

М. Пескин, Д. Шредер

# ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ



**R&C**  
*Dynamics*

M. E. Peskin, D. V. Schroeder

An Introduction to  
**Quantum  
Field  
Theory**

М. Е. ПЕСКИН, Д. В. ШРЁДЕР

# ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Перевод с английского А. В. Беркова  
Под редакцией А. А. Белавина

Научно-издательский центр  
«Регулярная и хаотическая динамика»

2001

---

Интернет-магазин  
**MAFFESS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

***Внимание!***

**Новые проекты издательства РХД**

- Электронная библиотека на компакт-дисках  
<http://shop.rcd.ru/cdbooks>
  - Эксклюзивные книги — специально для Вас любая книга может быть отпечатана в одном экземпляре  
<http://shop.rcd.ru/exclusive>
- 

---

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №99-02-30057.

---

**Пескин М., Шрёдер Д.**

Введение в квантовую теорию поля. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 784 стр.

Книга американских физиков, профессоров Пескина и Шрёдера представляет собой учебник по квантовой теории поля (КТП). Она соответствует полноценному трехсеместровому курсу лекций для студентов старших курсов и аспирантов. Книга охватывает наряду со стандартными разделами, такими, как квантование свободных полей и правила Фейнмана, также изложение идей и методов ренормгруппы и функционального интегрирования. В ней приводится также теория калибровочных полей, включая стандартную модель. Выйдя несколько лет назад, книга Пескина и Шрёдера приобрела большую популярность и выдержала уже пять изданий на английском языке.

Для научных работников, аспирантов и студентов физико-математических специальностей.

**ISBN 5-93972-083-8**

- © Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- © Перевод на русский язык, А. А. Белавин, 2001
- © Перевод на русский язык,  
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001
- © Перевод на русский язык,  
Удмуртский государственный университет, 2001

<http://rcd.ru>

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	9
Предисловие к русскому изданию . . . . .	10
Предисловие . . . . .	11
Обозначения и соглашения . . . . .	18

## ЧАСТЬ I. ФЕЙНМАНОВСКИЕ ДИАГРАММЫ И КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ГЛАВА 1. Приглашение к теме: рождение пар при аннигиляции $e^+e^-$ . . . . .	23
ГЛАВА 2. Поле Клейна–Гордона . . . . .	31
2.1. Необходимость полевого подхода . . . . .	31
2.2. Элементы классической теории поля . . . . .	33
2.3. Поле Клейна–Гордона как набор гармонических осцилляторов . . . . .	37
2.4. Поле Клейна–Гордона в пространстве-времени . . . . .	42
ГЛАВА 3. Дираковское поле . . . . .	52
3.1. Лоренц-инвариантность волновых уравнений . . . . .	52
3.2. Уравнение Дирака . . . . .	56
3.3. Решения уравнения Дирака для свободных частиц . . . . .	60
3.4. Матрицы Дирака и билинейные формы Дирака . . . . .	65
3.5. Квантование дираковского поля . . . . .	68
3.6. Дискретные симметрии в теории Дирака . . . . .	78
ГЛАВА 4. Взаимодействующие поля и диаграммы Фейнмана . . . . .	92
4.1. Теория возмущений — философия и примеры . . . . .	92
4.2. Разложение корреляционных функций по теории возмущений . . . . .	97
4.3. Теорема Вика . . . . .	102
4.4. Диаграммы Фейнмана . . . . .	104
4.5. Сечения рассеяния и $S$ -матрица . . . . .	112
4.6. Вычисление элементов $S$ -матрицы с помощью диаграмм Фейнмана . . . . .	120
4.7. Правила Фейнмана для фермионов . . . . .	126
4.8. Правила Фейнмана для квантовой электродинамики . . . . .	133

<b>ГЛАВА 5. Элементарные процессы квантовой электродинамики</b> . . . . .	141
5.1. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : введение . . . . .	141
5.2. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : спиральная структура . . . . .	150
5.3. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : нерелятивистский предел . . . . .	155
5.4. Кроссинг-симметрия. . . . .	161
5.5. Комптоновское рассеяние . . . . .	166
<b>ГЛАВА 6. Радиационные поправки: введение</b> . . . . .	182
6.1. Излучение мягких фотонов . . . . .	183
6.2. Электронная вершинная функция: формальная структура . . . . .	190
6.3. Электрон-фотонная вершина: оценка выражения . . . . .	194
6.4. Электрон-фотонная вершина: инфракрасная расходимость . . . . .	203
6.5. Суммирование и интерпретация инфракрасных расходимостей . . . . .	206
<b>ГЛАВА 7. Радиационные поправки: некоторые следствия формализма</b> .	215
7.1. Перенормировка напряженности поля . . . . .	215
7.2. Редукционная формула Лемана–Симанчика–Циммермана . . . . .	225
7.3. Оптическая теорема . . . . .	232
7.4. Тождество Уорда–Такахаша . . . . .	238
7.5. Перенормировка электрического заряда . . . . .	244
<b>ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ. Испускание глюонных джетов</b> . . . . .	257

## ЧАСТЬ II. ПЕРЕНОРМИРОВКИ

<b>ГЛАВА 8. Приглашение к теме: ультрафиолетовое обрезание и критические флуктуации</b> . . . . .	263
<b>ГЛАВА 9. Функциональные методы</b> . . . . .	272
9.1. Интеграл по путям в квантовой механике . . . . .	272
9.2. Функциональное квантование скалярных полей . . . . .	278
9.3. Аналогия между квантовой теорией поля и статистической механикой .	288
9.4. Квантование электромагнитного поля . . . . .	290
9.5. Функциональное квантование спинорных полей . . . . .	294
9.6. Симметрии в функциональном формализме . . . . .	300
<b>ГЛАВА 10. Систематика перенормировок</b> . . . . .	309
10.1. Подсчет ультрафиолетовых расходимостей . . . . .	309
10.2. Перенормируемая теория возмущений . . . . .	316
10.3. Перенормировка квантовой электродинамики . . . . .	323
10.4. Перенормировка в высших порядках . . . . .	327
10.5. Пример диаграммы с двумя петлями . . . . .	330
<b>ГЛАВА 11. Перенормировка и симметрия</b> . . . . .	337
11.1. Спонтанное нарушение симметрии . . . . .	337
11.2. Перенормировка и симметрия: явный пример . . . . .	341
11.3. Эффективное действие . . . . .	352
11.4. Вычисление эффективного действия . . . . .	357
11.5. Эффективное действие как производящий функционал . . . . .	365
11.6. Перенормировка и симметрия: общий анализ . . . . .	369

<b>ГЛАВА 12. Ренормализационная группа</b> . . . . .	377
12.1. Вильсоновский подход к теории перенормировок . . . . .	377
12.2. Уравнение Каллана–Симанчика . . . . .	388
12.3. Эволюция констант связи . . . . .	399
12.4. Перенормировка локальных операторов . . . . .	408
12.5. Эволюция массовых параметров . . . . .	412
<b>ГЛАВА 13. Критические показатели и скалярная теория поля</b> . . . . .	419
13.1. Теория критических показателей . . . . .	420
13.2. Критическое поведение в четырех измерениях . . . . .	430
13.3. Нелинейная сигма-модель . . . . .	433
<b>ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ. Потенциал Коулмена–Вайнберга</b> . . . . .	447

### ЧАСТЬ III. НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

<b>ГЛАВА 14. Приглашение: партонная модель структуры адронов</b> . . . . .	451
<b>ГЛАВА 15. Неабелевы калибровочные поля</b> . . . . .	458
15.1. Геометрия калибровочной инвариантности . . . . .	458
15.2. Лагранжиан Янга–Миллса . . . . .	462
15.3. Калибровочно-инвариантная вильсоновская петля . . . . .	467
15.4. Основные положения из теории алгебр Ли . . . . .	471
<b>ГЛАВА 16. Квантование неабелевых калибровочных теорий</b> . . . . .	481
16.1. Взаимодействия неабелевых калибровочных бозонов . . . . .	481
16.2. Лагранжиан Фаддеева–Попова . . . . .	487
16.3. Духи и унитарность . . . . .	490
16.4. Симметрия БРСТ . . . . .	492
16.5. Однопетлевые расходимости в неабелевой калибровочной теории . . . . .	495
16.6. Асимптотическая свобода: метод фонового поля . . . . .	506
16.7. Асимптотическая свобода: качественное объяснение . . . . .	514
<b>ГЛАВА 17. Квантовая хромодинамика</b> . . . . .	517
17.1. От кварков к КХД . . . . .	517
17.2. Аннигиляция $e^+e^-$ в адроны . . . . .	520
17.3. Глубоконеупругое рассеяние . . . . .	525
17.4. Процессы жесткого рассеяния при столкновениях адронов . . . . .	533
17.5. Эволюция партонов . . . . .	543
17.6. Измерения $\alpha_s$ . . . . .	560
<b>ГЛАВА 18. Операторные произведения и эффективные вершины</b> . . . . .	566
18.1. Перенормировка массы кварка . . . . .	566
18.2. КХД перенормировка слабых взаимодействий . . . . .	571
18.3. Операторное разложение . . . . .	578
18.4. Операторный анализ $e^+e^-$ -аннигиляции . . . . .	581
18.5. Операторный анализ глубоконеупругого рассеяния . . . . .	586

<b>ГЛАВА 19. Аномалии теории возмущений</b> . . . . .	612
19.1. Аксиальный ток в двух измерениях . . . . .	612
19.2. Аксиальный ток в четырех измерениях . . . . .	619
19.3. Голдстоуновские бозоны и киральные симметрии в КХД . . . . .	627
19.4. Киральные аномалии и киральные калибровочные теории . . . . .	635
19.5. Аномальное нарушение масштабной инвариантности . . . . .	640
<b>ГЛАВА 20. Калибровочные теории со спонтанным нарушением симметрии</b> . . . . .	647
20.1. Механизм Хиггса . . . . .	647
20.2. Теория слабых взаимодействий Глэшоу–Вайнберга–Салама . . . . .	658
20.3. Симметрии теории кварков и лептонов . . . . .	675
<b>ГЛАВА 21. Квантование спонтанно нарушенных калибровочных теорий</b> . . . . .	686
21.1. $R_\xi$ калибровки . . . . .	686
21.2. Теорема эквивалентности голдстоуновских бозонов . . . . .	697
21.3. Однопетлевые поправки к калибровочной теории слабого взаимодействия . . . . .	710
<b>ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ. Распад хиггсовского бозона</b> . . . . .	726

## ЭПИЛОГ

<b>ГЛАВА 22. Передовые рубежи квантовой теории поля</b> . . . . .	731
22.1. Сильные взаимодействия . . . . .	732
22.2. Великое объединение и его парадоксы . . . . .	735
22.3. Точные решения в квантовой теории поля . . . . .	740
22.4. Суперсимметрия . . . . .	743
22.5. К окончательной теории природы . . . . .	746
<b>Приложение. Ссылочные формулы</b> . . . . .	749
А.1. Правила Фейнмана . . . . .	749
А.2. Поляризация внешних частиц . . . . .	751
А.3. Алгебра числителей . . . . .	752
А.4. Интегралы по петлям и размерная регуляризация . . . . .	754
А.5. Сечения рассеяния и вероятности распада . . . . .	756
А.6. Физические константы и переводные множители . . . . .	757
<b>Библиография</b> . . . . .	758
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	763

---

\* В этих разделах отмечаются менее формальные аспекты физики элементарных частиц и они могут быть пропущены в одногодичном курсе.



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга известных американских физиков Майкла Пескина и Дэниеля Шредера, впервые вышедшая в свет в 1995 году, была с того времени опубликована уже несколько раз. Фактически этот учебник занял место, которое в течение более двадцати лет принадлежало книге Бьеркена и Дрелла «Релятивистская квантовая теория». Как писал сам проф. Бьеркен: «Это такой серьезный конкурент Бьеркену и Дреллу, что я опасаюсь за наши короны (по-английски *royalties*, что означает также гонорары)».

Книга представляет собой педагогическое введение в методы и концепции современной теории поля. Замечательным ее достоинством является сочетание полноты изложения технических аспектов теории, иллюстрируемых на тщательно разработанных примерах, с интуитивным объяснением физики, стоящей за математическими формулами.

Кроме стиля, уникальной эту книгу делает также правильный выбор материала. Это единственный учебник по квантовой теории поля, в котором наряду с изложением канонического квантования полей, фейнмановских диаграмм, теории перенормировок, квантовой электродинамики, хромодинамики и теории электрослабых взаимодействий включен метод функционального интеграла, а также подход Вильсона к теории перенормировок и ренормгруппе.

Все это вместе делает книгу полезной для студентов, аспирантов и исследователей, специалистов не только в физике элементарных частиц, но также и в теории конденсированного состояния и космологии.

*А. А. Белавин*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Заканчивая в 1995 году подготовку нашего учебника по квантовой теории поля к публикации, мы не без некоторых опасений решились включить в него наши электронные адреса и просить студентов, пользующихся этой книгой, сообщать нам об опечатках. И действительно, мы были засыпаны сотнями писем не только с поправками, но также с вопросами и критическими замечаниями. Мы говорим об этом с тем большим удовольствием еще и потому, что многие из этих читателей воспользовались случаем, чтобы заодно похвалить учебник. Хотя исходно книга была ориентирована на запросы именно американских студентов и аспирантов, которые были нам хорошо известны, студенты всего мира, от Бомбея и Пекина до Томска и Новосибирска, оказали столь любезны, что написали нам.

Но больше всего мы были польщены тем, что др. Александр Белавин, блестящий и оригинальный вклад которого в квантовую теорию поля начинается буквально там, где эта книга заканчивается, нашел время в своем плотном графике для того, чтобы инициировать перевод нашей книги и, тем самым, обеспечить российских студентов недорогим изданием.

Мы хотели бы поблагодарить А. А. Белавина, редактора А. В. Беркова и членов команды перевода С. Булгадаева, С. Вергелеса, С. Пархоменко, Д. Подольского, И. Полюбина, К. Сарайкина, С. Губанова и Р. Усманова за тот труд, который они вложили, готовя эту монографию. Мы благодарим Advanced Book Program of Perseus Press и нашего редактора Джеффри Робинса за любезное разрешение использовать оригинал-макет английского издания. Мы благодарим А. В. Борисова, И. С. Мамаева, Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика» и Удмуртский государственный университет за выпуск этой книги, а также Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку и содействие.

Итак, результат их усилий — в ваших руках. Мы надеемся, что он будет полезен вам как при начальном изучении этого прекрасного и замысловатого подхода к фундаментальному пониманию Природы, так и при более глубоком овладении им.

Апрель 2001 г.

*Майкл Е. Пескин  
Дэниел В. Шредер*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Квантовая теория поля представляет собой набор идей и методов, объединяющих три главные концепции сюжета современной физики: квантовую теорию, понятие поля и принцип относительности. В наши дни большинство работающих физиков нуждается в знании квантовой теории поля. Интерес к ней проявляют и многие другие ученые. Эта теория лежит в основе современной физики элементарных частиц, кроме того, ее методы используются в ядерной физике, атомной физике, физике твердого тела и астрофизике. Наконец, квантовая теория поля привела к возникновению новых связей между физикой и математикой. Можно было бы подумать, что столь мощный и широко используемый предмет очень сложен и труден для понимания. На самом деле основные понятия и техника квантовой теории поля довольно просты и интуитивно понятны. Особенно это касается многих методов, связанных с графическими изображениями (диаграммы Фейнмана, потоки в ренормгруппе, пространства преобразований симметрии), которые стали рутинными для специалистов по квантовой теории поля. По общему признанию эти приемы требуют для своего изучения заметного времени, а если еще излагать предмет вместе со строгими доказательствами, то он может стать технически очень сложным. Тем не менее, нам кажется, что основные понятия и методы квантовой теории поля можно сделать доступными для всех физиков, а не только для элитной группы специалистов.

