{-1}p\right)=\\&=B^{\lambda,\,0}\left(\tau_{(\Lambda_p^{-1}a)}\;r\,(L,\ L^{-1}p)\right)\varphi\,(L^{-1}p)=\\&=D^{\mathring{p}}_{\mathbf{P}}\left(\tau_{(\Lambda_p^{-1}a)}\right)B^{\lambda}_{\widetilde{E}(2)}\left(L_p^{-1}\,LL_{(L^{-1}p)}\right)\varphi\,(L^{-1}p)=\\&=\exp i\,(pa)\,B^{\lambda}_{\widetilde{E}(2)}\left(L_p^{-1}\,LL_{(L^{-1}p)}\right)\varphi\,(L^{-1}p).\end{aligned}\tag{54}$$

Здесь функции φ задаются на пространстве $X\approx\Pi/H\approx\approx L/\widetilde{E}(2)\approx\mathcal{O}_0^+$. Бусты L_p определены равенством $L_p(\sigma\mathring{p})L_p^+=(\sigma p)$. Под действием операторов, соответствующих в группе $SU(2)$ вращениям вокруг третьей оси, функция состояния в системе стандартного импульса преобразуется как объект со спиральностью λ:

$$\begin{aligned}B^{\lambda,\,0}_{H\uparrow\Pi}\,(r_3(\alpha))\,\varphi\,(\mathring{p})&=B^{\lambda}_{\widetilde{E}(2)}\,(r_3(\alpha))\,\varphi\,(\mathring{p})=\\&=D^{\lambda}_{\widetilde{U}(1)}(r_3\,(\alpha))\,\varphi\,(\mathring{p})=\exp\,(i\lambda\alpha)\,\varphi\,(\mathring{p}).\end{aligned}\tag{55}$$

Представление $B^{\lambda,\,0}_{H\uparrow\Pi}$ унитарно относительно скалярного произведения (см. (6.45));

$$(\varphi_1, \varphi_2)_F = \int\limits_{P} d^4p\, \hat{\lambda}(p^2)\, (\varphi_1(p), \varphi_2(p))_{V^\lambda} =$$

$$= \int \frac{d^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2}} \varphi_1^\dagger(p)\, \varphi_2(p)\Big|_{p=(+\sqrt{\mathbf{p}^2}, p^1, p^2, p^3)}. \tag{56}$$

Существенные особенности представлений с $m=0$ проявляются при построении спинорного базиса. Представление $B^\lambda_{\widetilde{E}(2)}$ неточно, его ядро нетривиально. Следовательно, у простой группы $\boldsymbol{L}$ не может быть представлений, ограничения которых на $\widetilde{\boldsymbol{E}}(2)$ совпадают с $B^\lambda_{\widetilde{E}(2)}$. Тем не менее, спинорный базис необходим нам для построения представлений группы Пуанкаре с отражениями. Откажемся временно от унитарности представления, чтобы ввести спинорный базис. Построим вспомогательное представление $C(\widetilde{\boldsymbol{E}}(2))$ со следующими свойствами: 1) точное; 2) содержащее подпространство унитарного представления $B^\lambda_{\widetilde{E}(2)}$; 3) имеющее пространство представления, на котором реализуется представление D группы $\boldsymbol{L}$ (желательно неприводимое), причем ограничение $D_{L\downarrow\widetilde{E}(2)}$ эквивалентно $C(\widetilde{\boldsymbol{E}}(2))$. Тем самым практически однозначно определяется конечномерное, неунитарное $(2\lambda+1)$-мерное представление $C^\lambda(\widetilde{\boldsymbol{E}}(2))$. Далее в представлении

$$C^{\lambda,0}_{H\uparrow\Pi}(\text{П})\Phi(p) = \exp i(pa) C^\lambda_{\widetilde{E}(2)}(L_p^{-1}\, L L_{(L^{-1}p)})\, \Phi(L^{-1}p) =$$
$$= \exp i(pa)\, D_L^{\lambda,0}(L_p^{-1})\, D_L^{\lambda,0}(L)\, D_L^{\lambda,0}(L_{(L^{-1}p)})\, \Phi(L^{-1}p)$$

спинорный базис вводится стандартно:

$$\psi(p) \equiv D_L^{\lambda,0}(L_p)\, \Phi(p), \tag{57}$$

$$C^{\lambda,0}_{H\uparrow\Pi}(\text{П})\, \psi(p) = \exp i(pa)\, D_L^{\lambda,0}(L)\, \varphi(L^{-1}p). \tag{58}$$

Еще раз подчеркнем, что представление (58) неунитарно. ▼

Процедура построения представления группы Пуанкаре для частиц со спиральностью λ, нулевой массой покоя и положительной энергией почти полностью повторяется при построении представлений с отрицательной энергией (орбита $\mathcal{O}_0^-$).

(23) Обратимся к представлениям общей группы Пуанкаре $\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}^\uparrow_+ \approx \boldsymbol{\Lambda} \triangleright \boldsymbol{P}$, где $\boldsymbol{\Lambda}$ — общая группа Лоренца, содержащая подгруппу отражений $W = \{\hat{P}, \hat{T}, \hat{S}, \hat{I}\}$ и нормальную подгруппу $\boldsymbol{\Lambda}^\uparrow_+$. В определяющем представлении группы $\boldsymbol{\Lambda}$ операторы отражений в пространстве M_4 задаются очевидными равенствами (см. формулы (3.18) и (3.22))

$$\hat{P}x = (x^0, -\mathbf{x}), \quad \hat{T}x = (-x^0, \mathbf{x}), \quad \hat{S}x = -x. \tag{59}$$

При расширении группы $\boldsymbol{\Lambda}$ операторами отражения квадраты их уже не обязательно должны совпадать с единицей, так что можно построить несколько неэквивалентных расширений $\widetilde{\boldsymbol{L}}$, каждое из которых при факторизации по Z_2 переходит в $\boldsymbol{\Lambda}$.

Рассмотрим полупрямое произведение

$$\widetilde{\Pi} \approx \widetilde{\boldsymbol{L}} \triangleright \boldsymbol{P}. \tag{60}$$

Оно содержит подгруппы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{P}$, являющиеся W-модулями относительно канонических автоморфизмов $\chi_{\hat{w}}$:

$$\begin{aligned} w: L &\to \chi_w L = w^{-1} L w = L_{\hat{W}}, \\ w: \tau_a &\to \chi_w \tau_a = w^{-1} \tau_a w = \tau_{\hat{W} a}. \end{aligned} \tag{61}$$

На векторном пространстве $P^{(*)}$ естественно возникает структура дуального W-модуля (относительно формы $(p \cdot a)$). Однако такой, внешне очевидный, путь реализации преобразований w на пространстве $P^{(*)}$ приводит к противоречию с экспериментально наблюдаемой положительностью энергии физических частиц. Для сохранения положительности энергии мы вынуждены отказаться от реализации W-модуля $P^{(*)}$ как дуального к P. Напомним, что преобразования симметрии квантовой системы могут быть представлены либо унитарными, либо антиунитарными операторами. Оператор пространственного отражения не влияет на знак энергии, поэтому предположим, что антиунитарными (и, следовательно, антилинейными) являются операторы отражения времени $\hat{T}$ и полного отражения $\hat{S}$. Воспользуемся формулами (61) и (44):

$$B^{-1}(\hat{S})\, B(\tau_a)\, B(S) = B(\tau_{\hat{S}a}) =$$

$$= \exp[-i(pa)] = \exp[B^{-1}(\hat{S})\, i\,(pa)\, B(\hat{S})].$$

При сохранении знака энергии под действием антилинейного оператора $B(\hat{S})$ импульс преобразуется по правилу

$$\hat{S}_p = B^{-1}(\hat{S})\, p B(\hat{S}) = p. \tag{62}$$

Аналогично получаем закон преобразования $P^{(*)}$ под действием $\hat{P}$- и $\hat{T}$-отражений:

$$\begin{aligned} \hat{P}p &= B^{-1}(\hat{P})\, p\, B(\hat{P}) = (p^0, -p^1, -p^2, -p^3), \\ \hat{T}p &= B^{-1}(\hat{T})\, pB(\hat{T}) = -(-p^0, p^1, p^2, p^3). \ \blacktriangledown \end{aligned} \tag{63}$$

(24) Для нахождения соответствующих формул для $\boldsymbol{L}$ как W-модуля воспользуемся свойством накрывающего отображения и гомоморфностью групп $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$. Свойства (61) остаются справедливыми и для группы Лоренца, операторы которой в данном случае удобно параметризовать элементами орбит и подгруппы стабильности точки. Разложим произвольную матрицу Λ группы Лоренца в определяющем представлении на произведение симметричной и ортогональной матриц: $\Lambda = \Lambda_p \Lambda_R$ (см. (7.144)), подставим в нее выражение (1.41) и воспользуемся явным видом оператора $\hat{P}$ в определяющем представлении:

$$\hat{P}^{-1} \Lambda \hat{P} = \Lambda_p^{-1} \Lambda_R = (\Lambda_p \Lambda_R)^{\dagger -1}, \quad \Lambda = \Lambda_p \Lambda_R. \tag{64}$$

