

Н. МОТТ и Г. МЕССИ

**ТЕОРИЯ  
АТОМНЫХ  
СТОЛКНОВЕНИЙ**

*Перевод со 2-го английского издания*

Т. А. КОНТОРОВОЙ

*Под редакцией*

Я И ФРЕНКЕЛЯ

**И\*Л**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

*Москва 1951*

# THE THEORY OF ATOMIC COLLISIONS

by  
N. F. MOTT and H. S. W. MASSEY

SECOND EDITION  
OXFORD, 1949

## ОПЕЧАТКИ

| Стр. | Строка  | Напечатано                                | Следует читать                             |
|------|---------|---|--|
| 34   | 12 стр. | $\frac{1}{r^2}$                           | $\frac{1}{r^2}$                            |
| 41   | 9 стр.  | $I_{n+\frac{1}{2}}$                       | $J_{n+\frac{1}{2}}$                        |
| 67   | 2 стр.  | $\frac{G_1}{\Gamma}(1+ia)$                | $\frac{G_1}{\Gamma(1+ia)}$                 |
| 67   | 1 стр.  | $\frac{G_2}{\Gamma}(-ia)$                 | $\frac{G_2}{\Gamma(-ia)}$                  |
| 68   | 10 стр. | $\left[ \frac{1-a^2}{ik}(r-z) \right]$    | $\left[ 1 - \frac{a^2}{ik(r-z)} \right]$   |
| 68   | 6 стр.  | $\Gamma \frac{(1+ia)}{(1-ia)}$            | $\frac{\Gamma(1+ia)}{\Gamma(1-ia)}$        |
| 111  | 5 стр.  | $P_1^+ \psi_1$                            | $P_1^+ \psi_2$                             |
| 209  | 3 стр.  | $F_1^0$                                   | $\Gamma_1^0$                               |
| 273  | 11 стр. | $\psi_{n/m} \frac{Z}{r}$                  | $\psi_{n/m} \left( \frac{Z}{r} \right)$    |
| 290  | 16 стр. | $\frac{0,2-0,6n^2a_0^2}{Z_{0\Phi\Phi}^2}$ | $0,2-0,6 \frac{n^2a_0^2}{Z_{0\Phi\Phi}^2}$ |
| 293  | 1 стр.  | $K^2$                                     | $k^2$                                      |
| 390  | 14 стр. | $\frac{1-\lambda^2 Na}{2\pi}$             | $1 - \frac{\lambda^2 Na}{2\pi}$            |
| 392  | 16 стр. | $P_t$                                     | $P_t$                                      |
| 412  | 4 стр.  | $a_0 t$                                   | $a_0(t)$                                   |
| 420  | 8 стр.  | $e^{ikr - \frac{n\pi i}{2} i\eta_n}$      | $e^{ikr - \frac{n\pi i}{2} + i\eta_n}$     |
| 425  | 12 стр. | $\left( \frac{r}{c-t} \right)$            | $\left( \frac{r}{c} - t \right)$           |
| 432  | 11 стр. | $\left( \frac{e^2}{mc^2} \right)$         | $\left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$        |

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая книга предназначена для читателей, знакомых с принципами нерелятивистской и релятивистской квантовой механики, а также с принципами квантовой статистики и желающих основательно ознакомиться с применением их к явлениям столкновений различных частиц—электронов, нейтронов, атомных ядер и ионов—друг с другом. Классическая механика описывает эти явления в очень грубом приближении. Квантовая механика в принципе позволяет решать соответствующие вопросы несравненно точнее и, в частности, учесть ряд особенностей, связанных с тождественностью сталкивающихся частиц.

Авторы книги известны своими оригинальными работами в этой области. В частности, Мотту принадлежит ряд результатов, относящихся к влиянию «спина» при столкновениях электронов с атомами или друг с другом, а Мессі—ряд результатов, относящихся к столкновениям между относительно сложными частицами—атомами и молекулами.

Настоящий перевод выполнен со второго издания (первое издание книги вышло в 1934 г., а ее русский перевод—в 1936 г.). Во втором издании содержится ряд дополнений, учитывающих развитие теории и эксперимента за истекшие 17 лет. В частности, систематически изложены вопросы ядерных столкновений, ранее не рассмотренные в первом издании. Они затрагиваются в гл. VIII в связи с методом «комплекса сталкивающихся частиц», или так называемого «составного ядра»<sup>1)</sup>, а также с методом «переходных состояний», и наиболее подробно в гл. XIII. К сожалению, некоторые последние вопросы, в особенности связанные с прохождением нейтронов через вещество, рассмотрены далеко не полно. Кроме того, автор игнорировал по этому вопросу значительную часть советских работ, освещение которых читатель может найти в монографии Ахизера и Померанчука «Некоторые вопросы теории ядра».

В гл. XV авторы исследовали некоторые проблемы, связанные с применениями релятивистской теории, в частности, к процессам, в которых участвуют позитроны или фотоны.

<sup>1)</sup> В литературе применяется также термин «компаунд-ядро».



При изложении ряда вопросов авторами допущены некоторые неточности. Следует отметить, что в некоторых главах книги изложение загромождено излишними вычислениями. Мы считали своим долгом до некоторой степени восполнить эти пробелы соответствующими примечаниями.

Книга в целом представляет несомненный интерес, в частности в ней сравнительно подробно изложены методы расчета эффективных столкновений разного рода (упругих и неупругих, сопровождающихся перестройкой сталкивающихся систем или их перезарядкой и т. д.), имеющих большое значение при изучении вопросов, связанных со строением вещества.

Член-корреспондент АН СССР

*Я. Френкель.*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени опубликования первого издания этой книги теория атомных столкновений развивалась главным образом в направлении ее приложения к вопросам ядерной физики. В области изучения неядерных явлений столкновения за это время также были достигнуты значительный прогресс. В настоящее время в таких областях исследования, как астрофизика, физика Солнца и физика верхних слоев атмосферы, оказывается необходимым иметь надежные сведения о скоростях различных процессов столкновений. Обзор таких сведений, совместно с подробным рассмотрением современных данных о ядерных столкновениях, потребовал бы написания чересчур объемистой книги. В этом, втором издании нашей книги мы решили поэтому ограничиться в первую очередь изложением новых работ, посвященных изучению ядерных столкновений, и рассмотрением современного состояния некоторых общих теоретических вопросов. Более подробно исследован вопрос о релятивистском рассеянии, не сопровождающемся излучением, а также вопрос о применимости различных приближенных методов и численных методах решения некоторых задач. Мы не пытались рассмотреть более подробно вопросы, касающиеся атомных (неядерных) столкновений, за исключением тех случаев, когда это давало возможность непосредственной проверки каких-либо теоретических положений. Глава, посвященная обсуждению столкновений электронов с молекулами, в этом издании нами полностью опущена.

Для того чтобы удовлетворить растущую потребность в сведениях как экспериментального, так и теоретического характера о скоростях различных атомных (неядерных) процессов столкновений, в настоящее время предпринято издание второй книги— «Электронные и ионные процессы столкновений»,—которая является не чисто теоретической, но содержит также описание экспериментальных методов исследования. Эта книга написана одним из авторов совместно с доктором Берхопом. Мы ссылаемся на эту новую книгу повсюду, где нам представляется необходимым обратить внимание на существование специального пособия по этим вопросам.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие из наиболее существенных успехов современной физики были достигнуты в результате изучения поведения пучков заряженных частиц. Исследования Томсона и других авторов в области катодных лучей привели к открытию электрона и определению отношения его заряда к массе. С помощью аналогичных методов Кауфману удалось продемонстрировать наличие релятивистского изменения массы со скоростью, а усовершенствование этого метода Астоном дало возможность изучить дефекты мас-атомов.

Эти опыты дали нам сведения о природе самих заряженных частиц. Когда природа этих частиц была понята, пучки заряженных частиц оказались наиболее удобным орудием исследования атомной структуры. Наиболее ценные в этом отношении сведения могут быть получены в результате бомбардировки вещества, обычно газа или тонкой фольги, при таких условиях, когда очень немногие из падающих частиц испытывают эффективные столкновения больше, нежели с одним атомом. При этих условиях рассеяние называют «однократным». В этом случае оказывается возможным исследовать энергию и угловое распределение рассеянных частиц или же излучение, испускаемое атомом.

Наиболее ранним опытом этого типа явился опыт Резерфорда, подвергнувшего тонкую металлическую фольгу бомбардировке потоком  $\alpha$ -частиц. Из соотношения между числом рассеянных частиц и толщиной фольги Резерфорду удалось показать, что в условиях опыта имело место однократное рассеяние; изучение изменения рассеяния с изменением угла привело его, далее, к утверждению о том, что в центре атома находится тяжелое ядро. Дальнейшие усовершенствования этого метода привели к открытию аномального рассеяния и искусственному разложению ядер; этот метод оказался также одним из наиболее пригодных для исследования структуры ядра.

Опыты по бомбардировке атомов электронами с заданной энергией, осуществленные Франком, Герцем и другими исследователями, дали наиболее непосредственное доказательство существования стационарных состояний, постулированных Бором в 1913 г.

Оказалось возможным измерить наименьшую энергию, необходимую для возбуждения атома до состояния, в котором он может излучать, а также исследовать распределение скоростей электронов после столкновений и показать, что при рассеянии электроны либо не теряют энергии, либо потеря ими энергии превышает первый резонансный потенциал.

Во всех этих опытах внимание исследователей привлекало в основном атом, а не сталкивающаяся с ним частица. Ведь именно атом обладает планетарной структурой, существует в стационарных состояниях и обладает способностью к излучению. Если считать эти факты установленными, то сталкивающаяся частица ведет себя так, как этого и следовало ожидать, и является очень удобным орудием исследования. Теоретические работы вплоть до последнего времени касались поэтому в основном изучения стационарных состояний атомов. Точные и подробные данные об энергиях этих состояний были получены в результате развития спектроскопических методов исследования.

Имели место также и попытки определения теоретических значений вероятности потери энергии частицей при столкновении. Так, например, в 1911 г. Бор предложил полуклассическую теорию потери энергии электронами и  $\alpha$ -частицами при прохождении их через вещество; при этом было получено выражение, определяющее тормозную способность вещества и находящееся в качественном согласии с опытными данными. В 1923 г. Крамерс дал теорию излучения частицей при ее столкновении с неподвижной мишенью. Эти формулы, хотя и весьма удобные при анализе экспериментальных данных, лишены, однако, сколько-нибудь надежного теоретического базиса.

Одним из успехов новой квантовой теории является то обстоятельство, что она способна однозначным образом отвечать на вопросы, связанные с определением вероятностей и интенсивностей при рассмотрении различных вопросов теории столкновений. Первое указание на недостаточность классической механики, дополненной квантовыми условиями, было получено в результате работ Рамзауера, показавшего, что для некоторых атомов эффективное сечение столкновений с медленными электронами во много раз меньше, нежели газокинетическое сечение. Основной экспериментальный материал, свидетельствующий о справедливости новой теории, был получен, однако, уже после ее построения, причем его накопление до некоторой степени стимулировалось последней. Так, например, работы Девиссона и Джермера, Томсона и многих других авторов, посвященные изучению диффракции электронов кристаллами, дают ясное доказательство волновой природы электрона. Богатый экспериментальный материал, касающийся диффракции электронов на атомах и молекулах газов, по большей части также может быть объяснен вполне удовлетво-

рительным образом. Имеются также некоторые указания на возможность подтверждения принципа Паули на основании данных о явлениях столкновения.

Новая теория не только объясняет эти новые и до некоторой степени удивительные явления, но дает также формулы, определяющие тормозную способность различных материалов для  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц, значения газокинетических сечений атомов, а также многие другие величины, которые пыталась оценить классическая теория. Формулы, даваемые квантовой теорией, находятся обычно в лучшем согласии с опытными данными, нежели формулы прежней теории; некоторые расхождения между теорией и опытом обусловлены, по всей вероятности, скорее приближенностью математических методов решения задачи, чем недостатками самой теории.

Изложив в гл. I методы новой квантовой теории, мы применим затем эти методы к исследованию задач о столкновениях между различными частицами и покажем, что они приводят к согласию с полученными опытными данными.

## Глава I

### ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

#### § 1. Волновая функция

В этой главе мы сформулируем законы волновой механики не в их наиболее общей форме, применимой к любой сложной системе частиц, но в более простом виде, пригодном лишь для изучения движения отдельной заряженной частицы в некотором силовом поле. Излагаемые при этом соображения могут быть использованы также и при анализе экспериментальных данных, относящихся к поведению пучка электронов, при условии, что взаимодействием между различными электронами в этом пучке можно пренебречь, т. е. в предположении, что каждый электрон ведет себя так, как если бы остальных электронов не существовало. В действительности это могло иметь место, конечно, лишь в том случае, если плотность заряда в пучке была исчезающе малой.

Мы установим законы волновой механики с целью их применения к задачам, связанным с изучением движения свободного электрона; так как опыты такого рода производятся обычно с пучками электронов, мы сформулируем прежде всего законы, характеризующие поведение стационарных электронных пучков. Эти законы могут быть найдены следующим образом. Когда наблюдаем электрон, мы имеем дело с электроном, как с частицей (вспышка на экране, отброс счетчика Гейгера). Если мы хотим, однако, знать, сколько электронов находится в некотором объеме или же сколько электронов вблизи данной точки проходит за единицу времени через единицу площади, мы должны сделать предположение о наличии некоторой волны (волны Де Бройля). Амплитуда и фаза этой волны в данной точке в данный момент времени определяются как некоторая (комплексная) функция положения  $\psi(x, y, z; t)$  (волновая функция)<sup>1</sup>. Наличие такой «волны» обнаруживается следующим образом: если  $d\tau$  — элемент объема, содержащий точку  $(x, y, z)$ , то вероятность нахождения электрона в момент  $t$  в элементе объема  $d\tau$  равна

$$|\psi(x, y, z; t)|^2 d\tau.$$

<sup>1</sup>)  $x, y, z$  — декартовы координаты, взятые по отношению к некоторым неподвижным осям;  $t$  — время.

Среднее число электронов в объеме  $\tau$ , достаточно большом, чтобы содержать большое количество электронов, равно в таком случае

$$\int |\psi(x, y, z; t)|^2 d\tau;$$

интегрирование производится здесь по объему  $\tau$ . Следует подчеркнуть, что речь идет о вероятности, относящейся к результатам возможных опытов; величина  $|\psi|^2 d\tau$  определяет вероятность того, что электрон был бы найден в элементе объема  $d\tau$  при осуществлении соответствующего опыта.

Число электронов, проходящих за единицу времени через единицу площади, будет определено нами несколько дальше [уравнение (1.18)].

Покажем теперь, как вычисляется волновая функция  $\psi$ , дающая правильное описание поведения пучка электронов в любом данном опыте; метод вычислений будет, конечно, зависеть от характера рассматриваемого опыта. Можно различать два типа опытов: 1) опыты, при которых мы имеем дело со стационарным потоком электронов, например с катодными лучами в хорошо откачанной разрядной трубке, и 2) опыты, при которых интенсивность потока электронов меняется во времени. К опытам второго типа относится исследование поведения электронов в разрядной трубке в первый момент включения тока (см. § 8).

## § 2. Волновая механика стационарных пучков электронов

Рассмотрим прежде всего вопрос о поведении стационарных пучков электронов. В этой главе мы ограничимся формулировкой нерелятивистской теории, справедливой лишь в том случае, когда скорость электронов мала по сравнению со скоростью света. Траектория электронного пучка определяется условиями опыта. Если мы хотим найти эту траекторию, то должны вычислить функцию  $\psi$ ; величина  $|\psi|^2$  будет равна при этом числу электронов в единице объема вблизи данной точки. Таким образом, если условия опыта заданы, то мы должны определить значение  $|\psi|$  в любой точке пространства.

Предположим, например, что пучок электронов, обладающих данной энергией, проходит через щель  $S$  в хорошо откачанный сосуд, где благодаря наличию электрического поля электроны движутся по криволинейным траекториям. Зная условия опыта, мы должны вычислить функцию  $|\psi|^2$ ; если наши правила вычисления  $|\psi|^2$  являются верными, то при этом должно оказаться, что вне области нахождения электронов величина  $|\psi|^2$  обращается в нуль, внутри же этой области она равна наблюдаемой плотности электронов.

Определим прежде всего значения длин волн при данных условиях опыта. С этой целью можно использовать непосредственно экспериментальные данные [1]; изучение диффракции электронов кристаллами показывает, что если электроны приобретают ускорение под действием некоторого заданного электрического поля, то длина  $\lambda$  соответствующих волн определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW}}, \quad (1.1)$$

где  $W$  — кинетическая энергия отдельного электрона. Это же соотношение было получено в 1925 г. Де Бройлем на основании теоретических соображений.

Энергия электрона  $W$  может быть измерена непосредственно, так как  $-W/e$  представляет собой падение потенциала между источником электронов, где они приближенно могут считаться неподвижными, и той точкой, в которой измеряется длина волны. Для рассмотренного выше опыта должно иметь место следующее соотношение:

$$W = W_0 - V(x, y, z),$$

где  $W_0$  — кинетическая энергия электронов при прохождении их через щель  $S$ , а  $V(x, y, z)$  — потенциальная энергия электрона в точке  $(x, y, z)$ , причем  $V = -e\Phi(x, y, z)$ , где  $\Phi$  — электростатическая разность потенциалов между  $S$  и точкой  $(x, y, z)$ . Для опытов такого типа длина волны может быть определена, таким образом, в любой точке пространства. Эти результаты становятся, однако, несправедливыми, если градиент потенциала столь велик, что  $W$  претерпевает заметное изменение на расстоянии порядка длины волны ( $\sim 10^{-8}$  см). С подобного рода полями мы имеем дело только во внутриатомных областях.

Для определения волновой функции нужно знать также так называемые «граничные условия». Последние зависят исключительно от рассматриваемых условий опыта; в описанном выше опыте граничные условия заключаются в задании состояния волны на поверхности щели, т. е. задании длины волны, ее амплитуды и фазы на этой поверхности. Все эти величины, за исключением фазы, определяются условиями опыта; что же касается фазы, то ей может быть приписано любое значение, так как оно не повлияет на величину  $|\psi|$ ; из аналогии с другими типами волновых процессов ясно, что эти условия являются достаточными для определения волны во всех точках пространства.

Для вычисления функции  $\psi$  мы должны знать, далее, волновое уравнение, которому она удовлетворяет. Любая монохроматическая система волн в однородной изотропной среде должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0,$$



где  $\lambda$  — длина волны. Если среда неоднородна, так что  $\lambda$  является функцией положения, то амплитуда волны будет удовлетворять этому уравнению приближенно при условии, что на расстоянии порядка  $\lambda$  изменение  $\lambda$  мало. Подставляя в это уравнение экспериментальное значение  $\lambda$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(W_0 - V)}},$$

получаем волновое уравнение

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W_0 - V) \psi = 0, \quad (1.2)$$

называемое волновым уравнением Шредингера.

Поставленное выше условие, согласно которому на расстоянии порядка  $\lambda$  величина  $\lambda$  не должна претерпевать заметных изменений, может быть записано в виде

$$|\text{grad } V| \lambda \ll W. \quad (1.3)$$

Это неравенство удовлетворяется, очевидно, для всех макроскопических полей. Можно показать, что в этом случае уравнение Шредингера дает для пучка электронов те же результаты, что и механика Ньютона.

Действительно, если пучок волн движется в среде с переменным коэффициентом преломления  $\mu$ , то его траектория криволинейна; радиус кривизны  $R$  в любой точке траектории определяется при этом хорошо известной формулой

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial}{\partial n} \ln \mu.$$

Коэффициент преломления  $\mu$  представляет собой, как известно, отношение длины волны в рассматриваемой точке к длине волны в отсутствие внешних сил; в нашем случае

$$\mu = \sqrt{\frac{W_0}{W_0 - V}}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial V}{\partial n} / 2(W_0 - V). \quad (1.4)$$

Согласно механике Ньютона, произведение массы  $m$  на ускорение  $v^2/R$ , нормальное к траектории электрона, должно, однако, равняться  $-\frac{\partial V}{\partial n}$ , т. е. составляющей внешней силы в нормальном направлении. Подставляя

$$mv^2 = 2(W_0 - V),$$

получаем уравнение (1.4). Как волновая, так и классическая механика в данном случае приводят, таким образом, к одинаковым результатам.

Волновая механика приводит к результатам, отличным от классических только в том случае, когда она применяется для описания движения электронов в сильных полях, существующих внутри атомов. Прежде чем применять уравнение Шредингера (1.2) для решения задач такого рода, мы должны остановиться на рассмотрении двух вопросов. Во-первых, потенциальная энергия электрона  $V(x, y, z)$ , в точке  $(x, y, z)$  в этом случае уже не может быть определена экспериментально. Согласно принципу неопределенности, скорость электрона, наблюдаемого в точке  $(x, y, z)$ , неизвестна; изменение  $V(x, y, z)$  кинетической энергии электрона при его переходе из свободной от сил области пространства в точку  $(x, y, z)$  не является, следовательно, экспериментально наблюдаемой величиной. О смысле функции  $V(x, y, z)$  можно поэтому сказать лишь следующее: если мы подставим эту функцию в уравнение Шредингера, то получим результаты, находящиеся в согласии с опытом. Конечно, если мы хотим описать движение электрона в поле ядра, обладающего зарядом  $E$ , то мы воспользуемся прежде всего кулоновой формой потенциала

$$V(x, y, z) = -\frac{Ee}{r},$$

так как именно в этой форме определяется потенциальная энергия одного макроскопического заряженного тела в поле другого такого тела. Подобный выбор функции  $V(r)$  оправдывается, однако, лишь тем обстоятельством, что он приводит к результатам, согласующимся с опытными данными; априори мы не имеем сведений о том, является ли такая форма потенциала правильной, так как  $V(r)$  не есть величина, измеряемая на опыте<sup>1)</sup>.

Остается теперь выяснить, является ли уравнение (1.2) при любой форме функции  $V$  тем уравнением, с помощью которого может быть описано движение в атомных полях. Мы видели, что это уравнение, так же как и вероятностная интерпретация функции  $\psi$  (при условии, что речь идет о движении электронов в медленно меняющихся полях), основано на опытных данных по диффракции электронов кристаллами. Предположение о возможности применения этого уравнения для исследования законов движения в атомных полях является принципиально новым. Такое предположение можно будет считать оправданным, разумеется, только в том случае, если оно приведет к результатам, находя-

<sup>1)</sup> Авторы дают здесь не вполне четкую формулировку соотношений неопределенностей; правильное изложение этого вопроса читатель может найти в книге Блохинцева «Основы квантовой механики» [5]. (Прим. ред.)

щимся в согласии с опытом. Простейший способ проверки теории — выяснить, обеспечивает ли она выполнение условия сохранения заряда, согласно которому число электронов, попадающих в некоторый замкнутый объем, равняется в среднем числу электронов, покидающих этот объем. В дальнейшем мы убедимся в том, что это условие выполняется (см. § 7).

Волновое уравнение Шредингера является, таким образом, простейшим волновым уравнением, которое: 1) дает длину волны Де Бройля в случае медленно меняющихся полей; 2) обеспечивает сохранение заряда для любых полей.

### § 3. Примеры волновых функций, описывающих стационарные пучки электронов. Бесконечная плоская волна

Бесконечно широкий пучок электронов, движущихся слева направо вдоль оси  $z$ , может быть описан с помощью волновой функции<sup>1)</sup>

$$\psi = A \exp 2\pi i \left( \frac{z}{\lambda} - \nu t \right), \quad (1.5)$$

где  $\lambda$  — длина волны, равная

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW}}$$

( $W$  — кинетическая энергия),  $\nu$  — частота, причем (см. § 8)

$$\nu = \frac{W}{h}.$$

Число электронов в единице объема равно  $AA^*$ , а число электронов, проходящих за единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к оси  $z$ , равно  $AA^*\nu$ , где  $\nu$  определяется соотношением

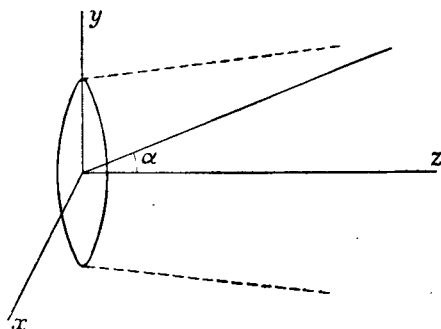
$$\frac{mv^2}{2} = W.$$

### § 4. Пучок электронов в отсутствие внешних сил

Рассмотрим пучок электронов, образующийся в результате прохождения электронов через круглое отверстие радиуса  $a$ , имеющееся в некотором экране. Начало координат выберем в центре отверстия, оси  $x$  и  $y$  расположим в плоскости экрана (фиг. 1). Электроны будут в таком случае двигаться вдоль оси  $z$ . Построим нашу волновую функцию  $\psi$  путем суперпозиции плоских волн

<sup>1)</sup> Часто оказывается удобным опускать временной множитель и записывать волновую функцию в виде  $Ae^{2\pi iz/\lambda}$ .

длиной  $\lambda$ , распространяющихся в направлениях, почти параллельных оси  $z$ , таким образом, чтобы в плоскости  $xu$  она была отлична от нуля лишь в области, занимаемой отверстием. Уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении,



Фиг. 1.

определяемом полярными углами<sup>1)</sup>  $\alpha$  и  $\beta$ , имеет вид

$$A \exp \left[ \frac{2\pi i}{\lambda} (z \cos \alpha + x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta) \right].$$

Отсюда следует, что наша волновая функция  $\psi$  должна иметь форму

$$\psi = \iint A(\alpha, \beta) \exp \left[ \frac{2\pi i}{\lambda} (z \cos \alpha + x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta) \right] d\alpha d\beta, \quad (1.6)$$

причем  $A(\alpha, \beta)$  должно быть выбрано таким образом, чтобы  $\psi$  обращалось в нуль во всех точках плоскости  $xu$ , за исключением области, занимаемой отверстием. Переходя к сферическим координатам  $(r, \theta, \varphi)$ , имеем

$$\psi = \iint A(\alpha, \beta) \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda} r [\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)] \right\} d\alpha d\beta.$$

Из соображений симметрии ясно, что  $A$  зависит только от  $\alpha$ ; выполнив интегрирование по  $\beta$ , получим

$$\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} A(\alpha) d\alpha \exp \left( \frac{2\pi i r}{\lambda} \cos \theta \cos \alpha \right) J_0 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \theta \sin \alpha \right), \quad (1.7)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя.

<sup>1)</sup> Если  $l, m, n$  — направляющие косинусы, то имеем  $l = \sin \alpha \cos \beta$ ,  $m = \sin \alpha \sin \beta$ ,  $n = \cos \alpha$ .

Для нахождения  $A(\alpha)$  предположим, что в плоскости  $xy$ , т. е. при  $\theta = \pi/2$ ,  $\psi$  равно некоторой заданной функции  $f(r)$ ; мы имеем в таком случае

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\pi/2} A(\alpha) J_0\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \sin \alpha\right) d\alpha. \quad (1.8)$$

$A(\alpha)$  может быть определено с помощью этого интегрального уравнения.

Простейшая возможная форма функции  $f(r)$  имеет вид

$$f(r) = B e^{-r^2/a^2}. \quad (1.9)$$

В действительности функция  $f(r)$  должна была бы носить более сложный характер, оставаясь постоянной внутри отверстия (при  $r < a$ ) и спадая некоторым неправильным образом до нуля на его границах. Мы выберем, однако, функцию  $f(r)$  в простейшей форме (1.9), так как в этом случае оказывается возможным точное решение уравнения (1.8). Положим

$$A(\alpha) = C e^{-(\sin \alpha/\sigma)^2} \sin \alpha \cos \alpha,$$

где

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi a}, \quad C \pi \sigma^2 = B.$$

Уравнение (1.8) будет при этом удовлетворяться<sup>1)</sup>, если мы заменим верхний предел интегрирования на  $\infty$ , что возможно, поскольку  $\sigma \ll 1$ .

Остается теперь проинтегрировать выражение (1.7). Так как численное значение интеграла (1.7) определяется в основном малыми значениями  $\alpha$ , можно заменить его интегралом вида

$$\psi = 2\pi C \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2/\sigma^2} \exp\left[\frac{2\pi i r \cos \theta}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2\right)\right] J_0\left(\frac{2\pi r \alpha}{\lambda} \sin \theta\right) \alpha d\alpha,$$

равным

$$\pi C \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\pi i r \cos \theta}{\lambda}\right)^{-1} \exp\left[-\frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\pi i r \cos \theta}{\lambda}\right)^{-1}\right] \exp\left(\frac{3\pi i z}{\lambda}\right). \quad (1.10)$$

<sup>1)</sup> Мы воспользуемся формулой  $\int_0^{\infty} J_0(at) e^{-t^2/\sigma^2} t dt = \frac{1}{2} \sigma^2 e^{-\frac{1}{4} a^2 \sigma^2}$   
(см. книгу Ватсона [2]).

Это выражение и представляет собой искомую волновую функцию. Число частиц в единице объема равно  $|\psi|^2$ ; при больших  $r$  оно стремится к

$$\left(\frac{C\lambda}{r}\right)^2 \exp\left(-\frac{2\sin^2\theta}{\sigma^2}\right).$$

т. е. становится равным

$$|\psi|^2 \sim \left(\frac{\pi B a^2}{\lambda r}\right)^2 \exp\left(-\frac{2\pi^2 a^2 \sin^2\theta}{\lambda^2}\right) \quad (1.11)$$

Тем самым показано, что имеет место диффракция пучка.

### § 5. Одномерные задачи

Предположим, что пучок электронов, аналогичный рассмотренному выше, движется вдоль оси  $z$  и попадает в поле, меняющееся только в направлении этой оси, так что потенциальная энергия электрона  $V$  зависит только от  $z$ . Задача заключается в исследовании движения пучка в таком поле.

При решении задач такого рода зависимость  $\psi$  от  $x$  и  $y$  не является существенной; для удобства вычислений предположим, что падающий пучок обладает бесконечной шириной, так что он может быть описан с помощью бесконечной плоской волны. Полная волновая функция  $\psi$  будет в таком случае зависеть только от  $z$  и будет удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(W - V)\psi = 0; \quad (1.12)$$

здесь  $W$  — значение кинетической энергии отдельного электрона в той точке, где  $V = 0$ .

В качестве примера<sup>1)</sup> рассмотрим пучок электронов, падающий на некоторый потенциальный барьер, т. е. попадающий в поле, для которого

$$V = 0 \quad (z < 0),$$

$$V = U \quad (z > 0).$$

Предположим, что  $U < W$ . Волну, падающую на потенциальный барьер, мы будем описывать функцией вида

$$Ae^{ikz} \quad (z < 0),$$

где

$$k = \frac{2\pi mv}{h} = \frac{2\pi\sqrt{2mW}}{h}.$$

<sup>1)</sup> Вопрос о прохождении электронов через потенциальные барьеры рассмотрен в различных учебниках [3]. Приложение этой теории к электронной эмиссии металлов рассмотрено Нордгеймом [4]. [По этим вопросам см. также [5,6]. (Прим. ред.)]

Эта функция характеризует пучок электронов, движущихся со скоростью  $v$ , в котором за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит  $AA^*v$  электронов. Отраженный пучок может быть задан функцией

$$Be^{-ikz} \quad (z < 0),$$

а прошедший пучок — функцией

$$Ce^{ik'z} \quad (z > 0),$$

где

$$k' = \frac{2\pi mv'}{h} = \frac{2\pi \sqrt{2m(W-U)}}{h}.$$

Полная волновая функция имеет, таким образом, следующий вид:

$$\psi = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (z < 0),$$

$$\psi = Ce^{ik'z} \quad (z > 0).$$

Граничные условия, которым волновая функция должна удовлетворять при  $z = 0$ , заключаются в непрерывности самой функции  $\psi$  и ее производной  $\frac{d\psi}{dz}$ . Мы имеем в связи с этим

$$A + B = C,$$

$$k(A - B) = Ck'.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$B = \frac{A(k - k')}{k + k'},$$

$$C = \frac{2Ak}{k + k'}.$$

В отраженном пучке число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения, равно, таким образом,

$$\frac{AA^*v(k - k')^2}{(k + k')^2},$$

а соответствующее число частиц в прошедшем пучке равно

$$\frac{AA^*v'(2k)^2}{(k + k')^2}.$$

Принимая во внимание, что  $k/k' = v/v'$ , мы видим, что доля отраженных частиц равна

$$\frac{(v - v')^2}{(v + v')^2}.$$

а доля прошедших частиц определяется выражением

$$\frac{4vv'}{(v+v')^2}.$$

Сумма этих двух величин равна единице в соответствии с законом сохранения общего числа электронов. Этот закон представляет собой частный случай более общей закономерности, доказываемой ниже (§ 7).

### § 6. Решение волнового уравнения для электрона, движущегося в медленно меняющемся поле <sup>1)</sup>

Если потенциальная энергия  $V(z)$  не меняется заметным образом на расстоянии порядка длины волны  $h/\sqrt{2m(W-V)}$ , то приближенное решение волнового уравнения может быть получено следующим образом. Запишем

$$\frac{8\pi^2m}{h^2}(W-V) = f(z)$$

и будем предполагать, что в рассматриваемом интервале значений  $z$  функция  $f(z)$  положительна. Уравнение Шредингера приобретает при этом следующий вид:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + f(z)\psi = 0. \quad (1.13)$$

Полагая

$$\psi = Ae^{i\beta} \quad (1.14)$$

и подставляя эту функцию в уравнение (1.13), получаем

$$A'' + 2iA'\beta' + i\beta''A - \beta'^2A + fA = 0, \quad (1.15)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $z$ . Положим, далее,

$$\beta'^2 = f(z).$$

В таком случае

$$\beta = \int^z [f(z)]^{1/2} dz.$$

Если рассматриваемая область значений  $z$  велика по сравнению с длиной волны, то функция  $f$  при этом почти не меняется и значение  $\beta$  в этой области приближенно равно

$$\beta \approx \sqrt{f} \cdot z + \text{const.}$$

<sup>1)</sup> Этот метод разработал Джеффрис [7].



Из формулы (1.14) следует, что  $A$  в такой области в первом приближении остается постоянным и, следовательно,

$$A'' \ll A' \sqrt{f} \ll Af.$$

В уравнение (1.15) можно пренебречь поэтому величиной  $A''$  по сравнению с  $A'\beta'$  ( $A'\beta'$  по сравнению с  $A\beta''$  пренебречь нельзя, так как  $\beta''$ , в свою очередь, мало). Мы получаем в результате

$$2A'\beta' + \beta''A = 0$$

и, следовательно,

$$A = \text{const} [f(z)]^{-1/4}.$$

Наше приближенное решение имеет, таким образом, следующий вид:

$$\psi = [f(z)]^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int^z [f(z)]^{1/2} dz \right\}. \quad (1.16)$$

Число электронов  $N$ , проходящих за единицу времени через единицу площади, равно произведению  $|\psi|^2$  на скорость электронов. Согласно (1.16), имеем

$$|\psi|^2 = [f(z)]^{-1/2},$$

тогда как скорость электронов равна  $\sqrt{2(W-V)/m}$ , т. е. пропорциональна  $[f(z)]^{1/2}$ . Величина  $N$  имеет, таким образом, одно и то же значение при всех значениях  $z$ , как этого и следовало ожидать.

Можно показать аналогичным образом, что если  $f(z)$  отрицательно, то при

$$g(z) = -f(z) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (V - W)$$

приближенное решение волнового уравнения (1.13) имеет вид

$$[g(z)]^{-1/4} \exp \left\{ \mp \int^z [g(z)]^{1/2} dz \right\}.$$

Во многих случаях функция  $f(z)$  имеет такой корень  $z_0$ , что

$$\begin{aligned} f(z) &> 0 & (z > z_0), \\ f(z) &< 0 & (z < z_0). \end{aligned}$$

Нас интересует обычно частное решение уравнения, убывающее по мере уменьшения  $z$  при  $z < z_0$ . Джеффрис [7] показал, что если  $f'(z_0)$  отлично от нуля, то при  $z > z_0$  это решение имеет вид

$$\psi = f^{-1/4} \sin \left\{ \frac{\pi}{4} + \int_{z_0}^z [f(z)]^{1/2} dz \right\}, \quad (1.17)$$

### § 7. Формулы для тока; сохранение заряда

Мы постулировали выше, что величина  $\psi\psi^*$  должна равняться числу электронов в единице объема в электронном пучке, описываемом волновой функцией  $\psi$ , или, точнее, что  $\psi\psi^* d\tau$  равно вероятности нахождения электрона в элементе объема  $d\tau$ . Аналогичные формулы могут быть получены также и для тока, т. е. для числа электронов, проходящих за единицу времени через данную площадь. Точнее, нас интересует определение такого вектора  $\mathbf{j}$ , чтобы во всех точках пространства произведение  $(\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) dt$  давало вероятность того, что за время  $dt$  через элемент поверхности  $d\mathbf{S}$  пройдет один электрон. Искомая формула для  $\mathbf{j}$  имеет вид

$$\mathbf{j} = \frac{h}{4\pi im} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^*). \quad (1.18)$$

Мы покажем, что эта формула правильно определяет вектор  $\mathbf{j}$  во всех тех случаях, когда он может быть измерен на опыте.

Если в некоторой области  $V$  постоянно или же равно нулю и имеется лишь поток электронов, движущихся в направлении  $\mathbf{n}$ , то волновая функция имеет вид

$$\psi = a \exp \left( \frac{2\pi i m v \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{h} \right),$$

а вектор  $\mathbf{j}$ , как это следует из уравнения (1.18), равен  $va^2\mathbf{n}$ .

В общем случае для измерения  $\mathbf{j}$  на пути электронов следовало бы поместить коллектор и измерить заряд, попадающий на него за единицу времени. В результате такого опыта мы измерили бы среднее значение  $\mathbf{j}$  для некоторой области, размеры которой велики по сравнению с длиной волны; это значение  $\mathbf{j}$  является единственной величиной, которая может быть определена путем непосредственного измерения. Если мы предположим, что  $V$  и, следовательно,  $\lambda$  в рассматриваемой области постоянны, то волновая функция будет иметь вид

$$\psi = \sum_s a_s \exp \left( \frac{2\pi i m v \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{r}}{h} \right),$$

где  $\mathbf{n}_s$  — единичный вектор,  $a_s$  — постоянная. Эта волновая функция характеризует суперпозицию электронных пучков. То обстоятельство, что, согласно волновой механике, такие пучки должны интерферировать, не окажет влияния на число электронов, падающих на коллектор, поскольку размеры коллектора велики по сравнению с длиной волны. Если площадь коллектора равна  $A$  и если она перпендикулярна к направлению  $\mathbf{n}$ , то число электронов, падающих на нее за единицу времени, равно

$$vA \sum_s |a_s|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_s. \quad (1.19)$$

Согласно формуле (1.18), это число должно определяться интегралом

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS,$$

взятым по поверхности  $A$ . Как нетрудно видеть, это приводит к формуле (1.19), так как члены вида

$$a_s a_t^* \exp \left[ \frac{2\pi i m v (\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_t) \cdot \mathbf{r}}{h} \right]$$

при усреднении по поверхности, размеры которой велики по сравнению с длиной волны, обращаются в нуль.

Если речь идет об электронных пучках, имеющих различные источники, то  $a_s$  должно быть выбрано в формуле  $a_s e^{i\varphi_s}$ , где  $\varphi_s$  — некоторая произвольная фаза, не имеющая никакого отношения к фазе  $\varphi_t$ . Для получения тока следует усреднить выражение (1.18) по всем значениям  $\varphi_s$  и  $\varphi_t$ ; при этом члены, содержащие произведения различных функций, обратятся в нуль.

Мы будем называть вектор  $\mathbf{j}$  вектором тока, хотя измерено непосредственно может быть только среднее значение  $\mathbf{j}$ .

С помощью волнового уравнения легко показать, что имеет место сохранение заряда, т. е. что среднее число электронов, приходящих в некоторый объем, в случае стационарного пучка равно числу электронов, выходящих из этого объема. Для этого достаточно показать, что  $\text{div } \mathbf{j}$  обращается в нуль. Из уравнения (1.18) следует, что

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{h}{4\pi i m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*).$$

Так как функции  $\psi$  и  $\psi^*$  удовлетворяют уравнению Шредингера, имеем

$$\psi^* \nabla^2 \psi = -\psi^* \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V) \psi.$$

Член  $\psi \nabla^2 \psi^*$  определяется точно таким же выражением. Отсюда следует, что  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ .

Интересно отметить, что процесс поглощения частиц пучка может быть описан путем введения в уравнение Шредингера отрицательного мнимого значения потенциальной энергии. Если скорость поглощения частиц составляет  $\alpha\rho$  на единицу объема в 1 сек, где  $\rho$  — плотность, то в стационарном состоянии

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \alpha\rho = 0. \quad (1.19a)$$

Полагая в (1.12)  $V = V_r - iV_i$ , где  $V_r$  и  $V_i$  — вещественные функции  $r$ , имеем

$$\psi^* \nabla^2 \psi = -\psi^* \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V_r + iV_i) \psi,$$

$$\psi \nabla^2 \psi^* = -\psi \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V_r - iV_i) \psi^*,$$

так что

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{h}{4\pi m i} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = -\frac{4\pi V_i \psi \psi^*}{h}.$$

Сопоставляя это выражение с (1.19a), находим

$$\alpha = \frac{4\pi V_i}{h}.$$

Этот результат будет использован нами в гл. VIII, § 8.

### § 8. Задачи, в которых $|\psi|^2$ меняется с течением времени

Рассмотрим хорошо откачанную разрядную трубку, в которой пучок электронов падает на экран, снабженный отверстием с заслонкой. Предположим, что отверстие внезапно открывается; в таком случае по истечении короткого промежутка времени  $t$  поток электронов, прошедший через отверстие, будет простирается от него на расстояние  $vt$ . Здесь  $v$  — скорость электронов; с энергией электронов  $W$  в ускоряющем поле эта скорость связана соотношением

$$W = \frac{mv^2}{2}.$$

С точки зрения классической механики этот результат тривиален. Однако, согласно нашим основным представлениям, мы могли бы получить такой результат, лишь постулируя наличие некоторой волны и предположив затем, что  $|\psi|^2$  равно числу электронов в единице объема. С волновой точки зрения мы имеем стационарную систему волн, падающих на экран до тех пор, пока отверстие в экране остается закрытым. Когда заслонка открывается, пучок электронов проходит через отверстие; скорость перемещения фронта пучка есть групповая скорость волн.

Групповая скорость любого волнового процесса определяется как  $\frac{d\nu}{dN}$ , где  $\nu$  — частота, а  $N$  — волновое число, равное  $1/\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны). Для того чтобы волновое описание не противоречило опытным фактам (в данном случае — классической теории), эта скорость должна равняться классической скорости электронов  $v$ . Мы имеем, таким образом,

$$\frac{d\nu}{dN} = v.$$

Выражая  $v$  через  $N$ , получаем

$$\frac{d\nu}{dN} = \frac{hN}{m}.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим

$$\nu = \frac{hN^2}{2m} + \text{const} = \frac{W}{h} + \text{const}.$$

Соотношение

$$h\nu = E,$$

где  $E$  — релятивистское значение энергии частицы, (с учетом массы покоя),

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

было получено Де Бройлем [8] на основании соображений, связанных с принципом относительности. Если  $v/c$  мало по сравнению с единицей, то это соотношение сводится к

$$h\nu = mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда может быть определено значение константы  $mc^2$ . Последнее не должно, однако, влиять на результаты эксперимента; в нерелятивистской теории удобно положить эту константу равной нулю.

В общем случае волновое уравнение немонахроматического волнового процесса имеет вид

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 \psi - V\psi. \quad (1.20)$$

Наиболее просто это уравнение может быть получено следующим образом. Волновая функция, описывающая поток электронов, обладающих энергией  $W$ , удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V) \psi = 0. \quad (1.21)$$

Эта волновая функция, как было показано, имеет следующий вид:

$$\psi = f(x, y, z) \exp\left(-\frac{2\pi i W t}{h}\right). \quad (1.22)$$

Искомое уравнение не должно содержать  $W$ ; с помощью (1.22) получаем

$$W\psi = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Из уравнения (1.21) следует, что уравнению (1.20) удовлетворяют волновые функции, описывающие поток электронов, обладающих одной и той же энергией, т. е. волновые функции типа (1.22). Волновую функцию наиболее общего типа мы получим путем суперпозиции таких волновых функций; эта наиболее общая волновая функция будет, таким образом, удовлетворять уравнению (1.20).

С помощью волнового уравнения (1.20) легко может быть получен закон сохранения заряда. Если мы обозначим величину  $\psi\psi^*$  через  $\rho$ , то интеграл  $\int \rho d\tau$ , взятый по какому-либо объему, будет равняться вероятности нахождения электрона в этом объеме. Интеграл  $\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  будет при этом определять вероятность выхода электрона из рассматриваемого объема за единицу времени. Мы должны иметь, таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau + \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.23)$$

Это означает, однако, что должно иметь место соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) легко может быть доказано с помощью волнового уравнения (1.20) и определения вектора тока  $\mathbf{j}$  (1.18) [9].

## § 9. Волновые пакеты

Предположим, что пучок электронов падает на экран, в котором имеется отверстие, первоначально закрытое какой-либо заслонкой; заслонка открывается затем на короткий промежуток времени и снова закрывается. В результате такого опыта электроны будут проходить через отверстие и перемещаться за его пределы. Можно было бы сказать, что при этом перемещается в пространстве область, в которой плотность электронов отлична от нуля. Размеры такой области будут тем меньше, чем меньше время было открыто отверстие в экране.

Для описания этого явления на языке волновой механики мы должны ввести в рассмотрение пакет волн Де Бройля, падающих на экран, а также «волновой пакет» или «волновую группу», проходящую через отверстие в экране. Квадрат амплитуды волновой функции определяет при этом, как обычно, вероятное значение плотности электронов. Волновая группа будет перемещаться в пространстве с групповой скоростью волн Де Бройля; последняя, как мы видели, равна классической скорости соответствующих электронов. В этом случае волновая механика приводит, таким образом, к тем же результатам, что и механика классическая.

Если  $\psi(x, y, z, t)$  — волновая функция в некоторой точке волнового пакета, то число  $n$ , определяемое<sup>1)</sup> интегралом вида (взятым по всему пространству)

$$n = \iiint |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz,$$

представляет собой вероятное число электронов, прошедших через отверстие. Если интенсивность электронного пучка была вначале достаточно малой или если отверстие было открыто в течение очень короткого промежутка времени, это число будет порядка единицы. Следует отметить, что если бы  $n$  действительно равнялось единице, то это не означало бы, конечно, что за единицу времени через отверстие в экране проходит только один электрон. Отсюда лишь следует, что если бы рассматриваемый опыт был повторен очень большое число раз  $p$ , то общее число электронов, прошедших через отверстие, равнялось бы  $pn$ , даже в том случае, если в отдельных опытах число  $n$  принимало значения 0, 1, 2 и т. д.

При рассмотрении волновых пакетов волновую функцию обычно нормируют таким образом, чтобы  $n$  равнялось единице.

Изучение волновых пакетов не может дать нам сведений о результатах опытов; практически во всех опытах мы имеем дело с непрерывным потоком свободных электронов. В связи с тем, что волновые пакеты имеют некоторое, правда, довольно поверхностное, сходство с частицами классической теории, изучение законов их движения дает нам возможность понять основные идеи волновой механики. Так, например, если в каком-либо случае можно показать, что волновой пакет будет двигаться по такой же траектории, как и классическая частица, то можно утверждать, что при решении данной задачи волновая и классическая механики приведут к одним и тем же результатам.

**Одномерное движение волнового пакета в однородной среде.** Для волнового движения любого типа существует определен-

<sup>1)</sup> Величина  $n$  от времени не зависит (см. § 8).

ное соотношение между частотой  $\nu$  и волновым числом  $N$ . Для волн Де Бройля в нерелятивистской теории это соотношение имеет вид

$$\nu = \frac{hN^2}{2m}.$$

Здесь мы будем предполагать, что в общем случае

$$\nu = \nu(N).$$

Волновой процесс наиболее общего типа может быть охарактеризован волновой функцией вида

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} a(N) \exp[2\pi i(Nz - \nu t)] dN,$$

где  $a(N)$  — некоторая произвольная комплексная функция. Этот волновой процесс получается путем суперпозиции бесконечного числа плоских волн с произвольными амплитудами и фазами. Множитель  $a(N)$  может быть при этом выбран таким образом, чтобы в момент времени  $t = 0$  функция  $\psi$  имела любую желаемую форму. Мы предположим, что в момент  $t = 0$  наш волновой пакет характеризуется функцией

$$\psi = C \exp\left(2\pi i N_0 z - \frac{z^2}{\sigma^2}\right). \quad (1.25)$$

Амплитуда колебаний выбрана здесь в виде функции Гаусса, так как в этом случае интегрирование может быть осуществлено с помощью известных функций. В начальный момент времени волновой пакет находится, таким образом, вблизи начала координат, обладая при этом волновым числом  $N_0$  и шириной порядка  $2\sigma$ . Легко видеть (в дальнейшем это будет доказано), что

$$a(N) = C \sqrt{\pi\sigma} \exp\left[-(N - N_0)^2 \pi^2 \sigma^2\right]. \quad (1.26)$$

Для определения формы волнового пакета в любой последующий момент времени мы должны вычислить интеграл

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} C \sqrt{\pi\sigma} \exp\left[2\pi i(Nz - \nu t) - (N - N_0)^2 \pi^2 \sigma^2\right] dN. \quad (1.27)$$

Разложим частоту  $\nu$  в ряд Тейлора:

$$\nu = \nu_0 + (N - N_0) \nu'_0 + \frac{1}{2} (N - N_0)^2 \nu''_0 + \dots,$$

где  $\nu_0$ ,  $\nu'_0$  и т. д. — значения  $\nu$  и ее производных по  $N$  при  $N = N_0$ . Если предположим, что  $\sigma \gg \lambda$ , то ясно, что численное значение интеграла (1.27) будет в основном определяться значениями  $N$ , близкими к  $N_0$ ; в разложении  $\nu$  можно будет поэтому пренебречь членами порядка  $(N - N_0)^3$  и выше. Отметим, что для волн



Де Бройля в нерелятивистской теории такое приближение будет точным, так как  $\nu$  является в этом случае квадратичной функцией  $N$ .

Полагая

$$N - N_0 = \zeta,$$

получаем

$$\psi = C \sqrt{\pi \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a\zeta^2 + 2b\zeta + c) d\zeta,$$

где

$$a = \pi^2 \sigma^2 + \pi i \nu_0' t, \quad b = -\pi i (\nu_0' t - z), \quad c = 2\pi i (N_0 z - \nu_0 t).$$

Подинтегральная функция может быть записана в форме

$$\exp\left[-a\left(\zeta - \frac{b}{a}\right)^2 + c + \frac{b^2}{a}\right].$$

Полагая  $\zeta - b/a = \eta$ , имеем

$$\psi = C \sqrt{\pi \sigma} \exp\left(c + \frac{b^2}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\eta^2} d\eta = C \pi \sigma a^{-1/2} \exp\left(c + \frac{b^2}{a}\right).$$

Подставляя значения  $a$ ,  $b$  и  $c$ , получаем окончательно

$$\psi = C \left(1 + \frac{i\nu_0' t}{\pi \sigma^2}\right)^{-1/2} \exp\left[2\pi i (N_0 z - \nu_0 t) - \frac{(\nu_0' t - z)^2}{\sigma^2 + \frac{i\nu_0' t}{\pi}}\right].$$

В момент времени  $t=0$  волновой пакет характеризуется волновой функцией (1.25), как этого и следовало ожидать. В момент времени  $t$  центр волнового пакета находится в точке

$$z = \nu_0' t.$$

Скорость перемещения волнового пакета равна, таким образом, групповой скорости  $\frac{d\nu}{dN}$ . Весьма существенным свойством волнового пакета является его способность расплываться с течением времени. Рассматривая только экспоненциальный множитель функции  $\psi$ , мы получаем следующее значение ее амплитуды  $|\psi|$ :

$$\exp\left[-\frac{\sigma^2 (\nu_0' t - z)^2}{\sigma^4 + \left(\frac{\nu_0' t}{\pi}\right)^2}\right].$$

При больших значениях  $t$  ширина волнового пакета будет, таким образом, порядка

$$\frac{2\nu_0' t}{\pi \sigma}.$$

Отсюда следует, что по мере своего перемещения волновой пакет расплывается, причем скорость увеличения его размеров равна

$$\frac{d^2 v}{dN^2} \frac{2}{\pi c}.$$

Если речь идет о волнах Де Бройля<sup>1)</sup>, то в нерелятивистской теории

$$\frac{dv}{dN} = \frac{hN}{m} = v \quad \text{и} \quad \frac{d^2 v}{dN^2} = \frac{h}{m}.$$

Волновая функция  $\psi$  равна при этом

$$\psi = C \left( 1 + \frac{iht}{\pi mc^2} \right)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(vt-z)^2}{c^2 + \frac{iht}{\pi m}} - 2\pi i \left( \frac{mv^2 t}{2h} - \frac{mvz}{h} \right) \right].$$

Одно из наиболее существенных свойств волновых пакетов заключается в том, что если волновой пакет перемещается в каком-либо электрическом или магнитном поле, напряженность которого не меняется заметным образом на расстоянии, сравнимом с размерами самого пакета, то он движется при этом по классической траектории. Доказательство этого утверждения приведено в различных учебниках [3, 11].

### ЛИТЕРАТУРА<sup>2)</sup>

1. Thomson, The Wave Mechanics of Free Electrons.
2. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., 1949.
3. Френкель, Волновая механика, ч. I, М.—Л., 1934; Mott and Sneddon, Wave Mechanics and its Application; Condon and Morse, Quantum Mechanics; Condon, Rev. Mod. Phys., 3, 43 (1931).
4. Nordheim, Phys. Zs., 30, 177 (1929).
- 5\*. Блохинцев, Квантовая механика, М.—Л., 1949; Ландау и Лифшиц, Квантовая механика, М.—Л., 1949.
- 6\*. Херинг и Никольс, Термоэлектронная эмиссия, М., 1950.
7. Jeffreys G., Proc. Lond. Math. Soc., 23, ч. 6 (1925).
8. De Broglie, Ann. de phys., 10, 22 (1925).
9. Зоммерфельд, Волновая механика, М.—Л., 1933.
10. Darwin, Proc. Roy. Soc., A117, 258 (1927).
11. Dirac, Quantum Mechanics; 3-е изд., Oxford, 1947; Debye, Phys. Zs., 28, 170 (1927); Ehrenfest, Zs. f. Phys., 45, 455 (1927); Ruark, Phys. Rev., 32, 1133 (1928).

<sup>1)</sup> Волновые пакеты, построенные из волн Де Бройля, были исследованы различными авторами. Дарвин [10] определил волновую функцию, описывающую движение трехмерного волнового пакета в отсутствие внешних сил, а также исследовал волновой пакет, отвечающий электроиону, движущемуся под действием некоторой постоянной электрической силы и постоянного магнитного поля. Волновые пакеты были рассмотрены также и другими авторами [3]. [См. также [5]. (Прим. ред.)]

<sup>2)</sup> Литература, отмеченная звездочкой здесь и в последующих главах, добавлена редактором перевода.

## Глава II

# ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ПУЧКА ЧАСТИЦ СИЛОВЫМ ЦЕНТРОМ

### § 1. Вычисление интенсивности рассеяния

Задача о столкновении электрона с атомом относится к задачам «многих тел» и, как таковая, будет исследована нами в гл. VIII. В настоящей главе мы рассмотрим вопрос о рассеянии потока заряженных частиц малой сферически-симметричной областью, в которой потенциальная энергия частиц отлична от нуля; эту область мы будем называть «атомом», а потенциальную энергию частицы на расстоянии  $r$  от ядра атома будем обозначать через  $V(r)$ . В гл. VIII показано, что упругое рассеяние электронов атомами в известном приближении, действительно, может быть описано таким способом, а также приведены методы вычисления  $V(r)$ .

В опытах по изучению рассеяния пучка частиц измеряют обычно число рассеянных частиц, падающих в единицу времени на элемент поверхности  $ds$ , находящийся на расстоянии  $r$  от рассеивающих атомов. Для удобства вычислений предположим, что имеется только один рассеивающий атом. Число частиц, падающих на площадку  $dS$ , будет при этом прямо пропорционально площади  $dS$  и обратно пропорционально квадрату расстояния  $r$ . Это значит, что число таких частиц пропорционально телесному углу  $d\omega$ , под которым площадка  $dS$  видна из центра атома. Частицы, падающие на  $dS$ , мы будем называть частицами, рассеянными на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\omega$ .

Количество частиц, рассеянных внутри телесного угла  $d\omega$ , пропорционально также плотности тока в падающем пучке. Предположим, что в падающем пучке за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит  $N$  частиц. Положим далее, что число частиц, рассеянных в единицу времени на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\omega$ , равно

$$NI(\theta)d\omega.$$

Мы должны вычислить  $I(\theta)$ . Величина  $I(\theta)d\omega$  имеет размерность площади; мы будем называть ее эффективным сечением для рассеяния внутри телесного угла  $d\omega$  или дифференциальным сечением.

Под заряженными частицами мы будем подразумевать в дальнейшем электроны, хотя излагаемые здесь соображения справедливы

дивы в одинаковой степени для заряженных частиц любого рода.

Обозначим через  $(x, y, z)$  декартовы координаты электрона в некоторый момент времени  $t$ , через  $(r, \theta, \varphi)$  — его сферические координаты и выберем ось  $z$  за ось отсчета угла  $\theta$ <sup>1)</sup>. Предположим, что атом находится в начале координат, а потенциальная энергия электрона на расстоянии  $r$  от начала координат равна  $V(r)$ . В этой главе мы примем, что  $V(r)$  стремится к нулю быстрее, нежели  $1/r$ ; случай рассеяния кулоновым полем будет рассмотрен в гл. III. Предположим, что поток электронов движется слева направо вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ . Будем описывать этот поток электронов плоской волной  $e^{ikz}$ , где  $k = 2\pi mv/h$ . Эта волна характеризует поток с плотностью в один электрон на единицу объема и, следовательно, поток  $v$  электронов, проходящий в единицу времени через единицу площади поперечного сечения.

Волна будет рассеиваться атомом; амплитуду рассеянной волны в точке  $(r, \theta, \varphi)$  представим в виде

$$r^{-1} f(\theta) e^{ikr}.$$

Наша задача сводится к определению функции  $f(\theta)$ . Зная эту функцию, мы сможем подсчитать число электронов, рассеянных за единицу времени внутри данного телесного угла. Число рассеянных электронов, проходящих за единицу времени через элемент поверхности  $dS$  в точке  $(r, \theta, \varphi)$ , равно  $vr^{-2} dS |f(\theta)|^2$ ; если в падающем пучке за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит только один электрон, то число электронов  $I(\theta) d\omega$ , рассеянных за единицу времени внутри данного телесного угла  $d\omega$ , равно  $|f(\theta)|^2 d\omega$ . Мы имеем, таким образом,

$$I(\theta) = |f(\theta)|^2.$$

Число электронов, рассеянных в интервале между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , равно

$$|f(\theta)|^2 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Наша задача заключается в отыскании такого решения  $\psi$  волнового уравнения, которое на больших расстояниях от атома характеризовало бы падающую и рассеянную волны. Это значит, что при больших  $r$  мы должны иметь

$$\psi \sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} f(\theta). \quad (2.1)$$

<sup>1)</sup>  $r \cos \theta = z, \quad r \sin \theta e^{i\varphi} = x + iy.$

Волновое уравнение, которому удовлетворяет функция  $\psi$  (уравнение Шредингера), может быть записано в виде

$$\nabla^2 \psi + [k^2 - U(r)] \psi = 0, \quad (2.2)$$

где

$$k = \frac{2\pi mv}{h}, \quad U(r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(r).$$

Плоская волна  $e^{ikr}$  является решением уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.3)$$

Это уравнение может быть решено также в сферических координатах; легко убедиться в том, что функция

$$\psi = P_n(\cos \theta) f_n(r)$$

является его решением, если  $f_n$  есть решение уравнения

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) f = 0, \quad (2.4)$$

а  $P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка [1]. Решение уравнения (2.1) может быть представлено в виде ряда; при этом имеются два решения, одно из которых начинается с члена  $r^n$ , другое — с члена  $r^{-n-1}$ ; оба эти решения могут быть выражены через функции Бесселя [см. формулу (2.9)]. Обозначим через  $f_n(r)$  решение уравнения (2.4), конечное в точке  $r=0$ . Функция  $f_n(r)$  известна, таким образом, с точностью до произвольного постоянного множителя.

Если  $A_n$  — произвольные постоянные, то выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) f_n(r) \quad (2.5)$$

является решением уравнения (2.3); мы знаем, что оно является наиболее общим решением этого уравнения, обладающим осевой симметрией (т. е. не содержащим  $\varphi$ ) и конечным в начале координат. Отсюда следует, что функция  $e^{ikz}$  может быть представлена в виде

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) f_n(r)$$

Для определения  $A_n$  умножим обе части этого равенства на  $P_n(\cos \theta) \sin \theta$  и проинтегрируем его от 0 до  $\pi$ . Полагая  $\cos \theta = t$ , получим

$$\frac{2}{2n+1} A_n f_n(r) = \int_{-1}^1 e^{ikrt} P_n(t) dt, \quad (2.6)$$

где  $f_n$  известно с точностью до произвольного постоянного коэффициента, от которого зависит также и коэффициент  $A_n$ . Функция  $f_n$  может быть определена точно с помощью ее асимптотического разложения при больших  $r$ . Интегрируя правую часть равенства (2.6) по частям, получаем

$$\frac{1}{ikr} [e^{ikrt} P_n(t)]_{t=-1}^{t=+1} - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^{+1} e^{ikrt} P_n'(t) dt.$$

Второй член этого выражения — величина порядка  $1/r^2$ ; при больших  $r$ , таким образом, имеем

$$\frac{2}{2n+1} A_n f_n(r) \sim \frac{1}{ikr} [e^{ikrt} P_n(t)]_{t=-1}^{t=+1}.$$

Поскольку  $P_n(1) = 1$ , а  $P_n(-1) = (-1)^n$ , правая часть этого соотношения равна

$$2i^n (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} n\pi\right).$$

Определим теперь функцию  $f_n$  полностью, потребовав, чтобы она была решением уравнения (2.4), имеющим асимптотическую форму

$$f_n(r) \sim (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} n\pi\right). \quad (2.7)$$

В таком случае  $A_n$  равно  $(2n+1)i^n$  и, следовательно, ряд

$$e^{ikz} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos\theta) f_n(r) \quad (2.8)$$

представляет собой искомое разложение. Приведем также соотношения, связывающие функции  $f_n$  с функциями Бесселя:

$$f_0(r) = \frac{\sin kr}{kr},$$

$$f_n(r) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr). \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь волновое уравнение (2.2) для электрона, находящегося в поле атома. Как и прежде, общее решение уравнения (2.2), обладающее осевой симметрией, имеет вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) L_n(r), \quad (2.10)$$

где  $A_n$  — произвольные постоянные, а  $L_n$  — решение уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dL}{dr} \right) + \left( k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) L = 0. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) попрежнему имеет два независимых решения<sup>1)</sup>, одно из них конечно в начале координат, другое — бесконечно. Мы выберем постоянные  $A_n$  таким образом, чтобы функция (2.10) характеризовала падающую и рассеянную волны, т. е. чтобы она имела асимптотическую форму (2.1). Наша волновая функция должна оставаться конечной во всех точках пространства; мы должны поэтому выбрать то из решений  $L_n$  уравнения (2.11), которое имеет конечное значение в начале координат.  $L_n(r)$  определено тем самым с точностью до произвольного постоянного коэффициента.

Если мы положим

$$L_n(r) = r^{-1} G(r),$$

то уравнение (2.11) примет вид

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \left[ k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = 0. \quad (2.12)$$

При больших  $r$  последние два члена этого уравнения стремятся к нулю; можно поэтому ожидать, что любое решение  $G$  имеет асимптотический вид

$$G \sim A \sin(kr + \varepsilon), \quad (2.13)$$

где  $A$  и  $\varepsilon$  — некоторые постоянные.

Для того чтобы выяснить так ли это, положим

$$G = u(r) e^{ikr}.$$

Подставив это значение  $G$  в уравнение (2.12), получим

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + 2ik \frac{du}{dr} - \left[ U + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] u = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку при больших  $r$  величина  $u$  почти постоянна, можно предположить, что

$$\frac{d^2 u}{dr^2} \ll k \frac{du}{dr}.$$

Пренебрегая в связи с этим первым членом уравнения (2.14) и интегрируя, получаем

$$2ik \ln u = \int^r \left[ U(r) + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] dr.$$

При больших  $r$  правая часть этого равенства стремится к постоянному пределу только в том случае, если при  $r \rightarrow \infty$   $U(r)$  стремится

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, что если  $U(r)$  обладает в начале координат полюсом, то его порядок не выше  $r^{-1}$ . (См. § 3.)

к нулю быстрее, нежели  $1/r$ . Для полей, убывающих с расстоянием быстрее, нежели кулоново поле, функция  $G$ , действительно, имеет асимптотическую форму (2.13). Случай кулонова поля будет рассмотрен в гл. III.

Частное решение уравнения (2.11), конечное в начале координат, будет иметь асимптотическую форму

$$Cr^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n\right),$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а  $\eta_n$  — некоторая постоянная<sup>1)</sup>, зависящая от  $k$  и от  $U(r)$ ; в общем случае  $\eta_n$  может быть найдено только путем численного интегрирования (см. § 3). Для отыскания произвольной постоянной  $C$  мы определим  $L_n(r)$  как такое частное решение уравнения (2.11), которое имеет асимптотическую форму

$$(kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n\right). \quad (2.15)$$

Найдем теперь постоянные  $A_n$  в разложении (2.10). Если мы вычтем из (2.10) выражение (2.8), характеризующее падающую плоскую волну, то получим выражение для рассеянной волны. Коэффициенты  $A_n$  должны быть выбраны таким образом, чтобы последнее действительно характеризовало рассеянную волну, т. е. так, чтобы асимптотическое разложение не содержало членов типа  $r^{-1}e^{-ikr}$ . При больших  $n$  мы должны поэтому иметь для любых  $r$

$$A_n L_n(r) - (2n+1) i^n f_n(r) \sim C_n r^{-1} e^{ikr},$$

где  $C_n$  — некоторая постоянная. Подставляя асимптотические значения  $L_n$  и  $f_n$ , получаем в левой части равенства выражение

$$\frac{e^{ikr}}{2ikr} [A_n e^{i\eta_n} - (2n+1) i^n] - \frac{e^{-ikr}}{2ikr} [A_n e^{-i\eta_n} - (2n+1) i^n],$$

где

$$kr = kr - \frac{1}{2} n\pi.$$

Выбирая  $A_n$  так, чтобы второй член этого выражения обращался в нуль, находим

$$A_n = (2n+1) i^n e^{i\eta_n}.$$

Волновая функция, характеризующая падающую и рассеянную

<sup>1)</sup> Член  $-\frac{1}{2}n\pi$  добавлен для того, чтобы при  $U(r)=0$   $\eta_n$  обращалось в нуль.



волны, имеет, таким образом, вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n e^{i\eta_n} L_n(r) P_n(\cos \theta). \quad (2.16)$$

Асимптотическая форма функции, описывающей рассеянную волну, имеет вид

$$r^{-1} e^{ikr} f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [e^{2i\eta_n} - 1] P_n(\cos \theta). \quad (2.17)$$

Это выражение определяет амплитуду рассеянной волны. Следует отметить, что функция  $f(\theta)$  комплексна; интенсивность рассеяния  $I(\theta)$  определяется квадратом ее модуля, т. е. суммой  $A^2 + B^2$ , где

$$A = \frac{1}{2k} \sum (2n+1) [\cos 2\eta_n - 1] P_n,$$

$$B = \frac{1}{2k} \sum (2n+1) \sin 2\eta_n P_n.$$

В общем случае эти ряды сходятся (см. § 2). Только в одном случае — для рассеяния кулоновым полем — ряд (2.17) может быть просуммирован с помощью известных функций (подробнее см. в гл. III). Мы находим при этом, что интенсивность рассеяния имеет то же значение, что и в классической теории. Однако для других исследованных силовых полей результаты оказываются иными.

Полное сечение  $Q$  для упругого столкновения атома с электронами данной скорости определяется как общее число электронов, упруго рассеянных атомом за единицу времени из падающего пучка, интенсивность которого равна единице (т. е. такого пучка, в котором за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит один электрон). Практически измеряется обычно число электронов, рассеянных на угол, превышающий некоторый малый угол  $\theta_0$ ; поскольку, однако, для атомных полей функция  $f(\theta)$  при  $\theta = 0$  конечна,  $Q$  весьма нечувствительно к изменениям  $\theta_0$ , и  $\theta_0$  можно поэтому положить равным нулю (см. гл. X, § 2).  $Q$  определяется, таким образом, формулой вида

$$Q = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta.$$

Это дает

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin^2 \eta_n. \quad (2.18)$$

Излагаемый метод впервые был использован Рэлеем [2]. К задаче о рассеянии электронов атомами он был применен Факсеном и Хольцмарком [3].

## § 2. Соотношение между фазами $\eta_n$ и моментом количества движения рассеянной частицы

Фазы  $\eta_n$ , входящие в выражение (2.17) для амплитуды рассеянной волны, определяются следующим образом. Обозначим через  $G_n(r)$  частное решение уравнения

$$G'' + \left[ k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = 0 \quad (2.19)$$

(штрихи означают здесь дифференцирование по  $r$ ). При больших значениях  $r$  величина  $G$  будет иметь асимптотическую форму:

$$G \sim \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n \right).$$

Это выражение и определяет  $\eta_n$ .

Если при больших  $r$  величина  $U(r)$  экспоненциально убывает до нуля, то можно оценить величину  $\eta_n$  при достаточно большом  $n$  и тем самым число членов, которое необходимо учитывать при вычислении ряда (2.17), определяющего функцию  $f(\theta)$ . Аналогичным способом может быть проверена также и сходимость этого ряда.

Обозначим

$$F(r) = k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}. \quad (2.20)$$

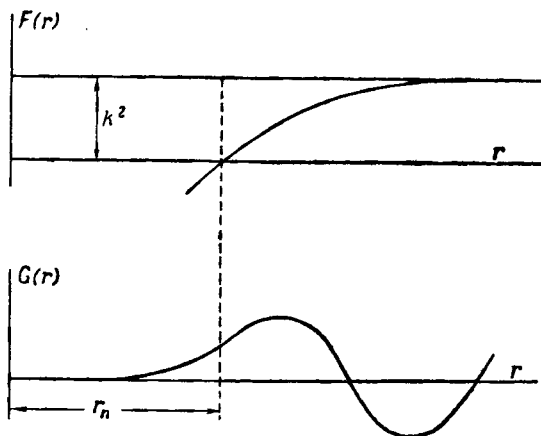
Если  $U(r)$  не обладает полюсом более высокого порядка нежели  $r^{-1}$ , то функция  $F(r)$  при малых  $r$  отрицательна, а при больших  $r$  положительна; она обращается, таким образом, в нуль по крайней мере в одной точке. Для простоты предположим, что  $F(r)$  имеет только один корень; обозначим его через  $r_n$ .

Решение уравнения (2.19) при малых  $r$  будет вести себя, как  $A r^{n+1}$ , где  $A$  — некоторая постоянная, которую мы будем считать положительной. Таким образом, при малых  $r$  как  $G$ , так и  $G'$  положительны; из уравнения (2.19) следует, что  $G''$  при этом также положительно. При возрастании  $r$  функция  $G$  не может убывать до тех пор, пока  $G'$  не изменит своего знака; последнее может, однако, иметь место лишь при значении  $r$ ,

превышающем первый корень функции  $G''$ . Поскольку  $G$  возрастает и, следовательно, положительно вплоть до первого корня функции  $G''$ , из уравнения (2.19) следует, что этот корень соответствует точке  $r_n$ . Функция  $G$  возрастает (экспоненциально) вплоть до точки  $r = r_n$ . Аналогичный результат имеет место в случае отрицательного значения  $A$ .

При  $r > r_n$  функция  $G$  носит колебательный характер, как это показано на фиг. 2.

Найдем теперь классическое значение наименьшего расстояния между электроном с энергией  $E$  и атомом при условии, что



Фиг. 2.

момент количества движения электрона относительно ядра атома равен  $I$ . Величина  $I$  представляет собой произведение начального значения импульса электрона на «параметр столкновения»  $p^1$ ). Если  $v$  — скорость электрона в точке его наибольшего сближения с атомом, то

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = E,$$

а согласно принципу сохранения момента количества движения и поскольку радиальная скорость электрона в точке наибольшего сближения равна нулю,

$$mvr = I.$$

Исключая  $v$ , получаем уравнение для определения  $r$ :

$$E - V(r) - \frac{I^2}{2mr^2} = 0. \quad (2.21)$$

<sup>1</sup>) «Параметром столкновения» называется расстояние между прямой, вдоль которой частица двигалась первоначально, и центром рассеивающего поля.

Если мы положим

$$I = \frac{\hbar [n(n+1)]^{1/2}}{2\pi}, \quad (2.22)$$

то уравнение (2.21) сведется к уравнению

$$F(r) = 0,$$

где  $F(r)$  определяется выражением (2.20). Корень  $r_n$  функции  $F(r)$  представляет собой, таким образом, то расстояние, на которое частица с моментом количества движения (2.22) приблизилась бы к атому согласно классической теории.

Мы уже видели, что при  $r \ll r_n$  величина  $|G_n(r)|$  очень мала. Докажем теперь, что если  $n$  столь велико, что частица с моментом количества движения  $I$ , определяемым выражением (2.22), не может проникнуть внутрь атома (согласно классической теории), то соответствующая фаза  $\eta_n$  очень мала. Мы должны показать, что если  $V(r_n)$  очень мало при значениях  $n$ , превышающих некоторую определенную величину, то  $\eta_n$  при этих значениях  $n$  также очень мало. Отметим, что если  $V(r_n)$  очень мало, то  $r_n$  приближенно может быть определено, как корень выражения

$$k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}.$$

Пусть  $g_n(r)$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \left\{ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} g = 0, \quad (2.23)$$

конечное в начале координат, причем произвольный постоянный коэффициент выбран таким образом, что при больших  $r$

$$g_n \sim \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi\right).$$

Функция  $g_n$  в этом случае имеет вид [см. уравнение (2.9)]

$$\left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{1/2} I_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Из приведенных выше соображений следует, что при  $r < r_n$  функция  $g_n$  по мере уменьшения  $r$  убывает экспоненциально. По своей форме она сходна с функцией  $G$ , ход которой изображен на фиг. 2.

Решим теперь волновое уравнение (2.19) с помощью метода теории возмущений. Положим

$$G_n = g_n + \Phi$$

и будем считать, что произведением  $\Phi U$  можно пренебречь. Подставив  $G_n$  в уравнение (2.19), получим уравнение для опреде-

ления  $\Phi$ :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left\{ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} \Phi = U(r) g_n(r). \quad (2.24)$$

Пусть

$$\Phi = g_n(r) \zeta(r).$$

Подставив это значение  $\Phi$  в уравнение (2.24), получим

$$\zeta'' g_n + 2\zeta' g_n' = U(r) g_n(r).$$

Умножая это уравнение на  $g(r)$  и интегрируя, имеем

$$\zeta' g^2 = \int^r U(r) [g(r)]^2 dr.$$

Поскольку при  $r=0$  функция  $\zeta'$  должна быть конечной, а  $g(r)$  при малых  $r$  будет вести себя, как  $r^{n+1}$ , нижний предел этого интеграла должен равняться нулю. Мы видим, таким образом, что

$$\frac{d\zeta}{dr} = [g(r)]^{-2} \int_0^r U(r) [g(r)]^2 dr.$$

При больших  $r$  имеем

$$\frac{d\zeta}{dr} \sim \operatorname{cosec}^2 \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right) \int_0^\infty U(r) [g(r)]^2 dr, \quad (2.25)$$

так как интеграл, стоящий в правой части равенства, сходится. Обозначим через  $A_n$  интеграл

$$\int_0^\infty U(r) [g_n(r)]^2 dr.$$

Мы предположили, что при рассматриваемых значениях  $n$  функция  $U(r)$  мала при  $r > r_n$ ; мы знаем также, что  $g_n$  мало при  $r < r_n$ . Численное значение интеграла  $A_n$  должно быть поэтому малым.

Проинтегрировав выражение (2.25), получим

$$\zeta \sim \left[ \operatorname{ctg} \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right) + \alpha \right] \frac{A_n}{k},$$

где  $\alpha$  — постоянная. Отсюда следует, что

$$G_n \sim \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right) - \left[ \cos \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right) + \alpha \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right) \right] \frac{A_n}{k},$$

Пренебрегая членами второго порядка относительно  $\eta_n$ , имеем

$$G_n \sim \text{const} \cdot \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n\right), \quad (2.26)$$

где

$$\eta_n = -\frac{A_n}{k}.$$

Отсюда окончательно

$$\eta_n = -\frac{1}{2}\pi \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int_0^\infty V(r) [J_{n+\frac{1}{2}}(kr)]^2 r dr. \quad (2.27)$$

Это соотношение справедливо, если его правая часть мала; оно свидетельствует о том, что при рассматриваемых условиях  $\eta_n$  мало.

Поскольку формула (2.27) справедлива при больших значениях  $n$ , ею можно воспользоваться для исследования сходимости ряда (2.17), определяющего амплитуду рассеянной волны. Этот ряд сходится, если сходится выражение

$$\sum \eta_n P_n(\cos \theta) (2n+1).$$

Если  $\eta_n \ll 1$  для любых  $n$ , то формулой (2.27) можно пользоваться при всех значениях  $n$ . Амплитуда рассеянной волны в этом случае равна

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \eta_n P_n(\cos \theta). \quad (2.28)$$

Выполнив суммирование, мы получим хорошо известную формулу Борна (см. гл. VII, § 2).

### § 3. Рассеяние потенциальной ямой

В этом параграфе мы проиллюстрируем теорию на важном примере рассеяния частицы потенциальной ямой. Потенциал частицы в рассеивающем поле мы определим следующим образом:

$$\begin{aligned} V(r) &= -D & (r < a), \\ V(r) &= 0 & (r > a), \end{aligned}$$

где  $D$  — некоторая положительная постоянная. Этот простой случай весьма сходен с общим случаем рассеяния полем притяжения в том смысле, что при больших значениях  $r$  потенциал убывает здесь также быстрее, нежели  $r^{-2}$ . Мы можем поэтому исследовать этот случай в качестве примера для иллюстрации изложенной выше теории.

1. **Предельное значение сечения при малых скоростях.** Предположим сперва, что длина волны  $\lambda$  значительно превышает  $a$ , так что всеми фазами  $\eta_n$ , за исключением первой из них  $\eta_0$ , можно пренебречь. (Отметим, что для частицы, момент количества движения которой равен одному кванту, расстояние наибольшего сближения равно  $\lambda/2\pi$ , если эта частица не проникает в потенциальную яму.) Для определения  $\eta_0$  следует найти асимптотическую форму решения уравнения

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - V) G = 0,$$

обращающуюся в нуль в начале координат (так как функция  $r^{-1}G$  должна быть конечной). Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} A \sin k'r & \quad (r < a), \\ \sin(kr + \eta_0) & \quad (r > a), \end{aligned}$$

где

$$k^2 = \frac{8\pi^2mE}{h^2}, \quad k'^2 = k^2 + k_0^2, \quad k_0^2 = \frac{8\pi^2mD}{h^2}.$$

Постоянные  $A$  и  $\eta_0$  должны быть выбраны таким образом, чтобы  $G$  и  $\frac{dG}{dr}$  оставались непрерывными при  $r = a$ , т. е. так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\begin{aligned} A \sin k'a &= \sin(ka + \eta_0), \\ Ak' \cos k'a &= k \cos(ka + \eta_0). \end{aligned}$$

Эти уравнения дают

$$\eta_0 = \arctg\left(\frac{k}{k'} \operatorname{tg} k'a\right) - ka. \quad (2.29)$$

На фиг. 3 волновая функция  $G$  показана сплошной линией; пунктирная кривая характеризует ход функции

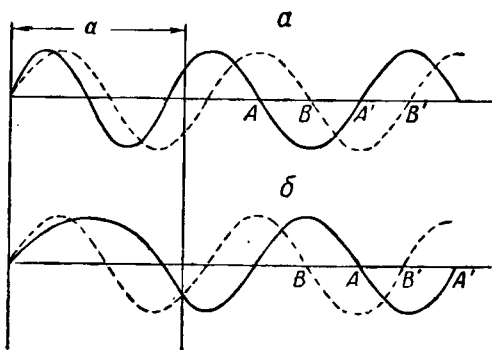
$$G = \sin kr.$$

Фаза  $\eta_0$  определяется расстоянием  $AB$  или  $A'B'$ , умноженным на  $k$ . Из фиг. 3 следует, что в случае поля притяжения  $\eta_0$  положительно; однако, как будет показано ниже, в случае поля сил отталкивания  $\eta_0$  отрицательно.

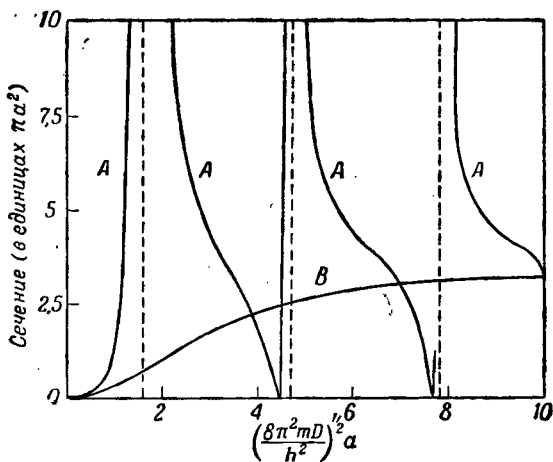
По мере уменьшения скорости частиц до нуля,  $\eta_0$  в общем случае также стремится к нулю, как это следует из формулы (2.29). Интенсивность рассеяния, равная  $4\pi \sin^2 \eta_0/k^2$ , стремится в этом случае к конечному пределу

$$4\pi a^2 \left(\frac{\operatorname{tg} k_0 a}{k_0 a} - 1\right)^2. \quad (2.30)$$

Существуют, однако, особые случаи. Если  $k_0 a = \text{tg } k_0 a$ , то выражение (2.30) обращается в нуль; с другой стороны, если  $k_0 a$  является нечетным кратным  $\frac{1}{2} \pi$ , фаза  $\gamma_0$  уже не стремится к нулю



Фиг. 3. *a* — поле притяжения; *b* — поле отталкивания.



Фиг. 4. Предельное значение сечения при малых скоростях как функция напряженности поля. *A* — для сферических ям глубины *D* и радиуса *a*; *B* — для сферических потенциальных барьеров высоты *D* и радиуса *a*.

при  $k \rightarrow 0$ , и сечение стремится к бесконечности. Исследуя предельное значение эффективного сечения для рассеяния потенциальной ямой при малых скоростях как функцию  $k_0$ , т. е. как функцию квадратного корня из численного значения глубины ямы, мы получаем кривую, изображенную на фиг. 4.



Такой характер изменения предельного значения сечения при малых скоростях может быть сопоставлен с распределением внутри ямы возможных энергетических уровней с моментом количества движения, равным нулю. Для того чтобы мог существовать некоторый энергетический уровень с энергией  $-E_1$ , должны иметь место уравнения

$$A \sin k''a = e^{-\chi a},$$

$$Ak'' \cos k''a = -\chi e^{-\chi a},$$

где

$$\chi^2 = \frac{8\pi^2 m E_1}{h^2}, \quad (k'')^2 = k_0^2 - \chi^2.$$

Отсюда следует

$$\frac{\operatorname{tg} k''a}{k''a} = -\frac{1}{\chi}. \quad (2.31)$$

Корни  $\chi$  этого уравнения определяют возможные энергетические уровни. Таким образом, условие существования энергетического уровня  $E_1 = 0$  заключается в том, чтобы  $k_0 a$  было нечетным кратным  $\frac{1}{2}\pi$ , т. е. совпадает с условием существования предела для эффективного сечения при неограниченно малых скоростях. Последовательные разрывы непрерывности в бесконечности на фиг. 4 (кривая А) соответствуют возрастающему числу возможных энергетических уровней, появляющихся в дополнение к уровню с нулевой энергией. Таким образом, при  $k_0 a = \pi/2$  имеется только один энергетический уровень  $E_1 = 0$ , тогда как при  $k_0 a = 3\pi/2$  имеются уже два энергетических уровня, верхним из которых есть уровень  $E_1 = 0$ , и т. д.

Аналогичное квазипериодическое изменение эффективного сечения в предельном случае малых скоростей имеет место также и для полей притяжения. Эффективное сечение атома для очень медленных электронов может оказаться поэтому как много меньше, так и много больше размеров той области, в которой  $V(r)$  сравнимо с энергией электрона. Соответствующие примеры будут рассмотрены нами в гл. X, § 3 и 4. Другой практически важный случай — рассеяние нейтронов протонами — будет исследован подробно в гл. XIII, § 1.

**2. Зависимость  $\eta_0$  и парциального сечения нулевого порядка от скорости. Мы имеем**

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{k'} \operatorname{tg} k'a \right) - ka \right].$$

Этот предел определен с точностью до члена, кратного  $\pi$ . Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta_0 = s\pi \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad k_0 a \neq \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta_0 = \frac{1}{2}(2s + 1)\pi \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad k_0 a = \frac{\pi}{2}.$$

Удобно устранить эту многозначность, условившись, что  $\eta_0$  должно стремиться к нулю, по мере того как скорость, а следовательно, и  $k$  стремятся к бесконечности.

Согласно (2.27), при больших значениях  $k$

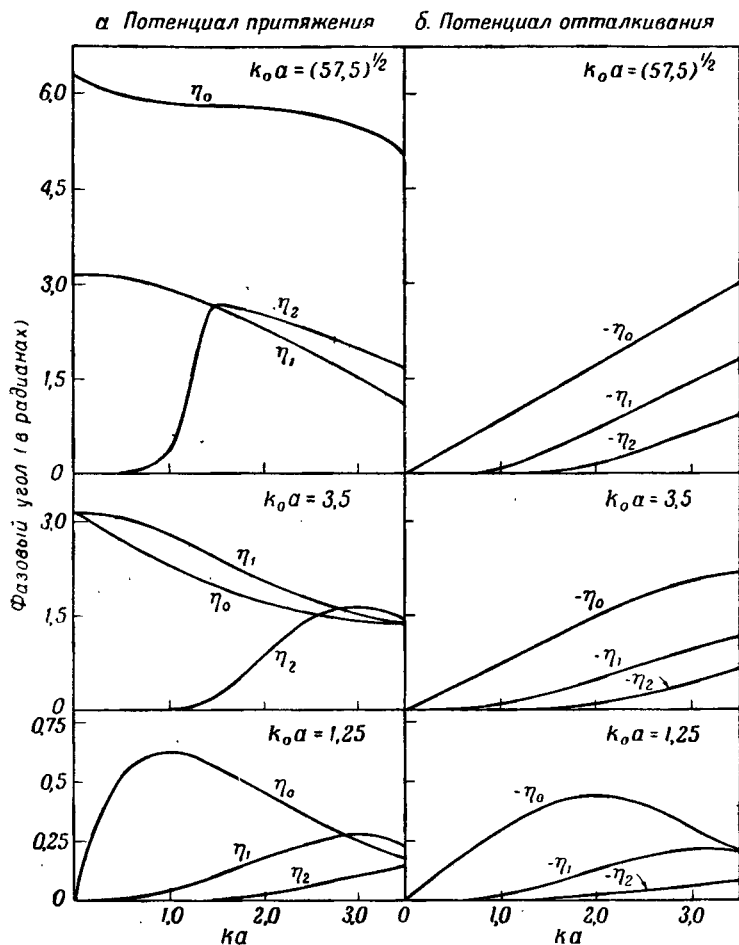
$$\eta_0 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{k_0^2 a}{k};$$

$\eta_0$  стремится, таким образом, к нулю при очень больших скоростях. Если мы допустим, что  $\eta_0$  меняется непрерывным образом по мере уменьшения  $k$ , то при  $k \rightarrow 0$  величина  $\eta_0$  будет стремиться к ближайшему числу, кратному  $\pi$ , лежащему ниже  $k_0 a$ , т. е. к произведению числа  $\pi$  на число таких энергетических уровней в потенциальной яме, которым отвечает момент количества движения, равный нулю. Исключения из этого правила имеют место только тогда, когда  $k_0 a$  является кратным  $\pi/2$ ; в этом случае  $\eta_0$  стремится к  $k_0 a$ . Фиг. 5, а иллюстрирует зависимость  $\eta_0$  от  $k$  для трех типичных случаев, когда число энергетических уровней равно нулю, одному и двум.

Переходя к вопросу о зависимости парциального сечения нулевого порядка  $Q_0 = 4\pi \sin^2 \eta_0 / k^2$  от скорости, мы видим, что в том случае, когда предельное значение  $\eta_0$  при малых скоростях равно  $s\pi$ , где  $s$  больше двух, сечение  $Q_0$  должно обращаться в нуль при тех значениях  $k$ , для которых  $\eta_0 = (s-1)\pi$ ,  $(s-2)\pi$  и т. д. Физический смысл этого результата заключается в том, что при таких значениях  $k$  потенциальная яма оказывается достаточно глубокой для того, чтобы в ней могли поместиться одна или несколько дополнительных целых длин волн. Волновая картина вне ямы остается при этом неизменной, появление в яме одной или нескольких новых коротких волн не обнаруживается на бесконечном расстоянии от ямы.

Если  $Q_0$  проходит через нуль при некотором конечном значении  $k$ , для которого сечения первого и более высокого порядка все еще очень малы, то полное сечение  $Q$  будет обладать резким минимумом при этом частном значении скорости. Такая возможность существует в общем случае рассеяния полями притяжения, она является ответственной за эффект Рамзауера—Таунсенда, наблюдаемый при рассеянии электронов некоторыми атомами (см. гл. X). Типичные кривые зависимости  $Q_0$  от скорости приведены на фиг. 6, а.

При некоторых определенных условиях могут быть получены удобные приближенные формулы для вычисления  $Q_0$  [4].



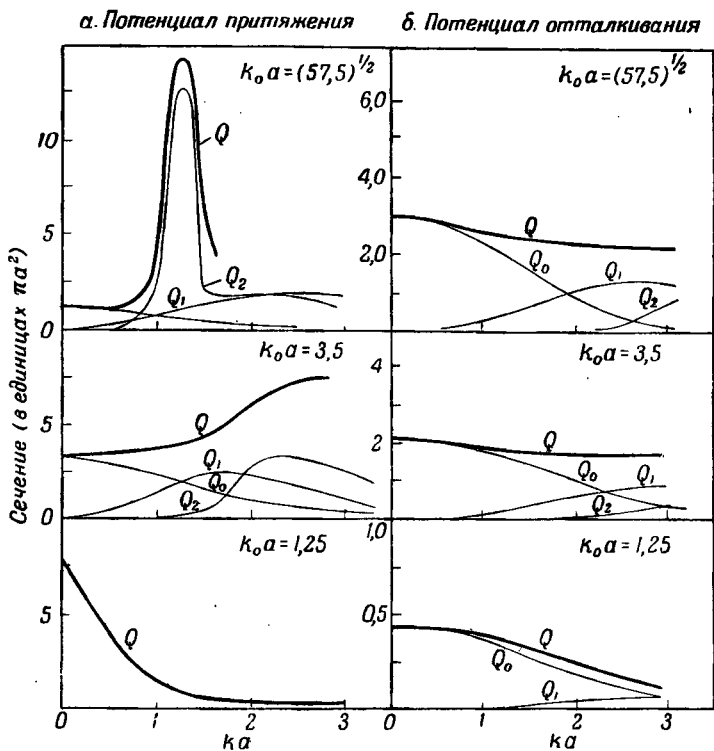
Фиг. 5. Зависимость фаз  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  от скорости при различных значениях напряженности поля.

а—для сферических ям глубины  $D = \frac{k_0^2 \hbar^2}{2m}$  и радиуса  $a$ ;

б—для сферических потенциальных барьеров высоты  $D = \frac{k_0^2 \hbar^2}{2m}$  и радиуса  $a$ .

Рассмотрим случай глубокой и узкой потенциальной ямы. Предположим, что для этой ямы: а) существует уровень с энергией связи  $\chi^2 \hbar^2 / 2m$ , б)  $\chi a \ll 1$ . Поскольку  $k_0 a > \frac{\pi}{2}$ , для того чтобы

в яме мог существовать энергетический уровень, должно удовлетворяться неравенство  $k_0 \gg \kappa$ . Отсюда следует, что энергия связи мала по сравнению с глубиной ямы.



Фиг. 6. Зависимость парциальных  $Q_0, Q_1, Q_2$  и полного  $Q$  сечений от скорости при различных значениях напряженности поля.

а—для сферических ям глубины  $D = \frac{k_0^2 \hbar^2}{2m}$  и радиуса  $a$ ;

б—для сферических потенциальных барьеров высоты  $D = \frac{k_0^2 \hbar^2}{2m}$  и радиуса  $a$ .

Найдем теперь приближенное значение  $Q_0$  при таких скоростях, для которых  $ka \ll 1$ . С этой целью разложим выражение

$$\sin^2 \eta_0 = \sin^2 \left[ \arctg \left( \frac{k}{k'} \operatorname{tg} k'a \right) - ka \right]$$

в ряд по степеням  $(k^2 + \kappa^2)/(k_0^2 - \kappa^2)$ , воспользовавшись для этого соотношением

$$\frac{\operatorname{tg} [(k_0^2 - \kappa^2)^{1/2} a]}{(k_0^2 - \kappa^2)^{1/2}} = -\frac{1}{\kappa}. \quad (2.32)$$

В результате получим

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2 + \lambda^2} (1 + \lambda a + \text{Члены высшего порядка}). \quad (2.33)$$

Уравнение (2.32) имеет корень  $x$ , удовлетворяющий условию «б», если  $k_0 a$  несколько превышает  $\pi/2$ . Если же, напротив,  $k_0 a$  несколько меньше  $\pi/2$ , то может быть определена некоторая величина  $\lambda \ll k_0$ , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} [(k_0^2 + \lambda^2)^{1/2} a]}{(k_0^2 + \lambda^2)^{1/2}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.34)$$

Сечение  $Q_0$  при этом может быть представлено в форме

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2 + \lambda^2} (1 - \lambda a + \text{Члены высшего порядка}). \quad (2.35)$$

В этом случае не существует реального уровня энергии, а имеется лишь виртуальный<sup>1)</sup>.

При указанных условиях исследование зависимости эффективного сечения от скорости дает непосредственные сведения о реальной или виртуальной энергии уровня, ближайшего к нулю. (При  $ka \ll 1$  можно пренебречь всеми парциальными сечениями, за исключением сечения  $Q_0$ .) Необходимо, однако, напомнить, что нет никакого смысла говорить о том, является ли энергетический уровень реальным или виртуальным, не воспользовавшись при этом каким-либо другим типом измерений.

Возможность применения соотношений (2.33) и (2.35) не должна зависеть от вида функции, характеризующей потенциал поля, при условии, что последнее сосредоточено в достаточно малой области пространства. Эти соотношения будут использованы нами в гл. XIII, § 1, при рассмотрении вопроса о взаимодействии между нейтроном и протоном.

**3. Фазы и парциальные сечения высшего порядка.** Для определения  $\eta_n$  мы должны найти асимптотическое решение уравнений

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \left[ k'^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = 0 \quad (r < a),$$

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = 0 \quad (r > a),$$

обращающиеся в нуль в начале координат.

<sup>1)</sup> Для виртуального уровня, при котором  $\lambda a$  мало,  $\lambda$  примерно равно тому значению  $k$ , для которого  $\eta_0 = \pi/4$  [5].

Другое определение было дано Гультенем [6]; в случае сферической потенциальной ямы при  $\lambda a \ll \frac{\pi}{2}$  оно согласуется с формулой (2.34).

Такое решение имеет вид

$$Ar^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(k'r) \quad (r < a),$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi kr\right)^{1/2} [\cos \eta_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + (-1)^n \sin \eta_n J_{-n-\frac{1}{2}}(kr)] \quad (r > a).$$

Это следует из того обстоятельства, что [1]

$$J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \sim \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi\right),$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(kr) \sim (-1)^n \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos\left(kr - \frac{1}{2}n\pi\right).$$

Воспользовавшись условиями непрерывности функций  $G$  и  $\frac{dG}{dr}$  при  $r = a$ , находим

$$\operatorname{tg} \eta_n = (-1)^{n-1} \frac{A_n}{B_n},$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= kJ_{n+\frac{1}{2}}(k'a) J'_{n+\frac{1}{2}}(ka) - k' J_{n+\frac{1}{2}}(ka) J'_{n+\frac{1}{2}}(k'a), \\ B_n &= kJ_{n+\frac{1}{2}}(k'a) J'_{-n-\frac{1}{2}}(ka) - k' J_{-n-\frac{1}{2}}(ka) J'_{n+\frac{1}{2}}(k'a). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Используя соотношения [1]

$$\begin{aligned} x J'_{n+\frac{1}{2}}(x) &= x J_{n-\frac{1}{2}}(x) - \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ x J'_{-n-\frac{1}{2}}(x) &= -\left(n + \frac{1}{2}\right) J_{-n-\frac{1}{2}}(x) - x J_{-n+\frac{1}{2}}(x), \end{aligned}$$

можно записать это выражение в несколько иной форме:

$$\operatorname{tg} \eta_n = (-1)^n \frac{C_n}{D_n},$$

где

$$\begin{aligned} C_n &= kJ_{n+\frac{1}{2}}(k'a) J_{n-\frac{1}{2}}(ka) - k' J_{n+\frac{1}{2}}(ka) J_{n-\frac{1}{2}}(k'a), \\ D_n &= kJ_{n+\frac{1}{2}}(k'a) J_{-n+\frac{1}{2}}(ka) + k' J_{-n-\frac{1}{2}}(ka) J_{n-\frac{1}{2}}(k'a). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для исследования вопроса о зависимости  $\eta_n$  от скорости частицы мы воспользуемся приближенными соотношениями,

справедливыми при малых значениях  $x$  [1]:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(2x)^n n!}{(2n+1)!},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(2x)^{-n-1} 2(2n)!}{n!} (-1)^n \left(1 + \frac{x^2}{4n-2}\right).$$

При малых  $ka$  это дает

$$\operatorname{tg} \eta_n = \frac{n!(n-1)!}{4(2n+1)!(2n-1)!} [(2n+1)f_n - 1] \times$$

$$\times \left[1 - \frac{k^2 a^2}{2n-1} \left(f_n - \frac{1}{2}\right)\right]^{-1} (2ka)^{2n+1},$$

где

$$f_n = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k'a)}{k'a J_{n-\frac{1}{2}}(k'a)}.$$

Отсюда следует, что при  $J_{n-\frac{1}{2}}(k_0 a) \neq 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta_n = \frac{n!(n-1)!}{4(2n+1)!(2n-1)!} [(2n+1)f_n(0) - 1] (2ka)^{2n+1} + \pi$$

$$(s=0, 1, 2, \dots),$$

где

$$f_n(0) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 a)}{k_0 a J_{n-\frac{1}{2}}(k_0 a)}. \quad (2.38)$$

Если

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_0 a) = 0,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta_n = -\frac{n!(n-1)!}{(2n)!(2n-2)!} (2ka)^{2n-1} + \pi \quad (s=0, 1, 2, \dots). \quad (2.39)$$

Этот результат до некоторой степени сходен с результатом, полученным нами выше для фазы  $\eta_0$ . Случай  $J_{n-\frac{1}{2}}(k_0 a) = 0$

дающий более медленную зависимость от скорости, отвечает существованию уровня с нулевой энергией и моментом количества движения, равным  $[n(n+1)]^{1/2} \hbar$ . Если мы условимся, что при больших скоростях  $\eta_n$  должно стремиться к нулю, то число  $s$  в формулах (2.38) и (2.39), как и в случае фазы  $\eta_0$ , будет определяться как число энергетических уровней с моментом количества движения, равным  $[n(n+1)]^{1/2} \hbar$ . Это число никогда не

может возрастать по мере возрастания  $n$ , так как увеличение момента количества движения сопровождается увеличением центробежной силы, что приводит к ослаблению связи.

Если  $ka$  мало, то численное значение  $\eta_n$  быстро убывает при увеличении  $n$ . Ряд типичных кривых зависимости фазы от скорости приведен на фиг. 5, *a*.

Перейдем теперь к вопросу о возможных значениях парциальных сечений  $Q_n$ , равных

$$Q_n = \frac{4\pi(2n+1)\sin^2\eta_n}{k^2}.$$

Из (2.38) и (2.39) следует, что если  $n > 0$ , то  $Q_n$  никогда не стремится к бесконечности при  $k \rightarrow 0$ . Действительно, при  $n > 1$   $Q_n$  всегда должно стремиться к нулю, по крайней мере как  $k^{4n-4}$  и обычно как  $k^{4n}$ . Только в том частном случае, когда  $n = 1$  и  $J_{1/2}(k_0 a) = 0$ , сечение  $Q_n$  стремится к некоторому конечному значению при  $k \rightarrow 0$ . В этом случае, воспользовавшись соотношением

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \sin x,$$

находим

$$\lim_{k \rightarrow 0} Q_1 = 12\pi a^2.$$

Поскольку это имеет место тогда, когда  $k_0 a$  является кратным  $\pi$  (отличным от нуля), т. е. тогда, когда  $\lim_{k \rightarrow 0} Q_0$  исчезает, отсюда следует, что предельное значение полного сечения при малых скоростях никогда не может точно обратиться в нуль.

Типичные кривые зависимости эффективного сечения от скорости приведены на фиг. 6, *a*.

#### § 4. Рассеяние потенциальным барьером

Рассмотрим теперь тот случай, когда потенциал рассеивающего поля задан в форме

$$\begin{aligned} V(r) &= D & (r < a), \\ V(r) &= 0 & (r > a). \end{aligned}$$

Его можно рассматривать как частный случай поля отталкивания, которое при больших значениях  $r$  убывает с расстоянием быстрее, чем  $r^{-2}$ . Случай непроницаемой сферы, для которой  $D$  стремится к бесконечности, будет исследован нами отдельно в следующем параграфе.



Записывая  $k'^2 = k_0^2 \sim k^2$ , где  $k_0^2 = 8\pi^2 mD/h^2$ , имеем

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \arctg\left(\frac{k}{k'} \operatorname{th} k'a\right) - ka & (k < k_0), \\ \eta_0 &= \arctg\left(\frac{k}{k'} \operatorname{tg} k'a\right) - ka & (k > k_0). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ход волновой функции иллюстрируется фиг. 3, б. Для сравнения приведен также график функции  $G = \sin kr$ . Фаза  $\eta_0$  отрицательна, ее численное значение равно произведению длины отрезка  $AB$  на  $k$ .

В предельном случае малых скоростей  $\eta_0$  стремится к нулю независимо от значения  $D$ . Эффективное сечение стремится при этом к конечному пределу

$$4\pi a^2 \left(\frac{\operatorname{th} k_0 a}{k_0 a} - 1\right)^2, \quad (2.41)$$

который всегда меньше, чем  $4\pi a^2$ , т. е. всегда меньше, чем та величина, к которой оно стремится при очень больших  $D$ . Этот результат существенно отличается от результата, полученного нами в рассмотренном выше случае потенциальной ямы. Мы показали, что в случае потенциальной ямы аномальное изменение эффективного сечения связано с существованием энергетических уровней внутри ямы. В поле отталкивания таких энергетических уровней быть не может, и эффективное сечение не обнаруживает в соответствии с этим аномальных изменений. Зависимость предельного сечения при малых скоростях от  $k_0 a$  приведена на фиг. 4.

Анализируя вопрос о соотношении между числом энергетических уровней и числом, кратным  $\pi$ , к которому значение фазы стремится по мере того, как скорость убывает до нуля, мы должны ожидать, что для поля отталкивания, в котором не существует энергетических уровней, фаза  $\eta_0$  всегда должна стремиться к нулю как при больших, так и при малых скоростях. Такое предположение, как это следует из фиг. 5, б действительно оправдывается. С другой стороны,  $\eta_0$  может проходить через значения  $s\pi$ , где  $s$  — отрицательное целое число, также и при промежуточных значениях скорости. В таких точках парциальное сечение нулевого порядка обращается в нуль — потенциальный барьер на больших расстояниях не оказывает заметного влияния на волны, которым отвечает момент количества движения, равный нулю, так как он как раз ликвидирует целое число  $s$  волн, которые в его отсутствие существовали бы в пределах расстояния  $a$ . Такая ситуация может иметь место только в том случае, если асимптотическое значение длины волны меньше  $a$ ; при этих условиях нельзя, однако, пренебречь парциальными сечениями высшего порядка. Поэтому не следует ожидать,

что в случае поля отталкивания полное сечение где-либо будет обладать резким минимумом, если рассматривать его как функцию скорости. Этот результат существенно отличается от результата, полученного нами для потенциальной ямы. При наличии потенциальной ямы в области, размеры которой меньше длины волны, могут появиться дополнительные волны, так что могут создаться условия, при которых все парциальные сечения высших порядков малы при том значении скорости, при котором парциальное сечение нулевого порядка обращается в нуль.

Фаза  $\eta_n$  при  $k < k_0$  определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \eta_n = (-1)^n \frac{C_n}{D_n},$$

где

$$\begin{aligned} C_n &= kI_{n+\frac{1}{2}}(k'a) J_{n-\frac{1}{2}}(ka) - k'J_{n+\frac{1}{2}}(ka) I_{n-\frac{1}{2}}(k'a), \\ D_n &= kI_{n+\frac{1}{2}}(k'a) J_{-n+\frac{1}{2}}(ka) + k'J_{-n-\frac{1}{2}}(ka) I_{n-\frac{1}{2}}(k'a), \end{aligned} \quad (2.42)$$

а  $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$  — функция Бесселя, определяемая соотношением

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = i^{-(n+\frac{1}{2})} J_{n+\frac{1}{2}}(ix).$$

При  $k > k_0$  функцию  $I_{n\pm\frac{1}{2}}(k'a)$  следует заменить функцией  $J_{n\pm\frac{1}{2}}(k'a)$ .

Мы имеем, таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta_n = \frac{n!(n-1)!}{4(2n+1)!(2n-1)!} [(2n+1)f_n(0) - 1] (2ka)^{2n+1},$$

где

$$f_n(0) = \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(k_0 a)}{k_0 a I_{n-\frac{1}{2}}(k_0 a)}.$$

Функция  $I_{n-\frac{1}{2}}(k_0 a)$  обращается в нуль только при  $k_0 = 0$ .

Этот результат находится в соответствии с тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае энергетических уровней не существует ни при каких значениях момента количества движения. Фаза  $\eta_n$ , подобно фазе  $\eta_0$ , стремится к нулю как при  $k \rightarrow 0$ , так и при  $k \rightarrow \infty$ .

Типичные кривые зависимости фазы и эффективного сечения от скорости приведены на фиг. 5, б и 6, б.

## § 5. Рассеяние непроницаемой сферой

Этот случай является предельным случаем предыдущего при  $D \rightarrow \infty$ . Волновая функция  $G$  должна обращаться в нуль на поверхности сферы, так что при  $n=0$  имеем

$$G = \sin k(r-a).$$

Это дает  $\eta_0 = -ka$  — результат, который может быть получен из (2.40) при  $k' \rightarrow \infty$ .

Для фаз высшего порядка получаем выражение

$$\operatorname{tg} \eta_n = (-1)^{n-1} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{-n-\frac{1}{2}}(ka)}. \quad (2.43)$$

Предельное значение сечения при малых скоростях равно в этом случае  $4\pi a^2$ , что в 4 раза превышает его классическое значение. Интересно отметить, что даже при наибольших скоростях сечение стремится не к своему классическому значению, но к величине, которая превышает его вдвое. В этом можно убедиться следующим образом.

Если  $ka$  велико по сравнению с  $n$ , то можно заменить функций Бесселя их асимптотическими значениями. Это даст

$$\eta_n = -ka - \frac{1}{2}n\pi. \quad (2.44)$$

Сумма парциальных сечений при  $n < ka$  может быть, далее, заменена интегралом<sup>1)</sup>

$$\frac{4\pi}{k^2} \int_0^{ka} (2x+1) \sin^2\left(ka - \frac{1}{2}x\pi\right) dx = 2\pi a^2 + 0\left(\frac{1}{ka}\right). \quad (2.45)$$

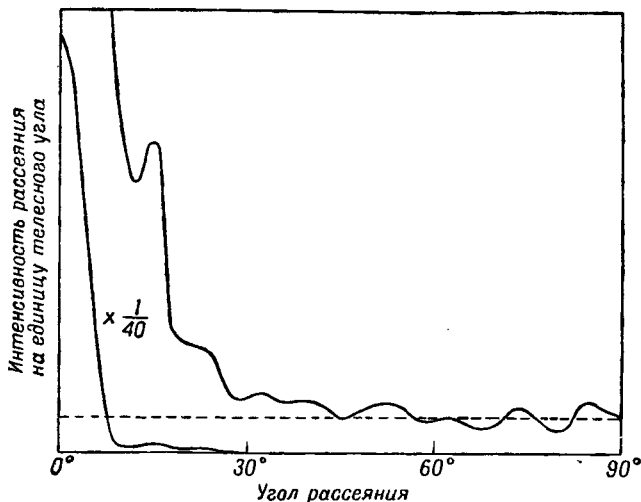
При  $n > ka$  отношение бесселевых функций в выражении (2.43) очень быстро убывает — как  $(ka/n)^n$ , так что парциальными сечениями, для которых  $n > ka$ , можно пренебречь. Таким образом, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q = 2 \times \text{Геометрическое сечение.}$$

Этот несколько парадоксальный результат, полученный впервые Месси и Мором [8], связан с невозможностью вполне точного определения углов отклонения, обусловленной явлением диффракции. Всегда имеется некоторый конус конечного раствора (порядка  $\pi/ka$ ), вершина которого находится в рассматриваемой

<sup>1)</sup> Более точное решение задачи, дающее лучшее [по сравнению с (2.43)] приближение для  $\eta_n$ , показывает, что делаемая ошибка порядка  $0\{(ka)^{-2/3}\}$  [7].

точке, а ось совпадает с направлением падения пучка, в пределах которого рассеяние отлично от классического. Хотя угол раствора этого конуса может стать сколь угодно малым при увеличении  $k$ , интенсивность потока, рассеянного внутри конуса, остается равной по меньшей мере интенсивности потока, распределенного более или менее равномерно в остальной угловой области. Поскольку последняя приближается к своему класси-



Фиг. 7. Угловое распределение для рассеяния твердой сферой в случае  $ka=20$ .

Пунктиром показано классическое распределение.

ческому значению, отсюда следует, что полная интенсивность рассеяния в 2 раза превышает классическое значение. Для иллюстрации на фиг. 7 ход функции  $I(\theta)$  в частном случае  $ka=20$  сопоставлен с равномерным классическим распределением.

Для более подробного ознакомления с решением задачи о рассеянии непроницаемой сферой следует обратиться к оригинальным статьям [7—9]. Некоторые приложения полученных результатов к газокинетическим задачам будут рассмотрены в гл. XII, § 3.

### § 6. Рассеяние полем, обратно пропорциональным кубу расстояния

Предположим, что на расстоянии  $r$  от ядра потенциальная энергия равна  $\gamma r^{-2}$ . В таком случае волновое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2L}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dL}{dr} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] L = 0, \quad \beta = \frac{8\pi^2 m \gamma}{h^2}. \quad (2.46)$$

Решения этого уравнения выражаются формулой

$$r^{-1/2} J_{\nu + \frac{1}{2}}(kr), \quad (2.47)$$

где  $\nu$  — один из корней уравнения

$$\nu(\nu + 1) = n(n + 1) + \beta,$$

т. е.

$$\nu = \frac{1}{2} [-1 \pm (1 + 4n + 4n^2 + 4\beta)^{1/2}]. \quad (2.48)$$

Наша волновая функция  $L(r)$  должна быть конечной в начале координат. Поскольку в начале координат  $r^{-1/2} J_{\nu + \frac{1}{2}}(kr)$  ведет

себя, как  $r^\nu$ , это значит, что  $\nu \geq 0$  при всех значениях  $n$ .

Если  $\beta$  положительно (поле сил отталкивания), то это условие выполняется для одного из корней и не выполняется для другого. Искомое конечное решение является, таким образом, единственным, как и в случае полей, обладающих особой точкой более низкого порядка.

Если  $\beta$  отрицательно (поле сил притяжения), то имеются две возможности. Если  $-\frac{1}{4} < \beta < 0$ , то при  $n = 0$  оба решения имеют особые точки в начале координат; однако одно из решений обладает особой точкой более низкого порядка, нежели другое решение. Воспользовавшись этим решением, мы можем получить формулу, определяющую интенсивность рассеяния. Если, с другой стороны,  $\beta < -\frac{1}{4}$ , то оба решения вблизи начала координат будут вести себя как  $r^{-1/2} e^{\pm i\alpha \ln r}$ . В этом случае рассматриваемая нами задача о рассеянии не имеет решения. У нас нет критерия для выбора решения уравнения (2.46); фаза  $\eta_0$  не может быть, таким образом, определена.

Возвращаясь к случаю поля сил отталкивания и воспользовавшись асимптотической формой функции (2.47), получаем

$$\eta_n = \frac{1}{2} \pi (\nu - n),$$

где  $\nu$  — положительный корень уравнения (2.48). При больших значениях  $n$  это сводится к

$$\frac{1}{2} \frac{\pi \beta}{2n + 1}.$$

Легко убедиться в том, что формула (2.27) дает аналогичный результат.

Поскольку в рассматриваемом случае фазовые сдвиги не зависят от скорости, функция  $I(\theta)$ , характеризующая угловое распределение, должна обладать одной и той же формой при любых

скоростях, в противоположность случаям, рассмотренным нами в предыдущих параграфах. Благодаря медленной сходимости фаз  $\eta_n$  при больших значениях  $n$  ряды парциальных сечений не сходятся и полного сечения в этом случае не существует. Это обстоятельство является следствием неограниченного возрастания функции  $I(\theta)$  при  $\theta \rightarrow 0$  (см. гл. VII, § 1).

### § 7. Дисперсионная формула для сечения рассеяния

Мы приведем теперь несколько иную формулу для парциального сечения, характеризующего рассеяние частиц с данным моментом количества движения. Эта формула весьма сходна с соответствующей формулой, описывающей оптическую дисперсию в среде, содержащей затухающие осцилляторы с различными естественными частотами. Следует отметить, что она не представляет практического интереса для решения задач, относящихся к движению одной частицы; тем не менее эта формула может послужить базисом для обобщения на случай задач многих тел, таких, например, как ядерные столкновения, для которых дисперсионные эффекты играют существенную роль (см. гл. VIII, § 8, и гл. XIII, § 2). При изложении мы будем следовать методу Капура и Пайерлса [10].

Рассмотрим сперва случай частиц с моментом количества движения, равным нулю, движущихся в некотором силовом поле, которое полностью сосредоточено в области радиуса  $a$ . Волновое уравнение имеет в этом случае вид

$$\frac{d^2 G_0}{dr^2} + [k^2 - U(r)] G_0 = 0,$$

причем  $U = 0$  при  $r > a$ . Отсюда при  $r > a$  имеем

$$G_0 = I \frac{\sin kr}{k} + S e^{ikr}.$$

Первый член этого выражения характеризует падающую волну, второй — рассеянную волну. Парциальное сечение нулевого порядка равно при этом

$$\frac{4\pi |S|^2}{|I|^2}.$$

Условия непрерывности  $G_0$  и  $dG_0/dr$  при  $r = a$  дают

$$I e^{-ika} = \left( \frac{dG_0}{dr} \right)_a - ik G_0(a), \quad (2.49)$$

$$S = \cos ka G_0(a) - \frac{1}{k} \sin ka \left( \frac{dG_0}{dr} \right)_a. \quad (2.50)$$

Амплитуда  $I$  падающей волны равнялась бы нулю при условии

$$\frac{dG}{dr} - ikG = 0 \quad (r = a). \quad (2.51)$$

Это условие не может иметь места для всей области значений  $r$ ; мы можем, однако, выбрать уравнение (2.51) вместе с условием  $G=0$  при  $r=0$  в качестве граничных условий, справедливых на границах конечного интервала  $0 \leq r \leq a$ , для определения ряда собственных функций  $\mathcal{G}_s$  и собственных значений  $k_s$  уравнения

$$\frac{d^2 \mathcal{G}_s}{dr^2} + (k_s^2 - U) \mathcal{G}_s = 0 \quad (2.52)$$

внутри этого интервала. Величина  $k_s^2$  в общем случае комплексная и является некоторой функцией  $k$ . Функции  $\mathcal{G}_s$  взаимно ортогональны, так что

$$\int_0^a \mathcal{G}_s \mathcal{G}_{s'} dr = 0 \quad (k_s^2 \neq k_{s'}^2).$$

Эти функции могут быть нормированы к единице:

$$\int_0^a |\mathcal{G}_s|^2 dr = 1.$$

Разложим теперь функцию  $G_0$ , являющуюся решением рассматриваемой нами задачи о рассеянии, в ряд<sup>1)</sup> по функциям  $\mathcal{G}_s$  и  $k_s$  в интервале  $0 \leq r \leq a$ . Разумеется, функция  $G_0$  не удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция  $\mathcal{G}_s$ ; однако любая функция вида  $(G_0 - \chi)$  должна удовлетворять этим условиям, если

$$\chi(0) = 0, \quad (2.53)$$

$$\left( \frac{d\chi}{dr} \right)_a - ik\chi = Ie^{-ika}, \quad (2.54)$$

а функция  $\chi$  является собственной функцией в области  $0 \leq r \leq a$ .

Разлагая  $G_0$  в ряд по функциям  $\mathcal{G}_s$ , имеем

$$G_0 = \sum a_s \mathcal{G}_s + \chi, \quad (2.55)$$

где

$$\frac{a_s}{N_s} = \frac{Ie^{-ika}}{k_s^2 - k^2} \mathcal{G}_s(a) - b_s, \quad (2.56)$$

$$b_s = \int_0^a \mathcal{G}_s \chi dr, \quad N_s = \int_0^a \mathcal{G}_s^2 dr.$$

<sup>1)</sup> Выбор частного ряда функций  $\mathcal{G}_s$  для этого разложения может показаться весьма произвольным; для решения задачи многих тел этот метод представляет, однако, большой интерес (см. гл. VIII, § 8).

Подставляя это значение  $G_0$  в выражение (2.50) и используя уравнение (2.49), получаем

$$S = I \left\{ \sum_s \frac{e^{-2ika} \mathfrak{G}_s^2(a)}{N_s (k_s^2 - k^2)} - \frac{1}{k} \sin ka e^{-ika} \right\} + e^{-ika} \chi(a) - \sum \frac{b_s}{N_s} e^{-ika} \mathfrak{G}_s(a). \quad (2.57)$$

Эта формула справедлива для всех функций  $\chi$ , удовлетворяющих уравнениям (2.53) и (2.54). Мы можем при этом выбрать  $\chi$  таким образом, чтобы оба последних члена выражения (2.57) были сколь угодно малыми, положив, например,

$$\chi = Cre^{-a(a-r)}$$

и выбирая множитель  $C$  так, чтобы удовлетворялись граничные условия при  $r = a$ , и требуя, далее, чтобы  $a$  стремилось к бесконечности. Сохраняя в связи с этим в (2.57) только члены, заключенные в фигурные скобки, мы получаем для парциального сечения нулевого порядка формулу вида

$$4\pi \frac{|S|^2}{|I|^2} = \frac{\pi}{k^2} \left| \sum_s \frac{w_s^2 e^{-2ika}}{N_s \left( E_s - E - \frac{1}{2} i\Gamma_s \right)} - 2e^{-ika} \sin ka \right|^2. \quad (2.58)$$

Здесь

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} k_s^2 = E_s - \frac{1}{2} i\Gamma_s, \quad \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} k^2 = E, \quad \left( \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/2} \mathfrak{G}_s(a) = w_s. \quad (2.59)$$

Воспользовавшись дифференциальным уравнением для  $\mathfrak{G}_s$ , имеем, далее,

$$i\Gamma_s \int_0^a |\mathfrak{G}_s|^2 dr = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left[ \mathfrak{G}_s^* \frac{d\mathfrak{G}_s}{dr} - \mathfrak{G}_s \frac{d\mathfrak{G}_s^*}{dr} \right]_0^a.$$

Граничное условие (2.51) дает

$$\Gamma_s = |w_s|^2, \quad (2.60)$$

так как  $\mathfrak{G}_s$  обращается в нуль при  $r = 0$ .

Сумма, входящая в выражение (2.57), является характерной для теории дисперсии в среде, содержащей ряд осцилляторов с энергетическими уровнями  $E_s$  естественной ширины  $\Gamma_s$ . Второй член этого выражения характеризует экранирующее влияние рассеивающего поля и известен в ядерной теории как «потенциальное» рассеяние. Он совпадает со значением амплитуды волны, которая была бы рассеяна непроницаемой сферой радиуса  $a$ .

Изложенный метод может быть обобщен на те случаи, когда момент количества движения отличен от нуля и когда в дополне-



ние к полю, сосредоточенному в области  $a$ , имеется поле, потенциал которого постепенно убывает, обращаясь в бесконечности в нуль быстрее, чем  $r^{-2}$ <sup>1)</sup>. Функция  $G_n$ , описывающая рассеяние, удовлетворяет в этом случае уравнениям

$$\frac{d^2 G_n}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} - U(r) - W(r) \right] G_n = 0 \quad (r < a), \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2 G_n}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} - W(r) \right] G_n = 0 \quad (r > a). \quad (2.62)$$

Функции  $\mathcal{G}_s$  при  $0 \leq r \leq a$  должны теперь удовлетворять уравнению (2.61). Как и прежде, они обращаются в нуль при  $r=0$ , но при  $r=a$  условие (2.51) следует заменить условием

$$\frac{d\mathcal{G}_s}{dr} = f\mathcal{G}_s, \quad (2.63)$$

где

$$f = \frac{1}{G_n^+} \frac{dG_n^+}{dr}. \quad (2.64)$$

Функция  $G_n^+$  является решением уравнения (2.62), имеющим асимптотическую форму

$$G_n^+ \sim e^{i\left(kr - \frac{1}{2}n\pi\right)}. \quad (2.65)$$

С помощью тех же приемов, что и выше, получаем для частичного сечения  $n$ -го порядка выражение вида

$$\frac{\pi}{k^2} (2n+1) \left| \sum_s \frac{w_s^2 e^{2i\eta_n}}{N_s \left( E_s - E - \frac{1}{2} i\Gamma_s \right)} + 2e^{i\eta_n} \sin \eta_n \right|^2. \quad (2.66)$$

Значения  $E_s$ ,  $\Gamma_s$  и  $N_s$  при этом определяются выражениями (2.59) и (2.56).  $\eta_n$  представляет собой фазовое смещение волны  $n$ -го порядка, обусловленное полем  $V$ , причем

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2 m}{h^2} V &= W \quad (r > a), \\ \frac{8\pi^2 m}{h^2} V &\rightarrow \infty \quad (r = a). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Второй член выражения характеризует амплитуду волны, рассеянной этим полем.

Величина  $w_s$  связана с функцией  $\mathcal{G}_s(a)$  теперь уже не формулой (2.59), но соотношением более общего вида:

$$\left[ \frac{h^2}{8\pi^2 m i} (f - f^*) \right]^{1/2} \mathcal{G}_s(a) = w_s. \quad (2.68)$$

<sup>1)</sup> Обобщение на случай кулонова поля дано в гл. III, § 5.

При таком определении  $w_s$ , как и прежде,

$$\Gamma_s = |w_s|^2.$$

Если  $W(r) = 0$ , то

$$f - f^* = 4i \{ a\pi [J_{-n-\frac{1}{2}}^2(ka) + J_{n+\frac{1}{2}}^2(ka)] \}^{-1}.$$

Если, далее,  $ka$  мало, то

$$f - f^* = 2ik^{2n+1} (2a)^{2n} \left[ \frac{n!}{(2n)!} \right]^2.$$

Это дает

$$\Gamma_s = \frac{h^2}{8\pi^2 ma} (2ka)^{2n+1} |\mathcal{G}_s(a)|^2 \left[ \frac{n!}{(2n)!} \right]^2. \quad (2.69)$$

Следует отметить, что в рассмотренном нами общем случае выбор величины  $a$  является в значительной степени произвольным. В любом случае мы должны, разумеется, получить один и тот же окончательный результат; относительная роль членов, характеризующих дисперсию и потенциальное рассеяние, может при этом, однако, меняться в значительных пределах. Тем не менее при решении практических задач вопрос о выборе величины  $a$  в большинстве случаев решается вполне однозначным образом (см. гл. VIII, § 8).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1934.
2. Рэлей, Теория звука, т. I, М.—Л., 1940.
3. Faxén and Holtsmark, Zs. f. Phys., 45, 307 (1927).
4. Wigner, Zs. f. Phys., 83, 253 (1933).
5. Breit, Thaxton and Eisenbud, Phys. Rev., 55, 1018 (1939); Plesset and Brown, Proc. Nat. Acad. Sci., 25, 600 (1939).
6. Hulthén, Ark. Math. Astr. Phys., 29 (1942).
7. Wergeland, Skrif. Norske Videns. Akad. Oslo, Mat.-Nat. Klasse, № 9, 1945.
8. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., A141, 434 (1933).
9. Wergeland, Kgl. Dansk. Videns. Selskab, 23, 14 (1945).
10. Kapur and Peierls, Proc. Roy. Soc., A166, 277 (1938).

### Глава III

## РАССЕЯНИЕ ПУЧКА ЧАСТИЦ КУЛОНОВЫМ ПОЛЕМ

### § 1. Введение

Если пучок заряженных частиц, обладающих зарядами  $Z'e$ , в котором за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит одна частица, рассеивается отдельным ядром, обладающим бесконечно большой массой и зарядом  $Ze$ , то, согласно механике Ньютона, число частиц  $I(\theta) d\omega$ , рассеянных за единицу времени на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\omega$ , определяется выражением

$$I(\theta) = \left( \frac{ZZ'e^2}{2mv^2} \right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}, \quad \text{[ (3.1) ]}$$

где  $m$  и  $v$  — масса и скорость падающих частиц. Впервые формула (3.1) была получена Резерфордом; ее доказательство приводится в различных учебниках [1], и мы не будем здесь на нем останавливаться. Эта формула находится в согласии с экспериментальными данными о рассеянии  $\alpha$ -частиц тяжелыми ядрами.

В этой главе мы покажем, что точно такую же формулу дает и волновая механика. Рассмотрим вопрос о рассеянии потока заряженных частиц (электронов или  $\alpha$ -частиц) тяжелым ядром, причем предположим, что сила взаимодействия между частицей и ядром обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. В таком случае:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad \text{для электронов}$$

и

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{r} \quad \text{для } \alpha\text{-частиц,}$$

где  $Z$  — атомный номер рассеивающего ядра.

Запишем в общем виде

$$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{r}, \quad \text{(3.2)}$$

где  $Z'e$  — заряд рассеивающейся частицы, причем  $Z'$  положительно или отрицательно в зависимости от того, заряжена ли эта частица положительно или отрицательно. Волновое уравнение имеет в таком случае вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left( E - \frac{ZZ'e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad \text{(3.3)}$$

Покажем, что решение этого уравнения может быть получено в следующей асимптотической форме:

$$\psi \sim I + Sf(\theta), \quad (3.4)$$

где  $I$  характеризует падающую волну,  $S$  — рассеянную волну и

$$|f(\theta)| = \left( \frac{ZZ'e^2}{2mv^2} \right) \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.5)$$

В гл. II было отмечено, что приведенный нами метод вычисления амплитуды рассеянной волны пригоден лишь в том случае, когда при возрастании  $r$  до бесконечности  $V(r)$  стремится к нулю быстрее, нежели  $r^{-1}$ . Это связано с тем обстоятельством, что ограниченное решение  $L_n(r)$  уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dL}{dr} \right) + \left[ \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E - \frac{ZZ'e^2}{r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] L = 0 \quad (3.6)$$

имеет асимптотическую форму<sup>1)</sup>

$$(kr)^{-1} \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n - \alpha \ln 2kr \right), \quad \text{где } \alpha = \frac{2\pi ZZ'e^2}{hv}, \quad (3.7)$$

отличающуюся от функции (2.15) наличием логарифмического члена. Гордон [2] показал, однако, что в соответствии с уравнением (2.16) волновая функция, описывающая рассеяние, имеет вид

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n e^{i\eta_n} L_n(r) P_n(\cos \theta). \quad (3.8)$$

Он показал также, что эта функция может быть представлена в следующем виде<sup>2)</sup>:

$$e^{-1/2\pi\alpha} \Gamma(1+i\alpha) e^{ikr \cos \theta} {}_1F_1[-i\alpha; 1; ikr(1-\cos \theta)], \quad (3.9)$$

и имеет асимптотическую форму

$$I + Sf(\theta),$$

где

$$I = \exp[ikz + i\alpha \ln k(r-z)], \quad (3.10)$$

$$S = r^{-1} \exp(ikr - i\alpha \ln kr), \quad (3.11)$$

$|f(\theta)|$  определяется выражением (3.5), а фаза  $f(\theta)$  — уравнением (3.16).

Функции (3.10) и (3.11), характеризующие соответственно падающую и рассеянную волны, отвечают кулонову полю. Эти функции могут быть получены следующим образом.

<sup>1)</sup> Это доказывается в § 4, где определяется значение  $\eta_n$ .

<sup>2)</sup> Функция  ${}_1F_1$  определена в § 3.

Если мы будем рассматривать все классические гиперболические орбиты с одной общей асимптотой, направленной справа налево параллельно оси  $z$ , то мы должны ожидать, что фронт падающей волны окажется нормальным ко всем этим гиперболам. На больших расстояниях от ядра поверхность, перпендикулярная к этим гиперболам, будет определяться не уравнением  $z = \text{const}$ , но, как это было показано Гордоном [2], уравнением

$$z + \frac{ZZ'e^2}{mv^2} \ln k(r-z) = \text{const}.$$

Падающая волна даже на бесконечно большом расстоянии искажена ядром, с которым она сталкивается. Мы должны поэтому ожидать, что она будет описываться функцией

$$\exp \left\{ ik \left[ z + \frac{ZZ'e^2}{mv^2} \ln k(r-z) \right] \right\},$$

которая эквивалентна функции (3.10). Функция (3.11), характеризующая рассеянную волну, может быть получена аналогичным образом.

В следующих параграфах мы покажем, что выражение (3.9) является решением волнового уравнения и что оно обладает асимптотической формой, определяемой функциями (3.10), (3.11) и (3.5). При этом мы не будем пользоваться разложением (3.8), применяемым в теории Гордона, но будем решать волновое уравнение непосредственно. Впервые подобный метод был предложен Темплом [3].

## § 2. Решение волнового уравнения для случая рассеяния кулоновым полем

Мы будем решать волновое уравнение

$$\nabla^2 \psi + \left( k^2 - \frac{\beta}{r} \right) \psi = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\beta = 8\pi^2 \frac{mZZ'e^2}{h^2}.$$

Полагая

$$\psi = e^{ikz} F,$$

получим

$$\nabla^2 F + 2ik \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\beta F}{r} = 0. \quad (3.13)$$

Это дифференциальное уравнение обладает решением вида

$$F = F(r-z).$$

Воспользовавшись этим, получаем

$$2\left(1 - \frac{z}{r}\right) F'' + \frac{2}{r} F' + 2ik\left(\frac{z}{r} - 1\right) F' - \frac{\beta}{r} F = 0.$$

Умножив это уравнение на  $r$ , мы убеждаемся в том, что переменные  $r$  и  $z$  входят в него только в виде разности  $(r - z)$  откуда следует, что решение искомого типа действительно существует. Полагая

$$\zeta = r - z,$$

имеем

$$\zeta \frac{d^2 F}{d\zeta^2} + \frac{dF}{d\zeta} - ik\zeta \frac{dF}{d\zeta} - \frac{1}{2} \beta F = 0. \quad (3.14)$$

Если в качестве решения мы выберем функцию

$$F = \zeta^p (1 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots),$$

то характеристическое уравнение дает нам  $p^2 = 0$ ; решение, являющееся конечным в начале координат, имеет, следовательно, вид

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

Подставляя это значение  $F$  в уравнение (3.14) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\zeta^n$ , получаем рекуррентную формулу

$$[n(n+1) + (n+1)] a_{n+1} = a_n \left( ikn + \frac{1}{2} \beta \right),$$

откуда

$$a_{n+1} = (ik)^{n+1} \prod_{s=0}^n \frac{s + \frac{1}{2} \beta / ik}{(s+1)^2},$$

$F$  представляет собой, таким образом, гипергеометрическую функцию (см. § 3)

$$F = {}_1F_1(-i\alpha; 1; ik\zeta),$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{2k} = \frac{2 \cdot ZZ' e^2}{h\nu}.$$

Асимптотическое разложение функции  $F$  мы приводим в § 3; из уравнения (3.24) следует, что  $F = W_1 + W_2$ , где при больших  $r$

$$W_1 \sim (-ik\zeta)^{i\alpha} \frac{G_1}{\Gamma} (1 + i\alpha),$$

$$W_2 \sim (ik\zeta)^{-i\alpha-1} e^{ik\zeta} \frac{G_2}{\Gamma} (-i\alpha),$$

причем

$$G_1 = 1 + \frac{-\alpha^2}{ik\zeta} + \dots,$$

$$G_2 = 1 + \frac{(1+i\alpha)^2}{ik\zeta} + \dots$$

С точностью до членов порядка  $\zeta^{-1}$  имеем

$$W_1 \sim \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\alpha}}{\Gamma(1+i\alpha)} \left(1 - \frac{\alpha^2}{ik\zeta}\right) e^{i\alpha \ln k\zeta},$$

$$W_2 \sim \frac{-ie^{\frac{1}{2}\pi\alpha}}{\Gamma(1-i\alpha)} \frac{e^{ik\zeta}}{k\zeta} e^{-i\alpha \ln k\zeta}.$$

Функции  $W_1$  и  $W_2$ , будучи умножены на  $e^{ikz}$ , представляют соответственно падающую и рассеянную волны. Нас интересует падающая волна с единичной амплитудой; полную волновую функцию, характеризующую рассеяние, мы выберем поэтому в виде <sup>1)</sup>

$$\psi(r, \theta) = e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha} \Gamma(1+i\alpha) e^{ikz} {}_1F_1(-i\alpha; 1; ik\zeta), \quad (3.15)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi ZZ' e^2}{h\nu}, \quad \zeta = r - z = r(1 - \cos \theta).$$

Асимптотическая форма этой функции

$$\psi \sim I + Sf(\theta),$$

где

$$I = \left[ \frac{1-\alpha^2}{ik} (r-z) \right] \exp [ikz + i\alpha \ln k(r-z)],$$

$$S = r^{-1} \exp (ikr - i\alpha \ln kr),$$

$$f(\theta) = \frac{ZZ' e^2}{2mv^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \exp [-i\alpha \ln (1 - \cos \theta) + i\pi + 2i\eta_0], \quad (3.16)$$

причем

$$e^{2i\eta_0} = \Gamma \frac{(1+i\alpha)}{(1-i\alpha)}.$$

Заметим, что  $Z'$  в этих формулах равно  $+2$  для  $\alpha$ -частиц и  $-1$  для электронов.