В ряде изданных ранее книг делалась попытка изложить отдельные части предмета в форме, доступной студентам. Лучшей из известных книг является двухтомник, написанный в 1960-х годах нашими коллегами из Стэнфорда Бьеркеном и Дреллом. По нашему мнению, их текст представляет идеальное сочетание абстрактного формализма, интуитивных объяснений и практических вычислений — сочетание, представленное с большой точностью и ясностью. Однако с тех пор предмет квантовой теории поля невероятно разросся как с точки зрения концептуальных основ (ренормгруппа, новые типы симметрий), так и с точки зрения областей применимости (критические показатели в твердом теле, стандартная модель элементарных частиц). Давно уже назрела необходимость в появлении учебника по квантовой теории поля, дающего полное изложение предмета, включая упомянутые новые достижения, но сохраняющего такую же доступность и глубину изложения, как учебник Бьеркена и Дрелла. С этой целью мы и написали данную книгу.

### Обзор содержания книги

Книга состоит из трех основных частей. В первой части рассматривается, главным образом, квантовая теория электромагнетизма, представляющая исторически первый пример квантовой теории поля, приводящей к прямым экспериментально проверяемым следствиям. Третья часть книги в основном посвящена конкретным квантовым теориям полей, входящих в *стандартную модель* взаимодействий частиц. Вторая часть является мостом между этими двумя предметами. Ее цель — ввести, по возможнос-

ти, самым непосредственным образом ряд очень глубоких понятий квантовой теории поля.

Часть I начинается с изучения полей, подчиняющихся линейным уравнениям движения, т. е. полей без взаимодействий. Здесь мы используем сочетание методов квантовой механики и теории относительности и показываем, что частицы возникают как квантованные возбуждения полей. Затем мы вводим взаимодействие между этими частицами и развиваем последовательный метод его учета. После такого введения мы демонстрируем явные вычисления в квантовой теории электромагнетизма. Они иллюстрируют как специфические свойства электронов и фотонов, так и общие черты поведения взаимодействующих полей.

В ряде вычислений в части I предлагаемые методы приводят к бесконечным результатам. Появление бесконечностей — хорошо известная отличительная особенность квантовой теории поля. В свое время она рассматривалась как свидетельство неполноты квантовой теории поля (хотя тот же аргумент можно было бы высказать и в отношении классической электродинамики точечных частиц). Долгое время считалось достаточным так организовать вычисления, чтобы бесконечности не возникали в непосредственно наблюдаемых экспериментально величинах. Однако одним из важнейших достижений последующих исследований стало понимание того, что формальные бесконечности на самом деле содержат важную информацию, которую можно использовать для предсказания качественного поведения системы. В части II книги мы систематически развиваем теорию бесконечностей. Это рассмотрение использует аналогию между квантово-механическими и тепловыми флуктуациями, перекидывая, тем самым, мост между квантовой теорией поля и статистической механикой. В конце части II мы обсуждаем применения квантовой теории поля к теории фазовых переходов в системах конденсированных сред.

Часть III посвящена обобщениям квантовой электродинамики, которые привели к успешным моделям сил, действующих между элементарными частицами. Чтобы получить эти обобщения, мы вначале анализируем и обобщаем фундаментальную симметрию уравнений электродинамики, затем рассматриваем следствия квантования теории с такой обобщенной симметрией. Часть III завершается изложением стандартной модели физики частиц и обсуждением ряда экспериментальных тестов.

Эпилог посвящен качественному обсуждению новейших исследований в квантовой теории поля и содержит ссылки, позволяющие студенту перейти на следующий уровень обучения.

В случаях, когда возможен выбор способов изложения, мы всегда выбираем тот, который позволяет объяснять идеи на языке, применяемом в физике элементарных частиц. Такой выбор определяется нашими знаниями и научными интересами. Кроме того, он отражает наше твердое убеждение в том, что даже в современную эпоху интеллектуального релятивизма есть что-то особенно привлекательное в разгадывании тайн Природы на самом глубоком из возможных уровне. Мы горды тем, что предметом наших исследований является структура фундаментальных взаимодействий, и надеемся, что сумели донести до читателя их величие и неиссякаемую живительную силу.

## Как пользоваться книгой

Эта книга является *введением* в квантовую теорию поля. Под этими словами мы понимаем прежде всего то, что у читателя не предполагается никаких предварительных знаний о предмете. Уровень книги должен быть доступен студентам, впервые изучающим курс квантовой теории поля. Обычно это происходит на втором году аспирантуры в университетах США. Мы предполагаем, что студент прослушал соответствующие

курсы механики, теории поля и квантовой механики. В части II предполагается и некоторое знание статистической механики. Однако совсем не обязательно знание каждого вопроса из этих курсов. Обязательным предварительным условием является знание лагранжевой и гамильтоновой формулировок динамики, релятивистской формулировки электромагнетизма с использованием тензорных обозначений, квантования гармонического осциллятора с помощью повышающих и понижающих операторов и теории рассеяния в нерелятивистской квантовой механике. Требуемые математические знания включают понимание применения группы вращений в квантовой механике спина и свободное обращение с контурным интегрированием в комплексной плоскости.

Хотя книга и является «введением», она довольно велика по объему. До некоторой степени это связано с тем, что в тексте содержится много явных вычислений и рабочих примеров. Однако мы признаем, что общее число рассмотренных вопросов также довольно велико. Даже те студенты, которые специализируются в области физики элементарных частиц, обнаружат, что их первые исследовательские проекты потребуют знания лишь части этого материала наряду с дополнительными сугубо специальными вопросами, которые можно почерпнуть из специальной литературы. Все же мы полагаем, что студенты, желающие стать специалистами в области теории элементарных частиц и полностью понимать объединяющий взгляд на фундаментальные взаимодействия, должны проработать каждый раздел книги. Те студенты, главные интересы которых лежат в других областях физики, или экспериментаторы в области физики частиц могут выбрать более краткое «введение», опустив ряд разделов. Один из авторов однажды ухитрился изложить 90% содержания книги в течение одногодичного курса лекций в Стэнфордском университете. Но это было ошибкой: при такой скорости чтения студенты со средней подготовкой не успевают усвоить материал. Наши более опытные коллеги обнаружили, что лучше излагать по одной части книги в семестр. Таким образом, планируя одногодичный курс квантовой теории поля, они либо откладывали часть II для изучения на более высоком уровне, либо выкидывали примерно половину материала частей II и III, оставляя его для самостоятельной проработки.

Мы спланировали книгу так, что ее можно читать от корки до корки, последовательно узнавая все главные идеи предмета. Но можно двигаться ускоренным путем, содержащим менее формальные приложения к физике элементарных частиц, что достаточно для подготовки студентов-экспериментаторов и специалистов по феноменологическим исследованиям. Разделы, которые можно пропустить при таком ускоренном изучении, отмечены в содержании звездочкой. Ни один из непомеченных разделов не зависит от этого материала более высокого уровня. Порядок изучения непомеченных разделов также может варьироваться: глава 10 не зависит от глав 8 и 9, раздел 11.1 не потребует вплоть до главы 20, а главы 20 и 21 не зависят от главы 17. Те читатели, которые хотели бы изучить лишь часть более сложных разделов, должны обратить внимание на следующую таблицу зависимостей:

Прежде, чем читать ...	необходимо прочесть ...
главу 13	главы 11, 12
раздел 16.6	главу 11
главу 18	разделы 12.4, 12.5, 16.5
главу 19	разделы 9.6, 15.3
раздел 19.5	раздел 16.6
раздел 20.3	разделы 19.1–19.4
раздел 21.3	главу 11

Внутри каждой главы разделы, отмеченные звездочками, нужно изучать последовательно, за исключением разделов 16.5 и 16.6, которые не зависят от раздела 16.4.

Студент, главные интересы которого находятся в области статистической механики, последовательно читая книгу, познакомится с глубокими формальными вопросами в части II, но пропустит почти все в части III, посвященной главным образом явлениям при высоких энергиях. (Однако вопросы, рассмотренные в главах 15 и 19, а также в разделе 20.1, имеют красивейшие применения в физике конденсированных сред.)

Мы хотели бы подчеркнуть важность активной работы над материалом в процессе изучения. Вероятно, просто невозможно понять любой параграф этой книги, не проделав все промежуточные выкладки. Кроме того, задачи в конце каждой главы иллюстрируют основные идеи и часто используют их в нетривиальном реалистическом контексте. Однако большинство иллюстративных примеров в квантовой теории поля слишком длинны для обычных домашних заданий и представляют скорее небольшие исследовательские проекты. Поэтому мы поместили в конец каждой части по одной такой сложной и длинной задаче, разбив ее на куски с указаниями и подсказками. Мы считаем, что время и бумага, которые нужно потратить на их решение, хорошо окупятся.

В начале каждой части мы поместили главу-«приглашение», в которой дается краткий обзор последующих идей и приложений. Поскольку эти главы несколько легче, чем остальной текст, мы рекомендуем всем студентам внимательно их прочесть.

## Чего нет в книге

Хотя мы надеемся, что данная книга дает возможность солидно изучить основы квантовой теории поля, ее ни в коей мере нельзя считать исчерпывающей. Способный студент-физик во многих местах захочет дополнить наше изложение. Мы приводим список наиболее важных дополнительных вопросов.

Во-первых, эта книга содержит теоретические методы, а не обзор наблюдаемых явлений. Мы не анализируем ключевые эксперименты, приведшие к *стандартной модели* элементарных частиц, и не обсуждаем в деталях недавние эксперименты, подтвердившие справедливость теории. Аналогично, в главах, посвященных приложениям к статистической механике, мы не обсуждаем разнообразные красивые эксперименты по фазовым переходам, подтверждающие модели теории поля. Мы горячо рекомендуем студентам параллельно с чтением этой книги познакомиться с современными данными по экспериментальным достижениям в рассматриваемых областях.

Хотя элементарные вопросы квантовой теории поля изложены нами полностью, некоторые более сложные вопросы оставлены без доказательства. Например, известно строгое доказательство, что во всех порядках стандартного разложения квантовой электродинамики формальные бесконечности могут быть устранены из всех наблюдаемых величин. Это свойство, называемое перенормируемостью, имеет важные следствия, рассмотренные в части II. Мы не приводим общего доказательства перенормируемости. Однако мы явно демонстрируем это свойство в иллюстративном примере расчетов в низшем порядке теории возмущений, качественно обсуждаем те моменты, которые возникают в полном доказательстве, и даем ссылки на более полное изложение. В общем случае мы пытались обосновать наиболее важные результаты (обычно с помощью явных примеров), опуская при этом длинные чисто технические выкладки.

Всякий вводный обзор поневоле оставляет некоторые вопросы за рамками рассмотрения. Наш замысел заключался в том, чтобы узнать максимум возможного о квантовой теории поля, рассматривая слабо взаимодействующие частицы и поля с помощью разложения в ряд теории возмущений по константе взаимодействия. Поразительно,

как много глубоких открытий можно сделать на этом пути. Тем не менее, это ограничение нашего рассмотрения исключает теорию связанных состояний и все явления, следующие из нетривиальных решений нелинейных полевых уравнений. Более полный перечень таких вопросов приведен в Эпilogue.

Наконец, мы не пытались дать в этой книге точное изложение истории квантовой теории поля. Студенты-физики по многим причинам нуждаются в знании истории физики. Самое важное — получить точное представление об экспериментальных основаниях данной области физики. Вторая важная причина — это необходимость понимания научного прогресса как части общечеловеческих достижений, понимания того, что развитие идей как маленьких шагов, совершаемых отдельными индивидуумами, превращается в важные достижения общества в целом\*.

В этой книге мы не касались этих вопросов. Вместо этого мы включили нечто вроде мифологической истории с целью мотивировки новых идей и приписыванию им имен. Обычно физический принцип получает имя того ученого, которому, по общему мнению физического сообщества, принадлежит честь его открытия. Однако часто честь открытия принадлежит нескольким людям, а истинное историческое развитие оказывается довольно сложным. Тем не менее, если физики должны взаимодействовать друг с другом, то ясное приписывание имен становится существенным.

Вот один пример. В разделе 17.5 мы обсуждаем систему уравнений, определяющих структуру протона и обычно называемых уравнениями Альтарелли–Паризи. Наш вывод использует метод, принадлежащий Грибову и Липатову (ГЛ). Оригинальные результаты ГЛ были выведены заново на более абстрактном языке Кристом, Хасслахером и Мюллером (КХМ). После создания правильной фундаментальной теории сильных взаимодействий (КХД) Джорджи, Политцер, Гросс и Вильчек (ДПГВ) использовали технику КХМ для вывода формальных уравнений изменения протонной структуры. Паризи принадлежит первый из многих независимых выводов, которые приводят эти уравнения к употребительному виду. Сочетание его работы с работой ДПГВ использовано нами в разделе 17.5. Затем Докшицер получил эти уравнения еще более простым способом, непосредственно применив метод ГЛ. Несколько позднее, но независимо, это же сделали Альтарелли и Паризи. Эти два последних автора популяризировали технику, дали ее четкое объяснение, вдохновили экспериментаторов на использование уравнений для интерпретации данных и подтолкнули теоретиков к расчету систематических поправок высших порядков. В разделе 17.5 мы указали кратчайшую дорогу к концу этого сложного исторического пути и присвоили окончательному результату имя Альтарелли–Паризи.

Есть и четвертая причина, по которой студентам следует изучать историю физики. Часто первые основополагающие работы содержат удивительные по пронизательности авторские суждения, которые теряются при ретроспективном изложении в учебниках. Мы настойчиво рекомендуем студентам обращаться как можно чаще к оригинальной литературе, чтобы знать, что думали создатели теории. Со своей стороны, мы попытались помочь таким студентам, приведя в подстрочных примечаниях ссылки на основные работы. Иногда они даны лишь из уважения. Но все же большинство ссылок включено потому, что мы считаем, что читатель не должен упустить особой точки зрения автора.

---

\*История развития квантовой теории поля и физики частиц сравнительно недавно рассматривалась и обсуждалась на нескольких конференциях. Материалы этих конференций опубликованы: *The Birth of Particle Physics*, L. M. Brown and L. Hoddeson, eds. (Cambridge University Press, 1983); *Pions to Quarks*, L. M. Brown, M. Dresden, and L. Hoddeson eds. (Cambridge University Press, 1989); *The Rise of the Standard Model*, L. M. Brown, M. Dresden, L. Hoddeson, and M. Riordan, eds. (Cambridge University Press, 1995). Ранняя история квантовой электродинамики описывается в захватывающей книге Швекера (Schweber, 1994).