При переходе к накрывающей группе $\boldsymbol{L}$ симметричной матрице Λ_p сопоставляется эрмитова L_p, а ортогональной Λ_R — унитарная L_R. Легко убедиться, что равенство вида (64) сохраняет силу и для группы $\boldsymbol{L}$:

$$\hat{P}^{-1} L \hat{P} = L_p^{-1} L_R = (L_p L_R)^{\dagger -1}, \quad L = L_p L_R. \tag{65}$$

Поскольку конечномерные представления D_L группы $SL(2, C)_R$ обладают свойством $D_L(L^\dagger) = D_L^\dagger(L)$ (см. упражнение **(7.69)**), то и для них справедливо правило (65):

$$B^{-1}(\hat{P}) D_L(L) B(\hat{P}) = (D_L(L))^{\dagger -1}. \tag{66}$$

Операторы в правой части равенства принадлежат сопряженному представлению. Если D_L — самосопряженное представление, $D_L \approx D_L^{\langle * \rangle}$, то оператор $B(\hat{P})$ может быть определен в пространстве V. В противном случае для задания $B(\hat{P})$ необходима прямая сумма пространств V_D и $V_{D^{\langle * \rangle}}$. Для неприводимого представления $D_L^{(J', J'')}$ соотношение (66) принимает вид

$$B^{-1}(\hat{P}) D_L^{(J', J'')} B(\hat{P}) = D_L^{(J'', J')}. \tag{67}$$

Отметим, что операторы $D_L(L_R)$ инвариантны относительно действия отражения $\hat{P}$. Последнее непосредственно вытекает из соотношений (65) и (66). ▼

Если в пространстве $F(\mathcal{O}_m^+, V^{(J, 0)})$ неприводимое представление $B_{H^\dagger \Pi}^{Jm}$ действует в спинорном базисе по формуле (51), то в пространстве векторов $B(\hat{P})\psi(p)$ действие группы Пуанкаре задается операторами

$$B(\hat{P}) \exp i(pa) D_L^{(J, 0)}(L) \Delta(L^{-1}) B^{-1}(\hat{P}) = \\ \exp i(\hat{P}_p \cdot a) D_L^{(0, J)}(L) \Delta(L^\dagger), \tag{68}$$

где Δ — оператор левого сдвига. Следовательно, область значений функции $B(\hat{P})\psi(p)$ принадлежит пространству $V^{(0, J)}$ представления $D_L^{(0, J)}$.

Для построения оператора $B(\widehat{P})$ необходимо рассмотреть пространство $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,0)} \oplus V^{(0,J)})$ функций со значениями в прямой сумме $V^{(J,0)} \oplus V^{(0,J)}$. Полученный таким образом $\widetilde{\Pi}$-модуль в общем случае является приводимым.

(25) Перейдем к рассмотрению оператора отражения времени. Представим антилинейный оператор $\widehat{T}$ в виде произведения оператора комплексного сопряжения и линейного оператора $\check{T}$ и перепишем с их помощью автоморфизм (61):

$$B(\widehat{T})\,\psi(p) = B(\check{T})\,\psi^*(p).$$
$$B^{-1}(\check{T})\,D_L^*(L)\,B(\check{T}) = D_L(L_{\widehat{T}}). \qquad (69)$$

Пользуясь явным видом оператора $\widehat{T}$ в определяющем представлении группы Λ, получаем окончательно

$$B^{-1}(\check{T})\,D_L^*(L)\,B(\check{T}) = (D_L(L))^{+-1}. \qquad (70)$$

Свойство операторов конечномерных представлений D_L (см. упражнение (7.68))

$$D^{+-1}(L) = D(F)\,D^*(L)\,D^{-1}(F) \quad (F = i\sigma_2)$$

позволяет выразить матрицу $B(\check{T})$ через оператор $D(F)$:

$$B(\check{T}) = \eta_{\widehat{T}}\,D(F) \quad (|\eta_{\widehat{T}}| = 1), \qquad (71)$$

где учтена унитарность оператора $B(\check{T})$. ▼

Предположим, что неприводимое проективное представление $B_{\widetilde{\Pi}_+^\uparrow}$ построено (причем операторы $B(\Pi_+^\uparrow)$ и $B(\widehat{P})$ унитарны, а $B(\widehat{T})$ антиунитарен). Ограничение $B_{\widetilde{\Pi}_+^\uparrow \downarrow \Pi_+^\uparrow}$ в общем случае является приводимым проективным унитарным представлением группы $_+^\uparrow$. Разложим представление $B_{\widetilde{\Pi}_+^\uparrow \downarrow \Pi_+^\uparrow}$ на неприводимые. Очевидно, что всякая неприводимая компонента эквивалентна неприводимому унитарному представлению группы $\Pi = (\widehat{\Pi}_+^\uparrow)$. Пространство такого неприводимого представления при $m > 0$ (см. (17)) есть $F(X, V^J) \approx F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,0)})$, где V^J — пространство неприводимого представления D^J группы $SU(2)$, на котором реализуется представление $D^{(J,0)}$ группы L.

Рассмотрим вектор $\psi(p) \in F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,0)})$ и подействуем на него операторами $B(\widehat{P})$ и $B(\widehat{T})$. Как уже было показано, эти операторы осуществляют преобразование $\psi(p) \to \psi'(p) \in F(\mathscr{O}_m^+, V^{(0,J)})$, так что пространство неприводимого представления $B(\widetilde{\Pi}_+^\uparrow)$ содержится в $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(0,J)} \oplus V^{(J,0)})$. Само представление $B(\widetilde{\Pi}_+^\downarrow)$ также эквивалентно некоторому неприводимому унитарному представлению одной из накрывающих групп $\widetilde{\widetilde{\Pi}_+^\uparrow} \equiv \widetilde{\Pi}$. Всякая группа $\widetilde{\Pi}$ представляет собой двукратное накрытие группы $\widetilde{\Pi}_+^\uparrow$, так что квадраты операторов $B(\widehat{P})$, $B(\widehat{T})$ и $B(\widehat{S})$ удовлетворяют условиям

$$B^2(\widehat{P}) = \omega_P I, \quad B^2(\widehat{T}) = \omega_T I, \quad B^2(\widehat{S}) = \omega_S I,$$
$$\omega_P,\ \omega_T,\ \omega_S = \pm 1.$$

Следовательно, имеется восемь неэквивалентных групп $\widetilde{\Pi}$ и соответственно восемь типов неприводимых квантовомеханических представлений $B(\widetilde{\Pi})$.

(27) Упражнение. Покажите, что во всяком представлении $B(\widetilde{\Pi})$, удовлетворяющем перечисленным выше свойствам, таблица умножения ограничения $B_{\widetilde{\Pi}\downarrow W}$ эквивалентна табл. 13.

Таблица 13

Операторы отражений	$B(\widehat{P})$	$B(\widehat{T})$	$B(\widehat{S})$
$B(\widehat{P})$	$\omega_P I$	$B(\widehat{S})$	$\omega_P B(\widehat{T})$
$B(\widehat{T})$	$\omega_P\omega_T\omega_S B(\widehat{S})$	$\omega_T I$	$\omega_S\omega_P B(\widehat{P})$
$B(\widehat{S})$	$\omega_S\omega_T B(\widehat{T})$	$\omega_T B(\widehat{P})$	$\omega_S I$

(28) Начнем построение представления $B(W)$ с оператора $B(\widehat{P})$. Обратим внимание на тот факт, что подпространство функций от $\mathring{p} = (p_0, 0, 0, 0)$ инвариантно относительно действия оператора пространственного отражения. На этом подпространстве оператор $B(\widehat{P})$ должен выглядеть особенно просто, так как преобразуется только форма функции $\psi(\mathring{p})$. Всякий вектор $\psi \in F(\mathcal{O}_m^+, V^{(J,0)} \oplus V^{(0,J)})$ может быть представлен в виде пары (ψ_1, ψ_2), где $\psi_1 \in F(\mathcal{O}_m^+, V^{(J,0)})$, а $\psi_2 \in F(\mathcal{O}_m^+, V^{(0,J)})$ преобразуется по представлению $D'^{(0,J)}$ (см. (7.125), (7.126)). Подействуем оператором $B(\widehat{P})$ на вектор $\psi(\mathring{p})$ и воспользуемся соотношением (68):

$$B(\widehat{P})\,\psi(\mathring{p}) = \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\mathring{p}) \\ \psi_2(\mathring{p}) \end{pmatrix}.$$

В том же базисе оператор $B(\Lambda_R)$ имеет вид

$$B(\Lambda_R)\,\psi(\overset{\circ}{p})=\begin{pmatrix} D^J(\Lambda_R) & 0 \\ 0 & D^J(\Lambda_R)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(\overset{\circ}{p}) \\ \psi_2(\overset{\circ}{p})\end{pmatrix}.$$

Как было установлено (см. равенства (65) и (66)), операторы $B(\Lambda_R)$ и $B(\hat{P})$ коммутируют. Следовательно, операторы M и N кратны единичному (см. (6.22)):

$$M=aI,\ N=bI\quad (a,\ b\in C).$$

Унитарность оператора $B(\hat{P})$ позволяет фиксировать модули чисел a и b:

$$|a|=|b|=1.$$

Наконец, в соответствии с выводами (26) мы должны рассмотреть две возможности: 1) $B^2(\hat{P})=I$, $ab=+1$; 2) $B^2(\hat{P})=-I$, $ab=-1$.