1) Зоммерфельд [4] полагает

$$\psi(r, \theta) = e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha} e^{ikr} \int_0^\infty x^{i\alpha} e^{-x} J_0(2\sqrt{ik\zeta x}) dx,$$

где  $J_0$  — функция Бесселя.

Волновой фронт падающей и рассеянной волн характеризуется соответственно функциями (3.10) и (3.11).

Интенсивность рассеяния  $I(\theta)$  определяется выражением

$$I(\theta) = |f(\theta)|^2 = \left[ \frac{ZZ'e^2}{2mv^2} \right]^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2},$$

т. е. формулой Резерфорда.

Примечание. В начале координат функция (3.15) дает

$$|\psi|^2 = \frac{2\pi\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}. \quad (3.17)$$

В случае сил отталкивания, действующих, например, между  $\alpha$ -частицей и ядром,  $\alpha$  положительно. Если  $\alpha$  велико и положительно; как, например, для медленных  $\alpha$ -частиц, то  $|\psi|^2$  в начале координат очень мало. Это означает, что к ядру приближается очень мало  $\alpha$ -частиц. Если  $\alpha$  велико и отрицательно, как, например, для медленных электронов, то  $|\psi|^2$  в начале координат достаточно велико — порядка  $|\alpha|$ . Если же  $\alpha$  мало, то функция (3.15) во всех точках пространства не отличается заметным образом от плоской волны  $e^{ikz}$ .

Условие малости  $\alpha$  является также условием применимости приближения Борна (см. гл. VII), рассматривающего  $V(r)$  как возмущение. В этом легко убедиться, выбирая при записи волнового уравнения за единицу длины  $1/k$ ,

$$\nabla^2\psi + \left(1 - \frac{2\alpha}{r}\right)\psi = 0.$$

### § 3. Обобщенные гипергеометрические ряды

В этом параграфе мы ознакомимся с некоторыми свойствами функции

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b \cdot 1} z + \frac{a(a+1)}{b(b+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \dots, \quad (3.18)$$

рассмотренной в § 2. В дальнейшем мы будем отбрасывать индексы при  $F$ , так как какими-либо другими функциями гипергеометрического типа мы пользоваться не будем. Функция  $M_{k, m}(z)$ , введенная Уиттекером [5] (конфлюэнтная гипергеометрическая функция), связана с функцией  ${}_1F_1$  соотношением

$$M_{k, m} = z^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m - k; 2m + 1; z\right).$$

Заметим, что  $F(a; b; z)$  является решением дифференциального уравнения

$$z \frac{d^2y}{dz^2} + (b - z) \frac{dy}{dz} - ay = 0. \quad (3.19)$$



Нас интересует асимптотическое разложение функции  $F(a; b; z)$ , справедливое для больших значений  $|z|$  при постоянных значениях  $a$  и  $b$ . Это разложение является общеизвестным [5]. Мы приведем его здесь в виду его важности для решения задач, связанных с кулоновыми силами, причем ограничимся рассмотрением того случая, когда  $b$  — целое положительное число, а  $z$  — комплексная величина.

Представим функцию  $F$  в виде интеграла, взятого по контуру. Для этого воспользуемся теоремой, согласно которой для любого положительного целого  $m$

$$\frac{1}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t-m-1} dt, \quad (3.20)$$

где  $\gamma$  — произвольный замкнутый контур, охватывающий начало координат и направленный против часовой стрелки. Доказательство этого соотношения элементарно.

Функция  $F$  может быть записана в следующей форме:

$$F(a; b; z) = (b-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{(b+n-1)!},$$

где  $c_n$  — коэффициент при  $x^n$  в разложении бинома  $(1-x)^{-a}$ . С помощью соотношения (3.20), полагая  $m = b+n-1$ , получаем

$$F(a; b; z) = \frac{(b-1)!}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \int_{\gamma} e^{t-b-n} dt.$$

Выбирая контур  $\gamma$  таким образом, чтобы для всех его точек удовлетворялось условие

$$\left| \frac{z}{t} \right| < 1, \quad (3.21)$$

мы можем представить порядок суммирования и интегрирования, так как ряд сходится при всех значениях  $t$ . В результате получаем

$$F(a; b; z) = \frac{(b-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-a} e^{t-b} dt. \quad (3.22)$$

Заметим, что, в силу соотношения (3.21), контур интегрирования  $\gamma$  должен охватывать точку  $t=z$ . Мы можем поэтому, не изменяя численного значения интеграла, преобразовать  $\gamma$  в любой замкнутый контур, охватывающий точки  $t=0$  и  $t=z$ . Ясно, далее, что выражение, стоящее под знаком интеграла, является однозначной функцией  $t$ .

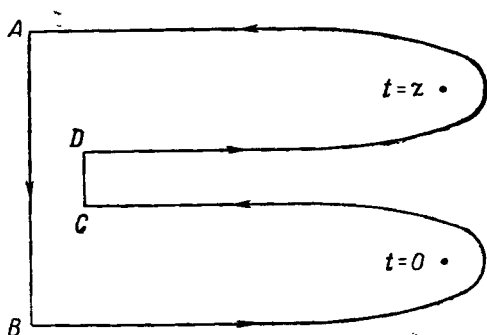
Для нахождения асимптотического разложения функции (3.22) преобразуем контур  $\gamma$  в контур  $\gamma'$ , изображенный на фиг. 8.

Благодаря наличию множителя  $e^t$  под знаком интеграла те участки контура  $\gamma'$ , для которых вещественная часть  $t$  велика и отрицательна, существенной роли не играют. Если части  $AB$  и  $CD$  контура  $\gamma'$  (см. фиг. 8) мы будем удалять на бесконечное расстояние от мнимой оси, то выражение (3.22) можно будет заменить суммой двух интегралов, один из которых берется по нижней части контура, а другой — по верхней. Положим соответственно

$$F(a; b; z) = W_1(a; b; z) + W_2(a; b; z), \quad (3.23)$$

где

$$W_1(a; b; z) = \frac{(b-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-a} e^{t-b} dt,$$



Фиг. 8.

а  $\gamma_1$  принимает значения от  $-\infty$  до  $-\infty$  при обходе начала координат против движения часовой стрелки. Функция  $W_2$  определяется точно таким же выражением, с той разницей, что интегрирование производится по контуру, охватывающему точку  $t = z$ . Полагая в выражении для  $W_2$

$$t - z = u,$$

мы преобразуем тем самым контур интегрирования в контур  $\gamma_1$ , охватывающий начало координат, и получаем

$$W_2(a; b; z) = \frac{(b-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_1} u^{-a} e^{u+z} \frac{du}{(u+z)^{-a+b}}.$$

Найдем теперь асимптотическое разложение функций  $W_1$  и  $W_2$ .  
Имеем

$$W_1 = \frac{(b-1)!}{2\pi i} (-z)^{-a} \int_{\gamma_1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a} e^{t-b} dt,$$

$$W_2 = \frac{(b-1)!}{2\pi i} (+z)^{a-b} e^z \int_{\gamma_1} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{a-b} e^{t-a} dt.$$

Разлагая в ряд  $\left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a}$  и  $\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{a-b}$  и воспользовавшись соотношением [5]

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{t-t^x} dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} W_1 &\sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} G(a, a-b+1; -z), \\ W_2 &\sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{z z^{a-b}} G(1-a, b-a; z), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где функции  $G$  — полусходящиеся ряды вида

$$G(\alpha, \beta; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{z \cdot 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{z^2 \cdot 2!} + \dots$$

Подставляя (3.24) в (3.23), находим искомое асимптотическое разложение функции  $F$ .

#### § 4. Радиальные волновые функции для состояний с положительной энергией в кулоновом поле

Рассмотрим теперь решения уравнения (3.6). Хотя законы рассеяния чисто кулоновым полем можно найти, не прибегая к этим решениям (подобно тому, как это было сделано в § 2), они необходимы при рассмотрении любой задачи о рассеянии, если имеет место отклонение от кулонова поля. Так, например, они имеют существенное значение при исследовании различных вопросов ядерной физики (см. § 5 и гл. XIII, § 1 и 2).

Если мы положим  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ ,  $\alpha = ZZ'e^2/\hbar v$ ,  $\rho = kr$ , то уравнение (3.6) примет вид

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dL}{d\rho} \right) + \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\rho} - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right] L = 0. \quad (3.25)$$

Подстановка  $L = \rho^n e^{i\rho} F$  приводит к уравнению

$$\rho \frac{d^2 F}{d\rho^2} + 2(n+1+i\rho) \frac{dF}{d\rho} + 2[(n+1)i - \alpha] F = 0,$$

которое в результате подстановки

$$\rho = \frac{1}{2} iz$$

дает

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (2n+2-z) \frac{dF}{dz} - (i\alpha + n+1) F = 0. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) имеет такой же вид, как и уравнение (3.19).

Имеются два независимых решения этого уравнения:

$$W_{1,2}(i\alpha + n + 1, 2n + 2, z).$$

**1. Ограниченное решение  $L_n$ .** Решение, регулярное в начале координат, имеет вид

$$F(ia + n + 1, 2n + 2, z) = W_1 + W_2. \quad (3.27)$$

Асимптотическое разложение этого решения может быть найдено с помощью соотношений (3.24).

Если в качестве ограниченного решения уравнения (3.6) мы выберем

$$L_n = e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha} \frac{|\Gamma(n+1+ia)|}{(2n+1)!} (2kr)^n e^{ikr} F(ia + n + 1; 2n + 2; -2ikr), \quad (3.28)$$

то

$$L_n \sim (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n - \alpha \ln 2kr\right),$$

причем

$$\eta_n = \arg \Gamma(n + 1 + ia).$$

**2. Неограниченное решение  $K_n$ .** В качестве второго решения  $K_n$  удобно выбрать решение, имеющее асимптотическую форму

$$K_n \sim (kr)^{-1} \cos\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n - \alpha \ln 2kr\right), \quad (3.29)$$

так что

$$K_n = ie^{-\frac{1}{2}\pi\alpha} \frac{|\Gamma(n+1+ia)|}{(2n+1)!} (2kr)^n e^{ikr} (W_1 - W_2). \quad (3.30)$$

Разложение в ряд функции  $K_n$  при  $n=0$  было найдено Секслем [6], затем распространено Иостом, Уилером и Брейтом [7] на случай любых значений  $n$ . Было показано, что

$$K_n = \frac{1}{\pi} (e^{2\pi\alpha} - 1) \left\{ \ln 2kr + 2\gamma - \sum_1^{2n+1} s^{-1} + \sum_1^n \frac{s}{s^2 + \alpha^2} + \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(ia)}{\Gamma(ia)} \right\} L_n + H_n, \quad (3.31)$$

где

$$H_n = 2e^{\frac{1}{2}\pi\alpha} \operatorname{Re} e^{i(kr-\eta_n)} \left\{ \sum_{s=0}^{2n} \frac{(-i)^s (2n-s)!}{s! \Gamma(n-s+1-ia)} (2kr)^{s-n-1} - \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi\alpha \sum_{s=1}^{\infty} (-i)^s \frac{\Gamma(n+1+s+ia)}{(2n+1+s)! s!} (2kr)^{s+n} a_{ns} \right\};$$

$$a_{ns} = \sum_{t=1}^s \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{2n+1+t} - \frac{1}{n+t+ia} \right).$$

Здесь  $\text{Re}$  обозначает вещественную часть соответствующего выражения;  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

**3. Численный расчет  $L_n$  и  $K_n$ .** Функции (3.28) и (3.31) неудобны для численных расчетов, так как они содержат мнимые величины. Иост, Уилер и Брейт [7] нашли разложения решений, содержащие только вещественные величины и удобные для использования при условии, что  $\rho$  не слишком велико. Они исследовали также методы вычислений, пригодные в тех случаях, когда ряды сходятся слишком медленно. Таблицы этих функций для полей отталкивания составлены для  $n=0, 1, 2$  и широкой области значений  $\alpha$  и  $kr$ . [7, 8].

### § 5. Проницаемость потенциального барьера для случая кулонова поля

Частица с зарядом  $Ze$ , приближаясь к атомному ядру с зарядом  $Z'e$ , отталкивается кулоновым полем  $ZZ'e^2/r$  на расстояния  $r$ , превышающие радиус ядра  $R$ . Определим вероятность того, что частица с данной начальной кинетической энергией ( $< ZZ'e^2/R$ ) и данным моментом количества движения окажется на расстоянии  $R$  от ядра, несмотря на наличие сил отталкивания. Пусть  $r^{-1}G_n$  — собственное значение радиальной волновой функции, описывающее движение частицы с данным моментом количества движения  $[n(n+1)]^{1/2}\hbar$  в видоизмененном кулоновом поле и имеющее асимптотическую форму

$$G_n \sim \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi - \alpha \ln 2kr + \eta_n + \sigma_n\right), \quad (3.32)$$

где  $\sigma_n$  — дополнительный сдвиг фазы, обусловленный отклонением от кулонова поля при  $r < R$ . В таком случае  $G_n^2(R)$  может быть определено как проницаемость потенциального барьера  $e^{-P_n}$ .

Наиболее удобным способом оценки  $P_n$  является применение метода приближения Джеффриса (см. гл. I, § 6). Уравнение, которому удовлетворяет  $G_n$ , может быть записано в виде

$$\frac{d^2 G_n}{dr^2} + f(r) G_n = 0,$$

где

$$f(r) = k^2 - \frac{8\pi^2 m ZZ'e^2}{h^2 r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \quad (r > R). \quad (3.33)$$

По классической теории при наименьшем значении  $R$ , равном  $R_0$ , имеем  $f(R_0) = 0$ . При  $r > R_0$  решение носит колебательный характер. При  $r < R_0$  может быть найдено экспоненциально возрастающее или экспоненциально убывающее решение. Нас интересует такое решение, которое убывает по мере уменьшения

при  $r < R_0$ . Согласно приближению Джеффриса, это решение имеет вид

$$G_n = \left[ \frac{-f(r)}{k^2} \right]^{-1/4} \exp \left\{ \int_{R_0}^r [-f(r)]^{1/2} dr \right\} (r < R_0),$$

$$G_n = \left[ \frac{f(r)}{k^2} \right]^{-1/4} \sin \left\{ \frac{1}{4} \pi + \int_{R_0}^r [f(r)]^{1/2} dr \right\} (r > R_0).$$
(3.34)

Отсюда для вероятности проникновения имеем

$$e^{-P_n} = \left[ \frac{-k^2}{f(R)} \right]^{1/2} \exp \left\{ 2 \int_{R_0}^R [-f(r)]^{1/2} dr \right\}. \quad (3.35)$$

Соотношение (3.35) фактически основано на двух различных приближениях. Прежде всего при  $r < R$  мы пренебрегли влиянием взаимодействия на волновую функцию  $L_n$ , так что она выбрана в форме (3.28), применимой для чисто кулонова поля. Повидимому, эта функция является хорошим приближением, если степень проникновения мала. Следующее приближение заключается в том, что функция (3.28) взята в приближении Джеффриса. Иост, Уилер и Брейт [7], исследовавшие точность этого метода, нашли, что, в то время как (3.35) является в этом отношении хорошим приближением, точность решения на много повышается в результате замены  $n(n+1)$  в выражении для  $f(r)$  на  $(n + \frac{1}{2})^2$  (см. гл. VII, § 6).

Подставляя  $f(r)$  из (3.33), после интегрирования получаем

$$P_n = -2\beta(y+1-x)^{1/2} + \alpha \left[ \pi + 2 \arcsin \frac{1-2x}{(1+4xy)^{1/2}} \right] +$$

$$+ 2[n(n+1)]^{1/2} \ln \left[ \frac{1+2y+2y^{1/2}(y+1-x)^{1/2}}{(1+4xy)^{1/2}} \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{x}{1+y-x}, \quad (3.36)$$

где

$$\beta = \left( \frac{8\pi^2 m Z Z' e^2 R}{h^2} \right)^{1/2}, \quad x = \frac{k^2 R^2}{\beta^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{n(n+1)}{\beta^2}$$

представляют собой соответственно отношения исходного значения кинетической энергии и исходного значения вращательной энергии к высоте барьера при  $r = R$ . Необходимо только заменить в этой формуле  $n(n+1)$  на  $(n + \frac{1}{2})^2$ , если желательна более высокая точность результатов.

**Дисперсионные формулы для рассеяния кулоновым полем.** При выводе дисперсионной формулы (2.64) для сечения рассея-

ния предполагалось, что, помимо силового поля, сосредоточенного в области радиуса  $a$ , имеется еще дополнительное поле, потенциал которого постепенно убывает с расстоянием и обращается на бесконечности в нуль быстрее, чем  $r^{-2}$ . Если дополнительное поле есть кулоново поле  $ZZ'e^2/r$ , так что при  $r > a$  функция, введенная в рассмотрение в гл. II, § 7, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G_n}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{ZZ'e^2}{r} \right] G_n = 0, \quad (3.37)$$

то мы можем попрежнему определить величину  $f$  с помощью соотношений (2.63) и (2.64), однако  $G_n^+$  должно являться решением уравнения (2.37), имеющим асимптотическую форму

$$G_n^+ \sim \exp \left[ i \left( kr - \frac{1}{2} n\pi - \alpha \ln 2kr \right) \right], \quad (3.38)$$

где  $\alpha$  имеет тот же смысл, что и в § 4. Соотношение (2.66) при этом сохраняется, но  $\eta_n$  теперь определено таким образом, что собственное решение уравнения для движения с моментом количества движения, равным  $[n(n+1)]^{1/2} \hbar$ , в поле

$$V = \frac{ZZ'e^2}{r} \quad (r > a), \quad (3.39)$$

$$V \rightarrow \infty \quad (r = a)$$

имеет асимптотическую форму  $\sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi - \alpha \ln 2kr + \eta_n \right)$ .

Мы имеем теперь при  $r = a$

$$f - f^* = \frac{2i}{ka^2} [K_n^2(a) + L_n^2(a)]^{-1},$$

где  $L_n$  и  $K_n$  определяются соответственно соотношениями, приведенными выше в § 4. Это дает [см. формулу (2.68)]

$$\Gamma_s = \frac{\hbar^2}{ma} \frac{1}{ka} \frac{|\mathcal{G}_s(a)|^2}{K_n^2(a) + L_n^2(a)}. \quad (3.40)$$

Для определения функций  $K_n$  и  $L_n$  мы можем использовать приближение Джеффриса. Если при  $r = a$  кулонова энергия отталкивания превышает исходное значение кинетической энергии, то

$$\left. \begin{matrix} K_n \\ L_n \end{matrix} \right\} = [-k^2 f(a)]^{-1/4} \exp \left\{ \pm \int_{R_0}^a -f(r)^{1/2} dr \right\},$$

где  $f(r)$  определяется формулой (3.33). При малой «степени проникновения» находим

$$\Gamma_s = \frac{k\hbar^2}{m} e^{-P_n} |\mathcal{G}_s(a)|^2,$$

где  $P_n$  удовлетворяет уравнению (3.35).

Сопоставление этого результата с формулой (2.69) для случая  $n = 0$  показывает, что влияние кулонова поля, как и следовало ожидать, сводится к появлению дополнительного множителя, характеризующего степень проникновения этого поля.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Rutherford, Chadwick and Ellis, Radiations from Radioactive Substances, Cambridge, 1930.
2. Gordon, Zs. f. Phys., 48, 180 (1928).
3. Temple, Proc. Roy. Soc., A121, 673 (1928).
4. Sommerfeld, Ann. d. Phys., 11, 257 (1931).
5. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1934.
6. Sexl, Zs. f. Phys., 56, 72 (1929); 81, 163 (1933).
7. Yost, Wheeler and Breit, Phys. Rev., 49, 174 (1936).
8. Yost, Wheeler and Breit, Terr. Mag. Atm. Electr., декабрь, 443 (1935); Wicker, там же, декабрь, 390 (1936).



## Глава IV

### СПИН ЭЛЕКТРОНА

#### § 1. Магнитный момент атома

При рассмотрении некоторых задач теории столкновений оказывается необходимым принимать во внимание спин электрона.

Гипотеза о том, что электрон обладает осью симметрии и, следовательно, четвертой степенью свободы, была введена в 1925 г. еще до развития новой квантовой механики, с целью объяснения того факта, что для классификации энергетических уровней атома необходимы четыре квантовых числа. В новой квантовой теории методы описания спина были разработаны Паули [1] и Дарвином [2]. Основываясь на чисто релятивистской трактовке волнового уравнения, Дирак [3, 4] показал затем, что существование спина является необходимым следствием принципа относительности. В этой главе мы будем сперва придерживаться трактовки Паули, оказывающейся достаточной в тех случаях, когда спин влияет лишь на свойства симметрии волновых функций, тогда как действием спиновых сил можно пренебречь. Это имеет место во всех тех случаях, когда скорость рассматриваемых электронов мала по сравнению со скоростью света. Мы покажем, далее, как эта теория связана с теорией Дирака и рассмотрим те задачи теории столкновений, при решении которых спиновыми силами пренебречь нельзя.

В релятивистской теории Дирака спиновые свойства электрона могут быть установлены на основании весьма общих соображений. В более элементарной теории спиновые свойства определяют обычно на основании экспериментальных данных и описывают их в терминах понятий волновой механики. Мы будем исходить сперва из того факта, что, согласно опытам Штерна — Герлаха, атом с одним электроном в  $S$ -состоянии во внешней оболочке обладает магнитным моментом, равным  $eh/4\pi mc$  (одному магнетону Бора). Для простоты мы будем говорить об атоме водорода.

Заметим прежде всего, что если направление магнитного момента водородного атома первоначально не было известно, то не существует такого опыта, с помощью которого оно могло бы быть определено. В этом можно убедиться следующим образом. Предположим, что сделана попытка измерить магнитное поле  $H$  вне атома с целью определения направления магнитного момента этого атома. Подобную попытку можно было бы осуще-

ствить, например, пропуская электрон мимо атома и наблюдая отклонение, испытываемое при этом электроном. Порядок величины такого отклонения может быть определен следующим образом. Если электрон проходит на расстоянии  $r$  от атома, то порядок величины  $H$  на этом расстоянии приближенно равен

$$H \sim \frac{M}{r^3} \quad \left( M = \frac{eh}{4\pi mc} \right).$$

Сила<sup>1)</sup>, действующая на электрон, равна  $eHv/c$ . Эта сила действует в течение промежутка времени порядка  $r/v$  и создает, таким образом, дополнительный импульс порядка  $eHr/c$ . Отклонение, вызываемое такой силой, равно, следовательно,  $eHr/mcv$ . Для того чтобы это отклонение могло быть наблюдеено, оно должно превышать естественную спектральную ширину пучка волн, характеризующих электроны. Если  $\Delta r$  — геометрическая ширина этого пучка, то его спектральная ширина равна  $h/mv\Delta r$ . Должно соблюдаться, таким образом, следующее условие:

$$\frac{eHr}{mcv} > \frac{h}{mv\Delta r}.$$

Подставляя сюда значение  $H$ , получаем

$$\frac{\Delta r}{r} > \frac{r}{r_e} \left( r_e = \frac{e^2}{mc^2} \sim 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \right).$$

Для того чтобы отклонение электрона оказалось наблюдаемым,  $r$  должно быть больше радиуса атома. Мы видим, таким образом, что  $\Delta r$  по крайней мере в 20 000 раз больше, нежели  $r$ . Изменение отклонения электрона оказывается поэтому невозможным.

Момент отдельного атома может быть определен только с помощью опыта Штерна—Герлаха, в процессе которого атом испытывает возмущающее воздействие. Опыт Штерна—Герлаха показывает, что в магнитном поле  $H$  атом водорода приобретает дополнительную энергию, равную  $\pm MH$ ; оказывается, далее, возможным разделить атомы, обладающие двумя различными возможными значениями энергии. Мы видели, что направление магнитного момента атома не может быть измерено; будем поэтому считать, что если направление магнитного момента некоторого атома характеризуется единичным вектором  $\mathbf{I}$ , то это значит, что этот атом прошел через неоднородное магнитное поле  $H$  направления  $\mathbf{I}$  и что он находился в отклоненном пучке, обладая энергией  $-HM$ .

Выясним теперь, отличается ли чем-либо такой атом от любого другого атома? Можно ли сделать какие-либо утвер-

<sup>1)</sup> Если пренебречь влиянием спина электрона и рассматривать последний как точечный заряд. (Прим. ред.)

ждения относительно дальнейшего поведения такого атома в отличие от всех других атомов? Мы видели, что направление магнитного момента атома измерено быть не может. Можно, однако, подвергнуть атом воздействию второго неоднородного поля  $H'$ , обладающего новым направлением  $I'$ , и выяснить, будет ли атом обладать в этом новом поле энергией  $\pm H'M$ . Зная условия, в которых атом находится до такого опыта, можно определить вероятность того, что атом приобретет одно из этих двух значений энергии<sup>1)</sup>. В том случае, когда направления  $I$  и  $I'$  совпадают, энергия атома безусловно будет равняться  $-H'M$ . Покажем теперь, как вычислить интересующую нас вероятность в более общем случае. Для этого следует прежде всего перейти к понятиям и обозначениям квантовой механики.

Атом, магнитный момент которого ориентирован в направлении  $I$ , будем описывать волновой функцией

$$\chi_I(s).$$

Аргумент волновой функции  $s$  должен характеризовать энергию, которую атом приобрел бы при прохождении через второе неоднородное магнитное поле. Выберем некоторое произвольное направление в пространстве, например ось  $z$ , и обозначим через  $H'M_s$  ту энергию, которой обладал бы атом, если бы он прошел через магнитное поле  $H'$ , обладающее этим направлением. Вероятность того, что эта энергия будет иметь некоторое данное значение, определяется величиной  $|\chi(s)|^2$ . Мы знаем, что  $\chi$  отлично от нуля только при  $s = \pm 1$ . Функция  $\chi$  имеет, таким образом, только два отличных от нуля значения:  $\chi(+1)$  и  $\chi(-1)$ , квадраты модулей которых определяют вероятность того, что энергия атома будет равна  $\pm MH'$ . Ясно, что  $|\chi_I(s)|^2$  будет зависеть только от угла между направлением  $I$  и направлением оси  $z$ .

Если вектор  $I$  параллелен оси  $z$ , так что энергия атома равна  $-MH$ , то

$$\begin{aligned}\chi(+1) &= 0, \\ \chi(-1) &= 1.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Обозначим эту функцию через  $\chi_\beta(s)$ . Через  $\chi_\alpha$  обозначим соответствующую функцию для того случая, когда  $I$  имеет противоположное направление:

$$\begin{aligned}\chi_\alpha(+1) &= 1, \\ \chi_\alpha(-1) &= 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Заметим, что определенные таким образом функции  $\chi_\alpha$  и  $\chi_\beta$  нормированы и взаимно ортогональны.

<sup>1)</sup> За исключением того случая, когда поле меняется столь резко, что атом переходит из поля  $H$  в поле  $H'$  за время, малое по сравнению с периодом ларморовой прецессии; в таком случае расщепление уровня не происходит [5].

Волновые функции  $\chi_\alpha$  и  $\chi_\beta$  описывают два стационарных состояния системы, т. е. два состояния, энергии которых известны. Общее состояние системы характеризуется волновой функцией

$$A\chi_\alpha + B\chi_\beta,$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные комплексные постоянные, удовлетворяющие условию нормировки

$$AA^* + BB^* = 1.$$

Основываясь на инвариантности по отношению к повороту координатных осей, можно показать [3], что если направление магнитного момента атома определяется сферическими координатами  $\theta$  и  $\varphi$  и если параметр  $s$  характеризует энергию атома в магнитном поле, направленном по оси  $z$  ( $\theta = 0$ ), то

$$\frac{B}{A} = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \quad (4.3)$$

Пренебрегая произвольным фазовым множителем, получаем

$$A = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad B = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}.$$

Вероятность того, что в новом поле атом будет обладать энергией  $-MH$ , определяется, таким образом, величиной  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ , а вероятность обладания атомом энергией  $+MH$  определяется величиной  $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ . Вероятность нахождения электрона на данном расстоянии  $r$  от ядра будет при этом приблизительно такой же, как если бы атом не испытывал воздействия магнитного поля; она определяется квадратом волновой функции

$$\psi(r) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}.$$

Полная волновая функция атома представляет собой произведение вида

$$\psi(r) \chi(s).$$

Эта волновая функция является лишь приближенной, так как распределение заряда в атоме может до некоторой степени зависеть также и от ориентации спина в магнитном поле.

Можно, однако (более точно), описать состояние атома с помощью волновой функции вида

$$\psi(\mathbf{r}, s) \quad (s = 1, -1). \quad (4.4)$$

Эта функция может быть интерпретирована следующим образом: величина

$$|\psi(\mathbf{r}, s)|^2 dx dy dz \quad (s = 1)$$

есть вероятность того, что в магнитном поле, направленном по оси  $z$ , атом будет обладать энергией  $+MH$ , а электрон будет при этом находиться в элементе объема  $dx dy dz$ .

Вид функции  $\psi(\mathbf{r}, s)$  может быть определен лишь с помощью релятивистской теории электрона, предложенной Дираком. Заметим, что совершенно безразлично — пользуемся ли мы волновой функцией (4.4) или же записываем две отдельные функции от  $\mathbf{r}$ :  $\psi_a(\mathbf{r})$  и  $\psi_b(\mathbf{r})$ . При скоростях электрона, значительно меньших скорости света, как  $\psi_a$ , так и  $\psi_b$  являются приближенными решениями уравнения Шредингера.

## § 2. Магнитный момент электрона

Выше речь шла о магнитном моменте атома. Мы не будем останавливаться здесь на рассмотрении опытных данных, полученных на основании изучения аномального эффекта Зеемана, гиромангнитного эффекта и т. д., свидетельствующих о том, что электрон обладает четвертой степенью свободы, магнитным моментом  $eh/4\pi mc$  и механическим моментом  $\frac{1}{2}h/2\pi$ . Ограничимся

лишь замечанием, что, согласно теории Шредингера, основное состояние атома водорода является невырожденным и, следовательно, для объяснения расщепления линий в магнитном поле, обнаруженного опытами Штерна—Герлаха, необходимо предположить, что электрон обладает четвертой степенью свободы.

Современные данные о том, что электроны обладают магнитным моментом, были получены на основании излучения их движения в атомах. При изучении явлений столкновения необходимо выяснить, какой смысл может иметь магнитный момент свободного электрона. Точно так же, как и в случае атома, определение магнитного момента электрона с помощью магнетометрических опытов оказывается невозможным. Это может быть показано [6] с помощью следующих соображений, принадлежащих Бору. Предположим, что положение электрона известно с точностью  $\Delta r$  и что мы хотим определить магнитный момент этого электрона в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от него. Какие-либо заключения относительно магнитного момента электрона могут быть сделаны на основании наших измерений лишь в том случае, если

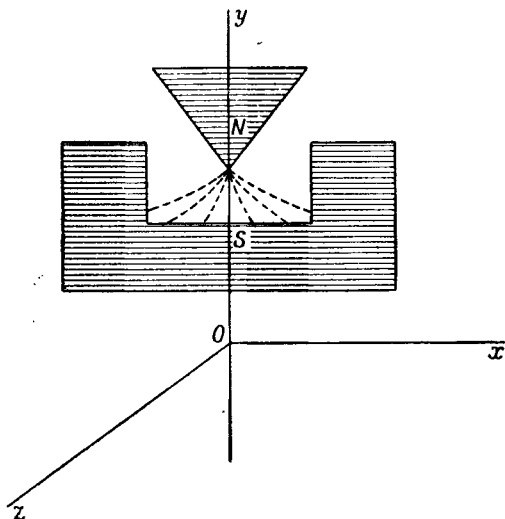
$$\Delta r \ll r. \quad (4.5)$$

Поле  $H$ , которое мы хотим измерить, будет при этом порядка

$$H \sim \frac{M}{r^3}.$$

Если электрон движется со скоростью  $v$ , то при его движении

будет создаваться магнитное поле порядка  $ev/cr^2$ ; напряженность этого поля не может быть определена точно, так как величина  $v$  нам точно не известна. На основании измерений магнитного



Фиг. 9.

поля можно, таким образом, сделать какие-либо заключения относительно магнитного момента электрона, лишь при условии, если

$$\frac{M}{r^3} \gg \frac{e\Delta v}{cr^2},$$

где  $\Delta v$  — неточность в определении  $v$ . Согласно принципу неопределенности,

$$\Delta r \cdot \Delta v > \frac{h}{m},$$

что приводит к неравенству

$$\Delta r \gg r,$$

противоречащему неравенству (4.5). Отсюда можно заключить, что измерение магнитного момента электрона с помощью опытов такого рода невозможно.

Покажем теперь, что опыт Штерна—Герлаха не дает возможности определить магнитный момент свободного электрона или же получить пучок электронов, магнитные моменты которых обладают одним и тем же направлением. Это доказательство также принадлежит Бору.

Предположим, что пучок электронов движется параллельно оси  $z$  (т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа; см. фиг. 9). На фиг. 9 указаны полюса магнита, а также силовые линии.

Опыт ставится с целью наблюдения расщепления пучка в направлении  $y$ . Сила, действующая на электрон и стремящаяся расщепить пучок, равна

$$\pm M \frac{\partial H_y}{\partial y}. \quad (4.6)$$

На электроны будет также действовать сила, обусловленная их движением в магнитном поле. Электроны, движущиеся в плоскости  $Oyz$ , будут находиться под действием силы, направленной вдоль  $Ox$ . Эта сила перпендикулярна к направлению расщепления, она будет вызывать лишь смещение пучка вправо или влево. Однако электроны, не находящиеся в плоскости  $Oyz$ , будут испытывать воздействие силы, направленной вдоль  $Oy$ , поскольку силовые линии в неоднородном магнитном поле не могут быть прямолинейными и, следовательно, поле  $H$  должно иметь составляющую  $H_x$  по оси  $Ox$ . Эта сила будет порядка

$$\frac{evH_x}{c}. \quad (4.7)$$

Сравним ее с силой (4.6), стремящейся расщепить пучок. На расстоянии  $\Delta x$  от плоскости  $Oyz$  составляющая  $H_x$  равна  $\frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x$ , или, так как  $\operatorname{div} H = 0$ , равна  $-\frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta x$ . Силы, определенные выражениями (4.6) и (4.7), относятся, следовательно, друг к другу, как

$$\frac{eh}{4\pi mc} \frac{\partial H_y}{\partial y} : \frac{ev}{c} \frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta x$$

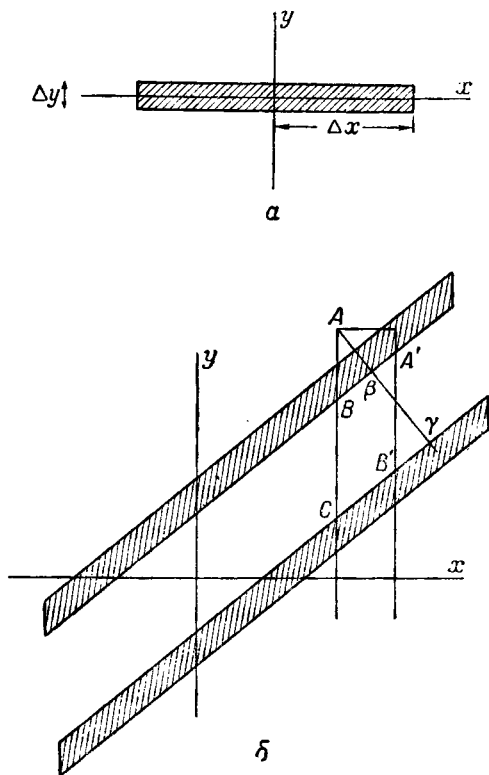
или же как

$$1 : \frac{4\pi \lambda x}{\lambda}, \quad (4.7a)$$

где  $\lambda$  — длина волны, характеризующей электроны, равная  $h/mv$ . Предположим теперь, что  $\pm \Delta x$  — расстояние двух границ пучка от плоскости  $Oyz$ . Поскольку  $\Delta x$  должно быть больше  $\lambda$ , ясно, что границы пучка отклонены в противоположных направлениях на углы, превышающие угол расщепления, который мы хотим измерить.

Для доказательства того, что наблюдение расщепления невозможно, рассмотрим след, оставляемый электронным пучком на фотографической пластинке. Предположим, что можно получить более тонкие пучки, нежели это допускается принципом неопределенности, так что толщина  $\Delta y$  пучка в направлении  $y$  могла бы быть бесконечно малой. До прохождения пучка через магнитное поле его поперечное сечение будет иметь форму, изображенную на фиг. 10, а. После прохождения через поле

поперечное сечение пучка будет иметь форму, изображенную на фиг. 10, б, где показан след, оставленный пучком на фотографической пластинке. Наблюдающийся перекося обусловлен лорентцовыми силами, рассмотренными выше. Если  $ABC$  и  $A'B'$  — две линии, параллельные  $Oy$  и находящиеся на расстоянии  $\lambda$



Фиг. 10

друг от друга, то из (4.7а) следует, что перекося столь велик, что  $AB > BC$ . Если линия  $A\beta\gamma$  проведена перпендикулярно к следам, оставленным электронным пучком, то  $A\beta > \beta\gamma$ . Но  $A\beta < \lambda$  и, следовательно, расстояние  $\beta\gamma$  между следами меньше, нежели  $\lambda$ . Максимальное возможное расстояние между следами равно, таким образом,  $\lambda$ . В действительности мы не можем получить след ширины порядка  $\lambda$ . Измерение расщепления пучка оказывается, таким образом, невозможным.

На основании этих соображений мы должны прийти к заключению, что приписывание магнитного момента свободному электрону лишено смысла. Если, однако, электрон находится в атоме



в  $s$ -состоянии, то атом обладает магнитным моментом, и это обстоятельство является свойством электрона. Как мы увидим, согласно релятивистской теории электрона, принадлежащей Дираку, этот магнитный момент в общем случае отличен от  $eh/4\pi mc$ ; он равен  $eh/4\pi mc$  только тогда, когда скорость электрона в атоме мала по сравнению со скоростью света (см. § 3). Согласно теории Дирака, связанный электрон, находящийся в своем основном состоянии в поле ядра с зарядом  $Ze$ , создает магнитный момент, равный<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{1-\gamma^2}}{4\pi mc} eh \quad \left( \gamma = \frac{2\pi Ze^2}{hc} \right). \quad (4.8)$$

Утверждение о том, что свободный электрон обладает четырьмя степенями свободы, имеет, однако, совсем иной смысл, так как едва ли можно себе представить, что в атоме электрон обладает четырьмя степенями свободы, в свободном же состоянии — тремя. Интересно выяснить в связи с этим, существуют ли какие-либо опыты, с помощью которых эта четвертая степень свободы могла бы быть обнаружена? Можно ли получить «поляризованный» в каком-либо смысле пучок электронов и можно ли обнаружить эту поляризацию?

В настоящее время нет каких-либо определенных экспериментальных данных, позволяющих ответить на этот вопрос; теоретические соображения показывают, однако, что как получение такого поляризованного пучка, так и обнаружение его поляризации являются принципиально возможными. Рассмотрим следующий опыт. Предположим, что пучок атомов получен с помощью опыта Штерна—Герлаха, причем оси всех атомов обладают одним и тем же направлением, например параллельны оси  $z$ . Предположим, далее, что эти атомы освещаются ультрафиолетовым светом, что приводит к испусканию из них электронов. Получаемый при этом электронный пучок можно назвать поляризованным. Действительно, предположим, что электрон ведет себя подобно маленькому магниту, и выясним, могут ли силы, достаточные для вырывания электрона из атома, вызвать заметное изменение направления его магнитного момента. Следующие чисто классические соображения о порядке величины сил показывают, что это невозможно и следует поэтому считать, что магнитные моменты испускаемых электронов обладают одним и тем же направлением<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Эта формула принадлежит Брейту [7] (см. § 3 настоящей главы).

<sup>2)</sup> Имеется, конечно, некоторая малая вероятность того, что направление спиновой оси изменится на обратное; ближайшее рассмотрение показывает, что эта вероятность порядка  $(1/137)^2$ . Методы, с помощью которых мог бы быть получен вполне поляризованный пучок электронов, не известны.

Если некоторое электрическое поле  $E$  действует на электрон в течение промежутка времени  $t$ , то электрон приобретает кинетическую энергию, равную  $\frac{1}{2}(Ee)^2 t^2/m$ . Для удаления электрона из атома ему должна быть сообщена энергия порядка  $me^4/h^2$ . Таким образом, для того чтобы удалить электрон из атома, необходимо, чтобы произведение  $E$  на  $t$  было порядка  $Et \sim em/h$ . Средняя скорость электрона в атоме равна  $e^2/h$ . Среднее значение момента пары сил, действующей на электрон и обусловленной его движением в электрическом поле  $E$ , будет порядка

$$E \frac{eh}{mc} \frac{e^2}{h} \frac{1}{c},$$

т. е.  $Ee^3/mc^2$ . Для того чтобы ориентация электрона изменилась на угол порядка  $\pi$ , эта пара сил должна вызвать изменение момента количества движения порядка  $h$ . Необходимое для этого время  $T$  определяется соотношением

$$T \frac{Ee^3}{mc^2} \sim h,$$

откуда следует, что

$$ET \sim \frac{hmc^2}{e^3}.$$

Мы имеем, таким образом,

$$\frac{ET}{Et} \sim \left(\frac{hc}{e^2}\right)^2,$$

т. е.

$$T \gg t.$$

Если бы поляризация пучка не могла быть каким-либо образом обнаружена экспериментально, то не имело бы, конечно, никакого смысла говорить о ней. Эту поляризацию можно было бы попытаться обнаружить, например, следующим образом. Предположим, что пучок электронов проходит через газ, содержащий ионизованные атомы, и что некоторые из электронов при этом захватываются ионами. Если бы с помощью опыта Штерна—Герлаха удалось установить, что образующиеся нейтральные атомы являются поляризованными, то мы имели бы тем самым метод обнаружения поляризации. Приведенные выше соображения относительно порядка величины сил показывают, что такая постановка опыта принципиально возможна; более строгое доказательство может быть дано на основе теории Дирака.

Другой, менее непосредственный, однако, по всей вероятности, более интересный с практической точки зрения метод получения и исследования поляризованного пучка электронов будет рассмотрен в § 4.

Мы видим, таким образом, что спин свободного электрона может быть описан с помощью той же волновой функции  $\chi_I(s)$ , которой мы пользовались выше для описания магнитного момента атома. Функция

$$|\chi_I(s)|^2 \quad (s = \pm 1)$$

определяет вероятность того, что если электрон, обладающий магнитным моментом направления I, захвачен атомом, который помещен затем в неоднородное магнитное поле, то энергия этого атома равна  $\pm MH$ . Такая несколько сложная интерпретация квадрата амплитуды волновой функции является необходимой потому, что измерение энергии электрона в магнитном поле возможно лишь в том случае, когда электрон находится в атоме. Отметим, далее, что если мы утверждаем, что магнитный момент свободного электрона обладает данным направлением, то это означает, что этот электрон был выбит из соответствующим образом ориентированного атома<sup>1)</sup>.

Как и в случае связанного электрона, состояние свободного электрона полностью описывается волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}, s)$ . Если силы, действующие на электрон, столь малы, что направление спина остается постоянным на протяжении всего рассматриваемого опыта, то, как и прежде, эта функция может быть представлена в виде произведения

$$\psi(\mathbf{r}) \chi(s),$$

где  $\psi(\mathbf{r})$  — решение уравнения Шредингера. В остальных случаях форма функции  $\psi(\mathbf{r}, s)$  может быть найдена с помощью уравнений теории Дирака.

### § 3. Релятивистское волновое уравнение

Как известно, Дираку удалось показать, что получение волнового уравнения для электрона, которое было бы инвариантным по отношению к преобразованию Лорентца и линейным по отношению к дифференцированию по времени, возможно только в предположении, что электрон обладает четвертой степенью сво-

<sup>1)</sup> Принципиальное разграничение между случаем свободного и связанного электронов, проводимое авторами, нельзя считать правильным. В обоих случаях направление электронного спина может быть установлено в принципе одинаковым образом, вообще говоря, лишь статистически. При этом средняя или вероятная величина спина вместе с его направлением определяется однозначно видом волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, s)$ . Что касается опытного определения магнитного момента, то оно всегда предполагает воздействие на электрон некоторого внешнего магнитного поля, наличие которого, строго говоря, несовместимо с представлением о полной свободе электрона. Так, например, в однородном магнитном поле «свободный» электрон совершает квантованное движение, напоминающее колебание гармонического осциллятора. (Прим. ред.)

боды. Сделав такое предположение, можно, без помощи каких-либо дополнительных специальных допущений, показать, что теоретическое значение магнитного момента атома водорода должно совпадать с его экспериментально наблюдаемой величиной. Знакомство с элементами теории Дирака существенно для дальнейшего анализа рассматриваемого нами вопроса; мы остановимся поэтому вкратце на основных положениях этой теории.

Согласно теории Дирака, состояние электрона описывается четырьмя волновыми функциями

$$\psi_\lambda(x, y, z, t) \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4).$$

Вероятность нахождения электрона в элементе объема  $d\tau$  в момент времени  $t$  равна

$$\sum_{\lambda=1}^4 |\psi_\lambda|^2 d\tau. \quad (4.9)$$

Четыре функции  $\psi_\lambda$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений [8]:

$$\begin{aligned} (p_0 + mc)\psi_1 + (p_1 - ip_2)\psi_4 + p_3\psi_3 &= 0, \\ (p_0 + mc)\psi_2 + (p_1 + ip_2)\psi_3 - p_3\psi_4 &= 0, \\ (p_0 - mc)\psi_3 + (p_1 - ip_2)\psi_2 + p_3\psi_1 &= 0, \\ (p_0 - mc)\psi_4 + (p_1 + ip_2)\psi_1 - p_3\psi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{eV}{c}, \\ p_1 &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eA_1}{c} \text{ и т. д.;} \end{aligned}$$

$V$  и  $A$  — скалярный и векторный потенциалы. Покажем, что эти уравнения характеризуют движение электрона, обладающего описанными выше свойствами.

Заметим прежде всего, что если мы хотим найти периодическое решение, то оператор  $p_0$  должен быть заменен выражением  $(W + eV)/c$ , где  $W$  — энергия электрона. Если скорость электрона мала по сравнению со скоростью света, так что

$$W - mc^2 \ll W + mc^2,$$

то легко убедиться в том, что как  $\psi_3$ , так и  $\psi_4$  удовлетворяют уравнению Шредингера. Далее, если  $\psi$  является решением уравнения Шредингера, то приближенное решение уравнений (4.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_3 &= A\psi, \\ \psi_4 &= B\psi, \\ \psi_1 &= -\frac{[B(p_1 - ip_2) + Ap_3]\psi}{2mc}, \\ \psi_2 &= -\frac{[A(p_1 + ip_2) - Bp_3]\psi}{2mc}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, а  $p_1, p_2$  и  $p_3$  — определенные выше операторы. Ясно, что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  при этом значительно меньше, нежели  $\psi_3$  и  $\psi_4$ ; в выражении (4.9), определяющем плотность заряда, ими можно поэтому пренебречь. Если выражение (4.9) нормировано к единице и если мы хотим, чтобы наши четыре функции также были нормированы, то в этом приближении должно быть

$$AA^* + BB^* = 1.$$

Выясним теперь, описывают ли решения уравнений (4.10) спиновые свойства электрона, наблюдаемые на опыте. Нормальное состояние атома водорода является, как известно, вырожденным; при этом в магнитном поле энергетический уровень атома расщепляется на два уровня. Проверим, согласуются ли эти факты с излагаемой нами теорией.

Поскольку постоянные  $A$  и  $B$  произвольны, очевидно, что нормальное состояние вырождено. Для исследования характера движения электрона в магнитном поле следует решить уравнение (4.10) при учете наличия поля ядра и магнитного поля  $H$ . Легко убедиться в том, что вырождение при этом устраняется. Если магнитное поле направлено по оси  $z$ , то одно из решений определяется формулами (4.11) при условии

$$A = 0, \quad B = 1.$$

Это решение соответствует энергии  $W_0 - MH$ ; обозначим его через  $\psi_\lambda^I$ . Второе решение  $\psi_\lambda^{II}$  соответствует энергии  $W_0 + MH$  и определяется формулами (4.11) при

$$A = 1, \quad B = 0.$$

Это будет показано в § 4.

Если магнитное поле не направлено по оси  $z$ , то два решения уравнений (4.10) могут быть найдены либо непосредственно, либо в результате исследования преобразования функций  $\psi$  при повороте координатных осей [8]. Если направление магнитного поля характеризуется полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ , то решение, соответствующее энергии  $W_0 - MH$ , определяется формулами (4.11) при

$$A = -\sin \frac{1}{2} \theta, \quad B = e^{i\varphi} \cos \frac{1}{2} \theta.$$

Оно имеет, таким образом, вид

$$A\psi_\lambda^I + B\psi_\lambda^{II}.$$

Эта волновая функция описывает состояние атома, обладающего магнитным моментом, направление которого характеризуется углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Если такой атом поместить затем в магнитное

поле, направленное по оси  $z$ , то величина  $|A|^2$  определила бы вероятность того, что он приобретет при этом энергию  $+MN$ , а  $|B|^2$  — вероятность того, что он приобретет энергию  $-MN$ .

Мы показали тем самым, что в случае медленных электронов теория Дирака становится тождественной нерелятивистской теории Паули—Дарвина. Сопоставим еще раз методы описания состояния электрона в этих теориях. В теории Паули—Дарвина электрон, направление оси которого характеризуется вектором  $\mathbf{l}$  (т. е. полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ ), описывается волновой функцией

$$\psi(x, y, z) \chi_l(s),$$

где  $\psi$  — обычное решение уравнения Шредингера; при этом  $HMs$  — энергия, которой электрон обладал бы в магнитном поле  $H$ , направленном по оси  $z$ . Функция  $\chi$  отлична от нуля лишь при условии  $s = \pm 1$ ; следовательно,

$$\chi = e^{i\varphi} \cos \frac{1}{2} \theta \quad (s = -1),$$

$$\chi = -\sin \frac{1}{2} \theta \quad (s = +1).$$

В теории Дирака электрон описывается волновой функцией

$$\psi_\lambda(x, y, z) \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4).$$

При этом  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в случае медленных электронов очень малы;  $\psi_3$  и  $\psi_4$  пропорциональны  $\psi$ :

$$\psi_3 = -\sin \frac{1}{2} \theta \cdot \psi,$$

$$\psi_4 = e^{i\varphi} \cos \frac{1}{2} \theta \cdot \psi.$$

Величина  $|\psi_4|^2 dx dy dz$  определяет вероятность нахождения электрона в элементе объема  $dx dy dz$  и вместе с тем вероятность того, что в магнитном поле электрон будет обладать дополнительной энергией  $-MN$ .

То обстоятельство, что в случае медленных электронов функции  $\psi_3$  и  $\psi_4$  являются приближенными решениями уравнения Шредингера, доказывает справедливость сделанного нами в § 2 предположения о том, что электрон может быть испущен одним атомом и захвачен затем другим атомом, не изменив при этом направления своего спина. Направление спина электрона вообще почти не меняется, за исключением тех случаев, когда силы, действующие на электрон, сообщают ему скорость, сравнимую со скоростью света.

**1. Анализ уравнений при скоростях электронов, сравнимых со скоростью света.** Точное решение уравнений (4.10), характеризующих движение электрона с импульсом  $(p_1, p_2, p_3)$  и энер-

гней  $W$  в отсутствие внешних сил, было дано Дарвином [8]; оно имеет следующий вид:

$$\psi_1 = -\frac{Ap_3 + B(p_1 - ip_2)}{mc + W/c} S, \quad \psi_2 = -\frac{A(p_1 + ip_2) - Bp_3}{mc + W/c} S, \quad (4.12)$$

$$\psi_3 = AS, \quad \psi_4 = BS,$$

где

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{W^2}{c^2} - m^2c^2,$$

$$S = \exp \left[ \frac{2\pi i (p_1 x + p_2 y + p_3 z - Wt)}{h} \right],$$

$A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Число электронов в единице объема определяется выражением

$$\frac{(AA^* + BB^*) 2W}{W + mc^2}.$$

Выясним теперь, как связаны постоянные  $A$  и  $B$  с направлением спина. Мы видели, что при условии  $(v/c) \ll 1$  это направление определяется полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ , где

$$-\frac{B}{A} = \text{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \quad (4.13)$$

В случае быстрых электронов необходимо, однако, выяснить, что именно следует понимать под направлением спина, т. е. каким образом последнее могло бы быть измерено.

Возможны два метода решения этой задачи; можно предположить, что «наблюдатель» движется вместе с электроном, и определять направление спина электрона по отношению к координатным осям, связанным с этим наблюдателем; можно, однако, предположить, что электрон почти остановлен с помощью электрического поля, и определить направление спина для этого случая. Первый метод был рассмотрен Дарвином [9], показавшим, что уравнение (4.13) определяет направление спина по отношению к движущемуся наблюдателю. Второй метод мог бы быть использован для экспериментального определения спина; можно показать, что уравнение (4.13) определяет направление спина также и в этом случае. Это ясно из следующих соображений.

Ограничимся рассмотрением электрона, движущегося параллельно оси  $z$ , характеризующей направление электростатического поля. Уравнения (4.10) сводятся в этом случае к двум уравнениям относительно  $\psi_2$  и  $\psi_4$  и двум уравнениям относительно  $\psi_1$  и  $\psi_3$ . Исключая  $\psi_2$  из первых двух уравнений, получаем

$$\frac{2\pi i}{h} \left( \frac{W + eV}{c} - mc \right) \psi_4 - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h}{2\pi i} \left( \frac{W + eV}{c} + mc \right) \frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right] = 0.$$

Функция  $\psi_3$  удовлетворяет аналогичному уравнению. Так как  $\psi_3$

и  $\psi_4$  удовлетворяют одним и тем же граничным условиям, имеем

$$\frac{\psi_3}{\psi_4} = \text{const.}$$

При уменьшении скорости электронов отношение  $B/A$  не должно изменяться. Уравнение (4.13) определяет, таким образом, направление спина также и в том случае, когда движущиеся электроны остановлены с помощью электростатического поля.

**2. Природа неполяризованного пучка.** Медленным неполяризованным пучком мы будем называть такой, в котором электроны обладают спинами всевозможных направлений. Поляризованный пучок не может быть описан с помощью одной волновой функции; каждому электрону пучка должна быть приведена в соответствие отдельная волновая функция с определенными значениями постоянных  $A$  и  $B$ .

Быстрый неполяризованный пучок может быть получен из медленного пучка путем ускорения его с помощью электрического поля. Из соображений, приведенных выше, следует, что наблюдателю, движущемуся вместе с электронами, такой пучок будет казаться неполяризованным.

Покажем теперь, что пучок, в котором половина электронов обладает спинами, направленными в одну сторону, и половина электронов — спинами, направленными в противоположную сторону, будет вести себя подобно неполяризованному пучку. Предположим для определенности, что пучок электронов, движущийся в направлении  $(l, m, n)$ , проходит через некоторое электромагнитное поле. Движение пучка будет описываться волновой функцией  $\psi_\lambda(x, y, z) \exp[-2\pi i W t / h]$ . Для электронов, еще не прошедших через поле, функция  $\psi_\lambda$  должна иметь вид плоской волны, распространяющейся в направлении  $(l, m, n)$  и поляризованной в некотором определенном направлении. Обозначим через  $X, Y, Z$  координаты некоторой точки пространства, в которую пучок попадает после прохождения через электромагнитное поле. В таком случае величина

$$P = \sum_{\lambda} |\psi_\lambda(X, Y, Z)|^2$$

определяет вероятность нахождения электрона в этой точке. Покажем, что, усреднив  $P$  по всем начальным направлениям спина, мы получим точно такой же результат, как и при усреднении  $P$  по двум противоположным направлениям спина.

Выше было показано, что плоская волна, для которой спин направлен по оси  $z$ , описывается функциями

$$\psi_3 = 0, \quad \psi_4 = S$$



и что плоской волне, для которой спин направлен в противоположную сторону, отвечают функции

$$\psi_3 = S, \quad \psi_4 = 0.$$

Обозначим через  $\psi_\lambda^I$ ,  $\psi_\lambda^{II}$  значения этих волновых функций для падающей волны. В таком случае волновая функция, описывающая электрон, направление спина которого характеризовалось вначале углами  $\theta$  и  $\varphi$ , имеет вид

$$-\sin \frac{\theta}{2} \psi_\lambda^I + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \psi_\lambda^{II}.$$

Мы имеем, таким образом,

$$P = \sin^2 \frac{\theta}{2} \sum_\lambda |\psi_\lambda^I|^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sum_\lambda |\psi_\lambda^{II}|^2 - \sum_\lambda \sin \theta \cos(\varphi + \alpha_\lambda) D_\lambda,$$

где

$$\psi_\lambda^{II} (\psi_\lambda^I)^* = D_\lambda e^{i\alpha_\lambda}.$$

В случае спинов противоположного направления, т. е. направления, характеризующегося углами

$$\pi - \theta, \quad \pi + \varphi,$$

получаем

$$P = \cos^2 \frac{\theta}{2} \sum_\lambda |\psi_\lambda^I|^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sum_\lambda |\psi_\lambda^{II}|^2 + \sum_\lambda \sin \theta \cos(\varphi + \alpha_\lambda) D_\lambda.$$

Среднее значение  $P$  равно

$$\frac{1}{2} \sum_\lambda (|\psi_\lambda^I|^2 + |\psi_\lambda^{II}|^2).$$

Очевидно, что точно такой же результат мы получим при усреднении  $P$  по всем значениям  $\theta$  и  $\varphi$ .

3. Магнитный момент атома по теории Дирака. Задача этого раздела — показать, что, согласно уравнению Дирака, в поле ядра с зарядом  $Ze$  и магнитном поле  $H$ , направленном по оси  $z$ , электрон в нормальном состоянии обладает энергией

$$W_0 \pm HM,$$

где  $W_0$  — значение энергии в отсутствие поля, а

$$M = \frac{eh}{4\pi mc} \frac{1}{3} [1 + 2(1 - \gamma^2)^{1/2}] \quad \left( \gamma = \frac{2\pi Ze^2}{hc} \right).$$

Мы покажем, что если атом находится в состоянии с энергией  $-HM$  (спин направлен по оси  $z$ ), то функция  $\psi_3$  равна нулю.

Волновое уравнение для электрона имеет вид [см. уравнение (4.10)]

$$\left[ \frac{W + eV}{c} + \sum_{t=1}^3 \alpha_t \left( p_t + \frac{eA_t}{c} \right) + \alpha_4 mc \right] \psi = 0,$$

где  $W$  — энергия,  $\alpha_t$  и  $\alpha_4$  — обычные, хорошо известные матрицы [10],  $V = Ze/r$ , а  $A_t$  даются выражениями

$$A_1 = -\frac{1}{2}Hy, \quad A_2 = \frac{1}{2}Hx, \quad A_3 = 0.$$

Мы имеем, таким образом,

$$(W + eV - U + c \sum_t \alpha_t p_t + \alpha_4 mc^2) \psi = 0,$$

где  $U$  — энергия возмущения, обусловленная наличием магнитного поля

$$U = -e(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2).$$

При  $H = 0$  нормальное состояние является вырожденным. Обозначим два решения, соответствующие этому случаю, через  $\psi^I$  и  $\psi^{II}$ . Полагая

$$f(r) = Ar^\beta e^{-r/a},$$

где

$$\beta = (1 - \gamma^2)^{1/2} - 1,$$

и выбирая  $A$  так, чтобы удовлетворялось условие

$$4\pi \int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr = 1,$$

находим эти решения, нормированные к единице [8],

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^I &= iNB \sin \theta e^{i\varphi} f \\ \psi_2^I &= -iNB \cos \theta f \\ \psi_3^I &= 0 \\ \psi_4^I &= Nf \end{aligned} \right\} \text{ решение I,}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{II} &= -iNB \cos \theta f \\ \psi_2^{II} &= -iNB \sin \theta e^{i\varphi} f \\ \psi_3^{II} &= Nf \\ \psi_4^{II} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ решение II,}$$

где  $B = \gamma [1 + (1 - \gamma^2)^{1/2}]^{-1}$ ,  $(B^2 + 1)N^2 = 1$ .

Легко показать, что при этом

$$\int \psi^I \psi^{II} dx dy dz = 0.$$

Для определения значений энергии атома в магнитном поле мы воспользуемся обычным методом теории возмущений. Если  $\Delta W$  — изменение энергии, обусловленное наличием поля, то

$$\begin{vmatrix} \Delta W - U^{I,I} & -U^{I,II} \\ -U^{I,II} & \Delta W - U^{II,II} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$U^{I,II} = \int \tilde{\psi}^I U \psi^{II} dx dy dz \text{ и т. д.}$$

Недиагональные элементы  $U^{I,II}$ , как легко видеть, обращаются в нуль; функции  $\psi^I$  и  $\psi^{II}$  являются, таким образом, точными волновыми функциями нулевого порядка. Диагональный элемент  $U^{II,II}$  определяет изменение энергии атома, находящегося в состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi^{II}$ .

Вычислим  $U^{II,II}$ . Имеем

$$\tilde{\psi}^{II} \alpha_1 \psi^{II} = \tilde{\psi}_1 \psi_4 + \tilde{\psi}_2 \psi_3 + \tilde{\psi}_3 \psi_2 + \tilde{\psi}_4 \psi_1 = 2N^2 B \sin \theta \sin \varphi f^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} e H y \tilde{\psi}^{II} \alpha_1 \psi^{II} = e H N^2 B \sin^2 \theta \sin^2 \varphi r f^2.$$

Аналогичным образом находим, что

$$-\frac{1}{2} e H x \tilde{\psi}^{II} \alpha_2 \psi^{II} = e H N^2 B \sin^2 \theta \cos^2 \varphi r f^2.$$

Сложив эти выражения и проинтегрировав по всему пространству, получим

$$U^{II,II} = e H N^2 B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr \sin^2 \theta r f^2,$$

что дает

$$U^{II,II} = \frac{e h H}{4 \pi m c} \frac{1}{3} [1 + 2(1 - \gamma^2)^{1/2}].$$

Это выражение определяет изменение энергии атома в состоянии II, обусловленное наличием поля  $H$ . Аналогичным образом находим, что  $U^{I,I}$  определяется этим же выражением, взятым с обратным знаком.

При  $\gamma \rightarrow 0$  множитель  $\frac{1}{3} [2(1 - \gamma^2)^{1/2} + 1]$  стремится к 1. Для урана он равен 0,83.

#### § 4. Рассеяние электронов силовым центром

Выясним теперь, как должны быть видоизменены соотношения, полученные нами в гл. II, в том случае, когда движение

рассматриваемых частиц описывается не уравнением Шредингера, но уравнениями Дирака.

Волновая функция  $\psi$ , описывающая рассеяние, имеет теперь четыре компоненты  $\psi_1, \dots, \psi_4$ , обладающие асимптотической формой

$$\psi_\lambda = a_\lambda e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} u_\lambda(\theta, \varphi) \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4). \quad (4.14)$$

Дифференциальное сечение  $I(\theta, \varphi) d\omega$  определяется при этом выражением

$$I(\theta, \varphi) d\omega = \frac{\sum_1^4 |u_\lambda(\theta, \varphi)|^2}{\sum_1^4 |a_\lambda|^2} d\omega. \quad (4.15)$$

Величины  $a_\lambda$  не являются взаимно независимыми. Воспользовавшись решениями (4.12) для случая плоской волны, находим, что при  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $p_3 = k\hbar$

$$\left| \frac{a_1}{a_3} \right| = \frac{k\hbar c}{W + mc^2} = \left| \frac{a_2}{a_4} \right|, \quad (4.16)$$

независимо от ориентации спина. Аналогичное соотношение существует и между величинами  $u_\lambda$ , так как рассеянная волна может быть рассматриваема асимптотически как состоящая из ряда плоских волн, распространяющихся из некоторого центра в различных направлениях. Можно поэтому записать

$$I(\theta, \varphi) d\omega = \frac{|u_3|^2 + |u_4|^2}{|a_3|^2 + |a_4|^2} d\omega. \quad (4.17)$$

В действительности падающий электронный пучок является обычно неполяризованным. Такой пучок можно рассматривать как состоящий из одинакового количества электронов, спины которых соответственно параллельны и антипараллельны направлению распространения пучка. Мы исследуем поэтому сперва рассеяние для этих двух частных случаев. Асимптотическая форма функций  $\psi_3$  и  $\psi_4$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_3 &\sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} f_1(\theta, \varphi), \\ \psi_4 &\sim r^{-1} e^{ikr} g_1(\theta, \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (4.18a)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_3 &\sim r^{-1} e^{ikr} g_2(\theta, \varphi), \\ \psi_4 &\sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} f_2(\theta, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.18b)$$

Формулы (4.18b) при этом относятся к электронам со спинами, параллельными направлению падения, а формулы (4.18a) — к электронам с антипараллельными спинами. Для определения функций  $f_1, f_2, g_1, g_2$  можно воспользоваться решениями уравнений (4.10), найденными Дарвином [8] для того случая, когда

скалярный потенциал рассеяния  $V$  зависит только от  $r$ , а векторный потенциал равен нулю. Дарвин приводит следующие группы решений:

$$\left. \begin{aligned} \psi_3(n+1) G_n P_n(\cos \theta), & \quad \psi_4 = -G_n P_n^1(\cos \theta) e^{i\varphi}, \\ \psi_3 = n G_{-n-1} P_n(\cos \theta), & \quad \psi_4 = G_{-n-1} P_n^1(\cos \theta) e^{i\varphi}; \end{aligned} \right\} (4.19a)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_3 = G_n P_n^1(\cos \theta) e^{i\varphi}, & \quad \psi_4 = (n+1) G_n P_n(\cos \theta), \\ \psi_3 = -G_{-n-1} P_n^1(\cos \theta) e^{i\varphi}, & \quad \psi_4 = n G_{-n-1} P_n(\cos \theta), \end{aligned} \right\} (4.19b)$$

где  $G_n$  является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \left( \frac{W}{c} - \frac{eV}{c} + mc \right) F_n + \frac{dG_n}{dr} - \frac{n}{r} G_n &= 0, \\ -\frac{1}{\hbar} \left( \frac{W}{c} - \frac{eV}{c} - mc \right) G_n + \frac{dF_n}{dr} + \frac{n+2}{r} F_n &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

а  $G_{-n-1}$  — решение аналогичной пары уравнений, получаемой в результате замены  $n$  на  $(-n-1)$ .

Исключая функцию  $F_n$ , находим

$$\frac{d^2 G_n}{dr^2} + \left( \frac{2}{r} - \frac{\alpha'}{a} \right) G_n + \left[ \alpha\beta - \frac{n(n+1)}{r^2} + \frac{n}{r} \frac{\alpha'}{a} \right] G_n = 0, \quad (4.21)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{W}{c} - \frac{eV}{c} + mc \right), \quad \beta = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{W}{c} - \frac{eV}{c} - mc \right).$$

Подстановка

$$G_n = \frac{\alpha^{1/2} \mathfrak{G}_n}{r}$$

приводит к уравнению, имеющему такую же форму, как и уравнение Шредингера (2.12), а именно:

$$\frac{d^2 \mathfrak{G}_n}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} - U_n(r) \right] \mathfrak{G}_n = 0, \quad (4.22)$$

где

$$U_n(r) = -\frac{2W}{\hbar^2 c^2} eV + \frac{1}{\hbar^2} \frac{e^2 V^2}{c^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\alpha'}{a} - \frac{3}{4} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha''}{\alpha}, \quad (4.23)$$

$$k^2 = \frac{W^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}.$$

Аналогичный результат получается также и для функции  $\mathfrak{G}_{-n-1}$  при замене  $n$  на  $(-n-1)$ .

Первые два члена выражения (4.23), определяющего  $U_n(r)$ , не зависят от спина и являются типичными для уравнения Клейна — Гордона, описывающего частицу без спина. Остальные члены связаны с взаимодействием спина с орбитальным движением и зависят не только от потенциала, но также и от силы и ее производной по расстоянию.

Отсюда следует, что собственные решения  $G_n$ ,  $G_{-n-1}$  уравнений (4.20) имеют асимптотическую форму

$$\begin{aligned} G_n &\sim r^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n\right), \\ G_{-n-1} &\sim r^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_{-n-1}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

С помощью решений (4.19а) можно получить функции  $\psi_3$ ,  $\psi_4$ , имеющие асимптотическую форму (4.18а):

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)e^{i\eta_n}G_n + ne^{i\eta_{-n-1}}G_{-n-1}] i^n P_n(\cos\theta), \\ \psi_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-i\eta_n}G_n + e^{i\eta_{-n-1}}G_{-n-1}) i^n P_n^1(\cos\theta) e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Это дает

$$\begin{aligned} f_1(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2ik} \sum [(n+1)(e^{2i\eta_n} - 1) + n(e^{2i\eta_{-n-1}} - 1)] P_n(\cos\theta), \\ g_1(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2ik} \sum (-e^{2i\eta_n} + e^{2i\eta_{-n-1}}) P_n^1(\cos\theta) e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Сопоставляя эти формулы с выражением (2.17), легко убедиться в том, что нерелятивистский случай отвечает условию  $\eta_n = \eta_{-n-1}$ .

В случае параллельных спинов [решения (4.18б)] аналогичным образом находим, что

$$f_2(\theta, \varphi) = f_1(\theta, \varphi) = f(\theta)$$

и

$$g_2(\theta, \varphi) = -g(\theta) e^{-i\varphi},$$

где

$$g_1(\theta, \varphi) = g(\theta) e^{i\varphi}. \quad (4.27)$$

В общем случае произвольного первоначального направления спинов, когда падающая волна описывается функциями

$$\psi_3 = Ae^{ikz}, \quad \psi_4 = Be^{ikz},$$

путем линейной комбинации найденных выше решений получаем

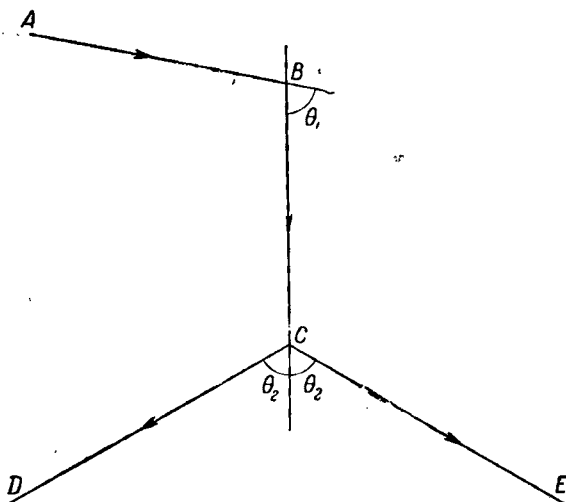
$$\begin{aligned} u_3 &= Af - Bge^{-i\varphi}, \\ u_4 &= Bf + Age^{i\varphi}, \end{aligned}$$

так что

$$I(\theta) = |f|^2 + |g|^2 + (fg^* - gf^*) \left\{ \frac{-AB^*e^{i\varphi} + A^*Be^{-i\varphi}}{|A|^2 + |B|^2} \right\}. \quad (4.28)$$

**1. Поляризация.** Из (4.28) следует, что рассеяние частично поляризованного пучка зависит не только от угла  $\theta$ , но также и от угла  $\varphi$ . Таким образом, в случае, соответствующем фиг. 11,

интенсивность рассеяния в направлении  $CD$  отлична от интенсивности рассеяния в направлении  $CE$ . Эффект такого рода можно было бы обнаружить путем исследования повторного рассеяния электронного пучка. Пусть неполяризованный пучок электронов падает на экран  $B$ . Электроны пучка, рассеянные в направлении  $BC$ , попадают, далее, на второй экран  $C$ . Этот рассеянный пучок частично поляризован в результате рассеяния от экрана  $B$ ,



Фиг. 11

так как в общем случае рассеивающее поле оказывает различное влияние на электроны с параллельными и антипараллельными спинами. В результате электронные пучки, испытавшие вторичное рассеяние в направлениях  $CD$  и  $CE$  под одним и тем же углом  $\theta_2$  по отношению к направлению  $BC$ , будут обладать различной интенсивностью.

Подобная теория такого двойного рассеяния впервые была разработана Моттом (11, 12). Падающий неполяризованный пучок мы, как всегда, будем рассматривать как состоящий из равного количества электронов со спинами, параллельными и антипараллельными направлению падения пучка. Для электронов падающего пучка, обладающих антипараллельными спинами, имеем

$$\psi_3 = Ae^{ikz}, \quad \psi_4 = 0, \quad AA^* = \frac{1}{2}.$$

После первичного рассеяния на угол  $\theta_1$  в плоскости  $\varphi = 0$  (плоскость  $ABC$  на фиг. 11) компоненты волновой функции будут пропорциональны  $Af_1(\theta_1)$  и  $Ag_1(\theta_1)$ . Повернем теперь координатные оси на угол  $\theta_1$  таким образом, чтобы ось  $z$  была направлена

вдоль  $BC$ , а плоскость  $ABC$  осталась плоскостью  $\varphi=0$ . В этой новой координатной системе имеем

$$\psi_3 = A \left( f_1 \cos \frac{\theta_1}{2} + g_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \psi_4 = A \left( g_1 \cos \frac{\theta_1}{2} - f_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \right), \quad (4.29)$$

(член  $e^{ikz}$  и постоянный множитель здесь опущены). Подставляя эти функции в выражение (4.28) соответственно вместо  $A$  и  $B$ , находим интенсивность  $|u_3|^2 + |u_4|^2$  вторичного рассеяния. Аналогичным образом производятся вычисления и для того случая, когда электроны падающего пучка обладают спинами, параллельными направлению падения. Складывая полученные значения интенсивности, находим интенсивность рассеяния в направлении  $(\theta_2, \varphi_2)$ :

$$\{|f(\theta_1)|^2 + |g(\theta_1)|^2\} \{|f(\theta_2)|^2 + |g(\theta_2)|^2 + 2D(\theta_1)D(\theta_2)\cos\varphi_2\}, \quad (4.30)$$

где

$$D(\theta) = i(fg^* - gf^*).$$

Эта формула показывает, что при данном значении  $\theta_1$  и  $\theta_2$  зависимость интенсивности рассеяния от  $\varphi_2$  определяется множителем вида

$$1 + \delta \cos \varphi_2,$$

где

$$\delta = \frac{2D(\theta_1)D(\theta_2)}{\{|f(\theta_1)|^2 + |g(\theta_1)|^2\} \{|f(\theta_2)|^2 + |g(\theta_2)|^2\}}. \quad (4.31)$$

При  $D(\theta) = 0$  рассматриваемый эффект исчезает. В этом случае рассеяние приводит к повороту всех первоначальных направлений спина на один и тот же угол, так что неполяризованный пучок остается неполяризованным.

В общем случае при малых значениях  $D(\theta)$  степень асимметрии будет малой, хотя в отдельных случаях она может принимать большие значения при некоторых специальных условиях, когда числитель выражения (4.31) очень мал. Множитель  $D(\theta)$ , вообще говоря, мал тогда, когда мала величина  $g$ , т. е. в нерелятивистском случае. Возвращаясь к формулам (4.26) и (4.27), находим, что

$$g = -\frac{1}{k} \sum_n P_n^1(\cos\theta) \sin \gamma_n e^{2i\delta_n}, \quad (4.32)$$

где

$$\gamma_n = \eta_n - \eta_{-n-1}, \quad 2\delta_n = \eta_n + \eta_{-n-1}.$$

Фазы  $\eta_n, \eta_{-n-1}$  могут быть вычислены с помощью уравнения (4.22) для функции  $\mathcal{G}_n$  и соответствующего уравнения для функции  $\mathcal{G}_{-n-1}$ . Выражения, определяющие эти фазы, отличаются друг от друга только одним членом, пропорциональным  $r^{-1}\alpha'/\alpha$ ;



в случае функции  $G_n$  этот член содержит множитель  $(n+1)$ , в случае функции  $G_{-n-1}$  — множитель  $-n$ . Поскольку  $\alpha'$  пропорционально  $\frac{dV}{dr}$ , отсюда следует, что разность фаз  $\chi_n$  и, следовательно, функция  $D(\theta)$ , характеризующая степень асимметрии электронного пучка, определяются, скорее, не потенциалом рассеивающего поля, а величиной рассеивающей силы.

**2. Случай кулонова поля.** Рассмотрим теперь рассеяние быстрых электронов незаэкранированным атомным ядром с зарядом  $Ze$ , т. е. тот случай, когда потенциал рассеивающего поля определяется выражением

$$V = -\frac{Ze}{r}.$$

Как и в нерелятивистском случае, исследованном в гл. III, медленное убывание этого потенциала с расстоянием обуславливает изменение асимптотической формы функций  $G_n$  и  $G_{-n-1}$ . Формулы (4.26) и (4.27) остаются при этом справедливыми, а фазы  $\eta_n$  и  $\eta_{-n-1}$  таковы, что

$$G_{n,-n-1} \sim r^{-1} \sin\left(kr + \gamma \ln 2kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_{n,-n-1}\right), \quad (4.33)$$

где

$$\gamma = \frac{2\pi Ze^2}{h\nu}.$$

Уравнения (4.20), определяющие функции  $G_{-n-1}$ , приобретают теперь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \left( \frac{W}{c} + \frac{Ze^2}{rc} + mc \right) F_{-n-1} + \frac{dG_{-n-1}}{dr} + \frac{(n+1)}{r} G_{-n-1} &= 0, \\ -\frac{1}{\hbar} \left( \frac{W}{c} + \frac{Ze^2}{rc} - mc \right) G_{-n-1} + \frac{dF_{-n-1}}{dr} - \frac{(n-1)}{r} F_{-n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Записывая

$$\begin{aligned} rF_{-n-1} &= \left(1 - \frac{W}{mc^2}\right)^{1/2} (\sigma_1 - \sigma_2), \\ rG_{-n-1} &= \left(1 + \frac{W}{mc^2}\right)^{1/2} (\sigma_1 + \sigma_2), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dr} &= -i \left( k + \frac{\gamma}{r} \right) \sigma_1 - (n + i\gamma') \frac{\sigma_2}{r}, \\ \frac{d\sigma_2}{dr} &= -(n - i\gamma') \frac{\sigma_1}{r} + i \left( k + \frac{\gamma}{r} \right) \sigma_2, \end{aligned}$$

где

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \gamma, \quad k^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} \left( \frac{W^2}{c^2} - m^2 c^2 \right).$$

Разлагая  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в ряд по степени  $r$ :

$$\sigma_1 = e^{-ikr} r^s \sum a_\nu r^\nu, \quad \sigma_2 = e^{-ikr} r^s \sum b_\nu r^\nu,$$

находим, что регулярные решения могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_0 e^{-ikr} r^{\rho_n} F(i\gamma + \rho_n, 2\rho_n + 1, 2ikr), \\ \sigma_2 &= b_0 e^{-ikr} r^{\rho_n} F(i\gamma + \rho_n + 1, 2\rho_n + 1, 2ikr), \end{aligned}$$

где

$$\frac{a_0}{b_0} = -\frac{i\gamma - \rho_n}{i\gamma' - n}, \quad \rho_n = (n^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha = \gamma \frac{v}{c} = \frac{2\pi Z e^2}{hc}.$$

Это дает

$$\begin{aligned} G_{-n-1} &= N_{-n-1} (2kr)^{\rho_n} r^{-1} e^{-ikr} \times \\ &\times [-(n - i\gamma') F(i\gamma + \rho_n + 1, 2\rho_n + 1, 2ikr) + \\ &+ (\rho_n - i\gamma) F(\rho_n + i\gamma, 2\rho_n + 1, 2ikr)], \end{aligned} \quad (4.35)$$

где  $N_{-n-1}$  — некоторая постоянная. Воспользовавшись асимптотическими значениями гипергеометрических функций, приведенными в гл. III, § 3, имеем

$$G_{-n-1} \sim r^{-1} \sin\left(kr + \gamma \ln 2kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_{-n-1}\right), \quad (4.36)$$

где<sup>1)</sup>

$$\exp(i\eta_{-n-1}) = \frac{(n - i\gamma') \Gamma(\rho_n + 1 - i\gamma)}{(\rho_n - i\gamma) \Gamma(\rho_n + 1 + i\gamma)} \exp[-\pi i(\rho_n - n)]. \quad (4.37)$$

Постоянная  $N_{-n-1}$  определяется, таким образом, выражением вида

$$N_{-n-1} = \frac{1}{2} \frac{|\Gamma(\rho_n + 1 + i\gamma)|}{\Gamma(2\rho_n + 1)} \exp\left(\frac{1}{2} \pi\gamma\right) [(i\gamma' - n)(\rho_n - i\gamma)]^{-1/2}. \quad (4.38)$$

Записывая

$$\begin{aligned} C_n &= -e^{-i\pi\rho_n} \frac{\Gamma(\rho_n - i\gamma)}{\Gamma(\rho_n + 1 + i\gamma)}, \\ F(\theta) &= \frac{1}{2} i \sum (-1)^n [nC_n + (n+1)C_{n+1}] P_n(\cos\theta), \\ G(\theta) &= \frac{1}{2} i \sum (-1)^n [n^2 C_n - (n+1)^2 C_{n+1}] P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (4.39)$$

и, подставляя (4.37) и соответствующее значение  $e^{2i\eta_n}$  в формулы (4.26) и (4.27), получаем

$$\begin{aligned} kf(\theta) &= -i\gamma' F + G, \\ kg(\theta) &= \frac{i\gamma'(1 + \cos\theta)F + (1 - \cos\theta)G}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что  $e^{2i\eta_n}$  мы получим из (4.37), заменив  $n$  на  $-n-1$  повсюду, за исключением последнего множителя, который становится при этом равным  $\exp[-\pi i(\rho_{n+1} - n)]$ .

Дифференциальное сечение равно, таким образом,

$$|f|^2 + |g|^2 = \frac{\gamma'^2 |F|^2}{k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{|G|^2}{k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.41)$$

Функции  $F$  и  $G$  не могут быть вычислены в конечной форме; в случае рассеяния легкими элементами они могут быть, однако, разложены в ряд по степеням  $\alpha$ , поскольку  $\alpha = \frac{Z}{137}$ .

В предельном случае  $\gamma' = \gamma$ ,  $\alpha^2 = 0$  справедливы результаты, полученные нами при исследовании рассеяния кулоновым полем без учета спинового и релятивистского эффектов. Из формулы (3.16) следует, что в этом случае

$$kf(\theta) \rightarrow R \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}, \quad g(\theta) \rightarrow 0,$$

где

$$R = \frac{1}{2} \gamma \exp \left[ 2i\gamma \ln \sin \frac{\theta}{2} + \arg \frac{\Gamma(1-i\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} + i\pi \right].$$

Следовательно, разлагая  $F$  и  $G$  в ряд по степеням  $\alpha$ , имеем

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots,$$

$$G = G_0 + \alpha G_1 + \alpha^2 G_2 + \dots,$$

и, воспользовавшись формулой (4.40) при  $\gamma' = \gamma$ , имеем

$$F_0 = \frac{iR}{\gamma}, \quad G_0 = R \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Поскольку  $F$  и  $G$  не должны зависеть от  $\gamma$ , подставляя эти функции в (4.41), находим дифференциальное сечение

$$\frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (4.42)$$

Эта формула справедлива при всех значениях  $v$  при условии, что  $\alpha$  мало по сравнению с единицей.

В рассматриваемом приближении формула Резерфорда должна быть, следовательно, дополнена множителями вида

$$\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Первый из этих множителей учитывает лорентцово сжатие, второй связан с наличием спина. Поскольку в данном приближении как  $f$ , так и  $g$  вещественны [если опустить общий фазовый множитель  $\exp \left( 2i\gamma \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$ ], при двойном рассеянии не должно было бы наблюдаться никакой асимметрии. Для получения конечного значения величины  $\delta$ , определяемой формулой (4.31), необходимо решить задачу в последующем приближении. Это было

осуществлено Моттом [11], который показал, что при  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$

$$\delta \approx \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{v^2}{c^2}}{\left[2 - (v^2/c^2)\right]^2}. \quad (4.43)$$

При  $v/c = 0,81$  эта функция приобретает минимальное значение, равное  $0,2(Z/137)^2$ . Дифференциальное сечение (4.17), будучи вычислено в этом же приближении, содержит множитель [13]<sup>1)</sup>

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha \frac{v}{c} \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

вместо множителя

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

В случае рассеяния тяжелыми элементами отношение  $Z/137$  уже не является малым, и приближенные формулы (4.42) и (4.43) перестают быть справедливыми. Мотт [12] впервые определил численные значения дифференциальных сечений и степени асимметрии с помощью точных формул (4.40). Он вычислил при этом  $\delta$ , как функцию отношения  $v/c$  для случая двукратного рассеяния электронов ядрами золота на  $90^\circ$ , и нашел также значения дифференциальных сечений для однократного рассеяния электронов при этом же значении угла. Бартлетт и Ватсон [15] определили, далее, зависимость дифференциальных сечений от  $v/c$  для случая однократного рассеяния электронов ядрами ртути на  $90^\circ$ . Фиг. 12, *a* иллюстрирует полученные при этом результаты. На оси ординат отложено отношение  $r$ , найденной интенсивности рассеяния к интенсивности рассеяния, определяемой формулой Резерфорда

$$\frac{Z^2 c^4}{4m^2 v^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

при учете зависимости массы от скорости. В случае тяжелых элементов приближенное значение  $r$

$$\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right],$$

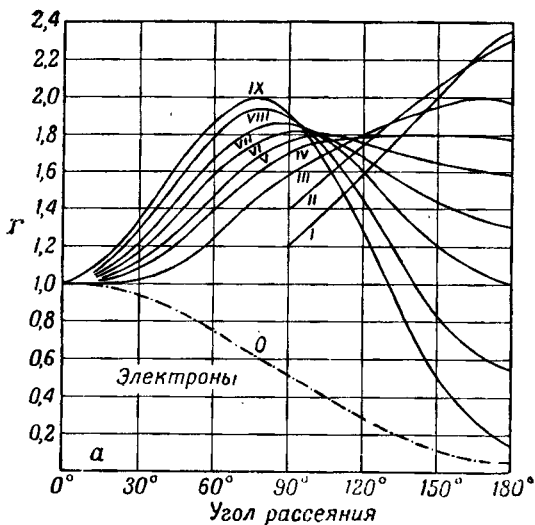
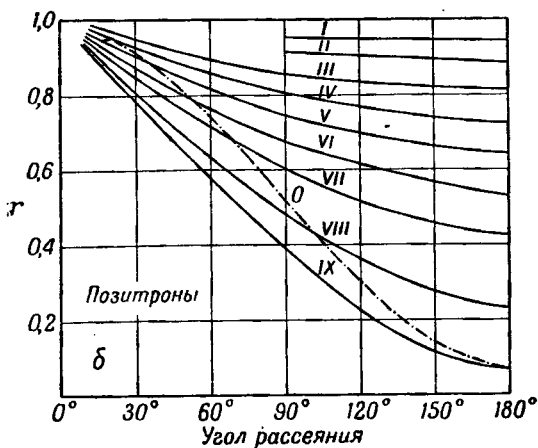
определяемое формулой (4.42), становится очень неточным.

Зависимость степени асимметрии  $\delta$  от скорости электронов, найденная Моттом, а также Бартлеттом и Ватсоном, иллюстри-

<sup>1)</sup> Этот множитель в действительности должен быть заменен (см. [14]) следующим:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \pi \alpha \frac{v}{c} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right).$$

Это обстоятельство осталось незамеченным Моттом вследствие ошибки при суммировании выражения (4.59). (Прим. ред.)



Фиг. 12. Угловые распределения электронов и позитронов с различными энергиями, рассеянных ядрами ртути.

По оси ординат указаны значения отношения  $r$  наблюдаемой интенсивности рассеяния и интенсивности, вычисленной по формуле

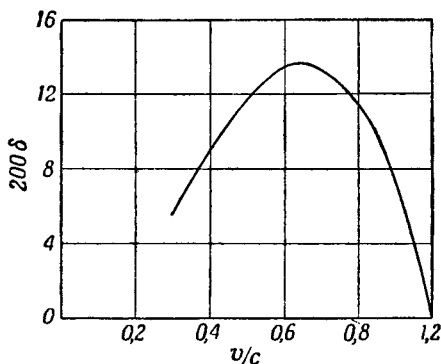
$$\frac{Z^2 e^4}{m^2 v^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Кривые I—IX относятся соответственно к частицам с энергиями, равными 0,046, 0,086, 0,145, 0,232, 0,314, 0,463, 0,666, 1,28 и 3,35  $m c^2$ ; кривая 0 отвечает приближенной формуле (4.42) при энергии, равной 3,35  $m c^2$ .

руется фиг. 13. Из фигуры следует, что эффект асимметрии при двойном рассеянии должен приобретать существенную роль при значениях  $v/c$ , близких к 0,6. Хотя эти результаты были получены в предположении, что рассеяние электронов обусловлено голыми ядрами, в дальнейшем было показано [16], что эффект экранирования атомными электронами не должен оказывать существенного влияния на значения  $\delta$ , предсказываемые теорией.

**3. Сравнение с опытом.** В настоящее время нельзя еще сказать, что релятивистская теория рассеяния быстрых электронов атомными ядрами подтвердилась опытными данными во всех своих деталях; современные исследования по этому вопросу находятся, однако, в хорошем согласии с ее предсказаниями.

Новейшими опытами по изучению однократного рассеяния быстрых электронов являются опыты Бюкнера, Ван-дер-Граафа и Фешбаха [17]. В них были использованы катодные лучи с энергией от 1,27 до 2,27  $Mэв$  и измерено абсолютное значение интенсивности рассеяния в угловом интервале от 20 до 50°. Полученные при этом результаты находятся в очень хорошем согласии с теоретическими соотношениями для исследованных рассеивающих материалов—бериллия, алюминия, меди, серебра, платины и золота. Анализ результатов, полученных различными исследователями вплоть до 1942 г., дан в работе Урбана [13]. Эти результаты представляют собой весьма путаную картину. Так, хорошее согласие с теорией было получено Чемпионом и Барбером [18] при изучении рассеяния  $\beta$ -лучей  $RaE$  с энергией от 0,7 до 1,2  $Mэв$ , Фаулером и Опенгеймером [19] для  $\beta$ -лучей с энергией от 5 до 17  $Mэв$  при рассеянии их в свинце, Саундерсоном и Дюффенденом [20] для рассеяния  $\beta$ -лучей  $RaE$  в меди, аргоне и золоте, Гупта [21] при изучении рассеяния  $\beta$ -лучей с энергией 2  $Mэв$  в ксеноне, и Браиловским и Лейпунским [22] для  $\beta$ -лучей  $RaC$  при исследовании их рассеяния в аргоне. С другой стороны, по данным Чемпиона и Барбера [18] в случае рассеяния  $\beta$ -лучей  $RaE$  ядрами ртути экспериментальное значение интенсивности рассеяния составляет лишь  $1/7$  ее теоретического значения, хотя измененное угловое распределение электронов совпадает при этом с теоретическим. По данным других исследователей [23] при рас-



Фиг. 13. Асимметрия при двойном рассеянии электронов ядрами ртути на 90°.

сеянии  $\beta$ -лучей в азоте отношение экспериментального значения интенсивности рассеяния к ее теоретическому значению колеблется от 0,5 до 9. О наличии некоторого расхождения между теорией и опытом свидетельствуют также и другие современные опыты [24], в которых применялись  $\beta$ -лучи. Между экспериментальными результатами, относящимися к  $\beta$ -лучам различного происхождения, нет удовлетворительного согласия; весьма возможно, что это расхождение было бы в значительной степени устранено, если бы естественные источники радиоактивности были заменены искусственными, как это имело место в опытах Ван-дер-Граафа и других упомянутых выше авторов. Следует, однако, отметить, что в некоторых опытах неупругое рассеяние электронов и возможность образования пар быстрыми электронами [25] также являются причиной заметных аномалий. Необходимы, таким образом, дополнительные экспериментальные исследования для того, чтобы можно было либо создать новую теорию, либо установить с определенностью причину всех наблюдаемых разногласий между существующей теорией и опытными данными.

Был предпринят ряд попыток [26] обнаружить на опыте предсказываемый теорией эффект асимметрии при двойном рассеянии электронов ядрами золота<sup>1)</sup>. Вплоть до появления работы Шелла, Чиза и Майерса [28] эти попытки оставались, однако, безуспешными. Для того чтобы можно было обнаружить эффект асимметрии, существенно, конечно, устранить деполаризующее влияние многократного рассеяния. Золотая фольга, использовавшаяся в опытах Даймонда и Рихтера в качестве источника рассеяния, была достаточно тонкой для того, чтобы можно было пренебречь многократным рассеянием электронов, приводящим к ряду отклонений на малые углы, однако вероятность отклонения на  $90^\circ$  в результате двух последовательных отклонений сравнимой величины, повидимому, не была при этом достаточно малой. Такое отклонение на  $90^\circ$  [29] становится заметным только в том случае, когда электроны рассеиваются «отражающей» стороной фольги (фиг. 14, а). В этом случае электрон, испытавший отклонение на  $45^\circ$ , движется в фольге почти параллельно ее длине, и поэтому вероятность того, что он испытает при этом вторичное отклонение на  $45^\circ$ , весьма значительна. С другой стороны, в случае «прохождения» (фиг. 14, б) либо первичное, либо вторичное отклонение электрона должно составлять  $135^\circ$  и поэтому значительно менее вероятно.

Как Даймонд, так и Рихтер наблюдали рассеяние электронов на  $90^\circ$  от отражающих поверхностей при таких условиях, когда

---

<sup>1)</sup> В одной из этих работ, выполненной Кикучи [27], были получены результаты, согласующиеся с теорией, но автор пользовался столь толстыми рассеивателями, что многократное рассеяние должно было приобрести серьезное значение.

этот эффект должен был бы играть существенную роль. Исследования Шелла, Чиза и Майерса подтвердили отсутствие заметной асимметрии при аналогичных условиях опыта; для пучка электронов с энергией 400 кэв эти авторы получили, однако, значение  $200\delta$ , равное  $12 \pm 0,2$ , в том случае, когда рассеяние электронов было связано с их прохождением через фольгу. Как следует из фиг. 13, эта цифра очень хорошо согласуется с теоретическим значением. Упомянутые выше авторы показали также, что замена одной из пластинок золотой фольги алюминиевой приводит к весьма значительному уменьшению степени асимметрии, как этого и следовало ожидать.



Фиг. 14. Рассеяние фольгой на  $90^\circ$ .  
а—случай «отражения»; б—случай «прохождения».

В общем опытные данные свидетельствуют в пользу теории. Некоторые дополнительные экспериментальные результаты, относящиеся к рассеянию на малые углы и также подтверждающие справедливость теории, будут рассмотрены нами в гл. IX, § 6, в связи с исследованием вопроса о многократном рассеянии.

## § 5. Позитрон

В § 3 были приведены решения (4.12) уравнений (4.10), характеризующие движение свободного электрона, обладающего импульсом  $(p_1, p_2, p_3)$  и энергией  $W$ . Эти решения имеют вид

$$\psi_\lambda = a_\lambda \exp \left[ \frac{2\pi i}{h} (p_1 x + p_2 y + p_3 z - Wt) \right] \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{W^2}{c^2} - m^2 c^2. \quad (4.44)$$

Мы предположим при этом, что энергия  $W$  положительна; однако такое предположение вовсе не вытекает из требований теории. Величина  $W$  должна удовлетворять релятивистскому соотношению (4.44) между энергией и импульсом; из него получаем

$$W = \pm c (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - m^2 c^2)^{1/2}.$$

До сих пор нами было рассмотрено только первое из этих двух решений. Второе решение дает

$$\psi_\lambda = b_\lambda \exp \left[ \frac{2\pi i}{h} (p_1 x + p_2 y + p_3 z + Wt) \right] \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4),$$



где

$$b_1 = C, \quad b_2 = D, \quad b_3 = \frac{Cp_3 + D(p_1 - ip_2)}{mc + W/c},$$

$$b_4 = \frac{C(p_1 + ip_2) - Dp_3}{mc + W/c}. \quad (4.45)$$

Эти волновые функции отвечают свободным электронам с отрицательной кинетической энергией, т. е. электронам с отрицательной массой покоя.

Если нет каких-либо условий, в силу которых такие состояния неосуществимы, то электроны должны стремиться занять их, освобождая при этом энергию в виде энергии излучения или кинетической энергии какой-нибудь другой частицы. С другой стороны, электроны с отрицательной массой никогда, однако, не наблюдались. Для того чтобы преодолеть эту трудность, Дирак [30] высказал в 1930 г. предположение, что все состояния, в которых электрон обладает отрицательной массой, уже заняты электронами, образующими распределение, которое не наблюдаемо экспериментально ввиду его равномерности. Наблюдены могут быть только «дырки» в этом распределении, представляющие собой отклонения от равномерности. Поскольку, согласно принципу Паули, два электрона не могут занимать одно и то же квантовое состояние, эта теория успешно объясняет тот факт, что электроны в состояниях с отрицательной массой не встречаются в природе, а также объясняет отсутствие переходов в такие состояния. Далее, вакантное состояние в распределении электронов с отрицательной массой должно обладать такими же свойствами, как частица с положительной массой и положительным зарядом. Сперва предполагалось, что такой частицей может быть протон, однако Оппенгеймер [31] показал в 1930 г., что масса этой частицы должна равняться массе обычного электрона. Такие частицы впервые были обнаружены экспериментально Андерсоном [32] в 1932 г. среди вторичных частиц, создаваемых космическими лучами; через короткий промежуток времени этот результат подтвердили также исследования Блекетта и Оквалини [33]. Эти частицы были названы позитронами.

Уравнения Дирака для позитрона могут быть получены путем простого преобразования уравнений, справедливых для электрона. Предположим, что уравнения для электрона с положительной массой могут быть получены из уравнений (4.10), если мы положим

$$p_0 = \frac{W}{c} + \frac{eV}{c}.$$

Соответствующие уравнения для электрона с отрицательной массой мы найдем, заменив  $+W/c$  на  $-W/c$ . Вводя обозначения

$$W^+ = W, \quad p_1^+ = -p_1, \quad p_2^+ = -p_2, \quad p_3 = -p_3,$$

получаем

$$\left(\frac{W^+}{c} - \frac{eV}{c} - mc\right) \psi_1 + (p_1^+ - ip_2^+) \psi_4 + p_3^+ \psi_3 = 0,$$

$$\left(\frac{W^+}{c} - \frac{eV}{c} - mc\right) \psi_2 + (p_1^+ + ip_2^+) \psi_3 - p_3^+ \psi_4 = 0,$$

$$\left(\frac{W^+}{c} - \frac{eV}{c} + mc\right) \psi_3 + (p_1^+ - ip_2^+) \psi_2 + p_3^+ \psi_1 = 0,$$

$$\left(\frac{W^+}{c} - \frac{eV}{c} + mc\right) \psi_4 + (p_1^+ + ip_2^+) \psi_1 - p_3^+ \psi_1 = 0.$$

Эти уравнения имеют точно такой же вид, как и уравнения для электрона с положительной массой и энергией  $W^+$ , с той лишь разницей, что потенциальная энергия равна теперь не  $-eV/c$ , но  $+eV/c$ , а функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  заменены соответственно функциями  $\psi_3$  и  $\psi_4$ . Они отвечают частице, обладающей массой  $m$ , зарядом  $+e$  и компонентой спина по оси  $z$ , равной  $\pm \frac{1}{2} \hbar$ .

Задача о рассеянии позитронов каким-либо статическим полем, например кулоновым полем тяжелого атомного ядра, может быть решена точно таким же образом, как и соответствующая задача о рассеянии электронов, рассмотренная нами в § 4; при этом необходимо лишь изменить знак потенциальной энергии на противоположный.

Но позитрон представляет собой также и вакантное состояние для электрона, и при определенных условиях электрон может перейти в это состояние, что приведет к взаимному уничтожению как электрона, так и позитрона. Обратный процесс, при котором электрон, находящийся в состоянии с отрицательной массой, поглощает энергию, достаточную для перехода на незанятый уровень с положительной массой, приводит к появлению пары, т. е. электрона и позитрона, причем позитрону отвечает вакантное состояние с отрицательной массой, освободившееся в результате такого перехода. При вычислении вероятности таких переходов лучше трактовать их как переходы электрона между электронными состояниями, учитывая при этом, что энергия и импульс позитрона равны по величине и противоположны по знаку энергии и импульсу электрона в состоянии с отрицательной массой.

К вопросу об образовании и аннигиляции пар электрон—позитрон мы вернемся в дальнейшем в гл. XV. В данной главе мы ограничимся рассмотрением вопросов, относящихся лишь к отдельным частицам.

**Рассеяние быстрых позитронов кулоновым полем.** Формула, полученная нами в § 4, может быть применена также и к позитронам, если мы заменим в ней  $+Ze$  на  $-Ze$ . В приближении (4.42)

это не приведет к какому-либо различию в отношении интенсивности рассеяния; в том случае, когда значение  $Z/137$  нельзя считать малым по сравнению с единицей, такая замена приводит, однако, к существенно иным результатам. Этот вопрос был исследован подробно Мессии [34] для случая рассеяния позитронов ядрами ртути, причем в качестве основы для расчетов были использованы соответствующие вычисления Бартлетта и Велтона [16] для электронов. Полученные при этом результаты иллюстрируются фиг. 12, б, где приведены кривые угловой зависимости отношения  $\gamma$  интенсивности рассеяния к интенсивности рассеяния, вычисленной по формуле Резерфорда, при различных значениях  $v/c$ . Непосредственное сопоставление этих результатов с соответствующими результатами, полученными для электронов, показывает, что они носят совершенно иной характер. В настоящее время мы еще не располагаем соответствующими экспериментальными данными, необходимыми для проверки изложенной теории.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pauli, Zs. f. Phys., 43, 601 (1927).
2. Darwin, Proc. Roy. Soc., A116, 227 (1927).
3. Dirac, Quantum Mechanics, 3-е изд., Oxford, 1947.
4. Dirac, Proc. Roy. Soc., A117, 610 (1928).
5. Rosen and Zener, Phys. Rev., 40, 502 (1932).
6. Mott, Proc. Roy. Soc., A124, 440 (1929).
7. Breit, Nature, 122, 649 (1928).
8. Darwin, Proc. Roy. Soc., A118, 654 (1928).
9. Darwin, Proc. Roy. Soc., A120, 628 (1928).
- 10\*. Френкель, Волновая механика, ч. II, М.—Л., 1935.
11. Mott, Proc. Roy. Soc., A124, 425 (1929).
12. Mott, Proc. Roy. Soc., A135, 429 (1932).
13. Urban, Zs. f. Phys., 119, 67 (1942).
- 14\*. McKinley and Feshbach, Phys. Rev., 74, 1759 (1948).
15. Bartlett and Watson, Proc. Am. Acad. Art. Sci., 74, 53 (1940).
16. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., A177, 341 (1941); Bartlett and Welton, Phys. Rev., 59, 281 (1941).
17. Van der Graaf and Feshbach, Phys. Rev., 69, 452 (1946); Bueckner, van der Graaf, Sperduto, Burrill and Feshbach, там же, 72, 678 (1947).
18. Champion and Barber, Proc. Roy. Soc., A168, 159 (1938); Phys. Rev., 55, 111 (1939).
19. Fowler and Oppenheimer, Phys. Rev., 54, 320 (1938).
20. Sanderson and Duffendack, Phys. Rev., 60, 190 (1941).
21. Gupta, Proc. Phys. Soc., 51, 355 (1939).
22. Браиловский и Лейпунский, Journ. of Phys. USSR, 4, 485 (1941).
23. Степанова, Sow. Phys., 12, 550 (1937); Bothe and Ratzel, Zs. f. Phys., 115, 497 (1940); Bosshard and Scherrer, Helv. Phys. Acta, 14, 85 (1941).
24. Bleuler, Scherrer and Zünti, Phys. Rev., 61, 95 (1942); Bleuler, Helv. Phys. Acta, 15, 613 (1942); Da Pasquier, там же, 17, 409 (1944); Sigrist, там же, 16, 471 (1943).

25. Champion, Rep. Prog. Phys., 5, 348 (1939).
26. Meyers, Byrne and Cox, Phys. Rev., 46, 77 (1943); Dymond, Proc. Roy. Soc., A145, 657 (1934); Richter, Ann. d. Phys., 28, 533 (1937).
27. Kikuchi, Proc. Math. Phys. Soc. Jap., 22, 805 (1940).
28. Shull, Chase and Myers, Phys. Rev., 63, 29 (1943).
29. Chase and Cox, Phys. Rev., 58, 243 (1940); Goertzel and Cox, там же, 63, 37 (1943); Петухов и Вышинский, Journ. of Phys. USSR, 5, 137 (1941).
30. Dirac, Proc. Roy. Soc., A133, 80 (1931).
31. Oppenheimer, Phys. Rev., 35, 939 (1930).
32. Anderson, Phys. Rev., 41, 405 (1932); 43, 491 (1933).
33. Blackett and Occhialini, Proc. Roy. Soc., A139, 699 (1933).
34. Massey, Proc. Roy. Soc., A181, 14 (1942).

## СТОЛКНОВЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ЧАСТИЦАМИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ

### § 1. Введение

В первых трех главах этой книги мы рассмотрели вопрос о движении электронных пучков в различных силовых полях. Если предполагается, что отдельные электроны в данном пучке друг с другом не взаимодействуют, то движение пучка может быть описано в трехмерном пространстве с помощью волновой функции  $\psi(x, y, z, t)$ , причем  $|\psi|^2 dx dy dz$  определяет вероятность нахождения одного из электронов в момент времени  $t$  в элементе объема  $dx dy dz$ . Если же речь идет об атомных системах, для которых необходимо учитывать взаимодействие между двумя или большим числом частиц, то такое описание оказывается уже невозможным; волновая функция должна быть в этом случае функцией координат всех частиц. Примерами задач такого рода могут служить: задачи об атомах, содержащих свыше одного электрона; задача об атоме водорода при учете конечного значения массы ядра; вопрос о рассеянии  $\alpha$ -частиц легкими ядрами, при котором нельзя пренебречь отдачей ядра; построение точной теории рассеяния электронов атомами, учитывающей неупругие столкновения.

В этой главе рассматривается прежде всего вопрос о взаимодействии между двумя неодинаковыми частицами (§ 2). В § 3 исследуются вкратце возможные стационарные состояния атомов или молекул, содержащих две одинаковые частицы; в § 4 и 5 рассматриваются столкновения между одинаковыми частицами, обладающими и не обладающими спином.

Следует подчеркнуть, что если частицы неодинаковы, то рассмотрение спина оказывается необходимым лишь в тех случаях, когда скорости этих частиц сравнимы со скоростью света (см. гл. XV). Если же частицы одинаковы, то необходимо учитывать спин даже и в нерелятивистской теории.

### § 2. Взаимодействие между двумя неодинаковыми частицами. Нерелятивистская теория без учета спина

Рассмотрим взаимодействие электрона с протоном; теорию этого вопроса мы сможем затем применить к задаче о водородном атоме и к исследованию рассеяния электронов ядром этого атома.

Определим волновую функцию  $\psi$  подобно тому, как это было сделано нами выше в задаче об одной частице. Функция  $\psi$  будет при этом зависеть от координат обеих частиц; если  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ ,  $\mathbf{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$  — соответственно координаты протона и электрона, то волновая функция будет иметь вид

$$\psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p; t).$$

Она может быть интерпретирована следующим образом. Если  $d\tau_e$  и  $d\tau_p$  — элементы объема, содержащие точки  $\mathbf{r}_e$  и  $\mathbf{r}_p$ , то  $|\psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e; t)|^2 d\tau_p d\tau_e$  определяет вероятность нахождения протона в элементе объема  $d\tau_p$  и электрона в элементе объема  $d\tau_e$  в один и тот же момент времени  $t$ .

Волновая функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_p} \nabla_p^2 \psi + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \nabla_e^2 \psi - V(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e) \psi. \quad (5.1)$$

Здесь

$$\nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_p^2};$$

$m_p$  и  $m_e$  — соответственно масса протона и электрона,  $V(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e)$  — значение потенциальной энергии взаимодействия протона и электрона, если протон находится в точке  $\mathbf{r}_p$ , а электрон — в точке  $\mathbf{r}_e$ .

В качестве примера найдем решение уравнения (5.1), описывающее движение атома водорода в отсутствие внешних сил. В этом случае потенциальная энергия взаимодействия равна

$$V(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e) = -\frac{e^2}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e|}.$$

Как и в классической механике, переменные при этом разделяются и оказывается возможным выделить движение центра тяжести системы. Положим

$$\begin{aligned} (m_p + m_e) \mathbf{R} &= m_p \mathbf{r}_p + m_e \mathbf{r}_e, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{R}$  определяет положение центра тяжести, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий рассматриваемые частицы. Оператор

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_p} \nabla_p^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \nabla_e^2$$

может быть преобразован к следующему виду [1]<sup>1)</sup>:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla_R^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m^*} \nabla_r^2,$$

где

$$M = m_p + m_e, \quad m^* = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}.$$

<sup>1)</sup> См. также книгу Френкеля [2]. (Прим. ред.)

Волновое уравнение (5.1) принимает при этом вид

$$-\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla_R^2 \psi + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m^*} \nabla_r^2 \psi + \frac{e^2}{r} \psi. \quad (5.3)$$

В этом уравнении переменные разделяются, его решение может быть записано в форме

$$f_0(\mathbf{r}, t) g_0(\mathbf{R}, t). \quad (5.4)$$

Подставляя функцию (5.4) в уравнение (5.3), получаем два уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial f_0}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m^*} \nabla^2 f_0 + \frac{e^2}{r} f_0 + A f_0, \\ -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial g_0}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla^2 g_0 - A g_0, \end{aligned}$$

где  $A$  — постоянная. Подстановка

$$\begin{aligned} f_0 &= f \exp\left(+\frac{2\pi i A t}{\hbar}\right), \\ g_0 &= g \exp\left(-\frac{2\pi i A t}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

приводит к уравнениям

$$-\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m^*} \nabla^2 f + \frac{e^2}{r} f, \quad (5.5)$$

$$-\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla^2 g. \quad (5.6)$$

Мы можем, таким образом, положить  $\psi = fg$ , где функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют соответственно уравнениям (5.5) и (5.6).

Уравнение (5.6) представляет собой волновое уравнение для свободной частицы массы  $M$ ; решение  $g(\mathbf{R}, t)$  описывает движение центра тяжести атома. Искомое частное решение зависит от условий рассматриваемого опыта. Если, например, волновая функция  $\psi$  описывает состояние пучка атомов, то функция  $g$  представляет собой волновую функцию для пучка частиц, определенную нами в гл. I, § 4. Если положение и скорость атома известны приближенно, — с точностью, допускаемой соотношениями неопределенности, — то функция  $g$  характеризует волновой пакет, рассмотренный нами в гл. I, § 9.

Уравнение (5.5) представляет собой волновое уравнение, описывающее движение частицы с массой  $m^*$  и зарядом  $e$  в поле данного неподвижного ядра. Если мы хотим описать нормальное состояние атома водорода, то функция  $f$  должна быть первым характеристическим решением этого уравнения.

### § 3. Теория взаимодействия двух одинаковых частиц

В этом параграфе излагается обычная теория стационарных состояний систем, содержащих две одинаковые частицы.

Предположим сперва, что частицы не обладают спином. В таком случае каждая из частиц имеет только три степени свободы<sup>1)</sup> и состояние такой частицы полностью определяется заданием ее положения в пространстве. (Для электрона необходимо, кроме того, задать направление его магнитного момента.) Примерами частиц такого рода являются, как это будет показано ниже, ядра гелия ( $\alpha$ -частицы) и ядра углерода.

Прежде чем рассматривать вопрос о столкновениях, мы должны вспомнить о некоторых свойствах стационарных состояний, возможных для молекул ( $\text{He}_2$ ,  $\text{C}_2\text{H}_2$  и т. д.), содержащих две таких частицы. При определении значений энергии, возможных для этих молекул, мы поступаем следующим образом. Рассмотрим, например, молекулу гелия  $\text{He}_2$ . Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  координаты двух ядер, а через  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  и  $r_4$  — координаты электронов. Уравнение Шредингера, характеризующее состояние системы, имеет в этом случае вид

$$(H - E)\psi = 0, \quad (5.7)$$

где  $\psi$  зависит от координат шести частиц, а  $H$  — обычный оператор энергии. Как хорошо известно, конечные решения  $\psi$  могут быть найдены только для определенного ряда так называемых «собственных» значений энергии  $E$ :

$$E_0, E_1, E_2, \dots$$

Можно было бы ожидать, что всем этим значениям  $E$  соответствуют возможные стационарные состояния молекулы. В действительности, однако, в природе, т. е. при исследовании полосатых спектров молекул [3]<sup>2)</sup>, наблюдается только половина

<sup>1)</sup> Мы не утверждаем тем самым, что  $\alpha$ -частица или ядро атома углерода в действительности обладают только тремя степенями свободы, т. е. что они не представляют собой сложных систем, которые могут быть разложены на составные части. Мы подразумеваем под этим лишь то обстоятельство, что вероятность нахождения этих ядер в каком-либо стационарном состоянии, отличном от нормального, чрезвычайно мала, а также, что нормальное состояние не вырождено; в таком случае, если ядро находится в состоянии покоя в свободном от сил пространстве, то для описания его состояния оказывается достаточным введение трех координат.

При рассмотрении столкновений между атомами, движущимися с тепловыми скоростями, или же между атомами, обладающими энергией, меньшей первого резонансного потенциала, атом гелия может быть рассматриваем как «частица без спина» (см. гл. XII, § 3).

<sup>2)</sup> Это утверждение справедливо только в том случае, если принять во внимание, что оно относится к данному электронному состоянию, так как некоторые из теоретически возможных электронных состояний не осуществляются благодаря принципу Паули.



общего числа таких состояний. Исследуем причину этого обстоятельства.

Если не учитывать случайного вырождения, которое в общем случае может быть устранено с помощью электрического и магнитного полей, то каждому дискретному собственному значению энергии  $E_n$  соответствует только одна волновая функция

$$\psi_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4),$$

являющаяся решением дифференциального уравнения (5.7). Все эти решения обладают тем свойством, что они либо симметричны по отношению к координатам  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ :

$$\psi_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \mathbf{r}_1 \dots) = \psi_n(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1; \mathbf{r}_1 \dots),$$

либо антисимметричны по отношению к ним:

$$\psi_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \mathbf{r}_1 \dots) = -\psi_n(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1; \mathbf{r}_1 \dots).$$

Это свойство не связано с каким-либо специальным предположением относительно волновых функций, оно вытекает из дифференциального уравнения, которому эти волновые функции удовлетворяют. Доказательство<sup>1)</sup> основано на предположении о том, что масса и заряд обеих рассматриваемых частиц совершенно одинаковы, так что оператор  $H$  симметричен по отношению к координатам этих частиц.

С помощью волнового уравнения можно, далее, установить, что если молекула находится в состоянии, описываемом симметричной волновой функцией, то никакое возмущение не может перевести ее в состояние, описываемое антисимметричной волновой функцией. Правильно также и обратное утверждение. Эти результаты справедливы не только для стационарных состояний; если система, содержащая два одинаковых ядра, находится в каком-либо состоянии, описываемом симметричной волновой функцией, то последняя будет оставаться симметричной независимо от характера возмущения, действующего на систему. Доказательство этого утверждения, данное Дираком [4], существенным образом связано с предположением о том, что потенциальная энергия двух одинаковых частиц, находящихся соответственно в точках  $P$  и  $P'$ , не зависит от того, которая именно из частиц находится в точке  $P$  и которая в точке  $P'$ . Если бы частицы хоть слегка отличались друг от друга своей массой или зарядом, то это утверждение было бы неверным, и при наличии возмущения (например, столкновения) имелась бы конечная, хотя и малая, вероятность перехода системы из симметричного состояния в состояние антисимметричное.

<sup>1)</sup> Доказательство приведено в конце настоящего параграфа.

Мы уже отмечали, что в природе наблюдается только половина теоретически возможных энергетических состояний молекул. Найдено, что у молекул  $C_2$  и  $He_2$  наблюдаемые значения энергии соответствуют волновой функции, симметричной по отношению к координатам ядер. Причины этого обстоятельства в настоящее время неизвестны<sup>1)</sup>; мы должны поэтому рассматривать его просто как экспериментальный факт; он не противоречит законам квантовой механики, но и не вытекает из них. Квантовая механика утверждает лишь, что молекула, находившаяся однажды в симметричном состоянии, никогда не сможет перейти в антисимметричное состояние. То обстоятельство, что в действительности наблюдается только половина возможных состояний и что смешанные состояния не наблюдаются ни при каких возмущениях, показывает, что свойства любых двух ядер гелия или углерода абсолютно тождественны. Отсюда следует также, что эти частицы не обладают четвертой степенью свободы (спином) — во всяком случае в нормальном состоянии.

Перейдем теперь к рассмотрению частиц, обладающих спином; к ним относятся электрон, протон и большинство ядер. Как мы видели в гл. IV, такие частицы обладают четвертой координатой  $s$ , причем энергия каждой из них при движении в магнитном поле  $H$ , параллельном оси  $z$ , пропорциональна  $sH$ . Для электронов и протонов величина  $s$  может принимать только значения  $\pm 1$ ; для ядер, отличных от протонов, допустимы также некоторые другие значения  $s$ <sup>2)</sup>. Частица, обладающая спином, характеризуется, таким образом, координатами  $(r, s)$ . Совокупность этих четырех координат мы будем обозначать одной буквой  $\theta$ .

При отыскании энергетических уровней системы, содержащей две частицы со спином, например атома гелия, содержащего два электрона, мы встречаемся со следующей трудностью (см. гл. XV): оператор Гамильтона для такой системы точно не известен, так как поправки, вводимые наличием спина, оказываются величинами того же порядка, что и «релятивистские поправки». Самое предположение о существовании оператора Гамильтона приводит, однако, в этом случае к существенным качественным результатам,

<sup>1)</sup> Если рассматривать  $\alpha$ -частицу и ядро углерода как сложные системы, состоящие из данного числа нейтронов и протонов, то свойства симметрии этих ядер могут быть выведены из соответствующих свойств нейтрона и протона.

<sup>2)</sup> В обычной теории сверхтонкой структуры ядру приписывается количество движения  $i\hbar/2\pi \left( i=0, \frac{1}{2}, 1 \dots \right)$  и магнитный момент  $ig(i)eh/4\pi mc$ , где  $g(i)$  — число порядка  $1/1000$ . Дополнительная энергия, обусловленная взаимодействием ядра с магнитным полем  $H$ , создаваемым электронной оболочкой, равна  $m_H H g(i) eh/4\pi mc$ , где  $m_H$  — составляющая  $i$  в направлении  $H$  (см., например, [5]).

находящимся в согласии с экспериментальными данными о числе и порядке величины энергетических уровней, а также о возможных переходах между ними.

Пусть  $H$  — оператор Гамильтона для системы, содержащей две одинаковые частицы со спином, например для атома гелия. Для нахождения энергетических уровней мы должны решить волновое уравнение

$$(H - E)\psi = 0.$$

При этом, как и прежде, имеется ряд энергетических уровней  $E_n$ , для которых могут быть найдены конечные решения и соответствующие волновые функции  $\psi_n(\theta_1, \theta_2)$ . Оператор  $H$  должен быть симметричным по отношению к координатам обеих частиц; следовательно, как и раньше, волновые функции, соответствующие невырожденному стационарному состоянию, будут либо симметричными, либо антисимметричными, т. е.

$$\psi_n(\theta_1, \theta_2) = \pm \psi_n(\theta_2, \theta_1).$$

Как это было отмечено выше, переходы между состояниями, обладающими противоположной симметрией, не могут иметь места ни при каком возмущении.

Для всех исследованных частиц найдено, что энергетические уровни соответствуют либо только антисимметричным волновым функциям (электроны, протоны), либо только симметричным волновым функциям ( $\alpha$ -частицы, ядра углерода или азота). Как мы уже видели, это обстоятельство находится в согласии с волновой механикой, хотя и не вытекает из нее непосредственно.

Вопрос о том, соответствует ли данному энергетическому уровню, наблюдаемому экспериментально, некоторая симметричная или же антисимметричная волновая функция, несмотря на отсутствие точной теории взаимодействия частиц, обладающих спином, может быть решен, благодаря малости спиновых сил. Волновая функция, описывающая любое невырожденное состояние, например состояние атома гелия, будет иметь в этом случае следующую приближенную форму:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \chi(s_1, s_2),$$

где  $\psi$  — решение уравнения Шредингера для точечных электронов. Для вычисления энергетических уровней атома гелия мы поступим следующим образом. Прежде всего решим уравнение Шредингера для точечных электронов; мы получим при этом решения, симметричные или антисимметричные по отношению к  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Обе группы энергетических уровней наблюдаются в действительности; уровни с антисимметричными волновыми функциями (орто-гелий) оказываются, однако, триплетными. Это обстоятельство обусловлено наличием спина; существуют четыре функции,

соответствующие четырем стационарным состояниям — трем симметричным и одному антисимметричному; в нулевом приближении они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \chi_\alpha(s_1) \chi_\alpha(s_2), \quad \chi_\beta(s_1) \chi_\beta(s_2), \\ & \bar{\chi}_\alpha(s_1) \chi_\beta(s_2) \pm \chi_\alpha(s_2) \chi_\beta(s_1). \end{aligned}$$

Функции  $\chi_\alpha$  и  $\chi_\beta$  были определены в гл. IV, § 2. Каждому решению уравнения Шредингера соответствуют, таким образом, четыре теоретически возможных уровня энергии; из того обстоятельства, что наблюдаемые уровни пара-гелия являются сингулетными, а уровни орто-гелия — триплетными, следует, что волновые функции в действительности антисимметричны по отношению к  $\theta_1$  и  $\theta_2$ <sup>1)</sup>.

В случае двухатомных молекул, содержащих одинаковые ядра, задача решается точно таким же образом: мы решаем уравнение Шредингера, не учитывая спинов ядер. Расщепление уровней, обусловленное наличием спинов, слишком мало, чтобы его можно было наблюдать непосредственно; спиновая мультиплетность данного состояния обнаруживается только через посредство его статистического веса, влияющего на относительную интенсивность некоторых вращательных полос [3, 6].

Доказательство того, что волновые функции, описывающие состояния систем, содержащих две одинаковые частицы в невырожденном стационарном состоянии, либо симметричны, либо антисимметричны по отношению к координатам частиц. Координаты частиц обозначим цифрами 1 и 2; волновая функция  $\psi(1, 2)$  удовлетворяет уравнению

$$H(1, 2) \psi(1, 2) - E \psi(1, 2) = 0, \quad (5.8)$$

где  $H$  — некоторый оператор, симметричный по отношению к координатам частиц. Мы предполагаем, что состояние невырождено,  $\psi$  является поэтому единственным конечным решением уравнения (5.8.).

<sup>1)</sup> Частицы, для которых могут существовать только антисимметричные волновые функции, удовлетворяют статистике Ферми-Дирака; частицы же, для которых существуют только симметричные волновые функции, удовлетворяют статистике Бозе-Эйнштейна. Частицы, подчиняющиеся статистике Ферми-Дирака, подчиняются также принципу Паули. Действительно, если две такие частицы находятся в состояниях, описываемых волновыми функциями  $\psi_\alpha$  и  $\psi_\beta$ , то волновая функция, описывающая состояние пары частиц, имеет следующий вид;

$$\psi_\alpha(\theta_1) \psi_\beta(\theta_2) - \psi_\alpha(\theta_2) \psi_\beta(\theta_1).$$

Если оба состояния одинаковы, то эта волновая функция обращается в нуль; отсюда следует, что две частицы не могут находиться в одном и том же состоянии.

Переставляя координаты 1 и 2 в уравнении (5.8), получаем

$$[H(2, 1) - E]\psi(2, 1) = 0. \quad (5.9)$$

Так как  $H$  симметрично по отношению к координатам частиц, то  $H(2, 1)$  равно  $H(1, 2)$ . В связи с этим имеем

$$[H(1, 2) - E]\psi(2, 1) = 0. \quad (5.10)$$

Отсюда следует, что  $\psi(2, 1)$  является решением уравнения (5.8). Но так как  $\psi(1, 2)$  представляет собой единственное решение этого уравнения, конечное во всех точках пространства, мы должны положить

$$\psi(2, 1) = A\psi(1, 2),$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Ясно, однако, что

$$\iint [\psi(1, 2)]^2 d\tau_1 d\tau_2 = \iint [\psi(2, 1)]^2 d\tau_1 d\tau_2$$

и что ни один из этих интегралов не обращается в нуль.

Отсюда следует, что

$$A^2 = 1.$$

Так как все величины, входящие в эти уравнения, вещественны, получаем

$$A = \pm 1,$$

что и требовалось доказать<sup>1)</sup>. Следует подчеркнуть, что это доказательство относится лишь к невырожденным состояниям. Состояния с неквантованной (положительной) энергией всегда, однако, вырождены. К таким состояниям эта теория неприменима.

Общая теория некоординирующихся состояний дана в книге Дирака [4].

#### § 4. Столкновения между двумя одинаковыми частицами, не обладающими спином

Предположим сперва, что частицы не обладают спином ( $\alpha$ -частицы). Представим себе опыт, схема которого изображена на фиг. 15. На экран  $AB$  падают  $\alpha$ -частицы, движущиеся со скоростью  $v$ , а  $\alpha$ -частицы, движущиеся с равной, но противоположной скоростью, падают на экран  $CD$ . Отверстия в экранах открываются и снова закрываются, пропуская  $\alpha$ -частицы, не обязательно в один и тот же момент времени. Введем в рассмотрение волновые функции

$$u(r, t), v(r, t),$$

<sup>1)</sup> Приведенный здесь вывод является не совсем правильным ввиду наличия «перестановочного» вырождения [2]. (Прим. ред.)

нормированные к единице<sup>1</sup>). Стоящая перед нами задача заключается в определении волновой функции системы в момент времени  $t$  после столкновения. Простейший способ ее решения заключался бы в приписании частицам координат  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , где  $\mathbf{r}_1$  — координата частицы, прошедшей через отверстие  $AB$ , и т. д. В таком случае до столкновения искомая волновая функция имела бы следующий вид:

$$u(\mathbf{r}_1, t) v(\mathbf{r}_2, t), \quad (5.11)$$

а после столкновения волновая функция  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$  определялась бы с помощью волнового уравнения типа (5.1) и начального



Фиг. 15.

условия (5.11). Для физической интерпретации волновой функции следовало бы принять, что  $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)|^2 d\tau_1 d\tau_2$  определяет вероятность нахождения первой  $\alpha$ -частицы в элементе объема  $(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$ <sup>2</sup> и второй  $\alpha$ -частицы в элементе объема  $(\mathbf{r}_2, d\tau_2)$  в момент времени  $t$ . Вероятность нахождения одной из двух рассматриваемых частиц в элементе объема  $(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$ , а другой частицы — в  $(\mathbf{r}_2, d\tau_2)$  определилась бы при этом следующим выражением:

$$\{|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 + |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.12)$$

( $t$  здесь опущено).

Этот метод решения задачи, однако, неверен. Действительно, воспользовавшись в качестве исходной волновой функции функцией (5.11) и предполагая присутствие электронов, мы получим конечную вероятность образования молекулы и, более того, конечную вероятность осуществления любого из математически возможных стационарных состояний. Это противоречит, однако, опытным данным; мы знаем, что у  $\text{He}_2$  наблюдаются только такие стационарные состояния, волновые функции которых симме-

<sup>1</sup>) Это значит, что  $\int |u(\mathbf{r}, t)|^2 d\tau = 1$ .

<sup>2</sup>) Под  $(\mathbf{r}, d\tau)$  мы подразумеваем элемент объема  $d\tau$ , расположенный в точке  $\mathbf{r}$ .

тричны по отношению к координатам ядер. Мы знаем также, что если волновая функция была вначале симметричной, то она должна оставаться симметричной все время. Согласие с опытными данными может быть поэтому получено только в том случае, если наша исходная волновая функция будет симметричной по отношению к координатам обеих  $\alpha$ -частиц.

Единственный способ построения симметричной функции из волновых пакетов  $u$  и  $v$  заключается в том, чтобы положить исходную волновую функцию равной

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = k[u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2) + u(\mathbf{r}_2)v(\mathbf{r}_1)], \quad (5.13)$$

где  $k$  — некоторая постоянная. Выясним физический смысл этой волновой функции.

Первоначально, согласно предположению, волновые пакеты не налагались друг на друга, откуда следует, что для любого значения  $\mathbf{r}_1$ , при котором  $u(\mathbf{r}_1)$  конечно,  $v(\mathbf{r}_1)$  обращается в нуль. Таким образом, в момент времени  $t = 0$

$$u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_1) = 0.$$

Воспользовавшись функцией (5.13), имеем

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = k^2 |u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2)|^2 + k^2 |u(\mathbf{r}_2)v(\mathbf{r}_1)|^2. \quad (5.14)$$

Функция  $u$  обращается в нуль во всех точках пространства, за исключением области, расположенной вблизи отверстия  $AB$ , а функция  $v$  равна нулю во всех точках пространства, за исключением области вблизи отверстия  $CD$ . Величина  $|\psi|^2$  отлична, таким образом, от нуля только при значениях  $\mathbf{r}_1$ , близких к  $AB$ , и значениях  $\mathbf{r}_2$ , близких к  $CD$ , или наоборот. Мы не можем поэтому рассматривать  $|\psi|^2 d\tau_1 d\tau_2$  как вероятность того, что частица, наблюдаемая вблизи  $AB$ , находится в элементе объема  $(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$  и т. д., так как эта вероятность обращается в нуль при значениях  $\tau_1$ , близких к  $CD$ . Мы должны интерпретировать  $|\psi|^2 d\tau_1 d\tau_2$ , как вероятность того, что одна  $\alpha$ -частица (любая из двух) находится в элементе объема  $d\tau_1$ , а другая частица — в элементе объема  $d\tau_2$ . Ясно, что выражение (5.14) даст правильное значение этой вероятности, если мы положим  $k$  равным единице<sup>1)</sup>.

Мы сохраним такую интерпретацию для любой волновой функции  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , описывающей состояние двух тождественных частиц. Отметим, что если эта интерпретация имеет смысл, то  $|\psi|^2$  симметрично, т. е.

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2.$$

<sup>1)</sup> Это дает  $\iint |\psi|^2 d\tau_1 d\tau_2 = 2$ . Волновые функции нормированы, таким образом, к двум.

Существуют два способа построения волновой функции, обладающей этим свойством в момент времени  $t=0$ ; две возможные волновые функции имеют при этом следующий вид:

$$u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2) \pm u(\mathbf{r}_2)v(\mathbf{r}_1).$$

Таким образом, согласно приведенным выше соображениям, следует пользоваться либо симметричной, либо антисимметричной волновой функцией; однако если бы не было известно, что для  $\text{He}_2$  антисимметричные состояния в природе не наблюдаются, то мы не знали бы, которую именно из этих функций надлежит выбрать; в рамках волновой механики оказалось бы при этом невозможным сделать какие-либо заключения относительно столкновений рассматриваемого типа.

Конечно, такая интерпретация функции  $\psi$  априори не является необходимой; мы могли бы воспользоваться для момента времени  $t=0$  несимметричной волновой функцией  $u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2)$  и рассматривать  $|\psi|^2 d\tau_1 d\tau_2$  как вероятность нахождения одной из двух частиц в точке  $\mathbf{r}_1$ . В результате, как уже было сказано выше, мы получили бы, однако, конечные значения вероятности существования молекул в антисимметричных стационарных состояниях, что в действительности не наблюдается.