## Благодарности

Эта книга не могла бы быть написана без помощи и поддержки наших многих учителей, коллег и друзей. Мы с большим удовольствием благодарим всех этих людей. Майклу посчастливилось изучать теорию поля у трех современных выдающихся знатоков предмета — Сиднея Коулмена, Стивена Вайнберга и Кеннета Вильсона. Он также признателен многим другим его учителям, включая Сиднея Дрелла, Майкла Фишера, Курта Готтфрида, Джона Когута, Говарда Джорджи и многочисленным соавторам, в частности, Орландо Альварецу, Джону Прескилу и Эдварду Виттену. Его взаимодействие с лабораториями физики высоких энергий в Корнелле и Стэнфорде и дискуссии с такими людьми, как Гари Фельдман, Мартин Перл и Моррис Сварц, также сформировали его точку зрения. Этим людям и многим другим, учившим его физике в течение многих лет, Майкл выражает свою благодарность.

Дэн изучал теорию поля у Саваса Димополуса, Леонарда Сасскинда, Ричарда Бланкенбеклера и у многих других преподавателей и коллег, которых он благодарит. Своим более широким физическим образованием он обязан многим учителям, но особенно Томасу Муру. Также он благодарен всем учителям и друзьям, которые многие годы подвергали критике его труды.

Много людей заслуживают специальных благодарностей за их помощь в составлении и написании этой книги. Она возникла из курсов лекций, читавшихся в Корнелле и в Стэнфорде, и мы благодарим студентов этих курсов за их терпение, критику и предложения. Во время написания этой книги мы были поддержаны СЛАКом, Министерством энергетики, а Дэн также Церковным Благотворительным Фондом и физическим факультетом в колледже Помона, Гриннелл-колледже и в государственном университете Вебера. Мы особенно благодарны Сиднею Дреллу за его поддержку и одобрение. Завершению книги во многом способствовал саббатикал, который Майкл провел в Калифорнийском университете в Санта-Круз. Он благодарит Майкла Науенберга, сотрудников и студентов физического факультета за их гостеприимство.

Предварительные версии этой книги были широко доступны. Отклик читателей, а также их предложения и исправления поддерживали нас во время дальнейшей работы над книгой. Вот некоторые из людей, помогавших нам таким образом: Куртис Каллан, Эдвард Фархи, Джонатан Фенг, Дональд Финнелл, Пол Фрамpton, Джеффри Голдстоун, Брайан Хатфилд, Барри Холстейн, Грегори Килкап, Дональд Кнут, Барак Коль, Филлип Нельсон, Маттиас Ньютберг, Йосси Нир, Эрвинд Раджамаран, Пьер Рамон, Катсуми Танака, Ксеркс Тата, Аркадий Вайнштейн, Рудольф фон Бунау, Шимон Янkelович и Еран Иехудай. За помощь в более специальных технических задачах или вопросах мы благодарны Майклу Барнетту, Марте Брейденбах, Дону Груму, Тоичира Киношите, Полу Лангакеру, Ву-Ки Тангу, Петеру Зервашу и Жану Зинн-Жюстену. Мы благодарим наших стэнфордских коллег Джеймса Бьеркена, Стэнли Бродского, Ланса Диксона, Брайана Линна, Элен Квинн, Леонарда Сасскинда и Марвина Вайнштейна, на которых мы проверяли многие из приведенных здесь объяснений. Мы особенно благодарны Майклу Дайну, Мартину Айнхорну, Ховарду Хаберу и Ренате Каллош и их многострадальным студентам, которые в течение нескольких лет пользовались черновиками этой книги в качестве учебников и сообщивших важные и проясняющие критические замечания.

Мы хотим вспомнить двух наших друзей, не заставших выхода этой книги — Дональда Иенни, который был одним из героев эпохи квантовой электродинамики, и Брайана Варра, чьи выдающиеся надежды в теоретической физике были прерваны смертью от СПИДа.

Мы благодарим наших издателей из фирмы Addison-Wesley — Аллана Вайлда, Барбару Холланд, Джека Ребчека, Хитера Мимноу и Джеффри Роббинса за поддержку это-



го проекта и за неиссякаемую веру в то, что он будет завершен. Мы благодарны Моне Зетфель и Линне Рид за их советы по компоновке этой книги и Джеффри Тоусону и Кристине Дженнигс за их квалифицированную работу над иллюстрациями. Окончательный набор был сделан в издательском отделе ЮЗУ при большой поддержке Аллана Дэвиса. Конечно, появление этой книги было бы невозможно без тех, кто поддерживал компьютерную связь.

Мы благодарим наших многочисленных друзей, чью поддержку мы ощущали в течение всей работы над книгой. Мы особенно благодарны нашим родителям Дороти и Вернону Шредерам и Джеральду и Пирл Пескиным. Майкл также благодарит Валери, Томаса и Лауру за их любовь и понимание. Наконец, мы благодарим Вас, читатель, за Ваше время и усилия, потраченные при изучении этой книги. Хотя мы пытались очистить этот текст от смысловых и типографских ошибок, мы заранее извиняемся за те, которые мы все же пропустили. Нам будет приятно получить ваши замечания и предложения для дальнейшего улучшения изложения квантовой теории поля.

*Майкл Е. Пескин  
Дэниел В. Шредер*

# ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

## Единицы измерения

Мы будем работать в «God-given» единицах, в которых

$$\hbar = c = 1.$$

В этой системе

$$[\text{длина}] = [\text{время}] = [\text{энергия}]^{-1} = [\text{масса}]^{-1}.$$

Поэтому масса ( $m$ ) частицы равна ее энергии покоя ( $mc^2$ ), а также ее обратной комптоновской длине ( $m\hbar/c$ ). Например,

$$m_{\text{электрон}} = 9.109 \times 10^{-28} \text{ г} = 0.511 \text{ МэВ} = (3.862 \times 10^{-11} \text{ см})^{-1}.$$

Выбор других полезных чисел и переводных множителей приведен в Приложении.

## Релятивизм и тензоры

Наши соглашения по релятивизму следуют Джексону (1975), Бьеркену и Дреллу (1964, 1965), а также почти всем последним работам по теории поля. Мы используем метрический тензор

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3 или  $t, x, y, z$ . Латинские индексы —  $i, j$  и т. д. — обозначают только три пространственные компоненты. Во всех случаях выполняется суммирование по повторяющимся индексам. 4-векторы, также как и обычные числа, обозначаются светлым курсивом; 3-векторы обозначаются полужирным шрифтом. Например,

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}); \\ p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

Для частицы с массой имеем

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2.$$

Отметим, что вектор перемещения  $x^\mu$  является «естественно поднятым», тогда как оператор производной

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

является «естественно опущенным».

Мы определяем полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  так, чтобы

$$\varepsilon^{0123} = +1.$$

При этом нужно быть внимательным, поскольку данное определение подразумевает  $\varepsilon_{0123} = -1$  и  $\varepsilon^{1230} = -1$ . (Это определение согласовано с обозначениями Джексона, но не Бьеркена и Дрелла.)

### Квантовая механика

Мы будем часто работать с одночастичными волновыми функциями Шредингера для квантовомеханических частиц. Представим операторы энергии и импульса для этих волновых функций следующим образом:

$$E = i \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \mathbf{p} = -i \nabla.$$

Эти уравнения можно объединить так:

$$p^\mu = i \partial^\mu;$$

в  $\partial^\mu$  индекс поднят для удобства, чтобы убрать знак минус. Плоская волна  $e^{-ik \cdot x}$  соответствует импульсу  $k^\mu$ , поскольку

$$i \partial^\mu (e^{-ik \cdot x}) = k^\mu e^{-ik \cdot x}.$$

Сокращение ‘э.с.’ обозначает эрмитовое сопряжение.

При рассмотрении спина в квантовой механике используются сигма-матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произведение этих матриц удовлетворяет тождеству

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \varepsilon^{ijk} \sigma^k.$$

Удобно определить линейную комбинацию  $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i \sigma^2)$ ; тогда

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Фурье-преобразования и распределения

Мы будем часто использовать ступенчатую функцию Хевисайда  $\theta(x)$  и дельта-функцию Дирака  $\delta(x)$ , определенных следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad \delta(x) = \frac{d}{dx} \theta(x).$$

$n$ -мерная дельта-функция, обозначаемая  $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ , равна нулю повсюду, за исключением точки  $\mathbf{x} = 0$ , и удовлетворяет уравнению

$$\int d^n x \delta^{(n)}(\mathbf{x}) = 1.$$

В преобразованиях Фурье множитель  $2\pi$  будет всегда появляться в интегралах по импульсу. Например, в четырехмерном случае:

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k);$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^4 x e^{ik \cdot x} f(x).$$

(В трехмерном преобразовании знак в экспоненте будет  $+$  и  $-$  соответственно.) Тильда в  $\tilde{f}(k)$  иногда будет опускаться, когда это не будет вызывать вопросов. Другой важный множитель  $2\pi$  появляется в тождестве

$$\int d^4 x e^{ik \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k).$$

### Электродинамика

Мы используем обозначения Хевисайда–Лоренца, в которых множитель  $4\pi$  включен в закон Кулона и в постоянную тонкой структуры, а не в уравнения Максвелла. Поэтому кулоновский потенциал точечного заряда  $Q$  имеет вид:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r},$$

и постоянная тонкой структуры равна

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Символ  $e$  остается за зарядом электрона и является отрицательной величиной (хотя знак иногда используется). Мы обычно работаем с релятивистской формой уравнений Максвелла:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu,$$

где

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

и мы исключили  $e$  из 4-вектора плотности тока  $j^\mu$ .

### Уравнение Дирака

Некоторые из наших обозначений отличаются от используемых Бьеркенем и Дреллом (1964, 1965) и в другой литературе: мы используем киральный базис для матриц Дирака и релятивистскую нормировку для спиноров Дирака. Эти обозначения введены в разделах 3.2 и 3.3 и полностью приведены в Приложении.

Часть I

**ФЕЙНМАНОВСКИЕ  
ДИАГРАММЫ  
И КВАНТОВАЯ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**



## ГЛАВА 1

# ПРИГЛАШЕНИЕ К ТЕМЕ: РОЖДЕНИЕ ПАР ПРИ АННИГИЛЯЦИИ $e^+e^-$

Главная цель части I этой книги заключается в развитии основного вычислительного метода квантовой теории поля — формализма диаграмм Фейнмана. Затем мы применим этот формализм для вычислений в квантовой электродинамике — квантовой теории электронов и фотонов.

Квантовая электродинамика (КЭД) — вероятно, наилучшая из имеющихся фундаментальных теорий. Она формулируется как набор простых уравнений (Максвелла и Дирака), вид которых определяется, по существу, релятивистской инвариантностью. Квантово-механические решения этих уравнений дают детальные предсказания электромагнитных явлений в масштабах от макроскопических расстояний вплоть до расстояний, в несколько сотен раз меньших размера протона.

Фейнмановские диаграммы обеспечивают соответствующую элегантную вычислительную схему для этой элегантной теории. Достаточно представить процесс, который может происходить между электронами и фотонами, нарисовать его диаграмму, а затем с помощью диаграммы записать математическое выражение для квантово-механической амплитуды этого процесса.

В этой части книги мы развиваем как теорию КЭД, так и метод фейнмановских диаграмм, исходя из основных принципов квантовой механики и теории относительности. В конце концов мы приходим к состоянию, которое позволит рассчитывать наблюдаемые величины, представляющие большой интерес при изучении элементарных частиц. Однако чтобы достичь цели и развить простой вычислительный метод, нам, к сожалению, придется сначала серьезно погрузиться в формализм теории. Три главы, следующие за этой, почти полностью формальны, и при их изучении читатель в какой-то момент может задаться вопросом, а куда мы, собственно, движемся? Мы хотели бы хоть частично заранее ответить на этот вопрос, обсудив в этой главе физику особенно простого процесса КЭД, многие свойства которого следуют непосредственно из физической интуиции. Конечно, такой интуитивный приземленный подход содержит много прорех. В гл. 5 мы вернемся к рассмотрению этого процесса, вооруженные всей мощью формализма фейнмановских диаграмм. Спускаясь вниз с горных высот, мы увидим, как ликвидируются все трудности интуитивного подхода.

### Простейшая ситуация

Так как большинство экспериментов в физике частиц включает рассеяние, наиболее часто вычисляемыми в квантовой теории поля величинами являются сечения рассеяния. Мы хотим вычислить сечение простейшего, из возможных, процесса КЭД: рождение пары более тяжелых лептонов (например, мюонов) при аннигиляции электрона с его античастицей — позитроном. Существование античастиц, на самом деле,

предсказывает квантовая теория поля, и мы будем обсуждать это предсказание в гл. 2 и 3. Сейчас примем его на веру.

Опыт по измерению вероятности такой аннигиляции заключается в наблюдении столкновения пучка электронов с пучком позитронов. Измеряемой при этом величиной является сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  как функция энергии в системе центра инерции и относительного угла  $\theta$  между направлениями полета начальных электронов и конечных мюонов. Процесс показан на рис. 1.1. Для простоты будем работать в системе центра инерции (с. ц. и.), где импульсы частиц удовлетворяют условию  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ . Предположим также, что энергия пучков  $E$  много больше как массы электрона, так и массы мюона, так что  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = E \equiv E_{\text{ци}}/2$ . (Мы используем полужирный шрифт для обозначения 3-векторов и обычный курсивный шрифт для обозначения 4-векторов.)

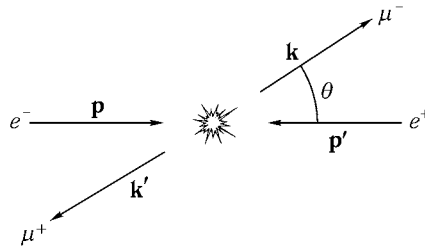


Рис. 1.1. Реакция аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , показанная в системе центра инерции.

Так как и электрон, и мюон имеют спин  $1/2$ , то нужно задать ориентации их спинов. Удобно выбрать ось, определяющую квантование спина каждой частицы, в направлении ее движения. Тогда спин каждой частицы может быть направлен либо параллельно, либо антипараллельно этой оси. На практике пучки электронов и позитронов часто не поляризованы, а мюонные детекторы не регистрируют поляризацию мюонов. Поэтому нам следует усреднить сечение по ориентациям спина электрона и позитрона и просуммировать его по ориентациям спина мюонов. Для любой заданной ориентации спинов всех частиц принято записывать дифференциальное сечение этого процесса с вылетом  $\mu^+$  в заданный элемент телесного угла  $d\Omega$  как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{ци}}^2} |\mathcal{M}|^2. \quad (1.1)$$

Множитель  $E_{\text{ци}}^2$  обеспечивает правильную размерность сечения, так как в выбранной системе единиц (энергия) $^{-2} \sim$  (длина) $^2$ . Следовательно, величина  $\mathcal{M}$  безразмерна. Она представляет квантово-механическую амплитуду рассматриваемого процесса (аналогичную амплитуде  $f$  в нерелятивистской квантовой механике). Главный вопрос заключается в том, как вычислить эту амплитуду, исходя из фундаментальных принципов теории. Другие множители в (1.1) являются исключительно результатом соглашения. Формула (1.1) представляет, на самом деле, частный случай более общей формулы, справедливой для рассеяния в с. ц. и., когда конечное состояние содержит две безмассовые частицы. Общую формулу нельзя получить на основании размерных соображений, и мы выведем ее в разделе 4.5.

Теперь наступает время плохих и хороших новостей.

