

А. Б. МИГДАЛ

ФЕРМИОНЫ И БОЗОНЫ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 9 7 8

Фермионы и бозоны в сильных полях. Мигдал А. Б. Монография. Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, М., 1978, 272 стр.

Книга посвящена вопросам, связанным с перестройкой вакуума в сильных внешних полях. Эта перестройка представляет собой фазовый переход, аналогичный обычным фазовым переходам. Особенно подробно рассматривается перестройка поля π -мезонов в достаточно плотной нуклонной среде («пионная конденсация»), приводящая к возможности существования сверхплотных ядер, когда энергия, выигрываемая в результате фазового перехода пионного поля, компенсирует потерю энергии от сжатия нуклонов.

Рассмотрены также явления, связанные с перестройкой электрон-позитронного вакуума в сильных электрических полях («электронная конденсация»). Происходящее в сильном поле рождение пар приводит к экранировке больших электрических зарядов и делает невозможным существование систем с большой кулоновской энергией. Показано, что это явление должно учитываться при изучении электромагнитного взаимодействия на сверхмалых расстояниях и связано с взаимной устранимостью электродинамических расходимостей.

Рисунков 26, библиография 197 названий.

Аркадий Бейнусович Мигдал

ФЕРМИОНЫ И БОЗОНЫ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ

М., 1978 г., 272 стр. с илл.

Обложка изготовлена по эскизу автора

Редактор В. Я. Дубнова

Техн. редактор Е. В. Морозова

Корректор М. Л. Медведская

ИБ № 2390

Сдано в набор 26.01.78. Подписано к печати 18.07.78. Т-13844. Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 14,28. Уч.-изд. л. 13,71. Тираж 4500 экз. Заказ № 41. Цена книги 1 р. 60 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

M20401—117
053(02)—78 116-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
ВВЕДЕНИЕ	9
В.1. Физическая природа фермионной и бозонной конденсации	11
Перестройка вакуума в сильных полях (11). Связанные состояния электрон-позитронных пар (13). Электронная конденсация (15). Диэлектрическая проницаемость вакуума в сильных неоднородных полях (16). Искажение кулоновского поля на малых расстояниях (20). Неустойчивость пионного поля в нуклонной среде (21). Модель π -конденсации (25).	
В.2. Физические следствия π-конденсации	27
Конденсация в однородном ядерном веществе и нейтронные звезды (27). Возможность π -конденсации в обычных ядрах (30). Возможное существование сверхплотных и нейтронных ядер (3). Сверхзаряженные ядра (33).	
В.3. Путеводитель по книге и замечания о литературе	33
Глава I	
КОНДЕНСАЦИЯ ФЕРМИ-ЧАСТИЦ В СИЛЬНОМ ПОЛЕ	43
I.1. Фермионы в электрическом поле	44
Неустойчивость фермионного вакуума в сильном поле (44). Волновая функция позитрона при $Z > Z_c$ (47). Перестройка электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_c$ (49).	
I.2. Связанные состояния электрон-позитронных пар в сильных полях	53
Электрон-позитронное взаимодействие (53). Уравнение для определения энергии системы при $Z > Z_c$ (55). Вычисление матричных элементов (59). Рождение позитронов при сближении ядер (65).	
I.3. Распределение вакуумного заряда вблизи сверхзаряженных ядер	66
Релятивистское уравнение Томаса — Ферми (68). Оценка вклада поляризации вакуума (70). Слабая экрани-	

ровка: $Ze^3 \ll 1$ (71). Случай $Ze^3 \gg 1$ (предельная экранировка) (74). Результаты численных расчетов (77). Возможное развитие теории (79). Приложение к I.3. Решение уравнения Дирака в квазиклассическом приближении (80).

I.4. Поляризация вакуума в сильных неоднородных полях 83

Диэлектрическая проницаемость вакуума в сильном поле (83). Локализация функций Грина в сильных полях (88). Поляризационный оператор в координатном представлении (92). Искажение кулоновского поля на малых расстояниях (95). Влияние электронной конденсации (97). Приложение к I.4. Функция Грина и поляризационный оператор в координатном представлении (99). Функция Грина в однородном электрическом поле (100).

Глава II

КОНДЕНСАЦИЯ БОЗЕ-ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ. 102

II.1. Бозоны в скалярном и электрическом полях 103

Неустойчивость одночастичной задачи (103). Нахождение поля бозонов (106). Конденсация в скалярном поле (110). Конденсация в электрическом поле (111).

II.2. Пионное поле в нуклонной среде 118

Неустойчивость пионного поля (118). Простейшая модель пионной конденсации в нуклонной среде (119).

Глава III

ПИОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ЯДЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕ 122

III.1. Нахождение поляризационного оператора пионов в нуклонной среде 123

Применение методов задачи многих тел (123). Диаграммы, определяющие поляризационный оператор (126). Резонансная часть поляризационного оператора (129). Учет S -рассеяния. Локальная часть поляризационного оператора (133). Полюсная часть поляризационного оператора (137). Учет нуклонных корреляций (139).

III.2. Пионная степень свободы в ядерном веществе 143

Учет однопионного обмена в теории ферми-жидкости (143). Схема последовательной теории ядерного вещества (148).

III.3. Спектр пионов и условия неустойчивости пионного поля 150

Квантование пионного поля в среде (150). Спектры пионов при $Z \simeq N$ и $Z \ll N$ (154). Спектр пионов в простой модели (159).

Глава IV

ЭФФЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПИОНОВ В НУКЛОННОЙ СРЕДЕ 164

IV.1. Эффективный лагранжиан пионного поля 165

Метод нахождения лагранжиана (165). Характер возможных решений (168). Разложение по амплитуде конденсатного поля (170). Вакуумное взаимодействие пионов (171).

IV.2. Взаимодействие в случае слабого пионного поля . . . 173

Вычисление параметров взаимодействия Λ (173). Процессы, определяющие $\pi\pi$ -взаимодействие (174). Учет N^* -резонанса (177). Результаты вычисления Λ (178).

IV.3. Приближение слабо изменяющегося поля 181

Метод Томаса — Ферми (182). Пространственная и изотопическая структура конденсата (184).

Глава V

ПИОННАЯ КОНДЕНСАЦИЯ В НУКЛОННОЙ СРЕДЕ 187

V.1. Свойства конденсата вблизи критической точки . . . 188

Энергия и амплитуда конденсата (188). π -конденсация в нейтронной среде (190). Уравнение состояния (194). Модуляция плотности и спиновой плотности нуклонов (195). Особенности во взаимодействии пионов вблизи критической точки (198).

V.2. Развитый конденсат 201

Энергия нуклона в поле конденсата (202). Энергия конденсата в приближении больших частот (204). Модель предельного конденсатного поля (206).

Глава VI

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ КОНДЕНСАТ В ОБЫЧНЫХ ЯДРАХ? 211

VI.1. Пионная конденсация в конечной системе 213

Конденсатное поле в конечной системе (213). Деформация и моменты инерции ядер (216). Голдстоуновские ветви колебаний (219). Квантовый характер конденсатного поля в конечной системе (222). Сохранение четности (224).

VI.2. Эксперименты, позволяющие установить близость ядер к конденсации 224

Противоречит ли конденсация известным ядерным фактам? (224). Влияние однопионного обмена на спектры и вероятности переходов (227). Магнитные моменты (230). l -запрещенные $M1$ -переходы (232). Оптический потенциал пионов (234). Рассеяние электронов ядрами. Рассеяние нуклонов и пионов (237).

Глава VII

π -КОНДЕНСАЦИЯ И ВОЗМОЖНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ЯДЕР	242
VII.1. Аномальные состояния ядерного вещества	243
Сверхплотные и сверхзаряженные ядра (243). Нейтронные ядра (246). Сверхзаряженные ядра (247). Неустойчивость нуклонного поля (модель Ли) (249).	
VII.2. Устойчивость аномальных ядер	254
Энергия ядра с учетом конденсации как функции плотности (254). Условия устойчивости (258). Оценка плотности и энергии связи аномальных ядер (260). Возможные способы обнаружения аномальных ядер (263).	
VII.3. Пионная конденсация и динамика нейтронных звезд	264
Литература	270

Список опечаток

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
93	6 сверху	$\Pi^0(R)$	$-\Pi^0(R)$
105	11 сверху	\bar{V}^2	$\frac{-\Pi^0(R)}{\bar{V}^2}$
112	Формула (2.24)	$\dots + \frac{\lambda_1(q+q)^2}{4}$	$\dots - \frac{\lambda_1(q+q)^2}{4}$
162	1 строка сверху должна быть 11 строкой сверху (перед второй формулой).		
166	16 сверху	Φ_k	Φ_k
196	1 сверху	$\tilde{G}_{\lambda\lambda}(\varepsilon)$	$\tilde{G}_{\lambda\lambda'}(\varepsilon)$
203	8 сверху	ω^-	ω_{π^-}
203	9 сверху	ПЛОТЬ	ВПЛОТЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы внимание многих физиков — теоретиков было обращено к задачам, связанным с перестройкой вакуума в сильных полях. Среди этих задач особый интерес представляет так называемая « π -конденсация» — фазовый переход с перестройкой пионного поля, происходящий в сильных внешних полях или в достаточно плотной нуклонной среде. Наиболее важным следствием этого перехода является принципиальная возможность существования сверхплотных ядер, когда энергия, выигрываемая при фазовом переходе пионного поля, компенсирует потерю энергии от сжатия нуклонного вещества.

Обсуждается также возможность пионной конденсации в обычных ядрах. Ядерные экспериментальные данные не противоречат такому предположению и во всяком случае свидетельствуют о близости ядерной плотности к критической для пионной конденсации.

Пионная конденсация должна оказывать существенное влияние на эволюцию и структуру нейтронных звезд. В частности оказывается, что при достижении в центре звезды критической плотности заметная часть нейтронной звезды за короткое время должна перейти в сверхплотное состояние с выделением громадной энергии.

В случае ферми-частиц перестройка вакуума лимитируется принципом Паули и прекращается, когда заполняются все уровни с энергией, меньшей, чем энергия покоя частицы. Подобный фазовый переход мог бы происходить вблизи ядра с зарядом $Z > 170$ и должен проявиться при столкновении двух ядер урана.

В случае систем с электрическим потенциалом, значительно превышающим энергию покоя электронов, возникающие из вакуума электроны (или позитроны) экранируют заряд системы и делают невозможным существование систем с большой кулоновской энергией.

Как показано, такая «электронная конденсация» должна учитываться при изучении электромагнитного взаимодействия на сверхмалых расстояниях и может оказаться важной для проблемы устранения электродинамических расходимостей.

Монография представляет собой изложение наиболее существенных результатов, полученных в последнее время в этой области теоретической физики.

При изложении сделана попытка удовлетворить как физиков, интересующихся только качественной стороной вопроса, так и физиков-теоретиков, предполагающих работать в данной области. Для этой цели физическое содержание книги выделено в первую главу, в которой наглядно поясняются основные физические результаты.

Последний раздел этой главы представляет собой путеводитель по книге и содержит, кроме того, хронологию и обсуждение наиболее существенных работ. Каждая из глав книги излагается по возможности так, чтобы ее можно было читать независимо, поэтому читатель, прочитавший первую главу, легко сможет выбрать те разделы, которые его больше интересуют.

При написании книги автору принесли большую пользу советы Л. Б. Окуня и дискуссии с Д. Н. Воскресенским, О. А. Маркиным, И. Н. Мишустиним, В. С. Поповым, Г. А. Сорокиным, А. И. Черноуцаном.

ВВЕДЕНИЕ

В сильных полях происходит перестройка вакуума ферми- и бозе-частиц, приводящая к ряду существенных физических следствий. Эта перестройка вакуума аналогична обычному фазовому переходу и происходит в тех случаях, когда энергия частицы или пары в поле обращается в нуль, т. е. когда выигрыш энергии в поле превышает массу покоя частицы или пары. Перестройка вакуума начинается с частиц наименьшей массы и происходит по-разному у бозе- и у ферми-частиц. Поэтому в дальнейшем нас будут особенно интересовать ферми- и бозе-частицы наименьшей массы, т. е. электроны и π -мезоны. Подобная перестройка вакуума происходит вблизи ядра с зарядом $Z > 170$, когда энергия пары, состоящей из электрона на K -оболочке и позитрона в сплошном спектре, обращается в нуль.

В достаточно сильных электрических полях основное состояние вакуума соответствует заряду, отличному от нуля, т. е. происходит конденсация электронов (или позитронов в зависимости от знака внешнего заряда). Эта конденсация электронов приводит к экранировке заряда ядра и существенна при исследовании стабильности сверхзаряженных ядер (ядер с зарядом $Ze^2 \gg 1$).

Электронная конденсация должна также учитываться при выяснении вопроса о взаимодействии заряженных частиц на сверхмалых расстояниях.

К не менее важным следствиям приводит перестройка бозонного вакуума во внешних полях.

Одна из главных задач книги — исследование физических следствий, вытекающих из перестройки пионного поля в достаточно плотной нуклонной среде. Поскольку выигрышаемая при этом энергия пропорциональна объему системы, речь идет о фазовом переходе («пионная конденсация»). Наиболее важным физическим следствием

этого фазового перехода является принципиальная возможность существования сверхплотных ядер, в которых энергия, выигрываемая при фазовом переходе, компенсирует потерю энергии от сжатия. Оценки энергии конденсации, как мы увидим, пока недостаточно точны для сколько-нибудь достоверного заключения о существовании таких аномальных ядер. Дальнейшие эксперименты позволяют уточнить параметры, вводимые в теорию, и сделать более надежные утверждения.

Неопределенность в оценке критической плотности не исключает возможности того, что фазовый переход произошел уже в обычных ядрах. В этом случае присутствие π -конденсата проявилось бы в том, что в ядре имелась бы периодическая структура спиновой плотности нуклонов с волновым вектором $k_0 \approx p_F$, которая оказала бы влияние на рассеяние нуклонов и электронов на ядрах.

Независимо от того, произошел ли фазовый переход, близость ядер к конденсации проявляется в целом ряде экспериментальных фактов, а именно, во всех явлениях, в которых существенную роль играют процессы обмена одним пионным возбуждением. Близость к конденсации делает пионную степень свободы «мягкой», что приводит к усилению матричных элементов, имеющих пионную симметрию. К числу явлений, на которые оказывает существенное влияние уменьшение энергии пиона в ядерном веществе, относятся: сдвиги уровней 0^- , 1^+ , 2^- ... по сравнению с их положением в модели оболочек, усиление $M1$ -переходов с изменением орбитального момента на 2 единицы (l -запрещенные переходы), усиление гамма-теллеровских β -переходов. Смягчение пионной степени свободы должно также учитываться при расчетах подавления спиновой части магнитных моментов в ядре. Особенно сильное влияние близость к конденсации оказывает на интенсивности l -запрещенных переходов — интенсивности этих переходов в некоторых случаях в десятки раз превышают расчетные значения, полученные без учета близости к конденсации. Уменьшение энергии пиона в ядре, предсказываемое теорией, непосредственно проявляется в спектральных данных π -атома.

Пионная конденсация приводит к ряду интересных следствий, касающихся структуры нейтронных звезд. При плотности нейтронов, заметно меньшей, чем ядерная

($n_c \approx 0,4 n_0$), образуются частицы, представляющие собой связанные состояния протона и нейтронной дырки и имеющие квантовые числа π^+ -мезона (π_s^+ -мезон). В результате конденсации таких π_s^+ -мезонов уравнение состояния нейтронной звезды «смягчается» — давление при той же плотности делается меньше. При большей плотности начинается образование пар $\pi^- \pi_s^+$ -мезонов, в результате чего сжимаемость может изменить знак. При этом заметная часть звезды должна была бы перейти в состояние с плотностью $n \gtrsim (3 \div 5) n_0$.

Для понимания всех этих явлений очень полезно проследить механизм π -конденсации сначала на простых примерах конденсации во внешних скалярном и электрическом полях и только после этого перейти к наиболее интересному случаю — π -конденсации в нуклонной среде.

π -конденсация во внешнем поле помимо методического интереса представляет самостоятельный физический интерес в связи с возможностью существования сверхзаряженных ядер, в которых выигрыш энергии от π -конденсации в электрическом поле ядра частично компенсирует потерю энергии из-за кулоновского поля.

В ближайших разделах Введения дается простое описание конденсации ферми-частиц в электрическом поле и π -конденсации во внешних полях и в нуклонной среде.

В.1. Физическая природа фермионной и бозонной конденсации

Перестройка вакуума в сильных полях. Как известно, уравнение Дирака в поле точечного ядра теряет смысл при $Z > Z_c = 137$. Действительно, энергия основного состояния имеет вид ($\hbar = m = c = 1$)

$$\omega_0 = [1 - (Ze^2)^2]^{1/2}$$

и делается мнимой при $Z > 137$. Учет конечных размеров ядра [1—3] снимает эту трудность. Однако при значении $Z \approx 170$ энергия наимизшего состояния достигает значения $\omega_0 = -1$ и суммарная энергия пары обращается в нуль, т. е. вакуум делается неустойчивым по отношению к рождению электрон-позитронных пар. Таким образом, при $Z = Z_c$ уравнение Дирака теряет смысл уравнения для одной частицы. Если K -оболочка не заполнена, мо-

гут родиться две пары, если на K -оболочке имеется один электрон, то, согласно принципу Паули, возможно рождение только одной пары, и, наконец, в случае заполненной оболочки вакуум остается устойчивым, несмотря на появление уровня $\omega_0 = -1$.

Как показано в [4], при $Z > Z_c$ вакуум перестраивается — основному состоянию соответствует состояние с зарядом $-2e$. При $Z - Z_c \ll Z_c$ этот заряд распределен в пространстве с плотностью, близкой к распределению заряда в K -оболочке для $Z = Z_c - 0$, т. е. заряд локализован вблизи ядра. Переход в это состояние осуществляется в результате рождения одной или двух электрон-позитронных пар, позитроны уходят на бесконечность, а электроны распределяются вблизи ядра, образуя новое вакуумное состояние.

Гораздо более существенная перестройка вакуума происходит в случае бозе-частиц, когда нет запрета Паули и возможно образование многих частиц в одном и том же состоянии. Перестройка вакуума в этом случае лимитируется лишь взаимодействием между частицами. После того, как в «опасном» состоянии накопится достаточное число частиц, дальнейшее образование частиц делается энергетически невыгодным из-за отталкивания между частицами. Заметим, что в случае притяжения между бозе-частицами, вакуум был бы неустойчив и без внешнего поля. Действительно, при достаточно большой плотности частиц затрата энергии на рождение частицы mc^2 скомпенсируется выигрышем от притяжения и при дальнейшем рождении частиц энергия системы будет понижаться.

Наиболее просто неустойчивость вакуума проявляется в случае скалярного поля, имеющего вид широкой прямоугольной ямы. Влияние внешнего поля в этом случае сводится к тому, что изменяется масса частицы ($c = 1$)

$$\tilde{m}^2 = m^2 - U_0, \quad (\text{B.1})$$

где U_0 — глубина скалярной ямы (скалярное поле U связано с полем уравнения Шредингера соотношением $U = 2mV$ (см. ниже)). Когда эффективная масса \tilde{m} обращается в нуль, вакуум делается неустойчивым. Частицы будут рождаться до тех пор, пока отталкивание между ними не сделает этот процесс энергетически невыгод-

ным. Аналогичная неустойчивость может возникнуть и в электрическом поле, однако в этом случае возможны два типа перестройки вакуума в зависимости от того, фиксирован ли заряд системы или может изменяться в результате последовательных β -распадов. В первом случае перестройка вакуума заряженных бозонов возникает, когда сумма энергий $\omega^+ + \omega^- = 0$.

В дальнейшем для определенности будем иметь в виду π -мезоны и предполагать, что электрическое поле создается положительными зарядами, т. е. представляет собой яму для π^- -мезонов. Тогда неустойчивость, вообще говоря, наступит, когда уровень π^- -мезона достигнет значения $-m_\pi c^2$ (как мы увидим в II.1 для узкой прямоугольной ямы неустойчивость возникает уже при меньшем углублении уровня). При дальнейшем углублении ямы на опасных уровнях будут накапливаться $\pi^+\pi^-$ -пары до тех пор, пока отталкивание между ними не остановит процесс. Если же заряд системы может изменяться, например, в результате β -распада протонов, создающих электрическое поле, то неустойчивость возникнет при меньшей глубине ямы, а именно, когда энергия π -мезона обратится в нуль — в этом случае перестройка вакуума начнется с накопления π^- -мезонов — положительный заряд будет уноситься β -позитронами. Такой случай мог бы реализоваться в сверхзаряженных ядрах, если они существуют (см. следующий раздел Введения).

Наибольший интерес представляет перестройка пионного поля, возникающая в достаточно плотной нуклонной среде. В этом случае эффективная потенциальная яма для пионов возникает в результате их взаимодействия с нуклонами. Образование пионного конденсата может изменить знак сжимаемости нуклонного вещества и привести к существованию более плотного устойчивого состояния.

Связанные состояния электрон-позитронных пар. Приведенная выше картина перестройки электрон-позитронного вакуума вблизи $Z = Z_c$ была получена без учета электрон-позитронного взаимодействия. Между тем, при $Z \simeq Z_c$ в системе имеется вырождение. Действительно, в случае незаполненной K -оболочки без учета взаимодействия одинакова энергия 3-х возможных состояний: 1) голое ядро, 2) ядро с одной парой, 3) ядро с двумя

парами. Для случая одного электрона на K -оболочке одинакова энергия двух состояний: 1) один электрон, 2) один электрон + пара. Состояние с заполненной оболочкой невырождено. Учет взаимодействия снимает вырождение и оказывает существенное влияние на положение уровней системы при $Z \approx Z_c$. Главное упрощение, позволяющее решить задачу с учетом взаимодействия, состоит в том, что достаточно рассматривать только рождение пар, состоящих из электрона на K -оболочке и позитрона с малой энергией. Все остальные состояния отделены по энергии от основного на величину $\sim mc^2$, и учет их дает малые поправки ($\sim 1/137$). Кроме того, используется простой вид волновой функции медленных позитронов при $Z > Z_c$, что позволяет свести интегральное уравнение для определения энергии системы к простому алгебраическому уравнению.

Физический смысл полученных результатов состоит в следующем. При $Z > Z_c$ у позитрона возникает долгоживущее квазистационарное состояние, описываемое волновой функцией, близкой к Ψ -функции K -электрона. В результате взаимодействия перемешиваются указанные выше вырожденные состояния, причем паре соответствует электрон на K -оболочке и позитрон в квазистационарном состоянии.

Возникновение квазистационарного состояния у позитрона очень естественно. Если записать уравнение движения частицы в форме эквивалентного уравнения Шредингера, то эффективный потенциал в таком уравнении имеет вид

$$U = -\frac{1}{2} V^2 + \omega V,$$

где V — обычный потенциал, ω — энергия частицы. Для бозе-частиц это выражение — точное, для ферми-частиц к нему добавляются небольшие спиновые поправки. Таким образом при любом знаке потенциала V (т. е. при любом знаке заряда частицы), в области больших значений V эффективный потенциал U становится отрицательным, что соответствует притяжению.

Для позитрона с энергией $\omega \approx 1$ эффективный потенциал такой же, как для электрона с энергией $\omega \approx -1$, так как вблизи ядра имеется область притяжения, а вне этой области — потенциальный барьер. При $Z \approx Z_c$ ква-

зистационарный уровень позитрона имеет энергию $\omega \approx 1$, поэтому достаточно учесть притяжение к электрону, имеющемуся на K -оболочке, чтобы получилось связанное состояние электрон-позитронной пары. Действительно, учет взаимодействия приводит к тому, что в интервале $\Delta Z = Z - Z_c \approx 1$ возникают связанные состояния пар, которые при дальнейшем увеличении Z переходят в квазистационарные состояния.

В случае незаполненной K -оболочки возникают три уровня с расщеплением, не зависящим от $Z - Z_c$ (в первом порядке по e^2). Эти уровни описывают систему из 0, 1, 2 пар. В случае K -оболочки с одним электроном возникают два уровня с расщеплением такого же порядка. В соответствии с этими результатами при сближении двух тяжелых ядер происходит испускание позитронов с энергетическим спектром, имеющим несколько максимумов, соответствующих переходам между указанными расщепленными состояниями.

Электронная конденсация. Как мы видели, при $Z > Z_c$ электрон-позитронный вакуум перестраивается так, что основному уровню системы соответствует состояние с зарядом $-Ze$.

В случае $Z \gg Z_c$ основному состоянию вакуума соответствует большое количество электронов, заряд которых почти нацело компенсирует заряд ядра. Поскольку такой заряженный вакуум имеется в основном состоянии системы, естественно назвать это явление электронной конденсацией в соответствии с аналогичным явлением для бозе-частиц.

Распределение вакуумного заряда вокруг ядра с зарядом $Z \gg Z_c$ легко определяется, поскольку в этом случае решение уравнения Дирака может быть найдено в квазиклассическом приближении и плотность электронов вычисляется по методу Томаса — Ферми.

Показано, что плотность электронов в потенциальной яме с глубиной $V(r) \gg 1$ дается выражением

$$n(r) = \frac{V^3(r)}{3\pi^2}. \quad (\text{В.2})$$

При достаточно большом Z ($Ze^3 \gg 1$, «сверхзаряженное ядро») вакуумные электроны располагаются внутри ядра таким образом, что полностью компенсируют заряд

протонов внутри ядра, оставляя нескомпенсированным только заряд в узком слое вблизи поверхности ядра.

Как мы ниже увидим, электронная конденсация играет существенную роль при исследовании возможности образования заряженного π -конденсата и при вычислении энергии сверхзаряженных ядер.

Учет электронной конденсации оказывается существенным при исследовании вопроса о взаимодействии между заряженными частицами на сверхмалых расстояниях и, возможно, приведет к выяснению природы или к устранению электродинамических расходимостей.

Диэлектрическая проницаемость вакуума в сильных неоднородных полях. Поляризация вакуума в сильных полях изучалась очень давно [5, 6]. В сильном электрическом поле учет возмущения в движении электронов и позитронов вакуума дает, кроме обычного слагаемого, для плотности энергии $\frac{E^2}{8\pi}$ дополнительное выражение

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2 E^2}{24\pi^2} \ln(eE) \quad \ln(eE) \gg 1.$$

Вектор поляризации равен

$$P = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial E} = -\frac{e^2 E}{12\pi^2} \ln(eE) - \frac{e^2}{24\pi^2} E.$$

Последнее слагаемое может быть опущено при $\ln(eE) \gg 1$, и, следовательно, диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon = 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln(eE). \quad (\text{B.3})$$

Это выражение было получено в предположении, что поле медленно изменяется в пространстве, а именно, мало изменяется на комптоновской длине волны электрона, или, в наших единицах, $E'/E \ll 1$.

Мы покажем, что выражение (B.3) в сильных полях справедливо даже при очень резком изменении E от точки к точке. Критерий, который мы получим, имеет вид

$$\left(\frac{E'}{E}\right)^2 \ll eE. \quad (\text{B.4})$$

Дело в том, что при выводе авторы получили единое выражение для произвольных полей, а для применимости их выражения в слабых полях действительно требуется

указанное выше условие $E'/E \ll 1$. Это очень часто встречающийся случай, когда ограничения, связанные со способом получения результата, переносятся на сам результат.

Допустим, что какой-либо физический результат получен теоретически для значений параметра $\zeta < \zeta_1$. Если характерные значения ζ , на которых существенно изменяется изучаемая величина, $\zeta \sim \zeta_2 \gg \zeta_1$, то результат будет справедлив и для значений ζ много больших, чем те, которые предполагались при выводе. На более формальном языке: результат, полученный при $\zeta < \zeta_1$, может быть аналитически продолжен в область больших ζ , вплоть до значений, которые определяются ближайшей особой точкой рассматриваемой функции.

Перейдем к выяснению области применимости выражения (В.3). Пусть внешнее поле, приложенное к вакууму, определяется зарядами с плотностью $e_0 n_0(\mathbf{r})$, где e_0 — затравочный заряд. Тогда потенциал определяется формулой Пуассона

$$\Delta V = -4\pi e_0^2 (n_0 + n_1),$$

где $n_1(\mathbf{r})$ — дополнительная плотность частиц, возникающая в результате поляризации вакуума в поле. Мы определили потенциал V как умноженный на e_0 электрический потенциал.

Запишем $n_1(\mathbf{r})$ в виде

$$n_1(\mathbf{r}) = \int \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (\text{В.5})$$

В слабых полях $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Pi^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Кроме того, так как постоянная добавка к полю не может изменять наблюдаемую величину, то

$$\int \Pi^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0.$$

Это условие представляет собой простейшее следствие калибровочной инвариантности, т. е. неизменности физических величин при калибровочном изменении четырехмерного векторного потенциала

$$A'_\nu = A_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Рассмотрим сначала n_1 в слабых полях. Разлагая V в ряд около точки r , получим

$$n_1(r) = \frac{1}{6} \Delta V \int \Pi^0(\rho) \rho^2 d\rho.$$

Мы использовали то обстоятельство, что Π^0 зависит только от абсолютного значения вектора ρ . Подставляя в уравнение Пуассона, находим

$$\Delta V = - \frac{4\pi e_0^2 n_0(r)}{\epsilon_0},$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума в слабых полях

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{4\pi}{6} e_0^2 \int \Pi^0(\rho) \rho^2 d\rho.$$

Поскольку электрические поля определены так, чтобы диэлектрическая постоянная вакуума в слабых полях равнялась 1, мы должны ввести наблюдаемый (в слабых и медленно изменяющихся полях) заряд электрона

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \frac{4\pi}{6} e_0^2 \int \Pi^0(\rho) \rho^2 d\rho}. \quad (\text{B.6})$$

Простейший анализ размерности величин, входящих в (B.5), показывает, что $\Pi^0(\rho)$ имеет размерность $1/L^5$. Поскольку при $\rho \ll 1$ длина $1/m$ не может входить в задачу, то

$$\Pi(\rho) = \frac{A}{\rho^5}. \quad [(\text{B.7})]$$

Если $\rho \gg 1$, то $\Pi(\rho)$ должно убывать еще быстрее (расчет дает $\Pi(\rho) \sim e^{-2\rho}$ при $\rho \gg 1$). При подстановке в (B.5) получается расходящийся на нижнем пределе интеграл

$$n_1(r) = \left(\frac{A \cdot 4\pi}{6} \int_{r_0}^1 \frac{d\rho}{\rho} \right) \Delta V.$$

Мы ограничили интегрирование снизу значением r_0 , которое представляет собой минимальное расстояние, на котором еще справедливо простое выражение (B.7). После введения наблюдаемого заряда e^2 вместо голого e_0^2

величина r_0^2 не входит в окончательные выражения. Используя численное выражение для A , которое получается в результате расчета, получим из (В.6)

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \frac{e_0^2}{3\pi} \ln(1/r_0^2)}. \quad (\text{В.8})$$

Это — известная формула для перенормировки заряда.

Вернемся к случаю сильных полей. Формулу (В.5) можно интерпретировать следующим образом: в точке r' поле создает виртуальную пару, которая, двигаясь в поле, внесет вклад в плотность заряда в точке r . Ясно, что если расстояние $R = |r - r'|$ мало по сравнению с радиусом кривизны R_c траекторий частиц в поле, то движение частиц можно считать свободным. Следовательно, $\Pi(r, r') = \Pi^0(r - r')$ при $\rho \ll R_c$. В обратном случае, $\rho \gg R_c$, частицы, родившиеся в точке r' , вообще не дойдут до точки r , а будут завернуты полем, поэтому при $\rho \gg R_c$ будет $\Pi(r, r') = 0$. Остается оценить величину R_c . Эта величина определяется условием того, чтобы изменение импульса в поле было того же порядка, что и сам импульс

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{eER_c}{p} \sim 1.$$

Импульсы, существенные при $r - r' = R$, имеют порядок $p \sim 1/R$.

В результате получаем

$$eER_c^2 \sim 1.$$

Поскольку это — единственная длина, характеризующая движение частиц в сильных полях, то формула (В.3) справедлива, когда поля мало изменяются на этой длине:

$$\left(\frac{E'}{E}\right)^2 R_c^2 < 1; \quad \left(\frac{E'}{E}\right)^2 < eE.$$

Полученные нами соотношения позволяют не только оценить область применимости выражения (В.3), но и получить это выражение.

Вводя наблюдаемый заряд, получаем

$$\Delta V = 4\pi e^2 (n_0(r) + \tilde{n}_1(r)),$$

где $\tilde{n}_1(r)$ определяется выражением

$$\tilde{n}_1(r) = \int \Pi(\rho) V(\mathbf{r} + \rho) d\rho - \int \Pi^0(\rho) \rho^2 d\rho \cdot \Delta V.$$

Используя свойство «локальности» величины $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \Pi^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll R_c, \\ 0 & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg R_c, \end{cases}$$

легко получить

$$\tilde{n}_1(r) = \left(\frac{4\pi A}{6} \int_{R_c}^1 \frac{d\rho}{\rho} \right) \Delta V,$$

что, при введении использованного выше численного значения A , непосредственно приводит к выражению

$$\Delta V = \frac{4\pi e^2 n_0(r)}{\varepsilon(E)}$$

с диэлектрической проницаемостью, совпадающей с (В.3).

Искажение кулоновского поля на малых расстояниях. Выражение (В.3) для диэлектрической проницаемости позволяет сразу же найти отклонения от кулоновского закона.

Рассмотрим ядро произвольно малого радиуса, имеющее на бесконечности заряд Z ($Z > 1$, $Ze^2 \ll 1$). Заряд внутри малого радиуса будет больше, чем Z , поскольку заряд в диэлектрической среде экранируется.

В отсутствие внешних зарядов имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

где \mathbf{D} — индукция, откуда

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

Вводя умноженный на e заряд $Q(r)$ внутри сферы радиуса r , получим $dV/dr = Q/r^2$ и

$$\varepsilon Q = \text{const.}$$

Поскольку при $r \gg 1$, $Q \rightarrow Ze^2$ находим

$$Q(r) = \frac{Ze^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{Q(r)}{r^2}}. \quad (\text{В.9})$$

Наше выражение для диэлектрической проницаемости можно применять когда $r^2 \gg R_c^2$, что соответствует условию $Q \gg 1$. Чтобы иметь интерполяционную формулу, пригодную при $Q \ll 1$, можно заменить под логарифмом Q на величину $Q + 1$. При $Q \ll 1$ находим

$$Q_1(r) = Ze^2 \left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{1}{r^2} \right)^{-1}.$$

Это выражение совпадает с найденной в квантовой электродинамике формулой для поправки к кулоновскому закону.

Однако на очень малых расстояниях, когда $Q \gg 1$, необходимо в уравнении Пуассона для потенциала V учитывать роль электронов, конденсирующихся в вакууме вблизи положительного заряда. Как мы видели, эта конденсация начинается при $Ze^2 > 1$, а в нашем случае, когда на бесконечности $Q = Ze^2 \ll 1$, конденсация будет происходить в областях вблизи внешнего заряда, где величина $Q > 1$. В результате уравнение для искаженного кулоновского потенциала с учетом (В.2) примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \epsilon \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi e^2 \frac{V^3}{3\pi^2}. \quad (\text{В.10})$$

Появление конденсированных зарядов не учитывается в электродинамических расчетах и может привести к существенному изменению взаимодействия на сверхмалых расстояниях.

Неустойчивость пионного поля в нуклонной среде. Рассмотрим нуклонную среду как источник поля, действующего на пионы. Энергия пиона ω как функция импульса k может быть получена из известного соотношения ($\hbar = c = m_\pi = 1$)

$$\omega^2 = 1 + k^2 - 4\pi n F(k), \quad (\text{В.11})$$

где n — плотность нуклонов, а $F(k)$ — амплитуда рассеяния пиона на нуклоне на угол нуль. Первые 2 слагаемых дают энергию свободного пиона, а 3-е слагаемое представляет собой то эффективное поле, которое действует на пионы в нуклонной среде. (Для простоты мы опустили изотопические значки.) Амплитуда рассеяния F , как для π^+ , так и для π^- -мезонов, имеет знак, соответствующий притяжению ($F > 0$), и поэтому при достаточной

плотности частота может обратиться в нуль, что означает неустойчивость пионного поля. Однако $F(k)$ мала при малых k и неустойчивость возникает при $k = k_0$, которое соответствует минимальному значению величины $k^2 - 4\pi nF(k)$. Условие неустойчивости

$$\omega^2 = 0 \quad \text{или} \quad 1 + k_0^2 = 4\pi nF(k_0).$$

При выполнении условия $\omega^2 = 0$ для какого-либо из 3-х типов пионов на соответствующем уровне ($k = k_0$) будут накапливаться пионы данного типа.

Соотношение (В.11) не учитывает возможности возбуждения нуклонной среды двигающимся пионом — нуклоны рассматриваются как внешнее поле («газовое» приближение). Такой подход дает только грубые черты явления. Для более точного расчета необходимо учесть частично-дырочные возбуждения нуклонной среды. При этом энергия пионов как функция импульса записывается в виде

$$\omega^2 = 1 + k^2 + \Pi(k, \omega), \quad (\text{В.12})$$

где величина $\Pi(k, \omega)$, называемая поляризационным оператором, содержит наряду со слагаемыми типа (В.11) также слагаемое, учитывающее возможность виртуального образования частиц и дырок в нуклонном ферми-распределении.

Как показывает теоретический анализ, поляризационный оператор определяется следующими процессами:

1) S -рассеяние пионов нуклонами среды; эта часть поляризационного оператора изображается в виде (В.11);

2) P -рассеяние пиона на нуклоне с образованием N_{33}^* -резонанса в промежуточном состоянии, это слагаемое поляризационного оператора также изображается в виде (В.11). Однако амплитуда резонансного расстояния F_R не совпадает с наблюдаемой на опыте, а должна быть теоретически найдена «вне массовой поверхности» (т. е., когда $\omega^2 \neq 1 + k^2$);

3) P -рассеяние пиона на нуклоне с одним нуклоном в промежуточном состоянии. Эта «полюсная» часть поляризационного оператора после учета принципа Паули в промежуточном состоянии оказывается сложной функцией ω и k .

После подстановки этих трех слагаемых соотношение (В.12) превращается в трансцендентное уравнение для определения энергий $\omega(k)$ для всех возможных возбуждений с квантовыми числами пиона. Помимо возбуждений, которые можно интерпретировать как «пионные» возбуждения с энергией, искаженной взаимодействием с нуклонами среды, имеются и другие ветви возбуждений, представляющие собой возбуждения нуклонной материи с квантовыми числами пиона ($0^-, T = 1$).

Наиболее существенны для дальнейшего две ветви решений. Одна из ветвей соответствует пионным возбуждениям, энергия которых при выключении πN -взаимодействия переходит в энергию свободных пионов ($\omega^2 = 1 + k^2$). Вторая ветвь при выключении πN -взаимодействия переходит в коллективное возбуждение нуклонной среды с квантовыми числами π -мезона, которое может быть названо спин-изоспин-звуковым возбуждением. Для пояснения напомним, что в ферми-системе при отталкивательном взаимодействии частиц с энергией у границы Ферми имеются коллективные возбуждения, которые называются «нулевой» звук и которые можно интерпретировать как связанные состояния частицы и дырки. Эти возбуждения могут быть 4-х типов: 1) скалярные — обычный звук, 2) спиновые, представляющие собой волну спиновой плотности, 3) изотопические, соответствующие волне изотопического спина и, наконец, 4) спин-изоспиновые волны, имеющие квантовые числа пиона ($0^-, T = 1$).

Неустойчивость пионного поля при $N = Z$ проявляется в том, что при определенной плотности нуклонов частоты спин-изоспиновой ветви $\omega_s^{\pm, 0}$ для определенного $k = k_0$ обращаются в нуль. (Для того, чтобы отличать спин-изоспин-звуковую ветвь от пионной будем снабжать соответствующие величины индексом s). Это означает, что при большей плотности в среде образуется периодическая неоднородность спиновой плотности нуклонов с волновым вектором k_0 .

Как будет показано в дальнейшем (II.1; V.1), в конечной системе амплитуда этой волны совершает нулевые колебания, так что в основном состоянии среднее значение поля равно нулю и отличны от нуля только средние значения от четных степеней поля.

Таким образом, неустойчивость пионного поля в среде с $N = Z$ соответствует переходу через нуль величины $\omega_s(k)$ одновременно для всех трех типов пионов.

Гораздо сложнее выглядит картина неустойчивости в среде с $Z \ll N$ (нейтронная звезда). В этом случае уравнение (В.12) для нейтральных пионов сохраняет такой же вид, как и в случае среды с $Z = N$, и неустойчивость поля нейтральных пионов ($(\omega_s^0)^2 < 0$) проявляется в образовании стоячей волны спиновой плотности нуклонов с волновым вектором k_0 . Неустойчивость возникает при $n \sim n_0$.

Для заряженных пионов, как это и должно быть в случае уравнений, описывающих релятивистские частицы, при решении уравнения (В.12) возникают лишние ветви спектра, которые следует интерпретировать, как взятые со знаком «—» решения для античастицы. Критерием отбора физических решений с квантовыми числами π^+ -мезонов является условие

$$2\omega^+ - \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega^+} > 0. \quad (\text{В.13})$$

Аналогичное условие имеется для π^- -мезонов. В результате такого анализа решений уравнения (В.12) получаются следующие результаты. Начиная с некоторой плотности возникает спин-звуковая ветвь π_s^+ с волновыми векторами k вблизи p_F и $\omega_s^+ < 0$, при плотности $n > n_c^+ \simeq 0,4n_0$ энергия этой ветви $\omega_s^+ < -\varepsilon_F^{(n)}$ ($\varepsilon_F^{(n)}$ — граница Ферми нейтронов), что означает неустойчивость по отношению к реакции $p \rightarrow n + \pi_s^+$. Как мы увидим в следующем разделе Введения, при этом возникает «конденсат» π_s^+ -мезонов. Или, на языке нуклонных возбуждений, образуется конденсат частиц, представляющих собой связанные состояния протона и нейтронной дырки с энергией связи $|\omega_s^+|$.

Для π^- -мезонов спин-звуковая ветвь отсутствует. При дальнейшем увеличении плотности при $n = n_c^\pm \simeq n_0$ сумма энергий $\omega^- + \omega_s^+$ обращается в нуль, что означает возникновение неустойчивости по отношению к рождению пар $\pi_s^+ \pi^-$ -мезонов,

Модель π -конденсации. Выясним теперь, как происходит перестройка пионного поля после того, как возникает неустойчивость. Для этого рассмотрения нам несущественно, в каком поле возникла неустойчивость. Существенно только, что частота какой-либо степени свободы проходит через нуль. Поскольку «конденсация» состоит в том, что поле φ_k , отвечающее этой степени свободы, велико, можно пренебречь влиянием полей, соответствующих всем другим степеням свободы. Тогда энергию конденсата можно записать в виде

$$H = \int_{-} d\mathbf{r} \left\{ \frac{\dot{\varphi}_k^2 + \omega^2 \varphi_k^2}{2} + \frac{\lambda \varphi_k^4}{4} \right\}. \quad (\text{B.14})$$

При $\omega^2 = 1 + k^2$, $\lambda = 0$ (B.14) переходит в известное выражение для энергии свободного мезонного поля. Мы ввели феноменологически эффективное отталкивание между пионами в нуклонной среде ($H' = \frac{\lambda \varphi^4}{4}$, $\lambda > 0$).

Взаимодействие между пионами в нуклонной среде складывается из их взаимодействия в пустоте и взаимодействия за счет обмена возбуждениями нуклонной среды. Нахождение этого взаимодействия представляет собой сложную задачу, которой посвящена отдельная глава. Вблизи точки перехода, когда поле φ_k не очень велико, в предположении, что конденсатное поле характеризуется одним волновым вектором \mathbf{k} , реальное лл-взаимодействие имеет вид, принятый в (B.14) с константой λ , зависящей от параметров NN-взаимодействия ($\lambda \sim 1 - 10$).

Вблизи точки неустойчивости частота рассматриваемой степени свободы может быть записана в виде

$$\omega^2 = \eta(n_c - n), \quad \eta > 0. \quad (\text{B.15})$$

Величина η просто связана с поляризационным оператором. При $n > n_c$, когда $\omega^2 < 0$, возникает статическое конденсатное поле, которое можно получить минимизируя (B.14) по φ^2 . Используя (B.15), получим

$$\langle \varphi^2 \rangle = -\frac{\omega^2}{\lambda} = \frac{\eta}{\lambda} (n - n_c). \quad (\text{B.16})$$

Плотность энергии конденсата \mathcal{E}_π найдется подстановкой (B.16) в (B.14)

$$\mathcal{E}_\pi = -\frac{\omega^4}{4\lambda} \equiv -\frac{\beta(n - n_c)^2}{2}. \quad (\text{B.17})$$

Заметим, что именно по такой схеме строилась теория фазовых переходов второго рода Ландау, в которой свободная энергия разлагалась в ряд по степеням параметра «порядка». Фазовому переходу соответствовало обращение в нуль коэффициента при линейном члене. В нашем случае величина φ^2 играет роль параметра «порядка», а H — роль свободной энергии. Поскольку параметр порядка φ^2 нарастает от нулевого значения, мы имеем дело с фазовым переходом второго рода.

Внесем уточнения в простую модель конденсации, рассмотренную выше. Как известно, учет возрастающей роли флуктуаций вблизи критической точки вносят существенные изменения в простую теорию фазовых переходов Ландау. Аналогично этому вблизи точки л-конденсации существенное влияние на константу лл-взаимодействия оказывает обмен «мягкими» возбуждениями, частота которых обращается в нуль в критической точке.

Оказывается, что вблизи точки перехода при $n < n_c$ константа λ изменяет знак. При этом должны быть учтены следующие члены разложения энергии лл-взаимодействия по степеням поля φ . Как нетрудно видеть, в точке перехода возникает конечное поле φ . Таким образом, происходит фазовый переход не второго, а первого рода. Однако в результате накопления численных множителей скачок в величине поля φ^2 оказывается малым, и формулы, полученные в предположении фазового перехода второго рода, искажаются только в непосредственной близости к критической точке. Поэтому для оценок можно пользоваться соотношениями (В.16) и (В.17), забывая об этом уточнении.

Полная плотность энергии может быть записана в виде

$$\mathcal{E}(n) = \mathcal{E}_N(n) + \mathcal{E}_\pi(n).$$

Согласно (В.17) при $n = n_c$ происходит скачок сжимаемости (скачок $\frac{d^2\mathcal{E}}{dn^2}$). Если этот скачок превысит по модулю сжимаемость ядерного вещества до конденсации, то после конденсации сжимаемость окажется отрицательной, и система будет сжиматься пока не перейдет в более плотное устойчивое состояние.

В.2. Физические следствия π -конденсации

Конденсация в однородном ядерном веществе и нейтронные звезды. В среде с $N \simeq Z$ все три типа пионов находятся в одинаковых условиях (изотопически симметричная среда) и конденсация наступает одновременно для π_s^+ , π_s^- и π_s^0 -мезонов.

Гораздо сложнее выглядит картина конденсации в нейтронной звезде. В этом случае неустойчивость возникает сначала для π_s^+ -мезонов. При достижении плотности n_c^+ , когда появляется спин-звуковая ветвь с энергией $\omega_s^+ \leq -\epsilon_F^{(n)}$, имевшиеся при $n < n_c^+$ протоны перейдут в связанное состояние

$$p \rightarrow n + \pi_s^+.$$

Потеря энергии при переходе медленного протона в нейтрон над поверхностью Ферми компенсируется большей по модулю отрицательной энергией ω_s^+ . Заряд появившихся π_s^+ -мезонов компенсируется зарядом электронов, которые имелись до перехода. При дальнейшем увеличении плотности нейтронов в результате β -процесса

$$n \rightarrow n + \pi_s^+ + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (\text{B.18})$$

плотность π_s^+ -мезонов и равная ей плотность электронов будут возрастать вместе с ростом $|\omega_s^+|$, поскольку в равновесии согласно (B.18) граница Ферми электронов должна равняться $|\omega_s^+|$.

Легко видеть, что плотность энергии π_s^+ -конденсата при плотностях, близких к n_c , равна

$$\mathcal{E}_\pi = \omega_s^+ n_s^+ + \frac{|\omega_s^+|^4}{4\pi^2}, \quad (\text{B.19})$$

плотность заряда конденсата ($\hbar = c = 1$; $p_F^{(e)} = \epsilon_F^{(e)} = |\omega_s^+|$) равна

$$n_e = n_s^+ = \frac{|\omega_s^+|^3}{3\pi^2}. \quad (\text{B.20})$$

Второе слагаемое в (B.19) представляет собой кинетическую энергию электронов (при $\epsilon_F^{(e)} \gg m_e c^2$). Используя

(В.20), получаем

$$\mathcal{E}_\pi = - \frac{|\omega_s^+|^4}{12\pi^2}. \quad (\text{В.21})$$

Энергия конденсата скачком принимает конечное значение. Однако этот скачок компенсируется изменением нуклонной энергии так, что полная энергия системы не изменяется (см. V.1).

Как мы видим, вблизи n_c^+ плотность заряда конденсата и конденсатная энергия лимитируются не отталкиванием между пионами, а принципом Паули для электронов. При дальнейшем увеличении плотности возрастание $|\omega_s^+|$ с плотностью замедляется влиянием отталкивания между пионами и кроме того, как мы видели, возникает неустойчивость для рождения пар $\pi^-\pi_s^+$ (при $n > n_c^\pm$), в результате чего в конденсате помимо поля π_s^+ появляется поле π^- -мезонов.

Благодаря влиянию π_s^+ -конденсата возникает сложная зависимость энергии конденсата от плотности. Однако из-за большого численного множителя в знаменателе (В.21) влияние π_s^+ -конденсации невелико и при $n > n_c^\pm$ можно пользоваться формулой (В.17).

При этом нетрудно убедиться, что при плотности, лежащей между n_c^+ и n_c^\pm , сжимаемость может обратиться в нуль и затем сделаться отрицательной. Сжимаемость пропорциональна второй производной от плотности энергии по плотности. Конденсатное слагаемое (В.17) плотности энергии дает отрицательный вклад в сжимаемость, по-видимому, больший по модулю (при плотности $\sim n_0$), чем положительный вклад нуклонной части плотности энергии. Действительно, из расчетов плотности энергии нейтронного вещества [19] без учета конденсации получаем для второй производной от нуклонной плотности энергии по n (при $n \simeq n_0$ в пионных единицах)

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_N}{dn^2} \Big|_{n=n_0} \simeq 0,2, \quad (\text{В.22})$$

тогда как для $\frac{d^2 \mathcal{E}_\pi}{dn^2}$ имеем

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_\pi}{dn^2} = -\beta \simeq -1. \quad (\text{В.23})$$

При дальнейшем увеличении плотности начинает играть все большую роль отталкивание между нуклонами на малых расстояниях и кроме того, когда пионное поле делается достаточно большим, рост конденсатной энергии замедляется, в результате чего знак сжимаемости восстанавливается.

Таким образом, при некоторой плотности $n = n_{\min}$ может возникнуть минимум на кривой зависимости $\mathcal{E}(n)$, что соответствует сверхплотному состоянию ядерного вещества.

Поскольку состояние с отрицательной сжимаемостью неустойчиво, возникнет резкая граница, разделяющая вещество с плотностью $n \simeq n_0$ и вещество с плотностью $n = n_{\min}$. Таким образом, если в центральной наиболее плотной части звезды достигнута плотность $n > n_c$, то образуется сердцевина с плотностью $n > n_{\min} = = (3 \div 6)n_0$, тогда как снаружи этой сердцевины имеется вещество с плотностью $n_c \simeq n_0$. Такое распределение плотности неустойчиво с гравитационной точки зрения. За короткое время граница разрыва пробежит по звезде, и заметная часть звезды перейдет в более плотное состояние.

Ниже будет обсуждаться возможность существования сверхплотных нейтронных ядер. Если такие ядра существуют, то должны существовать нейтронные звезды любых размеров, так как в этом случае равновесное нейтронное состояние достигается за счет ядерных сил, а не за счет силы тяжести, как в обычных нейтронных звездах.

Резкое изменение плотности нуклонов по радиусу звезды будет сопровождаться резким изменением энергии π_s^+ -мезонов, а следовательно, и энергии Ферми электронов. Но изменение граничной энергии электронов означает, что изменяется глубина электрической потенциальной ямы $V(r)$, которая удерживает электроны. Поэтому возникают сильные электрические поля, которые могут быть найдены из соотношения

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d\omega_s^+}{dr}. \quad (\text{B.24})$$

Таким образом, π -конденсация оказывает существенное влияние на структуру нейтронных звезд.

Возможность π -конденсации в обычных ядрах. Оценка критической плотности, соответствующей при $N = Z$ обращению в нуль частот $\omega_s^{\pm, 0}(k_0)$, дает значение $n_c \simeq n_0$. Неточность в этой оценке связана с неточностью констант NN- и πN -взаимодействий в среде, вводимых в теорию. Неопределенность оценки n_c такова, что вполне допускает возможность существования π -конденсата в обычных ядрах. Поэтому представляет большой интерес анализ экспериментов, в которых мог бы проявиться π -конденсат, а также экспериментов, которые позволят установить степень близости ядер к конденсации в том случае, если конденсация еще не наступила, и тем самым уточнить константы, вводимые в теорию. Это уточнение констант особенно важно для выяснения возможности существования сверхплотных ядер.

Для этой цели следует прежде всего рассмотреть π -конденсацию в конечной системе. Такое рассмотрение показывает, что в средних и тяжелых ядрах получается плотность конденсатной энергии, отличающаяся от случая бесконечной системы только в тонком слое $\delta \ll R$ вблизи границы ядра. Осуществляется периодическая плоская структура конденсатного поля

$$\varphi = a(r) \cos k_0 z, \quad (\text{B.25})$$

причем амплитуда $a(r)$ постоянна внутри объема, а в слое ширины δ у границы ядра уменьшается до нуля. В случае деформированного ядра слои ориентируются перпендикулярно большей оси.

Дополнительная поверхностная энергия, связанная с π -конденсацией, пропорциональна не полной поверхности ядра, а наименьшему экваториальному сечению. Благодаря этому конденсация способствует вытянутости ядра и в принципе могла бы приводить к появлению второго минимума на кривой зависимости энергии ядра от деформации, т. е. к изомерии формы.

Слоистая структура конденсатного поля (B.25), благодаря πN -взаимодействию приводит во втором порядке по амплитуде поля к слоистой структуре плотности нейтронов и протонов с волновым вектором $2k_0$

$$n_{n,p} = n_{n,p}^0 (1 + \xi^2 \cos 2k_0 z), \quad \xi^2 \sim a^2. \quad (\text{B.26})$$

Слоистая структура (В.26) приводит к тому, что в сферических в смысле параметра деформации ядрах может возникнуть ротационный спектр. Кроме того слоистая структура протонной плотности должна повлиять на электрический формфактор ядра, проявляющийся в рассеянии электронов. В упругом рассеянии электронов наблюдаются аномалии, свидетельствующие о периодической структуре протонной плотности с волновым вектором $q \sim 3fm^{-1}$. Это значение находится в согласии со значением $2k_0$, которое получается из условия $|\omega^2(k_0)|_{\min} = 0$ и должно было бы соответствовать π -конденсату. Однако, пока остается открытым вопрос — не объясняется ли наблюдаемая периодическая структура оболочечными флуктуациями плотности?

Сильное уменьшение энергии пиона в ядре, предсказываемое теорией, проявляется в ряде экспериментальных фактов. Так, из спектральных данных π -атома определяется «оптический» потенциал пиона в ядре (т. е. эффективная потенциальная яма пиона). Ясно, что оптический потенциал непосредственно связан с поляризационным оператором $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$, введенным в (В.12). Получается разумное согласие теоретического оптического потенциала с экспериментальным. Сравнение позволяет уточнить константы, входящие в теорию.

Существенным для проверки используемого выражения $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ и для уточнения констант является сравнение с опытом энергии уровней, имеющих пионную симметрию. К таким состояниям относятся уровни 0^- ; 1^+ ; 2^- ... Сдвиг энергии этих уровней по сравнению с их значениями, полученными в модели оболочек, в большой мере определяется взаимодействием нуклонов за счет обмена «смягченным» пионом. Получается удовлетворительное согласие с опытом.

Особенно сильное влияние близость к конденсации оказывает на l -запрещенные $M1$ -переходы (переходы с изменением орбитального момента на 2 единицы). Интенсивность таких переходов содержит слагаемое, вызванное однопионным обменом и имеющее полюс в критической точке (т. е. при $\omega_s(k_0) = 0$). Интенсивности этих переходов в некоторых случаях в десятки раз превосходят расчетное значение, полученное без учета обмена «мягким» пионом. Этот факт свидетельствует о

близости системы к конденсации, но оставляет открытым вопрос о том, произошел ли фазовый переход.

Существенную информацию дает не законченный еще анализ влияния однопионного обмена на магнитные моменты (в этом случае влияние не очень велико) и на вероятность гамов-телеровских β -переходов. Представляют большой интерес поиски аномалий в рассеянии нуклонов на ядрах, а также анализ магнитного форм-фактора ядра, получаемого в опытах по рассеянию электронов на большие углы. В этих экспериментах могла бы проявиться спиновая структура нуклонной плотности (в отличие от электрического форм-фактора, который определяется структурой плотности заряда).

Таким образом, анализ имеющихся экспериментов подтверждает основные заключения теории и пока не противоречит предположению о существовании конденсата в ядрах.

Можно думать, что более тщательный анализ имеющихся фактов, а также данных, полученных в опытах по рассеянию, позволит дать окончательный ответ на вопрос о существовании конденсата в ядрах и во всяком случае даст возможность уточнить константы, вводимые в теорию, настолько, чтобы сделать более определенными предсказания о возможном существовании сверхплотных ядер.

Возможное существование сверхплотных и нейтронных ядер. Рассмотрим сначала возможность существования сверхплотных нейтронных ядер. Как мы видели, на кривой $\mathcal{E}(n)$ при $n \simeq (3 \div 5)n_0$ может возникнуть минимум, что означало бы существование сверхплотного состояния ядерного вещества. Для того чтобы ядро с такой плотностью нуклонов было устойчиво, необходимо, чтобы его энергия была меньше суммы энергий свободных нуклонов.

Как показывают расчеты, устойчивому состоянию соответствуют разумные значения констант NN- и π N-взаимодействий, но вместе с тем никакого определенного заключения о существовании такого устойчивого состояния нельзя сделать, поскольку энергия ядра представляет собой малую разность двух больших чисел: положительной нуклонной энергии и отрицательной конденсатной. Для определенного заключения требуются либо прямые

опыты по поискам таких аномальных ядер, либо эксперименты, уточняющие константы, введенные в теорию.

Расчеты показывают, что сверхплотные ядра с $N \simeq Z$ должны были бы иметь большую энергию связи, чем ядро с $Z \ll N$. Поэтому нейтронные ядра должны в результате каскада β -распадов переходить в ядра с $N \simeq Z$. Энергия β -электронов в начале каскада порядка $100 \div 200$ МэВ, что соответствует времени жизни $10^{-6} \div 10^{-8}$ сек.

При некоторых предположениях о константах могут получиться «нейтронные» ядра, устойчивые относительно β -распада и деления, с $Z \ll N$ при $N > 10^3 \div 10^5$. Такие ядра могли бы наблюдаться в космических лучах в виде больших фрагментов.

Сверхзаряженные ядра. Когда кулоновская потенциальная яма глубже, чем $m_{\pi}c^2$, делается возможной π -конденсация в электрическом поле ядра. Это явление могло бы происходить в сверхзаряженных ядрах с зарядом $Ze^3 > 1$, что соответствует $Z > 1600$. Если выигрыш энергии от конденсации превышает потерю энергии от кулоновского отталкивания, то такие ядра могли бы оказаться устойчивыми. Вопрос об устойчивости таких ядер с учетом экранировки кулоновского поля вакуумными электронами и π^- -мезонами рассматривается в VII.1. Показано, что электрическая конденсация не приводит к устойчивому состоянию. Однако, учет нуклонного поля может, по-видимому, привести к стабильности ядер с обычной плотностью и с зарядом $Z \gtrsim 1600$.

В.3. Путеводитель по книге и замечания о литературе

В первых разделах Введения дается качественная картина всех явлений, рассмотренных в монографии. Читатели, не интересующиеся деталями, могут ограничиться чтением только этой части книги.

Поскольку основные понятия уже введены в этой вступительной части, можно приступить к более подробному изложению плана книги и к обсуждению использованных работ.

Первая глава книги посвящена вопросам, связанным с неустойчивостью фермионного вакуума в сильных полях. В первом разделе главы I используются результаты обзора [4] (Зельдович, Попов, 1971). В этой работе был

прослежен механизм перестройки электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_c$ и была найдена физическая интерпретация происходящих при этом явлений. Рассмотрение производилось без учета электрон-позитронного взаимодействия. Учет взаимодействия (раздел I.2) приводит к возникновению связанных электрон-позитронных пар вблизи ядра с $Z \approx Z_c$ [7] (Мигдал, 1976). Это явление оказывает существенное влияние на распределение по энергии позитронов, которые должны образовываться при сближении тяжелых ядер.

В разделе I.3 рассматривается распределение вакуумного заряда, который конденсируется вблизи ядра с $Ze^2 \gg 1$ [8] (Мигдал, Попов, Воскресенский, 1976). В случае $Ze^3 \gg 1$ электронный конденсат почти нацело компенсирует кулоновское поле ядра и должен учитываться при выяснении вопроса об устойчивости сверхзаряженных ядер.

Раздел I.4 посвящен вопросам, связанным с поляризацией вакуума в сильных неоднородных полях. Изложение следует работе [9] (Мигдал, 1972). Решается задача о распределении вакуумного заряда вблизи ядра произвольно малого радиуса. В [9] эта задача решалась с учетом только поляризации вакуума. В I.4 получено уравнение для потенциала с учетом электронного конденсата.

Глава II представляет собой сокращенное изложение работы [10] (Мигдал, 1971). В этой работе впервые исследовалась π -конденсация во внешних полях и в нулевой среде и впервые обсуждалась возможность существования сверхплотных ядер. Глава II начинается с рассмотрения поведения бозе-частиц в сильных скалярных и электрических полях. Выясняются условия, при которых одночастичная задача теряет смысл, поскольку начинается рождение частиц из вакуума. При этом приходится пользоваться методами квантовой теории поля. Показано, что вакуум бозе-частиц в сильных внешних полях перестраивается, что приводит к понижению энергии. Найдена величина и энергия поля бозе-частиц в новом основном состоянии системы.

В случае внешнего поля, имеющего вид широкой прямоугольной ямы $\left(R \gg \frac{\hbar}{m_{\pi}c}\right)$, энергия, выигрываемая от перестройки вакуума бозонов, пропорциональна объему

системы, т. е. эта перестройка может рассматриваться как фазовый переход (π -конденсация). Более подробно, чем в [10], рассматривается вопрос о π -конденсации в электрическом поле. Этот результат используется в гл. VII для оценки возможности существования сверхзаряженных ядер.

Далее в гл. II рассматриваются условия неустойчивости пионов в нуклонной среде и обсуждается простейшая модель π -конденсации, введенная в [10]. Находится конденсатное поле и энергия конденсата вблизи критической точки.

В гл. II влияние нуклонной среды на пионы рассматривается в газовом приближении. Это дает только качественную оценку критической плотности и энергии конденсации, поскольку при этом не учитывается возможность возбуждения нуклонной среды движущимся пионом.

В гл. III вопрос о движении пиона в нуклонной среде рассматривается количественно методами задачи многих тел с учетом всех существенных процессов, влияющих на движение пиона. Описывается метод расчета поляризационного оператора пиона в нуклонной среде, развитый в [11] (Мигдал, 1972). Метод основан на разделении всех величин на два типа: 1) величины, заметно изменяющиеся на импульсах $\sim m_N$ и 2) величины с характерной областью импульсов m_π . Величины первого типа заменяются константами, которые следует брать из опыта, а величины второго типа вычисляются точно и выражаются через введенные константы.

В [11] таким методом получено количественное выражение для поляризационного оператора при $N \simeq Z$. Наряду с процессом виртуального перехода пиона в нуклон и нуклонную дырку учтен весьма существенный вклад переходов в изобару N_{33}^* и нуклонную дырку. Кроме того, количественно учтено NN-взаимодействие; характеризующая его константа определяется из ядерных экспериментальных данных. Аналогичное вычисление поляризационного оператора для $Z \ll N$ (нейтронная звезда) было выполнено в [12] (Мигдал, 1973). Было учтено S -рассеяние пиона на нуклоне (несущественное при $N = Z$), был установлен метод отбора физических решений уравнения для $\omega(k)$ и найдены условия неустойчивости для π^+ -, π^- - и π^0 -мезонов (см. ниже).

Первая часть гл. III посвящена выяснению процессов, определяющих поляризационный оператор, и его вычислению. При этом учитывается S - и P -рассеяние пиона на нуклоне, а также влияние нуклонных корреляций. Найдено выражение для поляризационного оператора как для случая $N \approx Z$ (ядро), так и для случая $Z \ll N$ (нейтронная звезда).

Во второй части этой главы обсуждается влияние «пионной степени свободы» в ядре на ядерные явления и дается возможная схема последовательного учета этой степени свободы в теории ядерной материи.

Третья часть гл. III посвящена обсуждению различных ветвей спектра всех возможных возбуждений, имеющих квантовые числа пиона. Эти ветви получаются в результате решения трансцендентного уравнения (В.12) с поляризационным оператором, найденным в первой части гл. III. Наряду с физическими ветвями, как уже говорилось, возникают «лишние» решения, соответствующие античастицам. Для отбора физических решений развита схема квантования поля в среде с произвольным поляризационным оператором и выводится полученный в [12] критерий отбора ветвей

$$2\omega^{\pm} - \left(\frac{\partial \Pi^{\pm}}{\partial \omega} \right)_{\omega^{\pm}} > 0,$$

ссылки на более поздние работы даны в III.3.

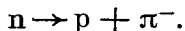
Основной результат анализа ветвей пионного спектра состоит в том, что при определенной плотности ядерного вещества возникает неустойчивость спин-звуковой ветви.

Для случая $N = Z$ такая неустойчивость была впервые обнаружена в [13] (Довер, Леммер, 1968). В этой работе было показано, что π, N -взаимодействие может привести к неустойчивости нуклонной среды относительно образования волны спиновой плотности нуклонов, что и соответствует конденсации спин-звуковой ветви.

Для случая нейтронной звезды ($Z \ll N$) неустойчивость пионного поля исследовалась в [14] (Сойер, Скалапино, 1972). Рассматривалась упрощенная, но зато точно решаемая модель π -конденсации в нейтронной звезде. Эта работа оказала существенное влияние на развитие более реалистических методов рассмотрения сильно развитого конденсата, которые мы обсудим позже.

В конце гл. III обсуждается связь неустойчивости, полученной в [14], с неустойчивостью, полученной в более реалистической модели [12].

Авторы работ [14] исходили из предположения, что, начиная с некоторой плотности, ядерное вещество делается неустойчивым по отношению к реакции



Для реализации этой идеи был рассмотрен гамильтониан нуклонов, взаимодействующих с классическим полем π^- -мезонов. В предположении, что конденсат π^- -мезонов представляет собой бегущую волну с единственным волновым вектором $k = k_0$, задача точно решается. При определенной плотности нуклонов возникает неустойчивость, которая интерпретировалась как подтверждение исходной идеи. В действительности неустойчивость, найденная в [14], не соответствует реакции $n \rightarrow p + \pi^-$. Такая неустойчивость оставалась бы и при выключении взаимодействия пионов с нуклонами, между тем как неустойчивость, обнаруженная в [14], при этом исчезает. Как показано в [12] и [15] (Мигдал, Маркин, Мишустин, 1974) (см. III.3), неустойчивость, обнаруженная в [14], состоит в обращении в нуль суммы энергий $\omega^- + \omega_s^+$, где ω_s^+ — энергия нуклонного спин-звукового возбуждения с квантовыми числами π^+ -мезона (см. также [16] (Андерсон, Ито, Тозатти, Альпар, Пальмер, 1975)).

Вычисление поляризационного оператора, приведенное в III.1, представляет собой сокращенное изложение работы [15].

В этой работе содержится также подробный анализ возражений, которые делались по поводу метода расчета поляризационного оператора, развитого в [11] (этот анализ и соответствующие литературные ссылки даются в VI.2).

Критическая плотность нуклонов, соответствующая неустойчивости спектра, для различных значений константы g^- , характеризующей влияние NN-взаимодействия на поляризационный оператор, дается в таблице 1 (стр. 159), там же приведены значения пионного импульса k_c , для которого наступает неустойчивость.

Для получения величины и энергии конденсатного поля требуется нахождение эффективного взаимодействия пионов в нуклонной материи. Этой задаче посвящена гл. IV. В [10] это взаимодействие вводилось феноменологически в форме

$$H' = \frac{\lambda \Phi^4}{4}; \quad \lambda > 0.$$

Истинное взаимодействие, как показано в гл. IV, имеет подобный вид только для слабо развитого конденсата вблизи точки перехода.

В упомянутой выше модели Скалапино — Соьера энергия конденсата могла быть найдена для конденсатного поля вида бегущей волны, с произвольно большой амплитудой. Поэтому эта модель развивалась и совершенствовалась в ряде работ.

В [14] рассматривались только π^- -мезоны, что соответствует описанию пионов с помощью уравнения Шредингера, а не уравнения Клейна — Гордона — Фока (КГФ). В [17] (Соьер и Яо, 1973) для освобождения от этого недостатка были введены π^+ -мезоны, плотность которых определялась вариационным методом. В [18] (Мигдал, 1973) был разработан метод нахождения эффективной функции Лагранжа пионов, соответствующий последовательному релятивистскому описанию пионов в нуклонной среде, и было получено выражение для энергии сильного пионного поля в модели, учитывающей только πN -взаимодействие. Этот метод излагается в первом разделе IV главы. Задача нахождения энергии развитого пионного конденсата решалась в [19] (Бейм и Флауэрс, 1974) с помощью функции Гамильтона для пионного поля.

В этой же работе было учтено вакуумное пион-пионное и пион-нуклонное взаимодействия для сильных пионных полей вида бегущей волны, которые вытекают из нелинейного лагранжиана Вейнберга.