Применение симметричной волновой функции дает иные значения вероятности рассеяния, нежели применение несимметричных волновых функций. Если бы мы воспользовались последними, то исходная волновая функция имела бы вид  $u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2)$ . Пусть  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$  есть значение такой волновой функции через промежуток времени  $t$ . Примем, что величина  $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)|^2 d\tau_1 d\tau_2$  определяет вероятность того, что первая частица, находившаяся первоначально в  $AB$ , находится теперь в элементе объема  $(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$ , а вторая частица — в элементе объема  $(\mathbf{r}_2, d\tau_2)$ , тогда как  $|\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)|^2 d\tau_1 d\tau_2$  определяет вероятность того, что частица, первоначально находившаяся в  $AB$ , находится в элементе объема  $(\mathbf{r}_2, d\tau_2)$  и т. д. В таком случае вероятность того, что одна из частиц находится в элементе объема  $(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$ , а вторая частица — в элементе объема  $(\mathbf{r}_2, d\tau_2)$ , определится выражением вида [см. выражения (5.9)]

$$\{ |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 + |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2 \} d\tau_1 d\tau_2. \quad (5.15)$$

С другой стороны, если мы воспользуемся симметричной волновой функцией, то исходная волновая функция будет иметь вид

$$u(\mathbf{r}_1)v(\mathbf{r}_2) + u(\mathbf{r}_2)v(\mathbf{r}_1),$$

а волновая функция через промежуток времени  $t$

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t). \quad (5.16)$$

Вероятность нахождения одной из частиц в элементе объема



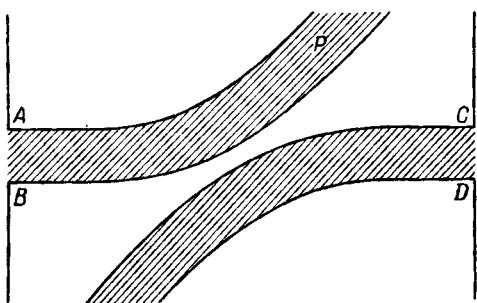
$(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$ , а другой частицы — в элементе объема  $(\mathbf{r}_2, d\tau_2)$  равна при этом

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)|^2 d\tau_1 d\tau_2, \quad (5.17)$$

т. е. определяется выражением вида

$$\{|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 + |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2 + \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + \\ + \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\} d\tau_1 d\tau_2. \quad (5.18)$$

Мы видели, что применение симметричной волновой функции (5.16) не дает возможности определить вероятность нахождения



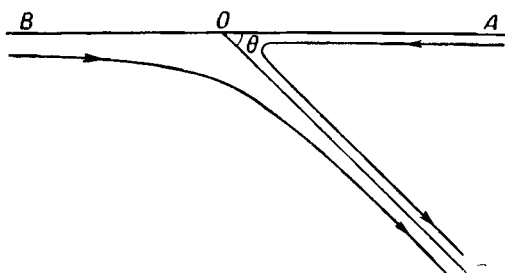
Фиг. 16:

в элементе объема  $d\tau_1$  какой-либо определенной  $\alpha$ -частицы, например той  $\alpha$ -частицы, которая находилась первоначально вблизи  $AB$ . Если некоторая  $\alpha$ -частица наблюдается в данной точке, то, вообще говоря, не существует такого опыта, с помощью которого можно было бы установить, та ли это  $\alpha$ -частица, которая находилась первоначально в  $AB$ , или же какая-либо другая. Волновая функция дает нам, таким образом, не больше сведений, нежели экспериментальные данные. Установить, о какой именно из  $\alpha$ -частиц идет речь, можно было бы лишь в том случае, если бы траектория волнового пакета, описывающего движение одной из  $\alpha$ -частиц, нигде не пересекалась с траекторией волнового пакета, описывающего движение второй  $\alpha$ -частицы. Осуществление такого рода опыта принципиально возможно для медленных  $\alpha$ -частиц ( $\delta\pi e^2/hv \gg 1$ ).

На фиг. 16 заштрихованные участки представляют собой траектории двух волновых пакетов. Ясно, что если некоторая частица наблюдается в точке  $P$ , то первоначально она должна была находиться в  $AB$ . Отсюда следует, что применение симметричной волновой функции дает нам в этом случае меньше сведений, нежели экспериментальные данные. Применение несимме-

тричной волновой функции дало бы нам, однако, в этом случае те же значения вероятности нахождения частицы, что и применение симметричной волновой функции, так как член  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$  в выражении (5.15) обращается в нуль при любых значениях  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ .

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении вероятности рассеяния при столкновении двух частиц. Наиболее простым является случай стационарных пучков бесконечной ширины. Рассмотрим два таких пучка, движущихся параллельно оси  $z$  с равными по величине ( $v/2$ ) и противоположными по направлению скоростями. Нас интересует определение числа рассеянных частиц, движущихся в направлении  $OP$  под углом  $\theta$  к линии  $BA$ . Частица



Фиг. 17.

может оказаться отклоненной на угол  $\theta$  от линии  $BO$  или же на угол  $(\pi - \theta)$  от линии  $AO$ , как это показано на фиг. 17.

Введем в рассмотрение координаты частиц  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Положим далее

$$r = r_1 - r_2,$$

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Волновая функция системы может быть при этом записана в форме (см. § 1)

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi(R)\psi(r).$$

В рассматриваемом нами случае центр тяжести системы неподвижен, и функция  $\Psi$  поэтому постоянна. Функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m^*}{\hbar^2} \left[ \frac{m^* v^2}{2} - V(r) \right] \psi = 0, \quad (5.19)$$

где

$$m^* = \frac{m}{2},$$

а  $V(r)$  — потенциальная энергия взаимодействия частиц. Решение  $\psi(r)$  может быть найдено с помощью методов, изложенных в гл. II:

при больших значениях  $r$  оно приобретает следующий вид:

$$\psi \sim e^{ikz} + f(\theta) r^{-1} e^{ikr},$$

где  $e^{ikz}$  характеризует «падающую волну»<sup>1)</sup> (в пространстве  $r$ ), а  $r^{-1}e^{ikr}$  — рассеянную волну. Если бы частицы были различимы, то этой волновой функцией можно было бы воспользоваться для описания явления рассеяния. Величина  $|f(\theta)|^2$  при этом была бы пропорциональной вероятности того, что линия центров обеих частиц отклонится на угол  $\theta$ . Число частиц, рассеянных в направлении  $OP$ , было бы пропорционально величине

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2.$$

Мы должны, однако, построить симметричную волновую функцию

$$\psi(r_1, r_2) + \psi(r_2, r_1).$$

При перестановке  $r_1$  и  $r_2$  вектор  $r$  становится равным  $-r$ . Величина  $r$  остается при этом неизменной, а угол  $\theta$  заменяется углом  $(\pi - \theta)$ . Симметричная волновая функция имеет, таким образом, следующий вид:

$$e^{ikz} + e^{-ikz} + r^{-1}e^{ikr} [f(\theta) + f(\pi - \theta)]. \quad (5.20)$$

Падающая волна может быть описана выражением

$$2 \cos kz = 2 \cos k(z_1 - z_2);$$

среднее значение  $|\psi|^2$  для падающей волны равно, таким образом, 2; эта волна соответствует, следовательно, одной частице, приходящейся на единицу поперечного сечения в каждом пучке (см. примечание на стр. 124). Из выражения (5.20) следует, что вероятность нахождения рассеянной частицы в элементе объема  $d\tau_1$  и другой частицы, с которой первая столкнулась, в элементе объема  $d\tau_2$ , определяется выражением

$$\frac{1}{r^2} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\tau_1 d\tau_2,$$

где  $r$  — расстояние между  $d\tau_1$  и  $d\tau_2$ , а  $\theta$  — угол между прямой, соединяющей  $d\tau_1$  с  $d\tau_2$ , и осью  $z$ .

Эффективное сечение для столкновения, при котором одна из частиц отклоняется внутри телесного угла  $d\omega$ , равно, таким образом,

$$|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\omega. \quad (5.21)$$

Отсюда легко определить вероятность рассеяния для того случая, когда одна из столкнувшихся частиц в начальный момент времени была неподвижной. В этом случае траектории столкнувшихся частиц расходятся под прямыми углами. Если  $\alpha$ -частица,

<sup>1)</sup> В случае кулонова поля функция, описывающая падающую волну, носит более сложный характер; см. гл. III, § 1.

движущаяся со скоростью  $v$ , сталкивается с неподвижной  $\alpha$ -частицей (ядром гелия), то эффективное сечение  $I(\theta) d\omega$  для столкновения, в результате которого частица рассеивается на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\omega$ , согласно (5.21), определится следующим выражением (см. гл. VIII, § 10):

$$I(\theta) d\omega = |f(2\theta) + f(\pi - 2\theta)|^2 4\cos\theta d\omega. \quad (5.22)$$

Следует отметить, что формула (5.22) определяет вероятность того, что частица будет наблюдаена в направлении, составляющем угол  $\theta$  с направлением движения падающего пучка; эта частица может быть либо  $\alpha$ -частицей, рассеянной из первоначального пучка, либо отброшенным ядром атома гелия. После того как столкновение уже произошло, невозможно ответить на вопрос о том, которая из двух столкнувшихся частиц была падающей и которая — неподвижной до момента столкновения; в волновой механике подобный вопрос не имеет смысла.

### Кулоново поле

Если взаимодействие частиц с достаточной степенью точности может быть описано кулоновым полем  $V(r) = (Ze)^2/r$ , то функция  $f(\theta)$  известна; она имеет вид<sup>1)</sup>

$$f(\theta) = \frac{Z^2 e^2}{2m^* v^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \exp [i\alpha \ln(1 - \cos\theta) + 2i\gamma_0 + i\pi],$$

где

$$m^* = \frac{m}{2}, \quad \alpha = \frac{2\pi(Ze)^2}{h\nu},$$

причем  $\gamma_0$  не зависит от  $\theta$ . Из (5.22) следует

$$I(\theta) = \left(\frac{Z^2 e^2}{m v^2}\right)^2 (\operatorname{cosec}^4\theta + \sec^4\theta + 2\Phi \operatorname{cosec}^2\theta \sec^2\theta) 4\cos\theta, \quad (5.23)$$

где

$$\Phi = \cos(\alpha \ln \operatorname{tg}^2 \theta).$$

Соответствующие формулы классической механики [7] могут быть получены из выражения (5.23), если мы положим  $\Phi = 0$ .

Следует отметить, что при  $\theta = 45^\circ$  число рассеянных частиц, подсчитанное по формуле (5.23), вдвое превышает значение, даваемое классической теорией.

Число частиц, рассеянных на данный угол, определяемое формулой (5.23), при  $v \rightarrow 0$  не стремится к значению, предсказываемому классической теорией. Когда  $v$  мало и, следовательно,  $\alpha$  велико, интенсивность рассеяния в интервале между любыми двумя углами должна, однако, стремиться к своему классическому значению в виду быстрых колебаний функции  $\Phi$  между  $+1$  и  $-1$  при изменении  $\theta$ .

<sup>1)</sup> См. уравнение (5.19) и гл. III, § 1.

Формула (5.23) была проверена экспериментально для случая рассеяния  $\alpha$ -частиц в гелии [8]. При этом применялись очень медленные  $\alpha$ -частицы, так как только в таком случае можно считать, что взаимодействие между ядрами обратно пропорционально квадрату расстояния (см. гл. XIII, § 2).

### § 5. Столкновения между двумя одинаковыми частицами, обладающими спином

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о столкновениях между двумя одинаковыми частицами, не обладающими спином и подчиняющимися статистике Бозе—Эйнштейна. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о столкновении между такими частицами, которые, подобно электронам и протонам, обладают спином, т. е. половиной кванта момента количества движения, и подчиняются статистике Ферми—Дирака. Получаемые при этом результаты легко могут быть обобщены на случай частиц, обладающих любым квантованным значением момента количества движения и подчиняющихся любой из двух статистик (см. § 6).

Вернемся к рассмотрению опыта, описанного нами в начале предыдущего параграфа. Если частицы обладают спином, то волновая функция, характеризующая состояние частицы, должна зависеть также и от спиновых координат. Предположим, что частица, прошедшая через отверстие  $AB$ , обладает спином, направление которого характеризуется вектором  $\mathbf{I}$ , так что волновая функция, описывающая движение этой частицы, имеет вид<sup>1)</sup>

$$u(\mathbf{r}) \chi_I(s).$$

Аналогично волновую функцию, описывающую движение второй частицы, запишем в виде

$$v(\mathbf{r}) \chi_n(s).$$

Для описания столкновения мы должны воспользоваться антисимметричной волновой функцией; волновая функция, характеризующая состояние системы до столкновения, может быть определена<sup>2)</sup> в виде

$$u(1) \chi_I(1) v(2) \chi_n(2) - u(2) \chi_I(2) v(1) \chi_n(1).$$

Волновая функция, характеризующая состояние системы после столкновения, имеет следующий вид:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2) = \chi_I(1) \chi_n(2) \psi(1, 2) - \chi_I(2) \chi_n(1) \psi(2, 1). \quad (5.24)$$

При этом мы пренебрегли маловероятным изменением направления спинов. Вероятность того, что в момент времени  $t$  одна

<sup>1)</sup> См. гл. IV, § 2, где дано определение функций  $f_\alpha$  и  $\gamma_\beta$ .

<sup>2)</sup> Цифра 1 соответствует  $\mathbf{r}_1$  или  $s_1$ , цифра 2— $\mathbf{r}_2$  или  $s_2$ .

из частиц находится в элементе объема  $(\mathbf{r}_1, d\tau_1)$ , определяется соответственно выражением

$$\sum_{s_1} \sum_{s_2} |\Psi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2)|^2. \quad (5.25)$$

Если  $\theta$  и  $\varphi^1$  — полярные углы, характеризующие направление вектора  $\mathbf{l}$ , а  $\theta'$ ,  $\varphi'$  — то же для вектора  $\mathbf{n}$ , то имеем

$$\chi_1(s) = -\sin \frac{\theta}{2} \chi_a(s) + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \chi_b(s).$$

Далее,

$$\sum_s |\chi_1(s)|^2 = 1,$$

и

$$\sum_s \chi_1(s) \chi_n^*(s) = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{i(\varphi - \varphi')}.$$

Вероятность (5.25) равна, таким образом,

$$\begin{aligned} & |\psi(1,2)|^2 + |\psi(2,1)|^2 - [\psi(2,1)\psi^*(1,2) + \psi(1,2)\psi^*(2,1)] \times \\ & \times \left[ \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta'}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta'}{2} + \right. \\ & \left. + 2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \cos(\varphi - \varphi') \right], \end{aligned}$$

что сводится к

$$\begin{aligned} & |\psi(1,2)|^2 + |\psi(2,1)|^2 - \\ & - \frac{1}{2} [\psi(1,2)\psi^*(2,1) + \psi(2,1)\psi^*(1,2)] (\cos \Theta + 1), \quad (5.26) \end{aligned}$$

где  $\Theta$  — угол между направлениями спина,

$$\cos \Theta = \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}.$$

Выражение (5.26) может быть записано в следующем виде:

$$A |\psi(1,2) + \psi(2,1)|^2 + B |\psi(1,2) - \psi(2,1)|^2,$$

где

$$A = \frac{1}{4} (1 - \cos \Theta), \quad B = \frac{1}{4} (3 + \cos \Theta).$$

Для вычисления вероятности данного столкновения мы должны, таким образом, использовать как волновые функции, симметричные по отношению к пространственным координатам частиц, так и антисимметричные волновые функции. Если вероятность, получаемая при применении симметричных функций, есть  $P_S$ , а вероятность, получаемая при применении антисимметричных

<sup>1)</sup> См. гл. IV, § 2.

функций, есть  $P_A$ , то истинная вероятность равна

$$\frac{1}{4}(1 - \cos \Theta) P_S + \frac{1}{4}(3 + \cos \Theta) P_A, \quad (5.27)$$

где  $\Theta$  — угол между направлениями спинов двух сталкивающихся частиц. Если угол  $\Theta$  неизвестен, т. е. если два сталкивающихся пучка частиц неполяризованы, то выражение (5.27) должно быть усреднено по всем значениям  $\Theta$ . Так как среднее значение  $\cos \Theta$  равно нулю, то вероятность равна

$$\frac{1}{4}(P_S + 3P_A). \quad (5.28)$$

В качестве примера рассмотрим пучок электронов, плотность которого такова, что за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит один электрон. Предположим, что этот пучок электронов сталкивается с отдельным неподвижным свободным электроном. Определим вероятность того, что за единицу времени произойдет такое столкновение, в результате которого одна из частиц после столкновения будет двигаться в направлении, заключенном внутри телесного угла  $d\omega$  под углом  $\theta$  к направлению движения падающего пучка. В этом случае [см. уравнение (5.23)]

$$P_S = \frac{e^4}{m^2 v^4} (\operatorname{cosec}^4 \theta + \sec^4 \theta + 2\Phi \operatorname{cosec}^2 \theta \sec^2 \theta) 4 \cos \theta \quad (5.29a)$$

и аналогично

$$P_A = \frac{e^4}{m^2 v^4} (\operatorname{cosec}^4 \theta + \sec^4 \theta - 2\Phi \operatorname{cosec}^2 \theta \sec^2 \theta) 4 \cos \theta, \quad (5.29b)$$

где

$$\Phi = \cos \left( \frac{2\pi e^2}{\hbar v} \ln \operatorname{tg}^2 \theta \right).$$

Вероятность определяется, таким образом, выражением (5.27), если направления спинов известны, либо выражением (5.28), если направления спинов неизвестны.

Отметим, что если спины направлены одинаково, то мы должны пользоваться только антисимметричным решением. Отсюда следует, что рассеяние электронов на  $45^\circ$  не может осуществляться. Если же спины антипараллельны, так что  $\Theta$  равно  $180^\circ$ , то число рассеянных электронов равно

$$\frac{1}{2}(P_S + P_A),$$

т. е. совпадает со значением, даваемым классической теорией.

Практически рассеяние пучка электронов неподвижными электронами можно наблюдать лишь в том случае, когда под «неподвижными» электронами подразумеваются связанные атомные электроны. Электроны в падающем пучке должны при этом

обладать столь большой энергией, чтобы силами связи и движением атомных электронов можно было пренебречь. Если это условие выполняется, мы имеем

$$\frac{2\pi e^2}{h\nu} \ll 1.$$

Множитель  $\Phi$  в выражениях (5.29) может быть в связи с этим заменен единицей, за исключением случая малых углов, когда отклонения от классических формул малы при любых условиях.

Вильямс [9] сопоставил формулы (5.28) и (5.29) с экспериментальными данными, относящимися к наблюдениям над электронами с энергией 20 000 e в камере Вильсона, и получил при этом хорошее согласие теории с опытом.

Рассеяние протонов в водороде было исследовано Гертсеном [10], причем полученные результаты говорят в пользу формулы (5.28).

Современные работы по рассеянию протонов протонами посвящены в основном определению близкодействующих некулоновых сил между двумя протонами, а не исследованию эффекта симметрии; однако при анализе опытных данных последний эффект принимается во внимание. Эти работы рассматриваются нами в гл. XIII, § 1.

## § 6. Столкновения между одинаковыми ядрами

Если пучок атомов пропускается через газ, состоящий из атомов того же сорта, и если при этом энергия пучка такова, что наименьшее расстояние при сближении между частицами для рассеяния на данный угол меньше, нежели радиус  $K$ -оболочки атома, то влиянием электронов при рассмотрении столкновений такого типа можно пренебречь. Число рассеянных частиц при этом равно [11]

$$C_S P_S + C_A P_A,$$

где  $P_S$  и  $P_A$  определяются формулами (5.29), причем  $m$  и  $e$  — масса и заряд рассматриваемых ядер. Коэффициенты  $C_S$  и  $C_A$  зависят от рода статистики, которой подчиняются ядра, а также от численного значения спинов. Отношение  $C_S : C_A$  равно отношению интенсивности симметричных и антисимметричных линий вращательных полосатых спектров двухатомных молекул рассматриваемого элемента. Таким образом,

$$C_S : C_A = \frac{s_n}{s_n + 1}$$

для ядер, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака, и

$$C_S : C_A = \frac{s_n + 1}{s_n}$$



для ядер, подчиняющихся статистике Бозе—Эйнштейна; здесь  $s_n \frac{h}{2\pi}$  — момент количества движения ядра (для протонов  $s_n = 1/2$ , для He  $s_n = 0$ , для  $N_{14}$   $s_n = 1$  и т. д.). Более подробные сведения о ядерных спинах можно найти в книге Бете и Бечера [12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зоммерфельд, Волновая механика, М.—Л., 1933.
- 2\*. Френкель, Волновая механика, ч. I, М.—Л., 1934.
3. Крониг, Полосатые спектры и строение молекул, Харьков—Киев, 1935.
4. Dirac, Quantum Mechanics, 3-е изд., Oxford, 1947.
5. Pauling and Goudsmit, Structure of Line Spectra, 1930, стр. 202.
6. Kallman and Schuler, Ergeb. exakt. Naturwiss., 11, 156 (1932).
7. Rutherford, Chadwick and Ellis, Radiations from Radioactive Substances, Cambridge, 1930.
8. Chadwick, Proc. Roy. Soc., A128, 114 (1930); Blackett and Champion, там же, A130, 380 (1931).
9. Williams, Proc. Roy. Soc., A128, 459 (1930).
10. Gerthsen, Ann. d. Phys., 9, 769 (1931).
11. Sexl, Zs. f. Phys., 80, 559 (1933).
12. Бете и Бечер, Физика ядра, ч. I, Харьков, 1938.

## Глава VI

### НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе рассматриваются методы решения некоторых дифференциальных уравнений типа

$$L\Psi = F,$$

где  $L$  — линейный дифференциальный оператор второго порядка, а  $F$  — некоторая известная функция.

#### § 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общее решение

В этом параграфе мы рассмотрим дифференциальные уравнения типа

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p \frac{dy}{dx} + qy = f, \quad (6.1)$$

где  $p$ ,  $q$ ,  $f$  — известные функции от  $x$ . С помощью подстановки

$$y = \Psi \exp \left[ - \int p dx \right]$$

уравнение (6.1) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + Q\Psi = F. \quad (6.2)$$

Мы ограничимся поэтому рассмотрением уравнения (6.2).

Заметим, что уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + qy = f \quad (6.1a)$$

в результате подстановки

$$y = x^{-1} \Psi$$

может быть приведено к форме

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + q\Psi = fx. \quad (6.2a)$$

Существует несколько методов решения уравнения (6.2).

*Метод I.* Предположим, что нам известны два независимых решения уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q\psi = 0. \quad (6.3)$$

Обозначим эти решения через  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Из уравнения (6.3) следует, что

$$\frac{d}{dx} \left( \psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} \right) = 0.$$

Мы можем поэтому умножить  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на постоянные коэффициенты таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{d\psi_1}{dx} \psi_2 - \frac{d\psi_2}{dx} \psi_1 = 1 \quad (\text{при любых } x). \quad (6.4)$$

Если  $\psi_1$  и  $\psi_2$  выбраны так, что соотношение (6.4) удовлетворяется, то функция

$$\Psi = \psi_1(x) \int_a^x \psi_2 F dx + \psi_2(x) \int_x^b \psi_1 F dx \quad (6.5)$$

является решением уравнения (6.2), как это легко может быть проверено путем подстановки (6.5) в (6.2). Далее, так как функция (6.5) содержит две произвольные постоянные  $a$  и  $b$ , она является общим решением уравнения (6.2).

Этот метод рассмотрен более подробно в книге Куранта и Гильберта [1].

*Метод II.* Предположим, что нам известно одно из решений уравнения (6.3); обозначим его через  $\psi$ . Полагая в уравнении (6.2)

$$\Psi = \psi \zeta,$$

получим

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} \psi + 2 \frac{d\zeta}{dx} \frac{d\psi}{dx} = F.$$

Отсюда следует, что

$$[\psi]^2 \frac{d\zeta}{dx} = \int_a^x F \psi dx' \quad (6.6)$$

и, следовательно,

$$\Psi = \psi(x) \int_{\beta}^x [\psi(x')]^{-2} dx' \int_{\alpha}^{x'} F(x'') \psi(x'') dx''. \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) представляет собой искомое решение, содержащее две произвольные постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для решения задач, рассматриваемых в данной главе, наиболее пригодным является первый метод.

## § 2. Решение, удовлетворяющее граничным условиям

В этом параграфе мы покажем, как может быть найдено решение уравнения

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + Q\Psi = F(x),$$

удовлетворяющее определенным граничным условиям. Предположим, что функции  $Q$  и  $F$  удовлетворяют следующим условиям:

$$F(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

причем функция  $F(x)$  ограничена и дифференцируема во всей области  $0 < x < \infty$ , за исключением точки  $x=0$ , где она может иметь полюс порядка  $x^{-1}$ ; далее,

$$Q(x) = A - U(x),$$

где  $A$  — постоянная, а  $U$  — некоторая функция, для которой

$$xU(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

при этом функция  $U(x)$  ограничена и дифференцируема во всей области, за исключением точки  $x=0$ , где она может иметь полюс типа  $n(n+1)/x^2$  ( $n$  — положительное целое число или же нуль).

Наложим на функцию  $\Psi$  два граничных условия.

1. В точке  $x=0$   $\Psi$  должно обращаться в нуль. Из характеристического уравнения следует, что вблизи  $x=0$  одно из решений будет вести себя, как  $x^{n+1}$ , а другое — как  $x^{-n}$ ; в начале координат одно из решений будет, таким образом, обращаться в нуль.

2. Второе граничное условие зависит от знака постоянной  $A$ . Если  $A$  положительно, мы запишем

$$A = k^2$$

и выберем  $\Psi$  так, чтобы

$$\Psi \sim \text{const} \cdot e^{ikx}.$$

Если  $A$  отрицательно, мы выберем функцию  $\Psi$  таким образом, чтобы она была ограничена при  $x \rightarrow \infty$ . Мы увидим в дальнейшем, что эти два условия полностью определяют  $\Psi$  и что найти решение  $\Psi$ , удовлетворяющее этим условиям, оказывается возможным при всех значениях  $A$ , за исключением одного частного случая.

Рассмотрим сперва тот случай, когда  $A$  положительно. Наше уравнение приобретает при этом вид

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + [k^2 - U(x)]\Psi = F(x). \quad (6.8)$$

Пусть  $\psi_1$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k^2 - U(x)]\psi = 0, \quad (6.9)$$

обращающееся в нуль в начале координат.

Предположим, что  $\psi_1$  нормировано так, что (см. гл. II, § 1)

$$\psi_1 \sim \sin(kx + \eta) \quad (x \text{ велико}).$$

Обозначим через  $\psi_2$  решение уравнения (6.9), для которого

$$\psi_2 \sim k^{-1} \exp[i(kx + \eta)] \quad (x \text{ велико}).$$

При всех значениях  $x$  функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  удовлетворяют соотношению

$$\psi_2 \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} = 1.$$

Отсюда следует, что функция (6.5) является общим решением уравнения (6.8). Решение, обращающееся в нуль в начале координат, есть, очевидно,

$$\Psi = \psi_1(x) \int_a^x \psi_2 F dx - \psi_2(x) \int_0^x \psi_1 F dx. \quad (6.10)$$

При  $x \rightarrow \infty$  оба интеграла сходятся; положив  $a = \infty$ , мы получим решение, обладающее требуемой формой при больших значениях  $x$ :

$$\Psi \sim -k^{-1} e^{ikx + i\eta} \int_0^{\infty} \psi_1 F dx. \quad (6.11)$$

Искомое решение всегда может быть, таким образом, найдено, если интегралы

$$\int_0^{\infty} F(x) e^{\pm ikx} dx$$

сходятся.

Рассмотрим теперь тот случай, когда  $A$  отрицательно. Положим

$$A = -\gamma^2.$$

Мы должны найти решение уравнения

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + [-\gamma^2 - U(x)]\Psi = F(x) \quad (6.12)$$

при условии, что функция  $\Psi$  обращается в нуль в начале координат и остается конечной при  $x = \infty$ .

Пусть попрежнему  $\psi_1$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [-\gamma^2 - U(x)]\psi = 0, \quad (6.13)$$

обращающееся в нуль в начале координат. В общем случае это решение при соответствующей нормировке будет вести себя при больших значениях  $x$ , как  $e^{\gamma x}$ . Только при некоторых опре-

деленных (так называемых собственных) значениях  $\gamma$  функция  $\psi$  будет иметь асимптотическую форму  $e^{-\gamma x}$ .

Если  $\gamma$  не является одним из собственных значений, то решение уравнения (6.12) может быть найдено следующим образом. Обозначим через  $\psi_2$  решение уравнения (6.13), имеющее асимптотический вид

$$\psi_2 \sim \gamma^{-1} e^{-\gamma x}.$$

Тогда искомое решение уравнения (6.12) может быть записано в форме

$$\Psi = \frac{1}{2} \left( \psi_1 \int_{\infty}^x \psi_2 F dx - \psi_2 \int_0^x \psi_1 F dx \right). \quad (6.14)$$

Оно стремится к нулю при возрастании  $x$  до бесконечности, если при этом  $F(x) \rightarrow 0$ .

Если  $\gamma$  принимает одно из собственных значений, то решение  $\psi_1$ , обращающееся в нуль в начале координат, имеет асимптотический вид  $e^{-\gamma x}$ ; в качестве  $\psi_2$  мы должны при этом выбрать решение, ведущее себя, как  $\gamma^{-1} e^{\gamma x}$ . Решение уравнения (6.12), обращающееся в нуль в начале координат, тогда будет

$$\Psi = \frac{1}{2} \left( \psi_1 \int_a^x \psi_2 F dx - \psi_2 \int_0^x \psi_1 F dx \right).$$

При больших значениях  $x$ , оно будет вести себя, как

$$\frac{1}{2} \left( e^{-\gamma x} \int_a^x \psi_2 F dx - e^{\gamma x} \gamma^{-1} \int_0^x \psi_1 F dx \right).$$

Можно показать, что первый член этого выражения конечен, так как  $F \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ; мы можем, таким образом, получить конечное решение в том, и только в том, случае, если

$$\int_0^x \psi_1 F dx \rightarrow 0. \quad (6.15)$$

Второй метод, с помощью которого может быть найдено решение уравнения (6.12), есть обычный метод, применяющийся в теории возмущений. Положим

$$F(x) = \sum_n a_n \psi_n(x), \quad (6.16)$$

$$\Psi(x) = \sum_n b_n \psi_n(x),$$

где  $\psi_n$  — нормированные характеристические функции уравнения

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + [-\gamma_n^2 - U(x)]\psi_n = 0, \quad (6.17)$$

подчиняющиеся следующим условиям: при  $x=0$  функция  $\psi$  должна обращаться в нуль, а при  $x=\infty$  она должна оставаться конечной. Суммирование означает здесь также и интегрирование по непрерывной области значений  $\gamma_n^2$  ( $-\gamma_n^2$  положительно). Дискретных значений может даже вовсе не существовать.

Подставляя функции (6.16) в уравнение (6.12), умножая последнее на  $\psi_n$  и интегрируя по всем значениям  $x$ , получаем

$$b_n = a_n(\gamma_n^2 - \gamma^2)^{-1}.$$

Если  $\gamma$  есть одно из собственных значений, например  $\gamma_m$ , то решение, обращающееся в нуль при  $x=0$  и при  $x=\infty$ , существует только при условии  $a_m=0$ , т. е. только в том случае, если

$$\int_0^{\infty} F(x)\psi_m(x)dx = 0.$$

Это условие эквивалентно условию (6.15).

**Интегральное уравнение, определяющее фазу.** Исследуем уравнение (2.12):

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \left[ k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = 0. \quad (6.18)$$

При решении задач теории рассеяния, рассмотренных нами в гл. II, нас интересовало собственное решение  $G_p$  этого уравнения, имеющее асимптотическую форму

$$G_p \sim i^n (2n+1) k^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi\right) + ce^{ikr}. \quad (6.19)$$

Было показано, что множитель  $c$  дается выражением

$$c = \frac{(2n+1)(e^{2i\eta_n} - 1)}{2ik},$$

если собственное решение имеет асимптотический вид

$$G_p \sim i^n (2n+1) k^{-1} e^{i\eta_n} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n\right).$$

Если мы перепишем уравнение (6.18) в форме

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = U(r)G,$$

то из (6.11) следует, что

$$G_p \sim i^n (2n+1) k^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi\right) - k^{-1} e^{ikr} \frac{1}{2} i n \pi \int_0^{\infty} \mathcal{G} U(r) G dr. \quad (6.20)$$

Здесь  $\mathfrak{G}$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2 \mathfrak{G}}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \mathfrak{G} = 0,$$

обращающееся в нуль в начале координат и обладающее асимптотической формой  $\sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right)$ , т. е.

$$\mathfrak{G} = \left( \frac{\pi r}{2k} \right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Сопоставляя (6.20) с (6.19), получаем

$$\frac{1}{2i} (e^{2i\eta_n} - 1) = -e^{i\eta_n} \int_0^\infty \mathfrak{G} U(r) G dr,$$

где

$$G(r) \sim \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n \right).$$

Это приводит к интегральному уравнению

$$\sin \eta_n = - \left( \frac{1}{2} \pi k \right)^{1/2} \int_0^\infty r^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) U(r) G(r) dr.$$

Это уравнение будет использовано нами в гл. VII, § 6. Приближенная формула (2.27), определяющая  $\eta_n$ , получается в результате замены функции  $G(r)$  функцией  $\mathfrak{G}(r)$  при малых значениях  $U(r)$ .

### § 3. Дифференциальные уравнения в частных производных

В этом параграфе положение точки в трехмерном пространстве мы будем определять ее декартовыми координатами  $x, y, z$ , или сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$ , или вектором  $\mathbf{r}$ .

Обозначим через  $L$  оператор

$$L = \nabla^2 + k^2 - U(r),$$

где  $U(r)$  — функция, для которой  $rU(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Пусть  $F(x, y, z)$  есть функция, для которой  $rF \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Нашей задачей является отыскание решения  $\psi$  уравнения

$$L\psi = F(x, y, z), \tag{6.21}$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

Функция  $\psi$  конечна во всех точках пространства; (6.22)

$\psi \sim r^{-1} e^{ikr} f(\theta\varphi)$  при больших значениях  $r$ ,

где  $f(\theta\varphi)$  — некоторая функция, подлежащая определению.



Разложим функции  $\psi$  и  $F$  в ряд по шаровым функциям. Запишем

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta) \quad (m \geq 0)$$

и воспользуемся тем, что

$$P_n^m = P_n^{-m}.$$

Положим, далее,

$$F(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=+n} A_n^m(r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Искомое решение  $\psi$  представим в виде

$$\psi(x, y, z) = \sum_n \sum_m B_n^m(r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (6.23)$$

Подставив эти выражения в уравнение (6.21), умножив последнее на

$$P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

и проинтегрировав по  $\theta$  и  $\varphi$  по поверхности сферы, получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dB_n^m}{dr} \right) + \left( k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) B_n^m = A_n^m(r). \quad (6.24)$$

Полагая, далее,

$$B_n^m = r^{-1} b_n^m,$$

получим

$$\frac{d^2}{dr^2} b_n^m + \left( k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) b_n^m = r A_n^m(r),$$

т. е. уравнение того же типа, что и уравнения, рассмотренные нами выше в § 1 и 2. Согласно (6.14), решение уравнения (6.24), удовлетворяющее требуемым граничным условиям, есть

$$B_n^m = -k L_n(r) \int_r^{\infty} H_n(r) A_n^m(r) r^2 dr - k H_n(r) \int_0^r L_n(r) A_n^m(r) r^2 dr. \quad (6.25)$$

Здесь  $L_n$  и  $H_n$  — решения уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dL}{dr} \right) + \left( k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) L = 0,$$

причем  $L_n$  конечно в начале координат и нормировано таким

образом, что его асимптотическая форма<sup>1)</sup> имела вид

$$L_n \sim (kr)^{-1} \sin \left( kr - \frac{n\pi}{2} + \eta_n \right),$$

а  $H_n$  имеет асимптотическую форму

$$H_n \sim (kr)^{-1} \exp \left[ i \left( kr - \frac{n\pi}{2} + \eta_n \right) \right].$$

Выражения (6.23) и (6.25) определяют искомое решение уравнения (6.21).

Во многих случаях удобно представить это решение в виде интеграла:

$$\psi = \iiint K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F(x', y', z') dx' dy' dz'. \quad (6.26)$$

Полагая

$$K = -\frac{k}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) L_n(r) H_n(r') P_n(\cos \Theta) \quad (r' > r),$$

$$K = -\frac{k}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) H_n(r) L_n(r') P_n(\cos \Theta) \quad (r > r'),$$

где

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

легко показать, что функция (6.26) является искомым решением. Действительно [2],

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta P_n(\cos \Theta) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = \\ & = \frac{4\pi}{2n+1} P_n^m(\cos \theta') e^{im\varphi'}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Отсюда следует непосредственно, что функция (6.26) эквивалентна решению, определяемому выражениями (6.23) и (6.25).

**Асимптотическая форма решения.** При больших значениях  $r$  и заданном  $r'$  имеем

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim \frac{1}{4\pi} r^{-1} e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\frac{1}{2}in\pi + i\eta_n} L_n(r') P_n(\cos \Theta).$$

<sup>1)</sup> См. гл. II, § 1. Условие конечности в начале координат определяет значение  $\eta_n$ .

Обозначив через  $\mathfrak{F}(r, \theta)$  функцию<sup>1)</sup>

$$\mathfrak{F} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n e^{i\gamma n} L_n(r) P_n(\cos \theta),$$

получаем

$$K(r, r') \sim -\frac{1}{4\pi} r^{-1} e^{ikr} \mathfrak{F}(r', \pi - \theta).$$

Решение  $\psi$  имеет, таким образом, асимптотическую форму

$$\psi \sim -\frac{1}{4\pi} r^{-1} e^{ikr} \iiint \mathfrak{F}(r', \pi - \theta) F(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (6.28)$$

при условии, что интеграл сходится.

Уравнение

$$L\psi = F(x, y, z),$$

где

$$L = \nabla^2 - \gamma^2 - U(r),$$

может быть решено аналогичным образом. Конечное решение этого уравнения всегда может быть найдено, если только  $\gamma$  не является собственным значением уравнения (см. § 2)

$$L\psi = 0.$$

#### § 4. Решение уравнения $(\nabla^2 + k^2)\psi = F(x, y, z)$

Уравнение

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = F(x, y, z) \quad (6.29)$$

представляет собой частный случай уравнения, рассмотренного нами в предыдущем параграфе; оно совпадает с ним при  $U(r) = 0$ . В этом случае

$$\mathfrak{F}(r, \theta) = e^{ikz},$$

и, следовательно, согласно (6.28), асимптотическая форма решения  $\psi$  есть

$$\psi \sim -\frac{1}{4\pi} r^{-1} e^{ikr} \iiint e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'} F(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (6.30)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор направления  $\theta$ ,  $\varphi$ , так что

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' = r' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')].$$

Решение  $\psi$  имеет вид

$$\psi = \iiint K(r, r') F(x', y', z') dx' dy' dz',$$

<sup>1)</sup> См. уравнение (2.16). Асимптотическая форма  $\mathfrak{F}$  имеет вид

$$e^{ikz} + r^{-1} f(\theta) e^{ikr}.$$

где

$$K = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Это может быть доказано с помощью уравнения (6.27), а также и непосредственно.

Воспользуемся теоремой [3], согласно которой для двух конечных и дважды дифференцируемых функций  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и любого объема  $\Omega$ , ограниченного некоторой замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , имеет место соотношение

$$\int_{\Sigma} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy dz. \quad (6.31)$$

Здесь  $\partial/\partial n$  означает дифференцирование по внешней нормали к элементу поверхности; в левой части равенства интегрирование производится по поверхности  $\Sigma$ , ограничивающей объем  $\Omega$ , в правой части интеграл берется по объему  $\Omega$ . Воспользуемся этой теоремой, заменив функцию  $f$  решением  $\psi$  уравнения (6.29), удовлетворяющим граничным условиям. В качестве независимой переменной выберем  $\mathbf{r}'$ ; таким образом  $f = \psi(\mathbf{r}')$ . Вместо  $g$  подставим значение  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , рассматривая его как функцию от  $\mathbf{r}'$  при постоянном  $\mathbf{r}$ . В качестве объема  $\Omega$  мы рассмотрим объем, заключенный между двумя сферами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , центр которых находится в точке  $\mathbf{r}$ . Обозначим радиусы сфер  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно через  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и рассмотрим предельный переход при  $\rho_1 \rightarrow \infty$  и  $\rho_2 \rightarrow 0$ . Точка  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , в которой  $k$  имеет полюс, будет находиться при этом вне объема  $\Omega$ .

В результате получим

$$\int \left( \psi \frac{\partial K}{\partial n'} - K \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right) dS' = \iiint \left( \psi \nabla^2 K - K \nabla^2 \psi \right) dx' dy' dz'. \quad (6.32)$$

Для всех точек внутри объема  $\Omega$  имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 K &= -k^2 K, \\ \nabla^2 \psi &= -k^2 \psi + F(x', y', z'). \end{aligned}$$

Отсюда правую часть уравнения (6.32) можно представить в виде

$$-\iiint K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F(x', y', z') dx' dy' dz'. \quad (6.33)$$

Интеграл в левой части уравнения (6.32) может быть разбит на две части: на интеграл по внешней поверхности сферы  $\omega_1$  и интеграл по внутренней поверхности сферы  $\omega_2$ . Воспользовавшись асимптотическими значениями  $\psi$  и  $K$ , легко показать, что при возрастании радиуса сферы  $\omega_1$  до бесконечности первый из этих интегралов стремится к нулю. Интеграл

$$\int_{\omega_2} K \frac{\partial \psi}{\partial n'} dS'$$

стремится к нулю по мере того, как радиус сферы  $\omega_2$  убывает до нуля; так как, однако,  $K$  имеет полюс в центре сферы, то при  $\omega_2 \rightarrow 0$

$$\int_{\omega_2} \frac{\partial K}{\partial n'} \psi dS' \rightarrow -\psi(\mathbf{r}) \int_{\omega_2} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dS' \rightarrow -\psi(\mathbf{r}).$$

Сопоставляя это выражение с интегралом (6.33), находим

$$\psi(\mathbf{r}) = \iiint K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F(x', y', z') dx' dy' dz',$$

что и требовалось доказать.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курант и Гильберт, Методы математической физики, ч. II, М.—Л., 1951.
2. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1934.
3. Jeans, Electricity and Magnetism, Cambridge, 1933.

РАССЕЯНИЕ СИЛОВЫМ ЦЕНТРОМ  
(ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; РАЗЛИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ)

§ 1. Приближение Борна

В настоящей главе мы, как и в гл. II, рассмотрим вопрос о рассеянии пучка частиц заданным силовым полем  $V(r)$ ; в этом параграфе мы получим приближенную формулу, справедливую только для быстрых частиц; вывод этой формулы окажется значительно более простым, нежели вывод точной формулы (2.17).

Мы будем решать волновое уравнение

$$\nabla^2\psi + [k^2 - U(r)]\psi = 0, \quad (7.1)$$

где

$$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2}, \quad U(r) = \frac{8\pi^2 mV(r)}{h^2},$$

а функция  $\psi$  должна иметь асимптотическую форму

$$\psi \sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} f(\theta). \quad (7.2)$$

Воспользуемся теоремой, доказанной нами в гл. IV, § 4, согласно которой наиболее общее конечное решение уравнения

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = F(x, y, z),$$

где  $F(x, y, z) = F(r)$  — некоторая известная функция, имеет вид

$$\psi = G(x, y, z) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} F(\mathbf{r}') d\tau',$$

причем  $G$  является общим решением уравнения

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0.$$

Отсюда следует, что общее решение  $\psi$  уравнения (7.1) должно удовлетворять интегральному уравнению

$$\psi = G - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (7.3)$$

Выражение, стоящее в правой части этого уравнения, характеризует расходящуюся волну; для того чтобы функция  $\psi$  могла иметь асимптотическую форму (7.2), мы должны, следовательно, положить

$$G = e^{ikz}.$$

Для определения  $f(\theta)$  воспользуемся асимптотической формой выражения (7.3) при больших  $r$ . Обозначая через  $\mathbf{n}$  единичный вектор направления  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

имеем

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \text{Члены порядка } \frac{1}{r},$$

и, следовательно,

$$\psi \sim e^{ikz} - r^{-1} e^{ikr} \frac{1}{4\pi} \int e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'} U(r') \psi(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (7.4)$$

Формулы (7.3) и (7.4) являются точными. Интересно отметить, что рассеянная волна имеет такой вид, как если бы каждый элемент объема рассеивал шаровую волну с амплитудой, численное значение которой на единице расстояния равно произведению  $-2\pi mh^{-2} V(r) d\tau$  на величину амплитуды падающей волны в данной точке [1].

Предположив, что диффракция волны от центра рассеяния не слишком велика, мы можем вычислить  $f(\theta)$ . В этом случае функция  $\psi(\mathbf{r}')$  в интеграле (6.4) может быть заменена невозмущенной волновой функцией  $e^{ikz'}$ . Это приближение справедливо только для быстрых частиц (см. § 2 и гл. IX).

Соотношения (7.2) и (7.4) при этом дают

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp[ik(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}] U(r) d\tau, \quad (7.5)$$

где  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ , так что  $z = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}$ . Для вычисления интеграла (7.5) удобно воспользоваться сферическими координатами  $\alpha, \beta$ , направив ось  $\alpha = 0$  вдоль вектора  $\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}$ . При этом

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^\infty r^2 dr e^{iKr \cos \alpha} U(r),$$

где

$$K = k|\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}| = \frac{4\pi \sin \frac{\theta}{2}}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{mv}.$$

Выполнив интегрирование по  $\alpha$  и  $\beta$ , имеем

$$f(\theta) = -\frac{8\pi^2 m}{k^2} \int_0^\infty \frac{\sin Kr}{Kr} V(r) r^2 dr. \quad (7.6)$$

Эта формула и представляет собой искомый результат; интенсивность рассеяния внутри телесного угла  $d\omega$  определяется величиной  $|f(\theta)|^2 d\omega$ .

Если  $V(r)$  характеризует поле атома, то часто оказывается удобным преобразовать выражение (7.6) таким образом, чтобы оно содержало плотность заряда в атоме; обозначая через  $-e\rho(r)$  плотность заряда в некоторой точке, имеем

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + e^2 \int \frac{\rho(r') d\tau'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (7.7)$$

Подставляя выражение (7.7) в интеграл (7.5) и воспользовавшись соотношением (см. гл. XI, § 1)

$$\int \frac{\exp(i\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\tau' = \frac{4\pi}{|\mathbf{n}|^2} e^{i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})},$$

получаем следующий окончательный результат:

$$f(\theta) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} e^2 \frac{Z - F(\theta)}{K^2} = \frac{e^2}{2mv^2} [Z - F(\theta)] \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7.8)$$

где

$$F(\theta) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 dr. \quad (7.9)$$

Величина  $F$  называется обычно атомным фактором рассеяния; она табулирована в некотором интервале значений  $K$  для всех элементов (см. гл. IX).

Сопоставим формулу (7.8) с соответствующей формулой для рентгеновых лучей. Интенсивность рассеяния рентгеновых лучей некоторым атомом на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\omega$  определяется выражением [2]

$$\left[ \frac{e^2}{mc^2} F(\theta) \right]^2 (1 + \cos^2 \theta) d\omega.$$

Сходство этого выражения с формулой (7.8) объясняется весьма простым образом [1].

**Замечания о рассеянии, определяемом формулой Борна.** Амплитуда рассеянной волны может быть вычислена с помощью формулы (7.6) или (7.8). Из этих формул следует, что рассеяние зависит только от  $\sin \frac{\theta}{2}/\lambda$ , т. е. только от  $v \sin \frac{\theta}{2}$ . Точная формула для  $f(\theta)$ , полученная нами выше в гл. II, давала, однако, иной результат. Соотношения (7.6) и (7.8) можно поэтому считать справедливыми лишь при тех условиях (быстрые электроны), при которых применима формула Борна.

Из формулы (7.6) следует, что в том случае, когда по мере возрастания  $r$  до бесконечности  $V(r)$  стремится к нулю быстрее, нежели  $r^{-3}$ , функция  $f(\theta)$  при убывании  $\theta$  до нуля сохраняет конечное значение. Это справедливо также и в случае точной формулы (2.17), определяющей  $f(\theta)$ .



Для данного атома значение  $f(\theta)$  при  $\theta = 0$  от  $v$  не зависит. При больших значениях  $v$  функция  $f(\theta)$  убывает быстрее по мере увеличения  $\theta$ , нежели при малых  $v$ .

При возрастании  $K$  значение  $F(\theta)$  стремится к нулю, откуда можно заключить, что при больших скоростях и больших углах рассеяния  $f(\theta)$  стремится к  $(Ze^2/2mv^2) \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}$ , так что рассеяние обусловлено в основном влиянием ядра, как этого и следовало ожидать. Отсутствие фазового множителя в полученном нами выражении для  $f(\theta)$  [см. формулу (3.16)] является следствием применения приближения Борна.

## § 2. Соотношение между формулой Борна и точной формулой для $f(\theta)$

Точная формула (2.17) для  $f(\theta)$  имеет вид

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (e^{2i\eta_n} - 1) P_n(\cos \theta). \quad (7.10)$$

Формула Борна дает

$$f(\theta) = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} \int_0^{\infty} V(r) \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 dr. \quad (7.11)$$

В этом параграфе мы выясним, при каких обстоятельствах формула (7.11) является хорошим приближением к формуле (7.10). В гл. II, § 2, было найдено приближенное выражение для  $\eta_n$ , справедливое при малых значениях  $\eta_n$ . Мы получили при этом

$$\eta_n \approx -\frac{8\pi^2 mk}{h^2} \int_0^{\infty} V(r) [f_n(r)]^2 r^2 dr, \quad (7.12)$$

где

$$f_n(r) = \left( \frac{\pi}{2kr} \right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Как выражение (7.11), так и выражение (7.12) были получены нами в предположении, что  $V(r)$  является малым возмущением; можно ожидать поэтому, что подстановка (7.12) в (7.10) даст формулу (7.11). В том, что это действительно так, можно убедиться с помощью хорошо известного соотношения [3]:

$$\frac{\sin Kr}{Kr} \sum_n (2n+1) P_n(\cos \theta) [f_n(r)]^2,$$

заменив при этом  $e^{2i\eta_n} - 1$  в выражении (7.10) на  $2i\eta_n$ .

Формула (7.12) часто дает хорошие результаты при вычислении  $\eta_n$  даже в том случае, когда  $\eta_n$  одного порядка с  $\pi/2$ ; в этом

случае пользоваться формулой Борна уже нельзя; однако выражение для  $\eta_n$  в форме (7.12) может быть непосредственно подставлено в формулу (7.10) (см. гл. IX, § 5).

### § 3. Релятивистская поправка

Мы не учитывали выше релятивистских эффектов. Они могут быть приняты во внимание путем применения приближения Борна к уравнениям Дирака.

Уравнение второго порядка для компоненты  $\psi_\lambda$  волновой функции Дирака может быть записано в форме

$$\nabla^2 \psi_\lambda + \left[ k^2 - \frac{2W}{\hbar^2 c^2} V(r) + \frac{V^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{i}{\hbar c} \rho_1 \sigma \cdot \text{grad } V \right] \psi_\lambda = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4),$$

где  $W$  — полная энергия,  $k^2 = (W^2 - m^2 c^4) / \hbar^2 c^2$ , а  $\rho_1 \sigma$  — векторная матрица, действующая на  $\lambda$  и имеющая компоненты:

$$\rho_1 \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_1 \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя приближению Борна, согласно которому потенциал рассеивающего поля трактуется как малый, запишем:

$$\nabla^2 \psi_\lambda + k^2 \psi_\lambda = \left[ \frac{2W}{\hbar^2 c^2} V(r) + \frac{i}{\hbar c} \rho_1 \sigma \cdot \text{grad } V \right] a_\lambda e^{ikz}.$$

Членом  $V^2 / \hbar^2 c^2$  мы пренебрегли; функция  $a_\lambda e^{ikz}$  описывает здесь компоненту падающей волны. Воспользовавшись соотношениями (4.12) при  $p_1 = p_2 = 0$  и  $p_3 = k\hbar$ , имеем

$$\frac{a_1}{a_3} = -\frac{k\hbar c}{W + mc^2} = -\frac{a_2}{a_4}.$$

В результате получаем функцию того же типа, что и (7.4):

$$\psi_\lambda \sim a_\lambda e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} u_\lambda(\theta, \varphi),$$

где

$$u_3 = \left\{ \left[ \gamma - \frac{1}{2} (\gamma - 1) (1 - \cos \theta) \right] a_3 + \frac{1}{2} (1 - \gamma) \sin \theta a_4 \right\} f(\theta),$$

$$u_4 = \left\{ \left[ \gamma - \frac{1}{2} (\gamma - 1) (1 - \cos \theta) \right] a_4 - \frac{1}{2} (1 - \gamma) \sin \theta a_3 \right\} f(\theta),$$

$$f(\theta) = \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int V(r') e^{ik(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}'} d\tau',$$

$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\beta = v/c$ ,  $v$  — скорость частицы.

Дифференциальное сечение (см. гл. IV, § 4) при этом равно

$$I(\theta) = \frac{|u_3|^2 + |u_4|^2}{|a_3|^2 + |a_4|^2} = \frac{\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) |f(\theta)|^2}{1 - \beta^2}.$$

Сопоставляя этот результат с формулами (7.5) и (7.6), приходим к заключению, что учет релятивистской поправки приводит к появлению двух дополнительных множителей — множителя  $(1 - \beta^2)^{-1}$ , обусловленного лорентцовым сжатием, и множителя  $\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$ , связанного со спином. Оба эти множителя не зависят от формы рассеивающего потенциала  $V(r)$ .

#### § 4. Классический предел формул рассеяния квантовой теории

Хорошо известно, что, полагая в любой формуле квантовой теории  $\hbar \rightarrow 0$ , мы получим соответствующую формулу классической теории. Интересно показать непосредственно, что это имеет место и в случае формулы (2.17), определяющей число частиц, рассеянных полем  $V(r)$ . При этом можно также выяснить, при каких условиях число рассеянных частиц окажется одинаковым с точки зрения обеих теорий.

Найдем прежде всего выражение, определяющее число рассеянных частиц, согласно классической теории.

Если рассеивающий центр находится в начале координат, то для любой орбиты с энергией  $E$  и моментом количества движения  $J$  будет иметь место уравнение

$$\varphi + \int_{r_0}^r \frac{\partial}{\partial J} \left[ 2m(E - V) - \frac{J^2}{r^2} \right]^{1/2} dr = 0, \quad (7.13)$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты. Если  $r_0$  — положительный корень выражения

$$2m(E - V) - \frac{J^2}{r^2},$$

а  $\alpha$  — угол между асимптотами орбиты, то

$$\frac{1}{2}\alpha = - \int_{r_0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial J} \left[ 2m(E - V) - \frac{J^2}{r^2} \right]^{1/2} dr, \quad (7.14)$$

причем угол отклонения  $\theta$  равен

$$\theta = \pi - \alpha. \quad (7.15)$$

С помощью соотношений (7.14) и (7.15) мы можем, таким образом, вычислить значение момента количества движения, соот-

ветствующее данному углу отклонения  $\theta$ . Рассмотрим теперь поток частиц, движущихся со скоростью  $v$ , в котором за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит  $N$  частиц. Вероятное число частиц, проходящих за единицу времени через площадку, перпендикулярную к направлению потока, и обладающих при этом моментом количества движения в интервале между  $J$  и  $J + dJ$ , равно

$$\frac{2\pi NJ dJ}{m^2 v^2}.$$

Число частиц, рассеянных в интервале между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , определяется выражением

$$\frac{2\pi NJ dJ}{m^2 v^2} \frac{d\theta}{d\theta},$$

причем зависимость  $J$  от  $\theta$  может быть найдена с помощью соотношений (7.14) и (7.15). В гл. II, § 1, мы обозначили это число частиц через  $2\pi NI(\theta) \sin \theta d\theta$ . Мы имеем, таким образом,

$$I(\theta) = \frac{J}{m^2 v^2} \frac{dJ}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta}. \quad (7.16)$$

Рассмотрим теперь формулы квантовой теории. Нам нужно найти решение уравнения

$$\frac{d^2 L}{dr^2} + F(r) L = 0, \quad (7.17)$$

где

$$F(r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) - \frac{n(n+1)}{r^2}.$$

Поскольку нас интересует тот случай, когда  $h \rightarrow 0$ , можно предположить, что  $F$  велико. Решения уравнения (7.17) имеют при этом следующий приближенный вид [4] (см. также гл. I, § 6):

$$F^{-1/4} \exp \left[ \pm i \int^r F^{1/2} dr \right]. \quad (7.18)$$

Нас интересует линейная комбинация этих решений, являющаяся конечной в начале координат. Отметим, что  $F(r)$  имеет только один корень  $r_0$  в интервале между  $r=0$  и  $r=\infty$ . При  $r < r_0$   $F(r)$  отрицательно, при  $r > r_0$   $F(r)$  положительно. Решение (7.18) должно поэтому носить колебательный характер при  $r > r_0$  и экспоненциальный характер при  $r < r_0$ . Очевидно, что искомым нами решение есть решение, экспоненциально убывающее с уменьшением  $r$  при  $r < r_0$ . Оно имеет следующий вид [4] (см. также § 6):

$$L_n(r) \approx F^{-1/4} \sin \left\{ \frac{\pi}{4} + \int_{r_0}^r F^{1/2} dr \right\}. \quad (7.19)$$

Эта функция является хорошим приближением для  $L_n(r)$  лишь в области  $r > r_0$ . Ее асимптотическая форма при больших значениях  $r$  есть

$$\text{const} \cdot \sin \left\{ \frac{\pi}{4} + \int_{r_0}^{\infty} (F^{1/2} - k) dr + k(r - r_0) \right\},$$

где

$$k^2 = \frac{8\pi^2 m E}{h^2}.$$

Для  $\eta_n$  [см. формулу (2.15)] имеем в данном приближении

$$\eta_n = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} - kr_0 + \int_{r_0}^{\infty} (F^{1/2} - k) dr. \quad (7.20)$$

Этим выражением можно пользоваться для расчетов в случае больших значений  $\eta_n$  (см. § 6).

Для вычисления амплитуды рассеянной волны  $f(\theta)$  мы должны теперь просуммировать ряд [см. формулу (2.17)]

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_n (2n+1) (e^{2i\eta_n} - 1) P_n(\cos \theta). \quad (7.21)$$

Так как численное значение этой суммы определяется в основном членами, которым отвечают большие значения  $n$ , мы можем заметить  $P_n(\cos \theta)$  его асимптотическим выражением [5] при больших  $n$ :

$$P_n(\cos \theta) \sim \left( \frac{2}{n\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right].$$

Заметим прежде всего, что расходящийся ряд

$$\sum_n (2n+1) P_n(\cos \theta) \quad (\theta \neq 0)$$

может быть тем не менее просуммирован, если рассматривать его как предел степенного ряда на его радиусе сходимости, и что сумма членов этого ряда равна нулю. Мы можем поэтому вычесть этот ряд из выражения (7.21). Функция  $f(\theta)$  будет в таком случае определяться расходящимся рядом, который может быть, однако, просуммирован:

$$f(\theta) = \sum_n A(n) (e^{iB(n)} - e^{iB'(n)}). \quad (7.22)$$

Здесь

$$A(n) = -\frac{1}{2k} \left( \frac{2n}{\pi \sin \theta} \right)^{1/2},$$

$$B(n) = 2\eta_n + \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{1}{4} \pi,$$

$$B'(n) = 2\eta_n - \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{1}{4} \pi$$

Для того чтобы вычислить ряд вида

$$\sum_n A(n) e^{iB(n)}, \quad (7.23)$$

выясним, существует ли такое значение  $n$ , при котором

$$\frac{dB(n)}{dn} = 0.$$

Если такое значение  $n = n_0$  существует, то вблизи  $n_0$  для большого числа членов ряда множитель  $e^{iB(n)}$  остается почти постоянным. Очевидно, что численное значение суммы ряда определяется в основном именно этой областью. Ряд (7.23) может быть в таком случае заменен выражением

$$A(n_0) e^{iB(n_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\beta(n - n_0)^2] dn,$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 B}{dn^2} \right)_{n=n_0}.$$

Вычислив интеграл, получим

$$A(n_0) \left( \frac{\pi}{i\beta} \right)^{1/2} e^{iB(n_0)}. \quad (7.24)$$

Выясним теперь, действительно ли производная от  $B(n)$  или  $B'(n)$  обращается в нуль при любом положительном значении  $n$ . Для этого должно было бы соблюдаться следующее условие:

$$2 \frac{\partial}{\partial n} \int_{r_0}^{\infty} (F^{1/2} - k) dr + \pi \pm \theta = 0.$$

Полагая здесь

$$\frac{nh}{2\pi} = J,$$

получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{d}{dJ} \left[ 2m(E - V) - \frac{J^2}{r^2} \right]^{1/2} dr + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\theta}{2} = 0. \quad (7.25)$$

Если перед последним членом этого уравнения стоит знак минус, то оно сводится к уравнению (7.14), определяющему классическое значение момента количества движения  $J$  электрона, рассеянного на угол  $\theta$ . Легко видеть, что при выборе положительного знака перед членом  $\theta/2$  не существует положительного значения  $J$ , удовлетворяющего этому уравнению. В выражении (7.22) вторая сумма значительно превышает, таким образом, первую сумму,

и мы имеем для  $f(\theta)$

$$f(\theta) = - \sum_n A(n) e^{iB'(n)}.$$

Подставляя (7.24), получаем

$$- A(n_0) \left( \frac{\pi}{i\beta} \right)^{1/2} e^{iB'(n_0)},$$

где  $hn_0/2\pi$  — корень уравнения (7.25). Величина  $\beta$  определяется выражением

$$\frac{h}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial J^2} \int_{r_0}^{\infty} \left[ 2m(E - V) - \frac{J^2}{r^2} \right]^{1/2} dr,$$

которое с помощью уравнения (7.25) может быть приведено к виду

$$\frac{h}{4\pi} \frac{\partial \theta}{\partial J}.$$

Подставляя значение  $A(n_0)$ , получаем

$$|f(\theta)|^2 = J \frac{\partial J}{\partial \theta} / m^2 v^2 \sin \theta,$$

т. е. классическую формулу для  $I(\theta)$ .

Мы видим, таким образом, что условие классического рассеяния на данный угол  $\theta$  заключается в том, чтобы было велико  $n_0$ , где  $n_0$  — то значение  $n$ , при котором

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial n} = \frac{\theta}{2},$$

и чтобы  $\eta_n$  при этом также было велико. Условие применимости формулы Борна заключается, напротив, в малости величины  $\eta_n$  при всех значениях  $n$ .

## § 5. Пределы применимости приближения Борна и классического приближения

Очевидно, что два приближенных метода, рассматриваемых в этой главе, в значительной степени дополняют друг друга.

Вообще говоря, классическое приближение, за исключением случая очень малых углов рассеяния, справедливо тогда, когда для характеристики рассеяния необходимо задание большого числа фаз, многие из которых велики. С другой стороны, приближение Борна справедливо тогда, когда все фазы малы; при больших углах рассеяния оно является менее точным, нежели при малых углах рассеяния. Оба эти приближения непригодны в том случае, когда рассеяние характеризуется небольшим числом

фаз, причем некоторые из этих фаз велики. При этих условиях необходимо пользоваться точным методом решения задачи, изложенным в гл. II.

Для определенности рассмотрим<sup>1)</sup> сперва вопрос о рассеянии частицы с массой  $m$  и скоростью  $v$  полем, сосредоточенным в области  $a$  при условии, что потенциал поля в этой области порядка  $D$ . Классическое решение этой задачи дает правильные результаты при двух условиях: а) частица обладает вполне определенной орбитой; б) отклонение, вызванное столкновением, также является вполне определенным.

Первое условие означает, что

$$mva \gg \hbar, \quad (7.26)$$

т. е. что длина волны должна быть малой по сравнению с размерами области, в которой сосредоточено рассеивающее поле. Это соответствует условию, сформулированному нами в § 4, согласно которому значение  $n$ , отвечающее равенству  $\frac{\partial \eta_n}{\partial n} = \theta/2$ , должно быть велико.

Второе условие означает, что если  $\Delta p$  — изменение импульса при столкновении, то

$$a\Delta p \gg \hbar.$$

Поскольку  $\Delta p$  — порядка  $D/v$ , это значит, что

$$\frac{Da}{\hbar v} \gg 1. \quad (7.27)$$

Это соответствует условию, сформулированному в § 4, согласно которому должно быть велико то значение  $\eta_n$ , при котором  $\frac{\partial \eta_n}{\partial n} = \theta/2$ .

С другой стороны, приближение Борна справедливо, если

$$\frac{Da}{\hbar v} \ll 1, \quad (7.28)$$

независимо от значения длины волны, соответствующей частице<sup>2)</sup>.

Если ни одно из условий (7.26) — (7.28) не выполняется, следует пользоваться точным методом решения задачи.

В случае рассеяния полем, потенциал  $V(r)$  которого плавно убывает с расстоянием, приведенные выше соображения могут быть использованы при рассмотрении вопроса о рассеянии на некоторый заданный угол  $\theta$ . В классическом приближении такое

<sup>1)</sup> Последующее рассмотрение основано на статье Вильямса [6].

<sup>2)</sup> Это условие может быть получено из рассуждений, приведенных в § 2. Оно сводится к требованию, чтобы величина  $\eta_0$ , выражаемая формулой (7.12), в рассматриваемом случае была бы  $\ll 1$ .



рассеяние обусловлено той областью поля на расстоянии  $a$  от начала координат, где  $V(a)/mv^2$  порядка  $\theta$ . Для того чтобы классическое приближение было при этом справедливо, необходимо, чтобы выполнялись два условия:  $a \gg \hbar/mv$  и  $V(a) \gg \hbar v/a$ . Второе условие может быть также записано в форме  $a \gg \hbar/mv\theta$ . Оба условия удовлетворяются, таким образом, если  $a\theta \gg \hbar/mv$ .

С другой стороны, в приближении Борна область поля, ответственная за рассеяние, находится на расстоянии порядка  $\hbar/mv\theta$  от начала координат и приближение справедливо в том случае, если  $V(\hbar/mv\theta) \ll mv^2\theta$  (см. гл. IX, § 5, где рассмотрен вопрос о применимости приближения Борна к задаче о рассеянии электронов атомами).

В случае рассеяния кулоновым полем, для которого  $V = Ze^2/r$ , имеем

$$V(a) \approx mv^2\theta, \quad \text{где} \quad a = \frac{Ze^2}{mv^2\theta}.$$

Таким образом, для классического рассеяния

$$\frac{Ze^2}{mv^2\theta} \gg \frac{\hbar}{mv\theta}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1.$$

Аналогично условие применимости приближения Борна:

$$\frac{Ze^2mv\theta}{\hbar} \ll mv^2\theta, \quad \text{т. е.} \quad \frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1.$$

То или иное приближение применимо в этом случае либо при всех значениях углов, либо вовсе неприменимо. Отличительной особенностью этого случая является также то обстоятельство, что оба приближения дают один и тот же результат, который является при этом точным. Если, однако, на расстояниях, превышающих  $a$ , поле начинает отличаться от кулонового, то это скажется при различных значениях угла рассеяния, в зависимости от справедливости того или иного приближения. В классическом приближении это произойдет при  $\theta$  порядка  $Ze^2/mv^2a$ , тогда как в приближении Борна это будет иметь место при значении  $\theta$  порядка  $\hbar/mva$ . Это обстоятельство приобретает существенное значение при рассмотрении вопроса о многократном рассеянии (см. гл. IX, § 6, и гл. XII, § 2), а также о торможении быстрых частиц (см. гл. XI, § 4, и гл. XII, § 2).

### § 6. Методы вычисления интенсивности рассеяния центральным полем сил

В предыдущем параграфе были сформулированы условия применимости приближения Борна и классического приближения. Если оба эти приближения непригодны, то следует пользоваться

точной формулой, полученной нами в гл. II:

$$I(\theta) = \frac{1}{4k^2} \left| \sum (2n+1)(e^{2i\eta_n} - 1) P_n(\cos \theta) \right|^2.$$

Во многих случаях фазы  $\eta_n$  могут быть, однако, вычислены с помощью приближенных методов. Ниже мы рассмотрим эти методы, а также метод численного интегрирования, к которому приходится прибегать в тех случаях, когда не существует других достаточно точных способов вычислений.

**1. Приближение, пригодное в том случае, когда фазовый сдвиг мал.** В этом случае можно воспользоваться уравнением (2.27). Оно дает хорошие приближения только тогда, когда фазовый сдвиг очень мал (обычно 0,1 радиана или меньше). Это имеет место либо при условии, что скорость очень велика, либо при  $n > 0$ , когда скорость очень мала. В первом случае обычно нет необходимости применять метод парциальных сечений, поскольку справедливо приближение Борна. Во втором случае, как это было показано в § 2,  $\eta_n$  очень мало, если частица с моментом количества движения  $[n(n+1)]^{1/2} \hbar$  не проникает внутрь атома (согласно классической теории), т. е. если

$$V(r) \ll \frac{n(n+1)\hbar^2}{r^2 2m},$$

причем  $r$  определяется соотношением

$$kr \sim [n(n+1)]^{1/2}. \quad (7.29)$$

Для тех значений  $n$ , которые удовлетворяют этому условию, формула (2.27) дает хорошие результаты.

**2. Приближение, пригодное в том случае, когда фазовый сдвиг не является малым.** В этом случае можно воспользоваться формулой (7.20) или же эквивалентной формулой вида

$$\eta_n = \int_0^\infty \left[ k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V - \frac{n(n+1)}{r^2} \right]^{1/2} dr - \int_0^\infty \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right]^{1/2} dr, \quad (7.30)$$

где нижний предел каждого из интегралов определяется условием равенства подинтегральной функции нулю.

Это приближение дает наилучшие результаты, если  $V$  велико и не претерпевает заметных изменений на расстоянии порядка длины волны. Лангер [7]<sup>1)</sup> показал, что подстановка  $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$

<sup>1)</sup> Строго говоря, нас интересует не решение, убывающее по мере уменьшения  $r$  от значения, являющегося корнем уравнения

$$k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V - \frac{n(n+1)}{r^2}.$$

но решение, обращающееся в нуль при  $r=0$ . Лангер получил такое реше-

вместо  $n(n+1)$  приводит к дальнейшему улучшению результатов. В частности, при этом оказывается возможным определить приближенное значение фазы  $\eta_0$  для поля притяжения, тогда как формула (7.30) для этой цели непригодна ввиду отсутствия соответствующего корня у подынтегрального выражения.

Хотя условие применимости этих приближений не может быть сформулировано в столь же определенной форме, как условие (7.29)<sup>1)</sup>, опыт показывает, что формула (7.30) дает хорошие результаты вплоть до значений фаз порядка 0,2 радиана. При этом подтверждаются преимущества метода Лангера. Результаты, полученные с помощью этого метода, будут рассмотрены нами в гл. X, § 4.

В том случае, когда функция  $k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V - \frac{n(n+1)}{r^2}$  имеет не один, но несколько корней, этим приближением следует пользоваться с осторожностью. Если амплитуда волны во внутренней области, где функция положительна, остается малой по сравнению с амплитудой волны вне такой области, то выражение (7.30) является хорошим приближением, причем нижний предел первого интеграла определяется наибольшим корнем функции. Для некоторых узких интервалов значений  $k$  амплитуда во внутренних областях, соответствующих притяжению, может, однако, приобретать относительно большую величину в результате резонансного эффекта. В таком случае при вычислении фаз уже нельзя пренебречь рассмотрением этих областей. Излагаемый метод может быть применен также и к таким случаям, если мы рассмотрим соотношения, связывающие приближенные значения функций, отвечающие корням уравнения

$$k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V - \frac{n(n+1)}{r^2} = 0.$$

**3. Вариационный метод.** Гультэн [9] разработал недавно метод приближенного вычисления фаз, аналогичный вариационному методу приближенного определения собственных значений энергии.

ние, положив в уравнении (7.17)  $r = \ln \rho$  и  $Lr^{-1/2} = G$ . Это дает для  $G$  уравнение той же формы (7.17), но  $\rho$  заменяет при этом  $r$ , а  $n(n+1)/r^2$  заменено на  $(n + \frac{1}{2})^2/r^2$ . Поскольку  $\rho \rightarrow -\infty$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $G$  является решением этого уравнения, убывающим экспоненциально по мере уменьшения  $\rho$  от соответствующего значения  $\rho_0$ , как это и требуется. Для  $\eta_n$  это дает тот же результат, что и (7.30), однако  $n(n+1)$  оказывается замененным на  $(n + \frac{1}{2})^2$ .

<sup>1)</sup> См., однако, [8].

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\infty} G D G dr, \quad (7.31)$$

где

$$D \equiv \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}.$$

Если  $rU(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $G$  является собственной функцией, удовлетворяющей обычным граничным условиям

$$G(0) = 0, \quad G \sim \sin\left(kr - \frac{n\pi}{2} + \eta_n\right), \quad (7.32)$$

то интеграл  $I$  имеет конечное значение. Далее, если  $G$  есть точное решение уравнения

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \left[ k^2 - U(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G = 0, \quad (7.33)$$

удовлетворяющее условию (7.32), то  $I$  обращается в нуль.

Предположим теперь, что вместо точного решения мы подставили в (7.31) функцию  $G + \delta G$ , которая лишь очень незначительно отличается от  $G$  и является собственной функцией, удовлетворяющей граничным условиям (7.32), но  $\eta_n$  заменено теперь суммой  $\eta_n + \delta\eta_n$ . Мы имеем в таком случае

$$\delta G = 0, \quad r = 0,$$

$$\delta G \sim \cos\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n\right) \delta\eta_n.$$

Такая подстановка дает

$$\delta I \equiv \int_0^{\infty} \delta G D G dr + \int_0^{\infty} G D (\delta G) dr.$$

Второй член этого выражения путем интегрирования по частям может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G \frac{d^2}{dr^2} (\delta G) dr &= \int_0^{\infty} \delta G \frac{d^2 G}{dr^2} dr + \left[ G \frac{d}{dr} (\delta G) - \delta G \frac{dG}{dr} \right]_0^{\infty} = \\ &= \int_0^{\infty} \delta G \frac{d^2 G}{dr^2} dr - k \delta\eta_n. \end{aligned}$$

Мы имеем в результате

$$\delta I = 2 \int_0^{\infty} \delta G D G dr - k \delta\eta_n = -k \delta\eta_n,$$

поскольку функция  $G$  удовлетворяет уравнению (7.33).

Отсюда следует, что если  $G$  меняется таким образом, что  $I = 0$  при любом значении  $\delta G$ , то  $\delta I = 0$  и, следовательно,  $\delta \gamma_n = 0$ . В отличие от случая дискретных уровней соответствующее значение  $\gamma_n$  не является, однако, ни максимальным, ни минимальным.

Используем теперь условие стационарности для определения приближенного значения  $\zeta$  фазы  $\gamma_n$  и приближенного значения  $F(r)$  функции  $G$ . Введем в рассмотрение такую функцию  $F(r; c_1, c_2, \dots, c_s)$ , которая является собственной функцией для всей области значений  $r$ , удовлетворяет граничному условию (7.32) при  $r = 0$  и содержит  $s$  неопределенных параметров  $c_1, c_2, \dots, c_s$ , помимо фазового параметра  $\zeta$ . Эту функцию подставим в интеграл  $I$  вместо функции  $G$ , а значения  $s + 1$  параметра определим из уравнений

$$I(\zeta; c_1, c_2, \dots, c_s) = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial c_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Для того чтобы убедиться в точности рассматриваемого приближения, можно воспользоваться тем фактом, что если  $G$  есть точное решение уравнения (7.33), удовлетворяющее условию (7.32), то

$$\sin \gamma_n = - \left( \frac{1}{2} \pi k \right)^{1/2} \int_0^\infty r^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) U(r) G(r) dr$$

есть результат, полученный нами в гл. VI, § 2. Если функция  $F$  дает хорошее приближение, то выражение

$$- \left( \frac{1}{2} \pi k \right)^{1/2} \operatorname{cosec} \zeta \int_0^\infty r^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) U(r) F(r) dr$$

должно приближенно равняться единице.

Этот метод был использован Гультенем [9] для вычисления  $\gamma_n$  в случае потенциала  $V(r)$  вида  $A r^{-1} e^{-br}$ ; были получены весьма удовлетворительные результаты.

**4. Численное решение дифференциального уравнения для функции  $G$ .** Приближенные методы решения задачи удобны в тех случаях, когда нужно определить большое число фаз, а требуемая степень точности при этом не слишком высока. Для более точных расчетов наиболее пригодным является вариационный метод, изложенный выше, особенно в том случае, когда нас интересует также и приближенное аналитическое определение волновых функций<sup>1)</sup>. Во многих случаях лучше, однако, найти непо-

<sup>1)</sup> Относительно других методов см. [10].

средственно численное решение уравнений для рассматриваемых частных значений  $n$  и  $k$ . При этом весьма удобным оказывается излагаемый ниже метод, сходный с методом, использованным Хартри для решения аналогичных уравнений, получаемых в его методе самосогласованного поля.

Нас интересует решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \left[ k^2 - v(x) - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] y, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= g(x) y \end{aligned} \quad (7.34)$$

для такого ряда равноотстоящих значений  $x_0, x_1, x_2, \dots$  переменной  $x$ , отделенных друг от друга некоторым постоянным интервалом  $h$ , который удовлетворяет заданным условиям в точке  $x_0$ .

Положим

$$F = 4lh^2 g(x) y, \quad (7.35)$$

где  $l$  — некоторая постоянная. Воспользовавшись соответствующими значениями  $y$  и  $F$ , мы можем составить таблицы конечных разностей, как это показано ниже в обозначениях Шеннарда:

|       |       |                  |                |                |                  |       |
|-------|-------|------------------|----------------|----------------|------------------|-------|
| $x_0$ | $F_0$ | $\delta F_{1/2}$ | $\delta^2 F_1$ | $\delta^2 y_1$ | $\delta y_{1/2}$ | $y_0$ |
| $x_1$ | $F_1$ | $\delta F_{3/2}$ | $\delta^2 F_2$ | $\delta^2 y_2$ | $\delta y_{3/2}$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $F_2$ | $\delta F_{5/2}$ | $\dots$        | $\delta^2 y_2$ | $\delta y_{5/2}$ | $y_2$ |
| $x_3$ | $F_3$ |                  |                |                |                  | $y_3$ |

В качестве предварительной стадии интегрирования следует найти разложение  $y$  в ряд по степеням  $(x - x_0)$ , удовлетворяющее начальным условиям в точке  $x_0$  (например, по методу Фробениуса или разложение в ряд Тейлора). Это разложение используется для определения значений  $y$ ,  $F$  и разностей, обозначенных выше жирным шрифтом. Последовательные значения  $y$  могут быть найдены затем с помощью следующего циклического процесса:

1) Вычисление  $\delta^2 y_2$  по формуле

$$\delta^2 y_2 = \frac{1}{4l} \left( F_2 + \frac{1}{12} \delta^2 F_2 - \frac{1}{240} \delta^4 F_2 + \dots \right) \quad (7.36)$$

при заданных значениях  $\delta^2 F_2$  и  $\delta^4 F_2$ . (Удобно выбрать интервал  $h$  достаточно малым, чтобы членом  $\delta^4 F$  можно было пренебречь; параметр  $l$  можно при этом варьировать так, чтобы он удовлетворял любой стадии вычислений, хотя чаще всего его полагают равным единице.)

2) Вычисление  $\delta y_{5/2}$  и  $y_3$  при найденном значении  $\delta^2 y_2$ .

3) Вычисление  $F_3$  с помощью соотношения (7.35), образование соответствующих разностей и проверка того обстоятельства, что

при новом значении  $\delta^2 F_2$  величина  $\delta^2 y_2$  осталась неизменной; в противном случае результаты предыдущих вычислений должны быть исправлены.

4) Вычисление  $y_4$ ,  $F_4$  и т. д. с помощью аналогичного цикла.

Проверка результатов интегрирования может быть осуществлена с помощью приближенного соотношения

$$\delta^4 y_r = \frac{1}{4l} \left( \delta^2 F_r + \frac{1}{12} \delta^4 F_r \right). \quad (7.37)$$

При этом необходимо протабулировать разности высшего порядка  $\delta^4 y_r$  и  $\delta^4 F_r$ , что само по себе является ценной проверкой остальной части работы. Вычисленное значение  $\delta^4 y_r$  не должно обычно отличаться от правой части выражения (7.37) больше чем на единицу последнего знака. Если разность этих значений оказывается знакопеременной, то можно быть уверенным в том, что при интегрировании мы не сделали существенной ошибки. Если  $y$  носит колебательный характер, то интервал  $h$  на соответствующих стадиях вычислений может быть выбран таким образом, чтобы значения  $\delta^2 y$  оставались в определенных пределах. Для того чтобы обеспечить точность значений  $y$  до третьего или четвертого знака, необходимо, однако, разбить каждый отрезок, соответствующий половине «периода колебания», не меньше чем на 8 — 10 интервалов.

Можно воспользоваться также несколько иным методом интегрирования, известным как метод Гаусса—Джексона [11]. В этом случае используется формула

$$y_r = \frac{1}{4l} \left( \delta^{-2} F_r + \frac{1}{12} F_r - \frac{1}{240} \delta^2 F_r + \dots \right), \quad (7.38)$$

где  $\delta^{-2} F$  означает сумму второго порядка в выражении для функции  $F$ , заменяющую (7.36). Таблица разностей имеет при этом следующий вид:

|       |                   |                       |       |
|-------|-------------------|-----------------------|-------|
| $x_0$ | $\delta^{-2} F_0$ | $F_0$                 | $y_0$ |
|       |                   | $\delta^{-1} F_{1/2}$ | ...   |
| $x_1$ | $\delta^{-2} F_1$ | $F_1$                 | $y_1$ |
|       |                   | $\delta^{-1} F_{3/2}$ | ...   |
| $x_2$ | $\delta^{-2} F_2$ | $F_2$                 | $y_2$ |
|       |                   | $\delta^{-1} F_{5/2}$ | ...   |
| $x_3$ | $\delta^{-2} F_3$ | $F_3$                 | $y_3$ |

При применении этого метода необходимо заранее задать только значения  $y_0$  и  $y_1$ ; тогда  $F_0$  и  $F_1$  определяются затем с помощью соотношения (7.35), а  $\delta^{-2} F_0$  и  $\delta^{-2} F$  — формулой (7.38) в предположении, что  $h$  достаточно мало для того, чтобы членом  $\delta^2 F$  при этом можно было пренебречь. Тем самым определены все величины, обозначенные в таблице жирным шрифтом. Интегрирование осуществляется затем следующим образом.

1) Определение  $F_2$ , или, вернее,  $^{1/12}F_2$ , и вычисление  $y_2$  с помощью уравнения (7.38).

2) Определение  $F_2$  с помощью соотношения (7.35) при найденном значении  $y_2$ ; проверка того обстоятельства, что значение  $y_2$  при этом осталось неизменным.

3) Определение  $\delta^{-1}F_{5/2}$  и  $\delta^{-2}F_3$  по найденному значению  $F_2$  и, наконец, вычисление  $y_3$ .

Этот метод несколько проще предыдущего и обеспечивает даже бóльшую точность результатов, поскольку при соответствующем выборе параметра  $l$  краевые погрешности при суммировании могут быть сделаны сколь угодно малыми. Обычно полагают при этом  $l$  равным 2,5 либо 5. Проверка результатов вычислений может быть осуществлена по формуле (7.36), подобно тому как в случае предыдущего метода для этой цели использовалась формула (7.37).

При вычислении фазового угла процесс интегрирования продолжается до тех пор, пока влияние потенциала рассеивающего поля не станет незначительным. При таких значениях  $x$  и  $y$  имеем

$$y = A [\cos \eta_n j_{n+\frac{1}{2}}(kx) + (-1)^n \sin \eta_n j_{n-\frac{1}{2}}(kx)], \quad (7.39)$$

где  $j_s(kx) = (\pi x/2k)^{1/2} J_s(kx)$ . Фаза  $\eta_n$  может быть затем определена путем сопоставления решения, найденного нами в результате интегрирования, с выражением (7.39) при больших значениях  $x$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mott, Proc. Roy. Soc., A127, 658 (1930).
2. Комpton и Алисон, Рентгеновские лучи, М.—Л., 1941.
3. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., 1949.
4. Jeffreys G., Proc. Lond. Math. Soc., 23, ч. 6 (1925).
5. Янке и Эмде, Таблицы функций, М.—Л., 1949.
6. Williams, Rev. Mod. Phys., 17, 217 (1945).
7. Langer, Phys. Rev., 51, 669 (1937).
8. Jeffreys H. and Jeffreys B., Methods of Mathematical Physics, Cambridge, 1946.
9. Hulthén, Kungl. Fysio Sällskapet's Lund Förhand., 14, 1 (1944).
10. Pais, Proc. Camb. Phil. Soc., 42, 45 (1946); Ramsey, 44, 87 (1948); Ferretti and Krook, Proc. Phys. Soc., 60, 481 (1948).
11. Jackson, Mon. Note R. Ast. Soc., 84, 602 (1924).



## Глава VIII

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

В гл. II и III был рассмотрен вопрос о рассеянии потока частиц силовым центром. В большинстве случаев при столкновении имеет место также и некоторое воздействие рассеиваемой частицы на рассеивающий центр. Мы разовьем теперь более общую теорию столкновений, пригодную для рассмотрения следующих явлений:

- 1) Возбуждение атомов и молекул электронным ударом.
- 2) Возбуждение колебательного и вращательного состояний молекул в результате их столкновения с другими молекулами.
- 3) Передача возбуждения от атома к атому или от молекулы к молекуле при столкновении.
- 4) Возбуждение атомных ядер при бомбардировке их другими ядрами.

Во всех этих случаях имеет место непосредственный обмен энергией между относительным поступательным движением и внутренним движением сталкивающихся систем. Обмен частицами между сталкивающимися системами при этом не происходит; он осуществляется, однако, при некоторых столкновениях иного типа, также представляющих существенный интерес. К таким столкновениям, сопровождающимся «перераспределением» частиц, относятся следующие процессы: 1) захват атомных электронов положительно заряженными частицами; 2) испускание частиц атомными ядрами, сопровождающееся захватом падающего ядра; 3) столкновения между двумя молекулами, приводящие к перераспределению в них электронов и ядер; 4) столкновения электронов с атомами, при которых имеет место обмен электронами между падающим электронным пучком и рассеивающим атомом, причем падающий электрон захватывается атомом, а атомный электрон испускается. Поскольку рассеянный и испускаемый электроны нельзя отличить друг от друга экспериментально и волновая функция должна быть, кроме того, антисимметричной по отношению к координатам этих двух электронов, такая задача нуждается в несколько иной трактовке, нежели первые три. Частный случай задачи о столкновении между двумя одинаковыми частицами, сводящейся к задаче об одной частице, был исследован нами выше в гл. V.

Мы будем, таким образом, различать в дальнейшем два типа неупругих столкновений: «простые» столкновения и столкновения, сопровождающиеся «перераспределением» частиц.

В силу сложности изучаемых явлений мы вынуждены, за исключением лишь очень немногих частных случаев, пользоваться приближенными методами их рассмотрения. В тех случаях, когда относительная скорость сталкивающихся систем велика по сравнению со скоростями их внутренних движений, получение приближенного решения («приближения Борна») не представляет трудностей; общего метода решения задачи, примененного также и при других условиях, в настоящее время, однако, еще не существует. Можно сформулировать тем не менее некоторые теоремы сохранения, справедливые при всех условиях. Эти теоремы могут быть использованы для определения предельных значений эффективных сечений, а также для проверки результатов, получаемых приближенными методами.

### § 1. Теоремы сохранения [1].

#### Максимальное значение сечения при заданном моменте количества движения

Рассмотрим, как и в гл. II, поток частиц, обладающих массой  $m$  и скоростью  $v$ , падающий на некоторый рассеивающий центр. Предположим, однако, что эти частицы могут испытывать не только упругие, но также и неупругие столкновения с центром.

Как и в гл. II, представим падающую волну как сумму парциальных волн с моментами количества движения  $\hbar [n(n+1)]^{1/2}$ . На больших расстояниях  $r$  от рассеивающего центра радиальная функция, описывающая падающую парциальную волну  $n$ -го порядка, будет иметь вид

$$(kr)^{-1} i^n (2n+1) \sin \left( kr - \frac{n\pi}{2} \right),$$

где  $k = mv/\hbar$ . Упруго рассеянная парциальная волна будет обладать соответственно асимптотической формой

$$r^{-1} c_n e^{ikr}.$$

Парциальное сечение  $Q_{\text{упр.}}^n$  для упругого столкновения определяется при этом выражением

$$Q_{\text{упр.}}^n = \frac{4\pi}{2n+1} |c_n|^2. \quad (8.1)$$

Если возможно только упругое рассеяние, то радиальный поток частиц, обладающих данным моментом количества движения и исходным значением энергии, направленный к рассеивающему центру, должен отсутствовать. Если, однако, возможны также и неупругие столкновения, то поток частиц к рассеивающему центру

будет равняться потоку частиц, испытавших неупругие столкновения.

На большом расстоянии  $r$  от рассеивающего центра такой поток будет поэтому определяться выражением вида

$$r^{-2} v \frac{(2n+1)}{4\pi} Q_{\text{неупр.}}^n, \quad (8.2)$$

где  $Q_{\text{неупр.}}^n$  — парциальное сечение, отвечающее неупругим столкновениям.

С другой стороны, радиальный поток частиц, обладающих исходным значением энергии, на больших расстояниях  $r$  будет характеризоваться выражением

$$\frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right),$$

где

$$\psi = r^{-1} \left[ \frac{i^n}{k} (2n+1) \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi \right) + c_n e^{ikr} \right]. \quad (8.3)$$

Он равен, следовательно,

$$-\frac{\hbar}{mr^2} \left[ -\frac{1}{2} i (2n+1) (c_n^* - c_n) + k |c_n|^2 \right]. \quad (8.4)$$

Легко убедиться в том, что этот поток обращается в нуль, если

$$c_n = \frac{(2n+1)(e^{2i\eta_n} - 1)}{2ik}, \quad (8.5)$$

где  $\eta_n$  — некоторая вещественная фаза. Если условие (8.5) выполняется, то, воспользовавшись формулами (2.17) и (2.18), можно выразить сечение для упругого рассеяния через вещественные фазовые углы  $\eta_n$  даже в том случае, когда взаимодействие частиц с рассеивающим центром не может быть описано потенциалом  $V(r)$  (см., например, гл. X, § 5, и гл. XIII, § 1). Если, однако, возможны также и неупругие столкновения, то такой способ описания становится недостаточно точным; в том случае, когда вероятность неупругого столкновения мала, он остается тем не менее хорошим приближением.

Наличие неупругих столкновений может быть учтено, если мы допустим, что фаза  $\eta_n$  в выражении (8.5) может принимать комплексные значения. Полагая

$$\eta_n = \lambda_n + i\mu_n,$$

имеем

$$Q_{\text{упр.}}^n = \frac{2\pi}{k^2} (2n+1) e^{-2\mu_n} (\text{ch } 2\mu_n - \cos 2\lambda_n), \quad (8.6)$$

$$Q_{\text{неупр.}}^n = \frac{2\pi}{k^2} (2n+1) e^{-2\mu_n} \text{sh } 2\mu_n. \quad (8.7)$$

Приравнивая (8.2) и (8.4) и используя соотношение (8.1), получаем

$$Q_{\text{полн.}}^n = Q_{\text{неупр.}}^n + Q_{\text{упр.}}^n = \frac{2\pi i}{k} (c_n^* - c_n),$$

где  $Q_{\text{полн.}}^n$  — парциальное сечение, соответствующее всем — как упругим, так и неупругим — столкновениям.

Поскольку

$$|c_n|^2 \geq \left| \frac{c_n^* - c_n}{2} \right|^2,$$

имеем

$$Q_{\text{упр.}}^n = \frac{4\pi}{2n+1} |c_n|^2 \geq \frac{(Q_{\text{полн.}}^n)^2}{Q_{\text{макс.}}^n},$$

где

$$Q_{\text{макс.}}^n = \frac{4\pi}{k^2} (2n+1).$$

Отсюда, учитывая, что  $Q_{\text{упр.}}^n$  не может быть больше  $Q_{\text{полн.}}^n$ , получаем

$$Q_{\text{полн.}}^n \leq \frac{4\pi}{k^2} (2n+1). \quad (8.8)$$

Знак равенства отвечает здесь тому случаю, когда неупругое рассеяние полностью отсутствует.

Далее, имеем

$$Q_{\text{неупр.}}^n = Q_{\text{полн.}}^n - Q_{\text{упр.}}^n,$$

$$Q_{\text{неупр.}}^n \leq Q_{\text{полн.}}^n - \frac{(Q_{\text{полн.}}^n)^2}{Q_{\text{макс.}}^n}.$$

Правая часть этого выражения принимает максимальное значение, когда

$$Q_{\text{полн.}}^n = \frac{1}{2} Q_{\text{макс.}}^n,$$

так что

$$Q_{\text{неупр.}}^n \leq \frac{\pi}{k^2} (2n+1). \quad (8.9)$$

В этом случае знак равенства имеет место только тогда, когда  $Q_{\text{упр.}}^n$  также равно

$$\frac{\pi (2n+1)}{k^2}.$$

Эти формулы играют особенно существенную роль при определении предельных значений сечений, отвечающих резонансным условиям того или иного типа. Они относятся только к парциальным сечениям; общих методов вычисления полных сечений не существует. Если, однако, область пространства, в которой

сосредоточено рассеивающее поле, мала по сравнению с длиной волны, то рассеивается только парциальная волна нулевого порядка, и мы имеем

$$Q_{\text{полн.}} \leq \frac{4\pi}{k^2}, \quad Q_{\text{неупр.}} \leq \frac{\pi}{k^2}.$$

В том случае, когда размеры  $R$  области, в которой сосредоточено поле, являются вполне определенными и длина волны очень мала по сравнению с  $R$ , можно получить также некоторые соотношения, характеризующие предельные значения полного сечения. В этом случае существенную роль будут играть только те парциальные сечения, для которых

$$n \leq kR.$$

Отсюда следует, что

$$Q_{\text{полн.}} = \sum_0^{kR} Q_{\text{полн.}}^n, \quad Q_{\text{упр.}} = \sum_0^{kR} Q_{\text{упр.}}^n.$$

и

$$(Q_{\text{полн.}})^2 \leq Q_{\text{упр.}} \sum_0^{kR} Q_{\text{макс.}}^n,$$

$$(Q_{\text{полн.}})^2 \leq 4\pi R^2 Q_{\text{упр.}}$$

Это дает

$$\begin{aligned} Q_{\text{полн.}} &\leq 4\pi R^2, \\ Q_{\text{неупр.}} &\leq \pi R^2. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Знак равенства в последнем условии отвечает здесь только тому случаю, когда  $Q_{\text{упр.}}$  также равно  $\pi R^2$ .

Если рассеивающий центр представляет собой неупругую сферу радиуса  $R$ , то этот результат может показаться парадоксальным. Очевидно, что неупругое сечение равно в этом случае  $\pi R^2$ . Не столь очевидно, однако, что упругое сечение должно иметь при этом точно такое же значение. Это обстоятельство может быть объяснено таким же образом, как и в случае упругого рассеяния твердой сферой, исследованном нами в гл. II, § 5. Было показано, что для такой сферы полное упругое сечение для коротких длин волн равно не  $\pi R^2$ , а  $2\pi R^2$ , причем удвоение величины  $\pi R^2$  обусловлено явлением диффракции, приводящим к тому, что упругое рассеяние оказывается сосредоточенным внутри конуса с раствором  $1/kR$  вблизи направления падения. Аналогичный эффект имеет место также и в рассматриваемом нами случае.

Существенно отметить, что приведенные выше соображения относятся также и к столкновениям, при которых падающая частица может оказаться поглощенной центром рассеяния.

## § 2. Столкновения электронов с атомами водорода. Приближение Борна

Для иллюстрации метода исследования неупругих столкновений мы рассмотрим прежде всего простейший тип возможных столкновений — столкновения электронов с атомами водорода. Так как масса электрона мала по сравнению с массой протона, то можно считать, что последний остается при столкновении неподвижным.

Рассмотрим пучок электронов, падающий на водородный атом, находящийся в нормальном состоянии. Предположим, что интенсивность пучка такова, что в единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит один электрон. Определим число электронов, рассеиваемых за единицу времени на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\omega$  в результате возбуждения  $n$ -го состояния атома. Это число  $I_n(\theta) d\omega$  имеет размерность поверхности; мы будем называть его дифференциальным сечением для рассеяния внутри телесного угла  $d\omega$ . Полное сечение  $Q_n$ , соответствующее возбуждению данного состояния атома, мы получим, выполнив интегрирование по всем углам, так что

$$Q_n = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_n(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (8.11)$$

Волновое уравнение для системы, состоящей из падающего электрона и атома, имеет вид

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + E + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} \right] \Psi = 0; \quad (8.12)$$

падающему электрону здесь соответствует индекс 1, атомному электрону — индекс 2. Энергия  $E$  равна сумме энергии  $E_0$  атомного электрона в его нормальном состоянии и кинетической энергии  $mv^2/2$  падающего электрона.

Функция  $\Psi(r_1, r_2)$  может быть представлена в форме

$$\Psi(r_1, r_2) = \left( \sum_n + \int \right) \psi_n(r_2) F_n(r_1), \quad (8.13)$$

где  $\psi_n(\mathbf{r})$  — собственные функции водородного атома, удовлетворяющие уравнению

$$\left( \frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \nabla^2 + E_n + \frac{e^2}{r} \right) \psi_n = 0. \quad (8.14)$$

Знак интегрирования в выражении (8.13) относится к функциям непрерывного спектра.

Подставляя (8.13) в уравнение (8.12) и воспользовавшись уравнением (8.14), имеем

$$\left( \sum_n + \int \right) \psi_n(\mathbf{r}_2) \left( \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + E - E_n \right) F_n(\mathbf{r}_1) = \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (8.15)$$

Умножив обе части этого уравнения на  $\psi_n^*(\mathbf{r}_2)$  и проинтегрировав по координатам атомного электрона, получаем

$$\left( \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + E - E_n \right) F_n(\mathbf{r}_1) = \int \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2. \quad (8.16)$$

При больших значениях  $r_1$  правая часть этого уравнения обращается в нуль и функция  $F_n$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\left[ \nabla^2 + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - E_n) \right] F_n = 0, \quad (8.17)$$

представляющему собой волновое уравнение для свободной частицы с энергией  $E - E_n$ . Длина волны, соответствующая этой частице, равна  $2\pi/k_n$ , где

$$k_n^2 = \frac{8\pi^2 m (E - E_n)}{\hbar^2}. \quad (8.18)$$

Отметим, что она вещественна только при условии  $E > E_n$ , т. е. только в том случае, когда электрон обладает энергией, достаточной для возбуждения  $n$ -го состояния атома. Мы будем рассматривать здесь такие значения  $n$ , при которых это условие выполняется.

Согласно условиям рассматриваемой задачи, электрон сталкивается с атомом, находящимся в своем нормальном состоянии; функция  $F_0(\mathbf{r}_1)$  должна поэтому представлять собой сумму падающей и рассеянной волн и иметь асимптотическую форму

$$F_0 \sim e^{ik_0 z} + r^{-1} e^{ik_0 r} f_0(\theta, \varphi); \quad (8.19)$$

функции  $F_n$  должны описывать только рассеянные волны и иметь асимптотическую форму

$$F_n \sim r^{-1} e^{ik_n r} f_n(\theta, \varphi). \quad (8.20)$$

Отсюда следует, что  $r^{-2} |f_n(\theta, \varphi)|^2$  представляет собой число электронов в единице объема на расстоянии  $r$  от атома, участвовавших в возбуждении  $n$ -го состояния этого атома<sup>1)</sup>. Число таких электронов, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения, пропорционально  $k_n r^{-2} |f_n|^2$ , тогда как в падающем пучке это число пропорционально  $k_0$ . Мы

<sup>1)</sup> Строго говоря, следовало бы рассматривать не один, но много атомов и ввести соответственно понятие вероятности столкновения одного из электронов с одним из атомов. (Прим. ред.)

имеем, таким образом (см. гл. II, § 1),

$$I_n(\theta) d\omega = \frac{k_n}{k_0} |f_n(\theta, \varphi)|^2 d\omega. \quad (8.21)$$

Асимптотическая форма функций  $F_n(\mathbf{r}_1)$  не может быть найдена точно. При больших скоростях столкновений легко, однако, получить приближенные формулы, воспользовавшись для этой цели методом Борна [2]. В этом случае возмущающее воздействие, оказываемое атомом на падающую волну, мало (см. гл. VII, § 1). В качестве нулевого приближения мы положим поэтому

$$\Psi = \exp(ik_0\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2). \quad (8.22)$$

Здесь  $\exp(ik_0\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1)$  — плоская волна, описывающая движение падающего электрона в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}_0$  в том случае, когда взаимодействие с атомом отсутствует. Подставляя функцию (8.22) в правую часть уравнения (8.16), получаем

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k_n^2) F_n(\mathbf{r}_1) = \\ & = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1} \right) \exp(ik_0\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2; \end{aligned} \quad (8.23)$$

Решение этого уравнения в асимптотической форме (8.20) может быть найдено с помощью метода, изложенного в гл. VI, § 4. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} F_n(\mathbf{r}) &= \frac{2\pi m}{h^2} \iint \frac{\exp(ik_n |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \exp(ik_0\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1) \times \\ & \times \left( \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Его асимптотическая форма есть (см. гл. VII, § 1)

$$\begin{aligned} F_n(\mathbf{r}) &\sim \frac{2\pi m}{h^2} r^{-1} e^{ik_n r} \iint \exp[i(k_0\mathbf{n}_0 - k_n\mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}_1] \times \\ & \times \left( \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= \frac{k_n}{k_0} \frac{4\pi^2 m^2}{h^4} \left| \iint \exp[i(k_0\mathbf{n}_0 - k_n\mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}_1] \times \right. \\ & \times \left. \left( \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_{12}} \right) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2 \right|^2. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Подставив (8.24) в правую часть уравнения (8.16) и проинтегрировав эти уравнения вторично, можно получить следующее приближение, и т. д. На практике этот метод оказывается, однако, очень кропотливым; при решении уравнений (8.16) гораздо удобнее исходить из более точного начального приближения для функции  $\Psi$ ; этот вопрос будет разобран нами подробнее в § 5—8.



### § 3. Общий случай столкновения двух систем

Полученные нами выше результаты могут быть обобщены на случай столкновения между любыми двумя атомами, молекулами или ионами. Движение системы может быть разложено на движение центра тяжести всей системы, относительное движение центров тяжести каждого из тел и движение отдельных частиц, входящих в состав этих тел, по отношению к центру тяжести данного тела. Движение центра тяжести системы в целом не представляет для нас существенного интереса и может быть выделено. Сопоставим получающееся при этом уравнение с уравнением (8.12). Оператор Гамильтона в уравнении (8.12) состоит из трех частей:

$$\left( \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla_1^2 + \frac{mv^2}{2} \right) F = 0, \quad (\text{A})$$

характеризующей невозмущенное движение падающей частицы;

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla_2^2 + \left( E_0 + \frac{e^2}{r_2} \right) \right] \psi = 0, \quad (\text{B})$$

характеризующей движение атомного электрона;

$$\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (\text{C})$$

представляющей собой энергию взаимодействия, взятую с обратным знаком.

Выясним теперь, какой вид приобретут эти члены в общем случае. Для относительного движения имеем уравнение

$$\left( \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla^2 + \frac{Mv^2}{2} \right) F(\mathbf{r}) = 0; \quad (8.27)$$

здесь  $\mathbf{r}$  — относительные координаты, а приведенная масса системы  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — соответственно массы сталкивающихся тел.

Внутреннее движение каждой из систем описывается уравнениями

$$\begin{aligned} [H_a(\mathbf{r}_a) - E_a] u(\mathbf{r}_a) &= 0, \\ [H_b(\mathbf{r}_b) - E_b] v(\mathbf{r}_b) &= 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

где  $H_a$  и  $H_b$  — операторы Гамильтона для невозмущенных атомов. В соответствии с этими уравнениями мы будем иметь два ряда собственных функций и собственных значений:

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{r}_a), & \quad v_m(\mathbf{r}_b), \\ E_a^n, & \quad E_b^m. \end{aligned}$$

Для удобства обозначений мы не будем различать две группы функций, но каждую пару состояний двух систем будем характеризовать одним индексом  $n$ . Волновая функция  $\psi_n(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ , характеризующая состояние обеих систем, будет в таком случае пред-

ставлять собой произведение двух функций  $u_n(\mathbf{r}_a)$  и  $v_m(\mathbf{r}_b)$ , а соответствующее значение энергии  $E_n$  будет равно сумме  $E_a^n + E_b^m$ . Функция  $\psi_n$  удовлетворяет уравнению

$$[H_a(\mathbf{r}_a) + H_b(\mathbf{r}_b) - E_a - E_b] \psi = 0. \quad (8.29)$$

Имеется далее член  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ , характеризующий взаимодействие. Полное волновое уравнение приобретает, таким образом, вид

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla_r^2 - H_a(\mathbf{r}_a) - H_b(\mathbf{r}_b) + \frac{Mv^2}{2} + E_0 - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \right] \Psi = 0. \quad (8.30)$$

Воспользовавшись методом, изложенным в § 2, легко показать, что дифференциальное сечение (в относительных координатах), соответствующее переходу системы в целом из  $n$ -го состояния в  $m$ -е, в пределах применимости первого приближения Борна определяется в выражении

$$I_{n, m}(\theta) = \frac{4\pi^2 M^2 k_m}{\hbar^4 k_n} \left| \int \int \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \exp[i(k_n \mathbf{n}_0 - k_m \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}] \times \right. \\ \left. \times \psi_m^* \psi_n d\tau_a d\tau_b d\tau \right|^2, \quad (8.31)$$

где

$$k_n = \frac{2\pi M v}{\hbar}, \\ k_m^2 = \frac{8\pi^2 M}{\hbar^2} \left( \frac{Mv^2}{2} + E_n - E_m \right), \quad (8.32)$$

а  $v$  — исходное значение относительной скорости сталкивающихся систем. Для вычисления этого дифференциального сечения в той системе координат, где одно из тел первоначально было неподвижным, необходимо лишь воспользоваться классическими законами сохранения импульса и энергии. Соответствующие формулы приводятся в § 10.

Аналогичным образом легко могут быть обобщены все соотношения § 2.

#### § 4. Столкновения, сопровождающиеся перераспределением частиц

1. Обмен электронами. В качестве примера вопросов, изучаемых под этим заглавием, мы вернемся к задаче о столкновении электрона с атомом водорода, рассмотренной нами в § 2. В § 2 была вычислена вероятность рассеяния падающего электрона внутри данного телесного угла при возбуждении  $n$ -го состояния атома. Имеется, однако, также и некоторая вероятность захвата падающего электрона в  $n$ -е состояние атома, сопровождающегося испусканием атомного электрона. Такой процесс мы будем называть обменом электронами. Вычислим вероятность этого процесса.

При вычислении вероятности простого рассеяния электронов (см. § 2) мы представили волновую функцию  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , описывающую столкновение, в следующей форме

$$\Psi = \left( \sum_n + \int \right) F_n(\mathbf{r}_1) \psi_n(\mathbf{r}_2), \quad (8.33)$$

где  $F_0$  характеризует совокупность падающей и рассеянной волн, а  $F_n$  — рассеянную волну при условии, что энергия возбуждения  $n$ -го состояния атома меньше, нежели энергия падающего электрона. Если это условие не выполняется, функция  $F_n$  убывает экспоненциально; значения  $n$  в выражении (8.33), соответствующие непрерывному спектру, отвечают, таким образом, захвату падающего электрона и испусканию атомного электрона. Для вычисления вероятности этого процесса представим функцию (8.33) в виде

$$\Psi = \left( \sum_n + \int \right) G_n(\mathbf{r}_2) \psi_n(\mathbf{r}_1). \quad (8.34)$$

Предположим, что функция  $G_n$  обладает асимптотической формой<sup>1)</sup>

$$G_n \sim r^{-1} e^{ik_n r} g_n(\theta, \varphi). \quad (8.35)$$

В таком случае вероятность захвата падающего электрона в состояние  $n$  и испускания атомного электрона внутри телесного угла  $d\omega$  равна

$$\frac{k_n}{k_0} |g_n(\theta, \varphi)|^2 d\omega. \quad (8.36)$$

Следует отметить, что подобное рассмотрение электронов, как отличимых друг от друга, возможно только в том случае, когда спины этих электронов антипараллельны. Формулы для рассеяния неполяризованных пучков приведены в п. 3.

Выясним теперь, как вычисляется  $g_n$ . Волновое уравнение имеет вид

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + E + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} \right] \Psi = 0. \quad (8.37)$$

В § 2 было показано, что функция  $F_n$  удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \int \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_1} \right) \Psi \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2. \quad (8.38)$$

Аналогичным образом, подставляя функцию (8.35) в уравнение (8.37), умножая его на  $\psi_n^*(\mathbf{r}_1)$  и интегрируя по всем значениям  $x_1, y_1, z_1$ , получаем

$$(\nabla^2 + k_n^2) G_n(\mathbf{r}_2) = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \int \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_2} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_1) d\tau_1. \quad (8.39)$$

<sup>1)</sup> Справедливость этого предположения остается пока недоказанной, хотя такое доказательство принципиально возможно.

Это уравнение является точным; делая различные предположения о форме функции  $\Psi$  в его правой части и воспользовавшись методами, изложенными в § 2, мы получаем решение в форме (8.35). Следует отметить, что приближенное решение, получаемое таким образом, не является разложением в ряд приближенного решения, найденного в § 2. При выборе приближенной формы функции  $\Psi$  мы руководствуемся тем, что  $\Psi$  должно удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \int [\Psi - F_n(\mathbf{r}_1) \psi_n(\mathbf{r}_2)] \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2 &= 0, \\ \int [\Psi - G_n(\mathbf{r}_2) \psi_n(\mathbf{r}_1)] \psi_n^*(\mathbf{r}_1) d\tau_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Если нас интересуют результаты, справедливые лишь в пределах применимости приближения Борна, то в правой части уравнения (8.39) можно положить, как и в § 2,

$$\Psi = \exp(ik_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2). \quad (8.41)$$

Это дает

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 + k_n^2) G_n = \\ &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_2} \right) \psi_n^*(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) \exp(ik_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Решая это уравнение с помощью метода, изложенного в гл. VI, § 1, находим асимптотическую форму функции  $G_n$ :

$$G_n \sim r^{-1} e^{ik_n r} g_n(\theta, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} g_n(\theta, \varphi) &= -\frac{2\pi m}{h^2} \iint \left( \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_2} \right) \times \\ &\times \psi_n^*(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) \exp i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1 - k_n \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (8.43)$$

а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, взятый в направлении  $\theta, \varphi$ . Следует отметить, что функция (8.41) не удовлетворяет уравнениям (8.40); однако в случае быстрых столкновений, когда справедливо приближение Борна, связанная с этим ошибка мала. Более подробное исследование уравнения (8.39) будет дано в гл. X, § 6, и гл. XI, § 5.

**2. Общий случай столкновений, сопровождающихся перераспределением частиц.** Прежде чем перейти к учету принципа тождественности электронов в формулах, определяющих интенсивность рассеяния, мы обобщим изложенный выше метод на случай любых столкновений, сопровождающихся перераспределением частиц. Нас интересует определение вероятности того, что при столкновении двух систем  $A$  и  $B$ , находящихся соответственно в состояниях  $n$  и  $m$ , произойдет перераспределение частиц, в результате чего мы получим системы  $C$  и  $D$ , находящиеся соответственно в состояниях  $s$  и  $t$ .

Согласно методу, использованному выше для простейшего случая, мы должны записать волновое уравнение для всей системы в такой форме, которая являлась бы наиболее удобной для описания состояния систем  $C$  и  $D$ . Вместо координат, относящихся к исходному состоянию, введем в рассмотрение относительные координаты  $\rho$  центров тяжести систем  $C$  и  $D$  и внутренние координаты  $\mathbf{r}_c$ ,  $\mathbf{r}_d$  этих систем, отнесенные к их центрам тяжести. Уравнение (8.30) может быть теперь записано в форме

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M'} \nabla'^2 + H_c(\mathbf{r}_c) + H_d(\mathbf{r}_d) + V(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d, \rho) - E \right] \Psi = 0, \quad (8.44)$$

где  $M'$  — приведенная масса, равная  $M_c M_d / (M_c + M_d)$ ;  $H_c$ ,  $H_d$  — операторы Гамильтона для систем  $C$  и  $D$  в отдельности, а  $V(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d, \rho)$  — энергия взаимодействия  $C$  и  $D$ .

Определенную пару стационарных состояний систем  $C$  и  $D$  мы будем характеризовать индексом  $s$ , а для соответствующих волновой функции и значения энергии введем обозначения  $\psi_s(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d)$  и  $E_s$ . Функция  $\psi_s(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d)$  представляет собой произведение двух волновых функций  $u_p(\mathbf{r}_c)$  и  $v_q(\mathbf{r}_d)$  для отдельных систем, а  $E_s$  равно сумме соответствующих значений энергии  $E_c^p + E_d^q$ . Эти обозначения в точности соответствуют обозначениям, принятым выше § 2.

Сопоставляя уравнение (8.44) с уравнением (8.37), мы видим, что формулы п. 1 могут быть обобщены, если мы запишем:  $M'$  вместо  $m$ ,  $\psi_0(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  вместо  $\psi_0(\mathbf{r}_1)$ ,  $-V(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d, \rho)$  вместо  $e^2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right)$ ,  $\psi_s(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d)$  вместо  $\psi_s(\mathbf{r}_2)$ .

В пределах применимости первого приближения Борна мы получаем, таким образом, следующее выражение для дифференциального сечения (в относительных координатах  $\rho$ ), соответствующего перераспределению частиц, при котором возбуждается  $s$ -е состояние систем  $C$  и  $D$ :

$$I_s(\theta, \varphi) d\omega = \frac{v_s}{v} |g_s(\theta, \varphi)|^2 d\omega = \\ = \frac{4\pi^2 M' v_s}{\hbar^4 v} \left| \int \int \int V(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d, \rho) \exp[i(k\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - k'_s \mathbf{n} \cdot \rho)] \times \right. \\ \left. \times \psi_0(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \psi_s(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d) d\tau_a d\tau_b d\rho \right|^2 d\omega, \quad (8.45)$$

где  $k = 2\pi M v / \hbar$ ,  $k'_s = 2\pi M' v_s / \hbar$ , а  $v$  и  $v_s$  — исходное и конечное значения относительной скорости.

В качестве примера можно рассмотреть вопрос о захвате атомных электронов  $\alpha$ -частицами. В этом случае  $\mathbf{r}$  обозначает расстояние между центрами тяжести атома и  $\alpha$ -частицы,  $\rho$  — расстояние между центром тяжести ионизованного атома и центром тяжести иона гелия, образующегося в результате захвата элект-

трона. В качестве внутренних координат мы имеем в исходном состоянии координаты электрона по отношению к центру тяжести атома, а затем — координаты того же электрона, взятые относительно центра тяжести иона гелия. Приложение формулы (8.45) к этому случаю рассматривается в гл. XII, § 3.

**3. Принцип Паули и формулы для рассеяния [3].** Здесь мы вернемся к рассмотрению вопроса о рассеянии электронов атомами водорода. Ограничимся исследованием того случая, когда энергия падающего электрона столь мала, что возбуждение атома невозможно. При этих условиях столкновение описывается волновой функцией  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , имеющей следующую асимптотическую форму:

$$\Psi \sim [e^{ikz_1} + r_1^{-1} f(\theta_1) e^{ikr_1}] \psi(r_2) \quad (r_1 \text{ велико}),$$

$$\Psi \sim [r_2^{-1} g(\theta_2) e^{ikr_2}] \psi(r_1) \quad (r_2 \text{ велико}).$$

Если бы электроны можно было отличить друг от друга, то можно было бы сказать, что число рассеиваемых электронов пропорционально  $|f|^2$ , а число испускаемых электронов пропорционально  $|g|^2$ . Однако, как было показано в гл. V, мы должны в этом случае построить антисимметричные волновые функции. Волновая функция, симметричная или антисимметричная по отношению к пространственным координатам, имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \pm \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

При больших значениях  $r_1$  это выражение приобретает асимптотическую форму

$$\{e^{ikz_1} + [f(\theta) \pm g(\theta)] r_1^{-1} e^{ikr_1}\} \psi(r_2).$$

С помощью этих формул находим число электронов, рассеянных внутри телесного угла  $d\omega$ :

$$|f(\theta) \pm g(\theta)|^2 d\omega.$$

Как было показано в гл. V, § 5, для неполяризованных электронов эти два выражения должны быть взяты в отношении 1:3. Полное число электронов, рассеянных внутри телесного угла  $d\omega$ , равняется, таким образом,

$$\left( \frac{3}{4} |f-g|^2 + \frac{1}{4} |f+g|^2 \right) d\omega. \quad (8.46)$$

Рассмотрим теперь случай столкновения электронов с атомами гелия. Второй атомный электрон снабдим индексом 3; столкновение описывается при этом волновой функцией

$$\Psi \sim [e^{ikz_1} + f(\theta_1) r_1^{-1} e^{ikr_1}] \psi(r_2, r_3) \quad (r_1 \text{ велико}),$$

$$\Psi \sim g(\theta_2) r_2^{-1} e^{ikr_2} \psi(r_1, r_3) \quad (r_2 \text{ велико}),$$

$$\Psi \sim g(\theta_3) r_3^{-1} e^{ikr_3} \psi(r_2, r_1) \quad (r_3 \text{ велико}).$$

На основании соображений, весьма сходных с теми, которые были приведены выше для случая водорода, находим, что полное число электронов, рассеянных внутри телесного угла  $d\omega$ , равно

$$|f - g|^2 d\omega. \quad (8.47)$$

### § 5. Приближенные методы рассмотрения медленных столкновений. Метод искаженных волн

Первое приближение Борна оказывается справедливым лишь в том случае, когда энергия относительного движения сталкивающихся систем велика по сравнению с энергиями внутреннего движения этих систем. Это условие сплошь и рядом не выполняется; необходимо поэтому развить методы, пригодные также и в этих случаях. Мы исследуем четыре таких метода: 1) метод искаженных волн, 2) метод сильно связанных уравнений, 3) метод возмущенных стационарных состояний и 4) метод комплекса сталкивающихся частиц. В настоящем параграфе мы рассмотрим первый из этих методов. Обобщая формулу (8.16), мы видим, что функции  $F_n(\mathbf{r})$  удовлетворяют уравнениям

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} \iint V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \Psi \psi_n^* d\tau_a d\tau_b \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.48)$$

Записывая

$$\Psi = \sum_m F_m(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$$

и

$$V_{nm}(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \psi_n \psi_m^* d\tau_a d\tau_b, \quad (8.49)$$

имеем

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} \sum_m F_m V_{mn}. \quad (8.50)$$

Положив в правой части уравнения (8.50)

$$F_0 = \exp(ik_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad F_m = 0 \quad (m \neq 0),$$

получим приближение Борна. Предположим теперь, что недиагональные матричные элементы  $V_{nm}$  столь малы, что в правой части уравнения можно пренебречь всеми членами, за исключением членов  $V_{nn} F_n$  и  $V_{0n} F_0$ , связанных с падающей волной. Мы получим при этом систему уравнений:

$$\left( \nabla^2 + k_0^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{00} \right) F_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (8.51a)$$

$$\left( \nabla^2 + k_n^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{nn} \right) F_n(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{0n}(\mathbf{r}) F_0(\mathbf{r}) \quad (n \neq 0). \quad (8.51b)$$

В том случае, когда  $V_{00}(\mathbf{r})$  и  $V_{nn}(\mathbf{r})$  обладают сферической симметрией, можно найти формальное решение этих уравнений, удовлетворяющее граничным условиям (8.19) и (8.20), воспользовавшись для этого методами, изложенными в гл. II и VI. В гл. II [уравнение (2.16)] нами было получено решение уравнения (8.51а), удовлетворяющее граничному условию (8.19), т. е. имеющее асимптотическую форму

$$e^{ik_c z} + f(\theta) r^{-1} e^{ik_0 r}, \quad (8.52)$$

Обозначим это решение через  $F_0(\mathbf{r})$ .

Подставив  $F_0(\mathbf{r})$  в правую часть уравнения (8.51б), мы получим неоднородное уравнение для  $F_n(\mathbf{r})$ , имеющее вид

$$\left[ \nabla^2 + k_n^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{nn}(r) \right] F_n = S_n(r, \theta, \varphi). \quad (8.53)$$

Задача о нахождении решений этого уравнения в асимптотической форме (8.20) была исследована нами в гл. V, § 3. Если мы обозначим через  $\mathfrak{F}_n(r, \theta)$  решение однородного уравнения

$$\left[ \nabla^2 + k_n^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{nn}(r) \right] \mathfrak{F} = 0, \quad (8.54)$$

имеющее асимптотическую форму

$$\mathfrak{F}_n(r, \theta) \sim e^{ik_n z} + r^{-1} e^{ik_n r} \times \text{Функция от } \theta,$$

то асимптотическая форма искомого решения уравнения (8.51б) будет иметь вид

$$F_n(\mathbf{r}) \sim -r^{-1} e^{ik_n r} \frac{2\pi M}{h^2} \int V_{0n}(r') F_0(r', \theta') \mathfrak{F}_n(r', \pi - \theta) d\tau', \quad (8.55)$$

где

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (8.56)$$

а  $\theta$  — угол рассеяния. Из (8.20) и (8.21) следует, что дифференциальное сечение, соответствующее возбуждению  $n$ -го состояния, определяется теперь (в относительных координатах) выражением вида

$$I_n(\theta) = \left| \int \int \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \psi_0 \psi_n^* F_0(r', \theta') \mathfrak{F}_n(r', \pi - \theta) d\tau_a d\tau_b d\tau \right|^2. \quad (8.57)$$

При замене функций  $F_0$  и  $\mathfrak{F}_n$  плоскими волнами эта формула сводится к формуле Борна (8.31). Мы видим, таким образом, что этот метод учитывает искажение падающей и расходящейся волн рассеивающим полем. Функция  $F_0(r, \theta)$  характеризует движение электрона в поле  $V_{00}(r)$ , соответствующем исходному состоянию, а функция  $\mathfrak{F}_n(r', \pi - \theta)$  описывает его движение в поле  $V_{nn}(r)$ , отвечающем возбужденному состоянию.



Формула (8.57) используется в гл. XI, § 5, при рассмотрении вопроса о рассеянии электронов атомами и в гл. XII, § 3, при исследовании вопроса о возбуждении вращательного и колебательного состояний при молекулярных столкновениях.

Аналогичная формула может быть получена также и в случае столкновений, сопровождающихся перераспределением частиц. При этом в формуле (8.45) плоские волны  $e^{ik_0 \cdot r}$  и  $e^{-ik'_s \cdot r}$  следует заменить функциями  $F_0(r, \theta)$  и  $\mathcal{G}_s(\rho, \pi - \vartheta)$ , где  $F_0$  и  $\mathcal{G}_s$  — собственные решения уравнений

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{00} \right) F_0 &= 0, \\ \left( \nabla'^2 + k_s'^2 - \frac{8\pi^2 M'}{h^2} U_{ss} \right) \mathcal{G}_s &= 0, \end{aligned}$$

обладающие соответственно асимптотическими формами плоской и рассеянной волн,  $V_{00}$  и  $U_{ss}$  определяются выражением вида

$$\begin{aligned} V_{00} &= \iint V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) |\psi_0|^2 d\tau_a d\tau_b, \\ U_{ss} &= \iint V(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_d, \rho) |\varphi_s|^2 d\tau_c d\tau_d. \end{aligned}$$

## § 6. Приближенные методы рассмотрения медленных столкновений. Случай сильной связи

1. Случай точного резонанса. Применимость предыдущего приближенного метода зависит от малости недиагональных матричных элементов энергии взаимодействия. При рассмотрении возбуждения  $n$ -го стационарного состояния в результате столкновения необходимо, таким образом, учесть лишь взаимодействие двух волн — падающей и упруго рассеиваемой волны с волной, рассеянной после возбуждения  $n$ -го состояния. Влияние неупругого рассеяния на упругое может при этом не приниматься во внимание. Мы можем поэтому рассматривать этот метод как метод последовательных приближений к решению системы уравнений<sup>1)</sup>.

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 + k_0^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{00} \right] F_0 &= \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{0n} F_n, \\ \left[ \nabla^2 + k_n^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{nn} \right] F_n &= \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{0n} F_0 \end{aligned} \quad (8.58)$$

в предположении, что матричный элемент  $V_{0n}$  мал. Могут, однако, представиться такие случаи, когда оказывается достаточным учитывать взаимодействие только двух состояний, но матричный элемент  $V_{0n}(\mathbf{r})$ , связанный с этими состояниями, не является

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $V_{0n} = V_{n0}$ .

малым. Подобные случаи имеют место тогда, когда начальное и  $n$ -е состояния находятся почти в резонансе, т. е. когда разность энергий  $\Delta E$  этих состояний мала по сравнению с разностью энергий любой другой пары состояний. Мы получаем при этом, как и прежде, систему уравнений (8.58), однако метод последовательных приближений в общем случае неприменим. Отыскание удовлетворительного метода решения задачи в этом случае оказывается, таким образом, значительно более сложным.

В частном случае точного резонанса между двумя состояниями (имеющем, например, место при переходе электрона от атома гелия к положительному иону гелия) можно получить точное решение; в других случаях приходится, однако, пользоваться более сложными методами решения задачи. Мы рассмотрим сперва случай точного резонанса.

Полагая в уравнениях (8.58)  $k_0^2 = k_n^2 = k^2$  и считая, что поле  $V_{nn}$  совпадает с полем  $V_{00}$ , получаем уравнения

$$\left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{00}(r) \right] F_0(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{0n}(\mathbf{r}) F_n(\mathbf{r}), \quad (8.59a)$$

$$\left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{00}(r) \right] F_n(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} V_{0n}(\mathbf{r}) F_0(\mathbf{r}). \quad (8.59b)$$

При решении этих уравнений должны быть учтены граничные условия, согласно которым для больших значений  $r$

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}) &\sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} f_0(\theta, \varphi), \\ F_n(\mathbf{r}) &\sim r^{-1} e^{ikr} f_n(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (8.60)$$

Складывая и вычитая уравнения (8.59a) и (8.59b), получаем независимые уравнения

$$\left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} (V_{00} + V_{0n}) \right] (F_0 + F_n) = 0, \quad (8.61a)$$

$$\left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} (V_{00} - V_{0n}) \right] (F_0 - F_n) = 0. \quad (8.61b)$$

Если функции  $V_{00}$  и  $V_{0n}$  обладают сферической симметрией, то эти уравнения могут быть решены с помощью метода, изложенного в гл. II. При этом мы получаем решения, имеющие асимптотическую форму [см. (2.17)]:

$$F_0 + F_n \sim \frac{1}{2} \left[ e^{ikz} + e^{ikr} \frac{1}{2ikr} \sum_s (2s+1) (e^{2i\eta_s} - 1) P_s(\cos \theta) \right], \quad (8.62a)$$

$$F_0 - F_n \sim \frac{1}{2} \left[ e^{ikz} + e^{ikr} \frac{1}{2ikr} \sum_s (2s+1) (e^{2i\delta_s} - 1) P_s(\cos \theta) \right]. \quad (8.62b)$$

Фазы  $\eta_s$  и  $\delta_s$  могут быть определены с помощью метода, рассмотренного в гл. II, § 1. Решая уравнения (8.62) относительно  $F_n$ ,

получаем

$$F_n \sim r^{-1} e^{ikr} \frac{1}{4ik} \sum_s (2s+1) (e^{2i\eta_s} - e^{2i\delta_s}) P_s(\cos \theta). \quad (8.63)$$

Дифференциальное сечение, соответствующее передаче возбуждения, таким образом, равно

$$I_n(\theta) d\omega = \frac{1}{16k^2} \left| \sum_s (e^{2i\eta_s} - e^{2i\delta_s}) (2s+1) P_s(\cos \theta) \right|^2 d\omega, \quad (8.64)$$

а полное сечение равно

$$Q_n = \frac{\pi}{k^2} \sum_s (2s+1) \sin^2(\eta_s - \delta_s). \quad (8.65)$$

Максимальное значение парциального сечения, соответствующего передаче заряда между частицами, обладающими данным относительным моментом количества движения (при данном  $s$ ), равно  $(2s+1)\pi/k^2$  в согласии с § 1.

Исследуем теперь условия применимости метода искаженных волн, изложенного выше в § 3. Применяя этот метод к задаче, рассматриваемой в настоящем разделе, мы получаем следующую формулу ( $V_{00} = V_{nn}$ ):

$$Q_n = \frac{8\pi^3 M^2}{k^4} \int_0^\pi \left| \int V_{0n}(r') F_0(r', \theta') \mathfrak{F}_0(r', \pi - \Theta) d\tau' \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (8.66)$$

Полагая

$$F_0(r, \theta) = \frac{1}{k} \sum_s (2s+1) i^s e^{i\gamma_s} F_0^s(r) P_s(\cos \theta),$$

$$\mathfrak{F}_0(r, \pi - \Theta) = \frac{1}{k} \sum_s (2s+1) i^{-s} e^{i\gamma_s} F_0^s(r) P_s(\cos \Theta), \quad (8.67)$$

имеем

$$Q_n = \frac{\pi}{k^2} \sum_s (2s+1) \left\{ \frac{16\pi^2 M}{kh^2} \int V_{0n} [F_0^s(r)]^2 r^2 dr \right\}^2 \quad (8.68)$$

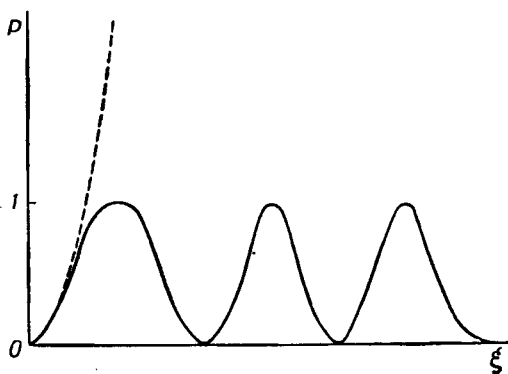
Для доказательства применимости метода искаженных волн мы должны убедиться в приближенном равенстве выражений

$$\sin(\eta_s - \delta_s) \text{ и } \frac{16\pi^2 M}{kh^2} \int V_{0n} [F_0^s(r)]^2 r^2 dr. \quad (8.69)$$

Если обе эти величины малы, это может быть сделано с помощью метода, изложенного в гл. II, § 2. Условие применимости метода искаженных волн сводится, таким образом, к малости второго из выражений (8.69) по сравнению с единицей. Пределы применимости этого метода к вычислению вероятности передачи

возбуждения в общих чертах иллюстрируются фиг. 18, где показано также, при каких обстоятельствах он становится неточным.

На фиг. 18 вероятность  $P$  передачи энергии при данном относительном значении момента количества движения представлена как функция параметра  $\xi$ , характеризующего эффективную величину  $V_{0n}$ . Относительная скорость сталкивающихся систем считается при этом постоянной. По мере возрастания  $\xi$  вероятность передачи энергии будет возрастать от 0 до 1.



Фиг. 18.

Сплошной кривой показаны вероятность передачи возбуждения, пунктирной — вероятность, вычисленная по методу искаженных волн.

достигнув последнего значения, она будет колебаться, как это показано на фигуре. Приближенный метод искаженных волн справедлив только в области начального возрастания вероятности от нуля. Он дает монотонное увеличение вероятности с увеличением  $\xi$ ; мы должны поэтому ожидать, что во всех случаях он приводит к чересчур большим значениям вероятности процесса передачи энергии. К аналогичным результатам мы придем также и в том случае, если будем рассматривать вероятность передачи энергии как функцию относительной скорости столкновения при заданном значении параметра  $\xi$ . При малых скоростях метод искаженных волн дает, таким образом, слишком большие значения вероятности передачи энергии (см. гл. XI, § 3 и 5, и гл. XII, § 3).

2. Случай неточного резонанса. Когда резонанс не является точным, получение точного аналитического решения системы уравнений (8.58) оказывается невозможным. Однако можно воспользоваться тем обстоятельством, что в большинстве практически важных случаев волновые числа  $k$  и  $k_n$ , измеренные в атомных единицах  $1/a_0$ , очень велики. Изменения  $V_{00}$ ,  $V_{nn}$  и  $V_{0n}$  на рас-

стоянии порядка длины волны в таком случае очень малы, и для получения приближенного решения может быть использован метод Джефриса (гл. I, § 6, и гл. VII, § 6). Это решение особенно пригодно в том случае, когда потенциальная энергия велика.

Задача заключается в отыскании решений  $F_0^l$ ,  $F_n^l$  уравнений

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U_{00} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F_0^l = U_{0n} F_n^l, \quad (8.70)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k_n^2 - U_{nn} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F_n^l = U_{0n} F_0^l, \quad (8.71)$$

обладающих асимптотическими формами

$$F_0^l \sim \frac{i^l}{k} (2l+1) e^{i\eta_0^l} \left\{ \sin \left( kr - \frac{1}{2} l\pi + \eta_0^l \right) + q_0^l \exp \left[ i \left( kr - \frac{1}{2} l\pi + \eta_0^l \right) \right] \right\}, \quad (8.72)$$

$$F_n^l \sim \frac{i^l}{k_n} (2l+1) q_n^l e^{ik_n r}. \quad (8.73)$$

Эффективные сечения  $Q_0$  и  $Q_n$  для упругих и неупругих столкновений определяются при этом соответственно выражениями вида

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2l+1) \{ |q_0^l|^2 + \sin^2 \eta_0^l - |q_0^l| \sin \eta_0^l \cos \eta_0^l \}, \quad (8.74)$$

$$Q_n = \frac{4\pi}{kk_n} \sum (2l+1) |q_n^l|^2. \quad (8.75)$$

Штюкельберг [4] получил «классическое» приближение, обобщив метод Джефриса на случай системы уравнений и представив функцию  $F_0^l$  в форме

$$F_0^l = r^{-1} \exp [h^{-1} (S_0 + hS_1 + h^2 S_2 + \dots)]. \quad (8.76)$$

Уравнение для  $F_0^l$ , получаемое путем исключения функции  $F_n^l$  из уравнения (8.65), может быть решено при этом, если мы пренебрежем членами второго и более высоких порядков относительно  $h$ .