Плохая новость заключается в том, что даже для простейшего из процессов КЭД точное выражение для  $\mathcal{M}$  неизвестно. Это не должно удивлять, так как даже в не-



релятивистской квантовой механике задача рассеяния редко имеет точное решение. Лучшее, что можно сделать, это получить формальное выражение для  $\mathcal{M}$  в виде ряда теории возмущений по константе электромагнитного взаимодействия и вычислить несколько первых членов этого ряда.

Хорошая новость состоит в том, что Фейнман разработал красивый способ упорядочить и сделать наглядным ряд теории возмущений, получивший название метода *фейнмановских диаграмм*. Грубо говоря, диаграммы изображают потоки электронов и фотонов в процессе рассеяния. В нашем частном случае слагаемое низшего порядка в ряде теории возмущений можно представить единственной диаграммой рис. 1.2. В этой диаграмме имеются элементы трех типов: внешние линии (представляющие четыре начальные и конечные частицы), внутренние линии (представляющие «виртуальные» частицы; в нашем случае — один виртуальный фотон) и вершины. Принято изображать фермионы сплошными линиями, а фотоны — волнистыми. Стрелки на сплошных линиях указывают не направление импульса, а направление потока отрицательного заряда. Каждой внешней линии приписывается определенный 4-вектор импульса, как показано на рисунке. Импульс  $q$  внутренней линии на этой диаграмме определяется законом сохранения импульса в каждой из вершин:  $q = p + p' = k + k'$ . Кроме того, каждому внешнему фермиону следует сопоставить определенное спиновое состояние (либо «вверх», либо «вниз»).

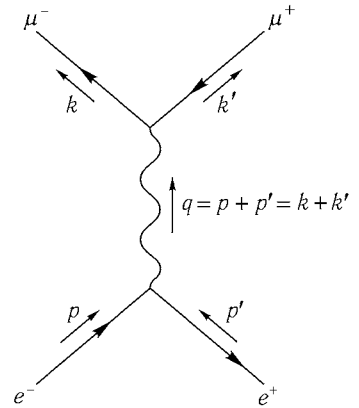


Рис. 1.2. Фейнмановская диаграмма низшего порядка для сечения рассеяния  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . В этом порядке единственным возможным промежуточным состоянием является фотон ( $\gamma$ ).

Согласно *фейнмановским правилам* каждой диаграмме соответствует совершенно определенный вклад в  $\mathcal{M}$ . Правила приписывают каждому элементу диаграммы компактный алгебраический множитель, так что произведение этих множителей дает значение соответствующего слагаемого в ряде теории возмущений. Однако приведение результирующего выражения для  $\mathcal{M}$  к пригодному для использования виду может оказаться нетривиальной задачей. В последующих главах мы разработаем полезную технологию подобных вычислений. Но поскольку сейчас мы ею не владеем, воспользуемся для нахождения ответа для нашей конкретной задачи не точными фейнмановскими правилами, а некоторыми эвристическими аргументами.

Напомним, что в квантово-механической теории возмущений амплитуда перехода в первом порядке может быть записана в виде

$$\langle \text{конечное состояние} | H_I | \text{начальное состояние} \rangle, \quad (1.2)$$

где  $H_I$  — часть гамильтониана, отвечающая за «взаимодействие». В нашем случае начальным является состояние  $|e^+e^- \rangle$ , а конечным — состояние  $\langle \mu^+\mu^- |$ . Но гамильтониан взаимодействия связывает электроны с мюонами не напрямую, а только через электромагнитное поле (т.е. фотоны). Поэтому выражение амплитуды первого порядка (1.2) обращается в нуль, и мы должны перейти к рассмотрению вклада второго порядка

$$\mathcal{M} \sim \langle \mu^+\mu^- | H_I | \gamma \rangle^\mu \langle \gamma | H_I | e^+e^- \rangle_\mu. \quad (1.3)$$

В этом и заключается эвристический способ записи  $\mathcal{M}$  по диаграмме рис. 1.2. Внешним электронным линиям соответствует множитель  $|e^+e^- \rangle$ , внешним мюонным

линиям — множитель  $\langle \mu^+ \mu^- |$ . Вершинам соответствуют  $H_I$ , а внутренней фотонной линии — оператор  $|\gamma\rangle\langle\gamma|$ . Мы добавили векторные индексы  $\mu$ , так как фотон является векторной частицей с четырьмя компонентами. Имеются четыре возможных промежуточных состояния, по одному на каждую компоненту. Согласно правилам теории возмущений следует просуммировать по промежуточным состояниям. Заметим, что поскольку сумма в (1.3) имеет вид скалярного произведения 4-векторов, амплитуда  $\mathcal{M}$  является лоренц-инвариантным скаляром, если только каждый множитель в (1.3) есть 4-вектор.

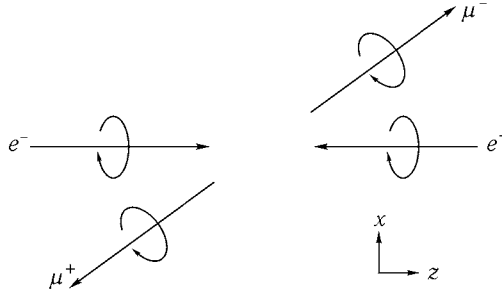


Рис. 1.3. Один возможный набор спиновых ориентаций. Электрон и отрицательный мюон — «правые», тогда как позитрон и положительный мюон — «левые».

Попробуем угадать форму вектора  $\langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle_\mu$ . Так как  $H_I$  связывает электроны с фотонами с константой  $e$  (заряд электрона), матричный элемент должен быть пропорционален  $e$ . Рассмотрим конкретный набор начальных и конечных спиновых ориентаций, показанных на рис. 1.3. Спины электрона и мюона параллельны своим направлениям движения: говорят, что эти частицы «правые». Аналогично, античастицы «левые». Спины электрона и позитрона складываются в единицу углового момента в направлении  $+z$ . Так как  $H_I$  должен сохранять угловой момент, фотон, с которым связаны эти частицы, должен обладать правильным вектором поляризации, отвечающим тому же угловому моменту:  $\varepsilon^\mu = (0, 1, i, 0)$ . Следовательно,

$$\langle \gamma | H_I | e^+ e^- \rangle_\mu \propto e(0, 1, i, 0). \quad (1.4)$$

Аналогично, мюонный матричный элемент должен иметь поляризацию, соответствующую единице углового момента вдоль направления импульса отрицательно заряженного мюона. Чтобы получить правильный вектор, повернем (1.4) на угол  $\theta$  в плоскости  $xz$ :

$$\langle \gamma | H_I | \mu^+ \mu^- \rangle^\mu \propto e(0, \cos \theta, i, -\sin \theta). \quad (1.5)$$

Для вычисления амплитуды  $\mathcal{M}$  комплексно сопрягаем этот вектор и скалярно умножаем его на (1.4). Тогда для заданной ориентации спинов получим

$$\mathcal{M}(RL \rightarrow RL) = -e^2(1 + \cos \theta). \quad (1.6)$$

Конечно, таким способом невозможно установить общий множитель, но по случайности оказывается, что в (1.6) он правилен благодаря тем соглашениям, которые приняты в (1.1). Заметим, что при  $\theta = 180^\circ$  амплитуда обращается в нуль. Этого следовало ожидать: состояние с угловым моментом в направлении  $+z$  не переходит в состояние с угловым моментом в направлении  $-z$ .

Рассмотрим теперь случай, когда и электрон, и позитрон правополяризованы. Их полный спиновый момент равен нулю. В этом случае нужны более тонкие рассуждения. Можно ожидать, что мы получим продольно поляризованный фотон, причем появится коэффициент Клебша–Гордана  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , по аналогии со случаем сложения трехмерных угловых моментов:  $|\uparrow\downarrow\rangle = (1/\sqrt{2})(|j=1, m=0\rangle + |j=0, m=0\rangle)$ . Но на самом деле мы складываем угловые моменты в рамках четырехмерной группы Лоренца, поэтому следует принимать во внимание не только спин (свойства преобразования состояний при вращениях), но и преобразования состояний при бустах. Оказывается (мы покажем это в гл. 3), что коэффициент Клебша–Гордана, связывающий 4-вектор с состоянием  $|e_R^- e_R^+\rangle$  безмассовых фермионов, равен нулю. (Суть в том, что такое состояние есть суперпозиция скаляра и антисимметричного тензора.) Следовательно, амплитуда  $\mathcal{M}(RR \rightarrow RL)$  равна нулю, как и одиннадцать других амплитуд, в которых либо начальное, либо конечное состояние имеет полный нулевой угловой момент.

Остающиеся ненулевые амплитуды можно найти тем же способом, как и первую. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(RL \rightarrow LR) &= e^2(1 - \cos \theta), \\ \mathcal{M}(LR \rightarrow RL) &= e^2(1 - \cos \theta), \\ \mathcal{M}(LR \rightarrow LR) &= e^2(1 + \cos \theta).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Подставляя эти выражения в (1.1), усредняя по четырем начальным и суммируя по четырем конечным спиновым ориентациям, находим

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2}(1 + \cos^2 \theta),\tag{1.8}$$

где  $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ . Интегрируя по углам  $\theta$  и  $\phi$ , получаем полное сечение

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{ци}}^2}.\tag{1.9}$$

Результаты (1.8) и (1.9) согласуются с экспериментом с точностью порядка 10%. Почти все расхождение обязано вкладу следующего слагаемого ряда теории возмущений, отвечающего диаграммам рис. 1.4. Качественные особенности полученных выражений — угловая зависимость и резкое уменьшение сечения с энергией — явно подтверждаются данными эксперимента. (Подробнее свойства полученных результатов обсуждаются в разделе 5.1.)

## Уточнения и вопросы

Угловое распределение в реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , предсказываемое квантовой электродинамикой, было получено с помощью аргументов, связанных с сохранением углового момента, без обращения к формализму, лежащему в основании теории. Однако мы существенно использовали упрощения, связанные с пределом высоких энергий и выбором системы центра инерции. Если отказаться от любого из упрощающих предположений, то проделанный нами анализ разрушится. Как же нужно проводить вычисления в КЭД в общем случае? Чтобы ответить на этот вопрос, следует вернуться к фейнмановским правилам.

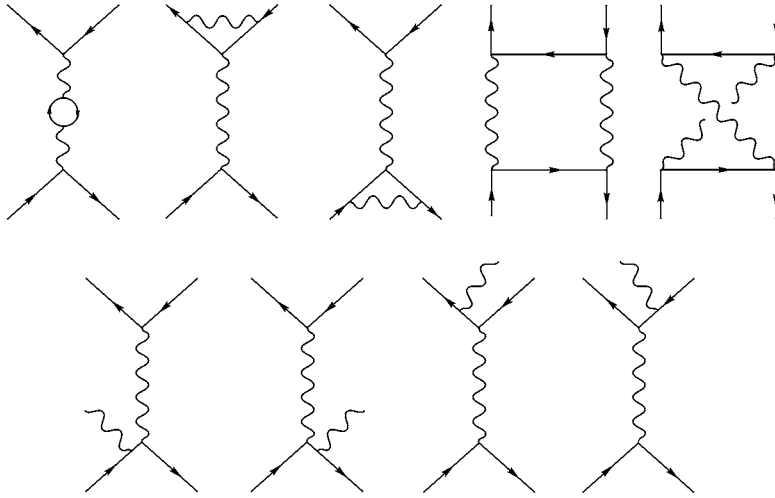


Рис. 1.4. Фейнмановские диаграммы, которые дают вклад  $\alpha^3$  в сечение рассеяния  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

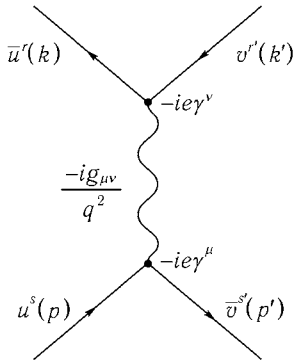


Рис. 1.5. Диаграмма из рис. 1.2, где указаны выражения, соответствующие вершинам, внутренним и внешним линиям.

Выше упоминалось, что эти правила предписывают нам нарисовать диаграмму (диаграммы) рассматриваемого процесса и сопоставить каждому элементу диаграммы определенный алгебраический множитель. На рис. 1.5 приведена диаграмма нашей реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , где показаны предписываемые правила множители.

Для внутренней фотонной линии пишем множитель  $-ig_{\mu\nu}/q^2$ , где  $g_{\mu\nu}$  — обычный метрический тензор в пространстве Минковского, а  $q$  — 4-импульс виртуального фотона. Этот множитель соответствует оператору  $|\gamma\rangle\langle\gamma|$  в нашем эвристическом выражении (1.3).

Каждой вершине сопоставляется множитель  $-ie\gamma^\mu$ , что соответствует  $H_I$  в (1.3). Величины  $\gamma^\mu$  представляют набор постоянных  $4 \times 4$ -матриц. Именно они осуществляют «сложение угловых моментов», связывая состояния двух частиц со спином  $\frac{1}{2}$  с векторной частицей.

Внешним линиям соответствуют выражения для четырехкомпонентных столбцов-спиноров  $u, v$ , или строк-спиноров  $\bar{u}, \bar{v}$ . Они, по существу, являются волновыми функциями начальных и конечных частиц в импульсном пространстве и соответствуют  $|e^+e^- \rangle$  и  $\langle \mu^+\mu^- |$  в (1.3). Индексы  $s, s', r$  и  $r'$  отмечают одно из двух возможных спиновых состояний.

Теперь можно выписать выражение для  $\mathcal{M}$ , считывая множители непосредственно с диаграммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k') = \\ &= \frac{i e^2}{q^2}(\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p))(\bar{u}^r(k)\gamma^\nu v^{r'}(k')). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Полезно детально сравнить это выражение с (1.3).

Чтобы получить сечение (1.8) из (1.10), можно было бы вернуться к аргументам, связанным с угловым моментом, дополнив их некоторыми конкретными сведениями о  $\gamma$ -матрицах и дираковских спинорах. Подобные вычисления будут проведены в разделе 5.2. Однако существует множество полезных трюков, используемых при манипуляциях с выражениями типа (1.10), особенно в тех случаях, когда нас интересует вычисление сечения для *неполяризованных* частиц. Используя эту фейнмановскую «технология следов» (название происходит от того, что приходится вычислять следы от произведения  $\gamma$ -матриц), даже не обязательно знать явный вид этих матриц и дираковских спиноров. Вычисления становятся почти бездумными, и ответ (1.8) получается после алгебраических преобразований, занимающих меньше страницы. Однако поскольку фейнмановские правила и технология следов столь мощны, то можно отказаться и от некоторых упрощающих предположений. В завершение этого раздела обсудим те ситуации, при которых вычисления станут более трудными.

Простейшее ограничение, от которого можно отказаться, — это равенство нулю массы мюона. Если энергия пучков не намного больше массы мюона, то все наши предсказания будут зависеть от отношения  $\frac{m_\mu}{E_{\text{цп}}}$ . (Поскольку электрон примерно в 200 раз легче мюона, его можно рассматривать безмассовым во всех случаях, когда энергия пучка достаточна для рождения мюонов.) Используя фейнмановскую технологию следов, чрезвычайно просто учесть в вычислениях массу мюона. Объем необходимых алгебраических вычислений возрастает процентов на 50; кроме того, немного меняется выражение (1.1) для связи амплитуды и сечения, но ответ оправдывает затраченные усилия. Мы проделаем эти вычисления в разделе 5.1.