Метод рассмотрения сильных пионных полей, учитывающий влияние N^* -резонанса, был предложен в работах [20] (Кемпбелл, Дапен, Манасса, 1975). В этих работах был получен нелинейный лагранжиан, включающий взаимодействие пионов с N^* -резонансом, который позволяет найти энергию конденсата для пионного поля вида бегущей волны с произвольной амплитудой.

Учет нуклонных корреляций в этой модели был выполнен в [21] (Бейм, Кемпбелл, Дашен, Манасса, 1975). Результаты этих работ изложены в IV.1 и IV.2.

В случае слабого поля, что соответствует близости к критической точке, нелинейный лагранжиан для конденсатного поля с волновым вектором $k = (\omega, \mathbf{k})$ приводит к выражению для энергии вида $\lambda\varphi^4$ с заменой λ на функцию $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$. Вычислению функции $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$ посвящен раздел IV.2.

В реалистической модели вычисление удается провести только для поля конденсата вида бегущей волны. В разделе IV.3 излагается метод вычисления конденсатного поля в приближении Томаса — Ферми. Этот метод дает принципиальную возможность вычисления $\Lambda(\mathbf{k}, \omega)$ для конденсатного поля произвольной конфигурации. Пока вычисления произведены в модели, учитывающей только πN -взаимодействие. Разделы IV.2 и IV.3 представляют собой изложение работы [22] (Мигдал, Маркин, Мишустин, 1976).

Глава V посвящена вычислению энергии и величины конденсатного поля как в случае слабых полей (вблизи точки конденсации), так и для сильно развитого конденсата. В этой главе используется эффективное $\pi\pi$ -взаимодействие, найденное в гл. IV. Определяется характер модуляций спиновой плотности и плотности нуклонов, вызванный конденсацией, и обсуждаются особенности в $\pi\pi$ -взаимодействии, возникающие от обмена «мягкими» возбуждениями [23] (Дюгаев, 1975), вблизи конденсатной точки.

Во второй части гл. V используется метод рассмотрения сильных конденсатных полей, разработанный в [20] и [21], и дается выражение для энергии сильно развитого конденсата (модель предельного поля), которое используется в VII.2 для оценок, связанных с возможным существованием сверхплотных ядер.

Глава VI содержит подробное обсуждение аргументов за и против существования конденсата в обычных ядрах, а также анализ экспериментов, которые позволяют установить близость ядер к конденсации в случае, если конденсация не наступила.

Предположение о возможности пионной конденсации в обычных ядрах было впервые высказано в [11] и затем

обсуждалось в ряде работ (соответствующие ссылки даются в VI.1 и VI.2).

В VI.1 приводится краткое изложение работы [24] (Мигдал, Кириченко, Сорокин, 1974), в которой решается задача о пионной конденсации в достаточно большой, но конечной системе (средние и тяжелые ядра) и обсуждается влияние конденсата (если он имеется в обычных ядрах) на деформацию ядер и на ротационные уровни.

Условия пионной неустойчивости в ядрах исследовались в [25] (Саперштейн, Толоконников, Фаянс, 1975). В этой работе неустойчивость изучалась методами теории конечных ферми-систем (ТКФС), что позволило рассмотреть также и легкие ядра.

Определялось критическое значение спин-изоспиновой константы $g' = \frac{1}{2}g$, при котором возникает неустойчивость. Для средних и тяжелых ядер получаются те же значения g'_c , что и в бесконечной системе.

Далее в VI.1 исследуются голдстоуновские ветви возбуждений, возникающие в результате конденсации. Впервые этот вопрос рассматривался в [26] (Мигдал, 1973). В [27] (Кириченко, Сорокин, 1975) было показано, что наименьшая ветвь голдстоуновских колебаний соответствует повороту направления конденсатных слоев относительно большей оси деформированного ядра. Эти колебания могли бы наблюдаться в тяжелых ядрах.

В VI.1 показано, что благодаря квантовым флуктуациям конденсатного поля среднее значение нечетных степеней поля равно нулю и существование конденсата не нарушает закона сохранения четности в ядре.

Главная задача второго раздела главы VI — это выяснение экспериментов, позволяющих установить степень близости ядер к конденсации и тем самым уточнить значения констант, вводимых в теорию. Прежде всего анализируются ядерные экспериментальные факты и показано, что предположение о конденсации не противоречит известным данным. Далее методами ТКФС изучается влияние однопионного обмена на спектры и вероятности переходов. Этот вопрос исследовался в [28] (Саперштейн, Троицкий, 1975). Было показано, что близость к конденсации оказывает особенно сильное влияние на l -заряженные $M1$ -переходы.

Далее в VI.2 выясняется влияние искажения энергии пиона в ядре на оптический потенциал пиона в π -атоме. Подробно анализируется вопрос о возможном влиянии конденсата на упругое рассеяние электронов ядрами [29] (Мигдал, 1974) и обсуждаются эксперименты по рассеянию нуклонов и электронов на ядрах, в которых мог бы проявиться π -конденсат. Обсуждаются также другие возможные эксперименты, которые могли бы установить близость ядер к конденсации.

Глава VII посвящена, быть может, наиболее интересной, но наименее достоверной задаче книги, а именно, вопросам, связанным с возможным существованием аномальных ядер: сверхплотных ядер с $Z \approx N$ и сверхплотных «нейтронных» ядер (с $Z \ll N$), а также сверхзаряженных ядер ($Z \geq (137)^{3/2}$).

В первой части главы VII вопрос о возможном существовании сверхплотных ядер рассматривается в модели, предложенной в [30] (Мигдал, 1974) и представляющей развитие подхода работы [10]. В этих работах используется выражение для энергии конденсата вблизи критической точки и определяется изменение сжимаемости нуклонной среды, происходящее в результате конденсации. Если сжимаемость изменяет знак, то система должна сжиматься, пока не перейдет в новое более плотное состояние. (Вопрос об устойчивости этого нового состояния выясняется в VII.2.)

Далее в VII.1 делаются оценки возможности существования сверхзаряженных ядер, в которых вытритыш энергии от конденсации в электрическом поле компенсирует кулоновское отталкивание. Этот вопрос обсуждается в [11] и [30], где предполагалась возможность конденсации с образованием пар $\pi^+\pi^-$. Однако, как показано в VII.1, в разделе конденсации в электрическом поле, уже при меньшем заряде ядра произойдет конденсация π^- -мезонов, что же касается конденсации $\pi^+\pi^-$ -пар, то она должна рассматриваться с учетом экранировки поля ядра электронами, возникающими от перестройки электрон-позитронного поля вблизи ядра с зарядом $Z \gg 170$.

В VII.1 дается оценка энергии π^- -конденсации и показано, что она порядка кулоновской энергии, однако энергия ядра при этом положительна (т. е. превышает сумму масс нуклонов). Электростатическая конденсация

не обеспечивает устойчивости ядер [96] (Воскресенский, Черноуцан, 1978). Устойчивые сверхзаряженные ядра могли бы существовать за счет конденсации с учетом влияния нуклонов (см. VII.1). Вопрос об устойчивости таких ядер остается открытым, пока не будут проведены более точные расчеты.

В конце VII.1 обсуждается возможность сверхплотного состояния ядерного вещества, связанная с неустойчивостью нуклон-антинуклонного вакуума [31] (Ли, 1974). Показано, что такая неустойчивость, если и наступает, то при плотностях $n \sim 100 n_0$.

В оценках энергии сверхплотных и нейтронных ядер, приведенных в VII.1, использовалось выражение для энергии конденсата вблизи критической точки. Для получения кривой зависимости энергии от плотности и для выяснения устойчивости сверхплотного состояния необходимо иметь выражения для энергии конденсата и для энергии нуклонов при плотности, заметно большей чем n_c . Эти задачи решаются в VII.2*). Для определения энергии π -конденсата при большой плотности используется модель предельного поля (V.2). Энергия нуклонной подсистемы оценивается из теории нейтронного вещества при большой плотности [33] (Пандарипанде, 1971). Получены интерполяционные формулы отдельно для нуклонной и конденсатной энергии (для произвольного отношения Z/N), переходящие в известные выражения для малых и больших плотностей.

Получено уравнение состояния для вещества нейтронных звезд. Результаты сравниваются с расчетами, сделанными в работах [34] (Хартл, Сойер, Скалапино, 1974); [35] (Ау, Бейм, 1975); [36] (Вейзе, Браун, 1975).

Анализируется возможность существования стабильных и радиоактивных сверхплотных ($Z \approx N$) и «нейтронных» ($Z \ll N$) ядер при различных значениях констант, введенных в теорию.

*) Изложение следует работе [32] (Мигдал, Маркин, Мишустин, Сорокин, 1976).

Глава I

КОНДЕНСАЦИЯ ФЕРМИ-ЧАСТИЦ В СИЛЬНОМ ПОЛЕ

В сильных полях, когда одночастичные уровни понижаются до энергий $\omega < -mc^2$, возможно рождение пар из вакуума. Если внешнее поле создано статическими положительными зарядами, то позитроны улетают на бесконечность, а электроны распределяются вблизи внешних зарядов, частично их компенсируя. Поскольку появившиеся в вакууме заряды соответствуют основному состоянию системы, это явление естественно назвать конденсацией.

Электронная конденсация изучается на примере сферической потенциальной ямы. При $Z > Z_c$ возникает квазистационарное состояние позитрона и появляются связанные состояния пар, состоящих из конденсатного электрона на вакуумной оболочке и позитрона в квазистационарном состоянии. Получено самосогласованное уравнение для распределения плотности конденсированных электронов. При $Ze^3 \gg 1$ конденсатные электроны почти полностью экранируют заряд ядра — нескомпенсированным остается только заряд протонов в узком слое вблизи поверхности ядра.

Найдено выражение для диэлектрической проницаемости вакуума в сильных неоднородных полях, которое используется для решения задачи о распределении вакуумного заряда вблизи ядра произвольно малого радиуса. Оказывается, что помимо поляризационного заряда, учитываемого квантовой электродинамикой, существенную роль играет заряд конденсатных электронов, который теряется в обычных расчетах. Таким образом, электронная конденсация оказывает существенное влияние на взаимодействие заряженных частиц на малых расстояниях.

1.1. Фермионы в электрическом поле

Приводятся результаты решения уравнения Дирака в случае глубокой сферической потенциальной ямы. Подробно рассмотрено поведение волновых функций кулоновской задачи вблизи $Z = Z_c$. Показано, что при $Z > Z_c$ возникает квазистационарное состояние позитрона. При $Z > Z_c$ исчезает связанное состояние электрона на K -оболочке, но одновременно с этим волновые функции вакуума так деформируются, что образуется вакуумная K -оболочка. Изучается перестройка электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_c$. Показано, что в отсутствие одного или двух электронов в вакуумной K -оболочке в системе возникает вырождение, для снятия которого требуется введение электрон-позитронного взаимодействия.

Неустойчивость фермионного вакуума в сильном поле. Как уже говорилось, в сильных полях делается возможным образование пар из вакуума и одночастичная задача теряет смысл. Для того чтобы выяснить, как проявляется неустойчивость вакуума при решении одночастичной задачи, рассмотрим в виде примера электрон в электрическом поле, имеющем вид сферической потенциальной ямы. Приведем известные соотношения (см., например, [37]). Решение уравнения Дирака в сферическом поле может быть представлено в виде

$$\Psi_{j l M \omega} = \begin{Bmatrix} f_{\omega} \Omega_{j l M}(\mathbf{n}) \\ g_{\omega} \Omega_{j l' M}(\mathbf{n}) \end{Bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\Omega_{j l M}$ — шаровой спинор, j, M — угловой момент и его проекция ($j = l \pm 1/2$), l — орбитальный момент $l' + l = 2j$. Для угловых функций $\Omega_{j l M}$ и $\Omega_{j l' M}$ справедливо соотношение

$$\Omega_{j l' M} = -(\sigma \mathbf{n}) \Omega_{j l M}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Для радиальных функций $F = r f_{\omega}$, $G = r g_{\omega}$, отвечающих энергии ω , имеем ($\hbar = m = c = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r} G - (\omega + 1 - V) F &= 0, \\ \frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r} F + (\omega - 1 - V) G &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\kappa = \mp (j + 1/2)$, знак κ выбирается в соответствии со знаком в соотношении $j = l \pm 1/2$. Знак κ наряду с j , M и ω является интегралом движения.

Волновой функции K -электрона при $Z \leq Z_c$ соответствуют значения $j = 1/2$, $\kappa = -1$, $\omega = -1 + \beta(\xi_c - \xi)$, где $\xi = Ze^2 = Z/137$, β дается ниже (см. (1.11)). Система (1.3) при замене $F \leftrightarrow G$ и $\kappa \rightarrow -\kappa$ (зарядовое сопряжение) описывает позитрон с энергией $-\omega$, движущийся в поле $-V$. Таким образом, система (1.3) при $Z \approx Z_c$ одновременно описывает электрон на K -оболочке с энергией $\omega \approx -1$ и позитрон с энергией $\omega = 1$. При $Z > Z_c$ имеется формальное решение системы (1.3) при $\omega = \omega_0 - i\gamma$, где $\omega_0 = -1 - \beta(\xi - \xi_c)$. Как мы увидим, это означает появление при $Z > Z_c$ квазистационарного уровня позитрона с энергией $-\omega_0 = 1 + \beta(\xi - \xi_c)$. Исключая F из системы уравнений (1.3), получаем

$$G'' + \frac{V'}{1 + \omega - V} \left(G' + \frac{\kappa}{r} G \right) + \left[(\omega - V)^2 - 1 - \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} \right] G = 0. \quad (1.4)$$

С помощью подстановки $G = (1 + \omega - V)^{1/2} U(r)$ получаем самосопряженное уравнение вида уравнения Шредингера

$$u'' + k^2(r) u = 0, \quad (1.5)$$

где $k^2 = 2(E - U)$, $E = \frac{\omega^2 - 1}{2}$, а эффективный потенциал U может быть записан в виде

$$U = \omega V - \frac{1}{2} V^2 + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2r^2} + U'. \quad (1.6)$$

Первые 3 слагаемых представляют собой эффективный потенциал уравнения Клейна — Гордона — Фока (КГФ). Слагаемое U' обусловлено спиновыми эффектами

$$U' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{V''}{1 + \omega - V} + \frac{3}{2} \left(\frac{V'}{1 + \omega - V} \right)^2 - \frac{2\kappa V}{r(1 + \omega - V)} \right\}. \quad (1.7)$$

Вблизи $\omega = -1$ эффективный потенциал слабо зависит от ω и может быть взят при $\omega = -1$. Тогда уравнение (1.5) приобретает обычный вид уравнения Шредингера

с независимым от энергии потенциалом. В интересующем нас случае кулоновского поля эффективный потенциал (при $\omega = -1$) принимает вид

$$U(r) = \zeta/r - (\zeta^2 - \kappa^2 + 1/4)/2r^2. \quad (1.8)$$

Для рассмотрения позитрона с энергией $\omega \simeq 1$ исключаем из (1.3) функцию G и с помощью подстановки $F = \cdot (1 - \omega + V)^{1/2} v$ получаем

$$v'' + \tilde{\kappa}^2(r)v = 0, \quad (1.9)$$

где $\tilde{\kappa}^2(r)$ отличается от $k^2(r)$ заменой $\omega \rightarrow -\omega$, $V \rightarrow -V$ и $\kappa \rightarrow -\kappa$. Эффективный потенциал в уравнении (1.9) для позитрона с энергией $\omega \simeq 1$ и $\kappa = \kappa_0$ совпадает с эффективным потенциалом уравнения (1.5) для электрона с энергией $\omega \simeq -1$ и $\kappa = -\kappa_0$. В кулоновском случае этот потенциал не зависит от знака κ и определяется выражением (1.8).

Как известно, уравнение Шредингера с потенциалом вида

$$U_1 = -\alpha/r^2$$

при $\alpha > 1/8$ не имеет конечного решения («падение на центр», см., например, [38]). В нашем случае при $r < R$, где R — радиус ядра, выражение (1.8) обрезается влиянием ядра, и задача сохраняет физический смысл, несмотря на «падение на центр», условием которого является $\zeta^2 - \kappa^2 > 0$.

При $Z > Z_c$, $\kappa^2 = 1$, $\zeta_c > 1$ эффективный потенциал соответствует притяжению на малых расстояниях ($r \ll 1$), которое переходит в кулоновское отталкивание при $r \gg 1$.

Ширину квазистационарного уровня γ можно вычислить как обратное время жизни позитрона в потенциальном барьере (1.8). Получается следующая оценка:

$$\gamma(\omega, \kappa) = \gamma_0 \exp \left\{ -2\pi \left[\zeta \left(1 - \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1/2} - (\zeta^2 - \kappa^2)^{1/2} \right] \right\}, \quad (1.10)$$

где $\gamma_0 \sim 1$.

Для величины β численный расчет дает

$$\beta = - \left(\frac{d\omega}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_c} = 8,2 \quad (1.11)$$

Для дальнейшего существенно, что $\gamma(k) \ll \omega_0 - 1 = = k^2/2$. При этом условии ширина γ не входит в окончательные выражения.

Таким образом, для произвольной потенциальной ямы по мере увеличения ее глубины (что соответствует увеличению Z в кулоновском случае) наимизшее состояние частицы опускается и при некотором критическом значении глубины ямы $V_c(Z)$ доходит до величины $\omega = -1$. При этом возможно рождение частиц из вакуума. Если наимизшее состояние не заполнено, то могут родиться две пары: 2 электрона с противоположными спинами садятся в наимизшее состояние, а 2 позитрона уходят на бесконечность. Если оболочка заполнена наполовину, рождается 1 пара, а в случае полностью заполненной оболочки вакуум остается устойчивым и при $V > V_c$, пока энергия следующей (незаполненной) оболочки не сделается равной -1 .

Таким образом, в случае ферми-частиц перестройка вакуума лимитируется принципом Паули. Вернемся к кулоновскому случаю. В результате решения системы (1.3) получается известное выражение для энергии K -электрона:

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

При $Z > 137$ это выражение теряет смысл. Причиной этого является «падение на центр», условием которого как раз и является $Z > 137$. «Падение на центр» исключается рассмотрением ядра конечного размера [1]. Для ядра с равномерным распределением заряда и с обычной плотностью при $Z = Z_c \simeq 170$ [2, 3] энергия $\omega_0 = -1$ и наступает рассмотренная выше неустойчивость вакуума относительно рождения пар.

Волновая функция позитрона при $Z > Z_c$. Как мы видели в предыдущем параграфе, при $Z > Z_c$ связанное состояние электрона на K -оболочке исчезает. Вместо этого появляется решение с комплексной энергией $\omega = \omega_0 - i\gamma$. Поскольку решение для позитрона получается из электронного заменой ω на $-\omega$, система (1.3) имеет решения для позитрона с комплексной энергией $\omega = -\omega_0 + i\gamma = 1 + \beta(\xi - \xi_c) + i\gamma$, что соответствует квазистационарному состоянию. Более строгое доказательство содержится в [39].

Наличие квазистационарного состояния приводит к существенному искажению функций сплошного спектра для энергий, близких к энергии квазистационарного уровня. Допустим, что найдена волновая функция позитрона в квазистационарном состоянии $\tilde{\Psi}_0(r)$, обращающаяся в нуль вне потенциального барьера. Такая функция может быть найдена как собственная функция кулоновской задачи с добавочной непроницаемой потенциальной стенкой, помещенной на большом расстоянии от ядра, т. е. в области далеко за барьером, где волновая функция экспоненциально мала. Легко видеть, что $\tilde{\Psi}_0$ может быть приближенно получена с помощью операции зарядового сопряжения $F \leftrightarrow G$, $\omega \rightarrow -\omega$, $\kappa \rightarrow -\kappa$ из функции электрона на K -оболочке при $\omega = -1$. Действительно, различие в соответствующих уравнениях определяется при $\xi - \xi_0 \ll 1$ только малым изменением энергии ($|\omega_0|$ вместо 1). Волновая функция $\tilde{\Psi}_0(r)$ представляет собой волновой пакет, составленный из собственных функций сплошного спектра. Время распыливания этого пакета велико: $\tau \sim \frac{1}{\gamma} \gg \frac{1}{|1 + \omega_0|}$. Поэтому во многих случаях состояние $\tilde{\Psi}_0$ можно рассматривать, как стационарное.

При энергиях ω , близких к ω_0 в области $kr \ll 1$ (k — импульс позитрона), уравнение для функций $\Psi_\omega(r)$ отличается только энергией ω от уравнения для $\tilde{\Psi}_0(r)$. Пренебрегая этим отличием, получаем

$$\Psi_\omega(r) = \chi(\omega) \tilde{\Psi}_0(r). \quad (1.12)$$

$kr < 1$

Если $\tilde{\Psi}_0(r)$ нормирована на 1, а Ψ_ω — на интервал энергии, то из (1.12) имеем

$$\tilde{\Psi}_0(r) = \int c_\omega \Psi_\omega(r) d\omega, \quad c_\omega = \int \Psi_\omega^* \tilde{\Psi}_0 dr = \chi^*(\omega), \quad (1.13)$$

$$\int_1^\infty |\chi(\omega)|^2 d\omega = 1.$$

В то же время функция $\Psi_\omega(r)$ имеет при $r \gg R_1$ (R_1 — наружный радиус барьера) асимптотику

$$\Psi_\omega \sim \sin(kr + \delta)$$

и, следовательно, при $kR \ll 1$, $\Psi_\omega \sim \sin \delta$. Отсюда следует хорошо известный факт, что функция сплошного спектра как функция ω имеет полюса в тех же точках, что и амплитуда рассеяния $f = \frac{\sin \delta}{k}$ (при $k \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$). Поскольку амплитуда рассеяния должна иметь полюс при энергии квазистационарного уровня, мы приходим к заключению, что функция $\chi(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = \omega_0 - i\gamma$. Вместе с условием нормировки (1.13) имеем при ω , близких к ω_0

$$\chi(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} e^{i\Phi}. \quad (1.14)$$

Фаза Φ может быть положена равной нулю без нарушения общности.

Перестройка электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_c$. Волновые функции отрицательного континуума (электроны на уровнях $\omega < -1$) при $Z > Z_c$ можно получить из позитронной волновой функции (1.12) операцией зарядового сопряжения

$$\Psi_\omega^- = \chi^*(\omega) \Psi_0(r), \quad (1.12')$$

где $\Psi_0(r)$ — функция, зарядово сопряженная к $\widetilde{\Psi}_0(r)$, близка с точностью до $(Z - Z_c)/Z_c$ к функции электрона на K -оболочке при $Z = Z_c$.

Резонансный множитель $\chi(\omega)$ увеличивает значения функций $\Psi_\omega(r)$ на малых расстояниях. Это увеличение исчезает при $Z < Z_c$, когда квазистационарное состояние отсутствует. Поскольку $\gamma(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow \pm 1$, усиление функций возникает скачком при переходе через $Z = Z_c$.

Поэтому, если все вакуумные состояния заполнены, плотность заряда вакуума при $Z = Z_c + 0$ будет отличаться от плотности заряда при $Z = Z_c - 0$ на величину

$$\rho(r) = -e \sum_{\substack{m \\ n \rightarrow \infty \\ \gamma \rightarrow 0}} \left\{ \int_{\omega_0 - n\gamma}^{\omega_0 + n\gamma} |\Psi_\omega^-|^2_{Z=Z_c+0} d\omega - \int_{\omega_0 - n\gamma}^{\omega_0 + n\gamma} |\Psi_\omega^-|^2_{Z=Z_c-0} d\omega \right. \quad (1.15)$$

Знак Σ_m соответствует суммированию по двум проекциям момента (спиновые значки у Ψ^- опущены).

Мы использовали тот факт, что вдали от резонанса ($\omega - \omega_0 \gg \gamma$) волновые функции не изменятся при малом изменении Z . При $n\gamma \rightarrow 0$ можно отбросить второе слагаемое формулы (1.15), тогда как первое дает

$$\rho(r) = -2e |\Psi_0(r)|^2. \quad (1.16)$$

Множитель 2 возникает из-за двух возможных при $j = 1/2$ проекций момента.

Таким образом, новый вакуум, соответствующий полному заполнению всех состояний с $\omega < -1$, имеет заряд $-2e$. Плотность этого заряда при $Z - Z_c \ll Z_c$ распределена приблизительно так же, как и плотность электронов в K -оболочке при $Z < Z_c$.

Если K -оболочка заполнена, то K -электроны при $Z > Z_c$ как бы переходят в отрицательный континуум — функции отрицательного континуума так поджимаются к началу координат, что создают, как это видно из (1.16), такое же распределение плотности, которое было в заполненной K -оболочке. Состояние с одним электроном в K -оболочке переходит при $Z > Z_c$ в состояние с одним электроном в вакууме. На языке нового вакуума это состояние есть основное состояние (2 электрона в вакууме) плюс волновой пакет, описывающий дырку в новом заполнении. Состояние с незаполненной K -оболочкой переходит по этой терминологии в основное состояние плюс 2 дырки в новом заполнении.

Поскольку ширина квазистационарного состояния мала по сравнению с энергией взаимодействия, все состояния, отличающиеся числом электронов в вакуумной оболочке, могут считаться стационарными и любое из этих состояний может быть названо «вакуумным».

Тем не менее «старый» вакуум имеет физическое преимущество по сравнению с «новым», несмотря на то, что его энергия несколько выше. Дырка в «новом» вакууме не всегда обозначает присутствие позитрона. Так, например, состояние без заряда на вакуумной K -оболочке, которое соответствует двум дыркам в «новом» вакууме, понимается, не означает присутствие двух физических позитронов. Физический позитрон — это частица с положительным зарядом, возникающая в «старом» незаряженном вакууме.

Два позитрона должны взаимодействовать между собой, между тем как такие две дырки в «новом» вакууме между собой не взаимодействуют.

Таким образом, после появления в вакууме дополнительных состояний, пришедших из дискретного спектра, одновременно с неприменимостью одночастичного рассмотрения с помощью уравнения Дирака видоизменяется и дырочная интерпретация позитрона.

Состояние «2 электрона на вакуумной K -оболочке и позитрон в квазистационарном состоянии» не сводится к состоянию «1 электрон на K -оболочке».

Изменение интерпретации позитрона как дырки в вакуумном заполнении касается только одного состояния в континууме вакуумных состояний и поэтому практически несущественно. Опасения возникают только оттого, что позитронное квазистационарное состояние по дырочной интерпретации соответствует такому же распределению по отрицательным состояниям сплошного спектра, что и у электрона вакуумной K -оболочки, и на первый взгляд может показаться, что появление позитрона эквивалентно исчезновению электрона. Это ощущение противоречит физическому образу позитрона как независимой частицы, которая может находиться в своем квазистационарном состоянии независимо от того, каков заряд вакуумной K -оболочки.

Присутствие квазистационарного состояния позитрона при любом заряде вакуумной K -оболочки проверяется мысленным опытом по рассеянию позитрона на ядре. Существование позитронного квазистационарного состояния определяется только глубиной эффективной потенциальной ямы и проявляется в виде полюса в амплитуде рассеяния при любом заполнении вакуумной K -оболочки.

Особенно ясными эти утверждения сделаются позже, при рассмотрении рис. 1, из которого видно, как появляются электронные уровни вакуумной оболочки. Одновременно с появлением этих уровней возникают и позитронные квазистационарные состояния, существующие независимо от заполнения вакуумной оболочки.

Неправильность примитивной дырочной интерпретации позитрона видна также из следующего рассуждения.

Рассмотрим состояние: электрон на вакуумной K -оболочке и позитрон в квазистационарном состоянии. При

учете взаимодействия электрон движется в поле с зарядом несколько большим, чем заряд ядра, за счет влияния позитронного заряда. Позитрон же благодаря влиянию электрона испытывает действие поля с эффективным зарядом меньшим, чем заряд ядра. Это обстоятельство приведет

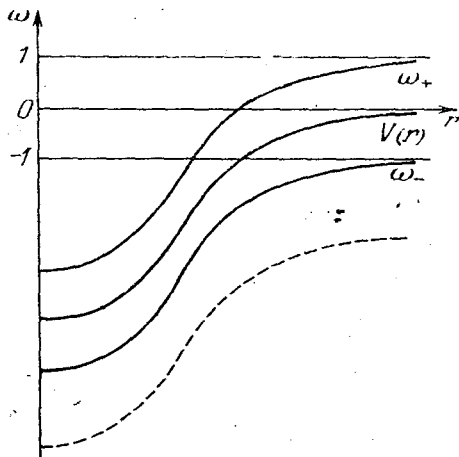


Рис. 1. Перестройка электрон-позитронного вакуума во внешнем поле.

к сдвигу положения максимума в распределении по функциям сплошного спектра у электрона и у дырок, соответствующих квазистационарному состоянию позитрона.

В результате оказывается, что позитронное состояние соответствует дыркам в другом вакууме, отличающемся от электронного по заряду ядра. Максимум в распределении дырок, соответствующих позитронному состоянию, сдвинут по энергии относительно электронного максимума на величину

$\Delta\omega$, значительно превышающую ширину распределения (при $\Delta\omega \gg \gamma$).

Таким образом, во избежание ошибок следует пользоваться языком старого вакуума. На этом языке состояние с зарядом $-e$ может осуществляться двумя способами: 1) один электрон на вакуумной K -оболочке; 2) 2 электрона на K -оболочке плюс позитрон.

Состояние, возникающее из незаполненной оболочки, осуществляется 3-мя типами состояний: 1) электронов в вакууме нет; 2) один электрон и один позитрон; 3) два электрона и два позитрона. Два состояния в первом случае и три состояния во втором имеют близкую энергию, если волновая функция каждого из позитронов образует пакет, соответствующий квазистационарному состоянию.

Таким образом, при $Z > Z_c$ задача делается вырожденной. Для снятия вырождения следует решить задачу об электрон-позитронном поле с учетом взаимодействия. Учет взаимодействия мало изменяет координатную зависимость

волновой функции, описывающей позитроны в перечисленных случаях, но существенно изменяет распределение по собственным функциям в волновом пакете. Эта физическая картина послужит обоснованием метода учета электрон-позитронного взаимодействия, развитого в следующем разделе.

1.2. Связанные состояния электрон-позитронных пар в сильных полях

Показано, что учет взаимодействия приводит к расщеплению электрон-позитронных уровней в поле ядра. Уровни отличаются числом пар, каждая из которых состоит из электрона на K -оболочке и позитрона в квазистационарном состоянии. В небольшом интервале ΔZ возникает связанное состояние. Энергетический спектр позитронов, вылетающих при критическом сближении тяжелых ядер, должен иметь несколько максимумов, отличающихся по энергии на 10—30 кэВ.

Электрон-позитронное взаимодействие. Нас в дальнейшем будут интересовать только состояния электронов и позитронов в отсутствие квантов, поэтому можно использовать лагранжиан системы электронов и квантов, усредненный по основному состоянию электромагнитного поля

$$L' = \frac{1}{2} \int j_{\mu}(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') j_{\nu}(x') dx dx', \quad (1.17)$$

где $j_{\nu}(x)$ — оператор тока

$$j_{\nu}(x) = eN(\bar{\Psi}\gamma_{\nu}\Psi),$$

где N — символ нормального произведения.

Пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в наинизшем порядке по e^2 удовлетворяет уравнению

$$\square \mathcal{D}_{\mu\nu}(x) = 4\pi\delta_{\mu\nu}\delta(x). \quad (1.18)$$

Для нашей цели удобнее всего найти $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x)$ в координатном представлении по r и в фурье-представлении по времени

$$\Delta \mathcal{D}_{\mu\nu}(r, \omega) + \omega^2 \mathcal{D}_{\mu\nu}(r) = 4\pi\delta(r) \delta_{\mu\nu},$$

откуда

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = -\frac{e^{\pm i\omega r}}{r} \delta_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

Вычисление (1.19) в импульсном представлении дает

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \delta_{\mu\nu},$$

чем определяется выбранная нами калибровка $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Нормировка взята такой, чтобы для двух медленных электронов взаимодействие переходило в кулоновское $V = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

Лагранжиан (1.17) соответствует следующему слагаемому в гамильтониане

$$H' = -\frac{1}{2} \int j_\mu(\mathbf{r}) \mathcal{D}_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) e^{-iH_0\tau} j_\nu(\mathbf{r}') e^{iH_0\tau} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\tau. \quad (1.20)$$

Матричный элемент оператора взаимодействия между двумя произвольными состояниями s и s' имеет вид

$$H'_{ss'} = \frac{1}{2} \int (j_\nu)_{ss_1} (j_\nu)_{s_1s'} \frac{e^{-iE_{ss_1}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (1.21)$$

где предполагается суммирование по s_1 , $E_{ss_1} = E_s - E_{s_1}$.

Матричные элементы оператора j_ν соответствуют рождению или уничтожению пары. Мы ниже увидим, что в задаче существенны только позитронные состояния с малыми импульсами $k \ll 1$, тогда как электрон исчезает или рождается на K -оболочке. При $Z \simeq Z_c$ энергия таких пар близка к нулю, $E_{ss_1} \ll 1$. Между тем расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ определяются размерами K -оболочки и $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim 1$. Поэтому в (1.21) можно опустить множитель $\exp\{iE_{ss_1}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\}$. В результате взаимодействие H' приобретает вид

$$H' = \frac{e^2}{2} \int \frac{N(\Psi^+(\mathbf{r})\alpha_\nu\Psi(\mathbf{r}))N(\Psi^+(\mathbf{r}')\alpha_\nu\Psi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (1.22)$$

где $\alpha_\nu = \gamma_0\gamma_\nu$ — матрица Дирака.

Для нахождения матричных элементов оператора H' следует вместо квантованных операторов Ψ подставить

в (1.22) волновые функции начальных и конечных состояний (см. аналогичные вычисления в [37]).

Заметим, что для учета взаимодействия следует пользоваться языком «старого» вакуума. Так, например, в состоянии «1М-электрон» в «старом» вакууме никакого взаимодействия (кроме включенного в собственную энергию электрона) не надо учитывать. Между тем на языке «нового» вакуума это состояние описывалось бы как «электрон+2 позитрона» и возникало бы ложное ощущение, что нужно учитывать энергию взаимодействия этих трех частиц.

Уравнение для определения энергии системы при $Z > Z_c$. Получим уравнение для энергий и собственных состояний системы с учетом взаимодействия (1.22). Начнем со случая, когда в отсутствие взаимодействия имеется 1 электрон на «K-оболочке». Слова «K-оболочка» взяты в кавычки, поскольку при $Z > Z_c$ нет соответствующего решения уравнения Дирака. Однако при $Z - Z_c \ll Z_c$ состояние, в котором находится электрон вблизи ядра, можно в силу непрерывности приближенно описать волновой функцией K-оболочки, для $Z = Z_c - 0$. Уравнение, описывающее систему, имеет вид

$$\begin{aligned} (E - E_1^0) a &= \int h_{1\omega} b_{\omega} d\omega + h_{11} a, \\ (E - E_{\omega}^0) b_{\omega} &= h_{\omega 1} a + \int h_{\omega\omega'} b_{\omega'} d\omega'. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь a — состояние с одним электроном на «K-оболочке»; b_{ω} — состояние с двумя электронами на «K-оболочке» и с одним позитроном энергии ω ; h_{11} — среднее значение возмущения H' в состоянии a ; $h_{1\omega}$, $h_{\omega\omega'}$ — соответствующие матричные элементы оператора H . Предполагается, что из h_{11} вычтена часть, соответствующая перенормировке массы электрона и радиационной поправке к энергии K-электрона. Нетрудно убедиться, что учет радиационных поправок (лэмбовский сдвиг и поправка к кулоновскому взаимодействию) сводится к небольшому изменению критического заряда. Обозначая соответствующий сдвиг энергии K-электрона через $e^2\nu$, получим

$$Z_c = Z_c + \nu/\beta.$$

Используя оценку значения ν , полученную в [40], находим $\tilde{Z}_c - Z_c \sim \frac{0,8}{8,2} \simeq 0,1$. Этот небольшой сдвиг Z_c не

оказывает никакого влияния на рассматриваемые ниже явления.

В (1.23) существенна область малых энергий ω , поскольку только в этом случае в выражениях для b_ω малость матричных элементов ($\sim e^2$) может быть скомпенсирована малой разностью

$$E - E_\omega^0.$$

Переходы в состояния с числом пар, большим двух, можно не учитывать, поскольку энергия этих состояний сильно отличается от энергий состояния a . Состояния позитронов с квантовыми числами, отличными от указанных выше ($j = 1/2$, $\kappa = 1$), также не должны учитываться, поскольку при этом область малых энергий не усилена множителем $\chi(\omega)$ (см. (1.14)). Наконец, выражения E_1^0 и t_ω^0 могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_1^0 &= -1 - \beta(\zeta - \zeta_c), \\ E_\omega^0 &= -2 - 2\beta(\zeta - \zeta_c) + \omega, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где β дается выражением (1.11).

Выражение для E можно легко получить в виде ряда теорий возмущений. Так, отбрасывая второй член в правой части второго уравнения (1.23) и подставляя в первое уравнение, найдем

$$E \simeq E_1^0 + h_{11} + \int \frac{|h_{1\omega}|^2}{E - E_\omega^0} d\omega.$$

Мы получим интегральное уравнение для E , не пользуясь рядами теории возмущений. Для этого запишем второе уравнение (1.23) в виде

$$(E - E_\omega^0) b_\omega = A_{\omega 1} a.$$

Тогда из (1.23) получим интегральное уравнение для определения энергии

$$E = E_1^0 + h_{11} + \int h_{1\omega'} \frac{A_{\omega' 1}}{E - E_{\omega'}^0} d\omega', \quad (1.25)$$

а также уравнение для определения $A_{\omega 1}$

$$A_{\omega 1} = h_{\omega 1} + \int h_{\omega \omega'} \frac{A_{\omega' 1}}{E - E_{\omega'}^0} d\omega'. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.25) и (1.26) сводятся к простым алгебраическим уравнениям, если использовать свойства позитронных функций.

Записывая позитронные функции, входящие в матричные элементы в виде (1.12) и используя узость резонанса, получим

$$E = E_1^0 + h_{11} + \frac{h_{13} A_{31}}{E - E_3^0}, \quad (1.25')$$

$$A_{31} = h_{31} + h_{33} \frac{A_{31}}{E - E_3^0}. \quad (1.26')$$

Здесь состояние 3 — такое же, как если бы на K -оболочке, помимо двух электронов, находилась 3-я частица — позитрон с проекцией спина, совпадающей с одной из электронных проекций. Энергия E_3^0 соответствует максимуму резонансной кривой $\chi(\omega)$, т. е. соответствует $\omega = 1 + \beta(\zeta - \zeta_c)$. В результате, согласно (1.24),

$$E_3^0 = -1 - \beta(\zeta - \zeta_c). \quad (1.27)$$

Находя A_{31} из (1.26') и подставляя в (1.25'), получаем

$$E = E_1 + \frac{|h_{13}|^2}{E - E_3}, \quad (1.28)$$

где $E_1 = E_1^0 + h_{11}$, $E_3 = E_3^0 + h_{33}$.

Новые энергетические уровни, заменяющие E_1 и E_3 , получаются как корни квадратного уравнения (1.28)

$$\tilde{E}_{1,3} = \frac{E_1 + E_3}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1 - E_3)^2}{4} + |h_{13}|^2}. \quad (1.29)$$

Обозначим $\frac{(h_{11} - h_{33})^2}{4} + |h_{13}|^2 = h_0^2$, $\frac{h_{11} + h_{33}}{2} = \bar{h}$, тогда, используя (1.24) и (1.27), находим

$$E_{1,3} = -1 - \beta(\zeta - \zeta_c) + \bar{h} \pm h_0.$$

При уменьшении Z до значений, меньших Z_c , энергия пары делается положительной, т. е. $E_3^0 > E_1^0$ и из (1.29) следует, что знаку минус соответствует состояние без пары. Поэтому естественно обозначить энергию, отвечающую знаку «-», через \tilde{E}_1 , а знаку «+», через \tilde{E}_3 .

Выражение (1.29) можно получить и непосредственно без интегрирования по позитронной энергии из следующих соображений. Имеется долгоживущее позитронное состояние, описываемое волновой функцией $\tilde{\Psi}_0(r)$. Это состояние представляет собой волновой пакет, составленный из функций $\Psi_\omega(r)$. Время распыливания пакета $\tau \sim 1/\gamma$.

Поскольку существенные в (1.26) и (1.27) разности энергий имеют порядок $h_{nm} \sim e^2$, условие пренебрежения распыливанием при $Z \simeq Z_c$ есть $\gamma \ll e^2$. Это условие выполняется с большой точностью. Итак, позитронное состояние можно рассматривать как стационарное и система уравнений запишется в виде

$$(E - E_1)a = h_{13}b, \quad (E - E_3)b = h_{31}a,$$

что и приводит к выражению (1.29).

Пользуясь этим соображением, нетрудно рассмотреть случай незаполненной «К-оболочки». В этом случае система уравнений связывает 3 состояния: a_0 — ядро без пар, b_0 — ядро с одной парой, c_0 — ядро с двумя парами.

Возможные значения энергии определяются из условия обращения в нуль детерминанта системы

$$\begin{vmatrix} E - E_0 & -h_{02} & -h_{04} \\ -h_{20} & E - E_2 & -h_{24} \\ -h_{40} & -h_{42} & E - E_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.30)$$

Здесь $E_0 = E_0^0 + h_{00}$ — энергия состояния без пар, включающая диагональный матричный элемент взаимодействия, $E_2 = E_2^0 + h_{22}$, $E_4 = E_4^0 + h_{44}$ — аналогичные выражения для состояний с одной и двумя парами, E_0^0 , E_2^0 , E_4^0 — соответствующие выражения без учета взаимодействия. Из диагональных матричных элементов h_{nn} , как уже упоминалось, исключаются собственно-энергетические части. Энергии \tilde{E}_1 , \tilde{E}_3 , \tilde{E}_0 , \tilde{E}_2 , \tilde{E}_4 , полученные в результате вычисления матричных элементов h_{nm} , даны на рис. 2.

Энергия E_0^0 взята равной нулю. Для дальнейших вычислений нам понадобится, кроме того, энергия состояния с 2-мя электронами

$$\tilde{E}^{ee} = -2 - 2\beta(\zeta - \zeta_c) + e^2 f^{ee}. \quad (1.31)$$

Вычисление матричных элементов. Нетрудно убедиться, что все матричные элементы h_{nm} содержат волновые

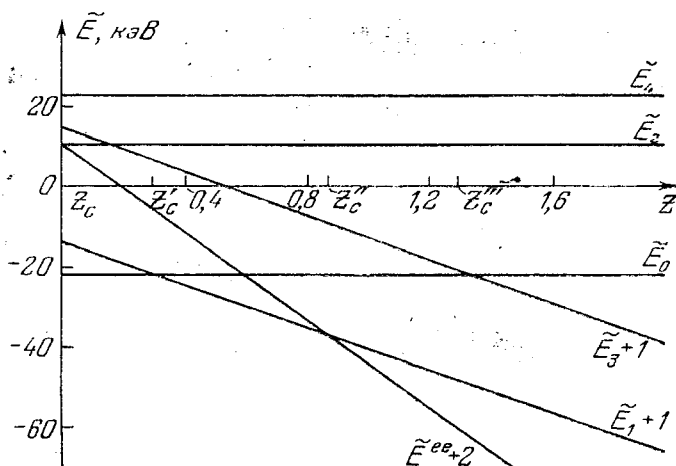


Рис. 2. Спектр электрон-позитронных возбуждений К-оболочки.

функции начальных и конечных состояний, отличающиеся только знаком проекции спина. Позитронному состоянию соответствует во взаимодействии (1.22) оператор исчезновения электрона отрицательного уровня с волновой функцией $\Psi_{\pm 1/2}^0(r)$. Такие же функции и у двух электронов «К-оболочки». Итак, все четыре функции выражения (1.22) во всех матричных элементах h_{nm} отличаются только проекциями спина и совпадают с волновыми функциями К-электрона, $\Psi_{\pm 1/2}(r)$ для $Z \approx Z_c$.

Для вычисления матричных элементов представим оператор H' через операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов в состояниях $\Psi_1 \equiv \Psi_{1/2}^0$ и $\Psi_2 = \Psi_{-1/2}^0$. Запишем квантованный оператор $\hat{\Psi}$, входящий

в оператор тока, в виде

$$\hat{\Psi} = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + b_1^\dagger \Psi_1^{p*} + b_2^\dagger \Psi_2^{p*},$$

где $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ — операторы уничтожения электрона и позитрона. Поскольку позитронная функция

$$\Psi_{1,2}^{p*} = \Psi_{2,1},$$

имеем

$$\Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 + b_1^\dagger \Psi_2 + b_2^\dagger \Psi_1.$$

После подстановки в H' получим сумму членов, каждый из которых содержит 4 оператора рождения или уничтожения частиц. Коэффициент при каждом из этих членов, как это следует из (1.22), может быть записан в виде

$$h_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \frac{e^2}{2} \left\{ \frac{(\Psi_\alpha^* \Psi_\beta)_r (\Psi_\gamma^* \Psi_\delta)_{r'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \sum_{i=1}^3 \int \frac{(\Psi_\alpha^* \alpha_i \Psi_\beta)_r (\Psi_\gamma^* \alpha_i \Psi_\delta)_{r'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr dr' \right\} \equiv \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 - \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}^1. \quad (1.32)$$

Первый интеграл соответствует кулоновскому взаимодействию. Отделяя угловые переменные с помощью (1.1) и суммируя по спиновым переменным, получим множители $\delta_{\alpha\beta}$, $\delta_{\gamma\delta}$. В разложении $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ по шаровым функциям угла $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ остается только сферическая часть. Получаем

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \int \frac{(F^2 + G^2)_r (F^2 + G^2)_{r'}}{r_{>}} dr dr' = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} I_0, \quad (1.33)$$

где $r_{>}$ означает большее из чисел r , r' .

Несколько сложнее вычисление второго слагаемого. Первый множитель в числителе подынтегрального выражения принимает вид

$$ir^2 FG \{ \Omega_\alpha^* \sigma_i \Omega'_\beta - \Omega_\alpha^* \sigma_i \Omega_\beta \},$$

где Ω , Ω' обозначают шаровые спиноры, соответствующие первым и вторым компонентам Ψ_α^0 . Воспользовавшись

соотношением (1.2), получим для последней фигурной скобки

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= - \{ \Omega_{\alpha}^* \sigma_i \sigma_n \Omega_{\beta} - \Omega_{\alpha}^* \sigma_n \sigma_i \Omega_{\beta} \} = \\ &= - 2ie_{ikl} n_k \Omega_{\alpha}^* \sigma_l \Omega_{\beta}. \end{aligned}$$

Аналогично запишется и второй множитель числителя. Итак, числитель содержит множитель вида $n_k n'_r$. Поэтому в разложении $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ по шаровым функциям после интегрирования по углам $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ остается только слагаемое $\frac{r_{<}}{r_{>}^2} (\mathbf{n} \mathbf{n}')$, где $r_{>}$ — большее, а $r_{<}$ — меньшее из чисел r, r' . Усреднение по углам \mathbf{r} и \mathbf{r}' дает

$$\overline{\{ \dots \} \{ \dots \}'} = - \frac{4}{9} e_{ikl} e_{ikm} (\sigma_l)_{\alpha\beta} (\sigma_m)_{\gamma\delta} = - \frac{8}{9} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta}.$$

Мы воспользовались соотношениями: $\overline{n_k n_r} = \frac{1}{3} \delta_{kr}$, $e_{ikl} e_{ikm} = 2\delta_{lm}$, а также видом Ω_{α} :

$$\Omega_{1/2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \Omega_{-1/2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Подставляя в $\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}^1$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 &= - \frac{8}{9} \int \frac{(FG)_r (FG)_{r'}}{r_{>}^2} dr dr' \cdot \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} = \\ &= - \frac{8}{9} I_1 \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta}. \quad (1.34) \end{aligned}$$

Если $\alpha = \beta$, то $\sigma_{\alpha\beta}$ отлично от нуля только для σ_z и, следовательно, $\gamma = \delta$; если $\gamma = \alpha$, то $\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} = 1$, если $\gamma \neq \alpha$, то $\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} = -1$.

Аналогично определяется значение $\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}^1$ и для случая $\alpha \neq \beta$. Таким образом, все матричные элементы выражаются через 2 интеграла, содержащие радиальные функции K -оболочки при $Z = Z_c$. Эти функции при $r > R$ определяются через функцию Макдональда от мнимого индекса [4]

$$G(r) = aK_{iv}(\sqrt{8\xi}r), \quad F(r) = \frac{a}{\xi}(rG' - G), \quad (1.35)$$

нормировочная константа a определяется из условия $\int (G^2 + F^2) dr = 1$. Здесь $\bar{v} = 2\sqrt{\xi^2 - 1}$, K_{iv} определяется интегралом

$$K_{iv}(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} \cos vt dt.$$

В области $r < R$ решение искажается влиянием ядра.

Условие сшивки решения (1.35) с решением при $r < R$ дает трансцендентное уравнение для определения ξ_c . Именно таким способом и получается приведенное выше значение $Z_c = 170$ [3].

Вычисление интегралов I_0 и I_1 на вычислительной машине дало

$$I_0 = 4,52; I_1 = 0,560.$$

При нахождении матричных элементов h_{nm} большинство операторных четверок обращается в нуль и h_{nm} выражается через несколько членов вида (1.32).

Для пояснения рассмотрим матричный элемент $\langle 0 | H' | 4 \rangle \equiv h_{04}$ между вакуумным состоянием и состоянием с двумя парами

$$|4\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger b_1^\dagger b_2^\dagger |0\rangle.$$

В H' имеются только 4 члена, дающие не нулевой вклад в h_{04} ,

$$b_1 a_1 b_2 a_2 h_{21}^{12} + b_1 a_2 b_2 a_1 h_{22}^{11} + b_2 a_1 b_1 a_2 h_{11}^{22} + b_2 a_2 b_1 a_1 h_{12}^{21}.$$

Отсюда получаем

$$\langle 0 | H' | 4 \rangle = -h_{21}^{12} + h_{22}^{11} + h_{11}^{22} - h_{12}^{21}.$$

Используя формулы (1.32) — (1.34), находим

$$h_{22}^{11} = h_{11}^{22} = \left(I_0 - \frac{8}{9} I_1 \right) \frac{e^2}{2},$$

$$h_{21}^{12} = h_{12}^{21} = \left(\frac{16}{9} I_1 \right) \frac{e^2}{2},$$

и для матричного элемента получается следующий ответ

$$\langle 0 | H' | 4 \rangle = e^2 f_{04} = e^2 \left(I_0 - \frac{8}{3} I_1 \right) \simeq 3e^2.$$

Аналогично вычисляются все остальные матричные элементы. В случае состояния с одной парой имеется несколько независимых состояний, среди которых нужно выбрать такое, где суммарный спин пары и его проекция равняются нулю. Как легко убедиться, с помощью операторов рождения это состояние записывается следующим образом:

$$\Psi_{s^2=0, s_z=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger b_2^\dagger + a_2^\dagger b_1^\dagger) | 0 \rangle.$$

Состояния со спином 1 имеют вид

$$\Psi_{s^2=1, s_z=-1, 0, 1} = \begin{cases} a_1^\dagger b_1^\dagger | 0 \rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger b_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger) | 0 \rangle, \\ a_2^\dagger b_2^\dagger | 0 \rangle. \end{cases}$$

Во всех других случаях имеется только одно независимое состояние.

Приведем вычисленные таким образом матричные элементы. Число f^{ee} , определяющее энергию состояния с 2-мя электронами на « K -оболочке» (формула (1.31)) равно

$$f^{ee} = I_0 - \frac{8}{3} I_1 \simeq 3.$$

В случае заряда $-e$ на « K -оболочке» имеем

$$f_{11} = -f_{33} = -\frac{1}{2} \left(I_0 + \frac{8}{3} I_1 \right) \simeq 3,$$

$$f_{13} = f_{31} = I_0 - \frac{8}{3} I_1 \simeq 3.$$

Для незаряженной « K -оболочки» получается

$$f_{00} = -f_{44} = I_0 + \frac{8}{3} I_1 \simeq 6, \quad f_{02} = f_{20} = f_{24} = f_{42} = 0,$$

$$f_{04} = f_{40} = f_{22} = I_0 - \frac{8}{3} I_1 \simeq 3.$$

Подстановка в уравнение (1.30) дает следующие значения энергии соответствующих 3-х уровней для канала $Q = 0$:

$$\tilde{E}_0 = -6,7e^2 = -6,7 \frac{mc^2}{137} = -25 \text{ кэВ},$$

$$\tilde{E}_2 = 3,0e^2 = 11 \text{ кэВ},$$

$$\tilde{E}_4 = 6,7e^2 = 25 \text{ кэВ}.$$

Здесь энергия системы при $Z = Z_c - 0$ выбрана равной нулю. При переходе через Z_c энергия состояния без пар \tilde{E}_0 скачком понижается на 25 кэВ. Все 3 энергии не зависят от Z .

В случае канала $Q = -e$ имеем

$$\tilde{E}_1 = -1 - \beta(\zeta - \zeta_c) - 4,25e^2,$$

$$\tilde{E}_3 = -1 - \beta(\zeta - \zeta_c) + 4,25e^2.$$

Наконец, в случае заполненной « K -оболочки» (см. (1.31)), находим

$$\tilde{E}^{ee} = -2 - 2\beta(\zeta - \zeta_c) + 3e^2.$$

Эти результаты показаны на рис. 2. Как видно из рисунка, при $Z - Z_c < Z'_c - Z_c \simeq 0,31$ наимизшим состоянием вакуума является состояние с зарядом, равным нулю, в интервале $Z'_c > Z > Z_c$ ($Z''_c - Z_c = 0,87$) наимизшее состояние вакуума имеет заряд $-e$ и, наконец, при $Z > Z''_c$ основное состояние соответствует заряду $-2e$. Отметим, что нижнее из 2-х состояний в канале заряда $Q = -e$ является стационарным во всем интервале от Z_c до Z''_c .

Расстояния между различными кривыми дают для каждого Z энергии позитронов, которые вылетают из соответствующих квазистационарных состояний. Как видно из рисунка, в случае $Q = 0$, начиная с $Z = Z'''_c$ ($Z'''_c - Z_c \approx 1,33$) имеется 6 возможных значений энергии вылетающего позитрона, которые соответствуют переходам из 3-х уровней канала $Q = 0$ в 2 уровня канала $Q = -e$. В случае канала $Q = -e$, начиная с Z''_c , существуют 2 позитронных линии, соответствующие переходам из двух

состояний канала $Q = -e$ в одно состояние канала $Q = -2e$. Число возможных позитронных линий для всех значений $Z - Z_c$ легко найти из рисунка.

Рождение позитронов при сближении ядер. Как было показано в [41], при адиабатическом сближении тяжелых ядер, когда падающее ядро не имеет электронов на K -оболочке, с большей вероятностью возникает состояние, соответствующее свободной K -оболочке объединенного ядра. При расстояниях $R \ll 1$ систему можно рассматривать как ядро с зарядом $Z_1 + Z_2$ и с эффективным радиусом $\sim R$. При этом система может оказаться в подкритическом состоянии, несмотря на то, что $Z_1 + Z_2 > Z_c$, за счет того, что расстояние R много больше радиуса ядра. Роль критического параметра играет здесь расстояние R . Кривые, изображенные на рис. 1, даны как функции $Z - Z_c$, но легко могут быть пересчитаны как функции $R_c - R$. При небольших разностях $\frac{R_c - R}{R_c} \ll 1$ пересчет

будет линейным. Проницаемость барьера экспоненциально зависит от $R_c - R$ и поэтому позитроны будут испускаться при R , близких к R_{\min} , и будут иметь достаточно монохроматические энергии, которые можно найти из рис. 2 при значении Z , соответствующем R_{\min} .

Из сказанного выше следует, что в начальной стадии сближения, когда эффективное значение Z близко к Z_c , возникнут 3 состояния, нижнее из которых является стационарным, 2 верхних, соответствующие одной и двум парам, квазистационарны. При дальнейшем сближении все 3 уровня делаются квазистационарными. Расстояние между уровнями порядка $\Delta E \sim 10 \div 20$ кэВ. Если бы сближение ядер происходило настолько медленно, что соблюдалась бы адиабатичность, т. е. $v/R_c < \Delta E$, где v — скорость ядра, то при сближении осуществлялось бы только состояние без пар, и рождение позитронов было бы невозможно. В [41] оценивается относительная скорость двух ядер урана с энергией, достаточной для сближения до критического расстояния R_c .

$$v_0 = \frac{1}{70} \sqrt{\frac{\xi}{R_c}},$$

где $\xi = \frac{Z}{137} \approx \frac{2}{3}$. Как видно из этого выражения, адиабата-

точность, по-видимому, не выполняется, и в процессе сближения происходит перемешивание всех 3-х состояний. В случае сильной неадиабатичности вес каждого состояния равен $1/3$.

Таким образом, вероятность рождения позитронов зависит от степени адиабатичности сближения. При достаточной начальной энергии ядер должны испускаться 6 различающихся по энергии и по интенсивности позитронных линий.

Если в исходном состоянии на K -оболочке имеется 1 электрон, то должны наблюдаться 2 позитронные линии. Расщепление линий порядка $10 \div 30$ кэВ.

1.3. Распределение вакуумного заряда вблизи сверхзаряженных ядер

Найдено распределение вакуумного заряда вблизи сверхкритических ($Ze^2 \gg 1$) ядер. Расчет ведется в приближении Томаса — Ферми, обобщенном на релятивистский случай. Характерным параметром в данной задаче является $Ze^3 \approx Z/1600$. При $Ze^3 \sim 1$ полный заряд вакуумной оболочки становится сравнимым с зарядом ядра Z .

Релятивистское уравнение Томаса — Ферми для вакуумной оболочки сверхкритического атома решено аналитически при $Ze^3 \ll 1$ и $Ze^3 \gg 1$, а также численно в промежуточной области $Ze^3 \sim 1$. Сверхзаряженное ядро при $Ze^3 \gg 1$ представляет собой электронейтральную плазму с равными концентрациями электронов, протонов и нейтронов (при $N = Z$). Потенциал внутри ядра принимает постоянное значение $-V_0 = -(3\pi^2 n_p)^{1/3} \approx -1,94 m_e c^2$. Вблизи края ядра расположен переходный слой с шириной, не зависящей от Z , в котором сосредоточены электрическое поле и поверхностный заряд. Рассмотрено также уравнение типа Томаса — Ферми для нейтрального атома, в котором полностью заполнены не только вакуумная, но и внешние электронные оболочки.

Релятивистское уравнение Томаса — Ферми. В случае $Ze^2 \gg 1$ вакуумная оболочка содержит много электронов и для расчета электронной плотности применимо релятивистское уравнение Томаса — Ферми. Это уравнение можно получить из следующих наглядных соображений

Пусть $V(r)$ — самосогласованный потенциал для электрона с учетом как поля ядра, так и среднего поля, образуемого другими электронами вакуумной оболочки. Если $Ze^2 \gg 1$, то применимо квазиклассическое приближение; при этом спиновые эффекты несущественны, так как играют роль большие угловые моменты (см. Приложение к этой главе). Квазиклассический импульс электрона равен

$$p(r) = [(\omega - V(r))^2 - 1]^{1/2}, \quad (1.36)$$

откуда определяются 3 области (см. рис. 1): I) $\omega > \omega_+ = 1 + V(r)$; II) $\omega < \omega_- = V(r) - 1$; III) классически запрещенная область $\omega_- < \omega < \omega_+$.

В областях I и II квадрат импульса $p^2(r) > 0$; область I соответствует верхнему, II — нижнему континууму. Сделаем следующее пояснение. Пусть $V(r) = \text{const}$ во всей области значений r . Тогда под нижним континуумом следует понимать область между кривыми $V - 1$ и $V - V_0$ при $V_0 \rightarrow \infty$. Аналогично, если $V(r)$ есть плавная функция r , то под нижним континуумом следует понимать область между $V(r) - 1$ и $V(r) - V_0$ (на рис. 1 — пунктирная кривая) с последующим предельным переходом к $V_0 \rightarrow \infty$. При этом, как это и должно быть, плотность заряда в нижнем континууме в каждой точке r не изменяется от добавления потенциала $V(r)$.

Когда яма становится достаточно глубокой, дискретные уровни входят в нижний континуум. Если эти уровни не были заняты электронами (голое ядро), то в нижнем континууме возникает дырка и появляется возможность туннельного перехода из нижнего континуума в верхний. При этом необходимо преодолеть экспоненциально малопроницаемый барьер, который представляет собой классически запрещенная область III с $p^2(r) < 0$. Электроны вакуумной оболочки представляют собой вырожденный релятивистский ферми-газ и заполняют все клетки фазового пространства с импульсом $p \leq p_{\text{max}} = (V^2 + 2V)^{1/2}$. Это значение p_{max} следует из (1.36) при $\omega = \omega_{\text{max}} = -1$. Плотность электронов вакуумной оболочки $n_e(r)$ связана с максимальным импульсом известным соотношением

$$n_e(r) = \frac{p_{\text{max}}^3}{3\pi^2} = \frac{1}{3\pi^2} (V^2 + 2V)^{3/2}. \quad (1.37)$$

Пространственное распределение электронов определяется релятивистским уравнением Томаса — Ферми

$$\Delta V = -4\pi e^2 \left[\frac{1}{3\pi^2} (V^2 + 2V)^{3/2} - n_p(r) \right], \quad (1.38)$$

где $n_p(r)$ — плотность протонов. В дальнейшем полагаем $n_p(r) = n_p \theta(R - r)$, где $n_p = Zn_0/A \approx 0,25m_\pi^3$, $Z/A \sim 0,5$, n_0 — обычная ядерная плотность: $n_0 = 3/(4\pi r_0^3)$, $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1,1$ ферми. Как видно из (1.37), $n_e(r)$ отлична от нуля лишь в той области пространства, где $V(r) < -2$. Поэтому вакуумная оболочка имеет конечный радиус $r = r_a$. Граничные условия для уравнения (1.38) таковы:

$$|V(0)| < \infty; \quad V(r_a) = -r_a V'(r_a) = -2. \quad (1.39)$$

Последнее условие следует из того, что $V(r) = -Z_1 e^2/r$ при $r \geq r_a$, где Z_1 — заряд атома для внешнего наблюдателя.

Приведем более подробный вывод уравнения (1.38), позволяющий найти распределение электронов оболочки по угловым моментам.

Приведенная ранее формула (1.10) для проникаемости потенциального барьера при $|\omega| > 1$ определяет ширину позитронного квазистационарного состояния при $\xi > \xi_{cr}$, а также ширину размазки $\Delta\omega$ волновой функции электрона вакуумной оболочки по функциям нижнего континуума. При $\gamma \ll 1$ для описания вакуумных электронов применимо одночастичное приближение. Это всегда имеет место для уровней вблизи границы нижнего континуума, когда

$$\gamma(\omega, \kappa) = c_\kappa e^{-2\pi\xi|\omega|/\hbar}, \quad k = (\omega^2 - 1)^{1/2} \rightarrow 0. \quad (1.10')$$

В случае $\xi \gg 1$ экспоненциальная малость γ сохраняется и для уровней, глубоко опустившихся в нижний континуум

$$\gamma(\omega, \kappa) = \gamma_0 \exp \left\{ -\pi \left(\frac{\kappa^2}{\xi} + \frac{\xi}{\omega^2} \right) \right\}, \quad (1.10'')$$

если $|\kappa| \ll \xi$ и $-\omega \gg 1$. При $|\kappa| \geq \kappa_0 = (\xi/\pi)^{1/2}$ экспоненциальная малость γ имеет место независимо от значения энергии ω . Максимальный момент уровней, опустившихся в нижний континуум, $\kappa_{max} \simeq \xi$. Поскольку $\kappa_0 \ll \kappa_{max}$, то число «опасных» состояний, для которых экс-

появления в $(1.10'')$ порядка единицы и уровень «растекается» по нижнему континууму, при $\xi \gg 1$ пренебрежимо мало по сравнению с полным числом состояний в вакуумной оболочке (количественную оценку см. в Приложении к этой главе). В силу этого плотность электронов $n_e(r)$ можно получить путем прямого суммирования по одночастичным состояниям, локализованным в области $r_1 < r < r_2$ (см. рис. 3)

$$n_e(r) = \sum_{n, \kappa, m} |\Psi_{n\kappa m}(r)|^2 = \sum_{n, \kappa} \frac{(2j+1)c_{n\kappa}^2}{4\pi r^2 p(r)} [\omega_{n\kappa} - V(r)].$$

Здесь использован принцип Паули и квазиклассические формулы (П.4) для решений уравнения Дирака (при этом быстро осциллирующие функции $\sin^2 \theta$ и $\sin^2(\theta + \eta)$ заменены на $1/2$). Дальнейшие выкладки не отличаются от изложенного в [42] вывода нерелятивистского уравнения Томаса — Ферми. С помощью формулы (П.7) перейдем от суммирования по n к интегрированию по энергии ω в интервале

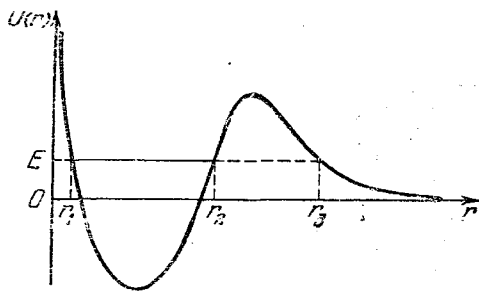


Рис. 3. Вид эффективного потенциала для состояний с определенным значением углового момента и энергией $\omega < -1$.

$$\omega_0(r) < \omega < -1. \quad (1.40)$$

При $\omega = \omega_0(r) = V(r) + (1 + \kappa^2/r^2)^{1/2}$ точка r совпадает с точкой поворота r_2 . Если $\omega < \omega_0(r)$, то точка r лежит либо в подбарьерной области $r_2 < r < r_3$, где волновая функция электрона экспоненциально затухает, либо в области $r > r_3$, отвечающей ненаблюдаемому дираковскому фону; такие состояния не дают вклада в $n_e(r)$. В итоге получаем пространственное распределение электронов с моментом j :

$$n_j(r) = \frac{2j+1}{2\pi^2 r^2} \left[V^2 + 2V - \frac{(j+1/2)^2}{r^2} \right]^{1/2}. \quad (1.41)$$

Суммируя по j , приходим к (1.37). Из уравнения

Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e(n_p - n_e)$$

с учетом $V = -e\varphi$ ($e > 0$, φ — электростатический потенциал) получаем основное уравнение (1.38). Помимо вакуумной оболочки электроны могут заполнять также внешние оболочки сверхкритического атома. Выражение для плотности электронов нейтрального атома следует из (1.36) или (1.40) при $\omega_{\max} = 1$

$$\tilde{n}_e(r) = \frac{1}{3\pi^2}(V^2 - 2V)^{3/2}. \quad (1.42)$$

В этом случае $\tilde{n}_e(r)$ отлична от нуля при всех $V(r) < 0$, и в пределе $|V(r)| \ll 1$ уравнение (1.38) переходит в обычное уравнение Томаса — Ферми. Граничное условие для нейтрального атома имеет обычный вид: $\lim_{r \rightarrow \infty} rV(r) = 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Как известно [42], область применимости нерелятивистского уравнения Томаса — Ферми ограничена условием: $Z^{-1} \ll r \ll 1$ (в атомных единицах). В отличие от этого, в случае $\xi \gg 1$ ограничение со стороны малых r отсутствует (см. Приложение), и уравнение (1.38) с плотностью (1.42) применимо при $0 < r \ll 1$.

Релятивистское уравнение Томаса — Ферми с плотностью (1.42) рассматривалось ранее [43]. В силу того, что авторы этой работы ограничились областью $\xi < 1$, это привело лишь к введению малых поправок к нерелятивистской модели Томаса — Ферми, не представляющих существенного интереса. Область $\xi \geq 1$ в этих работах не рассматривалась.

Оценка вклада поляризации вакуума. Обсудим теперь роль поляризации вакуума. Плотность зарядов в вакууме, индуцированных зарядом ядра, равна [44]

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{e}{2} \left\{ \sum_{(+)} |\Psi_{\omega_{km}}(r)|^2 - \sum_{(-)} |\Psi_{\omega_{km}}(r)|^2 \right\}, \quad (1.43)$$

где $\Psi_{\omega_{km}}$ — точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле ядра. Формула (1.43) является исходной при описании K -оболочки сверхкритического ядра [4], а также в численных расчетах поляризации вакуума и распределения заряда в K -оболочке для атомов с боль-

ними Z [45—47]. Плотность ρ_{vac} можно разбить на 2 части

$$\rho_{\text{vac}}(r) = \rho(r) + \rho_1(r), \quad (1.44)$$

где $\rho(r) = -en_e(r)$ — плотность заряда в вакуумной оболочке, $\rho_1(r)$ — вклад собственно поляризации вакуума, который выше не учитывался. Пользуясь аналогией с диэлектриками, можно назвать $\rho(r)$ плотностью свободных, а $\rho_1(r)$ — плотностью связанных зарядов: $\rho_1 = -\text{div } \mathbf{P}$, $\int \rho_1 d^3r = 0$. Заметим, что при $Z < Z_{\text{cr}} \approx 170$ плотность $\rho(r) \equiv 0$, но $\rho_1(r)$ отлична от нуля. Численный расчет [46, 47] показывает, что при $Z \sim Z_{\text{cr}}$ величины ρ и ρ_1 — одного порядка. Покажем, что в интересующем нас случае, $\xi = Ze^2 \gg 1$, плотность ρ_1 становится пренебрежимо малой по сравнению с ρ , чем оправдывается пренебрежение вкладом $\rho_1(r)$ в уравнении (1.38).

Воспользуемся свойством локализации функции Грина и поляризационного оператора $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ в сильных полях [9] (см. 1.4). Благодаря этой локализации \mathbf{P} и \mathbf{E} связаны локальным соотношением

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}, \quad \left[\varepsilon = 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln(eE), \right] \quad (1.45)$$

полученным в [5, 6] для случая однородного поля. Отсюда $\rho_1 = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\mathbf{E} \nabla \varepsilon) + (1 - \varepsilon^{-1}) \rho\right]$, и с учетом $eE = V'(r)$ получаем:

$$\frac{\rho_1(r)}{\rho(r)} \simeq \frac{V''}{4V'^3\varepsilon} + \frac{e^2}{3\pi\varepsilon} \ln V' \simeq 1/2\xi^2 \quad (1.46)$$

(при $V(r) = -\xi/r$, $\varepsilon \simeq 1$ и $\xi \gg 1$). Отсюда видно, что учет плотности $\rho_1(r)$ в случае $\xi \gg 1$ превышает точность используемого нами квазиклассического метода.