(29) Упражнение. Покажите, что всякое проективное представление группы $\{\hat{I},\ \hat{P}\}$ в первом случае эквивалентно представлению с $a=b=\eta_{\hat{P}}=+1$ либо $a=b=\eta_{\hat{P}}=-1$; во втором — представлению, где $a=b=\eta_{\hat{P}}=+i$ либо $a=b=$ $=\eta_{\hat{P}}=-i$. ∇

Таким образом, в пространстве всякого квантовомеханического представления $B(\widetilde{\Pi})$ возможен переход к такому базису, где векторы состояний $\psi(\overset{\circ}{p})$ в системе покоя — собственные векторы оператора $B(\hat{P})$. Их собственные значения будут равны $\eta_{\hat{P}}=\pm 1$ — в первом и $\eta_{\hat{P}}=\pm i$ — во втором случаях. Отметим, что в силу линейности операторов $B(\Pi)$ всякий вектор $B(\Pi)\psi(\overset{\circ}{p})$ также будет собственным с тем же собственным значением. При наличии $\hat{P}$-симметрии должен существовать суперотбор по квантовому числу $\eta_{\hat{P}}$, $\hat{P}$-четности.

Мы установили явный вид оператора $B(\hat{P})$ на инвариантном подпространстве векторов $\psi(\overset{\circ}{p})$:

$$B(\hat{P})=\eta_{\hat{P}}\begin{pmatrix}0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}. \tag{72}$$

Чтобы найти выражение для $B(\hat{P})$ на всем пространстве $F(\mathcal{O}_m^+,\ V^{(J,0)}\oplus V^{(0,J)})$, воспользуемся соотношениями (51), (68):

$$B(\hat{P})\,B(\Lambda_p)\,\psi(\overset{\circ}{p})=B(\hat{P})\begin{pmatrix}\psi_1'(p) \\ \psi_2'(p)\end{pmatrix}=B(\hat{P})\,B(\Lambda_p)B^{-1}(\hat{P})\,B(\hat{P})\psi(\overset{\circ}{p})=$$

$$= \begin{pmatrix} D^{(J,0)}(L_p) & 0 \\ 0 & D'^{(0,J)}(L_p) \end{pmatrix} \times \eta_{\hat{P}} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\hat{P}p) \\ \psi_2(\hat{P}p) \end{pmatrix} =$$

$$= \eta_{\hat{P}} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1'(\hat{P}p) \\ \psi_2'(\hat{P}p) \end{pmatrix}. \tag{73}$$

Оператор $\hat{P}$-отражения принимает наиболее простой вид на пространстве $F(\mathcal{O}_m^+, V^{(J,J)})$:

$$B(\hat{P})\psi(p) = \eta_{\hat{P}}\,\psi(\hat{P}p). \tag{74}$$

Если представление $B(\Pi)$ действует в когерентном пространстве состояний с фиксированной четностью $\eta_{\hat{P}}$, то выражение (52) для скалярного произведения в спинорном базисе можно переписать, используя оператор $B(\hat{P})$:

$$(\psi_1, \psi_2)_F = \int \frac{d^3p}{2p_0} \psi_1^\dagger(p)\, D^{+-1}(L_p)\, B(\hat{P})^{-1} \eta_{\hat{P}}^{-1} D^{-1}(L_p)\psi_2(p) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{2p_0} \psi_1^\dagger(p) B(\hat{P})\, \eta_{\hat{P}}^{-1}\, \psi_2(p). \tag{75}$$

При выводе этого выражения мы использовали основное свойство оператора $\hat{P}$-отражения (см. формулу (66)). ▼

(30) Чтобы завершить построение представления $B(\widetilde{\Pi})$, выпишем явный вид оператора $B(\hat{S})$. В соответствии с табл. 13 $B(\hat{S}) = B(\hat{P})B(\hat{T})$, так что

$$B(\hat{S})\ \psi(p) = \eta_{\hat{P}}\eta_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(J,0)}(F) & 0 \\ 0 & D'^{(0,J)}(F) \end{pmatrix} \psi^*(p) =$$

$$= \eta_{\hat{P}}\eta_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 0 & D'^{(0,J)}(F) \\ D^{(J,0)}(F) & 0 \end{pmatrix} \psi^*(p). \tag{76}$$

Так же строятся и представления $C^{\lambda,0}(\widetilde{\Pi})$, ограничения которых на Π эквивалентны представлениям $C^{\lambda,0}_{H\uparrow\Pi}$ с массой нуль. ▼

В теории поля происходит дальнейшее уточнение величин $\eta_{\hat{P}}$ и $\eta_{\hat{T}}$ в формулах (71), (73) и (76) [23]. Собственные значения оператора $\hat{P}$-отражения оказываются равными ± 1 для частиц с целым спином и $\pm i$ — для частиц с полуцелым спином. Далее, с учетом внутренней симметрии группа Пуанкаре расширяется с помощью дискретной операции зарядового сопряжения. Связь между фазовыми множителями во всех четырех операциях отражения фиксируется теоремой о $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-инвариантности [27].

Пространства представлений $B(\widetilde{\Pi})$ вида $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,0)} \oplus \oplus V^{(0,J)}$ и $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,J)})$ приводимы за исключением $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(0,0)})$. По построению представление $B_{\widetilde{\Pi}\downarrow W}$ неприводимо. Следовательно, указанные пространства характеризуются собственными значениями операторов Казимира группы W: ω_P, ω_T и ω_S. Как мы выяснили, вместо ω_P следует использовать значение фазового множителя $\eta_{\hat{P}}$ — четность частицы. Мультипликаторы ω_T и ω_P оказываются связанными со спином частицы. Действительно,

$$B^2(\hat{T})\,\psi(p) = |\eta_{\hat{T}}|^2 D(F)\,D^*(F)\,\psi(p) = \omega_T\psi(p).$$

Так как $|\eta_{\hat{T}}|^2 = 1$, то

$$\omega_T = D(F)\,D^*(F) = \omega_P = \begin{cases} +1 & \text{при } J \text{ целом}, \\ -1 & \text{при } J \text{ полуцелом}. \end{cases}$$

Вследствие $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-инвариантности третья фаза ω_S оказывается однозначно связанной с зарядовой четностью, так что представление $B_{\Pi\downarrow W}$ фиксируется заданием P- и C-четностей частицы.

§ 3. Релятивистские уравнения движения. Волновые функции, неприводимые представления и ковариантные проекторы. Методы построения уравнений движения. Примеры

Основной задачей теории элементарных частиц является построение модели их взаимодействия. Локальность взаимодействия элементарных частиц приводит к необходимости определить состояние объекта в заданной точке пространства Минковского. Переход от импульсного представления к координатному осуществляется преобразованием Фурье (см., например, **(8.44)**). В предыдущем пункте мы построили некоторые, в общем случае приводимые, представления $B(\widetilde{\Pi})$. Трехмерное преобразование Фурье от элементов пространств $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,0)} \oplus \oplus V^{(0,J)})$ и $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,J)})$, на которых реализованы операторы $B(\widetilde{\Pi})$, определяет координатное представление в первично квантованной теории, где зависимость от времени следует из уравнения Гейзенберга и для свободной частицы описывается множителем $\exp ip_0t$, $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Описание процессов рождения и уничтожения частиц требует локальности и во времени. Для того чтобы стало возможным преобразование Фурье по переменной t, необходимо вложить пространство $F(\mathscr{O}_m^+, V)$ в $F(P, V)$. Элементы пространства $F(P, V)$ обычно называют *волновыми функциями* (ср. **(18)**).

Предположим, что удалось построить проектор $\pi(m, J, +)$, который выделяет в пространстве $F(P, V)$ неприводимое подпространство представления общей группы Пуанкаре. Оно состоит из решений уравнения

$$\pi(m, J, +)\,\psi(p)=\psi(p). \tag{77}$$

Проектор $\pi(m, J, +)$ в координатном представлении есть функция от оператора $\hat{p}_\mu=-i\partial/\partial x^\mu$:

$$\pi_x(m, J, +)\,\psi(x)=\psi(x). \tag{78}$$

Соотношения (77) и (78) называются *уравнениями движения* релятивистской свободной элементарной частицы в импульсном и координатном представлениях [46].