Столь же просто рассмотреть вычисления в другой системе отсчета. Единственное место, которое подвергнется модификации — это связь (1.1) между амплитудой и сечением. Впрочем, можно просто совершить преобразование Лоренца в формуле в с. ц. и., перейдя к другой системе отсчета.

Когда известны спиновые состояния начальных и/или конечных частиц и мы хотим учесть массу мюона, то вычисления становятся более громоздкими, хотя, в принципе, остаются несложными. Технология следов обобщается на такой случай, но часто легче вычислить выражение (1.10) непосредственно, используя выражения для спиноров  $u$  и  $v$ .

Далее, можно рассчитать сечения разных процессов.

Процесс  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , называемый *рассеянием Баба*, более сложен, так как существует вторая диаграмма (см. рис. 1.6). Сначала следует сложить амплитуды, отвечающие этим диаграммам, а затем возвести результат в квадрат.

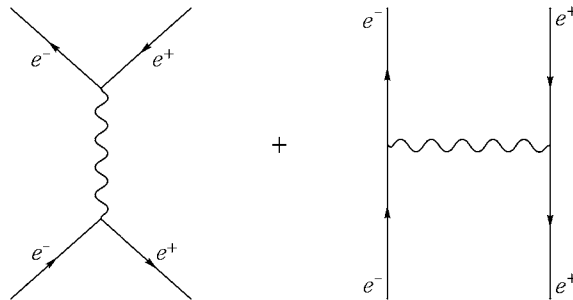


Рис. 1.6. Две диаграммы низшего порядка для рассеяния Баба  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ .

Другие процессы содержат фотоны в начальном и/или конечном состояниях. Классическим примером является комптоновское рассеяние, две диаграммы низшего поряд-

ка для которого показаны на рис. 1.7. Фейнмановские правила для внешних фотонных и внутренних электронных линий не сложнее тех, которые уже рассмотрены. Детальный анализ комптоновского рассеяния проведен в разделе 5.5.

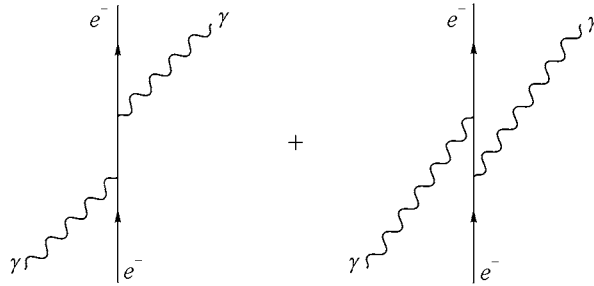


Рис. 1.7. Две диаграммы низшего порядка для комптоновского рассеяния.

Наконец, можно вычислить вклады слагаемых более высокого порядка в ряде теории возмущений. Благодаря Фейнману, по крайней мере, нетрудно нарисовать необходимые диаграммы. На рис. 1.4 были показаны те диаграммы, которые дают вклад в следующий порядок теории возмущений для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Весьма примечательно, что алгоритм, приписывающий алгебраические множители отдельным элементам диаграммы, верен для всех вкладов более высоких порядков и позволяет вычислить их непосредственно, хотя такие расчеты очень громоздки. Расчет полного вклада всех девяти диаграмм — серьезная работа на уровне научной статьи.

В этой книге, начиная с гл. 6, мы достаточно подробно проанализируем ту физику, которая возникает при учете фейнмановских диаграмм более высокого порядка типа, показанных на рис. 1.4. Мы увидим, что последние четыре из них, содержащие дополнительный фотон в конечном состоянии, необходимо учитывать потому, что ни один детектор не способен регистрировать фотоны необычайно малых энергий. Поэтому конечное состояние с такими фотонами неотличимо от интересующего нас состояния, где есть только мюонная пара.

Другие пять диаграмм на рис. 1.4 содержат не один виртуальный фотон, а промежуточные состояния нескольких виртуальных частиц. В каждой из этих диаграмм имеется хотя бы одна виртуальная частица, импульс которой не определяется законом сохранения импульсов в вершинах. Поскольку теория возмущений требует взять сумму по всем возможным промежуточным состояниям, мы должны проинтегрировать по всем возможным значениям этого импульса. Однако на этом этапе возникает новая трудность. В первых трех диаграммах при наивном подходе интегралы по импульсу в петле оказываются бесконечными. В конце части I мы сформулируем рецепт решения этой проблемы с тем, чтобы получить конечные результаты. Однако вопрос о физической природе таких расходимостей просто не решается. Это будет главной темой части II книги.

Мы обсуждали фейнмановские правила как алгоритм для проведения вычислений. В последующих главах мы проиллюстрируем мощь этого метода. Но после того как мы рассмотрим все больше применений диаграмм, мы убедимся, что они начнут жить своей собственной жизнью. Диаграммы укажут на неожиданные связи между различными физическими процессами и позволят сформулировать интуитивные аргументы, которые потом можно будет проверить с помощью вычислений. Мы надеемся, что наша книга поможет читателю научиться этому методу и найти ему новые многообещающие применения.

## ГЛАВА 2

# ПОЛЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

### 2.1. Необходимость полевого подхода

Квантовая теория поля — это применение квантовой механики к динамическим системам *полей*, в том же смысле, как в основном курсе квантовой механики рассматривают квантование динамических систем *частиц*. Этот предмет абсолютно необходим для понимания современного состояния физики элементарных частиц. С некоторыми модификациями методы квантовой теории поля играют ключевую роль в большинстве наиболее активно развивающихся областей атомной и ядерной физики, а также физики конденсированного состояния.

Однако в части I этой книги нас в первую очередь будут интересовать элементарные частицы и, следовательно, *релятивистские* поля.

Согласившись, что мы хотим понять процессы, происходящие на очень малых (квантово-механических) масштабах и при очень больших (релятивистских) энергиях, кто-то все же может задать себе вопрос, для чего мы должны изучать квантование *полей*? Почему нельзя проквантовать релятивистские частицы так же, как мы квантуем нерелятивистские?

Ответ можно дать несколькими способами. Вероятно, лучше всего выписать одночастичное релятивистское волновое уравнение (например, уравнений Клейна–Гордона или Дирака) и убедиться, что оно приводит к состояниям с отрицательной энергией и другим несообразностям. Так как это рассмотрение обычно проводится в конце продвинутого курса нерелятивистской квантовой механики, мы не будем здесь его повторять. Тем не менее нетрудно понять, почему не работает одночастичный подход. Мы не имеем права предполагать, что какой-либо релятивистский процесс можно объяснить на языке отдельной частицы, так как соотношение Эйнштейна  $E = mc^2$  допускает образование пар частица-античастица.

Даже в случае, когда для рождения пары не хватает энергии, многочастичные состояния возникают, например, как промежуточные состояния во втором порядке теории возмущений.

В соответствии с соотношением неопределенностей  $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$  можно считать, что эти состояния существуют только в течение очень короткого времени и в более высоких порядках теории возмущений возможно рождение произвольного числа таких «виртуальных» частиц.

Менее очевидно, что необходимость многочастичной теории вытекает из требования причинности.

Рассмотрим амплитуду распространения свободной частицы из точки  $\mathbf{x}_0$  в точку  $\mathbf{x}$ :

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle .$$

В нерелятивистской квантовой механике имеем  $E = \mathbf{p}^2/2m$ , так что

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} | \mathbf{x}_0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{x} | e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} \cdot e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} = \left( \frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2/2t}. \end{aligned}$$

Это выражение отлично от нуля для всех  $x$  и  $t$ , указывая на то, что частица может распространяться между любыми двумя точками за произвольно короткое время. В релятивистской теории это говорило бы о нарушении причинности. Можно ожидать, что положение исправит использование релятивистского соотношения  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ , но оказывается, что это не так. По аналогии с нерелятивистским случаем, находим:

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} | \mathbf{x}_0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}} \cdot e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно вычислить явно через функции Бесселя\*. Мы ограничимся рассмотрением асимптотического поведения этого интеграла при  $x^2 \gg t^2$  (достаточно далеко от светового конуса), используя метод стационарной фазы. Фаза  $px - t\sqrt{p^2 + m^2}$  имеет стационарную точку при  $p = imx/\sqrt{x^2 - t^2}$ . Можно свободно замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости так, чтобы он прошел через эту точку. Подставляя данное значение  $p$ , находим, что с точностью до рациональной функции от  $x$  и  $t$ ,

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2 - t^2}}.$$

Таким образом, вне светового конуса амплитуда распространения хотя и мала, но отлична от нуля, и причинность по-прежнему нарушается.

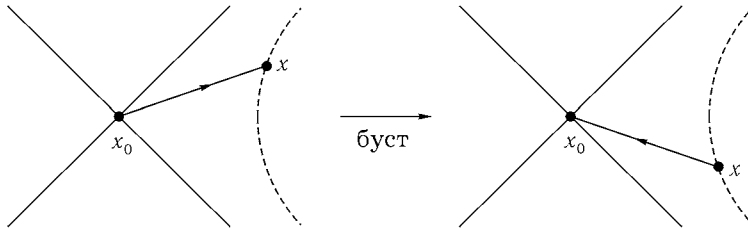


Рис. 2.1. Распространение из точки  $x_0$  в точку  $x$  в одной системе отсчета выглядит как распространение из точки  $x$  в точку  $x_0$  в другой системе отсчета.

Квантовая теория поля разрешает проблему причинности чудесным способом, который мы обсудим в разделе 2.4. Мы увидим, что в многочастичной теории поля распространение частицы на пространственноподобное расстояние не отличается от распространения *античастицы* в противоположном направлении (рис. 2.1). Когда мы спрашиваем, может ли наблюдение, сделанное в точке  $x_0$  повлиять на наблюдение, сделанное в точке  $x$ , мы находим, что амплитуды распространения для частицы и античастицы в точности сокращаются, так что причинность не нарушается.

\*См. Градштейн и Рыжик (1980), #3.914.



Квантовая теория поля естественным образом способна описывать не только многочастичные состояния, но и переходы между состояниями с разным числом частиц. Она решает проблему причинности путем введения античастиц и затем позволяет объяснить связь между спином и статистикой. Но самое главное то, что квантовая теория поля дает в руки исследователей инструменты, необходимые для расчета бесчисленного количества сечений процессов рассеяния. Экспериментальное подтверждение этих предсказаний, часто имеющих беспрецедентную точность, и есть главная причина изучения квантовой теории поля.

## 2.2. Элементы классической теории поля

В этом разделе мы даем обзор формализма классической теории поля, необходимого при последующем обсуждении квантовой теории поля.

### Лагранжева теория поля

Фундаментальная величина классической механики — действие  $S$ , являющееся интегралом по времени от лагранжиана  $L$ .

В локальной теории поля лагранжиан может быть записан как пространственный интеграл от плотности лагранжиана, обозначаемой  $\mathcal{L}$ , которая является функцией одного или более полей  $\phi(x)$  и их производных  $\partial_\mu\phi$ . Таким образом,

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x. \quad (2.1)$$

Так как это книга по теории поля, далее мы называем  $\mathcal{L}$  просто лагранжианом.

Принцип наименьшего действия утверждает, что когда система эволюционирует от одной заданной конфигурации к другой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , то ее «путь» в конфигурационном пространстве таков, что действие  $S$  имеет экстремум (обычно — минимум). Мы можем записать это условие в виде:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right\} = \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Последнее слагаемое можно превратить в поверхностный интеграл по границе четырехмерной пространственно-временной области интегрирования. Так как начальная и конечная полевые конфигурации считаются заданными, то  $\delta\phi$  равно нулю в начальный и конечный моменты времени на этой области. Если мы также ограничимся рассмотрением вариаций  $\delta\phi$ , исчезающих на пространственной границе области, то поверхностный интеграл равен нулю. Вынося  $\delta\phi$  как множитель из первых двух слагаемых и замечая, что интеграл должен исчезать для любой вариации  $\delta\phi$ , делаем вывод, что множитель при  $\delta\phi$  должен исчезать во всех точках. Таким образом, мы приходим к уравнениям движения Эйлера–Лагранжа для поля:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.3)$$

Если лагранжиан содержит более одного поля, то имеется по одному такому уравнению для каждого из них.

### Гамильтонова теория поля

Лагранжева формулировка теории поля особенно подходит для релятивистской динамики, потому что все выражения в ней явно лоренц-инвариантны. Тем не менее, в первой части этой книги мы будем использовать гамильтонову формулировку, так как с ее помощью легче осуществить переход к квантовой механике.

Напомним, что в дискретной системе для каждой динамической переменной  $q$  можно определить канонически сопряженный импульс  $p \equiv \partial L / \partial \dot{q}$  (где  $\dot{q} = \partial q / \partial t$ ). Тогда гамильтониан  $H \equiv \sum p \dot{q} - L$ . Обобщение на непрерывную систему легче всего понять, если представлять точки пространства  $\mathbf{x}$  расположенными дискретно. Мы можем определить

$$p(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \int \mathcal{L}(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y})) d^3 y \sim \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \sum_{\mathbf{y}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y})) d^3 y = \pi(\mathbf{x}) d^3 x,$$

где

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \quad (2.4)$$

называется *плотностью импульса*, сопряженного к  $\phi(\mathbf{x})$ . Таким образом, гамильтониан может быть записан в виде

$$H = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - L.$$

Переходя к континууму, имеем

$$H = \int d^3 x [\pi(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3 x \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

В конце этого раздела, используя другой метод, мы заново получим это же выражение для плотности гамильтониана  $\mathcal{H}$ .

В качестве простого примера рассмотрим теорию одного поля  $\phi(x)$ , лагранжиан которого равен

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.6)$$

Пока будем считать  $\phi$  вещественным полем. В разделе 2.3 величина  $m$  будет интерпретирована как масса, но пока будем рассматривать ее как некий параметр. Исходя из этого лагранжиана, с помощью обычной процедуры получаем уравнение движения:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0 \quad \text{или} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0, \quad (2.7)$$

которое является известным уравнением Клейна–Гордона. (В этом контексте это *классическое* полевое уравнение, аналогичное уравнениям Максвелла, а не квантово-механическое волновое уравнение.) Замечая, что канонически сопряженная к  $\phi(x)$  плотность импульса есть  $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ , можно также построить гамильтониан

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} = \int d^3 x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (2.8)$$

Три слагаемых в правой части можно рассматривать, соответственно, как энергию «перемещения» во времени, энергию «сдвига» в пространстве и энергию, связанную с наличием самого поля. Мы исследуем этот гамильтониан более детально в разделах 2.3 и 2.4.