Форма решения зависит от того, обладает ли функция  $f_0(r) - f_n(r)$  вещественным положительным корнем  $R$ ; функции  $f_0$  и  $f_n$  здесь соответственно даются в виде

$$f_0 = k^2 - U_{00} - \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (8.77)$$

$$f_n = k_n^2 - U_{nn} - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (8.78)$$

Наибольший интерес представляет тот случай, когда корень  $R$  существует. Штюкельберг показал, что в этом случае

$$|q_n^l|^2 = \frac{k_n}{k} e^{-2\delta} (1 - e^{-2\delta}) \sin^2 \tau, \quad (8.79)$$

где

$$\delta = \left[ \frac{(2\pi)^{1/2} U_{0n}^2}{2(U'_{00} - U'_{nn})(f_0 + \sqrt{f_0^2 - U_{0n}^2})^{1/2}} \right]_{r=R} \quad (8.80)$$

и

$$\tau = \int_0^R g_0^{1/2} dr - \int_0^R g_n^{1/2} dr. \quad (8.81)$$

Нижние пределы интегралов (8.81) определяются условиями равенства нулю соответствующих подинтегральных выражений и даются выражениями

$$g_0, g_n = \frac{1}{2}(f_0 + f_n) \pm \frac{1}{2}[(f_0 - f_n)^2 + 4U_{0n}^2]^{1/2}. \quad (8.82)$$

Выясним теперь, каково соотношение между этой формулой и формулой, даваемой методом искаженных волн:

$$|q_n^l|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \int_0^\infty U_{0n} \mathfrak{F}_0^l(r) \mathfrak{F}_n^l(r) dr \right|^2, \quad (8.83)$$

где  $\mathfrak{F}_0^l$  и  $\mathfrak{F}_n^l$  — собственные решения уравнений, которые мы получим из уравнений (8.70) и (8.71), если положим правые части последних равными нулю<sup>1</sup>). Подставляя приближенные значения функций (см. гл. I, § 6, и гл. VII, § 6)

$$\mathfrak{F}_0^l(r) \approx \left(\frac{k^2}{f_0}\right)^{1/4} \sin\left(\frac{1}{4}\pi + f_0^{1/2}r\right) \quad (r > r_0), \quad (8.84)$$

$$\mathfrak{F}_n^l(r) \approx \left(\frac{k_n^2}{f_n}\right)^{1/4} \sin\left(\frac{1}{4}\pi + f_n^{1/2}r\right) \quad (r > r_n), \quad (8.85)$$

где  $r_0$  и  $r_n$  — корни функций  $f_0$  и  $f_n$ , и пренебрегая членами, соответствующими значениям  $r < r_0, r_n$ , при которых функции убывают экспоненциально по мере уменьшения  $r$ , находим, воспользовавшись «методом быстрого спуска»<sup>2</sup>) [5],

$$|q_n^l|^2 = 2 \frac{k_n}{k} \delta_0 \sin^2 \tau_0; \quad (8.86)$$

$\delta_0$  отличается здесь от  $\delta$  только тем, что  $(f_0^2 - U_{0n}^2)^{1/4}$  заменено на  $f_0^{1/2}$ , а  $\tau_0$  от  $\tau$  — тем, что  $g_0$  и  $g_n$  заменены соответственно на  $f_0$  и  $f_n$ . Таким образом, сопоставляя (8.86) с (8.80), мы видим, что

<sup>1</sup>)  $\mathfrak{F}_0$  и  $\mathfrak{F}_n$  должны обращаться в нуль при  $r=0$  и обладать следующими асимптотическими формами:

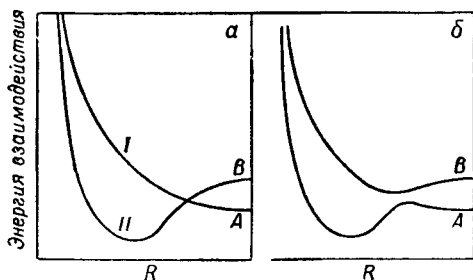
$$\mathfrak{F}_0 \sim \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \xi_l\right), \quad \mathfrak{F}_n \sim \sin\left(k_n r - \frac{1}{2}l\pi + x_n\right).$$

<sup>2</sup>) В литературе этот метод называют так же «методом перевала». (Прим. ред.)

при «классических» условиях, когда  $k$  и  $k_n$  велики, метод искаженных волн будет давать хорошее приближение при условии, что

$$\frac{\pi^{1/2} U_{0n}^2}{[2(U'_{00} - U'_{nn}) f_0^{1/2}]_{r=R}} \ll 1. \quad (8.87)$$

Следует ожидать, что при классических условиях, соответствующих формуле (8.80), рассматриваемый процесс может быть исследован во всех своих деталях. На фиг. 19, а приведены кривые, характеризующие ход потенциальной энергии взаимодействия сталкивающихся систем в исходном и конечном состояниях.



Фиг. 19. Взаимодействие потенциальных кривых в точке пересечения.

На бесконечном расстоянии кривые I и II стремятся к пределам, отличающимся друг от друга на величину  $\hbar^2(k^2 - k_n^2)/2M$ . При отсутствии взаимодействия между обоими уровнями кривые пересекались бы в точке  $r=R$  и возможность перехода с одной кривой на другую была бы при этом исключена. При конечном значении  $U_{0n}$  пересечение невозможно; форма соответствующих кривых вблизи точки  $r=R$  показана на фиг. 19, б.

Проследим теперь за изменением состояния систем, начиная от исходного состояния A. Точке пересечения кривых отвечает вероятность  $P$  перехода систем от кривой I к кривой II. В любом случае системы будут продолжать сближаться друг с другом до тех пор, пока потенциальный барьер сил отталкивания не станет чересчур высоким, после чего расстояние между ними снова начнет увеличиваться. По возвращении в точку пересечения вероятность перехода от любой из двух кривых ко второй кривой снова будет равна  $P$ . Полная вероятность того, что после окончательного разделения систем друг от друга они будут находиться на кривой II, вместо кривой I, равна  $2P(1-P)$ . Ландау [6] и Ценер [7], независимо друг от друга, вычислили вероятность  $P$  при классических условиях и нашли, что  $P = e^{-2\delta}$ . Именно этого и следовало ожидать на основании результатов,

полученных Штюкельбергом, так как из (8.79) следует, что среднее значение парциального сечения должно равняться

$$\frac{4\pi P(1-P)(2l+1)}{k^2}.$$

Отметим, далее, что парциальное сечение  $|q_n^l|^2$  мало не только в том случае, когда  $\delta$  мало, но также и в том случае, когда оно велико. В последнем случае, который осуществляется либо тогда, когда в точке пересечения  $U_{0n}$  велико и скорость  $Mf_0/\hbar$  мала, либо тогда, когда наклон обеих кривых, характеризующих ход потенциальной энергии, примерно одинаков, мы имеем адиабатические условия.

Для определения полного сечения можно воспользоваться тем обстоятельством, что  $q_n^l$  становится очень малым при тех значениях  $l$ , при которых корни функций  $f_0$  и  $f_n$  лежат вне точки пересечения. Приблизительно это имеет место, начиная с  $l = kR$  или  $k_n R$ , в зависимости от того, которая из этих двух величин меньше. Отсюда

$$Q_n \approx \frac{8\pi}{k^2} \int_0^{kR, k_n R} e^{-2\delta} (1 - e^{-2\delta}) l dl; \quad (8.88)$$

величина  $Q_n$  не может быть больше  $\pi R^2$ .

Для того чтобы сечение было велико, необходимо не только, чтобы было велико  $R$ , но также, чтобы  $\delta$  не было при этом слишком большим или же слишком малым для большинства значений  $l$ . Эти условия будут исследованы нами подробно в гл. XII, § 3, в связи с рассмотрением вопроса о передаче возбуждения и заряда между медленно движущимися атомами и ионами.

Случай, когда точка пересечения отсутствует, представляет столь же существенный интерес при изучении медленных столкновений между атомами. В классическом приближении этот случай также был исследован Штюкельбергом [4]. Поскольку полученные при этом формулы не обладают столь большой общностью, как приведенные выше, мы отложим их рассмотрение до гл. XII, § 3, где они будут использованы при решении некоторых специальных вопросов.

**3. Столкновения, сопровождающиеся перераспределением частиц.** Теория, изложенная выше, может быть применена также и к исследованию столкновений между двумя атомами или ионами, связанных с передачей электрона, при условии, что изменением импульса электрона при этом можно пренебречь. Это изменение импульса равно нулю в случае точного резонанса; им можно пренебречь также и в случае столкновений, при кото-



рых скорость атомов мала по сравнению со скоростью атомных электронов. При быстрых столкновениях изменением импульса рассматриваемого электрона пренебречь нельзя; в этом случае задача может быть, однако, решена с помощью приближенной формулы Борна (8.45) (см. гл. XII, § 2).

В случае каких-либо иных столкновений, сопровождающихся перераспределением частиц, применение описанного выше метода сильной связи встречает значительно большие трудности, так как совместные уравнения, определяющие функции  $F_0$  и  $G_s$ , являются в этом случае уже не дифференциальными, но интегродифференциальными. Эти уравнения будут рассмотрены нами в гл. X, § 5, при исследовании вопроса об обмене электронами при упругом рассеянии. Какие-либо другие попытки применения этих уравнений пока не предпринимались.

### § 7. Приближенные методы рассмотрения медленных столкновений. Метод возмущенных стационарных состояний

При вычислении вероятности возбуждения данного состояния описанными выше методами мы пренебрегали взаимодействием всех состояний, за исключением исходного и рассматриваемого. Это обстоятельство часто может повлечь за собой серьезные ошибки. Рассмотрим теперь метод, применимый при почти адиабатических условиях, когда относительная скорость систем мала на протяжении процесса столкновения. Этот метод основан на использовании волновых функций, описывающих стационарные состояния, которые уже возмущены взаимодействием сталкивающихся друг с другом частиц. Сперва предполагается, что частицы остаются неподвижными; кинетическая энергия их относительного движения трактуется затем как малое возмущение, вызывающее переходы. При этом частично учитывается взаимодействие между различными состояниями, поскольку возмущение волновых функций, описывающих стационарные состояния, не обязательно должно быть малым.

Мы ограничимся здесь рассмотрением тех случаев, когда обе сталкивающиеся системы обладают сферической симметрией.

Как и прежде, мы должны решить уравнение

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \nabla_r^2 - H_a(\mathbf{r}_a) - H_b(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) + E \right] \Psi = 0 \quad (8.89)$$

при учете обычных граничных условий. Рассмотрим сперва уравнение

$$[H_a(\mathbf{r}_a) + H_b(\mathbf{r}_b) + V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) - E(r)] \chi = 0, \quad (8.90)$$

где  $\mathbf{r}$  — относительные координаты двух систем, рассматриваемые в данном случае как параметры. Мы предположим, что решение может быть найдено при любом значении  $\mathbf{r}$ ; это приведет нас

к получению ряда собственных функций  $\chi_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  и собственных значений  $\varepsilon_n(r)$ . Эти функции можно классифицировать по характеру их изменения при больших  $r$ . Индексом  $n$  мы будем характеризовать то значение энергии, которое при  $r \rightarrow \infty$  стремится к  $E_n$ , где  $E_n$  — собственное значение уравнения

$$[H_a(\mathbf{r}_a) + H_b(\mathbf{r}_b) - E] \Psi = 0. \quad (8.91)$$

Энергия  $\varepsilon_n(r)$  может быть при этом представлена в виде

$$\varepsilon_n(r) = E_n - \eta_n(r), \quad (8.92)$$

где  $\eta_n \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Функции  $\chi_n$  взаимно ортогональны и нормированы по отношению к координатам  $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$  при всех значениях параметра  $\mathbf{r}$ . Функцию  $\Psi$  можно поэтому представить в виде

$$\Psi = \sum_n \chi_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) F_n(\mathbf{r}). \quad (8.93)$$

Как и прежде, нас будет интересовать отыскание вида функций  $F_n(\mathbf{r})$ , имеющих асимптотическую форму (8.20), соответствующую расходящимся волнам.

Подставляя (8.93) в (8.89) и принимая во внимание, что

$$[-H_a(\mathbf{r}_a) - H_b(\mathbf{r}_b) - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)] \chi_n = [\eta_n(r) - E_n] \chi_n, \quad (8.94)$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{h^2}{8\pi^2 M} (F_n \nabla_r^2 \chi_n + 2 \text{grad}_r F_n \cdot \text{grad}_r \chi_n + \chi_n \nabla_r^2 F_n) = \\ = \sum_n [E_n - \eta_n(r) - E] \chi_n F_n. \end{aligned} \quad (8.95)$$

Умножим обе части этого уравнения на  $\chi_n^*$  и проинтегрируем по координатам  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_b$ . Воспользуемся соотношением

$$\iint \chi_n^* \text{grad}_r \chi_n d\tau_a d\tau_b = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8\pi^2 M} \nabla^2 F_n + [E - E_n + \eta_n(r)] F_n = \\ = - \sum_m F_m(r) \frac{h^2}{8\pi^2 M} \iint \chi_n^* \nabla_r^2 \chi_m d\tau_a d\tau_b - \\ - 2 \sum_{m \neq n} \frac{h^2}{8\pi^2 M} \text{grad} F_m(r) \cdot \iint \chi_n^* \text{grad}_r \chi_m d\tau_a d\tau_b. \end{aligned}$$

Эти уравнения заменяют уравнения (8.48), полученные нами путем разложения невозмущенных волновых функций в ряд. Для отыскания приближенных решений этих уравнений мы восполь-

зуюемся методами, совершенно аналогичными тем, которые были применены в § 5.

Пренебрегая всеми недиагональными матричными элементами, за исключением тех, которые относятся к исходному состоянию, получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 F_0 + \left\{ \frac{8\pi^2 M}{h^2} [E - E_0 + \tau_0(r)] + \int \int \chi_0^* \nabla_r^2 \chi_0 d\tau_a d\tau_b \right\} F_0 = 0, \\ \nabla^2 F_n + \left\{ \frac{8\pi^2 M}{h^2} [E - E_n + \tau_n(r)] + \int \int \chi_n^* \nabla_r^2 \chi_n d\tau_a d\tau_b \right\} F_n = \\ = -F_0 \int \int \chi_n^* \nabla_r^2 \chi_0 d\tau_a d\tau_b - 2 \text{grad } F_0 \cdot \int \int \chi_n^* \text{grad}_r \chi_0 d\tau_a d\tau_b. \quad (8.96) \end{aligned}$$

Эти неоднородные уравнения могут быть решены точно таким же методом, как и уравнения (8.51a) и (8.51b).

Для сопоставления их с уравнениями, полученными нами путем разложения невозмущенных волновых функций в ряд, мы воспользуемся в качестве функций  $\chi_n$  решениями уравнения (8.94), полученными с помощью первого приближения теории возмущений в предположении, что  $V$  мало. Эти решения имеют вид

$$\chi_n = \frac{\psi_n + \sum_{m \neq n} V_{mn} \psi_m}{E_n - E_m} = -\tau_n + V_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{V_{nm} V_{mn}}{E_n - E_m},$$

где

$$V_{nm} = \int \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \psi_m^*(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) \psi_n(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) d\tau_a d\tau_b.$$

Тогда из уравнения (8.96) получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 F_n + \left\{ \frac{8\pi^2 M}{h^2} [E - E_n - V_{nn}(r)] + \right. \\ \left. + \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{(E_m - E_n)^2} \left[ \nabla_r^2 + \frac{8\pi^2 M}{h^2} (E_m - E_n) \right] V_{nm} \right\} F_n = \\ = -F_0 \left[ \frac{\nabla^2 V_{0n}}{E_0 - E_n} - \sum_{m \neq n, 0} \frac{V_{mn} \nabla_r^2 V_{0m}}{(E_n - E_m)(E_m - E_0)} \right] - \\ - 2 \text{grad}_r F_0 \cdot \left[ \frac{\text{grad}_r V_{0n}}{E_0 - E_n} - \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} \text{grad}_r V_{0m}}{(E_n - E_m)(E_m - E_0)} \right]. \quad (8.97) \end{aligned}$$

Пренебрегая в правой части (8.97) матричными элементами, относящимися к состояниям, отличным от начального и  $n$ -го, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \nabla^2 F_n + \frac{8\pi^2 M}{h^2} [E - E_n - V_{nn}(r)] F_n = -\frac{F_0 \nabla^2 V_{0n}}{E_n - E_0} - \\ - \frac{2 \text{grad } F_0 \cdot \text{grad } V_{0n}}{E_n - E_0}. \end{aligned}$$

Решая это уравнение с помощью метода, применявшегося нами в § 3, и воспользовавшись дифференциальным уравнением для  $F_0$ , находим дифференциальное сечение, соответствующее процессу возбуждения

$$I_n(\theta) d\omega = \frac{k_n}{k_0} \frac{4\pi^2 M^2}{h^4} \times \\ \times \left| \int \left( 1 - \frac{8\pi^2 M}{h^2} \frac{V_{00} - V_{nn}}{k^2 - k_n^2} \right) V_{0n}(\mathbf{r}') F_0(\mathbf{r}', \theta') \mathfrak{F}_n(\mathbf{r}', \pi - \Theta') d\tau' \right|^2.$$

Мы видим, что эта формула отличается лишь членом

$$\frac{V_{00} - V_{nn}}{k^2 - k_n^2}$$

от формулы, полученной нами с помощью метода искаженных волн. Точного совпадения этих двух формул и не следовало ожидать, поскольку исходные предположения, лежащие в основе их вывода, различны. Если  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  мало, то эта формула сводится к формуле Борна, отвечающей случаю больших скоростей столкновений. Если, однако, взаимодействие велико, то метод, описанный в этом параграфе, справедлив только в том случае, когда относительная скорость при столкновении мала по сравнению со скоростями внутреннего движения в рассматриваемых системах.

Тем не менее, если возмущенные волновые функции могут быть получены с достаточной степенью точности, вычисление амплитуд рассеяния описанным выше методом должно привести к более точным результатам, нежели предыдущие методы, поскольку взаимодействие между возбужденными состояниями при этом до некоторой степени автоматически включено в исходное приближение. В частности, этот метод особенно пригоден для рассмотрения процессов ионизации и возбуждения атомов тяжелыми частицами, например положительными ионами или мезонами, когда скорость относительного движения меньше орбитальных скоростей рассматриваемых атомных электронов. Благодаря сравнительной трудности получения точных значений возмущенных функций этот метод не нашел еще пока должного применения. Некоторые его приложения будут рассмотрены нами в гл. XII, § 3.

## § 8. Метод комплекса сталкивающихся частиц

Исследование общей задачи о рассеянии связано с решением бесконечного ряда совместных уравнений:

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} \left( \sum + \int \right) V_{nm} F_m \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.98)$$

при наличии граничных условий

$$F_0(r) \sim e^{ikz} + r^{-1}f(\theta, \varphi) e^{ikr}, \quad F_n(r) \sim r^{-1}f_n(\theta, \varphi) e^{ik_n r}. \quad (8.99)$$

Выше были рассмотрены различные приближенные методы решения этих уравнений, основанные на предположении о малости почти всех членов, фигурирующих в правой части уравнений. Мы исследуем теперь тот случай, когда многие из членов  $V_{nm}$ , характеризующих взаимодействие, велики.

Рассмотрим столкновение отдельной частицы с некоторой системой, состоящей из нескольких частиц. Такой системой может быть, например, бомбардируемое ядро, поскольку излагаемый метод играет особенно существенную роль для исследования ядерных явлений (см. гл. XIII). Если многие из членов  $V_{nm}$  велики при  $r < R$ , то в том случае, когда падающая частица приблизится на расстояние, меньшее  $R$ , энергия быстро перераспределится между большим числом других степеней свободы. Обмен энергией будет при этом продолжаться до тех пор, пока на одной из степеней свободы не сконцентрируется достаточное количество энергии, что приведет к испусканию системой одной или нескольких частиц. Другими словами, в том случае, когда падающая частица приблизилась на расстояние  $R$ , имеется большая вероятность того, что она образует с частицами бомбардируемой системы возбужденный комплекс, обладающий значительным временем жизни.

В соответствии с тем обстоятельством, что испускание частиц не может иметь места до тех пор, пока на соответствующей степени свободы не сконцентрируется достаточная энергия, такой комплекс можно рассматривать как сходный с устойчивой молекулой или же с атомным ядром, с той лишь разницей, что число степеней свободы в этом случае является более ограниченным. Состояние такого комплекса может быть описано с помощью линейной комбинации волновых функций, обладающих по большей части замкнутой формой. Уравнения (8.98) были получены нами путем разложения волновой функции  $\Psi$ , описывающей столкновения, по формуле

$$\Psi = \left( \sum + \int \right) F_n(r) \psi_n(r_a). \quad (8.100)$$

В общем случае это разложение содержит члены, для которых как  $\psi_n$ , так и  $F_n$  являются конечными функциями, причем член  $k_n^2$  в (8.98) отрицателен. Если  $V_{nm}$  велико, то такие члены будут играть очень существенную роль в разложении (8.100) и будут соответствовать состояниям упомянутого выше комплекса.

Такой комплекс будет обладать системой энергетических уровней, которые не будут при этом вполне резкими благодаря конечной, хотя и малой скорости его распада. Если ширина этих

уровней меньше, нежели расстояние между ними, и энергия падающей частицы такова, что полная энергия системы равна собственной энергии комплекса, следует ожидать наличия резонансных эффектов при столкновениях. Если ширина уровней превышает расстояние между ними, то эти эффекты наблюдаться не будут; однако состояние системы будет при этом соответствовать классическим условиям лишь в том случае, когда длина волны падающей частицы мала по сравнению с эффективными размерами комплекса  $R$ .

Другая интересная особенность столкновений, при которых имеет место образование комплекса, заключается в том, что вероятность испускания избыточной энергии в виде излучения при этом может быть очень велика. До сих пор мы предполагали обычно, что столкновение осуществляется на протяжении настолько короткого промежутка времени, что вероятность излучения очень мала. В результате образования комплекса частицы могут, однако, столь значительное время оставаться на близких расстояниях друг от друга, что вероятность излучения энергии приобретает большое значение. Эта вероятность может даже превысить вероятность испускания частицы (см. гл. XIII, § 2).

Все эти эффекты имеют место при ядерных столкновениях<sup>1)</sup>. При столкновениях медленных нейтронов с ядрами наблюдаются резонансные явления, тогда как при делении тяжелых ядер под действием быстрых нейтронов мы практически имеем дело с классическими условиями. Химические реакции между молекулами, не сопровождающиеся электронными переходами, также относятся к числу процессов, которые подчиняются соотношениям классической механики. Понятие комплекса сталкивающихся частиц оказалось весьма плодотворным при исследовании всех этих явлений.

**1. Одночленная формула.** Мы воспользуемся теперь методом Бете [9] для того, чтобы получить так называемую одночленную формулу для случая столкновений некоторой частицы с системой частиц при условиях, соответствующих образованию комплекса. Этот метод не является строгим и до некоторой степени основан даже на интуиции; в общих чертах он сходен, однако, с методом, развитым в предыдущих параграфах данной главы.

Для простоты мы исследуем сечение для такого столкновения, при котором частица  $I$  сталкивается с системой  $A$ , причем имеет место перераспределение частиц, в результате которого частица  $I$  захватывается системой, а некоторая другая частица  $2$  испускается ею, после чего остается некоторая система  $B$ . Внутренние

<sup>1)</sup> Необходимость исследования ядерных столкновений по методу комплекса впервые была указана Бором [8].

координаты систем  $A$  и  $B$  обозначим соответственно через  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_b$ . Мы предположим, далее, что как в исходном, так и в конечном состояниях момент количества движения ядра равен нулю и что ни одна из рассматриваемых частиц не обладает спином.

Уравнение Шредингера в рассматриваемом случае может быть записано в форме

$$(H - E)\Psi \equiv \left[ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M_1} \nabla_1^2 + H_a(\mathbf{r}_a) + V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_a) - E \right] \Psi = 0, \quad (8.101)$$

где  $H_a$  — оператор Гамильтона, характеризующий внутреннее движение в системе  $A$ ,  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_a)$  — энергия взаимодействия,  $\mathbf{r}_1$  — относительные координаты,  $M_1$  — приведенная масса частицы  $1$  и системы  $A$ . Это уравнение может быть также записано в форме

$$(H - E)\Psi \equiv \left[ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M_2} \nabla_2^2 + H_b(\mathbf{r}_b) + V_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_b) - E \right] \Psi = 0, \quad (8.102)$$

где  $\mathbf{r}_b$  — внутренние координаты системы  $B$ ,  $\mathbf{r}_2$  — относительные координаты частицы  $2$  и системы  $B$ . Обобщая метод, изложенный в § 4, п. 1, подобно тому, как это было сделано в § 4, п. 2, получаем точные уравнения:

$$(\nabla_1^2 + k_1^2)F(\mathbf{r}_1) = \frac{8\pi^2 M_1}{\hbar^2} \int \psi^*(\mathbf{r}_a) V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_a) \Psi d\tau_a, \quad (8.103)$$

$$(\nabla_2^2 + k_2^2)G(\mathbf{r}_2) = \frac{8\pi^2 M_2}{\hbar^2} \int \varphi^*(\mathbf{r}_b) V_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_b) \Psi d\tau_b, \quad (8.104)$$

где  $\psi$  и  $\varphi$  — волновые функции, относящиеся соответственно к исходному состоянию системы  $A$  и конечному состоянию системы  $B$ , а

$$k_1^2 = \frac{8\pi^2 M_1}{\hbar^2} (E - E_a); \quad k_2^2 = \frac{8\pi^2 M_2}{\hbar^2} (E - E_b). \quad (8.105)$$

Для решения уравнений (8.103) и (8.104) необходимо сделать какое-либо определенное предположение о приближенной форме функции  $\Psi$ . До сих пор мы предполагали, что

$$\Psi = F(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_a) + G(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_b); \quad (8.106)$$

сейчас существенно, однако, ввести в рассмотрение член, описывающий состояние комплекса сталкивающихся частиц.

Мы предположим, что существует невырожденный энергетический уровень  $E_c$  комплекса, расположенный к  $E$  ближе, чем все остальные уровни. Квантовое число, определяющее полный момент количества движения, соответствующее этому уровню, мы обозначим через  $l$ . Если направление полярной оси совпадает с направлением падающих частиц, то  $z$ -компонента момента количества движения должна равняться нулю. Если  $\chi_c(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  — волновая функция, описывающая такое состояние комплекса, то

МОЖНО ПОЛОЖИТЬ

$$\Psi = F(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_a) + G(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_b) + c\chi_c(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_1), \quad (8.107)$$

пренебрегая при этом влиянием остальных состояний комплекса. Здесь  $c$  — постоянная, которую мы должны будем определить.

Подстановка (8.107) в (8.103) и (8.104) дает

$$\begin{aligned} & (\nabla_1^2 + k_1^2 - U_1) F(\mathbf{r}_1) = \\ & = cU_{1c}(\mathbf{r}_1) P_l(\cos \theta_1) + \frac{8\pi^2 M_1}{h^2} \int \psi^*(\mathbf{r}_a) V_1 \varphi(\mathbf{r}_b) G(\mathbf{r}_2) d\tau_a, \end{aligned} \quad (8.108)$$

$$\begin{aligned} & (\nabla_2^2 + k_2^2 - U_2) G(\mathbf{r}_2) = \\ & = cU_{2c}(\mathbf{r}_2) P_l(\cos \theta_2) + \frac{8\pi^2 M_2}{h} \int \varphi^*(\mathbf{r}_b) V_2 \psi(\mathbf{r}_a) F(\mathbf{r}_1) d\tau_b, \end{aligned} \quad (8.109)$$

где

$$U_1 = \frac{8\pi^2 M_1}{h^2} \int V_1 |\psi(\mathbf{r}_a)|^2 d\tau_a, \quad (8.110)$$

$$U_2 = \frac{8\pi^2 M_2}{h^2} \int V_2 |\varphi(\mathbf{r}_b)|^2 d\tau_b, \quad (8.111)$$

$$U_{1c}(\mathbf{r}_1) P_l(\cos \theta_1) = \frac{8\pi^2 M_1}{h^2} \int \psi^*(\mathbf{r}_a) V_1 \chi_c d\tau_a, \quad (8.112)$$

$$U_{2c}(\mathbf{r}_2) P_l(\cos \theta_2) = \frac{8\pi^2 M_2}{h^2} \int \varphi^*(\mathbf{r}_b) V_2 \chi_c d\tau_b. \quad (8.113)$$

Угловая зависимость интегралов (8.112) и (8.113) определяется выбором условий, налагаемых на моменты количества движения. Поскольку предполагается, что переходы происходят почти исключительно путем образования комплекса, а не непосредственно, мы можем пренебречь интегралами, фигурирующими в правой части уравнений (8.108) и (8.109). По той же причине можно предположить, что в пределах комплекса поле  $U_1$ , вызывающее обычное упругое рассеяние, мало. Аналогичное предположение может быть сделано также и относительно  $U_2$ .

Решения уравнений (8.108) и (8.109), удовлетворяющие требуемым граничным условиям, могут быть найдены с помощью метода, изложенного в гл. VI, § 3. При этом получаем

$$F(\mathbf{r}) = \sum_s i^s (2s+1) e^{i\eta_s} f_s(r) P_s(\cos \theta) - k_1 c u_{1c} [i f_l(r) + h_l(r)] P_l(\cos \theta), \quad (8.114)$$

где  $f_s(r)$  есть решение уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dL}{dr} \right) + \left[ k_1^2 - U_1 - \frac{s(s+1)}{r^2} \right] L = 0, \quad (8.115)$$

конечное в начале координат и обладающее асимптотической формой

$$f_s \sim (k_1 r)^{-1} \sin \left( k_1 r - \frac{1}{2} s\pi + \eta_s \right). \quad (8.116)$$



Здесь  $u_{1c}$  дается выражением

$$u_{1c} = \int_0^{\infty} U_{1c}(r) f_l(r) r^2 dr, \quad (8.117)$$

а функция  $h_l(r)$  определяется соотношением

$$u_{1c} h_l(r) = f_l(r) \int_r^{\infty} U_{1c} f_l'^2 dr' + f_l^i(r) \int_0^r U_{1c} f_l'^2 dr', \quad (8.118)$$

где  $f_l^i$  — второе решение уравнения (8.115), имеющее асимптотический вид

$$f_l^i \sim (k_1 r)^{-1} \cos \left( k_1 r - \frac{1}{2} l\pi + \eta_l \right).$$

Отметим, что при  $r \rightarrow \infty$   $h_l(r) \rightarrow f_l^i(r)$ .

В разложении (8.114) функции  $F(\mathbf{r})$  в ряд первый член описывает совокупность падающей волны и волны, рассеянной полем  $U_1$ , второй член — испускание частицы комплексом. Дифференциальное сечение для упругого рассеяния при этом равно

$$I_{\text{упр.}}(\theta) = \left| \frac{1}{2ik} \sum_s (e^{2i\eta_s} - 1) (2s + 1) P_s(\cos \theta) - (-i)^l c e^{i\eta} u_{1c} P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (8.119)$$

Аналогичным образом находим

$$G(\mathbf{r}) = -k_2 c u_{2c} [i g_l(r) + j_l(r)] P_l(\cos \theta), \quad (8.120)$$

где индексы имеют тот же смысл, что и выше. В этом случае падающая волна отсутствует. Дифференциальное сечение для столкновений, сопровождающихся перераспределением частиц, равно

$$I_{\text{пер.}}(\theta) = \frac{M_1 k_2}{M_2 k_1} |c|^2 |u_{2c}|^2 [P_l(\cos \theta)]^2. \quad (8.121)$$

Остается теперь найти постоянную  $c$ , которую мы выберем таким образом, чтобы

$$\iint \chi_c^* (H - E) \Psi d\tau d\tau_a = 0, \quad (8.122)$$

где функция  $\Psi$  определена в приближении (8.107)<sup>1)</sup>.

Поскольку

$$(H - E) \chi_c \approx (E_c - E) \chi_c,$$

<sup>1)</sup> Это может быть доказано следующим образом. Предположим, что ортогональные и нормированные функции  $\chi_n$  являются решениями уравнения

$$(H' - E_n) \chi_n = 0,$$

где оператор Гамильтона  $H'$  отличается от  $H$  малым членом  $H_1$ . Под-

имеем

$$\int \chi_c^* (H - E) c \chi_c d\tau d\tau_a \approx c (E_c - E). \quad (8.123)$$

Уравнение (8.108) дает, далее,

$$\begin{aligned} (H - E) F\psi &= \left[ -\frac{h^2}{8\pi^2 M_1} (\nabla_1^2 + k_1^2) + V_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_a) \right] F\psi = \\ &= -\frac{h^2}{8\pi^2 M_1} [c U_{1c} P_l(\cos \theta_1) \psi + U_1 F\psi] + V_1 F\psi. \end{aligned} \quad (8.124)$$

Как было указано выше, в пределах комплекса величиной  $U_1$  можно пренебречь, так как ее перекрытие с  $\chi_c$  ничтожно. При этих условиях

$$\begin{aligned} \int \chi_c^* (H - E) F\psi d\tau d\tau_a &= \\ &= -\frac{h^2}{8\pi^2 M_1} c \int \chi_c^* U_{1c} P_l(\cos \theta_1) \psi d\tau d\tau_a + \int \chi_c^* V_1 F\psi d\tau d\tau_a. \end{aligned} \quad (8.125)$$

Рассмотрим сперва второй из этих интегралов. Из (8.112) следует, что

$$\frac{8\pi^2 M_1}{h^2} \int \chi_c^* V_1 \psi d\tau_a = U_{1c}^*(r_1) P_l(\cos \theta). \quad (8.126)$$

Подставляя значение  $F$  в форме (8.114), находим

$$\frac{8\pi^2 M_1}{h^2} \int \chi_c^* V_1 F\psi d\tau d\tau_a = 4\pi \left[ i^l e^{i\eta_l} u_{1c}^* - k_1 c \left( \frac{i |u_{1c}|^2}{2l+1} + s_l \right) \right], \quad (8.127)$$

где функция  $s_l$ , связанная с  $h_l$  [функция  $h_l$  определяется выражением (8.118)], вещественна. Возвращаясь к первому из интегралов (8.125), отметим, что он также является вещественным и может быть включен в  $s_l$ .

становка

$$\Psi = \sum a_n \chi_n$$

в уравнение

$$(H - E) \Psi = 0$$

дает

$$\sum a_n (E_n - E) \chi_n = H_1 \Psi.$$

Умножая это выражение на  $\chi_n^*$  и интегрируя, получаем

$$a_n = \frac{\int \chi_n^* H_1 \Psi d\tau d\tau_a}{E_n - E}.$$

Формально это эквивалентно условию

$$\int \chi_n^* (H - E) \Psi d\tau d\tau_a = 0,$$

которым удобнее всего пользоваться тогда, когда приближенная форма функций  $\Psi$  и  $H_1$  неизвестна.

Аналогичным образом получаем

$$\frac{8\pi^2 M_2}{h^2} \int \chi_c^* V_2 G \varphi d\tau d\tau_b = -4\pi k_2 c \left( \frac{i |u_{2c}|^2}{2l+1} + t_l \right), \quad (8.128)$$

где  $t_l$  вещественно.

Группируя члены для подстановки в (8.123), имеем

$$c \left( E - E'_c + \frac{1}{2} i \Gamma_c \right) = \frac{h^2}{2\pi M_1} i^l e^{i\eta_l} u_{1c}^*,$$

где

$$\Gamma_c = \frac{h^2}{\pi} \left( \frac{k_1}{M_1} \frac{|u_{1c}|^2}{2l+1} + \frac{k_2}{M_2} \frac{|u_{2c}|^2}{2l+1} \right). \quad (8.129)$$

Величина  $E_c$  здесь заменена на  $E'_c$ , чтобы учесть дополнительные вещественные члены, содержащие  $c$  и появляющиеся в выражениях (8.127) и (8.128).

Итак, сечение, соответствующее столкновениям, сопровождающимся перераспределением частиц, равно

$$Q_{\text{пер.}} = \frac{\pi}{k_1^2} (2l+1) \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(E - E'_c)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}, \quad (8.130)$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{k_1 h^2}{\pi M_1} \frac{|u_{1c}|^2}{2l+1}, \quad \Gamma_2 = \frac{k_2 h^2}{\pi M_2} \frac{|u_{2c}|^2}{2l+1}. \quad (8.131)$$

Это и есть так называемая одночленная формула; впервые она была получена Брейтом и Вигнером [10].

*Истолкование одночленной формулы.* Формула (8.130) имеет характерную резонансную форму, причем полная ширина линии на высоте, равной половине максимальной, равна  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ . Она может быть сопоставлена с соответствующей оптической формулой для ширины спектральной линии.

Рассмотрим резонансное поглощение света атомом, в результате которого атом переходит из основного состояния  $A$  в состояние  $B$ , причем из состояния  $B$  он может затем либо вернуться в состояние  $A$ , либо перейти в некоторое промежуточное состояние  $C$ . Ширина линии резонансного поглощения при этом равна  $\Gamma_{AB} + \Gamma_{CB}$ , где  $\Gamma_{AB}/\hbar$  и  $\Gamma_{CB}/\hbar$  — соответственно значения вероятности перехода из состояния  $B$  в состояния  $A$  и  $C$ .

По аналогии  $\Gamma_1/\hbar$  можно интерпретировать как вероятности испускания комплексом в единицу времени частицы 1, а  $\Gamma_2/\hbar$  — как соответствующую вероятность для частицы 2. Это заключение согласуется с формулами (8.131), так как величины  $u_{1c}$  и  $u_{2c}$  определяются степенью перекрытия функции  $\chi_c$ , характеризующей состояние комплекса, и функцией  $F\psi$  или  $G\varphi$ , подобно тому как это обычно имеет место в выражениях, определяющих вероятность перехода.

В соответствии с этим можно, далее, предположить, что

$$\frac{\pi}{k_1^2} (2l+1) \frac{\Gamma_1 (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{(E - E_c')^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}$$

есть сечение, отвечающее образованию комплекса, причем  $\Gamma_2 / (\Gamma_1 + \Gamma_2)$  представляет собой вероятность распада комплекса путем испускания частицы 2. Величины  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  называют обычно парциальными значениями ширины уровней для испускания частиц 1 и 2, поскольку полная ширина уровня  $\Gamma = (\Gamma_1 + \Gamma_2)$  может быть представлена как сумма членов, обусловленных двумя различными возможными процессами распада комплекса.

Небольшое смещение резонансного максимума от  $E_c$  к  $E_c'$  в большинстве случаев не играет существенной роли, поскольку величина  $E_c$  в общем случае не может быть определена теоретически; при этом безразлично, которая из двух величин —  $E_c$  или  $E_c'$  — определяется на основании опытных данных.

*Упругое рассеяние.* Можно ожидать, что в случае упругого рассеяния наличие резонансного уровня комплекса приведет к тому, что сечение будет отличаться от сечения (8.130) заменой  $\Gamma_2$  на  $\Gamma_1$  в числителе формулы. В действительности в этом случае формула несколько усложняется в связи с тем обстоятельством, что амплитуда рассеяния зависит от «потенциального» рассеяния, частично возникающего до проникновения частицы в ядро, а частично обусловленного диффракцией от ядра (см. § 1). Парциальное сечение  $l$ -го порядка для упругого рассеяния приобретает при этом вид

$$Q_{\text{упр.}}^l = \frac{\pi}{k_1^2} (2l+1) \left| e^{2i\eta_l} - 1 + \frac{i\Gamma_1 e^{2i\eta_l}}{(E_c' - E) - \frac{1}{2} i (\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right|^2. \quad (8.132)$$

Точное определение фазы  $\eta_l$ , характеризующей потенциальное рассеяние, является несколько затруднительным. Мы определили ее с помощью волнового уравнения  $l$ -го порядка, описывающего движение в поле  $\hbar^2 U / 2M_1$ , причем взаимодействие частицы 1 с системой  $A$  было усреднено по исходной волновой функции, соответствующей исходному ядру. Для расстояний  $r$ , превышающих радиус комплекса  $R$ , такое определение не встречает возражений; в случае меньших расстояний следует, однако, учесть то обстоятельство, что в процессе образования комплекса падающая частица утрачивает свою индивидуальность. Вероятность того, что при столкновении с системой  $A$  эта частица окажется непосредственно рассеянной без обмена энергией, ничтожна. При  $r = R$  взаимодействие  $\hbar^2 U / 2M_1$  лучше поэтому трактовать как обусловленное непроницаемой сферой радиуса  $R$ . В случае соударения частицы с зарядом  $Z_1 e$  и ядра с зарядом  $Z_2 e$ , при вычислении  $\eta_l$  можно

положить

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2M_1} U_1 &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (r > R), \\ \frac{\hbar^2}{2M_1} U_1 &\rightarrow \infty \quad (r = R). \end{aligned} \quad (8.133)$$

Дополнительные данные, подтверждающие справедливость такого предположения, будут также приведены ниже<sup>1)</sup>. К сожалению, в действительности выбор величины  $R$  все же остается до некоторой степени неопределенным.

*Случай, когда комплекс может распасться несколькими способами.* Приведенная выше формула была получена нами в предположении, что возможно испускание только какой-либо одной из двух частиц, входящих в состав комплекса. Путем непосредственного обобщения легко получить формулу, справедливую и в том случае, когда может иметь место испускание любой из  $n$  частиц. Вместо (8.130) мы получаем при этом следующую формулу, определяющую сечение для испускания  $p$ -й частицы:

$$\frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma_1 \Gamma_p}{(E - E'_c)^2 + \frac{1}{4} \left( \sum_1^n \Gamma_t \right)^2}. \quad (8.134)$$

Формула (8.132) также должна быть соответственно изменена.

*Одночленная формула в случае любого значения момента количества движения.* Обобщение одночленной формулы на тот случай, когда спиновое квантовое число падающей частицы есть  $i$ , а момент количества движения бомбардируемого ядра характеризуется квантовым числом  $s$ , было дано Бете и Плячком [11]. Вместо (8.130) при этом была получена формула вида

$$Q_{\text{пер.}}^p = \frac{\pi}{k^2} \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_1 \Gamma_p}{(E - E'_c)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (8.135)$$

где  $J$  — полное квантовое число комплекса.

**2. Обобщение на случай нескольких резонансных уровней комплекса.** Случай, когда парциальная ширина уровней меньше расстояния между уровнями. При обобщении формулы (8.134) для учета существования не одного, а нескольких энергетических уровней комплекса, мы будем различать два случая. По мере увеличения энергии возбуждения комплекса расстояние между уровнями уменьшается (см. гл. XIII, § 2), так что обычно

<sup>1)</sup> Бете показал [9], что это имеет место только в предположении наличия эффективного потенциала сил отталкивания в пределах радиуса ядра и что вклад от удаленного резонансного уровня несуществен.

ширина уровней превышает расстояние между ними. Мы рассмотрим сперва тот случай, когда возбуждение не слишком велико, так что уровни не перекрываются.

В качестве обобщения формул (8.130) и (8.132) Бете и Плячек получили в этом случае

$$Q_{\text{пер.}}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left| \sum_r \frac{\omega_{1c}^r \omega_{pc}^{r*}}{(E'_{cr} - E) - \frac{1}{2} i \sum_t \Gamma_{tc}^r} \right|^2, \quad (8.136)$$

$$Q_{\text{упр.}}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left| e^{2i\eta_l} - 1 + ie^{2i\eta_l} \sum_r \frac{\Gamma_r^r}{(E'_{cr} - E) - \frac{1}{2} i \sum_t \Gamma_{tc}^r} \right|^2, \quad (8.137)$$

где индекс  $r$  соответствует отдельным состояниям комплекса, а  $|\omega_{pc}^r|^2 = \Gamma_{pc}^r$ .

Эти формулы были получены путем обобщения метода, использованного при выводе одночленной формулы. С точки зрения строгости, этот вывод оставляет желать много лучшего. Состояние комплекса определяется при этом только приближенно, а волновая функция, описывающая движение падающей и испускаемой частиц по отношению к комплексу, вводится в рассмотрение на основании интуитивных соображений. Это приводит к затруднениям при определении потенциального рассеяния и матричных элементов, характеризующих парциальную ширину уровней. Более строгое решение задачи, свободное от указанных затруднений, было дано Капуром и Пайерлсом [12]<sup>1)</sup>.

*Обобщение дисперсионной формулы.* Капур и Пайерлс обобщили дисперсионную формулу, приведенную в гл. II, § 7, на случай многих частиц. В том случае, когда парциальная ширина уровней меньше расстояния между уровнями, полученное ими выражение сводится к формуле Бете — Плячека (8.135).

Первый этап решения задачи состоит в точном определении понятия комплекса. Как и выше, мы введем в рассмотрение определенный радиус  $R$  системы, определив его таким образом, чтобы вероятность нахождения нескольких частиц на расстоянии от центра системы, превышающем  $R$ , была малой.

Пусть, как обычно,  $\Psi$  — волновая функция, описывающая состояние системы в целом. Мы можем разложить  $\Psi$  в ряд:

$$\Psi = \sum \psi_n(\mathbf{r}_a) F_n(\mathbf{r}_1); \quad (8.138)$$

координаты  $\mathbf{r}_1$  характеризуют здесь относительное движение падающей частицы и центра тяжести остальной части системы. Можно, однако, так же как и в п. 1, представить функцию  $\Psi$

<sup>1)</sup> См. также [13].

в иной форме:

$$\Psi = \sum \varphi_n(\mathbf{r}_b) G_n(\mathbf{r}_2), \quad (8.139)$$

где  $\mathbf{r}_2$  характеризует относительное движение второй частицы и центра тяжести остальной части системы. Поскольку вторая частица входит в состав бомбардируемой части системы, функции  $G_n$  должны описывать только расходящиеся волны. Так как при  $r_2 < R$  вероятность нахождения двух частиц вне системы мала, имеем

$$[\nabla^2 + k_2^2 - U_2(r_2)] G_n = 0 \quad (r_2 > R), \quad (8.140)$$

где  $U_2$  — потенциал, включающий в себя только дальнедействующие силы между частицей 2 и остальной частью системы. Так, например, если речь идет о столкновении с ядром, а падающая частица обладает зарядом, то  $U_2$  представляет собой потенциал сил кулонова взаимодействия. Если мы разложим  $G_n$  в ряд по шаровым функциям,

$$G_n = r_2^{-1} \sum g_n^l(r_2) P_l^m(\cos \theta_2) e^{\pm im\varphi_2}, \quad (8.141)$$

то из условия, согласно которому функций  $G_n$  должны описывать только расходящиеся волны, следует, что

$$\left(\frac{d}{dr_2} - f_{l_2}\right) g_n^l = 0 \quad (r_2 = R), \quad (8.142)$$

где  $f_{l_2}$  имеет то же определение, что и данное в гл. II, § 7 (или в гл. III, § 5, при наличии кулонова поля).

Волновая функция  $\chi_c^r$ , характеризующая стационарное состояние комплекса, определена теперь таким образом, что функции  $G_n$  и  $F_n$  в разложениях (8.138) и (8.139) удовлетворяют условию (8.142). Поскольку в рассмотрение включена функция  $F_n$ , описывающая состояние падающей частицы, система тем самым становится замкнутой, точно так же, как и в задаче об одной частице, рассмотренной в гл. II, § 7. Каждому значению функции  $\chi_c^r$  отвечает комплексное значение энергии

$$W_r = E_r - \frac{1}{2} i\Gamma_r. \quad (8.143)$$

Точно таким же путем, как и в случае задачи об одной частице, волновая функция  $\Psi$ , описывающая столкновение, может быть разложена в ряд по функциям  $\chi_c^r$ . Это приводит к следующим формулам для сечений  $Q_d^l$  и  $Q_{\text{упр.}}^l$ :

$$Q_{\text{пер.}}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left| \sum_r \frac{\tilde{w}_{1c}^{*r} w_{pc}^r}{(E_r - E - \frac{1}{2} i\Gamma_r) N_r} \right|^2, \quad (8.144)$$

$$Q_{\text{упр.}}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left| e^{2i\eta_l} - 1 + ie^{2i\eta_l} \sum_r \frac{\tilde{w}_{1c}^{*r} w_{1c}^r}{(E_r - E - \frac{1}{2} i\Gamma_r) N_r} \right|^2. \quad (8.145)$$

Здесь

$$\Gamma_r = \sum_p |\omega_{pc}^r|^2,$$

$$N_r = \int \tilde{\chi}_c^{r*} \chi_c^r d\tau_a d\tau_1, \quad (8.146)$$

а  $\tilde{\chi}_c^{r*}$  отличается от  $\chi_c^r$  тем, что при разложении  $\tilde{\chi}_c^{r*}$  в ряд вместо условия (8.142) должно удовлетворяться условие

$$\left(\frac{d}{dr_p} - f_{lp}^*\right) \tilde{g}_r^l = 0 \quad (r_p = R),$$

$$\int |\chi_c^r|^2 d\tau_a d\tau_1 = 1. \quad (8.147)$$

Величины  $\omega_p$  приобретают при этом вполне точный смысл. Действительно,

$$|\omega_{pc}^r|^2 = -(f_{lp}^r - f_{lp}^{r*}) |g_r^l(R)|^2 \frac{\hbar^2}{2M_p}, \quad (8.148)$$

а  $|\tilde{\omega}_p^r|^2$  отличается от  $|\omega_{pc}^r|^2$  только тем, что  $g_r^l(R)$  заменено на  $\tilde{g}_r^l(R)$ . Можно показать, что  $|g_r^l|^2 = |\tilde{g}_r^l|^2$ , откуда следует, что  $\omega_p^r$  отличается от  $\tilde{\omega}_p^r$  только фазовым множителем.

Если  $R$  задано, то фаза  $\eta_l$ , определяющая сечение упругого рассеяния, может быть найдена вполне однозначным образом. Она представляет собой фазовый сдвиг, возникающий при рассеянии полем, потенциал которого при  $r_p > R$  равен  $U_p$ , а при  $r_p = R$  может быть аппроксимирован барьером бесконечной высоты.

Сопоставляя формулы (8.144) и (8.145), представляющие собой естественное обобщение формулы (2.64) для одной частицы, с формулами (8.136) и (8.137), полученными Бете и Плячком, мы убеждаемся в том, что они весьма сходны друг с другом. Основное различие между ними сводится к появлению множителей  $N_r$  и замене  $\omega_{pc}^{r*}$  на  $\tilde{\omega}_{pc}^{r*}$ . Капур и Пайерлс [12] показали, что в том случае, когда расстояние между уровнями  $E_r$  превышает их ширину  $\Gamma_r$ , эти различия становятся несущественными. Метод Капура и Пайерлса обладает тем преимуществом, что, помимо строгого обоснования формул (8.136) и (8.137) при этих условиях, он дает соотношения, позволяющие определить матричные элементы  $\omega_{pc}^r$  и потенциальное рассеяние, если радиус комплекса  $R$  задан.

Следует, однако, напомнить, что, так же как и в случае задачи об одной частице, выбор величины  $R$  остается при этом не вполне определенным. Возвращаясь к выражению (8.137) для сечения упругого рассеяния, мы можем рассматривать его как слагающееся из трех членов, обусловленных соответственно ближайшим резонансным уровнем, совокупностью всех остальных более удаленных уровней и потенциальным рассеянием. Относи-



тельная роль последних двух членов может быть при этом изменена путем выбора того или иного значения  $R$ . Лучше всего было бы выбрать  $R$  так, чтобы роль далеких резонансных уровней стала минимальной. Поскольку, однако, теория еще не находится в таком состоянии, чтобы ею можно было пользоваться для определения величины сечений в отдельных частных случаях, вопрос о вычислении выражения (8.137) практически еще не возникал. Интересно отметить, что Брейту [14] удалось построить схематическую модель дисперсионных явлений, допускающую точное алгебраическое решение задачи. Понятие составной системы (комплекса) при этом возникает вполне однозначным образом, не требуя введения в рассмотрение величины  $R$ .

*Зависимость парциальной ширины уровней от скорости.* Отметим, что как в теории Бете и Плячека, так и в теории Капура и Пайерлса энергетические уровни комплекса зависят от энергии падающей частицы. Если ширина уровней мала по сравнению с расстояниями между ними, то зависимостью вещественной части ширины уровня от энергии падающей частицы можно пренебречь. Значения парциальной ширины уровней  $\Gamma_p^r$ , определяющие мнимую часть  $\frac{1}{2} i\Gamma_r$ , в общем случае зависят, однако, весьма существенным образом от скорости испускания рассматриваемой частицы.

Согласно формуле Капура и Пайерлса [12], имеем

$$\Gamma_p^r = |\omega_{pc}^r|^2, \quad (8.149)$$

где  $|\omega_{pc}^r|$  определяется выражением (8.148). Ограничиваясь сперва рассмотрением таких случаев, когда вне системы поле, действующее на частицу, равно нулю, для частиц с нулевым моментом количества движения имеем

$$f_0^r - f_0^{r*} = 2ik_p. \quad (8.150)$$

При этих условиях  $\Gamma_p^r$  прямо пропорционально скорости испускаемой частицы.

Если квантовое число, отвечающее моменту количества движения частиц, равно  $l$  и  $k_p R < l$ , то

$$f_l^r - f_l^{r*} \sim k_p^{2l+1} R^{2l} \quad (8.151)$$

и  $\Gamma_p^r$  пропорционально скорости частицы в степени  $(2l+1)$ .

Эти результаты вытекают также и из соображений, развитых в п. 1. Величины  $u_{1c}$  и  $u_{2c}$  определяются в основном перекрытием функций  $f_l$  и  $g_l$  с областью, занимаемой комплексом. При малых  $kR$  значения этих функций в области комплекса будут изменяться пропорционально  $(kR)^l$  (см. гл. II, § 3), откуда следует, что  $u_{1c}$  и т. д. будут меняться аналогичным образом. По-

сколько соответствующие значения ширины уровней пропорциональны  $k|u|^2$ , они будут меняться, как  $k^{2l+1}R^{2l}$ , в согласии с (8.151).

В связи с наличием заметной зависимости парциальной ширины уровней от энергии частицы истинное значение ширины уровня часто определяют как соответствующее точному резонансу.

При учете наличия конечного взаимодействия  $U$  при  $r > R$  зависимость парциальной ширины уровня от скорости приобретает более сложный характер. Наибольший практический интерес при этом представляет случай ядерных столкновений, для которых  $U$  представляет собой потенциал кулоновых сил отталкивания. Выражение, определяющее парциальную ширину уровня, содержит в этом случае дополнительный множитель  $e^{-Pl}$ , характеризующий вероятность проникновения частицы через кулонов потенциальный барьер на поверхности ядра (см. гл. III, § 5).

Более детальный анализ вопроса о применении дисперсионной формулы к ядерным столкновениям будет дан нами в гл. XIII, § 2.

**3. Перекрытие уровней<sup>1)</sup>.** Исследуем теперь тот случай, когда энергия возбуждения комплекса столь велика, что ширина уровней превышает расстояние между ними и энергетический спектр уже не является дискретным. Формула (8.144) остается при этом справедливой; для практических приложений она становится, однако, неудобной. В этом случае лучше всего воспользоваться статистическими методами. Если, далее, длина волны испускаемых частиц мала по сравнению с размерами комплекса, задача может быть решена чисто классическим путем.

Из одночленной формулы (8.134) следует, что отношение сечений  $Q_2^l$ ,  $Q_3^l$  и т. д., отвечающих испусканию частицы 2, 3 и т. д., не зависит от способа образования комплекса, а именно:

$$\frac{Q_2^l}{Q_3^l} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} \text{ и т. д.} \quad (8.152)$$

Согласно этой формуле, интегрирование полного сечения, соответствующего всем возможным столкновениям частицы 1 с исходной системой, по рассматриваемой области значений энергии, включающей резонансную энергию, приводит к выражению вида

$$\int Q_{\text{полн.}}^l dE = \frac{2\pi^2}{k^2} (2l+1) \Gamma_1 \quad (8.153)$$

при условии, что потенциальным рассеянием можно пренебречь. Среднее значение полного сечения для интервала энергии, содер-

<sup>1)</sup> Излагаемые ниже результаты основаны на работе Бора, Пайерлса и Плячека [15] и на других работах, использующих статистические методы [9.16].

жащего большое число уровней, при этом равно

$$\bar{Q}_{\text{полн.}} = \frac{2\pi^2}{k^2} (2l + 1) \frac{\Gamma_1}{D}, \quad (8.154)$$

где  $D$  — среднее расстояние между уровнями в рассматриваемом интервале.

Исходя из этих результатов, можно было бы ожидать, что в случае перекрывающихся уровней формула (8.154) будет определять сечение образования комплекса, а (8.152) будет определять при этом вероятность его распада. Так, для сечения, соответствующего испусканию частицы 2, мы должны были бы иметь

$$Q_2^i = \frac{2\pi^2}{k^2} (2l + 1) \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{D\Gamma}, \quad (8.155)$$

где

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots$$

Покажем теперь, что при соответствующей интерпретации величин  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ , и т. д. формула такого типа действительно будет иметь место.

Прежде всего в случае перекрывающихся уровней состояние комплекса не определяется одной лишь его энергией. Волновая функция, характеризующая комплекс, будет представлять собой линейную комбинацию функций, относящихся к отдельным уровням и перекрывающихся при рассматриваемом значении энергии, а коэффициенты при этих функциях будут зависеть от способа образования комплекса. Формула (8.155) может быть, тем не менее, сохранена, если считать, что  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots$  различны при разных способах образования комплекса, так что

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \frac{\Gamma_2^{(1)}}{\Gamma_3^{(1)}}, \quad (8.156)$$

где значок сверху указывает, что комплекс образовался путем захвата частицы 1.

Для получения соответствующей формы соотношения (8.154) мы можем воспользоваться принципом детального равновесия, применив его к реакции:

Частица 1 + Система N в нормальном состоянии  $\rightleftharpoons$  Комплекс,

при которой полная энергия системы заключена в интервале между  $E$  и  $E + dE$ . Если  $p_1^c, p_1^c$  — соответственно значения вероятности образования и распада комплекса за 1 сек., то, как известно,

$$g_c p_c^1 = g_N g_1 p_1^c, \quad (8.157)$$

где  $g_1, g_N, g_c$  — статистические веса частицы 1, системы N и комплекса в рассматриваемых состояниях [17].

Для исследованного выше случая, когда частица  $1$  и система  $N$  не обладают спином и квантовое число, определяющее полный момент количества движения комплекса, есть  $l$ , имеем

$$g_1 = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk, \quad g_N = 1, \quad g_c = (2l + 1)Z, \quad (8.158)$$

где  $Z$  — число уровней комплекса с соответствующим значением момента количества движения и соответствующей четностью, лежащих в интервале между  $E$  и  $E + dE$ , а  $k$  — волновое число, характеризующее относительное движение частицы  $1$  и системы  $N$ .

В наших прежних обозначениях

$$p_1^c = \frac{v}{V} Q_{\text{полн.}}^l, \quad p_c^1 = \frac{\Gamma_1^0}{\hbar}, \quad (8.159)$$

где  $v$  — относительная скорость частицы  $1$  и системы  $N$ ,  $\Gamma_1^0$  — ширина уровня комплекса, обусловленная испусканием частицы  $1$  и усредненная по статистической совокупности комплексов, образованных всеми возможными способами. Поскольку

$$\frac{dE}{dk} = \hbar v,$$

имеем

$$Q_{\text{полн.}}^l = \frac{2\pi^2}{k^2} (2l + 1) \frac{\Gamma_1^0 Z}{dE} = \frac{2\pi^2}{k^2} (2l + 1) \frac{\Gamma_1^0}{D}. \quad (8.160)$$

При решении различного рода практических вопросов изменения, внесенные нами выше в формулы (8.156) и (8.160), не играют обычно существенной роли.

*Статистическая формула для ширины уровня. Вероятность прилипания.* Формула (8.160) может быть использована для определения порядка величины среднего статистического значения ширины уровней.

Максимальное возможное значение  $Q_{\text{полн.}}^l$  равно  $\pi(2l + 1)/k^2$ , так что можно записать

$$Q_{\text{полн.}}^l = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) \zeta_l, \quad (8.161)$$

где  $\zeta_l \leq 1$ . Это дает<sup>1)</sup>

$$\sum (2l + 1) \Gamma_1^0 = \frac{D}{2\pi} \sum (2l + 1) \zeta_l. \quad (8.162)$$

Учет испускаемых частиц типа  $1$ , момент количества движения которых таков, что  $l > kR$ , мало влияет на величину этого выражения. Поэтому при больших значениях  $kR$  имеем

$$\sum (2l + 1) \Gamma_1^0 = \frac{1}{2} D k^2 R^2 \bar{\zeta}. \quad (8.163)$$

<sup>1)</sup> Расстояние  $D$  между уровнями теперь рассматривается как усредненное по всем значениям момента количества движения комплекса.

Здесь  $\bar{\zeta}$  — среднее значение  $\zeta$ ; оно таково, что сечение, отвечающее образованию комплекса, равно  $\pi R^2 \bar{\zeta}$ . Поскольку  $\pi R^2$  есть геометрическое сечение комплекса, величину  $\bar{\zeta}$  называют обычно вероятностью «прилипания». Вводя в рассмотрение среднее значение  $\bar{\Gamma}_1^0$ , имеем

$$\bar{\Gamma}_1^0 = \frac{D\bar{\zeta}}{2\pi}. \quad (8.164)$$

Зависимость вероятности прилипания от энергии была исследована Бете [18]. При образовании комплекса падающая частица утрачивает свою индивидуальность и может быть рассматриваема как поглощенная комплексом. В гл. I, § 7, было показано, что процесс поглощения частицы может быть описан путем добавления к потенциальной энергии системы некоторого отрицательного мнимого члена. Бете исследовал задачу о движении частицы в поле  $V(r) - i\sigma(r)$ , где  $\sigma(r)$  — потенциал, характеризующий поглощение частицы. Как и следовало ожидать, он нашел при этом, что вероятность прилипания частицы  $\bar{\zeta}$  стремится к единице по мере увеличения энергии частицы. С другой стороны, при увеличении степени возбуждения комплекса расстояние между уровнями уменьшается (см. гл. XIII, § 2). Из (8.164) следует, что ширина уровня и, следовательно, вероятность распада комплекса, связанные с испусканием частицы с данной энергией, обычно начинают убывать после того, как энергия достигла некоторого определенного значения. В частности, при больших скоростях столкновений вероятность того, что падающая частица окажется испущенной повторно со своей исходной энергией (упругое рассеяние), как и следовало ожидать, становится очень малой.

Полное сечение для столкновения, при котором частица 1, обладающая большой энергией, захватывается, а частица 2 испускается комплексом, может быть определено выражением вида

$$Q_1^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_0^{kR} (2l+1) \Gamma_1^0 \frac{2\pi}{D} \frac{l^{\frac{1}{2}}}{\Gamma} = \frac{\pi R^2 l^{\frac{1}{2}}}{\Gamma}. \quad (8.165)$$

Этот простой результат означает, что  $Q_1^2$  равно в этом случае произведению геометрической площади эффективного сечения системы на вероятность распада комплекса путем испускания частицы 2.

*Распределение испускаемых частиц по энергиям.* Сильно возбужденный комплекс может распадаться постепенно, путем испускания ряда частиц, обладающих значительно меньшими энергиями, нежели падающая частица. Относительная вероятность испускания частицы, в результате которого комплекс остается в данном

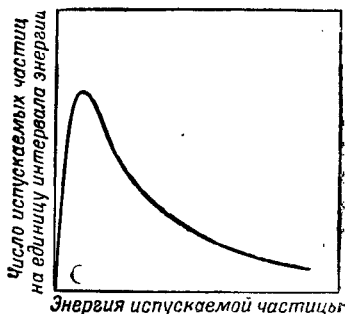
$n$ -м энергетическом состоянии, определяется выражением вида

$$\Gamma_{2(n)} = \frac{D\zeta_{2(n)}}{2\pi}, \quad (8.166)$$

где  $D$  — среднее значение расстояния между уровнями возбужденного комплекса, а  $\zeta_{2(n)}$  — вероятность прилипания падающей частицы 2 в том случае, когда она обладает такой же энергией  $E$ , с какой она испускается, оставляя комплекс в  $n$ -м состоянии. Вероятность  $p_2(E)$  испускания частицы 2 с энергией, лежащей в интервале между  $E$  и  $E + dE$ , будет пропорциональна  $\Gamma_{2(n)}$  и  $\rho(E) dE$  — числу энергетических состояний конечной системы в интервале  $dE$  вблизи  $n$ -го состояния. Таким образом,

$$p_2(E) \sim \rho(E) \zeta_{2(n)}. \quad (8.167)$$

Плотность энергетических уровней остальной части системы быстро возрастает по мере увеличения степени ее возбуждения, т. е. по мере уменьшения энергии  $E$ . С другой стороны,  $\zeta_{2(n)}$  при уменьшении  $E$  убывает значительно медленнее. В результате распределение испускаемых частиц по возможным значениям энергии характеризуется кривой, приведенной на фиг. 20, максимум которой отвечает относительно малому значению энергии испускаемой частицы.



Фиг. 20. Распределение энергии частиц, испускаемых сильно возбужденным комплексом.

**4. Метод переходного состояния.** Рассмотрим теперь статистический метод, предложенный впервые Пельцером и Вигнером [19]<sup>1)</sup>, который может быть использован для исследования реакций, сопровождающихся перераспределением частиц, если условия являются при этом вполне классическими. Этот метод пригоден, в частности, для изучения скоростей химических реакций; он может быть, однако, использован также и при рассмотрении ряда ядерных реакций (например, реакции деления ядер или ядерных реакций, протекающих под действием быстрых нейтронов), для рассмотрения которых применима классическая механика.

В этом случае в принципе возможно детально проследить за ходом процесса столкновения; это обстоятельство используется в методе переходного состояния. Существенно, что этот метод

<sup>1)</sup> Более подробное рассмотрение этого метода имеется в работе Вигнера [20] и в книге Глестона, Лейдлера и Эйринга [21].

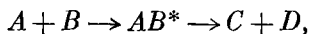
приводит к соотношениям, определяющим средние статистические значения парциальной ширины уровней  $\Gamma_p$  для различных возможных реакций. При изучении химических реакций удобно рассматривать макроканонический ансамбль реагирующих систем, поскольку значения скоростей реакций, наблюдаемые на опыте, относятся именно к таким условиям. При применении этого метода к вопросам ядерной физики удобнее, однако, иметь дело с микроканоническим ансамблем.

Рассмотрим некоторую реакцию, идущую с участием  $n$  частиц. Эти частицы могут быть как нуклонами, так и атомами (при применении этого метода к атомам следует считать, что электронные переходы во время реакции не происходят). Состояние такой системы может быть охарактеризовано совокупностью  $3n$  координат. При этом три координаты определяют положение центра тяжести системы, три — ее ориентацию, а остальные  $3n - 6$  координат описывают внутреннюю конфигурацию системы. Представим себе некоторую многомерную поверхность, характеризующую потенциальную энергию системы как функцию этих  $3n - 6$  координат. Эта поверхность будет содержать области, характеризующиеся относительно низкой потенциальной энергией (ямы), разделенные потенциальными горами. Эти глубокие ямы соответствуют отдельным компонентам системы. Для того чтобы имел место переход от одной из таких ям к другой, т. е. для того, чтобы произошло перераспределение частиц, образующих систему, последняя должна перейти через горб потенциальной энергии. В общем случае такой переход осуществится через наиболее низко расположенную точку потенциального горба. В такой точке потенциальная энергия системы будет максимальной для изменений, связанных с переходами через горб, но она будет при этом минимальной для изменений, связанных с переходами в перпендикулярных направлениях; другими словами, эта точка является перевалом или седловиной поверхности. Когда конфигурация системы характеризуется этой точкой, называемой точкой активации, и система находится в таком состоянии движения, которое соответствует переходу из исходной области с низкой энергией через перевал, то говорят, что система находится в переходном состоянии и образует активированный комплекс.

Во многих случаях представления такого рода являются чересчур упрощенными. Переход из какой-либо ямы с низким значением потенциальной энергии в другую такую же яму может произойти через один или несколько перевалов, обладающих сложной формой. Точка, изображающая состояние системы, может попасть в новую яму через узкий проход и затем покинуть ее через другой аналогичный проход. В промежутке в зависимости от формы перевала движение этой точки может носить весьма сложный характер. В результате возвращение системы в исходное

состояние через первый проход может оказаться значительно более вероятным, чем ее переход в другую более глубокую яму. Положение дела здесь весьма сходно с тем, которое имеет место в рассмотренном выше случае образования комплекса при столкновениях. Благодаря сложной форме промежуточной потенциальной ямы, расположенной на более высоком уровне, система может оставаться в ней длительное время до тех пор, пока на одной из ее степеней свободы не сконцентрируется достаточная энергия, в результате чего она тем или иным путем покинет яму.

Мы предположим теперь, что исходные компоненты системы, а также ее компоненты в переходном состоянии находятся в статистическом равновесии при некоторой температуре  $T$ . Поскольку обычно нет необходимости исследовать реакции третьего и более высоких порядков, мы рассмотрим реакцию типа



где  $AB^*$  соответствует переходному состоянию. Система в состоянии  $AB^*$  может быть рассматриваема как обычная молекула, образовавшаяся в результате соединения атомов  $A$  и  $B$ , с той лишь разницей, что изменение одной из  $3n - 6$  координат, характеризующих состояние системы, должно привести к ее распаду. Воспользовавшись обычной статистической теорией, получаем следующее значение равновесной концентрации активированных комплексов [17]:

$$N_{AB}^* = N_A N_B \frac{f_{AB}^*(T)}{f_A(T) f_B(T)}, \quad (8.168)$$

где  $N_A, N_B, f_A, f_B$  — соответственно значения концентрации и функции распределения для систем  $A$  и  $B$ . Функция  $f_{AB}^*(T)$  представляет собой функцию распределения для переходного состояния и может быть определена на основании следующих соображений. Мы предположим, что координаты выбраны таким образом, что переход через потенциальный горб связан с изменением только одной координаты  $q^*$ , соответствующей импульсу  $p^*$ . В фазовом пространстве точка, описывающая состояние системы, должна лежать в области  $h^{-1} dp^* dq^*$ , причем остальные координаты и импульсы могут обладать любыми значениями, совместимыми с этими. Обычно движение, связанное с изменением  $q^*$ , можно рассматривать как чистую трансляцию и представить  $f_{AB}^*(T)$  в форме

$$e^{-E^*/kT} \frac{dp^* dq^*}{h}, \quad (8.169)$$

где первый множитель характеризует влияние всех координат, отличных от  $q^*$ , а  $E^*$  — энергия, выраженная через эту координату, причем  $E^* \geq E_0$ , где  $E_0$  — высота потенциального горба.



Скорость перехода системы через горб за 1 сек. равна  $N_A N_B v^* / dq^*$ , где  $v^*$  — скорость, соответствующая координате  $q^*$  и равная  $p^* / m^*$ , а  $m^*$  — эффективная масса системы при таком переходе. Общее число переходов за 1 сек. в некотором объеме  $V$  равно

$$N_A N_B \frac{f^*(T)}{f_A(T) f_B(T)} \int_0^\infty e^{-E^*/kT} \frac{p^* dp^*}{m^* h}. \quad (8.170)$$

При замене  $E^*$  на  $E_0 + \frac{p^{*2}}{2m^*}$  эта величина становится равной

$$N_A N_B \frac{f^*(T)}{f_A(T) f_B(T)} \frac{kT}{h} e^{-E_0/kT}. \quad (8.171)$$

Важно отметить, что выражение (8.171) не обязательно определяет скорость реакции. Так, например, в тех случаях, когда существует яма, расположенная на высоком уровне, выражение (8.171) определяет скорость проникновения в эту яму. В таких случаях, для того чтобы получить скорость реакции, выражение (8.171) следует умножить на множитель  $\kappa$ , называемый обычно коэффициентом прохождения и определяющий вероятность того, что, коль скоро система находится в потенциальной яме, она покинет эту яму в результате распада на рассматриваемые компоненты  $C + D$ . Воспользовавшись уже принятой выше терминологией, можно сказать, что нахождение точки, изображающей состояние системы, в потенциальной яме, расположенной на высоком уровне, соответствует образованию комплекса сталкивающихся частиц, тогда как формула (8.171) связана с вероятностью прилипания, а коэффициент прохождения — с отношением  $\Gamma_{CD}/\Gamma$ , которое определяет вероятность диссоциации комплекса данным определенным способом. Применимость метода переходного состояния не должна, однако, зависеть от существования промежуточного квазистационарного состояния, обладающего относительно большим временем жизни.

Для того чтобы установить связь между формулой (8.171) и более обычной формулой, содержащей сечение столкновений, отметим прежде всего, что если  $\bar{Q}$  есть сечение, соответствующее столкновениям, сопровождающимся перераспределением частиц системы, усредненное по возможным значениям энергии, и  $E_0/kT$  при этом мало, то скорость реакции определяется выражением вида

$$N_A N_B \bar{Q} \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} e^{-E_0/kT}, \quad (8.172)$$

где  $m$  — приведенная масса. Таким образом,

$$\bar{Q} = \kappa \left( \frac{\pi m k T}{8 h^2} \right)^{1/2} \frac{f^*(T)}{f_A(T) f_B(T)} \quad (8.173)$$

В простейшем случае реакции между атомами  $A$  с массами  $m_1$  и атомами  $B$  с массами  $m_2$  имеем

$$f_A(T) = \frac{(2\pi m_1 kT)^{3/2}}{h^3}, \quad f_B(T) = \frac{(2\pi m_2 kT)^{3/2}}{h^3},$$

$$f^*(T) = [2\pi(m_1 + m_2)kT] \frac{8\pi^2 I kT}{h^5}, \quad (8.174)$$

где  $I$  — момент инерции активированного комплекса относительно его главной оси, равный

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d_{12}^2,$$

а  $d_{12}$  — расстояние между атомами в активированном состоянии.

Мы имеем, таким образом,

$$\bar{Q} = \pi \kappa d_{12}^2. \quad (8.175)$$

Проиллюстрируем теперь этот метод на примере исследования микрoканонического ансамбля систем, энергия возбуждения которых заключена в интервале между  $E$  и  $E + dE$  [22]. Речь может идти при этом об атомных ядрах или же об активированных молекулах, которые, будучи предоставлены самим себе, будут распадаться с выделением избыточной энергии. Если число систем в ансамбле выбрано равным  $\rho(E) dE$  — числу уровней в интервале между  $E$  и  $E + dE$ , то число систем, распадающихся за 1 сек., будет равно  $\rho(E) dE \Gamma_f / h$ , где  $\Gamma_f$  имеет тот же смысл, что и в п.3.

Число уровней в интервале  $dq^*$ , взятом в направлении координаты  $q^*$ , характеризующей реакцию в переходном состоянии, равно

$$\rho^*(E - E^*) dE \frac{dp^* dq^*}{h}. \quad (8.176)$$

В исходном состоянии на каждом из таких уровней находится одна система, так что число систем, распадающихся за 1 сек., равно

$$dE \int \frac{p^*}{m^*} \rho^*(E - E^*) \frac{dp^*}{h}. \quad (8.177)$$

Если мы положим, как и в (8.174),  $E^* = E_0 + \frac{p^{*2}}{2m^*}$ , то (8.177) приобретает вид

$$\frac{dE}{h} \int \rho^*(E - E_0 - E_k) dE_k. \quad (8.178)$$

Интеграл  $\int \rho^*(E - E_0 - E_k) dE_k$  равен числу уровней  $N^*$  в переходном состоянии с данной энергией возбуждения. Мы имеем

Таблица 1

| Условия, определяющие столкновение                    |  |  | Пригодный метод исследования             | Примеры  |
|---|--|--|--|--|
| относительная скорость                                | величина матричных элементов энергии взаимодействия        |  |  |  |
|   | диагональные элементы ( $V_{nn}$ )                         | недиагональные элементы ( $V_{0n}$ )   |  |  |
| Велика по сравнению со скоростью внутреннего движения | Любой величины   | Любой величины   | Приближение Борна                        | Столкновения быстрых электронов с атомами                      |
| Меньше или сравнима со скоростью внутреннего движения | Малы   | Малы   | Приближение Борна                        |  |
| То же   | Велики   | Малы   | Метод искаженных волн                    | Возбуждение молекулярных колебаний при столкновениях с атомами |
| То же   | Любой величины   | Малы, за исключением элемента $V_{0n}$ , где состояния $0$ и $n$ находятся почти в резонансе | Решение системы совместных уравнений     | Передача электронного возбуждения или заряда                   |
| То же   | Сравнимы и не малы, но скорость их изменения мала          |  | Метод возмущенных стационарных состояний | Возбуждение и ионизация медленными положительными ионами       |
| То же   | Многие элементы велики, велика также скорость их изменения |  | Метод комплекса сталкивающихся частиц    | Ядерные столкновения   |

поэтому

$$\frac{\rho(E) dE \Gamma_f}{\hbar} = \frac{dEN^*}{\hbar},$$

$$\Gamma_f = \frac{N^*}{2\pi\rho(E)} = \frac{DN^*}{2\pi}, \quad (8.179)$$

где  $D$  — расстояние между уровнями возбужденной системы. Этот результат будет использован нами в гл. XIII, § 6, при исследовании вопроса о делении ядер.

## § 9. Сводка методов исследования неупругих столкновений

Итоги нашего анализа методов исследования неупругих столкновений удобно подвести с помощью таблицы (табл. 1).

## § 10. Столкновения между двумя системами, одна из которых была вначале неподвижной

В ряде разделов этой книги (гл. V, § 3; гл. VIII, § 2, 3 и 4; гл. XV, § 3) мы определяли дифференциальное сечение  $I(\theta) d\omega$  для столкновений между двумя частицами, при которых их центр тяжести оставался неподвижным. С этой целью мы решали уравнение вида

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left( \frac{1}{2} m v^2 - V \right) \psi = 0,$$

где  $m$  — «приведенная масса» двух частиц, равная  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , а  $v$  — их относительная скорость. Если решение имеет вид

$$\psi \sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} f(\theta),$$

то

$$I(\theta) = |f(\theta)|^2.$$

Покажем теперь, как найти дифференциальное сечение в том случае, когда одна из частиц  $m_1$  первоначально оставалась неподвижной. Обозначая через  $J(\theta) d\Omega$  дифференциальное сечение для рассеяния на угол  $\theta$  внутри телесного угла  $d\Omega$ , имеем

$$J(\theta) \sin \theta = \frac{I(\theta) \sin \theta d\theta}{d\theta},$$

где

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 \sin \theta}{m_1 \cos \theta + m_2}.$$

В том частном случае, когда массы частиц одинаковы,  $\theta = \frac{\Theta}{2}$  и, следовательно [если только рассматриваемые частицы не являются одинаковыми, см. формулу (5.26)],

$$J(\theta) = I(2\theta) 4 \cos \theta.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mott, Proc. Roy. Soc., A133, 228 (1931).
2. Born, Zs. f. Phys., 37, 863 (1926); 38, 803 (1926).
3. Oppenheimer, Phys. Rev., 32, 361 (1928).
4. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta, 5, 370 (1932).
5. Jeffreys H. and Jeffreys B., Methods of Mathematical Physics, Cambridge, 1946.
6. Ландау, Sow. Phys., 2, 46 (1932).
7. Zener, Proc. Roy. Soc., A137, 696 (1932).
8. Bohr, Nature, 137, 344 (1936).
9. Бете, Физика ядра, М.—Л., 1948.
10. Breit and Wigner, Phys. Rev., 51, 593 (1937).
11. Bethe and Placzek, Phys. Rev., 51, 450 (1937).
12. Karur and Peierls, Proc. Roy. Soc., A166, 166 (1938).
13. Wigner, Phys. Rev., 70, 15 (1946); 70, 606 (1946); Wigner and Eisenbud, там же, 72, 29 (1947); Feshbach, Peaslee and Weisskopf, там же, 71, 145 (1947).
14. Breit, Phys. Rev., 69, 472 (1946).
15. Bohr, Peierls and Placzek, Nature, 144, 200 (1939).
16. Weisskopf, Phys. Rev., 52, 295 (1937).
17. Fowler, Statistical Mechanics, Cambridge, 1936.
18. Bethe, Phys. Rev., 57, 1125 (1940).
19. Pelzer and Wigner, Zs. f. phys. Chem., B15, 445 (1932).
20. Wigner, Trans. Farad. Soc., 34, 29 (1938).
21. Глестон, Лейдлер и Эйринг, Теория абсолютных скоростей реакций, М., 1948.
22. Bohr and Wheeler, Phys. Rev., 56, 426 (1939).

## СТОЛКНОВЕНИЯ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С АТОМАМИ. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ. ПРИБЛИЖЕНИЕ БОРНА

### § 1. Введение. Экспериментальные методы и результаты<sup>1)</sup>

В этой главе, а также в гл. X—XIII, мы применим общую теорию столкновений, изложенную в гл. VIII, к подробному исследованию отдельных задач. Наибольший интерес представляют задачи, относящиеся к столкновениям электронов с атомами. Теоретические вычисления дают возможность определить дифференциальное и полное сечения, соответствующие столкновениям, при которых электроны, обладающие данной скоростью  $v$ , возбуждают  $n$ -е состояние атома. Мы будем обозначать дифференциальное и полное сечения соответственно через  $I_n(\theta)$  и  $Q_n$  (см. гл. II, § 1), причем

$$2\pi \int_0^\pi I_n(\theta) \sin \theta d\theta = Q_n. \quad (9.1)$$

В случае возбуждения энергетических уровней непрерывного спектра каждый уровень характеризуется величиной  $x$ , связанной с энергией  $E_x$  данного уровня соотношением

$$E_x = \frac{x^2 \hbar^2}{8\pi^2 m}. \quad (9.2)$$

Сечение, соответствующее возбуждению уровней, лежащих в интервале между  $x$  и  $x + dx$ , обозначается при этом через  $Q_x dx$ .

Дифференциальное сечение характеризует угловое распределение рассеянных электронов, тогда как полное сечение определяет полную вероятность возбуждения данного состояния.

Так как весьма существенно, чтобы теория находилась в соответствии с практической стороной вопроса, мы остановимся прежде всего на рассмотрении различных типов экспериментальных исследований, относящихся к столкновениям электронов с атомами, и укажем на соотношения, существующие между наблюдаемыми величинами и теоретическими значениями дифференциальных и полных сечений. Опытные данные могут быть классифицированы следующим образом.

<sup>1)</sup> Подробный обзор дан в книге Месси и Бургона [1].

1. Опыты, дающие возможность наблюдать совокупность эффектов, обусловленных как упругими, так и неупругими столкновениями. Результаты этих опытов дают нам сведения только относительно величины  $Q$ . Они не могут быть использованы для определения дифференциальных сечений и разделения эффектов, соответствующих различным состояниям. Сюда относятся два типа опытов:

а) *Измерения тормозной способности вещества для быстрых электронов.* Экспериментальные методы состоят в этом случае в исследовании пробега быстрых частиц в различных материалах. Тормозная способность вещества характеризуется скоростью уменьшения кинетической энергии электрона на 1 см пути в этом веществе. Скорость изменения кинетической энергии электрона определяется уравнением

$$-\frac{dT}{dx} = N \left\{ \sum_n Q_n (E_n - E_0) + \int_{x=0}^{x_{\text{макс.}}} (E_x - E_0) Q_x dx \right\}, \quad (9.3)$$

где  $E_n$  — энергия электрона в атоме в  $n$ -м состоянии,  $E_0$  — энергия электрона в нормальном состоянии,  $E_x$  определяется соотношением (9.2),  $N$  — число атомов в 1 см<sup>3</sup> вещества, а  $x_{\text{макс.}}$  связано формулой (9.2) с максимальной энергией, которую электрон может передать атому.

В некоторых случаях этими методами можно воспользоваться для получения данных об отдельных столкновениях; наибольший интерес представляет, однако, вычисление тормозной способности вещества с помощью формулы (9.3), так как опытными данными о пробеге частицы можно воспользоваться для определения ее начальной энергии<sup>1)</sup>.

б) *Измерение полных сечений.* Если однородный пучок электронов проходит через газ, он становится диффузным; если его первоначальная энергия превышает резонансный потенциал атомов газа, он становится также неоднородным.

Пусть интенсивность электронного пучка есть  $J$ . Если каждый электрон, испытавший отклонение или потерявший при столкновении энергию, мы будем считать не принадлежащим к пучку, то убыль интенсивности пучка ( $\delta J$ ) на пути  $\delta x$  в газе при давлении  $p$  может быть записана в виде

$$\delta J = -J a p \delta x,$$

где  $a$  зависит только от природы газа и энергии пучка. Проинтегрировав это уравнение, получим интенсивность пучка, прошедшего путь  $x$ :

$$J = J_0 e^{-apx}.$$

<sup>1)</sup> См., например, [2].

Величина  $a$  может быть определена по опытным данным о зависимости интенсивности пучка электронов от его пробега в газе. Подобные опыты впервые были проведены Рамзауером [3] и были использованы им, а также различными другими исследователями для измерения  $a$  в случае всех простых газов, а также паров некоторых металлов<sup>1)</sup>.

Из определения сечения  $Q$  следует, что если  $N$  — число атомов в  $1 \text{ см}^3$  газа при нормальных условиях, то

$$a = \frac{Np'}{760} \left[ \sum_n Q_n + \int_0^{z_{\text{макс.}}} Q_x dx \right],$$

где  $p'$  — единица давления (обычно  $1 \text{ мм Hg}$ ), выраженная в единицах давления, использовавшихся при экспериментальном измерении (обычно в  $\text{мм Hg}$ ). Если сечения  $Q_n$  и  $Q_x dx$  измерены в единицах  $\pi a_0^2$ , где  $a_0$  — радиус первой борховской орбиты электрона в атоме водорода, то имеем

$$a = 3,15 \left[ \sum_n Q_n + \int_0^{z_{\text{макс.}}} Q_x dx \right].$$

В отличие от исследований тормозной способности вещества, рассматриваемый метод применим лишь к электронам с малыми и средними скоростями<sup>2)</sup> (от  $0,5$  до  $400 \text{ e}$ ); из сказанного выше следует, что этот метод дает только численное значение суммы всех сечений. Для электронов, энергии которых меньше резонансного потенциала атомов газа, эффективными будут, однако, только упругие столкновения. Для этой области энергии рассматриваемый метод дает поэтому наиболее существенные результаты.

Интересно отметить, что описанный выше экспериментальный метод определения величины  $a$  с точки зрения классической теории имел бы смысл лишь в том случае, если бы сталкивающиеся системы были определенным образом ограничены в пространстве, а наблюдаемые значения зависели бы от размеров приемной щели прибора. В квантовой теории эта трудность отсутствует, так как сечения  $Q$  определены при условии, что рассеивающее силовое поле достаточно быстро убывает с расстоянием, т. е. при условии, которому удовлетворяют все атомные поля. Это обстоятельство рассмотрено нами подробно в гл. II, в конце § 1. Подтверждающие его экспериментальные данные приведены в гл. X, § 1.

В связи с этими опытами следует упомянуть также о методе Таунсенда [7].

<sup>1)</sup> См., например, обзоры [1, 4, 5].

<sup>2)</sup> Брода [6] путем модификации обычного метода измерил коэффициент  $a$  для аргона, пользуясь электронным пучком с энергией до  $2500 \text{ e}$ .



Толкование опытных данных основано в этом случае на сложной классической теории движения электронов в газах, и применимость метода ограничивается условиями, при которых эта теория справедлива, т. е. очень малыми скоростями столкновений (для большинства газов меньше  $5v$ ). Этот метод дает нам сведения относительно сечения  $Q_0$  для значительно меньших скоростей электронов, нежели метод Рамзауера; результаты, получаемые с его помощью, представляют значительный интерес.

2. **Опыты, при которых упругие и неупругие столкновения исследуются в отдельности.** Результаты этих опытов дают нам сведения об относительных значениях различных сечений  $Q_n$  при данной начальной скорости электронов и о дифференциальных сечениях  $I_n(\theta)$  как функциях угла рассеяния, а также об изменении любого из сечений  $Q_n$  с изменением скорости столкновения. Абсолютные значения величин при этом обычно не измеряются; они могут быть, однако, определены с помощью опытов, описанных выше. Методы исследования могут быть в этом случае подразделены на две группы.

а) *Электрические методы.* В опытах этого типа производится непосредственное измерение углового распределения рассеянных электронов, т. е. определение относительных вероятностей возбуждения путем измерения силы тока, соответствующей рассеянным электронам. В случае ионизирующих столкновений абсолютное

сечение для ионизации  $\int_0^{x_{\text{макс}}} Q_x dx$  может быть определено путем

измерения положительного тока ионов, создаваемого однородным пучком электронов, пропускаемых через газ при низких давлениях.

б) *Оптические методы.* В этом случае однородный пучок электронов пропускается через газ или пар; измеряется интенсивность света, испускаемого атомами газа, возбужденными электронным пучком. Интенсивность света, соответствующая переходу атома из состояния  $n$  в состояние  $m$ , пропорциональна величине  $Q_n A_{nm}$ , где  $A_{nm}$  — вероятность оптического перехода из состояния  $n$  в состояние  $m$ . Изменение интенсивности света данной длины волны с изменением скорости возбуждающих электронов определяет зависимость  $Q_n$  от скорости столкновения, так как  $A_{nm}$  не зависит от метода возбуждения. Если  $A_{nm}$  может быть вычислено, то можно также сопоставить численные значения сечений  $Q_n$  при различных  $n$ .

Этот метод является более чувствительным, нежели электрический метод; с его помощью могут быть исследованы эффективные сечения  $Q_n$  для очень высоких возбужденных состояний.

Мы видим, таким образом, что имеющийся экспериментальный материал в достаточной степени разнообразен, чтобы можно было

иллюстрировать теоретические соотношения и проверять их применимость. С другой стороны, теория проливает свет на многие явления, которые интересны и существенны для физика-экспериментатора.

Прежде чем перейти к вычислениям дифференциальных и полных сечений, мы остановимся вкратце на выбранном нами порядке изложения. В первую очередь мы рассмотрим упругие столкновения, воспользовавшись для этого простейшими формулами — первым приближением теории Борна (см. гл. VII, § 1). Затем мы исследуем пределы применимости этих формул и усовершенствуем теорию (гл. X), воспользовавшись для этой цели методами Факсена и Хольцмарка, изложенными в гл. II. В некоторых частных случаях мы уточним теорию, введя представления об электронном обмене. Все эти вычисления не относятся к неупругим столкновениям; в более строгой теории нельзя, однако, рассматривать упругие столкновения, не учитывая в то же время столкновений неупругих; в связи с этим мы исследуем вкратце вопрос о взаимодействии неупруго и упруго рассеянных волн. Мы рассмотрим далее (гл. XI) неупругие столкновения. Как и в случае упругих столкновений, мы начнем при этом с исследования первого приближения Борна (являющегося достаточно точным для вычисления тормозной способности вещества в случае быстрых частиц), а затем изложим более точную теорию, применение которой необходимо в случае более медленных частиц.

## § 2. Упругое рассеяние. Первое приближение Борна

В гл. VII, § 1, было показано, что дифференциальное сечение  $I(\theta)$  для упругого столкновения электрона, обладающего скоростью  $v$ , со сферически симметричным силовым полем  $V(r)$  в пределах применимости первого приближения Борна определяется выражением [см. (7.12)]

$$I(\theta) = \left| \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin Kr}{Kr} V(r) r^2 dr \right|^2 \quad \left( K = \frac{4\pi m v}{h} \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (9.4)$$

Нами было также найдено соотношение между функцией (9.4) и коэффициентом рассеяния рентгеновых лучей [соотношение (7.8)]. Вычислим теперь  $I(\theta)$  для того случая, когда  $V(r)$  есть поле атома.

Если  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_Z)$  — волновая функция атома (с атомным номером  $Z$ ), то (см. гл. VIII, § 2 и 3)

$$V(r) = -e^2 \int \left( \frac{Z}{r} - \sum_{n=1}^Z \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \right) |\psi_0(\mathbf{r}_1, \dots)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_Z. \quad (9.5)$$

Волновые функции  $\psi_0$  известны аналитически лишь для очень немногих атомов, в большинстве случаев вычисление потенциала  $V(r)$  связано со сложными численными расчетами. Мы рассмотрим сперва те случаи, когда функция  $\psi_0$  известна аналитически.

### § 3. Рассеяние электронов атомами водорода и гелия

Для водорода

$$\psi_0 = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}. \quad (9.6)$$

Для гелия с достаточной степенью точности можно воспользоваться волновой функцией, полученной Хиллераасом [8] с помощью вариационного метода:

$$\psi_0 = \left( \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \right)^2 e^{-Z(r_1+r_2)/a_0} \quad (Z = 1,69). \quad (9.7)$$

Подставляя эти функции в выражение (9.5) и интегрируя, находим для водорода

$$V(r) = -e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a_0} \right) e^{-2r/a_0}, \quad (9.8a)$$

для гелия

$$V(r) = -2e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{Z}{a_0} \right) e^{-2Zr/a_0}. \quad (9.8b)$$

Подставляя эти значения  $V(r)$  в (9.4), после интегрирования получаем

$$I(\theta) = \frac{64\pi^4 m^2 e^4 A (2\lambda^2 + K^2)^2}{h^4 (\lambda^2 + K^2)^4}, \quad (9.9)$$

причем для водорода  $A = 1$ ,  $\lambda = 2/a_0$ , а для гелия  $A = 4$ ,  $\lambda = 3,36/a_0$ . С помощью формулы (9.9) легко может быть найдено угловое распределение электронов, упруго рассеянных атомами водорода и гелия. В табл. 2 приведены значения  $I(\theta)$ , вычисленные при разных значениях  $v \sin \frac{\theta}{2}$ .

Полное упругое сечение  $Q_0$  при этом равно

$$Q_0 = \int_0^\pi I(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{1024 A \pi^5 m^2 e^4 (3\lambda^4 + 18\lambda^2 k^2 + 28k^4)}{3h^4 \lambda^2 (\lambda^2 + 4k^2)^3}. \quad (9.10)$$

Как это следует из фиг. 21,  $Q_0$  является монотонной функцией  $k$ , где  $k = 2\pi m v/h$ .

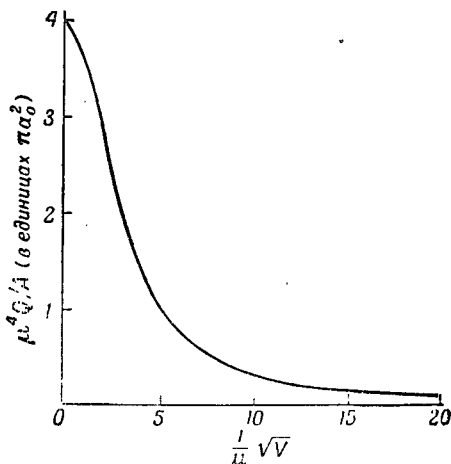
**Сравнение с опытом.** Угловое распределение электронов, упруго рассеянных атомами гелия, было измерено многими иссле-

Таблица 2

Интенсивность рассеяния электронов атомами гелия и водорода  
 (Энергия электронов  $V$  выражена в вольтах; для водорода  
 $Z=1, A=1$ ; для гелия  $Z=1,69, A=1$ .)

| $\frac{ka_0}{Z} \sin \frac{\theta}{2}$ | $\frac{\sqrt{V}}{Z} \sin \frac{\theta}{2}$ | $\frac{Z^4 I(\theta)}{A} \cdot 10^{18}, \text{ см}^2$ | $\frac{ka_0}{Z} \sin \frac{\theta}{2}$ | $\frac{\sqrt{V}}{Z} \sin \frac{\theta}{2}$ | $\frac{Z^4 I(\theta)}{A} \cdot 10^{18}, \text{ см}^2$ |
|--|--|---|--|--|---|
| 0                                      | 0  | 27,9  | 1,00                                   | 3,69                                       | 3,93  |
| 0,03                                   | 0,11                                       | 27,9  | 1,20                                   | 4,43                                       | 2,33  |
| 0,05                                   | 0,18                                       | 27,7  | 1,40                                   | 5,17                                       | 1,43  |
| 0,10                                   | 0,37                                       | 27,1  | 1,60                                   | 5,91                                       | 0,904   |
| 0,20                                   | 0,74                                       | 24,8  | 1,80                                   | 6,64                                       | 0,593   |
| 0,30                                   | 1,11                                       | 21,6  | 2,00                                   | 7,38                                       | 0,402   |
| 0,40                                   | 1,48                                       | 18,0  | 2,50                                   | 9,23                                       | 0,172   |
| 0,50                                   | 1,85                                       | 14,5  | 3,00                                   | 11,1                                       | 0,084   |
| 0,60                                   | 2,21                                       | 11,4  | 3,50                                   | 12,9                                       | 0,046   |
| 0,70                                   | 2,58                                       | 8,78  | 4,00                                   | 14,8                                       | 0,027   |
| 0,80                                   | 2,95                                       | 6,73  | 4,50                                   | 16,6                                       | 0,017   |
| 0,90                                   | 3,32                                       | 5,14  | 5,00                                   | 18,5                                       | 0,011   |

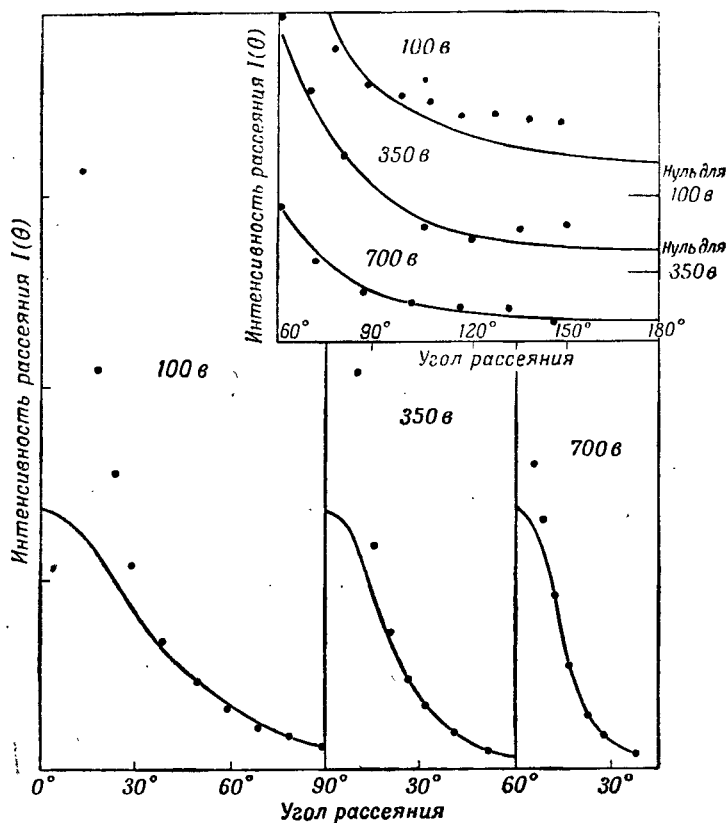
дователями [9] для электронов с энергиями от 1,8 до 700 в. На фиг. 22 экспериментальные кривые для электронов с энергиями свыше 50 в сопоставлены с теоретическими кривыми, построенными с помощью формулы (9.9). Поскольку экспериментальные данные не определяют абсолютных значений интенсивности рассеяния; на фиг. 22 выбран такой масштаб, при котором наблюдаемые и вычисленные значения совпадают для электронов с энергией 700 в. При энергиях электронов, превышающих 100 в, имеет место хорошее согласие теории с опытом в широком интервале углов рассеяния. При очень малых и очень больших углах рассеяния наблюдается, однако, заметное расхождение между теоретическими и экспериментальными данными. Для электронов, энергия которых меньше 500 в, при больших значениях углов рассеяния интенсивность рассеяния становится



Фиг. 21. Угругие сечения для водорода ( $A=1, \mu=1$ ) и гелия ( $A=4, \mu=1,687$ ).  
 $V$  дано в вольтах.

для электронов, энергия которых меньше 500 в, при больших значениях углов рассеяния интенсивность рассеяния становится

почти не зависящей от угла, вместо того чтобы убывать монотонно с возрастанием последнего. Это обстоятельство обусловлено искажением падающей волны полем атома (см. § 5). При малых



Фиг. 22. Экспериментальные (точки) и теоретические (кривые) угловые распределения электронов, рассеянных атомами гелия.

углах рассеяния изменение интенсивности, наблюдаемое при изменении угла, превышает теоретическое значение. Это обстоятельство, по всей вероятности, связано с поляризацией атома падающим электроном; подробнее этот вопрос будет рассмотрен нами в гл. X, § 1. Для электронов с энергиями ниже 100 eV согласие теории с опытом при всех значениях углов рассеяния оказывается неудовлетворительным. Причины этого обстоятельства будут рассмотрены нами в § 5, а также в гл. X, § 4, 6 и 7.

Формула Борна (9.9) приближенно справедлива, таким образом, для электронов с энергией, превышающей 100 *e*, рассеянных атомами гелия; она не является, однако, вполне точной для электронов, энергия которых ниже 500 *e*.

#### § 4. Вычисление $I(\theta)$ и $Q_0$ для сложных атомов

Существуют два метода определения поля  $V(r)$  для атомов, отличных от H и He: метод самосогласованного поля, разработанный Хартри [10], и статистический метод Томаса [11] и Ферми [12], согласно которому атомные электроны трактуются как вырожденный газ. Более точным является, конечно, метод Хартри. Применение этого метода к сложным атомам, таким, например, как атом ртути, представляет, однако, большие трудности. Для сложных атомов можно воспользоваться методом Томаса—Ферми; в этом случае он дает более точные результаты, нежели для легких атомов, так как является методом статистическим.

Определив значения потенциалов  $V(r)$  по методу Хартри, мы можем затем путем численного интегрирования определить по формуле (9.4) дифференциальные сечения для столкновений электронов с различными атомами. Впервые метод самосогласованного поля был применен для вычисления атомных факторов рассеяния  $F$  [13], характеризующих рассеяние рентгеновых лучей кристаллами; соответствующие значения фактора  $F$  для рассеяния электронов могут быть найдены с помощью соотношения

$$I(\theta) = \frac{e^4}{4m^2v^4} (Z - F)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}, \quad (9.11)$$

полученного нами в гл. VII [уравнение (7.8)]. В табл. 3 приведены значения  $I(\theta)$  как функции  $\sqrt{V} \sin \frac{\theta}{2}$  ( $V$  — энергия электрона в вольтах,  $\theta$  — угол рассеяния), вычисленные этим способом для различных атомов. Во всех случаях интенсивность рассеяния монотонно убывает при увеличении угла рассеяния. При данной скорости столкновения изменение интенсивности при изменении угла тем больше, чем меньше атомный номер рассматриваемого элемента.

**Применение метода Томаса—Ферми.** Быстрые столкновения [14]. Пользуясь методом Томаса—Ферми, мы вводим переменные  $\varphi$  и  $x$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} Ze\varphi &= rV(r), \\ x &= 2^{1/3}/3^{-2/3}\pi^{4/3}me^2h^{-2}Z^{1/3}r. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Значения  $I(\theta)$ , вычисленные по методу Хартри (для определения численных значений сечений в абсолютных единицах данные должны быть умножены 5,66 · 10<sup>-20</sup>)

| $\frac{\sin \frac{\theta}{2} \cdot 10^{-2}}{\lambda}$ | $V \bar{V} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$ | Li   | Be    | B     | C     | N     | O    | F     | Ne   | Na    | Mg    | Al    | Si    | P     | S     | Cl    | A     |
|---|---|------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1   | 1,22                                    | 6400 | 12100 | 22500 | 19600 | 14400 | 8100 | 14400 | 4900 | 18200 | 22500 | 40000 | 70000 | 67600 | 57600 | 57600 | 48400 |
| 0,2   | 2,45                                    | 900  | 2760  | 4220  | 5610  | 4900  | 4550 | 4900  | 3900 | 4900  | 7200  | 10200 | 13200 | 15600 | 17400 | 20300 | 18200 |
| 0,3   | 3,67                                    | 275  | 655   | 1180  | 1780  | 1960  | 2080 | 2560  | 2180 | 2280  | 2820  | 3400  | 4150  | 5300  | 6130  | 7410  | 7100  |
| 0,4   | 4,90                                    | 112  | 225   | 425   | 655   | 860   | 1020 | 1240  | 1220 | 1290  | 1890  | 1600  | 1830  | 2220  | 2600  | 3130  | 3380  |
| 0,5   | 6,12                                    | 64   | 108   | 196   | 295   | 415   | 540  | 645   | 700  | 772   | 830   | 900   | 1000  | 1160  | 1340  | 1520  | 1660  |
| 0,6   | 7,35                                    | 36   | 61    | 100   | 148   | 222   | 295  | 361   | 420  | 470   | 515   | 558   | 610   | 675   | 770   | 850   | 930   |
| 0,7   | 8,57                                    | 24   | 37    | 59    | 88    | 123   | 172  | 210   | 256  | 289   | 327   | 361   | 400   | 436   | 480   | 530   | 580   |
| 0,8   | 9,80                                    | 15   | 23    | 35    | 53    | 74    | 104  | 130   | 156  | 188   | 220   | 237   | 275   | 289   | 324   | 346   | 380   |
| 0,9   | 11,02                                   | 10   | 17    | 24    | 35    | 48    | 67   | 85    | 106  | 126   | 149   | 164   | 188   | 204   | 222   | 243   | 268   |
| 1,0   | 12,25                                   | 7    | 12    | 17    | 25    | 32    | 45   | 56    | 72   | 85    | 100   | 114   | 130   | 144   | 160   | 173   | 193   |
| 1,1   | 13,47                                   | 5    | 8     | 13    | 18    | 23    | 31   | 40    | 49   | 59    | 70    | 83    | 94    | 104   | 116   | 125   | 142   |

Функция  $\varphi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi^{3/2} x^{-1/2}$$

и граничным условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

Отношение  $x/r$  определяет величину, обратную «радиусу атома», и является монотонной функцией  $Z$ .

Функция  $\varphi$  была табулирована Ферми как функция от  $x$ ; с помощью ее табличных значений и соотношения (9.12) легко может быть вычислен потенциал  $V(r)$ . Подставляя  $V(r)$  в выражение для  $I(\theta)$ , получаем

$$I(\theta) = \left[ \frac{3^{4/3} h^2 Z^{1/3}}{2^{17/3} \pi^{2/3} e^2 m \mu} \int_0^\infty \varphi(x) \sin \mu x dx \right]^2, \quad (9.13)$$

где

$$\mu = \frac{3^{2/3} h v \sin \frac{\theta}{2}}{2^{7/3} \pi^{1/3} e^2 Z^{1/3}}.$$

Поскольку  $\varphi(x)$  от  $Z$  не зависит, произведение  $I(\theta) Z^{-2/3}$  должно зависеть только от  $\mu$ , т. е. только от  $Z^{-1/3} v \sin \theta/2$ . Таким образом, если мы знаем  $Z^{-2/3} I(\theta)$  как функцию  $Z^{-1/3} v \sin \theta/2$ , мы можем вычислить  $I(\theta)$  для всех атомов. В общем случае эти вычисления могут быть осуществлены только путем численного интегрирования; в частном случае больших значений  $\mu$ , соответствующем большим скоростям столкновений, можно, однако, получить приближенное явное выражение для  $I(\theta)$ . Оно имеет следующий вид [14]:

$$I(\theta) \sim \frac{Z^2 e^4 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}}{4 m^2 v^4} \left\{ 1 - 6,4 \cdot 10^{-4} \left( \frac{\operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}}{\beta} \right)^{3/2} Z^{1/2} \right\},$$

где  $\beta = v/c$ .

Отсюда следует, что в случае быстрых столкновений формула Резерфорда должна давать хорошее согласие с опытными данными. Второй член этого выражения, характеризующий влияние атомных электронов, не имеет ничего общего с поправкой, часто вводимой в формулу Резерфорда и заключающейся в подстановке  $Z^2 + Z$  вместо  $Z^2$ ; следует отметить, что при выводе этого соотношения неупругие столкновения во внимание не принимались. Подсчет показывает, что при рассеянии электронов с энергией 70 кэ атомами золота поправка <sup>1)</sup> к формуле Резерфорда составляет 25% для угла рассеяния 20°.

Для осуществления численного интегрирования необходимо протабулировать  $I(\theta) Z^{-2/3}$  как функцию  $\mu$  (т. е. как функцию

<sup>1)</sup> Без учета релятивистских эффектов.



$Z^{-1/2}v \sin \frac{\theta}{2}$ ); впервые такие расчеты для некоторых значений  $\mu$  были выполнены Митчелом [15], они были затем распространены Буллардом и Месси [14] на область значений  $\mu$  от 0 до 15. Результаты этих вычислений приведены в табл. 4.

Таблица 4

Интенсивность рассеяния, вычисленная по методу Томаса—Ферми  
(Энергия электронов  $V$  выражена в вольтах.)

| $\mu$ | $\frac{\sqrt{V}}{Z^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2}$ | $\frac{I(\theta)}{Z^{2/3}} \cdot 10^{-18}, \text{ см}^2$ | $\mu$ | $\frac{\sqrt{V}}{Z^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2}$ | $\frac{I(\theta)}{Z^{2/3}} \cdot 10^{-18}, \text{ см}^2$ |
|-------|--|--|-------|--|--|
| 0     | 0  | 2160   | 1,0   | 2,08   | 18,7   |
| 0,03  | 0,062  | 2120   | 1,5   | 3,12   | 6,43   |
| 0,05  | 0,104  | 2010   | 2,0   | 4,16   | 2,52   |
| 0,1   | 0,208  | 1460   | 3,0   | 6,25   | 0,61   |
| 0,2   | 0,41   | 678  | 5,0   | 10,4   | 0,089  |
| 0,3   | 0,62   | 344  | 6,0   | 12,5   | 0,046  |
| 0,4   | 0,83   | 202  | 7,0   | 14,6   | 0,026  |
| 0,5   | 1,04   | 122  | 8,0   | 16,7   | 0,016  |
| 0,6   | 1,25   | 79   | 9,0   | 18,7   | 0,010  |
| 0,7   | 1,46   | 54   | 10,0  | 20,8   | 0,0064   |
| 0,8   | 1,66   | 44,0   | 12,0  | 25,0   | 0,0032   |
| 0,9   | 1,87   | 29,6   | 15,0  | 31,2   | 0,0013   |

Сопоставляя эти данные со значениями  $Z^{-2/3}I(\theta)$ , полученными по методу Хартри, мы видим, что для более тяжелых атомов оба метода дают эквивалентные результаты; однако для более легких атомов, в частности для атомов, обладающих аномальными размерами, таких, например, как атомы благородных газов и щелочных металлов, между ними наблюдаются расхождения. Статистический метод не принимает, конечно, во внимание индивидуальных различий между атомами и не может быть поэтому применен к ним вполне удовлетворительным образом.

Значения полных сечений могут быть найдены путем повторного численного интегрирования. Легко показать при этом, что  $QZ^{-2/3}$  зависит только от  $vZ^{-1/2}$ . Ход этой функции изображен на фиг. 23; существенно отметить, что эффективное сечение является монотонной функцией скорости.

### § 5. Применимость первого приближения Борна

Точная формула, определяющая дифференциальное сечение, имеет вид [см. формулу (2.17)]

$$I(\theta) d\omega = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (e^{2i\eta_n} - 1) P_n(\cos \theta) \right|^2 d\omega. \quad (9.14)$$

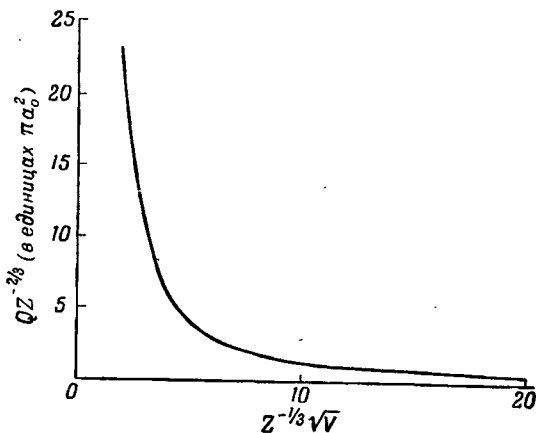
В гл. VII, § 2, было показано, что формула Борна может быть записана в виде

$$I(\theta) d\omega = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n P_n(\cos \theta) \right|^2 d\omega, \quad (9.15)$$

где

$$\zeta_n = -\frac{4\pi^3 m}{h^2} \int_0^{\infty} V(r) \left[ J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]^2 r dr. \quad (9.16)$$

Эти формулы давали бы тождественные результаты, если бы множитель  $(e^{2i\eta_n} - 1)$  мог быть заменен множителем  $2i\zeta_n$ . Ясно,



Фиг. 23. Полное упругое сечение, вычисленное по методу Томаса—Ферми.

$V$  дано в вольтах.

однако, что такая замена может быть осуществлена только в случае малых значений  $\zeta_n$ ; в гл. II, § 2, было показано, что при этих условиях  $\zeta_n$  является хорошим приближением к  $\eta_n$ . Условие применимости формулы Борна при любых значениях угла  $\theta$  имеет, таким образом, следующий вид:

$$\frac{4\pi^3 m}{h^2} \int_0^{\infty} V(r) \left[ J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]^2 r dr \ll 1 \text{ при всех } n. \quad (9.17)$$

Если это условие удовлетворяется для большинства значений  $n$ , играющих существенную роль при вычислении суммы (9.14), то мы можем ожидать, что при малых углах рассеяния приближение Борна также останется справедливым. Этот вопрос уже был рассмотрен нами в гл. VII, § 5, где было показано, что для применимости приближения Борна должно выполняться нера-

ВЕНСТВО

$$V \left( \frac{1}{k\theta} \right) \ll E\theta, \quad (9.18)$$

где  $E$  — кинетическая энергия падающих частиц.

Таблица 5

Точные и приближенные значения фаз  
Для гелия

| $ka_0$ | Энергия электронов, $\epsilon$ | $\eta_0$        |          | $\eta_1$        |                  | $\eta_2$        |          | Число членов |
|--------|--------------------------------|-----------------|----------|-----------------|------------------|-----------------|----------|--------------|
|        |                                | точное значение | по Борну | точное значение | по формуле Борна | точное значение | по Борну |              |
| 1,05   | 15                             | 1,360           | 0,565    | 0,052           | 0,042            | 0,0065          | 0,0054   | 1            |
| 1,92   | 50                             | 1,093           | 0,734    | 0,186           | 0,148            | 0,0411          | 0,0329   | 4            |
| 3,00   | 122                            | 0,898           | 0,731    | 0,272           | 0,224            | 0,0946          | 0,0769   | 6            |
| 4,00   | 215                            | 0,784           | 0,687    | 0,301           | 0,264            | 0,1304          | 0,1130   | 8            |
| 5,00   | 340                            | 0,696           | 0,638    | 0,308           | 0,274            | 0,1524          | 0,1378   | 10           |

Для водорода

| $ka_0$ | Энергия электронов, $\epsilon$ | $\eta_0$        |                  | Число членов |
|--------|--------------------------------|-----------------|------------------|--------------|
|        |                                | точное значение | по формуле Борна |              |
| 1,0    | 13,5                           | 0,905           | 0,596            | 1            |
| 2,0    | 54                             | 0,694           | 0,602            | 3            |
| 3,0    | 122                            | 0,568           | 0,534            | 5            |
| 4,0    | 215                            | 0,490           | 0,472            | 6            |
| 5,0    | 340                            | 0,432           | 0,422            | 8            |

В табл. 5 сопоставлены точные значения фаз  $\eta_n$  для электронов с различными энергиями при рассеянии их в водороде и гелии<sup>1)</sup> с приближенными значениями  $\zeta_n$ , вычисленными из (9.16) с помощью формулы

$$\zeta_n = \frac{4\pi^2 m e^2}{k h^2} \left( 1 - \frac{Z}{2} \frac{\partial}{\partial Z} \right) Q_n \left( \frac{2Z^2 + k^2 a_0^2}{k^2 a_0^2} \right), \quad (9.19)$$

где  $Q_n$  — шаровая функция второго рода. Эта формула дает, в частности,

$$\zeta_0 = \frac{2\pi^2 m e^2}{k h^2} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{k^2 a_0^2}{Z^2} \right) + \frac{k^2 a_0^2}{Z^2 + k^2 a_0^2} \right\}.$$

<sup>1)</sup> Расчеты были выполнены Макдугаллом [16] путем численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

В табл. 5 указано также число членов, которое необходимо учесть при вычислении  $I(\theta)$  по точной формуле (9.14)<sup>1)</sup>.

Из данных табл. 5 следует, что рассматриваемое приближение является достаточно точным для электронов с энергией больше 100 эв в случае рассеяния в гелии и для электронов с энергией больше 75 эв при рассеянии в водороде. Это заключение находится в согласии с опытными данными, упомянутыми выше в § 3.

В табл. 6 приведены некоторые значения  $\zeta_0$  для тяжелых благородных газов, найденные путем численного интегрирования выражения (9.16) с помощью метода Томаса — Ферми.

Таблица 6

| Газ          | Энергия, э | $\zeta_0$ | $n$ | Энергия, э | $\zeta_0$ | $n$ |
|--------------|------------|-----------|-----|------------|-----------|-----|
| Неон . . .   | 20         | 4,5       | 2   | 2000       | 2,0       | 10  |
| Аргон . . .  | 30         | 5,6       | 4   | 3000       | 2,9       | 20  |
| Криптон . .  | 48         | 8,8       | 5   | 4800       | 4,65      | 30  |
| Ксенон . . . | 64         | 11,5      | 6   | 6400       | 6,1       | 40  |

В табл. 6 указаны также приближенные значения необходимого числа членов  $n$  в разложении (9.14). Из этих данных следует, что формула Борна должна давать достаточно хорошее приближение примерно при 1000 эв в случае неона и аргона и, возможно, также и для криптона, тогда как случай ксенона является более сомнительным.

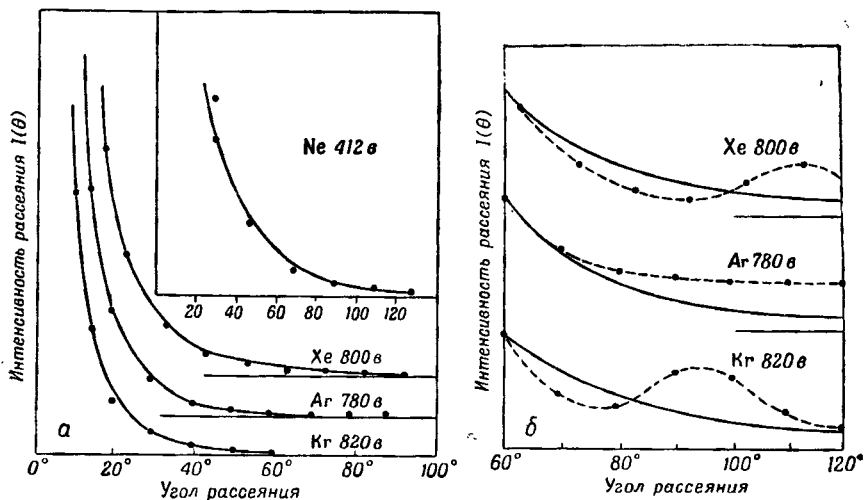
При достаточно больших значениях энергии электронов формула Борна становится вполне точной — все фазы малы. По мере уменьшения энергии численные значения фаз возрастают. В общем случае при данной энергии электронов они уменьшаются с ростом  $n$ ; при этом первая фаза настолько велика, что уже не может быть вычислена достаточно точно с помощью формулы (9.16). При этих условиях мы можем записать:

$$I(\theta) = \left| \left\{ I_b(\theta) \right\}^{1/2} + \frac{1}{2ik} \left( e^{2i\gamma_0} - 1 - 2i\zeta_0 \right) \right|^2, \quad (9.20)$$

где  $I_b$  — интенсивность рассеяния, вычисленная по формуле Борна. Отклонения от формулы Борна становятся наиболее заметными при малых значениях  $I_b(\theta)$ , т. е. при больших углах рассеяния. Поскольку поправочный член не должен зависеть от величины

<sup>1)</sup> Для этих легких атомов критерий (9.18) не является достаточно точным для определения тех значений углов, при которых приближение Борна применимо для любой энергии электронов.

угла, следует ожидать, что интенсивность рассеяния будет отличаться от интенсивности, определенной в приближении Борна, прежде всего при больших значениях углов, оставаясь при этом почти постоянной, вместо того чтобы монотонно убывать. Возвращаясь к фиг. 22, мы видим, что в случае гелия различие между экспериментальными и теоретическими кривыми при больших



Фиг. 24. Экспериментальные (точки и пунктирные кривые) и теоретические (сплошные кривые) угловые распределения электронов, рассеянных атомами благородных газов.

а—малый угол рассеяния; б—большой угол рассеяния.

углах рассеяния носит именно такой характер. По мере уменьшения энергии электронов от 700 до 100 эв расхождение между опытными и теоретическими данными становится при этом все более и более существенным.

Для достаточно тяжелых атомов при уменьшении энергии электронов начинает сказываться отличие множителей  $(e^{2i\zeta_1} - 1)$ ,  $(e^{2i\zeta_2} - 1)$  и т. д. от  $2i\zeta_1$ ,  $2i\zeta_2$  и т. д. В этом случае отклонения от формулы Борна при больших углах рассеяния становятся более сложной функцией величины угла. Фиг. 24 иллюстрирует экспериментальные данные, полученные Арно [17] для рассеяния электронов атомами тяжелых благородных газов. В случае неона формула Борна дает, как мы видим, хорошие результаты для всей исследованной области углов ( $15-120^\circ$ ), тогда как для аргона, криптона и ксенона она оказывается применимой только для углов, меньших  $80^\circ$ ; при больших углах рассеяния для этих тяжелых газов наблюдаются некоторые отклонения от теоретических значений  $I(\theta)$  (см. фиг. 24, б). Характер этих отклонений

свидетельствует о том, что если в случае аргона они связаны только с членом нулевого порядка, то в случае криптона и ксенона они обусловлены также и членами более высокого порядка. По мере уменьшения энергии падающих электронов интервал значений углов, для которого формула Борна оказывается справедливой, как и следовало ожидать, сужается. Так, например, в случае неона для электронов с энергией 200 эв при углах рассеяния, превышающих  $90^\circ$ , она уже несправедлива. Согласие теории с опытом является, таким образом, весьма удовлетворительным.

### § 6. Многократное рассеяние

До сих пор речь шла об угловом распределении электронов, испытавших только однократное рассеяние. Во многих случаях наблюдаемое на опыте распределение является, однако, средним распределением, возникающим в результате многократного рассеяния электронов. Таким образом, обычно оказывается значительно более удобным наблюдать многократное, а не однократное рассеяние на малые углы. Далее, влияние многократного рассеяния на кривизну треков электронов в камере Вильсона часто может быть настолько существенным, что оно может полностью замаскировать влияние приложенного внешнего магнитного поля. Поэтому важно рассмотреть явление многократного рассеяния несколько более подробно.

Простая трактовка этого явления, предложенная Вильямсом [18], очень ясно вскрыла его основные особенности. Рассмотрим пучок электронов со скоростью  $v$ , падающий на фольгу толщиной  $t$ , содержащую в  $1 \text{ см}^3$   $N$  атомов с атомным номером  $Z_1$ . Вероятность того, что электрон испытает при этом однократное отклонение на угол, лежащий в интервале между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , определится выражением вида

$$P(\theta) d\theta = 2\pi N t I(\theta) \sin \theta d\theta \approx \frac{8\pi N t Z_1^2 e^4 d\theta}{m^2 v^4 \gamma^2 \theta^3}, \quad (9.21)$$

где

$$\gamma^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1},$$

при условии, что угол рассеяния мал, экранирующим влиянием атомных электронов можно пренебречь, и

$$\frac{Ze^2}{\hbar c} \ll 1$$

[см. формулу (4.42)].

Введем теперь в рассмотрение такой угол  $\theta_1$ , чтобы вероятность отклонения на угол, превышающий  $\theta_1$ , равнялась единице. В таком случае

$$\theta_1^2 \approx x, \quad (9.22)$$

где

$$\chi = \frac{4\pi N t Z^2 e^4}{m^2 v^4 \gamma^2}. \quad (9.23)$$

Благодаря быстрому возрастанию вероятности рассеяния по мере уменьшения угла большое число столкновений будет приводить к отклонениям на углы, значительно меньшие, нежели  $\theta_1$ . В связи с этим результирующее отклонение приближенно будет подчиняться закону распределения Гаусса, а именно:

$$P_1(\alpha) d\alpha = \frac{2}{\pi \bar{\alpha}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\bar{\alpha}^2}\right) d\alpha, \quad (9.24)$$

где  $\bar{\alpha}$  — среднее арифметическое, а  $\bar{\alpha}^2$  — среднее значение квадрата  $\alpha$ . Величина  $\bar{\alpha}^2$  представляет собой сумму квадратов значений отдельных отклонений; согласно (9.21) и (9.22), она равна

$$\bar{\alpha}^2 = \int_0^{\theta_1} \theta^2 P(\theta) d\theta = 2\chi [\ln \theta]_0^{\theta_1}. \quad (9.25)$$

Для получения конечного результата следует учесть экранирующее влияние атомных электронов. Последнее уменьшает рассеяние на углы, меньшие  $\theta_{\text{мин.}}$ , до незначительной величины. Численное значение  $\theta_{\text{мин.}}$  может быть при этом различным в зависимости от того, справедливо ли приближение Борна или же классическое приближение, т. е. в зависимости от того, выполняется ли неравенство

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1$$

или же неравенство

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1.$$

Если  $a$  — эффективное расстояние от ядра, на котором экранирующее влияние атомных электронов становится существенным, то, как это показано в гл. VII, § 5,

$$\theta_{\text{мин.}} \approx \frac{h}{2\pi m v \gamma a} \quad \left(\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1\right), \quad (9.26)$$

$$\theta_{\text{мин.}} \approx \frac{Ze^2}{m v^2 \gamma a} \quad \left(\frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1\right). \quad (9.27)$$

Для электронов формула (9.26) является обычно достаточно хорошим приближением; она дает

$$\bar{\alpha}^2 = 2\theta_1^2 \ln \frac{2\pi m v \gamma a \theta_1}{h}. \quad (9.28)$$

Рассеяние остается многократным для углов, меньших  $\theta_2$ , где

$$P_1(\theta_2) = P(\theta_2).$$

Для того чтобы приближение отвечало тому случаю, когда среднее отклонение почти полностью обусловлено многократным рассеянием, должно быть

$$\theta_2 > \bar{\alpha} > \theta_1.$$

Это означает, что

$$\theta_1 \gg \theta_{\text{мин.}}$$

или, согласно (9.26) и (9.22),

$$\frac{16\pi^3 N t Z^2 e^4 a^2}{\hbar^2 v^2} \gg 1. \quad (9.29)$$

Согласно статистической модели атома по Томасу — Ферми,  $a$  — величина порядка  $Z^{-1/3} a_0$ , так что условие (9.29) приобретает вид

$$\frac{N t Z^{4/3}}{\beta^2} \gg \frac{\pi m^2 c^2}{\hbar^2} = 0,52 \cdot 10^{20},$$

где  $\beta = v/c$ .

Для того чтобы получить более определенное значение экранирующего расстояния, отметим, что при применении метода Томаса — Ферми  $I(\theta) Z^{-2/3}$  является функцией  $Z^{-1/3} m v \gamma \sin \frac{\theta}{2} / \hbar$ , численные значения которой приведены в табл. 4. Для малых углов  $\theta$  мы можем записать

$$I(\theta) = \frac{4^2 e^4}{m^2 v^4 \gamma^2 \theta^4} g \left( \frac{Z^{-1/3} m v \gamma a_0 \theta}{\hbar} \right). \quad (9.30)$$

$\theta_{\text{мин.}}$  определяется соотношением

$$\int_0^{\theta_1} g \left( \frac{Z^{-1/3} m v \gamma a_0 \theta}{\hbar} \right) d(\ln \theta) = \ln \left( \frac{\theta_1}{\theta_{\text{мин.}}} \right). \quad (9.31)$$

Численное интегрирование дает:

$$\theta_{\text{мин.}} = \frac{2,10 \cdot Z^{1/3} \hbar}{m v \gamma a_0} = \frac{0,0153 Z^{1/3}}{\beta \gamma}, \quad (9.32)$$

так что (9.28) приобретает вид

$$\bar{\alpha}^2 = 2\theta_1^2 \ln(65,3\beta\gamma Z^{-1/3}\theta_1). \quad (9.33)$$

Если  $I(\theta)$  вычислено по методу Хартри (табл. 3), то численное значение коэффициента несколько отличается от 2,10. Однако, поскольку последнее фигурирует только под знаком логарифма, применение метода Томаса — Ферми обычно (за исключением случая наиболее легких атомов) не приводит к серьезным ошибкам.

Вильямс вычислил  $\theta_{\text{мин.}}$  также и для того случая, когда доминирующую роль играет классическое рассеяние. Воспользовав-



пись снова методом Томаса — Ферми, он нашел, что при этом

$$\theta_{\text{мин.}} = \frac{3,8Z^{4/3}e^2}{mv^2\gamma_0}. \quad (9.34)$$

Важным приложением теории многократного рассеяния является ее приложение к исследованию треков быстрых частиц в камере Вильсона. В этом случае наблюдается не угол  $\theta$ , а его проекция  $\varphi$  на плоскость, перпендикулярную к линии прицела. С помощью метода, совершенно аналогичного описанному выше, было найдено, что среднее значение квадрата проекции угла рассеяния  $\bar{\delta}^2$  равно

$$\bar{\delta}^2 = \frac{4\pi NxZ^2e^4}{m^2v^4\gamma^2} \ln \left( \frac{\varphi_{\text{макс.}}}{\varphi_{\text{мин.}}} \right), \quad (9.35)$$

где

$$\varphi_{\text{мин.}} = \frac{1,75Z^{1/3}\hbar}{mv\gamma_0} = \frac{0,0128Z^{1/3}}{\beta\gamma}.$$

Здесь  $x$  — длина трека, а  $\varphi_{\text{макс.}}$  — максимальное значение угла  $\varphi$  (около 0,1 радиана). Это соответствует радиусу кривизны  $\rho_s$  трека, равному [19]

$$\rho_s = \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{x}{\delta^2}. \quad (9.36)$$

Более строгая теория многократного рассеяния была дана Гаудсмитом и Саундерсоном [20], показавших, что более простая изложенная выше теория справедлива с точностью до нескольких процентов.

Пусть  $p(\theta) d\omega$  есть вероятность того, что при столкновении частица рассеивается внутри телесного угла  $d\omega$ , т. е.

$$p(\theta) = \frac{I(\theta)}{Q},$$

где  $Q$  — полное сечение. Представим  $p(\theta)$  в виде ряда

$$p(\theta) = \sum (2n+1) f_n P_n(\cos \theta). \quad (9.37)$$

После двух столкновений вероятность нахождения частицы внутри телесного угла  $d\omega$  с направлением  $(\theta, \varphi)$  определится выражением вида

$$p_2(\theta) d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{p(\theta_1)}{2\pi} \frac{p(\theta_2)}{2\pi} \sin \theta_1 \sin \theta d\theta_1 d\varphi_1 d\theta d\varphi, \quad (9.38)$$

где

$$\cos \theta_2 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi).$$

Воспользовавшись формулой

$$P_n(\cos \theta_2) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta_1) + \sum \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_1) \cos m(\varphi - \varphi_1),$$

находим

$$p_2(\theta) = \sum (2n+1) (f_n)^2 P_n(\cos \theta). \quad (9.39)$$

В общем случае после  $s$  столкновений имеем

$$p_s(\theta) = \sum (2n+1) (f_n)^s P_n(\cos \theta). \quad (9.40)$$

Если  $W(s)$  есть вероятность того, что частица испытает  $s$  столкновений, то функция углового распределения при многократном рассеянии дается выражением вида

$$p_m(\theta) = \sum W_s p_s(\theta).$$

Полагая, что имеет место распределение Пуассона

$$W_s = \frac{e^{-\nu} \nu^s}{s!}, \quad (9.41)$$

где  $\nu$  — вероятность отдельного столкновения, имеем

$$p_m(\theta) = \sum (2n+1) \exp[-\nu(1-f_n)] P_n(\cos \theta). \quad (9.42)$$

Для рассеяния полем Томаса — Ферми Гаудсмит и Саундерсон получили

$$\exp[-\nu(1-f_n)] = \exp \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \times \left[ \ln \left( \frac{1}{2} \theta_{\text{мин.}} \right) - \sum_2^n s^{-1} \right] \right\}, \quad (9.43)$$

где  $\theta_{\text{мин.}}$  определяется формулой (9.32).

Воспользовавшись формулами (9.42) и (9.43), можно показать с большой степенью точности, что распределение при многократном рассеянии является гауссовым, причем

$$\overline{\alpha_1^2} = 2\kappa \ln \left( \frac{0,64\theta_1}{\theta_{\text{мин.}}} \right). \quad (9.44)$$

Этот результат интересно сопоставить с результатом, полученным Вильямсом:

$$\overline{\alpha_1^2} = 2\kappa \ln \left( \frac{\theta_1}{\theta_{\text{мин.}}} \right).$$

Наиболее полное исследование многократного рассеяния быстрых электронов было осуществлено Кульчицким и Латышевым [21]. Последние использовали однородные пучки электронов с энергией 2,25 Мэв, рассеиваемые фольгой; ток после рассеяния регистрировался с помощью счетчиков. В табл. 7 сопоставлены полученные при этом опытные данные с результатами теории Вильямса и Гаудсмита и Саундерсона. Из таблицы следует, что обе теории приводят к почти одинаковым результатам. Во всех случаях, за исключением случая трех наиболее тяжелых элементов, согла-

ние теории с опытом является очень хорошим; в особенности это относится к более строгой теории при условии, что угол  $\theta_1$  определен не в классическом приближении, но в приближении Борна. Этого и следовало ожидать, поскольку во всех этих случаях  $Ze^2/\hbar v$  значительно меньше единицы<sup>1)</sup>.