Используя свойства пространств $F(\mathscr{O}_m^+, V)$ и $F(P, V)$, можно утверждать, что решения уравнений (77) и (78) описывают состояния частицы с массой m, спином J, положительной энергией, фиксированной P-четностью и фазой ω_S. Значок $(+)$ в проекторе $\pi(m, J, +)$ в дальнейшем опускаем.

Обратим внимание на две существенно различные причины приводимости пространства $F(P, V)$: замену пространства $V^J\approx V^{(J,0)}$ неприводимого представления малой группы пространствами $V^{(J,0)}\oplus V^{(0,J)}$ или $V^{(J,J)}$ и переход от пространства функций на орбите $\mathscr{O}_m^+$ к пространству функций на P. Проектор π должен устранить приводимость как первого, так и второго рода. Различие будет особенно заметным при сравнении уравнений движения бесспиновых частиц и частиц со спином $J\neq 0$.

(31) Представление $B_{\widetilde{\Pi}}^{0m}$, действующее на пространстве $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(0,0)})$, неприводимо. Проектор, выделяющий это подпространство в $F(P, V^{(0,0)})$, имеет очевидную структуру:

$$(p^2/m^2)\,\psi(p)=\psi(p) \text{ или } (p^2-m^2)\,\psi(p)=0. \tag{79}$$

В координатном представлении это уравнение совпадает с *уравнением Клейна — Гордона.*

(32) Рассмотрим представление $B_{\widetilde{\Pi}}^{m}$ в пространстве $F(\mathscr{O}_m^+, V^{(J,0)}\oplus V^{(0,J)})$. Из явного вида операторов $B(\hat{P})$ (см. формулу (73)) следует, что подпространство векторов вида $(\psi(p), \psi(\hat{P}_p))$ инвариантно относительно действия оператора пространственного отражения. Формулы (68), (71) и (76) позволяют убедиться в инвариантности и неприводимости относительно действия всей группы $\widetilde{\Pi}$. Более того, пространство векторов вида $(\psi(p), \psi(\hat{P}_p))$ описывает частицу с фиксированным спином J, так как в системе покоя функция состояния под действием операторов группы $SU(2)$ преобразуется по неприводимому представлению, эквивалентному D^J. Таким образом, искомый проектор π на подпространстве векторов в системе покоя совпадает с проектором, выделяющим подпространство V^J неприводимого представления $D^J(SU(2))$.

Нетрудно получить выражение для π в произвольной системе отсчета. Пусть

$$\pi\psi(\overset{\circ}{p})=\psi(\overset{\circ}{p}).$$

Тогда

$$\pi B(L^{-1})\,B(L)\,\psi(\overset{\circ}{p})=\psi(\overset{\circ}{p}),$$

$$B(L)\,\pi B(L^{-1})\,D(L)\,\psi(L^{-1}\overset{\circ}{p})=D(L)\,\psi(L^{-1}\overset{\circ}{p}),$$

$$D(L)\,\pi D^{-1}(L)\,\psi'(p)=\psi'(p),$$

где $p\equiv L^{-1}\overset{\circ}{p}$. Введем обозначение $\pi(p)\equiv D(L)\pi D^{-1}(L)$ и воспользуемся стандартным разложением $L=L_pL_R$. Проектор π сплетает представления группы $SU(2)$, т. е. операторы π и $D(L_R)$ коммутируют. Следовательно,

$$\pi(p)=D(L_p)\,\pi D^{-1}(L_p). \tag{80}$$

(33) Упражнение. Покажите, что $\pi(p)$ — ковариантный оператор:

$$\pi(p)\xrightarrow{L}\pi(L_p).\ \triangledown$$

Перейдем к пространству функций $F(P,\ V^{(J,0)}\oplus V^{(0,J)})$. Оператор π должен не только проектировать область значений функции на неприводимое подпространство V^J, но и гарантировать принадлежность импульса частицы фиксированной орбите $\mathcal{O}_m^+$. Для параметра p в проекторе (80) это условие выполнено (если $\overset{\circ}{p}\in\mathcal{O}_m^+$). Таким образом, функция $\psi(p)$ только тогда является решением уравнения

$$\pi(p)\,\psi(p)=\psi(p), \tag{81}$$

когда ее аргумент принадлежит орбите $\mathcal{O}_m^+$. Итак, множество решений уравнения (81) составляет пространство неприводимого представления $B^{Jm+}_{\eta_{\hat{p}}\omega_S}(\widetilde{\mathbf{\Pi}})$. Соотношение (81) является общим релятивистским ковариантным уравнением движения для массивной частицы со спином. Конкретный вид проектора $\pi(p)$ зависит от выбора пространства $F(P,\ V)$, в которое погружается пространство неприводимого представления собственной квантовомеханической группы Пуанкаре. Далее мы рассмотрим стандартные формы уравнений движения. $\blacktriangledown$

Специфика конструкции спинорного базиса в пространстве состояний безмассовых частиц не позволяет полностью распространить приведенные выше рассуждения на случай $m=0$ (см. (**41**) и (**42**)).

(34) **Уравнение Дирака.** Построим пространство неприводимого представления $B^{m^{1/2}}(\widetilde{\mathbf{\Pi}})$. Для этого рассмотрим пространство волновых функций $F(P, V^{(1/2, 0)} \oplus V^{(0, 1/2)})$. Чтобы волновые функции в системе покоя преобразовывались по неприводимому представлению группы вращения со спином $J = 1/2$ достаточно использовать проектор на одно из прямых слагаемых в пространстве $V^{(1/2, 0)} \oplus V^{(0, 1/2)}$:

$$\pi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma_0 + I). \tag{82}$$

Здесь γ_0 диагональна, т. е. $\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Произведя замену $\gamma_0 = \gamma_\mu (\overset{\circ}{p})^\mu m^{-1}$, с помощью определения (80) и соотношений (7.148), (7.150) найдем вид проектора $\pi(p)$:

$$\pi(p) = D(L_p)\,\pi D\left(L_p^{-1}\right) = \frac{1}{2m}\left(D^{(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)}(L_p) \times\right.$$

$$\left.\times \gamma_\mu (\overset{\circ}{p})^\mu D^{(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)}\left(L_p^{-1}\right) + m\right) = \frac{1}{2m}(\gamma_\mu p^\mu + m). \tag{83}$$

Подставив выражение (83) в общее уравнение движения (81), получим *уравнение Дирака*

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\psi(p) = 0. \tag{84}$$

Каждая компонента решения $\psi(p)$ уравнения Дирака удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, так как условие $(\pi(p))^2 = \pi(p)$ эквивалентно требованию $p^2 = m^2$.

Для скалярного произведения в пространстве волновых функций Дирака удобно использовать выражение (75). В представлении, где операторы $D^{(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)}(L)$ приведены к блочно-диагональному виду, для оператора $B(\hat{P})$ справедливо выражение (72), т. е. он совпадает с матрицей $\eta_{\hat{P}}\gamma_0$:

$$(\psi_1, \psi_2)_F = \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\psi_1^\dagger(p)\,\gamma_0\psi_2(p) = \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\overline{\psi}_1(p)\,\psi_2(p), \tag{85}$$

где введена операция дираковского сопряжения $\psi(p) \to \overline{\psi(p)} \equiv \equiv \psi^\dagger(p)\gamma_0$ (ср. с **(2.131)**). ▼

(35) **Уравнение Прока.** Для частицы со спином $J = 1$ в качестве исходного неприводимого представления группы $\mathbf{\Pi}$ можно рассмотреть $B^{m,1}(\mathbf{\Pi})$ и получить пространство функций $F(P, V^{(1, 0)} \oplus V^{(0,1)})$. Если же начать рассмотрение с приводимого представления $B^{m, 1\oplus 0}(\mathbf{\Pi})$ на пространстве $F(\mathcal{O}_m^+, V^{(1)} \oplus V^{(0)})$, то при переходе к спинорному базису получим представление $D^{(1/2, 1/2)}$ группы $\boldsymbol{L}$:

$$B_{H\uparrow\Pi}^{m, 1\oplus 0}(\Pi)\,\psi(p) = \exp(i(pa))\,D_L^{(1/2, 1/2)}(L)\,\psi(L^{-1}p).$$

Оператор $\widehat{P}$-отражения не выводит из пространства $F(\mathcal{O}_m^+, V^{(1/2, 1/2)})$, так что в качестве пространства представления $B^{m, 1}(\widetilde{\mathbf{\Pi}})$ можно выбрать $F(P, V^{(1/2, 1/2)})$. Воспользуемся явным видом оператора $\widehat{P}$ в определяющем представлении группы $\mathbf{\Lambda}$. Проектор

$$\pi = \frac{1}{2}(I - \widehat{P}), \qquad \widehat{P}^\mu_\nu = g_{\mu\nu} \tag{86}$$