### Теорема Нетер

Обсудим теперь связь между симметриями и законами сохранения в классической теории поля, устанавливаемую *теоремой Нетер*. В этой теореме рассматриваются непрерывные преобразования полей  $\phi$ , которые в инфинитезимальной форме могут быть записаны в виде

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x), \quad (2.9)$$

где  $\alpha$  — инфинитезимальный параметр и  $\Delta \phi$  — некоторая деформация конфигурации поля. Мы называем это преобразование симметрией, если оно оставляет инвариантными уравнения движения. Это заведомо имеет место, если действие инвариантно по отношению к преобразованию (2.9). В более общем случае можно допустить, чтобы добавка к действию имела вид поверхностного слагаемого, так как наличие такого слагаемого не влияет на вывод уравнений движения Эйлера–Лагранжа (2.3). Поэтому лагранжиан должен быть инвариантен относительно (2.9) с точностью до 4-дивергенции от некоторого вектора  $\mathcal{J}^\mu$ :

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \quad (2.10)$$

Сравним ожидаемое выражение для  $\Delta \mathcal{L}$  с результатом, полученным при вариации полей:

$$\begin{aligned} \alpha \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\mu (\alpha \Delta \phi) = \\ &= \alpha \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta \phi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу уравнения Эйлера–Лагранжа (2.3) второе слагаемое обращается в нуль. Полагая левую часть этого уравнения равной  $\alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$ , находим:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad \text{для} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu. \quad (2.12)$$

(Если симметрия включает больше одного поля, то первое слагаемое в этом выражении для  $j^\mu(x)$  должно быть заменено суммой таких слагаемых по одному для каждого поля.) Этот результат означает, что ток  $j^\mu(x)$  сохраняется. Каждой непрерывной симметрии  $\mathcal{L}$  соответствует такой закон сохранения.

Закон сохранения может быть также сформулирован как сохранение заряда

$$Q \equiv \int_{\text{все пространство}} j^0 d^3x \quad (2.13)$$

во времени. Заметим, однако, что формулировка теории поля в терминах локальной плотности лагранжиана непосредственно приводит к локальной форме закона сохранения (2.12).

Самый простой пример такого закона возникает в теории с лагранжианом, содержащим лишь кинетическое слагаемое:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$ . Преобразование  $\phi \rightarrow \phi + \alpha$ , где  $\alpha$  — константа, оставляет  $\mathcal{L}$  неизменным, и мы заключаем, что ток  $j^\mu = \partial^\mu \phi$  сохраняется. В качестве менее тривиального примера рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2, \quad (2.14)$$

где теперь  $\phi$  — комплексное поле. Можно легко показать, что уравнение движения для этого лагранжиана вновь является уравнением Клейна–Гордона (2.7). Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразования  $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$ ; для бесконечно малого преобразования имеем:

$$\alpha\Delta\phi = i\alpha\phi; \quad \alpha\Delta\phi^* = -i\alpha\phi^*. \quad (2.15)$$

(Мы рассматриваем  $\phi$  и  $\phi^*$  как независимые поля. Альтернативно можно было бы работать с вещественной и мнимой частями поля  $\phi$ .) Теперь несложно показать, что сохраняющийся нетеровский ток равен

$$j^\mu = i[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)]. \quad (2.16)$$

(Общий множитель был выбран произвольно.) Используя уравнение Клейна–Гордона, можно непосредственно проверить, что дивергенция этого тока равна нулю. Ниже мы добавим к этому лагранжиану слагаемые, которые связывают  $\phi$  с электромагнитным полем. Тогда  $j^\mu$  можно будет рассматривать как плотность электромагнитного тока комплексного скалярного поля, а пространственный интеграл  $j^0$  — как электрический заряд.

Теорему Нетер можно также применить к пространственно-временным преобразованиям типа трансляций и вращений. Бесконечно малая трансляция

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu$$

может быть альтернативно описана как преобразование поля:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + a^\mu\partial_\mu\phi(x).$$

Лагранжиан также является скаляром, поэтому он должен преобразовываться аналогично:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a^\mu\partial_\mu\mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu\partial_\nu(\delta^\mu_\nu\mathcal{L}).$$

Сравнивая это уравнение с (2.10), видим, что теперь имеется ненулевой ток  $\mathcal{J}^\mu$ . Учитывая это, можно применить теорему Нетер, чтобы получить четыре отдельно сохраняющихся тока

$$T^\mu_\nu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu. \quad (2.17)$$

Это — в точности *тензор энергии-натяжения*, называемый также *тензором энергии-импульса* поля  $\phi$ . Сохраняющийся заряд, связанный с временными трансляциями, есть гамильтониан

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x. \quad (2.18)$$

Вычисляя эту величину для поля Клейна–Гордона, можно еще раз получить результат (2.8). Связанные с пространственными трансляциями сохраняющиеся заряды имеют вид:

$$P^i = \int T^{0i} d^3x = - \int \pi\partial_i\phi d^3x. \quad (2.19)$$

Мы интерпретируем их как (физический) импульс, переносимый полем (не путать с каноническим импульсом).

## 2.3. Поле Клейна – Гордона как набор гармонических осцилляторов

Начнем обсуждение *квантовой* теории поля с довольно формального рассмотрения простейшего типа поля — вещественного поля Клейна – Гордона. Идея состоит в том, чтобы начать с классической теории поля (теории классического скалярного поля, описываемого лагранжианом (2.6)) и затем «проквантовать» ее, то есть реинтерпретировать динамические переменные как операторы, которые подчиняются каноническим коммутационным соотношениям\*. Далее мы «решаем» теорию, находя собственные значения и собственные состояния гамильтониана, в качестве аналогии используя гармонический осциллятор.

Классическая теория вещественного поля Клейна – Гордона была кратко (но достаточно) обсуждена в предыдущем разделе; соответствующие выражения даны в формулах (2.6), (2.7) и (2.8). При квантовании теории мы следуем тем же путем, что и для любой другой динамической системы: полагаем  $\phi$  и  $\pi$  операторами и накладываем на них подходящие коммутационные соотношения. Напомним, что для дискретной системы одной или более частиц коммутационные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\delta_{ij}; \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0. \end{aligned}$$

Обобщение для непрерывной системы вполне естественно: так как  $\pi(\mathbf{x})$  является *плотностью* импульса, то вместо символа Кронекера мы берем дельта-функцию Дирака:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

(До сих пор мы используем представление Шредингера, в котором  $\phi$  и  $\pi$  не зависят от времени. В следующем разделе мы перейдем к представлению Гейзенберга и эти «одновременные» коммутационные соотношения будут по-прежнему верны при условии, что оба оператора рассматриваются в один и тот же момент времени.)

Так как гамильтониан является функцией  $\phi$  и  $\pi$ , то он также становится оператором. Следующая задача состоит в том, чтобы, зная гамильтониан, найти его спектр. Так как нет очевидного способа сделать это, попробуем записать уравнение Клейна – Гордона в фурье-пространстве. Если разложить классическое поле Клейна – Гордона

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t)$$

(где  $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$ , так что  $\phi(\mathbf{x})$  вещественно), то уравнение (2.7) принимает вид:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\mathbf{p}, t) = 0. \quad (2.21)$$

Это — уравнение движения для простого гармонического осциллятора с частотой

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (2.22)$$

---

\*Эта процедура иногда называется *вторичным квантованием*, чтобы отличать возникающее в результате уравнение Клейна – Гордона (в котором  $\phi$  является оператором) от старого одночастичного уравнения Клейна – Гордона (в котором  $\phi$  было волновой функцией). В этой книге мы никогда не обращаемся ко второй точке зрения; мы стартуем с классического уравнения (в котором  $\phi$  является классическим полем) и квантуем его только один раз.

Мы знаем, как найти спектр простого гармонического осциллятора (ПГО). Коротко напомним, как это делается. Запишем гамильтониан в виде:

$$H_{\text{ПГО}} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2.$$

Чтобы найти собственные значения  $H_{\text{ПГО}}$ , запишем  $\phi$  и  $p$  через лестничные операторы:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger). \quad (2.23)$$

Каноническое коммутационное соотношение  $[\phi, p] = i$  эквивалентно соотношению

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.24)$$

Гамильтониан можно теперь переписать в виде:

$$H_{\text{ПГО}} = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

Состояние  $|0\rangle$ , такое, что  $a|0\rangle = 0$ , является собственным состоянием  $H$  с собственным значением  $\frac{1}{2}\omega$ , равным энергии нулевых колебаний. Далее, с помощью коммутаторов

$$[H_{\text{ПГО}}, a^\dagger] = \omega a^\dagger, \quad [H_{\text{ПГО}}, a] = -\omega a$$

легко проверить, что состояния

$$|n\rangle \equiv (a^\dagger)^n |0\rangle$$

являются собственными состояниями  $H_{\text{ПГО}}$  с собственными значениями  $(n + \frac{1}{2})\omega$ . Этими состояниями исчерпывается спектр.

Спектр гамильтониана Клейна–Гордона можем найти, используя тот же прием, но теперь каждая мода Фурье поля рассматривается как независимый осциллятор со своими собственными  $a$  и  $a^\dagger$ . По аналогии с (2.23) мы пишем:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right); \quad (2.25)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (2.26)$$

Обратные выражения для  $a_{\mathbf{p}}$  и  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  через  $\phi$  и  $\pi$  легко выводятся, но они редко используются. Для дальнейших вычислений полезно переписать (2.25) и (2.26) следующим образом:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \quad (2.27)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.28)$$

Коммутационное соотношение (2.24) принимает вид:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.29)$$

при помощи которого вычисляется коммутатор  $\phi$  и  $\pi$ :

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left( [a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}] - [a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger] \right) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}')} = \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Этот коммутатор имеет правильный вид. (Если вычисления такого типа незнакомы читателю, то мы рекомендуем тщательно их проделать; после небольшой практики они становятся совершенно простыми, но имеют фундаментальное значение для формализма, рассматриваемого в следующих двух главах.)

Теперь можно выразить гамильтониан через повышающие и понижающие операторы. Начиная с выражения (2.8) через  $\phi$  и  $\pi$ , получаем:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) (a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) (a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right\} = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Второе слагаемое пропорционально бесконечному  $\epsilon$ -числу  $\delta(0)$ . Это есть просто сумма по всем модам энергий нулевых колебаний  $\omega_{\mathbf{p}}/2$ . Наличие этого слагаемого следовало ожидать, но оно вызывает беспокойство. К счастью, этот бесконечный сдвиг энергии не может быть обнаружен экспериментально, так как эксперименты измеряют только *разность* между данной энергией и энергией основного состояния  $H$ . Поэтому мы игнорируем это бесконечное постоянное слагаемое во всех вычислениях. Возможно, что этот сдвиг энергии основного состояния может создавать проблему на более глубоком уровне теории; мы обсудим этот вопрос в Эпилоге.

Используя выражение для гамильтониана через  $a_{\mathbf{p}}$  и  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ , нетрудно найти коммутаторы:

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger; \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \quad (2.32)$$

Теперь можно выписать спектр теории так же, как и для гармонического осциллятора. Состояние  $|0\rangle$ , такое, что  $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$  для всех  $\mathbf{p}$ , является основным состоянием, или *вакуумом*, причем его энергия  $E = 0$  после отбрасывания бесконечной константы в (2.31). Все другие собственные состояния энергии могут быть построены путем действия операторами рождения на  $|0\rangle$ . Состояние  $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \cdots |0\rangle$  является собственным состоянием гамильтониана  $H$  с энергией  $\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \cdots$ . Эти состояния исчерпывают спектр.

Найдя спектр гамильтониана, попробуем дать интерпретацию его собственных состояний. При помощи (2.19) и вычислений, подобных (2.31), можно записать оператор полного импульса

$$\mathbf{P} = - \int d^3 x \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \quad (2.33)$$

Таким образом, оператор  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  рождает состояние с импульсом  $\mathbf{p}$  и энергией  $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . Аналогично, состояние  $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \cdots |0\rangle$  имеет импульс  $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \dots$ . Естественно

называть эти возбуждения *частицами*, так как они являются дискретными объектами, удовлетворяющими правильному релятивистскому соотношению между импульсом и энергией. (Под *частицей* мы не подразумеваем нечто такое, что должно быть локализовано в пространстве;  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  рождает частицы как собственные состояния импульса). С этого момента мы обозначаем  $\omega_{\mathbf{p}}$  через  $E_{\mathbf{p}}$  (или просто  $E$ ), так как это действительно есть энергия частицы. Обратим внимание, что энергия всегда положительна:  $E_{\mathbf{p}} = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ .

Обсуждаемый формализм позволяет также определить статистику наших частиц. Рассмотрим двухчастичное состояние  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} |0\rangle$ . Так как  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  и  $a_{\mathbf{q}}^{\dagger}$  коммутируют, то это состояние тождественно состоянию  $a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$ , в котором две частицы переставлены местами. Более того, одна мода  $\mathbf{p}$  может содержать произвольное количество частиц (точно так же, как простой гармонический осциллятор может быть возбужден до произвольно высокого уровня). Отсюда можно заключить, что частицы Клейна–Гордона подчиняются *статистике Бозе–Эйнштейна*.

Вакуумное состояние естественно считать нормированным условием  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Одночастичные состояния  $|\mathbf{p}\rangle \propto a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$  также достаточно часто встречаются в теории, поэтому необходимо принять соглашение об их нормировке. Простейшая нормировка  $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  (используемая во многих книгах) не является лоренц-инвариантной, что можно показать, рассматривая действие буста в направлении оси  $z$ . В результате такого буста имеем  $p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E)$ ,  $E' = \gamma(E + \beta p_3)$ . Используя тождество для дельта-функции

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (2.34)$$

можно записать:

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \cdot \frac{dp'_3}{dp_3} = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \gamma \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_3}\right) = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{\gamma}{E} (E + \beta p_3) = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \frac{E'}{E}. \end{aligned}$$

Проблема состоит в том, что объемы не инвариантны по отношению к бустам; ящик объемом  $V$  в собственной системе покоя имеет объем  $V/\gamma$  в движущейся системе в силу лоренцевского сокращения. Но из приведенного вычисления видно, что величина  $E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  лоренц-инвариантна. Поэтому мы определяем

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle, \quad (2.35)$$

так что

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2.36)$$

(Множитель 2 не является необходимым, но он удобен из-за множителя 2 в (2.25).)

В гильбертовом пространстве квантовых состояний преобразование Лоренца  $\Lambda$  действует как унитарный оператор  $U(\Lambda)$ . Из условия нормировки (2.35) вытекает, что

$$U(\Lambda) |\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle. \quad (2.37)$$



Если рассматривать это преобразование действующим на оператор  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ , то можно записать

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}} a_{\Lambda\mathbf{p}}^{\dagger}. \quad (2.38)$$

При выбранной нормировке следует в других местах разделить некоторые выражения на  $2E_{\mathbf{p}}$ . Например, соотношение полноты для одночастичных состояний примет вид:

$$(1)_{\text{одночастичные}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}|, \quad (2.39)$$

где оператор слева тождествен единичному на подпространстве одночастичных состояний и равен нулю на остальной части гильбертова пространства состояний. Интегралы такого вида будут встречаться достаточно часто; действительно, интеграл

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \Big|_{p^0 > 0} \quad (2.40)$$

является лоренц-инвариантным интегралом по пространству 3-импульсов, в том смысле, что если  $f(p)$  лоренц-инвариантна, то и выражение  $\int \frac{d^3p f(p)}{(2E_{\mathbf{p}})}$  лоренц-инвариантно.

Предполагается, что интегрирование идет по ветви  $p^0 > 0$  гиперболоида  $p^2 = m^2$  в пространстве 4-импульсов (рис. 2.2).

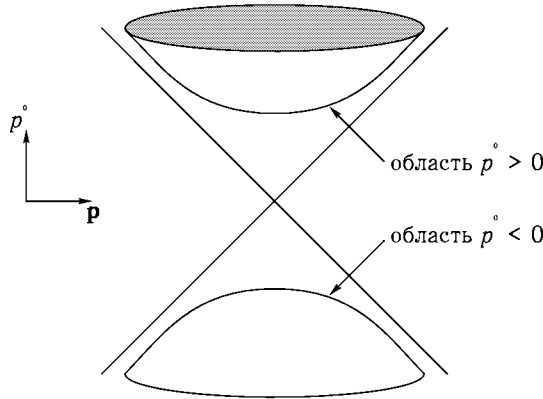


Рис. 2.2. Лоренц-инвариантный интеграл по пространству 3-импульсов берется по верхней ветви гиперболоида  $p^2 = m^2$ .