Переходим к решению уравнения (1.38). Сначала будут рассмотрены случаи $Ze^3 \ll 1$ (слабая экранировка) и $Ze^3 \gg 1$, когда решения можно получить в аналитическом виде.

Слабая экранировка: $Ze^3 \ll 1$. Переходя в (1.38) к функции $\psi = -V - 1$ ($\psi \gg 1$) и полагая $x = r/r_a$,

$\mu = 4e^2 r_a^2 / 3\pi$, имеем при $r > R$

$$\psi'' + \frac{2}{x} \psi' = \mu (\psi^2 - 1)^{3/2}; \quad \psi(1) = 1, \quad \psi'(1) = -2. \quad (1.47)$$

Из (1.39) следует, что радиус атома $r_a = Z_1 e^2 / 2$, где $Z_1 = Z - N_e$ — внешний заряд сверхкритического атома. Отсюда $\mu = (Z_1 e^3)^2 / 3\pi$ и в (1.47) фигурирует малый параметр $\mu \ll 1$. В силу этого уравнение (1.47) можно решить по теории возмущений

$$\psi(x, \mu) = \psi_0(x) + \mu \psi_1(x) + \mu^2 \psi_2(x) + \dots \quad (1.48)$$

Для $\psi_n(x)$ получаем цепочку уравнений

$$\Delta \psi_0 = 0, \quad \Delta \psi_1 = (\psi_0^2 - 1)^{3/2}, \quad \Delta \psi_2 = 3(\psi_0^2 - 1)^{1/2} \psi_0 \psi_1, \dots,$$

где $\Delta \psi = \psi'' + 2x^{-1} \psi'$. Первые две функции вычисляются в явном виде

$$\psi_0(x) = 2/x - 1,$$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = \frac{8}{x} [(3x + 2) \operatorname{Arth}(1 - x)^{1/2} - 5(1 - x)^{1/2} + \\ + \frac{4}{3}(1 - x)^{3/2}], \end{aligned}$$

причем

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \frac{8}{x} \left[-\ln x + \left(2 \ln 2 - \frac{11}{3} \right) + \dots \right] & x \rightarrow 0, \\ \frac{32}{35} (1 - x)^{3/2} & x \rightarrow 1. \end{cases}$$

Заметим, что на краю ядра $x = 2R/\xi \simeq 0,04\xi^{-2/3} \ll 1$. В области $x \ll 1$ функция $\psi(x, \mu)$ упрощается

$$\psi(x, \mu) = \frac{2}{x} [1 + 4\mu(-\ln x + c_0) + O(x, \mu^2)], \quad (1.49)$$

$$c_0 = 2 \ln 2 - \frac{11}{3}.$$

Внутри ядра при условии $Ze^3 \ll 1$ потенциал $V(r)$ еще близок к потенциалу голого ядра; полагая $\psi = \frac{\xi}{R} \chi(\xi)$, $\xi = r/R$, имеем

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\chi}{d\xi} = -3 + \nu \chi^3,$$

где $0 < \xi < 1$, $\nu = 4e^2 \xi^2 / 3\pi = (2Ze^3)^2 / 3\pi$.

Рассматривая нелинейный член $\nu\chi^3$ как возмущение ($\nu \ll 1$), находим

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0(\xi) + \nu\chi_1(\xi) + \nu^2\chi_2(\xi) + \dots, \\ \chi_0 &= \frac{3-\xi^2}{2}, \quad \chi_1 = c_1 + \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \chi_0^3(x) x(\xi-x) dx. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Сшивание решений (1.49) и (1.50) на краю ядра определяет константу интегрирования $c_1 = -1 - \int_0^1 \chi_0^3(x) x dx$ и дает связь между зарядом ядра Z и внешним зарядом Z_1

$$Z_1 = Z \left\{ 1 - \frac{4}{3\pi} (Ze^3)^2 \left(\ln \frac{\zeta}{R} + c_1 \right) + \dots \right\}, \quad (1.51)$$

где $c_1 = \ln 2 - 8/3 + \int_0^1 \chi_0^3(x) x^2 dx = -1,38$. Полное число электронов в вакуумной оболочке равно

$$N_e = Z - Z_1 = \frac{4}{3\pi} \zeta^3 \left(\ln \frac{\zeta}{R} + c_1 \right). \quad (1.52)$$

Рассмотрим распределение заряда в этой оболочке. Пусть $Q(r)e$ — полный заряд, находящийся внутри сферы радиуса r ; по теореме Гаусса $V'(r) = eE = Q(r)e^2/r^2$. Число электронов вакуумной оболочки, находящихся внутри сферы радиуса r , равно

$$\begin{aligned} N_e(r)_{(R < r < r_0)} &= Z - Q(r) = \frac{4\zeta^3}{3\pi} \left\{ \ln \frac{\zeta}{R} + c_1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_{2r/\zeta}^1 \frac{dx}{x} (1-x)^{3/2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

При $r \ll r_0$ это выражение упрощается:

$$N_e(r) \approx \frac{4\zeta^3}{3\pi} \left[\frac{\ln(2r/R)}{\ln(\zeta/R)} \right].$$

Внутри ядра находится малая доля электронного облака:

$$\frac{N_e(R)}{N_e} = \frac{0,7}{[\ln(\xi/R)]^2} \ll 1.$$

В заключение этого раздела приведем формулы для полного заряда ядра Z' (с учетом той части вакуумной оболочки, которая расположена при $r < R$), потенциала в центре ядра $V(0)$ и напряженности электрического поля на краю ядра:

$$Z' = Z - N_e(R) = Z \left[1 - c_2 \frac{(Ze^3)^2}{\ln(\xi/R)} \right] + \dots, \quad (1.54)$$

$$\frac{V(0)}{V_0} = -c_3 (Ze^3)^{2/3} [1 - c_4 (Ze^3)^2 + \dots], \quad (1.55)$$

$$\frac{E(r=R)}{E_{\max}} = c_5 (Ze^3)^{1/3} \left[1 - c_2 \frac{(Ze^3)^2}{\ln(\xi/R)} + \dots \right]. \quad (1.56)$$

Здесь $V_0 = (3\pi^2 n_p)^{2/3}$ и E_{\max} — предельные значения потенциала и напряженности поля в случае $Ze^3 \gg 1$ (см. следующий раздел), c_n — численные константы:

$$c_2 = \frac{4 \ln 2}{3\pi} = 0,294, \quad c_3 = \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} = 0,782,$$

$$c_4 = \frac{8}{9\pi} \left\{ 1 + \int_0^1 \chi_0^3(x) x dx \right\} = 0,570,$$

$$c_5 = \frac{32}{27} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} = 1,05.$$

Эти разложения справедливы при $Ze^3 \ll 1$. Поправки к единице в квадратных скобках происходят от учета эффекта экранировки потенциала голого ядра вакуумной оболочкой. Непосредственно видно, что при $Ze^3 \sim 1$ эти поправки перестают быть малыми, т. е. экранировка существенно изменяет суммарный потенциал $V(r)$.

Случай $Ze^3 \gg 1$ (предельная экранировка). В этом случае электрическое поле вытесняется из объема ядра на его поверхность и сосредоточено в переходном слое вблизи $r = R$ шириной порядка $\lambda = 12 \div 15$ ферми. В области $Ze^3 \gg 1$ выполняется условие $R \gg \lambda$, в силу чего можно пренебречь кривизной поверхности ядра и задача сводится к плоской. Перейдем к переменным χ и

$$x = (r - R)/\lambda:$$

$$V = -(3\pi^2 n_p)^{1/3} \chi, \quad \lambda^{-2} = 4e^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} n_p^{2/3} \simeq 0,03 n_p^{2/3}, \quad (1.57)$$

и преобразуем (1.38) к одномерному уравнению

$$\chi'' = \chi^3 - \theta(-x). \quad (1.58)$$

В дальнейшем полагаем: $A = 2Z$, $n_p \simeq 0,5n_0 \simeq 0,25m_0^3$, где n_0 — обычная ядерная плотность. При этих значениях параметров $\lambda = 9,2m_\pi^{-1} \approx 13$ ферми, что на порядок превышает ширину диффузности края ядра и оправдывает выбор $n_p(r)$ в виде ступеньки.

Уравнение (1.58) нужно решать с граничными условиями:

1) $\chi \rightarrow 1$, $\chi' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ (что отвечает центру ядра, поскольку $R \gg \lambda$);

2) χ , $\chi' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$;

3) непрерывность χ и χ' на краю ядра ($x = 0$).

С учетом граничных условий, уравнение (1.58) имеет первый интеграл

$$2\chi'^2 = \begin{cases} \chi^4 - 4\chi + 3 = (\chi - 1)^2(\chi^2 + 2\chi + 3) & \text{при } x < 0, \\ \chi^4 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что на краю ядра

$$\chi'(0) = -2^{-1/2} \chi^2(0). \quad (1.59)$$

Окончательно получаем

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 - 3[1 + 2^{-1/2} \text{sh}(a - x\sqrt{3})]^{-1} & \text{при } x < 0, \\ 2^{1/2}(x + b)^{-1} & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

(см. кривую I на рис. 4). Константы интегрирования a и b равны: $\text{sh } a = 11\sqrt{2}$; $a = 3,439$; $b = \frac{4}{3}\sqrt{2} = 1,886$; причем $\chi(0) = 3/4$; $\chi'(0) = -0,398$.

Интересно отметить, что внутри ядра можно указать простое приближенное решение уравнения (1.58)

$$\chi(x) = 1 - Ce^{x\sqrt{3}} \quad \text{при } x < 0; \quad C = 0,2374, \quad (1.61)$$

которое с точностью $\sim 1,5\%$ совпадает с точным реше-

нием*). Асимптотика точного решения (1.60) при $x \rightarrow -\infty$ также имеет вид (1.61), но с другим значением константы перед экспонентой: $C' = 6(9\sqrt{6} - 22) = 0,2724$.

Обсудим физический смысл полученного решения. Внутри ядра плотности $n_e \approx V_0^3/3\lambda^2$ и n_p одинаковы и потенциал практически постоянен: $V(r) = -V_0$ при $R - r \gg \lambda$, где $V_0 = (3\lambda^2 n_p)^{1/2} \approx 1,94 m_\pi$. Величины V_0 и λ

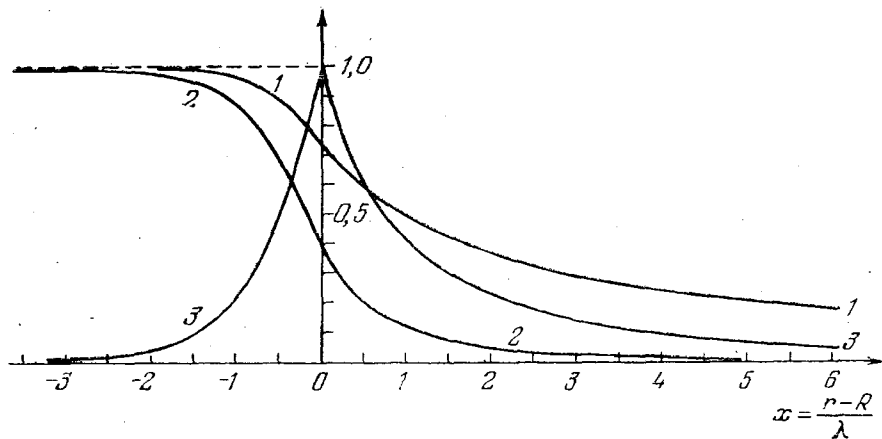


Рис. 4. Ход потенциала, плотности электронов вакуумной оболочки и напряженности электрического поля вблизи края сверхзаряженного ядра при $Ze^3 \gg 1$. Кривая 1 — функция $\chi = -V(r)/V_0$, кривая 2 — отношение $n_e(r)/n_e(0)$, где $n_e(0)$ — плотность электронов в центре ядра; кривая 3 — отношение $E(r)/E_{\max}$.

не зависят от заряда ядра Z и от его радиуса R . Вблизи поверхности ядра расположен переходный слой, структура которого показана на рис. 4. Кривая 2 изображает ход электронной плотности. При этом $n_e(R) = 0,42 n_e(0)$, а во внешней области $r > R$ плотность быстро спадает при удалении от края ядра.

В области $R - r \gg \lambda$ электрическое поле практически отсутствует, т. е. заряд протонов полностью скомпенсирован электронным облаком и система является электронной. Максимальная напряженность электрического

*) Это решение получается, если подставить $\chi = 1 - \phi$ в уравнение (1.58), линеаризовать его по ϕ и определить константу C из граничного условия (1.59).

поля достигается на краю ядра

$$E_{\max} = \frac{9\pi\sqrt{2}}{16} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_p^{2/3} = 8,4 \cdot 10^{-2} m_{\pi}^2/e, \quad (1.62)$$

$$\frac{E(x)}{E_{\max}} = -\frac{16\sqrt{2}}{9} \chi'(x) = \begin{cases} Be^{x\sqrt{3}} & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ (b/x)^2 & \text{при } x \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где $B = (8/3)^{2/3}C$. График функции $E(x)/E_{\max}$ показан на рис. 4 (кривая 3). Плотность энергии электрического поля $\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_p^{4/3} \chi'^2(x)$. Несложный подсчет показывает, что примерно $2/3$ энергии поля содержится в области $r > R$, а $1/3$ — внутри ядра.

Учет экранировки приводит к тому, что поле на краю ядра остается ограниченным: $E(R) \rightarrow E_{\max}$ при $Z \rightarrow \infty$. В обычных единицах предельное поле $E_{\max} = 8,2 \cdot 10^{19}$ В/см, что в 6300 раз превышает характерную напряженность поля в квантовой электродинамике $E_0 = m_e^2 c^3 / e \hbar = 1,3 \cdot 10^{16}$ В/см (при $E \sim E_0$ становятся существенными нелинейные эффекты квантовой электродинамики — поляризация вакуума и рождение e^+e^- -пар в однородном электрическом поле).

Полный заряд Z' , находящийся внутри ядра, легко определить через $\chi'(0)$ с помощью теоремы Гаусса. Получаем

$$Z'/Z = C_Q (Ze^3)^{-1/3}, \quad C_Q = \frac{27}{32} \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/3} = 0,95. \quad (1.63)$$

Сравнение этой формулы с (1.54) показывает, насколько значительной становится экранировка в случае $Ze^3 \gg 1$. При этом внутри сверхзаряженного ядра образуется электронейтральная плазма. Нескомпенсированный заряд расположен в слое конечной ширины $\sim \lambda$ вблизи края ядра.

Результаты численных расчетов. Выше были рассмотрены предельные случаи $Ze^3 \ll 1$ и $Ze^3 \gg 1$. Для того, чтобы связать эти две области, уравнение (1.38) было решено численно при $Z = 500 \div 10\,000$. Сделаем несколько замечаний относительно численного счета. Удобно перейти к переменной $\xi = r/R$ и положить $V(r) = -\frac{Ze^2v}{R\xi}$.

Пренебрегая в (1.38) членом $2V$ по сравнению с V^2 , что справедливо в широкой области r , за исключением края атома $r \sim r_a$, получаем уравнение

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{4(Ze^3)^2}{3\pi\xi^2} v^3 - 3\xi\theta(1 - \xi), \quad (1.64)$$

в которое не входит радиус ядра R . Поэтому $v = v(\xi, Z)$. Результаты численного счета представлены на рис. 5 и 6.

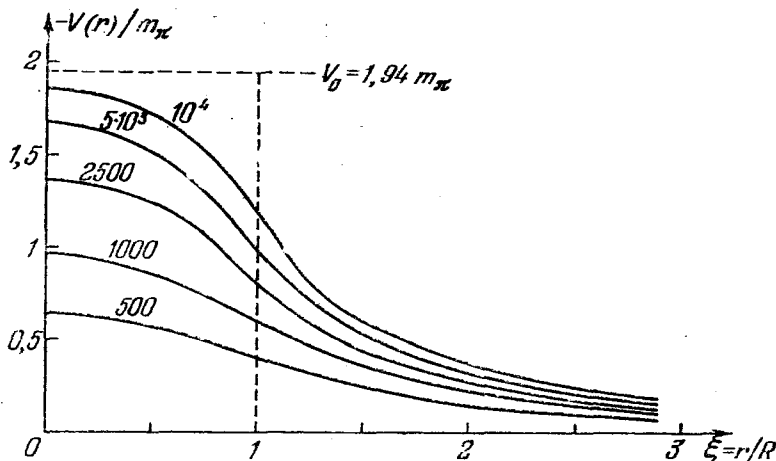


Рис. 5. Величина $V(r)$ в π -мезонных единицах в зависимости от $\xi = r/R$. Цифры у кривых указывают заряд ядра Z . Кривые получены численным решением уравнения (1.64).

Зависимость $V(r)$ для нескольких значений Z показана на рис. 5 (при $n_p = 0,25m_\pi^3$). Соответствующие кривые для ядра с другим значением n_p можно получить из рис. 5 умножением на $(n_p/0,25m_\pi^3)^{1/3}$. На рис. 6 приведена зависимость потенциала в центре ядра $|V(0)|$ от Z (кривая 1). Начальный участок этой кривой описывается уравнением (1.55). Для сравнения на том же рисунке приведена зависимость $|V(0)| = 3Ze^2/2R = c_3|V_0|(Ze^3)^{2/3}$ для голого ядра (кривая 2). Влияние экранировки потенциала ядра вакуумной оболочкой начинает сказываться при $Z \sim 1000$. С дальнейшим ростом Z потенциал в центре ядра выходит на постоянное значение $V(0) = -V_0 = -1,94m_\pi$.

Возможное развитие теории. Образование электронейтральной плазмы внутри ядра при $Ze^3 \gg 1$ резко уменьшает кулоновскую энергию

$$E_Q = \frac{3(Ze)^2}{5R} = 0,61 (Ze^3)^{2/3} Zm_\pi, \quad (1.65)$$

препятствующую стабильности сверхзаряженных ядер. Поскольку электрическое поле сосредоточено в переходном слое вблизи края ядра, то электростатическая энергия сводится к поверхностной

$$E_s = -\frac{1}{8\pi e^2} \int V \Delta V d^3r = \frac{V_0^2 R^2}{2\lambda e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi'^2 dx = 0,35 (Ze^3)^{-1/3} Zm_\pi. \quad (1.66)$$

Таким образом, благодаря эффекту экранировки кулоновская энергия ядра при $Ze^3 \gg 1$ уменьшается в $1,7Ze^3$ раз. Однако остается еще кинетическая энергия вырожденного электронного газа

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{p_F^4}{4\pi^2} \frac{4\pi R^3}{3} = \\ &= \frac{3}{4} Z p_F \simeq 1,5 Z m_\pi. \quad (1.67) \end{aligned}$$

Без учета возможности образования π -конденсата сверхзаряженные ядра являются нестабильными. Поскольку $V_0 < 2m_\pi$, то $\pi^+\pi^-$ -конденсация, по-видимому, еще не наступает, но возможно образование π^- -конденсата. Вопрос о стабильности сверхзаряженных ядер с учетом π -конденсации требует дополнительного изучения и будет рассмотрен ниже (II.1, VII.1).

Присутствие π -конденсата существенно изменяет распределение плотности вакуумных электронов внутри

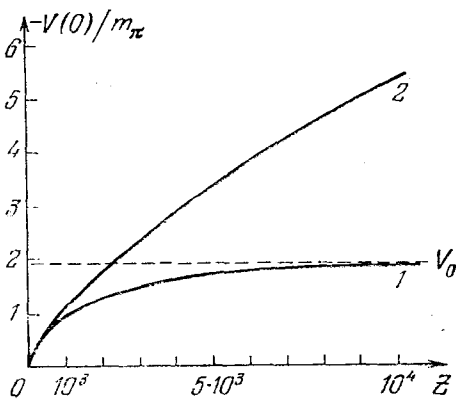


Рис. 6. Потенциал в центре ядра в π -мезонных единицах. Кривая 1 — решение уравнения (1.64). Кривая 2 — для голого ядра (без учета эффекта экранировки).

ядра и требуется решение самосогласованной задачи о π -конденсации с учетом экранировки кулоновского поля вакуумными электронами.

Приложение к I.3. *Решение уравнения Дирака в квазиклассическом приближении.* Получим формулы квазиклассического приближения для решений уравнения Дирака, ограничиваясь классом потенциалов с центральной симметрией. Полагая в (1.3)

$$G = ae^{iS}, \quad F = be^{iS}, \quad (\text{II.1})$$

где a и b — функции, медленно меняющиеся по сравнению с экспонентой, и пренебрегая производными a' и b' по сравнению с S' , получаем

$$S(r) = \int^r p \, dr, \quad p = \left[(\omega - V)^2 - 1 - \frac{\kappa^2}{r^2} \right]^{1/2}, \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{b(r)}{a(r)} = \frac{iS' + \kappa/r}{1 + \omega - V} = Ne^{i\eta}, \quad (\text{II.3})$$

где $p(r)$ — радиальный импульс, $N(r) = \left[\frac{\omega - V - 1}{\omega - V + 1} \right]^{1/2}$, $\eta(r) = \arcsin \{ p(r) [(\omega - V)^2 - 1]^{-1/2} \}$.

В классически разрешенной области $r_1 < r < r_2$ (см. рис. 3) имеем: $\omega - V - 1 > 0$, $p^2 > 0$, в силу чего величины N и η являются вещественными. Поскольку $u = (1 + \omega - V)^{-1/2} G$ удовлетворяет уравнению (1.5), то квазиклассическая асимптотика для $u(r)$ имеет обычный вид. С учетом (II.3) получаем квазиклассические формулы для радиальных функций G и F

$$\begin{aligned} G(r) &= A \left[\frac{\omega - V + 1}{p(r)} \right]^{1/2} \sin \theta(r), \\ F(r) &= A \left[\frac{\omega - V - 1}{p(r)} \right]^{1/2} \sin(\theta + \eta), \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

где $\theta(r) = \int_{r_1}^r p \, dr + \frac{\pi}{4}$.

Условие нормировки на одну частицу, локализованную в области $r_1 < r < r_2$,

$$\int_{r_1}^{r_2} (G^2 + F^2) dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} (\omega - V) u^2 dr = 1 \quad (\text{П.5})$$

определяет нормировочную константу A

$$A = A_{n\kappa} = \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \frac{\omega_{n\kappa} - V(r)}{p(r)} dr \right\}^{-1/2}. \quad (\text{П.6})$$

Здесь $\omega_{n\kappa}$ — энергия уровня с квантовыми числами n и κ ($n = 0, 1, \dots$ — радиальное квантовое число). В случае экспоненциальной малости проникаемости барьера γ (см. (1.10)) $\omega_{n\kappa}$ определяется условием квантования Бора — Зоммерфельда

$$\int_{r_1}^{r_2} p dr = (n + 1/2) \pi.$$

Дифференцируя это равенство по n , находим

$$A_{n\kappa} = \left[\frac{1}{\pi} \frac{\partial \omega_{n\kappa}}{\partial n} \right]^{1/2}, \quad (\text{П.7})$$

что лишь множителем $\sqrt{2}$ отличается от соответствующего выражения в нерелятивистском случае [42]. Формулы (П.4) — (П.7) использовались выше при выводе релятивистского уравнения Томаса — Ферми.

Рассмотрим вопрос о точности этого приближения.

1) Квазиклассика перестает быть применимой на границе вакуумной оболочки. Вклад в $n_a(r)$ при $r \rightarrow r_a$ дают состояния с $\omega \simeq -1$ и $|\kappa| \ll \xi$, для которых

$$p(r) = \sqrt{-2U(r)} = \frac{\xi}{r} (1 - r/r_a)^{1/2}.$$

Условие применимости квазиклассики

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{p(r)} \right) = \frac{1 - r/2r_a}{\xi (1 - r/r_a)^{3/2}} \ll 1 \quad (\text{П.8})$$

сводится к неравенству $r_a - r \gg r_a (2\xi)^{-2/3}$ и выполняется тем лучше, чем больше $\xi = Ze^2$. Отметим, что здесь нет

ограничений со стороны малых r , в отличие от нерелятивистской кулоновской задачи [42].

2) При выводе квазиклассических формул отбрасывается слагаемое

$$A''/p^2 A \sim (pr)^{-2} \sim \zeta^{-2} (1 - r/r_a)^{-1} \quad (\text{II.9})$$

(см. [42], стр. 131). Поэтому квазиклассическое приближение для волновой функции электрона, входящего в состав вакуумной оболочки, имеет точность порядка ζ^{-2} .

3) Оценим число электронов вакуумной оболочки, для которых одночастичное приближение является некорректным. Для этого найдем долю уровней с энергией $\omega < -1$, для которых отсутствует экспоненциальная малость ширины γ . Интегрируя (1.41) по объему, находим число электронов вакуумной оболочки, имеющих момент j

$$N_j = \frac{2}{\pi} (2j + 1) \int \left((V^2 + 2V - \frac{\kappa^2}{r^2})^{1/2} \right) dr. \quad (\text{II.10})$$

Максимальный угловой момент электронов вакуумной оболочки определяется условием

$$\kappa_{\max} = \max_{0 < r < \infty} r (V^2 + 2V)^{1/2}.$$

Это дает

$$\kappa_{\max} = \begin{cases} \zeta & \text{при } Ze^3 \ll 1, \\ 1,44\zeta (Ze^3)^{-2/3} & \text{при } Ze^3 \gg 1. \end{cases}$$

Пусть $1 \ll \kappa \ll \kappa_{\max}$. Суммируя (II.10) по j , определим долю электронов с моментами $j \leq \kappa^{-1/2}$

$$\delta(\kappa) = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1/2}^{\kappa^{-1/2}} N_j = c\kappa^2, \quad c = \frac{3\mathcal{P}}{2\mathcal{Q}}, \quad (\text{II.11})$$

где

$$\mathcal{P} = \int (V^2 + 2V)^{1/2} dr, \quad \mathcal{Q} = \int (V^2 + 2V)^{3/2} r^2 dr.$$

В частности, для $V(r) = -\zeta/r$ с логарифмической точностью имеем

$$\mathcal{P} = \zeta \ln(\zeta/R), \quad \mathcal{Q} = \zeta^3 \ln(\zeta/R); \quad c = \frac{3}{2\zeta^2}.$$

В итоге, при $\kappa = \kappa_0 = (\zeta/\pi)^{1/2}$ и $\zeta \gg 1$ (κ определяется из условия $\gamma/\gamma_0 \ll 1$ при всех ω)

$$\delta(\kappa_0) = 3/2\pi\zeta \ll 1. \quad (\text{П.12})$$

1.4. Поляризация вакуума в сильных неоднородных полях

Изучается поляризация электрон-позитронного вакуума в сильных и неоднородных электрических полях. Обнаружено, что в сильных полях возникает локализация функции Грина частицы, а именно, функция Грина в поле $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ быстро осциллирует при $R^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \gg 1/(eE)$, где E — напряженность электрического поля. Благодаря этому свойству локальности поляризационный оператор $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \rightarrow 0$ при $R^2 \gg 1/(eE)$. Это обстоятельство позволяет найти диэлектрическую проницаемость вакуума в сильных и неоднородных полях [9].

Решена задача о распределении поляризационного заряда вокруг ядра радиуса R_0 и найдена связь между истинным зарядом ядра Z_0 и наблюдаемым зарядом Z . Показано, что при $R_0 \rightarrow 0$ существенную роль играют электроны, конденсирующиеся вблизи ядра.

Диэлектрическая проницаемость вакуума в сильном поле. Получим выражение, связывающее диэлектрическую проницаемость с поляризационным оператором. Для простоты будет рассматриваться случай статического поля. Обобщение не представляет трудностей.

Диэлектрическая проницаемость определяется, как обычно, через вектор поляризации \mathbf{P}

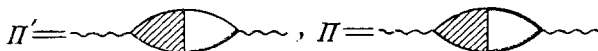
$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\alpha_{ik}, \quad P_i = \alpha_{ik}E_k.$$

Вектор поляризации удовлетворяет соотношению

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_1, \quad (1.68)$$

где ρ_1 — плотность паведенных внешним полем зарядов. Для получения ε_{ik} достаточно выразить ρ_1 через поляризационный оператор. Для этого найдем потенциал, действующий на электрон в присутствии внешних зарядов. Получим потенциал $V(\mathbf{r})$ в виде ряда по степеням e^2 , не предполагая внешнее поле слабым. В нулевом

где



Выражение для V можно записать в виде

$$V = V_0 + \mathcal{D}_0(\Pi' - \Pi)V_0 + \mathcal{D}_0\Pi\{V_0 + \mathcal{D}_0\Pi'V_0 + \mathcal{D}_0\Pi\mathcal{D}_0\Pi'V_0 + \dots\} = V_0 + \mathcal{D}_0(\Pi' - \Pi)V_0 + \mathcal{D}_0\Pi V, \quad (1.71)$$

или, умножая на $\mathcal{D}_0^{-1} = -\Delta/4\pi$, получаем

$$\Delta V = -4\pi[\epsilon_0(\mathbf{r}) + (\Pi' - \Pi)V_0 + \Pi V]. \quad (1.72)$$

Поскольку мы ввели наблюдаемый заряд e , поляризационный оператор Π должен быть регуляризован, т. е. выражение ΠV означает

$$\Pi_{\text{рег}}V = \int \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \frac{1}{6} \int \Pi^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 d\mathbf{r}' \cdot \Delta V, \quad (1.73)$$

где Π^0 — поляризационный оператор без внешнего поля. Формула (1.73) аналогична известному выражению в импульсном представлении

$$\Pi_{\text{рег}}(k^2) = \Pi(k^2) - k^2 (d\Pi/dk^2)_{k^2=0}.$$

Переходя к координатному представлению по $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, получаем (1.73). Впрочем, перенормировка заряда может быть выполнена и непосредственно в (1.72). Для этого запишем (1.72) в виде

$$\Delta V = -4\pi e_0^2 (n_0(\mathbf{r}) + n_1(\mathbf{r})), \quad (1.72')$$

где e_0 — затравочный заряд, $n_0(\mathbf{r})$ — плотность сторонних частиц, а $n_1(\mathbf{r})$ — плотность поляризационных электронов. Наблюдаемый, т. е. перенормированный заряд, по определению, есть заряд в слабом медленно меняющемся поле. Тогда согласно (1.72)

$$e_0^2 n_1 = \Pi^0 V = \int \Pi^0(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) + \int \Pi^0(\mathbf{R}) \mathbf{R} d\mathbf{R} \cdot \nabla V + \frac{1}{6} \int \Pi^0(\mathbf{R}) \mathbf{R}^2 d\mathbf{R} \cdot \Delta V + \dots,$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Первый член равен нулю в силу калибровочной инвариантности, второй — из-за изотропии Π^0 . Переносим член с ΔV в левую часть и делим на множитель при ΔV , получаем

$$\Delta V = -4\pi e^2 n_0(\mathbf{r}), \quad e^2 = e_0^2 \left/ \left[1 + \frac{4\pi}{6} \int \Pi^0 R^2 d\mathbf{R} \right] \right.$$

Следовательно, добавляя и вычитая в правой части (1.72) величину $(4\pi/6) \int \Pi^0 R^2 d\mathbf{R}$ и переходя к заряду e вместо e_0 , получим (1.72) с оператором $\Pi_{\text{рег}}$ вместо Π . В $\Pi_{\text{рег}}$ везде вместо e_0^2 стоит e^2 . Из формулы (1.72) следует, что

$$e\rho_1 = (\Pi' - \Pi)V_0 + \Pi_{\text{рег}}V. \quad (1.74)$$

В следующем разделе будет показано, что поляризационный оператор Π в сильном электрическом поле E обладает свойством локальности, а именно

$$\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \begin{cases} \Pi^0(\mathbf{R}) & \text{при } R^2 \ll 1/(eE), \\ 0 & \text{при } R^2 \gg 1/(eE), \end{cases} \quad (1.75)$$

здесь Π^0 — поляризационный оператор без поля. Таким же свойством обладает и Π' . Аналогичные результаты получаются и в магнитном поле.

Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ заметно изменяется на длине, удовлетворяющей условию

$$l^2 \gg 1/(eE). \quad (1.76)$$

Тогда можно пренебречь изменением поля на длине $(eE)^{-1/2}$, характерной для поляризационного оператора, и, таким образом, поляризационный оператор, а следовательно, и диэлектрическая проницаемость могут вычисляться в однородном поле. Но для сильного однородного поля имеется выражение для функции Лагранжа \mathcal{L}' , полученное еще в 1936 г. (Гейзенберг, Эйлер, Вейскопф) [5, 6]

$$\mathcal{L}' = -\frac{e^2 E^2}{24\pi^2} \ln(eE), \quad \ln(eE) \gg 1, \quad (1.77)$$

из которого находим

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \mathbf{E} \ln(eE) - \frac{e^2}{24\pi^2} \mathbf{E}.$$

Диэлектрическая проницаемость с логарифмической точностью равна

$$\epsilon_{ik} = \delta_{ik} \left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln(eE) \right). \quad (1.78)$$

Таким образом, критерием применимости формул (1.77) и (1.78) является отнюдь не условие, которое предполагалось при выводе (1.77) ($E'/E \ll 1$), а условие (1.76), которое можно записать в виде

$$(E'/E)^2 \ll eE. \quad (1.76')$$

Из (1.78) и (1.68) получаем

$$\epsilon p_1 = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln(eE) \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{\mathbf{E}}{E} \nabla E. \quad (1.79)$$

Выражение (1.77) получено в первом порядке по e^2 . Между тем, как видно из (1.78), разложение идет по степеням величины $e^2 \ln(eE)$, которая на малых расстояниях от точечного заряда (см. ниже) делается порядка единицы. Для получения более общих результатов следует вернуться к выражению (1.74). При дальнейших вычислениях будем отбрасывать слагаемые, не содержащие в качестве множителя $\ln(eE) \gg 1$.

Прежде всего, упростим выражение (1.74). При условии (1.76) в первом члене (1.73) можно разложить $V(r')$ в ряд около точки r и ограничиться первым не исчезающим членом. Получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{reg}} V &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) R_i R_k d\mathbf{R} - \frac{\delta_{ik}}{3} \int \Pi^0(\mathbf{R}) R^2 d\mathbf{R} \right\} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Здесь использованы равенства

$$\int \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = 0, \quad \int \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \mathbf{R} d\mathbf{R} = 0.$$

Первое следует из калибровочной инвариантности, второе — из симметрии $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ относительно перестановки $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$. Тензор в фигурной скобке (1.80) можно привести к главным осям ($z \parallel \mathbf{E}$). Обозначая $\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$

и $\zeta^2 = (z - z')^2$, получим вместо (1.80)

$$\Pi_{\text{reg}} V = \frac{1}{4} \int (\Pi - \Pi^0) \rho^2 d\mathbf{R} \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \int \Pi \left(\zeta^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\mathbf{R} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (1.81)$$

В силу изотропии Π^0 имеем $\int \Pi^0 (\zeta^2 - \rho^2/2) d\mathbf{R} = 0$, поэтому из (1.75) следует, что коэффициент при $\partial^2 V / \partial z^2$ во втором слагаемом (1.81) так же, как и во втором слагаемом (1.79) не содержат в качестве множителя $\ln(eE)$.

Аналогично этому, используя (1.75), убеждаемся в том, что с логарифмической точностью коэффициент при ΔV в (1.81) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int (\Pi - \Pi^0) \rho^2 d\mathbf{R} &\simeq -\frac{1}{4} \int_{R^2 > 1/(eE)} \Pi^0 \rho^2 d\mathbf{R} = \\ &= -\frac{1}{6} \int_{R^2 > 1/(eE)} \Pi^0 R^2 d\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Область интегрирования с $R^2 \sim 1/(eE)$ вносит вклад, не содержащий $\ln(eE)$. Наконец, по тем же причинам первое слагаемое в (1.74) также не содержит $\ln(eE)$. Ниже эти утверждения будут обсуждены более подробно.

Таким образом, из (1.81), (1.82) и (1.74) с логарифмической точностью следует

$$e\rho_1 = -\frac{1}{6} \int_{R^2 > 1/(eE)} \Pi^0 R^2 d\mathbf{R} \cdot \Delta V - \int \Pi \left(\zeta^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) d\mathbf{R} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Сравнивая это выражение с (1.68), находим, что тензор диэлектрической проницаемости сводится к единичному тензору и равен

$$\varepsilon_{ik} = \left(1 - \frac{4\pi}{6} \int_{R^2 > 1/(eE)} \Pi^0 R^2 d\mathbf{R} \right) \delta_{ik}. \quad (1.83)$$

Поскольку при получении (1.83) отбрасывались члены, не содержащие $\ln(eE)$, т. е. члены $\sim e^2$, это выражение справедливо при условии $\varepsilon_{ik} \gg e^2$.

Локализация функций Грина в сильных полях. В этом разделе будет доказано, что в сильных полях функция

Грина частицы $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ локализуется, а именно начинает быстро осциллировать при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = R^2 \gg 1/(eE)$. Это свойство функций Грина очень существенно для получения асимптотического поведения электродинамических величин на малых расстояниях и, как нам кажется, может привести к устранению расходимостей. Мы будем предполагать для простоты, что внешнее поле имеет частоту $\omega_0 \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. Так как существенной для всех вычислений окажется частота функции Грина $\omega \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, то можно считать поле статическим.

Напишем уравнение для функции Грина в смешанном представлении, т. е. в пространственном по пространственным координатам и в фурье-представлении по $t - t'$

$$G = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega).$$

В этом представлении функция Грина имеет наиболее простой вид. Кроме того, используем тот факт, что при достаточно большой энергии ($\omega \gg 1$) спиновые эффекты несущественны и все результаты можно получать, пользуясь уравнением Клейна — Гордона — Фока вместо уравнения Дирака (см. 1.3). Уравнение для функции Грина бозе-частицы в электрическом поле имеет вид

$$\Delta G + [(\omega - V)^2 - 1]G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.84)$$

Функция Грина свободной частицы

$$G_0 = -\exp[i(\omega^2 - 1)^{1/2}R]/4\pi R. \quad (1.85)$$

Выбор знака «плюс» в показателе экспоненты заменяет условия обхода особых точек в импульсном представлении.

Для $\omega \gg 1$ функция G_0 быстро осциллирует при $R \gg 1/\omega$. Рассмотрим G при $R \ll l$, где l — длина существенного изменения поля. Тогда в (1.84) можно заменить $V(\mathbf{r})$ на

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}') + \frac{dV}{d\mathbf{r}'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = eE\xi.$$

Мы отсчитываем потенциал $V(\mathbf{r})$ от точки \mathbf{r}' , и задача сводится к определению функции Грина в однородном поле. Как мы покажем, в функции Грина существенны расстояния $R^2 \leq 1/(eE)$, и условие $R^2 \ll l^2$ эквивалентно

условию (1.76) (или (1.76')), которое выполняется в интересующем нас случае достаточно сильных полей. Решение уравнения (1.84) в однородном поле сводится к решению уравнения Шредингера для осцилляторного потенциала и определяется функциями параболического цилиндра. Это решение дано в Приложении. Здесь мы ограничимся простой оценкой существенных расстояний, которой достаточно для вычисления поляризованного оператора с логарифмической точностью. При нашем выборе места отсчета потенциала $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависит от разностного вектора \mathbf{R} , а вектор \mathbf{r} входит только как параметр за счет зависимости $E(\mathbf{r})$.

Из (1.84) следует, что при условии $eER \ll \omega$ функция $G(R)$ переходит в $G_0(R)$. Но, как видно из (1.84) и из дальнейшего интегрирования по ω , существенные ω определяются соотношением $\omega \lesssim R^{-1}$. Поэтому получаем

$$G(R) \rightarrow G_0(R), \quad R^2 \ll 1/(eE). \quad (1.86)$$

С другой стороны, при $\omega \ll eE\rho$, $eE\xi$ из (1.84) следует, что G_0 сильно осциллирует при $R^2 \gg 1/(eE)$, т. е. $\bar{G} \rightarrow 0$ при $R^2 \gg 1/(eE)$, где черта означает усреднение по интервалу ΔR

$$1/(eE) \ll (\Delta R)^2 \ll R^2.$$

Из решения уравнения (1.84) при $V = eE\xi$ следует

$$G \rightarrow -\exp\{iCR^2eE\}/4\pi R, \quad R^2 \gg 1/(eE),$$

где C — число порядка единицы, что подтверждает качественную оценку.

Так как G в дальнейшем входит в интегралы от плавных функций по R , то практически можно положить

$$G(R) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R^2 \gg 1/(eE). \quad (1.87)$$

Для пояснения этого важного утверждения рассмотрим G в квазиклассическом приближении:

$$G \sim \exp\{i(S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}'))\},$$

где функция действия S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 = (\omega - V)^2 - 1. \quad (1.88)$$

Показатель экспоненты будет минимальным, если есть классическая траектория, соединяющая точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' .

Покажем, что классическая траектория существует только при условии $\omega \gg eER$ и, следовательно, в обратном случае разность $S(\mathbf{r}) - S(\mathbf{r}')$ велика и функция Грина сильно осциллирует. Обозначим поперечный импульс $\frac{\partial S}{\partial \rho} = \kappa$. Тогда, пренебрегая единицей в правой части (1.88), получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 = (\omega - V)^2 - \kappa^2. \quad (1.89)$$

Классическая функция действия получается из (1.89) с дополнительным условием

$$\frac{\partial S(\xi, \kappa)}{\partial \kappa} = 0. \quad (1.90)$$

Так как нас интересуют $\omega \gtrsim eE\xi$, то для оценки можно пренебречь слагаемым V^2 в правой части (1.89) и задача сводится к классической задаче о движении частицы с энергией ω^2 в поле тяжести с ускорением $g = eE\omega$. Рассмотрим точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' , лежащие на одной высоте ($\xi = 0$, $\rho = R$). Тогда из формулы для дальности полета в поле тяжести получаем

$$\rho = \frac{\omega^2 \sin 2\varphi}{2g} = \frac{\omega^2 \sin 2\varphi}{2\omega eE},$$

откуда следует, что

$$\omega > eEr.$$

При $\rho = 0$, $R = \xi$ получаем условие

$$\omega^2 > g\xi = eE\omega\xi.$$

Итак, условие существования классической траектории, соединяющей точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' , есть

$$\omega > eER.$$

Заметим, что в квазиклассическом приближении с помощью уравнений (1.89) и (1.90) функция Грина может быть найдена для произвольного $V(\mathbf{r})$ без ограничения

(1.76). Критерий применимости квазиклассики $dp^{-1}/d\xi \ll 1$ в нашем случае имеет вид

$$\frac{d(\omega - V)^{-1}}{d\xi} = \frac{V'}{(\omega - V)^2} \sim \frac{eE}{\omega^2} \sim eER^2 \ll 1,$$

между тем как существенные R определяются условием

$$R^2 eE \leq 1.$$

Тем не менее, можно ожидать, что квазиклассическое приближение даст, как это обычно бывает [42], хорошую количественную оценку.

Итак, функция Грина G обладает свойствами локальности (1.86) и (1.87). Из (1.89) и (1.90) можно получить оценку характерных R , пригодную и в том случае, когда в какой-либо области E резко меняется, а именно

$$\omega > |V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}')| = e \left| \int_{r'}^r E(\xi) d\xi \right|.$$

Вместе с условием $\omega < 1/R$ получаем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \begin{cases} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}) & \text{при } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll |V(\mathbf{r}') - V(\mathbf{r})|^{-1}, \\ 0 & \text{при } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg |V(\mathbf{r}') - V(\mathbf{r})|^{-1}. \end{cases} \quad (1.91)$$

Поляризационный оператор в координатном представлении. Найдем сначала поляризационный оператор в отсутствие поля.

В наинизшем приближении по e^2 имеем

$$\Pi^0(r-r', \omega) = \begin{array}{c} \omega - \omega_1 \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \omega_1 \end{array} = e^2 \int \Gamma_0^i G_{ii}(r-r', \omega - \omega_1) \Gamma_0^j G_{jj}(r-r', \omega_1) \frac{d\omega_1}{2\pi i} \quad (1.92)$$

Поскольку нас интересует случай статического электрического поля ($\omega \ll \omega_1$), достаточно ограничиться вычислением Π_{44}^0 . Поэтому в качестве вершины Γ_0 следует взять матрицу γ_0 , если вычисление ведется с помощью дираковских функций Грина. Как мы уже упоминали, при вычислении с помощью функций Грина бозе-частиц получается результат, отличающийся только множи-

телем 4 (см. приложение). В этом случае в качестве вершины, как обычно, следует взять четвертую компоненту разности импульсов частиц в графике (1.92), т. е. $\Gamma_0 = 2\omega_1 - \omega$. Пренебрегая ω и используя (1.85), получим при $R \ll 1$

$$\begin{aligned} \Pi^0(R) &= 4 \times 4e^2 \int G_0^2(R, \omega_1) \omega_1^2 \frac{d\omega_1}{2\pi i} = \\ &= \frac{e^2}{2\pi^3 R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2i|\omega_1|R) \omega_1^2 d\omega_1. \end{aligned}$$

Для сходимости интегралов следует считать, что R имеет малую положительную мнимую добавку. Тогда, опуская интеграл по бесконечной полуокружности в верхней полуплоскости ω_1 и проводя разрез по мнимой положительной оси, получим

$$\Pi^0(R) = \frac{e^2}{\pi^3 R^2} \int_0^{\infty} e^{-2R\xi} \xi^2 d\xi = \frac{e^2}{4\pi^3 R^5}. \quad (1.93)$$

Выражение (1.93) справедливо при $R \ll 1$; при $R \gg 1$ будет $\Pi^0 \sim e^{-2R}$. Подставляя (1.93) в формулу (1.83), получаем

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} \left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln(eE) \right),$$

т. е. в точности выражение (1.78), полученное из функции Лагранжа (1.77).

Покажем, что поляризационный оператор в поле действительно удовлетворяет соотношениям (1.75), которые были использованы нами при получении выражения (1.83) для диэлектрической проницаемости. В первом порядке по e^2 справедливость этих соотношений сразу же следует из локальности функций Грина в поле. Действительно,

$$\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \omega) = 4 \times 4e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \omega_1) G(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \omega - \omega_1) \omega_1^2 \frac{d\omega_1}{2\pi i}$$

и, следовательно, (1.86) и (1.87) приводят к (1.75). Не-

трудно убедиться, что свойства (1.75) сохраняются в любом порядке по e^2 .

Рассмотрим в виде примера график



Жирные линии означают, что функции Грина взяты с учетом поля. Легко видеть, что в интеграле по r_1 и r_2 существенны только те области интегрирования, в которых все разности координат меньше, чем $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В этом легко убедиться также и в импульсном представлении, которое наверно более привычно читателям. В импульсном представлении существенны только импульсы внутренних линий $p_{\text{int}} \geq p_R$, где p_R — фурье-образ R . Поэтому, если $R^2 \ll 1/(eE)$, то для всех внутренних линий также $R_{\text{int}}^2 \ll 1/(eE)$ и по (1.86) все функции Грина заменяются на свободные, следовательно,

$$\Pi(\mathbf{r}, R) \rightarrow \Pi^0(R), \quad R^2 \ll 1/(eE).$$

В обратном случае, когда $R^2 \gg 1/(eE)$, обязательно имеются по крайней мере две функции Грина с расстояниями $R_{\text{int}}^2 \gg 1/(eE)$ и по (1.87)

$$\Pi(\mathbf{r}, R) \rightarrow 0, \quad R^2 \gg 1/(eE).$$

Можно использовать и более общие условия для R из (1.91).

Введем логарифмическую переменную $\xi = \ln r^{-2}$. Величина

$$\chi = \frac{4\pi}{6} \int_r^1 \Pi^0 R^3 dR$$

может быть представлена в виде

$$\chi = \frac{e^2}{3\pi} \int_0^\xi d\xi \varphi(\xi). \quad (1.94)$$

В первом порядке по e^2 функция $\varphi(\xi) = 1$.

Диэлектрическая проницаемость, согласно (1.83) имеет вид

$$\varepsilon = 1 - \chi(\ln(eE)). \quad (1.95)$$

Выражение (1.95) определяет поляризуемость во внешнем поле во всех порядках по e^2 . Нужно, однако, помнить, что (1.95) получено в логарифмическом приближении. Поэтому это выражение делается неточным в областях, где $1 - \chi \sim e^2$. В силу перенормируемости квантовой электродинамики [37] (простое изложение см. в [42]) функция $\varphi(\xi)$ зависит от ξ только через величину $e^2(\xi) = e^2(1 - \chi(\xi))^{-1}$, определяющую взаимодействие электронов на расстояниях $\sim r = e^{-\xi/2}$. При малых $e^2(\xi)$ выражение (1.95) имеет вид

$$\varepsilon(\xi) = 1 - \frac{e^2}{3\pi} \int_0^{\xi} (1 + C_0 e^2(\xi)) d\xi, \quad C_0 \sim 1.$$

Таким образом (1.78) получается из (1.95) при условии $1 - \frac{e^2}{3\pi} \xi \gg e^2 \ln \frac{1}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \xi}$ или иначе $1 - \frac{e^2}{3\pi} \xi \gg e^2 \ln \frac{1}{e^2}$.

Искажение кулоновского поля на малых расстояниях. Полученное выше выражение для диэлектрической проницаемости позволяет решить задачу о распределении плотности заряда вблизи ядра малого радиуса. Представим электрическое поле в точке r в виде

$$eE = Q(r)/r^2.$$

Тогда $Q(r)$ есть умноженный на e заряд внутри сферы радиуса r . Пусть наблюдаемый заряд ядра, т. е. заряд на больших расстояниях, есть Ze , или иначе

$$Q(r) \rightarrow Ze^2, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.96)$$

На малых расстояниях экранирующий заряд вакуума уменьшается, и $Q(r) \gg Ze^2$. Нас будут интересовать расстояния, где $Q(r) \gg 1$. Тогда характерная длина $R_c^2 = 1/(eE)$ удовлетворяет условию локальности (1.76)

$$R_c^2/r^2 = 1/Q(r) \ll 1 \quad (1.97)$$

и изменением поля на длине R_0 можно пренебречь. Задача сводится к задаче об однородном поле.

Из формулы (1.95) для ε в однородном поле получаем в области, где нет внешних зарядов (вне ядра),

$$D = \varepsilon E = E[1 - \chi(\ln(eE))] = C_1/r^2. \quad (1.98)$$

Константа C_1 определяется из условия (1.96) при $r \rightarrow \infty$, где $\chi \rightarrow 0$. В результате находим

$$eE = \frac{Ze^2}{r^2 [1 - \chi(\ln(eE))]}, \quad (1.99)$$

где $\chi(\xi)$ дается формулой (1.94) и $\ln(eE) = \xi + \ln Q(\xi)$.

Формула (1.99) определяет поле вне ядра. Предположим для простоты, что ядро имеет заряд, распределенный по поверхности радиуса R_0 . Тогда для $r < R_0$ имеем $E = 0$, т. е. решение найдено для всех r . Истинный заряд ядра Z_0 связан с наблюдаемым Z соотношением

$$Z = Z_0 \left[1 - \chi \left(\ln \frac{Z_0 e^2}{R_0^2} \right) \right]. \quad (1.100)$$

Для $Q(\xi)$ из (1.99) находим

$$Q(\xi) = Z \frac{e^2}{1 - \chi(\eta)} = Ze^2(\eta); \quad \eta = \xi + \ln Q. \quad (1.101)$$

Формулы (1.99) и (1.100) перестают быть правильными при малых R_0 , когда $[1 - \chi(\ln(Z_0 e^2 R_0^{-2}))]/e^2$ приближается к единице. В следующем разделе рассматривается случай произвольно малых R_0 .

При R_0^2 , удовлетворяющих условию

$$1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{Z_0 e^2}{R_0^2} \gg e^2,$$

из (1.94) и (1.100) получаем

$$Z_0 \left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{Z_0 e^2}{R_0^2} \right) = Z. \quad (1.100')$$

На больших r

$$\chi(\ln(eE)) \rightarrow \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{Q(r)}{r^2},$$

и (1.99) дает

$$eE = \frac{Ze^2}{r^2} \left[1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{Q(r)}{r^2} \right]^{-1} \approx \frac{Ze^2}{r^2} \left(1 + \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{Q(r)}{r^2} \right). \quad (1.99')$$

Это выражение отличается от известной формулы, описывающей искажение кулоновского взаимодействия [37] только тем, что под логарифмом стоит $Q(r)$ вместо единицы. Можно получить простую интерполяционную формулу, заменяя под знаком логарифма $Q(r)$ на $1 + Q(r)$. Тогда выражение (1.99') будет иметь правильный предел при $Q \ll 1$. Для ядер с радиусом $R_0 = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1,1 \cdot 10^{-13}$ см, имеем $Q(r) \approx Ze^2$ и формула (1.99') с $Q(r)$, замененным на $1 + Q(r)$, заметно отличается от известной только при $Z > 137$.

Влияние электронной конденсации. Выражение (1.101) получено без учета электронной конденсации. При малых r , когда $Q(r) \gg 1$, следует решать уравнение для потенциала в диэлектрической среде в присутствии свободных зарядов. Роль свободных зарядов играют электроны конденсата. Получаем следующее уравнение для определения потенциала

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi e^2 \frac{|V|^3}{3\pi^2}. \quad (1.102)$$

Удобнее получить уравнение для величины Q_1 , близкой к заряду Q . Определим Q_1 соотношением

$$V = -\frac{Q_1}{r}.$$

Величина dV/dr согласно теореме Гаусса связана с зарядом Q

$$\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{r^2} = \frac{Q_1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{dQ_1}{dr}.$$

Для упрощения уравнения (1.102) введем переменную $\zeta = \ln \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$\frac{d}{d\zeta} (\varepsilon Q) = \frac{2e^2}{3\pi} Q^3, \quad (1.103)$$

причем $\varepsilon = 1 - \frac{e^2}{3\pi} (\zeta + \ln Q)$ и

$$Q = Q_1 + 2 \frac{dQ_1}{d\zeta}. \quad (1.104)$$

Можно найти решение (1.103) при условии $\frac{dQ_1/d\xi}{Q_1} \ll 1$. Тогда $Q_1 \simeq Q$. Находим, обозначая $\varepsilon Q = u$,

$$\frac{du}{u^3} = \frac{2e^2 d\xi}{3\pi \varepsilon^3}.$$

Считая Q в выражении для ε константой (что законно при нашем условии $\frac{dQ/d\xi}{Q} \ll 1$), получим

$$\frac{1}{Q^2} = -2 + C_1^2 \varepsilon^2.$$

При достаточно большом значении $|\varepsilon|$ это соотношение должно приводить к выражению предыдущего раздела

$$Q \rightarrow \frac{Ze^2}{\varepsilon}.$$

Таким образом получаем

$$Q^2 = \frac{(Ze^2)^2}{\varepsilon^2 - 2(Ze^2)^2}. \quad (1.105)$$

Нетрудно убедиться, что условие $\frac{dQ/d\xi}{Q} \ll 1$ означает

$$\frac{e^2}{3\pi} \frac{1}{2(\varepsilon - \sqrt{2}Ze^2)} \ll 1.$$

Таким образом можно пользоваться выражением (1.105) вплоть до

$$\varepsilon - \sqrt{2}Ze^2 \sim e^2/6\pi,$$

что соответствует $Q^2 < 3\pi Z/\sqrt{2}$.

При этом величина $\varepsilon \approx \sqrt{2}Ze^2$, т. е. при $Z \gg 1$ эффективный заряд электрона $e^2(\xi) = e^2/\varepsilon \ll 1$ и, следовательно, можно пользоваться простым выражением для ε , не содержащим следующих электродинамических поправок. Для выяснения вопроса о распределении заряда вблизи ядра со стремящимся к нулю радиусом необходимо иметь решение уравнения (1.103) по другую сторону полюса выражения (1.105).

Таким образом, электронная конденсация оказывает существенное влияние на взаимодействие заряженных частиц на сверхмалых расстояниях, и может привести к

более глубокому пониманию или к устранению электродинамических расходимостей.

Приложение к I. 4. *Функция Грина и поляризационный оператор в координатном представлении.* Функция Грина свободной частицы со спином нуль при $x^2 \ll 1$ в координатном представлении имеет вид

$$G^{(0)}(x) = \int \frac{e^{ipx}}{p^2} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = -\frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2}.$$

Для частиц со спином $1/2$

$$G^{(1/2)}(x) = \int \frac{\widehat{p}}{p^2} e^{ipx} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = -i\gamma_\nu \frac{\partial G^{(0)}}{\partial x_\nu} = -\frac{\widehat{x}}{2\pi^2 x^4}.$$

В смешанном представлении получаем выражение, использованное выше

$$G^{(0)}(R, \omega) = \int G^{(0)}(R, t) e^{i\omega t} dt = -\frac{1}{4\pi R} e^{i|\omega|R}.$$

Поляризационный оператор в первом порядке по e^2 для спина $1/2$ равен

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1/2)}(x) = e^2 \text{Sp} \frac{\gamma_\mu \widehat{x} \gamma_\nu \widehat{x}}{4\pi^4 x^8} = \frac{e^2 (2x_\mu x_\nu - x^2 \delta_{\mu\nu})}{\pi^4 x^8}.$$

Нетрудно убедиться, что $\Pi_{\mu\nu}^{(1/2)}(x)$, в отличие от импульсного представления, имеет калибровочно-инвариантный вид

$$\frac{\partial \Pi_{\mu\nu}^{(1/2)}}{\partial x_\nu} = 0.$$

В случае частиц со спином нуль вершины равны $2p_\mu - k_\mu$ и $2p_\nu - k_\nu$ и фурье-преобразованием $\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(k)$ легко получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(0)} &= 2 \{G^{(0)}(x) \partial_\mu \partial_\nu G^{(0)}(x) - \partial_\mu G^{(0)}(x) \partial_\nu G^{(0)}(x)\} e^2 = \\ &= \frac{e^2}{4\pi^4} \frac{2x_\mu x_\nu - x^2 \delta_{\mu\nu}}{x^8} \end{aligned}$$

т. е. опять калибровочно-инвариантное выражение, отличающееся множителем 4 от поляризационного оператора для частиц со спином $1/2$.

В смешанном представлении

$$\Pi_{44}^{(0)} = \frac{e^2}{4\pi^4} \int \frac{(t^2 + R^2) e^{i\omega t}}{(t+R)^4 (t-R)^4} dt = \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{1}{R^5}, \quad \omega \rightarrow 0,$$

что совпадает с выражением, полученным в тексте.

Функция Грина в однородном электрическом поле. Рассмотрим функцию Грина уравнения

$$\Delta \Psi + (\omega - eEz)^2 \Psi = 0$$

в двух предельных случаях $R^2 eE \ll 1$ и $R^2 eE \gg 1$ ($R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$).

После подстановки

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} e^{i\kappa\rho} G_\kappa(z, z'),$$

где $\rho = \{x - x', y - y'\}$ и замены переменной $t = (eE)^{1/2} z - \omega / (eE)^{1/2}$ уравнение для функции Грина приобретает вид уравнения параболического цилиндра

$$\frac{d^2 G_\kappa}{dt^2} + (t^2 - \lambda) G_\kappa = \delta(t - t'), \quad \lambda = \frac{\kappa^2}{eE}. \quad (\text{II.1})$$

Свойства соответствующего однородного уравнения подробно исследованы в [48]. Решение (II.1) может быть записано через два независимых решения однородного уравнения

$$G_\kappa(t, t') = f_1(t_{>}) f_2(t_{<}) / 2i, \quad (\text{II.2})$$

где

$$t_{\geq} = 1/2(t + t') \pm 1/2|t - t'|,$$

$$f_{1,2} = (1 \mp i)^{1/2 \pm i\lambda/2} \mathcal{D}_{-1/2 \mp i\lambda/2}((1 \mp i)t) \simeq t^{-1/2} \exp\{\pm 1/2 i(t^2 - \lambda \ln t)\}, \quad t > |\lambda|.$$

$\mathcal{D}_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра. Таким образом,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa J_0(\kappa\rho) \kappa G_\kappa(z, z') = \\ &= \frac{2^{1/2}}{4\pi i (eE)^{1/2}} \int_0^\infty d\kappa J_0(\kappa\rho) \kappa e^{\pi\lambda/4} \mathcal{D}_{-1/2 - i\lambda/2}[(1 - i)t_{>}] \times \\ &\quad \times \mathcal{D}_{-1/2 + i\lambda/2}[(1 + i)t_{<}], \end{aligned}$$

где J_0 — функция Бесселя. В последнем интеграле из-за множителя $e^{\pm i\lambda/4}$ в функциях \mathcal{D} существенны большие λ . Кроме того, нас будут интересовать $t^2 \gg 1$ (при $R^2 eE \gg 1$, $t^2 \gg 1$, так как в уравнении (П.1) $z \sim R$, а в случае $R^2 eE \ll 1$, t^2 велико из-за слагаемого ω^2/eE).

Итак, необходима асимптотика функции параболического цилиндра $\mathcal{D}_p(z)$ при $|p| \gg 1$ и $|z| \gg 1$. В нашем случае эта асимптотика такова [48]

$$D_{-1/2 \pm i\lambda/2}((1 \pm i)t) = 2^{-1/4 \pm i\lambda/4} \left(\pm \frac{i\lambda}{4} \right)^{\pm i\lambda/4} e^{\mp i\pi/8 \mp i\lambda/4} \frac{e^{\mp i\xi}}{(t^2 - \lambda)^{1/4}},$$

$$\xi = \frac{t}{2} (t^2 - \lambda)^{1/2} - \frac{\lambda}{4} \ln \frac{[t + (t^2 - \lambda)^{1/2}]^2}{\lambda}.$$

Подставляя в (П.2), получим для $G_\kappa(t, t')$

$$G_\kappa(t, t') = -\frac{1}{2i} \frac{\exp\{i(\xi(t_>) - \xi(t_<))\}}{(t^2 - \lambda)^{1/4} (t'^2 - \lambda)^{1/4}} (eE)^{-1/2}.$$

С помощью теоремы о среднем получаем

$$G_\kappa(z, z') = -\frac{1}{2i} \frac{\exp\{i(eEt_1^2 - \kappa^2)^{1/2} |z - z'| \}}{(t^2 eE - \kappa^2)^{1/4} (t'^2 eE - \kappa^2)^{1/4}},$$

$$t_1 \in [t_>; t_<], \quad (eE)^{1/2} t_1 = eEz_1 - \omega = CeER - \omega, \quad C \sim 1,$$

или

$$G(r, r') = -\frac{\exp\{i|CR^2 eE - \omega R|\}}{4\pi R},$$

как при $R^2 eE \ll 1$, так и при $R^2 eE \gg 1$, что и подтверждает использованное в тексте свойство локальности G в сильном поле.

Глава II

КОНДЕНСАЦИЯ БОЗЕ-ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Задача о движении одного бозона теряет физический смысл в сильных полях, когда энергия образования бозонов приближается к нулю. Тогда становится необходимым учитывать возможность реального или виртуального рождения частиц, и задача делается многочастичной. Вместо одночастичного уравнения следует использовать методы квантовой теории поля, которые позволяют найти поля рождающихся или виртуальных частиц. Энергия одной частицы при таком подходе определяется как разность между энергией поля в состоянии с квантовыми числами одной частицы и энергией вакуума.

Ниже выясняются условия неустойчивости одночастичной задачи для случая скалярного и электрического внешних полей, и определяется величина критического поля.

Дается решение задачи в квантовой теории поля для бозонов со взаимодействием $H' \sim \lambda\phi^4$, $\lambda > 0$ в произвольной потенциальной яме. Показано, что в сильных внешних полях бозоны образуют экранирующее поле такое, что эффективное поле, состоящее из внешнего и экранирующего, не доходит до критического значения. Эти результаты понадобятся для выяснения квантовой природы конденсатного поля в конечной системе (как мы увидим, только в достаточно большой системе конденсатное поле может считаться классическим).

Особенно существенно для дальнейшего выяснение возможной неустойчивости пионного поля в нуклонной среде, рассматриваемой как некое внешнее поле. На примере простейшей модели выясняется механизм π -конденсации в нуклонной среде.

II.1. Бозоны в скалярном и электрическом полях

Найдено условие неустойчивости одночастичной задачи для бозонов, движущихся в скалярном и электрическом полях. Решается задача о нахождении бозонного поля во внешних полях, превышающих критическое значение. Рассматривается конденсация бозонов в сильных скалярном и электрическом полях.

Неустойчивость одночастичной задачи. Найдем сначала для нескольких простейших случаев критические параметры внешнего поля, при которых наступает неустойчивость одночастичной задачи.

Бозе-частицы описываются уравнением Клейна — Гордона — Фока (КГФ). В отсутствие внешнего поля это уравнение имеет вид

$$\Delta \Psi + [\omega^2 - 1] \Psi = 0. \quad (2.1)$$

Для состояний с определенным импульсом имеем $\omega = \pm \sqrt{1 + k^2}$. Положительный знак корня соответствует обычному релятивистскому соотношению между энергией и импульсом частицы. Отрицательный знак соответствует энергии античастицы, взятой со знаком минус. Таким образом, уравнение (2.1) описывает одновременно поведение частиц и античастиц.

В простейшем случае статического поля $U(r)$ имеем

$$\Delta \Psi + (\omega^2 - 1 - U) \Psi = 0. \quad (2.2)$$

Скалярное поле добавляется к скалярной величине — квадрату массы ($=1$). Заменой обозначений $\omega^2 - 1 = 2E$, $U = 2V$ можно записать уравнение (2.2) в форме уравнения Шредингера

$$\Delta \Psi + 2[E - V] \Psi = 0.$$

Однако следует помнить, что уравнение (2.2) в отличие от обычного уравнения Шредингера описывает сразу 2 типа частиц — частицу и античастицу.

Скалярное поле U отличается от потенциала V уравнения Шредингера множителем $2mc^2$ (т. е. множителем 2 в наших единицах). Умножая (2.2) на Ψ и интегрируя, получим

$$\omega^2 = 1 + \bar{p}^2 + \bar{U}, \quad (2.3)$$

где $\overline{p^2}$ — среднее значение квадрата импульса, усредненное по волновым функциям рассматриваемого состояния ($\overline{p^2} = \int \Psi p^2 \Psi d\mathbf{r} = \int |\nabla \Psi|^2 d\mathbf{r}$), а \overline{U} — среднее значение $U(r)$.

Если поле U имеет вид широкой прямоугольной ямы с радиусом $R \gg 1$ и глубиной $U_0 = -U$, то для основного состояния $\nabla \Psi \sim \Psi/R$ и $\overline{p^2} \sim \frac{1}{R^2}$. Для энергии имеем выражение

$$\omega^2 = 1 - U_0 + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

При $U_0 \approx 1$ внешнее поле «съедает» массу частицы и система делается неустойчивой — из вакуума могут рождаться частицы и накапливаться на рассматриваемом уровне. В случае узкой ямы ($R \ll 1$) критерий обращения ω в нуль будет по порядку величины совпадать с критерием появления связанного состояния в прямоугольной яме

$$U_0 R^2 \gtrsim 1.$$

Учитывая, что при $\omega = 0$ волновая функция вне ямы имеет вид $\Psi = C_0 \frac{e^{-r}}{r}$ (C_0 — число порядка 1), получаем из (2.3) следующую оценку

$$\omega^2 = 1 + \frac{C_1}{R} - C_2 U_0 R,$$

где C_1, C_2 — числа порядка 1. При $U_0 R^2 > \frac{C_1}{C_2} + \frac{R}{C_2}$ величина ω^2 изменяет знак. В случае прямоугольной ямы нетрудно решить задачу точно для ямы произвольного радиуса.

Кривая зависимости энергии от глубины ямы имеет вид, изображенный на рис. 7. Пунктиром отмечена ветвь идущая из -1 , которая дает со знаком минус энергии античастицы. При $U_0 = U_0^c$ кривая обрывается. При большей глубине ямы, одночастичные решения существуют только для тех уровней, частота которых $\omega_v > 0$.

В случае статического электрического поля потенциал является не скаляром, а 4-ой компонентой 4-вектора потенциала и поэтому поле должно добавляться к 4-ой

компоненте 4-вектора, т. е. к ω (4-я компонента 4-вектора энергии-импульса).

Уравнение Клейна — Гордона — Фока принимает вид

$$\Delta \Psi + [(\omega - V)^2 - 1] \Psi = 0. \quad (2.4)$$

Предполагается, что V имеет вид потенциальной ямы (и, следовательно, вид потенциального горба для античастиц). Умножая (2.4) на Ψ и интегрируя, получим квадратное уравнение

$$\omega^2 - 2\omega \bar{V} - 1 + \bar{V}^2 - \bar{p}^2 = 0,$$

откуда

$$\omega = \bar{V} \pm \sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{V}^2 - \bar{V}^2}. \quad (2.5)$$

Частице соответствует знак плюс, поскольку энергия ω при выключении поля должна переходить в энергию свободной частицы

$$\omega^+ = \bar{V} + \sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{V}^2 - \bar{V}^2}. \quad (2.5')$$

Энергия античастицы получается из этого выражения изменением знака заряда, т. е. изменением знака V

$$\omega^- = -\bar{V} + \sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{V}^2 - \bar{V}^2}. \quad (2.5'')$$

Таким образом, вторая ветвь выражения (2.5) дает со знаком минус энергию античастицы. Можно показать, что для достаточно глубокой потенциальной ямы подкоренное выражение обращается в нуль. Мы ограничимся тем, что приведем кривые энергии частицы и античастицы как функции параметра ζ , пропорционального глубине ямы (рис. 8). При значении $\zeta = \zeta_0$ обе ветви (2.5) сливаются: $\omega^+ + \omega^- = 0$ и вакуум делается неустойчивым по отношению к рождению пар.

Поразительно, что для достаточно глубокой потенциальной ямы ($\zeta > \zeta_1$) связанное состояние ($\omega < 1$) возникает не только для частиц (для которых V имеет вид потен-

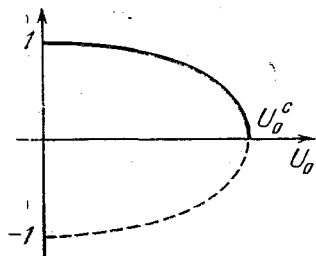


Рис. 7. Зависимость энергии 1s-уровня скалярной частицы в скалярном поле от параметра, пропорционального глубине ямы.