(см. (3.15)) выделяет состояния частицы со спином $J=1$ в системе покоя. Выражение для оператора $\pi(p)$ легко получить, используя явный вид бустов в представлении $D^{(1/2, 1/2)}$ — определяющем представлении группы Лоренца (см. (1.41)):

$$\pi(p) = D^{(1/2, 1/2)}(L_p)\,\pi D^{(1/2, 1/2)}(L_p^{-1}) = \left\{\delta^\mu_\nu - \frac{p^\mu p_\nu}{m^2}\right\}. \tag{87}$$

Использование выражения (87) в соотношении (81) приводит к уравнению движения

$$\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)\psi^\nu(p) = \psi_\mu(p). \tag{88}$$

Его решения описывают состояния частицы со спином $J=1$ и массой m. Действительно, условие $(\pi(p))^2 = \pi(p)$ приводит к тому, что каждая компонента $\psi^\mu(p)$ волновой функции удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$(p^2 - m^2)\,\psi^\mu(p) = 0. \tag{89}$$

Домножим обе части уравнения (88) на компоненту p^μ импульса, принадлежащего орбите $\mathcal{O}_m^+$, и свернем индексы. Использовав условие (89), получим соотношение

$$p^\mu \psi_\mu(p) = 0, \tag{90}$$

которое называется *уравнением Прока*. Множество решений системы уравнений (89) и (90) (или множество решений уравнения Прока с условием $p \in \mathcal{O}_m^+$) составляет пространство неприводимого представления $B^{m, 1, +}_{\eta_P \omega_S}$ общей группы Пуанкаре. Оператор $B(\widehat{P})$ в этом представлении очевидно пропорционален соответствующему оператору в определяющем представлении группы Лоренца:

$$B(\widehat{P})^\mu_\nu = \eta_{\widehat{P}}\, g_{\mu\nu}.$$

С его помощью можно получить выражение для скалярного произведения в пространстве волновых функций Прока:

$$(\psi_1, \psi_2)_F = \int \frac{d^3p}{2p_0}\,\psi_1^\dagger(p)\, g\, \psi_2(p) = \int \frac{d^3p}{2p_0}\,(\psi_1^\dagger(p))^\mu\,(\psi_2(p))_\mu. \;\blacktriangledown \tag{91}$$

(36) **Уравнения для тензорных волновых функций.** Формализм Прока без труда обобщается на волновые функции массивных тензорных частиц. Рассмотрим в качестве примера случай $J=2$. В приводимом представлении $B^{m,2\oplus 1\oplus 0}(\mathbf{\Pi})$ при построении спинорного базиса используется представление $D^{(1,1)}$ группы $\boldsymbol{L}$. Его можно реализовать на пространстве симметричных бесследовых тензоров ранга 2 (см. упражнение **(7.71)**). Соответствующим пространством волновых функций является $F(P, V^{(1,1)})$. Выберем проектор π вида

$$\pi=\frac{1}{2}(I-\hat{P})\otimes\frac{1}{2}(I-\hat{P}). \tag{92}$$

Оператор (92) в каждом тензорном сомножителе в $\psi_{\{\mu,\nu\}}(\overset{\circ}{p})$ выделяет подпространства $V^{(1)}$, так что симметричный бесследовый тензор, удовлетворяющий условию $\pi\psi(\overset{\circ}{p})=\psi(\overset{\circ}{p})$, преобразуется по представлению $D^{(2)}(SU(2))$. Оператор $\pi(p)$ строится аналогично проектору (87):

$$\pi(p)=\left\{\delta^{\rho}_{\mu}-\frac{p^{\rho}p_{\mu}}{m^2}\right\}\otimes\left\{\delta^{\lambda}_{\nu}-\frac{p^{\lambda}p_{\nu}}{m^2}\right\}. \tag{93}$$

Окончательно уравнения движения для волновых функций частиц с массой m и спином 2 имеют вид

$$\begin{gathered} p^{\mu}\psi_{\{\mu\nu\}}(p)=0,\\ (p^2-m^2)\,\psi^{\{\mu\nu\}}(p)=0. \end{gathered} \tag{94}$$

Полученный результат легко обобщается на случай произвольного целого спина J:

$$\begin{gathered} p_{\mu}\psi^{\{\mu,\mu_2,\ldots,\mu_J\}}(p)=0,\\ (p^2-m^2)\,\psi^{\{\mu_1,\ldots,\mu_J\}}(p)=0. \end{gathered} \tag{95}$$

Выражение для скалярного произведения волновых функций получается из формулы (91) тривиальной заменой индекса μ мультииндексом $\{\mu_1,\ldots,\mu_J\}$. ▼

(37) Уравнения Рариты—Швингера. Для описания пространств состояний массивных частиц с полуцелым спином $J>1$ объединим методы, использованные в уравнениях Дирака и Прока. В качестве исходного представления рассмотрим тензорное произведение $B^{m,\,1/2}_{\Pi}\otimes B^{m,\,k\oplus k-1\oplus\ldots\oplus 0}_{\Pi}$, $k=J+{}^1/_2$. В спинорном базисе будет действовать представление $D^{(1/2,\,0)}\otimes D^{(k/2,\,k/2)}$ группы $\boldsymbol{L}$, которое при переходе к общей группе Пуанкаре необходимо расширить до $D^{(1/2,\,0)\oplus(0,\,1/2)}\otimes D^{(k/2,\,k/2)}$. Таким образом, пространство волновых функций для частиц со спином J оказывается равным $F(P,\ V^{(1/2,\,0)\oplus(0,\,1/2)}\otimes V^{(k/2,\,k/2)})$. Выберем проектор π в виде тензорного произведения операторов (82) и (86):

$$\pi = \frac{1}{2}(\gamma_0 + I) \bigotimes_{r=1}^{k} \frac{1}{2}(I - \hat{P}). \tag{96}$$

На волновых функциях $\psi^{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}(p)$ (со значениями в пространстве $V^{(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)}$) оператор $\pi(p)$ в произвольной системе отсчета имеет вид

$$\pi(p) = \frac{1}{2m}(\gamma_\mu p^\mu + m) \bigotimes_{n=1}^{k} \left(\delta_\nu^\mu - \frac{p^\mu p_\nu}{m^2}\right). \tag{97}$$

Подставив его в условие (81), получим систему *уравнений Рариты — Швингера*:

$$\begin{gathered}(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\psi^{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}(p) = 0,\\ p^\mu \psi_{\{\mu, \mu_2, \ldots, \mu_k\}}(p) = 0.\end{gathered} \tag{98}$$

Пространство ее решений приводимо. Если на функции $\psi^{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}(p)$ не накладывается дополнительных условий кроме симметризации тензорных индексов, проектор π выделяет в системе покоя подпространство, преобразующееся по приводимому представлению $D^{1/2} \otimes D^k$ группы $SU(2)$. Для того чтобы решения уравнений Рариты — Швингера составляли пространство неприводимого представления $B^{mJ+}_{\gamma, \hat{p}^{(0)}S}(\widetilde{\Pi})$, в качестве пространства волновых функций следует взять $F\left(P, V^{\left(\frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}\right)} \oplus \oplus V^{\left(\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right)}\right)$. С этой целью функция $\psi(p) \in F(P, V^{(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)} \otimes \otimes V^{(k/2, k/2)})$ записывается в виде спинтензора $\psi_\alpha^{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}} \oplus \oplus \psi_{\dot\beta}^{\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}}(p)$, тензорные индексы заменяются парой спинорных индексов, все пунктирные и непунктирные спинорные индексы симметризуются (см. § 3.8). ▼

(38) **Уравнения Баргмана — Вигнера.** Волновые функции для частиц со спином $J > 1$ можно строить, непосредственно обобщая метод Дирака. Исходное представление выберем в виде симметризованного тензорного произведения n экземпляров $B_\Pi^{m, 1/2}$. Ему будет соответствовать пространство волновых функций $F(P, V^{(n/2, 0)} \oplus V^{(0, n/2)})$ с элементами $\psi^{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}(p)$, где α_i — биспинорный индекс. Проектор π строится как тензорное произведение n операторов (82):

$$\pi = \bigotimes_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\overset{(i)}{\gamma_0} + \overset{(i)}{I}\right), \tag{99}$$

так что

$$\pi(p) = \bigotimes_{i=1}^{n} \frac{1}{2m}(\gamma_\mu p^\mu + m). \tag{100}$$

Подставив выражение (100) в уравнение (81), получим систему *уравнений движения Баргмана—Вигнера*:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)^{\alpha_i}_{\beta_i} \psi^{\{\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n\}}(p) = 0. \tag{101}$$

Эти соотношения выделяют в пространстве волновых функций подпространство неприводимого представления $B^{m,\ n/2,\ +}_{\eta_{\hat{P}}\ \omega_S}(\widetilde{\Pi})$. ▼