В заключение рассмотрим интерпретацию состояния  $\phi(\mathbf{x}) |0\rangle$ . Из разложения (2.25) видно, что

$$\phi(\mathbf{x}) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{p}\rangle \quad (2.41)$$

является линейной суперпозицией одночастичных состояний, имеющих хорошо определенный импульс. Если бы не множитель  $1/2E_{\mathbf{p}}$ , то это выражение совпало бы с известным нерелятивистским выражением для собственного состояния оператора координаты  $|\mathbf{x}\rangle$ ; на самом деле дополнительный множитель почти постоянен для малых

(нерелятивистских)  $\mathbf{p}$ . Поэтому мы придерживаемся такой же интерпретации и считаем, что оператор  $\phi(\mathbf{x})$ , действующий на вакуум, *рождает частицу в точке  $\mathbf{x}$* . Эта интерпретация подтверждается следующими вычислениями:

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{x}) | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \left( a_{\mathbf{p}'} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \right) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.42)$$

Мы можем интерпретировать этот результат как координатное представление одночастичной волновой функции состояния  $|\mathbf{p}\rangle$ , точно так же, как в нерелятивистской квантовой механике  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \propto e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  является волновой функцией состояния  $|\mathbf{p}\rangle$  в координатном представлении.

## 2.4. Поле Клейна–Гордона в пространстве-времени

В предыдущем разделе мы проквантовали поле Клейна–Гордона в представлении Шредингера и дали интерпретацию возникающей в результате теории в терминах релятивистских частиц. В этом разделе рассмотрим представление Гейзенберга, в котором будет легче обсуждать зависимость величин от времени и вопросы причинности. После вводных формул мы вернемся к вопросу о причинном распространении, поднятому в разделе 2.1. Мы также получим выражение для *пропагатора Клейна–Гордона*, играющего ключевую роль в разрабатываемых в гл. 4 правилах Фейнмана.

В представлении Гейзенберга операторы  $\phi$  и  $\pi$  зависят от времени обычным образом:

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \quad (2.43)$$

и аналогично для  $\pi(x) = \pi(\mathbf{x}, t)$ . Уравнения движения Гейзенберга

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \quad (2.44)$$

позволяют найти зависимость  $\phi$  и  $\pi$  от времени:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) &= \left[ \phi(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \left\{ \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}', t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}', t) \right\} \right] = \\ &= \int d^3 x' \left( i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \pi(\mathbf{x}', t) \right) = \\ &= i \pi(\mathbf{x}, t); \\ i \frac{\partial}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t) &= \left[ \pi(\mathbf{x}, t), \int d^3 x' \left\{ \frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}', t) (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}', t) \right\} \right] = \\ &= \int d^3 x' \left( -i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}', t) \right) = \\ &= -i (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Объединяя результаты, находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = (\nabla^2 - m^2) \phi, \quad (2.45)$$

т. е. получаем уравнение Клейна–Гордона.

Мы можем лучше понять зависимость от времени  $\phi(\mathbf{x})$  и  $\pi(\mathbf{x})$ , записывая их через операторы рождения и уничтожения. Сначала заметим, что

$$H a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}(H - E_{\mathbf{p}}),$$

и, следовательно,

$$H^n a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}(H - E_{\mathbf{p}})^n$$

для любого  $n$ . Подобное соотношение (с  $-$ , замененным на  $+$ ) имеет место для  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ . Таким образом, мы получаем тождества

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}}t}, \quad (2.46)$$

которые можно использовать в выражении (2.25) для  $\phi(\mathbf{x})$ , чтобы согласно (2.43) найти искомое выражение для гейзенберговского оператора  $\phi(x)$ . (Для обозначения независимых от времени повышающих и понижающих операторов в представлении Шредингера мы всегда будем использовать символы  $a_{\mathbf{p}}$  и  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ .) Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}; \\ \pi(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Стоит заметить, что такие же манипуляции можно выполнить с  $\mathbf{P}$  вместо  $H$ , чтобы связать  $\phi(\mathbf{x})$  и  $\phi(0)$ . По аналогии с (2.46) можно показать, что

$$e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.48)$$

и, следовательно,

$$\phi(x) = e^{i(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} \phi(0) e^{-i(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} = e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x}, \quad (2.49)$$

где  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$ . (Обозначения здесь могут запутать, но они стандартны. Напомним, что  $\mathbf{P}$  — оператор импульса, собственное значение которого является полным импульсом системы. С другой стороны,  $\mathbf{p}$  — импульс одной фурье-моды поля, который мы интерпретируем как импульс частицы в этой моде. Для одночастичного состояния с определенным импульсом величина  $\mathbf{p}$  является собственным значением оператора  $\mathbf{P}$ .)

Уравнение (2.47) указывает на корпускулярно-волновой дуализм в интерпретации квантованного поля  $\phi(x)$ . С одной стороны, поле  $\phi(x)$  представлено как оператор в гильбертовом пространстве, который рождает и уничтожает частицы, являющиеся квантами возбуждения этого поля. С другой стороны, поле  $\phi(x)$  записывается как линейная комбинация решений ( $e^{ip \cdot x}$  и  $e^{-ip \cdot x}$ ) уравнения Клейна–Гордона. В экспоненте появляются оба знака для временной зависимости: присутствуют как  $e^{-ip^0 t}$ , так и  $e^{+ip^0 t}$ , причем  $p^0$  всегда положителен. Для одночастичных волновых функций это соответствовало бы состояниям с положительной и отрицательной энергиями; далее будем называть эти состояния *положительно-* и *отрицательно-частотными* модами. Такая связь между операторами рождения частиц и видом рассматриваемых волновых функций всегда имеет место для свободных квантовых полей: положительно-частотное решение уравнения поля имеет в качестве коэффициента оператор *уничтожения* частицы в состоянии с соответствующей одночастичной волновой функцией. Отрицательно-частотное решение уравнения поля, являющееся эрмитово сопряженным к положительно-частотному решению, имеет коэффициентом оператор *рождения* частицы

в состоянии с соответствующей одночастичной волновой функцией с положительной энергией. Таким образом, тот факт, что релятивистские волновые уравнения имеют и положительно-, и отрицательно-частотные решения, согласуется с требованием, чтобы разумная квантовая теория содержала только положительные энергии возбуждения.

### Причинность

Теперь вернемся к вопросу о причинности, поднятому в начале этой главы. В рамках рассматриваемого формализма и в представлении Гейзенберга амплитуда распространения частицы от точки  $y$  до точки  $x$  равна  $\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$ . Обозначим эту величину  $D(x - y)$ . Каждый оператор  $\phi$  есть сумма операторов уничтожения  $a$  и рождения  $a^\dagger$ , но в выражении для этой амплитуды выживает только слагаемое  $\langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ . Легко проверить, что

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.50)$$

Мы уже показали в (2.40), что интегралы такого вида лоренц-инвариантны. Теперь вычислим этот интеграл для конкретных значений  $x - y$ .

Сначала рассмотрим случай, когда отлична от нуля только временная компонента разности  $x - y$ :  $x^0 - y^0 = t$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ . (Если интервал от  $y$  до  $x$  времениподобен, то всегда найдется система отсчета, в которой он чисто временной.) Тогда имеем:

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{p^2 + m^2}t} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEt} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-imt}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Далее рассмотрим случай, когда разность  $x - y$  является чисто пространственной:  $x^0 - y^0 = 0$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$ . Амплитуда тогда имеет вид:

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} = \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = \\ &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение, рассматриваемое как функция комплексной переменной  $p$ , имеет разрезы вдоль мнимой оси, начинающиеся в точках  $\pm im$  (рис. 2.3). Для вычисления интеграла деформируем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость так, чтобы он обошел верхний разрез. Полагая  $\rho = -ip$ , получаем

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mr}. \quad (2.52)$$

Таким образом, оказывается, что вне светового конуса амплитуда распространения экспоненциально убывает, тем не менее, она остается отличной от нуля.

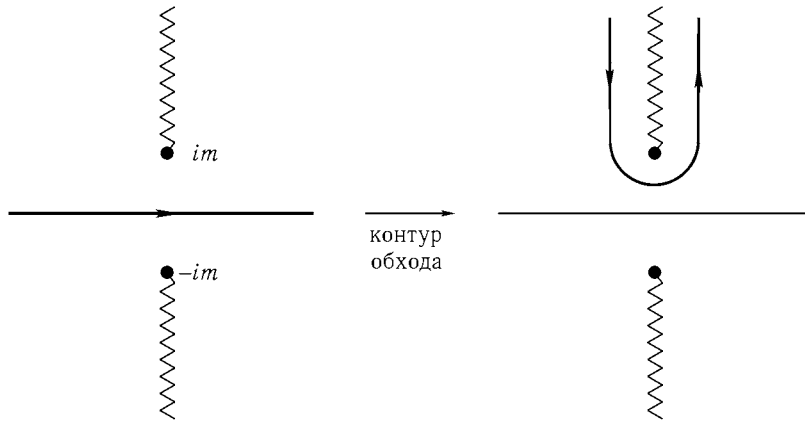


Рис. 2.3. Контур для вычисления амплитуды распространения  $D(x - y)$  по пространственно-подобному интервалу.

Однако для действительного понимания принципа причинности следует рассмотреть не столько вопрос о том, могут ли распространяться частицы на пространственноподобные расстояния, сколько вопрос о возможности воздействия *измерения*, проведенного в одной точке, на измерение, проводимое в другой точке, если эти точки разделены пространственноподобным интервалом. Простейшее, что можно попытаться измерить, — это поле  $\phi(x)$ . Для этого следует вычислить коммутатор  $[\phi(x), \phi(y)]$ ; если этот коммутатор равен нулю, то одно измерение не может повлиять на другое. На самом деле, если коммутатор равен нулю для  $(x - y)^2 < 0$ , то принцип причинности имеет место в общем случае, так как коммутаторы от любых функций  $\phi(x)$ , включая  $\pi(x) = \partial\phi/\partial t$ , также будут нулевыми. Из выражения (2.20) мы знаем, что этот коммутатор равен нулю при  $x^0 = y^0$ ; теперь проведем более общее вычисление:

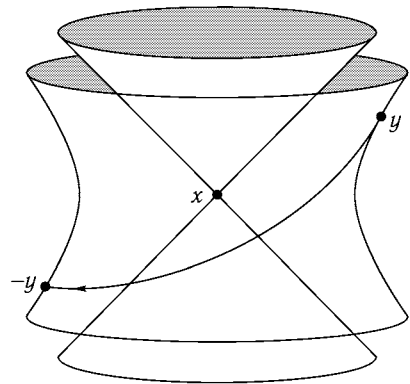


Рис. 2.4. Когда разность  $x - y$  пространственноподобна, существует непрерывное преобразование Лоренца, переводящее  $(x - y)$  в  $-(x - y)$ .

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \left[ (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y}) \right] = \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) = D(x - y) - D(y - x). \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Если  $(x - y)^2 < 0$ , то можно совершить преобразование Лоренца над вторым слагаемым (так как каждый член в отдельности лоренц-инвариантен), переводящее  $(x - y) \rightarrow -(x - y)$  (рис. 2.4). Таким образом, два слагаемых оказываются равными и сокращаются. Тем самым причинность сохраняется. Обратим внимание, что, если  $(x - y)^2 > 0$ , то не существует непрерывного преобразования Лоренца, которое переводит  $(x - y) \rightarrow -(x - y)$ . В этом случае согласно (2.51) амплитуда (к счастью)

отлична от нуля, в частности, когда  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ , она ведет себя как  $(e^{-imt} - e^{imt})$ . Таким образом, мы заключаем, что никакое измерение в теории Клейна–Гордона не может повлиять на другое измерение вне светового конуса.

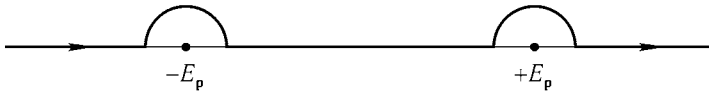
Как мы и предполагали в конце раздела 2.1, в теории Клейна–Гордона причинность имеет место. Чтобы лучше понять этот механизм, следует расширить рамки нашего обсуждения, включив в рассмотрение *комплексное* поле Клейна–Гордона, имеющее различающиеся возбуждения, отвечающие частицам и античастицам. Как было упомянуто при обсуждении (2.15), если поле  $\phi(x)$  является не вещественным, а комплексным, в теории Клейна–Гордона существует сохраняющийся заряд. При квантовании комплексной скалярной теории поля (см. задачу 2.2) поле  $\phi(x)$  рождает положительно заряженные и уничтожает отрицательно заряженные частицы, в то время как  $\phi^\dagger(x)$  производит противоположные операции. Тогда коммутатор  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$  будет иметь отличные от нуля составляющие, которые для сохранения причинности должны точно сокращаться вне светового конуса. Два вклада с приписанными зарядами отвечают двум слагаемым в (2.53). Первое слагаемое представляет амплитуду распространения отрицательно заряженной частицы из точки  $y$  в точку  $x$ . Второе слагаемое представляет амплитуду распространения положительно заряженной частицы из точки  $x$  в точку  $y$ . Для того чтобы оба упомянутых процесса имели место и их амплитуды взаимно сокращались, обе эти частицы должны существовать в теории и иметь одинаковые массы. Таким образом, принцип причинности в квантовой теории поля требует, чтобы каждая частица имела соответствующую античастицу той же самой массы и с противоположными квантовыми числами (в данном случае — электрическим зарядом). Для вещественного поля Клейна–Гордона частица является своей собственной античастицей.

### Пропагатор Клейна–Гордона

Изучим коммутатор  $[\phi(x), \phi(y)]$ . Так как он является  $c$ -числом, можно записать:  $[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$ . Предполагая, что  $x^0 > y^0$ , можно переписать это выражение в виде четырехмерного интеграла:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_p} \right\} \Big|_{x^0 > y^0} = \\ &\stackrel{=}{=} \int_{x^0 > y^0} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

В последнем интеграле интегрирование по  $p^0$  выполняется вдоль контура:



Для  $x^0 > y^0$  можно замкнуть контур в нижней полуплоскости, обходя оба полюса сверху, в результате чего получим предпоследнюю строку в формуле (2.54). Для  $x^0 < y^0$  мы можем замкнуть контур в верхней полуплоскости, получив нуль. Таким образом, интеграл в последней строке (2.54) вместе с правилом обхода полюсов является чис-

ленным выражением величины

$$D_R(x - y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle. \quad (2.55)$$

Чтобы лучше понять смысл этой величины, проделаем еще одно вычисление:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)D_R(x - y) &= (\partial^2 \theta(x^0 - y^0)) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \\ &\quad + 2(\partial_\mu \theta(x^0 - y^0)) (\partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) + \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0) (\partial^2 + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \\ &= -\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \\ &\quad + 2\delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + 0 = \\ &= -i\delta^{(4)}(x - y). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Отсюда следует, что  $D_R(x - y)$  является функцией Грина оператора Клейна – Гордона. Так как эта функция обращается в нуль для  $x^0 < y^0$ , то это *запаздывающая* функция Грина.