циальной ямы), но и для античастиц (для которых потенциал — V соответствует отталкиванию). Формальная причина этого легко выясняется, если записать (2.4) в форме уравнения Шредингера, обозначив

$$\omega^2 - 1 = 2E, \quad -V^2 + 2\omega V = 2U, \quad (2.6)$$

тогда уравнение (2.4) принимает вид

$$\Delta\Psi + 2(E - U)\Psi = 0.$$

Как видно из (2.6), эффективный «потенциал» уравнения Шредингера при любом знаке заряда содержит слагаемое $-1/2V^2$, соответствующее притяжению. (Величина U может быть названа потенциалом только условно, поскольку она зависит от E).

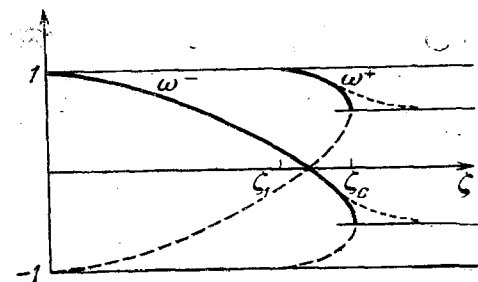


Рис. 8. Зависимость энергии 1s-уровня скалярной частицы в электрическом поле от параметра, пропорционального глубине ямы. Кривая ω^- соответствует частицам, для которых $V < 0$, кривая ω^+ — частицам противоположного знака заряда.

При достаточной глубине ямы первое слагаемое в U , соответствующее притяжению делается более существенным, чем второе, и возникает связанное состояние также и при $V > 0$ (античастица).

Нахождение поля бозонов. Как должна решаться задача о движении бозонов в сильном внешнем поле после наступления неустойчивости?

Прежде всего выясним, как неустойчивость одночастичной задачи проявляется в теории поля. Рассмотрим сначала случай скалярных бозонов в скалярном внешнем поле.

Пусть бозоны описываются полем ϕ . Найдем функцию Лагранжа $L = \int \mathcal{L} d\tau$ бозонного поля ϕ в присутствии внешнего поля U . Плотность \mathcal{L} функции Лагранжа определяется так, чтобы из требования минимальности действия $S = \int L dt = \int \mathcal{L} d\tau dt$ для ϕ получалось уравнение (2.2). Это, как легко видеть, соответствует функции

(2.2). Это, как легко видеть, соответствует функции

Лагранжа \mathcal{L}_0 , равной

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - (1 + U)\varphi^2). \quad (2.7)$$

Энергия поля определяется из \mathcal{L} с помощью соотношения

$$H = \int \left\{ \dot{\varphi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \right\} d\mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Для энергии мезонного поля из (2.7) и (2.8) получаем

$$H_0 = \int \frac{\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + (1 + U)\varphi^2}{2} d\mathbf{r}. \quad (2.9)$$

Задача нахождения поля φ и возможных значений энергии системы чрезвычайно упрощается, если учесть, что главный вклад в поле φ вносят процессы рождения и уничтожения частиц на «опасном» уровне, т. е. на том уровне, энергия которого проходит через нуль.

Можно убедиться, что при малой энергии «опасного» состояния влияние остальных состояний вносит малые поправки. Если оставить только опасное состояние Ψ , то координатная зависимость поля $\varphi(r)$ тем самым известна, и оператор $\hat{\varphi}(r)$ можно записать в виде

$$\hat{\varphi}(r) = \hat{q}\Psi(r), \quad \int |\Psi|^2 d\mathbf{r} = 1. \quad (2.10)$$

Как мы сейчас увидим, задача об определении возможных значений энергии системы сведется к задаче об осцилляторе, в котором q будет играть роль координаты, а квантовое число n (номер возбуждения осциллятора) будет определять число бозонов в рассматриваемом состоянии.

Подставляя (2.10) в (2.9) и используя уравнение (2.2), получаем

$$H_0 = \frac{\dot{q}^2 + \omega^2 q^2}{2},$$

где ω^2 определяется выражением (2.3).

Таким образом, задача свелась к задаче об осцилляторе с классической частотой ω , равной энергии «опасного»

состояния. Когда ω^2 проходит через нуль, задача теряет смысл — не существует стационарных решений с конечными значениями q — мезонное поле неограниченно велико. Для того, чтобы задача приобрела смысл и при $\omega^2 < 0$, следует ввести взаимодействие между бозонами. Ниже мы будем учитывать это взаимодействие в достаточно реалистической форме. Начнем с рассмотрения простейшей модели взаимодействия, добавив к энергии поля слагаемое

$$\int \frac{\lambda \varphi^4}{4} d\mathbf{r}, \quad \lambda > 0.$$

Плотность функции Лагранжа принимает вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda \varphi^4}{4}. \quad (2.11)$$

Для энергии поля получим

$$H = \frac{\dot{q}^2 + \omega^2 q^2}{2} + \frac{\lambda_1 q^4}{4}, \quad (2.12)$$

где

$$\lambda_1 = \lambda \int |\Psi|^4 d\mathbf{r} > 0. \quad (2.12')$$

Итак, решение задачи в теории поля сводится к нахождению собственных функций и собственных значений ангармонического осциллятора. Эта задача может быть решена либо численно, либо в квазиклассическом приближении, которое формально применимо для высоких возбужденных состояний, но дает результаты с хорошей точностью даже для основного и первого возбужденного состояний [10].

Особенный интерес представляет область больших отрицательных значений ω^2 . В этом случае потенциальная энергия осциллятора $U(q) = -\frac{|\omega^2|}{2} q^2 + \lambda_1 \frac{q^4}{4}$ имеет вид, изображенный на рис. 9. Первые уровни энергии соответствуют движению вблизи q_0 и $-q_0$. Положение минимумов определяется условием $dU/dq = 0$, откуда

$$q_0^2 = \frac{|\omega^2|}{\lambda_1}. \quad (2.13)$$

Разложение $U(q)$ вблизи $q = q_0$ имеет вид

$$U(q) \simeq -\frac{\omega^4}{4\lambda_1} + |\omega^2|(q - q_0)^2. \quad (2.14)$$

Собственные функции разбиваются на два типа: симметричные и антисимметричные относительно замены знака q . Если барьер, разделяющий два минимума, мало проникаем, то энергии симметричных состояний будут ниже энергий антисимметричных состояний на малую величину, пропорциональную проникаемости барьера. Решение внутри каждой из ям соответствует задаче об осцилляторе с частотой $\omega_1 = \sqrt{2}|\omega|$.

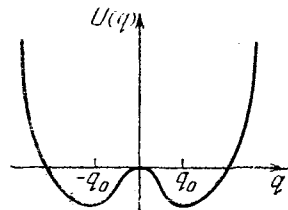


Рис. 9. Кривая потенциальной энергии ангармонического осциллятора.

Если пренебречь экспоненциально малыми добавками, то энергия основного состояния, как это следует из разложения (2.14), равна

$$E_0 \simeq -\frac{\omega^4}{4\lambda_1} + \frac{1}{2}V\sqrt{2}|\omega|, \quad (2.15)$$

а энергия состояния с квантовым числом n' осциллятора в одной из ям

$$E_{n'} = -\frac{\omega^4}{4\lambda_1} + \left(n' + \frac{1}{2}\right)V\sqrt{2}|\omega|. \quad (2.16)$$

Каждый из уровней этого осциллятора имеет «тонкую структуру», соответствующую симметричному и антисимметричному состояниям.

Основному состоянию соответствует симметричная функция, которая вблизи минимума каждой из ям переходит в основное состояние осциллятора.

Следующее состояние, отвечающее одномезонному возбуждению, дается соответствующей антисимметричной функцией. Энергия одномезонного возбуждения определяется выражением [10]

$$\tilde{\omega}_1 = E(1) - E(0) = \frac{|\omega|V\sqrt{2}}{\pi} \exp\left[-\frac{\pi|\omega|^3}{4\lambda_1}\right]. \quad (2.17)$$

В качестве аргумента у E берется номер возбуждения n .

Нетрудно убедиться, что первое антисимметричное состояние переходит в гармоническом пределе ($\omega^2 > 0$) $\omega^3 \gg \lambda_1$ в первое возбужденное состояние гармонического осциллятора, т. е. должно интерпретироваться, как одно-мезонное возбуждение.

Рассмотрим двухмезонное возбуждение. В гармонической области $\omega^3 \gg \lambda_1$ оно соответствует второму уровню гармонического осциллятора с энергией $\tilde{\omega}_2 = 2\omega$. При адиабатическом изменении параметров задачи это состояние останется вторым возбужденным состоянием, т. е. в закритической области будет соответствовать симметричному состоянию с $n' = 1$, где n' — номер состояния в отдельной яме. Его энергия в закритической области равна

$$\tilde{\omega}_2 = E(2) - E(0) = \sqrt{2} |\omega|.$$

Ход $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ как функция параметра ζ , пропорционального глубине ямы, дается на рис. 10. Как видно из рис. 10, энергия $\tilde{\omega}_1$ стремится к нулю в закритической области, тогда как энергия $\tilde{\omega}_2$ сначала падает, а затем растет с увеличением ζ .

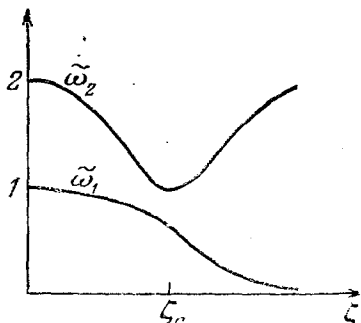


Рис. 10. Энергия однобозонного $\tilde{\omega}_1$ и двухбозонного $\tilde{\omega}_2$ возбуждений.

Конденсация в скалярном поле. Наиболее существенный из полученных результатов состоит в том, что перестройка вакуума бозонов в достаточно сильном поле (когда $\omega^2 < 0$) приводит к понижению энергии системы.

Рассмотрим большую однородную систему. Тогда из (2.12') имеем

$$\lambda_1 = \lambda/\Omega,$$

где Ω — объем системы ($|\Psi|^2 = \frac{1}{\Omega}$). Согласно (2.15) энергия, выигрываемая от перестройки вакуума, пропорциональна объему системы. Из (2.13) следует, что возникает «конденсатное» поле

$$\langle \varphi^2 \rangle = \langle q^2 \rangle |\Psi|^2 = \frac{|\omega^2|}{\lambda}. \quad (2.18)$$

Плотность энергии «конденсата» равна

$$\mathcal{E}_\pi = -\frac{\omega^4}{4\lambda}. \quad (2.19)$$

Энергия понижается с ростом $|\omega^2|$, т. е. по мере углубления ямы.

Заметим, что среднее значение поля φ в основном состоянии равно нулю

$$\langle \varphi \rangle = \langle q \rangle \Psi = 0.$$

Так как первое возбужденное состояние имеет энергию, экспоненциально стремящуюся к нулю при возрастании объема системы (см. (2.17)), то в больших системах возникает вырождение. Смешивая основное и первое возбужденное состояния, можно получить состояния со средним полем $\langle \varphi \rangle$, отличным от нуля

$$\langle \varphi_1 \rangle \simeq q_0 \Psi, \quad \langle \varphi_2 \rangle \simeq -q_0 \Psi.$$

Состояние «1» соответствует нахождению системы в правой яме нашего осциллятора, а состояние «2» — в левой.

Конденсация в электрическом поле. Рассмотрим поляризацию вакуума заряженных бозонов в статическом электрическом поле. Лагранжиан системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(\frac{\partial}{\partial t} - iV \right) \hat{\varphi}^+ \left(\frac{\partial}{\partial t} + iV \right) \hat{\varphi} - \nabla \hat{\varphi}^+ \nabla \hat{\varphi} - \\ & - \mu^2 \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi} - \frac{\lambda}{2} (\hat{\varphi}^+ \hat{\varphi})^2, \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Мы предположили простейшее взаимодействие между бозонами. Можно показать, что устойчивость вакуума обеспечивается и чисто электрическим взаимодействием, однако естественно предполагать, что адронное взаимодействие более существенно, т. е. $\lambda \gg e^2$. Из характера выводов будет ясно, что изменение вида адронного взаимодействия не влияет на качественные результаты.

Решение задачи чрезвычайно упрощается, если учесть, что главный вклад в поле φ вносят «опасные» состояния, энергия которых стремится к нулю. Запишем $\hat{\varphi}$ в виде

$$\hat{\varphi} = \hat{q} \Psi / \sqrt{2} \quad (2.21)$$

и найдем уравнение для Ψ из точного уравнения для

операторов $\hat{\varphi}$

$$\Delta \hat{\varphi} + \left[- \left(\frac{\partial}{\partial t} + iV \right)^2 - \mu^2 \right] \hat{\varphi} - \lambda \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi}^2 = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение для Ψ получим из условия

$$\frac{q_{01}\Psi}{\sqrt{2}} = \hat{\varphi}_{01}, \quad i \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} \right)_{01} = ([H, \hat{\varphi}]_{01}) = \tilde{\omega}_1 \hat{\varphi}_{01}.$$

Матричные элементы берутся по точным состояниям — «вакуум» и «вакуум плюс одна частица». Тогда Ψ есть точная (нормированная) функция, а $\tilde{\omega}_1$ — точная энергия одной частицы с учетом взаимодействия. Уравнение для Ψ следует из (2.22)

$$\Delta \Psi + [(\tilde{\omega}_1 - V)^2 - \mu^2] \Psi - \lambda \Psi^3 \frac{(q^+ q^2)_{01}}{2q_{01}} = 0. \quad (2.23)$$

Для того, чтобы задача замкнулась, остается диагонализировать гамильтониан, зависящий от q и q^+ , который мы сейчас получим. После этого не составляет труда найти матричные элементы $(q^+ q^2)_{01}$ и q_{01} .

Подставляя выражение (2.21) в плотность лагранжевой функции (2.20) и интегрируя по объему, находим

$$\begin{aligned} L &= \int \mathcal{L} d\mathbf{r} = \\ &= -(\mu^2 + \overline{p^2} - \overline{V^2}) \frac{q^+ q}{2} + \frac{\dot{q}^+ \dot{q}}{2} + \frac{i\overline{V}(\dot{q}^+ q - q^+ \dot{q})}{2} + \frac{\lambda_1 (q^+ q)^2}{4}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где черта означает усреднение по Ψ

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2} \int \Psi^4 d\mathbf{r}, \quad \overline{p^2} = \int (\nabla \Psi)^2 d\mathbf{r}. \quad (2.24')$$

Введем вместо q и q^+ эрмитовские операторы q_1, q_2

$$q = q_1 + iq_2, \quad q^+ = q_1 - iq_2,$$

обобщенные импульсы, соответствующие q_1 и q_2 , будут

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - \overline{V} q_2, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 + \overline{V} q_1.$$

Находим гамильтониан

$$\begin{aligned}
 H &= \dot{q}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - L = \\
 &= \frac{p_1^2 + p_2^2 + \omega_0^2 (q_1^2 + q_2^2)}{2} + \frac{\lambda_1}{4} (q_1^2 + q_2^2)^2 + \bar{V} (p_1 q_2 - p_2 q_1),
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

здесь

$$\omega_0^2 = \bar{V}^2 - \bar{V}^2 + \mu^2 + \bar{p}^2.
 \tag{2.26}$$

Таким образом, задача свелась к задаче о двухмерном ангармоническом осцилляторе с потенциальной энергией, не зависящей от угла. Устойчивость задачи обеспечивается тем, что $\lambda > 0$. Энергия такого осциллятора зависит от двух квантовых чисел: радиального квантового числа n и момента m относительно оси, перпендикулярной плоскости осциллятора. Нетрудно убедиться из выражения для плотности частиц $\rho = \left\{ \frac{1}{i} (q^+ \dot{q} - \dot{q}^+ q) - 2V q^+ q \right\} |\Psi|^2$, что

$$m = p_1 q_2 - p_2 q_1 = \int \rho d\mathbf{r} = -Z\pi,$$

т. е. момент $-m$ имеет смысл полного заряда бозонов. Радиальное квантовое число n имеет смысл числа пар.

Энергия $E(n, m)$ определяется через собственную энергию уравнения для радиальной функции осциллятора

$$\chi'' + 2 \left[E'(n, m) - U(\xi) - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2\xi^2} \right] \chi = 0,$$

где $\xi = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$, $U(\xi) = \frac{\omega_0^2 \xi^2}{2} + \lambda_1 \frac{\xi^4}{4}$, а $E'(n, m)$ связано с $E(n, m)$ соотношением

$$E(n, m) = \bar{V}m + E'(n, m).
 \tag{2.27}$$

В квазиклассическом приближении, которое, как можно видеть на примере скалярной ямы, дает хорошую точность даже для основного состояния, имеем

$$\int_0^{\xi_1} \left\{ 2 \left[E'(n, m) - U(\xi) - \frac{m^2}{2\xi^2} \right] \right\}^{1/2} d\xi = (n + 1/2) \pi.
 \tag{2.28}$$

В центробежном потенциале учтена поправка Лангера (см., например, [42]).

Рассмотрим сначала случай слабо заряженной системы ($m \sim 1$) и предположим, что величина ω_0^2 (см. (2.26)), при некотором значении параметра ζ , пропорционального глубине ямы, обращается в нуль. Такой случай осуществляется в прямоугольной яме, а также для других потенциалов, достаточно быстро убывающих при $r \rightarrow \infty$ [49].

Изобразим ω_0^2 вблизи такой критической точки в виде

$$\omega_0^2 = -\gamma(\zeta - \zeta_c)$$

и предположим, что $|\omega_0^2| \gg \lambda_1^{2/3}$. Тогда потенциальная энергия $U(\xi)$ имеет минимум при

$$\xi^2 = \xi_0^2 = -\frac{\omega_0^2}{\lambda_1}, \quad (2.29)$$

и задача, как и выше, сводится к задаче о гармоническом осцилляторе с частотой $\omega' = \sqrt{2|\omega_0^2|}$. Для $E(n, m)$ нетрудно получить

$$\begin{aligned} E(n, m) &= \bar{V}m + U(\xi_0) + \frac{m^2}{2\xi_0^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2|\omega_0^2|} = \\ &= -\frac{\omega_0^4}{4\lambda_1} + \frac{m^2}{2|\omega_0^2|} \lambda_1 + (n + 1/2) \sqrt{2|\omega_0^2|} + \bar{V}m. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Отсюда следует, что энергии частиц для двух знаков заряда равны

$$\tilde{\omega}^+ = E(0, -1) - E(0, 0) = -\bar{V} + \frac{\lambda_1}{2|\omega_0^2|},$$

$$\tilde{\omega}^- = E(0, 1) - E(0, 0) = \bar{V} + \frac{\lambda_1}{2|\omega_0^2|}.$$

Ход энергии $\tilde{\omega}^+$ и $\tilde{\omega}^-$ как функции ζ , изображен на рис. 8. Энергия пары не зависит от $Z_\pi = -m$ и растет по мере удаления от критической точки

$$E(1, m) - E(0, m) = \sqrt{2|\omega_0^2|}.$$

Как и в случае скалярного поля возникла конденсация.

Энергия системы уменьшается в результате перестройки основного состояния. В большой системе согласно (2.24')

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2\Omega} \text{ и понижение плотности энергии равно } \mathcal{E}_\pi = -\frac{\omega_0^4}{2\lambda}.$$

Заметим, что слагаемые (2.30), содержащие m , существенно влияют на энергию системы только, если заряд Z_π пропорционален объему системы. Конденсатное поле в однородной системе ($|\Psi|^2 = \frac{1}{\Omega}$) определяется соотношением

$$\langle \varphi^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle \frac{|\Psi|^2}{2} = \frac{|\omega_0^2|}{\lambda}. \quad (2.31)$$

При получении этих результатов был зафиксирован заряд системы. Физически это соответствует выключению β -распада. Если система существует достаточно долгое время, она в результате β -распадов будет заряжаться до тех пор, пока не приобретет заряд, соответствующий минимуму энергии.

Предположим, что электрическое поле создается положительным зарядом. Тогда энергетически выгодно образовать в системе конденсат π^- -мезонов. При этом имеются две возможности:

1) позитроны и нейтрино, рождающиеся вместе с π^- , уходят из системы. Такой случай осуществляется при конденсации в поле сверхзаряженных ядер (см. VII.1);

2) система достаточно велика, чтобы выполнялось условие электронейтральности. Тогда позитроны остаются и заполняют ферми-сферу так, чтобы их заряд компенсировал заряд π^- -мезонов. Такой случай мог бы осуществляться в сверхзаряженных звездах, если бы они существовали («протонная звезда»).

Рассмотрим сначала первый случай. На основании (2.27) и (2.28) энергия системы как функция ξ и Z_π запишется в виде

$$E(\xi, Z_\pi) = -\bar{V}Z_\pi + \frac{Z_\pi^2}{2\xi^2} + \frac{\omega_0^2 \xi^2}{2} + \frac{\lambda_1 \xi^4}{4}. \quad (2.32)$$

Здесь $\bar{V} < 0$. Мы пренебрегли в этом выражении слагаемым $\xi^2/2$, которое дает малый вклад ($\sim V|\omega^2|$), не содержащий объема системы.

Минимизируя $E(\xi, Z_\pi)$ по ξ^2 и Z_π , получаем

$$\xi^2 = \frac{\bar{V}^2 - \omega_0^2}{\lambda_1} > 0, \quad (2.33)$$

$$Z_\pi = \bar{V} \frac{\bar{V}^2 - \omega_0^2}{\lambda_1}, \quad (2.34)$$

$$E_\pi = -\frac{(\bar{V}^2 - \omega_0^2)^2}{4\lambda_1}. \quad (2.35)$$

Как видно из этих выражений, в большой системе ξ^2 , Z_π и E_π растут пропорционально объему системы. Такая «заряженная» конденсация происходит независимо от того, меняет ли знак величина ω_0^2 . Для широкого класса потенциалов (когда ω_0^2 не проходит через нуль ни при какой глубине ямы) ω_0^2 имеет оценку

$$\omega_0^2 = 1 + \bar{V}^2 - \bar{V}^2 + \bar{p}^2 \simeq 1 + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Для таких систем критическое поле «заряженного» конденсата $\bar{V}_c \simeq 1$.

В большой системе ω_0^2 , если и проходит через нуль, то при $\bar{V} \geq 2$, а при $\bar{V} = 1$ величина $\omega_0^2 \simeq 1$ (такой результат легко получить в широкой потенциальной яме с плоским дном и произвольной формой «диффузного» края). Поэтому выражение для критического поля «заряженного» конденсата во всех случаях соответствует $\bar{V}_c \simeq 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда позитроны остаются в системе и компенсируют заряд π^- . Решение этой задачи поможет пониманию аналогичной задачи в нейтронной звезде, где происходит конденсация π^+ -возбуждений, заряд которых компенсируется электронами.

В этом случае к энергии $E_\pi(\xi, Z_\pi)$ следует добавить энергию позитронов, имеющих плотность $n_e = n_\pi$. Плотность энергии позитронов имеет вид

$$\mathcal{E}_e = \frac{\mu_e^4}{4\pi^2} = \frac{3}{4} n_\pi \mu_e,$$

где μ_e — химический потенциал позитронов, равный

$\mu_e = (3\pi^2 n_\pi)^{1/3}$. Полная плотность энергии равна согласно (2.24'), (2.32)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\pi + \mathcal{E}_e = \bar{V} n_\pi + \frac{n_\pi^2}{2\eta^2} + \frac{\omega_0^2 \eta^2}{2} + \frac{\lambda}{8} \eta^4 + \frac{3}{4} n_\pi \mu_e, \quad (2.36)$$

где $\eta^2 = \xi^2/\Omega$.

Минимизируя (2.36) по n_π и η , получим

$$\eta^2 = 2 \frac{(\bar{V} + \mu_e)^2 - \omega_0^2}{\lambda} > 0, \quad (2.37)$$

$$n_\pi = -2 \frac{(\bar{V} + \mu_e) [(\bar{V} + \mu_e)^2 - \omega_0^2]}{\lambda}, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{[(\bar{V} + \mu_e)^2 - \omega_0^2]^2}{2\lambda} - \frac{1}{4} n_\pi \mu_e. \quad (2.39)$$

Соотношение (2.38) представляет собой уравнение для определения μ_e и, тем самым, n_π .

Удобно ввести частоты ω^+ и ω^- . Согласно (2.5'), (2.5'')

$$\bar{V} = \frac{\omega^- - \omega^+}{2}, \quad \omega_0 = \frac{\omega^+ + \omega^-}{2}.$$

Условие конденсации $\eta^2 > 0$ принимает вид

$$\eta^2 = -2 \frac{(\omega^+ - \mu_e)(\omega^- + \mu_e)}{\lambda} > 0.$$

Таким образом конденсация соответствует отрицательному значению $\omega^- + \mu_e$. Вблизи точки перехода ($|\omega^-|$, $\mu_e \ll \omega^+$) уравнение (2.38) запишется в виде

$$\mu_e = -\omega^- \left(1 - \frac{\lambda}{3\pi^2} \frac{(\omega^-)^2}{(\omega^+)^2} \right).$$

Критическое поле V_c соответствует условию $V_c = -\omega_0$, $\omega^- = \bar{V} + \omega_0$. Выражение (2.39) принимает вид

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4} n_\pi \mu_e + O((V - V_c)^6) \simeq -\frac{1}{12\pi^2} (\bar{V} - \bar{V}_c)^4. \quad (2.40)$$

В этом случае энергия конденсации лимитируется не отталкиванием между пионами, а принципом Паули для позитронов.

Эти же результаты можно получить из Функции Лагранжа для классического пионного и электрического полей

$$\mathcal{L} = [(\omega - V)^2 - 1] |\Phi|^2 - \frac{\lambda |\Phi|^4}{2} + \frac{(\nabla V)^2}{8\pi e^2} + n_p V + \frac{V^4}{12\pi^2}.$$

Последнее слагаемое представляет собой кинетическую энергию электронов. Вариация Φ и V дает полную систему уравнений, определяющих поля.

II.2. Пионное поле в нуклонной среде

Обсуждается неустойчивость пионного поля в нуклонной среде в «газовом» приближении. Дается простейшая модель π -конденсации в нуклонной среде, позволяющая выяснить физический смысл конденсации. Это рассмотрение облегчает переход к реалистическому описанию движения пионов в нуклонной среде, изложенному в следующих главах.

Неустойчивость пионного поля. Может ли нуклонная среда играть роль некоего внешнего поля для пионов и возникает ли при этом неустойчивость пионного поля?

В [10] для ответа на эти вопросы было рассмотрено влияние нуклонов на пионы в газовом приближении. Частота мезонов находилась по следующей формуле:

$$\omega^2 = 1 + k^2 - 4\pi n F(k, \omega) = 1 + k^2 + n A(k, \omega), \quad (2.41)$$

где n — плотность нуклонов, а F — амплитуда рассеяния вперед мезонов с импульсом k и энергией ω на нуклоне среды (пока опускаем изотопические значки). $A(k, \omega) = -4\pi F(k, \omega)$ — амплитуда рассеяния в «энергетической» нормировке.

Выражение (2.41) несложно получить, если рассмотреть уравнение Клейна — Гордона — Фока в поле независимых, достаточно далеко друг от друга удаленных рассеивающих центров, предполагая, что задача рассеяния на отдельном центре решена, т. е. что известна амплитуда $F(k, \omega)$.

При $k = 0$ взаимодействие нуклонов с пионами мало ($F \ll 1$), поэтому неустойчивость может возникнуть только, если $F(k, \omega) > 0$ для какого-либо $k \gtrsim 1$. Так например, та часть рассеяния, которая обусловлена N^* -резонан-

сом, действительно обладает таким свойством — знак амплитуды рассеяния F соответствует притяжению между пионами и нуклонами ($F > 0$, $k \gtrsim 1$).

Более того, при достаточно большой плотности n , когда главную роль, как мы увидим ниже, играет резонансное рассеяние пионов на нуклонах, формула (2.41), использованная в [10], достаточно хорошо передает реальное изменение энергии пионов.

Согласно (2.41) при достаточно большой плотности n величина $\omega^2(k)$ для какого-либо $k := k_0$ может обратиться в нуль. Тогда возникнет неустойчивость пионного поля, описанная выше, и для решения задачи необходимо ввести взаимодействие между пионами. Это взаимодействие в нуклонной среде сильно отличается от пион-пионного взаимодействия в пустоте и ниже будет рассмотрено более подробно. В качестве простой модели можно использовать взаимодействие $\mathcal{H}' = \lambda \phi^4/4$, введенное выше, рассматривая λ как феноменологическую константу, которая ниже будет оценена.

Нетрудно убедиться (см. ниже), что при $N = Z$ нуклонная среда одинаково воздействует на π^+ , π^- , π^0 -мезоны, т. е. поле, создаваемое средой, есть изотопический скаляр. Согласно (2.41) проблема сводится к решенной выше задаче о неустойчивости в скалярном поле. В случае нейтронной звезды ($Z \ll N$) условие неустойчивости следует выяснять в отдельности для каждого вида пионных возбуждений. Ниже подробно рассматриваются все возможные типы неустойчивости пионного поля в нуклонной среде с произвольным отношением Z/N .

Простейшая модель пионной конденсации в нуклонной среде. Для пояснения физической идеи π -конденсации достаточно ограничиться случаем изотопически скалярного нуклонного поля. Энергия в закритической области дается выражением (2.15). Слагаемое

$$E_{\pi} = -\frac{\omega^4}{4\lambda_1}$$

дает энергию, которая выигрывается благодаря «конденсации». «Конденсация» означает, что при большом значении $|\omega^2|$ средний квадрат поля в основном состоянии превышает квадрат поля нулевых колебаний. Согласно

(2.10) и (2.13) в закритической области имеем

$$\langle \varphi_0^2 \rangle \simeq |\Psi(r)|^2 q_0^2 = -\frac{\omega^2}{\lambda_1} |\Psi(r)|^2.$$

При этом среднее значение поля φ равно нулю.

В случае системы большого размера $R \gg 1$ (случай, который нас будет в дальнейшем интересовать) квадрат частоты ω_k^2 делается отрицательной величиной для большого числа собственных значений k , прилегающих к значению k_0 , для которого $|\omega_k|^2$ максимально. Минимуму энергии системы, как это следует из (2.15), соответствует состояние, при котором «конденсация» произошла в состоянии k_0 ($|\omega_{k_0}|^2$ максимально). При этом все остальные степени свободы с учетом поля φ_0 будут иметь положительные частоты. Действительно, гамильтониан для осциллятора с частотой ω_k ($k \neq k_0$) после замены $\varphi \rightarrow \varphi_k + \varphi_0$ примет вид (с точностью до квадратичных членов)

$$H_k = \frac{1}{2} \int \{ \dot{\varphi}_k^2 + \omega_k^2 \varphi_k^2 + 3\lambda \varphi_k^2 \langle \varphi_0 \rangle^2 \} d\mathbf{r}. \quad (2.42)$$

Покажем, что третье положительное слагаемое больше по абсолютной величине, чем второе отрицательное слагаемое. Таким образом, конденсация в состоянии k_0 стабилизирует все остальные состояния, для которых $\omega_k^2 < 0$. Величина дополнительного слагаемого в (2.42) зависит от вида $\Psi(\mathbf{r})$. Для однородной неограниченной системы наиболее общий вид $\Psi(\mathbf{r})$ для вещественного поля, соответствующего волновому вектору k_0 , будет

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \sin \mathbf{k}_{\lambda} \mathbf{r}, \quad k_{\lambda}^2 = k_0^2.$$

В нашем простейшем случае нетрудно убедиться, что минимуму энергии E_{π} соответствует случай, когда имеется только одно слагаемое в этой сумме. В реальной постановке вопроса выяснение геометрической и изотопической структуры $\Psi(\mathbf{r})$ представляет собой сложную задачу, к которой мы еще вернемся в главе IV.

Используя выражение для φ_0 и связь λ_1 с λ (2.12') при $\Psi = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \sin k_0 x$, находим, что результирующая

частота колебания с волновым вектором $k \neq k_0$ равна

$$\tilde{\omega}_k^2 = 2|\omega_{k_0}^2| - |\omega_k^2| > 0.$$

Таким образом, в закритической области все колебания устойчивы.

Как видно из (2.15), энергия E_π , выигрываемая при π -конденсации, пропорциональна объему системы, поскольку

$$\lambda_1 = \lambda \int \Psi^4 d\mathbf{r} \sim \frac{\lambda}{\Omega}.$$

При $\Psi_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \sin k_0 x$ имеем $\lambda_1 = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\Omega}$ и энергия конденсации равна

$$E_\pi = -\frac{\omega_{k_0}^4}{6\lambda} \Omega.$$

Вблизи критической плотности, когда $\omega_{k_0}^2$ проходит через нуль, имеем

$$\omega_{k_0}^2 = \eta(n_c - n), \quad \eta > 0.$$

Величина η легко находится из (2.41). Обозначая

$$\frac{\eta^2}{3\lambda} = \beta,$$

получим для плотности энергии \mathcal{E}_π выражение

$$\mathcal{E}_\pi = -\frac{\beta(n - n_c)^2}{2} \theta(n - n_c), \quad (2.43)$$

θ -функция поставлена, чтобы отразить тот факт, что $\mathcal{E}_\pi = 0$ при $n < n_c$.

Оценки, которые ниже приведены, дают $\beta \sim 1$.

Глава III

ПИОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ЯДЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕ

В этой главе подробно исследуются процессы, определяющие изменение энергии пиона в нуклонной среде с произвольным соотношением Z/N . Развивается последовательный реалистический метод расчета энергетического спектра π^+ -, π^- -, π^0 -мезонов в ядерном веществе, использующий результаты задачи многих тел. Метод расчета основан на выделении процессов, существенно зависящих от 4-импульса пиона, и на замене медленно изменяющихся величин константами подобно тому, как это делается в теории ферми-жидкости. Эти константы должны быть взяты из опыта, либо оценены с помощью теории ядерного вещества. Обсуждается влияние пионной степени свободы на взаимодействие нуклонов в ядерном веществе и получены уравнения теории ферми-жидкости, учитывающие роль однопионного обмена. Дается схема возможной теории нуклонной материи с учетом пионной степени свободы.

Исследуется энергетический спектр π^+ -, π^- -, π^0 -мезонов в среде с $N \simeq Z$ (ядро) и в случае $Z \ll N$ (нейтронная звезда). Показано, что, наряду с пионной ветвью возбуждений, которая переходит в свободную пионную энергию при выключении πN -взаимодействия, в системе возникают дополнительные ветви спектра с квантовыми числами пиона, которые следует интерпретировать как связанные состояния нуклона и нуклонной дырки (спин-звуковые ветви). В случае $N \simeq Z$, начиная с некоторой плотности, в этих ветвях одновременно для π^+ , π^- , π^0 возникает область значений волнового вектора k , при которой $\omega^2(k) < 0$, что означает неустойчивость нуклон-пионной системы относительно рождения пар π_s^+ -, π_s^- - и π_s^0 -мезонов. (Значок s означает спин-звуковое возбуждение с квантовыми числами пиона).

В случае системы $Z \ll N$ сначала возникает ветвь π_s^+ с энергией $\omega_s^+ < -\varepsilon_F^{(n)}$, благодаря чему появляется неустойчивость к реакции $p \rightarrow n + \pi_s^+$. В результате все протоны среды переходят в нейтроны и связанное состояние pn . При большей плотности возникает неустойчивость относительно рождения $\pi^- \pi_s^+$ -пар и π^0 -мезонов.

Выясняется природа неустойчивости, обнаруженной в модели Сойера, Скалапино [14]. Показано, что эта неустойчивость имеет ту же природу, что и неустойчивость по отношению к рождению пар (π^-, π_s^+) , возникающая в более реалистической модели [12, 15].

III.1. Нахождение поляризационного оператора пионов в нуклонной среде

В этом разделе анализируется возможность применения методов задачи многих тел для изучения возбуждений с пионными квантовыми числами (пионные степени свободы). Детально исследуются все процессы, существенные для вычисления поляризационного оператора пионов. Получено выражение для поляризационного оператора с учетом нуклонных корреляций, N^* -резонанса и S -рассеяния.

Применение методов задачи многих тел. В предыдущей главе мы видели, как определяется спектр пионов в газовом приближении. Здесь эта задача рассматривается в более реалистической постановке с учетом всех существенных возбуждений среды. Энергия пиона ω как функция импульса k в однородном ядерном веществе записывается в виде

$$\omega^2 = 1 + k^2 + \Pi(k, \omega). \quad (\text{B.12})$$

Величина $\Pi(k, \omega)$ учитывает поляризацию среды.

В случае электромагнитного поля аналогичная величина $\Pi^{(\gamma)}(k, \omega)$ непосредственно связана с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(k, \omega)$, поскольку в этом случае

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\varepsilon(k, \omega)} = k^2 \left(1 + \frac{1}{k^2} \Pi^{(\gamma)}(k, \omega) \right).$$

Эта аналогия часто используется для того, чтобы получить в случае пионов формулу, напоминающую формулу

Лоренца — Лоренца [50]. При этом приходится предполагать, что амплитуда виртуального πN -рассеяния (т. е. вне массовой поверхности) δ -образна и не отличается от реальной амплитуды. Эти предположения заведомо не выполняются в ядерном веществе. Между тем, как мы увидим, существует последовательный метод нахождения поляризованного оператора, свободный от этих ограничений. Разумеется, точное вычисление поляризованного оператора в среде сильно взаимодействующих частиц — задача неразрешимая. Однако легко выделить медленно изменяющиеся величины, которые можно считать константами и определять из опыта, выражая через них другие величины, существенно изменяющиеся в интересующей нас области, подобно тому, как это делается в теории ферми-жидкости [51]. Этот метод основан на том, что все виртуальные процессы, определяющие $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$, можно разделить на 2 класса: происходящие на расстояниях, меньших или порядка $1/m_N$, и на расстояниях порядка 1 в пионных единицах. Процессы первого типа в среде с плотностью малой по сравнению с $m_N^3 \sim 300$ происходят так же как в пустоте, тогда как процессы второго типа существенно искажаются средой. Так, например, локальная вершина взаимодействия пиона с нуклоном, как можно убедиться, оценивая входящие в нее графики, определяется малыми расстояниями $r_0 \sim 1/m_\rho$, $1/m_N$ и, следовательно, константа πN -взаимодействия в среде с ядерной плотностью мало отличается от константы взаимодействия в пустоте.

Сделаем несколько замечаний о графическом методе расчета, которым мы часто будем пользоваться.

Графики или диаграммы представляют собой прежде всего удобный способ иллюстрации происходящих процессов. Им можно придать смысл количественных соотношений, считая, что каждый график описывает определенную амплитуду перехода. Тогда, согласно принципу суперпозиции, полная амплитуда перехода есть сумма всех возможных физически различных амплитуд и, кроме того, любая амплитуда может быть получена, как сумма по всем промежуточным состояниям произведений амплитуд перехода из начального состояния в промежуточное и из промежуточного в конечное, проинтегрированная по всем промежуточным моментам времени. Если вводить ампли-

туды, не зависящие от времени, то этому утверждению соответствует известная квантово-механическая формула

$$A_{01} = \sum_i \frac{B_{0i} C_{i1}}{E_0 - E_i}. \quad (3.1)$$

Любой самый сложный процесс составляется из последовательного использования нескольких простых амплитуд, которые можно раз и навсегда получить, сравнивая соответствующий элемент графика с теорией возмущений. Таким образом, графический метод в той форме, в какой мы будем им пользоваться, представляет простое использование формул обычной квантовой механики и не требует никаких дополнительных знаний. Так, например, полюсная часть амплитуды рассеяния вперед π^+ -мезона на покоящемся нейтроне может быть записана в виде

в промежуточном состоянии имеется протон с импульсом k . Согласно (3.1) эта амплитуда равна

$$A_P^{+,n} = \frac{|\Gamma|^2}{\omega + m_N - E(k)},$$

где Γ — амплитуда поглощения пиона нуклоном, ω — энергия пиона, $E(k)$ — энергия нуклона. При полюсном рассеянии π^- -мезона на нейтроне возможен только график

который соответствует тому, что сначала испускается конечный мезон, а затем поглощается начальный. Амплитуда в этом случае равна

$$A_P^{-,n} = \frac{|\Gamma|^2}{\omega + m_N - (2\omega + E(k))} = \frac{|\Gamma|^2}{-\omega + m_N - E(k)}.$$

Более сложные графики будем пояснять по мере их появления.

Диаграммы, определяющие поляризационный оператор. Перейдем к рассмотрению метода выделения существенных диаграмм и к вычислению поляризационного оператора.

Добавка к квадрату энергии пиона, вызванная средой, в газовом приближении выражается через амплитуду рассеяния на угол ноль в энергетической нормировке (см. (2.41)). Поскольку поляризационный оператор и представляет эту добавку, то в газовом приближении имеем

$$\Pi(k, \omega) = nA(k, \omega). \quad (3.2)$$

Нормировка амплитуды A определяется тем, что в борновском приближении A переходит в интеграл по объему от энергии возмущения, вызванного одним нуклоном. Для того, чтобы освободиться от газового приближения, следует ввести вместо полной плотности нуклонов функцию распределения Ферми $n(p)$ для нейтронов и протонов и учесть при вычислении A принцип Паули и взаимодействие между нуклонами в промежуточных состояниях. В результате сама амплитуда A окажется зависящей от распределения $n(p)$.

Прежде, чем приступить к вычислению $\Pi(k, \omega)$, выясним, какие процессы определяют амплитуду πN -рассеяния в пустоте. Как известно, πN -рассеяние при малых энергиях пионов $\omega \sim 1$ приближенно описывается следующими процессами:

$$A = \text{diagram 1} = \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \quad (3.3)$$

Первый из графиков соответствует одному нуклону в промежуточном состоянии («полюсное» слагаемое рассеяния). Вторая диаграмма соответствует переходу в N_{33}^* -резонанс (резонансная часть рассеяния). Как мы увидим, оба эти слагаемые дают вклад в P -рассеяние. Последнее из слагаемых (3.3) представляет собой S -рассеяние.

Наряду с вкладом от далеких резонансов по S -каналу S -рассеяние содержит, в частности, слагаемое, отвечающее обмену N^* -резонансом в u -канале. Поскольку это слагаемое обусловлено промежуточными состояниями, имеющими большие 4-импульсы, то его можно рассматривать как локальное и считать не зависящим от импульса пиона. В этом случае S -рассеяние можно изобразить точкой. По тем же причинам изображены точками и вершины $N\pi N$ и $N\pi N^*$, которые, как нетрудно убедиться, содержат 4-импульсы $\geq m_{N\pi}$ в промежуточных состояниях. Однако вклад в P -рассеяние не исчерпывается этими процессами, и, кроме того, S -рассеяние существенно изменяется при уходе с массовой поверхности. Ниже дополнительный вклад в амплитуду рассеяния от этих величин будет определен из экспериментальных данных по πN -рассеянию с использованием низкоэнергетических теорем алгебры токов, позволяющих определить изменения амплитуды при уходе с массовой поверхности.

Вершина $N\pi N$ записывается в виде (см., например, [52])

$$\Gamma(N\pi N) = f\bar{\Psi}\gamma_\nu\gamma_5\tau_\alpha\Psi\partial_\nu\varphi_\alpha, \quad (3.4)$$

где Ψ — волновая функция нуклона, γ_ν — матрица Дирака, τ_α — матрица изотопического спина нуклона, φ_α — компонента пионного поля. Поля π^+ , π^- , π^0 -мезонов связаны с φ_α соотношением

$$\varphi^\pm = \frac{\varphi_1 \pm i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^0 = \varphi_3. \quad (3.5)$$

Константа $f = g/2m_N$, где g — безразмерная константа взаимодействия; $g^2/4\pi \simeq 14,6$, в пионных единицах $m_N = 6,7$; $f \simeq 1,0$.

Для нерелятивистских нуклонов (3.4) упрощается

$$\Gamma(N\pi N) \simeq f\Psi^+\sigma_\alpha\tau_\beta\Psi\nabla_\alpha\varphi_\beta, \quad (3.6)$$

σ_α — спиновая матрица нуклона.

Как следует из (3.6), вершина пропорциональна импульсу пиона и первое слагаемое (3.3) описывает P -рассеяние. Поскольку спин N^* -изобары равен $3/2$ (резонанс N_{33}^* (1232)), второе слагаемое также соответствует P -рассеянию и его вершина тоже пропорциональна волновому вектору пиона; коэффициент пропорциональности

может быть найден достаточно точно из сечения рассеяния пионов с энергией, близкой к резонансу.

Соответственно 3-м слагаемым (3.3), определяющим амплитуду πN -рассеяния, поляризационный оператор при 4-импульсах пиона $\omega \sim 1$, $k \sim 1$, как будет показано, определяется такими же механизмами πN -рассеяния в среде. Полюсное или резонансное взаимодействие пиона с нуклонами среды можно описывать двумя способами: либо как рассеяние пиона с переходом нуклона в состояние, лежащее над границей Ферми, или в изобару, либо как рождение нуклона или изобары и появление дырки в нуклонном ферми-заполнении. Второй подход по многим причинам удобнее первого и именно он применяется в задаче многих тел и в теории ферми-жидкости, результатами которой мы будем пользоваться.

Итак, поляризационный оператор изображается суммой 3-х графиков

$$\Pi(k, \omega) = \text{---} \left(\text{---} \right) \text{---} + \text{---} \left(\text{---} \right) \text{---} + \text{---} \left(\text{---} \right) \text{---} = \Pi_R + \Pi_P + \Pi_S \quad (3.7)$$

Линия со стрелкой, направленной налево, изображает дырку, а направо — частицу. Заптрихованными треугольниками изображены вершины, учитывающие NN - и NN^* -корреляции в ядерном веществе. Выражения для этих вершин, связывающие их с константами NN - и NN^* -взаимодействий, даются ниже. Первое слагаемое, обозначенное Π_R , соответствует рождению нуклонной дырки в ферми-заполнении и изобары N_{33}^* («резонансное слагаемое»). «Полюсной» член Π_P соответствует возбуждению в среде типа частица — дырка; третье слагаемое учитывает S -рассеяние. Все остальные диаграммы, не имея частей, соединенных частицей и дыркой или дыркой и изобарой, определяются большими 4-импульсами промежуточных состояний ($\sim m_N$) и либо вносят малый вклад, либо мало отличаются от соответствующих вакуумных графиков, которые уже учтены в наблюдаемой массе пиона, либо, наконец, содержатся в эффективной массе m^* нуклона, которая использована ниже ($m^* \approx 0,9m$).

Иными словами, такие графики характеризуются пространственными размерами $\sim 1/m_N$ и мало искажаются

в нуклонной среде, где расстояние между частицами порядка $1/m_\pi$. Эти графики слабо зависят от 4-импульсов входных концов, поскольку нас интересуют 4-импульсы $\sim m_\pi$. Поэтому их можно заменить константами, которые должны быть взяты из опыта.

Как известно, эта же идея используется в теории ферми-жидкости при введении констант, определяющих взаимодействие вблизи поверхности Ферми, а также при введении эффективной массы и эффективного локального «заряда» квазичастиц во внешнем поле [51].

В виде иллюстрации оценим ошибку в массе пиона, которая возникает из-за того, что входные концы пионов в Π взяты не на массовой поверхности, а при $k^2 - m_\pi^2 = \Pi \sim m_\pi^2$. Так как вакуумная часть поляризационного оператора существенно изменяется на импульсах порядка m_N или порядка массы соответствующего резонанса, то

$$\delta m_\pi^2 \sim \frac{\delta \Pi_{\text{vac}}}{\delta k^2} (k^2 - m_\pi^2) \sim \left(\frac{m_\pi}{m_N} \right)^2 m_\pi^2.$$

Как мы видим, эта ошибка мала.

Таким образом, использование методов задачи многих тел позволяет выделить и рассчитать диаграммы, сильно изменяющиеся в интересующей нас области переменных, а остальные диаграммы заменить константами, которые берутся из опыта.

Резонансная часть поляризационного оператора. Изотопическая структура вершины $N\pi N^*$ несколько сложнее, чем в случае $N\pi N$ -взаимодействия. Рассмотрим сначала амплитуду резонансного $\pi^+\pi$ -рассеяния. Прежде всего, второе слагаемое в (3.3) нужно записать более подробно, поскольку оно состоит из двух членов

The diagram shows the amplitude $A_R^{\pi^+\pi}$ as the sum of two terms. Each term represents a resonance N^* exchange between two pions. The first term is for N^{*+} and the second is for N^{*-} . In both, a π^+ line enters from the top left and a π^+ line exits from the top right. The bottom lines are π lines. The resonance is represented by a horizontal box with a wavy line connecting the top and bottom vertices.

Обозначим матричный элемент вершины через $\sqrt{a} k$. Первое слагаемое соответствует поправке к энергии второго порядка и равно квадрату вершины, деленному

на разность энергий начального и промежуточного состояний,

$$(A_R^{\pi^+n})_1 = \frac{ak^2}{\omega - \omega_R + i\gamma_0 k^3}.$$

Здесь учтено затухание резонанса и отброшена кинетическая энергия N^* -частицы в промежуточном состоянии

$$\omega_R \simeq m_{N^*} - m_N + \frac{k_R^2}{2m_{N^*}} \simeq 2,4. \quad (3.8)$$

Знаменатель второго графического слагаемого равен

$$\omega - i\gamma_0 k^3 - [2\omega - 2i\gamma_0 k^3 + \omega_R].$$

В вершинах второго графика, как нетрудно убедиться из законов сложения изотопического момента, возникает множитель, равный $\sqrt{3}$. В результате

$$A_R^{\pi^+n} = -ak^2 \left(\frac{1}{\omega_R - \omega - i\gamma_0 k^3} + \frac{3}{\omega_R + \omega + i\gamma_0 k^3} \right). \quad (3.9)$$

Заметим, что второе слагаемое обычно опускается, поскольку при $\omega \simeq \omega_R$ оно составляет $\sim 1\%$ от первого слагаемого. Однако вдали от резонанса, когда $\omega \ll \omega_R$, его необходимо учитывать.

«Оптическая теорема» (условие унитарности) устанавливает связь между мнимой частью амплитуды рассеяния на угол нуль и соответствующим проинтегрированным по углам сечением. Из этого соотношения следует, что $a(k) = 4\pi\gamma_0(k)$. Функция $a(k)$ выбирается так, чтобы выражение (3.9) описывало наблюдаемое резонансное рассеяние. Обычно используют эмпирическое выражение (параметры взяты из [53])

$$a(k) = 4\pi \frac{0,08}{1 + 0,23k^2} = \frac{1,01}{1 + 0,23k^2}. \quad (3.10)$$

Зависимость от k^2 в этом выражении не соответствует тому, что получалось бы теоретически из формфактора $g^{*2}(k^2)$ для вершины $N\pi N^*$. Теоретически разумная оценка зависимости при малых k^2 имеет вид

$$g^{*2}(k^2) = 1 - \frac{k^2}{\Lambda^2},$$

где величина $\Lambda \sim (1 \div 2) m_N^2$. Поэтому зависимость от k^2 в эмпирической формуле (3.10) следует рассматривать как способ учета дополнительного P -рассеяния. Для того, чтобы отделить P -рассеяние, обусловленное N^* -резонансом, мы в дальнейшем используем эмпирическое значение a ($k^2 = k_R^2$), пренебрегая слабой зависимостью фактора от k^2 .

Нас будут интересовать значения $\omega < \omega_R$, $k \leq 1$, при которых в выражении (3.9) можно опустить затухание.

В результате резонансная часть поляризационного оператора π^+ -мезона в нейтронной среде принимает вид

$$\Pi_R^{\pi^+n} = - \frac{4n_n a k^2 \omega_R \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_R}\right)}{\omega_R^2 - \omega^2}. \quad (3.11)$$

Поляризационный оператор для π^- -мезона может быть найден из Π^{π^+n} , если использовать требование перекрестной симметрии. Перекрестная симметрия означает, что любая амплитуда перехода (и, в частности, поляризационный оператор) не должна изменяться, если перейти от частицы к античастице и одновременно изменить знак энергии и импульса (поглощение частицы с импульсом \mathbf{k} эквивалентно рождению античастицы с импульсом $-\mathbf{k}$). Используя, кроме того, изотопическую инвариантность, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Pi^{\pi^+n}(\omega, \mathbf{k}) &= \Pi^{\pi^-n}(-\omega, -\mathbf{k}) = \Pi^{\pi^-n}(-\omega, \mathbf{k}), \\ \Pi^{\pi^+n}(\omega, \mathbf{k}) &= \Pi^{\pi^-p}(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь использован тот факт, что поляризационный оператор является функцией k^2 . В среде с произвольным отношением Z/N в согласии с (3.11), (3.12) можно получить

$$\Pi_R^{\pi^+} = - \frac{4ak^2 \Gamma_R \omega_R}{\omega_R^2 - \omega^2} \left[n_p \left(1 + \frac{\omega}{2\omega_R}\right) + n_n \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_R}\right) \right]. \quad (3.13)$$

Мы ввели в (3.13) множитель Γ_R , учитывающий изменение вершины $N\pi N^*$, благодаря NN^* -взаимодействию в ядерном веществе. Фактор Γ_R может быть приближенно записан в виде

$$\Gamma_R = \frac{1}{1 + n\nu}, \quad (3.14)$$

где ν — константа, характеризующая NN*-взаимодействие, а $n = n_n + n_p$. Мы получим (3.14) и поясним смысл величины ν после расчета влияния NN-взаимодействия на полюсную часть поляризационного оператора. К сожалению, теоретически трудно не только оценить множитель Γ_R , но даже установить, больше он или меньше единицы (т. е. установить знак ν). Если предположить, что взаимодействие NN* того же порядка, что и NN, то при $n = n_0 = 0,5$ будет $\Gamma_R \approx 0,8 \div 0,9$. Если же NN* не содержит отталкивания на малых расстояниях, а определяется однопионным обменом, то $\Gamma_R \approx 1,1 \div 1,2$. В пользу этого предположения говорит большое сечение реакции pn ; nN^* при больших передаваемых импульсах, при которых отталкивание NN* на малых расстояниях должно было бы сказаться [54].

Заметим, что использованное нами выражение для амплитуды резонансного рассеяния при малых энергиях пионов оказывается меньше, чем полная амплитуда P -рассеяния. Это означает, что к резонансной части поляризационного оператора следует добавить вклад от далеких P -резонансов. Этот вклад можно учесть, изображая амплитуду P -рассеяния при малых энергиях пионов в виде

$$A_{RR'} = A_R + A_{R'}.$$

Для определения $A_{RR'}$ можно использовать выражение для амплитуды P -рассеяния на угол нуль, найденное в [55] из детального анализа экспериментов по πN -рассеянию,

$$A_{RR'}^s \approx - \left(0,6 + \frac{1,6}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right) \mathbf{k}\mathbf{k}', \quad A_{RR'}^a \approx 0,2\mathbf{k}\mathbf{k}',$$

где

$$A^s = \frac{1}{2} (A^{\pi^+n} + A^{\pi^-n}), \quad A^a = \frac{1}{2} (A^{\pi^+n} - A^{\pi^-n}) \quad (3.15)$$

изотопически симметричная и антисимметричная амплитуды.

Имеем при $\omega \ll \omega_R$

$$\Pi_{RR'} \approx \Pi_R - 0,6nk^2.$$

Таким образом, поправка от далеких резонансов, пренебрежимо малая при $\omega \simeq \omega_R$, оказывается весьма существенной при малых $\omega \leq 1$.

Учет S-рассеяния. Локальная часть поляризационного оператора. Поскольку амплитуда S-рассеяния δ -образна, она не должна заметно изменяться в среде и, следовательно, можно использовать формулу (2.41)

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{loc}}^{\pm} &= (n_n + n_p) \tilde{A}^{\pm} \pm (n_n - n_p) \tilde{A}^{\alpha}, \\ \Pi_{\text{loc}}^0 &= (n_n + n_p) \tilde{A}^{\beta}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь \tilde{A}^{sa} — амплитуда рассеяния в пустоте в энергетической нормировке. На массовой поверхности ($\omega^2 = 1 + k^2$) \tilde{A}^{sa} должна переходить в найденную на опыте амплитуду рассеяния. Найдем $\tilde{A}^{sa}(\omega, \mathbf{k})$ вне массовой поверхности. Из перекрестной симметрии следует, что разность амплитуд π^+n - и π^-n -рассеяний есть нечетная функция ω

$$\tilde{A}^{\alpha} = A_1 \omega + A_3 \omega^3 + \dots$$

Как следует из соображений алгебры токов разложение идет по степеням m_{π}/m_N .

Величина A_1 , найденная из рассеяния π^+ и π^- на протоне при $k \ll m_N$, слабо зависит от k и равна

$$\begin{aligned} A_1 &= -2\pi \frac{m_N + 1}{m_N} \left(F_S^{\pi^+n}(m_{\pi}) - F_S^{\pi^-n}(m_{\pi}) \right) = \\ &= -2\pi \cdot 0,21 = -1,3. \end{aligned}$$

Здесь $F_S^{\pi^+n}(m_{\pi})$ — амплитуда в обычной нормировке.

Заметим, что теоретическое значение A_1 , найденное из соображений алгебры токов [59], хорошо согласуется с этим

$$A_1 = -\frac{2f^2}{g_A^2} = -1,4, \quad g_A = 1,2.$$

Таким образом, имеем

$$\Pi_S^{\alpha} = -(n_n - n_p) \tilde{A}^{\alpha} = 1,4(n_n - n_p) \omega.$$

Для того, чтобы определить A_S^{β} — изотопически четную часть амплитуды S-рассеяния, необходимо воспользо-

зоваться результатами, полученными в алгебре токов для амплитуды πN -рассеяния вне массовой поверхности. Однако более удобно обсуждать амплитуду вообще, не выделяя S - и P -волновые части.

Обозначим входные и выходные 4-импульсы пиона и нуклона через q, q' и p, p' и введем обычные обозначения

$$s = (p + q)^2 = (p' + q')^2, \\ t = (q - q')^2, \quad u = (p - q')^2.$$

Пусть нуклон находится на массовой поверхности $p^2 = p'^2 = m^2$. Амплитуда рассеяния может рассматриваться как функция переменных

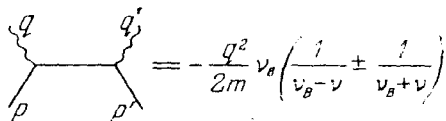
$$t, \quad v = \frac{s - u}{4m} = \omega + \frac{t}{4m}, \quad v = \frac{q^2 + q'^2}{2},$$

где ω — энергия мезона в лабораторной системе.

Согласно «условию самосогласованности» [56] амплитуда рассеяния за вычетом полюсной части должна обращаться в нуль при $q^2 = 1, q' \rightarrow 0$, т. е.

$$\tilde{A} \equiv (A - A_P) = 0 \quad \text{при} \quad t = 1, \quad v = 0, \quad v = 1/2. \quad (3.17)$$

Полюсное слагаемое A_P^{sa} легко вычисляется



$$= -\frac{q^2}{2m} v_a \left(\frac{1}{v_B - v} + \frac{1}{v_B + v} \right)$$

где

$$v_B = -\frac{q \cdot q'}{2m} = -\frac{\omega^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{2m}, \\ A_P^{sa} = \frac{f^2}{m} \omega^2 - \frac{2f^2}{m} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \quad \text{for } \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \ll \omega^2$$

Так как из A вычтено единственное быстро изменяющееся (полюсное) слагаемое, то можно ограничиться в \tilde{A} линейными по t и v членами.

В [55] амплитуда \tilde{A} при $\nu = 1$ изображается в виде (введенная в [55] величина \tilde{C} отличается знаком от \tilde{A})

$$\begin{aligned} \tilde{A}^s &= a_{00}^+ + (a_{01}^+ + a_{11}^+ \nu^2) t + (a_{10}^+ + a_{20}^+ \nu^2) \nu^2 + \alpha(\nu - 1), \\ \nu^{-1} \tilde{A}^a &= a_{00}^- + (a_{01}^- + a_{11}^- \nu^2) t + (a_{10}^- + a_{20}^- \nu^2) \nu^2. \end{aligned} \quad (3.17a)$$

Коэффициенты a_{mn}^\pm приближенно равны:

	a_{00}	a_{01}	a_{11}	a_{10}	a_{20}
\tilde{A}^s	1,5	-1,2	-0,15	-1,1	-0,2
$\nu^{-1} \tilde{A}^a$	-1,5	0,1	0	0,2	0

Значение a_{00}^- выбрано так, чтобы получалось правильное значение A^a на пороге. Выражение для \tilde{A}^s позволяет выделить вклад N^* -резонанса. Если предположить, что зависимость от $\nu^2 \simeq \omega^2$ определяется N^* -резонансом, то \tilde{A} можно изобразить в виде (при $\nu = 1$):

$$\tilde{A} = a_{00} + \left(a_{01}^{R'} + \frac{a_{01}^R}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right) t + \frac{a_{10}\omega^2}{1 - \omega^2/\omega_R^2}. \quad (3.17b)$$

Действительно, вычисление графика, отвечающего N^* -резонансу [57], приводит к выражению вида

$$\tilde{A}_R = a_R + \frac{b_R t}{1 - \omega^2/\omega_R^2} + \frac{C_R \omega^2}{1 - \omega^2/\omega_R^2}.$$

В соответствии с этим отношение коэффициентов a_{20}/a_{10} с хорошей точностью равно $1/\omega_R^2$.

Вклад резонанса в слагаемое $\sim t$ определяется из значения a_{11} и экспериментального значения длины P -рассеяния на пороге a_P^\dagger

$$a_{01}^R/\omega_R^2 = a_{11}, \quad 2 \left(a_{01}^{R'} + \frac{a_{01}^R}{1 - 1/\omega_R^2} \right) = -2,6.$$

После добавления полюсного слагаемого в P -рассеянии, равного $-2f^2/m \approx 0,3$, эта цифра соответствует экспериментальному значению $a_P^\dagger = 0,21$.

Находим

$$a_{01}^{R'} = -0,3, \quad a_{01}^R = -0,8.$$

Если бы рассеяние целиком определялось N^* -резонансом, значение a_{01}^R было бы на 40—50% больше, в согласии с тщательным анализом, проведенным в работе [58]. Сравнивая значение a_{01}^R с величиной a , введенной в амплитуду N^* -резонанса (см. (3.13)), находим

$$-4a/\omega_R = 2a_{01}^R, \quad a \simeq 0,9$$

вместо значения $a(k = k_R) = 0,5$, приведенного выше. Причина расхождения состоит в том, что простое резонансное выражение, использованное нами, благодаря большой ширине резонанса портится задолго до приближения к точке $k = k_R$.

Для нахождения константы α воспользуемся условием самосогласованности (3.17)

$$\alpha = 2(a_{00} + a'_{01}) \simeq 0,8,$$

где

$$a'_{01} = a_{01}^{R'} + a_{01}^R \simeq -1,1.$$

Выражение для S -рассеяния получится из (3.17в) заменой t на $-2k^2$. Для простоты приведем только значение A_S^s при $\omega = 0$

$$A_S^s |_{\omega=0} = 0,7 + 1,4k^2.$$

Получим выражение для входящей в поляризационный оператор амплитуды рассеяния на угол нуль ($t = 0$) без разбиения на S - и P -амплитуды. Из (3.17в) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{A}^s(t=0) = & -(a_{00} + 2a'_{01}) - 2(a_{00} + a'_{01})k^2 + \\ & + \left[2(a_{00} + a'_{01}) - a_{00} \frac{1 - 1/\omega_R^2}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right] \omega^2. \end{aligned}$$

Мы использовали тот факт, что амплитуда на пороге мала и делается еще меньше после вычитания полюсного

слагаемого ($= f^2/m = 0,15$), т. е.

$$a_{00} + \frac{a_{10}}{1 - 1/\omega_R^2} = 0.$$

Подставляя численные значения коэффициентов, имеем

$$\tilde{A}^s(t=0) = 0,7 - 0,8k^2 + \left[0,8 - \frac{1,2}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right] \omega^2.$$

Это выражение в интересующей нас области мало отличается от значения $\tilde{A}^s(t=0)$, полученного без учета дополнительного вклада в P -рассеяние [15].

Для $\tilde{A}^a(t=0)$ получаем

$$\omega^{-1} \tilde{A}^a(t=0) = -1,5 + 0,2\omega^2.$$

Полусная часть поляризационного оператора. Полусная часть поляризационного оператора без учета корреляций дается графиками

$$P_p(k, \omega) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \quad (3.18)$$

Рассмотрим сначала нейтронную среду. Для $\Pi_P^{\pi^+n}$ получаем

$$\Pi_P^{\pi^+n} = \text{diagram}$$

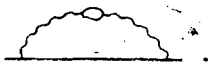
Второй из графиков (3.18) по закону сохранения заряда возможен только, если в среде есть протоны (необходимо образовать протонную дырку).

Пользуясь (3.1) и (3.6), легко находим

$$\Pi_P^{\pi^+n} = 2f^2k^2 \int \frac{n_n(p) d^3p}{\omega - E^p(p+k) + E^n(p)} \frac{2}{(2\pi)^3}. \quad (3.19)$$

Мы ограничились случаем нерелятивистских нуклонов. Формула (3.19) приобретает строгий смысл, если понимать под промежуточным состоянием не состояние

свободных нуклона и дырки, а состояния с квазичастицей и квазидыркой. Тем самым мы учтем все графики, исправляющие движение нуклона в среде, например, графики вида



Графики



где волнистая линия изображает не исправленный средой пион, уже учтены в наблюдаемой массе нуклона.

Аналогично этому графики типа



где линии соответствуют нуклону и антинуклону (а не частице и дырке) учтены в наблюдаемой массе пиона. Переход к квазичастицам усложняет зависимость $E(p)$, но в областях импульсов, не очень далеких от границы Ферми, можно характеризовать нуклонные возбуждения двумя числами: энергией Ферми и эффективной массой нуклона. В среде с $N \neq Z$ эти величины различны у нейтрона и протона. В среде с $N \simeq Z$ эти величины достаточно хорошо известны из ядерных данных. Эффективная масса нуклонной квазичастицы $m^* \simeq 0,9m$ [51], энергия Ферми определяется плотностью ядерного вещества и равна

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m^*} = \frac{(3\pi^2 n)^{2/3}}{2m^*} \simeq 45 \text{ МэВ.}$$

Для грубой оценки можно положить, что и в нейтронной среде $m^* \simeq m$, а разность химических потенциалов нейтронов и протонов при $Z \leq N$ (отвлекаясь пока от кулоновского поля) определять из расчетов ядерного

вещества [60]. Формулу (3.19) можно записать в виде

$$\Pi_P^{\pi^+n} = -4f^2k^2 \frac{m^*P_F}{2\pi^2} \Phi_1(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.20)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{m^{*2}}{2k^3 P_F} \left\{ \frac{a^2 - b^2}{2} \ln \frac{a+b}{a-b} - ab \right\},$$

$$a = \omega - \frac{k^2}{2m^*}, \quad b = kv_F; \quad (3.21)$$

при $|a| \gg b$ имеем

$$\Phi_1 = -\frac{\pi^2 n}{m^* P_F} \frac{1}{\omega - \frac{k^2}{2m^*}}. \quad (3.22)$$

Учет нуклонных корреляций. Учет взаимодействия между нуклонами приводит к тому, что следует одну из вершин каждого из графиков (3.18) заменить точной вершиной. Действительно, чтобы учесть NN-взаимодействие, следует просуммировать графики

$$\Pi = \text{bubble} + \text{bubble with shaded vertex} + \dots \equiv \text{bubble with shaded vertex}. \quad (3.23)$$

Здесь заштрихованный треугольник означает точную вершину, не содержащую частей, соединенных одной пионной линией. Уравнение для вершины \mathcal{T} в ядерном веществе подробно исследовалось в [51] как для случая системы конечного размера (ядро), так и для случая неограниченного ядерного вещества. Ограничимся здесь лишь кратким пояснением способа нахождения вершины. Для \mathcal{T}_1 можно записать символическое уравнение

$$\mathcal{T}_1 = \text{shaded triangle left} = \text{shaded triangle right} + \text{shaded triangle left + shaded bubble} = \mathcal{T}_0 \mathcal{T}_1 A. \quad (3.24)$$

Здесь \mathcal{T}_0 — «затравочная» вершина, \mathcal{F}_1 — локальное взаимодействие квазичастиц в ядерном веществе, A — амплитуда перехода квазичастицы и квазидырки (произ-

ведение функций Грина квазичастицы и квазидырки). A совпадает с выражением (3.19), деленным на квадрат затравочной вершины (т. е. на величину $2f^2k^2$). Таким образом в нашем случае на основании (3.20) A сводится к величине

$$A = - \frac{m^* p_F}{\pi^2} \Phi_1(k, \omega). \quad (3.25)$$

Локальное взаимодействие \mathcal{F}_0 записывается через безразмерные константы, которые должны быть найдены из опыта или вычислены из теории ядерной материи. Эти константы вводятся следующим способом [51]

$$\left(\frac{dn}{d\varepsilon_F} \right)_{p_F=p_0} \mathcal{F}_1 = \{f + f' \tau_1 \tau_2 + (g + g' \tau_1 \tau_2) \sigma_1 \sigma_2\} \delta(r_1 - r_2), \quad (3.26)$$

τ_1, τ_2 — изотопические, а σ_1, σ_2 — спиновые матрицы двух нуклонов, p_0 — импульс Ферми в ядре, $p_0 = 1,92$. Здесь локальное взаимодействие предполагалось δ -образным. Единственной причиной заметного отклонения от δ -образности этого взаимодействия является вклад однопионного обмена. Но по определению поляризационного оператора графики, соответствующие однопионному обмену по частично-дырочному каналу, не входят во взаимодействие, изображенное заштрихованным прямоугольником в (3.23).

При δ -образном взаимодействии уравнение (3.24) сводится к алгебраическому. Так как в нашем случае затравочная вершина согласно (3.6) пропорциональна спиновой и изоспиновой матрицам нуклона, то в уравнение (3.24) входит только спин-изоспиновое слагаемое (3.26). Используя (3.24), (3.25) и (3.26), нетрудно получить

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\mathcal{F}_0}{1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi_1(\omega, k)}. \quad (3.27)$$

Здесь $g^- = g^{nn} - g^{np} = 2g' = 1,6$. Это численное значение найдено из анализа ядерных данных по подавлению спиновой части магнитного момента в сферических и деформированных ядрах и из перенормировки гамов — теллеровских матричных элементов β -распада [57]. В среде с $Z \ll N$ соответствующая константа неизвестна и может

быть оценена только из теории ядерного вещества. Однако в случае нейтронной звезды будут существенны значения ω и k , при которых $\Phi_1 \ll 1$ и влияние корреляций не очень существенно. В качестве разумной оценки можно взять значение g^- в пустоте, которое не очень сильно отличается от значения в ядерном веществе с $N = Z$.