(39) **Уравнения для $2(2J+1)$-компонентной волновой функции.** То же, что и в предыдущем случае, пространство $F(P,\ V^{(n/2,\ 0)} \oplus V^{(0,\ n/2)})$ можно рассматривать как множество $2(2J+1)$-компонентных волновых функций $\psi(p)$. Вместо проектора (99), действующего на каждый биспинор, построим проектор на пространстве $V^{(n/2,\ 0)} \oplus V^{(0,\ n/2)}$ в целом, причем инвариантное подпространство будем выделять в виде диагонали:

$$\pi = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + I\right].$$

Как и в уравнении Дирака, первое слагаемое в проекторе π с точностью до фазового множителя $\eta_{\hat{P}}$ совпадает с оператором $\hat{P}$-отражения в пространстве $F(P,\ V^{(n/2,\ 0)} \oplus V^{(0,\ n/2)})$:

$$\pi = \frac{1}{2}\left(\eta^{-1}_{\hat{P}} B(\hat{P}) + I\right). \tag{102}$$

Построим проектор для функций в произвольной системе отсчета по стандартному рецепту (80):

$$\pi(p) = \frac{1}{2} D(L_p)\, \eta^{-1}_{\hat{P}} B(\hat{P}) D(L_p^{-1}) + \frac{1}{2} I =$$

$$= \frac{1}{2\eta_{\hat{P}}} B(\hat{P}) D^{+-1}(L_p) D^{-1}(L_p) + \frac{1}{2} I = \frac{1}{2\eta_{\hat{P}}} B(\hat{P}) D^{-1}\left(L_p \frac{(\sigma \overset{\circ}{p})}{m} L_p^{+}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} I = \frac{1}{2\eta_{\hat{P}}} B(\hat{P})\, D\left(\frac{\widetilde{\sigma p}}{m}\right) + \frac{1}{2} I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & D^{(0,\ n/2)}\left(\dfrac{\widetilde{\sigma p}}{m}\right) \\ D^{(n/2,\ 0)}\left(\dfrac{\widetilde{\sigma p}}{m}\right) & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & D^{(0,\ n/2)}\left(\dfrac{\widetilde{\sigma p}}{m}\right) \\ D^{(n/2,\ 0)}\left(\dfrac{\widetilde{\sigma p}}{m}\right) & I \end{pmatrix}. \tag{103}$$

При выводе этой формулы были использованы соотношение (66) и свойство (7.148)—(7.150).

Вернемся к базису симметризованных спиноров (см. § 7.8), т. е. запишем $2(2J+1)$-компонентную волновую функцию в виде

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \psi_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}(p) \\ \psi_{\{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_n\}}(p) \end{pmatrix} \quad (n = 2J).$$

В этом базисе операторы $D'^{(0,\, n/2)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right)$ и $D^{(n/2,\, 0)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right)$ представлены в виде тензорного произведения операторов $\left(\frac{\sigma p}{m}\right)$ и $\left(\frac{\tilde\sigma p}{m}\right)$ (см. (7.151)):

$$D'^{(n/2,\, 0)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right) = \underbrace{\left(\frac{\sigma p}{m}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\sigma p}{m}\right)}_{n},$$

$$D'^{(0,\, n/2)}\left(\frac{\sigma p}{m}\right) = \underbrace{\left(\frac{\tilde\sigma p}{m}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\tilde\sigma p}{m}\right)}_{n}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (103), приходим к следующим уравнениям движения для частицы со спином $J = n/2$:

$$(\sigma p)_{\alpha_1}^{\dot\beta_1} (\sigma p)_{\alpha_2}^{\dot\beta_2} \ldots (\sigma p)_{\alpha_n}^{\dot\beta_n} \psi_{\{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_n\}}(p) = m^n \psi_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}(p),$$

$$(\tilde\sigma p)_{\dot\beta_1}^{\alpha_1} (\tilde\sigma p)_{\dot\beta_2}^{\alpha_2} \ldots (\tilde\sigma p)_{\dot\beta_n}^{\alpha_n} \psi_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}(p) = m^n \psi_{\{\dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_n\}}(p). \quad (104)$$

Легко убедиться, что при $n = 1$ вновь имеем обычное уравнение Дирака. ▼

(40) **Неприводимые представления и уравнения движения для частиц с** $m = 0$.

В рассматриваемом случае необходимо иметь в виду следующие два обстоятельства.

Во-первых, не для всех безмассовых частиц экспериментально наблюдается симметрия относительно общей группы Пуанкаре $\widetilde{\mathbf{\Pi}}$ (см. гл. 8). Пространство состояний нейтрино оказывается инвариантным относительно дискретных операций $\hat T$-отражения и комбинированного $\hat C \hat P$-отражения (см. (8.48)). Построение соответствующих представлений не сопровождается характерным для $\hat P$-отражения «удвоением» пространства представления. В частности, волновые функции нейтрино — двухкомпонентные спинорные функции.

Прежде чем обсуждать вторую особенность представлений с $m = 0$, напомним, что генератор подгруппы $\widetilde{U}(1)$ малой когруппы $\widetilde{\boldsymbol{E}}(2)$ имеет вид $|\mathbf{p}|^{-1} l^{ik} \varepsilon_{ikm} p^m$ (при $\overset{\circ}{p} = (1, 0, 0, 1)$ он совпадает с l_{12}). Его собственные значения (спиральность) нумеруют неприводимые представления $B_{H \uparrow \mathbf{\Pi}}^{\lambda, 0}$ группы $\mathbf{\Pi}$. В соответствии с формулами (63) и (65) оператор спиральности антикоммутирует с оператором $\hat{P}$-отражения. Отсюда следует, что элементарная частица с фиксированной спиральностью неинвариантна относительно пространственного отражения, так что в пространстве неприводимого представления $C^{|\lambda|,0}(\widetilde{\Pi})$ при $m=0$ должны присутствовать как состояния со спиральностью λ, так и состояния со спиральностью $-\lambda$. Ограничение $C^{|\lambda|,0}_{\widetilde{\Pi}\downarrow\Pi}$ является (при $\lambda\neq 0$) приводимым представлением, в то время как для частиц с $m\neq 0$ соответствующее представление $B^{Jm}_{\widetilde{\Pi}\downarrow\Pi}$ было неприводимым. При переходе от Π к $\widetilde{\Pi}$ спиральность перестает быть характеристикой безмассовой элементарной частицы, напротив, спин (или абсолютная величина спиральности) сохраняет значение квантового числа при классификации массивных частиц по представлениям группы $\widetilde{\Pi}$. ▼

(41) **Уравнение движения нейтрино.** В данном случае достаточно рассмотреть пространство неприводимого квантовомеханического представления собственной группы Пуанкаре. Такое представление для $m=0$ было построено в предыдущем параграфе (см. формулу (54)) на функциях $F\left(\mathcal{O}_0^+,\ V^{\lambda}_{\widetilde{E}(2)}\right)$. Перейдем к пространству $F(P,\ V_L^{(\lambda,0)})$ волновых функций в спинорном базисе (см. формулу (58)). Наша задача состоит в выделении подпространства в $F(P,\ V_L^{(\lambda,0)})$, инвариантного относительно представления $B^{\lambda,0}(\Pi)$, т. е. подпространства состояний с массой нуль и спиральностью λ.

Если фиксировать стандартный импульс $\overset{\circ}{p}=(1,\ 0,\ 0,\ 1)$, то операторы алгебры Ли подгруппы $\widetilde{E}(2)$ в группе L в базисе $\{l_j,\ n_j\}$ имеют вид

$$l_3,\ l_1+n_2,\ l_2-n_1.$$

Поскольку ограничение $B^{\lambda,0}_{\Pi\downarrow\widetilde{E}(2)}$ должно быть неточным представлением группы $\widetilde{E}(2)$, то на волновые функции $\psi(\overset{\circ}{p})\in F(P,\ V_L^{(\lambda,0)})$ в системе стандартного импульса необходимо наложить условия

$$\begin{aligned} D^{(\lambda,0)}(l_1+n_2)\,\psi(\overset{\circ}{p})&=0,\\ D^{(\lambda,0)}(l_2-n_1)\,\psi(\overset{\circ}{p})&=0. \end{aligned} \tag{105}$$

Расширим поле скаляров в алгебре l группы $L: l\to l_{\uparrow C}$. Перейдем в $l_{\uparrow C}$ к базису $\{{}^1/{}_2b,\ x,\ y,\ {}^1/{}_2b',\ x',\ y'\}$, в котором $l_{\uparrow C}=sl(2,\ C)\oplus sl(2,\ C)$, и перепишем соотношения (105):

$$\begin{aligned} D^{(\lambda,0)}(x)\,\psi(\overset{\circ}{p})&=0,\\ D^{(\lambda,0)}(y')\,\psi(\overset{\circ}{p})&=0. \end{aligned} \tag{106}$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$D^{(\lambda,0)}\left(\frac{1}{2}b\right)\psi(\overset{\circ}{p})=\lambda\psi(\overset{\circ}{p}),$$
$$D^{(\lambda,0)}\left(\frac{1}{2}b'\right)\psi(\overset{\circ}{p})=0.$$