Таблица 7

Сопоставление экспериментальных и теоретических значений полуширины кривой распределения при многократном рассеянии электронов с энергией 2,25 Мэв

| Элемент | M <sup>1)</sup> | Ze <sup>2</sup> /ħv | Полуширина гауссовой кривой распределения (в градусах) |                          |                   |  |
|---------|-----------------|---------------------|--|--------------------------|-------------------|--|
|         |                 |                     | экспериментальные значения                             | По теории Вильямса       |                   | По теории Гаудемита и Саулдерсона; приближение Борна |
|         |                 |                     |  | классическое приближение | приближение Борна |  |
| Al      | 60,2            | 0,10                | 9,50   | 12,1                     | 9,8               | 9,4  |
| Fe      | 41,4            | 0,20                | 9,60   | 11,9                     | 9,9               | 9,6  |
| Cu      | 46,8            | 0,22                | 10,40  | 10,4                     | 11,05             | 10,5   |
| Mo      | 36,6            | 0,32                | 10,25  |                          | 10,75             | 10,35  |
| Ag      | 35,1            | 0,36                | 10,20  |                          | 10,80             | 10,30  |
| S       | 34,2            | 0,37                | 10,65  | 11,9                     | 10,90             | 10,65  |
| Ta      | 28,7            | 0,55                | 9,85   |                          | 11,00             | 10,95  |
| Au      | 29,4            | 0,60                | 9,9  |                          | 11,40             | 11,35  |
| Pb      | 26,1            | 0,62                | 9,7  | 10,6                     | 10,85             | 10,85  |

1)  $M = \frac{2\hbar^2}{m^2c^2} \frac{NZ^4/s}{\beta^2}$ . Теория Вильямса применима в том случае, когда эта величина много больше единицы [см. (9.29)].

Для наиболее тяжелых из исследованных элементов теоретическое значение полуширины кривой распределения на 10—15% превышает ее экспериментальное значение. Точное согласие теории с опытом в этом случае и не должно, однако, иметь места, поскольку для этих элементов формула (9.21) уже не дает достаточно хорошего приближения для учета релятивистских эффектов.

Эти общие заключения подтверждаются также работами других исследователей. В более ранних работах [22], использовавших для измерений камеру Вильсона, расхождение между теоретическими и экспериментальными данными было несколько большим; в наиболее современных исследованиях Олсона, Чао и Крейна [23], также основанных на применении камеры Вильсона, это расхождение уменьшилось, однако, примерно до той же величины, что и в работе Кульчицкого и Латышева.

<sup>1)</sup> В отличие от случая многократного рассеяния  $\alpha$ -частиц (см. гл. XII, § 2), когда  $Ze^2/\hbar v \gg 1$  и наилучшие результаты дает классическое приближение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Massey and Burhop, *Electronic and Ionic Impact Phenomena*.
2. Blackett and Occhialini, *Proc. Roy. Soc.*, A139, 699 (1933).
3. Ramsauer, *Ann. d. Phys.*, 64, 513 (1921).
4. Kollath, *Phys. Zs.*, 31, 985 (1931).
5. Brode, *Rev. Mod. Phys.*, 5, 258 (1933).
6. Brode, *Phys. Rev.*, 39, 547 (1932).
7. Townsend, *Phil. Mag.*, 42, 873 (1921).
8. Hylleraas, *Zs. f. Phys.*, 54, 347 (1929).
9. Dymond and Watson, *Proc. Roy. Soc.*, A122, 571 (1929);  
McMillen, *Phys. Rev.*, 36, 1034 (1930); Bullard and Massey,  
*Proc. Roy. Soc.*, A133, 657 (1931); Ramsauer and Kollath,  
*Ann. d. Phys.*, 12, 529 (1932); Werner, *Proc. Roy. Soc.*, A134,  
202 (1932); Hughes, McMillen and Webb, *Phys. Rev.*,  
41, 154 (1932); Mohr and Nicoll, *Proc. Roy. Soc.*, A138, 229,  
469 (1932).
10. Hartree, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 24, 89, 141, 426 (1927).
11. Thomas, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 23, 542 (1926).
12. Fermi, *Zs. f. Phys.*, 48, 73 (1928).
13. James and Brindley, *Zs. f. Crystall.*, 78, 470 (1931).
14. Bullard and Massey, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 26, 556 (1930).
15. Mitchell, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15, 520 (1929).
16. Macdougall, *Proc. Roy. Soc.*, A136, 549 (1932).
17. Arnot, *Proc. Roy. Soc.*, A133, 615 (1931).
18. Williams, *Proc. Roy. Soc.*, A169, 531 (1938); *Phys. Rev.*, 58, 292  
(1940); *Rev. Mod. Phys.*, 17, 217 (1945).
19. Bethe, *Phys. Rev.*, 70, 821 (1946).
20. Goudsmit and Saunderson, *Phys. Rev.*, 57, 24 (1940); 58,  
39 (1940).
21. Кульчицкий и Латышев, *Phys. Rev.*, 61, 260 (1942).
22. Oleson, Chao, Halpern and Crane, *Phys. Rev.*, 56, 482,  
1171 (1939); Sheppard and Fowler, там же, 57, 273 (1940).
23. Oleson, Chao and Crane, *Phys. Rev.*, 60, 378 (1941).

## УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ МЕДЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ АТОМАМИ

### § 1. Эффекты Рамзауера и Таунсенда

Как было показано в гл. IX, § 5, первое приближение Борна неприменимо к рассмотрению столкновений медленных электронов с атомами; опытные данные ясно указывают в этом случае на необходимость построения более строгой теории.

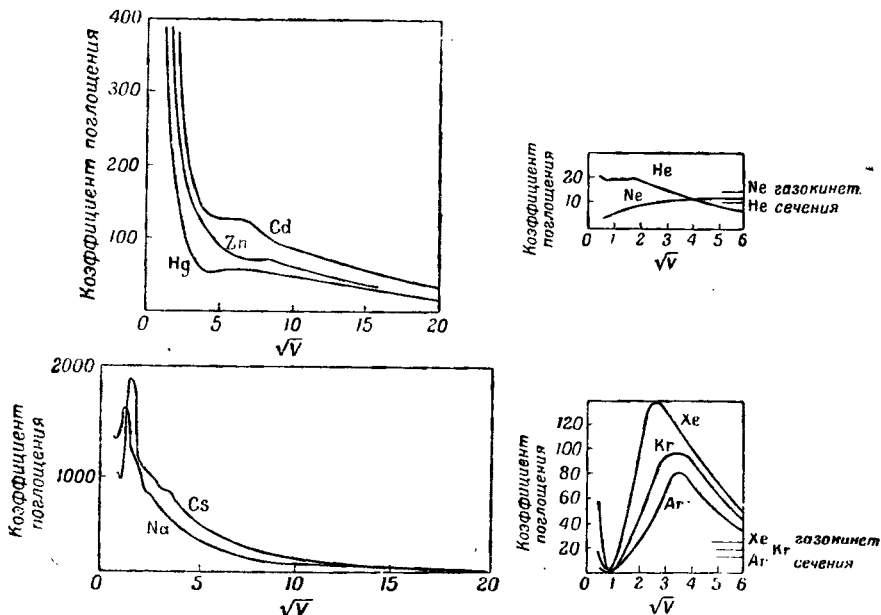
В 1921 г., исследуя свободные пробеги очень медленных (с энергией от 0,75 до 1,1 *e*) электронов в различных газах, Рамзауер [1] нашел, что в аргоне длины свободных пробегов таких электронов значительно больше, чем это следует из кинетической теории газов. Распространение измерений на более широкий интервал скоростей [2] привело к обнаружению удивительного изменения величины эффективного сечения при изменении скорости электронов. Было найдено, что эффективное сечение (обратно пропорциональное длине свободного пробега) атомов аргона возрастает с уменьшением скорости электронов до тех пор, пока энергия электронов не становится меньше 10 *e*. При дальнейшем уменьшении энергии электронов эффективное сечение уменьшается, достигая малых значений, полученных в предыдущих опытах. Независимо от этих наблюдений, Таунсенд и Бэйли [3] исследовали зависимость свободного пробега от скорости для электронов с энергиями между 0,2 и 0,8 *e* и показали, что максимум длины свободного пробега лежит при этом около 0,39 *e*. Это значение было также получено в более поздней работе Рамзауера и Коллата [4].

Вслед за опубликованием результатов этих классических опытов было исследовано большое количество газов и паров для широкого интервала скоростей электронов<sup>1)</sup>. Результаты, полученные для некоторых одноатомных газов и паров, приведены на фиг. 25, иллюстрирующей зависимость эффективного сечения от скорости электронов. Для сравнения указаны также значения газокинетического сечения.

Характерной чертой кривых зависимости эффективного сечения от скорости является большое разнообразие их относительных размеров и формы, а также заметная аналогия поведения сходных атомов, например атомов тяжелых благородных газов, с одной

<sup>1)</sup> См., например, обзоры [5—8].

стороны, и паров щелочных металлов—с другой. Вначале эти явления не имели удовлетворительного объяснения, но с появлением квантовой механики тотчас же возникло предположение, что все эти эффекты—диффракционного характера. Бором было предложено общее объяснение наличия минимального значения эффективного сечения, наблюдаемого в благородных газах



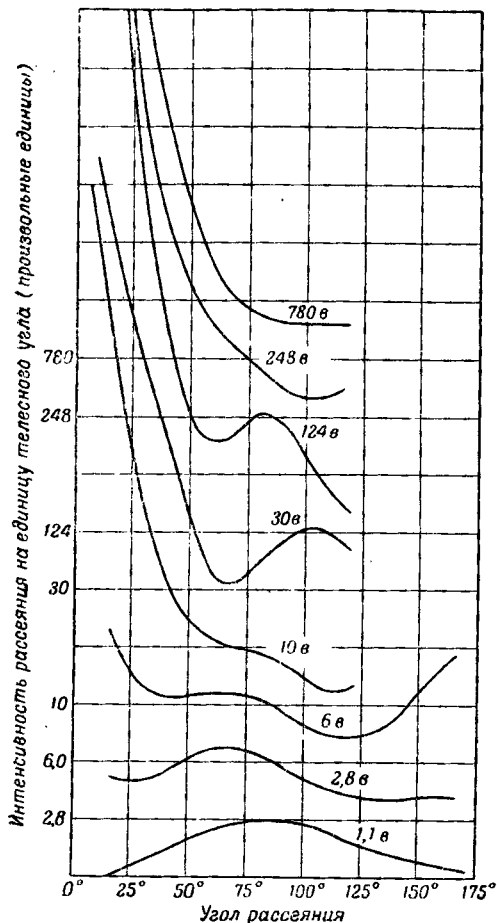
Фиг. 25. Наблюдаемые зависимости эффективных сечений от скорости электрона.

$V$  дано в вольтах.

вблизи  $0,7v$ . Поле атома благородного газа убывает с расстоянием несравненно быстрее, чем поле какого-либо другого атома, и можно ожидать, что во многих отношениях оно весьма сходно со сферической потенциальной ямой, рассмотренной нами в гл. II, § 3. Было показано, что такая яма может быть достаточно глубокой для того, чтобы в ней поместилась одна или несколько длин волн, отвечающих моменту количества движения, равному нулю, не влияя при этом заметным образом на волны, отвечающие большим значениям момента количества движения. Наблюдатель, находящийся на большом расстоянии от атома, не обнаружит в таком случае никакого рассеяния.

Убедительное экспериментальное доказательство волновой природы рассматриваемых явлений было получено в результате измерения угловых распределений упруго рассеянных электронов.

Впервые подобные измерения были произведены Буллардом и Месси [9] для электронов с энергиями между 4 и 40 в, рассеянных атомами аргона. В отличие от кривых, отвечающих



Фиг. 26. Наблюдаемые угловые распределения электронов, упруго рассеянных атомами аргона.

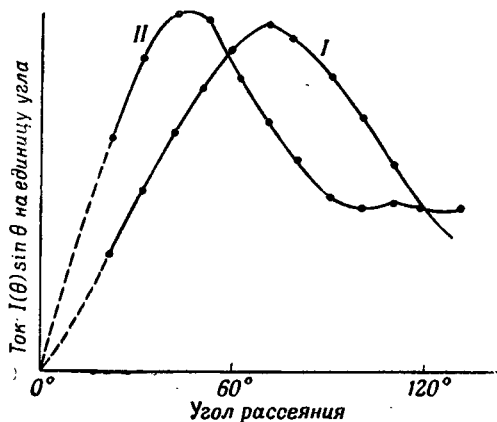
Цифры по оси ординат указывают нулевые уровни для соответствующих кривых.

первому приближению Борна, для которых характерно монотонное убывание интенсивности при увеличении угла рассеяния, кривые, полученные Буллардом и Месси, обладают максимумами и минимумами. На фиг. 26 приведена серия таких кривых для аргона, полученных при увеличении скорости электронов от 1,1 до 780 в; эти кривые постепенно переходят в кривые, даваемые первым приближением теории Борна. Для быстрых электронов (с энергиями от 42 до 780 в) измерения были произведены Арно [10], для медленных (с энергией 1,1 и 2,8 в) — Рамзауером и Коллатом [11]. Аналогичные опыты были осуществлены для многих газов в широком интервале энергий электронов; найдено, что в большинстве случаев максимумы и минимумы интенсивности рассеяния соответствуют некоторому определенному интервалу скоростей [7; 8]. Для легких газов, например водорода и гелия, этот интервал мал (до 15 в в гелии и 6 в в водороде), тогда как

в случае ртути заметные максимумы и минимумы интенсивности наблюдаются вплоть до наиболее высоких значений скорости (800 в). Отсюда следует, что волновая природа электрона играет существенную роль в более широкой области скоростей, чем это можно

было бы предполагать на основании результатов измерений эффективных сечений.

Интересно сопоставить опытные данные об угловом распределении рассеянных электронов с теоретическими соотношениями



Фиг. 27. Конечное рассеяние на малые углы. I—кривая для электронов с энергией 6e, рассеянных атомами неона; II—для электронов с энергией 7e, рассеянных молекулами азота.

(гл. VII, § 1), согласно которым функция  $2\pi I(\theta) \sin \theta$ , определяющая число электронов, рассеянных атомом газа на единицу угла, стремится к нулю при уменьшении  $\theta$  до нуля. На фиг. 27 приведены две экспериментальные кривые, характеризующие рассеяние на единицу угла; опыт находится в этом случае в очевидном согласии с теорией.

## § 2. Теория рассеяния медленных электронов. Метод парциальных сечений

Для построения теории рассеяния медленных электронов атомами мы вернемся к рассмотрению общей теории, изложенной в гл. VIII. Волновая функция  $\Psi$ , характеризующая в этом случае систему, состоящую из атома и падающего электрона, была представлена нами в виде

$$\Psi = \left( \sum_n + \int \right) \psi_n(\mathbf{r}_a) F_n(\mathbf{r}),$$

где  $\psi_n(\mathbf{r}_a)$  — волновая функция, характеризующая  $n$ -е возбужденное состояние атома. Было показано, что функция  $F_n(\mathbf{r})$  удовле-



творяет при этом уравнению

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a) \Psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}_a) d\tau_a,$$

где  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a)$  — энергия взаимодействия падающего и атомного электронов, а  $k_n$  — волновое число рассеянной электронной волны, равное  $2\pi m v_n / \hbar$ .

Если пренебречь электронным обменом, то упругое рассеяние электронов полностью определяется функцией  $F_0$ , удовлетворяющей уравнению

$$(\nabla^2 + k^2) F_0(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a) \Psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}_a) d\tau_a. \quad (10.1)$$

Для того чтобы решить это уравнение, мы должны подставить в его правую часть какое-либо приближенное значение функции  $\Psi$ . Так, например, в гл. IX при получении приближения Борна мы пренебрегли всеми рассеянными волнами и заменили  $\Psi$  функцией вида  $\psi_0(\mathbf{r}_a) e^{ikz}$ . В приближении, исследованию которого посвящена данная глава, мы будем пренебрегать всеми волнами, за исключением упруго рассеянной; в правой части уравнения (10.1) соответственно положим

$$\Psi = \psi_0(\mathbf{r}_a) F_0(\mathbf{r}).$$

Мы получим при этом

$$\left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} V_{00}(\mathbf{r}) \right] F_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (10.2)$$

где

$$V_{00}(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a) \psi_0 \psi_0^* d\tau_a.$$

Уравнение (10.2) характеризует движение падающего электрона в статическом поле атома, причем  $V_{00}$  — потенциал этого поля. В этом приближении задача сводится, таким образом, к вычислению интенсивности рассеяния, обусловленного статическим полем рассматриваемого атома. Метод вычислений, примененный к этому случаю, описан в гл. II, § 1. В дальнейшем мы будем отбрасывать индекс нуль у функций  $F_0$  и  $V_{00}$ , так как вопроса о неупругом рассеянии мы в этой главе касаться не будем.

Разложим функцию  $F$  в ряд

$$F = \sum_s F_s(r) P_s(\cos \theta)$$

и подставим его в уравнение (10.2); функция  $F_s(r)$  будет в таком случае удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2}{dr^2} (r F_s) + \left[ k^2 - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} V(r) - \frac{s(s+1)}{r^2} \right] (r F_s) = 0. \quad (10.3)$$

Решение уравнения (10.3), конечное в начале координат, имеет, как это было показано в гл. II, следующий асимптотический вид:

$$rF_s \sim A_s \sin \left( kr - \frac{s\pi}{2} + \eta_s \right),$$

где  $\eta_s$  — фазовая постоянная. Амплитуда  $f(\theta)$  рассеянной волны равна

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) (e^{2i\eta_s} - 1) P_s(\cos \theta), \quad (10.4)$$

а дифференциальное сечение для упругого рассеяния внутри телесного угла  $d\omega$  дается выражением

$$I(\theta) d\omega = |f(\theta)|^2 d\omega.$$

Полное сечение  $Q$  определяется интегралом:

$$Q = 2\pi \int_0^{\pi} I(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Мы имеем, таким образом,

$$Q = \sum_s Q_s,$$

где

$$Q_s = 4\pi k^{-2} (2s+1) \sin^2 \eta_s. \quad (10.5)$$

Мы будем называть  $Q_s$  парциальным сечением порядка  $s$ . Первое приближение Борна справедливо только при малых значениях  $\eta_s$ , так что  $\sin \eta_s$  никогда не проходит через максимум, имеющий место при  $\eta_s = \frac{1}{2}\pi$ . В этом приближении сечение как функция энергии не должно, таким образом, иметь колебательного характера; дело обстоит, однако, иначе, если  $\eta_s$  может превышать  $\pi/2$ .

Классическое приближение для  $I(\theta)$  неприменимо при рассмотрении вопросов, относящихся к рассеянию электронов; в случае не слишком малых значений фазы  $\eta_s$  хорошее приближение может быть, однако, получено с помощью метода Джеффриса, в частности с помощью той его несколько видоизмененной формы, которая была предложена Лангером (см. гл. VII, § 6).

В гл. II, § 2, было показано, что если

$$V(r) \ll \frac{s(s+1)\hbar^2}{r^2 2m}$$

и

$$kr \sim [s(s+1)]^{1/2},$$

то можно пренебречь всеми теми фазами  $\eta_n$ , для которых  $n > s$ . Сходимость ряда будет, таким образом, наилучшей в случае легких атомов и медленных электронов (см. гл. IX, § 5).

### § 3. Общие приложения метода парциальных сечений

**1. Условие существования эффекта Рамзауера — Таунсенда.** Выше было указано, что эффективное сечение может обращаться в нуль при значениях скорости, близких к минимальной, если поле оказывается достаточно интенсивным для того, чтобы обусловить появление одной или нескольких дополнительных волн, т. е. одного или более дополнительных корней волновой функции  $F_0$ . Для того чтобы это было возможным, поле должно быть достаточно интенсивным, чтобы обусловить соответственно появление одного или более дискретных энергетических уровней, отвечающих моменту количества движения, равному нулю.

По причинам, рассмотренным в гл. II, § 4, этот эффект не может иметь места в случае поля сил отталкивания — для такого поля фаза  $\eta_0$  может равняться  $\pi$  только в том случае, если в этом поле исчезает  $s$  целых длин волн, существующих в отсутствие поля. При малых значениях энергии это оказывается невозможным, так как длина волны в этом случае много больше размеров области, в которой сосредоточено поле. При больших значениях энергии это может иметь место, но при этом изменяются также и фазы высшего порядка, в связи с чем полное эффективное сечение не может стать аномально малым.

Количественные расчеты, приводимые в § 4, подтверждают правильность такого объяснения эффекта Рамзауера — Таунсенда.

**2. Объяснение других общих закономерностей.** Дадим теперь качественное объяснение следующих экспериментальных фактов:

1. Величина эффективного сечения изменяется в широких пределах, причем максимум эффективного сечения, наблюдаемый у щелочных металлов, в 100 раз превышает максимум, наблюдаемый в случае неона.

2. Кривые углового распределения рассеянных электронов обладают резко выраженными максимумами и минимумами.

3. Кривые зависимости эффективного сечения от скорости электронов для элементов, находящихся в различных столбцах периодической системы, имеют различную форму.

Мы воспользуемся следующими свойствами вычисленных нами фаз:

а) Для любого атомного поля фаза  $\eta_s$  монотонно убывает с возрастанием  $s$ .

б)  $\eta_s$  мало, если при условии

$$kr \sim s + \frac{1}{2}$$

выполняется неравенство

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} V(r) \ll \frac{s(s+1)}{r^2}.$$

Из условия «б» следует, что в случае медленных столкновений ряды парциальных сечений сходятся очень быстро; основную роль при этом играют те парциальные сечения  $Q_s$ , для которых  $\eta_s \approx \pi/2$ .

Максимальное значение, которым может обладать парциальное сечение порядка  $s$ , равно

$$Q_s^{\text{макс.}} = \frac{4\pi}{k^2} (2s+1).$$

Отсюда следует, что чем меньше скорость электрона и чем больше значение  $s$ , при котором фаза  $\eta_s$  достигает значения  $\pi/2$ , тем больше будет эффективное сечение. Возвращаясь к условию «б», мы видим, что максимальные значения эффективного сечения будут соответствовать атомам, поля которых обладают наибольшей пространственной протяженностью, например атомам щелочных металлов. Воспользовавшись эмпирическими правилами Слейтера [12] для нахождения эффективного заряда ядра атомов щелочных металлов и определив радиус атома, как такое расстояние от ядра, на котором плотность заряда  $r^2 |\psi|^2$  внешней электронной оболочки имеет максимум, мы получим значения радиусов  $r_0$  различных атомов, приведенные в табл. 8.

Таблица 8

| Атом | Радиус $r_0$ (в атомных единицах) | $kr_0$ ( $k$ в единицах $1/a_0$ ) |           |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------|
|      |                                   | при 13 e                          | при 0,5 e |
| Li   | 2,3                               | 2,3                               | 0,46      |
| Ni   | 4,1                               | 4,1                               | 0,82      |
| K    | 6,1                               | 6,1                               | 1,22      |
| Zn   | 3,1                               | 3,1                               | 0,62      |
| He   | 0,6                               | 0,6                               | 0,12      |
| Ne   | 0,7                               | 0,7                               | 0,14      |
| Ar   | 1,3                               | 1,3                               | 0,26      |
| Kr   | 1,7                               | 1,7                               | 0,34      |

В табл. 8 приведены также значения  $kr_0$ , соответствующие электронам с энергией 13 и 0,5 e. Воспользовавшись условием «б»,

мы приходим к заключению, что в случае калия нужно учесть по крайней мере 7 членов разложения в ряд (10.1) и что эффективное сечение может в этом случае превышать <sup>1)</sup>  $50\pi a_0^2$ , тогда как для неона достаточно учета только одного члена и эффективное сечение не превышает  $10\pi a_0^2$ . При  $k=0,2/a_0$  ( $0,54e$ ) в случае калия сечение становится равным  $300\pi a_0^2$ , тогда как для неона или гелия оно попрежнему не может значительно превышать  $10\pi a_0^2$ . Объяснение наличия широкой области изменения наблюдаемых значений эффективных сечений не представляет, таким образом, никаких трудностей. Ясно также, что угловое распределение, описываемое функцией (10.4), может обладать несколькими максимумами и минимумами. Основную роль при этом снова играют те члены разложения в ряд, для которых  $\eta_s \approx \pi/2$ . Угловое распределение приближенно описывается, таким образом, функцией вида

$$I(\theta) = \text{const} [P_s^*(\cos\theta)]^2,$$

имеющей  $s$  минимумов. Последние особенно резко выражены при малых скоростях столкновений, когда достаточно ввести в рассмотрение лишь небольшое число членов ряда (10.4), а весовой множитель  $2s+1$  становится особенно существенным. В случае аргона для электронов с энергией  $30e$  угловое распределение достаточно точно описывается функцией  $[P_2(\cos\theta)]^2$ . Вычисленные значения фаз при этой скорости равны

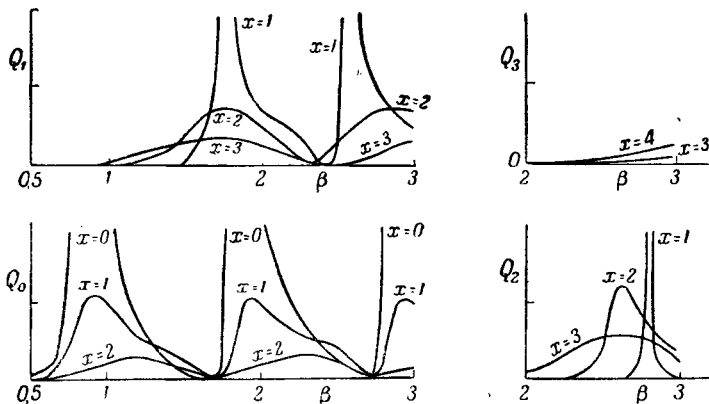
$$\eta_0 = 2\pi + 0,885; \quad \eta_1 = 4,831; \quad \eta_2 = 1,983; \quad \eta_3 = 0,374; \quad \eta_4 = 0,159.$$

Следует отметить, что эти данные приводятся только в порядке иллюстрации; в действительности же эффекты, соответствующие сумме парциальных сечений, могут быть весьма сложными, особенно в случае тяжелых атомов. Диффракция волн от сферических предметов представляет собой значительно более сложное явление, нежели диффракция от решетки или какой-либо другой симметричной системы.

Объяснение третьей отмеченной выше особенности опытных данных оказывается, однако, не столь простым. Квазипериодическое изменение парциальных сечений обусловлено периодическим характером функции  $\sin \eta_s$ . При малых скоростях электронов для наиболее легких атомов существенную роль играет только фаза нулевого порядка. Поле атома в этом случае ведет себя подобно

<sup>1)</sup> Полученное таким способом эффективное сечение будет только приближенно правильным, если поле достаточно велико, чтобы привести к значительным изменениям фаз. В случае столкновений электронов больших скоростей в разложении следует брать большое число членов, но все эти члены будут малы, а следовательно, полное эффективное сечение также будет мало.

потенциальной яме, рассмотренной нами в гл. II, § 3. При данном значении скорости для некоторых атомных полей фаза  $\eta_0$  близка к  $\pi/2$ , и соответствующее сечение будет проходить через максимум. Для некоторых более тяжелых атомов фаза  $\eta_0$  достигает значения  $3\pi/2$ , что обуславливает такой же максимум сечения нулевого порядка, и т. д. Для некоторых атомов с промежуточными свойствами существенное значение будет иметь фаза  $\eta_1$  и т. д. Таким способом можно было бы объяснить квазипериодичность изменения эффективных сечений; необходимо, однако, доказать теоретически,



Фиг. 28. Квазипериодическое изменение парциальных сечений.

что эта периодичность следует законам периодической таблицы. Впервые это было осуществлено Эллисом и Морзе [13] с помощью упрощенной модели атома. Потенциал, описывающий поле атома, был выбран ими в форме

$$\begin{aligned}
 V &= Ze^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) & (r \leq r_0), \\
 V &= 0 & (r \geq r_0).
 \end{aligned}
 \tag{10.6}$$

В этом случае оказывается возможным аналитическое решение уравнения (10.3). Для иллюстрации периодического хода изменения эффективных сечений были введены в рассмотрение две величины  $x$  и  $\beta$ , где

$$\beta^2 = \frac{Zr_0}{2a_0}, \quad x = kr_0.$$

Первая из этих величин определяется только характером атомного поля, вторая является также функцией скорости падающего электрона. Эллис и Морзе показали, что эффективные сечения квазипериодичны по отношению к  $\beta$ , причем период их изменения равен единице. Это показано на фиг. 28, где парциальные сечения,

соответствующие различным значениям  $x$ , даны как функции  $\beta$ <sup>1)</sup>. Воспользовавшись приближенными значениями атомных радиусов, определенными по методу Слейтера (см. табл. 8), и тем значением постоянной  $Z$ , при котором потенциал (10.6) хорошо согласуется с данными Слейтера, мы находим, что период  $\beta$  приближенно равен единице для всей периодической системы. Это можно видеть из табл. 9, в которой приведены значения  $\beta$  для некоторых элементов.

Таблица 9

| Атом | $\beta$ | Атом | $\beta$ |
|------|---------|------|---------|
| Li   | 1,36    | Ne   | 1,73    |
| Na   | 2,54    | Ar   | 2,68    |
| K    | 3,51    | Kr   | 3,66    |
| He   | 0,77    |      |         |

Наиболее легкие элементы ведут себя в этом отношении несколько аномально; это подтверждается также опытными фактами (см. фиг. 25).

#### § 4. Количественные приложения метода парциальных сечений

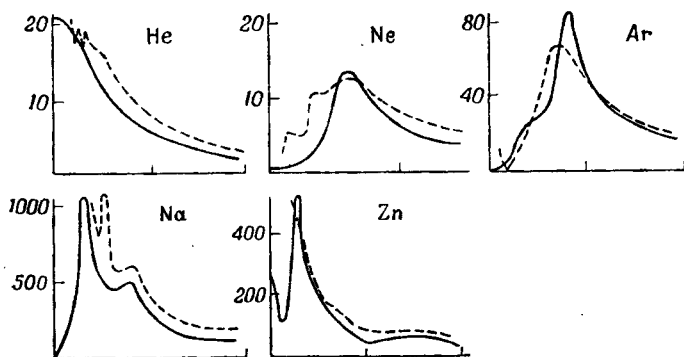
Количественные приложения изложенной выше теории впервые были даны Хольцмарком [14] для случая рассеяния электронов в аргоне. Мы остановимся, однако, прежде всего на рассмотрении результатов, полученных Эллисом и Морзе с помощью упомянутой выше упрощенной модели атома.

Выбрав определенные значения параметров  $\beta$  и  $r_0$  с помощью правила Слейтера, мы получаем обычно для этой модели хорошее согласие с наблюдаемыми значениями эффективных сечений. На фиг. 29 экспериментальные кривые сопоставлены с теоретическими. Значения  $\beta$  и  $r_0$ , использованные при построении последних, слегка отличны от значений, получаемых с помощью правила Слейтера; различие это, однако, невелико. В табл. 10 параметры  $\beta$  и  $r_0$ , при которых имеет место наилучшее совпадение с опытными данными, сопоставлены со значениями этих параметров, вычисленными по методу Слейтера; как те, так и другие измерены в атомных единицах.

Получаемое согласие является весьма удовлетворительным и не оставляет никаких сомнений относительно правильности теоретического объяснения эффектов Рамзауера — Таунсенда, даваемого

<sup>1)</sup> Сравни поведение  $Q_0$  как функции  $\beta$  при  $x=0$  с соответствующим поведением  $Q_0$  как функции  $k_0$  при  $k=0$  на фиг. 4, а

квантовой механикой. Функции, использованные нами для описания атомного поля, дают, однако, лишь грубое приближение, в особенности в случае очень медленных столкновений. В этом случае поле атома может оказывать весьма существенное влияние также



Фиг. 29. Сопоставление наблюдаемых (сплошные) и вычисленных (пунктирные) кривых сечений

Таблица 10

| Атом | $\beta$     |                        | $r_0$       |                        |
|------|-------------|------------------------|-------------|------------------------|
|      | по Слейтеру | из эффективных сечений | по Слейтеру | из эффективных сечений |
| He   | 0,77        | 0,80                   | 0,6         | 0,55                   |
| Ne   | 1,73        | 1,71                   | 0,7         | 0,75                   |
| Ar   | 2,68        | 2,7                    | 1,3         | 1,4                    |
| Na   | 2,54        | 2,55                   | 4,1         | 4,25                   |
| Zn   | 3,77        | 3,78                   | 3,1         | 3,14                   |

и на расстояниях, превышающих радиус  $r_0$ . Морзе [15] распространил эти вычисления на случай поля

$$V = Ze^2 r^{-1} e^{-2r/r_0}$$

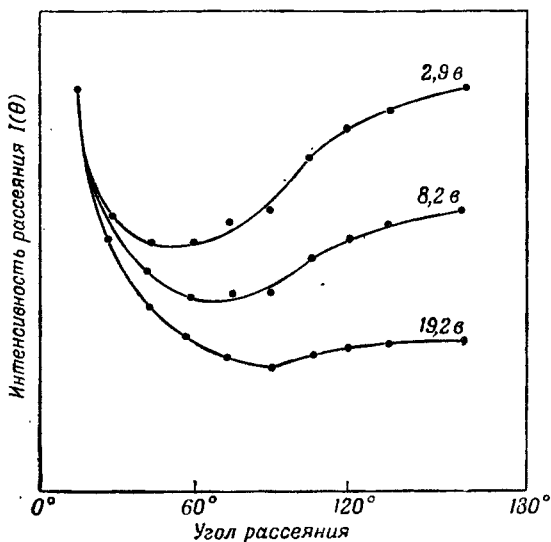
и получили весьма сходные результаты. Оказалось, что при этом существенную роль играют те же величины  $\beta$  и  $kr_0$ .

Хольцмарк [14] получил очень хорошее согласие с опытными значениями эффективных сечений для аргона, воспользовавшись для вычисления потенциала  $V$  методом Хартри с учетом эмпирической поправки на поляризацию и определив фазы  $\eta_s$  путем численного интегрирования дифференциальных уравнений. Без учета поляризационной поправки согласие с опытом не является удовлетворительным.





Хартри — Фока с учетом и без учета обменной и поляризационной поправок (см. § 6 и 7). В случае криптона согласие с опытными данными также является очень хорошим как в отношении наблюдаемых значений полных сечений, так и при сопоставлении с угловыми распределениями, измеренными Арно [10] и Рамзауером и Коллатом [20] [за исключением случая очень малых энергий (меньше  $3e$ )].



Фиг. 31. Наблюдаемые угловые распределения медленных электронов, упруго рассеянных атомами гелия.

В случае гелия мы имеем первое определенное указание на недостаточность изложенной выше теории. Для таких легких атомов значения  $\pi/2$  достигает только фаза нулевого порядка, и при скоростях электрона ниже  $20e$  влияние членов более высокого порядка очень мало. Соответствующее угловое распределение не зависит от величины угла; однако наблюдаемые [9, 20] кривые распределения обладают минимумом, если скорость электрона меньше  $15e$ ; это показано на фиг. 31. Наличие такого минимума при очень малых скоростях электронов не может быть объяснено с помощью метода парциальных сечений; для объяснения этих закономерностей наша теория нуждается в дальнейшем усовершенствовании (см. § 6). Аналогичные явления наблюдаются и в случае молекулярного водорода. Возможно, что в последнем случае существенную роль играет наличие химической связи; вероятнее, однако, что причина аномалии здесь та же, что и в случае гелия (обменный эффект).

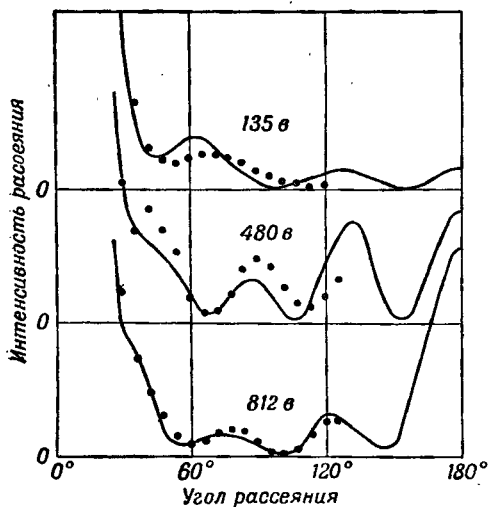
Для ряда других атомов значения фаз высшего порядка были определены с помощью приближения Джеффриса (см. гл. VII, § 6,

Таблица 11

Фазовые сдвиги  $\eta_n$  для электронов с энергией 54 эв, рассеянных атомами криптона

| $n$ | Точное решение | Приближение Джеффриса | Приближение Ланге | Приближение Борна |
|-----|----------------|-----------------------|-------------------|-------------------|
| 0   | 9,696          |                       | 9,597             |                   |
| 1   | 7,452          | 7,710                 | 7,540             |                   |
| 2   | 4,469          | 4,748                 | 4,505             |                   |
| 3   | 1,238          | 1,410                 | 1,355             | 0,779             |
| 4   | 0,445          | 0,557                 | 0,535             | 0,414             |
| 5   | 0,143          | 0,190                 | 0,174             | 0,144             |

п. 2), а значения фаз низшего порядка — на основе приближения Борна (гл. VII, § 6, п. 1). Для иллюстрации степени точности,



Фиг. 32. Сопоставление наблюдаемых (точки) и вычисленных (сплошные кривые) угловых распределений электронов, упруго рассеянных атомами ртути.

которая при этом может быть достигнута<sup>1)</sup>, в табл. 11 приведены значения фазовых сдвигов, т. е. фаз  $\eta_n$  для электронов с энергией 54 эв при рассеянии их в криптоне, определенные путем точного численного решения дифференциального уравнения [16], а также с помощью приближенных методов [22]. В табл. 11 содержатся также значения фазовых сдвигов, вычисленные с помощью приближения Джеффриса с учетом изменений, внесенных в него Лангером. При  $\eta < 0,5$  приближение Борна, как мы видим, является достаточно точным. При больших значениях  $\eta$  лучшие

результаты дает приближение Джеффриса, особенно при учете поправки Лангера для фаз низшего порядка.

<sup>1)</sup> Опытная оценка эффективности этих методов дана в работе Арно [24].

Для паров ртути аналогичные вычисления были произведены Хеннебергом [23], а также Месси и Мором [24] с помощью метода Томаса — Ферми. На фиг. 32 вычисленные угловые распределения сопоставлены с экспериментальными данными Арно. Аналогичные вычисления были произведены также для калия [25, 26], цинка [26], брома [27]; во всех случаях было получено удовлетворительное согласие теории с опытом.

В случае упругого рассеяния медленных электронов тяжелыми атомами метод Факсена и Хольцмарка дает хорошие результаты. В случае легких атомов, таких, например, как атомы водорода и гелия, необходимо воспользоваться более высокими приближениями; этот вопрос рассматривается нами в следующем параграфе. Учет более высоких приближений необходим также, повидимому, и при исследовании угловых распределений, наблюдаемых при значениях энергии, отвечающих минимальному эффективному сечению, в случае тяжелых благородных газов.

### § 5. Обмен электронами при упругих столкновениях

В гл. VIII, § 4, была исследована возможность обмена электронами между атомом и сталкивающимся с ним пучком электронов. При этом было показано, что падающий электрон может оказаться рассеянным или может обменяться местом с электроном в атоме. Было показано также, что вероятности этих двух процессов не аддитивны; в связи с необходимостью применения антисимметричных волновых функций следует складывать волновые амплитуды, а не интенсивности.

Возможность обменной интерференции впервые была указана Опенгеймером [28], который предположил, что именно этот эффект обуславливает наличие минимума, наблюдаемого на кривых зависимости эффективных сечений от скоростей электронов для тяжелых благородных газов при очень малых значениях энергии электронов. В свете теории, рассмотренной нами в § 3, эта точка зрения представляется весьма мало правдоподобной. Для легких атомов, например атомов гелия и водорода, обменная интерференция должна, однако, играть существенную роль в случае медленных столкновений.

### § 6. Обменный эффект при упругом рассеянии электронов атомами водорода и гелия

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в гл. VIII, § 4. Было показано, что упругое рассеяние электронов атомами водорода и гелия может быть описано с помощью двух волновых функций  $F_0(\mathbf{r}_1)$  и  $G_0(\mathbf{r}_2)$ , имеющих следующие

асимптотические формы:

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}_1) &\sim e^{ikz_1} + r_1^{-1} f_0(\theta_1, \varphi_1) e^{ikr_1}, \\ G_0(\mathbf{r}_2) &\sim r_2^{-1} g_0(\theta_2, \varphi_2) e^{ikr_2}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Дифференциальные сечения для упругих столкновений следующие: для водорода

$$I(\theta) d\omega = \frac{1}{4} \{3|f_0 + g_0|^2 + |f_0 - g_0|^2\} d\omega, \quad (10.8a)$$

для гелия

$$I(\theta) d\omega = |f_0 - g_0|^2 d\omega. \quad (10.8b)$$

Для простоты рассмотрим сперва упругое рассеяние электронов атомами водорода. В гл. VIII было показано, что функции  $F_0(\mathbf{r}_1)$  и  $G_0(\mathbf{r}_2)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} [\nabla^2 + k^2] F_0(\mathbf{r}_1) &= -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_0^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2, \\ [\nabla^2 + k^2] G_0(\mathbf{r}_2) &= -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_0^*(\mathbf{r}_1) d\tau_1, \end{aligned} \quad (10.9)$$

где  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  — волновая функция, характеризующая состояние всей системы.

Для того чтобы иметь возможность проинтегрировать уравнения (10.9), следует подставить в правую часть этих уравнений какое-либо приближенное значение функции  $\Psi$ . Было показано, что  $\Psi$  может быть представлено в форме

$$\Psi = \left( \sum_n + \int \right) F_n(\mathbf{r}_1) \psi_n(\mathbf{r}_2).$$

Можно записать это так:

$$\Psi = F_0(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) + \Phi,$$

где член  $\Phi$  характеризует все рассеянные волны. Функция  $\Psi$ , как это было показано в гл. VIII, может быть также представлена в виде

$$\Psi = \left( \sum_n + \int \right) G_n(\mathbf{r}_2) \psi_n(\mathbf{r}_1).$$

Разлагая  $\Phi$  в ряд

$$\Phi = \left( \sum_n + \int \right) G'_n(\mathbf{r}_2) \psi_n(\mathbf{r}_1),$$

убеждаемся в том, что  $G_0 \approx G'_0$ ; другими словами, функция  $\Phi$  характеризует также и «обменную» волну. Таким образом, если

мы предположим, что функция  $\Psi$  в правой части уравнений (10.9) имеет вид

$$\Psi = F_0(\mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}_2) + G_0(\mathbf{r}_2)\psi_0(\mathbf{r}_1) + \varphi \quad (10.10)$$

и пренебрежем членом  $\varphi$ , то получим достаточно хорошее приближение, не учитывающее влияния всех волн, длины которых отличны от длины падающей волны.

Подставляя функцию (10.10) в уравнения (10.9), имеем

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{00}(\mathbf{r}_1) \right] F_0(\mathbf{r}_1) = \\ & = -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) G_0(\mathbf{r}_2) \psi_0(\mathbf{r}_1) \psi_0^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2 \quad (10.11a) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{00}(\mathbf{r}_2) \right] G_0(\mathbf{r}_2) = \\ & = -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right) F_0(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_0^*(\mathbf{r}_1) d\tau_1, \quad (10.11b) \end{aligned}$$

где

$$V_{00}(\mathbf{r}_1) = -e^2 \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) |\psi_0(\mathbf{r}_2)|^2 d\tau_2.$$

Переходя в выражении для  $G_0$  от переменной  $\mathbf{r}_2$  к переменной  $\mathbf{r}_1$  и складывая и вычитая уравнения (10.11a) и (10.11b), получаем

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{00}(\mathbf{r}_1) \right] \left[ F_0(\mathbf{r}_1) \pm G_0(\mathbf{r}_1) \right] = \\ & = \mp \frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) [F_0(\mathbf{r}_2) \pm G_0(\mathbf{r}_2)] \psi_0(\mathbf{r}_1) \psi_0^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2. \quad (10.12) \end{aligned}$$

Если мы разложим  $F_0(\mathbf{r}) \pm G_0(\mathbf{r})$  в ряд

$$F_0(\mathbf{r}) \pm G_0(\mathbf{r}) = r^{-1} \sum_n f_n^\pm(r) P_n(\cos \theta), \quad (10.13)$$

то

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 + U_{00} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] f_n^\pm(r_1) = \mp \int_0^\infty g_n(r_1, r_2) f_n^\pm(r_2) dr_2, \quad (10.14)$$

где

$$g_n(r_1, r_2) = \frac{8\pi m e^2}{(2n+1)h^2} \psi_0(r_1) r_1 \Upsilon_n(r_1, r_2) r_2 \psi_0(r_2),$$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} = \sum_n \Upsilon_n(r_1, r_2) P_n\left(\frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2}\right). \quad (10.15)$$

Это дает ряд интегро-дифференциальных уравнений для определения функций  $f_n$ . Как и в случае задачи о центральных силах, собственные решения имеют в этом случае асимптотическую форму

$$\sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n\right),$$

и формулы (10.17) и (10.18) гл. II, определяющие дифференциальное и полное эффективные сечения для рассеяния, остаются в силе.

Обменный эффект обуславливает изменение фазы; интегральное уравнение, определяющее это изменение, может быть получено с помощью метода, рассмотренного нами в гл. VI, § 2. Пусть  $F_n$  есть решение уравнения

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 + U_{00} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] F_n(r) = 0, \quad (10.16)$$

имеющее асимптотическую форму

$$F_n \sim \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \sigma_n\right). \quad (10.17)$$

В таком случае

$$\sin(\eta_n^\pm - \sigma_n) = \mp \int_0^\infty \int_0^\infty F_n(r_1) g_n(r_1, r_2) f_n^\pm(r_2) dr_1 dr_2, \quad (10.18)$$

где функция  $f_n^\pm \sim \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n^\pm\right)$  и представляет собой точное собственное решение уравнения (10.14).

В том случае, когда как  $\eta_n$ , так и  $\sigma_n$  малы, т. е. при больших значениях энергии электронов, хорошее приближение может быть получено, если положить

$$F_n(r) = f_n^\pm(r) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr). \quad (10.19)$$

Менее грубое приближение, справедливое тогда, когда обменный эффект, измеряемый величиной  $\eta_n^\pm - \sigma_n$ , мал, в то время как непосредственное рассеяние, измеряемое величиной  $\sigma_n$ , не является малым, мы получим, положив

$$f_n^\pm = F_n, \quad (10.20)$$

где  $F_n$  — точное решение уравнения (10.16). Если ни одно из этих приближений не является пригодным, то необходимо решить интегро-дифференциальное уравнение численно. В этом случае можно также воспользоваться обобщением вариационного метода Гультена (см. гл. VII, § 6). До обсуждения результатов, полу-

ченных при исследовании обменного эффекта, необходимо обратить внимание на некоторые недостатки приведенного выше вывода уравнений (10.12).

Возвращаясь к гл. VIII, § 4, мы видим, что волновая функция должна удовлетворять соотношениям ортогональности

$$\begin{aligned} \int [\Psi - F_0(\mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}_2)]\psi_0^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2 &= 0, \\ \int [\Psi - G_0(\mathbf{r}_2)\psi_0(\mathbf{r}_1)]\psi_0^*(\mathbf{r}_1) d\tau_1 &= 0. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Приближенная форма функции (10.10), не содержащая члена  $\varphi$ , не будет удовлетворять этим соотношениям. Члены, отличные от нуля, при этом всегда связаны с членом нулевого порядка в разложении в ряд функций  $F_0$  и  $G_0$ . Для значений  $n$ , отличных от нуля, уравнения (10.12) с этой точки зрения можно поэтому считать удовлетворительными. При  $n=0$  не существует, однако, вполне удовлетворительного способа решения рассматриваемого вопроса, в особенности для симметричного случая. Некоторые результаты могут быть тем не менее получены для антисимметричной функции. Полная волновая функция, описывающая столкновение и обладающая правильными свойствами симметрии, имеет вид

$$2^{-1/2} [\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)]. \quad (10.22)$$

Это выражение может быть записано в форме

$$\psi_0(\mathbf{r}_1)[F_0(\mathbf{r}_2) - G_0(\mathbf{r}_2)] - \psi_0(\mathbf{r}_2)[F_0(\mathbf{r}_1) - G_0(\mathbf{r}_1)]. \quad (10.23)$$

Если бы разность  $F_0(\mathbf{r}) - G_0(\mathbf{r})$  могла быть ортогонализирована по отношению к функции  $\psi_0$ , то это означало бы приближенное выполнение соотношений (10.21). Финберг [29] показал, что если задано решение  $F_0(\mathbf{r}) - G_0(\mathbf{r})$ , то функция (10.22) останется неизменной, если мы добавим к этому решению произведение функции  $\psi_0$  на некоторый постоянный множитель. В связи с этим Финберг заменил разность  $F_0(\mathbf{r}) - G_0(\mathbf{r})$  выражением вида  $F_0(\mathbf{r}) - G_0(\mathbf{r}) + c\psi_0(\mathbf{r})$ , где

$$c = \int [F_0(\mathbf{r}) - G_0(\mathbf{r})]\psi_0(\mathbf{r}) d\tau = 4\pi \int f_0^-(r)\psi_0(r)r dr. \quad (10.24)$$

Это приводит к замене  $1/r_1$  на  $(1/r_{12})_{00}$ , где

$$\left(\frac{1}{r_{12}}\right)_{00} = \int \frac{|\psi_0(\mathbf{r})|^2}{r_{12}} d\tau. \quad (10.25)$$

Другой метод, применимый в любом случае, заключается в получении интегро-дифференциальных уравнений тем же способом, каким получается уравнение Фока [30]<sup>1)</sup> для самосо согласо-

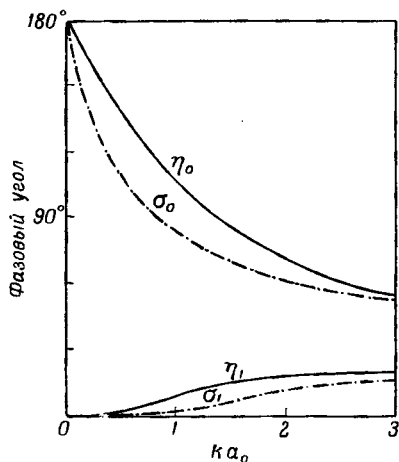
<sup>1)</sup> См. также [31].



ванного поля атома с учетом обменного эффекта. Эти уравнения, строго говоря, справедливы только для замкнутых состояний; однако если мы будем рассматривать состояние сталкивающегося электрона, принадлежащее к непрерывному спектру, как предел некоторого дискретного состояния, то они могут быть использованы также и при рассмотрении вопросов, связанных с рассеянием. Следует напомнить, что хотя этот метод и учитывает некоторые условия ортогональности, последние не являются при этом вполне точными. Так, например, в случае атома водорода метод Фока дает уравнение для определения функций  $F^\pm$ , где

$$2^{-1/2} [\Psi(r_1, r_2) \pm \Psi(r_2, r_1)] = 2^{-1/2} [\psi_0(r_1) F^\pm(r_2) - \psi_0(r_2) F^\pm(r_1)].$$

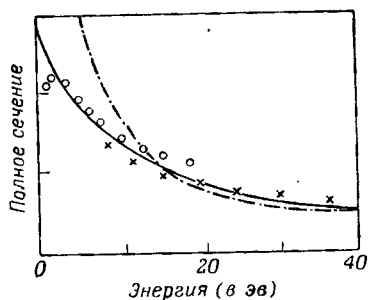
При этом функция  $\psi_0$  ортогональна по отношению к  $F^\pm$ , однако волновая функция, характеризующая основное состояние атома водорода, оказывается ортогональной по отношению к волновой функции, описывающей не состояние атома, принадлежащее к непрерывному спектру, но состояние отрицательного иона водорода.



Фиг. 33. Фазовые сдвиги при рассеянии электронов в гелии, вычисленные с учетом (кривые  $\eta$ ) и без учета (кривые  $\sigma$ ) обменного эффекта.

Решение вопроса о том, какой из этих методов следует считать наилучшим, может быть получено только в результате более тщательного анализа вопроса об ортогональности.

**Количественные приложения теории к вопросу об упругом рассеянии.** Первые попытки учета влияния обменных эффектов

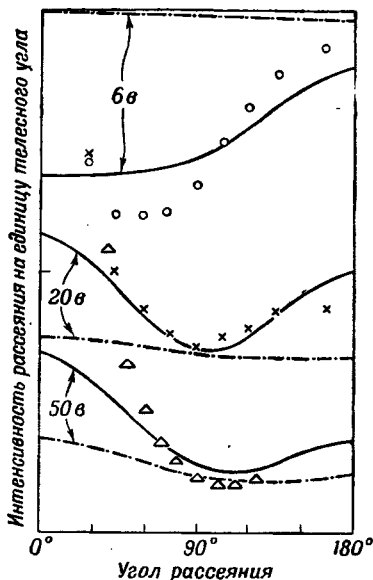


Фиг. 34. Сопоставление наблюдаемых и вычисленных значений полных сечений для столкновений электронов с атомами гелия. Сплошная кривая—теоретическая кривая с учетом обменного эффекта, пунктирная—без учета; кружками указаны экспериментальные данные Рамзауэра и Коллата, крестиками—данные Норманда.

на упругое рассеяние были осуществлены Мессе и Мором [32] с помощью приближений (10.19) и (10.20) для случая рассеяния электронов атомами водорода и гелия. При этом было найдено, что обменный эффект должен приобретать существенную роль для электронов, энергии которых меньше  $15 \text{ эв}$  в случае гелия и меньше  $5 \text{ эв}$  в случае водорода. Было высказано предположение, что отступления от результатов теории Факсена—Хольцмарка, наблюдающиеся при рассеянии медленных электронов атомами гелия (см. фиг. 31), обусловлены в основном обменным эффектом. Это заключение было подтверждено расчетами Эллиса и Морзе [33], получивших точные численные решения интегро-дифференциальных уравнений (10.12) при  $n=0$  и  $n=1$  в форме, пригодной для случая рассеяния электронов атомами гелия; условия ортогональности были учтены при этом по методу Финберга. Влияние обменного эффекта на фазовые сдвиги иллюстрируется фиг. 33. Как мы видим, при малых значениях энергии электронов (ниже  $15 \text{ эв}$ ) фаза  $\eta_1$  заметно возрастает. Фаза  $\eta_0$  также увеличивается, достигая значений, превышающих  $90^\circ$ . В результате возрастает относительная роль рассеяния первого порядка, что приводит к менее однородному угловому распределению, в согласии с экспериментальными данными. Экспериментальные и теоретические значения эффективных сечений и интенсивностей рассеяния сопоставлены на фиг. 34 и 35.

Учет обменного эффекта приводит, как мы видим, к заметному улучшению согласия теории с опытом; при малых углах рассеяния согласие не является тем не менее достаточно удовлетворительным. Это обстоятельство обусловлено, повидимому, влиянием поляризации.

Морзе и Эллис предложили также схематическую модель, пригодную для рассмотрения случая более сложных атомов, с по-



Фиг. 35. Сопоставление наблюдаемых и теоретических угловых распределений для рассеяния электронов атомами гелия.

Сплошные кривые—теоретические кривые с учетом обменного эффекта, пунктирные—без учета; кружками и крестиками указаны экспериментальные данные Рамзауэра и Коллата для электронов с энергией соответственно  $6$  и  $20 \text{ эв}$ , треугольниками—данные Булларда и Мессе для электронов с энергией  $50 \text{ эв}$ .

Во всех случаях, за исключением случая электронов с энергией  $50 \text{ эв}$ , сопоставляются абсолютные значения интенсивности рассеяния. Для случая электронов с энергией  $50 \text{ эв}$  масштаб выбран таким образом, чтобы теоретические результаты (полученные без учета обменного эффекта) согласовывались с опытными при  $80^\circ$ .

мощью которой они пришли к заключению, что чем тяжелее атом, тем менее существенную роль должны играть обменные эффекты. Подробные количественные расчеты имеются только для случая рассеяния электронов атомами кислорода; они были осуществлены Бейтсем и Месси [19] с помощью уравнения Фока. Поскольку при этом был введен в рассмотрение также и некоторый эмпирический член, учитывающий влияние поляризации, на основании полученных результатов нельзя сделать никаких определенных заключений об относительной роли обменного эффекта.

### § 7. Влияние поляризации

До сих пор мы пренебрегали рассмотрением влияния неупруго рассеянных волн на упругое рассеяние. При малых углах рассеяния учет этого влияния приводит к более быстрому возрастанию интенсивности рассеяния по мере уменьшения угла рассеяния. Точная теория вопроса должна носить очень сложный характер; Месси и Мор [34] дали все же возможное объяснение эффектов такого рода, наблюдаемых для электронов с энергиями 100 эв и выше при рассеянии их атомами водорода и гелия.

Для простоты рассмотрим вопрос о рассеянии электронов атомами водорода. Возвращаясь к гл. VIII, § 1, мы видим, что функция  $F_0(\mathbf{r}_1)$ , описывающая упругое рассеяние, удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + k^2) F_0(\mathbf{r}_1) = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \sum_n V_{0n}(\mathbf{r}_1) F_n(\mathbf{r}_1), \quad (10.26)$$

где

$$V_{0n} = e^2 \int \left( \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_1} \right) \psi_0^*(r_2) \psi_n(r_2) d\tau_2. \quad (10.27)$$

Было показано также, что в приближении Борна

$$F_0 = e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_1} - \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \exp\{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| + ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_3\} V_{00}(r_3) d\tau_3, \quad (10.28)$$

$$F_n = -\frac{2\pi m}{\hbar^2} \int \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \exp\{ik_n|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| + ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_3\} V_{n0}(r_3) d\tau_3. \quad (10.29)$$

Для того чтобы найти второе приближение для функции  $F_0$ , подставим выражения (10.28) и (10.29) в правую часть уравнения (0.26).

Это дает

$$(\nabla^2 + k^2) F_0 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{00} e^{ikn_0 \cdot r_1} - \\ - \frac{16\pi^2 m^2}{h^4} \sum_n V_{0n}(r_1) \int \frac{1}{|r_1 - r_3|} \exp\{ikn_n |r_1 - r_3| + ikn_0 \cdot r_3\} V_{n0}(r_3) d\tau_3. \quad (10.30)$$

При суммировании ряда, входящего в это уравнение, мы ограничимся рассмотрением таких скоростей столкновений, для которых  $k_n \approx k$  при всех значениях  $n$ , играющих существенную роль. В таком случае

$$\sum_n V_{0n}(r_1) V_{n0}(r_3) = \int V(r_2, r_3) V(r_2, r_1) |\psi_0(r_2)|^2 d\tau_2, \quad (10.31)$$

где

$$V(r_2, r_3) = e^2 \left( \frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_3} \right).$$

Это дает

$$(\nabla^2 + k^2) F_0(r_1) = \frac{8\pi^2 m}{h^2} e^{ikn_0 \cdot r_1} \{V_{00} + v_{00}\}, \quad (10.32)$$

где

$$v_{00} = -\frac{2\pi m}{h^2} \int \int \exp[ik(\rho_3 + n_0 \cdot \rho_3)] \times \\ \times V(\rho_2 + r_1, r_1) V(\rho_2 + r_1, \rho_3 + r_1) |\psi_0(\rho_2 + r_1)|^2 \rho_3^{-1} d\rho_2 d\rho_3. \quad (10.33)$$

При таком определении  $v_{00}$  начало координат было перенесено в точку 1, а векторы, характеризующие положения точек 2 и 3 по отношению к этому началу координат, обозначены через  $\rho_2$  и  $\rho_3$ .

Из уравнения (10.32) следует, что  $v_{00}$  представляет собой дополнительный рассеивающий потенциал, который должен быть добавлен к статическому потенциалу атома. Он учитывает при этом не только влияние неупруго рассеянных волн, но также и поправку второго порядка к решению уравнения

$$(\nabla^2 + k^2) F_0 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{00} F_0. \quad (10.34)$$

Истинный поляризационный потенциал  $v_p$  мы получим, вычтя эту поправку, которую мы обозначим через  $u_{00}$ , из потенциала  $v_{00}$ . Легко показать, что

$$u_{00} = -\frac{2\pi m}{h^2} V_{00} \int V_{00} (|\rho_3 + r_1|) \rho_3^{-1} \exp[ik(\rho_3 + n_0 \cdot \rho_3)] d\rho_3. \quad (10.35)$$

Ясно, что  $v_p = v_{00} - u_{00}$  является очень сложной функцией  $r_1$  и  $k$ . Месси и Мор [34] вычислили члены нулевого и первого порядков в разложении  $v_p$  в ряд по гармоническим функциям и обнаружили хорошую сходимость рядов. При этом было найдено, что при больших значениях  $r$

$$v_p \sim -\frac{e^2 a_0}{2k} \left\{ \frac{2i}{r^3} + \frac{1-3\cos\theta}{r^4 k} \left[ 1 - \frac{e^{2ikr}}{(1+k^2 a_0^2)^3} \right] + 0 \left( \frac{1}{r^5} \right) \right\}. \quad (10.36)$$

Второй член этого выражения характеризует динамическую поляризацию, тогда как первый чисто мнимый член соответствует потенциалу поглощения. Можно, вероятно, считать, что он обусловлен потерей электронов падающим пучком в результате неупругого рассеяния. Во всяком случае, этот член оказывает очень заметное влияние на рассеяние на малые углы, поскольку он медленно убывает с расстоянием. Благодаря наличию этого члена при очень малых значениях углов рассеяния дифференциальное сечение стремится к бесконечности по логарифмическому закону.

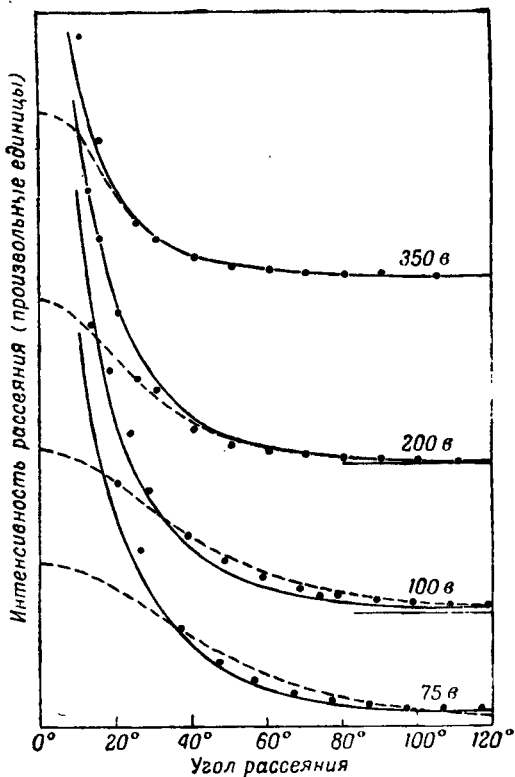
На фиг. 36 угловые распределения, полученные экспериментально для электронов с энергиями от 75 до 350 эв, рассеянных атомами гелия, сопоставлены с теоретическими угловыми распределениями, найденными с помощью формулы

$$I(\theta) = \frac{4\pi^2 m^2}{h^4} \left| \int e^{ik(n_0 - n_1) \cdot r} (V_{00} + v_p) d\tau \right|^2. \quad (10.37)$$

Для удобства сравнения кривые нанесены таким образом, чтобы ординаты экспериментальной и теоретической кривых совпали для электронов с энергией 350 эв при угле рассеяния, равном  $60^\circ$ . Как мы видим, согласие теории с опытом является весьма хорошим, причем для малых значений углов оно значительно лучше в том случае, когда принят во внимание потенциал  $v_p$ . Справедливость теории подтвердилась вплоть до еще меньших значений углов рассеяния (до  $2^\circ$ ). Так, Уайдингтон [35] нашел, что в случае рассеяния электронов с энергией 200 эв атомами гелия при изменении угла рассеяния от 5 до  $2^\circ$  интенсивность рассеяния возрастает вдвое. Согласно первому приближению Борна, интенсивность рассеяния не должна меняться заметным образом в этом интервале углов; влияние потенциала  $v_p$  должно, однако, вызвать увеличение интенсивности примерно наблюдаемого порядка величины.

Аналогичное согласие теории с опытом имеет место также и в случае водорода, если предположить, что молекула водорода ведет себя подобно двум атомам водорода. Отношение амплитуды

поляризации к амплитуде, определяемой в первом приближении Борна, является функцией  $Z/k$ , где  $Z$  — эффективный заряд ядра. В связи с этим в случае гелия влияние поляризации должно становиться существенным при более высоких значениях энергии, чем в случае водорода.



Фиг. 36. Сопоставление наблюдаемых и теоретических угловых распределений при рассеянии электронов атомами гелия.

Пунктирная кривая вычислена в приближении Борна, сплошная — при учете поляризации и искажения; точками указаны экспериментальные данные Хьюгеса, Мак-Миллана и Вебба.

К сожалению, пока не удалось распространить теорию на область малых энергий электронов; весьма возможно, однако, что при малых углах рассеяния поляризационный эффект играет существенную роль вплоть до очень малых значений энергии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ramsauer, Ann. d. Phys., **64**, 513 (1921).
2. Ramsauer, Ann. d. Phys., **66**, 545 (1921).
3. Townsend and Bailey, Phil. Mag., **43**, 593 (1922); **44**, 1033 (1922).
4. Ramsauer and Kollath, Ann. d. Phys., **3**, 536 (1929).
5. Kollath, Phys. Zs., **31**, 985 (1931).
6. Brode, Rev. Mod. Phys., **5**, 258 (1933).
7. McMillen, Rev. Mod. Phys., **11**, 84 (1939).
8. Massey and Burhop, Electronic and Ionic Impact Phenomena.
9. Bullard and Massey, Proc. Roy. Soc., **A130**, 579 (1931).
10. Arnot, Proc. Roy. Soc., **A133**, 615 (1931).
11. Ramsauer and Kollath, Ann. d. Phys., **12**, 529 (1932).
12. Slater, Phys. Rev., **36**, 57 (1930).
13. Allis and Morse, Zs. f. Phys., **70**, 567 (1931).
14. Holtsmark, Zs. f. Phys., **55**, 437 (1929).
15. Morse, Rev. Mod. Phys., **4**, 577 (1932).
16. Holtsmark, Zs. f. Phys., **66**, 49 (1930).
17. Macdougall, Proc. Roy. Soc., **A136**, 549 (1932).
18. Hartree, Kronig, Petersen, Physica, **1**, 901 (1934).
19. Bates and Massey, Proc. Roy. Soc., **A192**, 1 (1947).
20. Ramsauer and Kollath, Ann. d. Phys., **12**, 837 (1932).
21. Arnot, Proc. Camb. Phil. Soc., **32**, 161 (1936).
22. Arnot and Baines, Proc. Roy. Soc., **A146**, 651 (1934).
23. Henneberg, Zs. f. Phys., **83**, 555 (1933).
24. Massey and Mohr, Nature, **130**, 276 (1932).
25. McMillen, Phys. Rev., **46**, 983 (1934).
26. Childs and Massey, Proc. Roy. Soc., **A142**, 509 (1933).
27. Shaw and Snyder, Phys. Rev., **58**, 600 (1940).
28. Oppenheimer, Phys. Rev., **32**, 361 (1928).
29. Feenberg, Phys. Rev., **40**, 40 (1932).
30. Фок, Zs. f. Phys., **61**, 126 (1930).
31. Mott and Sneddon, Wave Mechanics and its Applications.
32. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., **A132**, 605 (1931); **A136**, 289 (1931); **A139**, 187 (1932).
33. Allis and Morse, Phys. Rev., **44**, 269 (1933).
34. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., **A146**, 880 (1934).
35. Whiddington, Nature, **133**, 685 (1934).

## НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С АТОМАМИ

В этой главе мы ограничимся рассмотрением быстрых электронов ( $v \gg e^2/h$ ). Для быстрых электронов применимо первое приближение теории Борна, дающее возможность вычислить тормозную способность любого вещества, вероятность ионизации внутренних уровней атома и т. д. с достаточной степенью точности, чтобы можно было сравнивать получаемые при этом результаты с экспериментальными данными. Мы исследуем прежде всего неупругие столкновения электронов с атомами водорода и гелия и обобщим затем результаты, полученные для этих простых случаев, на более сложные атомы.

## § 1. Общие формулы

Рассмотрим столкновение электрона с атомом, в результате которого атом переходит из  $m$ -го состояния в  $n$ -е. Если  $E_m$  и  $E_n$  — значения энергии, отвечающие этим атомным состояниям, а  $v$  и  $v_{mn}$  — начальная и конечная скорости сталкивающегося электрона, то

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_{mn}^2) = E_n - E_m. \quad (11.1)$$

В гл. VIII было показано, что в пределах применимости первого приближения теории Борна дифференциальное сечение, соответствующее столкновению, определяется выражением

$$I_{mn}(\theta) d\omega = \frac{4\pi^2 m^2 k_{mn}}{h^4 k} \left| \int \int V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \exp [i(k_{mn} \mathbf{n}_1 - k \mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{R}] \times \right. \\ \left. \times \psi_n^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{R} \right|^2 d\omega, \quad (11.2)$$

где  $kh \mathbf{n}_0/2\pi$  и  $k_{mn} h \mathbf{n}_1/2\pi$  — начальное и конечное значения импульса сталкивающегося электрона, а  $\psi_m$  и  $\psi_n$  — волновые функции, характеризующие начальное и конечное состояния атома. Под энергией взаимодействия  $V$  подразумевается кулонова энер-



гия взаимодействия между падающим электроном и атомным электроном<sup>1)</sup>, равная  $e^2/|r - R|$ .

Заметим, что вероятность перехода из одного состояния в другое, принадлежащее к иной системе термов (например, вероятность синглетно-триплетного перехода в случае гелия), в этом приближении равна нулю, так как возмущающий потенциал  $V$  симметричен по отношению к координатам атомных электронов, в то время как волновые функции  $\psi_n, \psi_m$  обладают иными свойствами симметрии. Интеграл (11.2) равен поэтому нулю. Этот результат находится в согласии с экспериментальными данными, относящимися к быстрым столкновениям; он не оправдывается, однако, в случае медленных столкновений. Как будет показано в § 5, это связано с тем обстоятельством, что излагаемая теория не учитывает электронного обмена.

Если сталкивающийся электрон ионизует атом, то  $n$ -е состояние будет принадлежать непрерывному спектру. Уровень непрерывного спектра мы будем характеризовать величиной  $x$ , связанной с энергией этого уровня соотношением

$$E_x = \frac{x^2 h^2}{8\pi^2 m}. \quad (11.3)$$

Вопрос о нормировке волновых функций для непрерывного спектра рассматривается в гл. XIV, § 2. Эти функции нормируются таким образом, чтобы дифференциальное сечение (11.2), будучи умноженным на  $dx$ , соответствовало такому интервалу значений энергии, для которых  $x$  лежит в интервале между  $x$  и  $x + dx$ ; таким образом,

$$\int_0^{\infty} \psi_x(\mathbf{r}) \psi_{x'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta(x - x'). \quad (11.4)$$

Дифференциальное сечение, соответствующее возбуждению группы непрерывных энергетических уровней, лежащих в интервале между  $x$  и  $x + dx$ , определится при этом выражением

$$I_{mx}(\theta) dx = \frac{4\pi^2 m^2}{h^4} \frac{k_{mx}}{k} \left| \iint V \exp \{i(k_{mx} \mathbf{n}_1 - k\mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{R}\} \times \right. \\ \left. \times \psi_x^* \psi_m d\mathbf{r} d\mathbf{R} \right|^2 dx. \quad (11.5)$$

**Введение импульсов в качестве переменных.** Во многих случаях оказывается удобным перейти от угловых переменных к импульсам. Вектор

$$\frac{(k_{mn} \mathbf{n}_1 - k\mathbf{n}_0) \hbar}{2\pi}$$

<sup>1)</sup> Кулоново взаимодействие между падающим электроном и атомным ядром здесь роли не играет ввиду ортогональности атомных волновых функций.

характеризует изменение импульса падающего электрона. Если мы выберем этот вектор за ось полярных координат, то<sup>1)</sup>

$$\exp \{i(k_{mn} \mathbf{n}_1 - k\mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{R}\} = e^{iKX}, \quad (11.6)$$

где

$$K = |k_{mn} \mathbf{n}_1 - k\mathbf{n}_0| = (k_{mn}^2 + k^2 - 2kk_{mn} \cos \theta)^{1/2}. \quad (11.7)$$

Скаляр  $K$  представляет собой численное значение изменения импульса при рассеянии электрона на угол  $\theta$ . Учитывая, что

$$K dK = kk_{mn} \sin \theta d\theta$$

для эффективного сечения, соответствующего изменению импульса в интервале от  $K$  до  $K + dK$ , получаем выражение

$$I_{mn}(K) dK = \frac{8\pi^3 m^2 K dK}{h^4 k^2} \left| \iint V e^{iKX} \psi_m \psi_n^* d\mathbf{r} d\mathbf{R} \right|^2. \quad (11.8)$$

Это выражение приобретет более простой вид, если мы выполним интегрирование по координатам сталкивающегося электрона. Пусть атомные электроны характеризуются индексами  $1, 2, \dots, Z$ . В таком случае

$$\int V e^{iKX} d\mathbf{R} = e^2 \sum_{s=1}^{s=Z} \int \frac{e^{iKX}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_s|} d\mathbf{R}.$$

Воспользовавшись формулой [1]

$$\int \frac{\exp(i\mathbf{K}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{4\pi}{K^2} e^{i\mathbf{K}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}},$$

имеем

$$\int V e^{iKX} d\mathbf{R} = \frac{4\pi e^2}{K^2} \sum_{s=1}^{s=Z} e^{iKx_s}. \quad (11.9)$$

Подставляя (11.9) в (11.8), окончательно получаем

$$I_{mn}(K) dK = \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{k^2 h^4} \frac{dK}{K^3} |\varepsilon_{mn}(K)|^2, \quad (11.10)$$

где

$$\varepsilon_{mn}(K) = \sum_{s=1}^{s=Z} \int e^{iKx_s} \psi_m \psi_n^* d\mathbf{r}. \quad (11.11)$$

Эффективное сечение, соответствующее переходу  $mn$ , мы найдем, проинтегрировав дифференциальное сечение (11.10) в пределах

<sup>1)</sup> См. гл. VII, § 1. Мы пишем здесь  $X$  вместо  $Z$ , так как  $Z$  обозначает у нас эффективный заряд ядра.

возможных изменений импульса:

$$Q_{mn}(k) = \sum_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} I_{mn}(K) dK. \quad (11.12)$$

В следующих параграфах мы исследуем эти пределы для частного случая быстрых электронов. Легко показать, что

$$\begin{aligned} K_{\text{макс.}} &= k + k_{mn}, \\ K_{\text{мин.}} &= k - k_{mn} \end{aligned}$$

и что, в силу соотношения (11.1),

$$k^2 = k_{mn}^2 + \frac{8\pi^2 m (E_n - E_m)}{h^2}.$$

В случае быстрых столкновений имеем

$$k_{mn} \approx k - \frac{4\pi^2 m (E_n - E_m)}{kh^2},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} k + k_{mn} &\approx 2k, \\ k - k_{mn} &\approx \frac{4\pi^2 m (E_n - E_m)}{h^2 k}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

## § 2. Вычисление дифференциальных сечений для водорода и гелия. Угловое распределение неупруго рассеянных электронов

1. Возбуждение дискретных уровней. Для вычисления дифференциального сечения  $I_{mn}(K)dK$  необходимо знать волновые функции, характеризующие состояния  $m$  и  $n$ . Мы будем предполагать в дальнейшем, что исходный уровень соответствует нормальному состоянию, и будем приписывать ему индекс 0. Волновые функции нормального состояния (см. IX, § 3) суть: для водорода

$$\psi_0 = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r_1/a_0}, \quad (11.14a)$$

для гелия

$$\psi_0 = Z^3 (\pi a_0^3)^{-1} e^{-Z(r_1+r_2)/a_0}, \quad (11.14b)$$

причем в последнем случае  $Z = 1,69$ .

Для возбужденных состояний водородоподобных атомов волновые функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{nlm} &= N_{nlm} r_1^l L_{n-1}^{2l+1} \left( \frac{2r_1 Z}{na_0} \right) \exp\left(-\frac{Zr_1}{na_0}\right) P_l^m(\cos\theta_1) e^{\pm im\varphi_1}, \\ N_{nlm}^2 &= \frac{2^{2l}}{\pi^2} (2l+1) \frac{(l-m)!(n-l-1)!}{(l+m)! [(n+l)!]^3} \left( \frac{Z}{na_0} \right)^{2l+3}, \end{aligned} \quad (11.15)$$

где  $Z$  — заряд ядра. В случае гелия оказывается необходимым пользоваться какими-либо приближенными значениями функции  $\psi_{nlm}$ . Экарт [2] показал, что хорошим приближением к волновой функции возбужденного состояния атома гелия (отличного от  $S$ -состояния) является симметричная комбинация произведений двух волновых функций, одна из которых описывает нормальное состояние электрона в поле ядра с зарядом, равным двум, а другая — возбужденное состояние электрона в поле ядра с зарядом, равным единице<sup>1</sup>). Если волновая функция электрона в состоянии  $nlm$  в поле заряда  $Ze$  имеет вид

$$\psi_{nlm} \frac{Z}{r},$$

то в качестве достаточно хорошего приближения для волновой функции возбужденного синглетного состояния атома гелия мы можем воспользоваться выражением

$$2^{-1/2} \left[ \psi_0 \left( \frac{2}{r_1} \right) \psi_{nlm} \left( \frac{1}{r_2} \right) + \psi_0 \left( \frac{2}{r_2} \right) \psi_{nlm} \left( \frac{1}{r_1} \right) \right], \quad (11.16)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум электронам.

Подставляя волновые функции (11.16), (11.15) и (11.14) в выражение (11.10), определяющее дифференциальное сечение, получаем

$$\varepsilon_{nlm}(K) = \alpha \int \psi_0 \left( \frac{Z}{r'} \right) \psi_{nlm}^* \left( \frac{Z'}{r'} \right) e^{iKx'} d\tau',$$

где для водорода

$$\alpha = 1, \quad Z = Z' = 1,$$

для гелия

$$\alpha = 2^{1/2}, \quad Z = 1,69, \quad Z' = 1.$$

Этот интеграл может быть вычислен [4] при всех значениях  $nlm$ ; мы получаем при этом

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nlm}(K) &= 2^{2l+3} n^{l+1} (2l+1)^{1/2} Z^{3/2} (l+1)! \times \\ &\times [(n-l-1)!]^{1/2} [(n+l)!]^{-1/2} (Ka_0)^l \frac{[(nZ-1)^2 + 4\zeta^2]^{1/2} (n-l-3)}{[(nZ+1)^2 + 4\zeta^2]^{1/2} (n+l+3)} \times \\ &\times \{ (nZ+1)[nZ-1]^2 + 4\zeta^2 \} C_{n-l-1}^{l+2}(x) - 2nZ [(nZ-1)^2 + 4\zeta^2]^{1/2} \times \\ &\times [(nZ+1)^2 + 4\zeta^2]^{1/2} C_{n-l-2}^{l+2}(x) + (nZ-1) \times \\ &\times [(nZ+1)^2 + 4\zeta^2] C_{n-l-3}^{l+2}(x) \}, \end{aligned} \quad (11.17)$$

<sup>1</sup>) Для  $S$ -состояний волновая функция имеет более сложный вид [3].

где

$$x = (n^2 Z^2 - 1 + 4\zeta^2) \{[(nZ + 1)^2 + 4\zeta^2][(nZ - 1)^2 + 4\zeta^2]\}^{-1/2}, \quad (11.18)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} K n a_0.$$

Величины  $C_s^\nu$  определяются, как коэффициенты разложения

$$(1 - 2ut + u^2)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{\infty} C_s^\nu(t) u^s.$$

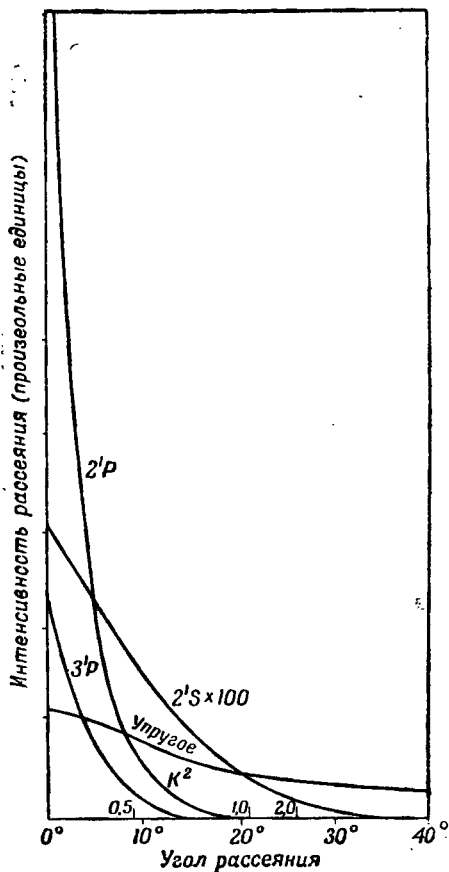
При  $s=0, 1, 2, 3$  эти коэффициенты равны соответственно

$$C_0^\nu(x) = 1, \quad C_1^\nu(x) = 2\nu x,$$

$$C_2^\nu(x) = \nu[(2\nu + 1)x^2 - 1],$$

$$C_3^\nu(x) = 2\nu(\nu + 1)x \times \\ \times \left[ \frac{2}{3}(\nu + 2)x^2 - 1 \right]. \quad (11.19)$$

При исследовании этих соотношений мы ограничимся рассмотрением второго и третьего квантовых уровней. На фиг. 37 приведено угловое распределение электронов с начальной энергией 200 эв, рассеянных в результате возбуждения различных квантовых уровней атомов гелия. Для сравнения приведена также кривая распределения, соответствующая случаю упругого рассеяния. Из фиг. 37 ясно, что: а) вероятность возбуждения разрешенных оптических уровней значительно больше, чем вероятность возбуждения запрещенных оптических уровней; б) вероятность возбуждения очень быстро убывает по мере уве-



Фиг 37. Угловое распределение электронов с исходной энергией 200 эв, рассеянных атомами гелия после возбуждения различных уровней. Значения  $K^2$  приведены для перехода  $2^1P$  в атомных единицах.

личения угла рассеяния; при малых углах рассеяния возбуждение уровня  $2^1P$  более вероятно, нежели упругое соударение;

однако в случае больших углов рассеяния имеет место обратное; с) неупругим рассеянием можно пренебречь, если

$$Ka_0 \gg Z.$$

Это следует из формул (11.17), (11.18) и (11.19), свидетельствующих о том, что при  $Ka_0 \gg Z$  вероятность возбуждения  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -состояний убывает соответственно, как  $K^{-12}$ ,  $K^{-14}$ ,  $K^{-16}$ . Принимая во внимание, что  $Ze^2/2a_0$  представляет собой ионизационный потенциал атома, мы можем сказать, что дифференциальным сечением для неупругих столкновений можно пренебречь при условии

$$K \gg \frac{V_i}{e^2},$$

Таблица 12

Эффективное сечение  $2\pi I(\theta)$  в единицах  $\pi a_0^2$  при различных углах рассеяния

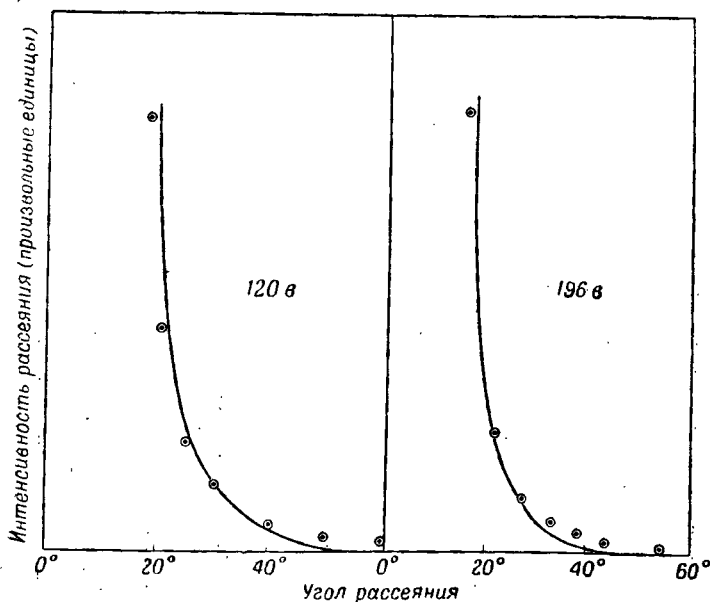
| Возбуждаемое состояние | Энергия возбуждающих электронов, e | Углы рассеяния |        |        |        |        |        |
|------------------------|------------------------------------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                        |                                    | 0°             | 5°     | 10°    | 20°    | 30°    | 40°    |
| 1 <sup>1</sup> S       | 100                                | 0,99           | 0,98   | 0,92   | 0,79   | 0,61   | 0,45   |
|                        | 200                                | 0,99           | 0,97   | 0,88   | 0,65   | 0,41   | 0,25   |
|                        | 400                                | 0,99           | 0,95   | 0,77   | 0,45   | 0,22   | 0,10   |
| 2 <sup>1</sup> S       | 100                                | 0,126          | 0,120  | 0,086  | 0,049  | 0,020  | 0,0063 |
|                        | 200                                | 0,155          | 0,126  | 0,086  | 0,024  | 0,0039 | 0,068  |
|                        | 400                                | 0,166          | 0,120  | 0,057  | 0,0051 | 0,086  | 0,03   |
| 2 <sup>1</sup> P       | 100                                | 7,8            | 4,4    | 1,78   | 0,32   | 0,056  | 0,013  |
|                        | 200                                | 17,7           | 4,5    | 0,99   | 0,068  | 0,0088 | 0,07   |
|                        | 400                                | 39             | 2,6    | 0,33   | 0,009  | 0,0003 | 0,02   |
| 3 <sup>1</sup> P       | 100                                | 1,84           | 1,20   | 0,45   | 0,103  | 0,021  | 0,0043 |
|                        | 200                                | 4,5            | 1,33   | 0,24   | 0,027  | 0,0025 | 0,028  |
|                        | 400                                | 9,7            | 0,81   | 0,084  | 0,0035 | 0,014  | 0,08   |
| 3 <sup>1</sup> D       | 100                                | 0,0109         | 0,0098 | 0,0070 | 0,0028 | 0,07   | 0,014  |
|                        | 200                                | 0,0132         | 0,010  | 0,0052 | 0,086  | 0,08   | 0,07   |
|                        | 400                                | 0,0142         | 0,0094 | 0,0023 | 0,011  | 0,03   | 0,01   |
| 4 <sup>1</sup> P       | 100                                | 0,68           | 0,46   | 0,215  | 0,043  | 0,0092 | 0,0020 |
|                        | 200                                | 1,71           | 0,52   | 0,131  | 0,011  | 0,0012 | 0,013  |
|                        | 400                                | 3,7            | 0,33   | 0,048  | 0,0015 | 0,06   | 0,04   |

где  $V_i$  — ионизационный потенциал рассматриваемого атома. Этот результат может быть обобщен на случай любого атома.

В табл. 12 приведены значения  $2\pi I_{on}(\theta)$  при различных скоростях столкновений и различных углах рассеяния для случая неупругих соударений электронов с атомами гелия. Формулы, полученные с помощью первого приближения теории Борна, нельзя считать очень точными даже для электронов с энергией 200 e; сравнение этих формул с опытными данными указывает, однако, на общее хорошее согласие теории с опытом<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Детальный разбор этого вопроса см. [5].

Угловое распределение электронов, рассеянных атомами гелия, было исследовано Даймондом и Ватсоном [6] для электронов с энергией 200 *e*, Мак-Милланом [7] для электронов с энергией 100 *e* и Мором и Николлем [8] для электронов с энергиями 54, 83, 120 и 196 *e*. Как это можно видеть из фиг. 38, наблюдаемые

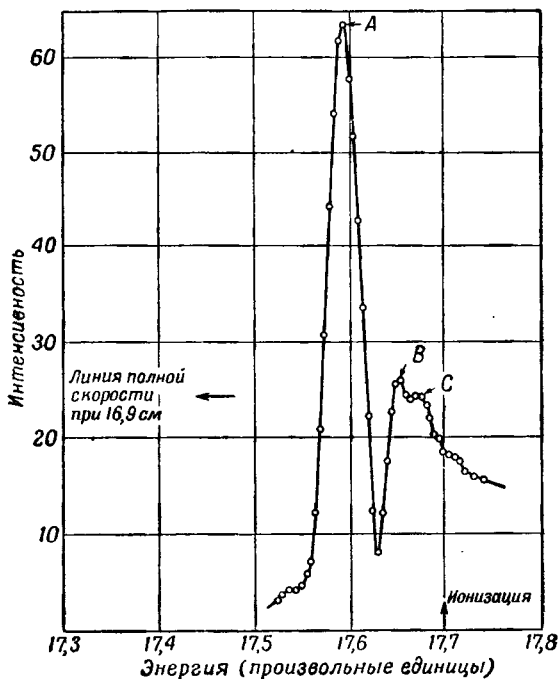


Фиг. 38 Экспериментальные точки и теоретические кривые (вычисленные по формуле Борна) углового распределения электронов, неупруго рассеянных атомами гелия.

ими угловые распределения электронов при возбуждении уровня  $2P$  хорошо согласуются с теоретическими результатами. В случае более медленных электронов (энергия которых меньше 80 *e*) при больших углах рассеяния, как этого и следовало ожидать (см. § 5), согласие теории с опытом не является удовлетворительным. Сравнение теоретических<sup>1)</sup> и экспериментальных [12—14] данных для электронов, неупруго рассеянных атомами водорода, приводит к аналогичным результатам (теоретические расчеты при этом относятся к атомному водороду, а опытные данные — к молекулярному водороду; при рассматриваемых скоростях столкновений это обстоятельство не играет, однако, существенной роли).

<sup>1)</sup> Подробные вычисления для рассеяния электронов атомным водородом см. [9—11].

Измеренные относительные значения вероятностей неупругого и упругого рассеяний также очень хорошо согласуются с теорией. До сих пор не удавалось наблюдать случаев возбуждения электронами оптически запрещенных переходов в гелии или водороде; это свидетельствует о том, что интенсивность таких



Фиг. 39. Анализ скоростей неотклоненных электронов с исходной энергией 120 э, рассеянных атомами гелия.

A— $21,24 \pm 0,03$ э ( $1^1S_0 - 2^1P_1 - 21,12$ э); B— $23,17 \pm 0,04$ э ( $1^1S_0 - 3^1P_1 - 22,98$ э); C— $23,84 \pm 0,10$ э ( $1^1S_0 - 4^1P_1 - 23,63$ э).

переходов мала. Особенно ясно это следует из опытов Уидингтона и Робертса [15], а также Ван-Атта [16], исследовавшего только электроны, не испытавшие отклонений при столкновениях. На фиг. 39 приведена экспериментальная кривая распределения по скоростям для электронов с первоначальной энергией 200 э, не испытавших отклонений при прохождении через гелий. На этой кривой ясно можно различить точки, отвечающие электронам, возбуждавшим  $2^1P$ -,  $3^1P$ - и  $4^1P$ -уровни; при этом нет, однако, никаких указаний на наличие электронов, испытавших неупругое рассеяние какого-либо другого рода (помимо электронов, принимавших участие в ионизирующих столкновениях). Эксперименталь-



ные данные об относительной интенсивности возбуждения различных  $P$ -уровней также находятся в хорошем согласии с теорией. Данные Ван-Атта относятся лишь к электронам, рассеянными под углами от 0 до  $1^{\circ}40'$ ; изменения интенсивности, наблюдаемые при изменении скорости электронов, возбуждающих уровень  $2^1P$ , находятся при этом в согласии с результатами, приведенными в табл. 12; при увеличении скорости имеет место постепенное возрастание интенсивности.

Теория согласуется, таким образом, с опытом именно тогда, когда этого следует ожидать. К анализу экспериментальных данных мы вернемся в дальнейшем в § 3 в связи с вычислением полных сечений. Перейдем теперь к вычислению дифференциальных сечений, соответствующих возбуждению уровней непрерывного спектра (т. е. ионизации атома).

**2. Возбуждение непрерывного спектра. Ионизация.** При экспериментальном изучении ионизирующих столкновений невозможно отличить друг от друга электроны, испытавшие рассеяние, и электроны, испускаемые атомами. Если исследуются электроны, обладающие после столкновения определенной энергией  $E'$ , то мы имеем при этом дело не только с электронами, потерявшими при столкновении энергию  $E - E'$ , но также и с электронами, вылетевшими из атомов с энергией  $E'$  ( $E$  — энергия падающего электрона). При анализе опытных данных в общем случае необходимо учитывать интерференцию соответствующих двух групп электронных волн (см. гл. VIII, § 4); при некоторых определенных условиях эта интерференция может, однако, оказаться малой и мы можем воспользоваться приближенной теорией, которая ее не учитывает. При вычислении вероятности ионизации атома электронами с данной скоростью учет интерференционных эффектов не должен повлиять на результаты вычислений; при построении теории мы можем поэтому не принимать этих эффектов во внимание. В дальнейшем при рассмотрении углового распределения электронов и распределения их по скоростям мы выясним, при каких условиях можно пренебречь интерференцией.

При движении электрона в направлении, определяемом полярными углами  $(\chi, \psi)$  в поле заряда  $Ze$ , волновая функция, соответствующая  $x$ -му состоянию непрерывного спектра, имеет вид [17] <sup>1)</sup>

$$\psi_x^* = \frac{x}{2\pi} \left( \frac{n}{1 - e^{-2\pi n}} \right)^{1/2} \frac{e^{ixr}}{\Gamma(1 - in)} \int_0^{\infty} u^{-in} e^{-u} J_0 [2(ix\xi u)^{1/2}] du,$$

<sup>1)</sup> Нормировка функции  $\psi_x^*$  такова, что она представляет одновременно и плоскую и сферическую волны.

где

$$\xi = r(1 + \cos \Theta),$$

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi \cos (\varphi - \psi)$$

и

$$n = \frac{Z}{\alpha a_0}. \quad (11.20)$$

В случае водорода мы должны положить здесь  $Z = 1$ ; получить волновую функцию в случае гелия, однако, не так просто. В качестве грубого приближения можно воспользоваться волновой функцией, характеризующей возбужденное состояние электрона в атоме водорода, положив заряд ядра равным 1,69 (эффективный заряд ядра в нормальном состоянии). Эта функция обладает тем преимуществом, что она ортогональна по отношению к волновой функции нормального состояния: для больших скоростей столкновений, при которых оказывается справедливым первое приближение теории Борна, ошибка будет при этом, во всяком случае, невелика.

Подставив эти значения волновых функций в формулу (11.10), мы получим дифференциальное сечение, соответствующее электрону, вылетающему из атома с энергией  $E_x$  внутри телесного угла  $d\sigma$  в направлении  $(\chi, \psi)$  относительно направления движения возбуждающего электрона, причем последний рассеивается в направлении  $(\theta, \varphi)$  внутри телесного угла  $d\omega$  [3]:

$$I_x d\sigma d\omega dx = \frac{2^8 \mu^6 \kappa k_x \exp \{ -(2\mu/\kappa) \operatorname{arctg} [2\mu\kappa/(\mu^2 + K^2 - x^2)] \}}{\pi a_0^2 k K^2 (1 - e^{-2\pi\mu/\kappa}) (\mu^2 + K^2 + x^2 - 2Kx \cos \delta)^4} \times$$

$$\times \frac{[(K - x \cos \delta)^2 + \mu^2]}{[(\mu^2 + K^2 - x^2)^2 + 4\mu^2 x^2]} d\sigma d\omega dx. \quad (11.21)$$

Здесь  $\delta$  — угол между направлением вектора  $k\mathbf{n}_0 - k_x\mathbf{n}_1$  (характеризующего изменение импульса падающего электрона) и направлением  $\chi, \psi, \mu = Z/a_0$ .

Отметим, что выражение (11.21) имеет максимум при  $\delta = 0$ ; это соответствует сохранению импульса при столкновении между падающим и атомным электронами. Для нахождения углового распределения испускаемых электронов необходимо проинтегрировать (11.21) по всем углам рассеяния сталкивающегося электрона. Это интегрирование может быть выполнено лишь численно. Типичные получаемые при этом результаты приведены на фиг. 40. Максимумы функции (11.21) определяются соотношением

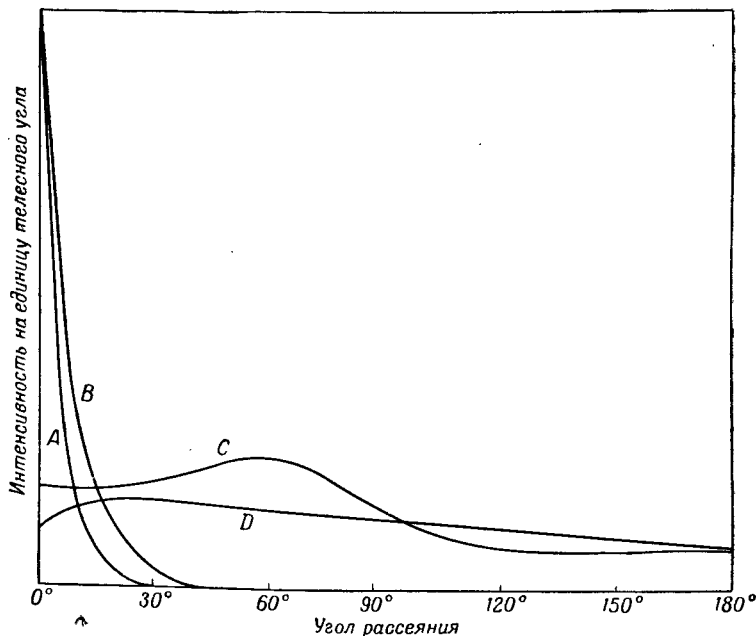
$$k^2 + x^2 - 2kx \cos \chi = k_x^2,$$

выражающим условие сохранения импульса.

Интегрирование по углам испускания может быть выполнено в аналитической форме; при этом мы получаем

$$I_x(\theta, \varphi) d\omega dx = \frac{2^{10} z k_x}{a_0^2 k K^2} \frac{\mu^6 \left[ K^2 + \frac{1}{3} (\mu^2 + x^2) \right]}{[\mu^4 + 2\mu^2 (K^2 + x^2) + (K^2 - x^2)^2]^3} \times \\ \times \exp \left( -\frac{2\mu}{x} \operatorname{arctg} \frac{2\mu x}{K^2 - x^2 + \mu^2} \right) (1 - e^{-2\pi\mu/x})^{-1} d\omega dx. \quad (11.22)$$

На фиг. 40 приведены кривые углового распределения рассеянных электронов, вычисленные с помощью этой формулы, а на



Фиг. 40. Угловые распределения рассеянных и испускаемых электронов с исходной энергией 200 эв,

A—рассеянные электроны с энергией 176э; B—рассеянные электроны с энергией 163э; C—испускаемые электроны с энергией 13,6э; D—испускаемые электроны с энергией 0,85э.

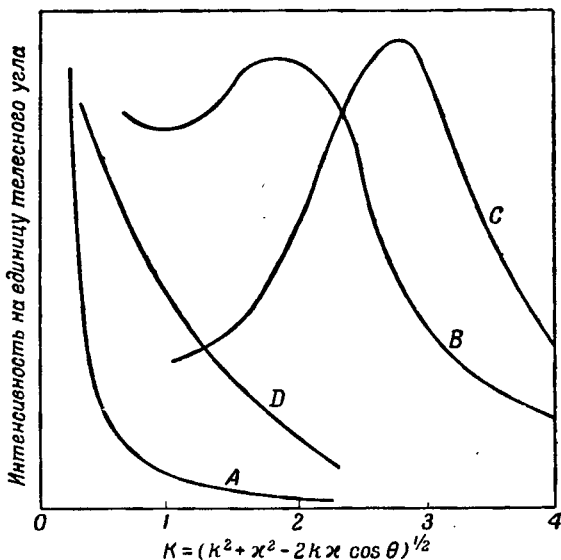
фиг. 41 — кривые, характеризующие зависимость углового распределения рассеянных электронов от импульса  $K$ . Из этих кривых следует:

а) при малых скоростях испускания атомных электронов интенсивность рассеяния монотонно убывает с возрастанием угла, как и в случае возбуждения дискретных уровней;

б) при больших скоростях испускания атомных электронов угловое распределение имеет резкий максимум в точке

$$K^2 = \alpha^2, \quad (11.23)$$

что соответствует сохранению импульса при столкновении между атомным и падающим электронами;



Фиг. 41. Угловое распределение электронов, рассеянных после ионизации атома гелия.

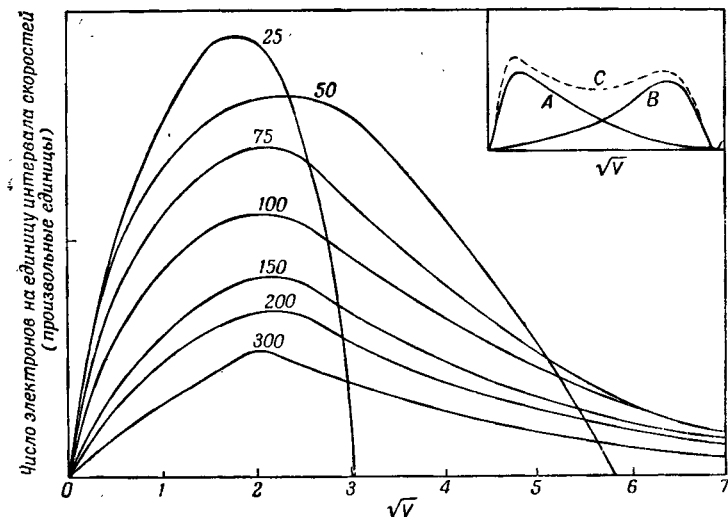
| Кривая | Падающий электрон | Испускаемый электрон |
|--------|-------------------|----------------------|
| A      | $k=4,7$ (300 e)   | $\alpha=0,5$ (2,5 e) |
| B      | $k=4,7$ (300 e)   | $\alpha=2,0$ (55 e)  |
| C      | $k=5,9$ (472 e)   | $\alpha=3,0$ (122 e) |
| D      | $k=4,7$ (300 e)   | $\alpha=1,0$ (14 e)  |

в) при больших значениях  $K$  вероятность ионизации быстро убывает.

*Распределение испускаемых электронов по скоростям.* Распределение испускаемых электронов по скоростям мы найдем, проинтегрировав выражение (11.22) по всем углам рассеяния. Это интегрирование может быть выполнено только численно. На фиг. 42 приведены кривые распределения электронов по скоростям для случая ионизации атомов водорода. При ионизации электронами, начальная энергия которых превышает 100 e, вероятность иониза-

дии по мере увеличения скорости испускания сначала быстро возрастает до некоторого максимального значения, а затем быстро убывает.

Из резкой асимметрии кривой распределения испускаемых электронов по скоростям следует, что интерференционные явления играют существенную роль только для электронов с промежуточными значениями скоростей. Общий вид результирующей



Фиг. 42. Распределение испускаемых электронов по скоростям при ионизирующих столкновениях с атомами водорода.

A—испускаемые электроны; B—рассеянные электроны; C—все электроны. Величина  $V$  дана в вольтах; числа у кривых указывают энергию падающих электронов в вольтах.

кривой распределения показан на фиг. 42 пунктиром. Опыты Тейта и Пальмера [18] приводят к качественному подтверждению этого результата.

Вясним теперь, при каких условиях при рассмотрении углового распределения можно пренебречь явлением интерференции. Из фиг. 42 следует, что для электронов с малыми значениями энергии угловое распределение сходно по форме с распределением, полученным с помощью формулы (11.21), тогда как для электронов с большой энергией угловое распределение имеет форму (11.22). Для электронов с промежуточными значениями скоростей угловое распределение должно существенным образом зависеть от интерференционных явлений. В экспериментальной литературе почти не существует данных по этому вопросу<sup>1)</sup>. Тейт и Паль-

<sup>1)</sup> Детальный обзор см. [5].

мер показали, однако, что в парах ртути угловое распределение в случае быстрых электронов, появляющихся в результате ионизирующих столкновений («рассеянных» электронов), весьма сходно с распределением электронов, наблюдающимся при возбуждении дискретных уровней, — его интенсивность очень быстро убывает по мере увеличения угла рассеяния. Этот результат находится в согласии с теоретической кривой, приведенной на фиг. 40. В случае медленных электронов имеет место сравнительно малое изменение интенсивности рассеяния при изменении угла. Этого и следовало ожидать на основании кривых, приведенных на фиг. 40, если учесть то обстоятельство, что в этих опытах поток электронов был неоднородным (отвечая интервалу энергии в 30 e); при таких условиях должен был бы сгладиться любой максимум. Никаких определенных экспериментальных данных, свидетельствующих о наличии интерференционных явлений, до сих пор получено не было.

**3. Угловое распределение неупруго рассеянных электронов.**  
*Атомы водорода.* Формула (11.10) определяет дифференциальное сечение, соответствующее данному конечному  $n$ -му состоянию. Если атом водорода находился первоначально в нормальном состоянии то, просуммировав выражение (11.10) по всем возможным конечным состояниям, получим

$$\sum_{n \neq 0} I_{0n}(K) dK = \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{h^4 k^2 K^3} \sum_{n \neq 0} \left| \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau \right|^2 dK. \quad (11.24)$$

Разлагая  $e^{iKx} \psi_0$  в ряд по атомным волновым функциям, имеем

$$e^{iKx} \psi_0 = \sum_n \psi_n \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau.$$

Умножив это выражение на комплексно сопряженное, получаем

$$|\psi_0|^2 = \left| \sum_n \psi_n \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau \right|^2.$$

Интегрируя обе части этого выражения по всему пространству и принимая во внимание ортогональность волновых функций  $\psi_n$ , имеем

$$1 = \left| \int e^{iKx} |\psi_0|^2 d\tau \right|^2 + \sum_{n \neq 0} \left| \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau \right|^2.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (11.24) дает

$$\sum_{n \neq 0} I_{0n}(K) dK = \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{h^4 k^2} \frac{dK}{K^3} \{1 - [F(K)]^2\}, \quad (11.25)$$

где  $F$  — атомный фактор рассеяния для атома водорода [см. форму-

лу (7.9)], равный

$$F(K) = \int e^{iKx} |\psi_0|^2 d\tau = \left(1 + \frac{1}{4} K^2 a_0^2\right)^{-2}.$$

Условие применимости этой формулы заключается в малости членов суммы (11.24), соответствующих таким переходам  $0 \rightarrow n$ , которые невозможны с энергетической точки зрения. Для этого  $K$  должно превышать минимальное изменение импульса при переходе к такому наиболее высокому энергетическому состоянию, вероятность возбуждения которого заметно отлична от нуля; если  $E_x$  — энергия указанного состояния, то из (11.13) следует, что

$$K > \frac{4\pi^2 m (E_x - E_0)}{kh^2}.$$

Вероятность возбуждения быстро убывает по мере возрастания  $E_x$ ; ее, безусловно, можно считать малой, когда

$$E_x > -4E_0.$$

Условие применимости формулы (11.25) приобретает, таким образом, следующий вид:

$$K > \frac{20\pi^2 m |E_0|}{kh^2}.$$

Если энергия падающего электрона  $E$  велика по сравнению с энергией возбуждения данного атомного состояния, то

$$K^2 = (2k^2 - \lambda_n^2)(1 - \cos \theta) + \frac{1}{4} \frac{\lambda_n^4}{k^2} \cos \theta + \dots,$$

где

$$\lambda_n^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_n - E_0).$$

Для всех значений  $\theta$ , подчиняющихся условию

$$\theta \gg \frac{\lambda_n^2}{k^2}, \text{ т. е. } \gg \frac{|E_0|}{E}, \quad (11.26)$$

мы имеем, таким образом,

$$K = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \quad k_n \approx k. \quad (11.27)$$

Этот результат не зависит от  $n$ ; он верен, если  $E \gg E_n - E_0$ , т. е. для малых углов рассеяния (см. фиг. 40). При больших значениях углов мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что импульс вторичного (испускаемого) электрона равен приближенно  $\hbar k/2\pi$ . Энергия, потерянная падающим электроном, при этом равна

$$E_x - E_0 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} K^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (k^2 + k_x^2 - 2kk_x \cos \theta).$$

Принимая во внимание, что

$$E_x - E_0 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (k^2 - k_x^2),$$

имеем

$$K = k \sin \theta, \quad k_x = k \cos \theta. \quad (11.28)$$

При малых значениях  $\theta$  эти формулы тождественны с формулами (11.27); мы можем поэтому пользоваться ими при всех значениях  $\theta$ , удовлетворяющих условию (11.26).

Из (11.28) следует, что  $K$  и  $k_x$  не зависят от энергии возбуждения; мы можем поэтому преобразовать сумму (11.25), соответствующую определенному изменению импульса, в сумму, соответствующую определенному значению угла рассеяния, воспользовавшись для этого соотношением  $KdK = kk_n \sin \theta d\theta$  и формулами (11.28). Мы получим

$$2\pi \sum_n I_{0n}(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{h^4 k^4} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} k^2 a_0^2 \sin^2 \theta\right)^4} \right] d\theta.$$

Сопоставим эту формулу с формулой (9.9) для случая упругого рассеяния:

$$2\pi I(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{128\pi^5 m^2 e^4 a_0^4}{h^4} \frac{\left(8 + 4k^2 a_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(4 + 4k^2 a_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^4} \sin \theta d\theta.$$

При малых углах рассеяния [удовлетворяющих, однако, условию (11.26)], имеем

$$\frac{\sum I_{0n}(\theta)}{I(\theta)} = \text{ctg } \theta. \quad (11.29)$$

При малых значениях  $\theta$  неупругое рассеяние заметно превышает, таким образом, упругое рассеяние. При больших углах рассеяния получаем

$$2\pi \sum_n I_{0n}(\theta) = \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{h^4 k^4} \text{cosec}^4 \theta, \quad (11.30)$$

т. е. формулу Резерфорда для рассеяния одного электрона другим. Мы должны внести поправки в эту формулу, учтя интерференцию рассеянного и испускаемого электронов. Воспользовавшись формулой (5.26), при малых значениях  $e^2/hv$  получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_n I_{0n}(\theta) \sin \theta d\theta &= \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{k^4 h^4} \sin \theta \cos \theta \times \\ &\times (\text{cosec}^4 \theta - \text{cosec}^2 \theta \sec^2 \theta + \sec^4 \theta) = \\ &= \frac{64\pi^5 m^2 e^4}{k^4 h^4} \frac{4 - 3 \sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (11.31)$$



Сравним этот результат с соответствующей формулой для упругого рассеяния:

$$2\pi I(\theta) \sin \theta d\theta \sim \frac{16\pi^5 m^2 e^4}{h^4 k^4} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (11.32)$$

Из формул (11.29) и (11.31) следует, что неупругое рассеяние преобладает над упругим вблизи 0 и 90°, но может стать меньше упругого рассеяния при промежуточных значениях угла  $\theta$ .

*Обобщение на случай сложных атомов.* Морзе [19] показал, что если  $\theta$  удовлетворяет неравенству (11.26), то полное дифференциальное сечение для всех неупругих столкновений быстрых электронов с атомом, заряд ядра которого равен  $Ze^2$ , определяется выражением вида

$$\sum_n I_{on}(\theta) = \frac{4\pi^4 m^2 e^4 Z}{k^4 h^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} S \left( k \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (11.33)$$

где

$$S = 1 - ZF^2 + \int |\psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z)|^2 \sum_{k \neq 1}^Z \exp \left[ 2ik \sin \frac{1}{2} \theta (r_k \cos \theta_k - r_k \cos \theta_k) \right] d\tau_1, \dots, d\tau_Z; \quad (11.34)$$

$\psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z)$  — волновая функция, характеризующая основное состояние атома, а  $F$  — атомный фактор рассеяния (см. гл. VII, § 1).

Гейзенберг [20] предложил метод вычисления величины  $S$ , основанный на статистической модели атома по Томасу—Ферми. Он показал, что

$$S = 1 - \int_0^{x_0} x^2 \left\{ \left[ \frac{\varphi(x)}{x} \right]^{1/2} - \nu \right\}^2 \left\{ \left[ \frac{\varphi(x)}{x} \right]^{1/2} + \frac{1}{2} \nu \right\} dx, \quad (11.35)$$

где  $\nu = \mu / (6\pi Z)^{1/3}$ , значения  $\varphi$ ,  $x$ ,  $\mu$  определены в гл. IX, § 4, а  $x_0$  определяется уравнением

$$\left[ \frac{\varphi(x_0)}{x_0} \right]^{1/2} = \nu. \quad (11.36)$$

Бевилуга [21] подсчитал численное значение  $S$  по формуле (11.35); полученные им результаты приведены в табл. 13.

Таблица 13

Дифференциальные сечения  $I_{\text{неупр.}}(\theta)$  для неупругого рассеяния быстрых электронов атомами, вычисленные для поля Томаса—Ферми

| $\nu$ | $V\sqrt{\nu} \sin \frac{\theta}{2} / Z^2/3$<br>( $V$ в вольтах) | $S$   | $4Z^{5/3} I_{\text{неупр.}}(\theta)$<br>(в единицах $a_0^2$ ) |
|-------|---|-------|---|
| 0,05  | 0,278   | 0,319 | 9 920   |
| 0,1   | 0,556   | 0,486 | 942   |
| 0,2   | 1,112   | 0,674 | 81,7  |
| 0,3   | 1,668   | 0,776 | 18,6  |
| 0,4   | 2,224   | 0,839 | 6,35  |
| 0,5   | 2,781   | 0,880 | 2,72  |
| 0,6   | 3,337   | 0,909 | 1,36  |
| 0,7   | 3,893   | 0,929 | 0,75  |
| 0,8   | 4,449   | 0,944 | 0,45  |
| 0,9   | 5,005   | 0,954 | 0,28  |
| 1,0   | 5,561   | 0,963 | 0,19  |

### § 3. Полные сечения

1. Возбуждение дискретных оптических уровней. Полное сечение, соответствующее возбуждению  $n$ -го квантового состояния данного атома, находившегося первоначально в нормальном состоянии, определяется выражением

$$\int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} I_{0n}(K) dK. \quad (11.37)$$

Пределы интегрирования заданы при этом уравнениями (11.13). Для приближенного вычисления этого интеграла мы воспользуемся тем обстоятельством (см. фиг. 37 и табл. 12), что  $I_{0n}(K)$  становится очень малым при тех значениях  $K$ , для которых

$$K^2 > K_0^2, \quad (11.38)$$

где

$$K_0^2 = \frac{8\pi^2 m |E_0|}{h^2}.$$

В тех случаях, когда это условие не выполняется, мы можем разложить  $I_{0n}(K)$  в ряд по степеням  $K$ . Из (11.10) следует, что

$$I_{0n}(K) dK = \frac{128\pi^5 m^2 e^4 dK}{k^2 h^4} \left| \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau \right|^2.$$

Разлагая показательную функцию в ряд, получаем

$$I_{0n}(K) dK = \frac{128\pi^5 m^2 e^4 dK}{k^2 h^4} \left\{ K^2 |x_{0n}|^2 + \frac{1}{4} K^4 |(x^2)_{0n}|^2 + \dots \right\}, \quad (11.39)$$

где  $x_{0n}$ ,  $(x^2)_{0n}$ , ... — матричные элементы  $x$ ,  $x^2$ , ..., например,

$$(x^s)_{0n} = \int x^s \psi_0 \psi_n^* d\tau.$$

Разложение (11.39) справедливо в том случае, если неравенство (11.38) не выполняется. Если, однако, последнее выполняется, то  $I_{0n}(K)$  очень мало, и им можно пренебречь. Мы можем в таком случае записать

$$Q_{0n} \approx \frac{128\pi^5 m^2 e^4}{k^2 h^4} \int_{K_{\min}}^{K_0} \left\{ K^{-1} |x_{0n}|^2 + \frac{1}{4} K |(x^2)_{0n}|^2 + \dots \right\} dK.$$

Для разрешенных оптических переходов первый член этого выражения отличен от нуля, в случае быстрых электронов он значительно превышает остальные члены. Выполнив интегрирование при учете того, что  $|E_n| \ll |E_0|$ , и воспользовавшись выражением (11.13) для определения  $K_{\min}$ , получаем

$$Q_{0n} \approx \frac{64\pi^5 m^2 e^4}{k^2 h^4} |x_{0n}|^2 \ln \frac{2mv^2}{E_n - E_0}. \quad (11.40)$$

Если рассматриваемый переход связан не с дипольным, но с квадрупольным моментом, имеем, аналогично,

$$Q_{0n} \approx \frac{128\pi^7 m^3 e^4}{k^2 h^6} |(x^2)_{0n}|^2 |E_0|. \quad (11.41)$$

Отметим, что благодаря наличию логарифмического множителя в формуле (11.40) эффективные сечения, соответствующие возбуждению разрешенных оптических уровней, при увеличении скорости столкновения должны уменьшаться медленнее, нежели сечения, соответствующие запрещенным оптическим переходам.

Экспериментальные данные, относящиеся к этому вопросу, весьма скудны. Некоторые выводы могут быть сделаны на основании экспериментального изучения возбуждения различных спектральных линий. Этот метод был рассмотрен нами в гл. IX. Опыты Лиса [22] и Тиме [23] для гелия при больших скоростях столкновений не обнаружили, однако, какого-либо различия между  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -уровнями в отношении зависимости вероятности их возбуждения от скорости.

Из формулы (11.40) следует, далее, что по мере увеличения скорости столкновения все большая доля приходится на неупругие столкновения, так как при больших скоростях сечение, соответствующее упругим столкновениям, убывает как  $v^{-2}$  [см. формулу (9.10)]. Это иллюстрируется данными, приведенными в табл. 16.

В табл. 14 значения сечений, соответствующих возбуждению гелия, вычисленные с помощью точного выражения (11.18), сопоставлены со значениями упругих сечений. Наблюдаемые зна-

чения суммы сечений, соответствующие упругому столкновению и возбуждению дискретных уровней, приведены в последнем столбце таблицы; они получены путем вычитания экспериментальных значений вероятностей ионизации, измеренных Смитом [24], из значений полных сечений, определенных Нормандом [25]. Для электронов с энергией 200 *e* в согласие теории с опытом является весьма удовлетворительным; однако для электронов, энергия которых меньше 150 *e*, приближение Борна перестает быть справедливым.

Таблица 14

Эффектные сечения (в единицах  $\pi a_0^2$ )

| Энергия<br>электрона, <i>e</i> | Упругое рас-<br>сечение | Возбуждаемое состояние |       |       |       |       |       |       | Сумма  | Данные экс-<br>периментов |      |
|--------------------------------|-------------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------------------------|------|
|                                |                         | 21S                    | 21P   | 31P   | 31D   | 41P   | 41D   | 41F   |        |                           | 51P  |
| 100                            | 0,375                   | 0,0084                 | 0,107 | 0,031 | 0,053 | 0,012 | 0,027 | 0,040 | 0,0063 | 0,538                     | 0,67 |
| 200                            | 0,205                   | 0,0047                 | 0,069 | 0,021 | 0,028 | 0,009 | 0,015 | 0,020 | 0,0046 | 0,313                     | 0,31 |
| 400                            | 0,107                   | 0,0025                 | 0,047 | 0,013 | 0,025 | 0,006 | 0,08  | 0,010 | 0,0034 | 0,178                     | —    |

Сопоставление данных об относительных значениях сечений для различных переходов с данными, полученными на основании оптических измерений, будет проведено в § 5 в связи с рассмотрением вопроса о возбуждении триплетных состояний.

**2. Возбуждение рентгеновых лучей.** При столкновениях электронов со сложными атомами может иметь место вырывание электрона из внутренней оболочки атома, сопровождающееся рентгеновым излучением. Весьма интересно поэтому получить приближенные выражения, определяющие вероятность такой ионизации внутренних оболочек. Для этого мы должны просуммировать вероятности всех возможных переходов электрона из рассматриваемой внутренней электронной оболочки атома.

При ионизации уровня *nl* имеем

$$\sum_{n'l'} I_{nl, n'l'}(K) dK = \frac{128\pi^3 m^2 e^4}{k^2 h^4} \frac{dK}{K^3} \sum_{n'l'} \zeta_{nl, n'l'} |\varepsilon_{nl, n'l'}(K)|^2. \quad (11.42)$$

Полное сечение  $Q_{nl}^i$ , соответствующее такой ионизации, определится при этом выражением

$$Q_{nl}^i = \sum_{n'l'} \int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} I_{nl, n'l'}(K) dK. \quad (11.43)$$

Мы можем вычислить этот интеграл приближенно точно таким

же способом, как это было сделано нами выше для случая возбуждения оптических уровней. В результате получаем

$$Q_{nl}^i \approx \frac{64\pi^5 m^2 e^4}{k^2 h^4} Z_{nl} \left( \bar{x}_{nl}^2 - \sum_{n'l'} |x_{nl, n'l'}|^2 \right) \ln \left( \frac{2mv^2}{B_{nl}} \right), \quad (11.44)$$

где  $B_{nl}$  — величина порядка энергии ионизации оболочки  $nl$ ,  $\bar{x}_{nl}^2$  равно одной трети среднего значения квадрата радиуса этой оболочки. Для внешних оболочек члены  $\sum_{n'l'} |x_{nl, n'l'}|^2$  малы, и ве-

роятность ионизации примерно пропорциональна среднему значению квадрата радиуса оболочки; для внутренних оболочек интенсивность запрещенных переходов приобретает, однако, существенную роль. Бете [10] получил более высокие приближения, воспользовавшись в качестве атомных волновых функций водородоподобными функциями и введя в рассмотрение эффективный заряд ядра  $Z_{\text{эфф}}$ . При этом для тех внутренних оболочек, для которых наиболее существенную роль играют дискретные переходы запрещенного типа, он нашел

$$\bar{x}_{nl}^2 - \sum_{n'l'} |x_{nl, n'l'}|^2 = \frac{0,2 - 0,6n^2 a_0^2}{Z_{\text{эфф}}^2}. \quad (11.45)$$

Так как энергия  $E_{nl}$  оболочки  $nl$  равна

$$E_{nl} = - \frac{2\pi^2 m e^4 Z_{\text{эфф}}^2}{n^2 h^2},$$

имеем окончательно

$$Q_{nl}^i = \frac{2\pi e^4 Z_{nl}}{mv^2 |E_{nl}|} b_{nl} \ln \left( \frac{2mv^2}{B_{nl}} \right), \quad (11.46)$$

где величина  $b_{nl}$  для внутренних оболочек имеет значение между 0,2 и 0,6, а для внешних оболочек эта величина порядка  $n^2$ .

Подробные вычисления такого рода были произведены Бергопом [26] для случая ионизации  $K$ - и  $L$ -оболочек никеля, серебра и ртути электронами, энергия которых превышает соответствующую энергию ионизации в несколько (до 15) раз. При этом было использовано приближение Борна в предположении, что эффективный заряд ядра имеет одно и то же значение как для непрерывного спектра, так и для исходного состояния. Если при вычислении  $Q_n^i$  можно пренебречь рассмотрением переходов на незанятые дискретные уровни, то можно найти приближенные значения коэффициентов  $b_{nl}$  и  $B_{nl}$  в формуле (11.46). При этом  $b_{nl} = 0,35$  для  $K$ -оболочки и  $b_{nl} \approx 0,25$  для  $L_{\text{I}}$ ,  $L_{\text{II}}$  и  $L_{\text{III}}$ -оболочек, а  $B_{nl}$  равно приблизительно  $1,65 E_{nl}$  во всех этих случаях.

Формула (11.46) оказывается справедливой только для электронов, энергия которых в несколько раз превышает энергию

ионизации  $E_{nl}$ . Вычисления Бергопа дают те же результаты, что и приближения Борна, вплоть до наименьших значений энергии. Сопоставление результатов Бергопа с опытными данными Кларка [27] и Вебстера, Хансена и Дювенека [28] для ионизации  $K$ -оболочки серебра, Смика и Киркпатрика [29] и Покмана, Вебстера, Киркпатрика и Хаворта [30] для ионизации  $K$ -оболочки викаля, а также (несколько менее определенное) с данными Вебстера, Покмана и Киркпатрика [31] для ионизации  $L$ -оболочки золота подтверждает справедливость этого заключения. Для электронов, энергия которых меняется от  $E_{nl}$  до  $3E_{nl}$  (при  $3E_{nl}$  величина сечения максимальна), абсолютные теоретические значения сечений очень хорошо согласуются с экспериментальными данными; при больших энергиях электронов наблюдаемые значения сечений убывают, однако, медленнее, нежели теоретические. Такой результат является несколько неожиданным, поскольку можно было предполагать, что именно при этих значениях энергии приближение Борна окажется наиболее точным. Возможно, что шкала наблюдаемых абсолютных значений сечений не является точной, так что в действительности теория согласуется с опытом при больших энергиях, а расхождения имеют место при меньших энергиях, когда теоретические значения сечений превышают их экспериментальные значения. Такого рода заключение вполне согласовалось бы с характером отклонений от приближения Борна, наблюдаемых в случае возбуждения оптических уровней (см. п. 1 и § 5), а также при ионизации внешних оболочек (см. п. 3). С другой стороны, учет релятивистских эффектов должен привести к увеличению теоретических значений сечений при больших энергиях (см. гл. XV, § 2) и этого может оказаться достаточным для устранения значительной доли наблюдаемых расхождений.

**3. Первичная ионизация.** Воспользовавшись значениями дифференциальных сечений  $I_{0x} dx dK$ , отвечающих возбуждению уровней непрерывного спектра, приведенными в § 2, можно найти (путем численного интегрирования) полное сечение для ионизации  $Q_0^i$  по формуле

$$Q_0^i = \int_0^{x_{\text{макс.}}} \int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} I_{0x}(K) dK dx, \quad (11.47)$$

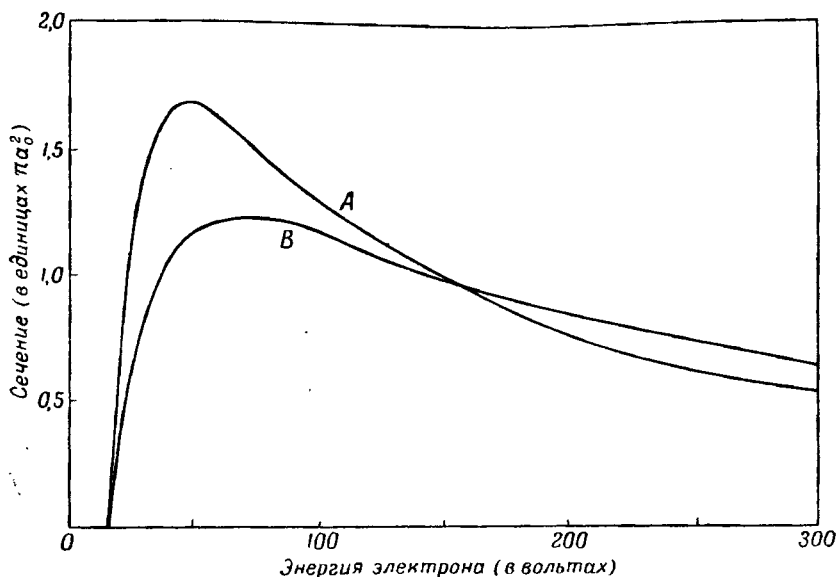
где

$$x_{\text{макс.}}^2 = k^2 - \frac{8\pi^2 m |E_0|}{h^2}.$$

Результаты таких вычислений сечений ионизации для водорода и гелия иллюстрируются на фиг. 43 и 44. Для сравнения приведены также экспериментальные кривые. Наиболее поздние экспериментальные исследования были проведены Смитом и Тей-

Том [32] для (молекулярного) водорода и Смитом [24] для гелия. При сопоставлении результатов предполагается, что молекула водорода ведет себя подобно двум атомам водорода.

Согласие теории с опытом можно считать вполне удовлетворительным, если принять во внимание, что при этом сравниваются как численные значения величины сечений, так и зависи-



Фиг. 43. Теоретическая (A) и экспериментальная (B) кривые вероятности ионизации в водороде.

мость их от скорости, и что определение приближенных значений волновых функций, характеризующих ионизованные состояния атомов, отличных от атомов водорода, является весьма затруднительным. Для электронов, энергия которых меньше 200 эв, теоретические значения сечений оказываются чересчур большими; при малых энергиях расхождение теории с опытом, как это будет показано в дальнейшем (см. § 5), не является, однако, неожиданным. Отметим, что упрощенная теория снова дает слишком быстрое возрастание вероятности ионизации в тех случаях, когда энергия падающего электрона начинает превышать потенциал ионизации, подобно тому как это имеет место в случае возбуждения рентгеновых и оптических уровней.

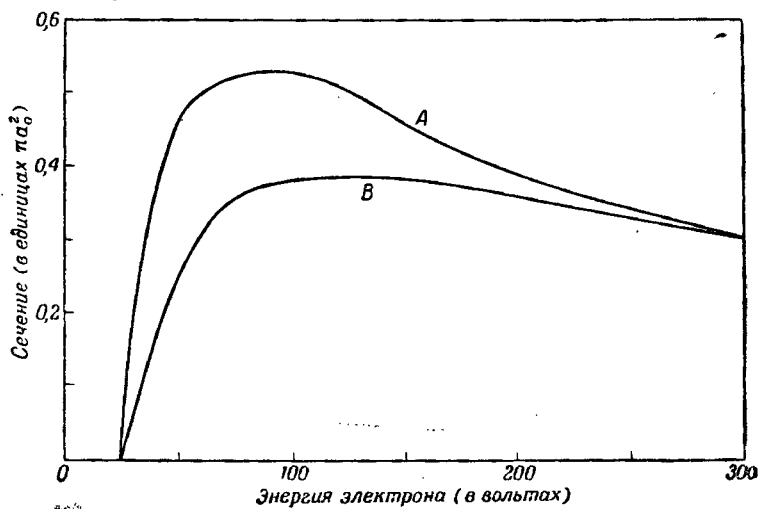
Вероятность ионизации при больших скоростях столкновений<sup>1)</sup>. Ввиду сложности упомянутых выше вычислений при

<sup>1)</sup> Под большой скоростью здесь подразумевается скорость, превышающая 1000 эв, однако такая, что релятивистские эффекты еще не играют существенной роли.

больших значениях скоростей столкновений существенный интерес представляет получение приближенных формул, пригодных в этих случаях. На фиг. 42 приведены кривые, иллюстрирующие зависимость интеграла

$$\int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} I_{0x}(K) dK \quad (11.48)$$

от величины  $x$  при различных скоростях столкновений. Из фиг. 42 следует, что вероятность ионизации определяется в основном



Фиг. 44. Теоретическая (A) и экспериментальная (B) кривые вероятности ионизации в гелии.

переходами, относящимися к очень малым значениям  $x$ . Для таких переходов функция  $I_{0x}(K)$  имеет вид, изображенный на фиг. 41; при больших значениях  $K$  она становится, таким образом, исчезающе малой, точно так же, как и в случае возбуждения дискретных состояний. Интенсивность рассеяния приобретает максимум вблизи значения угла, соответствующего условию сохранения импульса, только для переходов, связанных с большими  $K$ . Мы можем, следовательно, аппроксимировать значение сечения  $Q_{nl}^i$  точно таким же образом, как и в случае возбуждения дискретных состояний. Воспользовавшись этим методом, находим

$$Q_{nl}^i = \frac{64\pi^5 m^2 e^4}{h^4 K^2} Z_{nl} \int dx |x_{nl, x}|^2 \ln \left( \frac{2mv^2}{C_{nl}} \right), \quad (11.49)$$



где  $C_{nl}$  — величина порядка энергии рассматриваемой оболочки. С помощью методов, аналогичных тем, которые применяются при исследовании вопроса о возбуждении рентгеновых лучей. Бете [10] показал, что выражение (11.49) сводится к виду

$$Q_{nl}^i = \frac{2\pi e^4}{mv^2} \frac{c_{nl}}{|E_{nl}|} Z_{nl} \ln \left( \frac{2mv^2}{C_{nl}} \right), \quad (11.50)$$

где

$$c_{nl} = \frac{Z_{\text{эфф}}^2}{n^2 a_0^2} \int |x_{nl, x}|^2 dx.$$

Воспользовавшись снова в качестве приближения водородоподобными волновыми функциями для различных оболочек, получаем значения  $c_{nl}$ , приведенные в табл. 15.

Таблица 15

| Оболочка | 1 s  | 2 s  | 2 p  | 3 s  | 3 p  | 3 d  | 4 s  | 4 p  | 4 d  | 4 f  |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $C_{nl}$ | 0,28 | 0,21 | 0,13 | 0,17 | 0,14 | 0,07 | 0,15 | 0,13 | 0,09 | 0,04 |

Данные табл. 15 показывают, что оболочки с наибольшими значениями азимутальных квантовых чисел являются наиболее трудно ионизируемыми.

Для водорода вычисления могут быть произведены точно [10]; сечение ионизации равно при этом

$$Q_0^i = 0,285 \frac{2\pi e^4}{|E_0| mv^2} \ln \left( \frac{2mv^2}{0,048 |E_0|} \right), \quad (11.51)$$

откуда следует, что  $C_{nl}$  составляет примерно  $1/10$  энергии ионизации оболочки  $nl$ .