Выражение, аналогичное (3.27), может быть получено и для вершины Γ_R [58], введенной в (3.14). Для этого достаточно заменить в (3.24) величину A на $A^{(R)}$

$$A^{(R)} = \text{---} \text{---} = \int \frac{n(p) 2d^3p}{\omega + \epsilon^{(N)}(p) - \epsilon^{(N^*)}(p+k)} \frac{1}{(2\pi)^2} = \frac{m^* p_F}{(2\pi)^2} \Phi_1(k, \omega - \omega_R).$$

Предполагая, что $\omega_R \gg kv_F$, ω получим

$$A^{(R)} = -n/\omega_R.$$

Считая NN^* -взаимодействие δ -образным и обозначая коэффициент при $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ через v , получим

$$\Gamma_R \simeq \frac{1}{1 + n \frac{v}{\omega_R}},$$

что соответствует выражению (3.14) с $v = v/\omega_R$. Отталкиванию ($v > 0$) соответствует положительный знак v ($\Gamma_R < 1$), тогда как притяжение ($v < 0$) дает $v < 0$ и $\Gamma_R > 1$. Как упоминалось (стр. 132), можно ожидать, что Γ_R лежит в интервале $\Gamma_R \sim 0,7 \div 1,2$.

Записывая (3.23) в аналитической форме и подставляя в (3.27), получим *

$$\Pi_P^{(+)} = -2f^2 k^2 \frac{m^* p_F}{\pi^2} \frac{\Phi_1(\omega, k)}{1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi_1(\omega, k)}. \quad (3.28)$$

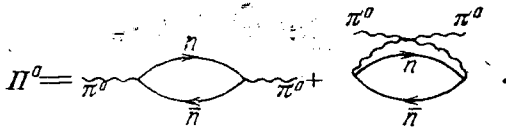
Выражение для поляризационного оператора π^- -мезона можно получить аналогичным способом, учитывая, что в этом случае присутствует только 2-й из графиков

*) Здесь и ниже Π^{π^+} , Π^{π^-} , Π^{π^0} для краткости обозначено $\Pi^{(+)}$, $\Pi^{(-)}$, $\Pi^{(0)}$ соответственно.

(3.18). Однако вместо этого достаточно использовать перекрестную симметрию и получить $\Pi_P^{(-)}$ непосредственно из (3.28)

$$\Pi_P^{(-)}(\omega, \mathbf{k}) = \Pi_P^{(+)}(-\omega, -\mathbf{k}) = \Pi_P^{(+)}(-\omega, \mathbf{k}). \quad (3.29)$$

Найдем теперь поляризационный оператор π^0 -мезона в нейтронной среде. В этом случае участвуют оба графика (3.18). Без учета NN-взаимодействия имеем



Поэтому без учета NN-корреляций вместо (3.20) получим

$$\Pi_P^{(0)} = -f^2 k^2 \frac{m^* p_F}{\pi^2} \Phi(\omega, \mathbf{k}),$$

где

$$\Phi(\omega, \mathbf{k}) = \Phi_1(\omega, \mathbf{k}) + \Phi_1(-\omega, \mathbf{k}). \quad (3.30)$$

Учет нуклонных корреляций, как нетрудно получить из выкладок, аналогичных приведенным в случае π^+ -мезона, дает

$$\Pi_P^{(0)} = -f^2 k^2 \frac{m^* p_F}{\pi^2} \frac{\Phi(\omega, \mathbf{k})}{1 + g^{nn} \frac{p_F}{p_0} \Phi(\omega, \mathbf{k})}. \quad (3.31)$$

Рассмотрим случай среды с $N = Z$. В этом случае в поляризационном операторе π^+ - и π^- -мезона, так же, как и для π^0 -мезона будут присутствовать оба графика (3.18). Так как среда изотопически инвариантна, то

$$\Pi^{(+)}(\omega, \mathbf{k}) = \Pi^{(-)}(\omega, \mathbf{k}) = \Pi^{(0)}(\omega, \mathbf{k}).$$

Выражение для $\Pi^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$ будет отличаться множителем 2 от выражения (3.31) и кроме того в знаменатель войдет вместо g^{nn} та же комбинация, что и в случае π^\pm в ней-

тронной среде, а именно $g^- = g^{nn} - g^{np}$. Итак, при $N = Z$ имеем

$$\Pi^{(\pm, 0)} = -2f^2 k^2 \frac{m^* p_F}{\pi^2} \frac{\Phi(\omega, \mathbf{k})}{1 + g^- \Phi(\omega, \mathbf{k}) \frac{p_F}{p_0}}. \quad (3.32)$$

Мы положили $p_F^n = p_F^p = p_F$. Величина $\Phi(\omega, \mathbf{k})$ дается формулами (3.30) и (3.21). Выражение для полюсной части поляризационного оператора в случае произвольного отношения N/Z дается в [15].

По поводу приведенных выше выражений для Π_P делалось возражение [59], что 2-й из графиков (3.18) не должен учитываться, поскольку он уже учтен в Π_R . В [15] показано, что использованный нами резонансный вид Π_R получается только после исключения второго из графиков (3.18) из резонансного рассеяния. Этот график практически не входит в наблюдаемое рассеяние вблизи резонанса и должен учитываться именно в полюсной части. Ограничимся здесь замечанием, что без второго из графиков (3.18) выражение для Π_P , как мы видели, противоречит перекрестной симметрии!

III.2. Пионная степень свободы в ядерном веществе

Обсуждается влияние обмена одним пионом на взаимодействие нуклонов в ядерном веществе. Получены уравнения теории ферми-жидкости в ядерном веществе с учетом однопионного обмена. Показано, что искажение пропагатора пионов в ядерном веществе, не учитываемое в обычных подходах к теории нуклонной материи, вносит существенные изменения во взаимодействие нуклонов. Дается возможная схема последовательного учета пионной степени свободы в теории нуклонной материи.

Учет однопионного обмена в теории ферми-жидкости. Уравнение (B.12) для спектра пионных возбуждений может быть также найдено из рассмотрения полюсов амплитуды NN-рассеяния в среде (корреляционная функция).

Напомним, как находится уравнение для амплитуды NN-рассеяния в теории ферми-жидкости [51]. В том случае, когда импульс $k = (\omega, \mathbf{k})$ в канале частица —

дырка мал, это уравнение определяется суммированием частично-дырочных графиков

$$\Gamma = \text{[diagram]} = \text{[diagram]} + \text{[diagram]} + \dots = \text{[diagram]} + \text{[diagram]}$$

В символическом виде имеем

$$\Gamma = \mathcal{F} + \mathcal{F} A \Gamma. \quad (3.33)$$

Здесь \mathcal{F} — сумма всех графиков, не содержащих частей, соединенных одной парой, A — пропагатор частицы — дырки.

Идея такого написания состоит в том, что в блок \mathcal{F} выделены все графики, нечувствительные к величине импульса k . Поэтому величина \mathcal{F} может быть выражена через константы, определяемые из опыта и одинаковые для всех ядер и всех процессов, а пропагатор A , существенно зависящий от k и от особенностей оболочечной структуры, вычисляется точно. Согласно приведенной выше аргументации (стр. 128), величина \mathcal{F} , определяемая через графики, содержащие более одной пары, характеризуется большими импульсами промежуточных состояний и существенно изменяется при $k \sim m_N$. Исключение составляет только график однопионного обмена, который, как мы увидим, существенно изменяется на импульсах $k \sim m_\pi$.

Для случая очень малых импульсов этот график не дает вклада, поскольку вершина πN -взаимодействия пропорциональна k . Однако для импульсов k порядка m_π , которые нас интересуют, следует выделить график однопионного обмена и сводить к константам только оставшуюся, более слабо зависящую от k часть \mathcal{F} .

Заметим, что аналогичное выделение сильно зависящей от k части взаимодействия делается при учете кулоновской экранировки в плазме (простое изложение см. в [42]).

Поскольку πN -взаимодействие $\sim \sigma_\alpha \tau_\beta$, однопионный обмен влияет только на слагаемое взаимодействия \mathcal{F} вида $(\sigma_1 \sigma_2)(\tau_1 \tau_2)$. Поэтому взаимодействие \mathcal{F} может быть записано в виде (3.26) с заменой константы g' на функ-

цию $g'_t(\mathbf{k}, \omega)$, учитывающую однопионный обмен в рассматриваемом канале,

$$g'_t = g' + \left(\frac{dn}{d\varepsilon_F} \right)_0 \frac{f^2 k^2}{\omega^2 - (1 + k^2 + \Pi'(\mathbf{k}, \omega))}. \quad (3.34)$$

По определению величина \mathcal{F} , а следовательно, и g'_t не содержит графиков частицы и дырки. Поэтому $\Pi' = \Pi - \Pi_P$ (см. следующий раздел).

Поскольку взаимодействие \mathcal{F} в координатном представлении δ -образно по всем входящим в эти величины разностям координат, Γ в бесконечной однородной системе зависит только от разности входных и выходных координат. При переходе к импульсному представлению уравнение (3.33) превращается в алгебраическое. Используя для A при $N = Z$ выражение аналогичное (3.25)

$$A = - \frac{dn}{d\varepsilon_F} \Phi(\mathbf{k}, \omega)$$

и подставляя в (3.33) взаимодействие (3.34), получаем

$$\Gamma = \frac{g'}{1 + 2g'_t(\mathbf{k}, \omega) \Phi(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (3.35)$$

Полюс этого выражения соответствует условию

$$1 + 2g'_t(\mathbf{k}, \omega) \Phi(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (3.36)$$

Величина g' , введенная выше, равна $2g' = g^-$.

Соотношение (3.36) с учетом (3.34) тождественно совпадает с уравнением (B.12) для частоты пионных возбуждений (после подстановки в него (3.32)). Из формулы (3.36) следует, что для плотностей порядка ядерной плотности n_0 функция $g'_t(\mathbf{k}, 0)$ при $k \simeq 1$ меняет знак ($g'_t = 0$, при $k = 0,8$ для $n = n_0$ и $g' = 0,8$).

Такое поведение $g'_t(\mathbf{k}, \omega)$, как мы увидим (VI.2), подтверждается экспериментальными данными.

Ниже (VI.2) будет рассмотрено влияние однопионного обмена на уравнение для эффективного поля, приводящее к усилению вероятностей переходов, имеющих пионную симметрию. Поскольку эффективное поле может быть выражено через величину Γ , учет однопионного обмена можно сделать так же, как и в рассмотренной задаче.

Однако удобнее, особенно для обобщения на случай конечной системы, записывать амплитуду Γ в другой форме. Будем собирать в блоки все графики, не содержащие пионной линии по каналу частица — дырка (канал с барионным зарядом, равным нулю). Тогда амплитуда NN-рассеяния запишется в виде

$$\Gamma = \text{[diagram 1]} = \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} = \Gamma_1 + \mathcal{F}_1 \mathcal{D}, \quad (3.37)$$

где Γ_1 — амплитуда рассеяния, не содержащая пионного возбуждения в рассматриваемом канале, \mathcal{F}_1 — вершина, переводящая частицу — дырку в пионное возбуждение и тоже не содержащая пионного полюса, а \mathcal{D} — пропагатор пиона в ядерном веществе. Подобное выделение слагаемого, содержащего полюс, отвечающий определенному возбуждению, часто используется в ТКФС [51] для изучения коллективных уровней.

Вершина \mathcal{F}_1 определяется соотношением (3.27). Аналогично этому уравнение для Γ_1 отличается от уравнения для Γ заменой полного взаимодействия \mathcal{F} на взаимодействие \mathcal{F}_1 , не содержащее однопионного обмена в рассматриваемом канале.

Переходя в (3.37) к импульсному представлению, получаем

$$\Gamma(\mathbf{k}, \omega) = \Gamma_1(\mathbf{k}, \omega) + |\mathcal{F}_1(\mathbf{k}, \omega)|^2 \mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.38)$$

Для Γ_1 и \mathcal{F}_1 имеем

$$\mathcal{F}_1^\alpha = \frac{f(\mathbf{k}\sigma) \tau_\alpha}{1 + 2g' \Phi(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (3.39)$$

$$\Gamma_1 = \frac{g'}{1 + 2g' \Phi(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (3.40)$$

Второе слагаемое (3.38) имеет полюс при $\omega \rightarrow 0$, $k = k_0$. При $\omega \rightarrow 0$ знаменатель \mathcal{D} , как можно убедиться из (3.32), принимает вид

$$\mathcal{D}^{-1} = \left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right) \omega^2 - \tilde{\omega}^2(k) - i \text{Im } \Pi,$$

$$\tilde{\omega}^2(k) = 1 + k^2 + \Pi(k, 0).$$

Таким образом, полюс в \mathcal{D} отвечает мнимым ω , т. е. не

соответствует реальным колебаниям. Как мы увидим, в конечной системе ситуация иная. В такой системе соотношения (3.27) и (3.33) представляют собой интегральные уравнения. Эти уравнения для полей различной симметрии решались на ЭВМ [51]. Поскольку наблюдаемые величины выражаются через матричные элементы вершин типа \mathcal{T}_1 (когда отсутствует однопионный обмен), то сравнение с опытом позволяет определить константы f, f', g, g' , входящие в теорию.

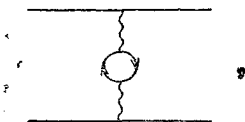
В однородной бесконечной системе величины Γ_1 и \mathcal{T}_1 зависят только от разности входных и выходных координат. В конечной системе это не так, поскольку существенную роль играют отражения частиц от границы системы. В достаточно большой системе отраженные волны имеют большие фазы и в результате усреднений вносят малый вклад в наблюдаемые величины. Как показывают расчеты, даже тяжелые ядра недостаточно велики, чтобы отражения от границы играли малую роль. Поэтому пропагатор A в ядре зависит от двух переменных $A = A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. То же самое относится к величинам Γ_1 и \mathcal{T}_1 . Тем не менее, для интересующих нас волновых векторов $k \sim p_F$ соотношение (3.38) сохраняет свой вид и в конечной системе. Действительно, при расстояниях $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll r$, что соответствует $k \gg 1/R$, все величины делаются функциями только от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Однако \mathcal{T}_1 и Γ_1 должны определяться не из соотношений (3.39) и (3.40), а из соответствующих интегральных уравнений, записанных с учетом конечности системы, как это и делается в ТКФС. Кроме того, конечность системы вносит существенное изменение в вид \mathcal{D} вблизи полюса. А именно, если ω меньше энергий первых частично-дырочных возбуждений, то в $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ отсутствует мнимая часть. Более того, как следует из дисперсионного уравнения для $\Pi(\omega)$, в области малого затухания $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2} < 0$. Величину $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}$ следует вычислять с учетом радиуса системы. Выражение (3.21) отвечает большому затуханию, связанному с рождением частицы-дырки, и дает неверный знак $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=0}$. Полюс в \mathcal{D} определяется соотношением

$$\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right) \omega^2 - \tilde{\omega}^2(k) = 0,$$

т. е. соответствует реальной ветви колебаний. Ниже мы увидим (VI.1), что в ядре, даже если оно близко к конденсации, наименьшая частота этой ветви, по-видимому, значительно выше одночастичных возбуждений.

Схема последовательной теории ядерного вещества. Движение пионов в ядерном веществе, как мы видели, сильно искажается взаимодействием с нуклонами. Как было показано в [11], это искажение не учитывается в обычном подходе к теории ядерного вещества. Этот подход основан на предположении, что ядро можно рассматривать как газ нуклонов с парным взаимодействием, полученным из анализа нуклон-нуклонного рассеяния в вакууме. Между тем, часть вакуумного нуклон-нуклонного взаимодействия, соответствующая графикам однопионного обмена, искажена за счет изменения пионного пропагатора в среде. При $N \simeq Z$, когда можно пренебречь S -волновым πN -рассеянием, существенно искажение пионного пропагатора за счет резонансного πN -рассеяния.

Действительно, графики вида



описывающие распад пиона на частицу и дырку, учитываются в обычном подходе, поскольку эти графики соответствуют взаимодействию двух выделенных нуклонов за счет виртуального возбуждения нуклона ферми-заполнения. Однако все графики, содержащие пионные линии, исправленные N^* -резонансом, совершенно теряются в обычных методах расчета ядерного вещества.

Правильная теория ядерного вещества должна была бы строиться по следующей схеме. Из парного пустотного взаимодействия следует вычесть график однопионного обмена. Оставшаяся часть взаимодействия включается в гамильтониан в качестве парного NN -взаимодействия. Наряду с этим взаимодействием в гамильтониан системы добавляется πN -взаимодействие с вакуумной константой f (см. аргументацию на стр. 128). Кроме того, добавляется гамильтониан пионного поля, содержащий вакуумное $\pi\pi$ -взаимодействие. Разумеется, такая задача о взаимо-

действующих нуклонных и пионных полях не может быть точно решена. Учитывая соображения о равенстве локальных величин в среде их вакуумным значениям, можно существенно упростить постановку вопроса, и разработать последовательную теорию, пригодную вплоть до достаточно больших плотностей.

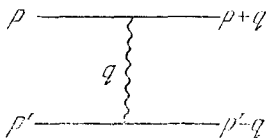
Все графики NN-взаимодействия, кроме графика однопионного обмена, считаются δ -образными и сводятся к константам, которые могут быть найдены из пустотного взаимодействия, после вычитания из него графика однопионного обмена. К полученному таким образом δ -образному взаимодействию добавляется график обмена одним пионом, но с учетом искажения пропагатора пиона в среде. В качестве первой задачи, следует выразить спин-спиновое NN-взаимодействие в ядерном веществе через его вакуумное значение и через взаимодействие, соответствующее обмену одним искаженным пионом.

Качественно ситуация сформулирована в обзоре М. Ро: «Ядро представляет собой не газ нуклонов, а пионный суп» [60]. Для того, чтобы убедиться, что речь идет не о малых поправках, а о существенном изменении теории ядерного вещества, приведем вытекающее из формул для поляризационного оператора (гл. III) выражение для пионной энергии при малых k и ω в ядерном веществе

$$\omega^2 = a + bk_a^2 + c\omega^2,$$

$$a = 1 + 0,35 \frac{n}{n_0}, \quad b \simeq 1 - 0,4 \frac{n}{n_0}, \quad c = -0,2 \frac{n}{n_0}.$$

Это соответствует пропагатору $\mathcal{D} = \frac{1}{(1-c)\omega^2 - (a+bk^2)}$. Обмен таким «пионом» на расстояниях $r \gg 1$ приведет к взаимодействию между нуклонами, которое сильно отличается от пустотного. Рассматривая упругое рассеяние двух нуклонов,



соответствующее обмену одним «пионом» с $q = (0, k \ll 1)$ и переходя в координатное представление, нетрудно

получить

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{b} f^2 (\nabla_1 \sigma_1) (\nabla_2 \sigma_2) \frac{e^{-\kappa |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (3.41)$$

Это выражение отличается от вакуумного множителем $\kappa \simeq 1,5$ в показателе экспоненты и множителем $\frac{1}{b} \simeq 1,7$ перед всем выражением.

III.3. Спектр пионов и условия неустойчивости пионного поля

В этом разделе показано, что при квантовании пионного поля в среде коэффициенты разложения поля по плоским волнам содержат множитель $\left(2\omega_k - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_k}\right)_{\omega_k = \omega(k)}$, переходящий в пустоте в обычный множитель $(2\omega_k)^{-1/2}$. Условием устойчивости поля является положительность подкоренного выражения для каждого типа пионных возбуждений. Дается общее правило отбора физических решений дисперсионного уравнения для энергии пионов. Анализируются решения этого уравнения как для $Z \simeq N$, так и для $Z \ll N$. Дается физическая интерпретация возможных ветвей возбуждений для каждого типа пионов. Показано, что при $Z \simeq N$ неустойчивость поля π^+ , π^- , π^0 -мезонов проявляется в обращении в нуль частоты $\omega_s^{\pm,0}(k_0) = 0$. Здесь значок s означает спин-изоспин-звуковое возбуждение с квантовыми числами соответствующих пионов. При $Z \ll N$ неустойчивость поля π^0 -мезонов имеет ту же природу, а для π^+ , π^- -мезонов неустойчивость соответствует обращению в нуль суммы энергий $\omega_s^+ + \omega_s^- = 0$. Возникает, кроме того, неустойчивость по отношению к реакции $p \rightarrow p + \pi_s^+$, приводящая к тому, что все свободные протоны нейтронной звезды при плотностях $n \gtrsim 1/2 n_0$ переходят в связанное состояние π_s^+ типа протон-нейтронная дырка. Устанавливается связь полученных результатов с результатами модели Сойера — Скалапино [14].

Квантование пионного поля в среде. В предыдущих разделах мы подробно исследовали свойства поляризационного оператора $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ пионов в нуклонной среде.

Обсудим теперь основные свойства решения уравнения для пионного поля. Начнем со случая заряженных пионов, для которых

$$[\omega^2 - 1 - k^2 - \Pi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega)] \varphi_{\mathbf{k}\omega}^{\pm} = 0.$$

Введем комплексное поле, объединяющее φ^+ и φ^-

$$\Psi = \sum_{\mathbf{k}} \{c_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \exp[i(\omega_{\mathbf{k}}^+ t - \mathbf{k}\mathbf{r})] + c_{\mathbf{k}}^- b_{\mathbf{k}}^+ \exp[-i(\omega_{\mathbf{k}}^- t - \mathbf{k}\mathbf{r})]\},$$

$a_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}$ — операторы уничтожения π^+ - и π^- -мезонов. Если при заданном импульсе k в среде имеется несколько ветвей возбуждений с квантовыми числами π^+ - или π^- -мезонов, то везде под знаком суммы следует понимать также суммирование по типам возбуждений.

Коэффициенты $c_{\mathbf{k}}^+$ и $c_{\mathbf{k}}^-$ определяются следующим образом.

Лагранжиан поля Ψ имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^+ [\omega_{\mathbf{k}}^2 - 1 - k^2 - \Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)] \Psi_{\mathbf{k}}, \quad (3.42)$$

где $\omega_{\mathbf{k}}$ — независимая переменная, которую не следует путать с решением дисперсионного уравнения $\omega(k)$. Пользуясь обычным методом рассмотрения лагранжиана с производными по времени произвольного порядка, нетрудно получить следующую формулу для компоненты T_{44} тензора энергии — импульса:

$$T_{44} = \mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} - \mathcal{L} \right)_{\omega_{\mathbf{k}} = \omega(k)}. \quad (3.43)$$

Проиллюстрируем это соотношение на примере электромагнитного поля в среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ и магнитной восприимчивостью $\mu(\omega)$. Среднее по времени значение функции Лагранжа, выраженное через векторный потенциал \mathbf{A} ($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$), $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin \omega t$ имеет вид

$$\overline{\mathcal{L}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon \omega^2 - \frac{k^2}{\mu} \right) \frac{A_0^2}{16\pi}.$$

Отсюда с помощью (3.43) получаем известное выражение для средней энергии поля

$$\bar{T}_{44} = \frac{d(\varepsilon\omega)}{d\omega} \frac{E_0^2}{16\pi} + \frac{d(\mu\omega)}{d\omega} \frac{H_0^2}{16\pi}.$$

Из формул (3.42) и (3.43) легко получаем выражение для гамильтониана \mathcal{H} пионного поля (для простоты опущены значки, обозначающие название ветви возбуждений)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_k \Psi_k^+ \left[\omega_k \left(2\omega_k - \frac{\partial \Pi^{(+)}}{\partial \omega_k} \right) \right]_{\omega_k = \omega(k)} \Psi_k = \\ &= \sum_k \{ (c_k^+)^2 \omega^+(k) \Omega^+(k) a_k^+ a_k + \\ &\quad + (c_k^-)^2 \omega^-(k) \Omega^-(k) b_k^+ b_k \}, \quad (3.44) \\ \Omega^\pm(k) &= \left(2\omega_k - \frac{\partial \Pi^{(\pm)}(k, \omega)}{\partial \omega_k} \right)_{\omega_k = \omega^\pm(k)} \end{aligned}$$

(ω^\pm — энергия π^\pm -мезона, мы воспользовались равенством $\Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \Pi^{(-)}(-\mathbf{k}, -\omega)$).

Потребуем, чтобы гамильтониан имел вид

$$\mathcal{H} = \sum_k \{ \omega^+(k) a_k^+ a_k + \omega^-(k) b_k^+ b_k \}.$$

Из этого условия следует, что

$$(c_k^+)^{-2} = \Omega^+(k), \quad (c_k^-)^{-2} = \Omega^-(k). \quad (3.45)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_k \left\{ \frac{a_k \exp[i\omega^+(k)t - i\mathbf{k}\mathbf{r}]}{[\Omega^+(k)]^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_k^+ \exp[-i\omega^-(k)t + i\mathbf{k}\mathbf{r}]}{[\Omega^-(k)]^{1/2}} \right\}. \quad (3.46) \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить и другим путем. Тем же методом, каким было получено выражение для T_{44} , можно найти и 4-вектор тока. Из (3.42) для плотности заряда находим

$$j_0 = e \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k} = e \sum_k \Psi_k^+ \left(2\omega_k - \frac{\partial \Pi^{(+)}}{\partial \omega_k} \right)_{\omega_k = \omega(k)} \Psi_k. \quad (3.47)$$

Потребовав, чтобы j_0 имел вид

$$j_0 = e \sum_k (a_k^+ a_k - b_k^+ b_k), \quad (3.48)$$

снова получаем (3.45). Множитель $2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}$ в (3.47) получается также из теоремы Уорда, согласно которой четвертая компонента электромагнитной вершины есть

$$\Gamma_4^{e1} = \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \omega} = 2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega},$$

где \mathcal{D} — пропагатор пиона в нуклонной среде

$$\mathcal{D}^{-1} = \omega^2 - 1 - k^2 - \Pi(\mathbf{k}, \omega).$$

Как это следует из (3.46), зависимость $\omega^+(\mathbf{k})$ для π^+ -мезонов должна быть такова, чтобы выполнялось условие

$$\left[2\omega - \frac{\partial \Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega^+(\mathbf{k})} > 0.$$

Для π^- -мезонов

$$\left[2\omega - \frac{\partial \Pi^{(-)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega^-(\mathbf{k})} > 0,$$

или

$$\left[2\omega - \frac{\partial \Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=-\omega^-(\mathbf{k})} < 0.$$

Таким образом, получаем следующее правило отбора решений [12], [15]. Пусть найдены решения $\omega(\mathbf{k})$ уравнения

$$\omega^2 = 1 + k^2 + \Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega).$$

Решения, лежащие в области

$$2\omega - \partial \Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega > 0,$$

соответствуют π^+ -мезонам.

Те решения, которые находятся в области

$$2\omega - \partial \Pi^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega < 0,$$

после замены $\omega \rightarrow -\omega$ становятся законом дисперсии для π^- -мезонов *).

По аналогии с тем, как мы получили выражение (3.46) для поля заряженных мезонов Ψ , не представляет труда получить соответствующее выражение для поля π^0 -мезонов. Плотность π^0 -мезонов есть

$$\rho^0 = \sum_k \left(2\omega_k - \frac{\partial \Pi^{(0)}}{\partial \omega_k} \right)_{\omega_k = \omega(k)} \Phi_0^2,$$

здесь $\Pi^{(0)}$ — четная функция ω .

Из спектрального разложения можно увидеть, что $\partial \Pi^{(0)} / \partial \omega^2 < 0$ (это видно и на примере выражений (3.31), (3.32)). Следовательно, физические решения для π^0 -мезонов соответствуют условию $\omega > 0$.

Спектры пионов при $Z \simeq N$ и $Z \ll N$. В изотопически симметричной среде ($N = Z$), как уже говорилось, поляризационный оператор — четная функция частоты, и физические решения соответствуют $\omega^2 > 0$.

Как мы уже говорили, в такой среде в силу изотопической инвариантности результаты для всех пионов одинаковы. Энергия пиона $\omega^{(k)}$ определяется уравнением

$$\omega^2 = 1 + 0,7n + (1 - 0,8n)k^2 + n \left[0,8 - \frac{1,2}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right] - \frac{2m p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \Phi(\mathbf{k}, \omega) \left[1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \right]^{-1}. \quad (3.49)$$

Для $n > n_c \simeq 0,3$ появляется область $\omega^2 < 0$ (см. рис. 11, 12) (интервал k^2 , в котором $\omega^2 < 0$ растет от нуля с ростом n), что означает неустойчивость по отношению к одновременному рождению π^+ , π^- и π^0 -мезонов. Если бы эта оценка n_c была правильна, то отсюда следовало бы, что в ядре должен существовать π -конденсат, наличие которого повлияло бы на расчет различных характеристик ядра (см. VI. 2).

Как видно из рис. 11—12, имеются три ветви спектра пионов в соответствии с тремя типами имеющихся возбуждений: пионная ветвь ($\omega(k=0) \simeq 1$), резонансная (возбуждения типа изобара — дырка) ($\omega(k=0) \approx \omega_R$) и частично-дырочная, которую будем называть спин-звуко-

*) Время от времени эти условия выводятся заново (см., например, [61]).

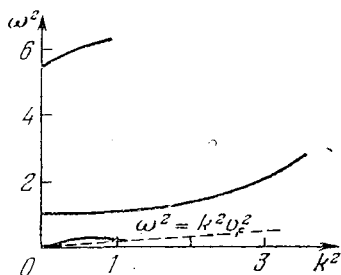


Рис. 11. Спектр π^+ , π^- , π^0 -мезонов в среде с $N = Z$ и плотностью $n = 0,2 < n_c$ ($g^- = 1,6$). Три ветви спектра соответствуют трем типам имеющих возбуждений. Для всех k величина $[\omega(k)]^2 > 0$.

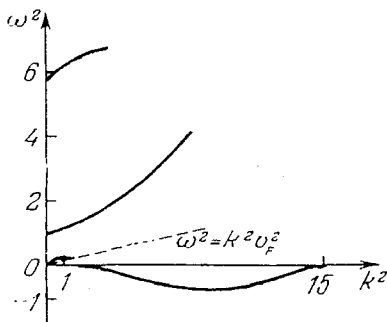


Рис. 12. Спектр мезонов в среде с $N = Z$ при плотности $n = n_0 \approx 0,5 > n_c$ (n_0 — ядерная плотность, $g^- = 1,6$). При $2 \leq k^2 \leq 15$ величина $\omega^2 < 0$. Система неустойчива по отношению к рождению π_s^+ , π_s^- , π_s^0 -мезонов.

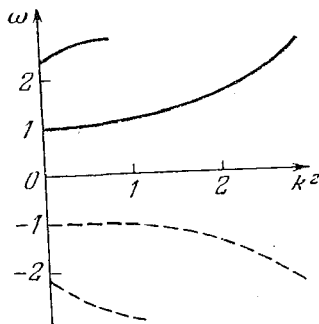


Рис. 13. Спектр заряженных пионов в нейтронной среде с плотностью $n = 0,1 < n_c^+$ ($g^- = 0,8$). Сплошная линия — энергия π^+ -мезонов $\omega^+(k)$, штриховая — энергия π^- -мезонов с обратным знаком ($-\omega^-(k)$). Для всех k имеем $\omega^+ + \omega^- > 0$ и $\omega^+ > 0$.

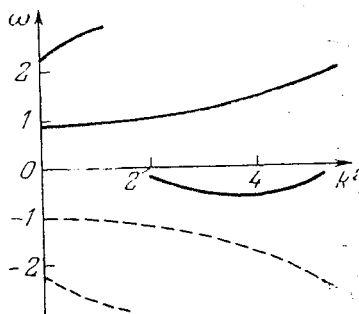


Рис. 14. Спектр заряженных пионов в нейтронной среде с плотностью $n = 0,3$ ($n_c^+ < n < n_c^\pm$, $g^- = 0,8$). Для $2 < k < 5,5$ энергия $\omega_s^+ < 0$, что приводит к неустойчивости протонов относительно процесса $p \rightarrow n + \pi_s^+$. Всюду $\omega_s^+ + \omega^- > 0$.

вой. Резонансная ветвь представляет интерес в вопросах, связанных с рассеянием пионов на ядрах в области резонанса. Две другие существенны при изучении вопросов устойчивости.

Рассмотрим теперь случай $Z = 0$. Собирая полученные выше результаты, получаем следующее уравнение для определения энергии π^+ -мезона:

$$\begin{aligned} \omega^2(k^2) &= 1 + k^2 + \prod_{loc}^{(+)} + \prod_P^{(+)} = \\ &= 1 + k^2 + n \left\{ 0,7 - 0,8k^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(0,8 - \frac{1,2}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right) \omega^2 - 1,5\omega (1 - 0,13\omega) \right\} - \\ &\quad - \frac{2m^* p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \Phi_1(\mathbf{k}, \omega) \left[1 + g \frac{p_F}{p_0} \Phi_1(\mathbf{k}, \omega) \right]^{-1}. \quad (3.50) \end{aligned}$$

На рис. 13 приведен результат численного решения уравнения (3.50) для $n < n_c^+$. Сплошной линией изображены ветви спектра, где $2\omega - \frac{\partial \Pi^{(+)}}{\partial \omega} > 0$, т. е. соответствующие π^+ -мезонам, пунктирной — участки, для которых $2\omega - \frac{\partial \Pi^{(+)}}{\partial \omega} < 0$, т. е. отвечающие π^- -мезонам (напомним, что для π^- -мезонов знак ω заменяется на противоположный).

Начиная с плотности $n_c^+ \simeq 0,2$ в спектре π^+ -мезонов появляется решение с $\omega < \varepsilon_F^{(n)}$ (см. рис. 14). Физический смысл этой ветви π^+ -возбуждений состоит в том, что она представляет собой связанное состояние протона и нейтронной дырки — спин-изоспин-звуковое возбуждение (см. следующий раздел). Эта ветвь исчезает при выключении πN -взаимодействия, тогда как вторая ветвь остается и переходит в ветвь свободных пионов. Эту вторую ветвь естественно назвать пионной, а первую — «спин-изоспин-звуковой» или, более кратко спин-звуковой (см. [11], [15]). Во избежание путаницы будем спин-звуковые возбуждения ($\pi_s^{\pm,0}$ -мезоны) снабжать индексом s . В спектре π^- -мезонов спин-изоспин-звуковая ветвь отсутствует. К такой же интерпретации приходят авторы работы [16], которые называют возбуждения π_s^+ спин-изо-

спиновыми волнами. Наличие таких решений приводит к неустойчивости протонов в нейтронной звезде ($p \rightarrow p + \pi_s^+$).

В нейтронной звезде существует небольшая примесь протонов, заряд которых компенсируется электронами. Поскольку $\omega_s^+ + \varepsilon_F^{(n)} - \varepsilon_F^p < 0$, протоны будут превращаться в π_s^+ -мезоны и нейтроны ($p \rightarrow n + \pi_s^+$). Равновесное количество π_s^+ -мезонов и электронов определяется равенством

$$\omega_s^+ + \varepsilon_F^{(e)} = 0.$$

Спектр заряженных пионов в нейтронной среде с плотностью $n \gtrsim n_c^\pm = 0,4$ (рис. 15) отличается характерной особенностью — наличием точки, где $\omega_s^+ + \omega^- = 0$ (в этой точке $2\omega - \frac{\partial \Pi^+}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial k} = \infty$), т. е. система с такой плотностью неустойчива по

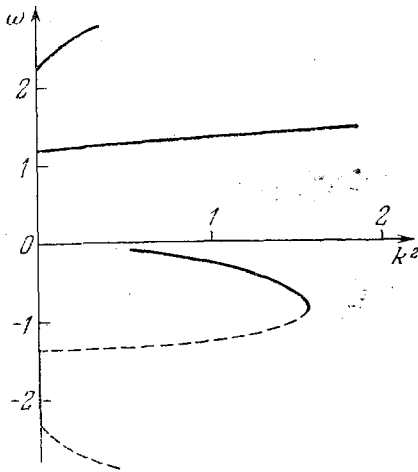


Рис. 15. Спектр заряженных мезонов в нейтронной среде с плотностью $n = 0,5 > n_c^\pm$ ($g^- = 0,8$).

При $k = k_c^+ = 1,6$ имеем $\omega_s^+ + \omega^- = 0$. Система с такой плотностью неустойчива по отношению к рождению пар $\pi_s^+ \pi^-$ -мезонов.

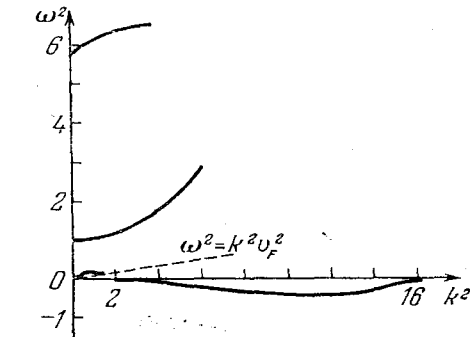


Рис. 16. Спектр π^0 -мезонов в нейтронной среде с плотностью $n = 0,9 > n_c^0$ ($g^{nn} = 1$). При $1,5 \leq k^2 \leq 15$ существует ветвь с $[\omega^0(k)]^2 < 0$. Система с такой плотностью неустойчива по отношению к рождению π_s^0 -мезонов.

отношению к рождению пар $\pi_s^+ \pi^-$ -мезонов, аналогично тому, как это было в сильном электрическом поле [II.1].

Закон дисперсии для π^0 -мезонов выглядит следующим образом:

$$\omega^2 = 1 + k^2 + \Pi_{\text{loc}}^{(0)} + \Pi_P^{(0)} = 1 + k^2 + n \left[0,7 - 0,8k^2 + \left(0,8 - \frac{1,2}{1 - \omega^2/\omega_R^2} \right) \omega^2 \right] - \frac{m^* p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \Phi(\mathbf{k}, \omega) \left[1 + g^{\text{nn}} \frac{p_F}{p_0} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \right]^{-1}. \quad (3.51)$$

Численным решением этого уравнения получен спектр $\omega^2(k^2)$, представленный для $n > n_c^0 = 0,4$ на рис. 16;

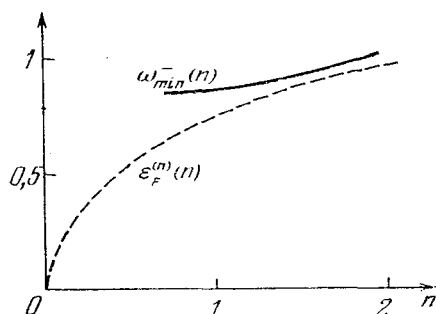


Рис. 17. Зависимость от плотности n минимальной энергии π^- -мезонов в нейтронной среде: $\omega_{\text{min}}^-(n)$ —сплошная линия и энергия границы Ферми нейтронов; $\epsilon_F^{(n)} = (3\pi^2 n)^{2/3}/2m$ —штриховая; $\omega_{\text{min}}^-(n) > \epsilon_F^{(n)}$, поэтому процесс $n \rightarrow p + \pi^-$ невозможен.

появляется область $\omega^2 < 0$, что означает неустойчивость системы по отношению к рождению нейтральных пионов.

В табл. 1 приведены характерные параметры для различных значений g^- и g^{nn} .

На рис. 17 представлена зависимость минимальной энергии π^- -мезона $\omega_{\text{min}}^-(n)$ от плотности, из которой видно, что $\omega_{\text{min}}^- > \epsilon_F^{(n)}$. Таким образом, минимальная энергия π^- -мезона больше, чем $\epsilon_F^{(n)}$ и, стало быть, переход второго рода с образованием π -конденсата невозможен. При появлении конденсатов минимальная энергия π^- -мезонов увеличивается, как показано в [18], так что $\omega^- - \epsilon_F^{(n)} > 0$, по крайней мере, вплоть до очень больших плотностей, что и доказывает утверждение о том, что предложенный в [14]

Таблица 1

Критические значения*) плотности нуклонов n_c и импульса конденсатного поля k_c для различных типов неустойчивости при разных значениях констант спин-спинового взаимодействия нуклонов g^{nn} , g^-

Z=0					Z=0			N=Z		
g^-	n_c^\pm	k_c^\pm	n_c^\pm	k_c^\pm	g^{nn}	n_c^0	k_c^0	g^-	n_c	k_c
0	0,37	1,4	0,2	p_T	0	0,2	2,4	0	0,10	1,60
0,3	0,39	1,6			1	0,4	2,5	0,4	0,13	1,78
0,6	0,41	1,6			1,6	0,6	2,5	0,8	0,18	1,93
0,8	0,43	1,6			1,6	0,6	2,5	1,2	0,25	2,07
								1,6	0,34	2,13
								2,0	0,43	2,10

π^- -конденсат не возникает. В чем же природа обнаруженной в [14] неустойчивости? Перейдем к выяснению этого вопроса.

Спектр пионов в простой модели. Для пояснения полученных в случае $N \gg Z$ результатов упростим задачу нахождения спектра, оставив только полюсную часть поляризационного оператора [22]. Кроме того, предположим, что частота $\omega \gg kv_F$. Это предположение при $n \sim n_0$, хотя и грубо, но выполняется, поскольку в случае $Z \ll N$ существенны $\omega \sim 1$, тогда как $kv_F \sim \varepsilon_F \simeq 0,3$. Формально такое приближение делается точным, если рассмотреть предел $m_N/m_\pi \rightarrow \infty$. Дисперсионное уравнение для определения энергий пионных квазичастиц в нормальной фазе нейтронного вещества дается выражениями (3.20) и (3.22)

$$\mathcal{D}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - \omega_n^2 + \frac{2nf^2k^2}{\omega} = 0. \quad (3.52)$$

Последний член в этом уравнении есть поляризационный оператор π^- -мезона в приближении $\omega \gg kv_F^{(n)}$, взятый со знаком минус.

Решение уравнения (3.52) можно записать в виде:

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2 - 1}{1 - \alpha/\omega},$$

*) Числовые данные и спектры на рис. 11—17 следуют работе [15], где использовано несколько отличное выражение для $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$.

где $\alpha = 2nf^2$. При $\alpha < 1$ имеются три ветви спектра (рис. 18).

Как было показано выше, классификация ветвей определяется знаком вычета $\mathcal{D}(k, \omega)$, т. е. знаком величины

$$\frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \omega} = 2\omega - \frac{\partial \Pi^{(-)}}{\partial \omega} = 2\omega - \alpha \frac{k^2}{\omega^2}.$$

Ветви, на которых $\left(2\omega - \frac{\partial \Pi^{(-)}}{\partial \omega}\right) > 0$, соответствуют π^- -мезонам, а ветви, на которых $\left(2\omega - \frac{\partial \Pi^{(-)}}{\partial \omega}\right) < 0$, после замены ω на $-\omega$ дают закон дисперсии π^+ -мезонов. На рис. 18 ветвь 1 соответствует π^- -мезонам, так как на ней $\left(2\omega - \frac{\partial \Pi^{(-)}}{\partial \omega}\right) > 0$. На ветвях 2 и 3 величина $\left(2\omega - \frac{\partial \Pi^{(-)}}{\partial \omega}\right) < 0$, поэтому после замены ω на $-\omega$ эти ветви дают закон

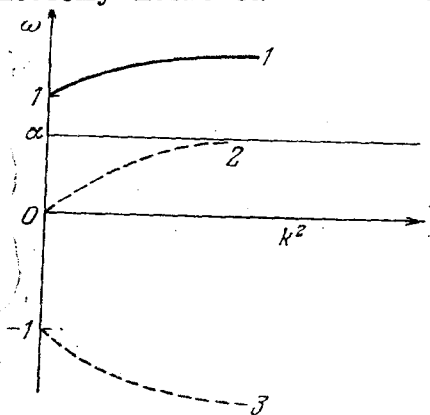


Рис. 18. Решение дисперсионного уравнения для заряженных пионов в приближении больших частот $\omega > kv_F^{(n)}$. Сплошной линией изображена ветвь спектра π^- -мезона, штриховыми — ветви спектра π^+ -мезонов с обратным знаком энергии.

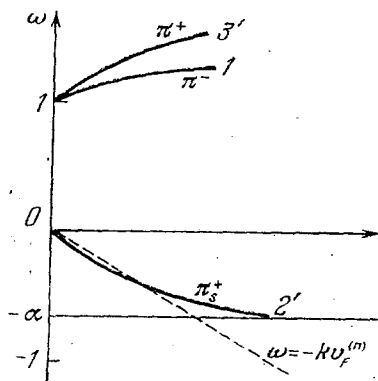
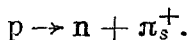


Рис. 19. Спектр заряженных мезонов в нейтронной среде в приближении больших частот $\omega > kv_F^{(n)}$ при $n < n_c^{\pm} = \frac{1}{2f^2}$. Кривые 1 и 3' — мезонные ветви, 2' — ветвь спин-изоспинного звука (π_s^+).

дисперсии квазичастиц с квантовыми числами π^+ -мезонов. Таким образом, в среде имеется два типа π^+ -мезонных возбуждений π^+ и π_s^+ . Спектр квазичастиц имеет вид, изображенный на рис. 19. При выключении взаимо-

действия пионов с нуклонами ветви 1 и 3 переходят в пустотные спектры π^- - и π^+ -мезонов ($\omega \rightarrow \omega_h$), а ветвь 2 — в закон дисперсии спин-изоспин-звука. Как следует из точных расчетов, участок ветви 2' с $\omega \leq kv_F^{(n)}$ исчезает, а при $\alpha < kv_F^{(n)}$ ветвь π_s^+ вовсе отсутствует. Появление этой ветви и соответствует указанной выше неустойчивости относительно реакции



При дальнейшем увеличении плотности ветви π^- и π_s^+ понижаются, величина $(\omega_s^+ + \omega^-)_{\min}$ уменьшается, и при $\alpha = 1$ на спектре впервые появляется точка ($k^2 = 2$), в которой $\omega_s^+ + \omega^- = 0$. Значение $\alpha = 1$, таким образом, отвечает критической плотности $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации $n_c^\pm = 1/2f^2$. Очевидно, что в критической точке $(2\omega - \frac{\partial \Pi^-}{\partial \omega}) = 0$, что соответствует слиянию двух корней уравнения (3.52), т. е. двойному полюсу пионного пропагатора $\mathcal{D}(k, \omega)$. При $\alpha = 1$ спектр оказывается вырожденным, он распадается на две кривых: $\omega = 1$ и $k^2 = \omega(\omega + 1)$. Координаты точки пересечения этих кривых и являются критическими параметрами $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации в этой модели: $k_c^\pm = \sqrt{2}$ и $\omega_c = 1$.

При $\alpha > 1$, как нетрудно убедиться, спектр имеет вид, изображенный на рис. 20. Он отличается характерной особенностью — спектр имеет разрыв, на краях которого $d\omega/dk = \infty$. В области разрыва $(\omega_s^+ + \omega^-)^2 < 0$. Это свидетельствует о неустойчивости системы относительно образования $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсата. Таким образом, эта упрощенная модель правильно воспроизводит основные результаты точного расчета.

Обратимся теперь к модели Сойера — Скаланино [14, 62]. В этой модели рассматривается система, состоящая из нейтронов, протонов и π^- -мезонов,

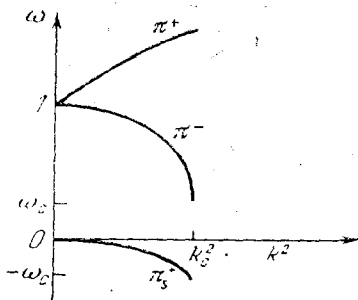


Рис. 20. Спектр заряженных пионов при $n > n_c^\pm$.

Уравнение (3.53) имеет два корня: заселяющих единственное состояние с волновым вектором k . При этом искусственно ограничены степени свободы мезонного поля — не включены в рассмотрение π^+ -мезоны, что соответствует описанию поля π^- -мезонов уравнением Шредингера вместо уравнения КГФ. В результате уравнение для определения энергии (химпотенциала) π^- -мезона в отличие от (3.52) имеет вид

$$\omega = \omega_k - \frac{nf^2k^2}{\omega_k \omega}. \quad (3.53)$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой собственно-энергетическую часть π^- -мезона Σ^- .

$$\omega = \frac{\omega_k}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f^2k^2n}{\omega_k^3}} \right).$$

Верхний знак соответствует π^- -мезону. Для этого решения вычет функции Грина π^- -мезона $\left(1 - \frac{\partial \Sigma^-}{\partial \omega} > 0\right)$ положителен, как это и должно быть. Кроме того, при выключении взаимодействия $\omega \rightarrow \omega_k$. Именно эта ветвь была использована в работе [18] для доказательства устойчивости системы относительно реакции $n \rightarrow p + \pi^-$.

В рамках рассмотренной в [14] и [62] модели трудно дать разумную физическую интерпретацию второго корня уравнения (3.53), для которого $1 - \frac{\partial \Sigma^-}{\partial \omega} < 0$. Как это видно из приведенного выше анализа решения уравнения (3.52), второй корень следует интерпретировать (после замены ω на $-\omega$) как ветвь π_s^+ -мезонов, т. е. как связанное состояние протона и нейтронной дырки ($p-n$). При выполнении условия $1 - \frac{4f^2k^2n}{\omega_k^3} = 0$ (которое совпадает с критическим условием, найденным в [14], [62]), сумма энергий $\omega_s^+ + \omega^-$ обращается в нуль (оба корня сливаются), и система становится неустойчивой по отношению к возникновению электронейтрального $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсата. Нетрудно получить значения критических параметров $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации в этой модели: $n_c^\pm = \frac{3\sqrt{3}}{8f^2} \approx \approx 1,3n_0$, $\omega_c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_c^\pm = \sqrt{2}$. Заметим, что в [14] под тер-

мином «пион» понимается «голый» пион, тогда как в нашем подходе имеются в виду пионные квазичастицы, включая и спин-звуковую ветвь. Заряд адронной системы на языке голых частиц складывается из зарядов голых протонов, π^+ - и π^- -мезонов. На языке пионных квазичастиц этот заряд есть разность числа π_s^+ - и π^- -мезонов (барионные квазичастицы не заряжены). В терминах голых пионов легко ошибиться в классификации решений уравнения (3.49) (так, например, в [63] ветвь π_s^+ приписывалась π^- -мезону). Для правильной физической интерпретации конденсации следует пользоваться языком квазичастиц, как это и делается в теории фазовых переходов. В данном случае это особенно существенно, поскольку имеется несколько ветвей возбуждений с квантовыми числами пиона.

Глава IV

ЭФФЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПИОНОВ В НУКЛОННОЙ СРЕДЕ

Структура конденсата, т. е. амплитуда, координатная зависимость и изотопическая структура конденсатного поля, определяются эффективным взаимодействием между пионами в ядерном веществе. Выше (гл. II) для качественного рассмотрения была использована феноменологическая модель взаимодействия $1/4\lambda\phi^4$.

Задача этой главы — нахождение эффективного взаимодействия и структуры π -конденсата в ядерном веществе в возможно более реалистической модели.

Эффективное взаимодействие пионов складывается из вакуумного взаимодействия, определяемого лагранжианом Вейнберга, и из взаимодействия за счет обмена нуклонными возбуждениями. Удобно описывать поле конденсата с помощью эффективного лагранжиана пионов, усредненного по движениям нуклонов. Для получения этого лагранжиана необходимо найти энергию нуклонной подсистемы как функционал конденсатного поля. Нелинейные слагаемые такого лагранжиана и представляют собой эффективное взаимодействие пионов в среде, заменяющее феноменологическое взаимодействие $1/4\lambda\phi^4$.

В случае малой амплитуды конденсатного поля выражение для эффективного лагранжиана существенно упрощается. При этом энергия нуклонной подсистемы может быть найдена с помощью теории возмущений по амплитуде пионного поля и $\pi\pi$ -взаимодействие принимает вид $1/4\Lambda(k, \omega)(\phi_k\phi_{-k})^2$. С помощью теории возмущений удастся найти Λ , задаваясь только простым видом конденсатного поля.

Далее развивается метод вычисления Λ , использующий приближение Томаса — Ферми, который позволяет

найти энергию конденсата при более широких, чем в случае теории возмущений, предположениях о структуре конденсатного поля.

IV.1. Эффективный лагранжиан пионного поля

Метод нахождения эффективного лагранжиана иллюстрируется на упрощенной модели, в которой учитывается только πN -взаимодействие.

Эффективный лагранжиан даже в случае упрощенной модели представляет собой сложную функцию поля и его производных по времени. Исследуется характер возможных решений для пионного поля. Далее приводится лагранжиан Вейнберга, который используется для определения вакуумного вклада в $\pi\pi$ -взаимодействие.

В случае слабых полей эффективное взаимодействие пионов приобретает простой вид $\tilde{\mathcal{L}}_{\pi\pi} \sim \Lambda(\phi_k \phi_{-k})^2$. Это выражение будет использовано для нахождения величин, характеризующих систему вблизи точки фазового перехода. Нахождение функции $\Lambda(k, \omega)$ в реалистической модели (с учетом N^* -резонанса и нуклонных корреляций) содержится в IV.2.

Метод нахождения лагранжиана. Лагранжиан, описывающий систему взаимодействующих нуклонов и π -мезонов, можно представить в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{\pi N} + \mathcal{L}_{NN} + \mathcal{L}_{\pi\pi}, \quad (4.1)$$

где \mathcal{L}_π и \mathcal{L}_N — свободные лагранжианы пионного и нуклонного полей, а $\mathcal{L}_{\pi N}$, \mathcal{L}_{NN} и $\mathcal{L}_{\pi\pi}$ — лагранжианы πN -, NN - и $\pi\pi$ -взаимодействий. При описании основного состояния системы с конденсатом в выражении (4.1) можно произвести усреднение по всем степеням свободы нуклонного и мезонного поля, оставив лишь классическую часть ϕ , описывающую поле конденсата. Для этой цели вместо \mathcal{L} нужно ввести другую величину — эффективный лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$, который получается из (4.1) усреднением по точным состояниям нуклонов в поле конденсата. При этом роль нуклонной среды сводится к изменению спектра пионов и их взаимодействия по сравнению с пустотными. Так как взаимодействие пионных квазичастиц между собой и с усредненным полем нуклонов связано с обменом низкочастотными частично-дырочными

возбуждениями среды, то оно является существенно запаздывающим, т. е. эффективный лагранжиан содержит высокие производные по времени от φ . Однако в том случае, когда φ описывает стационарное состояние, т. е. зависит от времени как $e^{-i\omega t}$, это не приводит к усложнениям. Вместо зависимости от φ , $\ddot{\varphi}$ и т. д. в эффективном лагранжиане пионного поля можно ввести в качестве независимых переменных частоту ω и амплитуду $\varphi(\mathbf{r})$ конденсатного поля.

Рассмотрим для пояснения лагранжиан, содержащий только πN -взаимодействие

$$\mathcal{L} = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^+ (w - \mathcal{H}) \Psi_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} + if \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{p}}^+ (\sigma \mathbf{k}) \tau \Psi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}. \quad (4.2)$$

Здесь w и ω — частоты нуклонного и мезонного полей, \mathcal{H} — гамильтониан одного нуклона. Вариация по $\Psi_{\mathbf{p}}^+$ и $\varphi_{\mathbf{k}}$ дает систему уравнений для поля φ и оператора Ψ

$$\begin{aligned} (w - \mathcal{H}) \Psi_{\mathbf{p}} &= -if \sum_{\mathbf{k}} (\sigma \mathbf{k}) \tau \Psi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}, \\ (\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \varphi_{\mathbf{k}} &= if \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^+ (\sigma \mathbf{k}) \tau \Psi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для нахождения эффективного лагранжиана пионов найдем энергию системы нуклонов в поле φ . Зависящая от φ часть энергии нуклонов играет роль «потенциальной энергии» для мезонов. Тогда эффективный лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ в импульсном представлении можно записать в виде [18, 22]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}} (w^{(n)} - \tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{p})) \tilde{n}_{\mathbf{p}}^+ \tilde{n}_{\mathbf{p}} + \\ &+ \sum_{\mathbf{p}} (w^{(p)} - \tilde{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{p})) \tilde{p}_{\mathbf{p}}^+ \tilde{p}_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}^{(n)}$ и $\tilde{\varepsilon}^{(p)}$ — точные одночастичные энергии нейтрона и протона в поле конденсата; $\tilde{n}_{\mathbf{p}}^+$ и $\tilde{p}_{\mathbf{p}}^+$ — операторы рождения «нового» нейтрона и «нового» протона,

определенные так, что

$$\begin{aligned} \tilde{n}_p^+ \tilde{n}_p &= \begin{cases} 1, & \tilde{\varepsilon}^{(n)}(p) < \tilde{\varepsilon}_F^{(n)} \\ 0, & \tilde{\varepsilon}^{(n)}(p) > \tilde{\varepsilon}_F^{(n)} \end{cases}, \\ \tilde{p}_p^+ \tilde{p}_p &= \begin{cases} 1, & \tilde{\varepsilon}^{(p)}(p) < \tilde{\varepsilon}_F^{(p)} \\ 0, & \tilde{\varepsilon}^{(p)}(p) > \tilde{\varepsilon}_F^{(p)} \end{cases}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon}_F^{(n)}$ и $\tilde{\varepsilon}_F^{(p)}$ — граничные энергии ферми-заполнения «новых» частиц, которые находятся из условия сохранения полного числа нуклонов в поле конденсата. В такой постановке задача состоит в нахождении изменения энергии нуклонов во внешнем поле, в качестве которого выступает поле пионного конденсата.

Выражение (4.4) дает правильные уравнения движения: уравнение Шредингера для нуклонного поля и уравнение КГФ для мезонного поля, измененное πN -взаимодействием.

Как нетрудно видеть, для слабых полей из (4.3) получается уравнение КГФ, в котором ω_k^2 заменено на $\omega_k^2 + \Pi_P(\mathbf{k}, \omega)$, где $\Pi_P(\mathbf{k}, \omega)$, как и должно быть, в точности совпадает с полюсной частью поляризационного оператора, найденной в гл. III (без учета NN-взаимодействия).

Плотность энергии системы (средняя плотность гамильтониана) связана с эффективным лагранжианом (4.4) равенством [15, 18]

$$\tilde{\mathcal{H}} = w^{(n)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial w^{(n)}} + w^{(p)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial w^{(p)}} + \omega \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \omega} - \tilde{\mathcal{L}}. \quad (4.5)$$

В дальнейшем нам понадобится еще формула, связывающая 4-вектор тока заряженных квазичастиц с эффективным лагранжианом (4.4) [15, 22]

$$j_\mu = -e \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial k_\mu}, \quad (4.6)$$

где $k = (\mathbf{k}, \omega)$ — 4-импульс рассматриваемой частицы.

Следует заметить, что с учетом равенства (4.6) для нулевой компоненты 4-вектора тока соотношение (4.5) приобретает вид, аналогичный соотношению между

свободной энергией системы и термодинамическими потенциалами Ω . Таким образом, эффективный лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ эквивалентен потенциалу $-\Omega$, в котором роль химических потенциалов играют частоты мезонного и нуклонных полей.

Из (4.4) и (4.5) следует, что для нахождения энергии конденсата достаточно вычислить энергию нуклонов в поле

$$E_N(\varphi) = \sum \tilde{\epsilon}_n \tilde{n}^+ \tilde{n} + \sum \tilde{\epsilon}_p \tilde{p}^+ \tilde{p}.$$

Ниже мы будем добавлять к выражению (4.4) члены взаимодействия \mathcal{L}_{NN} и $\mathcal{L}_{\pi\pi}$, а также πNN^* -взаимодействие, позволяющее учесть N^* -резонанс.

Мы используем метод эффективного лагранжиана для учета вакуумного вклада в полное $\pi\pi$ -взаимодействие, как в случае слабых (IV.2), так и в случае сильных полей (IV.4).

Характер возможных решений. Как уже отмечалось, в достаточно плотном нуклонном веществе становится возможным рождение квазичастиц π^+ , π^- , π^0 . Рождающиеся квазичастицы макроскопически «заселяют» одно наиболее выгодное энергетически состояние, образуя конденсатное поле. В дальнейшем мы будем рассматривать классическое конденсатное поле $\varphi(\mathbf{r}, t)$, которое представляет собой среднее значение оператора пионного поля, по новому основному состоянию с нарушенной симметрией. Величина $\varphi(\mathbf{r}, t)$ играет роль комплексного параметра порядка, характеризующего новую фазу.

Из условия термодинамического равновесия относительно процессов рождения и уничтожения пар $\pi^+\pi^-$ -мезонов следует, что частоты (химпотенциалы) π^- - и π^+ -мезонов в конденсате, не только в критической точке, но и при $n > n_c^\pm$, связаны соотношением

$$\omega_s^+ + \omega_s^- = 0.$$

Таким образом, волновая функция конденсатного поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$, описывающая одновременно π^- - и π^+ -компоненты мезонного поля, должна иметь вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi_{\pi^-} e^{-i\omega^- t} + \varphi_{\pi^+}^* e^{i\omega_s^+ t} \right) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (4.7)$$

где введено обозначение $\omega \equiv \omega^- = -\omega_s^+$, $\varphi_{\pi^\pm} = \frac{\varphi_1 \pm i\varphi_2}{\sqrt{2}}$.

Такой же характер временной зависимости конденсатного поля получается в гамильтоновом формализме [64]. Что касается координатной зависимости, то точный вид $\varphi(\mathbf{r})$ должен определяться из уравнения движения, которое в данном случае является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Оставляя попытки найти точное решение, мы воспользуемся вариационным методом — будем задавать различные пробные функции $\varphi(\mathbf{r})$ и выберем из них ту, которой соответствует наименьшая энергия. Так как неустойчивость возникает для отличного от нуля импульса $k \sim m_\pi$, то пробные функции должны быть периодическими функциями \mathbf{r} . Простейшими функциями являются

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (\text{бегущая волна}), \quad (4.8)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = a \sin \mathbf{k}\mathbf{r} \quad (\text{стоячая волна}). \quad (4.9)$$

Амплитуда a определена так, чтобы среднее значение $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = a^2$. Так как поле π^0 -мезонов — вещественное и статическое, то для нейтральной компоненты конденсатного поля простейшее решение имеет вид (4.9). Эффективный лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ является функцией трех независимых переменных ω , \mathbf{k} и a . Уравнение движения сводится к алгебраическому уравнению для определения оптимальной амплитуды конденсатного поля a

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial a} = 0. \quad (4.10)$$

В некоторых случаях выполняется условие электронной нейтральности пионных квазичастиц $j_0 = e \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \omega} = 0^*$.

Тогда из условия минимальности энергии $\frac{\partial E}{\partial k} = 0$ следует $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial k} = 0$, т. е. отсутствие 4-тока в основном состоянии.

*) Такой случай осуществляется в нейтронной звезде (если пренебречь небольшой примесью π_s^+ -мезонов, заряд которых компенсируется зарядом электронов (см. V.1)), а также при $N = Z$. При рассмотрении сверхзаряженных ядер (VII.1) рассматривается случай, когда заряд пионов компенсируется зарядом протонов.

Таким образом,

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial k} = 0. \quad (4.11)$$

Из соотношений (4.10) и (4.11) определяются a , ω и k .

В пределе $a \rightarrow 0$, когда в лагранжиане \mathcal{L} можно ограничиться членами порядка a^2 , три уравнения (4.10) и (4.11) переходят в систему, определяющую критические параметры $\pi^+\pi^-$ -конденсации n_c^\pm , ω_c и k_c^\pm . В критической точке коэффициент при a^2 в $\tilde{\mathcal{L}}$ меняет знак и для определения параметров конденсата необходимо включить в $\tilde{\mathcal{L}}$ нелинейные по a^2 слагаемые. Вычисление таких слагаемых представляет собой довольно трудную в реалистической постановке задачу. Эту задачу удаётся решить для конденсатного поля вида (4.8), рассмотрению которого посвящается раздел V.2. Разумеется, предположение, что в случае сильных полей остаётся только одна гармоника поля, совершенно необосновано и все результаты, получаемые таким способом, носят качественный характер.

Разложение по амплитуде конденсатного поля. Эффективный лагранжиан пионного поля в силу псевдоскалярности пионов должен быть четной функцией поля $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ($\varphi_{\pi^\pm} = \frac{\varphi_1 \pm i\varphi_2}{\sqrt{2}}$, $\varphi_{\pi^0} = \varphi_3$). Вблизи критической точки его можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{L}}_\pi = \frac{1}{2} \sum_k \mathcal{D}^{-1} |\varphi_k|^2 - \frac{1}{4} \sum_{kk'} \Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega) |\varphi_k|^2 |\varphi_{k'}|^2, \quad (4.12)$$

где \mathcal{D} — пропатор пиона в нуклонной среде

$$\mathcal{D}^{-1} = \omega^2 - (1 + k^2) - \Pi(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.13)$$

Функция Λ в (4.12) описывает эффективное взаимодействие пионных квазичастиц в нуклонной среде. Условием фазового перехода 2-го рода является положительная определенность второго члена в правой части (4.12) в окрестности критической точки, т. е. $\sum_{kk'} \Lambda |\varphi_k|^2 |\varphi_{k'}|^2 > 0$ при обращении в нуль коэффициента при $|\varphi_k|^2$. В противном случае возникает фазовый переход 1-го рода, и разложение по φ_k неприменимо.

Определим величину $\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega)|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'}$, так, чтобы эффективный лагранжиан имел одинаковый вид как для бегущей, так и для стоячей волны

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\pi} = 1/2 \mathcal{D}^{-1} a^2 - 1/4 \Lambda(\mathbf{k}, \omega) a^4 + O(a^6). \quad (4.14)$$

Амплитуда a , частота ω и волновое число k конденсатного поля определяются из трех уравнений (4.10), (4.11). Первое из этих уравнений представляет собой уравнение движения для конденсатного поля, которое в данном случае является алгебраическим. Два других уравнения обеспечивают отсутствие 4-тока в основном состоянии системы.

Вблизи точки перехода 2-го рода амплитуда конденсатного поля $a \rightarrow 0$ и уравнения (4.10), (4.11) приобретают вид

$$\omega^2 = 1 + k^2 + \Pi(\mathbf{k}, \omega), \quad 2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega} = 0, \quad 2k + \frac{\partial \Pi}{\partial k} = 0.$$

Первое из них — дисперсионное уравнение пионных возбуждений. Второе выражение есть условие неустойчивости пионного поля относительно рождения $\pi^+ \pi^-$ -пар и π^0 -мезонов, а третье — условие равенства нулю тока.

Таким образом, в случае слабых полей задача нахождения лагранжиана сводится к вычислению величины $\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega)$. Для определения конденсатного поля достаточно знать величину $\Lambda(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \omega_c)$, где ω_c — частота конденсатного поля вблизи критической точки (в системе с $N = Z, \omega_c = 0$).

Вакуумное взаимодействие пионов. Нелинейные лагранжианы получаются в теории частично сохраняющегося аксиального тока (PCAC) из требования киральной симметрии при $m_{\pi} \rightarrow 0$. Как показал Вейнберг [65], простейший нелинейный лагранжиан, включающий нуклонное и пионное поля, может быть получен из линейного следующей заменой обычных производных

$$\partial_{\mu} \Phi \rightarrow \mathcal{D}_{\mu} \Phi = \frac{\partial_{\mu} \Phi}{1 + \Phi^2/F^2}, \quad (4.15)$$

$$\partial_{\mu} \Psi \rightarrow \mathcal{D}_{\mu} \Psi = \left[\partial_{\mu} + \frac{i\tau(\Phi \times \partial_{\mu} \Phi)}{F^2 + \Phi^2} \right] \Psi, \quad (4.16)$$

где $F = 1,35$, $m_{\pi} = 189$ МэВ — константа распада пиона. Заметим, что второе слагаемое в квадратных скобках

(4.16) в наинизшем порядке по φ описывает S -волновое πN -взаимодействие. Его вклад в поляризационный оператор пионов исследовался в работах [12, 15, 19]. Что касается массового члена лагранжиана, пропорционального m_π^2 , то имеется несколько вариантов его перенормировки. Так как при не слишком больших полях φ результаты слабо зависят от конкретного выбора, мы будем использовать простейший вариант, предложенный Вейнбергом [65]

$$m_\pi^2 \varphi^2 \rightarrow \frac{m_\pi \varphi^2}{1 + \varphi^2/F^2}. \quad (4.17)$$

Лагранжиан системы нуклонов и пионов без учета нуклонных корреляций и N^* -резонанса принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & w \Psi^+ \Psi - (\mathcal{D}_\alpha \Psi)^+ (\mathcal{D}_\alpha \Psi) / 2m_N + f \Psi^+ \sigma_\alpha \tau_\beta \Psi \mathcal{D}_\alpha \varphi_\beta + \\ & + \frac{\omega^2 \varphi^2 - (\nabla \varphi)^2}{(1 + \varphi^2/F^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2/F^2}, \quad (4.18) \end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. При $\varphi \ll F$ этот лагранжиан переходит в выражение (4.2).

Как было показано [35] в случае бегущей волны преобразования полей (4.15, 4.16), приводящие к лагранжиану Вейнберга, сводятся к сдвигу 4-импульса нуклонов. Обозначая

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{F},$$

получаем из (4.15) и (4.16) следующее правило преобразования 4-импульса нуклонов и пионного поля:

$$\begin{aligned} p & \rightarrow p + \tau_3 k \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \varepsilon(p) & \rightarrow \varepsilon\left(p + \tau_3 k \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \tau_3 \omega \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из (4.17) получаем

$$a^2 \rightarrow \frac{F^2}{4} \sin^2 \theta. \quad (4.20)$$

Свободный лагранжиан конденсатного поля в результате преобразований (4.17) и (4.20) приобретает вид

$$\mathcal{L}_\pi = -\frac{F^2}{8} \left[(k^2 - \omega^2) \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (4.21)$$

После того, как выполнены преобразования (4.19), (4.20), не представляет труда вычислить энергию π -конденсата для произвольной амплитуды (см. V.2).

IV.2. Взаимодействие в случае слабого пионного поля

Этот раздел посвящен вычислению функции $\Lambda(k, \omega)$, определяющей взаимодействие пионов в слабых полях,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\pi\pi} = 1/4\Lambda a^4.$$

Прежде всего Λ вычисляется в рассмотренной выше упрощенной модели (см. (4.2)), в которой учитывается только πN -взаимодействие. Найдено выражение для энергии нуклонов в поле конденсата с точностью до a^4 , которое после подстановки в (4.4) позволяет определить Λ как для случая бегущей, так и для случая стоячей волны.