Возвращаясь к базису $\{l_j, n_j\}$, получаем уравнение

$$D^{(\lambda,0)}(il_3)\psi(\overset{\circ}{p})=\lambda\psi(\overset{\circ}{p}), \tag{107}$$

так что проектор π оказывается равным

$$\pi=D^{(\lambda,0)}\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)+(1-\lambda)I. \tag{108}$$

Переход от стандартного импульса $\overset{\circ}{p}$ к произвольному $p\in\mathcal{O}_0^+$ произведен с помощью буста: $L_p^{-1}\overset{\circ}{p}=p$. В случае малой группы $\widetilde{E}(2)$ всякий буст L_p представим в виде произведения $L_p=L_RL_H$, где множитель $L_H\in H$ соответствует гиперболическому повороту в плоскости $\{0, 3\}$, а L_R принадлежит подгруппе $SU(2)$ и соответствует трехмерному вращению стандартного вектора $(1, 0, 0, 1)\to\left(1, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)$. Поскольку элементы L_H и σ_3 коммутируют, то проектор $\pi(p)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\pi(p)&=D^{(\lambda,0)}(L_p)\,\pi D^{(\lambda,0)}(L_p^{-1})=D^{(\lambda,0)}(L_R)\,\pi D^{(\lambda,0)}(L_R^{-1})=\\&=D^{(\lambda,0)}(L_R)\,\pi D^{(\lambda,0)}(L_R^{\dagger})=\frac{1}{2}D^{(\lambda,0)}(L_R\sigma_3L_R^{\dagger})+(1-\lambda)I=\\&=\frac{1}{2}D^{(\lambda,0)}(L_R(\sigma\overset{\circ}{\mathbf{p}})L_R^{\dagger})+(1-\lambda)I=\frac{1}{2}D^{(\lambda,0)}\left(\widetilde{\sigma}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)+(1-\lambda)I,\end{aligned} \tag{109}$$

где $|\mathbf{p}|=p_0$, так как $p\in\mathcal{O}_0^+$. Проектор (109) выделяет в пространстве волновых функций $F(P, V_L^{(\lambda,0)})$ подпространство состояний элементарной частицы с массой $m=0$ и спиральностью λ:

$$\frac{1}{2}D^{(\lambda,0)}(\widetilde{\sigma\mathbf{p}})\psi(p)=\lambda p_0\psi(p). \tag{110}$$

Решения уравнения движения (110) образуют пространство неприводимого квантовомеханического представления $C_{\Pi}^{\lambda,0,+}$ собственной группы Пуанкаре. В частном случае $\lambda=1/2$ уравнение

$$-(\sigma\mathbf{p})\psi(p)=p_0\psi(p) \tag{111}$$

носит название *уравнения Вейля* для нейтрино. ▼

(42) **Уравнения Максвелла.** В спинорном базисе пространство волновых функций системы, инвариантной относительно общей группы Пуанкаре, как и в случае $m \neq 0$, можно выбрать в виде $F(P, V_L^{(\lambda, 0)} \oplus V_L^{(0, \lambda)})$. Существенно, что здесь задача состоит в построении проектора на состояния со спиральностями $+\lambda$ и $-\lambda$. Неприводимые квантовомеханические представления группы $\widetilde{\Pi}$ нумеруются индексом $|\lambda|: C_{\eta_{\hat{p}}, \omega_S}^{0, |\lambda|, +}(\widetilde{\Pi})$.

Воспользуемся вычислениями, проведенными для нейтрино, заменяя всякий раз представление $D_L^{(\lambda, 0)}$ прямой суммой $D_L^{(\lambda, 0) \oplus (0, \lambda)}$. Представим волновую функцию $\psi(p) \in F(P, V^{(\lambda, 0)} \oplus V^{(0, \lambda)})$ в виде пары $(\psi_1(p), \psi_2(p))$ с областью значений $V^{(\lambda, 0)}$ для $\psi_1(p)$ и $V^{(0, \lambda)}$ для $\psi_2(p)$. Тогда из условий вида (106) получим

$$
\begin{gathered}
D^{(\lambda, 0) \oplus (0, \lambda)}\left(\frac{1}{2} b\right)\begin{pmatrix} \psi_1(\mathring{p}) \\ \psi_2(\mathring{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_1(\mathring{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
D^{(\lambda, 0) \oplus (0, \lambda)}\left(\frac{1}{2} b'\right)\begin{pmatrix} \psi_1(\mathring{p}) \\ \psi_2(\mathring{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda\psi_2(\mathring{p}) \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{112}
$$

Вместо уравнения (107) в базисе $\{l_i, n_i\}$ имеем

$$
\begin{gathered}
D^{(\lambda, 0)}\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)\psi_1(\mathring{p}) = \lambda\psi_1(\mathring{p}), \\
D^{(0, \lambda)}\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)\psi_2(\mathring{p}) = D^{(\lambda, 0)}\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)\psi_2(\mathring{p}) = -\lambda\psi_2(\mathring{p}).
\end{gathered} \tag{113}
$$

Дальнейшие выкладки, аналогичные (41), приводят к системе уравнений движения

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} D^{(\lambda, 0)}(\widetilde{\sigma}\mathbf{p})\,\psi_1(p) = \lambda p_0\,\psi_1(p), \\
\frac{1}{2} D^{(\lambda, 0)}(\widetilde{\sigma}\mathbf{p})\,\psi_2(p) = -\lambda p_0\,\psi_2(p),
\end{gathered} \tag{114}
$$

решения которой образуют пространство неприводимого представления $C^{0, |\lambda|, +}(\widetilde{\Pi})$. В частном случае $\lambda = 1$ получаем

$$
\begin{aligned}
-i\varepsilon_k p^k \psi_1(p) &= p_0\psi_1(p), \\
-i\varepsilon_k p^k \psi_2(p) &= -p_0\psi_2(p),
\end{aligned} \qquad (\varepsilon_k)_{lm} = \varepsilon_{klm}.
$$

Напомним, что $\psi_1(p)$ и $\psi_2(p)$ — трехмерные комплексные векторы. В трехмерных обозначениях уравнения примут вид

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\psi}_1(p)] &= -ip_0\boldsymbol{\psi}_1(p), \\
[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\psi}_2(p)] &= ip_0\boldsymbol{\psi}_2(p).
\end{aligned} \tag{115}
$$

Полученную систему легко привести к виду, знакомому из электродинамики, заменив комплексные поля $\psi_1(p)$ и $\psi_2(p)$ на действительные $\mathbf{B}(p)$ и $\mathbf{E}(p)$. Так как $\psi_1^*(p)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\psi_2(p)$, то положим

$$\psi_1(p)=\mathbf{B}(p)-i\mathbf{E}(p), \quad \psi_2(p)=\mathbf{B}(p)+i\mathbf{E}(p).$$

В результате уравнения (115) превращаются в *уравнения Максвелла* для электромагнитного поля в вакууме

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}\times\mathbf{B}(p)] &= -p_0\mathbf{E}(p), \quad (\mathbf{p},\ \mathbf{E}(p))=0, \\ [\mathbf{p}\times\mathbf{E}(p)] &= p_0\mathbf{B}(p), \quad (\mathbf{p},\ \mathbf{B}(p))=0. \end{aligned} \tag{116}$$

Ограничение $C^{0,|\lambda|,+}_{\widetilde{\Pi}\downarrow\Pi}$ является приводимым унитарным представлением собственной группы Пуанкаре. Полезно написать выражение для скалярного произведения на пространстве решений системы (115) в спинорном базисе. В соответствии с формулами (48) и (57) имеем

$$(\psi,\ \xi)_F=\int\frac{d^3p}{2p_0}\psi^\dagger(p)\,D^{\dagger-1}(L_p)D^{-1}(L_p)\xi(p).$$

Подставим произведение $L_HL_R=L_p$ в предыдущую формулу и воспользуемся эрмитовостью матрицы L_H:

$$(\psi,\ \xi)_F=\int\frac{d^3p}{2p_0}\psi^\dagger(p)\,D\left(L_H^{-2}\right)\xi(p).$$

Здесь представление D — прямая сумма $D^{(\lambda,0)\oplus(0,\lambda)}$, а элемент L_H записывается в виде матрицы $\begin{pmatrix}|\mathbf{p}|^{1/2} & 0\\ 0 & |\mathbf{p}|^{-1/2}\end{pmatrix}$. Поскольку решения уравнений (115) имеют лишь два значения спиральности: λ и $-\lambda$ то окончательное выражение для скалярного произведения принимает вид

$$(\psi,\ \xi)_F=\int\frac{d^3p}{2p_0}\psi^\dagger(p)\,\xi(p)\,|\mathbf{p}|^{-2\lambda}=\int\frac{d^3p}{2p_0}(p_0)^{-2\lambda}\,\psi^\dagger(p)\,\xi(p). \tag{117}$$