*Сравнение с классической теорией и с опытными данными.* Классическая формула Томсона [33] несколько отлична от выражения (11.50), так как она не содержит логарифмического множителя. Эта формула имеет следующий вид:

$$Q_0^i = \frac{2\pi e^4}{mv^2} \frac{Z_{nl}}{|E_{nl}|}. \quad (11.52)$$

В силу такого различия классической и квантовой формул сравнение теории с опытными данными представляет особый интерес. Это сравнение лучше всего провести для случая водорода; использование приближенных волновых функций не может привести в этом случае к серьезным ошибкам, так как весьма мало вероятно, чтобы между молекулой и атомом водорода имелось в этом отношении какое-либо существенное различие, за исключением величины потенциала ионизации. Для последнего следует

брать его молекулярное значение (16  $\epsilon$ ). Согласно опытам Вильямса и Терру [34], при  $v=0,54c$  число ионов, создаваемых на одном сантиметре пути при нормальных значениях температуры и давления, составляет 12,6. Формула (11.51) дает для этого числа значение 14,7, а классическая формула (11.52) — значение 3,5. Формула квантовой теории приводит, таким образом, к значительно лучшему согласию с опытными данными.

**4. Вероятности столкновений различного типа в случае быстрых электронов.** В табл. 16<sup>1)</sup> приведены относительные значения вероятностей столкновений различного типа в случае быстрых электронов, сталкивающихся с атомами водорода. При этом учтены также и все релятивистские поправки (см. гл. XV, § 2).

Таблица 16

Вероятности различных столкновений  
(Указаны доли от общего числа столкновений в процентах)

| Энергия падающего<br>электрона, $\epsilon$    | Тип столкновения |                 |                 |                 |                 |                  |
|---|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
|   | 10 <sup>3</sup>  | 10 <sup>4</sup> | 10 <sup>5</sup> | 10 <sup>6</sup> | 10 <sup>8</sup> | 10 <sup>10</sup> |
| Упругое столкновение . . . . .                | 8,7              | 6,5             | 5,1             | 4,1             | 2,55            | 1,8              |
| Возбуждение уровней с:                        |                  |                 |                 |                 |                 |                  |
| $n=2$ . . . . .                               | 42,8             | 45,3            | 47,5            | 49,5            | 51,5            | 52,8             |
| $n=3$ . . . . .                               | 6,3              | 7,0             | 7,3             | 7,8             | 8,1             | 8,4              |
| $n=4$ . . . . .                               | 2,41             | 2,60            | 2,71            | 2,79            | 2,90            | 2,96             |
| $n=5$ . . . . .                               | 1,17             | 1,24            | 1,28            | 1,32            | 1,36            | 1,38             |
| Возбуждение более высоких уровней             | 2,17             | 2,28            | 2,33            | 2,38            | 2,42            | 2,45             |
| Возбуждение всех дискретных уровней . . . . . | 54,8             | 58,4            | 61,2            | 63,4            | 66,4            | 68,0             |
| Ионизация . . . . .                           | 36,5             | 35,1            | 33,7            | 32,5            | 31,0            | 30,2             |
| Потеря энергии на первичный ион, $\epsilon$   | 51,4             | 59,9            | 64,8            | 66,9            | 68,6            | 69,4             |
| Потеря энергии на столкновение, $\epsilon$    | 18,7             | 21,0            | 21,7            | 21,7            | 21,3            | 21,0             |
| Полное эффективное сечение, $10^{-20}$ см     | 3200             | 426             | 66,0            | 30,6            | 42,8            | 60,0             |

#### § 4. Вычисление тормозной способности вещества для быстрых электронов

**1. Водород. Вспомогательные теоремы. Обобщенные вероятности переходов и интенсивности осцилляторов.** При вычислении полной потери энергии, испытываемой электронами на одном сантиметре пути при прохождении их через какое-либо вещество, удобно ввести в рассмотрение некоторые вспомогательные вели-

<sup>1)</sup> Составлена по расчетам Бете [35].

чины, связанные с различными переходами. Эти величины представляют собой обобщение соответствующих величин, связанных с оптическими переходами.

Вероятность оптического перехода с  $m$ -го уровня на  $n$ -й определяется выражением вида

$$\varphi_{mn} = \frac{16\pi^4 m^2 e^4 |x_{mn}|^2}{h^4}. \quad (11.53)$$

Обобщив это выражение, получим

$$\varphi_{mn}(K) = \frac{16\pi^4 m^2 e^4}{h^4 K^2} |\varepsilon_{mn}(K)|^2.$$

При неизменности импульса эта функция сводится к функции (11.53). Вероятности оптического перехода  $\varphi_{mn}(0)$  соответствует «сила осциллятора»  $f_{mn}$ , определяемая выражением

$$f_{mn} = R^{-1} \nu_{mn} \varphi_{mn},$$

где  $R$  — постоянная Ридберга, а  $\nu_{mn}$  — частота данного перехода. Обобщенная «сила осциллятора», соответствующая переходу  $m \rightarrow n$ , определится в таком случае выражением [10]

$$f_{mn}(K) = (E_m - E_n) \frac{8\pi^2 m}{K^2 h^2} |\varepsilon_{nm}(K)|^2.$$

Отметим, что дифференциальное сечение, соответствующее переходу  $0 \rightarrow n$ , дается выражением

$$I_{0n}(K) dK = \frac{16\pi^3 m e^4}{k^2 h^2} \frac{1}{E_0 - E_n} f_{0n}(K) \frac{dK}{K}.$$

Потеря энергии на одном сантиметре пути при прохождении электронов через газ, содержащий  $N$  атомов в  $1 \text{ см}^3$ , дается формулой [см. формулу (11.59)]

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{16\pi^3 m e^4 N}{k^2 h^2} \sum_n \int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} f_{0n}(K) \frac{dK}{K}. \quad (11.54)$$

*Теорема сложения обобщенных «сил осцилляторов».* Рассмотрим выражение вида

$$\sum_n f_{0n}(K) = \frac{8\pi^2 m}{K^2 h^2} \sum_n (E_0 - E_n) \left| \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* dx \right|^2.$$

Функции  $\psi_0$  и  $\psi_n^*$  удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \psi_0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_0 - V) \psi_0 = 0, \quad (11.55a)$$

$$\nabla^2 \psi_n^* + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_n - V) \psi_n^* = 0. \quad (11.55b)$$

Умножив уравнение (11.55а) на  $\psi_n^*$ , а уравнение (11.55б) на  $\psi_0$ , вычитая один результат из другого и проинтегрировав полученное при этом выражение по всему пространству, имеем

$$(E_0 - E_n) \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \int (\psi_0 \nabla^2 \psi_n^* - \psi_n^* \nabla^2 \psi_0) e^{iKx} d\tau.$$

Правая часть этого выражения сводится к

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left\{ -2iK \int \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \psi_n^* e^{iKx} d\tau + K^2 \int \psi_0 \psi_n^* e^{iKx} d\tau \right\}. \quad (11.56)$$

Далее,

$$\sum_n \left[ \int \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \psi_n^* e^{iKx} d\tau \right] \left[ \int \psi_n \psi_0^* e^{-iKx} d\tau \right] = \int \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \psi_0^* d\tau = 0,$$

как это может быть доказано с помощью метода, аналогичного методу, примененному в § 2.

Мы имеем, таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi^2 m}{K^2 \hbar^2} \sum_n (E_0 - E_n) \left| \int e^{iKx} \psi_0 \psi_n^* d\tau \right|^2 = \\ & = \sum_n \left| \int \psi_n \psi_0^* e^{iKx} d\tau \right|^2 = \left| \int |\psi_0|^2 d\tau \right|^2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\sum_n f_{0n}(K) = 1. \quad (11.57)$$

**2. Вычисление тормозной способности водорода.** Для электрона, проходящего через газ, содержащий  $N$  атомов в  $1 \text{ см}^3$ , потеря энергии на одном сантиметре пути,  $-dT/dx$ , определяется выражением вида

$$-\frac{dT}{dx} = N \sum_n \int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} (E_0 - E_n) I_{0n}(K) dK; \quad (11.58)$$

это выражение [см. формулу (11.54)] можно привести к виду

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{16\pi^3 m e^4 N}{\hbar^2 \hbar^2} \sum_n \int_{K_{\text{мин.}}}^{K_{\text{макс.}}} f_{0n}(K) \frac{dK}{K}. \quad (11.59)$$

При вычислении этой суммы мы не можем воспользоваться непосредственно теоремой сложения (11.57), так как  $K_{\text{мин.}}$  является функцией  $n$ ; мы разобьем поэтому область интегрирования на два участка: от  $K > K_0$  до  $K_0$  и от  $K < K_0$  до  $K_0$ , где

$$K_0 = \left[ \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} |E_0| \right]^{1/2}. \quad (11.60)$$

На первый взгляд, учет изменения импульса, превышающего  $K_0$ , представляется излишним, так как выше было показано, что при столь больших значениях  $K$  величина  $I_{0n}(K)$  очень мала; переходы, при которых имеет место значительное изменение импульса, связаны, однако, с большой потерей энергии, и соответствующие им члены играют поэтому существенную роль в выражении (11.59). Мы покажем в дальнейшем, что оба интервала изменения импульса в этом отношении примерно эквивалентны. Обозначим потери энергии на одном сантиметре пути для соответствующих интервалов через  $E'$  и  $E''$ .

Для вычисления потери энергии  $E'$  при переходах, сопровождающихся малым изменением импульса, разложим  $e^{iKx}$  в ряд по степеням  $K$ , как это сделано в формуле (11.39). Получим

$$E' = \frac{128\pi^5 m^2 N e^4}{k^2 h^4} \sum_n (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \int_{K_{\text{мин.}}}^{K_0} \frac{dK}{K}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} \sum_n (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 = 1, \quad (11.61)$$

находим

$$E' = \frac{16\pi^3 m N e^4}{k^2 h^2} \left[ \ln K_0 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} \sum_n (E_n - E_0) |x_{0n}|^2 \ln K_{\text{мин.}} \right]. \quad (11.62)$$

Поскольку мы имеем дело с быстрыми электронами, можно воспользоваться приближенным выражением для  $K_{\text{мин.}}$ , полученным в § 1:

$$K_{\text{мин.}} = \frac{4\pi^2 m (E_n - E_0)}{k h^2}.$$

Подставив это выражение  $K_{\text{мин.}}$  в (11.62) и учитывая, что

$$-E_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2} = \frac{R h}{n^2}, \quad -E_0 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} = R h,$$

получаем окончательно

$$E' = \frac{16\pi^3 m N e^4}{k^2 h^2} \left\{ \ln K_0 - \frac{8\pi^2 m R}{h} \sum_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) |x_{0n}|^2 \ln \frac{4\pi^2 m R}{k h} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right\}. \quad (11.63)$$

Потеря энергии  $E''$ , связанная с большими изменениями импульса, определяется выражением вида

$$E'' = N \sum_n \int_{K_0}^{K_{\text{макс.}}} (E_n - E_0) I_{0n}(K) dK. \quad (11.64)$$

Воспользовавшись теоремой сложения (11.57), находим

$$E'' = \frac{16\pi^3 m e^4 N}{k^2 h^2} \int_{K_0}^{K_{\text{макс.}}} \frac{dK}{K}. \quad (11.65)$$

При определении  $K_{\text{макс.}}$  существенно отметить, что значения  $I_{0n}(K)$ , даваемые приближением Борна, становятся неверными, если изменение импульса очень велико. Мы не можем поэтому подставить в формулу (11.64)  $K_{\text{макс.}}$  в форме (11.13), но должны воспользоваться условием сохранения импульса при столкновении между падающим и атомным электронами. Так как массы этих электронов одинаковы, то максимальное значение импульса, который может быть получен атомным электроном, равно половине полного значения импульса. Положим поэтому

$$K_{\text{макс.}} \approx k.$$

Выполнив интегрирование, имеем

$$E'' = \frac{16\pi^3 m N e^4}{k^2 h^2} (\ln k - \ln K_0). \quad (11.66)$$

Сложив выражения (11.66) и (11.63), получаем выражение полной энергии, теряемой электроном на одном сантиметре пути:

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \left\{ \ln \frac{m v^2}{R h} - \frac{m^2 e^4}{h^4} \sum_n |x_{0n}|^2 \left( 1 - \frac{1}{n^3} \right) \cdot \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} \right\}. \quad (11.67)$$

Суммирование может быть выполнено здесь численно с помощью обычных формул для матричных элементов  $x_{0n}$ . Окончательный результат:

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 N}{m v^2} \ln \frac{m v^2}{c R h} \quad (c = 1,105). \quad (11.68)$$

**3. Сложные атомы.** Воспользовавшись водородоподобными функциями и учитывая наличие запрещенных переходов, можно обобщить формулу (11.68) на случай сложных атомов. Подобное обобщение было дано Бете [10]; полученные им результаты по ряду причин не являются, однако, достаточно точными. Тормозную способность атомов, обладающих  $Z$  электронами, лучше представить формулой вида

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 N}{m v^2} Z \ln \left( \frac{m v^2}{I} \right), \quad (11.69)$$

где  $I$  — среднее значение энергии возбуждения; величину  $I$  лучше всего определить опытным путем, хотя Блох [36] и разработал приближенный метод ее вычисления с помощью статистической теории строения атома по Томасу — Ферми.

**4. Связь с классической формулой Бора. Метод параметров столкновений.** Классическая теория тормозной способности

вещества была разработана Бором [37] в 1913 г. Результат, даваемый этой теорией, отличается от формулы (11.68) в том отношении, что функция, стоящая под знаком логарифма, умножена на величину порядка  $h\nu/e^2$ . Пределы применимости различных приближений были исследованы Блохом [38] и Вильямсом [39]. Мы будем следовать методу Вильямса, поскольку он дает возможность оценить относительную роль исследуемых процессов.

Рассмотрим быстрый электрон, проходящий через вещество, содержащее  $N$  атомов в  $1 \text{ см}^3$ , каждый из которых, в свою очередь, содержит  $Z$  электронов. Если бы эти электроны были свободными, то число столкновений на одном сантиметре пути, при которых падающий электрон отклоняется на угол, лежащий в интервале между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , определялось бы формулой кулонова рассеяния

$$NZI(\theta) d\theta = \left( \frac{2\pi NZe^4}{m^2 v^4} \right) \frac{d\theta}{\theta^3},$$

при условии, что  $\theta$  не слишком велико. Передача энергии при таком отклонении равна примерно  $m v^2 \theta^2$ , так что потеря энергии на одном сантиметре пути, обусловленная столкновениями, при которых  $\theta > \theta_{\text{мин.}}$ , составляет

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi NZe^4}{mv^2} \int_{\theta_{\text{мин.}}}^{\theta_{\text{макс.}}} \frac{d\theta}{\theta} = \frac{2\pi NZe^4}{mv^2} \ln \left( \frac{\theta_{\text{макс.}}}{\theta_{\text{мин.}}} \right). \quad (11.70)$$

Поскольку нас интересует лишь определение порядка величины функции, стоящей под знаком логарифма,  $\theta_{\text{макс.}}$  можно положить равным единице. С другой стороны, значение  $\theta_{\text{мин.}}$  в формуле (11.70) может быть определено из анализа сил связи.

Согласно классическим представлениям, наличие сил связи будет налагать ограничения на процесс передачи энергии только в том случае, когда время столкновения сравнимо или же превышает период обращения электрона при его движении по орбите. Время столкновения, грубо говоря, равно  $p/v$ , где  $p$  — параметр столкновения, измеренный относительно ядра атома как центра. Время обращения электрона по орбите — величина порядка  $h/E$ , где  $E$  — энергия связи. Классическое условие, согласно которому можно пренебречь силами связи, заключается поэтому в том, что параметр столкновения  $p$  должен быть меньше  $\rho$ , где

$$\rho \sim \frac{h\nu}{E}. \quad (11.71)$$

Если  $\rho \gg d$ , где  $d$  — величина порядка радиуса орбиты атомных электронов, то это классическое условие остается справедливым также и в квантовой теории. Действительно, при таких столкно-

вениях падающий электрон лишь слегка отклоняется от своего первоначального направления, и его возмущающее влияние на атом может быть описано классической теорией.

Поскольку  $\hbar/E$  — величина порядка  $d/u$ , где  $u$  — орбитальная скорость атомных электронов, условие  $\rho \gg d$  удовлетворяется, если  $v^2/u^2 \gg 1$ . Если это имеет место, остается только найти соотношение между максимальным значением эффективного параметра столкновения  $\rho$  и величиной  $\theta_{\text{мин}}$ . Это может быть осуществлено с помощью метода, описанного нами в гл. VII, § 5, и примененного в гл. IX, § 6, к анализу вопроса о многократном рассеянии.

Имеем

$$\theta_{\text{мин}} \approx \frac{\hbar}{mv\rho} \left( \frac{e^2}{\hbar v} \ll 1 \right),$$

$$\theta_{\text{мин}} \approx \frac{e^2}{mv^2\rho} \left( \frac{e^2}{\hbar v} \gg 1 \right).$$

Подставляя это значение  $\theta_{\text{мин}}$  в выражение (11.70) и воспользовавшись соотношением (11.71), находим

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi NZe^4}{mv^2} \ln \left( g_1 \frac{mv^2}{E} \right) \left( \frac{e^2}{\hbar v} \ll 1 \right), \quad (11.72)$$

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi NZe^4}{mv^2} \ln \left( g_2 \frac{mv^3\hbar}{e^2 E} \right) \left( \frac{e^2}{\hbar v} \gg 1 \right), \quad (11.73)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  — величины порядка единицы.

Соотношение (11.72) эквивалентно формуле (11.69), тогда как соотношение (11.73) представляет собой классическую формулу Бора. Условие  $u^2/v^2 \ll 1$  использовано, таким образом, при выводе обоих этих соотношений. Если речь идет о торможении электронов, то это условие несовместимо с условием  $e^2/\hbar v \gg 1$ , так что классическая формула в таких случаях непригодна. В гл. XII, § 2, нами будет рассмотрен вопрос о тормозной способности вещества по отношению к тяжелым частицам и будет показано, что если частица обладает большим зарядом, то формула Бора справедлива для некоторой области значений энергии.

Подробный анализ, проведенный Блохом [38], подтвердил справедливость этих заключений; Мотт [40] дал непосредственное доказательство эквивалентности метода параметров столкновений и приближения Борна при рассмотренных выше условиях.

**5. Сравнение с опытными данными.** Вопрос о применимости соотношений (11.68) и (11.70), определяющих потерю энергии быстрыми электронами на одном сантиметре пути в (атомном) водороде и других газах, был исчерпывающе рассмотрен Вильямсом [41]. При сравнении теоретических и экспериментальных данных необходимо увеличить полученные численные значения примерно на 10%, чтобы учесть то обстоятельство, что



электрон, обладающий после столкновения большей энергией, трактуется обычно как  $\beta$ -частица. Принимая во внимание эту поправку, получаем очень хорошее согласие теории с опытом,

Таблица 17

| $v/c$ | $u^2/v^2$ | $e^2/\hbar v$ | Длина пробега, см |                            |                               |
|-------|-----------|---------------|-------------------|----------------------------|-------------------------------|
|       |           |               | опытные данные    | по Бете (квантовая теория) | по Бору (классическая теория) |
| 0,17  | 0,0007    | 0,06          | 0,76              | 0,77                       | 0,52                          |
| 0,136 | 0,001     | 0,07          | 0,37              | 0,34                       | 0,23                          |

иллюстрируемое табл. 17. Таблица содержит также результаты, даваемые классической теорией Бора, и значения  $e^2/\hbar v$  и  $u^2/v^2$  ( $u$  — орбитальная скорость атомных электронов). Дополнительные данные, подтверждающие справедливость квантовой теории тормозной способности вещества для быстрых заряженных частиц, будут рассмотрены в гл. XII при исследовании вопроса о прохождении тяжелых частиц через вещество.

6. Относительная роль слабых и сильных столкновений. В § 3 было показано, что число первичных ионов  $s_0$ , создаваемых на одном сантиметре пути, определяется выражением вида

$$s_0 = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \sum_{nl} \frac{c_{nl} Z_{nl}}{(-E_{nl})} \ln \frac{2mv^2}{C_{nl}},$$

где величины  $c_{nl}$  и  $C_{nl}$  могут быть вычислены с помощью выражений (11.49) и (11.50). Потеря энергии на один первичный ион равна, таким образом,  $-\frac{dT/dx}{s_0}$ . В случае азота для электронов с энергией 30 000e это составляет примерно 80e на один первичный ион, а в случае водорода — 100e. Столь большая потеря энергии связана с тем обстоятельством, что большая доля столкновений приводит к возбуждению атомов, а не к их ионизации. Роль сильных столкновений (при которых испускаются быстрые<sup>1)</sup> электроны) при этом также весьма значительна благодаря большой потере энергии при таких столкновениях. Последняя определяется выражением вида

$$E'' = \frac{16\pi^3 m Ne^4}{k^2 h^2} \sum_{nl} Z_{nl} \int_{k_0}^k \frac{dK}{K} = \frac{8\pi^3 m Ne^4}{k^2 h^2} \sum_{nl} Z_{nl} \ln \left( \frac{k^2}{k_0^2} \right),$$

где  $k_0^2 \approx 8\pi^2 m |E_{nl}| / \hbar^2$ . Сопоставляя это выражение с формулой

<sup>1)</sup> Энергия которых велика по сравнению с потенциалом ионизации.

(11.68), находим, что сильные столкновения обуславливают примерно половину суммарной потери энергии.

Интересно также отметить, что Вильямс использовал метод параметров столкновений для исследования относительной роли близких и далеких столкновений. Он показал при этом, что если электрон с энергией  $100\,000$  *e* проходит через водород, то из каждых сорока ионизируемых или возбуждаемых атомов только один атом расположен на пути самого электрона и четыре — на расстоянии от  $2,5 \cdot 10^{-7}$  до  $10^{-6}$  см.

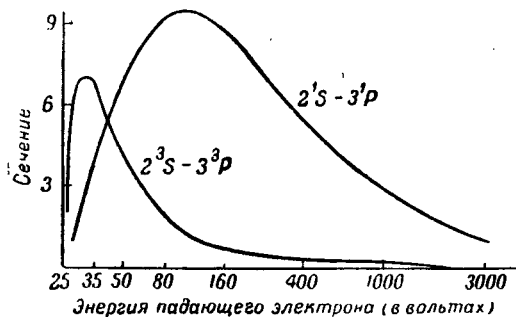
### § 5. Неупругие столкновения медленных электронов с атомами

В случае медленных электронов теоретическое исследование неупругих столкновений оказывается значительно более сложным, чем для быстрых электронов. Из экспериментальных данных следует, что в этом случае существенную роль приобретает эффект электронного обмена. Измерения углового распределения электронов, неупруго рассеянных в парах ртути и в аргоне, произведенные Мором и Николлем [8.14], показывают, что при этом необходимо принимать во внимание искажение падающей и расходящейся волн силовыми полями нормального и возбужденного атомов (см. ниже).

В начале настоящей главы было показано, что, согласно приближению Борна, вероятность возбуждения уровня, принадлежащего к иной системе термов, нежели исходное состояние, равна нулю. Для столкновений с достаточно быстрыми электронами это заключение находится в согласии с опытными данными; при очень медленных столкновениях возбуждение таких уровней происходит, однако, столь же часто, а при некоторых значениях скоростей даже чаще, чем возбуждение уровня, принадлежащего к той же системе термов, что и исходное состояние. На фиг. 45 приведены кривые зависимости вероятности возбуждения  $3^1P$ - и  $3^3P$ -уровней гелия (при исходном состоянии  $1^1S$ ) от скорости электронов. Эти кривые были получены Лисом [22] с помощью оптических методов (см. гл. IX, § 1). Если энергия возбуждающих электронов превышает  $100e$ , то возбуждение триплетных состояний наблюдается очень редко по сравнению с возбуждением синглетного состояния; однако при значениях энергии, лишь слегка превышающих потенциал возбуждения, может иметь место обратное. Аналогичная картина наблюдается при возбуждении различных двухэлектронных систем [22, 23, 42]. Во всех случаях вероятность возбуждения триплета очень быстро достигает максимума, имеющего место при значений энергии, приблизительно на  $1e$  превышающем потенциал возбуждения, тогда как соответствующая кривая для синглета достигает максимума значительно

медленнее (за исключением случая  $S$ -состояний). Численные значения соответствующих максимумов при этом во всех случаях одного порядка величины.

Если связь между спином и орбитальным движением слаба, то возбуждение триплета может иметь место лишь в том случае, когда столкновение сопровождается обменом электронами, приводящим к изменению симметрии спиновой функции атомных



Фиг. 45. Возбуждение  $3^1P$ - и  $3^3P$ -уровней в гелии.

Кривые получены путем измерения зависимости интенсивности возбуждения спектральных линий при оптических переходах к уровням  $2^1S$  и  $2^3S$ .

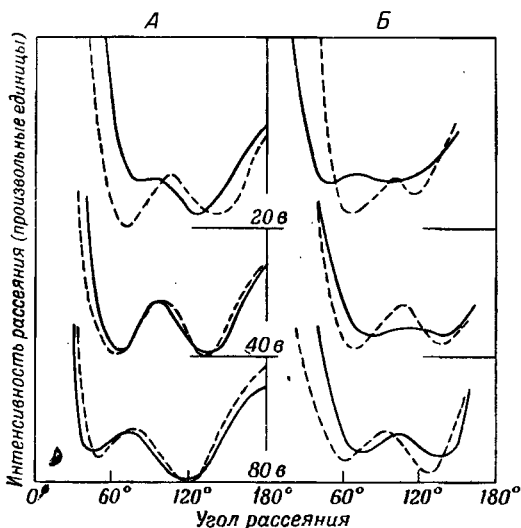
электронов. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что электронный обмен играет существенную роль в случае медленных столкновений. Его следует принимать во внимание также и при анализе данных, относящихся к возбуждению синглетных состояний.

Интересные результаты были получены Мором и Николлем, которые исследовали угловое распределение электронов с энергиями от 5 до 120eв, рассеянных в различных газах. Эти результаты частично иллюстрируются кривыми, приведенными на фиг. 46. Для наиболее тяжелых газов максимумы и минимумы на кривых выражены очень заметно. Сходный характер дифракционных явлений, наблюдаемых при угловом распределении упруго и неупруго рассеянных электронов, обладающих одной и той же начальной скоростью, свидетельствует о том, что в обоих случаях эффект обусловлен одной и той же причиной — искажением электронных волн полем атома. Этот вопрос будет рассмотрен подробнее в п. 3.

**1. Применение теории столкновений.** Пока еще не существует вполне удовлетворительного метода исследования медленных неупругих столкновений электронов с атомами; с помощью общей теории столкновений, изложенной в гл. VIII, можно, однако,

определить приближенные значения вероятностей этих процессов. Рассеяние электронов, возбуждивших при столкновении  $n$ -е состояние атомов водорода и гелия, может быть описано с помощью двух волновых функций:  $F_n(\mathbf{r}_1)$  и  $G_n(\mathbf{r}_2)$ , имеющих асимптотические формы

$$\begin{aligned} F_n(\mathbf{r}_1) &\sim f_n(\theta_1, \varphi_1) r_1^{-1} e^{iknr_1}, \\ G_n(\mathbf{r}_2) &\sim g_n(\theta_2, \varphi_2) r_2^{-1} e^{iknr_2}. \end{aligned} \quad (11.74)$$



Фиг. 46. Вычисленные (А) и наблюдаемые (Б) угловые распределения электронов, рассеянных атомами аргона.

Сплошная кривая — упругое рассеяние, пунктирная — для электронов, возбуждивших резонансный уровень аргона.

Дифференциальные сечения для возбуждения  $n$ -го состояния в случаях водорода и гелия даются соответственно следующими выражениями:

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= \frac{1}{4} \frac{k_n}{k} \{ 3 |f_n(\theta, \varphi) + g_n(\theta, \varphi)|^2 + |f_n(\theta, \varphi) - g_n(\theta, \varphi)|^2 \}, \\ I_n(\theta) &= \frac{k_n}{k} |f_n(\theta, \varphi) - g_n(\theta, \varphi)|^2. \end{aligned} \quad (11.75)$$

В гл. VIII было показано [уравнения (8.38) и (8.39)], что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} [\nabla_1^2 + k_n^2] F_n(\mathbf{r}_1) &= -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) d\tau_2, \\ [\nabla_2^2 + k_n^2] G_n(\mathbf{r}_2) &= -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (11.76)$$

Функция  $\Psi$  является решением волнового уравнения для всей системы, состоящей из атома и падающего электрона. Для решения уравнений (11.76) мы должны, подобно тому как это было сделано в гл. X, § 6, подставить в правую часть этих уравнений какую-либо приближенную форму функции  $\Psi$ . Положим

$$\Psi = F_0(\mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}_2) + F_n(\mathbf{r}_1)\psi_n(\mathbf{r}_2) + G_n(\mathbf{r}_2)\psi_n(\mathbf{r}_1). \quad (11.77)$$

Здесь функция  $F_0(\mathbf{r})$  описывает падающую и рассеянную волны и, как было показано в гл. II, является решением уравнения

$$\left(\nabla^2 + k^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{00}\right) F_0 = 0. \quad (11.78)$$

Заметим, что приближение (11.77) несколько отличается от того приближения, которым мы пользовались в гл. X, § 6, при рассмотрении упругих столкновений. Появление членов, содержащих  $\psi_n$ , обеспечивает в правой части уравнений (11.76) присутствие всех диагональных элементов  $V_{ss}$  энергии взаимодействия. Из недиагональных матричных элементов  $V_{0n}$  останутся только относящиеся к исходному состоянию атома.

Подставляя функцию (11.77) в уравнения (11.76) и пользуясь тем же методом, что и при рассмотрении упругих столкновений, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ \nabla_1^2 + k_n^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{nn}(\mathbf{r}_1) \right] [F_n(\mathbf{r}_1) \pm G_n(\mathbf{r}_1)] = \\ & = -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \left\{ \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) [F_0(\mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}_2)\psi_n^*(\mathbf{r}_2) \pm \right. \\ & \left. \pm F_0(\mathbf{r}_2)\psi_0(\mathbf{r}_1)\psi_n^*(\mathbf{r}_2) + \{G_n(\mathbf{r}_2) \pm F_n(\mathbf{r}_2)\}\psi_n(\mathbf{r}_1)\psi_n^*(\mathbf{r}_2)] d\tau_2 \right\}. \end{aligned} \quad (11.79)$$

Присутствие третьего члена в правой части этого уравнения делает следующее приближение затруднительным, за исключением случая быстрых столкновений. В последнем случае в нулевом приближении можно пренебречь влиянием атомного поля и положить в правой части (11.79)

$$F_0(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}n_0 \cdot \mathbf{r}_1}, \quad G_n(\mathbf{r}_2) = 0.$$

Это дает

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + k_n^2) [F_n(\mathbf{r}_1) \pm G_n(\mathbf{r}_1)] = -\frac{8\pi^2 m e^2}{h^2} \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) \times \\ & \times [\exp(i\mathbf{k}n_0 \cdot \mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}_2)\psi_n^*(\mathbf{r}_2) \pm \exp(i\mathbf{k}n_0 \cdot \mathbf{r}_2)\psi_0(\mathbf{r}_1)\psi_n^*(\mathbf{r}_2)] d\tau_2. \end{aligned} \quad (11.80)$$

Решая последнее уравнение с помощью метода, изложенного в гл. VI, § 4, получаем

$$\begin{aligned} f_n(\theta, \varphi) \pm g_n(\theta, \varphi) = & \frac{2\pi m e^2}{h^2} \int \int \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) [\exp\{i(\mathbf{k}n_0 - \mathbf{k}_n \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{r}_1\} \times \\ & \times \psi_0(\mathbf{r}_2)\psi_n^*(\mathbf{r}_2) \pm \exp\{i(\mathbf{k}n_0 \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_n \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1)\} \psi_0(\mathbf{r}_1)\psi_n^*(\mathbf{r}_2)] d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (11.81)$$

Менее грубое приближение заключается в том, чтобы пренебречь третьим членом выражения (11.79). Этот член характеризует влияние обменного эффекта на форму функции  $F_n \pm G_n$ . Поскольку, опустив член  $G_0(\mathbf{r}_2)\psi_0(\mathbf{r}_1)$  в приближении (11.77), мы пренебрегли влиянием этого эффекта на  $F_0$ , мы должны опустить соответствующий член также и в выражении (11.79). Это дает

$$f_n(\theta, \varphi) - g_n(\theta, \varphi) = \\ = \frac{2\pi m e^2}{h^2} \iint \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) [F_0(r_1, \theta_1) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) \mathfrak{F}_n(\mathbf{r}_1, \pi - \theta_1) - \\ - \mathfrak{F}_n(\mathbf{r}_1, \pi - \theta_1) F_0(r_2, \theta_2) \psi_0(\mathbf{r}_2) \psi_n^*(\mathbf{r}_1)] d\tau_1 d\tau_2, \quad (11.82)$$

где  $\mathfrak{F}_n(r, \theta)$  — решение однородного уравнения

$$\left[ \nabla^2 + k_n^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_{nn}(r) \right] \mathfrak{F}_n(r, \theta) = 0,$$

имеющее асимптотическую форму

$$\mathfrak{F}_n(r, \theta) \sim e^{ik_n z} + r^{-1} e^{ik_n r} \times \text{Функция от } \theta, \varphi,$$

и

$$\cos \theta_1 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Интересно дать физическую интерпретацию соотношений (11.81) и (11.82). Первый член в каждом соотношении характеризует рассеянные волны, вторые члены — эффект электронного обмена. Все эти члены обладают надлежащей формой, представляя собой интегралы от энергии взаимодействия, взятые по волновым функциям исходного и конечного состояний системы. Формула (11.82) отличается от формулы (11.81) тем, что она учитывает влияние поля  $V_{nn}$  на расходящуюся волну и влияние поля  $V_{00}$  на падающую волну.

Следующее приближение можно получить, заменив функцию  $F_n$  в выражении (11.82) разностью функций  $F_0 - G_0$ , удовлетворяющей интегро-дифференциальному уравнению (10.12), и функцию  $\mathfrak{F}_n$  — решением соответствующего интегро-дифференциального уравнения для атома в  $n$ -м возбужденном состоянии.

Поскольку речь идет об этих приближениях, отметим, что здесь имеется трудность, аналогичная трудности, рассмотренной нами в гл. X, § 5. Функция  $\Psi$  в форме (11.77) не удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\int [\Psi - F_n(r_1) \psi_n(r_2)] \psi_n^*(r_2) d\tau_2 = 0, \\ \int [\Psi - G_n(r_2) \psi_n(r_1)] \psi_n^*(r_1) d\tau_1 = 0. \quad (11.83)$$

Для достаточно быстрых столкновений связанные с этим погрешности будут малы; для электронов с энергиями, близкими к энергии возбуждения, это будет, однако, уже не так.

Мы предполагали, далее, что все недиагональные матричные элементы малы, пренебрегая тем самым обратным воздействием волн  $F_n$  и  $G_n$  на падающую и упруго рассеянную волну  $F_0$ . Это соответствует слабой связи между обеими группами волн; однако в действительности в некоторых случаях может оказаться необходимым предположить наличие «сильной связи», соответствующей большому численному значению недиагонального матричного элемента  $V_{0n}$ . В дальнейшем будет показано, что экспериментальные данные свидетельствуют о необходимости учета эффекта такого рода.

Приближение, при котором мы пренебрегаем всеми недиагональными матричными элементами, за исключением  $V_{0n}$ , не учитывает также влияния остальных неупруго рассеянных волн на переход  $0 \rightarrow n$ . Эти приближения отличаются от сделанных выше, так как они связаны не с соображениями, относящимися к электронному обмену, но с методом искаженных волн (см. гл. VIII, § 5).

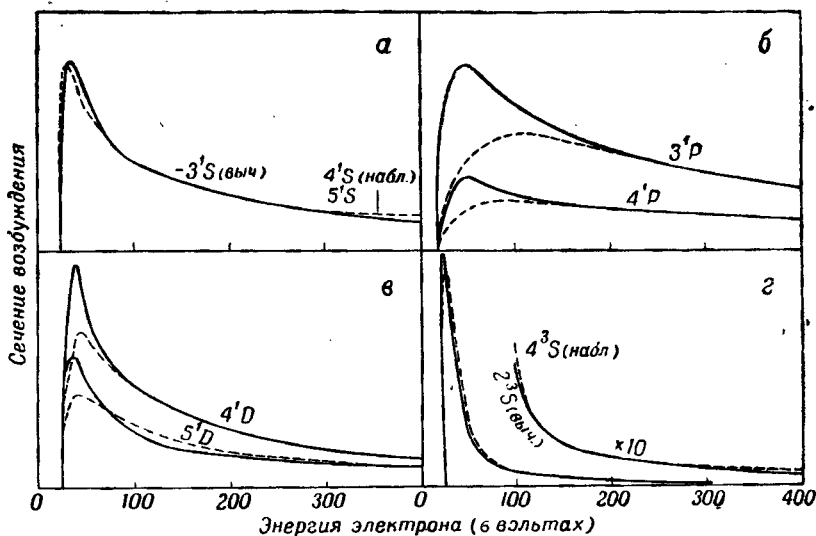
**2. Численные расчеты для гелия и сравнение с опытными данными**<sup>1)</sup>. Эффективные сечения для возбуждения синглетного и триплетного состояний атомов гелия были определены с помощью приближенной формулы (11.81) как функции скорости возбуждающего электрона для различных возбужденных состояний [3, 4]. •

Теория воспроизводит многие характерные особенности экспериментальных данных. С помощью формулы (11.81) можно показать, что вероятность возбуждения триплетных состояний  $S$ ,  $P$  и  $D$  убывает соответственно, как  $v^{-4}$ ,  $v^{-6}$  и  $v^{-8}$ , в противоположность вероятностям возбуждения синглетных состояний, которые изменяются, как  $v^{-2}$ ,  $v^{-2} \ln av$ ,  $v^{-2}$  ( $v$  — скорость падающего электрона).

Для состояний  $^1S$  и  $^3S$  между теорией и опытом наблюдается полное согласие вплоть до очень малых скоростей столкновений; для состояний  $^1P$  и  $^1D$  это согласие становится, однако, неудовлетворительным в случае электронов, энергия которых меньше 100 и 75  $e$  соответственно (см. фиг. 47). Из фиг. 47 следует, что в том случае, когда энергия электронов падает ниже 100  $e$ , теоретические значения вероятности возбуждения  $P$ -уровней начинают значительно превышать наблюдаемые величины. Для уровней  $^1D$  это имеет место только при малых значениях скоростей, для  $S$ -состояний больших расхождений между теоретическими и экспериментальными данными, повидимому, вообще не наблюдается.

<sup>1)</sup> Более детальное рассмотрение см. [6].

В § 3 мы показали, что аналогичными свойствами обладают также вероятность ионизации и вероятность возбуждения рентгеновых лучей; для вычисления вероятностей разрешенных оптических переходов формула Борна, повидимому, непригодна. Исследуя сделанные нами приближения, мы убеждаемся в том, что неудовлетворительность теории во всех случаях связана



Фиг. 47. Сопоставление наблюдаемых (пунктирные) и вычисленных (сплошные) кривых для сечения возбуждения.

На фиг. 47 а, б и г масштаб выбран так, чтобы вычисленные и наблюдаемые значения согласовались при 200 в, причем в случае фиг. 47, б—для кривой 3'P; на фиг. 47, в кривые нанесены по отношению к кривой 3'P.

с предположением о малости  $V_{0n}$ . Действительно, при возбуждении разрешенных оптических уровней величина  $V_{0n}$  при больших значениях  $r$  обращается в нуль как  $r^{-2}$ , а поле обладает большой рассеивающей способностью (упругое сечение для такого поля бесконечно велико, см. гл. II, § 5). Для исправления теории следовало бы решить систему уравнений такой же формы, что и уравнения, приведенные нами в гл. VIII, § 6. Мы показали (см. фиг. 18), что точное решение этих уравнений дало бы меньшее значение вероятности возбуждения, нежели это следует из теории Борна, как этого и требуют приведенные выше экспериментальные данные. Для  $D$ -уровней при больших значениях  $r$  величина  $V_{0n}$  обращается в нуль как  $r^{-4}$ ; такое поле обладает меньшей рассеивающей способностью, нежели поле, соответствующее возбуждению  $P$ -уровней. Можно ожидать, таким образом, что в случае возбуждения  $D$ -уровней приближение



Борна будет находиться в согласии с опытом вплоть до значительно меньших скоростей. Для возбуждения же  $S$ -уровней, при котором  $V_{0n}$  обращается в нуль как  $e^{-\lambda r}$ , следует ожидать лишь очень незначительного расхождения с обычной теорией. Эти заключения также согласуются с результатами опыта.

Вычисленные относительные значения вероятностей возбуждений триплетных и синглетных состояний в случае электронов, энергия которых превышает 100  $e$ , находятся в приближенном согласии с опытными данными; наблюдаемые кривые возбуждения уровней  ${}^3P$  с увеличением скорости спадают, однако, значительно медленнее, чем теоретические кривые. Причина этого расхождения не ясна; по всей вероятности, расхождение обусловлено побочными процессами, связанными с условиями опыта.

Пользуясь формулой (11.82), Месси и Мор [43] исследовали также вопрос о возбуждении уровней  $2^1P$  и  $2^3P$ . Волновая функция  $\mathcal{F}_n$  была вычислена Макдугаллом [44]; вычисление выражения (11.82) было осуществлено путем численного интегрирования. Основным интерес этих расчетов заключается в том, что они учитывают возмущение падающей и расходящейся волн полем атома и должны учитывать, таким образом, ожидаемые диффракционные явления. Для электронов с энергией 50  $e$  теория дает угловое распределение, совпадающее по форме с распределением, наблюдаемым Мором и Николлем [14]; при больших значениях углов рассеяния это распределение становится почти равномерным; при  $90^\circ$  оно имеет максимум. Согласие между экспериментальными и теоретическими значениями полных сечений, однако, не улучшается.

**3. Возбуждение тяжелых атомов.** Вопрос о возбуждении  $2P$ -уровней ртути был рассмотрен Пенни [45], который также воспользовался при этом формулой (11.81). Наиболее интересной особенностью этих расчетов является применение атомных волновых функций, содержащих члены, характеризующие взаимодействие спина и орбитального движения. Эти члены весьма существенны для столь тяжелого атома, как атом ртути. В связи с их наличием волновые функции для триплетного состояния  $2^3P_1$  не вполне антисимметричны по отношению к орбитальным волновым функциям; это состояние может быть, таким образом, возбуждено без участия электронного обмена. Возбуждение уровня  $2^3P_1$  имеет поэтому место и при больших скоростях электронов. Теоретическое значение отношения интенсивностей различных уровней хорошо согласуется с опытными данными даже при столь низких энергиях возбуждения, как 10  $e$ . Форма теоретических кривых зависимости вероятности возбуждения от скорости также хорошо согласуется с опытом.

Рассмотрим теперь диффракционные эффекты, наблюдаемые Мором и Николлем при неупругом рассеянии электронов атомами. Если мы пренебрежем обменными эффектами (что допустимо при средних и больших скоростях столкновений), то интенсивность рассеяния электронов, возбудивших  $n$ -е состояние данного атома, отнесенная к единице телесного угла, определится выражением вида

$$I_n(\theta) = \frac{k_n}{k} \frac{4\pi^2 m^2}{h^4} \left| \int V_{0n}(\mathbf{r}') F_0(r', \theta') \mathfrak{F}_n(r', \pi - \Theta) d\tau' \right|^2, \quad (11.84)$$

где

$$V_{0n}(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a) \psi_0(\mathbf{r}_a) \psi_n^*(\mathbf{r}_a) d\tau_a,$$

причем индекс  $a$  относится к координатам атомных электронов. Функции  $F_0(r, \theta)$  и  $\mathfrak{F}(r, \Theta)$  могут быть записаны в форме

$$F_0(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta} + \sum_s \left[ F_0^s - \sqrt{\left(\frac{2\pi}{kr}\right)} J_{s+\frac{1}{2}}(kr) \right] (2s+1) i^s P_s(\cos \theta). \quad (11.85)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n(r, \pi - \Theta) &= \\ &= e^{-ik_n r \cos \Theta} + \sum_s \left[ \mathfrak{F}_n^s - \sqrt{\left(\frac{2\pi}{k_n r}\right)} J_{s+\frac{1}{2}}(k_n r) \right] (2s+1) i^{-s} P_s(\cos \Theta); \end{aligned} \quad (11.86)$$

первый член представляет здесь плоскую волну, не возмущенную атомным полем, тогда как суммы характеризуют возмущение плоских волн полями нормального и возбужденного атомов. Подставляя эти функции в (11.84), получаем

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= \frac{k_n}{k} \frac{4\pi^2 m^2}{h^4} \left| \int V_{0n} \exp [i(kr' \cos \theta' - k_n r' \cos \Theta)] d\tau' + \right. \\ &\quad \left. + \sum_s P_s(\cos \theta) \int V_{0n} H_s(r', \theta', \varphi') d\tau' \right|^2, \end{aligned} \quad (11.87)$$

где  $H_s$  — некоторая функция от  $r'$ ,  $\theta'$  и  $\varphi'$ . Первый член этого выражения в точности совпадает с формулой Борна; характер его изменения был исследован нами в § 2; при углах рассеяния, превышающих  $30^\circ$ , он ничтожно мал, и основную роль приобретают члены ряда; при углах, превышающих  $30^\circ$ , диффракционные эффекты определяются числом гармонических составляющих ряда, заметно отличных от нуля. Если энергия падающего электрона велика по сравнению с энергией возбуждения, то  $k_n \approx k$  и, следовательно, поля нормального и возбужденного атомов оказывают одинаковое влияние. В этом случае в выражениях (11.85) и (11.86) может быть взято одинаковое число членов, причем относительная роль этих членов такая же, как и в слу-

чае упругого рассеяния, описываемого функцией  $F_0(r, \theta)$ . При больших значениях углов диффракционные эффекты должны быть, таким образом, весьма сходными с эффектами, наблюдаемыми при упругом рассеянии. Это заключение находится в согласии с опытными данными.

При малых скоростях это сходство должно исчезать, так как поле  $V_{nn}$  обладает значительно большей протяженностью, нежели поле  $V_{00}$ , с чем связана необходимость учета большего числа членов в разложении  $\mathfrak{F}_n$ , нежели в разложении  $F_0$ . Различие между  $k_n$  и  $k$  при этих скоростях также становится существенным. Именно этот результат и был получен при исследовании возбуждения атомов аргона (см. фиг. 46, из которой следует, что при энергиях, превышающих 55 e, угловое распределение неупруго рассеянных электронов сходно с угловым распределением упруго рассеянных электронов; по мере уменьшения энергии это сходство, однако, постепенно исчезает).

Месси и Мор [46] использовали соотношение (11.84) для расчетов рассеяния электронов при возбуждении резонансных уровней неона и аргона. Общие заключения, сделанные выше, при этом подтвердились. На фиг. 46 сопоставлены теоретическая и экспериментальная кривые углового распределения при упругом и неупругом рассеянии в аргоне.

## § 6. Заключение

Мы показали выше, что в случае неупругих столкновений медленных электронов с атомами приближение Борна оказывается неудовлетворительным: оно дает чересчур большие значения неупругого сечения и не объясняет наличия максимумов и минимумов на кривых углового распределения; помимо того, что оно не объясняет наличия диффракционных максимумов и минимумов, наблюдаемых при упругом рассеянии медленных электронов атомами, оно не способно также объяснить наличие большого рассеяния при малых углах, которое обусловлено, как об этом было сказано выше, поляризационными эффектами, связанными с взаимодействием неупруго и упруго рассеянных волн. Эта ситуация отражена в табл. 18.

Месси и Мор [3] дали анализ физических причин, по которым имеют место отклонения от приближения Борна. В тех случаях, когда это приближение справедливо, мы можем считать, что электрон находится в поле атома столь короткое время, что подвергается не более чем однократному рассеянию. При уменьшении энергии электрона вероятность вторичного столкновения электрона с тем же атомом возрастает. Наличие вторичных столкновений должно привести к отклонениям такого же типа, что и отклонения, наблюдаемые на опыте. Электрон может, таким

Таблица 18

| Рассматриваемый процесс  | Влияние на   |   |
|--|--|---|
|  | упругое рассеяние  | неупругое рассеяние   |
| 1. Рассеяние невозмущенным полем атома, в котором падающая волна лишь слегка искажена        | Малая интенсивность рассеяния. Угловое распределение изменяется монотонно, интенсивность убывает по мере увеличения угла   | Монотонное изменение углового распределения, которое с возрастанием угла убывает быстрее, чем в случае упругого рассеяния   |
| 2. Искажение падающей и рассеянной волн полем атома  | Наличие максимумов и минимумов на кривых зависимости эффективного сечения от скорости (эффект Рамзауера—Таунсенда). Наличие максимумов и минимумов на кривых углового распределения, причем наиболее резко выраженных в случаях тяжелых атомов и исчезающих при малых скоростях столкновений | Не оказывает заметного влияния на кривые зависимости эффективного сечения от скорости. Наличие максимумов и минимумов на кривых углового распределения при больших значениях углов, весьма сходных с соответствующими кривыми углового распределения для упругого рассеяния, за исключением случая очень малых скоростей столкновений |
| 3. Электронный обмен   | Сказывается в случае легких атомов (H, He), приходя при малых скоростях столкновений к большому разнообразию формы угловых распределений   | Приводит к возможности осуществления некоторых запрещенных оптических переходов (например, возбуждения триплетов He). Характер влияния на угловое распределение пока еще не выяснен   |
| 4. Искажение атомного поля (поляризация) или же взаимодействие рассеянных волн друг с другом | Резкое возрастание интенсивности рассеяния при малых значениях углов. Увеличение суммарной вероятности упругого столкновения   | Уменьшение вероятности неупругого столкновения. Характер влияния на угловое распределение еще не выяснен  |

образом, потерять энергию в результате возбуждения атома даже в том случае, когда он находится на значительном расстоянии от этого атома. При этом он не испытывает значительных отклонений от своего первоначального направления и при последующем движении может вновь получить энергию в результате повторного взаимодействия с тем же атомом, снова не испытав при этом заметного отклонения. Такой электрон будет представляться наблюдателю рассеянным упруго лишь на малый угол. В результате, при малых значениях углов должно иметь место уменьшение неупругого сечения и возрастание упругого рассеяния.

Электрон, испытавший сперва неупругое рассеяние, может затем быть отклонен полем атома. С другой стороны, электрон в рассеянном пучке, не потерявший энергии при рассеянии, может испытать затем неупругое столкновение, не сопровождающееся заметным отклонением. Если потеря энергии при неупругом столкновении мала, то влияние каждого из этих процессов будет создавать в совокупности диффракционную картину, подобно тому как это имеет место при влиянии упругого рассеяния на монохроматические неупруго рассеянные электроны.

Можно считать, что при столкновениях электронов с атомами взаимодействие является достаточно сильным для того, чтобы эти двойные процессы приобрели существенную роль в случае медленных столкновений. При столкновении двух атомов друг с другом эти процессы могут стать адиабатическими, поскольку это сводится к обмену энергией между электронами, так как в том случае, когда атомы длительное время находятся под взаимодействием, вероятность многократных процессов велика (см. гл. XII, § 3). В случае сил взаимодействия между ядерными частицами, сосредоточенных в малой области пространства и очень больших по своей величине, решение задачи в приближении одной частицы также приводит к результатам, совершенно непригодным для описания ядерных столкновений, за исключением случая столкновений между наиболее легкими ядрами (см. гл. XIII, § 2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe, Ann. d. Phys., 5, 325 (1930).
2. Eckart, Phys. Rev., 36, 878 (1930).
3. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., A140, 613 (1933).
4. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., A132, 605 (1931).
5. Massey and Burhop, Electronic and Ionic Impact Phenomena.
6. Dymond and Watson, Proc. Roy. Soc., A122, 571 (1929).
7. McMillen, Phys. Rev., 36, 1034 (1930).
8. Mohr and Nicoll, Proc. Roy. Soc., A138, 229 (1932).
9. Elsasser, Zs. f. Phys., 45, 522 (1926).
10. Bethe, Ann. d. Phys., 5, 325 (1930).
11. Goldstein, Thèses, Paris, 1932.

12. Harnwell, Phys. Rev., 34, 661 (1929).
13. Hughes and McMillen, Phys. Rev., 41, 39 (1932).
14. Mohr and Nicoll, Proc. Roy. Soc., A138, 469 (1932).
15. Whiddington and Roberts, Proc. Leeds Phil. Soc., 2, 201 (1931).
16. Van Atta, Phys. Rev., 38, 876 (1931).
17. Sommerfeld, Ann. d. Phys., 11, 257 (1931).
18. Tate and Palmer, Phys. Rev., 40, 731 (1932).
19. Morse, Phys. Zs., 33, 443 (1932).
20. Heisenberg, Phys. Zs., 32, 737 (1931).
21. Bewilogua, Phys. Zs., 32, 740 (1931).
22. Lees, Proc. Roy. Soc., A137, 173 (1932).
23. Thieme, Zs. f. Phys., 78, 412 (1932).
24. Smith P., Phys. Rev., 36, 1293 (1930).
25. Normand, Phys. Rev., 35, 1217 (1930).
26. Berhop, Proc. Camb. Phil. Soc., 36, 43 (1940).
27. Clark, Phys. Rev., 48, 30 (1935).
28. Webster, Hansen and Duveneck, Phys. Rev., 43, 851 (1933).
29. Smick and Kirkpatrick, Phys. Rev., 67, 153 (1945).
30. Pockman, Webster, Kirkpatrick and Haworth, Phys. Rev., 71, 330 (1947).
31. Webster, Pockman and Kirkpatrick, Phys. Rev., 44, 130 (1933).
32. Smith and Tate, Phys. Rev., 39, 270 (1932).
33. Thomson, Phil. Mag., 23, 449 (1912).
34. Williams and Terroux, Proc. Roy. Soc., A126, 289 (1930).
35. Бете, Квантовая механика простейших систем, М.—Л., 1934.
36. Bloch, Zs. f. Phys., 81, 363 (1933).
37. Bohr, Phil. Mag., 25, 10 (1913); 30, 58 (1915).
38. Bloch, Ann. d. Phys., 16, 285 (1933).
39. Williams, Proc. Roy. Soc., A139, 163 (1933); Rev. Mod. Phys., 17, 217. (1945).
40. Mott, Proc. Camb. Phil. Soc., 27, 553 (1931); Франце, там же, 27, 511 (1931).
41. Williams, Proc. Roy. Soc., A135, 108 (1932).
42. Hughes and Lowe, Proc. Roy. Soc., A104, 480 (1923); Skinner and Lees, Nature, 123, 836 (1929); Hanle, Zs. f. Phys., 56, 94 (1929); Michels, Phys. Rev., 36, 1362 (1930).
43. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., A139, 187 (1932).
44. Macdougall, Proc. Camb. Phil. Soc., 28, 341 (1932).
45. Penney, Phys. Rev., 39, 467 (1932).
46. Massey and Mohr, Proc. Roy. Soc., A146, 880 (1934).

## СТОЛКНОВЕНИЯ МЕЖДУ ТЯЖЕЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ

### § 1. Физические явления, рассматриваемые в данной главе

Под «тяжелыми частицами» мы будем подразумевать частицы, масса которых велика по сравнению с массой электрона, например атомы,  $\alpha$ -частицы и т. д. Мы исключим пока из рассмотрения столкновения, при которых играют роль силы ядерного взаимодействия. Такого рода столкновения будут исследованы нами в гл. XIII.

Изучение явлений, связанных со столкновениями между тяжелыми частицами, выходит за пределы данной книги; мы ограничимся поэтому лишь кратким перечнем полученных при этом результатов<sup>1)</sup>.

**1. Прохождение быстрых тяжелых частиц через вещество.** Сюда относится изучение свободного пробега  $\alpha$ -частиц, быстрых протонов, нейтронов и тяжелых ядер в различных веществах. Исследование этих явлений производится либо путем непосредственного наблюдения треков отдельных частиц в камере Вильсона, либо путем непосредственного подсчета числа частиц методом сцинтилляций, с помощью лампового усиления, а также другими методами. Теоретическая задача заключается в этом случае в вычислении потери энергии на одном сантиметре пути в данном веществе как функции массы, энергии и заряда частиц, а также свойств самого вещества. Построение такого рода теории весьма существенно, так как измерение потери энергии на одном сантиметре пути часто является единственным способом определения природы или скорости рассматриваемой частицы.

**2. Приобретение или потеря заряда при столкновении.** Это явление наблюдается как в случае медленных, так и в случае быстрых положительных ионов. Поведение  $\alpha$ -частиц в этом отношении рассмотрено подробно в книге Резерфорда, Чэдвика и Эллиса [2]. Имеется также большое количество соответствующих опытных данных, относящихся к более медленным ионам.

---

<sup>1</sup> Подробное описание экспериментальной техники изучения этих явлений и полученных опытных данных можно найти в книге Месси и Бургопа [1] (гл. XII и XIII).

**3. Передача возбуждения.** Это явление весьма сходно с упомянутым выше явлением передачи заряда; оно заключается в передаче электронного или какого-либо иного возбуждения от одной из сталкивающихся систем к другой и играет весьма существенную роль в физике, в частности, при возбуждении спектров. Наличие малых примесей посторонних газов часто оказывает весьма заметное влияние на интенсивность и характер спектров, наблюдаемых в разрядной трубке. В качестве примера можно упомянуть о хорошо известном явлении тушения резонансного излучения.

Теоретическая задача состоит в этом случае в вычислении вероятности передачи возбуждения; особый интерес представляет определение зависимости этой вероятности от разности энергий двух возбужденных состояний.

**4. Упругие столкновения атомов газа.** Развитие техники исследования молекулярных пучков послужило мощным толчком к изучению взаимодействия между атомами газа. Оказалось возможным наглядно продемонстрировать волновые свойства атомов газа путем диффракции пучков гелия и водорода от кристаллических поверхностей [3]; недалеко то время, когда станет практически возможным исследование рассеяния атомов при определенных значениях их относительных скоростей. Интересно поэтому рассчитать эффекты, ожидаемые при упругих столкновениях между атомами газа.

Вычисление эффективных сечений для столкновений между атомами газа представляет интерес также и в связи с построением теории вязкости и других явлений переноса в газах; в частности, изменение вязкости газа с температурой связано с зависимостью эффективного сечения столкновений от относительной скорости частиц (см. § 3).

**5. Подвижность положительных ионов в газах.** Определению подвижности ионов в газах посвящено очень большое число экспериментальных работ [4], однако лишь в последние годы были созданы экспериментальные условия, при которых оказалось возможным ясно понять наблюдаемые при этом явления. Последние исследования Тиндалля и других авторов [5] показали, что в опытах такого рода чрезвычайно существенную роль играет чистота исследуемого газа. Даже в газах, содержащих лишь 10-40% примеси, имеет место образование тяжелых комплексов ионов, обладающих малой подвижностью. В результате тщательной очистки исследовавшихся газов (аргона, гелия и неона) оказалось возможным измерить подвижности свободных ионов в этих газах. Поскольку подвижность ионов определяется вероятностью столкновений между атомами газа и ионами изме-



рения подвижности могут дать нам весьма ценные сведения о таких столкновениях.

**6. Возбуждение внутримолекулярного движения.** Сюда относятся неупругие столкновения между молекулами, приводящие к возбуждению вращения и колебания ядер. При газокинетических скоростях это—единственно возможный тип возбуждения. Непосредственное экспериментальное исследование этих явлений при помощи методов, подобных методам, применяемым при изучении столкновений с электронами, пока еще невозможно; косвенные сведения о происходящих при этом процессах могут быть, однако, получены на основании следующих данных.

*Измерение коэффициентов аккомодации.* Коэффициент аккомодации атомов газа на твердой поверхности определяется вероятностью обмена энергией между атомами газа и колеблющимися атомами поверхности твердого тела. Путем измерений коэффициентов аккомодации могут быть, таким образом, получены сведения о порядке величины этой вероятности и о зависимости ее от температуры.

*Дисперсия и поглощение звука высокой частоты.* Зависимость скорости распространения звуковых колебаний высокой частоты от величины самой частоты впервые была обнаружена Пирсом [6] при изучении распространения звука в двуокиси углерода. Причиной дисперсии, как это предположили впервые Герцфельд и Райс [7], здесь является то обстоятельство, что колебательные степени свободы молекул газа не успевают следовать за быстрыми температурными изменениями, имеющими место при распространении ультразвукового возмущения. Это связано с тем, что скорость обмена энергией между колебательными и вращательными степенями свободы очень мала. Этот же эффект приводит и к поглощению звука, обусловленному разностью фаз между флюктуациями давления и плотности. В настоящее время мы располагаем большим количеством опытных данных [8] о дисперсии и поглощениях звука в  $\text{CO}_2$ , а также во многих других газах и газовых смесях. Эти данные позволили определить вероятность дезактивации колебаний при столкновениях для ряда молекул.

*Скорости мономолекулярных химических реакций.* Согласно опытным данным, для того чтобы мономолекулярная реакция могла иметь место, требуется некоторая энергия «активации». Во многих случаях активация сводится к возбуждению колебаний; изучение зависимости скорости реакции от давления разлагающегося газа или от примесей посторонних газов может дать нам, таким образом, сведения о вероятности возбуждения колебаний при столкновениях. В то же время построение теории возбуждения такого рода весьма существенно для правильной интерпретации экспериментальных данных.

7. **Общий случай химических реакций.** Сюда может быть отнесено очень большое число явлений. Наиболее простой случай представляют столкновения между двумя молекулами, сопровождающиеся перераспределением частиц; наиболее важным является, однако, случай тройных столкновений, при которых имеет место соединение или диссоциация двух молекул в результате взаимодействия их с некоторой третьей частицей. Основная задача заключается при этом в вычислении относительных вероятностей реакций различного типа в зависимости от свойств реагирующих веществ.

Проведенная нами классификация различных явлений, относящихся к общему случаю столкновений между тяжелыми частицами, отнюдь не является строгой. Так, например, четыре последних процесса весьма сходны друг с другом по своей природе; поскольку, однако, методы их экспериментального исследования коренным образом отличаются друг от друга, мы нашли более целесообразным рассматривать эти процессы раздельно.

К сожалению, теория столкновений между тяжелыми частицами в настоящее время разработана еще далеко не столь полно, как теория электронных столкновений. Количественные результаты получены только в случае быстрых столкновений, для которых справедливо первое приближение Борна, а также для упругих столкновений между атомами газа. Некоторые общие результаты получены, однако, также и в других случаях, а при решении ряда задач, например задачи о возбуждении колебательных уровней, трудности заключаются лишь в сложности соответствующего математического аппарата. Следуя той же общей схеме, которая была принята нами для электронных столкновений, мы рассмотрим прежде всего поведение быстрых частиц.

## § 2. Быстрые столкновения между тяжелыми частицами

1. **Тормозная способность вещества для быстрых положительных ионов.** Вычисление потери энергии, испытываемой быстрыми положительными ионами на одном сантиметре пути при прохождении их через какое-либо вещество, весьма сходно с соответствующим вычислением для случая быстрых электронов, произведенным нами в гл. XI. Примем следующие обозначения:  $M_1$  и  $M_2$  — значения масс двух сталкивающихся систем,  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  — приведенная масса всей системы,  $Z'e$  — заряд иона; величины  $k$ ,  $k_n$ ,  $x$ ,  $n_0$ ,  $n$  имеют тот же смысл, что и в гл. XI. Заменив массу электрона на  $M$  и  $e^2$  на  $Z'e^2$ , мы можем воспользоваться формулами, приведенными в гл. XI. Дифференциальное сечение как функция импульса будет при

этом иметь вид [см. формулу (11.10)]

$$I_{0n}(K) dK = \frac{128\pi^5 M^2 Z'^2 e^4}{k^2 h^4} \frac{dK}{K^3} |\varepsilon_{0n}(K)|^2, \quad (12.1)$$

где

$$\varepsilon_{0n}(K) = \sum_{s=1}^N e^{iKx_s} \psi_0 \psi_n^* d\tau,$$

а  $Kh/2\pi$  — изменение импульса. Эффективное сечение, соответствующее возбуждению  $n$ -го состояния, мы получим, проинтегрировав дифференциальное сечение в пределах возможных изменений импульса. Для рассматриваемых нами быстрых столкновений эти пределы определяются точно таким же образом, как и для электронов, так как матричные элементы  $\varepsilon_{0n}(K)$  в обоих случаях одинаковым образом зависят от изменения импульса  $Kh/2\pi$ .

Нижний предел  $K$  при этом равен (см. гл. XI, § 1)

$$K_{\text{мин.}} = \frac{4\pi^2 M (E_n - E_0)}{h^2},$$

а верхний предел определяется условием сохранения импульса, так что

$$K_{\text{макс.}} = \frac{2km}{M+m} \approx \frac{2km}{M}. \quad (12.2)$$

В остальном эти вычисления совершенно аналогичны соответствующим вычислениям для электронов. В результате мы получаем следующие формулы:

Возбуждение оптических уровней (см. гл. XI, § 3, п. 1)

$$Q_{nl, n'l'} = \frac{16\pi^4 Z'^2 e^4}{mv^2} |x_{nl, n'l'}|^2 \ln \frac{2mv^2}{E_{n'l'} - E_{nl}}. \quad (12.3)$$

Возбуждение рентгеновых лучей (см. гл. XI, § 3, п. 2)

$$Q_{nl}^i = \frac{2\pi Z'^2 e^4}{mv^2 |E_{nl}|} Z_{nl} b_{nl} \ln \frac{2mv^2}{B_{nl}}. \quad (12.4)$$

Первичная ионизация (см. гл. XI, § 3, п. 3)

$$Q_{nl} = \frac{2\pi Z'^2 e^4 c_{nl} Z_{nl}}{mv^2 |E_{nl}|} \ln \frac{2mv^2}{C_{nl}}. \quad (12.5)$$

Потеря энергии на 1 см пути (см. гл. XI, § 4, п. 2)

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 Z'^2 N}{mv^2} Z \ln \frac{2mv^2}{E}, \quad (12.6)$$

где для водорода  $E = 1,105 Rh$ .

Сопоставляя эти выражения с соответствующими формулами для электронов, приведенными в гл. XI, мы видим, что при больших скоростях столкновений положительный ион с зарядом

+e ведет себя точно так же, как электрон, движущийся с такой же скоростью. Выражения, определяющие потерю энергии на одном сантиметре пути, несколько отличаются в логарифмическом члене: для электронов этот член равен  $\ln(mv^2/E)$ , тогда как для тяжелых частиц он равен  $\ln(2mv^2/E)$ .

В табл. 19 экспериментальные значения длины свободного пробега  $\alpha$ -частиц при прохождении их через водород и гелий сопоставлены с теоретическими значениями, вычисленными с помощью формулы (22.6) [9].

Таблица 19

Длины свободных пробегов  $\alpha$ -частиц в водороде и гелии

| Газ     | Начальное и конечное значения скорости (в $10^9$ см/сек) |       | $e^2/\hbar v$ | Пройденный путь (в см) |                            |                               |
|---------|--|-------|---------------|------------------------|----------------------------|-------------------------------|
|         |  |       |               | наблюденные значения   | по Бете (квантовая теория) | по Бору (классическая теория) |
| Водород | 2,054  | 1,709 | 0,23          | 19,0                   | 18,9                       | 16,3                          |
| Водород | 1,709  | 1,802 | 0,25          | 15,8                   | 16,2                       | 13,7                          |
| Гелий   | 1,054  | 2,709 | 0,26          | 22,6                   | 22,3                       | 18,4                          |

Из формулы (12.6) следует, что частица, проходящая через газ, содержащий  $N$  атомов в  $1 \text{ см}^3$ , при потере скорости от  $v_1$  до  $v_2$  проходит расстояние  $R$ , определяемое выражением

$$R = \frac{ME^2}{32\pi e^2 Z'^2 Z m N} [\text{Ei}(y_2) - \text{Ei}(y_1)], \quad (12.7)$$

где  $Z$  — заряд ядра атомов вещества, через которое проходит частица, а

$$y_1 = 2 \ln \frac{2mv_1^2}{E}, \quad y_2 = 2 \ln \frac{2mv_2^2}{E},$$

$$\text{Ei}(y) = \int_{\infty}^y e^{-x} x^{-1} dx.$$

Согласие теории с опытом, как мы видим, является хорошим. В табл. 19 включены также значения свободного пробега, подсчитанные по классической формуле Бора. Очевидно, что эта формула дает менее удовлетворительные результаты, чем формула (12.7). Этого и следовало ожидать, поскольку ясно (см. гл. XI, § 4), что классическая формула более пригодна лишь при условии  $E^2/\hbar v \gg 1$ .

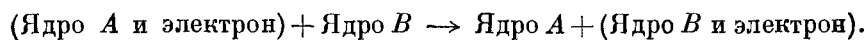
Второе условие применимости приближения Борна было сформулировано нами в гл. XI, § 4, в виде неравенства  $u^2/v^2 \ll 1$ , где  $u$  — орбитальная скорость атомных электронов. При рассмотрении тормозной способности вещества, содержащего

сложные атомы, возникает вопрос о том, как следует интерпретировать это условие, поскольку оно требует, чтобы рассматриваемые положительные ионы двигались быстрее, чем даже  $K$ -электроны. Действительно, для того чтобы  $\alpha$ -частица могла двигаться быстрее, чем  $K$ -электроны атомов кислорода, она должна была бы обладать энергией, превышающей 800 000 эв.

Хеннеберг [10] показал, что приближение Борна может быть использовано для вычисления потерь энергии даже в том случае, когда скорость положительного иона меньше скорости  $K$ -электрона, при условии, что заряд  $Ze$  ядра атома много больше заряда  $Z'e$  иона. В этом можно убедиться следующим образом. Если скорость относительного движения сталкивающихся частиц мала по сравнению со скоростями внутреннего движения, для решения задачи удобно воспользоваться методом возмущенных стационарных состояний (см. гл. VIII, § 7). В том случае, когда  $Z \gg Z'$ , возмущение волновых функций  $K$ -электронов, вызываемое столкновениями с ионами, будет малым. В гл. VIII, § 7, было показано, что при этих условиях метод возмущенных стационарных состояний дает практически те же результаты, что и метод Борна. Бете [11] воспользовался этим обстоятельством и применил формулу (12.6) для получения полуэмпирических данных о тормозной способности различных веществ по отношению к протонам,  $\alpha$ -частицам и т. д. При этом следует, однако, помнить, что при  $u^2/v^2 \gg 1$  приближение Борна становится непригодным, если  $Z \gg Z'$ ; оно, например, непригодно для протонов в водороде, энергия которых меньше 25 000 эв.

## 2. Захват электронов быстрыми положительными ионами.

Общая теория этого явления была рассмотрена нами в гл. VIII. Оно относится к столкновениям, сопровождающимся перераспределением частиц; идущая при этом реакция может быть описана уравнением вида



Поскольку речь идет о быстрых столкновениях, можно воспользоваться приближением Борна и формулами, приведенными в гл. VIII, § 4. Сечение, соответствующее переходу электрона из состояния  $n$  в поле ядра  $A$  в состояние  $q$  в поле ядра  $B$ , определится при этом выражением вида [см. формулу (8.45)]

$$Q_{nA \rightarrow qB} = \frac{v'}{v} \frac{8\pi^3 M^2}{h^4} \cdot \int_0^\pi \left| \iint V(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho}) \varphi_q^*(\mathbf{r}_e) \psi_n(\mathbf{r}_e) \exp \times \right. \\ \left. \times [i(kn_0 \cdot \mathbf{r} - kq_n \cdot \boldsymbol{\rho})] d\mathbf{r}_e d\boldsymbol{\rho} \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (12.8)$$

Здесь  $V(\mathbf{r}_e, \boldsymbol{\rho})$  — энергия взаимодействия между ядром  $A$

и электроном,  $\psi_n(\mathbf{r}_e)$  — волновая функция электрона в состоянии  $n$  в поле ядра  $A$ ,  $\varphi_q(\mathbf{r}_e)$  — волновая функция этого же электрона в состоянии  $q$  в поле ядра  $B$ ,  $\rho$  — расстояние между ядром  $A$  и центром тяжести системы (ядро  $B$  + электрон),  $\mathbf{r}_e$  — координаты электрона,  $M$  — приведенная масса конечной системы; если массы ядер  $A$  и  $B$  равны соответственно  $M_A$  и  $M_B$ , а масса электрона равна  $m$ , то

$$M = \frac{M_A(M_B + m)}{M_A + M_B + m};$$

волновые числа  $k$  и  $k_q$  определяются выражениями

$$k = \frac{2\pi v}{h} \frac{(M_A + m) M_B}{M_A + M_B + m}, \quad k_q = \frac{2\pi v'}{h} \frac{(M_B + m) M_A}{M_A + M_B + m}, \quad (12.9)$$

где  $v$  и  $v'$  — исходное и конечное значения относительной скорости;  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{n}$  — единичные векторы, взятые в направлениях относительного движения до и после столкновения, так что  $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$ .

При вычислении интеграла (12.8) удобно перейти от координат  $\rho$  и  $\mathbf{r}_e$  к координатам  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{r}_B$ , характеризующим положение электрона относительно ядер  $A$  и  $B$ . При этом мы получим

$$Q_{nA \rightarrow qB} = \frac{v'}{v} \frac{8\pi^3 M^2}{h^4} \int_0^\pi \left| \iiint V(r_A) \varphi_q^*(\mathbf{r}_B) \psi_n(\mathbf{r}_A) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{2\pi i}{h} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_A - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_B) \right] d\mathbf{r}_A d\mathbf{r}_B \right|^2 \sin \theta d\theta, \quad (12.10)$$

где

$$V(\mathbf{r}_A) = V(\mathbf{r}_e, \rho)$$

и

$$\begin{aligned} (M_A + M_B + m)\mathbf{A} &= M_A M_B v \mathbf{n}_0 - M_A (M_B + m) v' \mathbf{n}, \\ (M_A + M_B + m)\mathbf{B} &= M_B (M_A + m) v \mathbf{n}_0 - M_A M_B v' \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Переменные, входящие под знак двойного интеграла, теперь разделяются, и если атомные волновые функции имеют сравнительно простой вид, вычисления могут быть выполнены без особого труда.

Бринкман и Крамерс [12] воспользовались формулой (12.10) для вычисления сечения  $Q_{nA \rightarrow qB}$ , соответствующего переходу электрона из  $1s$ -состояния в поле ядра  $A$  в  $1s$ -состояние в поле ядра  $B$ . Они нашли при этом, что если скорость  $v$  столь велика, что сечение определяется только малыми изменениями импульса, то

$$Q = \frac{1}{5} 2^{18} \pi a_0^2 Z^5 Z'^5 s^8 [s^2 + (Z + Z')^2]^{-5} [s^2 + (Z - Z')^2]^{-5}, \quad (12.12)$$

где  $s = hv/2\pi e^2$ , а  $Ze, Z'e$  — заряды ядер. Отсюда следует, что при

больших скоростях вероятность захвата электрона убывает как  $v^{-12}$ , в противоположность вероятности возбуждения, которая в случае разрешенных оптических переходов убывает несколько медленнее, нежели  $v^{-2}$  [см. формулу (12.3)]. Это различие обусловлено тем, что в рассматриваемой нами задаче о захвате электрона выражение, определяющее минимальное изменение импульса, содержит член, пропорциональный  $v$ .

В случае непосредственного возбуждения такой член отсутствует.

Известные опыты Резерфорда [13] и Якобсена [14] относятся к захвату электронов  $\alpha$ -частицами при прохождении последних через воздух; Бринкман и Крамерс вычислили приближенно вероятность захвата электронов из атомов азота. Как показывает фиг. 48, при этом было получено хорошее согласие с опытными данными.

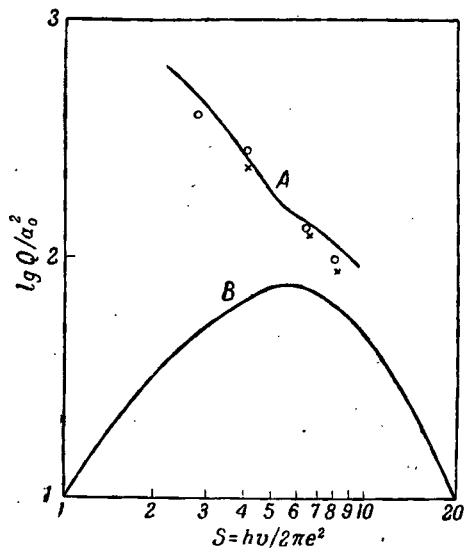
Эмпирическая закономерность, найденная Резерфордом для зависимости вероятности захвата электрона от скорости,

$$Q \sim v^{-5,6}, \quad (12.13)$$

обусловлена тем обстоятельством, что вероятность захвата  $K$ -электрона возрастает по мере увеличения

скорости  $\alpha$ -частицы, тогда как сечение захвата  $\alpha$ -электрона при этом убывает примерно как  $v^{-12}$ . Сочетание этих двух эффектов приводит к закономерности (12.13).

**3. Тормозная способность вещества для ядерных осколков.** [15—17). Осколки, получающиеся при делении тяжелых ядер (см. гл. XIII, § 6), обладают вначале скоростью порядка  $1,5 \cdot 10^9$  см/сек и ионным зарядом порядка  $25e$ . Для того чтобы получить приближенное соотношение, характеризующее скорость потери энергии этими осколками при их прохождении через различные вещества, необходимо определить эффективный заряд иона как функцию его скорости  $v$ .



Фиг. 48. Сечения захвата электронов  $\alpha$ -частицами.

A—теоретическая кривая для азота; B—теоретическая кривая для захвата в состоянии  $1S$  из ядра с зарядом 7. Крестинами указаны экспериментальные данные Резерфорда, кружками—данные Якобсена.

При любом данном значении скорости между процессами захвата и потери электронов устанавливается равновесие, так что средний заряд иона оказывается постоянным и равным  $Z_{\text{эфф.}}(v)$ . Если скорость ядерных осколков велика по сравнению с орбитальной скоростью  $u$  электронов в атомах того вещества, через которое проходят ионы, то потеря энергии на единицу длины определяется выражением вида

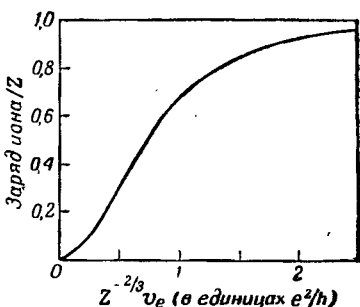
$$\frac{dT}{dx} = - \frac{4\pi N Z_{\text{эфф.}}^2 e^4}{mv^2} \ln \left( \frac{g_2 m v^3}{Z_{\text{эфф.}} E} \right). \quad (12.14)$$

Вместо формулы Бете (12.6) здесь использована классическая формула Бора, так как в той области, где  $u^2/v^2$  мало,  $2\pi Z_{\text{эфф.}} e^2/hv$  больше единицы (см. гл. XI, § 4).

Критерий Бора для определения  $Z_{\text{эфф.}}$  основан на том обстоятельстве, что захват электронов на орбиты, для которых скорость электрона меньше скорости иона, весьма мало вероятен (см. п. 2). С другой стороны, в том случае, когда скорость электрона превышает скорость иона, вероятность потери электрона атомом в результате ионизации мала, так что переход является почти адиабатическим (см. § 3, п. 4). Отсюда следует, что наиболее слабо связанными электронами в ядерных осколках будут те, орбитальная скорость которых  $v_e$  сравнима со скоростью ионов  $v$ , т. е.  $v_e = \gamma v$ , где  $\gamma$  — порядка единицы. Если  $v_e$  известно, то  $Z_{\text{эфф.}}$  может быть вычислено.

При отыскании зависимости  $Z_{\text{эфф.}}$  от  $v_e$  для описания поля иона проще всего воспользоваться методом Томаса — Ферми, как это было сделано Бором [15], а также Книшпом и Теллером [17]. Фиг. 49 иллюстрирует результаты, полученные последними авторами. Бор предположил, что  $\gamma = 1$ ; Книшп и Теллер [17] определили значение  $\gamma$  более точно, воспользовавшись для этого анализом данных о пробеге в воздухе ионов  $N^{14}$ ,  $O^{16}$ ,  $O^{17}$  и  $F^{19}$ , полученных в результате распада ядер. Они нашли, что для ядерных осколков в воздухе значение  $\gamma$  лежит в интервале 1,5 — 1,9.

По мере уменьшения скорости иона эффективный заряд уменьшается. Когда  $v$  падает ниже скорости  $u$  атомных электронов, формула (12.14) становится неприменимой. При этих условиях потеря энергии, вызванные столкновениями с электронами,



Фиг. 49. Соотношение между степенью ионизации и скоростью наименее связанных электронов, вычисленное по методу Томаса—Ферми.



становятся столь малыми, что доминирующее значение приобретают потери, обусловленные ядерными столкновениями. Если  $M_1$  — масса иона,  $M_2$  — масса атома газа,  $Z_1$  и  $Z_2$  — соответственно заряды ядер, то потеря энергии, обусловленная столкновениями с ядрами, равна (на один сантиметр пути)

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi M_1^2 v^2 M_2 N}{(M_1 + M_2)^2} \times \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} I(\theta) \sin \theta d\theta,$$

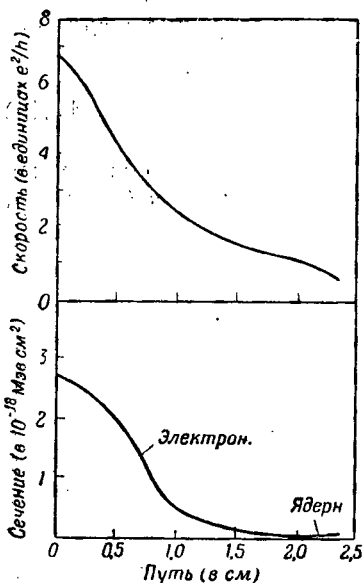
где  $I(\theta)$  — дифференциальное сечение для столкновения, при котором угол рассеяния в центре тяжести системы равен  $\theta$  (см. гл. VIII, § 9). Так же, как и в гл. IX, § 6, при  $\theta > \theta_{\text{мин}}$  можно считать справедливой формулу для кулонова рассеяния:

$$I(\theta) = \left[ \frac{Z_1 Z_2 e^2 (M_1 + M_2)}{4M_1 M_2 v^2} \right]^2 \text{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$$

и пренебречь ролью членов, отвечающих  $\theta < \theta_{\text{мин}}$ . При этом  $\theta_{\text{мин}}$  связано с эффективным экранирующим расстоянием  $a$  обычным классическим соотношением.

Оценка величины  $a$  может быть получена также с помощью модели Томаса—Ферми. Бор [15] нашел таким путем, что

$$a \approx a_0 (Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{-1/2}.$$



Фиг. 50. Теоретическое значение «тормозного сечения» для типичного ядерного осколка как функция пройденного расстояния. Отдельно указаны участки кривой, соответствующие электронным и ядерным столкновениям. Верхний график дает зависимость скорости осколка от пройденного пути.

Фиг. 50 иллюстрирует относительное влияние электронных и ядерных столкновений на тормозную способность воздуха по отношению к ядерным осколкам с массовым числом 94, атомным номером 37 и исходной энергией 10 Мэв. На фиг. 50 «тормозное сечение»  $N^{-1} dT/dx$ , обусловленное обоими процессами, дано как функция пройденного расстояния;  $\gamma$  принято при этом равным 1,5. Из приведенного графика зависимости скорости осколка от пройденного расстояния следует, что в конце рассматриваемой области условие применимости соотношения (12.14), согласно которому  $v$  должно превышать орбитальную скорость атомных электронов, перестает удовлетворяться. Однако, поскольку в этой области доминирующую роль начинают играть ядерные столк-

новения, это обстоятельство, вероятно, не приводит к существенным ошибкам.

**4. Многократное рассеяние.** Теория многократного рассеяния электронов была рассмотрена нами в гл. IX, § 6. Совершенно аналогичным образом может быть исследован также и вопрос о многократном рассеянии тяжелых заряженных частиц. Среднее квадратичное отклонение  $\bar{\alpha}^2$  равно в этом случае

$$2x \ln \left( \frac{x}{2\theta_{\text{мин.}}} \right),$$

где

$$x = \frac{4\pi N t Z_1^2 Z_2^2 e^4 (M_1 + M_2)^2}{M_1^2 M_2^2 v^4}.$$

Здесь  $N$  — число рассеивающих ядер в  $1 \text{ см}^3$ ,  $t$  — толщина рассматриваемого слоя вещества,  $Z_2 e$  и  $M_2$  — заряд и масса рассеивающих ядер, а  $Z_1 e$  и  $M_1$  — соответствующие величины для падающих частиц, обладающих скоростью  $v$ . Величина  $\theta_{\text{мин.}}$  определяется при этом выражениями вида

$$\theta_{\text{мин.}} = \frac{2,10 Z_2^{1/3} \hbar (M_1 + M_2)}{M_1 M_2 v a_0} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \ll 1 \right), \quad (12.15)$$

$$\theta_{\text{мин.}} = \frac{3,8 Z_2^{4/3} e^2 (M_1 + M_2)}{M_1 M_2 v^2 a_0} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \gg 1 \right). \quad (12.16)$$

Для электронов основную роль играют обычно условия, отвечающие формуле (12.15); при рассеянии тяжелых частиц во многих случаях удовлетворяются, однако, классические условия (12.16). В табл. 20, взятой из работы Вильямса [9],

Таблица 20

Многократное рассеяние  $\alpha$ -частиц

| Рассеивающий элемент | $Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$ | Наиболее вероятное значение угла рассеяния (в градусах) |                        |                     |
|----------------------|-------------------------|---|------------------------|---------------------|
|                      |                         | экспериментальное значение                              | по классической теории | в приближении Борна |
| Золото . . . . .     | 20                      | 2,1   | 1,74                   | 3,07                |
| Олово . . . . .      | 13                      | 1,5   | 1,43                   | 2,20                |
| Серебро . . . . .    | 12                      | 1,5   | 1,37                   | 2,11                |
| Медь . . . . .       | 7                       | 1,1   | 1,04                   | 1,46                |
| Алюминий . . . . .   | 3                       | 0,6   | 0,69                   | 0,85                |

сопоставлены экспериментальные и теоретические значения наиболее вероятного угла рассеяния  $\alpha$ -частиц в фольге из различных материалов. Классическая формула (12.16), как мы видим, лучше согласуется с опытными данными, чем квантовомеханическая формула (12.15), как и следовало ожидать при соответствовавших значениях параметра  $Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v$ .

### § 3. Медленные столкновения между тяжелыми частицами

1. Упругие столкновения между атомами газа. Как было указано в § 1, вычисление сечений для взаимных столкновений атомов газа, обладающих обычными газокинетическими скоростями, представляет значительный интерес. Помимо полного сечения  $Q$  для упругих столкновений, которое может быть теперь измерено непосредственно с помощью метода молекулярных пучков [3], нас интересуют также сечения  $Q_\eta$  и  $Q_D$ , играющие большую роль при рассмотрении явлений вязкости и диффузии. Эти сечения определяются формулами [18, 19]

$$Q_\eta = 2\pi \int_0^\pi I(\theta) \sin^3 \theta d\theta, \quad (12.17)$$

$$Q_D = 2\pi \int_0^\pi I(\theta) \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta,$$

где  $I(\theta)$  — интенсивность рассеяния, выраженная в относительных координатах. Напомним, что полное сечение равно [см. (2.18)]

$$Q = 2\pi \int_0^\pi I(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (12.18)$$

Коэффициент вязкости газа  $\eta$  при абсолютной температуре  $T$  определяется выражением вида [18.19]

$$\eta = \frac{5}{4j^3 M^2} \left( \frac{2\pi}{jM} \right)^{3/2} \frac{1+\varepsilon}{\pi R_{11}},$$

где  $j = 1/2 \times T$ ,  $M$  — масса атома,  $\varepsilon$  — постоянная Больцмана,  $R_{11}$  дается выражением

$$R_{11} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^7 Q_\eta e^{-jMv^2/2} dv;$$

$v$  — относительная скорость атомов газа,  $\varepsilon$  — малый поправочный член порядка  $10^{-2}$ .

Коэффициент взаимной диффузии  $D$  двух газов (характеризующихся индексами 1 и 2) определяется формулой вида

$$D = \frac{3}{16} \pi^{1/2} \left( \frac{M_1 + M_2}{j M_1 M_2} \right)^{7/2} \frac{1}{(\nu_1 + \nu_2) P_{12}} \frac{1}{1 - \varepsilon_0},$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — числа атомов обоих сортов в единице объема,  $M_1$  и  $M_2$  — массы атомов,  $\varepsilon_0$  — малый поправочный член [20], зависящий от  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , а

$$P_{12} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} v^5 Q_D \exp\left(-\frac{j M_1 M_2}{M_1 + M_2} v^2\right) dv.$$

При исследовании изменений, вносимых квантовой теорией в классические соотношения, проще всего воспользоваться модельными представлениями об атомах газа, как о твердых шариках. Мы предположим, что энергия взаимодействия между такими шариками равна

$$V(r) = \infty \quad (r < r_0),$$

$$V(r) = 0 \quad (r > r_0).$$

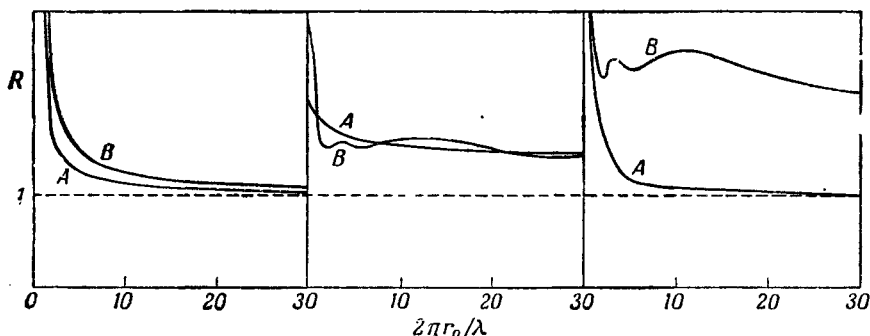
Классическая теория дает в этом случае  $Q = \pi r_0^2$  и  $I(\theta) = \frac{1}{4} r_0^2$ .

Для вычисления интенсивности рассеяния с точки зрения квантовой теории можно воспользоваться методом, изложенным в гл. II (см. гл. II, § 5, где показано, что в предельном случае малых скоростей  $Q \rightarrow 4\pi r_0^2$ ). Если сталкивающиеся атомы одинаковы, следует также принять во внимание соотношения симметрии, вводимые статистикой Бозе — Эйнштейна (см. гл. V). В этом случае выражение для  $I(\theta)$  содержит только шаровые функции четного порядка и, следовательно, симметрично относительно  $\theta = \pi/2$ . В общем случае исключение из рассмотрения нечетных шаровых функций приводит к увеличению отклонений от результатов, даваемых классической теорией, как это можно видеть из фиг. 51, где сопоставлены квантовые и классические значения  $Q$ ,  $Q_\eta$  и  $Q_D$ .

Мы уже отмечали (гл. II, § 5), что по мере того, как отношение длины волны к диаметру атома стремится к нулю, полное сечение  $Q$  стремится не к своей классической величине, но к ее удвоенному значению. Дополнительное рассеяние, обуславливающее этот эффект, по мере уменьшения длины волны соответствует все меньшим и меньшим значениям угла  $\theta$ . Влияние этого рассеяния на  $Q_\eta$  и  $Q_D$  при этом становится все менее и менее существенным благодаря наличию дополнительных множителей, определяющих статистический вес дифференциального сечения  $I(\theta)$ , которые при малых значениях  $\theta$  пропорциональны  $\theta^2$ . Таким образом, в отличие от  $Q$ , как  $Q_\eta$ , так и  $Q_D$  при

уменьшении длины волны стремится в пределе к своим классическим значениям. При малых  $2\pi r_0/\lambda$  как  $Q$ , так и  $Q_\eta$  и  $Q_D$  перестают подчиняться классическим соотношениям. Это влечет за собой изменение температурной зависимости вязкости  $\eta$  в области низких температур. Согласно классической теории, при  $T \rightarrow 0$   $\eta$  пропорционально  $\alpha^2 T^{-1/2}$ . Квантовая теория приводит к более быстрому изменению  $\eta$  [18].

В случае гелия отклонений  $\eta$  от классических значений следует ожидать при температурах ниже  $50^\circ\text{K}$ , в случае водорода — ниже  $100^\circ\text{K}$ . Вычисления величины  $\eta$ , ожидаемой для гелия согласно квантовой теории, были осуществлены рядом



Фиг. 51. Иллюстрация роли квантовомеханического значения сечения при рассмотрении явлений вязкости, рассеяния и диффузии с помощью модели твердой сферы.

Кривые А относятся к различным атомам, кривые В — к одинаковым.

авторов [21] в предположении различных законов взаимодействия между атомами гелия. Для определения истинного закона взаимодействия такого рода вычисления, однако, столь же бесполезны, как и аналогичные исследования второго вириального коэффициента, квантовомеханическое значение которого [22] также зависит от фаз  $\eta_n$ , определяющих сечение рассеяния. Для осуществления этой программы необходимо дальнейшее накопление опытных данных.

Полное сечение  $Q$  принципиально может быть измерено с помощью метода молекулярных пучков. Для того чтобы его значение не зависело от малейших отклонений, регистрируемых как столкновения, угловая разрешающая способность должна быть очень высокой.

**2. Передача возбуждения и заряда при медленных столкновениях.** Важность исследования вопроса о передаче возбуждения между сталкивающимися атомами уже была отмечена нами в начале этой главы. Согласно экспериментальным данным,

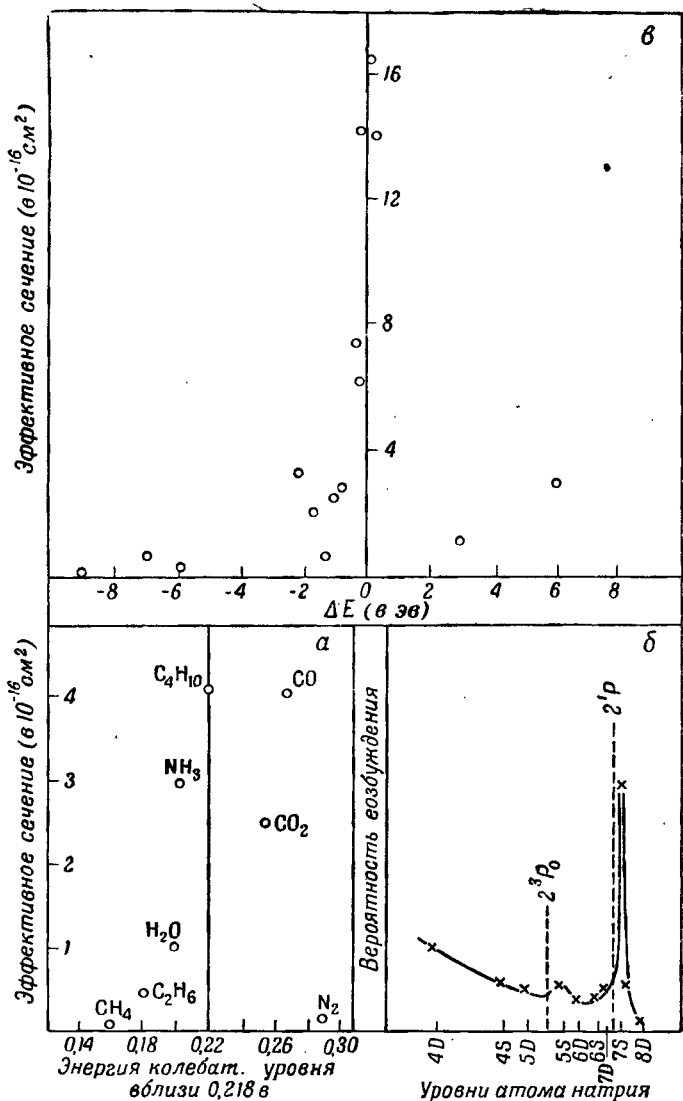
вероятность такой передачи максимальна в том случае, когда разность энергий обоих рассматриваемых состояний равна нулю. При этом вероятность передачи возбуждения зависит, повидимому, более существенным образом от этой разности энергий, нежели от относительных скоростей или от природы рассматриваемых частиц. В порядке иллюстрации рассмотрим результаты некоторых опытов.

*Тушение резонансного излучения ртути.* Хорошо известно, что присутствие постороннего газа в ртутной лампе приводит к уменьшению интенсивности резонансного излучения атомов ртути. Это явление обусловлено дезактивацией возбужденных атомов ртути при столкновении их с молекулами постороннего газа. На основании опытных данных об изменении интенсивности резонансного излучения в присутствии различных посторонних газов можно определить эффективные сечения, соответствующие дезактивации атомов ртути молекулами этих газов. Такого рода исследования были произведены Земанским [23]; фиг. 52, *a* иллюстрирует относительную эффективность различных газов при возбуждении перехода  $2^3P_1 \rightarrow 2^3P_0$  атомов ртути, требующего разности энергий 0,218 *e*. На оси ординат отложены значения эффективного сечения, на оси абсцисс — энергия колебательного уровня молекул газа, наиболее близкого к резонансному значению 0,218 *e*. Очевидно, что экспериментальные точки ложатся на резонансную кривую обычного типа. Аномально ведет себя лишь окись углерода; в этом случае, помимо разности энергий, вероятно, играют роль также и некоторые другие факторы<sup>1)</sup>.

*Возбуждение атомов натрия возбужденными атомами ртути.* Аналогичные опыты были произведены Бейтлером и Джозефи [25], освещавшими смесь паров натрия и ртути ртутной лампой и измерявшими интенсивность возникающих натриевых линий, энергии возбуждения которых близки к энергии возбуждающей линии (волновое число 2537). При учете статистических весов термов натриевых линий зависимость вероятности возбуждения различных уровней натрия от энергии этих уровней характеризуется кривой, приведенной на фиг. 52, *b*. В точке резонанса наблюдается резкий максимум; дополнительный максимум соответствует резонансу с метастабильным состоянием атома ртути  $2^3P_0$ .

*Поглощение положительных ионов. «Перезарядка».* Наблюдаемое в газах поглощение пучков медленных положительных ионов почти полностью обусловлено процессом нейтрализации, происходящим в результате захвата ионами электронов из газовых молекул. Рядом исследователей было произведено большое число

<sup>1)</sup> Резонансный характер процесса тушения вызвал недавно сомнение [24], поскольку углеводороды обуславливают тушение в результате химического воздействия.



Фиг. 52. Резонансные явления при столкновениях между атомами, или ионами, сопровождающихся передачей возбуждения или заряда.

*a*—относительная эффективность различных газов при тушении резонансного излучения ртути; *б*—значения вероятности возбуждения различных линий натрия при столкновениях второго рода с атомами ртути, возбужденными до состояний 2<sup>1</sup>P; пунктирными линиями указаны значения энергии состояний 2<sup>1</sup>P и 2<sup>3</sup>P<sub>0</sub> ртути; *в*—сечения, соответствующие передаче заряда между различными ионами (с кинетической энергией 400 эВ) и нейтральными молекулами, как функции величины ΔE (ΔE считается положительным в тех случаях, когда при передаче заряда относительная кинетическая энергия возрастает).

измерений коэффициентов поглощения для различных ионов в различных газах; во всех случаях при этом было найдено, что коэффициент поглощения оказывается наибольшим для ионов того же газа. Это значит, что положительные ионы в наибольшей степени поглощаются теми газами, которые при потере электронов образуют точно такие же ионы.

Наиболее детальные исследования такого рода принадлежат Вольфу [26]; полученные им данные приведены на фиг. 52, *в*, которая ярко иллюстрирует резонансный характер явления. В литературе известно много других примеров этого явления<sup>1)</sup>; оно играет также большую роль в химической кинетике и спектроскопии.

Мы исследуем теперь эти вопросы с теоретической точки зрения.

**3. Теория резонансных явлений.** В гл. VIII, § 6, был рассмотрен метод вычисления сечений для переходов между двумя состояниями, находящимися почти в резонансе. В этой главе мы будем придерживаться прежних обозначений и характеризовать исходное состояние индексом 0, а конечное — индексом  $n$ . Выше было показано, что в двух частных случаях задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений. А именно: если состояния 0 и  $n$  находятся почти в резонансе или если энергия взаимодействия  $V_{st}$  мала для всех состояний  $s$  и  $t$ , то вероятность перехода определяется функциями  $F_n^l$ , являющимися собственными решениями системы уравнений

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U_{00} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F_0^l = U_{0n} F_n^l,$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k_n^2 - U_{nn} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F_n^l = U_{0n} F_0^l.$$

Функция  $F_0^l$ , описывающая падающую и упруго рассеянную волны, имеет следующий асимптотический вид:

$$F_0^l \sim k^{-1} (2l+1) e^{i\eta_0^l} i^l \left\{ \sin \left( kr - \frac{1}{2} l\pi + \eta_0^l \right) + \right. \\ \left. + g_0^l \exp \left[ i \left( kr - \frac{1}{2} l\pi + \eta_0^l \right) \right] \right\};$$

$F_n^l$  соответствует одной лишь расходящейся волне и обладает асимптотической формой

$$F_n^l \sim k_n^{-1} (2l+1) g_n^l e^{ik_n r}.$$

<sup>1)</sup> См. [1], гл. VII и VIII.



Сечение для неупругого столкновения определяется при этом выражением

$$Q_n = \frac{4\pi}{kk_n} \sum (2l+1) |q_n^l|^2.$$

Для столкновений, сопровождающихся передачей возбуждения, форма  $U_{0n}$  зависит от того, являются ли переходы, происходящие в системах  $A$  и  $B$ , разрешенными оптическими переходами. Если эти переходы связаны с мультипольными моментами порядка  $p$  и  $q$ , то, не учитывая угловой зависимости, имеем

$$U_{0n}(r) \sim \frac{a}{r^{p+q+1}}. \quad (12.19)$$

Таким образом, если оба перехода являются разрешенными оптическими переходами, то

$$U_{0n}(r) \sim \frac{a_2}{r^3}, \quad (12.20)$$

если же речь идет о переходах типа  $S \rightarrow S$  или же о переходах, связанных с обменом электронами, момент любого порядка обращается в нуль, и

$$U_{0n}(r) \sim a_0 e^{-\lambda r}. \quad (12.21)$$

Отсюда следует, что во многих случаях потенциал  $U_{0n}$  на больших расстояниях убывает очень медленно и может при этом значительно превышать  $U_{00}$  или  $U_{nn}$ . Исключениями являются случаи типа (12.21), а также столкновения между ионами и атомами или же между двумя ионами, когда  $U_{00}$  или  $U_{nn}$  может убывать с расстоянием очень медленно. Штюкельберг [27] показал, что если существует вещественная точка пересечения  $R_1$ , в которой

$$k^2 - k_n^2 - U_{00} + U_{nn} = 0,$$

то максимальное сечение будет величиной порядка  $\pi R_1^2$ . С другой стороны, если точки пересечения не существует, то критическим расстоянием  $R_1$  будет такое, при котором

$$|U_{0n}(R_1)| \approx |k^2 - k_n^2 - U_{00} + U_{nn}|,$$

что соответствует сечению порядка  $\pi R_1^2$ . Поскольку  $U_{0n}$  типа (12.20) медленно убывает с расстоянием, ясно, что  $R_1$  часто может значительно превышать  $R$ . Штюкельберг исследовал подробно вопрос об ожидаемой величине сечения в том случае, когда при больших значениях  $r$  потенциал  $U_{0n}$  дается функцией вида  $a/r^s$ .

Если отклонение  $\Delta E$  от резонанса мало, то критическое расстояние  $R_1$  в этих случаях столь велико, что величинами  $U_{00}$

и  $U_{nn}$  можно пренебречь. Это дает

$$R_1 = \left( \frac{\beta}{\Delta E} \right)^{1/3},$$

где  $\beta = \alpha \hbar^2 / 2m$ . Вид формулы, определяющей величину  $|q_n^l|^2$ , зависит от соотношения между  $l$  и  $l_0$ , где

$$k^2 - U_{00}(R_1) - \frac{l_0(l_0 + 1)}{R_1^2} = 0.$$

Если  $l < l_0$ , то

$$|q_n^l|^2 = \frac{k_n}{k} e^{-2\delta} (1 - e^{-2\delta}) \sin^2 \tau. \quad (12.22)$$

Это выражение имеет тот же вид, что и формула (8.77), определяющая положение точки пересечения, однако теперь

$$\delta = M_s \left( \frac{U_{0n}^2}{f^{1/2} U_{0n}'} \right)_{r=R_1}, \quad (12.23)$$

где

$$2f = f_0 + f_n + 2(f_0 f_n - U_{0n}^2)^{1/2},$$

$$f_{0,n} = k_{0,n}^2 - \frac{l(l+1)}{r^2},$$

а  $M_s$  — величина порядка единицы, зависящая только от  $s$ . Во всех случаях, за исключением случая  $l \approx l_0$ , величиной  $U_{0n}$  можно пренебречь по сравнению с  $f_0$  или  $f_1$ , так что

$$\delta \approx \frac{4\pi}{\hbar v_l} \frac{M_s}{s} (\Delta E)^{(s-1)/s} \beta^{1/s}, \quad (12.24)$$

где  $v_l$  — относительная скорость сталкивающихся систем в критической точке. Если на критическом расстоянии взаимодействия  $U_{0n}$  велико, а относительная скорость мала, то, точно так же, как и в случае наличия точки пересечения, исследованном нами в гл. VIII, будут иметь место адиабатические условия, соответствующие большим значениям  $\delta$ .

При  $l > l_0$  для вычисления  $|q_n^l|^2$  может быть использовано приближение Борна, поскольку в эффективной области  $R_1 < R < \infty$ , соответствующей сближению сталкивающихся систем с данным относительным значением момента количества движения, взаимодействие  $U_{0n}$  мало. В случае столкновений между атомами как  $l$ , так и  $kR_1$  очень велико; найдено, что при этом

$$|q_n^l|^2 = \frac{k_n}{k} \frac{\pi^2 \alpha^2 l^2 c_1}{16} \left( \frac{k}{2l} \right)^{2s-4} \left( 1 + c_2 l \frac{\Delta E}{E_0} \right)^{s-2} \exp \left( -l \frac{\Delta E}{E_0} \right), \quad (12.25)$$

где

$$c_1 = \frac{[\Gamma(s-1)]^2}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\right]^4}, \quad c_2 = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma(s-1)}\right]^{2/(s-2)}$$

Полное сечение  $Q_n$ , определяющееся выражением

$$Q_n = \frac{8\pi}{kk_n} \int_0^{\infty} l |q_n^l|^2 dl,$$

может быть теперь вычислено приближенно, если при  $l < l_0$  мы воспользуемся формулой (12.22), а при  $l > l_0$  — формулой (12.25).

Штюкельберг нашел таким путем, что

$$Q_n = \pi \left(\frac{\beta}{\Delta E}\right)^{2/s} f(\Delta E^{(s-1)/s} \beta^{1/s} v^{-1} \hbar^{-1}), \quad (12.26)$$

где

$$f(x) = \frac{8M_s x}{s} \quad (x \ll 1),$$

$$f(x) = 32 c_1 c_2^{s-2} x^{s-1} e^{-2x} \quad (x \gg 1).$$

Ход функции  $f(x)$  для случая  $s=3$  показан на фиг. 53.

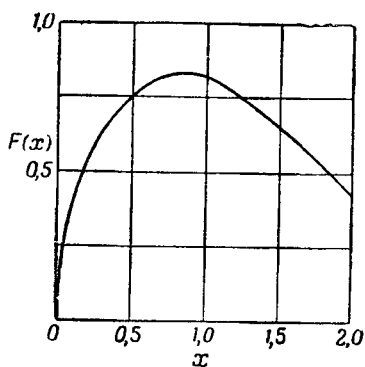
Вблизи резонанса

$$Q_n \rightarrow \frac{8\pi M_s \Delta E^{(s-3)/s} \beta^{3/s}}{s \hbar v}.$$

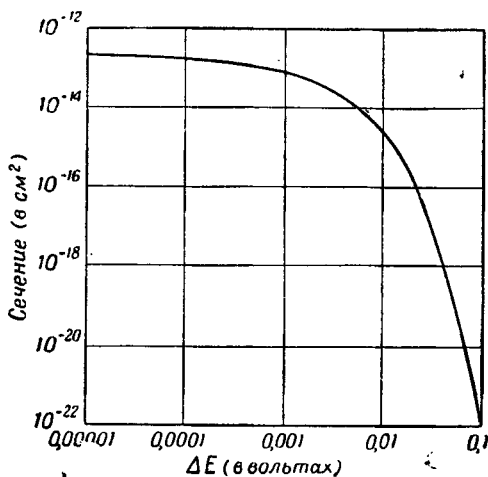
В случае  $s=3$ , представляющем существенный интерес, по мере приближения к резонансу сечение стремится к некоторому постоянному значению и его зависимость от  $\Delta E$  носит типично резонансный характер. Фиг. 54 иллюстрирует зависимость  $Q_n$  от  $\Delta E$  при  $s=3$  в предположении, что  $\beta = e^2 a_0^2$ ,  $m = 10$  атомных единиц и скорость соответствует энергии 1 эв. Наличие острого резонанса, а также большая величина сечения вблизи резонанса в этом случае очевидны.

Представляет интерес также исследование зависимости  $Q_n$  от относительной скорости при различных значениях  $\Delta E$ . Из формулы (12.26) и фиг. 55 следует, что при малых скоростях эта зависимость будет характеризоваться функцией  $v^2 e^{-a/v}$ , где  $a = 2\Delta E^{2/3} \beta^{1/3} / \hbar$ ; сечение будет при этом достигать максимума порядка  $\pi (\beta/\Delta E)^{2/3}$  при скорости порядка  $(\beta \Delta E^2)^{1/3} / \hbar$  и убывать затем при высоких скоростях как  $v^{-1}$ . Типичные кривые, иллюстрирующие зависимость  $Q_n$  от энергии относительного движения, приведены на фиг. 55.

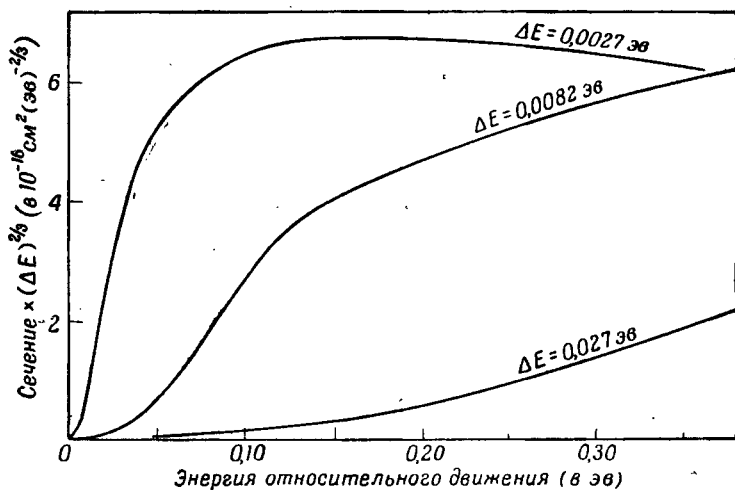
При более высоких значениях  $s$  изменение  $Q_n$  носит аналогичный характер, однако с той разницей, что в предельном



Фиг. 53.



Фиг. 54. Теоретическая кривая сечения, соответствующего передаче заряда между двумя атомами, как функция величины  $\Delta E$ .



Фиг. 55. Зависимость сечения, соответствующего передаче возбуждения, от энергии относительного движения при различных значениях  $\Delta E$ .

Как и на фиг. 54,  $\beta$  принято равным  $e^2 a_0^2$ , а  $m=10m_H$ .

случае точного резонанса сечение обращается в нуль. Если относительная скорость мала, сечение достигает максимума вблизи резонанса и убывает затем очень быстро по мере увеличения величины  $\Delta E$ , являющейся мерой отклонения от резонанса. По мере увеличения  $s$  максимальное значение сечения будет убывать благодаря тому обстоятельству, что энергия связи  $V_{0n}$  велика лишь в ограниченной области пространства.

Обмен электронами осуществляется обычно при столкновении между ионом и атомом или же при столкновении между двумя ионами. В этих случаях  $V_{0n}$  убывает с расстоянием значительно быстрее, чем  $V_{00}$  или  $V_{nn}$ , и применимы формулы для точек пересечения кривых, полученные нами в гл. VIII. Если речь идет о столкновении между ионом и атомом, то  $V_{00}$  в пределе будет меняться как  $\alpha e^2/r^4$ , где  $\alpha$  — поляризуемость атома. Положение точки пересечения приближенно определяется при этом выражением вида

$$R = \left( \frac{\alpha e^2}{\Delta E} \right)^{1/4}.$$

Хотя  $R$  может быть сколь угодно велико при достаточно малом  $\Delta E$ , вероятность перехода в точке пересечения, как это следует из формулы (8.79), очень мала вследствие быстрого уменьшения  $V_{0n}$  с увеличением  $r$ . В результате сечение будет не порядка  $\pi R^2$ , а значительно меньше<sup>1)</sup>. Тем не менее оно будет обладать резонансными характеристиками, сходными с теми, которые обнаруживаются в рассмотренных выше случаях при  $s > 3$ , т. е. максимум сечения будет иметь место не при точном резонансе, но вблизи него.

Если  $\Delta E$  мало, то при столкновениях между положительными и отрицательными ионами, сопровождающихся взаимной нейтрализацией ионов путем обмена электронами, может оказаться, что точка пересечения отвечает весьма большому  $R$  ( $R = e^2/\Delta E$ ). Благодаря малости  $V_{0n}$  в точке пересечения сечение будет при этом обычно значительно меньше  $\pi R^2$ . Максимум сечения также и в этом случае должен наблюдаться не при точном резонансе, а при значениях энергии, близких к резонансной [28].

Подводя итог, можно сказать, что наибольшее сечение (значительно превышающее газокINETическое) и наиболее острый резонанс должны иметь место при передаче возбуждения, связанной с разрешенными оптическими переходами. Резонанс, максимум которого слегка смещен из положения  $\Delta E = 0$ , должен наблюдаться также и во многих других случаях, однако максимальное сечение при этом, повидимому, не столь велико.

<sup>1)</sup> Оно может быть столь малым, что основную роль будет играть вторая точка пересечения, соответствующая значительно меньшему  $R$  (порядка  $10^{-8}$  см), при котором  $V_{0n}$  достаточно велико.

4. Прохождение положительных ионов через газы. Здесь мы рассмотрим столкновения положительных ионов, энергия которых превышает 50 э, с атомами газа. Столкновения этого типа могут быть подразделены на следующие: 1) упругие столкновения; 2) столкновения, приводящие к нейтрализации ионов в результате захвата электронов из атомов газа; 3) неупругие столкновения, сопровождающиеся возбуждением или ионизацией атомов газа или падающих ионов.

Сечения для упругих столкновений могут быть вычислены с помощью метода парциальных сечений (см. гл. II, § 1); они связаны с фазовыми постоянными формулой вида

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_n (2n+1) \sin^2 \eta_n, \quad (12.27)$$

где  $k$ , как всегда, равно  $2\pi/\lambda$ . Обычно приходится брать большое число членов этого ряда (по крайней мере 400 членов для протонов с энергией 100 э в гелии); в определенной области значений  $n$  суммирование может быть, однако, заменено интегрированием. При малых  $n$  (меньше 200 для протонов с энергией 100 э в гелии) можно также воспользоваться колебательным характером функции  $\sin \eta_n$ .

В табл. 21 приведены некоторые вычисленные таким путем значения  $Q$  для столкновений протонов с атомами гелия и аргона. Как мы видим, они не очень сильно отличаются от соответствующих газокинетических значений; экспериментальное определение [29] свободных пробегов протонов как в гелии, так и в аргоне дает, однако, для полных сечений значения, гораздо меньшие газокинетических. Причина этого обстоятельства становится ясной при рассмотрении углового распределения рассеянных протонов. Последнее, за исключением случая очень малых углов рассеяния, может быть найдено с помощью классических методов (см. гл. VII,

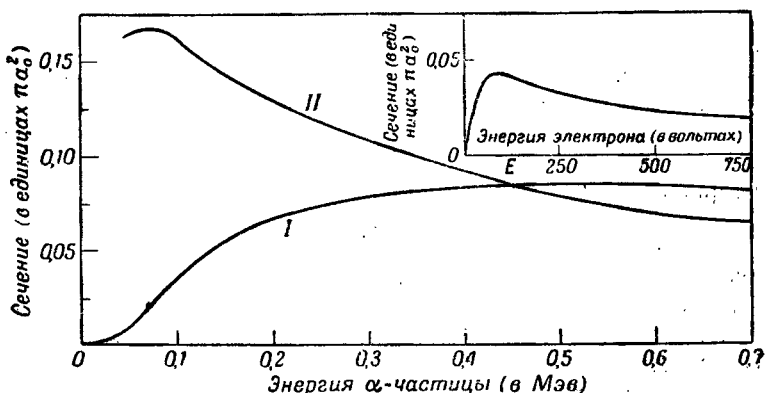
Таблица 21

| Газ         | Энергия протона (в эв) | Сечение (в единицах $\pi a_0^2$ ) | Газокинетическое сечение (эксперим.) (в единицах $\pi a_0^2$ ) |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|--|
| Гелий . . . | 90                     | 3,7                               | 2,6  |
|             | 800                    | 2,0                               |  |
| Аргон . . . | 73                     | 16,4                              | 7,3  |
|             | 650                    | 10,7                              |  |

§ 4 и 5); можно показать, что предельное значение функции  $I(\theta)$ , характеризующей угловое распределение, при угле рассеяния, равном нулю, приближенно равняется  $\frac{1}{4}k^2Q^2$ ; обычно, за исключением случая очень медленных ионов ( $< 0,1\sigma$ ), эта величина значительно превышает  $Q$ . Отсюда можно сделать заключение, что при увеличении угла рассеяния интенсивность рассеяния убывает столь быстро, что в упомянутых опытах могла быть наблюдаена только небольшая доля общего числа упругих столкновений.

Столкновения, при которых электрон захватывается ионом, являются обычно неупругими, так как взаимная кинетическая энергия сталкивающихся частиц в результате столкновения изменяется. В частном случае точного резонанса, имеющего, например, место при захвате атомных электронов гелия положительными ионами гелия, столкновения являются упругими в том смысле, что относительная кинетическая энергия частиц остается неизменной. В случае точного резонанса не совсем правильно приписывать акту передачи заряда определенное сечение, так как при этом невозможно установить экспериментально, является ли ион, движущийся в некотором определенном направлении, одним из ионов падающего пучка, испытавшим рассеяние, или же он представляет собой атом, потерявший электрон при столкновении. Опытные исследования свидетельствуют о наличии большого числа положительных ионов, движущихся почти перпендикулярно к падающему пучку. Как известно из опытов, в которых падающие ионы можно отличить от атомов, потерявших электроны, в этих направлениях в действительности рассеиваются лишь очень небольшое число ионов; можно поэтому считать, что все ионы, движущиеся под углами, превышающими  $45^\circ$  с направлением падения, представляют собой атомы, потерявшие по электрону, тогда как все остальные ионы являются ионами падающего пучка, испытавшими рассеяние. Поскольку поглощение ионов  $He^+$  в гелии, наблюдаемое на опыте, отвечает в основном большим углам отклонения, на основании нашего предположения можно считать, что оно обусловлено главным образом передачей заряда. Для вычисления сечения, соответствующего поглощению, мы можем воспользоваться формулами для предельного значения вероятности неупругого столкновения при точном резонансе, приведенными в гл. VIII, § 6. Вычисления производятся в этом случае точно таким же образом, как и в случае упругого сечения, уже рассмотренном нами выше; для поглощения, обусловленного передачей заряда, сечение оказывается при этом одного порядка величины с газокинетическим сечением, что находится в полном согласии с опытами Кальмана и Розена [30]. В более точной теории, учитывающей также и тождественность ядер (см. гл. V), изменяется лишь

форма углового распределения рассеянных ионов при промежуточных значениях углов рассеяния, а именно: возникают максимумы и минимумы, обусловленные интерференцией рассеянных волн двух типов. Поскольку сечение очень слабо зависит от значений этих углов, указанный эффект будет играть существенную роль только в случае очень точных измерений угловых распределений.



Фиг. 56. Теоретические кривые сечения возбуждения  $(1s)^2 3p$ -уровня лития  $\alpha$ -частицами.

I—кривая, вычисленная по методу возмущенных стационарных состояний, II—вычисленная в приближении Борна; верхняя кривая дает сечение возбуждения электронами в приближении Борна.

В том случае, когда захват электрона связан с изменением кинетической энергии, теория рассматриваемого процесса оказывается совершенно аналогичной теории процессов возбуждения и ионизации, вызываемых ионами. Поскольку скорость ионов мала по сравнению с орбитальными скоростями атомных электронов, а резонанс между исходным и конечным состояниями является точным лишь в очень редких случаях, мы не можем ограничиться рассмотрением взаимодействия этих двух состояний, и единственным удовлетворительным методом решения задачи оказывается метод возмущенных стационарных состояний, изложенный в гл. VIII, § 7.

Этот метод был использован для вычисления сечения возбуждения  $2^1P$  состояния гелия протонами и сечения захвата электронов протонами [31]. Он был также применен Фреймом [32] для вычисления сечения возбуждения  $(1s)^2 3p^2P$ -состояния лития медленными  $\alpha$ -частицами. Фиг. 56 иллюстрирует полученные при этом результаты. Для сравнения на фигуре приведена также соответствующая кривая для электронов. Очевидное различие



в поведении электрона и  $\alpha$ -частицы подтверждается также экспериментальными данными как в случае возбуждения, так и в случае ионизации.

Теоретическая кривая зависимости сечения от скорости весьма сходна с соответствующими кривыми для передачи возбуждения (см. фиг. 55). В обоих случаях по мере уменьшения скорости сечение быстро убывает от своего максимального значения благодаря приближению к адиабатическим условиям. Максимум сечения отвечает тому случаю, когда относительная скорость движения сравнима с орбитальными скоростями рассматриваемых электронов. С уменьшением скорости сечение изменяется при этом тем быстрее, чем больше отклонение  $\Delta E$  от резонанса. В качестве грубого приближения зависимость сечения от скорости при почти адиабатических условиях может быть охарактеризована функцией вида

$$C e^{-a/v},$$

где  $a$  возрастает с увеличением  $\Delta E$ . Многочисленные опытные исследования возбуждения, вызываемого медленными ионами, подтверждают наличие такого рода зависимости сечения от величины  $\Delta E$ . Так, Эшлярд [33] показал, что ионы натрия с энергией от 300 до 3000 эв могут возбуждать атомы ртути ( $\Delta E = 5$  эв), однако сами они при этом не возбуждаются (для них  $\Delta E = 32$  эв). Депель [34] нашел, что атомы водорода, энергия которых меньше 1000 эв, могут возбудить атомы натрия и калия ( $\Delta E = 2$  эв), но что даже при увеличении энергии до 20 000 эв нет никаких указаний на их собственное возбуждение при столкновениях ( $\Delta E = 10$  эв).

В приближении Борна резкое уменьшение сечения при адиабатических условиях может быть получено только при некоторых очень специальных предположениях. В этом легко убедиться, сопоставив кривую II фиг. 56, соответствующую приближению Борна, с кривой I, полученной с помощью метода возмущенных стационарных состояний. Случаи, при которых оба метода приводят к одинаковым результатам, рассмотрены в § 2.

Хотя теория этих явлений и находится в качественном согласии с экспериментальными данными, она пока еще очень далека от того, чтобы дать возможность хотя бы полуколичественной оценки сечений, соответствующих процессам ионизации и возбуждения медленными положительными ионами. С существующими экспериментальными данными и их интерпретацией читатель может ознакомиться по монографии Месси и Бургоа [1] (гл. VII и VIII).

**5. Обмен энергией между поступательным движением и внутренними колебанием и вращением молекулы.** Здесь мы рас-

смотрим методы вычисления вероятности изменения колебательного или вращательного состояния молекулы в результате ее столкновения с каким-либо атомом. Для этого необходимо знать энергию взаимодействия молекулы с атомом.

Теоретические исследования этого вопроса ограничивались до сих пор рассмотрением столкновений, при которых падающий атом движется вдоль прямой, соединяющей ядра двухатомной молекулы; для таких столкновений наибольшими будут, повидимому, вероятности колебательных переходов. Рассмотрим взаимодействие падающего атома с одним из атомов (массы  $M_B$ ) молекулы. Энергию взаимодействия мы выберем в форме

$$Ce^{-ar}, \quad (12.28)$$

дающей, вероятно, очень хорошее приближение для расстояний, близких к расстоянию наибольшего сближения атомов; здесь  $r$  — расстояние между атомом  $M_B$  и падающим атомом. Постоянная  $a$  может быть определена путем сопоставления функции (12.28) с потенциалами, полученными Леннард-Джонсом на основании экспериментальных данных о вязкости и теплопроводности газов (см. [35]).

Обозначая через  $R$  расстояние между ядром падающего атома и центром тяжести молекулы и через  $\rho$  — расстояние между колеблющимися ядрами молекулы, мы можем записать функцию (12.28) в форме

$$V(R, \rho) = e^{-a(R+\lambda\rho)}, \quad (12.29)$$

где

$$\lambda = \frac{M_C}{M_B + M_C},$$

а  $M_C$  — масса второго атома молекулы. Если мы предположим, что колебание ядер является гармоническим, то характеризующие его волновые функции будут представлять собой полиномы Эрмита. Благодаря тому обстоятельству, что амплитуда колебания ядер мала по сравнению с величиной  $1/a$ , недиагональные матричные элементы  $V$ , взятые по отношению к колебательным волновым функциям, также малы. Для вычисления вероятностей перехода с достаточной степенью точности можно воспользоваться методом, изложенным в гл. VIII, § 5 (метод искаженных волн).

Такого рода вычисления были произведены Ценером [36] для несколько более простого случая и Джексоном и Моттом [37] для поля (12.29). В последнем случае для лобового столкновения были получены следующие результаты. Обозначим через  $p_{n,m}$  вероятность того, что колебательное квантовое число изменится при столкновении от  $n$  до  $m$ ; пусть, далее,  $M_A$  — масса падающего атома,  $v_n$  — относительная скорость до столкновения,  $v_m$  —

относительная скорость после столкновения. В таком случае

$$P_{n,m} = \frac{32\pi^4}{h} \frac{M_C (M_B + M_C) M_A^2}{a^2 M_B (M_A + M_B + M_C)^2} \left( n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \nu \times \\ \times \frac{\text{sh } \pi q_n \text{ sh } \pi q_m}{(\text{ch } \pi q_n - \text{ch } \pi q_m)^2} \quad (m = n \pm 1),$$

где

$$q_n = \frac{4\pi M^* v_n}{ha},$$

$$q_m = \frac{4\pi M^* v_m}{ha},$$

$$M^* = \frac{M_A (M_B + M_C)}{M_A + M_B + M_C}$$

и  $\nu$  — собственная частота вибратора. Вероятность изменения энергии, при котором  $n$  изменяется больше чем на единицу, очень мала, за исключением случая очень больших энергий.

Этот результат показывает, что обмен энергией между поступательными и колебательными степенями свободы осуществляется с трудом. Так, например, при одномерных столкновениях атомов гелия с молекулами азота при комнатной температуре вероятность дезактивации молекулы азота из первого колебательного состояния есть величина порядка  $6 \cdot 10^{-7}$ . Именно тем обстоятельством, что вероятность обмена между колебательной и поступательной энергиями мала, объясняется, в частности, дисперсия и поглощение звука высокой частоты в различных газах (см. § 1).

Аналогичные методы могут быть использованы также и при рассмотрении вопроса о передаче колебательного возбуждения от молекулы к молекуле при столкновении. Найдено, что даже в случае точного резонанса вероятность передачи колебательной энергии может быть очень малой. С увеличением приведенной массы молекул и кинетической энергии их относительного движения сечение, соответствующее резонансу, возрастает; резонансный эффект является наиболее резким для тяжелых молекул.

Райс [38] применил эту теорию к исследованию вопроса об активации различных сложных молекул при столкновении их с молекулами того же сорта, атомами инертных газов и атомами водорода. Он нашел при этом, что водород является столь же эффективным при столкновениях, как и сами молекулы, причем значительно более эффективным, чем инертные газы. Эти результаты находятся в согласии с опытными данными.

Этот метод был также успешно применен к теории коэффициента аккомодации атомов газа на твердой поверхности [37, 39]. Величина коэффициента аккомодации определяется скоростью

обмена поступательной энергии падающих атомов с колебательной энергией атомов твердого тела.

Теория возбуждения вращательного движения разработана значительно менее полно; обмен энергией между поступательным и вращательным движениями, по всей вероятности, осуществляется, сравнительно легко [36, 40]. Вопрос об обмене между колебательной и вращательной энергией молекул освещен в ряде статей и монографий [1, 8, 41].

**6. Скорости химических реакций.** Соединение двух атомов  $A$  и  $B$  в молекулу  $AB$ , при котором избыточная энергия этих атомов передается некоторому третьему атому  $C$ , можно рассматривать как процесс, обратный процессу возбуждения «непрерывного колебательного состояния» молекулы  $AB$  атомом  $C$ . Однако для вычисления скоростей таких реакций описанные выше методы до сих пор использованы не были. Существующие теории скоростей химических реакций носят статистический характер и основаны на применении метода переходного состояния (гл. VIII, § 8) [42].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Massey and Burhop, *Electronic and Ionic Impact Phenomena*.
2. Rutherford, Chadwick and Ellis, *Radiations from Radioactive Substances*, Cambridge, 1930.
3. Fraser, *Molecular Rays*, 1931.
4. Thomson, *Conduction of Electricity through Gases*, Cambridge, 1928.
5. Tyndall, *Mobility of Positive Ions in Gases*, Cambridge, 1939.
6. Pierce, *Proc. Am. Acad. Boston*, 60, 11 (1925).
7. Herzfeld and Rice, *Phys. Rev.*, 31, 691 (1928).
8. Richards, *Rev. Mod. Phys.*, 11, 36 (1939).
9. Williams, *Rev. Mod. Phys.*, 17, 217 (1945).
10. Henneberg, *Zs. f. Phys.*, 86, 592 (1933).
11. Bette, *Rev. Mod. Phys.*, 9, 263 (1937).
12. Brinkmann and Kramers, *K. Wet. Amst.*, 33, 973 (1930).
13. Rutherford, *Phil. Mag.*, 47, 277 (1924).
14. Jacobsen, *Phil. Mag.*, 10, 401 (1930).
15. Bohr, *Phys. Rev.*, 58, 654 (1940); 59, 270 (1941); *Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr.*, 18, 8 (1940).
16. Lamb, *Phys. Rev.*, 58, 696 (1940).
17. Knipp and Teller, *Phys. Rev.*, 59, 659 (1941).
18. Massey and Mohr, *Proc. Roy. Soc.*, A141, 434 (1933).
19. Chapman, *Phil. Trans.*, A216, 279 (1916).
20. Chapman, *Phil. Trans.*, A217, 115 (1917).
21. Massey and Mohr, *Proc. Roy. Soc.*, A144, 188 (1934); Massey and Buckingham, там же, A168, 378 (1938); 169, 205 (1938); Buckingham, Hamilton and Massey, там же, A179, 103 (1941); de Boer and Michels, *Physica*, 6, 409 (1939).
22. Uhlenbeck and Beth, *Physica*, 3, 729 (1936); Gropper, *Phys. Rev.*, 51, 1108 (1937).
23. Zemansky, *Phys. Rev.*, 36, 919 (1930).

24. Laidler, Journ. Chem. Phys., 10, 43 (1943).
25. Beutler und Josephy, Zs. f. Phys., 53, 755 (1929).
26. Wolf, Ann. d. Phys., 23, 285, 627 (1935); 25, 737 (1936); 27, 543 (1936); 29, 33 (1937); 30, 313 (1937).
27. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta, 5, 370 (1932).
28. Bates and Massey, Phil. Trans. Roy. Soc., 239, 269 (1943).
29. Dempster, Phil. Mag., 3, 115 (1927); Ramsauer, Kollath und Lilienthal, Ann. d. Phys., 8, 709 (1931).
30. Kallmann und Rosen, Zs. f. Phys., 64, 808 (1930).
31. Massey and Smith, Proc. Roy. Soc., A142, 142 (1933).
32. Frame, Proc. Cambr. Phil. Soc., 33, 115 (1937).
33. Appleyard, Proc. Roy. Soc., A128, 330 (1930).
34. Döpel, Ann. d. Phys., 16, 1 (1933).
35. Fowler, Statistical Mechanics, Cambridge, 1936.
36. Zener, Phys. Rev., 37, 556 (1931).
37. Jackson and Mott, Proc. Roy. Soc., A137, 703 (1932).
38. Rice, Chem. Rev., 10, 125 (1932).
39. Jackson and Howarth, Proc. Roy. Soc., 142, 447 (1933); 152, 515 (1934).
40. Roy and Rose, Proc. Roy. Soc., A149, 511 (1935).
41. Hiedemann, Ergebn. d. Exakt. Naturwiss., 14, 201 (1935); Oldenburg and Frost, Chem. Rev., 20, 99 (1937).
42. Глессон, Лейдлер и Эйринг, Теория абсолютных скоростей реакций, М., 1948.

## Глава XIII

### ЯДЕРНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

Со времени выхода в свет первого издания этой книги в области ядерной физики достигнут значительный процесс. Наличие сильных источников нейтронов и радиоактивных изотопов, получаемых при искусственных цепных реакциях в котлах, несомненно приведет в ближайшем будущем к еще более быстрому развитию физики ядра. В настоящей главе мы не ставим своей задачей дать исчерпывающий обзор всех современных данных о ядерных столкновениях, но предполагаем лишь проиллюстрировать теорию, изложенную в предыдущих главах (особенно, в гл. II, III и VIII), в применении к исследованию ядерных столкновений.