Далее учитывается влияние на величину Λ нуклонных корреляций. Главный эффект нуклонного взаимодействия состоит в том, что значение Λ , найденное в упрощенной модели, умножается на фактор

$$\left[1 + g - \frac{p_F}{p_0} \Phi(k, 0) \right]^{-4}.$$

Затем учитывается вклад в Λ вакуумного $\pi\pi$ -взаимодействия, а также влияние N_{33}^* -резонанса.

Вычисление параметра взаимодействия Λ . Как это следует из лагранжиана (4.4), коэффициенты разложения по амплитуде a можно найти, вычисляя сумму одночастичных энергий нуклонов $\tilde{\varepsilon}(p)$ в поле конденсата φ .

Действительно, запишем плотность энергии нуклонов в поле конденсата в виде

$$\mathcal{E}_N(\varphi) = 2 \int_{\tilde{\varepsilon}(p) < \tilde{\varepsilon}_F} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\varepsilon}(p) = \mathcal{E}_N + \frac{\Pi a^2}{2} + \frac{\Lambda a^4}{4} + O(a^6), \quad (4.22)$$

где $\tilde{\varepsilon}_F$ — энергия Ферми в поле конденсата.

Для Π и Λ имеем

$$\Pi = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}_N}{\partial a^2} \right)_{a^2=0}, \quad \Lambda = 2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_N}{\partial (a^2)^2} \right)_{a^2=0}.$$

Таким образом, для определения Π и Λ достаточно найти $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})$ с точностью до членов четвертого порядка по амплитуде поля. Новая поверхность Ферми определяется условием

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) = \text{const} = \tilde{\epsilon}_F,$$

а энергия $\tilde{\epsilon}_F$ находится из требования сохранения числа частиц

$$n = 2 \int_{\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}) < \tilde{\epsilon}_F} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2},$$

где p_F — импульс старой поверхности Ферми. Заметим, что во всех рассматриваемых нами случаях, и, в частности, в наиболее реалистической модели, приведенной ниже, $\omega_{\pi^-} > \epsilon_F^{(n)}$. Поэтому заполнение «новых» протонных состояний энергетически невыгодно. Для превращения нейтронной квазичастицы в протонную и π^- -мезон требуется затратить энергию $\Delta\epsilon = \omega_{\pi^-} - \epsilon_F^{(n)}$. Таким образом, при $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации заполняются только новые нейтронные состояния.

Для проверки этого метода вычисления Π и Λ можно найти выражение для энергии $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})$ в рассмотренной выше модели, в которой имеется только πN -взаимодействие. В случае бегущей волны нетрудно найти точное выражение для $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})$ без разложения по a , поскольку в этом случае задача сводится к задаче о двух уровнях с импульсами \mathbf{p} и $\mathbf{p} - \mathbf{k}$ (V.2).

Находя энергию $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p})$ до членов a^4 , получаем из (4.22) выражение для Π , в точности совпадающее, как это и должно быть в такой модели, с полюсной частью Π_p поляризационного оператора (без учета нуклонных корреляций). Это служит хорошей проверкой правильности вычислений. Другой способ нахождения Λ — это непосредственное вычисление графиков, определяющих эту величину.

Процессы, определяющие $\pi\pi$ -взаимодействие. Начнем с того, что приведем графики, определяющие взаимодей-

стве Λ ,

$$\Lambda = \text{[diagram]} = \text{[diagram (1)]} + \text{[diagram (2)]} + \text{[diagram (3)]} + \text{[diagram (4)]} + \text{[diagram (5)]} + \text{[diagram (6)]} \quad (4.23)$$

Первый из этих графиков соответствует вакуумному лл-взаимодействию. Для выяснения физического смысла остальных графиков, обратимся к нелинейному лагранжиану Вейнберга, который выражает вакуумные вершины,

$$\text{[diagram (1)]} \quad \text{[diagram (2)]} \quad \text{[diagram (3)]} \quad \text{[diagram (4)]} \quad \text{[diagram (5)]} \quad (4.24)$$

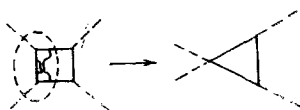
через известные константы f и F . В (4.23) (3) треугольником изображена уже знакомая нам вершина лN-взаимодействия в среде

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \Gamma = \mathcal{T}_0 \left[1 + g - \frac{p_F}{p_0} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \right]^{-1} \quad \text{для } N = Z, \text{ и}$$

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_0 \Gamma_n = \mathcal{T}_0 \left[1 + g - \frac{p_F}{p_0} \Phi_1(\mathbf{k}, \omega) \right]^{-1} \quad \text{для } Z = 0.$$

Величина Γ дает ослабление вершины в нуклонной среде. Согласно приведенной выше аргументации (стр. 128) все графики, соединенные более чем одной парой частица — дырка, определяются большими 4-импульсами промежуточных состояний и мало отличаются от своих пустотных значений. Поэтому в качестве вершин (4.24) в среде могут быть взяты их вакуумные значения, получаемые из лагранжиана Вейнберга.

Так, например, график вида



должен быть отнесен к типу (4) выражения (4.23). Действительно, часть графика, обведенная пунктиром, определяется большими 4-импульсами, а такие графики, как

мы видели (стр. 128), либо малы, либо включены в соответствующую вакуумную вершину.

Первый из графиков (4.23) получается непосредственно из разложения лагранжиана Вейнберга в ряд по степеням φ до членов φ^4 . Второй из графиков получается либо непосредственным вычислением с помощью функции Грина, либо нахождением нуклонной энергии $\mathcal{E}_N(a^2)$ в поле конденсата с точностью до членов a^4 . Оба способа дают совпадающий результат.

Третий и пятый графики выражаются через полюсную часть поляризационного оператора. Четвертый график (4.23) выражается через производные $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial k}$. Эти графики также могут быть вычислены либо с помощью функций Грина, либо из разложения (4.22), если включить в лагранжиан πN -взаимодействие, определяемое вершинами 1), 2) и 3) выражения (4.24). Наконец, график 6) выражается через вершину 4) выражения (4.24) и плотность нуклонов, поскольку замкнутой нуклонной петле соответствует функция Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \langle \Psi^+(\mathbf{r}), \Psi(\mathbf{r}) \rangle = n(\mathbf{r}).$$

Таким образом, выражение (4.23) для Λ может быть получено либо непосредственно с помощью функций Грина, либо из разложения по a функции Лагранжа, в которую, наряду с обычным πN -взаимодействием, включены взаимодействия, соответствующие вершинам (4.24).

Как мы увидим (IV.3) непосредственно вблизи критической точки играют существенную роль диаграммы вида

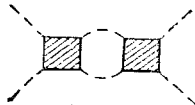


График такого вида со свободными пионными линиями определяется большими 4-импульсами и учтен в пустотной вершине 1) выражения (4.23). По мере удаления от критической точки неучтенная часть этого графика делается несущественной. Кроме всех перечисленных диаграмм существенны также графики, в которых одна или две нуклонные линии заменены линиями N^* -резонанса.

Учет N^* -резонанса. Для получения графиков, содержащих N^* , необходимо знать вакуумные вершины вида (4.24), в которых одна или две нуклонные линии заменены линиями N^* -резонанса. Для этого требуется ввести в нелинейный лагранжиан Вейнберга наряду с нуклонами и пионами дополнительную частицу с квантовыми числами $S = T = 3/2$. Эта задача была решена в [20] с помощью требования киральной симметрии. Была найдена связь между вершинами типа $N^*\pi N$, $N^*2\pi N$, $N^*\pi N^*$, $N^*2\pi N^*$ и аналогичными нуклонными вершинами на основе $SU(4)$ кварковой модели. Эти результаты можно записать в компактной форме в виде матрицы 6×6 (по базису состояний N^{*++} , N^{*+} , p , n , N^{*0} , N^{*-}), Матричные элементы этой матрицы дают слагаемые вакуумного лагранжиана, определяющие соответствующий процесс. Задача решена для поля заряженных пионов вида бегущей волны с произвольной амплитудой $(\frac{F}{2} \sin \theta)$. Предполагается (для чего нет никаких оснований), что конденсат нейтральных пионов отсутствует.

Итак, для определения одночастичных энергий «новых» частиц требуется диагонализация матрицы

$$H^* = \begin{vmatrix} a + 3b + & \frac{id}{\sqrt{3}} & -\frac{4id}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ +9c + \Delta & & & & & \\ -\frac{id}{\sqrt{3}} & a + b + & 0 & -\frac{4id}{\sqrt{18}} & \frac{2id}{3} & 0 \\ +c + \Delta & & & & & \\ \frac{4id}{\sqrt{6}} & 0 & a + b + c & \frac{5id}{3} & \frac{4id}{\sqrt{18}} & 0 \\ 0 & \frac{4id}{\sqrt{18}} & -\frac{5id}{3} & a - b + c & 0 & \frac{4id}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2id}{3} & -\frac{4id}{\sqrt{18}} & 0 & a - b + & +\frac{id}{\sqrt{3}} \\ & & & & +c + \Delta & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4id}{\sqrt{6}} & -\frac{id}{\sqrt{3}} & a - 3b + \\ & & & & & +9c + \Delta \end{vmatrix},$$

где $a = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega$, $b = \frac{1}{2} \left(\omega - \frac{pk}{m} \right) \cos \theta$, $c = \frac{k^2}{8m} \cos^2 \theta$,
 $d = \frac{3}{10} g_A k \sin \theta$, $\Delta = m_{N^*} - m_N \approx 2,2$, $\theta = 2 \arctg \frac{a}{F}$.

Разлагая соответствующие матричные элементы по степеням θ , можно найти вершины (4.24) как для случая нуклонных переходов, так и для переходов с участием N^* -резонанса.

Как следует из выражения (4.25) рлп-вершина (H_{pn}^*) связана с N^* +лп-вершиной ($H_{N^{*+n}}^*$) множителем

$$\sqrt{\frac{8}{25}} = 0,56. \text{ Это неплохо согласуется со значением } 0,47$$

для отношения этих вершин при $k = k_R$, которое получается, если использовать, как это было сделано в гл. III, экспериментальные данные по лN-рассеянию в районе N_{33}^* -резонанса.

Метод учета нуклонных корреляций, предложенный в [21], соответствует предположению, что взаимодействия NN, NN* и N*N* одинаковы с точностью до коэффициентов Клебша — Гордана. Между тем, экспериментальные данные по (pp, N*n)-рассеянию с большими передаваемыми импульсами $q \sim 600$ МэВ/с [54], по-видимому, свидетельствуют о слабом взаимодействии NN* на малых расстояниях. Поэтому мы будем проводить оценки в двух предположениях: 1) взаимодействие между всеми барионами одинаково и 2) корреляции существуют только между нуклонами.

Для описания л-конденсации в чисто нейтронной среде выражение (4.25) использовалось в работах [20, 21], где была выполнена явно диагонализация H^* в двух интересных предельных случаях; $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \pi/2$. При $\theta \rightarrow 0$ задача сводится к определению критических параметров л-конденсации. Полученные в [21] значения n_c , k_c и ω_c оказались близкими к рассчитанным в [15] другим методом. К вопросу о вкладе N^* -резонанса в случае развитого конденсата ($\theta \rightarrow \pi/2$) мы вернемся в разделе V.2.

Результаты вычисления Л. Отдельные слагаемые выражения (4.23) вычислялись несколькими способами (за исключением слагаемого 1), которое непосредственно получается из лагранжиана Вейнберга). Слагаемое 2) находилось как с помощью функции Грина, так и путем разложения эффективного лагранжиана до членов a^4 . Слагаемые типа 3) с учетом N^* -резонанса сводятся к поляризационному оператору, а типа 4) — к его производ-

ным. Последнее слагаемое пропорционально ω , и поэтому обращается в нуль при $N = Z$.

Приведем результаты вычисления Λ^*). Как уже отмечалось, вычисления пока проведены для конденсата заряженных пионов, имеющего вид бегущей волны (4.8). Приведены также соответствующие выражения для поляризованного оператора, так как они несколько отличаются от тех, которые были получены в гл. III.

В среде с $Z = 0$ формула для Λ в общем случае оказывается очень громоздкой. Здесь мы приведем ответ, полученный в приближении больших частот $\omega \gg kv_F$. В предположении, что локальные амплитуды NN^- , NN^* - и N^*N^* -взаимодействий одинаковы

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{2}{F^2} [2(k^2 - \omega^2) + 1] - \frac{4}{F^2} \Pi^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) + \\ + 8(f\Gamma_1^*k)^2 n\omega \frac{\partial W_1}{\partial \omega} + 4(f\Gamma_1^*k)^4 nW_2 - \frac{4}{F^4} n\omega. \quad (4.26)$$

Здесь:

$$\Pi^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) = -2f^2 k^2 \Gamma_1^* nW_1, \quad \Gamma_1^* = \left[1 + g^- \frac{\pi^2}{m p_0} nW_1 \right]^{-1}, \\ W_1 = \frac{1}{\omega} + \frac{8}{25} \frac{1}{\Delta + \omega} + \frac{24}{25} \frac{1}{\Delta - \omega}, \\ W_2 = \frac{1}{\omega^3} + \frac{8}{25} \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{\Delta + \omega} + \frac{3}{\Delta - \omega} - \frac{1}{\Delta} - \frac{3}{\Delta + 2\omega} \right] + \\ + \frac{8}{25} \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{(\Delta + \omega)^2} + \frac{3}{(\Delta - \omega)^2} - \frac{0,8}{\Delta(\Delta + \omega)} - \frac{1,2}{(\Delta + \omega)(\Delta + 2\omega)} - \right. \\ \left. - \frac{2,4}{\Delta(\Delta - \omega)} \right] + \frac{64}{625} \left[\frac{1}{(\Delta + \omega)^3} + \frac{3}{(\Delta + \omega)^2(\Delta - \omega)} + \right. \\ \left. + \frac{3}{(\Delta - \omega)^2(\Delta + \omega)} + \frac{9}{(\Delta - \omega)^3} - \frac{0,5}{\Delta(\Delta + \omega)^2} - \right. \\ \left. - \frac{0,375}{(\Delta + 2\omega)(\Delta + \omega)^2} - \frac{1,175}{\Delta(\Delta - \omega)^2} - \frac{1,5}{(\Delta - \omega)\Delta(\Delta + \omega)} \right].$$

*) Приведенные ниже выражения для Λ получены И. Н. Мишустинным (должно на сессии Отделения ядерной физики АН СССР, Москва, февраль, 1976; см. также [22] и [66]).

Если корреляции NN^* и N^*N^* отсутствуют, то перенормировочный множитель Γ_1^* заменяется на

$$\Gamma_1 = \left[1 + g^- \frac{\pi^2}{m p_0} \frac{n}{\omega} \right]^{-1},$$

причем в Λ и $\Pi^{(-)}$ перенормируются множителями Γ_1 , Γ_1^2 и Γ_1^4 лишь члены, содержащие соответственно $1/\omega$, $1/\omega^2$ и $1/\omega^3$.

В среде с $N = Z$ для конденсатного поля вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = a \{ \cos \mathbf{kr}, \sin \mathbf{kr}, 0 \}$$

(бегущая волна с $\omega = 0$) при одинаковых NN^- , NN^* - и N^*N^* -корреляциях получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Lambda(k) = & -\frac{2}{F^2} (2k^2 + 1) - \frac{4}{F^2} \Pi(k, 0) + \\ & + 8 \frac{m^* p_F}{\pi^2} \left(\frac{f \Gamma^* k}{F} \right)^2 \left[k \frac{\partial}{\partial k} \Phi \left(\frac{k}{2p_F} \right) - \frac{64}{75} \left(\frac{kv_F}{\Delta} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{4 (f \Gamma^* k)^4}{3\pi^2 v_F^3} \left[\Phi_2 \left(\frac{k}{2p_F} \right) + \frac{384}{125} \left(\frac{\varepsilon_F}{\Delta} \right)^2 \left(\Phi \left(\frac{k}{2p_F} \right) + \frac{20}{3} \frac{\varepsilon_F}{\Delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь:

$$\Pi(k, 0) = -\frac{2m^* p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \Gamma^* \Phi^* \left(\frac{k}{2p_F} \right),$$

$$\Gamma^* = \left[1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi^* \left(\frac{k}{2p_F} \right) \right]^{-1},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad \Phi^*(x) = \Phi(x) + \frac{128}{75} \frac{\varepsilon_F}{\Delta},$$

$$\Phi_2(x) = \frac{3}{16x^2} \left[\ln^2 \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{2}{1-x^2} \right].$$

Если корреляции существуют только между нуклонами, а локальные NN^* - и N^*N^* -амплитуды равны нулю, то для $N = Z$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda(k) = & -\frac{2}{F^2} (2k^2 + 1) - \frac{4}{F^2} \Pi(k, 0) + \\ & + 8 \frac{m^* p_F}{\pi^2} \left(\frac{fk}{F} \right)^2 \left[\Gamma^2 k \frac{\partial}{\partial k} \Phi \left(\frac{k}{2p_F} \right) - \frac{64}{75} \left(\frac{kv_F}{\Delta} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{4 (fk)^4}{3\pi^2 v_F^3} \left[\Gamma^4 \Phi_2 \left(\frac{k}{2p_F} \right) + \frac{384}{125} \left(\frac{\varepsilon_F}{\Delta} \right)^2 \left(\Gamma \Phi \left(\frac{k}{2p_F} \right) + \frac{20}{3} \frac{\varepsilon_F}{\Delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27')$$

Здесь:

$$\Pi(k, 0) = -\frac{2m^* p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \left[\Gamma \Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right) + \frac{128}{75} \frac{\varepsilon_F}{\Delta} \right],$$

$$\Gamma = \left[1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right) \right]^{-1}.$$

Выражения (4.26) и (4.27) для параметра Λ , описывающего взаимодействие пионных возбуждений в нуклонной среде, являются достаточно реалистическими. Мы будем использовать их в дальнейшем при численных оценках. В окрестности критической точки во всех рассмотренных случаях Λ оказывается положительной. Так, при $n = n_0$, $k = p_F$ и $g^- = 1,6$ выражения (4.27) и (4.27') дают значения, соответственно, 0,4 и 8,1.

Заметим, что даже усложненная модель, рассмотренная выше, не может дать количественно величину Λ . Не учитывалось локальное скалярное NN-взаимодействие, многочастичные корреляции и ряд других факторов, указанных выше. Неизвестны величины NN*- и N*N*-взаимодействий и, кроме того, неизвестны константы спин-спинового взаимодействия между нуклонами для нейтронной среды. Наконец, не исследована возможность фазового перехода 1-го рода — такое исследование требует привлечения численных методов.

В следующем параграфе будет рассмотрено приближение Томаса — Ферми, справедливое при $k^2/4p_F^2 \ll 1$. Этим методом можно получить выражение для Λ при произвольном виде конденсатного поля $\phi(\mathbf{r})$. Кроме того, это приближение дает хороший способ проверки формул, полученных выше, в пределе $k \rightarrow 0$.

IV.3. Приближение слабо изменяющегося поля

Этот раздел посвящен исследованию π -конденсации в изотопически-симметричной ядерной материи ($Z = N$), а также π^0 -конденсации при $N \gg Z$. Как уже отмечалось выше, благодаря изотопической симметрии неустойчивость в системе с $Z = N$ наступает одновременно для всех трех типов пионов π^+ , π^- и π^0 . В результате этой неустойчивости возникает статический электронейтральный

π -конденсат

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \left(\varphi_{\pi\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 \pm i\varphi_2), \quad \varphi_{\pi^0} = \varphi_3 \right),$$

причем, отличны от нуля, вообще говоря, все три компоненты пионного поля. Поэтому к трудностям определения пространственной структуры конденсатного поля добавляется еще одна, связанная с выбором оптимального изотопического состава конденсата. Возникает довольно трудная в реалистической постановке задача о нахождении энергии системы в присутствии конденсата, имеющего сложную пространственную и изотопическую структуру.

Удобным методом для качественного решения этой задачи является приближение Томаса — Ферми. Условием применимости метода Томаса — Ферми в случае периодических потенциалов является неравенство

$$k^2/4p_F^2 \ll 1$$

(k — волновой вектор поля). Между тем, согласно расчетам, конденсация происходит при $k \approx p_F$, поэтому, используя приближение Томаса — Ферми, мы не можем рассчитывать на хорошую количественную точность. Как мы увидим, в этом приближении удается найти параметры конденсации при более широких предположениях о пространственной и изотопической структуре конденсата, чем в случае теории возмущений. Кроме того, этот метод можно развить так, чтобы учесть все вершины (4.24), возникающие из лагранжиана Вейнберга.

Наиболее выгодной при $N \gg Z$ оказывается структура π^0 -конденсата типа трехмерной решетки, а при $N = Z$ возникает изотопически-несимметричное конденсатное поле ($\varphi_1, \varphi_2 \neq \varphi_3$).

Метод Томаса — Ферми. Рассмотрим систему нуклонов ($N = Z$), взаимодействующих с классическим полем статического пионного конденсата. Если не учитывать переходы нуклонов в N_{33}^* -состояния, такое взаимодействие можно описывать потенциалом

$$U = f\tau_\alpha\sigma_\beta \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (4.28)$$

который является оператором в пространстве спиновых и изоспиновых переменных.

Плотность энергии нуклонов в приближении Тома-са — Ферми дается выражением

$$\mathcal{E}_N = \frac{2(2m)^{3/2}}{5\pi^2} \langle (\tilde{\varepsilon}_F - U)^{3/2} \rangle + \frac{2(2m)^{3/2}}{3\pi^2} \langle U (\tilde{\varepsilon}_F - U)^{3/2} \rangle. \quad (4.29)$$

Угловые скобки означают усреднение по координатам, спиновым и изоспиновым переменным. Плотность частиц и плотность спина при этом

$$n(\mathbf{r}) = \frac{2(2m)^{3/2}}{3\pi^2} \frac{1}{4} \text{Tr}_\sigma \text{Tr}_\tau (\tilde{\varepsilon}_F - U)^{3/2},$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{2(2m)^{3/2}}{3\pi^2} \frac{1}{4} \text{Tr}_\sigma \text{Tr}_\tau [\boldsymbol{\sigma} (\tilde{\varepsilon}_F - U)^{3/2}]. \quad (4.30)$$

Множитель 2 в (4.29) и (4.30) по сравнению с обычными формулами учитывает 2 типа частиц.

Энергия Ферми нуклонов $\tilde{\varepsilon}_F$ в поле U определяется тем, что средняя плотность частиц не меняется при наложении на систему поля

$$\overline{n(\mathbf{r})} = \frac{2}{3\pi^2} p_F^3.$$

Подставляя $n(\mathbf{r})$ из (4.30), получаем

$$\tilde{\varepsilon}_F = \varepsilon_F - \frac{m}{2p_F} \langle U^2 \rangle - \frac{3m^2}{8p_F^6} \left(\langle U^2 \rangle^2 + \frac{1}{3} \langle U^4 \rangle \right) + O(U^6). \quad (4.31)$$

Добавляя к \mathcal{E}_N (см. (4.29)) энергию свободного пионного поля, находим среднюю плотность энергии

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + 1/2 \langle \varphi^2 \rangle + 1/2 \langle (\nabla \varphi)^2 \rangle.$$

Для периодических полей $\varphi(r)$ с волновым числом k , минимизируя по амплитуде поля, получаем с точностью до φ^4 [67; 22]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\varphi=0) + \mathcal{E}_\pi, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{E}_\pi = -\frac{\tilde{\omega}^4}{4\lambda} 4 \left[3 + \frac{\left\langle \left(\sigma_\beta \tau_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} \right)^4 \right\rangle}{\left\langle \left(\sigma_\beta \tau_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} \right)^2 \right\rangle^2} \right]^{-1},$$

где

$$\tilde{\omega}^2 = 1 + k^2 - f^2 k^2 \frac{dn}{de_F} (1 + g^- p_F / p_0)^{-1},$$

$$\lambda = \frac{f^4 k^4 n}{4e_F^3} \left(1 + g^- \frac{p_F}{p_0}\right)^{-4}.$$

Величина \mathcal{E}_π описывает понижение энергии основного состояния, вызванное конденсацией. Множителем $(1 + g^- p_F / p_0)^{-1}$ учитывается главный вклад нуклонных корреляций.

В результате несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\sigma_\alpha \tau_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^4 \right\rangle &= \overline{(\nabla \Phi)^4} + \overline{(\nabla \Phi_1 \times \nabla \Phi_2)^2} + \\ &+ \overline{(\nabla \Phi_1 \times \nabla \Phi_3)^2} + \overline{(\nabla \Phi_2 \times \nabla \Phi_3)^2}, \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\left\langle \left(\sigma_\alpha \tau_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right\rangle = \overline{(\nabla \Phi)^2}.$$

Пространственная и изотопическая структура конденсата. Сведения об изотопической и пространственной структуре конденсата можно получить, анализируя выражения (4.33).

Три последних слагаемых обращаются в нуль в случае одномерного (или сферически-симметричного) поля, а первое при этом минимально, если $(\nabla \Phi)^2$ не зависит от координат:

$$(\nabla \Phi)^2 = \text{const.} \quad (4.34)$$

Таким образом, минимуму энергии (4.32) отвечают одномерные конденсатные поля, удовлетворяющие условию (4.34). Для таких полей

$$\mathcal{E}_\pi = (\mathcal{E}_\pi)_{\min} = -\omega^4 / 4\lambda.$$

Примерами одномерных решений уравнений (4.34) являются

$$\Phi(\mathbf{r}) = a \{ \cos kx, -\sin kx, 0 \}, \quad (4.35)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = a \left\{ \frac{\cos kx}{\sqrt{2}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{2}}, \sin kx \right\}, \dots \quad (4.36)$$

Заметим, что пионные поля, удовлетворяющие условию (4.34), не модулируют ни нейтронную, ни протонную плотности (вопрос о модуляциях плотности нуклонов рассмотрен в V.I в более реалистической модели без использования приближения Томаса — Ферми).

Перейдем к случаю π^0 -конденсации в нейтронной среде ($Z = 0$). Для этого положим в (4.33) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

В табл. 2 приведены значения энергии различных конфигураций поля $\varphi_3(\mathbf{r})$, среди которых есть одномерные,

Таблица 2

Отношение энергий различных конфигураций поля конденсата $\varphi_3(\mathbf{r})$ к энергии трехмерной структуры $\mathcal{E}_\pi^{(3)}$ в приближении Томаса — Ферми

$\varphi_3(\mathbf{r})$	$\frac{\mathcal{E}_\pi}{\mathcal{E}_\pi^{(3)}}$
$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \sin kx + \sin ky + \sin kz$	1
$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \sin kx + \sin ky$	50/51
$\varphi^{(3)}(\mathbf{r}) = \sin kx$	25/27
$\varphi^{(4)}(\mathbf{r}) \simeq \sin kx \sin ky \sin kz$	20/21

двумерные, трехмерные. Наиболее низкую энергию имеет мезонное поле вида трехмерной решетки

$$\varphi_3(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{3}} a (\sin kx + \sin ky + \sin kz), \quad (4.37)$$

для которого

$$a^2 = -\frac{27}{25} \frac{\tilde{\omega}^2}{\lambda}, \quad \mathcal{E}_{\pi^0} = -\frac{27}{100} \frac{\tilde{\omega}^4}{\lambda}.$$

В этих выражениях

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2 &= 1 + k^2 - f^2 k^2 \frac{dn}{d\varepsilon_F} \left(1 + g^{nn} \frac{P_F}{P_0}\right)^{-1}, \\ \lambda &= f^4 k^4 \frac{n}{4\varepsilon_F^3} \left(1 + g^{nn} \frac{P_F}{P_0}\right)^{-4}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Таким образом, наиболее вероятной структурой поля π^0 -конденсата в нейтронной среде является трехмерная решетка (4.37). Следует подчеркнуть, что этот вывод

основан на приближенном методе расчета ($k^2/4\rho_F^2 \ll 1$) и для окончательного решения вопроса о структуре π^0 -конденсата в нейтронной среде необходимо произвести расчет для $k \simeq p_F$. Кроме того, необходимо учесть N_{33}^* -резонанс, вакуумное лл-взаимодействие и, наконец, взаимодействие π^0 -конденсата с конденсатом заряженных мезонов, которое также существенно влияет на структуру конденсатов.

Используя выражение (4.30), легко получить распределение плотности частиц и плотности спина нейтронов в поле (4.37).

Разлагая $n(r)$ и $S(r)$ до квадрата потенциала, находим

$$n(\mathbf{r}) = n [1 + \xi^2 (\cos 2kx + \cos 2ky + \cos 2kz)],$$

$$\xi^2 = \frac{f^2 k^2 a^2}{8\varepsilon_F^2} \frac{1}{\left(1 + g^{nn} \frac{p_F}{p_0}\right)^2}, \quad (4.39)$$

$$S(\mathbf{r}) = \frac{m p_F}{\pi^2} \frac{1}{\left(1 + g^{nn} p_F/p_0\right)} \nabla \Phi_3(\mathbf{r}). \quad (4.40)$$

Глава V

ПИОННАЯ КОНДЕНСАЦИЯ В НУКЛОННОЙ СРЕДЕ

В случае фазовых переходов 2-го рода параметр порядка, характеризующий новую фазу, нарастает от нулевого значения, поэтому вблизи точки перехода в задаче имеется малый параметр. В теории π -конденсации при плотности, близкой к критической, таким малым параметром является амплитуда классического пионного поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Поэтому для изучения свойств конденсата вблизи критической точки можно использовать найденное выше разложение эффективной функции Лагранжа по степеням амплитуды поля. С помощью этого выражения будет найдена амплитуда конденсатного поля и энергия, выигрываемая при конденсации, как функция плотности нуклонов.

В случае нейтронной среды механизм конденсации несколько сложнее, чем для среды с $N = Z$. Сначала при $n \simeq 0,4n_0$ возникает конденсация π_s^+ -мезонов, а затем при $n \simeq n_0$ наступает неустойчивость для рождения пар $\pi^- \pi_s^+$ -мезонов. В случае нейтронной звезды, где выполняется условие электронейтральности и заряд π_s^+ -мезонов компенсируется зарядом электронов, плотность π_s^+ -мезонов и энергия π_s^+ -конденсата невелики и π_s^+ -конденсация искажает выражение для энергии $\pi^- \pi_s^+$ -конденсации только вблизи $n = n_c^\pm$.

Нейтронные системы конечного размера, где не выполняется условие электронейтральности, рассматриваются в VII.2 в связи с выяснением возможности существования нейтронных ядер. Найдена амплитуда модуляции спиновой плотности и плотности нуклонов, вызываемой π -конденсацией.

Исследуются особенности в эффективном взаимодействии пионов, вызванные «смягчением» пионной степени свободы вблизи точки конденсации. Эти особенности приводят к тому, что вместо перехода 2-го рода происходит переход 1-го рода с небольшим скачком поля ϕ . Это явление изменяет результаты, полученные в предположении перехода 2-го рода, только в ближайшей окрестности точки фазового перехода.

Второй раздел главы V.2 посвящен нахождению энергии конденсата в случае сильного конденсатного поля. Приведенное в этом разделе выражение для энергии конденсата при плотности нуклонов $n \gg n_c$ (модель предельного поля) используется в VII.2 для выяснения возможности существования сверхплотных ядер.

V.1. Свойства конденсата вблизи критической точки

Эффективный лагранжиан пионов, найденный в случае слабых полей в IV.2, используется для определения амплитуды и энергии конденсата вблизи критической точки. Выясняются особенности π_s^+ -конденсации в нейтронной среде.

Получены выражения, описывающие модуляцию плотности нуклонов и их спиновой плотности в поле конденсата. Показано, что благодаря квантовым флуктуациям конденсация соответствует фазовому переходу 1-го рода, но с малым скачком поля, таким, что выражения, полученные в предположении фазового перехода 2-го рода искажаются только в непосредственной близости к критической точке.

Энергия и амплитуда конденсата. Для нахождения энергии конденсата вблизи критической точки можно использовать выражение функции Лагранжа для слабых пионных полей, полученное в IV.2.

Если отвлечься от не очень существенного влияния π_s^+ -конденсации в нейтронной среде, которая рассматривается в следующем разделе, выражения для энергии конденсата для случая $Z \simeq N$ и случая $Z \ll N$ имеют одинаковый вид и отличаются только численным коэффициентом и значением критической плотности.

Рассмотрим электронейтральный конденсат, т. е. случай, когда выполняется условие пионной электроней-

тральности $\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\pi}{\partial \omega} = 0$. Случай заряженного конденсата (π_s^+ -конденсация) рассматривается в следующем разделе.

Из соотношения (4.5) между энергией и функцией Лагранжа следует, что при условии электронейтральности пионного поля плотность энергии конденсата отличается только знаком от выражения (4.14) для $\tilde{\mathcal{L}}_\pi$

$$\mathcal{E}_\pi(a^2) = -\frac{1}{2} \mathcal{D}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) a^2 + \frac{1}{4} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) a^4, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega)$ — пропагатор пиона

$$\mathcal{D}^{-1} = \omega^2 - \omega_k^2 - \Pi(\mathbf{k}, \omega).$$

Минимизируя $\mathcal{E}_\pi(a^2)$ по a^2 и используя условие (4.11), получим систему уравнений для определения a^2 , волнового вектора \mathbf{k} и частоты конденсата ω

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_k^2 - \Pi(\mathbf{k}, \omega) - \Lambda a^2 &= 0, \\ \left(2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}\right) a^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} a^4 &= 0, \\ \left(2k + \frac{\partial \Pi}{\partial k}\right) a^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial k} a^4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В критической точке, т. е. при $n = n_c$, $a^2 = 0$, находим

$$\begin{aligned} \left(2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}\right)_c &= \left(2k + \frac{\partial \Pi}{\partial k}\right)_c = 0, \\ \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}_c^{-1} &= \omega_c^2 - \omega_{k_c}^2 - \Pi(k_c, \omega_c) |_{n=n_c} = 0. \end{aligned}$$

Вблизи критической точки имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1} &= \left\{ \left(2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}\right) \frac{d\omega}{dn} - \left(2k + \frac{\partial \Pi}{\partial k}\right) \frac{dk}{dn} + \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right\}_c (n - n_c) = \\ &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial n} \right)_c (n - n_c). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Подставляя это выражение в 1-ое из уравнений (5.2), находим

$$a^2 = \alpha (n - n_c), \quad \alpha = - \left[\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right]_c. \quad (5.4)$$

Подстановка (5.2) и (5.3) в (5.1) дает

$$\mathcal{E}_\pi = -\beta \frac{(n - n_c)^2}{2}, \quad \beta = \left[\frac{1}{2\Lambda} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial n} \right)^2 \right]_c. \quad (5.5)$$

Используя выражения (3.49) — (3.51) для Π , а также (4.26), (4.27) для Λ , полученные в наиболее реалистической модели для случая бегущей волны, можно рассчитать параметры α , β и $\eta = -\frac{\partial \Pi}{\partial n}$, определяющие свойства конденсата вблизи критической точки. Приведем здесь значения этих параметров для среды с $N = Z$, полученные в предположении, что NN*- и N*N*-корреляции отсутствуют, а константа NN-корреляций $g^- = 1,6$. Используя приведенные в табл. 1 значения $n_c = 0,34$ и $k_c = 2,13$, находим

$$\alpha = 0,4; \quad \beta = 1,3; \quad \eta = 6,2.$$

Параметры n_c и β , рассчитанные в предположении, что NN-, NN*- и N*N*-взаимодействия одинаковы для случаев $N = Z$ и $Z = 0$, приведены в VII.2 в таблице 4 в зависимости от параметра γ , определяющего это взаимодействие

$$\gamma = g^- \frac{\pi^3}{2m p_0 f'^2}.$$

При этом учитывалось возможное отличие константы πN -взаимодействия в среде f' от вакуумного значения f . Важно подчеркнуть, что во всех случаях величина β оказывается близкой к 1.

π_s^+ -конденсация в нейтронной среде. Как было показано (III.3), в нейтронной среде при плотности $n > n_c^+$ ($n_c^+ \simeq 0,4n_0$) ветвь π_s^+ -мезонов имеет энергию $\omega_s^+ < < -(\epsilon_F^{(n)} - \epsilon_F^{(p)})$. В результате возникает неустойчивость относительно процесса $p \rightarrow n + \pi_s^+$.

Таким образом, еще до наступления неустойчивости, связанной с образованием пар π^- , π_s^+ , появляется конденсат π_s^+ -мезонов.

Как и в случае конденсации в электрическом поле (II.4), результат зависит от того, выполняется ли в системе условие электронейтральности. Рассмотрим сначала

да нейтронную систему большого размера (нейтронная звезда), в которой это условие должно выполняться.

До конденсации плотность протонов равняется плотности электронов

$$n_p = n_e = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2}.$$

Химический потенциал (энергия Ферми) электронов в равновесии до конденсации равен $\mu_e = \epsilon_F^n - \epsilon_F^p$, а после конденсации $\mu_e = -\omega_s^+$.

Эти соотношения вытекают из условий равновесия системы относительно реакций

$$n \rightleftharpoons p + e + \tilde{\nu}, \quad n \rightleftharpoons n + \pi_s^+ + e + \tilde{\nu}.$$

Полная плотность энергии системы может быть записана в виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_\pi + \frac{\mu_e^4}{4\pi^2}, \quad (5.6)$$

где последнее слагаемое — энергия релятивистских электронов.

Найдем энергию π_s^+ -конденсата. Для этого запишем лагранжиан пионов в виде

$$\tilde{\mathcal{L}}_\pi = (\omega^2 - \omega_h^2 - \Pi(k, \omega))^+ \frac{a^2}{2} - \Lambda \frac{a^4}{4},$$

где a — амплитуда поля π_s^+ -мезонов.

В отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе, здесь не соблюдается условие пионной электро-нейтральности ($\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \omega} \neq 0$).

Согласно (4.6) имеем

$$n_\pi = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_\pi}{\partial \omega} = \left(2\omega - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}\right)^+ \frac{a^2}{2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{a^4}{4}. \quad (5.7)$$

Плотность пионной энергии на основании (4.5), (4.14) равна

$$\mathcal{E}_\pi = \omega_s^+ \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_\pi}{\partial \omega} - \tilde{\mathcal{L}}_\pi = \omega_s^+ n_\pi + \frac{\omega_h^2 + \Pi - \omega^2}{2} a^2 + \Lambda \frac{a^4}{4}.$$

Используя (5.2), получаем

$$\mathcal{E}_\pi = \omega_s^+ n_\pi - \Lambda \frac{a^4}{4}. \quad (5.8)$$

Вблизи критической точки можно пренебречь вторым слагаемым (5.8). Тогда плотность энергии системы после конденсации будет

$$\mathcal{E} = \omega_s^+ n_\pi + \frac{(\omega_s^+)^4}{4\pi^2} + \mathcal{E}_N, \quad n_\pi = n_e = \frac{|\omega_s^+|^3}{3\pi^2}. \quad (5.9)$$

Плотность энергии до конденсации

$$\mathcal{E}^0 = \frac{(\varepsilon_F^n - \varepsilon_F^p)^4}{4\pi^2} + \mathcal{E}_N^0.$$

Будем пренебрегать для простоты кинетической энергией протонов (при $n \sim n_0$ плотность протонов в нейтронной звезде $\sim 10^{-2}n_n$). Тогда изменение нуклонной энергии при конденсации равно (n_p протонов переходит в нейтральное состояние)

$$\mathcal{E}_N - \mathcal{E}_N^0 = n_p \varepsilon_F^{(n)} \simeq \frac{(\varepsilon_F^{(n)})^4}{3\pi^2}.$$

Подставляя это выражение в (5.9), получим

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 - \frac{(\omega_s^+)^4}{12\pi^2} + \frac{(\varepsilon_F^{(n)})^4}{12\pi^2}. \quad (5.10)$$

Энергия системы не испытывает скачка при $n = n_c^+$, поскольку в этой точке $\omega_s^+ = \varepsilon_F^{(n)} - \varepsilon_F^{(p)} \simeq \varepsilon_F^{(n)}$. При увеличении плотности $|\omega_s^+|$ растет быстрее, чем $\varepsilon_F^{(n)}$, однако при увеличении a^2 , согласно (5.2), рост $|\omega_s^+|$ замедляется благодаря отталкиванию между пионами ($\Lambda > 0$). В результате этого неустойчивость относительно рождения пар $\pi^- \pi_s^+$ ($\omega^- + \omega_s^+ = 0$) не возникает — она возникала только без учета поля π_s^+ -конденсата. В этом нетрудно убедиться, используя выражения для n_π и для ω_s^+ .

Получается сложная зависимость энергии конденсации от плотности, однако, качественно картина совершенно аналогична рассмотренному в II.1 случаю конденсации в электрическом поле.

Если ввести понятие «свободных» π^- , π_s^+ -мезонов (π^- , π_s^+ -мезонов, не возмущенных полем π_s^+ -конденсата), то такие пары рождаются при $n \geq n_c^\pm$, когда выполнено условие $(\omega^- + \omega_s^+)_{a=0} = 0$. Однако этот процесс может быть описан и в терминах точных π_s^+ -мезонов с учетом поля конденсата.

Как мы видели на примере конденсации в электрическом поле (см. (2.35)) в точке неустойчивости для рождения «свободных» пар ($\omega_0^2 = 0$) никакого фазового перехода не возникало — процесс описывался в терминах точных π_s^+ -пионов. Выражение для энергии конденсата при условии $-\omega_0^2 \gg \bar{V}^2$ переходило в формулу для энергии конденсата $\pi^+\pi^-$ -пар.

Поэтому и в нашем случае следует ожидать, что, начиная с некоторых значений n — n_c^\pm , формула для энергии π_s^+ -конденсата перейдет в выражение (5.5), полученное без учета π_s^+ -конденсации. Более того, так как выражение для энергии π_s^+ -конденсата, согласно (5.10), содержит большое число в знаменателе, переход к простому выражению (5.5) должен произойти уже при небольшом превышении n над n_c^\pm .

Итак, несмотря на то, что в нейтронной звезде, согласно нашей терминологии, происходит π_s^+ -конденсация, для нахождения энергии конденсата можно пользоваться выражением, полученным для π_s^+ -, π^- -конденсации.

Случай конечной системы, когда не выполняется условие электронейтральности, будет рассмотрен в VII.2 в связи с возможностью существования «нейтронных» ядер ($Z \ll N$). Численные расчеты энергии π -конденсации в нейтронной звезде при условии β -равновесия, что эквивалентно учету π_s^+ -конденсации, проводились в работах [19], [68].

Резкая зависимость нейтронной плотности от радиуса приводит к резкой зависимости π_s^+ -энергии, а следовательно и энергии Ферми электронов. В равновесии величины $\varepsilon_F^{(e)}(r)$, $\omega(r)$ и потенциал $V(r)$, удерживающие электроны, связаны соотношениями $\varepsilon_F^{(e)}(r) + V(r) = \text{const}$,

$\varepsilon_F^{(e)}(r) + \omega_s^+(r) = 0$, из которых следует, что напряженность электрического поля равна $dV/dr = d\omega_s^+/dr$.

Уравнение состояния. Полная плотность энергии

$$\mathcal{E}(n) = \mathcal{E}_N(n) - \frac{1}{2} \beta (n - n_c)^2 \theta(n - n_c), \quad (5.11)$$

где

$$\theta(n - n_c) = \begin{cases} 1, & n - n_c > 0, \\ 0, & n - n_c < 0. \end{cases}$$

В критической точке происходит скачок величины $\frac{d^2\mathcal{E}}{dn^2}$ (фазовый переход 2-го рода).

Давление связано с плотностью энергии соотношением

$$P = n \frac{d\mathcal{E}}{dn} - \mathcal{E} = P_N - \frac{1}{2} \beta (n^2 - n_c^2) \theta(n - n_c).$$

Условием устойчивости системы является положительная сжимаемость

$$K = n \frac{d^2\mathcal{E}}{dn^2},$$

поэтому, если в точке фазового перехода выполняется неравенство

$$\beta > \frac{d^2\mathcal{E}_N}{dn^2},$$

то ядерное вещество будет сжиматься до тех пор, пока влияние сил отталкивания на малых расстояниях или ослабление роста абсолютной величины пионного слагаемого (5.11) не приведет к выполнению условия $\frac{d^2\mathcal{E}}{dn^2} > 0$.

Поскольку область значений n , при которой $\frac{d^2\mathcal{E}}{dn^2} < 0$, неустойчива, возникает скачок плотности. Величина скачка определяется соотношением

$$P_N(n_1) = P_N(n_2) + P_\pi(n_2),$$

где $P_\pi = n \frac{d\mathcal{E}_\pi}{dn} - \mathcal{E}_\pi$ — пионное давление ($P_\pi < 0$).

При больших плотностях простое выражение (5.11) неприменимо и плотность энергии должна определяться из расчетов по теории нуклонного вещества [33] и из вы-

ражения для энергии сильно развитого конденсата (см. ниже). Примерный ход плотности энергии дается на рис. 21, 22.

Модуляция плотности и спиновой плотности нуклонов. Как было показано в IV.3, в поле конденсата возникают модуляции плотности спина $S(\mathbf{r})$ нуклонов с волновым вектором k_0 .

В IV.3 этот результат был получен в приближении Томаса — Ферми, т. е. для случая $k_0 \ll 2p_F$. Здесь найдены амплитуды модуляций $n(\mathbf{r})$ и $S(\mathbf{r})$ без этого предположения, а также учтено влияние N_{33}^* -резонанса.

Обычный квантовомеханический подход к этому вычислению состоит в нахождении возмущения нуклонной волновой функции в поле конденсата и последующем определении изменений среднего значения плотности нуклонов.

Однако гораздо удобнее сделать это вычисление графическим методом, то есть с помощью функций Грина. Такой подход позволяет очень просто учесть вклад нуклонных корреляций и влияние переходов с образованием N_{33}^* -резонанса в промежуточном состоянии. Для этой цели введем матрицу плотности нуклонов ρ . Матрица плотности $\rho(\mathbf{r}, \alpha; \mathbf{r}', \alpha')$, где α и α' — спиновые индексы, может быть записана в виде

$$\rho(\mathbf{r}, \alpha; \mathbf{r}', \alpha') = \langle \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha'}(\mathbf{r}') \rangle$$

(скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по основному состоянию системы.) Из этого выражения и из определения функции Грина следует, что (см., например, [51])

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) |_{\tau \rightarrow 0} = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon),$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)$ — фурье-образ $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau)$. Для вычислений удобно перейти в импульсное представление и ввести

$$\rho_{\lambda\lambda'} = (\Psi_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, \alpha; \mathbf{r}', \alpha') \Psi_{\lambda'}(\mathbf{r}')),$$

где $\Psi_{\lambda} = \chi_{\lambda} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$, χ — спиновая функция. Тогда изменение матрицы плотности в поле конденсата равно

$$(\delta\rho)_{\lambda\lambda'} = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} [\tilde{G}_{\lambda\lambda'}(\varepsilon) - G_{\lambda}(\varepsilon) \delta_{\lambda\lambda'}]. \quad (5.12)$$

Здесь $\tilde{G}_{\lambda\lambda'}(\varepsilon)$ — точная функция Грина нуклона во внешнем поле, в данном случае — в поле конденсата; $G_{\lambda}(\varepsilon)$ — функция Грина при $\varphi = 0$. Вклад в скалярную величину $\delta n(r)$ могут дать лишь матричные элементы, соответствующие переходам нуклона с испусканием или поглощением четного числа конденсатных мезонов. В изотопически-симметричном поле (4.28) в среде с $N = Z$ такие переходы описываются функциями Грина вида

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mathbf{p}, \varepsilon, \mathbf{p}-2\mathbf{k}, \varepsilon) &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \\ &= \frac{a^2 \gamma^4 k^2}{2} G(\mathbf{p}, \varepsilon) \left\{ G(\mathbf{p}-\mathbf{k}, \varepsilon) \frac{1}{\left[1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right)\right]^2} - \right. \\ &\quad \left. - A_R^{\dagger}(\mathbf{k}, \omega)/2 \right\} G(\mathbf{p}-2\mathbf{k}, \varepsilon), \quad (5.13) \end{aligned}$$

где A_R^{\dagger} — амплитуда резонансного рассеяния, приведенная в гл. III. Изменение плотности нуклонов $\delta n(r)$ выражается через изменение матрицы $\delta\rho_{\lambda\lambda'}$ следующим образом

$$\delta n(r) = \sum_{\lambda\lambda'} (\delta\rho)_{\lambda\lambda'} \Psi_{\lambda}^{\dagger}(r) \Psi_{\lambda'}(r).$$

В нашем случае отличны от нуля только слагаемые с $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \pm 2\mathbf{k}$, где \mathbf{k} — волновой вектор конденсата.

Опуская спиновые значки, имеем

$$\delta n(r) = \sum_{\mathbf{p}} [(\delta\rho)_{\mathbf{p}, \mathbf{p}+2\mathbf{k}} e^{i2\mathbf{k}\mathbf{z}} + (\delta\rho)_{\mathbf{p}, \mathbf{p}-2\mathbf{k}} e^{-i2\mathbf{k}\mathbf{z}}].$$

Ограничиваясь членами порядка a^2 , из (5.12) и (5.13) нетрудно получить для случая стоячей волны

$$\delta n^{(n)}(r) = \delta n^{(p)}(r) = n \xi^2 \cos 2\mathbf{k}\mathbf{z}. \quad (5.14)$$

Величина ξ^2 с учетом нуклонных корреляций дается формулой [22]

$$\xi^2 = \frac{3a^2}{v_F^2} \left[f^2 \frac{\Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right) - \Phi\left(\frac{k}{p_F}\right)}{\left[1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right)\right]^2} + \frac{k^2}{\omega_R} \frac{0,15}{1 + 0,23k^2} \Phi\left(\frac{k}{p_F}\right) \right], \quad (5.15)$$

где $\Phi(x)$ дано в (3.30).

При критических значениях n_c и k_c и ядерном значении $g^- \approx 1,6$

$$\xi^2 = 0,5 \frac{a^2}{v_F^2} \sim \frac{n - n_c}{n_c}.$$

Аналогичным образом находится распределение спиновой плотности нуклонов в поле конденсата:

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\lambda'} (\delta\rho)_{\lambda\lambda'} \Psi_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{r}) \sigma \Psi_{\lambda}(\mathbf{r}). \quad (5.16)$$

Вклад в $S(\mathbf{r})$ дадут лишь матричные элементы $\rho_{\lambda\lambda'}$, соответствующие поглощению или испусканию нечетного числа конденсатных пионов. Для поля (4.9) в наимизшем порядке по a находим

$$S_z^{(n)}(\mathbf{r}) = f/k \frac{2mp_F}{\pi^2} \frac{\Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right)}{1 + g^- \frac{p_F}{p_0} \Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right)} a \cos \mathbf{kz} = -S_z^{(p)}(\mathbf{r}).$$

В случае $Z \ll N$ в поле $\pi_s^{\dagger} \pi^-$ -конденсата вида стоячей волны (4.9) также возникает модуляция плотности нуклонов с волновым вектором $2\mathbf{k}$ и амплитудой вблизи критической точки, равной

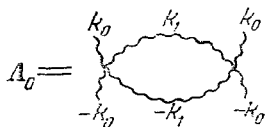
$$\xi_{\pi^{\pm}}^2 \sim \frac{n - n_c}{n_c}.$$

В то же время в поле $\pi_s^{\dagger} \pi^-$ -конденсата вида бегущей волны, как при $Z = 0$, так и при $N = Z$, плотность частиц каждого сорта остается однородной, а плотность спина равна нулю. Это связано с тем, что в таком поле отсутствуют недиагональные переходы $p \rightarrow p \pm 2k$, а переходы с испусканием одного пиона, для которых $p \rightarrow p \pm k$, сопровождаются изменением изотопического индекса нуклона. Легко проверить, что в этом случае отлично от нуля лишь среднее значение оператора $\sigma_{z\uparrow}$, имеющего симметрию заряженного пионного поля (модуляция спиновоей плотности). Вклад в модуляцию плотности и спиновой плотности вносит поле π^0 -мезонов (для которого возможна лишь стоячая волна).

Особенности во взаимодействии пионов вблизи критической точки. Как показал А. М. Дюгаев [23] вблизи точки фазового перехода возникает пион-пионное взаимодействие на больших расстояниях. В результате этого взаимодействия вблизи точки перехода при плотности $n < n_c$ константа эффективного 4-бозонного взаимодействия Λ может изменить знак. В этом случае возникает переход 1-го рода. Как мы убедимся, этот фазовый переход происходит с малым скачком амплитуды конденсатного поля a и поэтому практически мало отличен от рассмотренного выше перехода 2-го рода.

Ниже мы ограничимся рассмотрением симметричной ядерной материи ($Z = N$).

Приведем результаты работы [23]. Прежде всего рассматривается график лл-взаимодействия, соответствующий обмену двумя «опасными» пионами



Величина Λ_0 определяется выражением

$$\Lambda_0 = \int \frac{id\omega d^3k_1}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^2(\mathbf{k}_0, -\mathbf{k}_0; \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_1)}{[\omega^2 - \omega_{k_1}^2 - \Pi(\mathbf{k}, \omega)]^2}, \quad \omega_k^2 = 1 + k^2. \quad (5.17)$$

В этом выражении под Λ следует понимать сумму всех графиков, не содержащих ни в каком канале двух мезонных линий с малым суммарным импульсом. Такая Λ будет локальна (δ -образна) в координатном представлении по разностям координат входных концов. При $k_1 = k_0$ величина Λ совпадает с $\Lambda(k_0)$, которая рассчитывалась нами в предыдущих параграфах.

Легко видеть, что вблизи точки перехода главный вклад в интеграл вносит область $k_1 \approx k_0$, $\omega \rightarrow 0$. Для того, чтобы в этом убедиться, напишем выражение для $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ при $\omega \rightarrow 0$. В действительной части Π можно положить $\omega = 0$

$$\text{Re } \Pi(\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0) \approx \Pi(\mathbf{k}, 0) [1 + O(\omega^2)],$$

а мнимая часть возникает только из полюсного слагаемого Π

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi(\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0) &= \text{Im } \Pi_p(k, \omega \rightarrow 0) = \\ &= -\frac{2m^*p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \frac{\pi |\omega|}{2kv_F(1+g^-)^2}, \end{aligned}$$

где m^* — масса нуклонной квазичастицы.

В выражении для $\text{Im } \Pi$ для простоты предположили $k \ll 2p_F$. Тогда обратный пропагатор пиона приобретает вид

$$\mathcal{D}^{-1}(\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0) = -\tilde{\omega}^2(k) + i\chi|\omega|,$$

где

$$\tilde{\omega}^2(k) = \omega_k^2 + \Pi(\mathbf{k}, 0) \underset{k \rightarrow k_0}{\simeq} \omega_0^2 + \kappa \frac{(k^2 - k_0^2)^2}{4k_0^2}, \quad (5.18)$$

а

$$\chi = \frac{2m^*p_F}{\pi^2} f^2 k^2 \frac{\pi}{2kv_F(1+g^-)^2} = f^2 \frac{m^{*2}k}{\pi(1+g^-)^2}.$$

Используя вид $\tilde{\omega}^2(k)$ вблизи k_0 (5.18), получим после интегрирования (5.17) по ω

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= -\frac{\Lambda^2}{(2\pi)^3} \frac{2}{\chi} \int \frac{4\pi k_0^2 dk}{\omega_0^2 + \kappa(k - k_0)^2} = \\ &= -\frac{\Lambda^2(1+g^-)^2 k_0}{f^2 \pi m^{*2} \sqrt{\kappa}} \frac{1}{\omega_0} = -\Lambda \frac{\omega_1}{\omega_0}. \quad (5.19) \end{aligned}$$

При $m^* = 6,7$; $g^* = 1,6$; $k_0 = 2$; $\kappa = 0,4$, имеем $\omega_1 = 0,05\Lambda$.

Таким образом, величина Λ_0 имеет полюс в критической точке, когда $\omega_0 = 0$. Поэтому графики такого типа делаются существенными еще до наступления фазового перехода 2-го рода и должны быть учтены во всех порядках по Λ .

Рассмотрение аналогичного графика с импульсом q в горизонтальном канале привело бы нас к выражению вида

$$\Lambda_0(q) \simeq -\Lambda \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 + \kappa q^2}}.$$

Переходя в координатное представление, получим

$$\Lambda_0(r) \sim -\frac{(\sin k_0 r)^2}{r^3} \frac{\omega_1}{\omega_0} \exp\left(-\frac{2r\omega_0}{\sqrt{\kappa}}\right), \quad r\omega_0 \gg 1.$$

Это и есть дальноедействие, о котором говорилось выше.

Энергия взаимодействия пионов в координатном представлении имеет вид

$$\tilde{H}_{\pi\pi} = \frac{1}{4} \int \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \times \\ \times d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3.$$

Локальному взаимодействию Λ соответствует член в энергии, равный

$$\frac{1}{4} \int \Lambda \varphi^4(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Графики дальногодействия соответствуют случаю, когда 2 из расстояний между точками $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ малы, а 2 других велики. Имеется 3 случая: к точке \mathbf{r} расположена близко какая-либо из 3-х точек: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$; соответствующее слагаемое в $\tilde{H}_{\pi\pi}$ имеет вид

$$\frac{3}{4} \int \Lambda_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \varphi^2(\mathbf{r}_1) \varphi^2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \simeq \frac{3}{4} \Lambda_1 \overline{\varphi^2} \overline{\varphi^2} V,$$

где

$$\Lambda_1 = \int \Lambda_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \Lambda_1(q=0).$$

Величина Λ_1 определяется сумой графиков дальногодействия

$$\Lambda_1 = \begin{array}{c} \text{---}^k \\ \text{---}^{-k} \end{array} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \\ = \Lambda_0 + \frac{\Lambda_0^2}{\Lambda} + \frac{\Lambda_0^3}{\Lambda^2} + \dots = \frac{\Lambda_0}{1 - \Lambda_0/\Lambda}.$$

Используя (5.19), получаем

$$\Lambda_1 = -\Lambda \frac{\omega_1/\omega_0}{1 - \omega_1/\omega_0}.$$

Взяв поле φ в форме $\varphi = a \sqrt{2} \sin kz$ и подставляя в $\tilde{H}_{\pi\pi}$, получим выражение $\tilde{H}_{\pi\pi} = \tilde{\Lambda} a^4/4$, где $\tilde{\Lambda}$ равно

$$\tilde{\Lambda} = \frac{3}{2} \Lambda \frac{1 - \omega_1/\omega_0}{1 + \omega_1/\omega_0}. \quad (5.20)$$

Из этого выражения следует, что $\tilde{\Lambda}$ при $\omega_1 = \omega_0$ изменяет знак и при дальнейшем увеличении плотности (уменьшение ω_0) система делается неустойчивой относительно фазового перехода 1-го рода.

Точка перехода определяется условием $\frac{d\mathcal{E}(a^2)}{da^2} = 0$.
Записывая энергию в виде

$$\mathcal{E}(a^2) = \frac{\omega_0^2}{2} a^2 + \frac{\tilde{\Lambda}}{4} a^4 + \frac{\mu}{12} a^6,$$

где $0 < \mu \sim 1$, получим

$$a^4 + \frac{2\tilde{\Lambda}}{\mu} a^2 + \frac{2\omega_0^2}{\mu} = 0,$$

откуда

$$a^2 = -\frac{\tilde{\Lambda}}{\mu} + \sqrt{\frac{\tilde{\Lambda}^2}{\mu^2} - \frac{2\omega_0^2}{\mu}}.$$

При $\tilde{\Lambda} = -\omega_0 \sqrt{2\mu}$ возникает вещественное решение с $a^2 = \omega_0 \sqrt{2/\mu}$, которое соответствует минимуму $\mathcal{E}(a^2)$ (знак минус перед корнем соответствует максимуму $\mathcal{E}(a^2)$, т. е. неустойчивой ветви).

Как показано в [23], учет квантовых флуктуаций мезонного поля приводит к особенностям не только в Λ , но и в других величинах. Так, например, вблизи критической точки оказывается сингулярным их вклад в $\partial\Sigma/\partial\varepsilon$ на поверхности Ферми ($\varepsilon = \varepsilon_F$, $p = p_F$)

$$\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\varepsilon}\right)_F \sim \frac{1}{\omega_0}.$$

Ясно, что для корректного описания окрестности точки перехода требуется последовательное выделение «опасных» графиков не только в Λ , но и во всех величинах, имеющих особенность при $\omega_0 = 0$.

V.2. Развитый конденсат

В этом разделе изучается точно решаемая модель π -конденсации, в которой предполагается конденсатное поле вида бегущей волны (4.8). Энергия такого конденсата может быть найдена без предположения о близости

к критической точке. Подробно рассмотрено приближение больших частот ($\omega \gg kv_F$), в рамках которого удастся найти аналитически критические параметры и энергию π -конденсата.

Обсуждается модель сильно развитого конденсата, предложенная в работах [20] и [21].

Энергия нуклона в поле конденсата. Рассмотрим π_s^+ , π^- -конденсатное поле, имеющее вид бегущей волны

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}},$$

где a действительно.

Такое поле соответствует тому, что все π^- -мезоны «заселяют» одно состояние — с частотой ω и импульсом \mathbf{k} , а все π_s^+ -мезоны — состояние с частотой $-\omega$ и импульсом $-\mathbf{k}$. Вершина $N\pi N$ -взаимодействия $\Gamma_0 = i\sqrt{2}f(k\sigma)\tau$ переводит нейтрон с импульсом \mathbf{p} в протон с импульсом $\mathbf{p} - \mathbf{k}$. Поскольку в процессах участвуют только эти 2 состояния нуклонов, задача может быть решена точно. Записывая систему двух уравнений, связывающих протонные и нейтронные состояния, нетрудно получить выражение для энергий «новых» нейтронов и протонов [14]. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{p}) &= \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|} + \omega}{2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|} - \omega}{2} \sqrt{1 + \frac{4f^2 k^2 a^2}{(\varepsilon_p - \varepsilon_{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|} + \omega)^2}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{p}) &= \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_{|\mathbf{p}+\mathbf{k}|} - \omega}{2} + \\ &+ \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_{|\mathbf{p}+\mathbf{k}|} + \omega}{2} \sqrt{1 + \frac{4f^2 k^2 a^2}{(\varepsilon_p - \varepsilon_{|\mathbf{p}+\mathbf{k}|} + \omega)^2}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Знаки перед корнем здесь выбраны так, чтобы при $a \rightarrow 0$ энергии $\tilde{\varepsilon}^{(n, p)}(\mathbf{p})$ переходили в энергии свободных частиц $\varepsilon^{(n, p)} = \frac{p^2}{2m}$. Так как в данной модели имеет место неравенство $\omega_{\pi^-} > \tilde{\varepsilon}_F^{(n)}$, то заполнение «новых» протонных состояний энергетически невыгодно. Действительно, как показано в [18], превращение небольшого числа

нейтронов в протоны и точные возбуждения с квантовыми числами π^- -мезонов ($n \rightarrow p + \pi^-$), приводит к изменению энергии системы

$$\delta \mathcal{E} = (\omega_{\pi^-} - \tilde{\varepsilon}_F^{(n)}) \tilde{v}_p,$$

где \tilde{v}_p — плотность «новых» протонов, равная плотности π^- -мезонов. Заполнение «новых» протонных состояний, которое должно сопровождаться образованием π^- -конденсата, было бы возможно лишь при условии $\omega_{\pi^-} < \tilde{\varepsilon}_F^{(n)}$, которое как показано в [18], не выполняется вплоть до очень больших плотностей нейтронного вещества.

Таким образом, при $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации заполненными оказываются лишь «новые» нейтронные состояния. При этом ферми-поверхность $\tilde{S}_F^{(n)}$ уже не является сферой, как в нормальной фазе. Ее уравнение находится из условия

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{p}) \Big|_{\tilde{S}_F^{(n)}} = \tilde{\varepsilon}_F^{(n)}. \quad (5.23)$$

Значение точной энергии Ферми $\tilde{\varepsilon}_F^{(n)}$ фиксируется требованием, чтобы после перераспределения в поле конденсата полное число нуклонов не изменилось. Кинетическая энергия нуклонов в поле конденсата, входящая в эффективный лагранжиан (4.4), находится по формуле (4.22).

Задача об определении энергии системы в присутствии $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсата вида бегущей волны может быть решена без предположения о малости амплитуды конденсатного поля. Вычисления проводятся следующим образом. Из равенства (5.21) находится точная энергия нейтронов $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{p})$ как функция параметров n , ω , \mathbf{k} и a^2 , которая затем подставляется в выражение (4.22) для \mathcal{E}_N . После этого по формуле (4.4) строится эффективный лагранжиан конденсатного поля $\tilde{\mathcal{L}}(a^2, \mathbf{k}, \omega)$, из которого получается система уравнений (4.10), (4.11) для определения a^2 , ω , \mathbf{k} . Подстановка этих параметров в выражение (4.5) дает полную энергию системы $\mathcal{E}(n)$ как функцию плотности нуклонов n .

Получение плотности энергии конденсата связано с вычислительными трудностями и требует привлечения численных методов даже в том упрощенном варианте теории, который рассматривался выше [19, 35].

Энергия конденсата в приближении больших частот. Для иллюстрации метода расчета $\mathcal{E}_\pi(n)$ полезно рассмотреть еще более грубый вариант теории, допускающий, однако, простое аналитическое решение — приближение больших частот [66, 21]. В этом приближении частота конденсатного поля ω считается большой по сравнению с разностью кинетических энергий нуклонов $\varepsilon_p - \varepsilon_{|p-k|}$, т. е. $\omega \gg kv_F^{(n)}$. Из формул (5.21), (5.22) находим одночастичные энергии «новых» нейтронов и протонов при $\omega \gg \varepsilon_p - \varepsilon_{|p-k|}$

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)}(p) = \varepsilon_p - \frac{\omega}{2}(\gamma - 1), \quad \tilde{\varepsilon}^{(p)}(p) = \varepsilon_p + \frac{\omega}{2}(\gamma + 1),$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{4f^2 k^2 a^2}{\omega^2}}.$$

Ясно, что в этом приближении нейтронное ферми-заполнение остается сферически симметричным, а граничный импульс нового заполнения $\tilde{p}_F^{(n)}$ в силу сохранения полного числа нуклонов совпадает с фермиевским импульсом $p_F^{(n)}$ при $a = 0$ и той же полной плотности

$$\tilde{p}_F^{(n)} = \sqrt{2m\tilde{\varepsilon}_F^{(n)} + m\omega(\gamma - 1)} = p_F^{(n)}.$$

Из (4.4) с учетом того, что при $\omega > \tilde{\varepsilon}_F^{(n)}$ заполнение «новых» протонных состояний отсутствует, находим

$$\tilde{\mathcal{L}}_\pi = \tilde{\mathcal{L}}(a) - \tilde{\mathcal{L}}(0) = \frac{n\omega}{2}(\gamma - 1) + (\omega^2 - \omega_k^2) \frac{a^2}{2}.$$

Варьируя $\tilde{\mathcal{L}}_\pi$ по a^2 , получаем уравнение движения, связывающее частоту и амплитуду конденсатного поля

$$2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_\pi}{\partial (a^2)} = \omega^2 - \omega_k^2 + \frac{2nf^2 k^2}{\omega\gamma} = 0. \quad (5.24)$$

Условия электронейтральности и отсутствия электрического тока (4.11) приобретают вид:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_\pi}{\partial \omega} = 2\omega \frac{a^2}{2} - \frac{2nf^2 k^2}{\omega^2 \gamma} + \frac{n}{2}(1 - \gamma) = \omega a^2 \left[1 + \frac{\omega^2 - \omega_k^2}{\omega^2(1 + \gamma)} \right] = 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_\pi}{\partial k} = -2k \left[1 - \frac{2nf^2}{\omega\gamma} \right] \frac{a^2}{2} = -ka^2 \frac{\omega^2 - 1}{k^2} = 0. \quad (5.26)$$

В пределе $a \rightarrow 0$ ($\gamma = 1$) система уравнений (5.24), (5.25) переходит в условия, определяющие критические параметры $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации n_c^\pm , k_c^\pm , ω_c

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_k^2 - \Pi^-(\mathbf{k}, \omega) &= 0, \\ 2k + \frac{\partial \Pi^-(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k} &= 0, \quad 2\omega - \frac{\partial \Pi^-(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Здесь $\Pi^-(\mathbf{k}, \omega)$ — поляризационный оператор π^- -мезона в нуклонной среде. В рассматриваемом случае $\Pi^-(\mathbf{k}, \omega)$ совпадает с полусной частью поляризационного оператора π^- -мезона в чисто нейтронной среде (без учета нуклонных корреляций):

$$\Pi_P^-(\mathbf{k}, \omega \gg kv_F^{(n)}) = -\frac{2nf^2k^2}{\omega}.$$

Из системы (5.27) находим:

$$n_c^\pm = \frac{1}{2f^2} \simeq n_0, \quad \omega_c = 1, \quad k_c^\pm = \sqrt{2}. \quad (5.28)$$

При $n > n_c^\pm$ из уравнений (5.24), (5.25), (5.26) без предположения о близости к критической точке находим параметры $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсата:

$$a^2 = \frac{1}{4f^2} \left(\frac{n}{n_c^\pm} - 1 \right), \quad \omega = \omega_c = 1, \quad k = \sqrt{1 + \frac{n}{n_c^\pm}}. \quad (5.29)$$

Подставляя значения (5.29) в выражение (5.1) для плотности энергии системы, находим выигрыш энергии, связанный с образованием новой фазы:

$$\mathcal{E}_\pi(n) = -\frac{(n - n_c^\pm)^2}{4n_c^\pm}, \quad n \geq n_c^\pm. \quad (5.30)$$

Следует подчеркнуть, что выражение (5.30) для $\mathcal{E}_\pi(n)$ является лишь грубой оценкой. Неудовлетворительность его очевидна хотя бы из того, что при больших плотностях $\mathcal{E}_\pi \sim (-n^2)$, в то время как кинетическая энергия нуклонов растет как $n^{2/3}$, так что система с таким конденсатом была бы неустойчива относительно неограниченного сжатия («коллапса»). Прежде всего это связано с тем, что до-

вольно грубым является использованное нами приближение. Как видно из приведенных значений n_c^\pm , ω_c , k_c^\pm , даже в критической точке параметр разложения не является малым: $\left(\frac{k\nu_F^{(n)}}{\omega}\right)^2 \simeq \frac{1}{4}$, а с ростом плотности приближение становится еще грубее. Но главная причина неустойчивости лежит, конечно, в том, что при получении (5.30) мы не учитывали сильное отталкивание нуклонов на малых расстояниях и, кроме того, вакуумное $\pi\pi$ -взаимодействие, которое приводит к ограничению амплитуды конденсатного поля при больших плотностях.