Представление $C^{0,1,+}_{\widetilde{\Pi}}$ для электромагнитного поля можно реализовать на пространстве функций $F_{\mu\nu}(p)$ со значениями в антисимметризованном тензорном произведении $V^{(1/2,1/2)}\otimes\otimes V^{(1/2,1/2)}$ двух четырехмерных векторных пространств. Никаких принципиальных изменений, кроме некоторого усложнения проекционных операторов, при этом не происходит. Такая же ситуация возникала при рассмотрении массивных частиц, где одно и то же неприводимое представление реализовалось различными проекторами на различных пространствах волновых функций, инвариантных относительно действия группы $\widetilde{\Pi}$ и содержащих искомое неприводимое подпространство. Выбор той или иной формы уравнений движения диктуется условиями конкретной физической задачи. ▼

Для применения рассмотренного формализма к описанию реальных физических частиц следует построить полную группу физической симметрии $G_{ф}$. На примере формул масс (8.82) можно видеть, что пространственно-временная и внутренняя симметрия нетривиально связаны. Истинная природа этой связи пока не известна. В качестве первого приближения естественно считать группу $G_{ф}$ равной прямому произведению групп Пуанкаре и внутренней симметрии G_0. Тогда пространство свободной частицы можно описать решениями уравнений движения (77), снабдив волновые функции индексом внутренней симметрии, нумерующим базисные векторы неприводимого представления группы G_0.

Описание процессов взаимодействия элементарных частиц требует перехода к формализму вторичного квантования — квантовой теории поля. В ней волновым функциям, рассмотренным в § 3, сопоставляются операторы поля [23], которые по-прежнему удовлетворяют свободным уравнениям движения (77) в представлении взаимодействия.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М., 1979. 336 с.
2. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М., 1980. Т. I. 455 с.; Т. II. 396 с.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М., 1978. 342 с.
4. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., 1967. 398 с.
5. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. М., 1978. Т. I. 296 с.; Т. II. 408 с.
6. Варден ван дер Б. Л. Алгебра. М., 1976. 648 с.
7. Вигнер Е. П. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. М., 1961. 443 с.
8. Гелл-Манн М. Восьмимерный формализм: теория симметрий в сильных взаимодействиях. — В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. М., 1964, с. 117—146.
9. Глушков В. М. Строение локально-бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта. — Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2, с. 3—41.
10. Голдстейн Г. Классическая механика. М., 1975. 416 с.
11. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., 1964. 356 с.
12. Диксмье Ж. C*-алгебры и их представления. М., 1974. 400 с.
13. Дьёдонне Ж. Геометрия классических групп. М., 1974. 205 с.
14. Квантовая теория калибровочных полей. М., 1977. 436 с.
15. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. 2-е изд. М., 1978. 344 с.
16. Климык А. У. Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп. Киев, 1979. 304 с.
17. Коккедэ Я. Теория кварков. М., 1971. 344 с.
18. Ленг С. Алгебра. М., 1968. 564 с.
19. Медведев Б. В. Начала теоретической физики. М., 1977. 496 с.
20. Менский М. Б. Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. М., 1976. 288 с.

21. Мишель Л., Шааф М. Симметрия в квантовой физике. М., 1974. 250 с.
22. Наймарк М. А. Теория представлений групп. М., 1976. 560 с.
23. Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц. М., 1972. 474 с.
24. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. 3-е изд. М., 1973. 520 с.
25. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М., 1969. 376 с.
26. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1978. 240 с.
27. Стритер Р., Вайтман А. С. РСТ, спин и статистика и все такое. М., 1966. 250 с.
28. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли». М., 1962. 306 с.
29. Теория групп и элементарные частицы. М., 1976. 375 с.
30. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. 2-е изд. М., 1961. 564 с.
31. Фок В. А. Начала квантовой механики. М., 1976. 376 с.
32. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964. 534 с.
33. Холл М. Теория групп. М., 1962. 468 с.
34. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. М., 1975. Т. I. 654 с.; Т. II. 900 с.
35. Шевалле К. Теория групп Ли. М., 1948. Т. I. 315 с.; 1958. Т. II. 276 с.; 1958. Т. III. 308 с.
36. Шелепин Л. А. Исчисление коэффициентов Клебша — Гордана и его физические приложения. — Труды Физич. ин-та АН СССР, 1973, т. 70, с. 3—119.
37. Barash-Schmidt N., Barbaro-Galtieri A., Bricman C. et. al. Review of particle properties. — Phys. Lett., 1978, vol. 75B, p. I—XXI, p. 1—250.
38. Bargmann V. Note on Wigner's theorem on symmetry operations. — J. Math. Phys., 1964, vol. 5, p. 862—868.
39. Bargmann V. On unitary ray representations of continuous groups. — Ann. Math., 1954, vol. 59, p. 1—46.
40. Carruthers P. Introduction to unitary symmetry. Interscience Publ., 1966. 228 p.
41. Fayet P., Ferrara S. Supersymmetry. — Phys. Lett. C, 1977, vol. 32, p. 249—334.
42. Glashow S., Illiopulos J., Maiani L. Weak interactions with Lepton — Hadron symmetry. — Phys. Rev., 1970, vol. D2, p. 1285—1292.
43. Inönü E., Wigner E. Representations of Galilei Group. — Nuovo Cim., 1952, vol. 9, p. 705—718.
44. Mackey G. W. On induced representations of Groups. — Amer. J. Math., 1951, vol. 73, p. 576—592.
45. Ogievetsky V., Tzeitlin V. Exceptional Gauge theories in 3×3 matrix formalism. — J. Phys. A: Math. Gen., 1978, vol. 11, N 7, p. 1419—1426.
46. Weinberg S. Feynman rules for any spin, I. — Phys. Rev., 1964, vol. 133B, p. 1318—1332.
47. Zweig G. An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking. Preprint CERN, 1964. 33 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
27	13-я сверху	P	$\boldsymbol{P}$
38	6-сверху	$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
43	1-сверху	$\operatorname{Ker} f = é$	$\operatorname{Ker} f = e$
58	5-я снизу	$u^{\alpha} e_{\alpha}$	$u^{\alpha} \check{e}_{\alpha}$
73	13-я сверху	$\underbrace{\otimes \overset{(*)}{e}{}^{j_s} \otimes \ldots \otimes \overset{(*)}{e}{}^{m s'}}_{s+s'}. \blacktriangledown$	$\underbrace{\otimes \overset{(*)}{e}{}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \overset{(*)}{e}{}^{m_{s'}}}_{s+s'}. \blacktriangledown$
102	6-я сверху	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha \quad 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \quad 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$
108	13-я сверху	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_{(-)}$
109	6-я сверху	$\subset G$	$\subset \widehat{G}$
144	10-я сверху	A_{l_3}	$A^0_{l_3}$
150	15-я снизу	$1/2 \sum\limits_{=1} (-1)^{m(i)}$	$1/2 \sum\limits_{i=1} (-1)^{m(i)}$
172	20-я снизу	$D_{(*)} \left(d,\ d^{\langle * \rangle} f \text{ и } d_{(*)}\right)$	$D_{(*)} \quad \left(d,\ d^{\langle * \rangle} f \text{ и } d_{(*)}\right)$
173	9-я снизу	является неприводимой суммой	является неприводимой, суммой
189	10-я сверху	$D''_{ik}(g)$	$D'_{ik}(g)$
197	6-я сверху	$V =$	$U =$
206	9-я снизу	$c^{(1,\ 0)}_{(\ )}$	$c^{(1,\ 0)}_{(*)}$
208	3-я сверху	$d^{(1,\ 0)}_{(\ )}$	$d^{(1,\ 0)}_{(*)}$
216	4-я сверху	λ_3	λ_s
218	8-я сверху	$T^{,\ \ldots,\ i_n]}$	$T^{[i_1,\ \ldots,\ i_n]}$
230	20-я сверху	$d^{(0,\ 0,\ 0,}_{su(5) \downarrow A}$	$d^{(0,\ 0,\ 0,\ 1)}_{su(5) \downarrow A}$
244	16-я сверху	$\sum\limits_{t,\ k,\ k''}$	$\sum\limits_{t,\ k',\ k''}$
262	20-я сверху	$\mathcal{Y}(A)$	$\mathcal{U}(A)$
274	15-я снизу	$\delta_{ll} m$	$\delta_{lj} m$
279	2-я сверху	отражения $\widehat{C}$	отражения $\widehat{G}$
293	7-я снизу	$\mathcal{H}_F$	$\mathcal{H}_{F_l}$
294	13-я сверху	$\mathcal{H}_F$	$\mathcal{H}_{F_l}$