Принято обычно различать два типа ядерных столкновений: столкновения, которые можно рассматривать в приближении задачи об одной частице, и столкновения, которые могут быть исследованы лишь с помощью метода комплекса (гл. VIII, § 8). Ко второму типу относятся все столкновения между ядрами, за исключением столкновений между очень легкими ядрами. Изучение столкновений между наиболее легкими ядрами, в частности между нейтронами и протонами, представляет, однако, особый интерес, так как именно таким путем можно надеяться получить подробные сведения о силах взаимодействия между нуклонами. Поэтому прежде всего мы рассмотрим столкновения между простейшими ядрами.

Столкновения, которые могут быть описаны только с помощью метода комплекса, или метода составного ядра, в свою очередь различаются по степени связанных с ними резонансных явлений. В случае медленных нейтронов эти эффекты обнаруживаются наиболее четко при столкновениях со средними и тяжелыми ядрами. Бомбардировка протонами и  $\alpha$ -частицами, напротив, наиболее эффективна для изучения резонансных явлений в легких ядрах. Этим вопросам посвящен § 2.

Физика медленных нейтронов отнюдь не исчерпывается изучением резонансных явлений при столкновениях нейтронов со средними и тяжелыми ядрами. Столкновения медленных нейтронов со связанными протонами, их диффракция на кристаллах, поляризация при рассеянии ферромагнетиками (благодаря магнитному

взаимодействию с атомными электронами) — все эти явления, представляющие весьма большой интерес, рассматриваются в § 3 и 4.

Столкновения быстрых частиц со средними и тяжелыми ядрами представляют собой примеры таких случаев, когда имеет место перекрытие резонансных уровней комплекса (гл. VIII, § 8); эти вопросы рассматриваются вкратце в § 5.

Деление ядер рассматривается в заключительном § 6 как пример дальнейшего приложения теории к исследованию ядерных столкновений, а также реакций, возникающих между различными изотопами.

### § 1. Простейшие ядерные столкновения и закон взаимодействия между нуклонами<sup>1)</sup>

1. Упругие столкновения нейтронов и протонов. Простейшими ядерными столкновениями являются столкновения между нейтроном и протоном и между двумя протонами. Эти столкновения могут рассматриваться как задача об одной частице; их исследование имеет весьма существенное значение для установления закона взаимодействия между нуклонами.

Рассмотрим прежде всего предельное значение сечения для рассеяния нейтронов протонами при малых энергиях. Оно почти полностью будет определяться рассеянием нейтронов с относительным моментом количества движения, равным нулю. Потенциальная энергия силы, вызывающей рассеяние этих нейтронов, может быть представлена в виде потенциальной ямы ширины  $\alpha$  и глубины  $k_0^2 \hbar^2 / M$ , где  $M$  — масса нейтрона. Опыт показал, что в относительной системе координат угловое распределение рассеянных нейтронов с энергиями вплоть до  $7 \text{ Мэв}$  и даже более высокими все еще изотропно и, следовательно, может относиться только к нейтронам с  $l=0$ . Поскольку приведенная длина волны  $\lambda/2\pi$  относительного движения нейтрона с энергией  $7 \text{ Мэв}$  и протона равна  $3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , отсюда следует, что ширина потенциальной ямы не может значительно превышать эту величину. Полагая, что такая же потенциальная яма определяет и энергию связи дейтрона  $E_0$ , мы можем определить постоянную  $k_0$ , воспользовавшись для этого соотношением

$$\operatorname{tg} [(k_0^2 - x^2)^{1/2} a] = - \frac{(k_0^2 - x^2)^{1/2}}{x}, \quad (13.1)$$

<sup>1)</sup> Изложение теории столкновений двух частиц в книге Мотта и Мессии несколько устарело. Сейчас показано (Ландау и Смородинский, 1940 г. и ряд последующих работ американских авторов), что реконструировать потенциал по наблюдению сечения невозможно. Из этих наблюдений можно лишь определить две постоянные, так называемые эффективный радиус и длина рассеяния (для каждого значения суммарного спина системы). Подробнее см., например, [107, 108]. (Прим. ред.)

где  $x^2 = ME_0/\hbar^2$ . Отсюда следует, что  $k_0$  должно быть велико по сравнению с  $x$ . Для вычисления сечения рассеяния при малых значениях энергии можно поэтому воспользоваться формулой (2.33):

$$Q \approx \frac{4\pi(1+ka)}{k^2+x^2}, \quad (13.2)$$

где  $k$  — волновое число относительного движения. Пренебрегая величиной  $ka$  по сравнению с единицей, получаем предельное значение сечения для малых скоростей равным  $2,4 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>; опытные значения [1, 2] этой величины — около  $21 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>. Это расхождение лишь частично может быть отнесено за счет пренебрежения величиной  $ka$ , которая не может быть значительно больше единицы.

Для устранения этого расхождения Вигнер предположил, что глубина ямы зависит от результирующего спина. Поскольку основное состояние дейтрона является триплетным, получаем

$$Q = 4\pi \left( \frac{3}{4} \frac{1}{k^2+x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{k^2+\mu^2} \right), \quad (13.3)$$

где  $\mu^2 = ME_1/\hbar^2$ , а  $E_1$  — энергия связи в синглетном состоянии<sup>1)</sup>. Для того чтобы получить по этой формуле экспериментальное значение сечения рассеяния при  $k \rightarrow 0$ ,  $E_1$  следует положить равным 50 000 эв. На основании данных о рассеянии нельзя, однако, установить, является ли этот уровень реальным или же виртуальным. Этот вопрос может быть решен лишь путем изучения рассеяния медленных нейтронов в молекулярном водороде (см. § 3), которое показывает, что рассматриваемый уровень является виртуальным. Отсюда можно определить также и глубину потенциальной ямы для синглетного состояния.

Эти соображения остаются справедливыми независимо от конкретной формы взаимодействия. Существенно лишь, чтобы радиус действия сил был мал, а также чтобы энергия связи была мала по сравнению с глубиной потенциальной ямы. Если энергия взаимодействия характеризуется функцией вида

$$V = Cf \left( \frac{r}{a} \right), \quad (13.4)$$

содержащей два неизвестных параметра  $C$  и  $a$ , то соотношение между этими параметрами может быть найдено по известным значениям энергии связи двух частиц, находящихся в состояниях  $^3S$  и  $^1S$ ,

<sup>1)</sup> В действительности формула (13.3) плохо согласуется с экспериментом. Правильная формула должна содержать в каждом члене не одну, а две постоянные. (См. об этом [107]). (Прим. ред.)



Для того чтобы получить сведения о характере взаимодействия частиц в состояниях с моментом количества движения, отличным от нуля, необходимо исследовать рассеяние нейтронов, приведенная длина волны которых (в системе центра инерции) меньше размеров области взаимодействия. Этот вопрос представляет весьма существенный интерес по следующим причинам.

Как известно, энергия связи тяжелых ядер приближенно пропорциональна числу ядерных частиц  $A$ . Если бы взаимодействие между этими частицами могло быть описано функцией типа (13.4), независимо от значения их относительных моментов количества движения, то энергия связи оказалась бы пропорциональной  $A^2$ . Этой трудности можно было бы избежать, если бы на близких расстояниях функция  $f(r/a)$  описывала силы отталкивания или же если бы при этом существовали силы отталкивания между многими частицами. Вместо этих сложных объяснений Гейзенберг [3] предположил, что энергия взаимодействия должна содержать в качестве множителя оператор  $H$  перестановки координат и спинов двух рассматриваемых частиц. Майорана [4] показал далее, что необходимо ввести в рассмотрение дополнительный оператор  $M$  перестановки одних лишь координат, для того чтобы энергия связи, приходящаяся на одну частицу, возрастала вплоть до  $\text{He}^4$ , а не уменьшалась бы после  $\text{H}^2$ .

Простейшее взаимодействие такого «обменного» типа имеет вид

$$[(1-g)M + gH]V(r), \quad (13.5)$$

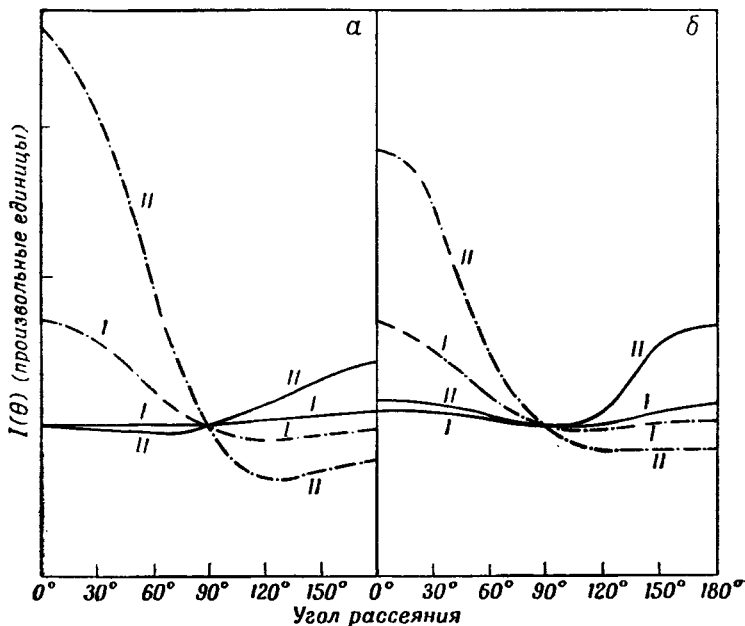
где  $g$  — некоторый параметр. Это взаимодействие одинаково по величине для всех состояний данной мультиплетности, но имеет различные знаки для состояний с четным и нечетным значением момента количества движения. Для синглетных состояний оно в  $(1-2g)$  раз больше, чем для триплетных состояний; параметр  $g$  может быть выбран таким образом, чтобы имело место хорошее согласие с виртуальным значением энергии связи дейтрона в состоянии  $^1S$ .

«Обычное» взаимодействие можно было бы выбрать в форме

$$[(1-g)1 + gMH]V(r). \quad (13.6)$$

Хотя это дало бы такое же, что и (13.5), отношение между значениями взаимодействия в синглетном и триплетном состояниях, равное  $(1-2g)$ , это взаимодействие остается, однако, одинаковым не только по величине, но и по знаку для всех состояний данной мультиплетности. Последнее обстоятельство привело бы к так называемому отсутствию насыщения для тяжелых ядер, т. е. к пропорциональности между энергией связи и величиной  $A^2$ .

Выбор между обменным взаимодействием (13.5) и обычным взаимодействием типа (13.6) мог бы быть сделан, если бы можно было определить знак фазы для  $p$ -волны ( $l=1$ ). Для обычных сил типа (13.6) эти фазы положительны; для обменных сил (13.5) они, однако, отрицательны. Исследование причин отклонений от изотропности углового распределения в относительных



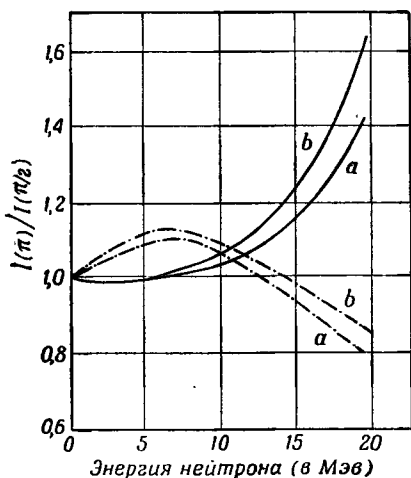
Фиг. 57. Теоретические кривые угловых распределений в системе центра инерции при рассеянии нейтронов протонами.

Кривые I и II относятся соответственно к нейтронам с энергиями 13,3 и 20,8 Мэв. Масштаб выбран таким образом, что во всех случаях  $I(\pi/2)=1$ . а—вычисление с использованием потенциала взаимодействия в виде сферической ямы; б—вычисление для случая экспоненциального закона взаимодействия.

координатах могло бы дать возможность решить вопрос о выборе взаимодействия того или иного типа. Энергия, при которой такое отклонение впервые достигает заметной величины, должна быть несколько больше для сил обменного типа, так как в случае потенциала сил отталкивания  $p$ -фазы возрастают в начале медленнее, чем в случае потенциала сил притяжения. Поскольку радиус действия сил может быть определен как по данным об энергиях связи трития, так и по данным о рассеянии протонов протонами, степень отклонения от изотропности может быть найдена для сил обоого типа [5]. На фиг. 57 приведены в относительных координатах кривые углового распределения

нейтронов с энергиями 13,8 и 20,8 Мэв, вычисленные для двух типов функции  $f(r/a)$ , содержащей либо «обычные», либо «обменные» операторы.

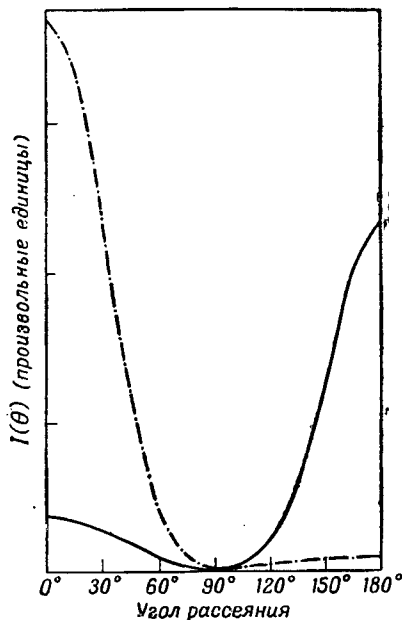
При дальнейшем возрастании энергии нейтронов становится существенным влияние моментов количества движения более высоких порядков, так что различие между обычными и обменными силами выражено уже не столь четко. Фиг. 58 иллюстрирует зависимость отношения  $I(\pi)/I(\pi/2)$ , т. е. отношения интенсивности рассеяния на  $180^\circ$  к интенсивности рассеяния



Фиг. 58. Теоретические кривые отношения  $I(\pi)/I(\pi/2)$  для рассеяния нейтронов протонами при различных предположениях о законе взаимодействия.

$a$ —взаимодействие с потенциалом в виде сферической ямы:  $V(r) = -17\text{Мэв}$  ( $a < 2,8 \cdot 10^{-13}$  см),  $V(r) = 0$  ( $a > 2,8 \cdot 10^{-13}$  см);  $b$ —взаимодействие по экспоненциальному закону:  $V(r) = -C \exp(-2r/a)$  при  $C = 122$  Мэв,  $a = 1,73 \cdot 10^{-13}$  см.

Сплошные кривые вычислены в предположении обменных сил, пунктирные—обычных сил.



Фиг. 59. Теоретическое угловое распределение в системе центра инерции для рассеяния нейтронов с энергией 83 Мэв протонами в предположении, что потенциал взаимодействия, как и в случае фиг. 57,  $a$ , описывается сферической ямой. Сплошная кривая—вычисление в предположении обменных сил, пунктирная—обычных сил.

на  $90^\circ$ , от энергии нейтрона для сил того же типа, что и в случае, представленном на фиг. 57.

При достаточно больших значениях энергии условия применимости приближения Борна снова оказываются различными для обоих типов сил. Согласно формуле (7.5), дифференциальное

сечение определяется выражением вида

$$I(\theta) = \frac{4\pi^2 M^2}{h^4} \left| \int e^{ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}'} V(r') e^{\mp ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'} d\tau' \right|^2 \frac{1}{4} [3 + (1 - 2g)^2], \quad (13.7)$$

где  $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$ . В случае обычных сил второй экспоненциальный множитель следует брать здесь с отрицательным знаком, тогда как введение обменных операторов меняет этот знак на обратный. Величина  $I(\theta)$  имеет максимум, когда  $|k\mathbf{n}_0 \mp k\mathbf{n}|$  мало, т. е. при малых значениях угла  $\theta$  для обычных сил и при  $\theta \approx \pi$  для обменных сил. В первом случае протоны будут вылетать в основном под углами, близкими к  $90^\circ$  по отношению к направлению падающих нейтронов, а во втором случае — в основном в направлении падающих нейтронов. Этот эффект весьма сходен с явлением обмена зарядами при столкновении иона с нейтральным атомом того же сорта (гл. XII, § 3). Фиг. 59 иллюстрирует этот эффект для нейтронов с энергией  $83 \text{ Мэв}$  при тех же предположениях о характере взаимодействия, что и в случае, представленном на фиг. 57 и 58.

Ясно, конечно, что существует много других возможностей получения различных комбинаций обменного и других операторов. Изучены [6] различные операторы, встречающиеся в мезонных теориях, а также роль нецентрального взаимодействия [7] того типа, который отвечает существованию квадрупольного момента у дейтрона. Хотя во всех этих случаях получаются результаты, отличающиеся друг от друга в своих деталях, все же описанным выше путем оказывается возможным выяснить, по крайней мере качественно, какого типа силы — обычные или обменные — играют преобладающую роль при рассеянии.

В момент написания этой книги экспериментальные данные, полученные путем изучения рассеяния нейтронов с энергией в несколько  $\text{Мэв}$ , не давали веских доказательств ни за, ни против утверждения о том, что взаимодействие между ядрами обладает в основном обменным характером. За последнее время [8] было, однако, проведено исследование бомбардировки протонов нейтронами с энергией  $100 \text{ Мэв}$ , полученных из дейтронов с энергией  $200 \text{ Мэв}$  в 184-дюймовом циклотроне в Беркли. Хотя точная интерпретация полученных при этом результатов является затруднительной [106], тем не менее уже ясно, что в направлении падения нейтронов рассеивается большее количество протонов, чем это должно было бы иметь место для сил взаимодействия обычного типа (13.6).

**2. Рассеяние протонов протонами.** Измерение интенсивности рассеяния протонов протонами может быть осуществлено со значительно большей точностью, чем измерение интенсивности рассеяния нейтронов протонами. В этом случае мы можем, однако,

получить лишь сведения о взаимодействии в состояниях, которые антисимметричны по отношению к перестановкам частиц.

Согласно результатам, полученным нами в гл. V, § 5, эффективное сечение для рассеяния на угол  $\theta$  протонов, обладающих скоростью  $v$ , неподвижными протонами определяется выражением вида

$$I(\theta) d\omega = \{3 |f(2\theta) - f(\pi - 2\theta)|^2 + |f(2\theta) + f(\pi + 2\theta)|^2\} \cos \theta d\omega, \quad (13.8)$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum (2n+1) (e^{2i\eta_n} - 1) P_n(\cos \theta);$$

$\eta_n$  выбрано здесь таким образом, что если  $V_n(r) + e^2/r$  есть взаимодействие между протонами, у которых квантовое число, отвечающее моменту количества движения, равно  $n$ , то асимптотическая форма собственного решения уравнения

$$\frac{d^2 G_n}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{4\pi^2 M}{h^2} V_n(r) - \frac{e^2}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] G_n = 0 \quad (13.9)$$

имеет вид

$$\sin \left( kr - \alpha \ln 2kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n \right), \quad (13.10)$$

где  $k = \pi Mv/h$ ,  $\alpha = e^2/\hbar v$ , а  $M$  — масса протона.

Можно записать

$$\eta_n = \zeta_n + \chi_n, \quad (13.11)$$

где  $\zeta_n = \arg \Gamma(1 + i\alpha + n)$  — сдвиг фазы в отсутствие поля  $V_n(r)$ , так что

$$f(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum e^{2i\zeta_n} (e^{2i\chi_n} - 1) (2n+1) P_n(\cos \theta); \quad (13.12)$$

$f_c(\theta)$  представляет собой значение  $f(\theta)$  при рассеянии одним лишь кулоновым полем отталкивания, т. е.

$$f_c(\theta) = \frac{e^2}{Mv^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \exp \left( -i\alpha \ln 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\zeta_0 + i\pi \right). \quad (13.13)$$

Воспользовавшись формулами (13.12) и (13.13), можно определить отношение  $R$  интенсивности рассеяния к интенсивности рассеяния одним лишь кулоновым полем, выразив его через фазы  $\chi_n$ . Для протонов с малыми энергиями существенной является только фаза  $\chi_0$ . В этом случае

$$R = 1 + \frac{I_a}{I_c}, \quad (13.14)$$

где  $I_c$  определяется кулоновым полем и дается выражением

$$I_c = \frac{4e^4}{M^2 v^4} [\operatorname{cosec}^4 \theta + \sec^4 \theta - \cos(\alpha \ln \operatorname{tg}^2 \theta) \operatorname{cosec}^2 \theta \sec^2 \theta], \quad (13.15)$$

а аномальное рассеяние  $I_a$  определяется выражением вида

$$I_a = \frac{8e^4}{M^2v^4} \left\{ \frac{2 \sin^2 x_0}{a^2} - \frac{\sin x_0}{a} [\operatorname{cosec}^2 \Theta \cos(\alpha \ln 2 \sin^2 \Theta + x_0) + \sec^2 \Theta \cos(\alpha \ln 2 \cos^2 \Theta + x_0)] \right\}. \quad (13.16)$$

В частном случае  $\Theta = 45^\circ$  имеем

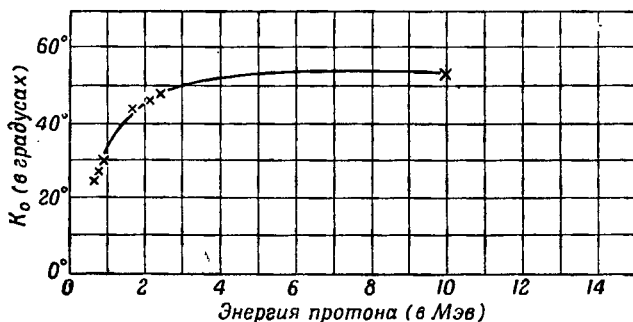
$$R = 1 - \frac{\sin 2x_0}{a} + \frac{\sin^2 x_0}{a^2}.$$

Аномальное рассеяние протонов протонами впервые наблюдали Уайт [9] и Тюв, Гейденбург и Хафстад [10]. В этой ранней работе указывается на существование сил притяжения, действующих на малых расстояниях. Это заключение было подтверждено затем подробными исследованиями Герба, Керста, Паркинсона и Плейна [11]. Данные, полученные этими авторами, были тщательно проанализированы Брейтом, Текстоном и Эйзенбудом [12]. Эти исследования проведены для области значений энергии от 860 до 2392 кэв и углового интервала от 30 до 90° для системы координат, связанной неподвижно с центром тяжести системы. Для каждого значения энергии оказалось возможным определить значение параметра  $x_0$ , подстановка которого в выражение (13.16) приводит к хорошему согласию с наблюдаемой интенсивностью рассеяния в исследованном угловом интервале. Этот параметр оказался положительным, что свидетельствует о том, что аномальная сила является силой притяжения. Поскольку для получения согласия с опытными данными не требовалось введения в рассмотрение фаз более высокого порядка, например  $x_1$ , ясно, что мы имеем здесь дело с силами, которые, подобно силам взаимодействия между нейтронами и протонами, являются короткодействующими.

Брейт, Текстон и Эйзенбуд [12]<sup>1)</sup> предположили, что аномальное взаимодействие может быть записано в форме (13.4); выбрав, далее, определенную форму функции  $f(r/a)$ , они попытались получить более детальные сведения о характере взаимодействия на основании найденных значений фазы  $x_0$ . При этом было установлено, что для функции  $f(r/a)$  данного вида можно выбрать такую область значений  $r$ , в которой приближенно воспроизводится наблюдаемая зависимость  $x_0$  от энергии. Важнейшим результатом этого исследования является заключение о том, что для взаимодействия предполагаемого типа аномальная сила протон—протон почти равна по своей величине силе взаимодействия между нейтроном и протоном в состоянии  $^1S$ .

<sup>1)</sup> См. также [13].

Эти результаты подтверждаются современными экспериментальными [14] и теоретическими [15] исследованиями, которые были проведены для значений энергии вплоть до  $14,5 \text{ Мэв}$ . На фиг. 60 для иллюстрации сопоставлены значения фазы  $\chi_0$ , вычисленные в предположении, что аномальное взаимодействие протон — протон может быть аппроксимировано сферической ямой соответствующей ширины и глубины со значениями этой фазы, полученными на основании экспериментальных данных.



Фиг. 60. Сопоставление значений фазового угла  $\chi_0$ , определенных на основании данных о рассеянии протонов протонами (указано крестиками) с теоретическими значениями  $\chi_0$  (сплошная кривая), вычисленными в предположении аномального взаимодействия:

$$V(r) = -C \quad (r < a),$$

$$V(r) = 0 \quad (r > a)$$

$$\text{при } C = 10,5 \text{ Мэв}, \quad a = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Пока еще трудно ответить на вопрос о том, насколько близко аномальное взаимодействие между двумя протонами в  $S$ -состоянии совпадает с взаимодействием между нейтроном и протоном в состоянии  ${}^1S$ ; однако согласие между теорией и опытом безусловно является удовлетворительным. В настоящее время нет никаких определенных указаний на наличие какой-либо роли фаз более высокого порядка. Так же, как и в случае столкновений нейтронов с протонами, существенно определить знак фазы  $\chi_1$ , поскольку он зависит от того, носят ли силы взаимодействия обменный характер.

**3. Упругое рассеяние нейтронов и протонов дейтронами.** Единственными более сложными вопросами теории упругого рассеяния нуклонов, которые поддаются детальному математическому исследованию, являются вопросы, связанные с взаимодействием нейтронов или протонов с дейтронами. Даже в этом

случае задача является чрезвычайно сложной, причем довольно трудно оценить степень точности получаемых при ее решении результатов. Наиболее подробные расчеты этого типа были произведены Букингемом и Месси [16]<sup>1)</sup>. Эти авторы предположили, что взаимодействие между ядрами в основном может быть охарактеризовано функцией вида

$$V(r) = -Ce^{-2r/a},$$

где  $C = 242 \text{ мс}^2$  и  $a = 1,73 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  (см. фиг. 57 и 58), которая связана с оператором либо обычного, либо обменного типа. Применение этой функции приводит к хорошему согласию [19] с экспериментальным значением энергии связи  $\text{H}^3$ . При таком выборе взаимодействия задача о рассеянии была решена в том же приближении, что и исследованная Морзе и Элиссом задача о рассеянии медленных электронов атомами гелия с учетом обмена (гл. X, § 6). При этом было получено хорошее согласие с наблюдаемыми значениями [20] интенсивности и углового распределения рассеянных протонов с исходной энергией  $1,85 \text{ Мэв}$  [16], в особенности для взаимодействия обменного типа. При этих значениях энергий аномальное (некулоново) рассеяние велико и зависит как от фазы  $\chi_0$ , так и от фазы  $\chi_1$ . Для нейтронов с энергиями от тепловой до  $7 \text{ Мэв}$  предположение о наличии обменных сил [21] также приводит к вполне удовлетворительному согласию с наблюдаемыми значениями полного сечения, в особенности если учесть недостаточную точность экспериментальных данных.

В заключение следует указать, что точность излагаемой теории вызывает сомнения главным образом в отношении учета роли поляризационных эффектов, обусловленных деформацией дейтрона падающей частицей. Поскольку волновая функция  $\Psi(r_1 - r_2, r_1 - r_3)$ , используемая для описания рассеяния, симметрична по отношению к координатам  $r_1, r_2, r_3$  всех трех частиц, она должна содержать функции  $\varphi(r_1 - r_2)$ , характеризующие возбужденные состояния дейтрона. Роль членов, которые при этом остаются неучтенными, пока еще не вполне ясна.

## § 2. Резонансные явления при ядерных столкновениях с участием многих тел

Рассмотрим теперь явления, для которых приближение одной частицы уже непригодно. Сюда относятся все ядерные столкновения, за исключением столкновений между наиболее легкими ядрами. В этих случаях следует применять метод комплекса сталкивающихся частиц, или метод составного ядра. В гл. VIII

<sup>1)</sup> В случае рассеивания высоких энергий см. [17, 18].



мы различали два существенных случая: случай, когда расстояние между уровнями комплекса больше ширины самих уровней, и случай перекрывающихся уровней. Возникновения резонансных эффектов можно ожидать только в первом случае. Изучение этих явлений дает возможность не только проверить правильность теоретических соображений, но также получить ценные сведения о системе энергетических уровней сильно возбужденных ядер и относительной роли различных процессов, влияющих на ширину уровней. В тех случаях, когда уровни перекрываются, столь подробных данных получить нельзя. Для иллюстрации этого метода рассмотрим прежде всего некоторые резонансные реакции. Резонансные явления, связанные с тяжелыми и средними ядрами, исследовались почти исключительно путем бомбардировки этих ядер медленными нейтронами. В этом случае расстояние между уровнями при данном значении энергии возбуждения значительно меньше, нежели в случае легких ядер (см. п. 1). Поэтому, для того чтобы рассеяние между уровнями оставалось большим, нежели их ширина, необходимо, чтобы степень возбуждения ядер была по возможности малой. Это заставляет нас ограничиться исследованием медленных частиц. Поэтому из рассмотрения исключаются также и заряженные частицы ввиду их неспособности преодолеть высокий потенциальный барьер.

С другой стороны, резонансные явления в легких ядрах изучались обычно с помощью заряженных частиц. Это объясняется тем, что в случае легких ядер расстояния между уровнями относительно велики (см. п. 1), в связи с чем потребовались бы нейтроны с энергиями порядка  $10^3 - 10^6$  эв. Источники нейтронов, обладающих такими энергиями, появились лишь в последнее время, тогда как источники заряженных частиц, например протонов и  $\alpha$ -частиц, с такой же энергией известны уже в течение ряда лет. В случае легких ядер потенциальный барьер кулоновых сил достаточно низок для того, чтобы такие частицы могли через него проникнуть. Поэтому вплоть до настоящего времени основные сведения о резонансных явлениях в легких ядрах были получены в результате изучения распада этих ядер под действием  $\alpha$ -частиц, радиоактивного захвата протонов и упругого рассеяния  $\alpha$ -частиц и протонов. Эти сведения являются менее подробными, нежели сведения, получаемые при исследованиях, проводимых с помощью медленных нейтронов.

При изучении резонансных явлений принято пользоваться «одночленной» формулой (8.130) в случае столкновений, сопровождающихся перераспределением частиц, и формулой (8.132) в случае упругого рассеяния. Если необходимо учесть влияние нескольких резонансных уровней, то число неизвестных постоянных в большинстве случаев столь велико, что эти формулы становятся бесполезными. Тем не менее для многих реакций

«одночленная» формула оказывается, повидимому, достаточной. В гл. VIII, § 8, при рассмотрении метода комплекса столкновений мы не учитывали в явном виде возможности электромагнитного излучения. Ясно, однако, что эта возможность может быть учтена путем введения в рассмотрение соответствующей парциальной ширины уровня  $\Gamma_r$ , как это и будет сделано ниже.

**1. Теоретическая оценка расстояний между уровнями составного ядра.** Подробное рассмотрение методов теоретической оценки расположения уровней составных ядер выходит за рамки этой книги. Мы упомянем здесь лишь о полученных при этом результатах, на основании которых можно сделать качественные заключения о распределении уровней таких ядер.

В случае легких ядер наиболее правильной моделью является, повидимому, модель свободной частицы [22—24]<sup>1)</sup>, видоизмененная Бардиным [26] для учета обменных сил. Согласно этой модели, ядро рассматривается как смесь двух газов, состоящих соответственно из нейтронов и протонов, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака и заключенных в потенциальный ящик. В случае обменных сил эффективная глубина ящика зависит от волнового числа рассматриваемой частицы [27]; именно этот эффект и был учтен Бардиным. Применяя методы статистической физики, обычным путем находим величину расстояния между уровнями (в эв):

$$D = 3 \cdot 10^6 x^4 e^{-x}, \quad (13.17)$$

причем  $x$  равно

$$x = \left( \frac{AU}{4,36} \right)^{1/2}, \quad (13.18)$$

где  $A$  — массовое число,  $U$  — энергия возбуждения в  $M$  эв, а радиус ядра  $R$  принят<sup>2)</sup> равным  $1,48 A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  см.

Для средних и тяжелых ядер наилучшее приближение, вероятно, дает капельная модель ядра, предложенная Бором и Калькармом<sup>3)</sup>. Если пренебречь влиянием объемных упругих волн и взять то же значение радиуса ядра, что и в формуле (13.18)<sup>4)</sup>, то  $D$  оказывается равным (в эв)

$$D = 6,1 \cdot 10^6 A^{-1/2} U^{5/6} \exp(-0,65 A^{2/3} U^{1/2}). \quad (13.19)$$

В табл. 22 приведены некоторые типичные численные данные, полученные с помощью формул (13.17) и (13.19). Сопоставляя

<sup>1)</sup> См. также [25].

<sup>2)</sup> Получен из радиуса радиоактивных ядер; величина  $x$  пропорциональна радиусу ядер.

<sup>3)</sup> См. [23].

<sup>4)</sup> В формуле (13.19) экспонента пропорциональна радиусу ядра в степени  $6/7$ , а впереди стоящий множитель — в степени  $-3/7$ .

Таблица 22

| Массовое число | Расстояние между уровнями (в эв) при различных энергиях возбуждения [ $\alpha$ — по формуле (13.17); $\beta$ — по формуле (13.19)] |                  |                      |                  |                      |                  | Энергия возбуждения (в Мэв) для захвата |                                      |
|----------------|--|------------------|----------------------|------------------|----------------------|------------------|---|--------------------------------------|
|                | $U = 5 \text{ Мэв}$  |                  | $U = 10 \text{ Мэв}$ |                  | $U = 15 \text{ Мэв}$ |                  | медленных нейтронов                     | $\alpha$ — частота в $2 \text{ Мэв}$ |
|                | $\alpha$   | $\beta$          | $\alpha$             | $\beta$          | $\alpha$             | $\beta$          |   |                                      |
| 10             | —  | $4,6 \cdot 10^5$ | $7,3 \cdot 10^6$     | $1,4 \cdot 10^5$ | $5,1 \cdot 10^4$     | $7,3 \cdot 10^6$ | 9,3                                     | 11                                   |
| 20             | —  | $2,2 \cdot 10^5$ | $4,9 \cdot 10^4$     | $3,6 \cdot 10^6$ | $1,1 \cdot 10^4$     | $4,7 \cdot 10^6$ | 9,5                                     | 12                                   |
| 50             | —  | $5,6 \cdot 10^4$ | $7,1 \cdot 10^3$     | $1,8 \cdot 10^5$ | $1,2 \cdot 10^3$     | $4,2 \cdot 10^4$ | 9,1                                     | ...                                  |
| 100            | $8,7 \cdot 10^6$   | $1,6 \cdot 10^4$ | $4,3 \cdot 10^4$     | $3 \cdot 10^3$   | $1,3 \cdot 10^2$     | $320$            | 8,2                                     | ...                                  |
| 200            | $4,2 \cdot 10^4$   | $3,5 \cdot 10^3$ | $320$                | 6                | 8,2                  | 0,17             | 6,9                                     | ...                                  |

их с экспериментальными данными (см. п. 2 и 3), мы видим, что теоретические значения расстояний между уровнями оказываются завышенными. Это и не удивительно, так как в том случае, когда в теоретическую формулу входит экспоненциальный множитель, получить хорошее согласие с опытом весьма затруднительно. С другой стороны, обе формулы приводят к важному заключению о том, что расстояние между уровнями экспоненциально убывает с возрастанием массового числа  $A$  и энергии возбуждения  $U$ .

**2. Резонансные явления в средних и тяжелых ядрах, связанные с медленными нейтронами.** Экспериментальные исследования, приведшие к развитию физики медленных нейтронов, относились главным образом к нейтронам с энергиями от долей электрон-вольта до нескольких сот электрон-вольт. Такие нейтроны не обладают достаточной энергией для возбуждения ядра при неупругом столкновении, а соответствующая длина волны значительно превышает размеры ядра (длина волны нейтрона с энергией  $V \text{ эв}$  равна  $2,6 \cdot 10^{-9} V^{-1/2} \text{ см}$ ). В результате, экспериментальные возможности оказываются при этом весьма ограниченными, что облегчает теоретическое истолкование получаемых результатов.

Следуя методу комплекса столкновений, мы будем полагать, что столкновение медленного нейтрона с ядром приводит сперва к образованию некоторого комплекса, составного ядра, которое

затем распадается с освобождением избыточной энергии. Возможны пять способов такого распада: 1) испускание нейтрона с исходной энергией; в этом случае столкновение является упругим; 2) испускание  $\gamma$ -излучения; в этом случае столкновение приводит к захвату нейтрона, сопровождающемуся излучением; 3) испускание  $\alpha$ -частицы; 4) испускание протона; 5) распад комплекса на осколки сравнимых размеров, т. е. деление ядра.

По причинам энергетического характера деление ядра, обусловленное столкновениями с медленными нейтронами, может иметь место только для ограниченного числа тяжелых ядер. Эти вопросы частично будут рассмотрены в § 6. Также по энергетическим причинам и ядерные столкновения, сопровождающиеся испусканием  $\alpha$ -частиц или протонов, могут иметь место только для ограниченного числа легких ядер. Таким образом, в общем случае столкновение ядра с медленным нейтроном приводит либо к упругому рассеянию нейтрона, либо к его захвату, сопровождающемуся излучением. Поэтому мы ограничимся сперва лишь рассмотрением этого типа столкновений.

*Применение «одночленной» формулы.* Если мы предположим, что при столкновениях с медленными нейтронами основные эффекты связаны с отдельным резонансным уровнем составного ядра, то для определения сечения захвата можно воспользоваться формулой гл. VIII, § 8, дающей

$$Q_c = \frac{\pi}{2k^2} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right) \frac{\Gamma_r \Gamma_n}{(E - E_R)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_r + \Gamma_n)^2}. \quad (13.20)$$

Составное ядро может распасться либо с испусканием нейтрона с его первоначальной энергией, либо с испусканием излучения. Пусть  $\Gamma_n$  и  $\Gamma_r$  представляют собой соответствующие значения парциальной ширины уровней,  $E_R$  — резонансная энергия,  $E$  — энергия нейтрона и  $k$  — его волновое число. Множитель  $\frac{1}{2} [1 \pm 1/(2s+1)]$  соответствует тому случаю, когда бомбардируемое ядро имеет спиновое квантовое число  $s$ , а знак  $\pm$  определяется квантовым числом резонансного уровня комплекса, равным  $s \pm \frac{1}{2}$ .

Аналогичным образом для упругого рассеяния получаем

$$Q_{\text{упр.}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{k^2} \left\{ \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right) \left| -2ikR + \frac{\Gamma_n}{E_R - E - \frac{1}{2} i(\Gamma_r + \Gamma_n)} \right|^2 + \left( 1 \mp \frac{1}{2s+1} \right) |2ikR|^2 \right\}. \quad (13.21)$$

При этом верхние знаки соответствуют тому случаю, когда квантовое число резонансного уровня равно  $s + \frac{1}{2}$ , а нижние — тому случаю, когда оно равно  $s - \frac{1}{2}$ . При выводе этой формулы предполагалось, что  $kR$  мало ( $R$  — радиус ядра).

Отметим прежде всего некоторые общие свойства этих формул. Зависимость  $Q_c$  от энергии в случае нейтронов с энергиями, близкими к  $E_R$ , имеет явно выраженный резонансный характер, причем он тем резче выражен, чем меньше общая ширина уровня  $\Gamma (= \Gamma_r + \Gamma_n)$ . Кроме того, при определенных условиях наблюдаются два других характерных вида изменения энергии. В гл. VIII, § 8, было показано, что при малых скоростях  $\Gamma_n$  пропорционально скорости нейтрона  $v$ . Следовательно, при малых скоростях  $Q_c$  меняется как  $v^{-1}$  при условии, что знаменатель формулы (13.20) лишь слабо зависит от  $E$ . Это будет иметь место тогда, когда либо  $E_R$ , либо  $\Gamma$  много больше  $E$ ; как это будет показано ниже, это условие проще всего выполняется в случае легких ядер, обладающих широкими уровнями, расположенными на больших расстояниях друг от друга.

В том случае, когда резонансная энергия отрицательна,  $Q_c$  будет монотонно убывать с возрастанием энергии нейтрона, вначале как  $E^{-1/2}$ , а затем как  $E^{-5/2}$ . Если условия таковы, что сечение захвата меняется, как  $E^{-1/2}$ , то сечение рассеяния не будет зависеть от  $E$ , так как оба члена, заключенных в скобки в формуле (13.21), пропорциональны  $E$ . При этих условиях полное сечение имеет вид  $q_c E^{-1/2} + q_s$ , причем первый член соответствует здесь радиационному захвату, а второй — упругому рассеянию;  $q_c$  и  $q_s$  — постоянные.

Если известен спиновый множитель  $[1 \pm 1/(2s+1)]$ , то сечение захвата определяется резонансной энергией и величинами  $\Gamma_n$  и  $\Gamma_r$ . Записывая  $\Gamma_n$  в форме

$$\Gamma_n = \Gamma_n^R \left( \frac{E}{E_R} \right)^{1/2}, \quad (13.22)$$

где  $\Gamma_n^R$  — ширина нейтронного уровня в точке резонанса, мы получаем следующую формулу для сечения  $Q_c^{\text{макс.}}$  при точном резонансе:

$$Q_c^{\text{макс.}} = \frac{h^2}{4\pi m E_R} \frac{\Gamma_r \Gamma_n^2}{(\Gamma_n^R + \Gamma_r)^2} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right). \quad (13.23)$$

Зная  $Q_c^{\text{макс.}}$  и  $E_R$ , можно определить отношение  $\Gamma_r \Gamma_n^R / (\Gamma_n^R + \Gamma_r)^2$ . Изучая зависимость  $Q_c$  от  $E$ , можно непосредственно измерить также и величину  $\Gamma_r + \Gamma_n^R$ . Это дает нам значение суммы и произведения  $\Gamma_n^R$  и  $\Gamma_r$ , так что оказывается возможным вычислить

в отдельности величины  $\Gamma_n^R$  и  $\Gamma_r$ , определяющие парциальные значения ширины резонансных уровней. Неясным остается только вопрос о том, которая из этих величин больше. Для решения этого вопроса следует использовать данные об упругом рассеянии. Резонансная часть сечения равна  $Q_c \Gamma_n^R / \Gamma_r$ , где  $Q_c$  — сечение захвата. Величина  $Q_c \Gamma_n^R / \Gamma_r$  будет больше или меньше, нежели  $Q_c$ , в зависимости от соотношения между нейтронной и радиационной ширинами уровня. За исключением случая легких элементов,  $\Gamma_r$  обычно значительно больше  $\Gamma_n^R$ .

Спиновый множитель в большинстве случаев неизвестен, а присутствие в поглощающем веществе нескольких изотопов также вносит некоторую неопределенность в результаты. При анализе экспериментальных данных следует, кроме того, позаботиться о том, чтобы наблюдаемый резонанс не был в значительной степени обусловлен так называемым доплеровым расширением, т. е. влиянием теплового движения бомбардируемых ядер. Доплеровому расширению<sup>1)</sup> соответствует кажущаяся ширина уровня  $\Delta$ , равная

$$\Delta = 2 \left( m E_R \frac{\chi T}{M} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $m$  — масса нейтрона,  $M$  — масса ядра,  $T$  — температура вещества, содержащего рассматриваемые ядра, а  $\chi$  — постоянная Больцмана.

*Экспериментальные данные.* Значительные успехи техники, достигнутые за последние годы, сделали возможным более детальное исследование сечений медленных нейтронов. Мы ограничимся здесь рассмотрением некоторых результатов, полученных в последних работах. Обзор более ранних работ по этому вопросу, в которых использовались косвенные методы определения сечений, содержится в статье Бете [23].

Наличие мощных источников нейтронов в виде урановых котлов позволяет получать монохроматические лучи медленных нейтронов, используя для этого брегговские отражения под соответствующим углом от поверхности кристаллов, таких как LiF. Пользуясь такими пучками, можно провести исследования, необходимые для указанного выше анализа.

Безьма полезным оказался метод модулированного источника нейтронов, предложенный впервые Альварецом [28], а также Фертелем, Гиббсом, Муном, Томсоном и Вин-Вильямсом [29]. С помощью дискриминирующего усилителя или другого аналогичного прибора можно отобрать для изучения только такие нейтроны, которые поступают в детектирующую систему в те-

<sup>1)</sup> См. [23].

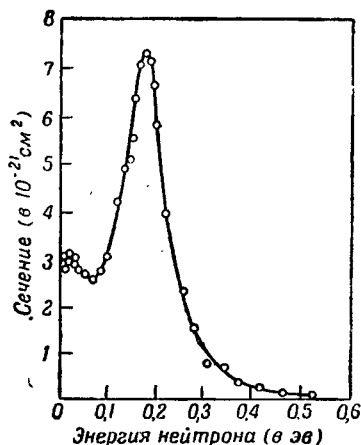
чение определенного заданного промежутка времени с момента их выхода из источника, т. е. можно отобрать нейтроны в заданном интервале скоростей. Этот метод дает возможность определить резонансные энергии, а также значение произведения  $Q_c^{\text{макс.}} \Gamma^2$ ; однако он не обладает пока достаточно высокой разрешающей способностью для того, чтобы можно было определить величину  $Q_c^{\text{макс.}}$ . В той области, где  $Q_c$  пропорционально  $E^{-1/2}$ , этот метод может быть использован для определения  $q_c$  и  $q_s$ .

С точки зрения возможностей изучения поглощения нейтронов, одним из наиболее подходящих элементов является кадмий. Это связано с тем, что кадмий в сильной степени поглощает нейтроны, обладающие обычной тепловой энергией. Поэтому данные о константах, характеризующих возбужденный комплекс, образовавшийся в результате захвата медленного нейтрона кадмием, являются более точными и надежными, чем для любого другого элемента.

Фиг. 61 иллюстрирует зависимость полного сечения захвата нейтронов кадмием от энергии по данным Сойера, Воллана, Бернштейна и Петерсона [30], полученным по методу дифракции нейтронов от кристалла. Резонансный характер поглощения в этом случае очевиден; при этом показано, что величина сечения хорошо согласуется со значением, вычисленным по формуле (13.20), при  $Q_c^{\text{макс.}} = 7,25 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2$ ,  $E_R = 0,178 \text{ эв}$  и  $\Gamma = 0,110 \text{ эв}$ . Эти результаты находятся в очень хорошем согласии с данными, полученными недавно другими авторами [31 — 33].

Мойер, Петерс и Шмидт [34] показали, что за столь сильное поглощение нейтронов кадмием ответственным является изотоп  $\text{Cd}^{113}$ , содержание которого в естественном элементе составляет 12,3%. Спиновое квантовое число этого изотопа равно  $1/2$ . Данинг, Пеграм, Финк и Митчел [35] установили, что сечение упругого рассеяния не превышает 1% величины полного сечения. Наконец, измерения Бермана [36] показали, что сечение упругого рассеяния равно  $(40 \pm 15) \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ .

На основании этих данных  $\Gamma_r$  и  $\Gamma_n^R$  равны соответственно  $0,11 \cdot 10^{-3}$  и  $0,60 \cdot 10^{-3} \text{ эв}$ , а угловое квантовое число резонансного уровня равно единице, а не нулю.



Фиг. 61. Наблюдаемое полное сечение поглощения медленных нейтронов в кадмие.

Для других элементов мы не располагаем столь полными и достоверными данными, как для кадмия. В табл. 23 приведены результаты ряда измерений сечений для различных элементов<sup>1)</sup>. Эти данные по возможности подвергнуты тщательному анализу, причем в ряде случаев сделаны предположения о возможном присутствии того или иного изотопа, а спиновый множитель  $[1 \pm 1/(2s + 1)]$  принят равным единице. Следует указать, что европий, диспрозий и ртуть обнаруживают резонансные уровни с малой отрицательной энергией.

Во всех случаях составное ядро, образовавшееся в результате захвата нейтрона, обладает энергией возбуждения порядка  $7 - 9 \cdot 10^6$  эв. Исследование распределения резонансных энергий дает возможность сделать некоторые выводы также и о расстояниях между уровнями для данного возбужденного состояния. Особый интерес представляет случай тантала, состоящего только из одного изотопа. В этом случае наблюдается пять резонансных уровней в интервале между 0 и 40 эв; это указывает на то, что для тяжелого ядра расстояние между уровнями несколько меньше 10 эв. Аналогичный результат получен и для иода, который также состоит из одного изотопа; из приведенной таблицы следует, однако, что для более легких ядер расстояние между уровнями увеличивается. Кобальт и марганец не обнаруживают резонансных уровней при энергиях ниже 100 эв; аналогичные результаты были получены в более ранних исследованиях также для меди и мышьяка. Этого и следовало ожидать, поскольку более легкие ядра обладают меньшим числом степеней свободы (см. п. 1).

Радиационная ширина уровня для большинства ядер остается близкой к 0,1 эв. Согласно теории, истинная нейтронная ширина уровня должна быть примерно пропорциональна  $E_R^{1/2}$  для соседних (с ядром кадмия) ядер. Воспользовавшись для определения постоянных данными, полученными для кадмия, находим

$$\Gamma_n^R = 1,4 E_R^{1/2} \cdot 10^{-3} \text{ эв}, \quad (13.24)$$

где  $E_R$  измерено в электрон-вольтах.

Экспериментальные данные, полученные для соседних с кадмием элементов, недостаточно точны, и анализ их не настолько однозначен, чтобы можно было говорить о всеобщей применимости этого соотношения. Тем не менее оно все же не находится в противоречии с опытными данными. Это следует например, из пятого столбца табл. 23, в котором значения  $\Gamma_n$ , вычисленные по формуле (13.24) (взяты в круглые скобки), сопоставлены с экспериментальными значениями этой величины. Данные, полученные для иридия, свидетельствуют о том, что

<sup>1)</sup> Последующие результаты см. [37].



Таблица 23

| Элемент | Резонансные энергии<br>$E_R$ (в эв) | Максимальное значение сечения $\sigma_{с макс.}$ (в $10^{-24}$ см <sup>2</sup> ) | Радиационная ширина урона $\Gamma_r$ (в эв) | Ширина урона $\Gamma_n$ (в $10^{-3}$ эв) | Полноразмерная линия (в эв) | Предельное значение сечения при малых скоростях |  | Литература | Примечание |   |
|---------|-------------------------------------|--|---|--|-----------------------------|---|--|------------|------------|---|
|         |                                     |  |   |  |                             | $q_c \cdot E^{-1/2} + q_s$                      | $q_s$ (в $10^{-24}$ см <sup>2</sup> )<br>$q_s$ (в $10^{-24}$ см <sup>2</sup> )<br>(вольт) <sup>1/2</sup> |            |            |   |
| Mn      | 300                                 |  |   |  |                             |   | 2, 24  | 2, 3       | 32         | Резонансное сечение, обусловленное в основном упругим рассеянием [44, 45]<br>То же [46]                           |
| Co      | 115                                 |  |   |  |                             |   | 6, 4   | 6, 7       | 40         | Резонанс обусловлен $Sd_{115}$ [34] (содержание 12,3%; спин, равный $1/2$ , и $J=1$ принадлежит уровню комплекса) |
| Zr      | 1, 1; 2, 3; 7, 6                    | 4 000  | 0, 16                                       | 0, 43                                    | 0, 04                       |   | 0, 74  | 6, 8       | 39         |   |
| Rh      | 1, 28                               |  |   |  |                             |   |  |            | 47         |   |
| Ag      | 5, 1; 16; 45                        | 7 250  | 0, 11                                       | 0, 60                                    | 0, 013                      |   | 9, 05  | 6, 6       | 32, 38     |   |
| Cd      | 0, 178                              |  |   |  |                             |   |  |            | 30—33      |   |
| In      | 1, 44; 3, 8; 8, 6                   | 26 000   | 0, 09                                       | 1, 8 (1, 7)                              | 0, 036                      |   |  |            | 39         | Резонанс приписывается $In_{116}$ (содержание 95,5%)  |
| Sb      | 5, 8; 15; 21                        | [80]   | [0, 45]                                     | [0, 4] (6, 3)                            | 0, 126                      |   | 0, 64  | 4, 2       | 32         | Цифры в квадратных скобках являются всего лишь приближенными [43]   |
| I       | 20, 6; 32; 42                       |  |   |  |                             |   | 1, 12  | 3, 8       | 40         |   |

|    |                             |             |               |               |        |     |   |
|----|-----------------------------|-------------|---------------|---------------|--------|-----|---|
| Sm | 0,096; 10; 33               | 15 500      | 0,074         | 0,34(0,43)    | 0,008  | 42  | Резонанс обусловлен $\text{Sm}^{149}$ [41] (содержание 17%)   |
| Eu | -0,041; 0,465; 3,3; 9,2; 22 | -5 670      | -0,20         | -0,54(0,95)   | 0,0172 | 42  | Резонанс приписывается любому из двух изотопов (содержание 50%)   |
| Gd | 0,031                       | 44 000      | 0,095         | 0,42(0,25)    |        | 42  | Резонанс обусловлен $\text{Gd}^{157}$ [41] (содержание 17%)   |
| Dy | -1,01                       |             | 0,10          |               |        |     |   |
| Ta | 4,4; 10; 13; 22; 37         |             |               |               |        | 39  |   |
| W  | 4,0; 7,4; 18,0              |             |               |               | 3,0    | 7,2 |   |
| Os | 6,5; 8,8; 20; 28; 42        |             |               |               | 2,72   | 5,7 |   |
|    |                             |             |               |               | 2,7    | 15  | Первый резонанс приписывается $\text{Ir}^{191}$ (содержание 38%), второй — $\text{Ir}^{193}$ (содержание 62%) |
| Ir | 0,63; 1,35; 6,0             | [530] [605] | [0,25] [0,36] | [0,11] [0,25] | 0,004  | 14  | 40,32   |
| Pt | 14,5; 18,2                  |             |               |               | 1,0    | 12  | 39  |
| Au | 4,8                         |             |               |               |        |     | 39  |
| Hg | -2,0                        |             |               |               |        |     | 41  |
| Tl |                             |             |               |               | 0,6    | 9,7 | 40  |

1) Для наименьшего положительного резонансного уровня.

постоянная в формуле (13.24) уменьшается в случае более тяжелых ядер, как этого и следовало ожидать [см. формулу (8.31)].

С другой стороны, нейтронная ширина уровня должна быть значительно больше в случае более легких элементов, отчасти из-за более высокой энергии резонансных уровней, отчасти в связи с тем, что энергия возбуждения распределяется при этом между меньшим числом степеней свободы. Это увеличивает вероятность того, что на отдельную частицу комплекса придется достаточно большая энергия, в результате чего она сможет покинуть комплекс. Это заключение подтверждается экспериментальными данными, согласно которым в случае кобальта [45,46] и марганца [48] резонанс связан главным образом с упругим рассеянием, а не с радиационным захватом.

Согласно «одночленной» формуле, сечение захвата в предельном случае малых скоростей,  $q_c E^{-1/2}$ , определяется выражением вида

$$q_c = \frac{h^2}{16\pi M E_R^{1/2}} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right) \frac{\Gamma_r \Gamma_n^R}{E_R^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (13.25)$$

Поскольку здесь не учтены более далекие уровни, эта формула не всегда справедлива. Можно, однако, ожидать, что величина  $q_c$  будет меняться неправильным образом при переходе от элемента к элементу, что и имеет место на самом деле. С другой стороны,  $q_s$  определяется существенным образом также и потенциальным рассеянием, которое пропорционально эффективному геометрическому сечению ядра и должно меняться, как  $A^{2/3}$ , где  $A$  — массовое число. Поэтому  $q_s$  должно изменяться значительно более плавно, нежели  $q_c$ , при переходе от элемента к элементу и возрастать по мере увеличения массового числа. Это заключение находится в согласии с опытными данными.

Таким образом, на основании известных опытных данных можно принять следующие средние значения различных постоянных, связанных с медленными нейтронами, т. е. с составными ядрами, обладающими энергией возбуждения порядка 7–10 эв:

|  |                                 |
|--|---------------------------------|
| Расстояние между уровнями для средних и тяжелых ядер                                       | 5–10 эв                         |
| Радиационная ширина уровня   | 0,12 »                          |
| Ширина уровня, соответствующая вылету нейтрона<br>(для ядер с массовым числом $\sim 100$ ) | $1,4 E_R^{1/2} \cdot 10^{-3}$ » |

**3. Резонансные явления в легких ядрах.** Резонансные столкновения с нейтронами средней энергии. Как уже указывалось выше, изучение резонансных явлений, связанных со столкновениями нейтронов с легкими ядрами, еще только начинается. Расстояние между уровнями в таких ядрах — величины порядка

десятков киловольт, а источники нейтронов, обладающих такими значениями энергии, только сейчас становятся доступными. Наиболее подробным исследованием в этой области, известным в настоящее время, является работа Сигондоллара и Баршалла [49]<sup>1)</sup>, измеривших полное сечение алюминия для нейтронов с энергиями от 10 до 1000 *кэв*. При этом было обнаружено десять резонансных уровней, что соответствует средним расстояниям между ними порядка 100 *кэв* при энергии возбуждения 9 *Мэв*. Для нейтронов с энергией 155 *кэв* ширина уровня лежит в интервале между 16 и 35 *кэв*. Эта ширина почти полностью обусловлена упругим рассеянием, так как радиационная ширина вряд ли превышает несколько электрон-вольт. Для сравнения с нейтронной шириной уровней средних и тяжелых ядер можно воспользоваться соотношением

$$\frac{\Gamma(E_1)}{\Gamma(E_2)} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2},$$

где  $\Gamma(E_1)$  и  $\Gamma(E_2)$  представляют собой соответственно значения нейтронной ширины уровней при энергиях нейтрона  $E_1$  и  $E_2$ . Наблюдаемая ширина уровня алюминия, приведенная к энергии нейтрона 1 *эв*, лежит между 40 и 80 *эв*. Эта величина больше чем в 10 раз превышает соответствующую ширину уровня для кадмия, что лишней раз свидетельствует о том, что ширина уровня быстро возрастает по мере уменьшения числа степени свободы ядра.

*Радиационный захват протонов.* Одночленная формула дает в этом случае для сечения радиационного захвата

$$Q_c = \frac{\pi}{2k^2} \frac{\Gamma_r \Gamma_p}{(E - E_R)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} \left(1 \pm \frac{1}{2s+1}\right), \quad (13.26)$$

где  $\Gamma_p$  — парциальная ширина уровня, соответствующая повторному испусканию протонов с их первоначальной энергией. Если предполагается, что вероятность распада составного ядра с испусканием протонов или других частиц, обладающих энергией, меньшей исходной, мала, то  $\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_p$ .

Формула, определяющая ширину протонного уровня  $\Gamma_p$ , содержит множитель, представляющий собой вероятность проникновения протона через кулонов потенциальный барьер, и может быть записана в виде (см. гл. III, § 5)

$$\Gamma_p = e^{-P} \left(\frac{E}{E_R}\right)^{1/2} \Gamma_p^R, \quad (13.27)$$

где  $\Gamma_p^R$  — ширина уровня в отсутствие барьера или энергии, равной резонансной энергии  $E_R$ . Первый множитель представляет собой

<sup>1)</sup> См. также [50].

вероятность проникновения протонов с энергией  $E$  через барьер. Эта вероятность определяется формулой (3.36).

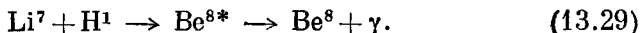
Как и в случае медленных нейтронов, мы будем предполагать, что эффективными являются только протоны, момент количества движения которых равен нулю.

Для легких ядер  $\Gamma_p^R$  значительно больше, нежели  $\Gamma_r$ . Радиационный захват приобретает более существенную роль, чем упругое рассеяние, только при таких малых значениях энергии, когда  $e^{-P}$  очень мало. Во всех остальных случаях можно считать, что  $\Gamma_p \approx \Gamma$ .

О захвате протонов имеется значительно меньше экспериментальных данных, чем о поглощении медленных нейтронов. Большая часть исследований предпринималась до сих пор прежде всего для измерения резонансных энергий; в некоторых случаях была определена также полная (эффективная протонная) ширина и интегральный выход по всему резонансному уровню. Последний определяется формулой вида

$$\int Q_c dE = \frac{\pi^2 \Gamma_r \Gamma_p}{k^2 \Gamma} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right). \quad (13.28)$$

Наиболее тщательно исследована, повидимому, реакция захвата протона  $\text{Li}^7$  [51, 52]:



В этом случае резонансный уровень наблюдается при энергии протона в 440 *кэв*, а ширина этого уровня составляет 11 *кэв*. Из данных об интегральном выходе следует, что  $\Gamma_r$  равно при этом 4 *эв*, если мы положим в формуле (13.28)  $s = 3/2$  и выберем в ней отрицательный знак. В этом случае  $e^{-P} = 1/3,5$ , так что  $\Gamma_p^R$  величина порядка 40 *кэв*. Это значение может быть приведено к значению ширины уровня при энергии 1 *эв*, если мы умножим  $\Gamma_p^R$  на  $(4,4 \cdot 10^5)^{-1/2}$ . Это дает 60 *эв*, тогда как нейтронная ширина уровня в случае средних и тяжелых ядер составляет  $10^{-4}$  *эв* и в случае алюминия—40—80 *эв*.

Резонансный уровень составного ядра  $\text{Be}^8$  также был исследован путем изучения упругого рассеяния протонов литием (см. ниже). Поскольку известно, что  $\text{Be}^8$  легко распадается на две  $\alpha$ -частицы [53], казалось бы, не следует пренебрегать расширением уровня, отвечающим возможности такого распада. В действительности, однако, ожидаемая ширина уровня, обусловленная  $\alpha$ -распадом, значительно превышает наблюдаемую полную ширину; повидимому, в силу правил отбора, процесс  $\alpha$ -распада в этом случае оказывается запрещенным. Это могло иметь место, если бы уровень составного ядра  $\text{Be}^8$ , образовавшегося в результате захвата протона, был нечетным, или же если бы ему отвечало нечетное значение полного момента количества движения.

Эта точка зрения подтверждается более поздними исследованиями рассеяния протонов (см. ниже).

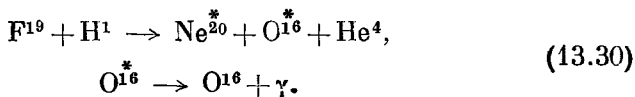
Значения резонансных энергий для захвата протонов различными легкими ядрами приведены в табл. 24. Случай фтора также

Таблица 24

Резонансные уровни ядерных комплексов, образовавшихся путем захвата протона

| Исходное ядро    | Составное ядро   | Резонансные линии               |                                      | Ширина линии (в кэв) | Литература |       |
|------------------|------------------|---------------------------------|--------------------------------------|----------------------|------------|-------|
|                  |                  | энергия протона (в кэв)         | энергия возбуждения (в Мэв)          |                      |            |       |
| Li <sup>7</sup>  | Be <sup>8</sup>  | 440                             | 17,8                                 | 11                   | 51, 57     |       |
| Be <sup>9</sup>  | B <sup>10</sup>  | 350; 670                        | 6,8; 7,1                             |                      |            |       |
| B <sup>11</sup>  | C <sup>12</sup>  | 180; 650; 850; 950              | 16,3; 16,7; 16,9; 17,0               |                      |            |       |
| C <sup>12</sup>  | N <sup>13</sup>  | 480                             | 2,5                                  |                      |            |       |
| C <sup>13</sup>  | N <sup>14</sup>  | 570                             | 8,2                                  |                      |            |       |
| F <sup>12</sup>  | Ne <sup>20</sup> | 330; 470; 590; 670;<br>860; 920 | 13,3; 13,5; 13,6<br>13,7; 13,9; 13,9 |                      |            | 54—56 |
| Na <sup>22</sup> | Mg <sup>24</sup> | 425; 525; 570; 690;<br>755; 875 | 11,3; 11,4; 11,5<br>11,6; 11,7; 11,8 |                      |            |       |
| Mg <sup>25</sup> | Al <sup>26</sup> | 180; 410; 480; 575; 825         | 8,0; 8,2; 8,3<br>8,4; 8,6            |                      |            | 57    |
| Mg <sup>26</sup> | Al <sup>27</sup> | 580; 680; 1000                  | 7,7; 7,8; 8,1                        |                      |            |       |
| P <sup>31</sup>  | S <sup>32</sup>  | 460; 580; 700; 950              | 9,9; 10,0; 10,1; 10,4                |                      |            |       |

был исследован довольно подробно [52, 55, 56]; истолкование полученных при этом результатов оказывается, однако, еще более затруднительным. Найдено, что в этом случае имеет место ряд последовательных реакций, сопровождающихся  $\gamma$ -излучением:



Конкурирующими друг с другом процессами при распаде составных ядер неона являются процессы испускания короткопробежных и длинопробежных  $\alpha$ -частиц, а также повторного испускания протонов. Теоретическая сторона этого вопроса была рассмотрена Шиффом [58].

*Резонансный распад ядер под действием  $\alpha$ -частиц.* Резонансные эффекты при ядерных столкновениях впервые наблюдались при распаде легких ядер под действием  $\alpha$ -частиц [63]. В то время эти явления интерпретировались с точки зрения теории одной частицы, согласно которой резонансные эффекты могут иметь место лишь в том случае, когда энергия падающих  $\alpha$ -частиц лежит ниже кулонова барьера. С точки зрения теории многих частиц, это условие, строго говоря, уже не справедливо; практически оно все же

остается в значительной степени верным по следующим соображениям. При больших значениях момента количества движения проникаемость барьера очень быстро убывает. Поэтому уровни составных ядер, которые образуются в результате захвата  $\alpha$ -частиц с энергиями, лежащими ниже барьера, будут соответствовать малым значениям момента количества движения. Эти уровни расположены на относительно больших расстояниях друг от друга, и резонансные эффекты не маскируются их перекрытием. В том случае, когда  $\alpha$ -частицы обладают энергией, достаточной для того, чтобы проникнуть через барьер, на момент количества движения составного ядра налагается значительно меньше ограничений. Эффективные резонансные уровни располагаются в результате более тесно, перекрывая друг друга настолько, что резонансные эффекты оказываются затухающими.

Таблица 25

Резонансные уровни ядерных комплексов, образовавшихся путем захвата  $\alpha$ -частицы

| Исходное ядро    | Составное ядро   | Резонансные уровни                |   | Ширина уровня (в Мэв) | Литература |
|------------------|------------------|-----------------------------------|---|-----------------------|------------|
|                  |                  | энергия $\alpha$ -частицы (в Мэв) | энергия возбуждения составного ядра (в Мэв) |                       |            |
| Be <sup>9</sup>  | C <sup>13</sup>  | 3,4; 4,8                          | 12,8; 13,8                                  | 0,3; 0,3              | 59         |
| B <sup>10</sup>  | N <sup>14</sup>  | 4,2                               | 14,8  | 0,5                   | 60         |
| B <sup>11</sup>  | N <sup>15</sup>  | 3,2                               | 13,4  | 0,4                   | 61         |
| N <sup>14</sup>  | F <sup>18</sup>  | 3,6                               | 8,2   | 0                     | 62         |
| F <sup>19</sup>  | Na <sup>23</sup> | 3,7; 4,1                          | 14,5; 14,8                                  | 0,10; 0,13            | 63         |
| Mg <sup>24</sup> | Si <sup>28</sup> | 5,7; 6,3                          | 13,7; 14,2                                  | 0,12; 0,13            | 63         |
| Al <sup>27</sup> | P <sup>31</sup>  | 4,0; 4,5                          | 12,0; 12,4                                  | 0,10                  | 64         |
|                  |                  | 4,9; 5,3                          | 12,8; 13,1                                  | 0,07; 0,13            | 65         |
|                  |                  | 5,8; 6,6                          | 13,6; 14,3                                  | 0,12                  | 65         |

В табл. 25 приведены данные о резонансных уровнях, полученные на основании ряда наблюдений. Полная ширина уровня, повидимому, в значительной степени обусловлена не повторным испусканием  $\alpha$ -частицы, а испусканием некоторой другой частицы. Как видно из таблицы, в большинстве случаев наблюдается испускание не одной, а нескольких групп частиц, что соответствует различным конечным состояниям ядра. Средняя ширина уровня для отдельной группы получается путем деления полной ширины на число групп. В результате оказывается, например, что для составных ядер C<sup>13</sup>, N<sup>14</sup> и P<sup>31</sup> протонная (или нейтронная) ширина уровня для данного конечного состояния составляет соответственно около 0,1; 0,06 и 0,02 Мэв. Средняя энергия испускаемых частиц равна примерно 5 Мэв, так что частичная ширина уровня, приведенная к энергии в 1 эв, лежит в интервале от 25 до 50 эв для

$S^{13}$  и  $N^{14}$  и составляет около 10 эв для  $P^{31}$ . Эти величины того же порядка, что и полученные на основании изучения столкновений ядер с нейтронами и данных о радиационном захвате протонов.

Если известен момент количества движения резонансного уровня, то ширина уровня, соответствующего испусканию  $\alpha$ -частицы, может быть определена также и по интегральному выходу распада ядра с помощью формулы (13.28), если мы заменим в ней  $\Gamma$ , на  $\Gamma_\alpha$ . Таким путем найдено, что для алюминия  $[1 + 1/(2s + 1)]\Gamma_\alpha = 60$  кэв, т. е. величина того же порядка, что и полная ширина уровня, равная 90 кэв.

Данные о ширине уровней и о расстояниях между ними для легких ядер. Сопоставляя результаты, полученные на основании упомянутых выше опытов, мы получаем следующие данные для легких ядер. Расстояние между уровнями при энергии возбуждения около 14 Мэв для С приблизительно равно 1 Мэв, для Ne приблизительно равно 0,1 Мэв. Ширина уровня, отвечающего захвату частицы (приведенная к энергии 1 эв без учета наличия барьера), для  $Be^8$  приблизительно равна 60 эв, для  $P^{31}$  приблизительно равна 10 эв. Ширина радиационного уровня приблизительно равна 1—5 эв.

Упругое рассеяние заряженных частиц легкими ядрами. Рассмотрим прежде всего тот случай, когда соударяющиеся частицы обладают спином, равным нулю. В этом случае может быть применена формула (8.132), дающая для дифференциального сечения следующее выражение:

$$|f(\theta)|^2 = \left| \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) S_l P_l(\cos\theta) \right|^2, \quad (13.31)$$

где

$$S_l = e^{2i\eta_l} - 1 - ie^{2i\eta_l} \sum_R \frac{\Gamma_\alpha}{E - E_R + \frac{1}{2}i\Gamma}. \quad (13.32)$$

Здесь  $\eta_l$  — сдвиг фазы, вызванный потенциальным рассеянием; он приблизительно равен сдвигу фазы, обусловленному совокупностью бесконечно глубокой потенциальной ямы радиуса  $R$  и кулонова поля. Суммирование производится по всем резонансным уровням составного ядра, которым соответствует квантовое число  $l$ , отвечающее моменту количества движения,  $\Gamma$  — полная ширина уровня  $E_R$ , а  $\Gamma_\alpha$  — парциальная ширина уровня, отвечающая повторному испусканию падающей частицы (обычно  $\alpha$ -частицы) с ее первоначальной энергией.

В большинстве случаев можно пренебречь влиянием всех резонансных уровней, за исключением ближайшего. Кроме того, мы предположим сперва, что полная ширина уровня определяется только процессами упругого рассеяния и излучения. Для легких ядер радиационная ширина уровня ничтожна по сравнению с шириной уровня, соответствующей рассеянию частиц, за исключе-



нием случая частиц с очень малой энергией. В таком случае можно положить

$$\frac{i\Gamma_\alpha}{E - E_R + \frac{1}{2}i\Gamma} \approx \frac{i\Gamma}{E - E_R + \frac{1}{2}i\Gamma} = 1 - e^{2i\delta_l}, \quad (13.33)$$

где

$$\delta_l = \arctg \left( \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{E_R - E} \right). \quad (13.34)$$

Это дает

$$S_l = e^{2i\eta_l} - 1, \quad (13.35)$$

причем

$$\phi_l = \tau_l + \delta_l. \quad (13.36)$$

Выражение, определяющее дифференциальное сечение, приобретает, таким образом, стандартный вид [см. формулу (2.17)], причем фазовый сдвиг представляет собой сумму членов, обусловленных потенциальным рассеянием и влиянием соседнего резонансного уровня.

В случае рассеяния заряженных частиц наибольший интерес представляет величина  $R$ , равная отношению дифференциального сечения к сечению, соответствующему одному лишь кулонову полю. Воспользовавшись теми же приемами, что и при исследовании столкновений протонов с протонами, получаем

$$R = \left| 1 + \frac{i}{\alpha} \sin^2 \frac{1}{2} \theta \exp \left( i\alpha \ln \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) \sum e^{2i(\zeta_l - \zeta_0)} \times \right. \\ \left. \times (e^{2i\alpha} - 1) (2l+1) P_l(\cos \theta) \right|^2, \quad (13.37)$$

где  $\alpha = ZZ'e^2/\hbar v$ ,  $Z$ ,  $Z'$  — заряды ядер, а  $v$  — относительная скорость,  $\zeta_l$  — сдвиг фазы, вызванный чисто кулоновым полем и определяемый выражением вида (см. гл. III, § 4)

$$\zeta_l = \arg \Gamma(l+1+i\alpha), \quad (13.38)$$

так что

$$e^{2i(\zeta_l - \zeta_0)} = \frac{(1+i\alpha)^2 (2+i\alpha)^2 \dots (l+i\alpha)^2}{(1+\alpha^2) (2+\alpha^2) \dots (l^2+\alpha^2)}; \quad (13.39)$$

$\kappa_l$  — дополнительный сдвиг фазы, вызванный резонансным рассеянием и неучтенной частью потенциального рассеяния, так что

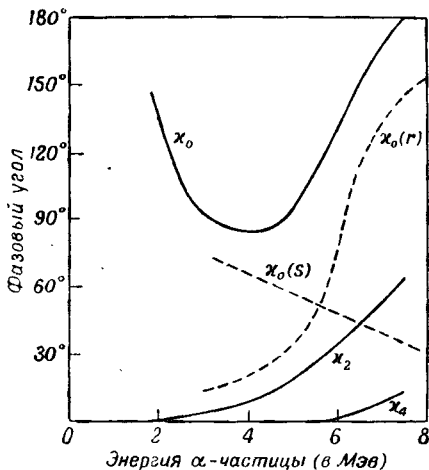
$$\kappa_l = \eta_l + \delta_l - \zeta_l. \quad (13.40)$$

В общем случае разность  $\eta_l - \zeta_l$  меняется плавно и равномерно при изменении энергии. Из формулы (13.34) для  $\delta_l$  следует, что при прохождении через резонансный уровень  $\kappa_l$  меняется на  $\pi/2$ . Если имеется возможность измерить величину  $R$  в столь широких интервалах значений энергии и момента коли-

чества движения, что могут быть определены фазы  $\chi_1$ , то по этим данным можно определить также и энергию и ширину резонансных уровней.

Достаточно подробные исследования, на основании которых можно было бы провести анализ такого рода, имеются только для случая столкновений  $\alpha$ -частиц с ядрами гелия [66]. В этом случае необходимо учесть свойства симметрии системы, из которых следует, что состояния с нечетным моментом количества движения не должны играть никакой роли (см. гл. V, § 4). Теоретический анализ этих данных, произведенный Уилером [67], привел к результатам, указанным на фиг. 62. Характер изменения  $\chi_0$  определенно указывает на существование резонансного уровня. Ранее на основании данных, полученных при изучении  $\alpha$ -распада  $\text{Be}^8$ , было установлено существование резонансного уровня при  $2,8 \text{ Мэв}$  с шириной  $0,8 \text{ Мэв}$ . Уилер показал, что найденное им значение  $\chi_0$  хорошо согласуется со значением  $\delta_0$ , вычисленным по формуле (13.34), если положить  $E_R = 3,1 \text{ Мэв}$  и  $\Gamma = 0,8 \text{ Мэв}$  и допустить, что в резонансной области  $\gamma_0 - \zeta_0$  меняется линейно с энергией. Именно этого и можно было бы ожидать на основании представлений об аномальном потенциальном рассеянии, как обусловленном твердой сферой. Разложение  $\chi_0$  на две составляющие иллюстрируется фиг. 62.

Столкновения  $\alpha$ -частиц с ядрами  $\text{O}^{16}$  и  $\text{C}^{12}$  также удовлетворяют условиям, при которых применима формула (13.31). До настоящего времени исследование этих столкновений сводилось к изучению зависимости энергии рассеяния от величины  $R$  для ограниченного числа заданных значений углов<sup>1)</sup>. Резонансные эффекты обнаруживаются при этом в виде максимумов интенсивности рассеяния, появляющихся при изменении энергии. Вблизи резонансного уровня с квантовым числом  $l$  величина  $R$  может быть определена



Фиг. 62. Фазовые углы, полученные на основании анализа аномального рассеяния  $\alpha$ -частиц в гелии.

$\chi_0(r)$  и  $\chi_0(s)$  — две компоненты  $\chi_0$ , отвечающие соответственно резонансному уровню  $\text{Be}^8$  и потенциальному рассеянию.

<sup>1)</sup> См., например, [68, 69].

формулой вида

$$R = \left| ae^{i\xi} + \frac{\rho e^{i\sigma}}{x+i} \right|^2, \quad (13.41)$$

где

$$\rho = 2(2l+1)\alpha^{-1} \sin^2 \frac{\theta}{2} P_l(\cos \theta),$$

$$\sigma = \alpha \ln 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \zeta_l - \zeta_0, \quad x = \frac{2(E-E_R)}{\Gamma}, \quad (13.42)$$

а  $ae^{i\xi}$  характеризует долю рассеяния, соответствующую фону. Если пренебречь относительно медленным изменением этого фона рассеяния с энергией, то максимальное и минимальное значения  $R$  вблизи резонансного уровня даются выражениями

$$R_{\text{макс.}}^{1/2} = \left[ a^2 - a\rho \sin(\sigma - \xi) + \frac{1}{4}\rho^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{2}\rho,$$

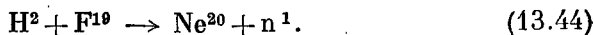
$$R_{\text{мин.}}^{1/2} = \left[ a^2 - a\rho \sin(\sigma - \xi) + \frac{1}{4}\rho^2 \right]^{1/2} \sim \frac{1}{2}\rho,$$

так что

$$\rho = R_{\text{макс.}}^{1/2} \pm R_{\text{мин.}}^{1/2}. \quad (13.43)$$

Фиг. 63 иллюстрирует изменение  $R$  при прохождении через резонансный уровень. В том случае, когда измерения производятся под большими углами, так что  $\rho$  велико, максимум  $R$  имеет место при энергии, очень близкой к резонансной, минимум же— при энергии, меньшей резонансной на  $\frac{1}{2} \Gamma \rho \sec(\sigma - \xi) a$ . По

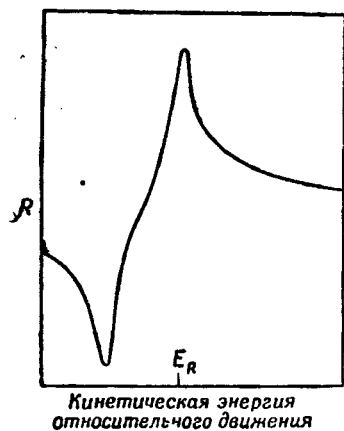
измерениям такого рода можно определить резонансные уровни; найти момент количества движения, отвечающий рассматриваемому уровню, однако, значительно труднее в связи с трудностью определения величины  $\rho$  по формуле (13.43). Последняя обусловлена тем, что недостаточная разрешающая способность часто не позволяет фиксировать минимум сечения. На фиг. 64 приведены результаты, полученные Фергюсоном и Уолкером [69] для рассеяния на  $157^\circ$  в кислороде. Здесь ясно видны два резонансных уровня—при 6,5 и 5,5 Мэв. Эти уровни соответствуют возбужденным состояниям ядра  $\text{Ne}^{20}$ , лежащим на 10,1 и 9,0 Мэв выше основного состояния; они наблюдались также Бонером [70] при изучении реакции



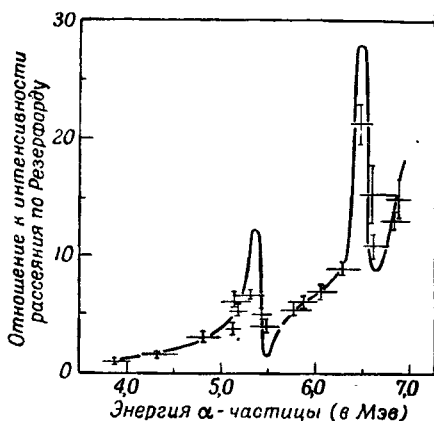
Аналогичные измерения для углерода обнаружили существование уровней, соответствующих возбужденным состояниям  $\text{O}^{16}$ , расположенным на 11,4, 11,1 и 10,6 Мэв выше основного состояния. Для изучения этих явлений необходимы дальнейшие исследования в широком интервале значений энергий и углов рассеяния.

В случае столкновений, при которых ядра не обладают нулевым спином, общая формула носит более сложный характер. Анализ резонансных эффектов, однако, значительно упрощается, если пренебречь потенциальным рассеянием при условии, что величина  $R$  в точке резонанса значительно больше единицы.

Наиболее интересные исследования такого рода относятся к рассеянию нейтронов или же протонов. Штауб и Стефенс [71]



Фиг. 63.



Фиг. 64. Аномальное рассеяние на  $157^\circ$   $\alpha$ -частиц в кислороде, свидетельствующее о наличии двух резонансных уровней  $\text{Ne}^{20}$ .

наблюдали резонансный максимум при рассеянии нейтронов с энергиями  $1 \text{ Мэв}$  ядрами гелия. Позднее Штауб и Тейтель [72] установили, что этот резонансный уровень представляет собой дублет с шириной  $0,4 \text{ Мэв}$ . Величина измеренного сечения свидетельствует о том, что нейтроны обладают в этом случае моментом количества движения, равным единице. Если это так, то наблюдаемые резонансные уровни являются уровнями  $P^{1/2}$  и  $P^{3/2}$  дублета  $\text{He}^5$ . Этот результат был подтвержден в дальнейшем Уилером и Баршаллом [73] на основании экспериментальных данных, полученных Баршаллом и Канером [74]<sup>1)</sup>. Резонансный уровень наблюдался также при рассеянии протонов в гелии [76]; он является, по видимому,  $P$ -уровнем  $\text{Li}^5$ , хотя ширина его слишком велика, чтобы он мог быть разрешен на дублеты.

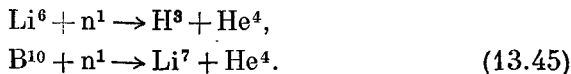
До сих пор предполагалось, что парциальная ширина уровня для упругого рассеяния  $\Gamma_p$  практически равна полной ширине резонансного уровня  $\Gamma$ . Если это не так, то выражение (13.43),

<sup>1)</sup> См., однако, [75].

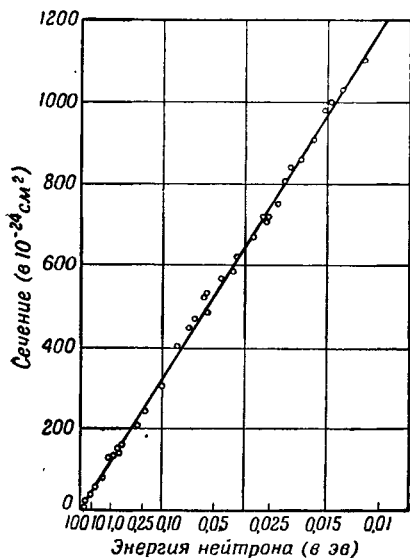
определяющее  $\rho$ , должно содержать множитель  $\Gamma_p/\Gamma$ , наличие которого соответствует ослаблению резонансного эффекта. Такой случай имеет место при рассеянии тяжелыми ядрами, когда существенными являются неупругие столкновения. Это означает также, что при упругом рассеянии дейтронов, которые благодаря своей большой внутренней энергии обычно при соударении вызывают распад ядра, резонансные эффекты должны быть очень слабыми.

Эти соображения были учтены Крейтцем [77], исследовавшим рассеяние протонов в литии и наблюдавшим резонансный уровень, соответствующий процессу радиационного захвата [см. (13.29)]. Величина наблюдаемого Крейтцем эффекта показывает, что  $\Gamma_p/\Gamma$  — порядка единицы. Отсюда можно сделать заключение о том, что образующееся составное ядро  $\text{Be}^8$  едва ли распадается с испусканием  $\alpha$ -частицы; это заключение находится в согласии с выводами, сделанными нами в § 2.

*Испускание частиц легкими ядрами, сопровождающее захват медленных нейтронов.* Известны две реакции, при которых захват медленных нейтронов приводит к испусканию  $\alpha$ -частицы:



Для практики особый интерес представляет вторая реакция, так как сечение в этом случае велико и меняется обратно пропорционально скорости вплоть до очень больших значений энергии нейтронов. Изучение этой реакции является поэтому удобным методом измерения потока нейтронов при различных условиях. На фиг. 65 показано изменение сечения бора при изменении энергии нейтрона от 0,01 до 100 эв (по данным Рейнвотера и Хевенса [31]<sup>1</sup>), полученным по методу модулированного пучка).



Фиг. 65. Наблюдаемые значения полного сечения поглощения медленных нейтронов в боре.

Из графика следует, что это сечение обратно пропорционально скорости нейтрона.

<sup>1</sup> См. также [33].

Испускаемые при этих реакциях  $\alpha$ -частицы обладают совершенно достаточной энергией для прохождения через кулонов потенциальный барьер. Можно предположить поэтому, что парциальная ширина уровня  $\Gamma_\alpha$ —величина того же порядка, что и в случае нейтронов, обладающих такой же энергией.

Применяя одночленную формулу

$$Q_c = \frac{\pi}{2k^2} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right) \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_n}{(E - E_R)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_\alpha + \Gamma_n + \Gamma_r)^2} \quad (13.46)$$

можно записать

$$\Gamma_n = a \Gamma_\alpha \left( \frac{E}{E_\alpha} \right)^{1/2},$$

где  $a$ —величина порядка единицы. Радиационной шириной уровня  $\Gamma_r$  можно пренебречь, так как она очень мала по сравнению с  $\Gamma_\alpha$ . Это дает

$$Q_c = \frac{h^2}{16\pi M} \frac{a}{(EE_\alpha)^{1/2}} \frac{\Gamma_\alpha^2}{E_R^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\alpha^2} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right), \quad (13.47)$$

где  $M$ —масса нейтрона. Наблюдаемое значение  $Q_c$  для бора составляет  $6,41 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2$  ( $E$  измерено в электрон-вольтах), так что  $a \Gamma_\alpha^2 / (E_R^2 + \frac{1}{4} \Gamma_\alpha^2)$  оказывается равным 8,5. Это показывает, что  $\Gamma_\alpha$ , повидимому, того же порядка, что и  $E_R$ . Известно, что  $\Gamma_\alpha$ —величина порядка 100 000 эв, так что и  $E_R$ , вероятно, такого же порядка. Меньшее значение сечения, наблюдавшееся при реакции нейтронов с литием [38], повидимому, обусловлено большим эффективным значением резонансной энергии.

### § 3. Влияние молекулярных связей на рассеяние медленных нейтронов

1. Псевдопотенциал. До сих пор речь шла о столкновениях нейтронов со свободными ядрами. Полученные нами при этом результаты остаются справедливыми также и в случае химически связанных ядер при условии, что энергия связи мала по сравнению с кинетической энергией нейтронов. Если это условие не удовлетворяется, то наличие химической связи может привести к существенным изменениям результатов. В настоящем параграфе мы исследуем методы, с помощью которых может быть учтено влияние этих эффектов.

Вопрос об обмене энергией между поступательным движением атома и молекулярными колебаниями был рассмотрен в гл. XII, § 3. При этом было установлено, что если область взаимодействия между падающим атомом и данным атомом в молекуле, с которым

происходит столкновение, велика по сравнению с амплитудой колебания, то первое приближение Борна оказывается применимым. Однако в случае столкновений нейтронов со связанными ядрами положение дела является диаметрально противоположным. В этом случае область взаимодействия очень мала по сравнению с амплитудой колебания. Тем не менее, Ферми [78] показал, что приближение Борна может быть использовано и в этом случае, если фактическое взаимодействие между нейтроном массы  $m$  и ядром массы  $M$  заменить псевдопотенциалом

$$V_{ps} = -\frac{\hbar^2}{\pi} \frac{M+m}{Mm} a \delta(r), \quad (13.48)$$

где  $\mathbf{r}$ —вектор, характеризующий относительное положение нейтрона и ядра,  $4\pi a^2$ —предельное значение сечения рассеяния в случае свободного ядра при малых скоростях и  $\delta$ —обычная  $\delta$ -функция.

Прежде чем излагать метод псевдопотенциала, представляется интересным остановиться на некоторых соображениях общего характера. Пусть  $Q_0$  есть сечение рассеяния нейтрона свободным неподвижным ядром или связанным ядром в том случае, когда энергия нейтрона велика по сравнению с энергиями молекулярного колебания и вращения. В таком случае сечение рассеяния нейтронов с энергией, недостаточной даже для возбуждения молекулярного вращения, будет больше  $Q_0$  в  $(1 + m/M)^2 / (1 + m/M_1)^2$  раз, где  $M_1$ —масса молекулы. Таким образом, сечение рассеяния очень медленного нейтрона протоном, связанным с частицей бесконечно большой массы, в 4 раза больше, чем для свободного неподвижного протона.

При промежуточных условиях этот эффект оказывается более сложным. Если энергия нейтрона достаточна для возбуждения молекулярных колебаний, то задача может быть решена лишь квантовомеханическим путем с помощью приближения Борна. В большинстве практических случаев энергия нейтрона велика по сравнению с вращательной энергией молекулы, и если возбуждение молекулярных колебаний не может иметь места, задача может быть решена классически. Приведенная масса  $(mM_1)/(m+M_1)$ , входящая в упомянутый выше множитель, при этом должна быть заменена тензором массы, так что рассматриваемый эффект зависит от направления падения нейтрона по отношению к молекуле. Особый интерес представляют столкновения нейтронов с молекулярным водородом, а также, в несколько меньшей степени, с дейтерием, поскольку вращательная энергия в этих случаях сравнима с кинетической энергией нейтронов при температуре жидкого воздуха.

Для полного анализа вопроса о рассеянии нейтронов молекулами и кристаллами необходимо также учесть интерференционные эффекты, зависимость сечения от спина ядра и, в некоторых

случаях, возможность захвата. Учет первых двух эффектов является особенно существенным в случае молекулярного водорода и дейтерия.

Мы исследуем прежде всего условия применимости метода псевдопотенциала Ферми, а затем опишем вкратце некоторые приложения этого метода.

*Определение псевдопотенциала*<sup>1)</sup>. Для определенности рассмотрим случай столкновения нейтрона со связанным протоном, находящимся под действием потенциала молекулярных сил. Волновое уравнение для такой системы может быть записано в форме

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} (\nabla_p^2 + \nabla_n^2) + E - V(\mathbf{r}_p) - U(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|) \right] \Psi = 0, \quad (13.49)$$

где  $M$  — масса нейтрона или протона,  $\mathbf{r}_p$  и  $\mathbf{r}_n$  — соответственно координаты нейтрона и протона,  $U$  — ядерное взаимодействие между ними, а  $V(\mathbf{r}_p)$  — потенциальная энергия протона, обусловленная молекулярной связью. Область ядерного взаимодействия  $U$  не только значительно меньше длины волны падающего нейтрона, но также много меньше амплитуды колебаний протона.

Мы будем искать решение уравнения (13.49) в обычной форме

$$\Psi = \sum F_s(\mathbf{r}_n) \psi_s(\mathbf{r}_p), \quad (13.50)$$

где

$$F_s \sim r_n^{-1} e^{ik_s r_n} f_s(\theta_n, \varphi_n), \quad F_0 \sim e^{ik_z n} + r_n^{-1} e^{ik_r n} f_0(\theta_n, \varphi_n). \quad (13.51)$$

Здесь  $\psi_s(\mathbf{r}_p)$  — колебательная волновая функция протона в поле  $V$  и соответствующая энергии  $E_s$ , так что

$$k_s^2 = \frac{2M(E - E_s)}{\hbar^2}.$$

Из уравнения (8.16) и формулы (6.30) следует, что

$$F_s = -\frac{2\pi M}{\hbar^2} \iint U(\mathbf{r}') \frac{\exp\{ik_s |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|\}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|} \Psi(\mathbf{r}'_p, \mathbf{r}'_n) \psi_s^*(\mathbf{r}'_p) d\tau'_p d\tau'_n, \quad (13.52)$$

где  $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$  обозначено через  $\mathbf{r}$ . Подстановка (13.52) в (13.50) дает точную формулу

$$\Psi = e^{ik_z n} \psi_0 - \frac{2\pi M}{\hbar^2} \sum_s \psi_s \iint U(\mathbf{r}') \frac{\exp\{ik_s |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|\}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|} \times \\ \times \Psi(\mathbf{r}'_p, \mathbf{r}'_n) \psi_s^*(\mathbf{r}'_p) d\tau'_p d\tau'_n. \quad (13.53)$$

Мы воспользуемся теперь возможностью выбрать область  $R$  таким образом, чтобы  $U(\mathbf{r}')$  было относительно мало при  $r' \approx R$  и велико по сравнению с энергией молекулярных колебаний при  $r' < R$ .

<sup>1)</sup> Излагаемый здесь метод более подробно рассмотрен Брейтом [79].



Переходя от переменных  $\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_n$  к переменным  $\mathbf{r}_p, \mathbf{r}$ , мы можем представить функцию  $\Psi$  в следующей форме:

$$\Psi = \sum \psi_s^*(\mathbf{r}_p) \chi_s(\mathbf{r}),$$

где

$$\left[ \frac{\hbar^2}{4\pi^2 M} \nabla^2 - U + E - E_s \right] \chi_s = - \frac{\hbar^2}{2\pi M} \sum_t \nabla_{st} \cdot \nabla \chi_t;$$

$$\nabla_{st} = \int \psi_s^* \nabla_p \psi_t d\tau_p. \quad (13.54)$$

Внутри области  $R$  разностью  $E - E_s$  можно пренебречь по сравнению с  $U$ . Точно также можно пренебречь и суммой, стоящей в правой части полученного нами уравнения, так как в области от 0 до  $R$  изменение волновых функций протонов  $\psi_s, \psi_t$  незначительно. Поэтому функция  $\chi_s$  может быть выбрана в качестве собственного решения  $\chi$  уравнения

$$\left[ \frac{\hbar^2}{4\pi^2 M} \nabla^2 - U \right] \chi = 0 \quad (13.55)$$

при всех значениях  $s$ , так что внутри области  $R$  решение  $\Psi$  может быть записано в виде

$$\Psi = f(\mathbf{r}_p) \chi(\mathbf{r}). \quad (13.56)$$

Подстановка (13.56) в (13.53) дает

$$\Psi = e^{ik_z n} \psi_0 - \frac{2\pi M}{\hbar^2} \sum_s \psi_s \int f(\mathbf{r}'_p) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_p, \mathbf{r}_p) \psi_s^*(\mathbf{r}'_p) d\tau'_p, \quad (13.57)$$

где

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_p, \mathbf{r}_p) = \int \frac{\exp\{ik_s |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|\}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|} U(\mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (13.58)$$

В пределах области  $R$   $|\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}_p| < R$ , так что

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_p, \mathbf{r}_p) \approx \frac{\exp\{ik_s |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_p|\}}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_p|} I, \quad (13.59)$$

где

$$I = \int U(\mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (13.60)$$

Этот интеграл может быть вычислен с помощью уравнения (13.55) для  $\chi$ , что дает

$$I = - \frac{\hbar^2 a}{\pi M}, \quad (13.61)$$

где  $a$  — значение  $-r^2 \frac{d\chi}{dr}$  при  $r = R$ .

Таким образом,

$$\Psi = e^{ik_z n} \psi_0 + 2a \sum \psi_s(\mathbf{r}_p) \int \psi_s^*(\mathbf{r}'_p) f(\mathbf{r}'_p) \frac{\exp\{ik_s |\mathbf{r}'_p - \mathbf{r}_n|\}}{|\mathbf{r}'_p - \mathbf{r}_n|} d\tau'_p, \quad (13.62)$$

так что в этом приближении

$$\left[ \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} (\nabla_p^2 + \nabla_n^2) + E - V(\mathbf{r}_p) \right] \Psi = -\frac{a\hbar^2}{\pi M} f(\mathbf{r}_p) \delta(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n). \quad (13.63)$$

Теперь остается лишь найти соответствующее приближение для  $f(\mathbf{r}_p)$ . В связи с этим прежде всего отметим, что, пренебрегая  $a^2$  и исключая из рассмотрения очень малые значения  $r$ , можно положить

$$\chi \approx \left( 1 + \frac{a}{r} \right) \quad (r < R). \quad (13.64)$$

Подставляя функцию

$$\Psi = \chi(r) f(\mathbf{r}_p) = \left( 1 + \frac{a}{r} \right) f(\mathbf{r}_p) \quad (13.65)$$

в левую часть выражения (13.62) и записывая

$$\frac{f(\mathbf{r}_p)}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|} = \sum \psi_s(\mathbf{r}_p) \int \frac{f(\mathbf{r}'_p) \psi_s^*(\mathbf{r}'_p) d\tau'_p}{|\mathbf{r}'_p - \mathbf{r}'_n|}, \quad (13.66)$$

получаем

$$f(\mathbf{r}_p) = e^{ikzn} \psi_0(\mathbf{r}_p) + 0(a). \quad (13.67)$$

Уравнение (13.63) при определении функции  $f(\mathbf{r}_p)$  в форме (13.67) имеет точно такой же вид, как и уравнение, которое получилось бы, если бы взаимодействие нейтрона с протоном мы охарактеризовали потенциалом

$$V_{ps} = -\frac{a\hbar^2}{\pi M} \delta(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n) \quad (13.68)$$

и применили приближение Борна, заменив  $\Psi$  на  $V_{ps} \psi_0(\mathbf{r}_p) e^{ikzn}$ .

Таким путем мы получаем решение, представляющее собой первый член ряда, расположенного по степеням  $a/d$ , где  $d$  — амплитуда молекулярных колебаний.

*Учет спиновой связи в псевдопотенциале.* Во многих случаях амплитуда  $a$ , входящая в выражение для псевдопотенциала, зависит от суммарного спина нейтрона и рассеивающего ядра. В этом случае необходимо различать два значения амплитуды:

$a_{s+\frac{1}{2}}$ ,  $a_{s-\frac{1}{2}}$ , соответствующие двум значениям суммарного спина  $s \pm \frac{1}{2}$ , где  $s$  — спиновое квантовое число ядра. Псевдопотенциал может быть при этом записан в виде

$$-\frac{\hbar^2}{\pi M} \left[ \frac{1}{2} a_{s+\frac{1}{2}} (1 + \rho) + \frac{1}{2} a_{s-\frac{1}{2}} (1 - \rho) \right] \delta(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n), \quad (13.69)$$

где  $\rho$  — оператор, собственные значения которого равны соответственно  $\pm 1$ , когда спин системы равен  $s \pm \frac{1}{2}$ . Если  $\sigma$  — спино-

вый оператор для нейтрона и  $s$  — для ядра, то

$$\rho = \frac{1}{2s+1} \left[ 1 + \frac{2\sigma \cdot s}{2s+1} \right]. \quad (13.60)$$

**2. Приложения метода псевдопотенциала.** Столкновения с изотропным вибратором. Для того чтобы получить общие представления о том, каким образом полное сечение столкновений и скорость потери энергии изменяются с изменением энергии нейтрона при переходе от случая очень медленных нейтронов к тому случаю, когда протон может считаться свободным, удобно исследовать простейший случай протона, изотропно связанного с бесконечно тяжелым атомом.

Дифференциальное сечение  $I_{0s}(\theta)$  для столкновения, при котором протон возбуждается из своего основного состояния в  $s$ -е колебательное состояние, определяется формулой (8.31) при замене  $V(r, r_a, r_b)$  псевдопотенциалом (13.48). Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{0s}(\theta) &= \\ &= \frac{k_s}{k} \left| 2a \int \psi_0(r_p) \delta(r_p - r_n) \exp[i(kn_0 - k_s n_s) \cdot r_n] \psi_s^*(r_p) d\tau_p d\tau_n \right|^2 = \\ &= (2a)^2 \frac{k_s}{k} \left| \int \psi_0(r_p) e^{iKn \cdot r_p} \psi_s^*(r_p) d\tau_p \right|^2, \end{aligned} \quad (13.71)$$

где  $k, k_s$  — начальное и конечное значения волновых чисел нейтрона,  $\psi_0, \psi_s$  — начальная и конечная колебательные волновые функции протона,

$$kn_0 - k_s n_s = Kn$$

и

$$K^2 = k^2 + k_s^2 - 2kk_s \cos \theta. \quad (13.72)$$

В предельном случае очень малых энергий нейтронов возможны только упругие столкновения и  $K \rightarrow 0$ , что дает для сечения

$$\int I_{00}(\theta) d\omega = 16\pi a^2 = 4Q_0, \quad (13.73)$$

где  $Q_0$  — сечение столкновения со свободным неподвижным протоном.

В случае изотропного осциллятора массы  $m$ , обладающего основной частотой  $\nu$ , имеем

$$\psi_n = \varphi_{s_1}(x) \varphi_{s_2}(y) \varphi_{s_3}(z), \quad (13.74)$$

где  $s_1 + s_2 + s_3 = s$ , а  $\varphi$  — обычные волновые функции гармонического осциллятора:

$$\varphi_s(x) = \left( \frac{\alpha^2}{\pi} \right)^{1/4} (s!)^{-1/2} 2^{-1/2} s e^{1/2 \xi^2} \frac{d^s}{d\xi^s} (e^{-\xi^2}), \quad (13.75)$$

где  $\xi = (2\pi\nu m / \hbar)^{1/2} x = \alpha x$ .

Подстановка в (13.71) дает

$$I_{0s}(\theta) d\omega = 4a^2 \frac{k_z}{k} e^{-q^2} \sum \frac{q_x^{s_1} q_y^{s_2} q_z^{s_3}}{s_1! s_2! s_3!} d\omega, \quad (13.76)$$

где  $q = K [\hbar / (4\pi m\nu)]^{1/2}$ , а суммирование производится по всем положительным целым значениям  $s_1, s_2, s_3$ , для которых  $s_1 + s_2 + s_3 = s$ . Выполнив суммирование, получаем:

$$I_{0s}(\theta) d\omega = 4a^2 \frac{k_z}{k} \frac{q^{2s} e^{-q^2}}{s!} d\omega. \quad (13.77)$$

Сечение для столкновения определяется теперь выражением вида

$$\begin{aligned} Q_{0s} &= 2\pi \int_0^\pi I_{0s}(\theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{4\pi^2 m\nu}{\hbar k k_y} \int_{q_{\text{мин.}}}^{q_{\text{макс.}}} I_{0s} dq^2 = \\ &= \frac{4\pi a^2}{s} [f(q_{\text{мин.}}^2) - f(q_{\text{макс.}}^2)], \end{aligned} \quad (13.78)$$

где

$$f(x) = e^{-x} \left[ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^s}{s!} \right], \quad (13.79)$$

$\varepsilon = E/h\nu$ , а  $E$  — энергия падающего нейтрона. Величины  $q_{\text{мин.}}$  и  $q_{\text{макс.}}$  могут быть записаны в форме

$$q_{\text{мин.}} = \varepsilon^{1/2} - (\varepsilon - s)^{1/2}, \quad q_{\text{макс.}} = \varepsilon^{1/2} + (\varepsilon - s)^{1/2}. \quad (13.80)$$

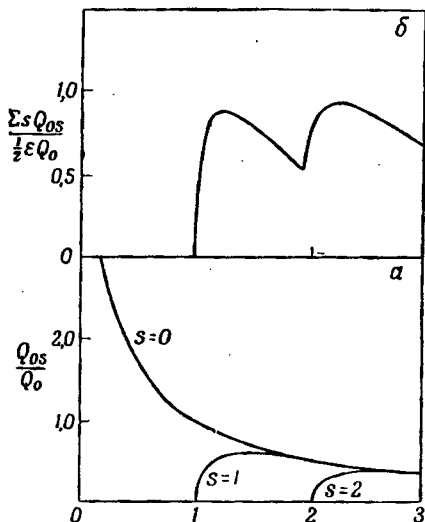
При больших значениях  $E$  величина  $q_{\text{мин.}}$  равна  $0(1/E)$ , а  $q_{\text{макс.}}$  равна  $0(E^{1/2})$ , так что для всех значений  $s$ , при которых  $sh\nu < E$ ,  $f(q_{\text{макс.}})$  ничтожно мало, а  $f(q_{\text{мин.}}) \approx 1$ . Сечение не зависит, таким образом, от  $s$  и приближенно равно  $Q_0/s_0$ , где  $s_0 h\nu \approx E$ . Поскольку имеется примерно  $s_0$  уровней, которые могут быть возбуждены, полное сечение оказывается равным  $Q_0$ . Именно этого и следовало ожидать в случае столкновений со свободным протоном, поскольку равновероятны любые потери энергии, вплоть до полной, и полное сечение равно  $Q_0$ .

Фиг. 66 иллюстрирует зависимость сечений от энергии для промежуточных значений  $\varepsilon$  от 0 до 3. Влияние молекулярной связи на потери энергии на этой фигуре иллюстрируется кривой, характеризующей отношение фактической потери энергии к потере энергии, которая в среднем имела бы место при столкновениях со свободным протоном.

Более подробные расчеты этих эффектов, учитывающие асимметрию связей и т. п., были произведены Арли [80], Бете [23],

а также Заксом и Теллером [81]. Последние авторы исследовали важный практический случай, упомянутый выше, когда энергия нейтрона недостаточна для возбуждения колебаний, но тем не менее достаточно велика по сравнению с квантом вращательной энергии.

Детальное сопоставление результатов теории и опыта пока еще невозможно, за исключением случая столкновений с молекулярным водородом (см. ниже). Качественно общие заключения теории хорошо подтверждаются, например, опытами Каролла [82]. В этой работе были измерены сечения (на один протон) для нейтронов, обладающих примерно тепловыми скоростями, рассеянных парами различных парафинов при комнатной температуре; при этом было обнаружено плавное медленное возрастание сечения при переходе от метана  $\text{CH}_4$  к бутану  $\text{C}_4\text{H}_{10}$ . Если бы имели место только упругие столкновения, то сечение должно было бы возрастать пропорционально квадрату приведенной массы. В действительности оно возрастает значительно медленнее; следует, однако, помнить о том, что может иметь место и возбуждение вращательных состояний, в связи с чем эффективная приведенная масса должна зависеть также и от вращательной массы.



Фиг. 66. Влияние химической связи на рассеяние и потери энергии нейтронами при столкновениях с протонами.

$a$ —зависимость сечения  $Q_{0s}$  для столкновений, при которых возбуждается  $s$  колебательных квантов  $h\nu$ , от отношения  $\varepsilon$  энергии нейтрона к  $h\nu$ ; по оси ординат отложено отношение  $Q_{0s}$  к  $Q_0$  ( $Q_0$ —сечение рассеяния свободными протонами);  $b$ —эффективные сечения  $\sum_s sh\nu Q_{0s}$  для потери энергии;

по оси ординат отложено отношение величины  $\sum_s sh\nu Q_{0s}$  к величине  $\frac{1}{2} sh\nu Q_0$ —сечения рассеяния свободными неподвижными протонами.

*дородом и дейтерием.* Изучение столкновений такого рода представляет особый интерес. Простота строения этих молекул дает возможность детально исследовать роль интерференционных явлений, а также влияние молекулярной связи на рассеяние. Кванты вращательной энергии сравнимы в этом случае с энергией нейтронов при комнатной температуре, а взаимодействие нейтрона с протоном зависит от спина; в связи с этим оказывается возможным ис-

*Столкновения медленных нейтронов с молекулярным во-*

следовать. раздельно рассеяние молекулами с параллельными и антипараллельными ядерными спинами.

Путем сопоставления теоретических и экспериментальных значений сечений оказалось возможным выяснить, является ли  $^1S$ -состояние дейтрона реальным или же виртуальным. Весьма возможно также, что этот метод окажется чувствительным методом определения дальности действия ядерных сил.

Вращательные состояния (характеризуемые квантовым числом  $J$ ) основного вращательного уровня  $H_2$  подразделяются на две некомбинирующие группы состояний с противоположной симметрией. В случае *para*-водорода ядерные спины антипараллельны и вращательные состояния симметричны ( $J=0, 2, \dots$ ), в то время как в случае *ortho*-водорода спины параллельны и вращательные состояния антисимметричны ( $J=1, 3, \dots$ ). Расстояние между низшими состояниями этих двух групп уровней равно  $0,0147$  эв. Скорость, с которой молекулы *ortho*-водорода могут переходить в состояние *para*-водорода, столь мала, что при низких температурах оказывается технически возможным получить квазиравновесное состояние, соответствующее наимизшим состояниям обеих групп. При этом можно также изменять относительное содержание *ortho*- и *para*-водорода и таким путем определить раздельно роль каждой компоненты.

Благодаря зависимости взаимодействия между нейтроном и протоном от спина столкновение с нейтроном может привести к переходу между *ortho*- и *para*-состояниями. Если оба сорта молекул находятся в своих наимизших состояниях и энергия нейтрона меньше  $0,0220$  эв, то столкновение с нейтроном не может перевести молекулу *para*-водорода в основное *ortho*-состояние. В этом случае могут иметь место лишь либо упругие, либо сверхупругие столкновения, при которых *ortho*-молекулы переходят в *para*-состояние, отдавая избыток своей энергии нейтрону.

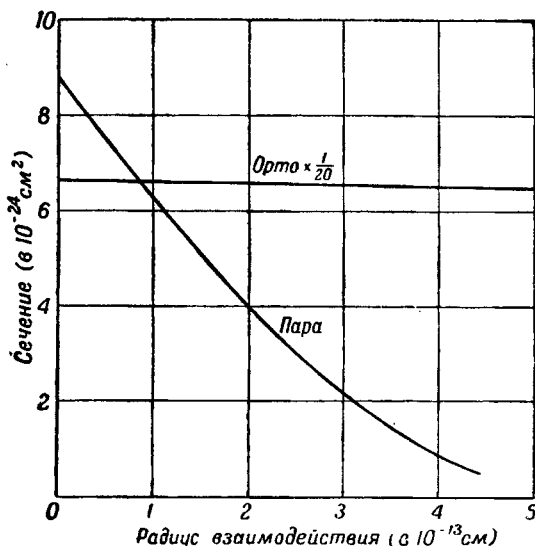
При оценке величины сечений взаимодействие между нейтроном и протоном можно представить соответствующим псевдопотенциалом и воспользоваться при этом приближением Борна. В том случае, когда  $s=1/2$ , взаимодействие между нейтроном и протоном, находящимся в молекуле, может быть записано в виде

$$V = \frac{\hbar^2}{4\pi m} [a_1(3 + \sigma_n \cdot \sigma_p) + a_0(1 - \sigma_n \cdot \sigma_p)] \delta(r_n - r_p), \quad (13.81)$$

где  $m$ —масса нейтрона или протона,  $\sigma_n$  и  $\sigma_p$ —соответственно спиновые операторы протона и нейтрона. Взаимодействие нейтрона с молекулой будет характеризоваться суммой двух таких членов для двух протонов. Оно может быть подразделено на две части—симметричную и антисимметричную по отношению к спинам протонов. Первая часть соответствует столкновениям, при которых

вращательная симметрия остается неизменной, тогда как вторая отвечает переходам от одной системы уровней к другой.

В дальнейшем расчет следует стандартным правилам и основан на использовании приближения Борна и соответствующем выборе вращательных волновых функций. Впервые подробный расчет такого рода был произведен Швингером и Теллером [83], позднее



Фиг. 67. Зависимость сечения рассеяния нейтронов пара- и орто-водородом от радиуса взаимодействия нейтрон—протон в предположении, что потенциал взаимодействия описывается сферической ямой.

Температура  $T$  газа принята равной  $20^\circ$ , энергия нейтрона — величине  $kT$ .

его осуществили с большей точностью Хамермеш и Швингер [84]. Легко показать, что сечения  $Q(0 \rightarrow 0)$ ,  $Q(1 \rightarrow 1)$  и  $Q(1 \rightarrow 0)$ , отвечающие соответственно упругим столкновениям с пара- и орто-молекулами в их основных состояниях и сверхупругим столкновениям с орто-молекулой, совершенно различным образом зависят от амплитуд  $a_1$  и  $a_0$ . Они содержат соответственно множители  $(3a_1 + a_0)^2$ ,  $(3a_1 + a_0)^2 + 2(a_1 - a_0)^2$  и  $(a_1 - a_0)^2$ . В § 1 было указано, что  $a_0$  значительно больше  $a_1$ , так что  $3a_1$  и  $a_0$  сравнимы по величине. Таким образом, сечение пара-водорода должно в очень сильной степени зависеть от совпадения или противоположности знаков  $a_1$  и  $a_0$ , становясь малым в том случае, когда знаки  $a_1$  и  $a_0$  противоположны, т. е. когда  $^1S$ -состояние дейтрона виртуально. Далее, если знаки  $a_1$  и  $a_0$  противоположны, как это и имеет место в действительности, то множитель  $3a_1 + a_0$  должен

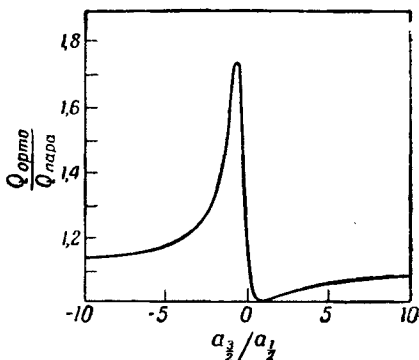
чрезвычайно сильно зависит от величины  $a_1$ , т. е. от радиуса действия ядерных сил. С другой стороны, сечение орто-водорода не должно зависеть существенным образом от радиуса действия ядерных сил. Фиг. 67 иллюстрирует эти результаты.

Измерения относительных значений сечений пара- и орто-водорода были произведены впервые для жидкого водорода; они ясно показали, что сечение пара-водорода значительно меньше сечения орто-водорода [85]. Это подтвердило предположение о виртуальном характере  $^1S$ -уровня дейтрона. В настоящее время мы еще не располагаем достаточно надежными данными, чтобы судить о радиусе взаимодействия в  $^3S$ -состоянии<sup>1)</sup>.

Аналогичные вычисления могут быть произведены также и для  $D_2$  [87]; они представляют, однако, меньший интерес. Фиг. 68 иллюстрирует зависимость сечений  $D_2$  для отношения орто- и пара-состояний в случае столкновений с нейтронами при температуре  $20^\circ K$  от отношения  $a_{3/2}/a_{1/2}$  амплитуд для квадрупольного и дипольного рассеяния нейтронов дейтронами. Даже в том случае, когда опыты проводятся с необходимой точностью, отношение между амплитудами не может быть определено однозначно; однако совпадение или противоположность знаков амплитуд может быть установлена.

*Интерференционные эффекты. Знак амплитуды рассеяния.* Уже при анализе вопроса о рассеянии нейтронов в молекулярном водороде ясно, что на интерференционные эффекты, связанные с когерентным рассеянием нейтронов ядрами, должна оказывать существенное влияние зависимость ядерных сил от спина, а также знак амплитуды рассеяния  $a$ .

Возвращаясь к псевдопотенциалу (13.69), легко убедиться в том, что, в то время как полное рассеяние зависит от



Фиг. 68. Отношение  $Q_{орто}/Q_{пара}$  сечений рассеяния нейтронов орто- и пара-дейтерием как функция отношения  $a_{3/2}/a_{1/2}$  амплитуд квадрупольного и дипольного рассеяния нейтронов дейтронами.

Температура газа и энергия нейтрона принята такой, как в случае фиг. 67.

$$\left[ (s+1) a_{s+\frac{1}{2}}^2 + s a_{s-\frac{1}{2}}^2 \right] (2s+1)^{-1}, \quad (13.82)$$

<sup>1)</sup> См., однако, [86].



интерференционные эффекты определяются выражением вида

$$\left[ (s+1) a_{s+\frac{1}{2}} + s a_{s-\frac{1}{2}} \right]^2 (2s+1)^{-1} \quad (13.83)$$

и в результате взаимной компенсации могут стать ничтожно малыми.

Ферми и Маршалл [88] провели ряд опытов для определения относительных знаков амплитуд рассеяния или «длин рассеяния» для различных ядер, используя при этом некоторые интерференционные явления. При брегговском рассеянии медленных нейтронов кристаллами, содержащими по крайней мере два сорта атомов, относительная интенсивность рассеяния различного порядка и от различных кристаллографических плоскостей зависит от соотношения между фазами волн, рассеянных различными атомами, и, следовательно, от относительных знаков «длин рассеяния». Изучая такого рода эффекты в случае гидридов, можно определить дальность взаимодействия нейтрона с протоном в  $^3S$ -состоянии [89].

Аналогичным образом, сечение для рассеяния молекулами нейтронов, длины волн которых порядка атомных рассеяний или больше, зависит от относительного знака длин рассеяния, отвечающих каждому из ядер. Если предположить, что масса нейтрона мала по сравнению с массами рассматриваемых атомов, то эти эффекты могут трактоваться таким же путем, как и отклонение рентгеновых лучей молекулами.

Третий метод основан на определении угла полного внутреннего отражения нейтронов от веществ, обладающих положительными значениями длин рассеяния (тот же знак, что и в случае  $^3S$ -рассеяния нейтронов протонами, при котором изменение фазы в результате рассеяния равно  $\pi$ ). Для таких веществ коэффициент преломления меньше единицы и определяется выражением

$$n = \frac{1 - \lambda^2 N a}{2\pi},$$

где  $\lambda$  — длина волны, а  $N$  — число атомов в  $1 \text{ см}^3$ .

Установлено, что большинство ядер обладает положительным значением длины рассеяния, исключение представляет водород (для  $^1S$ -рассеяния) и один или несколько изотопов лития и марганца.

Вопрос о рассеянии медленных нейтронов кристаллами был подробно исследован рядом авторов [90]. Техника этих исследований аналогична той, которая используется при соответствующих опытах с рентгеновыми лучами, и мы не будем поэтому подробно на ней останавливаться. Интересно отметить, однако, что при исследовании этих вопросов метод псевдопотенциала может быть распространен также и на случай поглощения нейтронов. При этом длину рассеяния  $a$  следует трактовать как комплексную

величину. Если  $Q_s$  и  $Q_a$ —соответственно сечения для рассеяния и поглощения, то

$$-a = \pm \left[ \frac{Q_s}{4\pi} - \left( \frac{kQ_a}{4\pi} \right)^2 \right]^{1/2} + i \frac{kQ_a}{4\pi}, \quad (13.84)$$

где  $k$ —волновое число нейтрона<sup>1</sup>).

#### § 4. Магнитное рассеяние медленных нейтронов [91]

Рассмотрим теперь эффекты, обусловленные взаимодействием между магнитным моментом нейтрона и спинами атомных электронов. Исследование этих эффектов имеет существенное значение, так как с ними связана возможность получения частично поляризованных пучков нейтронов. Используя эти пучки и радиочастотную технику, оказалось возможным с большой точностью определить магнитный момент нейтрона [92]. Возможно также, что изучение рассеяния нейтронов ферромагнитными материалами позволит получить полезные сведения о внутреннем строении последних.

Рассеяние нейтронов атомами с учетом магнитных эффектов может быть рассмотрено в приближении Борна, если к соответствующему псевдопотенциалу добавить член, характеризующий магнитное взаимодействие.

Энергия взаимодействия электрона, обладающего координатой  $\mathbf{r}$ , с магнитным полем, характеризуемым вектор-потенциалом  $\mathbf{A}$ , равна  $-e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , где  $\boldsymbol{\alpha}$ —векторная матрица, входящая в уравнение Дирака,  $c\boldsymbol{\alpha}$ —оператор, представляющий скорость электрона. Если вектор-потенциал обусловлен магнитным полем нейтрона с координатой  $\mathbf{r}_n$ , имеем:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left[ \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \right) \times \mathbf{M}_n \right], \quad (13.85)$$

где  $\mathbf{M}_n$ —магнитный момент нейтрона: Магнитное взаимодействие с атомными электронами может быть, таким образом, записано в форме

$$\begin{aligned} V_{\text{магн.}} &= e \sum_l \boldsymbol{\alpha}_l \cdot \left[ \nabla_n \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n|} \right) \times \mathbf{M}_n \right] = \\ &= e \mathbf{M}_n \cdot \sum_l \left[ \boldsymbol{\alpha}_l \times \nabla_n \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n|} \right) \right] = \\ &= e \mu_n \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \sum_l \left[ \boldsymbol{\alpha}_l \times \nabla_n \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n|} \right) \right]; \end{aligned} \quad (13.86)$$

<sup>1</sup>) Этот результат следует из соотношения  $a = \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2ik} (e^{2i\eta} - 1) \right]$ ,

где фаза  $\eta$  предполагается комплексной и связана с  $Q_s$  и  $Q_a$ , так же как в формулах (8.6) и (8.7).

индекс  $l$  определяет здесь номер электрона. Момент нейтрона равен  $\mu_n \sigma_n$ , где  $\sigma_n$  — спиновый оператор, а  $\mu_n$  — величина момента.

В ферромагнитном веществе, намагниченном до насыщения, спины электронов, ответственных за ферромагнитные свойства, сильно связаны друг с другом и расположены параллельно направлению намагничивания. Медленные нейтроны не обладают энергией, достаточной для того, чтобы изменить направление спина какого-либо из этих электронов, так что рассеяние является в этом случае чисто упругим. Изменение амплитуды рассеяния, обусловленное  $V_{\text{маг}}$  в приближении Борна, определяется поэтому выражением вида

$$f_m(\theta, \varphi) = \frac{2\pi M e \mu_n}{h^2} \sum_{\text{спин}} \chi_n \sigma_n \chi_n^* \times \\ \times \sum_l \int \exp[ik(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{r}_n] P_l d\tau_n d\tau_l,$$

где

$$P_l = \Psi_A(\mathbf{r}_l) \left[ \nabla_n \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n|} \right) \times \boldsymbol{\alpha}_l \right] \Psi_A^*(\mathbf{r}_l); \quad (13.87)$$

$\chi_n$  является функцией спина нейтрона;  $\Psi_A$  — волновая функция атомных электронов, описывающая также их спиновые состояния; интегрирование по  $d\tau_l$  включает суммирование по спиновым координатам;  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{n}_1$  — единичные векторы, взятые в направлении падения и рассеяния;  $k$  — волновое число нейтрона;  $M$  — масса нейтрона.

Поскольку спин нейтрона остается неизменным, сумма  $\sum_{\text{спин}} \chi_n \sigma_n \chi_n^*$  может быть заменена единичным вектором  $\mathbf{s}_n$ , взятым в направлении спина нейтрона. В нерелятивистском приближении часть  $\boldsymbol{\alpha}_l$ , обусловленная электронным спином, такова, что [93]

$$\Psi_A(\mathbf{r}_l) \boldsymbol{\alpha}_l \Psi_A^*(\mathbf{r}_l) \approx \frac{\hbar}{mc} \text{rot}_l (\Psi_A \boldsymbol{\sigma}_l \Psi_A^*), \quad (13.88)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_l$  — спиновый оператор Паули для  $l$ -го электрона,  $m$  — масса электрона.

Спины электронов, ответственных за ферромагнитные свойства вещества, располагаются параллельно направлению намагничивания. Поскольку при столкновении направление спина не изменяется, суммирование по спиновым координатам каждого из этих электронов дает

$$\sum_{\text{спин}} \Psi_A \boldsymbol{\sigma}_l \Psi_A^* = \Psi_A \mathbf{s} \Psi_A^*, \quad (13.89)$$

где  $\mathbf{s}$  — единичный вектор в направлении намагничивания, а функции  $\psi_A$  зависят только от пространственных координат электронов. Остальные атомные электроны в среднем не изменяют величины суммы (13.89).

Поэтому, переходя от переменных  $\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_l$  к переменным  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_l$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_l$ , и суммируя по всем атомным электронам, получаем

$$f_m(\theta, \varphi) = \frac{Me}{m\hbar c} S \mu_n s_n \cdot \int e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{G} \right] d\tau,$$

где

$$\mathbf{G} = \left[ \mathbf{s} \times \int \nabla (|\psi_m|^2) e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_l} d\tau_l \right], \quad (13.90)$$

$S$  — квантовое число, определяющее суммарный спин всех электронов,  $|\psi_m|^2$  — плотность заряда электронов, ответственных за ферромагнитные свойства (повидимому,  $3d$ -электронов), выраженная через координату отдельного электрона  $\mathbf{r}_l$ . Мы учли здесь, что

$$k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_1) = 2k \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} = K\mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор.

Воспользовавшись для обеспечения сходимости теми же приемами, что в гл. VII, § 1, получаем

$$\int e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = \int \nabla (e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}) \frac{d\tau}{r} = iK\mathbf{n} \int e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \frac{d\tau}{r} = \frac{4\pi i}{K} \mathbf{n}, \quad (13.91)$$

аналогично

$$\int \nabla_l (|\psi_m|^2) e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_l} d\tau_l = iK\mathbf{n} \int |\psi_m|^2 e^{iK\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_l} d\tau_l = iK\mathbf{n}F. \quad (13.92)$$

Это дает

$$\begin{aligned} f_m(\theta, \varphi) &= \frac{2Me}{m\hbar c} S \mu_n F s_n \cdot [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{s}]] = \\ &= \frac{2Me}{m\hbar c} S \mu_n F \{ (\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}) \} = \\ &= \frac{e^2}{mc^2} \gamma_n S F (\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (13.93)$$

где  $\gamma_n$  — магнитный момент нейтрона, выраженный в ядерных магнетонах, а  $\mathbf{q}$  — вектор  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})\mathbf{n} - \mathbf{s}$ .

Полная амплитуда рассеяния, включающая ядерное рассеяние, будет иметь вид

$$a + f_m(\theta, \varphi), \quad (13.94)$$

где  $a$  — длина рассеяния для данного ядра. При этом предполагается, что пучок нейтронов полностью поляризован и направления спинов параллельны  $s_n$ . Однако обычно нейтронный пучок неполяризован, и амплитуда рассеяния может быть определена выражением

$$a \pm f_m(\theta, \varphi), \quad (13.95)$$

учитывающим две возможные ориентации спина. Поскольку сечение рассеяния зависит от спина нейтрона, поляризационные эффекты могут быть наблюдаемы при рассеянии нейтронов в намагниченном железе.

Хотя величина  $f_m$  не пренебрежимо мала, ее вклад в величину полного сечения намного меньше величины  $4\pi a^2$ . Если мы положим, что  $e^2/mc^2 = 2,8 \cdot 10^{-13}$  см,  $\gamma = 1,9$ ,  $S = 5/2$  и среднее значение  $F$  порядка 0,1, то для нейтронов с тепловыми энергиями среднее значение  $f_m(\theta, \varphi)$  окажется равным  $1,3 \cdot 10^{-13}$  см, т. е. такого же порядка, что и значение  $a$  для железа, равное  $8 \cdot 10^{-13}$  см [88]. Сечение рассеяния может быть поэтому определено приближенно, как

$$Q_0 \pm p,$$

где

$$Q_0 = 4\pi a^2, \quad p = \frac{2e^2}{mc^2} \gamma_n S a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F s_n \cdot \mathbf{q} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (13.96)$$

Множитель  $F$  здесь в точности аналогичен атомному фактору рассеяния, рассмотренному нами в гл. VI, § 1, за исключением того, что он определяется только электронами, ответственными за ферромагнитные свойства вещества (повидимому,  $3d$ -электронами).

Наличие члена  $p$  может быть подтверждено экспериментально при исследовании прохождения фокусированного пучка нейтронов интенсивности  $I_0$  через железо. В том случае, когда железо ненамагничено, интенсивность пучка  $I$  после прохождения через слой толщины  $l$  будет определяться выражением вида

$$I = I_0 e^{-NlQ_0}, \quad (13.97)$$

где  $N$  — число атомов в  $1 \text{ см}^3$ . Если теперь намагнитить железо до насыщения, то интенсивность прошедшего пучка будет равна

$$I + \Delta I = \frac{1}{2} I_0 \{ \exp[-Nl(Q_0 + p)] + \exp[-Nl(Q_0 - p)] \}. \quad (13.98)$$

Относительное увеличение интенсивности, таким образом, равно

$$\frac{\Delta I}{I} = \text{ch}(Nl p) - 1 \approx \frac{1}{2} N^2 p^2 l^2. \quad (13.99)$$

При этих геометрических условиях

$$p = \frac{2\pi e^2 \gamma_n}{mc^2} Sa \int_0^\pi F(\theta) (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta. \quad (13.100)$$

Этот результат справедлив только при наличии полного насыщения; небольшие отступления от этого условия приводят к значительному ослаблению эффекта. Последнее обусловлено деполаризацией нейтронов при неадиабатическом переходе от одного из доменов к следующему, обладающему несколько иным намагничением. Такой эффект был исследован Хальперном и Гольштейном [94], которые показали, что для его учета в выражение (13.99) для  $\Delta I/I$  необходимо ввести множитель  $f(\lambda/\varepsilon l)$ , где  $\lambda$  — величина, связанная с линейными размерами доменов,  $\varepsilon$  — процентное отклонение от полного насыщения и

$$f(x) = 2x^2 \left( e^{-1/x} + \frac{1}{x} - 1 \right). \quad (13.101)$$

Экспериментальное подтверждение существования таких эффектов было получено Блохом, Штаубом и их сотрудниками [95]<sup>1)</sup>. Точное определение абсолютного значения  $p$  является затруднительным, поскольку плотность распределения  $3d$ -электронов железа не известна с достаточной точностью. Экспериментальное значение лежит в интервале между  $2,2 \cdot 10^{-24}$  и  $2,3 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>. В магнитном поле в 10 000 гаусс отношение  $\Delta I/I$  должно быть порядка 27,5%. Это отвечает степени поляризации

$$\delta = \left| \frac{I^+ - I^-}{I^+ + I^-} \right|, \quad (13.102)$$

равной 60%; здесь  $I^+$  и  $I^-$  — значения интенсивности прошедших пучков в том случае, когда спины нейтронов соответственно параллельны и антипараллельны направлению намагничения.

Получение частично поляризованных пучков нейтронов имеет большое значение, так как оно представляет собой весьма существенный этап процесса точного измерения магнитного момента нейтрона [97].

Вопрос о магнитном рассеянии нейтронов ферромагнетиком является относительно простым, поскольку в этом случае можно ограничиться рассмотрением одного лишь упругого рассеяния. Другие возможности рассеяния были исследованы Хальперном и Джонсоном [98]<sup>2)</sup>, рассмотревшими также различные поляризационные явления, которые при этом могут возникнуть.

<sup>1)</sup> См. также [96].

<sup>2)</sup> См. также [99].

### § 5. Столкновения быстрых частиц со средними и тяжелыми ядрами

Поскольку расстояние между уравнениями возбужденного комплекса, образовавшегося путем захвата нуклона (дейтрона,  $\alpha$ -частицы или другого легкого ядра) средним или тяжелым ядром, по меньшей мере порядка  $10 \text{ \AA}$ , резонансные эффекты при столкновениях быстрых частиц с такими ядрами наблюдаются быть не могут. Может, однако, случиться, что состояние образовавшегося комплекса лежит в области перекрытия уровней. Это скажется на величине сечения, так как в этом случае каждый отдельный процесс будет представлять собой некоторое среднее для энергетического интервала, содержащего большое число уровней. Мы можем поэтому воспользоваться формулами, приведенными в гл. VIII, § 8.

Рассмотрим сперва столкновения средних и быстрых нейтронов (например, с энергией от  $1 \text{ кэВ}$  до  $10 \text{ МэВ}$ ), так как в этом случае на образование комплекса не влияют какие-либо туннельные эффекты. Если сечение для образования комплекса есть  $Q_n^c$ , то для процесса, при котором испускается частица  $P$ , сечение будет определяться формулой

$$Q^P = Q_n^c \frac{\Gamma_P}{\Gamma}, \quad (13.103)$$

где  $\Gamma = \sum \Gamma_P$ , а  $\Gamma_P$  — среднее значение парциальной ширины уровня, соответствующей испусканию частицы  $P$ . При этом учитывается также возможность  $\gamma$ -излучения (парциальная ширина  $\Gamma_\gamma$ ) и повторного испускания нейтрона с его первоначальной энергией (парциальная ширина  $\Gamma_n^{\text{упр}}$ ). Далее, если  $k$  — волновое число нейтрона, то

$$Q_n^c = \frac{2\pi^2 \Gamma_n^{\text{упр}}}{k^2 D} \quad (kR \ll 1), \quad (13.104a)$$

$$Q_n^c = \pi R^2 \quad (kR \gg 1), \quad (13.104b)$$

где  $D$  — расстояние между уровнями вблизи возбужденного уровня комплекса, а  $R$  — радиус ядра. При промежуточных значениях  $kR$  удобно представить  $Q_n^c$  в форме  $\pi R^2 \bar{\zeta}$ , где  $\bar{\zeta}$  — вероятность «прилипания».

Благодаря значительной высоте кулонова потенциального барьера испускание заряженных частиц комплексом обычно весьма мало вероятно, за исключением случая наиболее тяжелых ядер, например, ядер  $U_{235}$ , которые уже в своих основных состояниях неустойчивы по отношению к  $\alpha$ -распаду и делению. Исключая пока из рассмотрения такие случаи, можно записать

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n^{\text{упр}} + \Gamma_n^{\text{неупр}}, \quad (13.105)$$

где  $\Gamma_n^{\text{неупр.}}$  — доля полной ширины уровня, обусловленная испусканием нейтрона с энергией, меньшей исходной, т. е. обусловленная неупругим столкновением.