Несмотря на грубость приближения больших частот использование его оказывается полезным для того, чтобы качественно проследить влияние на параметры $\pi_s^+\pi^-$ -конденсата таких важных факторов как нуклонные корреляции, N^* -резонанс, S -волновое πN -взаимодействие и вакуумное $\pi\pi$ -взаимодействие [21].

Модель предельного конденсатного поля. Вычисление энергии сильно развитого π -конденсата с учетом N^* -резонанса и нуклонных корреляций стало возможным благодаря работам [20, 21], в которых используется приближение киральной симметрии.

Получено выражение для лагранжиана π -мезонного поля с учетом N^* -резонанса и нуклонных корреляций. Без учета N^* -резонанса тот же результат может быть получен из лагранжиана Вейнберга [35]. Получим сначала лагранжиан системы без учета корреляции и N^* -резонанса.

Подставляя (4.19) в выражение (4.18) и переходя к нерелятивистскому пределу, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^+ \left[\omega - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \tau_3 \frac{\mathbf{k}}{2} \cos \theta \right)^2 - \right. \\ \left. - \tau_3 \frac{\omega}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} g_A (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}) \tau_2 \sin \theta \right] \Psi_{\mathbf{p}} - \\ - \frac{F^2}{8} \left[(k^2 - \omega^2) \sin^2 \theta + 4m_\pi^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (5.31) \end{aligned}$$

где $g_A = fF$ — аксиальная константа слабого взаимодействия.

Здесь $\Psi_{\mathbf{p}}$ представляет собой фурье-преобразование оператора нуклонного поля $\Psi(\mathbf{r})$ со сдвинутым на

— $1/2 k \tau_3$ импульсом

$$\Psi_p = \int d^3r e^{-i\left(p - \frac{1}{2} k \tau_3\right)r} \Psi(r).$$

В изоспиновом пространстве Ψ_p является спинором $(p_{p-k/2}, n_{p+k/2})$, где p_p и n_p — операторы уничтожения голгого протона и нейтрона с импульсом p .

Члены, пропорциональные τ_3 в (5.31) описывают S -волновое πN -взаимодействие, а член, пропорциональный τ_2 , соответствует P -рассеянию.

Производя диагонализацию нуклонных слагаемых в (5.31), находим точные одночастичные энергии нуклонов в поле конденсата

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^\pm &= \frac{p^2}{2m} + \frac{k^2}{2m} \cos^2 \theta \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega - \frac{pk}{m}\right)^2 \cos^2 \theta + g_A^2 k^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Собственными состояниями, отвечающими двум знакам (\pm) , являются линейные комбинации нейтронных и протонных состояний:

$$|N^+\rangle = \cos \frac{\chi}{2} |p_{p-k/2}\rangle + i(\sigma k) \sin \frac{\chi}{2} |n_{p+k/2}\rangle, \quad (5.33)$$

$$|N^-\rangle = \cos \frac{\chi}{2} |n_{p+k/2}\rangle + i(\sigma k) \sin \frac{\chi}{2} |p_{p-k/2}\rangle, \quad (5.34)$$

где

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{g_A k \operatorname{tg} \theta}{\omega - pk/m}.$$

Для нахождения эффективного лагранжиана и энергии системы требуется найти сумму точных энергий нуклонов по новому ферми-заполнению. Эта задача особенно просто решается в случае $\theta = \pi/2$ (предельное конденсатное поле $a = F$), который описывает конденсацию при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно проверить, что при этом заполняются лишь состояния типа N^- , в которые в данном случае ($\chi = \pi/2$) с равным весом входят нейтрон и протон.

Отсюда следует, что при $\theta = \pi/2$ независимо от соотношения между N и Z в нормальной фазе число голых

нейтронов и протонов в системе одинаково и плотность заряда нуклонной подсистемы в терминах голых частиц равна $n/2$. Так как при $\theta = \pi/2$ в ε_{ρ} пропадает зависимость от p_z , то ферми-поверхность является сферически-симметричной и вычисления проводятся тривиально. В результате выражение для эффективного лагранжиана приобретает вид

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\pi} = \frac{1}{2} n (\omega - g_A k) - \frac{F^2}{8} [(k^2 - \omega^2) + 2m_{\pi}^2]. \quad (5.35)$$

Условие отсутствия 4-тока $\partial \widetilde{\mathcal{L}} / \partial k_{\mu} = 0$ дает

$$\omega = \frac{2n}{F^2}, \quad k = \frac{2g_A n}{F^2}. \quad (5.36)$$

Изменение энергии системы, связанное с π -конденсатом, при этом имеет вид

$$\mathcal{E}_{\pi} \left(n, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{(g_A^2 - 1)}{2F^2} n^2 + \frac{F^2 m_{\pi}^2}{4}. \quad (5.37)$$

Это выражение справедливо при $n \gg n_c$.

Одним из важнейших результатов работы [20] является расширение σ -модели за счет включения в нее изобары N_{33}^* (1232), которая рассматривается как дополнительная «элементарная» частица. Это уже позволило нам выше, в разделе IV.2, найти вклад N^* -резонанса в функцию Λ и энергию конденсата вблизи критической точки. Теперь покажем, как N^* влияет на энергию развитого конденсата.

Идея включения N^* -резонанса основана на следующем. Лагранжиан взаимодействия нуклонов с пионным полем может быть выражен через векторный и аксиальный токи

$$H' = k^{\mu} (V_{\mu} \cos \theta - A_{\mu} \sin \theta).$$

К этим токам добавляется вклад N^* -частиц, рассчитанный с помощью $SU(4)$ кварковой модели. Матричные элементы H' по состояниям N^{*++} , N^{*+} , p , n , N^{*0} , N^{*-} приведены в разделе IV.2 (см. (4.25)).

При $\theta = \pi/2$ матрицу (4.25) удастся диагонализировать аналитически. Как и раньше, в этом случае заполняется одна ферми-сфера, но теперь барионные квазичастицы являются суперпозицией состояний типа N и N^* . Плотность заряда барионной подсистемы остается в терминах голых частиц равной $n/2$, где n — полная плотность бари-

онов. Для энергии конденсата в этом случае получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\pi(n, \theta = \frac{\pi}{2}) = \\ = \frac{\Delta}{3} n - \frac{n^2}{2F^2} \left(\frac{81}{25} g_A^2 - 1 \right) - \frac{25}{54} \left(\frac{\Delta}{3} \right)^2 \frac{F^2}{g_A^2} + \frac{F^2 m_\pi^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Напомним, что $\Delta = m_{N^*} - m_N$. Для простоты при выводе (5.38) мы ограничились двумя первыми членами разложения по параметру $\Delta/g_A k$, который мал при большой плотности.

Дальнейшее улучшение модели развитого конденсата состоит в учете нуклонных корреляций. Метод, который можно использовать для этой цели, был предложен в работах [21, 35]. Результат сводится к тому, что в выражении для энергии конденсата должна быть произведена перенормировка аксиальной константы связи

$$g_A \rightarrow g_A^* = g_A \sqrt{(1 - \gamma)}, \quad (5.39)$$

где величина γ связана с ферми-жидкостной константой спин-спинового взаимодействия g^- соотношением

$$g^- = f^2 \frac{2m p_0}{\pi^2} \gamma$$

($p_0 = 1,92$ — импульс Ферми при нормальной ядерной плотности).

Заметим, что простой результат (5.38) получен в предположении, что с точностью до коэффициентов Клебша — Гордана локальные амплитуды NN-, NN*- и N*N*-взаимодействий в нуклонной среде одинаковы. Однако, это предположение является совершенно произвольным, так как в настоящее время отсутствует экспериментальная информация об NN*- и N*N*-взаимодействиях. Как можно судить из экспериментов [54] по реакции (pp, pN*) с большими передаваемыми импульсами, локальное NN*-взаимодействие, по-видимому, значительно слабее, чем NN-взаимодействие. Вместе с тем, анализ спектральных данных π -атома, по-видимому, свидетельствует о заметном NN*-взаимодействии. С другой стороны, выше не учитывалось подавление вершин при больших импульсах пионов, которое приведет

к уменьшению энергии конденсата. Последовательно учесть все эти эффекты пока невозможно, поэтому в дальнейшем для оценок мы будем пользоваться выражением (5.38) с g_A^* из (5.39).

В заключение этого параграфа приведем выражение для энергии конденсата в том случае, когда система не является электронейтральной. Это понадобится нам в дальнейшем при рассмотрении вопроса об аномальных ядрах. Прежде всего свяжем частоту (химпотенциал) пионов с полным зарядом системы Z , который в терминах голых частиц складывается из заряда голых барионов $A/2$ (A — полное число барионов) и заряда голых пионов (отрицательного!). В терминах квазичастиц барионные квазичастицы не несут заряда (заряженные барионы входят в состав π_s^+ -мезона) и весь заряд системы равен заряду пионных квазичастиц.

Используя соотношение (4.6), имеем

$$\frac{j_0^\pi}{e} = n_{\pi^+} - n_{\pi^-} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \omega} = \frac{Z}{A} n \equiv \nu n.$$

С помощью (5.35) находим $\omega = \frac{2n}{F^2} (1 - 2\nu)$.

Теперь, зная эффективный лагранжиан и его связь (4.5) с энергией системы, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\pi(n, \theta = \frac{\pi}{2}) = & \\ = \frac{\Delta}{3} n - \frac{81}{50} \frac{g_A^{*2} (1 - \gamma)}{F^2} n^2 - \frac{25}{54} \left(\frac{\Delta}{3}\right)^2 \frac{F^2}{g_A^2 (1 - \gamma)} + & \\ + \frac{F^2 m_\pi^2}{4} + \frac{n^2}{2F^2} (1 - 2\nu)^2. & \quad (5.40) \end{aligned}$$

При $\nu = 0$ это выражение совпадает с (5.38). Из (5.40) видно, что при заданном ν наименьшую энергию имеет система, заряд которой равен $A/2$, т. е. на языке голых частиц система со статическим электронейтральным конденсатом. На языке пионных возбуждений заряд $A/2$ равен разности чисел π_s^+ - и π^- -квазичастиц.

Глава VI

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ КОНДЕНСАТ В ОБЫЧНЫХ ЯДРАХ?

До сих пор пионные возбуждения и конденсация рассматривались в неограниченном однородном ядерном веществе. Для того, чтобы эти результаты можно было применить к ядрам, необходимо выяснить особенности пионной конденсации в конечной системе. Задача облегчается тем, что неустойчивость пионных возбуждений наступает при волновом векторе $k \approx p_F \gg 1/R$. Поэтому уже в средних ядрах влияние поверхности ядра на конденсацию не очень велико. Ниже рассматривается конденсация в достаточно большой сферической системе. При этом приходится решать нелинейное уравнение для конденсатного пионного поля в ядре в координатном представлении. Вне ядра поле переходит в решение свободного уравнения КГФ. Найдено приближенное аналитическое решение, справедливое вблизи критической точки. Внутри объема ядра получается решение, совпадающее со случаем бесконечной системы, которое на толщине $\delta \ll R$ переходит в нуль на границе ядра. Объемная часть конденсатной энергии совпадает с энергией однородной системы. Поверхностная конденсатная энергия оказывается пропорциональной площади сечения перпендикулярного направлению волнового вектора конденсатного поля, что делает энергетически выгодной ориентацию слоев перпендикулярно наибольшей оси деформированного ядра. Конденсация способствует вытянутости ядер и может привести к изомерии формы. Наличие слоистой структуры могло бы привести к появлению ротационных уровней у сферических ядер. Поскольку конденсатное поле нарушает трансляционную и ротационную симметрии, возникают голдстоуновские ветви колебаний. Наинизшей частоте соответствует колебание ориентации слоев отно-

сительно оси вытянутости. Среднее значение конденсатного поля в ядре с равным нулю моментом равно нулю. Отличен от нуля только средний квадрат конденсатного поля. Поэтому конденсация, если бы она существовала в атомных ядрах, не приводила бы к нарушению сохранения четности.

Для ответа на вопрос о существовании конденсата в ядрах необходимо прежде всего выяснить, не противоречит ли такое предположение известным ядерным фактам и затем указать возможные эксперименты, которые могли бы доказать или опровергнуть существование конденсата в ядрах.

Даже в том случае, если в основном состоянии ядер нет конденсата, представляет большой интерес определение параметров, характеризующих степень близости ядер к конденсации.

Оказывается, что существующие эксперименты не противоречат существованию конденсата и, по крайней мере, указывают, что ядра близки к конденсации.

Ценная информация о параметрах πN - и NN -взаимодействия может быть получена из положения уровней 0^- , 1^+ , 2^- , на которые существенное влияние оказывает одноионный обмен. Информацию о подавлении «резонансной» части поляризационного оператора (точнее «неполюсной P -волновой» части) можно получить из анализа данных по π -атому.

Аномально большие значения матричных элементов некоторых l -запрещенных $M1$ -переходов естественно объясняются близостью ядер к конденсации. Действительно, вероятность l -запрещенного перехода содержит слагаемое, имеющее полюс при $|\omega_0^2| = 0$. Грубая оценка величины $|\omega_0^2|$ дает $|\omega_0^2| \sim 0,2$, при этом остается открытым вопрос о том, соответствует ли это значение конденсату или $\omega_0^2 > 0$ и система близка к конденсации.

При рассеянии электронов ядрами обнаруживаются аномалии, которые объясняются предположением о слоистой структуре плотности протонов. Если конденсат существует, то он должен приводить к слоистой структуре именно с тем периодом, который наблюдается на опыте (аномальное поведение формфактора наблюдается при передаваемом импульсе $q = 3f^{-1} \approx 2k_0$).

Опыты по рассеянию нуклонов и пионов на ядрах, а также по рассеянию электронов на большие углы, когда проявляется структура спиновой плотности нуклонов, могут дать ценную информацию о параметрах, определяющих близость ядер к конденсации.

Обсуждаются также некоторые другие эксперименты, которые позволяют установить степень близости ядра к конденсации.

VI.1. Пионная конденсация в конечной системе

Решено уравнение, описывающее конденсатное поле в конечной системе. Выясняется влияние конденсации на деформацию и моменты инерции ядер. Показано, что конденсация способствует вытянутости ядер и могла бы привести к изомерии формы. Исследованы голдстоуновские низкочастотные ветви, возникающие в результате конденсации. Оцениваются частоты наинизших колебаний. Показано, что конденсация в конечной системе не нарушает сохранения четности.

Конденсатное поле в конечной системе. Уравнение для частоты пиона без учета конденсации при $\omega \ll 1$ и для $N \simeq Z$, когда $\Pi(\mathbf{k}, \omega)$ есть четная функция ω , можно записать в виде

$$\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=0} \omega^2 = \tilde{\omega}_k^2,$$

где

$$\tilde{\omega}_k^2 = 1 + k^2 + \Pi(\mathbf{k}, 0), \quad \left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right)_{\omega=0} > 0.$$

Эти соотношения определяются гармонической частью функции Лагранжа. Ангармоническое слагаемое при слабых полях имеет вид

$$\mathcal{L}'_{\pi} = \frac{\Lambda(k)}{4} \varphi^4.$$

Поэтому для достаточно слабых полей и малых частот ($\omega \ll 1$) эффективный лагранжиан пионов может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_{\pi} = \frac{\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right) \dot{\varphi}^2 - \tilde{\omega}^2(k) \varphi^2}{2} - \frac{\varphi^2 \Lambda(k) \varphi^2}{4}. \quad (6.1)$$

Для простоты опущены изотопические значки. В координатном представлении, к которому мы перешли под $\tilde{\omega}(k)$ и $\Lambda(k)$, следует понимать дифференциальные операторы, которые получаются после замены $\mathbf{k} \rightarrow \frac{1}{i} \nabla$.

Функция Лагранжа (6.1) дает следующее уравнение для φ :

$$\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right) \ddot{\varphi} + \tilde{\omega}^2(k) \varphi + \Lambda(k) \varphi^3 = 0. \quad (6.2)$$

Мы будем рассматривать конечную систему с размерами $R \gg 1/k_0$, где \mathbf{k}_p — волновой вектор, соответствующий конденсатному полю бесконечной системы. Тогда фурье-образ поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в конечной системе будет содержать волновые векторы $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}$, где $\Delta k \sim 1/R$. Поэтому функции $\tilde{\omega}^2(k)$ и $\Lambda(k)$ могут быть разложены в ряд около $k = k_0$. Для $\Lambda(k)$ достаточно ограничиться нулевым членом $\Lambda(k) = \Lambda(k_0) \equiv \lambda$, тогда как $\tilde{\omega}^2(k)$ можно представить в виде

$$\tilde{\omega}^2 = -\omega_0^2 + \kappa \frac{(k^2 - k_0^2)^2}{4k_0^2}, \quad \omega_0^2 > 0, \quad \kappa > 0. \quad (6.3)$$

Для статического конденсатного поля (предполагаем $N \simeq Z$ и, следовательно, конденсат статический) получаем из (6.2)

$$\tilde{\omega}^2(k) \varphi_0 + \lambda \varphi_0^3 = 0. \quad (6.4)$$

Используя (6.3), получаем [24]

$$(\Delta + 1)^2 f(r') = \varepsilon \left(f(r') - \frac{4}{3} f^3(r') \right), \quad (6.4')$$

где

$$\varepsilon = \frac{4\omega_0^2}{\kappa k_0^2}, \quad f = \frac{\varphi_0}{a_0}, \quad a_0^2 = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\lambda}, \quad r' = k_0 r.$$

Как мы видели, a_0 представляет собой амплитуду периодического конденсатного поля в бесконечной системе. Вблизи критической точки $\varepsilon \ll 1$. Ниже мы используем малость этой величины для приближенного решения уравнения (6.4').

Нас будут интересовать решения уравнения (6.4'), имеющие вдали от поверхности ядра постоянную амплитуду, равную a_0 (только такие решения позволяют мини-

мизировать энергию). Мы рассмотрим две возможности: сферические и плоские слои $f = \sin \psi_0$, где $\psi_0 = r', z'$, соответственно. Тогда

$$f = a \sin(\psi_0 + \chi), \quad (6.5)$$

где a и χ заметно меняются на расстояниях r порядка $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{k_0}$. Поскольку ширина слоя, на которой меняется амплитуда конденсатного поля велика по сравнению с расстоянием между нуклонами $r_0 \sim 1/k_0$, характер поведения плотности на краю ядра мало влияет на решение. Для простоты можно считать, что ядро имеет резкую границу. Подставляя (6.5) в (6.4') и используя малость ε , нетрудно получить уравнения второго порядка для величин a и χ . Граничные условия к уравнению можно получить, сшивая наше решение с решением уравнения Клейна — Гордона — Фока в вакууме. Легко показать, что медленно меняющаяся фаза χ несущественна для вычисления энергии, а амплитуду с достаточной точностью можно найти из условия $a = 0$ на поверхности системы. Для энергии системы находим после интегрирования по частям

$$E = -\frac{4\omega_0^4}{9\lambda} \int f^4 dV.$$

В сферическом ядре с радиусом $R \gg \delta$ сферически симметричное решение (6.4) при $\varepsilon \ll 1$ имеет вид

$$f(r') = \text{th} \frac{(k_0 R - r')}{k_0 \delta} \sin(r' + \chi),$$

$$\delta = 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon k_0}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega_0}. \quad (6.6)$$

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет уравнению (6.4') с точностью до членов $\sim \sqrt{\varepsilon}$. Оно соответствует сферической слоистой структуре конденсата. Решению (6.6) соответствует энергия конденсации

$$E = \mathcal{E}_0 V + \mathcal{E}_s S,$$

где \mathcal{E}_0 — объемная плотность энергии

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{\omega_0^4}{6\lambda}, \quad (6.7)$$

V — объем ядра, S — площадь поверхности, \mathcal{E}_s — поверхностная энергия

$$\mathcal{E}_s = \frac{4}{3} \delta |\mathcal{E}_0|. \quad (6.8)$$

Решение, переходящее в глубине в плоские слои, имеет вид

$$f = \text{th} \frac{\sqrt{k_0^2 R^2 - \rho'^2} - |z'|}{k_0 \delta} \sin(z' + \kappa), \quad (6.9)$$

при $\frac{r}{R} \gg \sqrt{\varepsilon}$, $\sqrt{R^2 - \rho^2} \gg \delta$, $\rho' = k_0(x^2 + y^2)^{1/2}$. Энергия,

соответствующая (6.9),

$$E = \mathcal{E}_0 V + 2\mathcal{E}_s S_e, \quad (6.10)$$

где S_e — площадь экваториального сечения ядра. Выражения (6.7) и (6.10) справедливы и для сфероидальных ядер.

Согласно (6.10) в деформированном ядре минимальная поверхностная энергия соответствует ориентации волнового вектора слоев вдоль большей оси.

Как видно, в достаточно больших системах ($R \gg \delta$) реализуется решение с плоскими слоями (6.10), так как ему соответствует меньшая поверхностная энергия. Вклад конденсата в объемную энергию не зависит от формы слоев.

Для легких ядер ($R \sim \delta$) такой «макроскопический» подход не годится. Как показано в [25], в этом случае пионная неустойчивость (как функция плотности нуклонов) наступает сначала для состояний с нулевым угловым моментом. При вычислении поляризационного оператора пионов, вместо интегрирования по импульсам нуклонных состояний (как это делалось в бесконечной системе), производилось суммирование по квантовым числам нуклона в сферическом ядре и определялось значение константы $g' = g'_c$, при котором наступает неустойчивость. В средних и тяжелых ядрах получают приблизительно те же значения g'_c , что и в бесконечной системе.

Деформация и моменты инерции ядер. Рассмотрим тяжелое ядро, в котором возникла структура плоских слоев. Так как конденсатная добавка к поверхностной энер-

гии пропорциональна поперечному сечению ядра (см. (6.10)), наличие конденсата будет способствовать вытягиванию ядер вдоль направления волнового вектора слоев.

Поскольку поперечное сечение содержит линейное по деформации ядра слагаемое, зависимость энергии ядра от параметра квадрупольной деформации β имеет вид [24]

$$E(\beta) = \frac{\alpha(\beta)\beta^2}{2} - \frac{4\pi R^2 \mathcal{E}_s \beta}{3}. \quad (6.11)$$

Следует учитывать хорошо известный факт, что жесткость по отношению к малым деформациям ($\beta < A^{-1/2}$) определяется расстройством оболочечной структуры и имеет порядок $\alpha(0) \sim \varepsilon_F A$, тогда как жесткость по отношению к большим деформациям ($\beta > A^{-1/2}$) определяется поверхностной энергией системы и, как это следует из полуэмпирической формулы для энергии связи ядер, $\alpha(\beta) \sim \frac{1}{6} \varepsilon_F A^{2/3}$, т. е. значительно меньше, чем $\alpha(0)$.

Легко видеть, что $E(\beta)$ имеет минимум при малой деформации $\beta_0 = \frac{4\pi R^2 \mathcal{E}_s}{3\alpha_0}$, а при $\frac{8\pi R^2 \mathcal{E}_s}{3} > \left(\frac{d(\alpha\beta^2)}{d\beta}\right)_{\min}$ образуется второй минимум при большой деформации, который мог бы привести к изомерии формы. Отметим, что, если второй минимум существует по оболочечным причинам, конденсат его углубит. Однако минимум может появиться и тогда, когда оболочечные расчеты его не дают. Отметим здесь же, что начальная жесткость ядра может оказаться настолько большой, что в силу малости равновесной деформации β_0 соответствующая ротационная полоса попадает в область одночастичных энергий, т. е. станет ненаблюдаемой. Выбрав для оценки значения $\lambda \simeq 8$ (см. стр. 181) и воспользовавшись для оценки $a^2 \sim \frac{|\omega_0^2|}{\lambda}$ значением $|\omega_0^2| \simeq 0,2$ (см. ниже) получим $\beta_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ для $A = 100$.

Однако даже при $\beta_0 \rightarrow 0$ образование плоских слоев приведет к нарушению сферической симметрии и, следовательно, к появлению момента инерции у сферических ядер. Для образования заметного момента инерции необходимо, чтобы расщепление по проекции момента одночастичных энергий нуклонов в поле слоев было сравни-

мым либо с энергией спаривания, либо, для дважды магических ядер, с расстоянием до первых уровней [69].

Воспользовавшись результатами работы [70], нетрудно получить оценку отношения момента инерции I к твердотельному I_0

$$\frac{I}{I_0} \sim \frac{|\varepsilon_{\nu, m} - \varepsilon_{\nu, m \pm 1}|^2}{\Delta^2}, \quad (6.12)$$

где $\varepsilon_{\nu, m} - \varepsilon_{\nu, m \pm 1}$ — разность энергий для соседних проекций момента частицы на направление слоев, Δ — энергия спаривания или энергетическая щель в дважды маге. Разность одночастичных энергий находится из выражения для энергии нуклона в периодическом поле φ_0

$$\varepsilon(p^2, p_z) = \frac{p^2}{2m} + \frac{mf^2 a^2 k^2}{4} \frac{1}{p_z^2 - k^2/4}. \quad (6.13)$$

В квазиклассическом приближении нетрудно связать p_z^2 с проекцией момента M . Направляя ось x вдоль радиус-вектора частицы, имеем

$$M_x = 0, \quad M_y = -r p_z, \quad M^2 = r^2 p^2, \\ M_y^2 = r^2 p_z^2, \quad M_z^2 = M^2 \cos^2 \theta,$$

откуда

$$p_z^2 = p^2 \sin^2 \theta \overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} p^2 \left(1 - \frac{m^2}{j^2}\right). \quad (6.14)$$

Из (6.14) получаем

$$\varepsilon_{\nu, m} - \varepsilon_{\nu, m-1} \sim \frac{f^2 a^2 k_0^2}{j \varepsilon_F} \frac{1}{\left[1 + g \Phi\left(\frac{k}{2p_F}\right)\right]^2}. \quad (6.15)$$

Последний множитель учитывает взаимодействие между нуклонами.

Воспользовавшись оценкой a^2 , приведенной выше, получим

$$\sqrt{\frac{I}{I_0}} \sim 0,1 \frac{\varepsilon_F}{j \Delta}. \quad (6.16)$$

В случае обычной деформации $\sqrt{\frac{I}{I_0}} \sim \frac{\beta \varepsilon_F}{j \Delta}$. Таким образом, мы видим, что слоистая структура эквивалентна в

смысле момента инерции деформации $\beta \sim 0,1$. Разумеется, эти цифры имеют только иллюстративный смысл.

Голдстоуновские ветви колебаний. Появление поля φ_0 означает нарушение различных симметрий. В силу координатной зависимости $\varphi_0(\mathbf{r}) = a \sin \mathbf{k}_0 \mathbf{r}$ нарушается трансляционная симметрия. Существование выделенного направления означает нарушение ротационной симметрии. И, наконец, в случае изотопически несимметричного поля $\varphi_0^{(\alpha)}$ нарушается изотопическая симметрия. Как известно, нарушение непрерывной симметрии в бесконечной системе приводит к появлению ветви собственных колебаний с равной нулю минимальной частотой (теорема Голдстоуна). В конечной системе эта теорема приводит к колебаниям с частотой, стремящейся к нулю, некоторая степень радиуса системы. Так, например, нарушение ротационной симметрии в деформированном ядре приводит к появлению ротационного спектра с минимальной частотой

$$\omega \sim \frac{1}{I} \sim \frac{1}{R^5}.$$

Проследим механизм возникновения голдстоуновских ветвей. Для этого получим уравнение для поля колебаний. Чтобы получить это уравнение в простой форме, следует в соотношении (6.2) представить φ в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ и ограничиться первым членом разложения по степеням φ' . Действительно, если колебание определенного вида, например, фиксированного волнового вектора, слабо возбуждено, то его амплитуда порядка амплитуды нулевых колебаний для одной степени свободы, т. е. она содержит корень из объема системы в знаменателе. Из (6.2) получаем

$$\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right) \ddot{\varphi}' + \tilde{\omega}^2(k) \varphi' + 3\lambda \varphi_0^2 \varphi' = 0. \quad (6.17)$$

Здесь $\mathbf{k} = \frac{1}{i} \nabla$. Если волновые векторы, существенные в φ' , значительно меньше, чем k_0 , то в 3-м слагаемом в (6.17) можно заменить φ_0^2 на его среднее значение. Используя полученные в (6.4') соотношения, имеем

$$3\lambda \overline{\varphi_0^2} = \frac{3\lambda a^2}{2} = 2\omega_0^2.$$

В результате получается уравнение, не зависящее от g . Частота колебаний, как функция волнового вектора q , будет

$$\omega^2(q) = \frac{2|\omega_0^2| - |\tilde{\omega}^2(q)|}{1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}}. \quad (6.18)$$

Таким образом, наличие конденсата стабилизирует колебание ($\omega^2 > 0$). Это выражение соответствует конечной минимальной частоте ($\omega^2 \sim \omega_0^2$) и не имеет отношения к голдстоуновской ветви колебания. Эти колебания существуют и до, и после конденсации; их частота сильно уменьшена множителем $(1 - \partial \Pi / \partial \omega^2)^{-1}$ (см. ниже). Чтобы увидеть как возникают голдстоуновские ветви [26], продифференцируем уравнение (6.4) для φ по координате x ($x \parallel k$)

$$\tilde{\omega}^2(k) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + 3\lambda \varphi_0^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \quad (6.19)$$

Здесь опять $k = \frac{1}{i} \nabla$. Сравнивая это соотношение с (6.17), находим, что при $\varphi' \sim \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ частота колебания φ' обращается в нуль. В конечной системе волновой вектор колебания может быть подобран равным k_0 только с точностью до величины $\Delta k \sim 1/R$. Поэтому минимальная частота колебаний обращается в нуль только при $R \rightarrow \infty$, а при конечном R , как мы увидим, зависит от R степенным образом.

Для того, чтобы оценить частоту колебаний, представим φ' в виде

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \chi,$$

где χ — медленно изменяющаяся функция. Умножая (6.19) слева на χ и подставляя в (6.17), получим

$$\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right)_{\substack{k=k_0 \\ \omega=0}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \ddot{\chi} + \tilde{\omega}^2(k) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \chi - \chi \tilde{\omega}^2(k) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \quad (6.20)$$

Рассмотрим сначала случай бесконечной системы, и пусть χ характеризуется волновым вектором q . Тогда, используя (6.3), нетрудно получить из (6.20) следующее

выражение для частоты колебаний

$$\omega^2 = \kappa \frac{q^4 + 4(q\mathbf{k}_0)^2}{4\left(1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}\right)k_0^2}.$$

При малых q частота существенно зависит от угла между q и k_0 . При $q\parallel k_0$

$$\omega_{\parallel}^2 = \frac{\kappa q^2}{q \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}}, \quad (6.21)$$

а при $q \perp k_0$

$$\omega_{\perp}^2 = \frac{\kappa q^4}{4\left(1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}\right)k_0^2}. \quad (6.22)$$

В конечной системе наименьшее колебание соответствует $q_{\min} \sim R^{-1}$, причем $q_{\parallel} \sim q_{\perp} \sim \pi/R$, поэтому минимальная частота колебаний определяется слагаемым, содержащим q_{\parallel}

$$\omega_{\min}^2 \sim \frac{\kappa}{1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}} \frac{\pi^2}{R^2}.$$

Для

$$\kappa = 0,4, \quad 1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2} \sim |\Pi|_{kv\Delta},$$

где Δ — среднее расстояние между уровнями пионной симметрии (точное значение $\partial\Pi/\partial\omega^2$ можно получить только методами ТКФС; мы используем $\Delta \sim 10 \div 20$ МэВ) имеем

$$\omega_{\min} \sim \frac{0,2}{A^{1/3}} \sim \frac{30}{A^{1/3}} \text{ МэВ}.$$

Таким образом, этот тип колебаний перемешивается с частично-дырочными возбуждениями той же симметрии и не сможет быть наблюден. В [27] оценивались частоты для различных типов голдстоуновских колебаний, которые должны были бы появиться в ядре, если бы существовал конденсат.

Авторы приходят к заключению, что наименьшая минимальная частота колебаний соответствует колебаниям

направления слоев относительно оси вытянутости. Дается следующее выражение для частоты таких колебаний:

$$\omega_{\text{rot}}^2 = \frac{5\beta \sqrt{2/\kappa}}{R (k_0 R)^2 \left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}\right)} |\omega_0|, \quad (6.23)$$

где β — параметр деформации.

Для $\beta = 0,2$; $\omega_0^2 = -0,2$ (см. стр. 234) получаем $\omega_{\text{rot}} \sim 0,4$ МэВ. Следует иметь в виду, что выражение (6.23) справедливо только пока ω_{rot} больше частоты вращательных уровней ($\omega_{\text{rot}} > \frac{1}{I}$). Обнаружение такого уровня было бы серьезным аргументом в пользу существования конденсата.

Квантовый характер конденсатного поля в конечной системе. Сохранение четности. В бесконечной системе конденсатное поле может рассматриваться как классическое, т. е. имеет в каждой точке пространства определенное значение (с точностью до небольшого разброса, вызванного нулевыми колебаниями остальных степеней свободы).

В конечной системе, как мы видели на примере конденсации во внешнем поле (гл. II), основное состояние системы характеризуется волновой функцией с равным нулю средним значением поля. Конденсация проявляется в том, что большое значение имеет средний квадрат поля — положительные и отрицательные значения поля в данной точке равновероятны. Действительно, изобразим оператор поля $\hat{\phi}$ в виде $\hat{\phi} = \hat{q}\Psi$, где $\Psi(r)$ дает координатную зависимость поля в основном состоянии (решение уравнения КГФ в поле, соответствующее наинизшему состоянию). Тогда основное и возбужденные состояния определяются, как мы видели, волновой функцией $\chi(q)$, описывающей движение в двух одинаковых ямах, разделенных потенциальным барьером. Основному состоянию соответствует симметричная волновая функция $\chi_0^{(s)}(q)$, а первому возбужденному — антисимметричная $\chi_0^{(a)}(q)$, которые представляют собой приближенно симметричную и антисимметричную суперпозицию наинизших состояний в каждой из ям.

Как мы видели (2.17), энергия первого возбужденного состояния экспоненциально мала

$$\tilde{\omega}^{(a)} = \frac{\omega V^2}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi\omega^3}{4\lambda_1}\right).$$

В достаточно большой однородной системе

$$\lambda_1 = \lambda \int \Psi^4 d\tau \simeq \lambda/V$$

и, следовательно, энергия первого возбуждения экспоненциально падает с объемом системы. Таким образом, в достаточно большой системе возникает вырождение и в качестве основного состояния можно вместо $\chi_0^{(s)}$ взять

$$\chi_0^{(1,2)} = \frac{\chi_0^{(s)} \pm \chi_0^{(a)}}{\sqrt{2}}.$$

Одно из этих состояний соответствует преимуществу положительных, а другое — отрицательных значений q . Среднее значение поля ϕ в каждом из этих двух состояний не равно нулю и отличается знаком.

Соотношение (2.17) позволяет сделать оценку энергии первого возбуждения (аналогичного $\chi_0^{(a)}$) и для случая ядра. В качестве Ψ следует взять нормированное на единицу объема решение

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{V}} \sin k_0 x,$$

отсюда

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{V} \frac{3}{2}.$$

В качестве константы λ можно взять величину, которая получается из приведенных выше оценок (гл. IV, стр. 184), $\lambda \simeq 10$. Вместо ω^2 следует подставить величину $\omega_0^2 = |\tilde{\omega}(k_0)|^2$. Величина ω_0 неизвестна. Для определенности здесь и ниже все оценки, содержащие ω_0 , делаются в предположении существования конденсата с $\omega_0^2 = -0,2$ (стр. 234). Приблизительно такое же значение соответствует ($\omega_0^2 \simeq -0,1$), как мы увидим, предположению о том, что аномалии в рассеянии электронов на ядрах вызваны рассеянием на слоистой конденсатной структуре.

Подстановка этих чисел в (2.17) дает

$$\omega^{(a)} = 0,20e^{-1,0A/100} = 28e^{-1,0A/100} \text{ МэВ.}$$

При $A = 50$ получаем $\omega^{(a)} = 17$ МэВ, т. е. достаточно большую величину. При такой энергии распад на частич-но-дырочные возбуждения привел бы к размытию этого уровня и его было бы трудно установить. Однако уже при $A = 200$ энергия $\omega^{(a)} \simeq 4,4$ МэВ и уровень мог бы проявиться (состояние с квантовыми числами пиона). Разумеется, приведенная оценка имеет только иллюстра-тивный смысл, поскольку использованное значение ω_0 совершенно произвольно, а величина λ была оценена с точностью до множителя ~ 1 .

Как основное, так и возбужденные состояния конден-сата, если они существуют, имеют определенную чет-ность и поэтому присутствие конденсата с $\langle \varphi \rangle = 0$ не на-рушало бы классификацию ядерных уровней по четности.

VI.2. Эксперименты, позволяющие установить близость ядер к конденсации

Показано, что известные ядерные факты не исключают возможности конденсации и, по-видимому, свидетель-ствуют о близости ядер к критической точке.

Согласование положения уровней 0^- , 1^+ , 2^- , ... позво-ляет уточнить константы λN - и NN -взаимодействий. При-нятые в [11, 12, 15] константы не противоречат этим данным. Анализ l -запрещенных $M1$ -переходов позволяет оценить близость ядер к критической точке.

Показано, что аномалии в рассеянии электронов яд-рами могли бы быть объяснены слоистой структурой плотности протонов, вызванной конденсацией. Обсужда-ются возможные эксперименты по рассеянию нуклонов и пионов ядрами, которые могут дать информацию о па-раметрах, определяющих конденсацию.

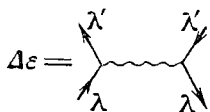
Противоречит ли конденсация известным ядерным фактам? Предположение о возможном существовании конденсата в ядрах [11] вызвало ряд возражений [71], которые анализировались в [15] и [72]. Перечислим наи-более существенные из этих возражений. Высказывалось утверждение, что учет отталкивания нуклонов на малых расстояниях должен привести к сильному уменьшению

πNN -взаимодействия в ядре и к изменению той оценки n_c , которая была сделана в [11]. Как мы видели, NN -взаимодействие учитывается в поляризационном операторе введением константы g^- . Это означает, что вершина πNN -взаимодействия считается ослабленной

$$\gamma(\pi NN) = \frac{\gamma_0(\pi NN)}{1 + g^- \Phi(k, 0)} \simeq \frac{\gamma_0(\pi NN)}{2,6}. \quad (6.24)$$

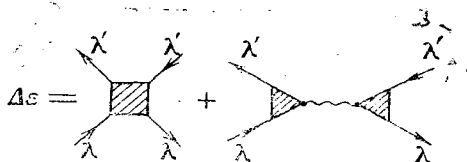
Это ослабление и вызывается отталкиванием нуклонов на малых расстояниях. Но вместо того, чтобы вычислять это отталкивание с помощью NN -взаимодействия в пустоте, соответствующая константа определяется в ТКФС эмпирически из сравнения с другими процессами, куда входит взаимодействие той же симметрии, что и в случае πNN . Действительно, константа g^- входит в перенормировку в среде всех вершин, имеющих симметрию пиона (вершина $\sim \sigma_a \tau_b$). Такой способ гораздо надежнее, чем вычисления по теории ядерного вещества, поскольку последняя не учитывает искажения однопионного обмена, вызванные многочастичными взаимодействиями (см. III.1). Приходится удивляться, что значение g^- , получаемое в таких расчетах [71], оказывается не очень сильно отличающимся от эмпирического значения ($g^- = 1,2 \div 1,4$ вместо $g^- = 1,6$).

В качестве примера, опровергающего принятое в [11] πN -взаимодействие, приводился сдвиг уровня $0^-, 1$ в O^{16} . Энергия уровня $\varepsilon = 12,78$ МэВ, тогда как энергия частично-дырочного возбуждения, найденная из разностей масс ядер соседних с O^{16} , равна 12,42 МэВ. Таким образом, в результате взаимодействия возникает положительный сдвиг энергии $\Delta\varepsilon = 0,36$ МэВ. Была сделана оценка сдвига с помощью графика однопионного обмена



Значение $\Delta\varepsilon = 4,8$ МэВ [71] рассматривалось как противоречащее принятому в [11] взаимодействию. При этой оценке не учитывалось отталкивание на малых

расстояниях. Сдвиг уровня определяется двумя типами графиков



Второй из этих графиков дает вклад одноопионного обмена с учетом отталкивания на малых расстояниях (см. (6.24)), которое уменьшает по модулю приведенное выше значение $\Delta\varepsilon$ ($-4,8$ МэВ)

$$\Delta\varepsilon_{\pi} = -\frac{4,8}{(2,6)^2} \text{ МэВ.}$$

Первое слагаемое в (6.25) представляет собой сумму всех взаимодействий, не содержащих одноопионного обмена по рассматриваемому каналу. Именно, из-за отталкивания на малых расстояниях первое слагаемое (6.25) дает положительный вклад в сдвиг уровня

$$\Delta\varepsilon \simeq 1 \text{ МэВ.}$$

В результате получается разумная оценка наблюдаемого сдвига.

Ниже приводится несколько примеров количественного расчета сдвигов энергий в различных ядрах методами ТКФС. Показано, что принятые выше константы взаимодействия позволяют объяснить наблюдаемые сдвиги энергий.

Другое возражение состояло в том, что притяжение, вызываемое одноопионным обменом, должно было бы привести к увеличению спиновой части магнитного момента, тогда как на опыте наблюдается подавление. Ниже дается подробный анализ влияния одноопионного обмена на магнитные моменты. Мы здесь приведем простое качественное рассуждение, которое покажет, что никакого противоречия с подавлением магнитного момента не возникает. Прежде всего одноопионный обмен влияет только на часть магнитного момента, имеющую симметрию σ_t . В сферических ядрах, как мы увидим, это влияние заметно ослаблено. Тем не менее роль одноопионного об-

мена сказывается в том, что ослабление соответствующей части магнитного момента грубо определяется соотношением

$$\mu^s = \frac{\mu_0^s}{1 + g_{\text{eff}}^-}$$

с константой $g_{\text{eff}}^- \approx 1$ вместо $g^- = 1,6$. Это ослабление отталкивательного взаимодействия вызвано влиянием одноопионного обмена. Таким образом рассмотренные явления не только противоречат принятым выше значениям констант взаимодействия, но при более тщательном анализе подтверждают эти значения.

Более того, анализ вероятностей l -запрещенных $M1$ -переходов (см. ниже) показывает, что ядра либо близки к конденсации, либо имеют слабый конденсат. Не исключено также, что наблюдаемые аномалии в рассеянии электронов ядрами являются результатом слоистой структуры ядерного вещества, вызываемой конденсацией. Ниже рассматриваются возможные эксперименты, которые позволят ответить на вопрос, есть ли конденсат в ядрах, и если нет, то установить близость ядер к конденсации.

Влияние одноопионного обмена на спектры и вероятности переходов. Эффективное поле, действующее на нуклон внутри ядра, отличается от внешнего поля за счет поляризации среды. Вероятности одночастичных переходов и средние значения аддитивных величин в ядре выражаются через матричные элементы эффективного поля V . В символической записи связь эффективного поля с внешним V_0 имеет вид

$$V = V_0 + \mathcal{F}AV = V_0 + \Gamma AV_0. \quad (6.26)$$

Здесь \mathcal{F} — эффективное взаимодействие в ядерном веществе, A — пропагатор пары (квазичастицы — квазидырки). Второе слагаемое в (6.26) описывает добавочное поле, возникающее из-за поляризации среды, Γ — амплитуда NN-рассеяния в среде.

Уровни энергии определяются как полюса Γ (или V). Особенно простой вид имеет энергия частично-дырочного уровня

$$\varepsilon_{\lambda\lambda} = \varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda}^+ \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \longrightarrow \end{array} \quad (6.27)$$

где ε_λ — энергия квазичастицы. Второе слагаемое дает сдвиг уровня из-за взаимодействия квазичастицы и квазидырки. В тех случаях, когда эффективное поле, соответствующее рассматриваемому процессу, имеет пионную симметрию, следует учитывать вклад однопионного обмена в NN-взаимодействие. То же самое относится и к сдвигу энергии частично-дырочных возбуждений. Если состояние $\lambda\lambda'$ имеет пионные квантовые числа, следует учитывать вклад однопионного обмена в амплитуду Γ . Сравнение теории с опытом может служить проверкой правильности выбранных констант взаимодействия и позволит судить о близости ядра к конденсации или о присутствии конденсата. К явлениям такого рода относятся магнитные переходы и перенормировка спинового магнитного момента, гамов-теллеровские β -переходы и спектры ядер в состояниях $T = 1, 0^-, 1^+, 2^-, \dots$

Рассмотрим сначала влияние однопионного обмена на положение уровней. Величина Γ , как мы видели в гл. III, определяется следующими графиками:

$$\text{Diagram with } \Gamma \text{ box} = \text{Diagram with pion exchange} + \text{Diagram with pion exchange between two vertices} \quad (6.28)$$

Величины Γ_1 и \mathcal{T}_1 по определению не содержат однопионного обмена в рассматриваемом канале, а между блоками \mathcal{T}_1 стоит точный пропагатор пиона в среде. Согласно (6.27) сдвиг энергии одночастичного уровня равен

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\lambda'} - \varepsilon_\lambda + \varepsilon_{\lambda'} &= \\ &= \int \Psi_\lambda^*(\mathbf{r}) \Psi_{\lambda'}(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_\lambda(\mathbf{r}') \Psi_{\lambda'}^*(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \\ &= \int (\Psi_\lambda^* \Psi_{\lambda'})_{-\mathbf{k}} \Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (\Psi_\lambda \Psi_{\lambda'}^*)_{-\mathbf{k}'} \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}, \quad (6.29) \end{aligned}$$

где $(\Psi_\lambda^* \Psi_{\lambda'})_{\mathbf{k}}$ — компонента фурье-произведения волновых функций частицы и дырки.

Для грубой оценки сдвига уровней используем для Γ_1 и \mathcal{T}_1 выражения (3.39) и (3.40), полученные для бесконечной системы. Таким образом, первое слагаемое в (6.28) положительно, т. е. соответствует отталкиванию и приводит к повышению уровня по сравнению с раз-

ностью одпочастичных энергий. Второе слагаемое равно

$$\Gamma^{(\pi)}(k) = \text{Tr} [\mathcal{F}_1^{(\alpha)}(k)]^2 \frac{1}{\omega^2 - \omega_k^2 - \Pi(k, \omega)}.$$

В результате усреднения по спиновым переменным и использования (3.39), получаем

$$\Gamma^{(\pi)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{f^2 k^2}{(1 + g^- \Phi)^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_k^2 - \Pi(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (6.30)$$

Сдвиг уровней определяется значением Γ при $\omega = 0$. Таким образом, слагаемое $\Gamma^{(\pi)}$ вносит отрицательный вклад в энергию уровня. Амплитуды $\Gamma_1(k)$ и $\Gamma^{(\pi)}(k)$ сравниваются при $k^2 \sim 1$. При $k = k_0 \simeq p_F = 2$ амплитуда $\Gamma^{(\pi)}(\mathbf{k}, \omega = 0)$ имеет максимум, поскольку вблизи k_0 величина $\tilde{\omega}^2(k) = \omega_k^2 + \Pi(\mathbf{k}, 0)$ имеет минимум. Разумеется, выражение (6.30) справедливо только, если конденсация еще не наступила. В присутствии конденсата $\omega^2(k_0) < 0$, по к $\Pi(\mathbf{k}, 0)$ добавляется слагаемое $2|\omega^2(k_0)|$, так что знаменатель и до и после конденсации имеет один и тот же знак.

Знак сдвига энергии зависит от относительного вклада больших и малых k в фурье-разложении произведения волновых функций

$$(\Psi_{\lambda}^*, \Psi_{\lambda'})_k = (\Psi_{\lambda}^*(\mathbf{r}), e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Psi_{\lambda'}(\mathbf{r})).$$

Во всех исследованных случаях оказалось, что вклад отталкивания при малых k приблизительно равен вкладу притяжения при больших k , так что результирующий сдвиг оказывается малым и в разных случаях либо одного, либо другого знака. Сдвиг одпочастичного уровня 0^- в O^{16} оценивался в [73], энергия уровня $\epsilon_{\lambda} = 12,78$, тогда как из масс ядер, соседних с O^{16} , разность энергий $\epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\lambda'}$ невзаимодействующих квазичастиц равна 12,42. Сдвиг уровня $\Delta E = 0,36$. Оказалось, что наблюдаемый сдвиг не противоречит выбранным выше значениям f и g^- .

В [73] выполнен детальный расчет спектров рассматриваемого типа в Rb^{208} , Tl^{208} методами ТКФС. Были найдены значения константы g' , при которых расчетная частота совпадает с наблюдаемой. Предполагалось, что перенормировка константы f в среде равна $f^* = 0,9f$. Результаты для Rb^{208} сведены в таблицу 3.

Для Tl^{208} получено (при $E_{\text{exp}} = 4,21$; $\Delta\varepsilon = 4,09$) значение $g' = 0,81$. Выпадает только Bi^{208} ($E_{\text{exp}} = 3,65$; $\Delta\varepsilon = 3,57$), где сдвиг очень мал ($E - \Delta\varepsilon = 0,08$) и его не удается объяснить. В расчете предполагалось, что

Таблица 3

Сравнение с экспериментом сдвигов одночастичных уровней в Pb^{208} , рассчитанных с учетом одноопионного обмена

$I\pi$	E_{exp}	$\varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda'} = \Delta\varepsilon$	g'	f^*/f
0-	5,28	$\Delta\varepsilon(p_{1/2}^{-n}, s_{1/2}^n) = 5,46$	0,85	0,9
1+	7,2	$\Delta\varepsilon(1i_{11/2}^{-n}, 1i_{13/2}^{-n}) = 5,84$	0,87	0,9
2-	4,2	$\Delta\varepsilon(2g_{7/2}^n, 2f_{5/2}^{-n}) = 4,00$	0,82	0,9

величина Γ_R , характеризующая изменение πN^*N -вершины в среде (см. (3.14)), равна 1.

Одинаковое значение g' в 4-х случаях свидетельствует в пользу выбранного набора констант ($g^- = 1,7$; $f = 0,9$; $\Gamma_R = 1$).

Магнитные моменты. Перейдем к анализу магнитных моментов и магнитных переходов. Оператор спиновой части магнитного момента нуклона имеет вид

$$\mu^{(s)} = \mu_0 \left(\gamma_n \frac{1 - \tau_3}{2} + \gamma_p \frac{1 + \tau_3}{2} \right) \sigma.$$

Таким образом в $\mu^{(s)}$ есть слагаемое $\mu_0 (\gamma_p - \gamma_n) \frac{\tau_3}{2} \sigma$, имеющее симметрию $\sigma\tau$. Для нахождения магнитного момента ядра необходимо найти эффективное поле, соответствующее затравочным полям σ и $\sigma\tau$. Одноопионный обмен и локальное взаимодействие $g^- = 2g'$ входят только в эффективное поле вида $\sigma\tau$. Рассмотрим сначала эффективное поле, которое возникает из внешнего поля симметрии $\sigma\tau$ при выключении одноопионного обмена

$$V_1 = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \dots$$

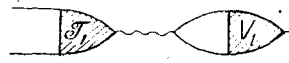
Поле V_1 не содержит пионных графиков в горизонтальном канале; в координатном представлении оно состоит

из двух слагаемых

$$V_1^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{r}) = u_1(r) \sigma_\alpha \tau_\beta + v_1(r) \frac{(\mathbf{r}\sigma) r_\alpha}{r^2} \tau_\beta. \quad (6.31)$$

Как показывают расчеты, функции $u_1(r)$, $v_1(r)$ одного порядка. Взаимодействие NN, соответствующее одноопионному обмену (формула (3.41)), содержит углы между вектором спина и волновым вектором. Нетрудно убедиться, что по этой причине одноопионный обмен перенормирует только второе слагаемое (6.31).

Если найдено поле $V_1(\mathbf{r})$, то эффективное поле с учетом одноопионного обмена равно

$$V = V_1 + \mathcal{T}_1 = V_1 + \mathcal{T}_1 \mathcal{D}(\mathcal{T}_0 A V_0) \quad (6.32)$$


При больших k вклад одноопионного обмена можно оценить, пользуясь, как это делалось выше, формулами бесконечной среды. Запишем V_1 и \mathcal{T}_1 в виде (для простоты опускаем изотопические значки)

$$V_1^\alpha(k) = u_1(k) \sigma_\alpha + v_1(k) \frac{(\sigma \mathbf{k}) k_\alpha}{k^2},$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\mathcal{T}_0}{1 + 2g'\Phi} = \frac{(\sigma \mathbf{k})}{1 + 2g'\Phi},$$

$$V^\alpha(k) = u(k) \sigma_\alpha + v(k) \frac{(\sigma \mathbf{k}) k_\alpha}{k^2}.$$

Выполняя суммирование по спиновым переменным в скобке выражения (6.32), нетрудно получить

$$u(k) = u_1(k),$$

$$v(k) = v_1(k) - \text{Pr}(u_1(k) + v_1(k)) \frac{1}{\omega^2(k)}, \quad (6.33)$$

где Pr — полюсная часть поляризационного оператора.

Магнитный момент в состоянии λ определяется матричным элементом эффективного поля $V_{\lambda\lambda}$. Интересующая нас часть магнитного момента ($\sim \sigma\tau$) будет

$$\mu_1^{(s)} = \mu_0 \frac{\gamma_p - \gamma_n}{2} V_{\lambda\lambda}.$$

Угловое интегрирование дает

$$\frac{\overline{(\sigma\tau)_z}}{r^2} = \frac{1}{2j+2}, \quad \overline{\sigma_z} = \frac{(-1)^l 2j}{2l+1}.$$

Поэтому вклад слагаемого $\sim (\sigma\tau) r_{\alpha\tau\beta}$ при больших j заметно ослаблен по сравнению со слагаемым $\sim \sigma_{\alpha\tau\beta}$.

Таким образом одноопионный обмен оказывает существенное влияние на магнитные моменты только для малых j . В состояниях $\varepsilon_{1/2}$ имеются систематические отклонения экспериментальных значений магнитных моментов от вычисленных в ТКФС без учета одноопионного обмена. Учет одноопионного обмена, быть может, объяснит эти отклонения и позволит уточнить константы g' и f^*/f .

l-запрещенные M1-переходы. Гораздо более существенную роль играет одноопионный обмен в случае l -запрещенных M1-переходов. Вероятность переходов определяется матричным элементом $V_{\lambda\lambda'}$, причем в случае l -запрещенных переходов $l' = l \pm 2$. В этом случае отличный от нуля вклад дает только слагаемое V вида $(\sigma\tau) r_{\alpha}$, которое существенно усилено одноопионным обменом. Качественно это усиление определяется соотношением (6.33) с $u_1 = 0$. Действительно, матричный элемент можно изобразить в виде

$$V_{\lambda\lambda'}^{\alpha\beta} = \int (\Psi_{\lambda'}^*(\sigma\mathbf{k}) \tau_{\beta} \Psi_{\lambda})_{-k} v(\mathbf{k}, \omega) k_{\alpha} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (6.34)$$

причем $\omega = \varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda'}$. Пренебрегая отношением $\omega^2/\tilde{\omega}^2$, приходим к выражению (6.33) под знаком интеграла по k . Если ядро близко к конденсации, то $\tilde{\omega}^2(k)$ близко к нулю при $k \simeq k_0$ и при благоприятном распределении $(\Psi_{\lambda'}^*(\sigma\mathbf{k}) \tau_{\beta} \Psi_{\lambda})_{-k}$ по k может возникнуть значительное увеличение вероятности переходов. Влияние одноопионного обмена на l -запрещенные переходы рассматривалось в [28] и [74]. Сравнения теории с опытом показывают, что наблюдаемые вероятности l -запрещенных переходов в некоторых случаях в десятки раз превышают результаты расчета, сделанного без учета одноопионного обмена. К сожалению, из этого рассмотрения трудно сделать определенные заключения о значениях констант теории, но общий результат состоит в том, что ядра находятся либо в состоянии очень близком к конденсации, либо в состоянии, когда есть слабый конденсат.

Согласование констант, использованных для вычисления сдвигов частично-дырочных уровней, с константами, необходимыми для объяснения l -запрещенных переходов, позволит установить правильные значения констант взаимодействия и, таким образом, найти критическую плотность. В том случае, когда l -запрещенный переход аномально велик, его следует объяснять ролью второго слагаемого в (6.33) и, более того, сильное увеличение матричного элемента возможно только в случае аномально малого значения ω_0 .

Найдем вклад в интеграл (6.34) по k области $k \sim k_0$, где пропагатор пиона имеет полюс. Запишем интересующий нас матричный элемент в виде

$$(\Psi_\lambda V(r, \omega) \Psi_{\lambda'}) = \int dk \left\{ A(k) + \frac{B(k)}{\tilde{\omega}^2(k)} \right\}.$$

Выделим в интеграле регулярную и особую часть. Пусть полюс знаменателя соответствует $k = k_1$ ($k_1 \simeq k_0$)

$$\begin{aligned} \int dk \left\{ A(k) + \frac{B(k)}{\tilde{\omega}^2(k)} \right\} &= \int dk \left\{ A(k) + \frac{B(k) - B(k_1)}{\tilde{\omega}^2(k)} \right\} + \\ &+ \int dk \frac{B(k_1)}{\tilde{\omega}^2(k_1)}. \end{aligned}$$

Поскольку первое слагаемое не содержит полюса, его вклад будет соответствовать «фону» сравнительно небольших значений вероятностей переходов. Большие значения могут возникнуть только из второго слагаемого.

Используя выражение $\tilde{\omega}^2(k) = \omega_0^2 + \kappa \frac{(k^2 - k_0^2)^2}{4k_0^2}$ и интегрируя по k , получим

$$(\Psi_\lambda V \Psi_{\lambda'}) = (\Psi_\lambda V \Psi_{\lambda'})_{\text{reg}} + B(k_1) / |\omega_0| \sqrt{\kappa}.$$

Согласно (6.33) (при $u_1 = 0$) $B(k_1) = A(k_1) \Pi_P(k_1)$. Кроме того, так как область интегрирования по k из-за свойств Ψ_λ ограничена значениями $k \sim 2p_F$, имеем $(\Psi_\lambda V \Psi_{\lambda'})_{\text{reg}} \sim A(p_F) p_F$.

В результате получаем следующую оценку для вероятности перехода

$$\frac{B(M1)}{B(M1)} = \frac{|(\Psi_\lambda V \Psi_{\lambda'})|^2}{|(\Psi_\lambda V \Psi_{\lambda'})_{\text{reg}}|^2} \sim \frac{\Pi_P^2(k_0 \simeq p_F)}{\omega_0^2} \sim \frac{p_F^2}{\omega_0^2} \quad (6.35)$$

Таким образом, значительный выброс вероятности перехода следует объяснять малостью знаменателя в (6.35). При $V/\bar{V} \approx 20$ получаем $|\omega_0^2| \sim 0,2$. Если конденсация наступила, то к $\Pi(k, \omega)$ добавляется слагаемое $\lambda\bar{\varphi}_0^2$, приводящее к тому, что, вместо ω_0^2 до и после конденсации стоит $|\omega_0^2|$ и выражение (6.35) сохраняет свою силу и в случае конденсации. Поэтому анализ интенсивности l -запрещенных переходов не может дать ответ на вопрос, произошла ли конденсация, но устанавливает близость ядра к критическому состоянию. Существует ли другое объяснение аномально больших вероятностей l -запрещенных переходов?

К гамов — теллеровским β -переходам применимы те же соображения, которые высказывались по поводу магнитных моментов и l -запрещенных $M1$ -переходов. Одноопионный обмен в случае разрешенных переходов играет заметную роль только при малых моментах j частицы, совершающей переход. Наибольший вклад одноопионного обмена будет в случае l -запрещенных β -переходов. В этом случае также возможны резонансные выбросы вероятности переходов.

Оптический потенциал пионов. Информацию о поляризационном операторе в ядре можно получить, анализируя данные по спектрам π -атома.

Из этих данных с большой точностью определяется как вещественная, так и мнимая часть оптического потенциала пиона. Поскольку в волновой функции π -мезоатома существенны только малые импульсы, достаточно ограничиться в этом потенциале постоянным слагаемым, связанным с S -волновым πN -рассеянием и слагаемым, содержащим квадрат волнового вектора пиона (т. е. $\Delta\Psi_\pi$), которое обусловлено P -рассеянием. Оптический потенциал пиона выражается через поляризационный оператор Π ($k \ll 1$, $\omega \approx 1$). Волновая функция пиона подчиняется уравнению КГФ:

$$\Delta\Psi_\pi + [(\omega - V)^2 - \Pi(k, \omega - V) - 1]\Psi_\pi = 0, \quad (6.36)$$

где V — потенциал электрического поля, а $\mathbf{k} = \frac{1}{i}\nabla$. При малых k и $\omega \approx 1$ полюсное слагаемое Π_P вносит малый вклад,

поскольку $\Phi(k \ll 1, \omega \simeq 1) = \frac{k^2 v_F^2}{3\omega^2}$ (см. (3.3), (3.22)). Поэтому при $N = Z$

$$\Pi = \Pi_{\text{loc}}(k \ll 1, \omega \simeq 1) = n \{ A_R^s(t=0) \Gamma_R + A_{R'}^s(t=0) \Gamma_{R'} \} \equiv n\tilde{A} + \bar{\Gamma}_R,$$

где Γ_R представляет собой введенную выше вершину $N \text{л} N^*$ -взаимодействия в среде, $\Gamma_{R'}$ — аналогичная вершина для второго слагаемого, которое учитывает вклад в P -рассеяние далеких резонансов. Если в ядрах существует конденсат, то к поляризационному оператору добавляется слагаемое $3\Lambda(k, k_0)\varphi_0^2$. Как мы видели, $\Lambda \sim k^2$ при малых k , так что добавляемое слагаемое имеет тот же вид, что и член, обусловленный P -рассеянием, но отличается от него по знаку. Если бы оказалось, что значение Γ_R противоречит другим экспериментальным данным, то это было бы аргументом в пользу существования конденсата [53].

Для простоты ограничимся случаем $N = Z$.

Для того, чтобы определить эффективный оптический потенциал пиона, разложим

$$\Pi(k, \omega) = \Pi(0, 1) + \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}(\omega^2 - 1) + \frac{\partial \Pi}{\partial k^2} k^2.$$

Обозначая $\omega = V = \tilde{\omega}$ и подставляя разложение $\Pi(k, \omega)$ в уравнение (6.36), получим

$$-k^2 \frac{1 + \frac{\partial \Pi}{\partial k^2}}{1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \omega^2}} \Psi_\pi + (\tilde{\omega}^2 - 1) \Psi_\pi = 0. \quad (6.37)$$

Для того, чтобы выделить главный эффект, мы пока рассматриваем оператор k^2 как число, т. е. пренебрегаем изменением плотности на краю ядра (учет зависимости $n(r)$ внесет поправки порядка $A^{-1/3}$). В выражении (6.37) мы использовали тот факт, что $\Pi(0, \omega = 1)$ пренебрежимо мал в силу малости амплитуды рассеяния

на пороге. Выражение (6.37) можно переписать в виде

$$\Delta\Psi_{\pi} + \left[\tilde{\omega}^2 - 1 - \frac{\frac{\partial\Pi}{\partial k^2} + \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}}{1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}} k^2 \right] \Psi_{\pi} = 0.$$

Переходя к нерелятивистскому пределу, получаем

$$\Delta\Psi_{\pi} + 2(E - U)\Psi_{\pi} = 0,$$

т. е. уравнение Шредингера с энергией

$$E = \frac{\omega^2 - 1}{2}$$

и потенциалом равным

$$U = -1/2 V^2 + V + \frac{\frac{\partial\Pi}{\partial k^2} + \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}}{2\left(1 - \frac{\partial\Pi}{\partial\omega^2}\right)} k^2,$$

где V — кулоновский потенциал.

Роль оптического потенциала играет величина (мы пренебрегаем малым слагаемым $-1/2 V^2$):

$$U_{\text{opt}} = n \frac{\frac{\partial\tilde{A}^s}{\partial k^2} + \frac{\partial\tilde{A}^s}{\partial\omega^2}}{2\left(1 - n \frac{\partial\tilde{A}^s}{\partial\omega^2} \bar{\Gamma}_R\right)} \bar{\Gamma}_R k^2.$$

Мы использовали соотношение $\Pi = n\tilde{A}^s\bar{\Gamma}_R$. Из выражения (3.17с), получаем

$$\frac{\partial\tilde{A}^s}{\partial k^2} = -0,8, \quad \frac{\partial\tilde{A}^s}{\partial\omega^2} = -1,1.$$

В результате коэффициент при $k^2/2$ равен $-\frac{1,9n\bar{\Gamma}_R}{1 + 1,1n\bar{\Gamma}_R} = -0,7$ при $n = n_0$ и $\bar{\Gamma}_R = 1,2$.

Между тем, эксперимент дает $-(0,7 \div 0,9)$. Таким образом, расчет, сделанный в предположении $\bar{\Gamma}_R = 1,2$, дает удовлетворительное согласие с опытом. При обычном методе анализа пренебрегалось зависимостью $\Pi(\omega)$ и использовалось неправильное выражение

$$U_{\text{opt}} = \frac{1}{2} n \frac{\partial\tilde{A}^s}{\partial k^2} k^2 \bar{\Gamma}_R.$$

Сравнение с экспериментальным значением дает $\bar{\Gamma}_R \approx 0,6 - 0,7$.

Рассеяние электронов ядрами. Рассеяние нуклонов и пионов. Вызываемая π -конденсацией модуляция плотности нуклонов (V.4) оказывает влияние на электрический формфактор ядра. Будет показано, что эти модуляции могли бы объяснить наблюдающиеся на опыте аномалии в упругом рассеянии электронов. Будут рассмотрены оболочечные флуктуации плотности и показано, что они не могут объяснить особенности рассеяния без специального подбора параметров нуклон-нуклонного взаимодействия. Для простейшей конфигурации конденсатного поля вида стоячей волны плотность, как нейтронов, так и протонов имеет вид

$$n(\mathbf{r}) = n_0(1 + \xi^2 \cos 2k_0z),$$

где ξ^2 дается выражением (5.15)

$$\xi^2 = 5,9a^2 \sim \frac{n - n_c}{n_c}.$$

В гл. VI мы убедились, что этот результат, полученный для бесконечной системы, должен был бы сохраниться в средних и тяжелых ядрах и искажается только в слое $\delta \ll R$ вблизи поверхности ядра.

Как мы видели (VI.1), направление слоев скреплено с направлением деформации ядра. В основном ротационном состоянии происходит усреднение по направлению деформации и направлению слоев. Действительно, волновая функция деформированного ядра представляет собой произведение волновой функции от внутренних переменных на волновую функцию углов, определяющих ориентацию ядра. Поэтому в опытах по упругому рассеянию, когда не возбуждаются ротационные уровни, будет проявляться распределение плотности, усредненное по углам вектора \mathbf{k}_0 , а именно

$$\bar{n}(r) = n_0(r) \left(1 + \xi^2 \frac{\sin 2k_0r}{2k_0r} \right). \quad (6.38)$$

Раньше чем оценивать вклад таких модуляций плотности в амплитуду рассеяния электронов ядрами, напомним, как анализировались эти эксперименты (см.,

например, [76—79]). Распределение плотности протонов выбиралось в виде

$$n_p(r) = n_p(0) \frac{1 + \frac{Wr^2}{R^2}}{1 + e^{-\frac{r-R}{\delta}}}. \quad (6.39)$$

Константы W , R , δ подбирались так, чтобы получить наилучшее описание экспериментальных данных в широком интервале малых q ($q < 2f^{-1}$), константа $n_p(0)$ определяется условием $Z = \int n_p dr$. После нахождения констант вычислялось сечение рассеяния для больших q . Общий результат всех экспериментов состоит в том, что в узком интервале q вблизи $q = q_0 = 3f^{-1}$ наблюдается большое отклонение, иногда на порядок величины, от вычисленного по распределению (6.39) сечения. Аналогичное явление наблюдается и при рассеянии протонов [80, 81]. И в этом случае наблюдается отклонение при $q \approx 3f^{-1}$ сечения от расчетного, найденного с помощью оптического потенциала.

Изменение сечения в узком интервале q , по-видимому, свидетельствует о существовании периодической структуры плотности типа (6.38) у всех исследованных ядер. Рассмотрим для иллюстрации борновское приближение. Существенная часть борновского формфактора, соответствующая распределению (6.39), равна (при $qR \gg 1$)

$$F(q) = -\frac{3}{q^2 R^2} \left[\cos(qR) \cdot \Psi(\pi q \delta) - \frac{\xi^2 \sin[(q - 2k_0)R]}{2(q - 2k_0)R} \right], \quad (6.40)$$

где $\Psi(x) = x/\operatorname{sh}x$. Наблюдаемое на опыте изменение F означает, что при $q = q_0$

$$\xi^2 \approx 2\Psi(\pi q_0 \delta) \cos q_0 R.$$

Значение ξ^2 , найденное из этого условия, порядка $(5 \div 8) \cdot 10^{-2}$.

Покажем, что оболочечные флуктуации плотности, по-видимому, не могут объяснить наблюдаемый ход сечения. Оболочечные модуляции плотности могут быть найдены аналитически в квазиклассическом приближении (см., например, [82]). Соответствующий формфактор представляет собой плавную функцию от q . Эта плавная функция в значительной мере автоматически учитыва-

ется при том методе анализа, который использовался при обработке экспериментов по рассеянию. Добавление плавной функции от q приведет лишь к небольшому изменению эмпирических констант распределения (6.39).

Для проверки этого был проделан следующий вычислительный эксперимент. Было найдено распределение плотности протонов для Rb^{208} и Ca^{40} с помощью Ψ -функций отдельных нуклонов в модели Вудса — Саксона. Затем был сделан анализ Фурье, т. е. был определен формфактор борновского приближения, соответствующий найденному распределению плотности. Далее, так же как это делается при анализе экспериментов, были найдены параметры распределения (6.39), дающие наилучшее согласие с формфактором при $q < 2f^{-1}$, после чего формфактор был вычислен для $q > 2f^{-1}$. Отклонения формфактора, отвечающего гладкому распределению, от истинного формфактора невелики и распределены в широком интервале q .

Следует отметить, что имеются расчеты оболочечных флуктуаций, в которых ценой введения взаимодействия, содержащего произвольные параметры, удается объяснить ход кривой сечения при $\zeta \simeq 3f^{-1}$, но при этом сильно ухудшается согласие для меньших q [60].

Более полная информация о слоистой структуре могла бы быть получена в опытах по рассеянию электронов на ориентированных ядрах. Опыты такого рода были осуществлены на Ho^{165} [83], однако передаваемые импульсы были слишком малы. В этих опытах ориентация ядер приводила к ориентации квадрупольного момента, поскольку нечетный протон в Ho имеет проекцию момента на направление вытянутости $m = j$ ($j = 7/2$). Так как направление слоев энергетически скреплено с направлением вытянутости, то ориентация ядер означает также ориентацию слоев. Это должно привести к увеличению дифракции по сравнению со случаем усреднения по ориентации слоев. Следует заметить, что согласно [27] в случае слабо развитого конденсата направление слоев совершает нулевые колебания относительно направления вытянутости, которые могут заметно ослабить эффект.

Заметим, что опыты по рассеянию электронов на больших углах позволили бы обнаружить слоистую магнит-

ную структуру ядра, соответствующую периодичности спиновой плотности ядерного вещества. При этом соответствующий максимум на кривой рассеяния должен соответствовать $q = k_0 = 1,4f^{-1}$, т. е. вдвое меньшему передаваемому импульсу, чем в случае рассеяния на распределенном заряде. Слоистая спиновая структура могла бы также проявиться в опытах по рассеянию π -мезонов и протонов на ориентированных ядрах.

Существенную информацию о близости ядер к конденсации можно было бы получить из упругого рассеяния протонов на пионном поле, создаваемом нечетным нуклоном ядра. Взаимодействие рассеиваемого нуклона с нечетным нуклоном определяется графиками

$$V_{\lambda\lambda'}(q) = \begin{array}{c} \lambda \qquad \lambda' \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \qquad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \rho \qquad \rho+q \end{array} + \begin{array}{c} \lambda \qquad \lambda' \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \rho \qquad \rho+q \end{array}$$

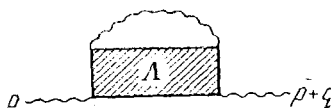
Если ядро достаточно близко к конденсации, то $V_{\lambda\lambda'}(q)$, как мы видели, имеет резкий максимум при q ($\omega = 0$, $k = k_0$). Выделение этого максимума позволило бы найти величину ω_0 и тем самым установить параметры, определяющие близость к конденсации.

В [93] было показано, что в присутствии конденсата с амплитудой $|\omega_0^2| \approx 0,04$ вероятность захвата π^- -мезона с вылетом одного нуклона возрастает в 100 раз по сравнению со значением в отсутствие конденсата. Обнаружение заметного однонуклонного π^- -захвата было бы доказательством существования конденсата. Конденсат мог бы также проявиться в опыте по фоторождению пионов (М. Эрикссон, частное сообщение). Амплитуда фоторождения должна была бы иметь максимум при передаваемом импульсе

$$q = k_\pi - k_\gamma = k_0.$$

Величина Λ , характеризующая четырехпионное взаимодействие в среде, определяет амплитуду конденсатного поля, если конденсация наступила. Кроме того, как мы увидим в VII.1, знание величины Λ позволяет ответить на важный вопрос — имеется ли точка неустойчивости

на кривой зависимости энергии от плотности. Между тем, как мы видели, можно дать только оценку величины Λ . Поэтому представляется чрезвычайно важным извлечение этой величины непосредственно из опытов по рассеянию пионов на ядрах, амплитуда которого содержит слагаемое



Кроме того, Λ можно было бы извлечь из экспериментов типа πZ на ядре. При этом определялось бы взаимодействие в конечном состоянии, но не в вакууме, а в ядерном веществе, т. е. величина Λ .

Глава VII

π -КОНДЕНСАЦИЯ И ВОЗМОЖНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ЯДЕР

В первой половине главы VII приводятся аргументы в пользу существования сверхплотных ядер, использующие выражение для энергий системы нуклонов при плотностях, близких к n_c . Это обсуждение следует работам [10] и [30]. При определенных значениях констант теории сжимаемость изменяет знак в критической точке и система должна сжиматься до тех пор, пока не перейдет в состояние с положительной сжимаемостью.

Энергия, плотность и условия устойчивости этого состояния не могут быть найдены при таком подходе — требуется знание энергии системы при плотностях значительно больших, чем n_c . (Эти вопросы рассмотрены в разделе VII.2.)

В VII.1 обсуждается также вопрос о возможной устойчивости сверхзаряженных ядер ($Z \geq 137^{3/2}$). Используются результаты, полученные при рассмотрении π^- -конденсации в электрическом поле. Выигрыш энергии от π^- -конденсации частично компенсирует кулоновскую энергию. Возможность $\pi^+\pi^-$ -конденсации лимитируется экранировкой поля ядра электронами, возникающими от перестройки электрон-позитронного вакуума в поле ядра с большим зарядом.

В конце VII.1 анализируется возможность возникновения в плотной ядерной материи нуклон-антинуклонной неустойчивости (модель Ли [31]), вызываемой взаимодействием нуклонов со скалярными мезонами. Показано, что константа этого взаимодействия, как бы велика она ни была, перенормируется в среде так, что неустойчивость, если и возникает, то при больших плотностях $n \geq 100n_0$.

Вторая половина главы VII посвящена выяснению условий устойчивости сверхплотного состояния относительно испарения частиц, деления и β -распада. Используются результаты работ [20] и [21] для определения пионной энергии, а также выражения для энергии нуклонной среды без учета конденсата [33] при больших нуклонных плотностях. Составляются интерполяционные формулы отдельно для пионной и нуклонной энергий, объединяющие результаты для малых и больших плотностей. С помощью этих формул определяется энергия и плотность сверхплотного состояния ядерного вещества и выясняются области устойчивости относительно деления и β -распада при различных значениях констант теории.

Обсуждаются возможные пути обнаружения сверхплотных ядер.

VII.1. Аномальные состояния ядерного вещества

В этом разделе показано, что при разумных значениях констант, введенных в теорию, π -конденсация делает нуклонное вещество неустойчивым — сжимаемость делается отрицательной. Эта неустойчивость возникает как при $Z \approx N$ («сверхплотные» ядра), так и при $Z \ll N$ («нейтронные» ядра).

Обсуждается вопрос о возможной устойчивости ядер с зарядом $Z \geq 137^{1/2}$ («сверхзаряженные» ядра).

Анализируется возможность неустойчивости нуклонного вещества относительно рождения нуклон-антинуклонных пар (модель Ли). Дается оценка критической плотности для этого процесса: $n_c = 100n_0$.

Сверхплотные и сверхразреженные ядра. Покажем, что учет π -конденсации может привести к возможности существования 2-х минимумов на кривой зависимости плотности энергии $\mathcal{E}(n)$ от плотности n . Запишем плотность энергии ядерного вещества с учетом π -конденсации в виде

$$\mathcal{E}(n) = \mathcal{E}_N(n) + \mathcal{E}_\pi(n), \quad (7.1)$$

где $\mathcal{E}_N(n)$ — плотность нуклонной энергии без учета π -конденсата, а $\mathcal{E}_\pi(n)$ — плотность энергии конденсата,

которая при плотностях $0 < n - n_c \ll n_c$ имеет вид

$$\mathcal{E}_\pi(n) = -\frac{\beta}{2}(n - n_c)^2.$$

Как мы видели в V.1, $n_c \simeq n_0$, $\beta \simeq 1$ (в единицах $\hbar = m_\pi = c = 1$).

Первое слагаемое $\mathcal{E}_N(n)$ рассчитывалось в многочисленных работах по теории ядерного вещества (см., например, [60]). При этом оказывалось, что при $N \simeq Z$ кривая $\mathcal{E}_N(n)$ имеет минимум при плотности n_0^0 , близкой к ядерной n_0 .

Предположим сначала, что при ядерной плотности уже имеется конденсат, т. е. $n_c < n_0$. Тогда, разлагая плотность энергии по степеням $n - n_0$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) - \mathcal{E}(n_0) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_N}{dn^2} - \beta(n_0) \right) (n - n_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 \mathcal{E}_N}{dn^3} - 3 \frac{d\beta}{dn} \right) (n - n_0)^3. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Коэффициент при $(n - n_0)^2$ связан с объемной жесткостью K ядерного вещества

$$\frac{K}{n_0} = \frac{d^2 \mathcal{E}}{dn^2} \equiv \frac{K_0}{n_0} - \beta \equiv \beta_0 - \beta.$$

Если при $n > n_0$ $\beta(n)$ — растущая функция n , то коэффициент при $(n - n_0)^3$ может оказаться отрицательным. В этом случае на кривой $\mathcal{E}(n)$ возникает максимум при

$$n_1 - n_0 = \frac{K}{n_0 \kappa},$$

где κ равно

$$\kappa = \frac{3}{2} \frac{d\beta}{dn} - \frac{1}{2} \frac{d^3 \mathcal{E}_N}{dn^3}.$$

При дальнейшем увеличении плотности рост конденсатной энергии ослабляется (это, во всяком случае, должно произойти, когда поле пионного конденсата $\phi_0^0 \sim 1$, как можно видеть из лагранжиана Вейнберга) и кривая $\mathcal{E}(n)$ начнет расти. Кроме того, при достаточном увеличении плотности делается существенным отталкивание на малых расстояниях и $\mathcal{E}_N(n)$ резко возрастает. Поэтому на кривой $\mathcal{E}(n)$ при $n \gtrsim n_0$ должен появиться 2-й минимум

(рис. 21). В [30] такой знак κ представляется естественным. Некоторые модельные расчеты, по-видимому, говорят против такой возможности. Так например, в модели бегущей волны без учета дополнительных ядерных взаимодействий, плотность энергии конденсации имеет вид

$$\mathcal{E}_\pi(n) = -\frac{(n - n_c)^2}{4n_c}, \text{ т. е.}$$

$$\beta = \frac{1}{2n_c} \text{ и } \frac{d\beta}{dn} = 0.$$

Таким образом, в этой модели $\kappa < 0$ и, следовательно, при $n_c > n_0$ второго минимума нет.

Как это следует из (7.2), при $n_0 > n_c$ должно выполняться условие

$$\frac{K}{n} = \beta_0 - \beta > 0.$$

Плотность n_0 , благодаря π -конденсации, отличается от n_0^0 . Записывая $\mathcal{E}(n)$ при $n_0 > n_c$ в виде

$$\mathcal{E}(n) \simeq \frac{\beta_0(n - n_0^0)^2}{2} - \frac{\beta(n - n_c)^2}{2},$$

получим из условия $\left(\frac{d\mathcal{E}}{dn}\right)_{n=n_0} = 0$

$$n_0 - n_0^0 = \frac{\beta}{\beta_0}(n_0 - n_c) < n_0 - n_c. \quad (7.3)$$

Рассмотрим случай, когда $n_c > n_0^0$. Тогда $\mathcal{E}(n)$ имеет минимум при $n = n_0^0$. Если $\beta_0 > \beta$, то этот минимум единственный. Если же $\beta > \beta_0$, то обязательно существует второй минимум. Действительно, в этом случае при $n = n_{\max} > n_c$ возникает максимум, причем n_{\max} определяется выражением, аналогичным (7.3)

$$n_{\max} - n_0^0 = \frac{\beta}{\beta_0}(n_{\max} - n_c). \quad (7.3')$$

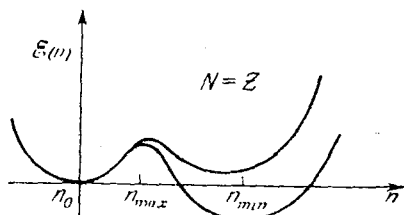


Рис. 21. Кривые зависимости плотности энергии ядра (с $N = Z$) от плотности n с учетом конденсации.

При дальнейшем увеличении плотности, как уже говори-

лось, рост $\mathcal{E}(n)$ восстанавливается и при $n = n_{\min} > n_{\max}$ она минимальна.

Если обычным ядрам соответствует первый минимум, то ядра должны иметь плотность n_0^0 и не имеют конденсата. Тогда несовпадение наблюдаемой плотности n_0 с расчетным значением n_0^0 связано не с конденсатом, а с неточностью расчетов. Если же более устойчив 2-й минимум и обычным ядрам соответствует плотность не n_0^0 , а n_{\min} , то должно быть заметное неравенство $n_0 = n_{\min} > n_0^0$. Автор не берется судить, возможен ли такой подбор параметров, вводимых в расчеты энергии ядерной материи, при котором n_0^0 получится, скажем $\simeq \frac{1}{2} n_0$. При этом в ядрах должен существовать развитый конденсат. В этом случае могли бы существовать метастабильные ядра с аномально малой плотностью (с $n = n_0^0 < n_0$).

Итак, при $n_0 > n_c$ и при $\beta < \beta_0$ второе равновесное состояние существует только при $\kappa > 0$ (что сомнительно). При $n_c > n_0^0$ и при $\beta < \beta_0$ имеется одно равновесное состояние с $n = n_0^0$, а при $\beta > \beta_0$ имеются 2 равновесных состояния с плотностями n_0^0 и n_{\min} . Если ядрам соответствует $n_0 = n_0^0$, то следует искать второе состояние с большей плотностью. Если же ядрам соответствует $n_0 = n_{\min}$, то должно существовать состояние с аномально малой плотностью $n = n_0^0$.

Нейтронные ядра. Для простоты отвлечемся от сложной зависимости энергии конденсата от плотности, возникающей в нейтронной среде из-за π_s^+ -конденсации (V.1) и запишем плотность энергии $\mathcal{E}_\pi^{(n)}$ в той же форме, что и в случае ядерного вещества с $Z \simeq N$:

$$\mathcal{E}_\pi^{(n)}(n) = - \frac{\beta_n (n - \bar{n}_c)^2}{2}, \quad (7.4)$$

где $\beta_n \simeq 1$, $n_c^+ < \bar{n}_c < n_c^\pm$; n_c^+ , n_c^\pm — критические плотности π_s^+ - и $\pi_s^+ \pi^-$ -конденсации, $\bar{n}_c \sim n_0$. Функция $\mathcal{E}_N^{(n)}$ в отличие от случая $N = Z$ не имеет минимума — без учета конденсатной энергии нейтронных ядер не существует. Из расчетов энергии нуклонного вещества

имеем

$$\left(\frac{d\mathcal{E}^{(n)}}{dn} \right)_{n=n_0} = 20 \text{ МэВ} \simeq 0,14.$$

Тогда $\mathcal{E}^{(n)}(n) = \mathcal{E}_N^{(n)}(n) + \mathcal{E}_\pi^{(n)}(n)$ имеет максимум при $n = n_{\max}$, где n_{\max} определяется условием

$$\frac{d\mathcal{E}^{(n)}(n)}{dn} = 0, \quad \frac{n_{\max} - \bar{n}_c}{n_0} = \frac{d\mathcal{E}/dn}{\beta_n n_0} \sim 0,3. \quad (7.5)$$

При дальнейшем увеличении плотности рост конденсатной энергии ослабится и кроме того, вступят в строй отталкивательные силы. В результате возникнет минимум при $n = n_{\min} > n_{\max}$ (рис. 22).

Таким образом, при плотности $n = n_{\min}$ существует состояние ядерного вещества с положительной сжимаемостью (вопрос об устойчивости этого состояния обсуждается в VII.2). Это означает, что при достаточном числе нейтронов, когда можно пренебречь поверхностными эффектами, возможно существование нейтронных ядер с плотностью $n \simeq n_{\min}$.

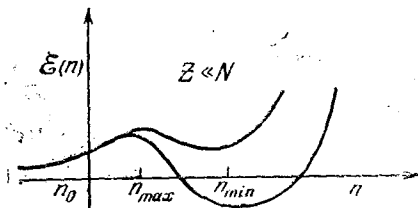


Рис. 22. Кривые зависимости плотности энергии нейтронных ядер от плотности n с учетом конденсации.

Чисто нейтронное состояние будет приобретать заряд за счет процесса $n \rightarrow n + \pi_s^+ + e + \nu_e$ и, как мы увидим в VII.2, может перейти в β -стабильное состояние с $Z \ll N$ ($N \gtrsim 10^5$).

Сверхзаряженные ядра. Сделаем несколько замечаний о возможном существовании сверхзаряженных ядер. В первоначальной форме [8] идея сверхзаряженных ядер основывалась на следующем.

В сверхзаряженном ядре при $Ze^2/R > m_\pi c$, что соответствует $Ze^3 \gtrsim 1$, может возникнуть $\pi^+\pi^-$ -конденсация, причем выигрыш энергии при достаточном превышении Z над критическим значением оказывается большим, чем кулоновская энергия нуклонов. В результате такое ядро может оказаться устойчивым. Однако в поле такого ядра

рождаются e^+e^- -пары — позитроны улетают на бесконечность, а электроны распределяются внутри и вне ядра, экранируя его заряд. Распределение вакуумных электронов вблизи сверхзаряженного ядра найдено [8]. Оказалось, что как раз при $Ze^3 \sim 1$ начинается сильная экранировка заряда ядра, а при $Ze^3 \gg 1$ заряд протонов экранируется внутри ядра так, что нескомпенсированным остается только заряд в слое, прилегающем к поверхности ядра. Таким образом, кулоновская энергия сильно ослабляется этой экранировкой. Однако кинетическая энергия электронов, которая добавляется к энергии системы, делает такое ядро нестабильным. Гораздо больший выигрыш энергии получается, если учесть однопионную конденсацию, при которой заряд протонов экранируется π^- -мезонами. Однако и в этом случае энергия системы больше нуля [96]. Существование сверхзаряженных ядер возможно только, если учесть влияние нуклонов и рассматривать конденсацию с волновым вектором k_0 , соответствующим наименьшей пионной энергии $\bar{\omega}^2(k_0)$.

Если критическая плотность n мало превышает n_0 , то π^- -конденсация может возникнуть и в стабильных ядрах. Действительно, рассмотрим для простоты ядро с $N = Z$. Тогда энергия π^- -мезона в ядре определяется из уравнения

$$(1 + k^2 + \Pi(\mathbf{k}, \bar{\omega}) - \bar{\omega}^2) \Psi = 0,$$

$$\text{где } \mathbf{k} = \frac{1}{i} \nabla, \quad \bar{\omega} = \omega - V.$$

Разлагая $\Pi(\mathbf{k}, \bar{\omega})$ в ряд и ограничиваясь первыми членами (что допустимо при $|V| < kv_F$), получим

$$\left[\left(1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\omega}^2} \right) \bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2(k^2) \right] \Psi = 0, \quad (7.6)$$

где $\bar{\omega}^2(k^2) = 1 + k^2 + \Pi(k, 0)$ имеет минимум при $k = k_0$. Умножая (7.6) на Ψ и интегрируя, легко получить

$$\omega^2 - 2\bar{V}\omega - \frac{\overline{\bar{\omega}^2(k_0)}}{1 - \partial \Pi / \partial \bar{\omega}^2} + \bar{V}^2 = 0. \quad (7.7)$$

Черта означает усреднение по Ψ^2 ($|\Psi|^2$ предполагается

нормированным на 1). Из (7.7) имеем

$$\omega = \bar{V} + \sqrt{\bar{V}^2 - \bar{V}^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{1 - \partial\Pi/\partial\omega^2}}. \quad (7.8)$$

Легко видеть, что $\bar{V}^2 - \bar{V}^2 \ll \bar{V}^2$, $\bar{V} \simeq -\frac{Ze^2}{R}$ *), пренебрегая этой величиной и беря в качестве оценки

$$\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 + \kappa \frac{(k^2 - k_0^2)^2}{4k_0^2} \simeq \omega_0^2 + \frac{c_1}{R^2},$$

где c_1 — число порядка 1, получим, используя (2.17),

$$\omega = \bar{V} + \sqrt{\frac{\alpha(n_c - n_0) + c_1/R^2}{1 - \partial\Pi/\partial\omega^2}}. \quad (7.9)$$

Возникновение π^- -конденсата начинается при $\omega = 0$. Поэтому при достаточно малом превышении n_c над n_0 π^- -конденсация может возникнуть уже в области устойчивых ядер, если

$$|\bar{V}| > \sqrt{\frac{c_1}{1 - \partial\Pi/\partial\omega^2}} \frac{1}{R}.$$

Для ядер с большим зарядом делается существенной неустойчивость относительно деления. Эта неустойчивость может исчезнуть в том случае, если кулоновская энергия ядра будет заметно ослаблена. Для этого заряд π^- -мезонов должен быть порядка Z . Как показывает расчет при $\Lambda \sim 1$, $Z_\pi \sim Z$ при условии $Ze^3 \sim 1$.

Таким образом, значительное ослабление кулоновской энергии может сделать сверхзаряженные ядра ($Ze^3 \geq 1$) устойчивыми. Остается открытым вопрос о соотношении энергии таких ядер с энергией сверхплотных ядер того же заряда.

Неустойчивость нуклонного поля (модель Ли). В [31] рассматривалась система нуклонов, взаимодействующих с полем скалярных мезонов. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = H_N + g\bar{\Psi}\Psi\phi + H_\phi.$$

*) Предполагая амплитуду Ψ постоянной по объему ядра, получаем

$$\bar{V}^2 - \bar{V}^2 \simeq 0,012 \bar{V}^2; \quad \bar{V} = -^6/5 Ze^2/R.$$

Предполагалось, что существуют скалярные мезоны с массой $M_\phi \simeq M_N$ и константой взаимодействия $g \simeq 15$. Разумеется, при такой громадной константе взаимодействия не может быть речи о нахождении энергии системы в аналитическом виде, возможны только наводящие соображения. В качестве таковых в [31] рассматривается выражение для энергии системы в приближении самосогласованного поля, которое применимо для $g \ll 1$. Основной результат подхода [31] состоял в том, что при $n = n_c \simeq \frac{M_N M_\phi^2}{g^2}$ вещество делается неустойчивым по отношению к рождению нуклонных пар, что приводит к появлению нового устойчивого состояния ядерного вещества с плотностью $n \simeq n_c \simeq 2n_0$.

Мы сначала повторим результаты [31] в удобной для дальнейшего форме, а затем покажем, что более реалистическое рассмотрение сдвигает критическую плотность в область $n_c \sim 100 n_0$, где отталкивание на малых расстояниях играет решающую роль.

Для упрощения будем рассматривать нерелятивистские нуклоны. Тогда наши результаты будут точными при плотностях порядка ядерных и будут верны по порядку величины в области, где появляется неустойчивость нуклонного поля. Введем плотность энергии как функцию ϕ_0 и n (ϕ_0 — статическое поле)

$$\mathcal{E}(n, \phi_0) = \mathcal{E}_N(n) + gn\phi_0 + \frac{M_\phi^2 \phi_0^2}{2}.$$

Минимизируя по ϕ_0 , получим

$$\phi_0 = -\frac{gn}{M_\phi^2}, \quad \mathcal{E}(n) = \mathcal{E}_N(n) - \frac{g^2 n^2}{2M_\phi^2} \equiv \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_\phi, \quad (7.10)$$

что соответствует учету взаимодействия между нуклонами за счет обмена ϕ -мезоном (в наимизшем порядке по g^2). Эффективный потенциал, действующий на нуклон благодаря полю ϕ_0 , равен

$$V = \frac{\partial \mathcal{E}_\phi(n)}{\partial n} = -\frac{g^2 n}{M_\phi^2}.$$

Неустойчивость наступает, когда это поле «съедает» мас-

либо константа взаимодействия g_{eff} невелика ($g_{\text{eff}}^2 \sim 1$), либо наряду с притяжением необходимо учитывать отталкивание.

Эффективное поле V , действующее на нуклон при ядерной плотности n_0 ($n_0 = 0,5$) и $g = 15$, соответствует глубине ямы, равной

$$V_0 = \frac{g^2 n_0}{M_\Phi^2} \simeq 300 \text{ МэВ.}$$

Ясно, что эта яма не имеет никакого отношения к действительности и, следовательно, второе слагаемое в (7.10), если оно и существует, должно почти целиком компенсироваться имеющимся в $\mathcal{E}_N(n)$ отталкиванием.

При константе $g = 15$ и $\xi = 10$ следует отказаться от безнадежной попытки вычисления энергии системы. Однако можно провести очень убедительное феноменологическое рассмотрение, использующее свойства ядерного вещества при плотностях $n = n_0$.

Прежде всего дадим грубую оценку нижней границы n_c , вытекающую из условия равновесия ядерного вещества при ядерной плотности n_0 .

Записывая полную плотность энергии вблизи $n = n_0$ в виде

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5} \varepsilon_F n - \frac{\gamma n^2}{2},$$

получим из условия устойчивости

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dn^2} = \frac{2\varepsilon_F}{3n_0} - \gamma > 0,$$

где γ включает все ядерные взаимодействия при $n \sim n_0$ (для введенного выше взаимодействия $\gamma = g^2/m_\Phi^2$).

Для критической плотности имеем

$$n_c = \frac{m_N}{\gamma} > \frac{3m_N n_0}{2\varepsilon_F} \sim 30n_0.$$

Проследим более подробно ограничения, накладываемые условием устойчивости ядерного вещества при $n = n_0$.

Запишем \mathcal{E}_N в виде

$$\mathcal{E}_N(n) = \frac{3}{5} n \varepsilon_F + \Phi(n),$$

где в $\Phi(n)$ включено все взаимодействие, включая и влияние отталкивания на малых расстояниях.

Вариация \mathcal{E} по плотности дает

$$\delta\mathcal{E} = \left(\varepsilon_F + \frac{d\Phi}{dn} - \frac{g^2 n}{M_\Phi^2} \right) \delta n.$$

Добавка к ε_F и является тем эффективным полем, которое действует на нуклон вблизи поверхности Ферми. Поэтому условие неустойчивости по отношению к рождению пар определяется соотношением

$$M_\Phi \simeq \frac{g^2 n_c^N}{M_\Phi^2} - \left(\frac{d\Phi}{dn} \right)_{n=n_c^N}. \quad (7.13)$$

Оценим $d\Phi/dn$ из условия устойчивости ядерного вещества при $n = n_0$. Имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dn} = \varepsilon_F + \left(\frac{d\Phi}{dn} \right)_{n_0} - \frac{g^2 n_0}{M_\Phi^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dn^2} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{n_0} + \left(\frac{d^2\Phi}{dn^2} \right)_{n_0} - \frac{g^2}{M_\Phi^2} = \beta_0 = \frac{K_0}{n_0} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$n_0 \left(\frac{d^2\Phi}{dn^2} \right)_{n_0} - \left(\frac{d\Phi}{dn} \right)_{n_0} = K_0 + \frac{1}{3} \varepsilon_F.$$

Таким образом, в области $n \sim n_0$ производная $\frac{d\Phi(n)}{dn}$ растет с ростом n быстрее чем n . В области больших n рост $d\Phi/dn$ увеличивается из-за отталкивания на малых расстояниях. Без учета π -конденсации нет никаких оснований ожидать немонотонного роста $d\Phi/dn$. Поэтому величина

$$\frac{g^2 n}{M_\Phi^2} - \frac{d\Phi}{dn}$$

должна уменьшаться с ростом n и при $n \gtrsim n_0$ изменит знак. Таким образом, условие (7.13) не выполняется, и система остается устойчивой относительно рождения нуклонных пар. Это феноменологическое рассмотрение в отличие от [31] не связано с использованием теории возму-

щений, член $\frac{g^2 n}{M_\pi^2}$ выделен из энергии взаимодействия только для того, чтобы сравнить наши заключения с результатами [31].

В [31] была сделана попытка учета отталкивания исключением области малых расстояний между нуклонами. При этом теряется влияние отталкивания на эффективный потенциал, действующий на нуклон. По-видимому, в этом причина того, что в [31] получается заниженное значение для критической плотности. Благодаря π -конденсации монотонный рост эффективного поля нарушается, однако и в этом случае эффективный потенциал имеет порядок m_π и недостаточен для того, чтобы скомпенсировать нуклонную массу. Таким образом, нет оснований ожидать нуклонной неустойчивости, по крайней мере, вплоть до очень больших плотностей ($\sim 100n_0$), при которых могут наступить новые явления (например, конденсация тяжелых резонансов).

VII.2. Устойчивость аномальных ядер

Получены интерполяционные формулы, дающие энергию барионной подсистемы и энергию конденсата для произвольной плотности, переходящие при $n \sim n_0$ и $n \gg n_0$ в известные выражения. Сформулированы условия устойчивости аномальных ядер относительно испарения частиц, деления и относительно β -распада. Возможны две области устойчивости: при малых A с $Z/A \approx 1/2$ (сверхплотные ядра) и при больших A с $Z/A \ll 1$ (нейтронные ядра). Построены кривые зависимости энергии ядра от плотности. При некоторых значениях параметров теории возможно появление минимума на этих кривых, соответствующего существованию устойчивых или β -активных сверхплотных и нейтронных ядер.

Точность теории в настоящее время недостаточна для окончательного заключения о возможности существования этих ядер, однако, такая возможность существует при разумном выборе ядерных констант. Обсуждаются возможные пути обнаружения сверхплотных и нейтронных ядер.

Энергия ядра с учетом конденсации как функция плотности. Энергию системы A нуклонов с зарядом Z

и плотностью n , отсчитанную от суммы масс нуклонов, можно записать в виде

$$E(n, A, \nu) = \varepsilon_B(n, \nu)A + a_B(n, \nu)A^{2/3} + a_Q(n)\nu^2A^{5/3} + \varepsilon_\pi(n, \nu)A, \quad (7.14)$$

где $\nu = Z/A$, $Z = Z_B + Z_\pi$ — сумма зарядов барионов и пионов. Слагаемые, пропорциональные $A^{2/3}$ и $A^{5/3}$, представляют собой поверхностную и кулоновскую энергии. Последнее слагаемое — энергия, связанная с появлением пионного конденсата.

Будем пренебрегать поправками от спаривания, деформации и оболочечных эффектов. Входящие в (7.14) величины рассчитывались для двух предельных областей: $1 - 2\nu \ll 1$ и $\nu \ll 1$. Как мы увидим ниже, именно эти области представляют наибольший интерес.

Рассмотрим случай $1 - 2\nu \ll 1$ и найдем сначала барионную энергию. В области плотностей $n - n_0 < n_0$ объемную часть барионной энергии можно выразить через сжимаемость ядерного вещества K . Имеем

$$\varepsilon_B(n, \nu) = -\varepsilon_0 + \alpha(n)(1 - 2\nu)^2 + \frac{K}{2} \left(1 - \frac{n}{n_0}\right)^2, \quad (7.15)$$

где $\varepsilon_0 = 15,7$ МэВ $= 0,11$; $\alpha(n_0) = 25$ МэВ $= 0,18$. Согласно ТКФС сжимаемость K выражается через константу NN-взаимодействия f_0

$$K = \frac{2}{3} \varepsilon_F (1 + 2f_0),$$

где $f_0 \approx 0,25$, откуда $K = 40$ МэВ $= 0,29$ [57].

Для больших плотностей $n \gg n_0$ возникает сильно развитый конденсат и барионная система существенно перестраивается: вместо двух сфер ферми-нейтронов и протонов заполняется одна сфера ферми-барионной квазичастицы, представляющей собой суперпозицию 6-ти барионов: N_π^{*++} , N^{*+} , p , n , N^{*0} , N^{*-} (см. V.2). Потенциальная энергия этих квазичастиц при больших плотностях определяется отталкиванием барионов на малых расстояниях. Если предположить, что это отталкивание одинаково для всех участвующих барионов, то барионная энергия при достаточно больших плотностях должна совпадать с энергией нейтронного вещества без учета конденсации. Эта энергия вычислялась в [33].

В этом предположении объемная часть барионной энергии во всем интервале плотностей n может быть записана в виде интерполяционной формулы

$$\varepsilon_B(x) = -0,11 + \frac{0,14x^2}{0,37x + 1}, \quad (7.16)$$

где $x = \frac{n - n_0}{n_0}$. Функция (7.16) при $x < 1$, $\nu = 1/2$ совпадает с выражением (7.15), а при $x = 6,35$ ($n = 7,35n_0 = = 1,25f^{-3}$) выбрана так, что вместе с первой производной $\frac{d\varepsilon_B}{dx}$ совпадает с результатами расчетов [33]. Поверхностное слагаемое в (7.14) может быть оценено в предположении, что ширина поверхностного слоя слабо зависит от плотности. Тогда поверхностная энергия пропорциональна энергии единицы объема. Имеем

$$a_S = 0,13 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{1/3} \frac{\varepsilon(n, \nu)}{\varepsilon(n_0, 1/2)}, \quad (7.17)$$

при $n = n_0$, $\nu = 1/2$ это выражение совпадает с соответствующим членом формулы Вейцекера. Множитель a_Q , определяющий кулоновскую энергию в предположении равномерного распределения заряда в пионных единицах равен

$$a_Q = 5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{n}{n_0}\right)^{1/3}. \quad (7.18)$$

Для энергии конденсата при $\nu \simeq 1/2$ имеем в случае малых плотностей $n - n_c \ll n_0$ (V.1)

$$\varepsilon_\pi(n) = \frac{\mathcal{E}_\pi}{n} = -\frac{\beta}{2} \frac{(n - n_c)^2}{n}. \quad (7.19)$$

В случае больших плотностей можно использовать выражение, полученное в [21] для случая предельного поля (V.2). Имеем:

$$\varepsilon_\pi(n, \nu) = \varepsilon_\pi(n) + \alpha_\pi(1 - 2\nu)^2, \quad (7.20)$$

$$\varepsilon_\pi(n) = -\left[\frac{81}{50} f^2 (1 - \gamma) n - \frac{\Delta}{3}\right], \quad (7.21)$$

$$\alpha_\pi = \frac{n}{2F^2} = 0,14 \frac{n}{n_0}, \quad (7.22)$$

где $\Delta = m_{N^*} - m_N = 294 \text{ МэВ} = 2,1$. В этих выражениях $F = 1,35$ — константа распада пиона. Константа πN -взаимодействия связана с константой F и аксиальной константой g_A соотношением $f = g_A/F$. Как показывает сравнение теории с экспериментом, в обычных ядрах происходит слабая перенормировка $f \rightarrow f' = 0,9f$ [51]. Эта перенормировка учитывается в приведенных ниже расчетах.

Величина γ учитывает вклад нуклонных корреляций, ее связь с введенными выше константами g^- или g' дается соотношением

$$g^- = 2g' = f'^2 \frac{2mp_0}{\pi^2} \gamma,$$

где p_0 — импульс Ферми при нормальной плотности ($p_0 = 1,92$).

В формуле (7.21) отброшен член $F^2/4n$, так как в области интересующих нас плотностей он практически полностью компенсируется вторым членом разложения энергии конденсата по параметру $\Delta/g_A k$, где k — волновое число конденсатного поля.

При выводе выражения (7.21) в [21] предполагалось, что с точностью до коэффициентов Клебша — Гордана локальные амплитуды NN^- , NN^* - и N^*N^* -взаимодействий в нуклонной среде одинаковы. Однако это предположение является теоретически необоснованным. В настоящее время отсутствует прямая экспериментальная информация об NN^* - и N^*N^* -взаимодействиях. По-видимому, локальное NN^* -взаимодействие значительно слабее, чем NN -взаимодействие, как это следует из экспериментов по (pp , N^*n)-рассеянию с большими передаваемыми импульсами [54].

Учет этого факта привел бы к увеличению энергии конденсата. С другой стороны в [21] не учитывалось подавление πNN^* -вершины, которое приводит к уменьшению конденсатной энергии.

Все эти эффекты сейчас не могут быть учтены. Мы будем пользоваться (7.21) в качестве разумной оценки ϵ_n при больших плотностях.

Выражения (7.19) и (7.21) могут быть записаны в виде интерполяционной формулы, пригодной во всем

интересующем нас интервале значений n (для $\nu \approx 1/2$)

$$\varepsilon_{\pi} = -\frac{\beta(n)}{2} \frac{(n - n_c)^2}{n}, \quad (7.23)$$

где

$$\beta(n) = A + B \frac{n_c}{n} + C \frac{n_c^2}{n^2}.$$

Коэффициенты A , B и C подбираются так, чтобы значения $\beta(n)$ при $n = n_c$ совпадали с результатами, приведенными в таблице 4, а при $n/n_c \rightarrow \infty$, $\varepsilon_{\pi}(n)$ вместе с $\frac{d\varepsilon_{\pi}}{dn}$ совпадала с формулой (7.21).

Таблица 4

Параметры, определяющие энергию конденсата
(формулы (7.19), (7.23))

$\nu = \frac{z}{A}$	$\frac{f'}{f}$	γ	n_c	β	A	B	C
0,5	0,9	0,45	0,54	0,69	1,47	0,32	-1,10
0,5	0,9	0,5	0,65	0,81	1,34	0,49	-1,02
0,5	0,9	0,55	0,79	0,89	1,19	0,63	-0,93
0	0,9	0,45	0,69	0,80	0,91	-0,20	0,09
0	0,9	0,5	0,79	0,63	0,78	-0,21	0,06
0	1	0,4	0,48	1,19	1,42	-0,05	-0,18
0	1	0,45	0,54	1,11	1,26	-0,08	-0,07

Переходим теперь к случаю $\nu \ll 1$, который нам понадобится для выяснения вопроса об устойчивости нейтронных ядер.

Для барионной энергии во всем интервале плотностей можно использовать результаты расчетов нейтронного вещества [33]. Для пионной энергии используем результаты расчетов энергии конденсата вблизи критической точки, приведенные в V.1, а для больших плотностей формулы (7.20), (7.21), (7.22) при $\nu \ll 1$. Составляя опять интерполяционную формулу для $\varepsilon_{\pi}(n)$ вида (7.23), но с другими коэффициентами A , B и C , можно найти конденсатную энергию во всем интервале плотностей.

Условия устойчивости. Сформулируем условия равновесия, которым должна удовлетворять конечная система частиц при нулевом давлении.

1) Положительный дефект масс

$$-E > 0. \quad (7.24)$$

При этом автоматически выполняется условие связанности нуклонов, т. е. химические потенциалы нейтронов и протонов отрицательны

$$\mu_n = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_Z < 0, \quad \mu_p = \left(\frac{\partial E}{\partial Z} \right)_N < 0.$$

Нетрудно проверить, что при $E > 0$ химические потенциалы нуклонов положительны, а следовательно, система неустойчива относительно испарения частиц.

2) β -равновесие (электроны свободно уходят)

$$\left(\frac{\partial E}{\partial Z} \right)_A = \mu_p - \mu_n = 0. \quad (7.25)$$

3) устойчивость относительно деления

$$\frac{Z^2}{A} < 50f(n, \nu). \quad (7.26)$$

Правая часть этого неравенства определяется отношением коэффициентов в поверхностной и кулоновской энергиях.

На основании (7.17) имеем

$$f(n, \nu) = \frac{\varepsilon(n, \nu)}{\varepsilon(n_0, 1/2)}. \quad (7.27)$$

При $n = n_0$, $\nu \approx 1/2$ получаем известный критерий устойчивости относительно деления.

Предположим теперь, что условие 1) выполнено; тогда из (7.14), (7.20) и (7.25) получаем равновесное значение ν при плотностях:

$$\nu = \begin{cases} 1/2 \left(1 - 1/4 \frac{a_Q}{a_\pi} A^{2/3} \right) & 1 - 2\nu \ll 1, \\ 2 \frac{a_\pi}{a_Q} A^{-2/3} & \nu \ll 1. \end{cases} \quad (7.28)$$

Из (7.26) и (7.28) находим две области устойчивости:

1) при $A < A_1 = 200f\left(n, \frac{1}{2}\right)$ и $\nu = 1/2$ и

$$2) \text{ при } A > A_2 = 2 \cdot 10^5 \left(\frac{n}{n_0} \right)^4 f^{-3}(n, 0), \text{ при этом } v = 53 \times \left(\frac{n}{n_0} \right)^{2/3} \frac{1}{A^{2/3}}.$$

Первая область соответствует сверхплотным ядрам. Вторая область соответствует нейтронным ядрам. Эти ядра, несмотря на малое отношение Z/A , имеют достаточно большой заряд, чтобы кулоновская энергия запрещала β -распад, но в то же время Z^2/A достаточно мало, чтобы деление было невозможным. Ядра с отношением Z/A , отличным от равновесного, будут β -активными. Области существования стабильных и β -активных аномальных ядер изображены на рис. 23. Отметим, что в области

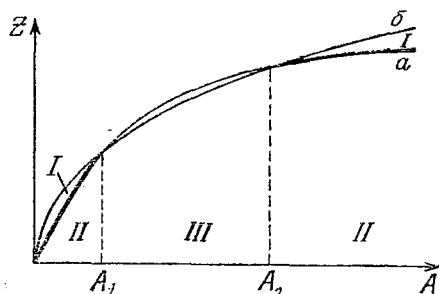


Рис. 23. Области существования аномальных ядер. a — кривая, соответствующая β -стабильности, b — граница устойчивости относительно деления. Части кривой a , обозначенные жирными линиями, соответствуют стабильным аномальным ядрам. I — области β^+ -активности; II — области β^- -активности, приводящей к устойчивому состоянию; III — область β^- -активности, приводящей к делению.

β^+ -активности (I) и в области β^- -активности (II) эволюция ядра заканчивается на линии стабильности, тогда как из области (III) ядро попадает на кривую деления.

Из приведенных выражений видно, что A_1 и A_2 существенно зависят от параметров модели.

Оценка плотности и энергии связи аномальных ядер. Прежде всего отметим, что при больших плотностях полная энергия системы является разностью двух больших чисел: энергии барионной подсистемы и энергии конденсата, которые в значительной степени компенсируют друг друга.

Точность расчетов каждого из слагаемых в настоящее время невелика (в лучшем случае они дают порядковые оценки) и, следовательно, результаты расчетов полной энергии системы должны рассматриваться лишь как иллюстрация различных возможных случаев.

Используя полученные выше интерполяционные формулы для $\varepsilon_B(n)$ и для $\varepsilon_\pi(n)$ и подставляя в (7.14), можно найти кривую $E(n, v)$ или $\varepsilon(n, v)$, при различных

значениях параметров, входящих в задачу, для двух областей равновесных значений ν ($\nu \approx 1/2$ — сверхплотные ядра и $\nu \ll 1$ — нейтронные ядра). Если минимум, соответствующий аномальному ядру, лежит ниже нуля, то система связана.

Рассмотрим сначала сверхплотные ядра. Результаты расчетов $\varepsilon(n)$ для сверхплотных ядер ($\nu \approx 1/2$) приведены на рис. 24. Кривая *a*, рассчитанная при $\gamma = 0,45$, демонстрирует случай, когда энергия связи сверхплотных ядер превышает энергию связи обычных ядер. Если бы такая ситуация действительно имела место, нормальные ядра были бы метастабильными относительно переходов в сверхплотное состояние. Минимум, соответствующий сверхплотным ядрам, на кривой *б*, рассчитанной при $\gamma = 0,5$, лежит выше, чем минимум, соответствующий обычным ядрам. В этом случае метастабильными были бы сверхплотные ядра. Отметим еще одно важное обстоятельство. При расчетах кривых *a* и *б* на рис. 24 мы использовали значения ядерных констант, при которых $n_c > n_0$. Возможно $n_c \ll n_0$ [11, 15], тогда пионный конденсат существует в обычных ядрах, и константы, характеризующие обычные ядра, уже содержат вклад конденсата. Наиболее вероятно, что в этом случае сверхплотные ядра не существуют.

Результаты расчета энергии нейтронного вещества ($\nu \ll 1$) с учетом конденсата представлены на рис. 25. Пунктирная кривая — энергия нейтронного вещества без конденсации. Кривые *a* и *б* рассчитаны при тех же значениях ядерных констант, что и соответствующие кривые на рис. 24. Как видно, в этом случае выигрыш в энергии за счет π -конденсации недостаточен для образования связанного состояния. Однако нельзя исключить возможность

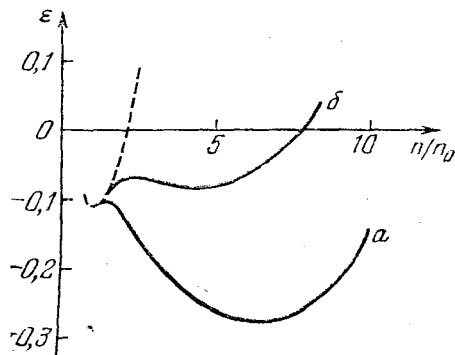


Рис. 24. Энергия ядерного вещества на 1 барион в случае $Z/A = 1/2$. Штриховая линия — барионная энергия. (Выражение (7.16)). Кривые *a* и *б* соответствуют константе NN-взаимодействия $\gamma = 0,45$ и $0,5$ соответственно.

некоторого изменения констант с изменением изотопического состава среды. Кривые ϵ и ζ на рис. 25, рассчитанные при $g_A = 1,36$ и $\gamma = 0,4$ и $\gamma = 0,45$ иллюстрируют случай появления связанного состояния для нейтронных ядер. При учете вакуумных электронов, экранирующих кулоновское поле ядра с зарядом $Z \geq 1/e^3$, область стабильности таких ядер значительно расширяется [97].

Итак, проведенный анализ показывает, что параметры аномальных ядер существенно зависят от констант пион-нуклонного и нуклон-нуклонного взаимодействий, определяющих энергию π -конденсата.

Выше мы отмечали неопределенность в расчетах, связанную с неопределенностью констант пион-нуклонного и нуклон-нуклонного взаимодействий. Кроме того, использованная нами модель [22, 23] позволяет учесть лишь энергию, связанную с конденсатом заряженных пионов, имеющим пространственную структуру бегущей волны. Как показано в работах [11, 12, 15], в нуклонной среде при плотности, близкой к n_0 , должен возникнуть также конденсат нейтральных пионов, который приведет к дополнительному выигрышу энергии. Кроме того, минимальная энергия

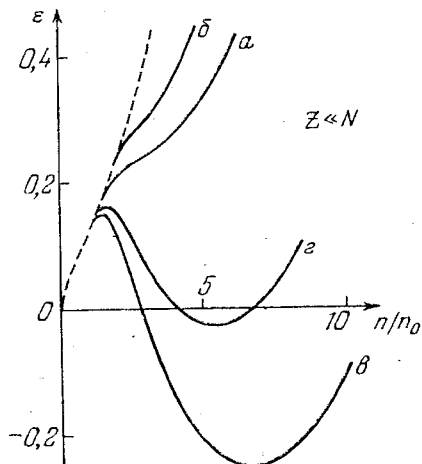


Рис. 25. Энергия нейтронного вещества на 1 барион. Штриховая линия — энергия нейтронного вещества без учета конденсата. Кривые a и b соответствуют тем же значениям параметров, что и на рис. 18. Кривые ϵ и ζ , вычисленные для $f' = f = 1,0$ и для $\gamma = 0,4$ и $0,45$, соответствуют устойчивым нейтронным ядрам.

системы может соответствовать более сложной, чем бегущая волна, пространственной структуре конденсатных полей [22, 67, 84]. Все эти эффекты являются дополнительными факторами в пользу существования аномальных ядер. С другой стороны, выбор более жесткого, чем в [33] уравнения состояния нуклонной подсистемы, а также учет подавления пион-нуклонных вершин при больших переданных импульсах, привел бы к повышению полной

энергии системы. В настоящее время невозможно учесть все эти эффекты с требуемой точностью, и главный вывод, который можно сделать на основании приведенного рассмотрения, состоит в том, что возможность существования аномальных ядер теоретически не исключена, и окончательное решение вопроса может дать лишь эксперимент.

Возможные пути обнаружения аномальных ядер. Сделаем теперь несколько замечаний о возможных экспериментах по обнаружению аномальных ядер.

В случае, если сверхплотные ядра существуют, ясно, каким ядрам — нормальным или сверхплотным — соответствует большая энергия связи. В принципе возможно, что большую энергию связи имеют сверхплотные ядра. В этой связи представляет интерес экспериментальное ограничение на спонтанные переходы нормальных ядер в сверхплотное состояние. Отметим, что пока поиски ядер с аномально высокой энергией связи не дали результата [85—87].

Представляют интерес поиски стабильных или короткоживущих β -активных аномальных ядер небольшого размера ($A \simeq 100$) в продуктах деления обычных ядер.

Возможно, сверхплотные ядра могут образовываться при столкновениях тяжелых ионов с энергиями порядка нескольких сот МэВ на нуклон *). Возникающая при этом ударная волна может привести к значительному уплотнению ядерного вещества. Весьма вероятно, что при $n = n_c$ сжимаемость системы становится отрицательной. Поэтому достаточно сжать систему до плотности n_c , чтобы начала образовываться сверхплотная фаза. Независимо от того, существуют или нет устойчивые сверхплотные ядра, псионная конденсация должна существенно повлиять на динамику столкновения и проявилась бы в угловых и энергетических распределениях продуктов реакции. Такая возможность рассматривалась в работе [94]. Более детальное исследование влияния фазового перехода на динамику ударных волн в ядерном веществе было выполнено в работе [95] и показало, что наличие области отрицательной сжимаемости в уравнении состояния долж-

*) Такой эксперимент был предложен Б. М. Понтекорво в 1974 г. при обсуждении работы [10].

но привести к расщеплению ударной волны на две. В первой волне происходит скачок плотности от n_0 до n_c , а во второй — от n_c до плотности сверхплотной фазы n_m ($n_m \simeq (3 \div 6)n_0$). Это явление могло бы привести к появлению двух (вместо одного) максимумов в угловом распределении вылетающих частиц.

Экспериментальное и теоретическое изучение столкновения тяжелых ионов позволит приблизиться к решению проблемы возможного существования сверхплотных ядер.

И, наконец, можно надеяться обнаружить аномальные ядра в космических лучах, как это отмечалось еще в работе [10]. В связи с этим интересно отметить, что трек, который приписывался магнитному монополю [92], может быть интерпретирован как след аномального (нейтронного) ядра. Возможность наблюдения в космических лучах стабильных аномальных ядер или их β -активных осколков с аномальным Z/A , образующихся при взаимодействии с зарядами атмосферы, должна учитываться при постановке и анализе экспериментов. Представляют интерес также поиски сверхплотных ядер космического происхождения, накопившихся за космологические времена в поверхностных слоях лунного грунта и в метеоритах.

VII.3. Пионная конденсация и динамика нейтронных звезд *)

Как уже отмечалось выше, пионная конденсация существенно смягчает уравнение состояния ядерного вещества $P(\rho)$, где ρ — плотность массы. В результате, зависимость $P(\rho)$ приобретает характерный для фазового перехода ван-дер-ваальсовский вид. При этом возникает интервал плотностей, в котором отрицательна сжимаемость вещества ($\partial P/\partial \rho < 0$). Обычно при изучении фазовых переходов участок с отрицательной сжимаемостью заменяют горизонтальной прямой линией, положение которой определяется из условия равенства площадей фигур, отсекаемых ею на ван-дер-ваальсовской кривой. В нашем случае эта процедура, предполагающая полное термодинамическое равновесие фаз, не имеет

*) Результаты, изложенные в этом параграфе, получены автором совместно с И. Н. Мишустиним.

смысла, поскольку предполагается, что для установления равновесного состава фаз требуется значительное время. При сжатии нейтронной звезды метастабильность относительно расслоения на две фазы проявится лишь в непосредственной окрестности максимума на кривой $P(\rho)$, отвечающего значению $\rho = \rho_c$. Ввиду того, что состояниям, лежащим между максимумом и минимумом кривой $P(\rho)$, отвечает отрицательная сжимаемость в нейтронных звездах, в центре которых плотность превышает критическую ρ_c , должен возникать скачок плотности ρ_c до соответствующего значения плотности сверхплотной фазы ρ_s . Положение разрыва, т. е. радиус сверхплотного ядра R_c можно определить из условия гидростатического равновесия звезды (равенство давлений слева и справа от разрыва). Значение R_c существенно зависит от конкретного вида уравнения состояния, но качественная картина определяется лишь отношением плотностей $\eta = \rho_s/\rho_c$. При $\eta > 3/2$ зародыш новой фазы в центре звезды нарастает до радиуса R_c , сравнимого с радиусом всей звезды. В работе [98], в которой решалась аналогичная задача, неравенство $\eta > 3/2$ сформулировано как условие неустойчивости центрального ядра малого размера.

Именно такого соотношения следует ожидать в случае π -конденсатного фазового перехода (ожидаемое значение $\eta \sim 5$).

Таким образом, если в процессе сжатия нейтронной звезды после взрыва сверхновой или при увеличении ее массы за счет аккреции окружающего газа центральная плотность достигает критического значения, то в центре начинает образовываться ядро новой фазы. При этом внешнее вещество начинает падать к центру, приобретая значительную кинетическую энергию. Дальнейшая картина существенно зависит от мощности механизмов диссипации энергии.

Рассмотрим уравнения, описывающие сферически-симметричное движение идеальной жидкости в собственном гравитационном поле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm(r)}{r^2}, \end{array} \right. \quad (7.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v \rho) = 0. \end{array} \right. \quad (7.30)$$

Первое из них представляет собой нерелятивистское уравнение движения, второе — уравнение непрерывности. В этих уравнениях v и ρ — локальные скорость и плотность вещества ($\rho = m_N n$, m_N — масса нуклона), G — гравитационная постоянная, $m(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиуса r ,

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr, \quad m(R) = M, \quad (7.31)$$

M и R — полная масса и радиус звезды.

Если заданы начальные и граничные условия, а также известен вид уравнения состояния $P(\rho)$, то уравнения (7.29) — (7.31) полностью определяют динамику звезды на первой стадии, когда можно пренебречь разогревом.

Прежде всего рассмотрим статические конфигурации ($\partial/\partial t = 0$, $v = 0$). При этом уравнение (7.29) переходит в известное уравнение гидростатического равновесия звезды. Будем для простоты считать, что вещество сверхплотной фазы несжимаемо и имеет плотность ρ_* , а в нормальной фазе вещество описывается уравнением состояния нерелятивистского идеального ферми-газа ($\hbar = c = 1$):

$$P(\rho) = \frac{1}{5} \rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3},$$

где $\rho_0 = m_N^4 / 3\pi^2 = 6 \cdot 10^{15}$ г/см³. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{r}{r_0}, \quad r_0 = (4\pi G \rho_0)^{-1/2} \simeq 4,5 \text{ км}, \quad y = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} x.$$

Используя уравнения (7.29), (7.31), получаем для $x > x_c \equiv R_c / r_0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}} = 0. \quad (7.32)$$

Это уравнение только знаком отличается от уравнения Томаса — Ферми, описывающего распределение заряда в атоме. Граничные условия для уравнения (7.32) имеют вид

$$y(x_c) = y_c \equiv \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{2/3} x_c, \quad y(x_1) = 0. \quad (7.33)$$

Здесь $x_1 = R / r_0$.

В области $x < x_c$ уравнения (7.29), (7.31) приводят к решению

$$P(x) = P_0 - \frac{\rho_s^2}{\rho_0} \frac{x^2}{6}. \quad (7.34)$$

Давление в центре P_0 определяется условием непрерывности давления при $x = x_c$.

Теперь для однозначного определения параметров конфигурации (x_c и x_1) достаточно задать полную массу звезды:

$$M = M_0 \left[\frac{\rho_s}{\rho_0} x_c^3 + 3 \int_{x_c}^{x_1} y^{3/2} \sqrt{x} dx \right], \quad (7.35)$$

где $M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r_0^3 \simeq 1,3M_\odot$. Приведенные выше формулы применимы для случая $M \geq M_c$. Если же плотность в центре меньше ρ_c , то распределение плотности в звезде дается формулами (7.32), (7.33), (7.35), в которых нужно формально положить $x_c = 0$.

Анализ этих уравнений показывает, что при $\eta > 3/2$ центральное ядро имеет радиус, сравнимый с радиусом звезды при любом превышении M над M_c .

Рассмотрим теперь динамику установления равновесной конфигурации. Предположим, что в некоторый момент времени плотность в центре достигает критического значения ρ_c и начинает образовываться ядро новой фазы. Напишем уравнение движения границы разрыва R_c на начальной стадии процесса, когда R_c/R можно считать малым. Из предположения о несжимаемости вещества в центральном ядре ($\partial\rho/\partial t = 0$) и уравнения (7.30) следует, что при $r < R_c$ скорость $v = 0$ во всем центральном ядре. Пока $r/R \ll 1$, вещество нормальной фазы вблизи границы разрыва также можно считать несжимаемым. Тогда из формулы (7.30) для $R_c < r \ll R$ имеем

$$v(r, t) = \frac{a(t)}{r^2 \rho_c}, \quad (7.36)$$

где $a(t)$ не зависит от r . Из условия непрерывности потока массы на поверхности разрыва, которое следует из уравнения (7.30), находится связь между скоростью поверхности разрыва $u = \dot{R}_c$ и скоростью вещества вблизи

нее $v_c = v(r \rightarrow R_c)$:

$$u = - \frac{\rho_c}{\rho_s - \rho_c} v_c = - \frac{1}{\rho_s - \rho_c} \frac{a(t)}{R_c^2}. \quad (7.37)$$

Наличие скачка скорости на границе раздела двух фаз приводит к диссипации энергии в переходном слое (аналогичная ситуация имеет место в ударных волнах). Поэтому вещество новой фазы будет разогреваться. Температуру можно определить из условия непрерывности потока энергии на поверхности разрыва. Разогрев изменяет параметры сверхплотной фазы. В нашей модели несжимаемого центрального ядра это изменение относится к величине ρ_s . Мы считаем, что даже с учетом разогрева ρ_s/ρ_c остается больше $3^{1/2}$.

Используя соотношение (7.37), после несложных преобразований получаем из (7.29) уравнение движения для R_c на начальной стадии процесса, когда $R_c/R \ll 1$:

$$\ddot{R}_c + (\eta + 3) \frac{\dot{R}_c^2}{2R_c} - \frac{2\pi}{3} G \rho_c \frac{2\eta - 3}{\eta - 1} R_c = 0. \quad (7.38)$$

В этом уравнении предполагается, что $M = M_c$. При $\eta > 3^{1/2}$ оно имеет экспоненциально растущие решения

$$R_c \sim e^{\lambda t}, \quad \lambda^2 = \frac{4\pi}{3} G \rho_c \frac{2\eta - 3}{(\eta + 5)(\eta - 1)}. \quad (7.39)$$

При $\rho_c = m_N n_0 \sim 0,1\rho_0$ и $\eta = 5$ характерное время изменения R_c оказывается $1/\lambda \sim 2 \cdot 10^{-4}$ сек.

Таким образом, за время порядка $1/\lambda$ радиус зародыша новой фазы становится порядка радиуса звезды. При этом становится большой также и скорость вещества, падающего к центру. Решить задачу для этой стадии процесса довольно сложно, так как при этом необходи-

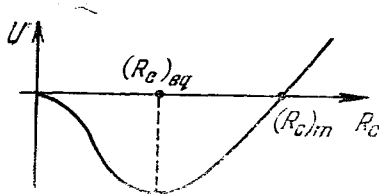


Рис. 26. Потенциальная энергия звезды U как функция радиуса поверхности разрыва R_c

мо учитывать как эффекты сжимаемости вещества, так и диссипативные процессы. Качественно ситуация выглядит следующим образом. Представим потенциальную энергию звезды $U(R_c)$ в виде, изображенном на рис. 26. Началь-

ный участок этой кривой имеет параболическую форму, а его производная по R_c дается последним членом уравнения (7.38). Минимум $U(R_c)$ соответствует равновесному значению $R_c = (R_c)_{eq}$, которое обсуждалось выше.

Рост потенциальной энергии при $R_c > (R_c)_{eq}$ обусловлен членами более высокого порядка по R_c/R , которые были отброшены в уравнении (7.38). Ясно, что в пренебрежении диссипативными процессами радиус поверхности разрыва будет колебаться в интервале значений $0 < R_c \leq (R_c)_m$. При этом, конечно, колебательные движения будут совершать также и радиус всей звезды. Как уже отмечалось выше, рассматриваемый нами фазовый переход характеризуется очень большими временами установления равновесного состава фаз. Поэтому колебания поверхности, разделяющей фазы, будут сопровождаться гистерезисными явлениями. В частности, если минимум на ван-дер-ваальсовой кривой лежит в области отрицательных давлений, то за первое же колебание звезда целиком перейдет в сверхплотное состояние. Гистерезисные явления и диссипативные процессы сделают колебания звезды затухающими, либо даже приведут к аperiodическому сползанию звезды в равновесное состояние. Так как выделяющаяся при этом тепловая энергия сравнима с энергией всей звезды, то это может привести к взрыву и сбросу оболочки. Эти стадии эволюции звезды требуют более детального анализа и численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *I. Pomeranchuk, Ya. Smorodinsky*, J. Phys. USSR 9, 97 (1945).
2. *W. Pieper, W. Greiner*, Zs. Phys. 218, 327 (1969).
3. *В. С. Попов*, ЯФ 12, 429 (1970).
4. *Я. Б. Зельдович, В. С. Попов*, УФН 105, 403 (1971).
5. *W. Heisenberg, H. Euler*, Zs. Phys. 98, 714 (1936).
6. *V. Weisskopf*, Kgl. Dan. Vid. Sels. Mat. Fys. Medd. 14, 6 (1936).
7. *А. Б. Мигдал*, ЖЭТФ 70, 411 (1976).
8. *B. Müller, J. Rafelski*, Phys. Rev. Lett. 34, 349 (1975); *А. Б. Мигдал, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский*, Письма в ЖЭТФ 24, 186 (1976); ЖЭТФ 72, 834 (1977).
9. *А. Б. Мигдал*, ЖЭТФ 62, 1621 (1972).
10. *А. Б. Мигдал*, ЖЭТФ 61, 2209 (1971).
11. *А. Б. Мигдал*, ЖЭТФ 63, 1993 (1972); Nucl. Phys. A210, 421 (1973).
12. *А. В. Migdal*, Phys. Rev. Lett. 31, 257 (1973).
13. *C. Dover, R. Lemmer*, Phys. Rev. 165, 1105 (1968).
14. *R. F. Sawyer*, Phys. Rev. Lett. 29, 382 (1972);
D. J. Scalapino, Phys. Rev. Lett. 29, 386 (1972).
15. *А. Б. Мигдал, О. А. Маркин, И. Н. Мишустин*, ЖЭТФ 66, 443 (1974).
16. *P. W. Anderson et al.*, Lett. Nuovo Cim. 12, 165 (1975).
17. *R. F. Sawyer, A. C. Yao*, Phys. Rev. D7, 1579 (1973).
18. *А. В. Migdal*, Phys. Lett. 47B, 96 (1973).
19. *G. Baym, E. Flowers*, Nucl. Phys. A222, 29 (1974).
20. *D. Campbell, R. Dashen, J. Manassah*, Phys. Rev. D12, 979, 1010 (1975).
21. *G. Baym et al.*, Phys. Lett. 58B, 304 (1975).
22. *А. Б. Мигдал, О. А. Маркин, И. Н. Мишустин*, ЖЭТФ 70, 1592 (1976).
23. *А. М. Дюгаев*, Письма в ЖЭТФ 22, 181 (1975).
24. *А. В. Migdal, N. A. Kirichenko, G. A. Sorokin*, Phys. Lett. 50B, 411 (1974).
25. *Э. Е. Саперштейн, С. В. Толоконников, С. А. Фаянс*, Письма в ЖЭТФ 21, 138 (1975).
26. *А. В. Migdal*, π -condensation in nuclei and neutron stars. Preprint Chernogolovka, 1973.
27. *N. A. Kirichenko, G. A. Sorokin*, Excited States of Pion Condensed Finite Systems. Preprint. Chernogolovka, 1976; Phys. Lett. 62B, 162 (1976).
28. *Э. Е. Саперштейн, М. А. Троицкий*, Письма в ЖЭТФ 21, 138 (1975); ЯФ 22, 257 (1975).

29. А. Б. Мигдал, Письма в ЖЭТФ 19, 539 (1974).
30. А. В. Migdal, Phys. Lett. 52B, 172 (1974).
31. T. D. Lee, Abnormal Nuclear States, Preprint, Columbia University, CO-2271-27, 1974; Rev. Mod. Phys. 47, 267 (1975).
32. А. Б. Мигдал, О. А. Маркин, И. П. Мишустин, Г. А. Сорокин, ЖЭТФ 72, 1247 (1977).
33. V. Pandharipande, Nucl. Phys. A178, 123 (1971).
34. J. B. Hartle, R. F. Sawyer, D. J. Scalapino, Preprint (1974). Un. Cal., Astrophys. J., 199, 471 (1975).
35. C. K. Au, G. Baym, Nucl. Phys. A236, 500 (1974).
36. W. Weise, G. Brown, Phys. Lett. 58B, 300 (1975).
37. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1969.
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, «Наука», 1974.
39. А. Б. Мигдал, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЯФ 14, 874 (1971).
40. G. W. Ericson, Phys. Rev. Lett. 27, 781 (1971);
A. M. Desiderio, W. R. Johnson, Phys. Rev. A3, 1267 (1971).
41. S. S. Gerstein, W. S. Popov, Lett. Nuovo Cim. 6, 593 (1973);
В. С. Попов, ЖЭТФ 65, 35 (1973); ЯФ 19, 1955 (1974).
42. А. Б. Мигдал, Качественные методы в квантовой теории. «Наука», 1975.
43. M. S. Vallarta, N. Rosen, Phys. Rev. 41, 708 (1932);
H. Jensen, Zs. Phys. 82, 794 (1933).
44. P. A. M. Dirac, Proc. Cambrid. Phil. Soc. 30, 150 (1934).
45. J. Rafelski, B. Müller, W. Greiner, Zs. Phys. 257, 183 (1972).
46. M. Gyulassy, Phys. Rev. Lett. 33, 921 (1974); Nucl. Phys. A244, 497 (1975).
47. L. S. Brown, R. N. Cahn, L. D. McLerran, Phys. Rev. D12, 581, 596, 609 (1975).
48. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, «Наука», 1965.
49. В. Д. Мур, В. С. Попов, ТМФ 27, 81, 204 (1976).
50. M. Ericson, T. E. Ericson, Ann. Phys. 36, 323 (1966).
51. А. Б. Мигдал, Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, «Наука», 1965.
52. С. Газиорович, Физика элементарных частиц, «Наука», 1969.
53. A. A. Carter et al., Nucl. Phys. B26, 445 (1971).
54. I. D. Mountz et al., Phys. Rev. D12, 1211 (1975).
55. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17, 616 (1966).
56. Г. Бете, Теория ядерной материи, «Мир», 1974.
57. V. M. Osadchev, M. A. Troitski, Phys. Lett. 26B, 421 (1968).
58. S. O. Bäckman and W. Weise, Phys. Lett. 55B, (1975).
59. S. Barshay, G. M. Vagradov, G. E. Brown, Phys. Lett. 43B, 359 (1973).
60. M. Rho, High-Energy Physics and Nuclear Structure, AIP Conference Proceedings 26, p. 666, 1975.
61. G. Bertsch, M. Johnson, Phys. Lett. 48B, 397 (1974); Phys. Rev. D12, 2230 (1975).
62. R. F. Sawyer, D. J. Scalapino, Phys. Rev. D7, 953 (1973).
63. R. F. Sawyer, Phys. Rev. Lett. 31, 1556 (1973).
64. G. Baym, Phys. Rev. Lett. 30, 1340 (1973).

65. *S. Weinberg*, Phys. Rev. 166, 1568 (1966).
66. *A. B. Migdal*, Rev. Mod. Phys. 1 (1978).
67. *О. А. Маркин, И. Н. Мишустин*, Письма в ЖЭТФ 20, 497 (1974).
68. *C. K. Au*, Phys. Lett. 61B, 300 (1976).
69. *A. B. Migdal*, Phys. Lett. 52B, 264 (1974).
70. *А. Б. Мигдал*, ЖЭТФ 37, 249 (1959).
71. *S. Barshay, G. E. Brown*, Phys. Lett. 47B, 107 (1973).
72. *A. B. Migdal*, Are there any reasonable objections to π -condensations? Preprint. Chernogolovka, 1973.
73. *Э. Е. Саперштейн, М. А. Троицкий*, Изв. АН СССР, сер. физ. 40, 103 (1976).
74. *Э. Е. Саперштейн, М. А. Троицкий*, Изв. АН СССР, сер. физ. 40, 95 (1976).
75. *М. А. Троицкий и др.*, Письма в ЖЭТФ 21, 96 (1975).
76. *J. Bellicard et al.*, Phys. Rev. Lett. 19, 527 (1967).
77. *J. Heisenberg et al.*, Phys. Rev. Lett. 23, 1402 (1969).
78. *B. Sinha et al.*, Phys. Rev. C6, 1657; C7, 1930 (1973).
79. *G. Li et al.*, Phys. Rev. C9, 1861 (1974).
80. *H. Palevsky et al.*, Phys. Rev. Lett. 18, 1200 (1967).
81. *G. Alkhasov et al.*, Phys. Lett., 42B, 421 (1972).
82. *Д. А. Куржниц, Г. В. Шнараковская*, ЖЭТФ 62, 2083 (1972).
83. *F. Urhane et al.*, Phys. Rev. Lett. 26, 578 (1971).
84. *Г. А. Сорокин*, Письма в ЖЭТФ 21, 312 (1975).
85. *P. Price, J. Stevenson*, Phys. Rev. Lett. 34, 409 (1975).
86. *R. Holt et al.*, Phys. Rev. Lett. 36, 183 (1975).
87. *S. Frankel et al.*, Phys. Rev. C13, 737 (1976).
88. *P. Price et al.*, Phys. Rev. Lett. 35, 487 (1975).
89. *M. Nagels et al.*, Nucl. Phys. B109, 1 (1976).
90. *S. I. Adler*, Phys. Rev. 137, B1022 (1965).
91. *E. T. Osypovskii*, Nucl. Phys. B21, 615 (1970).
92. *G. Hohler, H. P. Jakob, R. Strauss*, Nucl. Phys. B39, 237 (1972).
93. *М. А. Троицкий, М. В. Колдаев, Н. И. Чекунаев*, ЖЭТФ 73, 1258 (1977).
94. *V. Ruck, M. Gyulassy, M. Greiner*, Z. Physik A277, 391 (1976).
95. *В. М. Галицкий, И. Н. Мишустин*, препринт ИАЭ, № 2873, Москва, 1977.
96. *Д. Н. Воскресенский, А. И. Черноуцан*, ЯФ 27, 1411 (1978).
97. *Д. Н. Воскресенский, Г. А. Сорокин, А. И. Черноуцан*, Письма в ЖЭТФ 25, 495 (1977).
98. *W. H. Ramsey*, Monthly Not. Roy. Soc. 110, 325 (1950).