Если энергия нейтрона недостаточна для возбуждения низшего возбужденного состояния ядра ( $\approx 100\,000$  эв для тяжелых радиоактивных ядер), то  $\Gamma_n^{\text{неупр.}} = 0$ , и может иметь место только радиационный захват или упругое рассеяние. Из экспериментальных данных, рассмотренных в § 2, следует, что для ядер средней массы, повидимому, имеем

$$\Gamma_n^{\text{упр.}} \approx 1,4 E^{1/2} \cdot 10^{-3} \text{ эв}, \quad (13.106)$$

где  $E$  — энергия нейтрона в электрон-вольтах. Для комплексов, образовавшихся в результате захвата тепловых нейтронов,  $\Gamma$ , порядка 0,1 эв; эта величина, вероятно, не меняется существенным образом при изменении энергии нейтрона. Мы видим, таким образом, что если энергия нейтрона превышает 5000 эв, то сечение захвата становится меньше сечения упругого рассеяния. При таких энергиях применима формула (13.104а), так что, полагая (как и в § 2)  $D \approx 10$  эв, получаем

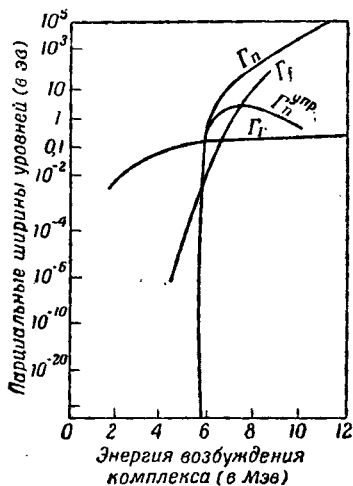
$$Qr \approx \frac{\hbar^2}{4mE} \frac{\Gamma}{D} \approx 0,8 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 \text{ при } E = 5 \text{ кэв.}$$

В тех случаях, когда энергия нейтрона достаточна для возбуждения, член  $\Gamma_n^{\text{неупр.}}$  приобретает существенную роль и начинает превышать  $\Gamma_n$ . Парциальная ширина уровня для испускания нейтрона, при котором остаточное ядро обладает энергией возбуждения  $U$  эв, будет сперва порядка  $1,4 \cdot 10^{-3} (E - U)^{1/2}$  эв. Число таких возбужденных состояний быстро возрастает с увеличением энергии, так что доля ширины уровня, обусловленная каждым таким состоянием, вскоре начинает превышать  $\Gamma_n^{\text{упр.}}$ . В том случае, когда может быть возбуждено большое число уровней, становятся применимыми статистические формулы, приведенные в гл. VIII, § 8. В этом случае  $\Gamma_n^{\text{неупр.}}$  порядка  $DN$ , где  $N$  — число возбужденных состояний, в которых ядро может остаться после испускания нейтрона, тогда как  $\Gamma_n^{\text{упр.}}$  порядка  $D$ . Относительная вероятность того, что ядро останется в данном возбужденном состоянии, пропорциональна плотности уровней в соответствующей области. Поэтому значительно более вероятно, что ядро останется в высоко возбужденном состоянии; при этом большее количество вылетевших нейтронов будет обладать малой энергией (см. гл. VIII, § 8). Типичный ход зависимости  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_n^{\text{упр.}}$  и  $\Gamma_n^{\text{неупр.}}$  от энергии возбуждения для тяжелых ядер показан на фиг. 69.



Эти общие заключения находятся в согласии с опытом, хотя для рассматриваемой области значений энергии мы еще не располагаем достаточно точными данными<sup>1)</sup>.

Переходя к рассмотрению эффектов, связанных с воздействием заряженных частиц, следует отметить, что приведенные выше общие соображения справедливы также и при определении относительных вероятностей различных процессов распада образовавшегося комплекса. Таким образом, столкновение с быстрой заряженной частицей скорее всего приведет к распаду ядра, сопровождающемуся испусканием нейтрона с малой энергией. Это справедливо даже в том случае, когда энергия возбуждения комплекса, образовавшегося путем захвата заряженной частицы, настолько велика, что может иметь место испускание одной или нескольких заряженных частиц с энергиями, достаточными для прохождения через барьер. Благодаря большой внутренней энергии дейтрона это часто может иметь место при захвате дейтрона с энергией в несколько *Мэв*. Таким образом, если  $B$  — высота барьера, а  $E_p$  — энергия, освобождающаяся при испускании заряженной частицы  $P$ , в результате которого остаточное ядро оказывается в своем основном состоянии, то уровни энергии последнего после вылета частицы  $P$  лежат в интервале  $(E_p - B)$  вблизи основного уровня. В случае испускания нейтронов этот интервал равен  $E_n$ .



Фиг. 69. Схематический график зависимости парциальных ширин уровней  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_f$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_n^{supr}$  от энергии возбуждения тяжелого составного ядра.

Поскольку величина  $E_n$  сравнима с  $E_p$ , она будет намного больше, чем  $(E_p - B)$ . Полная ширина уровня, соответствующего испусканию данной частицы, примерно пропорциональна числу возможных конечных состояний остаточного ядра, а это число возрастает экспоненциально по мере увеличения интервала энергии над основным уровнем (см. § 2). Отсюда ясно, что обычно наиболее существенным процессом будет процесс испускания нейтрона.

Среди заряженных частиц, обладающих достаточной энергией для преодоления потенциального барьера, наибольшая вероятность испускания будет отвечать тем частицам, для которых  $(E_p - B)$  имеет наибольшее значение. В случае отсутствия таких

<sup>1)</sup> См., однако, [400].

частиц, которые могли бы преодолеть потенциальный барьер, относительная вероятность испускания частицы определяется комбинированным влиянием проницаемости барьера и числа возможных конечных уровней. Поэтому вероятность испускания  $\alpha$ -частицы часто оказывается сравнимой с вероятностью испускания протона—меньшая проницаемость барьера компенсируется в этом случае большим числом возможных конечных состояний, обусловленным малостью внутренней энергии  $\alpha$ -частицы. С другой стороны, в случае дейтрона, в связи с его большой внутренней энергией, число конечных состояний оказывается настолько ограниченным, что испускание дейтрона из комплекса наблюдается очень редко.

Сечение  $Q_P^c$ , соответствующее образованию комплекса путем захвата заряженной частицы  $P$ , отличается от соответствующего сечения  $Q_n^c$ , отвечающего образованию комплекса при захвате нейтрона, главным образом вследствие различного влияния потенциального барьера. Если длина волны падающей частицы значительно больше, чем размеры ядра, то  $Q_P^c$  определяется формулой, аналогичной формуле (13.104а), но  $\Gamma_P^{\text{упр.}}$  отличается при этом от  $\Gamma_n^{\text{упр.}}$  множителем  $e^{-P}$ , представляющим собой вероятность проникновения через барьер частиц с нулевым моментом количества движения, а именно:

$$\Gamma_P^{\text{упр.}} \approx \Gamma_n^{\text{упр.}} e^{-P}. \quad (13.107)$$

В том случае, когда падающая частица не является простым нуклоном, в эту формулу следует ввести еще дополнительный множитель, величина которого меньше единицы. Этот множитель учитывает необходимость выполнения определенных ориентационных условий для образования комплекса. Однако этот эффект, повидимому, не играет существенной роли даже для  $\alpha$ -частиц.

Если длина волны падающей частицы меньше размеров ядра, то в соответствии с формулой (8.104б) имеем

$$Q_P^c = \frac{\pi}{k^2} \sum (2l+1) \zeta_l e^{-Pl}, \quad (13.108)$$

где  $e^{-Pl}$ —вероятность прохождения через барьер, а  $\zeta_l$ —вероятность прилипания для частиц, имеющих квантовое число, отвечающее моменту количества движения, равное  $l$ . Если  $\zeta_l$  можно положить равным единице для всех значений  $l$ , при которых  $e^{-Pl}$  достаточно велико, то вместо (13.108) получаем

$$Q_P^c = \frac{\pi l_c^2}{k^2}, \quad (13.109)$$

где

$$l_c^2 = \sum (2l+1) e^{-Pl}. \quad (13.110)$$

В любом случае  $l_c$  может быть вычислено с помощью формулы (3.36). Если вероятность прилипания значительно меньше единицы, то обычно достаточно положить

$$Q_p^c = \frac{\pi l_c^2}{k^2} \bar{\zeta}, \quad (13.111)$$

где  $\bar{\zeta}$ , если отвлечься от ориентационного множителя, практически такое же, что и для нейтронов с той же скоростью.

Распад тяжелых ядер под действием дейтронов представляет особый случай, так как в связи с исключительно низкой энергией связи дейтрон может распасться до того, как протон полностью проникнет через потенциальный барьер. В таком случае может иметь место захват нейтрона и испускание протона. Предположение о возможности такого процесса впервые было выдвинуто Оппенгеймером и Филлипсом [101]; в дальнейшем оно было рассмотрено рядом авторов [102]. Этот процесс, повидимому, не играет существенной роли для легких ядер, но является ответственным за относительно большое значение сечений для распада тяжелых ядер при бомбардировке их дейтронами.

## § 6. Деление ядер

Энергия связи ядра, рассчитанная на одну ядерную частицу, достигает максимального значения в случае ядер, масса которых близка к массе ядра никеля, а затем снова убывает по мере дальнейшего возрастания массового числа. Отсюда следует, что такое ядро, как ядро урана, является энергетически весьма неустойчивым по отношению к делению на два более легких ядра сравнимой массы. Вероятность такого деления ядра обычно очень мала в связи с большой величиной энергии активации той конфигурации, через которую эта система должна пройти для того, чтобы могло произойти деление. В случае ядра  $U_{235}$  захват медленного нейтрона приводит к образованию комплекса  $U_{236}$ , который уже обладает энергией возбуждения, превышающей энергию, необходимую для перехода через активированное состояние, — энергия связи нейтрона больше энергии активации. Поэтому имеется значительная вероятность того, что комплекс распадается таким путем, вместо того чтобы освободиться от избытка энергии путем  $\gamma$ -излучения или повторного испускания нейтрона. Для других ядер, встречающихся в естественных условиях в достаточном количестве, захват теплового нейтрона не приводит к образованию комплекса, обладающего энергией, превышающей энергию активированного состояния. Нейтроны с кинетической энергией порядка  $0,5 \text{ Мэв}$  или больше могут, однако, образовывать такие сверхактивированные комплексы при столкновении с некоторыми другими ядрами, в частности при столкновении с  $U_{238}$  и  $Th_{232}$ .

Явление деления ядер впервые было открыто в 1939 г. Ганом и Штрассманом [103], получившими при реакции медленных нейтронов с ураном продукт, обладающий химическими свойствами бария. Вскоре Мейтнер и Фриш [104] выдвинули предположение о механизме этой реакции; теория этого вопроса изложена подробно в работе Бора и Уилера [105], ставшей сейчас классической. Хотя экспериментальные данные относились только к естественному урану, Бор и Уилер, исходя из теоретических соображений, пришли к определенному заключению о том, какие именно изотопы являются ответственными за различные наблюдаемые эффекты. Поскольку развитые ими методы исследования являются превосходной иллюстрацией применения теории ядерных столкновений, мы остановимся здесь кратко на их рассмотрении.

Полученные экспериментальные результаты заключались в следующем.

а) Резонансный захват, сопровождающийся излучением<sup>1)</sup>, наблюдается в случае нейтронов с энергиями порядка 25 эв; при этом сечение, усредненное по резонансной области, равно  $1,2 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2$ .

б) Измеренное сечение захвата для этих нейтронов равно  $1,2 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2$ . Это сечение  $Q_g$  связано с сечением, отвечающим точному резонансу  $Q_{\text{рез.}}$ , соотношением вида [23]

$$Q_g = \frac{1}{2} Q_{\text{рез.}} f\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right), \quad (13.112)$$

где  $\Delta$  — доплерова ширина, а  $\Gamma$  — истинная ширина резонансного уровня. Функция  $f$  сводится к единице при  $\Gamma \gg \Delta$  и становится равной  $\frac{1}{2} \pi^{1/2} \Delta/\Gamma$  при  $\Delta \ll \Gamma$ . Мы имеем, таким образом:

$$\text{Максимум сечения} = 2,4 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2 \quad (\Delta \ll \Gamma),$$

$$\text{Максимум сечения} = 3,0 \cdot 10^{-21} \Delta/\Gamma \text{ см}^2 \quad (\Delta \gg \Gamma); \quad (13.113)$$

для урана  $\Delta = 0,12 \text{ эв}$ .

в) Для радиационного захвата тепловых нейтронов сечение равно  $1,2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ .

г) В резонансной области сечение распада меньше 0,1 сечения радиационного захвата.

д) Тепловые нейтроны вызывают деление с сечением в интервале между  $2 \cdot 10^{-24}$  и  $3 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ .

е) В случае медленных нейтронов сечение деления изменяется, как  $v^{-1}$  ( $v$  — скорость нейтрона), по крайней мере до энергий в несколько электрон-вольт.

<sup>1)</sup> Опытный факт заключается в наличии  $\beta$ -активности только для урана, в отличие от эффектов, вызываемых тепловыми и быстрыми нейтронами.

ж) Нейтроны с энергией 2—3 *Мэв* также вызывают деление, при этом сечение — величина порядка  $0,5 \cdot 10^{-24}$  *см*<sup>2</sup> и лишь незначительно изменяется в рассматриваемом энергетическом интервале.

**1. Резонансный радиационный захват.** Естественный уран представляет собой смесь трех изотопов:  $U_{238}$ ,  $U_{235}$  и  $U_{234}$ , встречающихся в соотношении 1 : 1/139 : 1/17000. Максимальное сечение  $\pi/k^2$  для захвата нейтрона с энергией 25 *эв* равно  $2,5 \cdot 10^{-20}$  *см*<sup>2</sup>. Из результата «б» следует, что захват, сопровождающийся излучением, может быть обусловлен только наиболее распространенным изотопом. Воспользовавшись теми же методами анализа, как и в § 2, можно показать, что парциальная нейтронная ширина уровня  $\Gamma_n$  равна  $\Gamma_r/40 \approx \Gamma/40$  и  $\Delta/40$  при  $\Gamma \gg \Delta$  и  $\ll \Delta$  соответственно. Поскольку  $\Delta = 0,12$  *эв*, отсюда следует, что  $\Gamma_n \geq 0,003$  *эв*. Анализ данных о захвате ядер средней массы показывает, что  $\Gamma_n$  должно быть порядка 0,01 *эв* (т. е.  $1,4 \cdot 10^{-3} \cdot 25^{1/2}$ ) при резонансной энергии в 25 *эв*. Поскольку в случае тяжелых ядер, например урана, эта величина должна быть меньше,  $\Gamma_n$  можно приближенно положить равным 0,003 *эв*. Величина  $\Gamma_r$  не может в таком случае превышать 0,12 *эв*; однако последнее значение, вероятно, не на много меньше, чем это следует из опытных данных, полученных для более легких ядер.

Определив значения  $\Gamma_n$  и  $\Gamma_r$ , можно найти сечение радиационного захвата тепловых нейтронов, если оно обуславливается только одним резонансным уровнем. В этом случае

$$Q_r (\text{теплов.}) = \frac{\pi}{k^2} \Gamma_n (\text{теплов.}) \frac{\Gamma_r}{E_R^2}. \quad (13.114)$$

Поскольку  $\Gamma_n$  пропорционально скорости нейтрона, можно вычислить  $\Gamma_n$  (теплов.); это дает

$$Q_r (\text{теплов.}) \approx 0,4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (13.115)$$

Из результата «в» следует, что это значение составляет примерно  $1/3$  наблюдаемого. Это значит, что сечение обуславливается не одним, а несколькими уровнями. Если учесть влияние уровней энергии, лежащих как выше, так и ниже тепловой энергии, то множитель 3 указывает на то, что расстояние между уровнями  $D$  комплекса  $U_{239}$  — величина того же порядка, что и наблюдаемая резонансная энергия (около 20 *эв*).

**2. Деление ядер под действием медленных нейтронов.** Переходя к вопросу о делении ядер под действием медленных нейтронов, легко убедиться в том, что это деление не может происходить за счет распространенного изотопа. Из результата «г»

следует, что в точке резонанса парциальная ширина уровня для деления меньше  $0,1 \Gamma_r$ . Поскольку  $\Gamma_f$  будет убывать по мере увеличения энергии нейтрона (см. ниже), из результата «в» следует, что сечение деления  $U_{238}$  под действием медленных нейтронов меньше  $1,2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ , т. е. в 20 с лишним раз меньше наблюдаемого сечения для естественного урана.

Сечение  $Q_f$  для деления под действием тепловых нейтронов должно поэтому лежать между  $3 \cdot 10^{-22}$  и  $4 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2$  и между  $3 \cdot 10^{-20}$  и  $4 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$  для  $U_{235}$  и  $U_{234}$  соответственно. Рассмотрим теперь две возможности: возбужденный комплекс лежит либо в области дискретных, либо в области перекрывающихся уровней.

В первом случае рассматриваемый эффект определяется в основном отдельным резонансным уровнем и

$$Q_f = \frac{\pi}{k^2} \left( 1 \pm \frac{1}{2s+1} \right) \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{(E - E_R)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (13.116)$$

где  $\Gamma_f$  — ширина уровня, соответствующего делению. Величина  $\Gamma_n$  должна быть примерно одинаковой для всех трех изотопов, так что для тепловых нейтронов ее снова можно положить равной  $10^{-4} \text{ эв}$ . Для того чтобы удовлетворялось условие «ж»,  $E_R$  или  $\frac{1}{2} \Gamma$ , или обе эти величины должны превышать несколько электрон-вольт. Подставляя численные значения и учитывая, что  $\Gamma > \Gamma_f$ , мы приходим к заключению, что если ответственным за эффект изотопом в данном случае является  $U_{234}$ , то как  $\Gamma$ , так и  $E_R$  должно быть значительно меньше  $1 \text{ эв}$ . [Если положить  $s=0$  и выбрать верхний знак в формуле (13.116), то  $\Gamma \leq \frac{4}{17} \text{ эв}$  и  $|E_R| < \frac{2}{17} \text{ эв}$ .] Эта возможность поэтому исключается.

Таких противоречий не возникает, если рассматриваемый эффект может быть приписан  $U_{235}$ . Делая различные предположения относительно спинов, мы получаем в этом случае: 1) при  $s \geq 3/2$   $\Gamma < 13 \text{ эв}$ ,  $|E_R| < 3 \text{ эв}$ ; 2) при  $s=1/2$  и нижнем знаке в формуле (13.116)  $\Gamma < 7 \text{ эв}$ ,  $|E_R| < 1,7 \text{ эв}$ ; 3) при  $s=1/2$  и верхнем знаке в формуле (13.116)  $\Gamma < 20 \text{ эв}$ ,  $|E_R| < 5 \text{ эв}$ .

Далее, поскольку либо  $|E_R|$ , либо  $\frac{1}{2} \Gamma$  должно быть величиной порядка  $1 \text{ эв}$  или больше, имеем

$$\Gamma_f > 10 \text{ эв}.$$

Как мы видим, при этом не возникает противоречий, за исключением, быть может, того случая, когда выполняется условие 2. С другой стороны,  $\Gamma_f$  должно быть величиной порядка расстояния между уровнями, которое, как это следует из данных о радиационном захвате для возбужденного комплекса, образовавшегося

из  $U_{238}$ , есть величина порядка 20 эв. В случае  $U_{235}$  следует ожидать такого же порядка величины  $\Gamma_f$ . Необходимо поэтому рассмотреть иную возможность — случай, когда возбужденный комплекс находится в области перекрывающихся уровней. В этом случае имеем

$$Q_f = \frac{2\pi^2}{k^2} \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (13.117)$$

Для  $U_{235}$  это условие удовлетворяется при  $D = 20$  эв, в случае  $U_{234}$   $D$  должно было бы иметь при этом недопустимо малое значение (0,4 эв).

Можно, таким образом, прийти к заключению, что деление под действием медленных нейтронов обуславливается изотопом  $U_{235}$ , из которого образуется комплекс, возбужденный до области перекрывания уровней. Возможность того, что процесс деления связан с относительным изолированным уровнем, не может быть, однако, полностью исключена из рассмотрения на основании перечисленных выше фактов. В любом случае ширина уровня  $\Gamma_f$ , соответствующая процессу деления, должна быть величиной по крайней мере порядка 10 эв.

**3. Теоретическая оценка ширины уровня, соответствующего делению.** В порядке проверки справедливости приведенных выше доводов интересно оценить величину  $\Gamma_f$ . Процесс деления связан с относительным движением двух тяжелых медленных ядерных осколков, так что в этом случае могут быть применены классические соотношения; в частности, может быть использован метод переходного состояния (гл. VIII, § 8). В результате получаем

$$\Gamma_f = \frac{D}{2\pi} N^*, \quad (13.118)$$

где  $N^*$  — число уровней в переходном состоянии, через которое должна пройти рассматриваемая система, чтобы произошло деление. Если предположить, что распределение уровней в переходном состоянии сходно с распределением уровней нормального ядра, то величина  $N^*$ , вероятно, будет порядка единицы в том случае, когда составное ядро, образовавшееся путем захвата медленного нейтрона, обладает энергией, превышающей на 50—10 кэв энергию, необходимую для перехода системы через промежуточное активированное состояние. Значение  $\Gamma_f$  — величина порядка 10 эв — является поэтому вполне разумным.

**4. Деление под действием быстрых нейтронов.** Остается теперь рассмотреть вопрос о делении под действием быстрых нейтронов. Этот процесс не может быть обусловлен каким-либо из редких изотопов. При рассматриваемых энергиях длина волны нейтрона мала по сравнению с радиусом ядра ( $9,5 \cdot 10^{-13}$  см для U). Сечение захвата не может поэтому заметно превышать

$\pi R^2$  (см. гл. VIII, § 1), в то время как если бы это сечение определялось даже изотопом  $U_{235}$ , оно должно было бы быть порядка  $7 \cdot 10^{-23}$  см<sup>2</sup> (см. выше), т. е. в 25 раз превышать максимальное значение.

Никаких трудностей не возникает, если приписать рассматриваемый эффект изотопу  $U_{238}$ . Так как мы наверняка имеем дело со случаем перекрытия уровней, то

$$Q_f \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_f/D}{\Gamma_f/D + \Gamma_n/D} = 2,8 \cdot 10^{-24} \frac{\Gamma_f/D}{\Gamma_f/D + \Gamma_n/D} \text{ см}^2. \quad (13.119)$$

Отношение  $\Gamma_n/D$  в среднем равно  $N_n$ —числу уровней ядра  $U_{238}$ , которые могут быть возбуждены быстрыми нейтронами. Оно будет быстро возрастать по мере увеличения энергии возбуждения комплекса  $U_{239}$ , т. е. по мере увеличения энергии нейтрона. Аналогичным образом  $\Gamma_f/D$  будет быстро возрастать при увеличении энергии нейтрона от нулевого значения, отвечающего тому случаю, когда энергия возбуждения комплекса  $U_{239}$  меньше энергии активации, необходимой для деления. Поскольку основной уровень, от которого отсчитывается  $N^*$ , лежит выше уровня, отвечающего  $N_n$ ,  $\Gamma_n$  обычно будет больше  $\Gamma_f$ , хотя при изменении энергии нейтрона оно будет изменяться в основном таким же образом, как и в том случае, когда энергия возбуждения значительно превышает энергию активации для деления. Это согласуется с результатом «ж», согласно которому  $\Gamma_f/\Gamma_n \approx 1/5$ . Опытные данные, упомянутые в условии «ж», показывают, что энергия активации для деления  $U_{238}$  меньше чем на 2 Мэв превышает энергию связи нейтрона.

Фиг. 69 иллюстрирует зависимость парциальных значений ширины уровней  $\Gamma_f$ ,  $\Gamma_n^{\text{нп}}$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_r$  от энергии возбуждения составного ядра, найденную на основании рассмотренных выше явлений захвата нейтронов.

Все эти заключения были подтверждены дальнейшими опытами, хотя численные значения различных величин претерпели при этом некоторые изменения. Бор и Уилер не только сумели объяснить экспериментальные данные описанным выше путем, но показали также, что если воспользоваться полуэмпирическими формулами для определения энергии ядер, то энергия активации для деления  $U_{238}$  должна быть меньше, а для деления  $U_{239}$ —больше энергии связи нейтрона. Они сделали также ряд заключений относительно свойств деления других тяжелых ядер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hanstein, Phys. Rev., 59, 489 (1941); Marshall, там же, 70, 107 (1946); Havens, Rainwater and Wu, Bull. Am. Phys. Soc., 23, 7 (1948).
2. Blatt, Phys. Rev., 74, 92 (1948).



3. Heisenberg, *Zs. f. Phys.*, 77, 1 (1932).
4. Majorana, *Zs. f. Phys.*, 82, 137 (1933).
5. Buckingham and Massey, *Proc. Roy. Soc.*, A163, 281 (1937); Ramsey, там же, A191, 195 (1947); Blatt, *Phys. Rev.*, 74, 92 (1948).
6. Hulthén, *Ark. Math. Astr. Fys.*, 29, 1 (1943); 30, 1 (1943); 31, 1 (1944); Ramsey, *Proc. Roy. Soc.*, A191, 195 (1947).
7. Rarita and Schwinger, *Phys. Rev.*, 59, 436, 556 (1941); Heppner and Peierls, *Proc. Roy. Soc.*, A181, 43 (1943); Hu and Massey, *Nature*, 160, 794 (1947).
8. Hadley, Kelly, Leith, Segré, Wiegand and York, *Phys. Rev.*, 72, 1114 (1948).
9. White, *Phys. Rev.*, 49, 309 (1936).
10. Tuve, Heydenburg and Hafstad, *Phys. Rev.*, 49, 432 (1936).
11. Herb, Kerst, Parkinson and Plain, *Phys. Rev.*, 55, 998 (1939).
12. Breit, Thaxton and Eisenbud, *Phys. Rev.*, 55, 1018 (1939).
13. Hoisington, Share and Brit, *Phys. Rev.*, 56, 884 (1939).
14. Heydenburg, Hafstad and Tuve, *Phys. Rev.*, 56, 1078 (1939); Ragan, Kanne and Taschek, там же, 60, 628 (1941); May and Powell, *Proc. Roy. Soc.*, A90, 170 (1947); Wilson, *Phys. Rev.*, 71, 384 (1947); Wilson and Creutz, там же, 71, 339 (1947); Wilson, Lofgren, Richardson, Wright and Shankland, там же, 71, 560 (1947); Dearnley, Oxley and Perry, там же, 73, 1290 (1948); Blair, Freier, Lampi, Sleator and Williams, там же, 74, 553 (1948).
15. Thaxton and Hoisington, *Phys. Rev.*, 56, 1194 (1939); Breit, Kittel and Thaxton, там же, 57, 255 (1940); Peierls and Preston, там же, 72, 250 (1947); Foldy, там же, 72, 731 (1947); Ramsey, *Proc. Roy. Soc.*, A194, 228 (1948); Breit, Broyles and Hall, *Phys. Rev.*, 73, 869 (1948).
16. Buckingham and Massey, *Proc. Roy. Soc.*, A179, 123 (1941); *Phys. Rev.*, 71, 558 (1947); 73, 260 (1948).
17. Wu and Ashkin, *Phys. Rev.*, 73, 986 (1948).
18. Chew, *Phys. Rev.*, 74, 809 (1948).
19. Present and Rarita, *Phys. Rev.*, 51, 788 (1937).
20. Sherr, Blair, Kratz, Bailey and Taschek, *Phys. Rev.*, 72, 662 (1947).
21. Aoki, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 21, [232 (1939)]; Ageno, Amaldi, Bocciarelli, Trabacchi, *Il Nuov. Cimento*, 9, 1 (1943); *Phys. Rev.*, 71, 20 (1947); Nuckolls, Bailey, Bennett, Bergstrahl, Richards and Williams, там же, 70, 805 (1946).
22. Bethe, *Phys. Rev.*, 50, 336 (1936).
23. Бете, *Физика ядра*, ч. II, М.—Л., 1948.
24. Oppenheimer and Serber, *Phys. Rev.*, 50, 391 (1936).
25. Margenau, *Phys. Rev.*, 59, 627 (1941).
26. Bardeen, *Phys. Rev.*, 51, 799 (1937).
27. Van Vleck, *Phys. Rev.*, 48, 367 (1935).
28. Alvarez, *Phys. Rev.*, 54, 609 (1938).
29. Fertel, Gibbs, Moon, Thomson and Wynn-Williams, *Proc. Roy. Soc.*, A175, 316 (1940).
30. Sawyer, Wollan, Bernstein and Peterson, *Phys. Rev.*, 72, 109 (1947).
31. Rainwater and Havens, *Phys. Rev.*, 70, 136 (1946).

32. Rainwater, Havens, Wu and Dunning, Phys. Rev., **71**, 65 (1947).
33. Zinn, Phys. Rev., **71**, 752 (1947).
34. Moyer, Peters and Schmidt, Phys. Rev., **69**, 666 (1946).
35. Dunning, Pegram, Fink and Mitchell, Phys. Rev., **48**, 265 (1935).
36. Berman, Phys. Rev., **72**, 986 (1947).
37. Rainwater, Havens, Dunning and Wu, Phys. Rev., **73**, 733, 963 (1948).
38. Rainwater and Havens, Phys. Rev., **70**, 154 (1946).
39. Havens, Wu, Rainwater and Meaker, Phys. Rev., **71**, 165 (1947).
40. Wu, Rainwater and Havens, Phys. Rev., **71**, 174 (1947).
41. Lapp, van Horn and Dempster, Phys. Rev., **71**, 745 (1947).
42. Sturm, Phys. Rev., **71**, 757 (1947).
43. Jones, Phys. Rev., **72**, 362 (1947).
44. Barbre and Goldhaber, Phys. Rev., **71**, 141 (1947).
45. Seidl, Harris and Langsdorf, Phys. Rev., **72**, 168 (1947).
46. Harris, Langsdorf and Seidl, Phys. Rev., **72**, 866 (1947).
47. Hornbostel, Goldsmith and Manley, Phys. Rev., **58**, 18 (1940).
48. Barbre and Goldhaber, Phys. Rev., **71**, 141 (1947).
49. Seagondollar and Barschall, Phys. Rev., **72**, 439 (1947).
50. Allen, Burcham and Wilkinson, Proc. Roy. Soc., **A192**, 114 (1947).
51. Hafstad, Heydenburg and Tuve, Phys. Rev., **49**, 866 (1936).
52. Bonner and Evans, Phys. Rev., **73**, 666 (1948).
53. Dee and Gilbert, Proc. Roy. Soc., **A154**, 291 (1936); Wheeler, Phys. Rev., **59**, 27 (1941).
54. Curran, Dee and Petrziika, Proc. Roy. Soc., **A169**, 269 (1939).
55. Street, Fowler and Lauritsen, Phys. Rev., **59**, 253 (1941).
56. Bennett, Bonner, Mandeville and Watt, Phys. Rev., **70**, 882 (1946).
57. Curran and Strothers, Proc. Roy. Soc., **A172**, 72 (1939).
58. Schiff, Phys. Rev., **70**, 891 (1946).
59. Bernadini, Zs. f. Phys., **85**, 555 (1933).
60. Miller, Duncanson and May, Proc. Camb. Phil. Soc., **30**, 549 (1934).
61. Chadwick, Proc. Roy. Soc., **A142**, 1 (1933).
62. Paton, Zs. f. Phys., **90**, 586 (1934).
63. Chadwick, Constable and Pollard, Proc. Roy. Soc., **A130**, 463 (1931).
64. Chadwick and Feather, Int. Conf. Phys., London, 1934.
65. Duncanson and Miller, Proc. Roy. Soc., **A146**, 396 (1934).
66. Rutherford and Chadwick, Phil. Mag., **4**, 605 (1927); Chadwick, Proc. Roy. Soc., **A128**, 120 (1930); Blackett and Champion, там же, **A130**, 380 (1931); Wright, там же, **A137**, 677 (1932); Mohr and Pringle, там же, **160**, 193 (1937); Devons, там же, **A172**, 564 (1939).
67. Wheeler, Phys. Rev., **59**, 16 (1940).
68. Devons, Proc. Roy. Soc., **A172**, 127 (1939).
69. Ferguson and Walker, Phys. Rev., **58**, 666 (1940).
70. Bonner, Proc. Roy. Soc., **A174**, 339 (1940).
71. Staub and Stephens, Phys. Rev., **55**, 131 (1939).
72. Staub and Tatel, Phys. Rev., **58**, 820 (1940).
73. Wheeler and Barschall, Phys. Rev., **58**, 682 (1940).

74. Barschall and Kanner, Phys. Rev., 58, 590 (1940).
75. Hall and Koontz, Phys. Rev., 72, 196 (1947).
76. Heydenburg and Ramsey, Phys. Rev., 60, 42 (1941).
77. Creutz, Phys. Rev., 55, 819 (1939).
78. Fermi, Ric. Sci., 7, 13 (1936).
79. Breit, Phys. Rev., 71, 215 (1947).
80. Arley, Kgl. Dansk. Vid. Selsk., 16, 1 (1938).
81. Sachs and Teller, Phys. Rev., 60, 18 (1941).
82. Carroll, Phys. Rev., 60, 702 (1941).
83. Schwinger and Teller, Phys. Rev., 52, 286 (1937).
84. Hamermesh and Schwinger, Phys. Rev., 71, 679 (1947).
85. Halpern, Estermann, Simpson and Stern, Phys. Rev., 52, 142 (1937); Brickwedde, Dunning, Hoge and Manley, там же, 54, 266 (1938); Libby and Long, там же, 55, 339 (1938).
86. Sutton, Hall, Anderson, Bridge, de Wire, Lavatelli, Long, Snyder and Williams, Phys. Rev., 72, 1147 (1947).
87. Hamermesh and Schwinger, Phys. Rev., 69, 145 (1946).
88. Fermi and Marshall, Phys. Rev., 71, 666 (1947).
89. Shull и др., Phys. Rev., 73, 262, 842 (1948).
90. Rasetti, Phys. Rev., 58, 321 (1940); Halpern, Hamermesh and Johnson, там же, 59, 981 (1941); Seiger and Teller, там же, 62, 37 (1942); Weinstock, там же, 65, 1 (1944); Goldberger and Seitz, там же, 71, 294 (1947).
91. Bloch, Phys. Rev., 50, 259 (1936); Halpern and Johnson, там же, 51, 992 (1937); 52, 52 (1937); 55, 89 (1939); Schwinger, там же, 51, 544 (1937).
92. Arnold and Roberts, Phys. Rev., 71, 878 (1947).
93. Pauli, Handb. d. Phys., 24A, 238 (1933).
94. Halpern and Holstein, Phys. Rev., 59, 960 (1941).
95. Bloch, Hamermesh and Staub, Phys. Rev., 64, 47 (1943); Bloch, Condit and Staub, там же, 70, 972 (1946).
96. Hughes, Wallace and Holtzmann, Phys. Rev., 73, 1277 (1948).
97. Alvarez and Bloch, Phys. Rev., 57, 111 (1940); 57, 352 (1940); Arnold and Roberts, там же, 71, 878 (1947).
98. Halpern and Johnson, Phys. Rev., 55, 898 (1939).
99. van Vleck, Phys. Rev., 55, 924 (1939).
100. Szilard, Bernstein, Feld and Ashkin, Phys. Rev., 73, 1307 (1948).
101. Oppenheimer and Phillips, Phys. Rev., 48, 500 (1935).
102. Karur, Proc. Roy. Soc., A163, 553 (1937); Ind. Journ. Phys., 13, 87 (1939); Karur and Peierls, Proc. Roy. Soc., A163, 606 (1937); Лифшиц, Sow. Phys., 13, 324 (1938); Bethe, Phys. Rev., 53, 34 (1938); Volkoff, там же, 57, 866 (1940).
103. Hahn and Strassmann, Naturwiss., 27, 11 (1939).
104. Meitner and Frisch, Nature, 143, 239 (1939).
105. Bohr and Wheeler, Phys. Rev., 56, 426 (1939).
106. Samac and Bethe, Phys. Rev., 73, 191 (1948); Eisenstein and Rohlich, там же, 73, 641 (1948); Ashkin and Wu, там же, 73, 973 (1948); Wu, там же, 73, 1132 (1948); Massey, Burhop and Hu, там же, 73, 1403 (1948); Burhop and Yadav, Nature, 162, 738 (1948); Chew and Goldberger, Phys. Rev., 73, 1409 (1948); Holmberg, Kungl. Fysio. Sällskapetets i Lund Förhand., 18, 1 (1948).
- 107\*. Ахизер и Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, М., 1948.
- 108\*. Ферми, Ядерная физика, М., 1951.

## Глава XIV

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ ПО МЕТОДУ ВАРЬИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

### § 1. Введение

Задачи, встречающиеся в квантовой механике, могут быть подразделены на две группы: на задачи, связанные с вычислением собственных значений энергии и других наблюдаемых величин для данной динамической системы, и на задачи, связанные с вычислением вероятности перехода системы из одного состояния в другое под влиянием данного возмущения. В этой главе мы рассмотрим методы, пригодные для решения задач второго типа. В предыдущих главах нами была вычислена вероятность перехода вполне определенного типа, а именно перехода между двумя состояниями с одинаковой неквантованной энергией, вызванного возмущением (взаимодействием между атомом и сталкивающейся с ним частицей), независимым от времени. При решении задач такого рода оказалось удобным пользоваться периодической волновой функцией, содержащей время только в показателе экспоненциального множителя  $\exp(-2\pi i Wt/h)$ . В этой главе мы рассмотрим методы вычисления вероятностей переходов между состояниями, одно из которых квантовано; в таком случае пользоваться периодической волновой функцией уже нельзя и следует применять «метод варьирования параметров»<sup>1)</sup>. Переходы, рассматриваемые в этой главе, могут быть подразделены на два класса, указываемые ниже.

1. Переходы из квантованного состояния в неквантованное состояние с равной энергией, вызванные возмущающим полем, независимым от времени. Примеры переходов такого рода: радиоактивный распад, эффект Оже [2], спонтанная диссоциация молекулы, находящейся в возбужденном вращательном состоянии. Теория возмущений особенно пригодна для решения задач этого типа, так как если возмущающее поле не является «малым», то понятие вероятности перехода утрачивает смысл. В этом легче всего убедиться на примере эффекта Оже при вычислении вероятности того, что один из двух электронов, находящихся в возбужденных состояниях в одном и том же атоме, вернется в основное состояние, передав при этом свою энергию второму электрону, который в результате покинет атом. В этом случае «возмущающей

<sup>1)</sup> Этот метод впервые был предложен Дираком [1].

энергией» является потенциальная энергия взаимодействия электронов; если она не «мала», так что соответственно не мала также и вероятность перехода за время, обратное частоте соответствующих колебаний, то нет никакого смысла говорить об электронах как о находившихся первоначально в определенных стационарных состояниях.

К переходам между двумя неквантованными состояниями эти соображения, однако, не относятся; при исследовании задач такого рода применимость метода возмущений зависит от совершенно иных обстоятельств, рассмотренных нами в гл. VII, § 2.

**2. Переходы, обусловленные возмущающим полем, зависящим от времени.** Начальное и конечное состояния могут в этом случае обладать различной энергией. Как начальное, так и конечное состояния могут быть квантованными и неквантованными. В качестве примеров можно привести возбуждение или ионизацию атома в результате его столкновения с  $\alpha$ -частицей, причем  $\alpha$ -частица рассматривается как движущийся силовой центр; поглощение света и фотоэффект в том случае, когда световая волна не трактуется как квантованное поле. Переходы первого типа могут быть рассматриваемы как частный случай переходов второго типа. Мы исследуем их в связи с этим в следующей последовательности.

**1. Переходы, обусловленные возмущением, зависящим от времени.**

а) конечное состояние квантовано,

б) конечное состояние принадлежит к непрерывному энергетическому спектру.

**2. Переходы, вызванные возмущением, периодическим во времени.**

**3. Переходы, вызванные возмущением, не зависящим во времени.**

## § 2. Возбуждение атома возмущением, зависящим от времени

Для простоты в качестве невозмущенной системы рассмотрим электрон, движущийся в поле бесконечно тяжелого ядра. Пусть  $\mathbf{r}$  — координата электрона,  $H$  — оператор Гамильтона для невозмущенного атома, а  $\psi_s(\mathbf{r})$  и  $W_s$  — волновые функции (не зависящие от  $t$ ) и значения энергии стационарных состояний, удовлетворяющие уравнению

$$(H - W_s)\psi_s = 0. \quad (14.1)$$

Предположим, что энергия возмущения такой системы имеет вид  $V(\mathbf{r}, t)$  и что первоначально ( $t = t_0$ ) атом находился в со-

стоянии  $s=0$ . При этом исходная волновая функция имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i W_0 t}{h}\right). \quad (14.2)$$

Волновую функцию, соответствующую любому последующему моменту времени, обозначим через  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ; эта функция может быть найдена с помощью начального условия (14.2) и волнового уравнения

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - H\Psi = V\Psi. \quad (14.3)$$

Разложим  $\Psi$  в ряд

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_s (a_s(t) \psi_s(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i W_s t}{h}\right)) \quad (14.4)$$

и примем, что  $|a_s(t)|^2$  определяет вероятность нахождения атома в состоянии  $s$  в момент времени  $t$  (это справедливо только для квантованных состояний; случай неквантованных состояний исследуется в п. 1). Мы должны, таким образом, вычислить коэффициенты  $a_s(t)$ . Подставляя (14.4) в левую часть уравнения (14.3), получаем

$$-\frac{h}{2\pi i} \sum_s \left[ \frac{d}{dt} a_s(t) \right] \psi_s(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i W_s t}{h}\right).$$

Это выражение должно равняться  $V\Psi$ . Умножая обе части равенства на любую из функций  $\psi_s^*(\mathbf{r}) \exp(+2\pi i W_s t/h)$  и интегрируя по всем значениям  $\mathbf{r}$ , получим

$$\frac{d}{dt} a_s(t) = -\frac{2\pi i}{h} \exp\left(\frac{2\pi i W_s t}{h}\right) \int \psi_s^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (14.5)$$

В начальный момент времени  $t=t_0$  все коэффициенты  $a_s$  равны нулю, за исключением коэффициента  $a_0$ , равного единице; проинтегрировав выражение (14.5), мы получим поэтому (при условии  $s \neq 0$ )

$$a_s(t) = -\frac{2\pi i}{h} \int_{t_0}^t \left\{ \exp\left(\frac{2\pi i W_s t}{h}\right) \int \psi_s^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right\} dt. \quad (14.6)$$

Это уравнение является точным. Оно не может быть использовано непосредственно для вычисления  $a_s$ , так как правая его часть содержит неизвестную функцию  $\Psi$ . Если, однако, можно предположить, что при наличии возмущения функция  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  лишь слегка отличается от своего первоначального вида, то

приближенно ее можно заменить в уравнении (14.6) функцией

$$\psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i W_0 t}{h}\right).$$

Это даст

$$a_s t = -\frac{2\pi i}{h} \int_{t_0}^t V_{s0}(t) \exp\left[\frac{2\pi i (W_s - W_0) t}{h}\right] dt, \quad (14.7)$$

где

$$V_{s0}(t) = \int \psi_s^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}, t) \psi_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (14.8)$$

Такое приближение допустимо лишь в том случае, когда возмущающая энергия «мала». Смысл этого определения зависит от характера рассматриваемого возмущения. Мы исследуем прежде всего случай возмущения, обусловленного тяжелой заряженной частицей с зарядом  $E$ , проходящей через атом, причем будем трактовать эту частицу, как движущийся силовой центр.

Если ядро атома находится в начале координат, а положение возмущающей частицы в момент времени  $t$  характеризуется координатой

$$\mathbf{R} = (X, Y, vt),$$

то

$$V(\mathbf{r}, t) = -\frac{eE}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (14.9)$$

Вероятность того, что после столкновения атом перейдет в состояние  $s$ , определяется величиной  $|a_s(\infty)|^2$ , где

$$a_s(\infty) = -\frac{2\pi i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} V_{s0}(t) \exp\left[\frac{2\pi i (W_s - W_0) t}{h}\right] dt. \quad (14.10)$$

Метод возмущений применим здесь лишь в том случае, если волновая функция мало изменяется в процессе столкновения. Это условие соблюдается, очевидно, при больших расстояниях между сталкивающимися частицами; можно, однако, показать, что оно выполняется также и в случае столкновений, при которых частица проходит через атом, если скорость ее при этом столь велика, что время, в течение которого действует возмущение, оказывается малым. Метод возмущений применим также и в том случае, если заряд частицы  $E$  мал по сравнению с  $Ze$ . Необходимое условие применимости этого метода имеет вид

$$\sum |a_s(\infty)|^2 \ll 1.$$

Это условие не является, однако, достаточным; так, например, в случае очень медленно меняющихся возмущений  $a_s(t)$  во время столкновения может быть величиной порядка единицы, несмотря на то, что  $a_s(\infty)$  мало (см. гл. VIII, § 6).

Если возмущение обусловлено световой волной, нас интересует вычисление вероятности  $P_s \Delta t$  того, что за время  $\Delta t$  будет возбуждено состояние  $s$ . Если мы положим  $\sum P_s = P$ , то вероятность того, что через время  $t$  атом останется в своем нормальном состоянии, определится величиной  $e^{-Pt}$ ; при этом предполагается, конечно, что спонтанное излучение не имеет места. Метод возмущений будет справедлив, таким образом, для значений  $t$ , удовлетворяющих неравенству

$$Pt = \sum_s |a_s(t)|^2 \ll 1.$$

Возмущения такого типа будут рассмотрены в § 3; при этом будет показано, что метод возмущений всегда дает точное значение  $P_s$ , за исключением того случая, когда интенсивность световой волны достаточна для возбуждения атома за время порядка  $1/\nu$ ; однако последнее практически никогда не имеет места.

**Ионизация атома возмущением, зависящим от времени.** Волновая функция  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , описывающая возмущенное состояние атома, должна содержать также члены, характеризующие его ионизованные состояния. Разложение (14.4) является поэтому неполным; мы должны заменить его выражением

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum a_s \psi_s \exp\left(-\frac{2\pi i W_s t}{h}\right) + \int a_W(t) \psi_W(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i W t}{h}\right) dW, \quad (14.11)$$

где функции  $\psi_W(\mathbf{r})$  являются решениями уравнения (14.1) при положительных значениях энергии. Эти функции имеют вид

$$\psi_W(\mathbf{r}) = S_n^u(\theta, \varphi) N L_{nW}(r);$$

здесь  $S_n^u$  — нормированные шаровые функции:

$$S_n^u = \left[ \frac{(2n+1)(n-u)!}{4\pi(n+u)!} \right]^{1/2} P_n^u(\cos \theta) e^{iu\varphi},$$

$L$  — радиальный множитель волновой функции, нормированный таким образом, что [см. формулу (2.15)<sup>1)</sup>]

$$L \sim (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}n\pi + \eta_n\right),$$

<sup>1)</sup> Член  $(2\pi Ze^2/hv) \ln 2kr$ , фигурирующий в случае кулонова поля, здесь опущен.



$N$  — постоянная. В выражении (14.11) суммирование приводится по всем значениям  $n$  и  $u$ . Полагая

$$N = N(W) = 2k(hv)^{-1/2}, \quad (14.12)$$

можно показать [3], что функция  $G$ , определяемая выражением

$$\int_0^R \psi_{Wnu}(\mathbf{r}) \psi_{W'nu}(\mathbf{r}) d\tau = G(W, R)$$

(интегрирование производится здесь по сфере радиуса  $R$ ), обладает следующим свойством: если  $f(W)$  — любая функция от  $W$ , то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} G(W, R) f(W) dW = f(W').$$

Основываясь на этом свойстве функции  $G(W, R)$ , можно положить

$$G(W, \infty) = \delta(W - W'),$$

где  $\delta$  — „ $\delta$ -функция” Дирака [47]. Воспользовавшись соотношением (14.12), легко показать далее, что

$$a_W(t) = -\frac{2\pi i}{h} \int_{t_0}^t V_{W_0}(t) \exp\left[\frac{2\pi i(W - W_0)t}{h}\right] dt. \quad (14.13)$$

Волновая функция может быть, таким образом, определена формулой (14.11).

Зная эту функцию, можно вычислить вероятность ионизации атома. Предположим, что возмущение действует лишь от момента времени  $t = 0$  до момента  $t = T$ , и вычислим вероятность  $P dv_0 d\omega$  того, что на протяжении этого промежутка времени электрон вылетит из атома в направлении  $\mathbf{n}$  внутри телесного угла  $d\omega$ , обладая при этом скоростью, лежащей в интервале между  $v_0$  и  $v_0 + dv_0$ .

Исследуем асимптотическую форму функции  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  для значений  $\mathbf{r}$ ,  $t$ , определяемых соотношением  $\mathbf{r} = \mathbf{n}v_0 t$ , при условии  $t dv_0 \gg T v_0$ , выражающем то обстоятельство, что действие возмущения прекратилось задолго до момента  $t$ . Ясно, что при этих условиях

$$P dv_0 d\omega = |\Psi|^2 r^2 dr d\omega = |\Psi|^2 t^3 v_0^2 dv_0 d\omega. \quad (14.14)$$

Правая часть этого равенства не должна зависеть от  $t$ ; мы покажем в дальнейшем, что это требование выполняется.

Исследуем функцию (14.11) при больших значениях  $r$  и  $t$ . Коэффициент  $a_W(t)$ , определяемый выражением (14.13), при

$t \rightarrow \infty$  стремится к некоторому постоянному значению, так как энергия возмущения  $V$  предполагается отличной от нуля только в интервале  $0 < t < T$ . Заменяя  $\psi_W(\mathbf{r})$  ее асимптотическим значением при больших  $r$ , мы видим, что единственные члены, содержащие  $r$  и  $t$  в интервале (14.11), имеют вид

$$(kr)^{-1} \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi + i\eta_n \right) e^{-2\pi i W t / \hbar}$$

или

$$(2ikr)^{-1} \left\{ \exp \left[ \frac{2\pi i m}{\hbar} \left( vr - \frac{1}{2} v^2 t \right) - \frac{1}{2} n\pi i + i\eta_n \right] - \exp \left[ \frac{2\pi i m}{\hbar} \left( -vr - \frac{1}{2} v^2 t \right) + \frac{1}{2} n\pi i - i\eta_n \right] \right\}. \quad (14.15)$$

Интеграл (14.11) берется от  $W=0$  до  $W=\infty$  и, следовательно, от  $v=0$  до  $v=\infty$ . Первый из двух членов выражения (14.15) имеет в этой области стационарную точку<sup>1)</sup>; при  $v=r/t$  и при достаточно больших значениях  $r$  и  $t$  численное значение интеграла (14.11) полностью определяется областью значений  $v$ , близкой к этой точке<sup>2)</sup>. Второй член выражения (14.15), соответствующий сходящейся волне, такой точкой в рассматриваемой области не обладает. При вычислении интеграла он дает поэтому члены более высокого порядка относительно  $1/t$ , так что им можно пренебречь.

Первый член выражения (14.15) может быть записан в форме

$$(2ikr)^{-1} \exp \left\{ \frac{2\pi i m}{\hbar} \left[ -\frac{1}{2} t (v - v_0)^2 + \left( v_0 r - \frac{1}{2} v_0^2 t \right) - \frac{1}{2} n\pi i + i\eta_n \right] \right\}, \quad (14.16)$$

где  $v_0 = r/t$ . Воспользовавшись тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iA\zeta^2) d\zeta = \left( \frac{\pi}{iA} \right)^{1/2} \left( \zeta = v - v_0, \quad A = -\frac{\pi m t}{\hbar} \right),$$

и полагая  $dW = mv dv$ , получаем из (14.11)

$$|\Psi| \sim \left| \sum_{n,u} a_{W_0 nu}(\infty) N(W_0) (2ik_0 r)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\hbar}{m t} \right)^{1/2} m v_0 \exp \left( -\frac{1}{2} n\pi i + i\eta_n \right) S_n^u(\theta, \varphi) \right|,$$

где

$$W_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

<sup>1)</sup> Стационарной точкой функции  $r^{i\eta(v)}$  называется такое значение  $v$ , при котором  $f'(v) = 0$ .

<sup>2)</sup> Эта теорема может быть доказана путем преобразования контура интегрирования в комплексной плоскости.

или же

$$|\Psi| \sim r^{-1} \left( \frac{mv_0}{t} \right)^{1/2} |f(\theta, \varphi)|, \quad (14.17)$$

где

$$f(\theta, \varphi) = \left( \frac{h}{v_0} \right)^{1/2} \sum_n \sum_u \exp \left( i\eta_n - \frac{1}{2} n\pi i \right) S_n^u(\theta, \varphi) a_{W_0nu}(\infty),$$

причем  $r = v_0 t$ . Отсюда следует, что  $|\Psi|^2$  пропорционально  $t^{-3}$ . Соотношение (14.11) дает

$$P dv_0 d\omega = \frac{mv_0^2}{h} |f(\theta, \varphi)|^2 dv_0 d\omega. \quad (14.18)$$

Далее, проинтегрировав (14.18) по всем значениям  $\theta$  и  $\varphi$ , находим полную вероятность испускания электрона с энергией, лежащей в интервале между  $W$  и  $W + dW$ :

$$\sum_n \sum_u |a_{Wnu}(\infty)|^2 dW. \quad (14.19)$$

Функция  $f(\theta, \varphi)$  может быть представлена также и в иной форме. Подставляя (14.13) в (14.16) и воспользовавшись формулой (2.16), а также формулой (6.24), получаем

$$f(\theta, \varphi) = \frac{2\pi m}{h^2} \int d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathfrak{F}(r', \pi - \Theta) V(r', t) \psi_0(r') \times \\ \times \exp \left[ \frac{2\pi i (W - W_0) t}{h} \right]. \quad (14.20)$$

Здесь

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (14.21)$$

а  $\mathfrak{F}(r, \theta)$  — функция, исследованная нами в гл. II, § 1:

$$\mathfrak{F}(r, \theta) = \sum_n (2n + 1) i^n e^{i\eta_n} P_n(\cos \theta) L_n(r);$$

она имеет асимптотическую форму

$$\mathfrak{F} \sim e^{ikz} + r^{-1} e^{ikr} \times \text{Функция от } \theta.$$

Функция  $\mathfrak{F}(r', \pi - \Theta)$  описывает таким образом плоскую волну, распространяющуюся в направлении, противоположном направлению  $\theta, \varphi$ , совместно с расходящейся волной; она не является при этом комплексно сопряженной к волновой функции конечного состояния. Лишь в том случае, когда можно пренебречь

влиянием ядра (быстрые электроны, малый атомный номер,  $2\pi Ze^2/hv \ll 1$ ) так, что  $\mathfrak{F}(r', \pi - \theta)$  может быть заменено выражением  $\exp(-ikn \cdot r')$ , эту функцию можно рассматривать как комплексно сопряженную к волновой функции конечного состояния (см. примечание на стр. 69).

### § 3. Переходы, вызванные периодическим во времени возмущением

Выберем энергию возмущения в форме

$$V(\mathbf{r}, t) = \lambda U(\mathbf{r}) e^{-2\pi i \nu t} + \lambda U^*(\mathbf{r}) e^{2\pi i \nu t}, \quad (14.22)$$

где  $U$  зависит от  $r$  и не зависит от  $t$ , а  $\lambda$  — некоторый параметр. Если в некоторый момент времени  $t=0$  система находится в состоянии 0, то, согласно (14.13), волновая функция в момент времени  $t$  имеет вид

$$\sum_s a_s(t) \psi_s(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i W_s t}{h}\right) + \int a_W(t) \psi_W(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{2\pi i W t}{h}\right) dW, \quad (14.23)$$

где

$$a_s = \frac{\exp[2\pi i (W_s - W_0 - h\nu) t/h] - 1}{W_s - W_0 - h\nu} \lambda U_{s0} + \frac{\exp[2\pi i (W_s - W_0 + h\nu) t/h] - 1}{W_s - W_0 + h\nu} \lambda U_{s0}^* \quad (14.24)$$

и

$$U_{s0} = \int \psi_s^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) d\tau. \quad (14.25)$$

Для того чтобы в случае периодического изменения  $V$  результаты имели физический смысл, время  $t$ , в течение которого действует возмущение, должно быть велико по сравнению с  $1/\nu$ . В отличие от задач, рассмотренных нами в § 2, где речь шла о вычислении вероятности возбуждения при отдельном столкновении, нас интересует сейчас вероятность  $P_s \Delta t$  возбуждения или ионизации атома за промежуток времени  $\Delta t$  ( $\Delta t \gg 1/\nu$ ). Обозначим через  $P = \sum P_s$  полную вероятность ионизации или возбуждения за единицу времени; в таком случае вероятность того, что через время  $t$  атом останется в своем нормальном состоянии, равна  $e^{-Pt}$ . Метод возмущений, с помощью которого мы получили выражение (14.25), применим только в случае таких значений  $t$ , при которых эта вероятность не слишком сильно отличается от единицы, т. е. при условии

$$Pt \ll 1. \quad (14.26)$$

Если, однако, возмущение обусловлено воздействием световой волны, то  $P_s$  пропорционально интенсивности этой волны, т. е. пропорционально  $\lambda^2$ , и при вычислении  $P_s$  можно выбрать  $\lambda$  сколь угодно малым. Всегда можно, следовательно, выбрать  $t$  так, чтобы условие (14.26) удовлетворялось совместно с неравенством  $t \gg 1/\nu$ . Метод возмущений дает, таким образом, правильные результаты для таких значений интенсивностей возмущающего поля, при которых  $P$  пропорционально  $\lambda^2$ , что имеет место для любых световых волн.

Интерпретация получаемых результатов зависит от того, является ли конечное состояние квантованным или же принадлежит к непрерывному энергетическому спектру. Если конечное состояние квантовано, то вероятность перехода  $|a_s|^2$  не должна возрастать с течением времени, за исключением того случая, когда  $\nu = \nu_{s0}$ , где  $\nu_s = |W_s - W_0|/h$ . В этом случае, как легко видеть из (14.24), она пропорциональна квадрату времени. Для того чтобы результат имел физический смысл, следует учесть, что возмущающее поле не является строго монохроматическим, но состоит из большого числа налагающихся друг на друга полей, характеризующихся различными частотами, близкими к  $\nu_{s0}$ . Вероятность перехода мы найдем, проинтегрировав  $|a_s|^2$  по всем значениям  $\nu$  вплоть до критического значения  $\nu_{s0}$ . Положим в (14.22)  $\lambda^2 = d\nu$ . Второй член выражения (14.24) не является, очевидно, существенным (при условии, что  $W_s > W_0$ ), и вероятность перехода приближенно равна

$$\int \frac{2 \{1 - \cos [2\pi (W_s - W_0 - h\nu) t/h]\}}{(W_s - W_0 - h\nu)^2} |U_{s0}|^2 d\nu.$$

При больших значениях  $t$  этот интеграл определяется в основном значениями  $\nu$ , близкими к  $\nu_{s0}$ . Он равен<sup>1)</sup>

$$\frac{4\pi^2 |U_{s0}|^2 t}{h^2}. \quad (14.27)$$

Таким способом может быть вычислен коэффициент поглощения  $B$ , фигурирующий в теории Эйнштейна (дальнейшие подробности см. [8]).

Если конечное состояние принадлежит к непрерывному энергетическому спектру, то можно воспользоваться методом, изложенным в § 2. Предположим, что возмущение действует в течение конечного промежутка времени  $T$ , причем  $\nu T \gg 1$ , но  $PT \ll 1$ . Из (14.23) следует, что  $|a_W(T)|^2 dW$  определяет в таком случае

<sup>1)</sup> Мы воспользовались при вычислении формулой  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi$ .

вероятность испускания электрона с энергией в интервале между  $W$  и  $W + dW$ . При  $W = W_0 + h\nu$  эта функция имеет резкий максимум. Общее число электронов, испускаемых со всевозможными энергиями, равно

$$\int |a_W(T)|^2 dW = \int \frac{2 \{1 - \cos [2\pi (W - W_0 - h\nu) T/h]\}}{(W - W_0 - h\nu)^2} \lambda^2 |U_{W_0}|^2 dW. \quad (14.28)$$

При  $\nu T \rightarrow \infty$  этот интеграл практически определяется значениями  $W$ , близкими к  $W_0 + h\nu$ , так что (14.28) может быть заменено выражением<sup>1)</sup>

$$\frac{4\pi^2 T |\lambda U_{W_0}|^2}{h}, \quad W = W_0 + h\nu, \quad (14.29a)$$

которое и определяет искомую вероятность испускания электрона за время  $T$ . Аналогично число электронов, испускаемых за единицу времени внутри телесного угла  $d\omega$ , равно [см. (14.18) и (14.20)]

$$\nu \left| \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int \mathfrak{F}(r', \pi - \theta) \lambda U(r') \psi_0(r') d\tau' \right|^2 d\omega. \quad (14.29b)$$

Бете [5] показал, как следует интерпретировать волновую функцию (14.23), не делая предположения о том, что возмущение действует только в течение промежутка времени  $0 < t < T$ . Если точка  $r$  расположена вне атома, то функция  $\psi_s$  обращается в нуль, а функция  $\psi_W$  может быть заменена ее асимптотическим значением

$$\psi_W \sim 2 (h\nu)^{-1/2} r^{-1} \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n \right) S_n^u(\theta, \varphi).$$

Воспользовавшись этим выражением для  $\psi_W$ , покажем, что если  $\nu t \gg 1$ , то волновая функция (14.23) при  $r < \nu t$  соответствует расходящейся волне с конечной амплитудой, а при  $r > \nu t$  — волне с амплитудой, равной нулю.

Для точек  $r$ , расположенных вне атома, с помощью (14.23) и (14.24) получаем

$$\begin{aligned} \Psi(r, t) \sim \sum_{n,u} S_n^u(\theta, \varphi) e^{-2\pi i (W_0 + h\nu) t/h} \int \lambda U_{W_{nu},0} \frac{1 - e^{-2\pi i (W - W_0 - h\nu) t/h}}{W - W_0 - h\nu} \times \\ \times (kr)^{-1} N(W) \sin \left( kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n \right) dW. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Положим

$$\frac{2\pi (W - W_\nu) t}{h} = \zeta,$$

так что

$$k = \frac{2\pi (2mW)^{1/2}}{h} = k_\nu + \frac{\zeta}{\nu t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

<sup>1)</sup> Гиперболическая волновая функция, используемая при вычислении  $U_{W_0}$ , нормирована так же, как и в формуле (14.12).

Здесь  $W_\nu$  написано вместо  $W_0 + h\nu$ , а  $k_\nu = 2\pi(2mW_\nu)^{1/2} h$ . Если  $\nu t$  велико, то подынтегральная функция в формуле (14.30) имеет резкий максимум при  $W = W_\nu$  и (14.30) может быть заменено выражением

$$\Psi \sim \sum_{n,u} N(W_\nu) S_n^u \lambda U_{W_\nu nu,0} e^{-2\pi i W_\nu t/h} \times \int \frac{1 - e^{-i\zeta}}{\zeta} \frac{\sin\left(kr - \frac{1}{2} n\pi + \eta_n\right)}{kr} d\zeta. \tag{14.31}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого выражения, равен

$$(2ikr)^{-1} e^{\frac{ikr - n\pi i}{2} i\eta_n} \int [e^{i\zeta r/vt} - e^{i\zeta (r/vt - 1)}] \zeta^{-1} d\zeta - (2ikr)^{-1} e^{-\frac{ikr + n\pi i}{2} i\eta_n} \int [e^{-i\zeta r/vt} - e^{i\zeta (-r/vt - 1)}] \zeta^{-1} d\zeta. \tag{14.32}$$

Если  $A$  и  $B$  — вещественные числа, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{iA\zeta} - e^{iB\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} = i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin A\zeta}{\zeta} - \frac{\sin B\zeta}{\zeta} \right) d\zeta.$$

Очевидно, что этот интеграл равен нулю, если знаки  $A$  и  $B$  одинаковы, и равен  $2\pi i$ , если знаки  $A$  и  $B$  противоположны. Второй интеграл в выражении (14.32), характеризующий падающую волну, обращается, следовательно, в нуль, тогда как первый интеграл при  $r > vt$  равен нулю, а при  $r < vt$  равен  $2\pi i$ . Функция (14.31) приобретает в результате следующий вид:

$$\Psi \sim (2kr)^{-1} e^{ikr - 2\pi i W t/h} 2\pi N(W) \sum_{n,u} \exp\left(i\eta_n - \frac{1}{2} n\pi i\right) \times \times S_n^u(\theta, \varphi) \lambda U_{Wnu,0} \quad (r < vt),$$

$$\Psi \sim 0 \quad (r > vt).$$

Отсюда легко могут быть получены формулы (14.29а) и (14.29б), определяющие количество испускаемых электронов.

**Ионизация атома водорода световой волной.** Если скалярный и векторный потенциалы световой волны соответственно имеют вид:

$$\Phi = \varphi(x, y, z) e^{-2\pi i \nu t} + \text{Комплекс. сопряж.},$$

$$A = a(x, y, z) e^{-2\pi i \nu t} + \text{Комплекс. сопряж.},$$

то оператор возмущения имеет вид

$$V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) e^{-2\pi i \nu t} + \text{Комплекс. сопряж.},$$

где

$$U(\mathbf{r}) = -e\varphi + \left(\frac{eh}{2\pi imc}\right) \mathbf{a} \cdot \text{grad} \quad (\text{согласно теории Шредингера}),$$

$$U(\mathbf{r}) = -e\varphi - e\gamma_1(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) \quad (\text{согласно теории Дирака}).$$

Для волны, плоско поляризованной в направлении оси  $z$ , можно положить

$$\varphi = 0, \quad a_x = ae^{iqz}, \quad a_y = a_z = 0.$$

Отсюда

$$U_{s0} = \frac{eha}{2\pi imc} \int \psi_s^* e^{iqz} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} d\tau.$$

Если длина световой волны велика по сравнению с радиусом атома, то  $e^{iqz}$  приближенно можно положить равным единице<sup>1)</sup>.

#### § 4. Переходы, вызванные возмущением, не зависящим от времени

В этом случае соотношения, приведенные в предыдущем параграфе, справедливы при условии  $\nu = 0$ . Поскольку в § 3 было показано, что возможны только переходы в состояния с энергией  $W_0 \pm h\nu$ , где  $W_0$  — энергия исходного состояния, отсюда следует, что в данном случае возможны лишь переходы в состояния с энергией  $W_0$ . Таким образом, при таких переходах энергия остается неизменной, как это вытекает и из физической сущности рассматриваемых процессов.

**1. Начальное и конечное состояния некваंटуются. Рассеяние пучка электронов силовым центром.** Воспользуемся формулой (14.296). Пусть функция  $\psi_0$  характеризует пучок электронов и нормирована таким образом, что за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходит один электрон, так что

$$\psi_0 = v^{-1/2} \exp(ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}).$$

Пусть, далее,  $U(\mathbf{r})$  — потенциальная энергия электрона в поле рассеивающего центра. Функция  $F(\mathbf{r}', \pi - \Theta)$  сводится тогда к виду  $\exp(-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор направления  $\theta, \varphi$ . Выражение (14.296) сводится к

$$\left| \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int \exp[ik(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}'] U(\mathbf{r}') d\tau' \right|^2.$$

Эта формула уже была получена нами выше с помощью метода Борна [формула (7.5)].

<sup>1)</sup> Относительно применения этой формулы к вычислению фотоэлектрического эффекта см. [3, 6].



2. Начальное состояние квантовано, конечное состояние неквантовано. В качестве примера рассмотрим нерелятивистскую теорию внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей. Предположим, что  $\alpha$ -частица в ядре обладает координатой  $\mathbf{R}$  и находится в возбужденном состоянии, описываемом волновой функцией  $\chi_i(\mathbf{R})$ , а электрон в атоме находится на  $K$ -уровне в нормальном состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi_i(\mathbf{r})$ . Нас интересует определение вероятности того, что за единицу времени  $\alpha$ -частица перейдет в нормальное состояние, характеризующееся волновой функцией  $\chi_f(\mathbf{R})$ , передав свою энергию электрону, который при этом вылетит из атома. Если энергия взаимодействия имеет вид

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{2e^2}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|},$$

то, согласно (14.23), эта вероятность определится выражением

$$\sum_s \frac{4\pi^2}{h} \left| \iint \chi_f^* \psi_f^* V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \chi_i \psi_i d\mathbf{r} d\mathbf{R} \right|^2 d\omega, \quad (14.33)$$

где  $\psi_f$  — волновая функция, характеризующая конечное состояние и нормированная так же, как и в формуле (14.12), а суммирование производится по всем возможным конечным состояниям с соответствующей энергией.

Аналогичный метод был использован Борном [7] для рассмотрения вопроса о вероятности испускания  $\alpha$ -частицы радиоактивным ядром.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac, Proc. Roy. Soc., A114, 243 (1929).
2. Auger, Journ. de phys. et rad., 6, 205 (1925).
3. Зоммерфельд, Волновая механика, М.—Л., 1933.
4. Dirac, Quantum Mechanics, 3-е изд.
5. Bethe, Ann. d. Phys., 4, 443 (1930).
6. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М.—Л., 1940.
7. Born, Zs. f. Phys., 58, 306 (1929).
8. Mott and Sneddon, Wave Mechanics and its Applications.

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗАДАЧИ О ДВУХ ЧАСТИЦАХ. ИЗЛУЧЕНИЕ

В настоящей главе мы не ставим своей целью обсуждение различных трудностей, возникающих при анализе соотношений между квантовой механикой, электродинамикой и специальной теорией относительности. Эти трудности связаны непосредственным образом с трактовкой явлений излучения. В данной книге мы ограничиваемся рассмотрением процессов столкновений, не сопровождающихся излучением. Основная задача настоящей главы—исследование столкновений между двумя частицами при релятивистских условиях. Тем не менее мы покажем вкратце, как методы, развитые нами выше для анализа явлений, не сопровождающихся излучением, могут быть использованы также и при рассмотрении процессов излучения. Получаемые при этом формулы вполне эквивалентны тем, которые применяются обычно для задач такого рода и получены по методу варьирования параметров [1].

### § 1. Релятивистская квантовая механика. Применение запаздывающих потенциалов

Работы Дирака [2, 43] дают вполне законченную релятивистскую теорию движения одной частицы (протона или электрона) в электромагнитном поле. Теория Дирака была применена к задаче о водородном атоме [3], к вопросу о рассеянии быстрых электронов ядром (см. гл. IV, § 4), а также к вопросу о взаимодействии электрона с электромагнитным излучением высокой частоты [1, 4]. Вполне законченной релятивистской теории явлений, связанных с взаимодействием двух или большего числа частиц, в настоящее время, однако, еще не существует. Некоторый ограниченный круг относящихся сюда вопросов может быть все же решен; а именно—при условии применимости первого приближения теории возмущений (первого приближения Борна) оказывается возможным вычисление вероятностей переходов между различными состояниями.

В качестве иллюстрации метода вычисления вероятностей переходов рассмотрим следующую задачу (эффект Оже). Предположим, что тяжелый атом потерял  $K$ -электрон; в таком случае имеется конечная вероятность перехода  $L$ -электрона в  $K$ -обо-

лочку, при котором энергия этого электрона либо испускается в виде светового кванта, либо передается одному из остальных электронов. Вычислим вероятность того, что  $L$ -электрон передаст свою энергию оптическому электрону.

Метод, которым мы будем пользоваться, исключает возможность применения антисимметричных волновых функций для исходного или конечного состояний. Мы будем рассматривать электроны в отдельности друг от друга; положение внутреннего электрона будем характеризовать вектором  $\mathbf{R}$ ; через  $\chi_i(\mathbf{R})$  обозначим волновую функцию электрона в исходном состоянии в  $L$ -оболочке, а через  $\gamma_f(\mathbf{R})$ —волновую функцию, характеризующую конечное состояние электрона в  $K$ -оболочке. Волновую функцию, характеризующую исходное состояние оптического электрона, обозначим через  $\psi_i(\mathbf{r})$ , а волновую функцию для конечного ионизованного состояния—через  $\psi_f(\mathbf{r})$ . Влияние эффекта антисимметрии мы рассмотрим в конце этого параграфа.

Внутренний электрон может возвратиться на  $K$ -уровень, либо передав свою энергию другому электрону, либо же испустив ее в виде светового кванта. Вероятность последнего события, отнесенная к единице времени, обозначается через  $A_{i \rightarrow f}$ , где  $A$  называется коэффициентом Эйнштейна. Согласно любой нерелятивистской теории ( $c \rightarrow \infty$ ), коэффициент  $A$  равен нулю, так как в отсутствие поля излучения атом должен оставаться в своем возбужденном состоянии. Дираку [5, 43] удалось определить коэффициент  $A$ , трактуя поле излучения как совокупность световых квантов, подчиняющихся законам квантовой механики. До появления теории Дирака коэффициент  $A$  был определен следующим образом [6].

Излучающая система—в нашем случае  $L$ -электрон—трактровалась как классический заряд, распределенный с плотностью

$$\rho_{ji} e^{-2\pi i \nu_{ji} t} + \text{Комплекс. сопряж.}, \quad (15.1)$$

где

$$\rho_{ji} = -e \chi_f^* \chi_i.$$

Вектор тока, соответствующий этой плотности заряда, равен

$$\mathbf{j}_{ji} e^{-2\pi i \nu_{ji} t} + \text{Комплекс. сопряж.},$$

где

$$\mathbf{j}_{ji} = e \chi_f^* \rho_1 \sigma \chi_i \quad (\text{уравнение Дирака}),$$

$$\mathbf{j}_{ji} = \frac{eh}{4\pi im} (\chi_f^* \text{grad } \chi_i - \chi_f \text{ grad } \chi_i^*) \quad (\text{уравнение Шредингера}).$$

Согласно классической теории, такой плотности заряда должно отвечать осциллирующее электромагнитное поле, излучающее энергию. Энергия, излучаемая за единицу времени, может быть

вычислена. Разделив эту энергию на энергию светового кванта  $E_i - E_f$ , мы получим формулу, определяющую коэффициент  $A$ .

Ясно, что подобный метод вычисления коэффициента  $A$  представляет собой неудовлетворительную смесь классической и квантовой механики; тем не менее он может оказаться полезным при построении релятивистской теории взаимодействия двух частиц. Найдем поэтому поле, обусловленное наличием осциллирующей плотности заряда (15.1).

Согласно классической электромагнитной теории, скалярный потенциал  $\Phi$  и векторный потенциал  $A$ , соответствующие такой плотности заряда, определяются дифференциальными уравнениями вида

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho_{fi} e^{-2\pi i \nu_{fi} t} + \dots, \quad (15.2a)$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{fi} e^{-2\pi i \nu_{fi} t} + \dots \quad (15.2b)$$

Для нахождения частного решения этих уравнений положим

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi(x, y, z) e^{-2\pi i \nu_{fi} t} + \text{Комплекс. сопряж.}, \\ A &= \mathbf{a}(x, y, z) e^{-2\pi i \nu_{fi} t} + \text{Комплекс. сопряж.}, \end{aligned} \quad (15.3)$$

что приведет нас к уравнению

$$\left( \frac{\nabla^2 + 4\pi^2 \nu_{fi}^2}{c^2} \right) \varphi = -4\pi \rho_{fi}. \quad (15.4)$$

Решение этого уравнения, описывающее расходящуюся волну, имеет вид

$$\varphi = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left(\frac{2\pi i \nu_{fi} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \rho_{fi}(x', y', z') d\tau'. \quad (15.5)$$

При больших  $r$  с помощью асимптотической формулы (15.5) получаем

$$\begin{aligned} \Phi &\sim r^{-1} \exp\left[2\pi i \nu_{fi} \left(\frac{r}{c-t}\right)\right] \int \exp\left(-\frac{2\pi i \nu_{fi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) \times \\ &\quad \times \rho_{fi}(x', y', z') d\tau' + \dots, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Аналогичное выражение получается также и для векторного потенциала; в результате мы можем вычислить скорость излучения энергии.

Для нахождения вероятности того, что  $L$ -электрон передаст свою энергию оптическому электрону, мы будем поступать так, как если бы поле  $\Phi$ ,  $A$ , определяемое функцией (15.5), существовало на самом деле, и исследуем его влияние на оптический электрон, воспользовавшись с этой целью методом, изложенным в гл. XIV, § 3. Вероятность испускания электрона возрастает с течением времени только в том случае, если энергия,

получаемая электроном, равна  $\pm h\nu_{fi}$ . Вероятность испускания электрона за единицу времени [см. формулу (14.29a)] определяется при этом выражением вида

$$\frac{4\pi^2}{h} \left| \int \psi_f^* (-e\varphi - e\mathbf{p}_1 \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi_i d\tau \right|^2, \quad (15.6)$$

где  $\psi_f$  — волновая функция, описывающая конечное состояние электрона и нормированная таким образом, что за единицу времени имеет место испускание одного электрона.

Полагая в (15.5)  $c \rightarrow \infty$ , получаем

$$\varphi = -e \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \chi_f^*(\mathbf{r}') \chi_i(\mathbf{r}') d\tau', \\ \mathbf{a} = 0.$$

Формула (15.6) сводится при этом к нерелятивистской формуле (14.33).

При такой постановке задачи не имеет смысла ставить вопрос о том, испускается ли оптический электрон в результате непосредственного взаимодействия с  $L$ -электроном или же вначале имеет место испускание кванта света, который затем поглощается снова. Формула (15.6) учитывает оба эти процесса.

В формуле (15.6) не приняты во внимание свойства антисимметрии волновых функций нерелятивистской квантовой механики. Можно, однако, получить формулу, которая при  $c \rightarrow \infty$  будет стремиться к нерелятивистской формуле, содержащей антисимметричные волновые функции. Обозначим выражение (15.6) через  $|A|^2$ . Оно определяет вероятность того, что  $L$ -электрон перейдет в нормальное состояние при сопутствующем испускании оптического электрона. Аналогичным образом можно определить вероятность  $|B|^2$  перехода оптического электрона в нормальное состояние, сопровождающегося испусканием  $L$ -электрона. Искомое выражение имеет вид

$$|A - B|^2;$$

оно дает, повидимому, правильное значение числа электронов, испускаемых при обоих процессах. Это выражение следует просуммировать по всем возможным конечным состояниям.

Для эффекта Оже аналогичные вычисления были выполнены Месси и Бургопом [7].

## § 2. Релятивистская трактовка задач теории столкновений

Возбуждение и ионизация атомов быстрыми электронами также могут быть исследованы с помощью метода, изложенного выше [8]. Рассмотрим пучок электронов, падающий на атом водорода, который находится в нормальном состоянии, описываемом

волновой функцией  $\psi_i(\mathbf{r}) e^{-2\pi i E_i t/\hbar}$ . Нас интересует вероятность рассеяния электрона в данном направлении при переходе атома в возбужденное состояние, характеризуемое волновой функцией  $\psi_f(\mathbf{r}) e^{-2\pi i E_f t/\hbar}$ .

Как и в § 1, взаимодействие между двумя электронами мы будем трактовать как малое возмущение. В качестве невозмущенной волновой функции для падающих электронов можно было бы поэтому выбрать волновую функцию, описывающую поток электронов, рассеиваемых ядром [см. формулу (3.23)]. Поскольку  $v \sim c$ ,  $e^2/\hbar v \ll 1$ , эта функция может быть, однако, заменена плоской волной (при этом мы пренебрегаем величиной  $(e^2/\hbar c)^2$  (см. § 3)). В качестве волновой функции нулевого порядка  $\chi_i$  мы выберем поэтому плоскую волну, нормированную таким образом, чтобы за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проходил один электрон, так что

$$\chi_i(\mathbf{R}) = v^{-1/2} \exp \left[ \frac{2\pi i (p_i Z - W t)}{\hbar} \right].$$

При вычислении вероятности рассеяния мы будем трактовать атом как заряд, распределенный с переменной плотностью, даваемой формулой [см. (15.1)]

$$-e\psi_f^*(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{2\pi i (E_f - E_i) t}{\hbar} \right] \quad (15.7)$$

при соответствующем определении вектора тока; задача заключается в исследовании влияния поля, создаваемого этим зарядом, на падающий пучок электронов. Для ее решения мы воспользуемся методом, изложенным в гл. XIV, § 3. Согласно теории, электроны должны рассеиваться с энергиями, равными  $W - E_f + E_i$ . При этом к выражению (15.7) не следует добавлять комплексно сопряженного члена, так как он соответствует электронам, рассеянным с энергией  $W - E_i + E_f$ , превышающей исходную<sup>1)</sup>.

Поле, обусловленное зарядом (15.7), нельзя рассматривать как поле, создаваемое атомом, во-первых, потому, что вначале атом находился в своем нормальном состоянии и не излучал, и, во-вторых, потому, что поле является комплексным.

Воспользовавшись значениями  $\varphi$  и  $\mathbf{a}$ , приведенными в § 1 [см. (15.3) и (15.4)], с помощью формулы (14.296) находим дифференциальное сечение для рассеяния внутри телесного угла  $d\omega$ :

$$|f(\theta)|^2 d\omega = v_f \left| \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int \mathfrak{F}(\mathbf{r}') [-e\varphi - e\mathbf{r}_1(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})] \chi_i(\mathbf{r}') d\tau' \right|^2 d\omega, \quad (15.8)$$

где  $\mathfrak{F}$ —волновая функция, комплексно сопряженная волновой

<sup>1)</sup> В случае, рассмотренном в § 1, конечного состояния с энергией  $W_i - E_i + E_f$  не существует. Поэтому присутствие комплексно сопряженного члена не меняет значения числа испускаемых электронов.

функции электрона, движущегося в направлении  $\mathbf{p}_f$ ; эта функция нормирована таким образом, что на единицу объема приходится одна частица [в теории Шредингера  $\mathfrak{F} = \exp(-2\pi i \mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}'/h)$ ; вид функции  $\mathfrak{F}$  в теории Дирака определяется формулой (4.12)].

В нерелятивистской теории для описания столкновения электрона с атомом водорода следует пользоваться антисимметричной волновой функцией. В рассматриваемой здесь релятивистской теории волновая функция для системы в целом не фигурирует; свойства антисимметрии могут быть, однако, учтены точно таким же образом, как это было сделано нами в § 1. Формула (15.8), полученная выше, определяет вероятность рассеяния электрона внутри телесного угла  $d\omega$ . Если мы заменим в (15.7) функцию  $\psi_f(\mathbf{r})$  гиперболической волновой функцией, описывающей электрон, испускаемый с импульсом  $p_f$ , а в выражении (15.8) заменим  $\mathfrak{F}$  волновой функцией  $\psi_f(\mathbf{r})$  электрона, захваченного в  $f$ -состоянии в атом, то получим вероятность  $|g(\theta)|^2 d\omega$  того, что падающий электрон захватывается, а атомный электрон испускается. В нерелятивистской теории, учитывая свойства антисимметрии волновой функции, для вероятности рассеяния внутри телесного угла  $d\omega$  получаем выражение вида

$$\Sigma |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\omega; \quad (15.9)$$

суммирование производится здесь по всем возможным исходным и конечным направлениям спина (см. гл. V, § 6). Можно предположить, что в релятивистской теории вероятность рассеяния также определяется формулой (15.9).

Вычислив интегралы типа (15.8) и осуществив суммирование по всем конечным состояниям, мы можем получить формулы, определяющие тормозную способность вещества и вероятность первичной ионизации. Следует, однако, отметить, что в случае первичной ионизации наиболее существенную роль играют столкновения, при которых импульс падающего электрона изменяется лишь незначительным образом. При этих условиях для решения задачи можно воспользоваться методом рассмотрения параметров столкновений. Вильямс [9] показал, что с помощью этого метода могут быть получены все результаты, приводимые ниже, причем падающий электрон трактуется как движущийся силовой центр, а поле соответствует «классической» теории относительности. Отсюда следует, что экспериментальная проверка этих формул не представляла бы собой проверки релятивистской квантовой теории взаимодействия двух электронов. Эта теория дает лишь формулы, которые не могут быть получены каким-либо другим способом в тех случаях, когда падающая частица теряет большую долю своей энергии.

Соотношения, определяющие тормозную способность и сечение ионизации, в обозначениях гл. XI, § 3 и 4, имеют вид<sup>1)</sup>.

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi e^4 N}{mv^2} \left[ \ln \frac{2mv^2}{\alpha R h} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right],$$

$$Q_{nl}^i = \frac{2\pi e^4}{mv^2} \frac{c_{nl} Z_{nl}^*}{|E_{nl}|} \left[ \ln \frac{2mv^2}{C_{nl}} - \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right].$$

Сопоставляя их с соответствующими формулами (11.68) и (11.50), мы видим, что основное различие между этими релятивистскими формулами и формулой нерелятивистской теории заключается в наличии в релятивистских формулах члена  $-\ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$ . Благодаря присутствию этого члена функции  $dT/dx$  и  $Q_{nl}^i$  при достаточно больших скоростях имеют минимум. Для электронов, движущихся в воздухе, Бете и Ферми приводят следующие значения  $dT/dx$ :

| Исходная энергия (в вольтах) | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ | $10^9$ | $10^{10}$ |
|------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| $dT/dx$                      | 3,67   | 1,69   | 1,95   | 2,47   | 2,99   | 3,48      |

Экспериментальная проверка этих формул с помощью космических электронов несколько задержалась в связи с тем обстоятельством, что вначале не удавалось различить мезонную и электронную компоненты излучения. Более поздние опыты Корсона и Броде [11], а также Хазена [12] подтвердили, однако, их справедливость.

Важно, далее, отметить, что в случае рассматриваемых частиц, обладающих большими значениями энергии, передача энергии в значительной степени осуществляется на очень далеких расстояниях. При таких условиях уже нельзя пренебречь возмущающим воздействием соседних атомов. Этот эффект, впервые отмеченный Ферми [13], обуславливает уменьшение потери энергии, так что функция  $dT/dx$ , пройдя через минимум, не стремится затем к бесконечности, но возрастает до некоторого конечного максимума. Более подробные данные по этому вопросу можно найти в оригинальных работах [13, 14].

### § 3. Столкновения между двумя свободными электронами

Метод, изложенный в § 2, впервые был использован Меллером [8, 15] для исследования вопроса о столкновениях между двумя свободными электронами. Поскольку влияние одного электрона на другой трактуется как возмущение первого порядка малости, точность получаемых результатов та же, что и при применении

<sup>1)</sup> Эти формулы были выведены Бете и Ферми [10] по методу Меллера, а также Вильямсом [9] с помощью параметрического метода.



первого приближения метода Борна. Если поле меняется обратно пропорционально квадрату расстояния,  $V = \pm e^2/r$ , то последовательные приближения метода Борна соответствуют разложению в ряд<sup>1)</sup> по степеням постоянной  $2\pi e^2/hv$ . Релятивистская поправка представляет интерес только в том случае, когда  $v \sim c$ ; формула Меллера пренебрегает, таким образом, величиной  $2\pi e^2/hc$  по сравнению с единицей. Попытка получения более точной формулы может быть осуществлена лишь в том случае, если мы примем во внимание потери энергии путем излучения, так как если некоторая частица, движущаяся со скоростью, сравнимой со скоростью света, рассеивается на большой угол, то вероятность потери энергии в форме излучения будет порядка  $2\pi e^2/hc^2$ .

Формула Меллера<sup>3)</sup> для сечения, соответствующего рассеянию в угловом интервале от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ , имеет вид

$$I(\theta) d\theta = 4\pi \left( \frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} dx \left[ \frac{4}{(1-x^2)^2} - \frac{3}{1-x^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^2} \left( 1 + \frac{4}{1-x^2} \right) \right], \quad (15.10)$$

где

$$x = \cos \theta^* = \frac{2 - (\gamma + 3) \sin^2 \theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta}, \quad \gamma = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2},$$

$\theta^*$  — угол рассеяния, отсчитываемый в системе координат, по отношению к которой центр тяжести обоих электронов остается неподвижным. Интересно отметить, что, применив метод, изложенный в предыдущих параграфах, и воспользовавшись релятивистским волновым уравнением второго порядка, не содержащим спиновых членов, мы получим ту же формулу, не содержащую лишь члена

$$\frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma^2} \left[ 1 + \frac{1}{1-x^2} \right]. \quad (15.11)$$

Последний можно, таким образом, рассматривать как обусловленный наличием спина.

При малых углах рассеяния формула Меллера дает следующее выражение для эффективного сечения, соответствующего

<sup>1)</sup> Если в качестве единицы длины мы выберем  $h/2\pi mv$ , то уравнение Шредингера в случае поля, обратно пропорционального квадрату расстояния, приобретает вид

$$\nabla^2 \psi + \left( 1 \pm \frac{4\pi e^2}{hvr} \right) \psi = 0.$$

Уравнение Дирака принимает аналогичную форму (ср. [42]).

<sup>2)</sup> См. § 9. Если сталкивающиеся частицы обладают одинаковыми массами и зарядами, то дипольный момент равен нулю и вероятность излучения значительно меньше.

<sup>3)</sup> См. [15], уравнение (74).

потере энергии в интервале между  $Q$  и  $Q + dQ$ :

$$\frac{2\pi e^4}{mv^2} \frac{dQ}{Q^2}. \quad (15.12)$$

Этот результат был предсказан Бором [16] в 1913 г.

Для проверки формулы (15.10) Чемпионом [17] были поставлены специальные опыты. В камере Вильсона было сфотографировано 250 треков  $\beta$ -лучей при начальных значениях  $v/c$  от 0,82 до 0,92. Как это показано в табл. 26, согласие опытных данных с теоретической формулой является хорошим. Следует, однако, отметить, что для углов, меньших  $30^\circ$ , «спиновый» член (15.11) играет весьма малую роль.

Т а б л и ц а 26

| Угол          | Число рассеянных электронов |            |
|---------------|-----------------------------|------------|
|               | наблюденное                 | по Меллеру |
| $30^\circ$    | 10                          | 13         |
| $20-30^\circ$ | 26                          | 30         |
| $10-20^\circ$ | 214                         | 230        |

С другой стороны, работы Вильямса и Террукса [18] и Вильямса [19] показали, что при  $v/c \sim 0,9$  и  $Q \sim 10\,000$  в потеря энергии почти вдвое больше, чем это следует из формулы (15.12).

#### § 4. Образование пар быстрыми частицами

В гл. IV, § 5, были рассмотрены теория позитрона по Дираку и некоторые следствия, вытекающие из этой теории, поскольку речь идет об образовании и аннигиляции электронно-позитронных пар. Быстрая частица с энергией, превышающей  $2\mu c^2$ , при прохождении через ядро или другой рассеивающий центр может вызвать переход электрона из одного из состояний с отрицательной массой в некоторое другое состояние, в котором его масса положительна. Этот процесс, приводящий к образованию электрона и позитрона (дырки в распределении электронов с отрицательной массой), совершенно аналогичен неупругому столкновению, при котором исходное состояние «связанного» электрона есть одно из континуума состояний с отрицательным значением массы. Для определения сечения такого процесса можно поэтому воспользоваться формулой (15.8) при условии, что функции  $\psi_i(\mathbf{r})$  и  $\psi_f(\mathbf{r})$  в выражении (15.7) характеризуют соответственно электрон в исходном состоянии с отрицательной массой и в конечном состоянии с положительной массой. Если  $\mathbf{p}_-$  и  $\mathbf{p}_+$  — импульсы образующихся позитрона и электрона, то  $\psi_i$  — волновая функция теории Дирака для электрона с импульсом  $-\mathbf{p}_+$  и кинетической

энергией  $-(p_+^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$  в поле рассеивающего ядра, а  $\psi_-$  — соответствующая функция для электрона с импульсом  $p_-$  и кинетической энергией  $(p_-^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ . При этом предполагается, что взаимодействие падающей частицы с электроном является значительно более слабым, чем взаимодействие каждой из этих частиц с рассеивающим центром.

Для того чтобы сечение имело конечную величину, некоторые из функций  $\mathfrak{F}(r')$ ,  $\chi_i(r')$ ,  $\psi_i$  и  $\psi_f$  должны быть отличны от плоских волн. Условие сохранения импульса может выполняться только в том случае, если имеет место обмен импульсом с рассеивающим ядром, т. е. если имеет место какое-либо возмущение плоских волн рассеивающим полем. В первом отличном от нуля приближении можно воспользоваться волновыми функциями второго приближения Борна; в нерелятивистском пределе функция  $\mathfrak{F}(r)$  имеет соответственно вид

$$\mathfrak{F}(r) = e^{-i p_f \cdot r / \hbar} + \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (p_f |r - r'| + p_f \cdot r') \right] \frac{V(r')}{|r - r'|} dz', \quad (15.13)$$

где  $V(r')$  — потенциальная энергия, обусловленная наличием рассеивающего поля; остальные функции определяются выражениями аналогичного вида.

Подробный расчет сечения связан с весьма трудоемкими алгебраическими вычислениями и в общем виде до сих пор не был выполнен. Наиболее детальные вычисления этого рода принадлежат Баба [20]. Сечение, соответствующее образованию при столкновении с тяжелым ядром (заряд  $Ze$ ) столь быстрых электронов, что  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$ , приближенно равно

$$Q = \frac{28}{27\pi} \left( \frac{Z}{137} \right)^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) [\ln(\alpha\gamma)]^3, \quad (15.14)$$

где  $\alpha$  — величина порядка единицы. В табл. 27 приведены

Таблица 27

Сечение  $Q$  для образования пар в свинце быстрыми частицами

| $\gamma$ | Энергия электронов (в Мэв) | Энергия протонов (в Мэв) | $Q$ (в $10^{-24}$ см <sup>2</sup> ) | $Q/Q_T$ |
|----------|----------------------------|--------------------------|-------------------------------------|---------|
| 10       | 5                          | 8500                     | 0,11                                | 0,004   |
| 50       | 25                         | 46000                    | 0,56                                | 0,01    |
| 100      | 50                         | 93000                    | 0,9                                 | 0,02    |
| 500      | 250                        | 470000                   | 2,2                                 | 0,05    |
| 1000     | 500                        | 940000                   | 2,9                                 | 0,06    |

некоторые значения  $Q$ , а также значения отношения  $Q/Q_\gamma$ , где  $Q_\gamma$  — сечение образования пары  $\gamma$ -лучами, квант которых обладает энергией, равной полной энергии электрона<sup>1)</sup>. При условии  $\gamma \gg 1$  численные данные, содержащиеся в таблице, справедливы также и для образования пар протонами с тем же значением  $\gamma$ , которое соответствует электронам.

### § 5. Аннигиляция позитронов, не сопровождающаяся излучением

Позитрон, сталкивающийся с атомом, представляет собой вакантное состояние, в которое может перейти атомный электрон; при таком переходе освобождается энергия, превышающая  $2mc^2$ . Эта энергия может быть либо излучена, либо передана второму электрону, который в результате покидает атом, обладая при этом большой кинетической энергией. Во втором случае аннигиляция позитрона не сопровождается, таким образом, излучением.

Этот процесс представляет собой, по существу, эффект Оже, и для вычисления его вероятности можно воспользоваться формулой (15.6), причем функция  $\chi_f$  — волновая функция теории Дирака для электрона с импульсом  $-\mathbf{p}_+$  и энергией  $-(p_+^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ , а  $\mathbf{p}_+$  — импульс позитрона. Вероятность такого процесса очень мала (в свинце в нем принимает участие примерно один из  $10^4$  позитронов). Подробно этот вопрос исследован в работе Месси и Бургопа [21].

### § 6. Столкновение позитрона со свободным электроном

Если пренебречь обменными эффектами, то формула Меллера (15.10) приобретает вид

$$4\pi \left( \frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\gamma+1}{\gamma^3} dx \left[ \frac{4}{(1-x)^2} - \frac{2(\gamma^2-1)}{\gamma} (1-x) + \frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma} (1-x)^2 \right]. \quad (15.15)$$

На первый взгляд, следовало бы ожидать, что эта формула может быть использована при рассмотрении вопроса о столкновениях позитронов с электронами, поскольку частицы отличны друг от друга, и обменные эффекты соответственно не должны иметь места. Баба [22] указал, однако, что, согласно дырочной теории позитрона, обменные эффекты должны иметь место также и в этом случае. Механизм эффектов можно представить себе следующим образом.

<sup>1)</sup> См. [1], гл. IV.

Вначале электрон занимает состояние  $a_i$  с положительной массой, а позитрон представляет собой вакантное состояние  $b_i$  с отрицательной массой. Пусть после столкновения соответствующие состояния суть  $a_f$  и  $b_f$ . Такое столкновение можно рассматривать как столкновение между электроном 1 в состоянии  $a_i$  и электроном 2 в состоянии  $b_f$  с отрицательной массой, в результате которого либо электрон 1 переходит в состояние  $a_f$ , а электрон 2 — в состояние  $b_i$ , либо электрон 2 переходит в состояние  $a_f$ , а электрон 1 — в состояние  $b_i$ . Обменный эффект обусловлен наличием этих двух возможностей. Этот эффект можно также рассматривать как обусловленный взаимной аннигиляцией сталкивающихся электрона и позитрона, сопровождающейся их переходом в другую пару состояний.

При учете обменного эффекта формула (15.15) приобретает вид

$$4\pi \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{\gamma+1}{\gamma^3} dx \left\{ \frac{4}{(1-x)^2} - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (2\gamma^2 + 4\gamma + 1) \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} (\gamma-1)^2 \times \right. \\ \times \left[ 5 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2 (\gamma^2 + 2\gamma + 3) - \gamma \frac{(\gamma-1)^3}{(\gamma+1)^2} \right] (1-x) + \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{(\gamma-1)^4}{\gamma+1} (1-x)^2 \right\}. \quad (15.16)$$

При этом, в отличие от случая столкновения между двумя электронами, обменный эффект перестает сказываться в нерелятивистском пределе  $\gamma \rightarrow 1$ , как и следовало ожидать, исходя из анализа природы этого эффекта.

Разница между выражениями (15.15) и (15.16) становится наиболее существенной при больших углах рассеяния, однако численное значение отношения между ними никогда не превышает 2. Для того чтобы подтвердить существование обменного эффекта, необходимы весьма прецизионные экспериментальные исследования; соответствующие предварительные измерения были проведены Хо Ца Веем [23].

## § 7. Столкновение мезона с электроном

Столкновение быстрого мезона с электроном может быть исследовано с помощью формулы (15.6), причем потенциалы  $\phi$  и  $\mathbf{a}$  соответствуют в этом случае исходному и конечному состояниям мезона. Получаемый результат зависит от спина мезона, поскольку взаимодействие этого спина с орбитальным движением и со спином электрона может играть существенную роль.

Для практических расчетов удобно ввести в рассмотрение сечение  $S(Q) dQ$ , соответствующее потере энергии мезоном в ин-

тервале от  $Q$  до  $Q + dQ$ , причем  $Q$  измеряется в единицах  $\mu c^2$ , где  $\mu$  — масса мезона. Это сечение равно [24]

$$S(Q) dQ = 2\pi \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha \frac{dQ}{Q^2} \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} - \frac{Q}{Q_m} + G(Q) \right], \quad (15.17)$$

где

$$G(Q) = 0 \quad \text{для мезонов со спином } 0; \quad (15.18)$$

$$G(Q) = \frac{Q^2}{2(\gamma^2 - 1)} \quad \text{для мезонов со спином } 1/2, \quad (15.19)$$

$$G(Q) = \alpha \frac{(2\gamma^2 + 1)}{6(\gamma^2 - 1)} Q + \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - \frac{\alpha}{Q_m} \right) \frac{1}{3} Q^2 + \frac{\alpha Q^3}{6(\gamma^2 - 1)}$$

для мезонов со спином 1. (15.20)

В этих формулах  $\alpha = m/\mu$ , а  $Q_m$  — максимальное значение  $Q$ , равное

$$Q_m = \frac{2\alpha(\gamma^2 - 1)}{1 + 2\alpha\gamma - \gamma^2}.$$

Наибольший интерес представляет случай мезона со спином 1; впервые он был исследован Месси и Корбенем [24]. В предельном релятивистском случае, когда  $\alpha Q \gg 1$ , сечение  $S(Q)$  для векторных мезонов (спин 1) в  $\frac{1}{3} \alpha Q$  раз больше, чем для мезонов со спином  $1/2$ . Это обстоятельство должно было бы привести к значительному избытку быстрых электронов, появляющихся в результате столкновений с мезонами с очень большими энергиями. Образование ливней мезонной (проникающей) компонентой космических лучей в первую очередь, повидимому, обусловлено либо появлением таких электронов, либо появлением больших квантов энергии в результате тормозного излучения, даваемого мезоном при прохождении через ядро. Вначале последний эффектом пренебрегали; при этом было найдено [25], что теоретическое значение вероятности образования ливня проникающей компонентой космического излучения находится в согласии с опытными данными, если скорость образования быстрых движущихся в продольном направлении электронов вычислена по формуле (15.20). Отсюда было сделано заключение, что мезоны обладают спином, равным 1. В дальнейшем было, однако, найдено [26], что эффект, которым пренебрегали, является более существенным, чем исследуемый; в настоящее время есть основания [26, 27], хотя и далекие от вполне достоверных, предполагать, что мезонам, наблюдаемым вблизи уровня моря, может быть приписан спин, меньший единицы.

Возникает также существенный вопрос о пригодности метода Меллера в том случае, когда спиновые эффекты столь велики. Для ответа на этот вопрос естественно исследовать рассеяние векторных мезонов статическим кулоновым полем, не прибегая при этом к каким-либо приближениям.

### § 8. Рассеяние векторных мезонов статическим полем

Для рассеяния статическим кулоновым полем заряда  $Ze$  приближение Борна дает результат, который может быть получен из предыдущего, если мы положим  $\alpha \rightarrow 0$ . Дифференциальное сечение определяется при этом формулой вида

$$I(\theta) = \frac{Z^2 e^4}{4\mu^2 v^4} \frac{1}{\gamma^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{6\gamma^2} \sin^2 \theta \right]. \quad (15.21)$$

Эту формулу можно сопоставить с соответствующей формулой, полученной в гл. IV, § 4, для частицы со спином  $1/2$ , в которой выражение, заключенное в скобки, заменено выражением вида

$$1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \sin^2 \theta.$$

В последнем случае учет спина приводит к наличию члена, который остается конечным в пределе при  $v \rightarrow c$ , тогда как для векторного или псевдовекторного мезона при  $v \rightarrow c$  соответствующий член неограниченно возрастает.

Справедливость этого результата вызывает сомнение при исследовании задачи о рассеянии без использования приближения Борна. Впервые это было отмечено Корбенем и Швингером [28] и Таммом [29], применившими уравнения Прока для векторного мезона. В этом случае оказывается возможным разделить радиальные и угловые координаты. При заданном значении полного момента количества движения  $[j(j+1)]^{1/2} \hbar$  радиальное движение мезонов с  $j=l$ , где  $[l(l+1)]^{1/2} \hbar$  — орбитальный момент количества движения, описывается обычным уравнением Клейна—Гордона для частицы массы  $\mu$  со спином 0. Для мезонов с  $l = j \pm 1$  радиальное движение описывается совокупностью двух уравнений второго порядка. В случае кулонова поля решения этих уравнений обладают существенно особой точкой в начале координат, что не дает возможности получить полный ряд собственных решений, необходимых для исследования задачи о рассеянии. В настоящее время еще не ясно, в какой степени интенсивность рассеяния должна зависеть от способа устранения этой особой точки. До тех пор, пока этот вопрос не будет разрешен, справедливость формул (15.21) и (15.20) должна оставаться под сомнением.

Подробная формальная теория вопроса о рассеянии векторных мезонов статическим полем  $V(r)$  была дана Гунном [30] на основе рассмотрения асимптотических значений фаз различных парциальных волн в предположении, что собственные решения задачи существуют. Полученные при этом соотношения представляют собой естественное обобщение соотношений, приведенных в гл. V, § 4, для рассеяния электронов по Дираку.

### § 9. Вывод формул теории излучения по методу Борна

Мы покажем теперь, как метод, описанный в гл. VIII, § 3 и 4, и примененный к исследованию различных явлений, связанных со столкновениями, не сопровождающимися излучением, может быть использован также и для исследования явлений излучения. Будучи менее удобным для этой цели, по сравнению с методами, изложенными в гл. XIV, он приводит тем не менее к точно таким же конечным результатам.

Процесс излучения некоторой частицей при столкновении формально можно рассматривать как обусловленный взаимодействием между этой частицей и полем излучения. Поле излучения может быть описано некоторым распределением гармонических осцилляторов, квантованных обычным образом. Излучение кванта с частотой  $\nu$  вызывается возбуждением осциллятора, обладающего указанной частотой, из его основного состояния в первое возбужденное состояние.

Рассмотрим излучение, содержащееся в некоторой полости большого объема  $V$ . Число квантов с частотами в интервале между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$  равно

$$dN = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu. \quad (15.22)$$

Вектор-потенциал, связанный с излучением частоты  $\nu_s$ , может быть записан в виде

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) = a_s u_s(t) \sin \left[ \frac{2\pi\nu_s}{c} \boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{r} + \beta_s \right], \quad (15.23)$$

где  $\mathbf{a}_s$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_s$  — два взаимно перпендикулярных единичных вектора, а  $\beta_s$  — фазовый угол. Множитель  $u_s(t)$ , зависящий от времени, может быть найден с помощью оператора Гамильтона [31]

$$H_{1s} = \frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2, \quad (15.24)$$

где

$$u_s = \left( \frac{8\pi c^2}{V} \right)^{1/2} q_s, \quad \dot{u}_s = \left( \frac{8\pi c^2}{V} \right)^{1/2} p_s. \quad (15.25)$$

Эти соотношения могут быть использованы как основа для квантования, поскольку оператор Гамильтона для излучения имеет вид

$$H_1 = \sum_s H_{1s}.$$

Соответствующее волновое уравнение

$$(H_1 - E)\psi = 0 \quad (15.26)$$

будет обладать собственными решениями

$$\psi_{n_1 n_2 \dots n_s \dots} = \varphi_{n_1}(q_1) \varphi_{n_2}(q_2) \dots \varphi_{n_s}(q_s) \dots, \quad (15.27)$$



где  $\varphi_{n_s}(q_s)$  — собственное решение уравнения для гармонического осциллятора, обладающего частотой  $\nu_s$  и энергией

$$E_{n_s} = \left( n_s + \frac{1}{2} \right) h \nu_s. \quad (15.28)$$

Состоянию, характеризующемуся функцией (15.27), соответствует, таким образом,  $n_s$  квантов с частотой  $\nu_s$ .

При наличии каких-либо частиц полный оператор Гамильтона может быть записан в форме

$$H = H_1 + H_2 + H_3, \quad (15.29)$$

где  $H_2$  — оператор Гамильтона для частиц, учитывающий статическое взаимодействие между ними. Оператор  $H_3$  характеризует взаимодействие между частицами и излучением. Для того чтобы найти  $H_3$ , отметим, что при нерелятивистских условиях взаимодействие описывается выражением вида

$$\sum_i \left[ -\frac{e_i}{m_i c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_i + \frac{e_i^2 A^2}{2m_i^2 c^2} \right], \quad (15.30)$$

где  $\mathbf{p}_i$  — импульс,  $e_i$  — заряд, а  $m_i$  — масса  $i$ -й частицы. Мы можем записать

$$H_3 = -\left(\frac{8\pi}{V}\right)^{1/2} \sum_i \sum_s \frac{e_i}{m_i} \mathbf{a}_s \cdot \mathbf{p}_i q_s \sin \gamma_s + \\ + \frac{4\pi}{V} \sum_i \sum_s \sum_r \frac{e_i^2}{m_i} \mathbf{a}_s \cdot \mathbf{a}_r q_s q_r \sin \gamma_s \sin \gamma_r, \quad (15.31)$$

где

$$\gamma_s = \frac{2\pi\nu_s}{c} (\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{r}) + \beta_s. \quad (15.32)$$

Определим теперь, в порядке иллюстрации, вероятность того, что рассеяние некоторой частицы массы  $m$  статическим полем  $V(r)$  будет сопровождаться испусканием кванта излучения.

Обозначим через

$$I(\theta, \varphi; \alpha, \beta; \nu) d\omega d\Omega d\nu \quad (15.33)$$

вероятность того, что частица окажется рассеянной в направлении  $(\theta, \varphi)$  внутри телесного угла  $d\omega$  после испускания кванта света с частотой в интервале между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ , электрический вектор которого обладает направлением  $\alpha, \beta$  внутри телесного угла  $d\Omega$ .

Уравнение Шредингера может быть записано в форме

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + V(r) + H_1(p_s, q_s) + H_3(q_s, \mathbf{r}, \mathbf{p}) - E \right] \Psi = 0. \quad (15.34)$$

Мы можем теперь воспользоваться непосредственно формулой (7.32), заменив в ней  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  на  $V(r) - H_3(q_s, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ ,

$\psi_0$  на  $\varphi_{n_1}(q_1)\varphi_{n_2}(q_2)\dots\varphi_{n_s}(q_s)$  (что соответствует наличию  $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$  квантов с частотами  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s, \dots$  в исходном состоянии),  $\psi_n$  на  $\varphi_{n_1}(q_1)\varphi_{n_2}(q_2)\dots\varphi_{n_{s+1}}(q_s)\dots$  (в соответствии с  $n_1, n_2, \dots, n_{s+1}, \dots$  квантами с частотами  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s, \dots$  в конечном состоянии),  $d\tau_a d\tau_b$  на  $\prod_s dq_s$ . Функции  $F_0$  и  $\mathfrak{F}_n$

будут удовлетворять уравнениям

$$\left[ \nabla^2 + k_{0,n}^2 - \frac{\mathcal{E}\pi^2 m}{h^2} V \right] F_0, \mathfrak{F}_n = 0, \quad (15.35)$$

так как в этом случае

$$V_{00} = \int [V(r) - H_3(q_s, \mathbf{r}, \mathbf{p})] \times \\ \times |\varphi_{n_1}|^2 |\varphi_{n_2}|^2 \dots |\varphi_{n_s}|^2 \dots dq_1 dq_2 \dots dq_s \dots = V(r) = V_{nn}. \quad (15.36)$$

Используя хорошо известный результат для волновых функций осциллятора, согласно которому

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_s \varphi_{n_s}(q_s) \varphi_{n_s+1}^*(q_s) dq_s = \left[ \frac{(n_s+1)h}{8\pi^2\nu} \right]^{1/2}, \quad (15.37)$$

имеем

$$V_{0n}(r) = \int [V(r) - H_3(q_s, \mathbf{r}, \mathbf{p})] \varphi_{n_s}(q_s) \varphi_{n_s+1}^*(q_s) dq_s = \\ = \left[ \frac{(n_s+1)h}{8\pi^2\nu} \right]^{1/2} \frac{i\hbar e}{m} \left( \frac{8\pi}{V} \right)^{1/2} \sin \gamma_s \mathbf{a}_s \cdot \text{grad}. \quad (15.38)$$

Выясним теперь, какова роль отдельных осцилляторов с частотами  $\nu_s$  при определении величины  $I(\theta, \varphi; \alpha, \beta; \nu)$ . Поскольку имеется всего  $8\pi V \nu_s^2 d\nu_s/c^3$  таких осцилляторов и полагая  $n_s=0$ , находим

$$I(\theta, \varphi; \alpha, \beta; \nu) d\nu = \\ = \frac{8\nu e^2 k_n}{hc^3 \cdot k} A \left| \int \mathfrak{F}_n(r', \pi - \Theta) \mathbf{a}_s \sin \gamma_s \cdot \text{grad} F_0(r', \theta') d\tau' \right|^2 d\nu. \quad (15.39)$$

Множитель  $A$  обозначает здесь усреднение по фазам  $\beta_s$ .

При вычислении этого выражения отметим прежде всего, что размеры области, в которой произведение  $\mathfrak{F}_n$  на  $F_0$  заметно отлично от нуля, не превышают исходного или конечного значения длины волны рассматриваемой частицы. Эта длина волны обычно значительно меньше длины волны испускаемого излучения, так что в рассматриваемой области величину  $\gamma_s$  можно считать постоянной. Усреднение по фазам  $\beta_s$  эквивалентно поэтому просто умножению на  $1/2$  и опусканию множителя  $\sin \gamma_s$ .

Если мы предположим, что произведение  $F_0 \mathfrak{F}_n$  убывает быстрее, чем  $r^{-2}$ , то интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{F}_n \text{grad } F_0 \, d\tau &= \frac{1}{2} \int (\mathfrak{F}_n \text{grad } F_0 - F_0 \text{grad } \mathfrak{F}_n) \, d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int \mathbf{r} (\mathfrak{F}_n \nabla^2 F_0 - F_0 \nabla^2 \mathfrak{F}_n) \, d\tau. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Используя уравнения (15.35), которым подчиняются функции  $F_0$  и  $\mathfrak{F}_n$ , и учитывая, что

$$k^2 - k_n^2 = \frac{8\pi^2 m \nu}{h},$$

имеем окончательно

$$\int \mathfrak{F}_n \text{grad } F_0 \, d\tau = \frac{4\pi^2 m \nu}{h} \int \mathbf{r} \mathfrak{F}_n F_0 \, d\tau. \quad (15.41)$$

В рассматриваемом случае произведение  $F_0 \mathfrak{F}_n$  не должно убывать быстрее, чем  $r^{-2}$ , однако можно воспользоваться предыдущим результатом, вводя в подынтегральную функцию множитель сходимости  $e^{-\lambda r}$  и полагая после интегрирования  $\lambda \rightarrow 0$ .

Мы находим при этом, что

$$\begin{aligned} &I(\theta, \varphi; \alpha, \beta; \nu) \, d\nu = \\ &= \frac{64\pi^4 m^2 \nu^3}{h^2 c^3} \frac{k_n}{k} \left| \mathbf{a}_s \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int \mathbf{r}' e^{-\lambda r'} \mathfrak{F}_n(r', \pi - \theta) F_0(r', \theta') \, d\tau' \right|^2 \, d\nu. \end{aligned} \quad (15.42)$$

Интегрируя по всем направлениям испускания и поляризации излучаемого кванта, получаем

$$I(\theta, \varphi; \nu) \, d\nu = \frac{128\pi^5 m^2 \nu^3}{3h^2 c^3} \left\{ \frac{1}{2} |M_x|^2 + \frac{1}{2} |M_y|^2 + |M_z|^2 \right\} \, d\nu, \quad (15.43)$$

где

$$\left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int \left\{ \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\} e^{-\lambda r'} \mathfrak{F}_n(r', \pi - \theta) F_0(r', \theta') \, d\tau'. \quad (15.44)$$

Это — обычная формула, используемая, например, Зоммерфельдом [32], Шернером [33] и Мауе [34] при исследовании интенсивности непрерывного рентгенова спектра.

Если падающая и рассеянная частицы обладают большими скоростями, однако не столь большими, чтобы при этом необходимо было учитывать релятивистские эффекты, то можно воспользоваться методом Борна (гл. VII, § 1), который дает во втором приближении

$$F_0 \approx e^{ikn_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{2\pi m}{h^2} \int V(r') \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ikz'} \, d\tau'. \quad (15.45)$$

Функция  $\mathfrak{F}_n$  определяется выражением аналогичного вида, с той разницей, что  $k, \mathbf{n}_0$  заменено на  $k_n, \mathbf{n}$ . Для того чтобы результат

имел конечное значение, эту задачу следует решать во втором приближении.

Аналогичный метод может быть использован также и при рассмотрении других вопросов теории излучения. Исследуемые процессы могут быть при этом классифицированы как процессы первого, второго или более высоких порядков, в соответствии с тем, должны ли быть учтены члены первого, второго или более высоких порядков при применении метода последовательных приближений Борна для получения конечного результата. Таким путем можно показать, что этот метод полностью эквивалентен обычно применяемому методу Дирака, основанному на варьировании параметров при наличии возмущений, зависящих от времени. С подробным изложением этого метода и его приложениями читатель может ознакомиться по книге Гайтлера [1].

### § 10. Влияние радиационных сил на ядерное рассеяние

Если мы применим формулы (15.43), (15.44) и (15.45) к случаю рассеяния электрона кулоновым полем  $V(r) = -Ze^2/r$ , то дифференциальное сечение для рассеяния электрона в заданном элементе телесного угла  $d\omega$ , сопровождающегося испусканием кванта с частотой в интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , определится выражением вида [35]

$$I(\theta, \varphi; \nu) d\nu d\omega = \frac{p'}{p} \frac{4e^2}{3hc} \frac{|p' - p|^2}{m^2 c^2} \frac{d\nu}{\nu} I_0(\theta, \varphi) d\omega, \quad (15.46)$$

где

$$I_0(\theta, \varphi) = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$$

есть дифференциальное сечение упругого рассеяния,  $p$  и  $p'$  — исходное и конечное значения импульса электрона.

Очевидно, что если мы проинтегрируем сечение (15.46) вплоть до значения частоты, равного нулю, то получим логарифмически расходящееся выражение. Впервые эта трудность была проанализирована Блохом и Нордзиком. При этом было установлено, что при низких частотах метод теории возмущений, развитый в предыдущем параграфе, становится совершенно непригодным. При применении этого метода взаимодействие между электроном и излучением предполагается малым и описывается путем разложения в степенной ряд функции  $\frac{e^2}{\hbar c} \frac{v^2}{c^2} \ln(E/h\nu)$ , где  $E$  — энергия электрона; очевидно, что при малых значениях  $\nu$  такой метод описания взаимодействия становится неприемлемым. Блох и Нордзик [36] предложили для этого случая иной метод решения задачи, при котором взаимодействие между электроном и полем излучения уже не предполагается малым, а возмущением является рассеивающее поле. При такой постановке задачи, развитой

в дальнейшем Паули и Фирдем [37], логарифмическая расходимость при малых  $\nu$  уже не имеет места, но вместо этого появляется расходимость в предельном случае очень высоких частот. Причина этой расходимости была исследована Браунбеком и Вейнманном [38]. Вычисление выражения (15.46) в следующем приближении приводит к появлению поправочного члена, обусловленного наличием поля излучения. Этот член можно рассматривать как соответствующий процессу испускания и вторичного поглощения виртуального кванта электроном в присутствии ядра. Поправка к  $I_0(\theta, \varphi)$ , обусловленная виртуальным квантом с частотой, лежащей в интервале между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ , равна

$$\delta I_0(\theta, \varphi) = -\frac{4e^2}{3hc} \frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2}{m^2 c^2} \frac{d\nu}{\nu} I_0(\theta, \varphi). \quad (15.47)$$

В предельном случае  $\nu = 0$  присутствие этого члена устраняет расходимость выражения (15.46). С другой стороны, поскольку рассматриваемые кванты являются виртуальными, верхнего предела изменения частоты  $\nu$  не существует, и поправочный член расходуется при  $\nu \rightarrow \infty$ . Можно было бы возразить на это, что релятивистские соображения должны были бы изменить вид функции (15.47) при больших значениях частот; Данков [39] показал, однако, что в релятивистской теории расходимость устраняется лишь для частиц с нулевым спином. Этот результат был распространен на случай электронов Льюисом [40], показавшим, что расходящиеся члены, полученные в этом случае Данковым, в действительности обусловлены бесконечным значением электромагнитной массы и могут быть устранены путем перенормировки последней. Поправка  $\delta I_0$  к упругому сечению при этом оказывается столь малой, что ею можно пренебречь, так что для нерелятивистских условий

$$\frac{\delta I_0}{I_0} = -\frac{4e^2}{3hc} \frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2}{m^2 c^2} \ln \frac{km c^2}{E},$$

где  $k$  есть  $0(1)$ , а  $E$  — исходное значение кинетической энергии электрона. Исследования Швингера [41] в области квантовой электродинамики показали, что также и в ряде других случаев конечные члены, обусловленные взаимодействием с полем излучения, могут быть отделены от расходящихся членов, связанных с бесконечным значением собственной энергии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М.—Л., 1940.
2. Dirac, Proc. Roy. Soc., A117, 618 (1928).
3. Darwin, Proc. Roy. Soc., 118, 654 (1928); Gordon, Zs. f. Phys., 48, 1 (1928).
4. Klein and Nishina, Zs. f. Phys., 52, 893 (1929); Hulme, Proc. Roy. Soc., A133, 381 (1931); Sauter, Ann. d. Phys., 9, 217 (1931).

5. Dirac, Proc. Roy. Soc., A114, 243 (1927).
6. Klein, Zs. f. Phys., 41, 407 (1927).
7. Massey and Burhop, Proc. Roy. Soc., A153, 661 (1936).
8. Møller, Zs. f. Phys., 70, 786 (1931).
9. Williams, Proc. Roy. Soc., 139, 163 (1933).
10. Bethe and Fermi, Zs. f. Phys., 77, 296 (1932).
11. Corson and Brode, Phys. Rev., 53, 773 (1938); Brode, Rev. Mod. Phys., 11, 222 (1939).
12. Hazen, Phys. Rev., 67, 269 (1945).
13. Fermi, Phys. Rev., 56, 1242 (1939).
14. Fermi, Phys. Rev., 57, 485 (1940); Halpern and Hall, Phys. Rev., 57, 459 (1940); 73, 477 (1948); Hayward, там же, 72, 937 (1947); Hereford, там же, 74, 574 (1948).
15. Møller, Ann. d. Phys., 14, 531 (1932).
16. Bohr, Phil. Mag., 25, 10 (1913); 30, 58 (1915).
17. Champion, Proc. Roy. Soc., A137, 688 (1932).
18. Williams and Terroux, Proc. Roy. Soc., A130, 328 (1930).
19. Williams, Proc. Roy. Soc., A126, 289 (1929).
20. Bhabha, Proc. Roy. Soc., A152, 559 (1935).
21. Massey and Burhop, Proc. Roy. Soc., A167, 53 (1938).
22. Bhabha, Proc. Roy. Soc., A154, 195 (1936).
23. Ho Zoh Wei, Compt. rend., 222, 1168 (1946).
24. Massey and Corben, Proc. Cambr. Phil. Soc., 35, 463 (1939); Corben and Schwinger, Phys. Rev., 58, 953 (1940); Bhabha, Proc. Roy. Soc., A164, 257 (1938).
25. Bhabha, Carmichael and Chou, Proc. Ind. Acad. Sci., 10, 221 (1939); Carmichael and Chou, Nature, 144, 325 (1939).
26. Christy and Kusaka, Phys. Rev., 59, 414 (1941); Booth and Wilson, Proc. Roy. Soc., A175, 483 (1940).
27. Kusaka, Phys. Rev., 64, 256 (1943); Majumdar, там же, 56, 206 (1944).
28. Corben and Swinger, Phys. Rev., 58, 953 (1940).
29. Тамм, Phys. Rev., 58, 952 (1940).
30. Gunn, Proc. Roy. Soc., A193, 559 (1948); Bartlett, Phys. Rev., 72, 219 (1947).
31. Fermi, Rev. Mod. Phys., 4, 131 (1932).
32. Sommerfeld, Ann. d. Phys., 11, 257 (1931).
33. Scherzer, Ann. d. Phys., 13, 137 (1932).
34. Maue, Ann. d. Phys., 13, 161 (1932).
35. Mott, Proc. Cambr. Phil. Soc., 27, 255 (1931).
36. Bloch and Nordsieck, Phys. Rev., 52, 54 (1937).
37. Pauli and Fierz, Nuovo Cim., 15, 167 (1938).
38. Braunbek und Weinmann, Zs. f. Phys., 110, 360 (1938).
39. Dancoff, Phys. Rev., 55, 959 (1939).
40. Lewis, Phys. Rev., 73, 173 (1948).
41. Schwinger, Phys. Rev., 74, 1439 (1948).
42. Mott, Proc. Roy. Soc., A124, 425 (1931).
43. Dirac, Kvantum Mechanics, 3 изд., Oxford, 1947.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| Предисловие редактора перевода . . . . .  | 3         |
| Из предисловия ко второму изданию . . . . .   | 5         |
| Введение . . . . .  | 7         |
| <b>Глава I. Волновое уравнение . . . . .</b>  | <b>11</b> |
| § 1. Волновая функция . . . . .   | 11        |
| § 2. Волновая механика стационарных пучков электронов . . . . .   | 12        |
| § 3. Примеры волновых функций, описывающих стационарные пучки электронов. Бесконечная плоская волна . . . . . | 16        |
| § 4. Пучок электронов в отсутствие внешних сил . . . . .  | 16        |
| § 5. Одномерные задачи . . . . .  | 19        |
| § 6. Решение волнового уравнения для электрона, движущегося в медленно меняющемся поле . . . . .              | 21        |
| § 7. Формулы для тока; сохранение заряда . . . . .  | 23        |
| § 8. Задачи, в которых $ \psi ^2$ меняется с течением времени . . . . .                                       | 25        |
| § 9. Волновые пакеты . . . . .  | 27        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>31</b> |
| <b>Глава II. Теория рассеяния пучка частиц силовым центром . . . . .</b>                                      | <b>32</b> |
| § 1. Вычисление интенсивности рассеяния . . . . .   | 32        |
| § 2. Соотношение между фазами $\eta_l$ и моментом количества движения рассеянной частицы . . . . .            | 39        |
| § 3. Рассеяние потенциальной ямой . . . . .   | 43        |
| § 4. Рассеяние потенциальным барьером . . . . .   | 53        |
| § 5. Рассеяние непроницаемой сферой . . . . .   | 56        |
| § 6. Рассеяние полем, обратно пропорциональным кубу расстояния . . . . .                                      | 57        |
| § 7. Дисперсионная формула для сечения рассеяния . . . . .  | 59        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>63</b> |
| <b>Глава III. Рассеяние пучка частиц кулоновым полем . . . . .</b>  | <b>64</b> |
| § 1. Введение . . . . .   | 64        |
| § 2. Решение волнового уравнения для случая рассеяния кулоновым полем . . . . .                               | 66        |
| § 3. Обобщенные гипергеометрические ряды . . . . .  | 69        |
| § 4. Радиальные волновые функции для состояний с положительной энергией в кулоновом поле . . . . .            | 72        |
| § 5. Проницаемость потенциального барьера для случая кулонова поля . . . . .                                  | 74        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>77</b> |
| <b>Глава IV. Спин электрона . . . . .</b>   | <b>78</b> |
| § 1. Магнитный момент атома . . . . .   | 78        |
| § 2. Магнитный момент электрона . . . . .   | 82        |

|  |            |
|--|------------|
| § 3. Релятивистское волновое уравнение . . . . .   | 88         |
| § 4. Рассеяние электронов силовым центром . . . . .  | 96         |
| § 5. Позитрон . . . . .  | 109        |
| Литература . . . . .   | 112        |
| <b>Глава V. Столкновения между двумя частицами. Нерелятивистская теория . . . . .</b>                            | <b>114</b> |
| § 1. Введение . . . . .  | 114        |
| § 2. Взаимодействие между двумя неодинаковыми частицами. Нерелятивистская теория без учета спина . . . . .       | 114        |
| § 3. Теория взаимодействия двух одинаковых частиц . . . . .  | 117        |
| § 4. Столкновения между двумя одинаковыми частицами, не обладающими спином . . . . .                             | 122        |
| § 5. Столкновения между двумя одинаковыми частицами, обладающими спином . . . . .                                | 130        |
| § 6. Столкновения между одинаковыми ядрами . . . . .   | 133        |
| Литература . . . . .   | 134        |
| <b>Глава VI. Неоднородные дифференциальные уравнения . . . . .</b>   | <b>135</b> |
| § 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общее решение . . . . .  | 135        |
| § 2. Решение, удовлетворяющее граничным условиям . . . . .   | 137        |
| § 3. Дифференциальные уравнения в частных производных . . . . .  | 141        |
| § 4. Решение уравнения $(\Delta^2 + k^2)\psi = F(x, y, z)$ . . . . .   | 144        |
| Литература . . . . .   | 146        |
| <b>Глава VII. Рассеяние силовым центром (интегральное уравнение; различные теоремы) . . . . .</b>                | <b>147</b> |
| § 1. Приближение Борна . . . . .   | 147        |
| § 2. Соотношение между формулой Борна и точной формулой для $f(\theta)$ . . . . .                                | 150        |
| § 3. Релятивистская поправка . . . . .   | 151        |
| § 4. Классический предел формул рассеяния квантовой теории . . . . .   | 152        |
| § 5. Пределы применимости приближения Борна и классического приближения . . . . .                                | 156        |
| § 6. Методы вычисления интенсивности рассеяния центральным полем сил . . . . .                                   | 158        |
| Литература . . . . .   | 165        |
| <b>Глава VIII. Общая теория атомных столкновений . . . . .</b>   | <b>166</b> |
| § 1. Теоремы сохранения [1]. Максимальное значение сечения при заданном моменте количества движения . . . . .    | 167        |
| § 2. Столкновения электронов с атомами водорода. Приближение Борна . . . . .                                     | 171        |
| § 3. Общий случай столкновений двух систем . . . . .   | 174        |
| § 4. Столкновения, сопровождающиеся перераспределением частиц . . . . .  | 175        |
| § 5. Приближенные методы рассмотрения медленных столкновений. Метод искаженных волн . . . . .                    | 180        |
| § 6. Приближенные методы рассмотрения медленных столкновений. Случай сильной связи . . . . .                     | 182        |
| § 7. Приближенные методы рассмотрения медленных столкновений. Метод возмущенных стационарных состояний . . . . . | 190        |
| § 8. Метод комплекса сталкивающихся частиц . . . . .   | 195        |
| § 9. Сводка методов исследования неупругих столкновений . . . . .  | 217        |
| § 10. Столкновения между двумя системами, одна из которых была вначале неподвижной . . . . .                     | 217        |
| Литература . . . . .   | 218        |



|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава IX. Столкновения быстрых электронов с атомами. Упругое рассеяние. Приближение Борна . . . . .</b>                    | <b>219</b> |
| § 1. Введение. Экспериментальные методы и результаты . . . . .  | 219        |
| § 2. Упругое рассеяние. Первое приближение Борна . . . . .  | 223        |
| § 3. Рассеяние электронов атомами водорода и гелия . . . . .  | 224        |
| § 4. Вычисление $I(\theta)$ и $Q_0$ для сложных атомов . . . . .  | 227        |
| § 5. Применимость первого приближения Борна . . . . .   | 230        |
| § 6. Многократное рассеяние . . . . .   | 235        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>241</b> |
| <b>Глава X. Упругое рассеяние медленных электронов атомами . . . . .</b>  | <b>242</b> |
| § 1. Эффекты Рамзауера и Таунсенда . . . . .  | 242        |
| § 2. Теория рассеяния медленных электронов. Метод парциальных сечений . . . . .   | 245        |
| § 3. Общие приложения метода парциальных сечений . . . . .  | 248        |
| § 4. Количественные приложения метода парциальных сечений . . . . .   | 252        |
| § 5. Обмен электронами при упругих столкновениях . . . . .  | 257        |
| § 6. Обменный эффект при упругом рассеянии электронов атомами водорода и гелия . . . . .                                      | 257        |
| § 7. Влияние поляризации . . . . .  | 264        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>267</b> |
| <b>Глава XI. Неупругие столкновения электронов с атомами . . . . .</b>  | <b>269</b> |
| § 1. Общие формулы . . . . .  | 269        |
| § 2. Вычисление дифференциальных сечений для водорода и гелия. Угловое распределение неупруго рассеянных электронов . . . . . | 272        |
| § 3. Полные сечения . . . . .   | 287        |
| § 4. Вычисление тормозной способности вещества для быстрых электронов . . . . .   | 295        |
| § 5. Неупругие столкновения медленных электронов с атомами . . . . .  | 303        |
| § 6. Заключение . . . . .   | 312        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>314</b> |
| <b>Глава XII. Столкновения между тяжелыми частицами . . . . .</b>   | <b>316</b> |
| § 1. Физические явления, рассматриваемые в данной главе . . . . .   | 316        |
| § 2. Быстрые столкновения между тяжелыми частицами . . . . .  | 319        |
| § 3. Медленные столкновения между тяжелыми частицами . . . . .  | 328        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>345</b> |
| <b>Глава XIII. Ядерные столкновения . . . . .</b>   | <b>347</b> |
| § 1. Простейшие ядерные столкновения и закон взаимодействия между нуклонами . . . . .   | 348        |
| § 2. Резонансные явления при ядерных столкновениях с участием многих тел . . . . .  | 357        |
| § 3. Влияние молекулярных связей на рассеяние медленных нейтронов . . . . .   | 379        |
| § 4. Магнитное рассеяние медленных нейтронов . . . . .  | 391        |
| § 5. Столкновения быстрых частиц со средними и тяжелыми ядрами . . . . .  | 396        |
| § 6. Деление ядер . . . . .   | 400        |
| <b>Литература . . . . .</b>   | <b>405</b> |
| <b>Глава XIV. Вычисление вероятностей переходов по методу варьирования параметров . . . . .</b>                               | <b>409</b> |
| § 1. Введение . . . . .   | 409        |
| § 2. Возбуждение атома возмущением, зависящим от времени . . . . .  | 410        |

|  |            |
|--|------------|
| § 3. Переходы, вызванные периодическим во времени возмущением . . . . .                | 417        |
| § 4. Переходы, вызванные возмущением, не зависящим от времени . . . . .                | 421        |
| Литература . . . . .   | 422        |
| <b>Глава XV. Релятивистские задачи о двух частицах. Излучение . . . . .</b>            | <b>423</b> |
| § 1. Релятивистская квантовая механика. Применение запаздывающих потенциалов . . . . . | 423        |
| § 2. Релятивистская трактовка задач теории столкновений . . . . .                      | 426        |
| § 3. Столкновения между двумя свободными электронами . . . . .                         | 429        |
| § 4. Образование пар быстрыми частицами . . . . .                                      | 431        |
| § 5. Аннигиляция позитронов, не сопровождающаяся излучением . . . . .                  | 433        |
| § 6. Столкновение позитрона со свободным электроном . . . . .                          | 433        |
| § 7. Столкновение мезона с электроном . . . . .  | 434        |
| § 8. Рассеяние векторных мезонов статическим полем . . . . .                           | 436        |
| § 9. Вывод формул теории излучения по методу Борна . . . . .                           | 437        |
| § 10. Влияние радиационных сил на ядерное рассеяние . . . . .                          | 441        |
| Литература . . . . .   | 442        |