Если бы мы еще не получили выражение (2.54), его можно было бы получить с помощью преобразования Фурье. Записывая

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - y)} \tilde{D}_R(p), \quad (2.57)$$

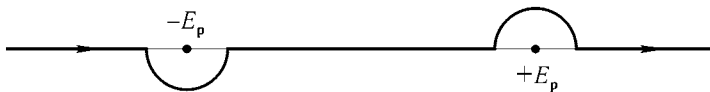
мы получаем алгебраическое выражение для  $\tilde{D}_R(p)$ :

$$(-p^2 + m^2) \tilde{D}_R(p) = -i.$$

Таким образом, сразу приходим к следующему результату:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - y)}. \quad (2.58)$$

Интеграл по  $p^0$  в (2.58) может быть вычислен по четырем различным контурам, из которых в (2.54) использовался только один. В гл. 4 мы найдем, что чрезвычайно полезным является другое правило обхода полюсов:



Это правило называется *правилом Фейнмана*. Чтобы запомнить его, удобно записать интеграл для функции Грина в виде:

$$D_F(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}, \quad (2.59)$$

так как полюса теперь находятся в точках  $p^0 = \pm(E_p - i\epsilon)$ , смещенных соответственно ниже и выше вещественной оси. Когда  $x^0 > y^0$ , можно брать интеграл по  $p^0$ , замыкая контур интегрирования вниз, в результате получая в точности амплитуду распространения  $D(x - y)$  (2.50). Если  $x^0 < y^0$ , то контур интегрирования замыкается вверх,

и в результате получается то же самое выражение, но с переставленными  $x$  и  $y$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \begin{cases} D(x-y) & \text{для } x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{для } x^0 < y^0 \end{cases} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Последняя строка определяет символ «хронологического упорядочивания»  $T$ , который указывает на то, что операторы, зависящие от более поздних моментов времени, располагаются левее тех, которые зависят от более ранних моментов времени. Применяя к последней строке оператор  $(\partial^2 + m^2)$ , можно непосредственно проверить, что  $D_F$  есть функция Грина оператора Клейна–Гордона.

С практической точки зрения выражения (2.59) и (2.60) являются наиболее важными результатами этой главы. Функция Грина  $D_F(x-y)$  называется *пропагатором Фейнмана* для частицы Клейна–Гордона, так как она в конечном счете является амплитудой распространения. Действительно, фейнмановский пропагатор входит в правила Фейнмана:  $D_F(x-y)$  (или  $\tilde{D}_F(p)$ ) является тем выражением, которое приписывается внутренним линиям диаграмм Фейнмана, представляя распространение виртуальных частиц.

Однако нам предстоит еще длинный путь, прежде чем мы сможем произвести какие-либо реальные вычисления, так как до сих пор мы работали только со *свободной* теорией Клейна–Гордона, в которой уравнение поля является линейным и взаимодействие отсутствует. Отдельные частицы живут в своих изолированных модах, не замечая существования друг друга и любых других сортов частиц. В рамках такой теории невозможно проделать какие-либо наблюдения при помощи рассеяния или любыми другими средствами. С другой стороны, разработанный формализм чрезвычайно важен, так как свободная теория формирует основу для выполнения вычислений по теории возмущений в теории с взаимодействием.

### Рождение частиц классическим источником

Имеется один тип взаимодействия, к рассмотрению которого мы уже готовы. Рассмотрим поле Клейна–Гордона, связанное с внешним классическим полем-источником  $j(x)$ . Иными словами, рассмотрим уравнение поля:

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x), \quad (2.61)$$

где  $j(x)$  — некоторая фиксированная известная функция пространственно-временных координат, которая отлична от нуля лишь на конечном временном интервале. Если в далеком прошлом система находится в вакуумном состоянии, что мы будем иметь после того, как поле  $j(x)$  включается и затем вновь отключается?

Уравнение поля (2.61) вытекает из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j(x)\phi(x). \quad (2.62)$$

Но если  $j(x)$  включается только на конечное время, то проще всего решить поставленную задачу, непосредственно используя полевое уравнение. До того, как источник  $j(x)$  включен, поле  $\phi(x)$  имеет вид

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}).$$



При отсутствии источника это поле было бы решением для всех моментов времени. При наличии источника решение уравнения движения может быть построено с помощью запаздывающей функции Грина:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) + i \int d^4y D_R(x-y)j(y) = \\ &= \phi_0(x) + i \int d^4y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \theta(x^0 - y^0) (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) j(y).\end{aligned}\quad (2.63)$$

Если для наблюдателя моменты включения и выключения поля  $j$  находятся в прошлом, то тета-функция равняется единице во всей области интегрирования. Тогда поле  $\phi(x)$  содержит лишь фурье-компоненты поля  $j$ :

$$\tilde{j}(p) = \int d^4y e^{ip \cdot y} j(y),$$

вычисленные при таких 4-импульсах  $p$ , что  $p^2 = m^2$ . Естественно сгруппировать положительно-частотные слагаемые вместе с  $a_p$  и отрицательно-частотные слагаемые вместе с  $a_p^\dagger$ ; в результате получим выражение:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left\{ \left( a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}(p) \right) e^{-ip \cdot x} + \text{э.с.} \right\}.\quad (2.64)$$

Теперь можно догадаться (или вычислить), какую форму будет иметь гамильтониан после действия  $j(x)$ . Чтобы получить ответ, остается лишь сделать замену  $a_p$  на  $(a_p + i\tilde{j}(p)/\sqrt{2E_p})$ :

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left( a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}^*(p) \right) \left( a_p + \frac{i}{\sqrt{2E_p}} \tilde{j}(p) \right).$$

Энергия системы после выключения источника равна

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} |\tilde{j}(p)|^2,\quad (2.65)$$

где  $|0\rangle$  по-прежнему обозначает основное состояние свободной теории. Мы можем интерпретировать эти результаты в терминах частиц, рассматривая  $|\tilde{j}(p)|^2/2E_p$  как плотность вероятности рождения частицы в моде  $p$ . Тогда общее число рожденных частиц равно

$$\int dN = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\tilde{j}(p)|^2.\quad (2.66)$$

При рождении частиц существенны лишь те фурье-компоненты источника  $j(x)$ , которые находятся в резонансе с волнами Клейна–Гордона на «массовой поверхности» (т. е.  $p^2 = m^2$ ).

Мы вернемся к этому вопросу в задаче 4.1. В гл. 6 будет рассмотрена аналогичная задача о рождении фотонов ускоренным электроном (тормозное излучение).

## Задачи

**2.1.** Классическая теория электромагнетизма (без источников) следует из выражения для действия

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad \text{где } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

- (а) Получите уравнения Максвелла как уравнения Эйлера–Лагранжа для этого действия, трактуя компоненты  $A_\mu(x)$  как динамические переменные. Запишите уравнения в стандартной форме, отождествляя  $E^i = -F^{0i}$  и  $\varepsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$ .
- (б) Постройте тензор энергии-импульса в этой теории. Обратите внимание, что обычная процедура приводит к несимметричному тензору. Чтобы исправить это, можно добавить к  $T^{\mu\nu}$  слагаемое вида  $\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$ , где  $K^{\lambda\mu\nu}$  антисимметричен по первым двум индексам. Такая добавка автоматически имеет нулевую дивергенцию, так что тензор

$$\hat{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}$$

равносилен исходному тензору энергии-импульса с теми же самыми полными сохраняющимися энергией и импульсом. Покажите, что такое построение, где

$$K^{\lambda\mu\nu} = F^{\mu\lambda} A^\nu,$$

приводит к симметричному тензору энергии-импульса  $\hat{T}$  и стандартным формулам для плотностей электромагнитной энергии и импульса:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2); \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

**2.2. Комплексное скалярное поле.** Рассмотрите теорию комплексного скалярного поля, удовлетворяющего уравнению Клейна–Гордона. Действие этой теории имеет вид

$$S = \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi).$$

Проще изучать эту теорию, рассматривая в качестве базисных динамических переменных  $\phi(x)$  и  $\phi^*(x)$ , а не вещественную и мнимую части поля  $\phi(x)$ .

- (а) Найдите сопряженные импульсы к  $\phi(x)$  и  $\phi^*(x)$  и канонические коммутационные соотношения. Покажите, что гамильтониан равен

$$H = \int d^3x (\pi^* \pi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi).$$

Запишите гейзенберговское уравнение движения для  $\phi(x)$  и покажите, что оно совпадает с уравнением Клейна–Гордона.

- (б) Диагонализируйте гамильтониан  $H$ , вводя операторы рождения и уничтожения. Покажите, что теория содержит два типа частиц с массой  $m$ .
- (в) Перепишите сохраняющийся заряд

$$Q = \int d^3x \frac{i}{2} (\phi^* \pi^* - \pi \phi)$$

в терминах операторов рождения и уничтожения и вычислите заряд частиц каждого типа.

- (d) Рассмотрите случай двух комплексных полей Клейна–Гордона с одинаковой массой. Обозначьте поля как  $\phi_a(x)$ , где  $a = 1, 2$ . Покажите, что теперь имеются четыре сохраняющихся заряда: один, задаваемый путем обобщения заряда, рассмотренного в (c), и три других, задаваемых формулами

$$Q^i = \int d^3x \frac{i}{2} (\phi_a^*(\sigma^i)_{ab} \pi_b^* - \pi_a(\sigma^i)_{ab} \phi_b),$$

где  $\sigma^i$  — матрицы Паули. Покажите, что последние три заряда имеют коммутационные соотношения, совпадающие с коммутаторами для углового момента ( $SU(2)$ ). Обобщите эти результаты на случай  $n$  одинаковых комплексных скалярных полей.

- 2.3.** Вычислите явно через функции Бесселя функцию

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

для случая пространственноподобной разности  $(x-y)$ , причем  $(x-y)^2 = -r^2$ .

## ГЛАВА 3

# ДИРАКОВСКОЕ ПОЛЕ

Исчепывающим образом изучив простейшее из релятивистских уравнений поля — уравнение Клейна–Гордона, перейдем к следующему по простоте уравнению Дирака. Читатель, возможно, уже знаком с уравнением Дирака в его исходном воплощении как одночастичного квантово-механического волнового уравнения\*. В этой главе наша точка зрения будет совсем иной. Сначала мы повторно получим уравнение Дирака как *классическое* релятивистское уравнение поля, особо акцентируя внимание на его релятивистской инвариантности. Затем в разделе 3.5 мы проквантуем поле Дирака способом, подобным использованному для квантования поля Клейна–Гордона.

### 3.1. Лоренц-инвариантность волновых уравнений

В первую очередь мы должны поставить вопрос, к которому подошли в главе 2: что имеется в виду, когда говорят, что уравнение «релятивистски инвариантно»? Подходящим определением является следующее. Если  $\phi$  — поле или совокупность полей и  $\mathcal{D}$  — некоторый дифференциальный оператор, то утверждение, что уравнение  $\mathcal{D}\phi = 0$  релятивистски инвариантно, означает, что если  $\phi(x)$  удовлетворяет этому уравнению и мы совершаем преобразование Лоренца перехода к другой системе отсчета, то преобразованное поле в новой системе отсчета удовлетворяет тому же самому уравнению. Эквивалентно, можно применить одно и то же преобразование Лоренца ко всем частицам или полям, тогда уравнение  $\mathcal{D}\phi = 0$  должно остаться справедливым и после преобразования. Далее мы будем придерживаться этой «активной» точки зрения на преобразование.

Лагранжева формулировка теории поля существенно облегчает вопрос о лоренц-инвариантности. Уравнение движения автоматически будет лоренц-инвариантным по данному выше определению, если это уравнение следует из лагранжиана, который является лоренцевым *скаляром*. Это — непосредственное следствие принципа наименьшего действия. Если преобразования Лоренца оставляют лагранжиан неизменным, то преобразованный экстремум действия будет снова экстремумом.

В качестве примера рассмотрим теорию Клейна–Гордона. Мы можем записать произвольное преобразование Лоренца как

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3.1)$$

с какой-то  $4 \times 4$ -матрицей  $\Lambda$ . Что произойдет с полем Клейна–Гордона  $\phi(x)$  при этом преобразовании? Представим себе поле  $\phi$  как локальную меру некоторой величины, распределенной в пространстве. Если эта величина скапливается в точке  $x = x_0$ , тогда  $\phi(x)$  будет иметь максимум в точке  $x_0$ . Если теперь подвергнуть первоначальное

---

\*Этот вопрос освещен, например, в книгах: Шифф (1968), глава 13; Ваун (1969), глава 23; Sakurai (1967), глава 3. Хотя настоящая глава самодостаточна, мы рекомендуем все же изучить одночастичное уравнение Дирака по какой-либо из имеющихся книг.

распределение преобразованию Лоренца, новое распределение будет иметь максимум в точке  $x = \Lambda x_0$ . Это показано на рис. 3.1(а). Соответствующее преобразование поля имеет вид:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (3.2)$$

Иными словами, преобразованное поле, вычисленное в преобразованной точке, дает то же самое значение, что и первоначальное поле, вычисленное в исходной точке. Следует проверить, что это преобразование оставляет неизменной форму лагранжиана Клейна–Гордона. Согласно (3.2) массовое слагаемое  $\frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$  просто смещается в точку  $(\Lambda^{-1}x)$ . Преобразование  $\partial_\mu\phi(x)$  описывается формулой

$$\partial_\mu\phi(x) \rightarrow \partial_\mu(\phi(\Lambda^{-1}x)) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(\partial_\nu\phi)(\Lambda^{-1}x). \quad (3.3)$$

Так как метрический тензор  $g^{\mu\nu}$  лоренц-инвариантен, матрицы  $\Lambda^{-1}$  удовлетворяют тождеству:

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}. \quad (3.4)$$

Используя это соотношение, можно вычислить закон преобразования кинетического слагаемого в лагранжиане Клейна–Гордона:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\phi(x))^2 &\rightarrow g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi'(x))(\partial_\nu\phi'(x)) = \\ &= g^{\mu\nu}[(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\partial_\rho\phi][(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu\partial_\sigma\phi](\Lambda^{-1}x) = \\ &= g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)(\Lambda^{-1}x) = \\ &= (\partial_\mu\phi)^2(\Lambda^{-1}x). \end{aligned}$$

Таким образом, весь лагранжиан преобразуется просто как скаляр:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \quad (3.5)$$

Действие  $S$ , полученное интегрированием  $\mathcal{L}$  по пространству-времени, лоренц-инвариантно. Аналогичное вычисление показывает, что уравнение движения также лоренц-инвариантно:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)\phi'(x) &= [(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu(\Lambda^{-1})^{\sigma\mu}\partial_\sigma + m^2]\phi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= (g^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) = 0. \end{aligned}$$

Закон преобразования (3.2), использованный для поля  $\phi$ , является простейшим из всех возможных законов преобразования полей. Для поля, имеющего одну компоненту, этот закон является единственно возможным. Но нам известны примеры многокомпонентных полей, которые преобразуются более сложным образом. Наиболее знакомый случай — векторное поле, например, плотность 4-тока  $j^\mu(x)$  или вектор-потенциал  $A^\mu(x)$ . В этом случае величина, распределенная в пространстве-времени, имеет ориентацию, которая должна быть также преобразована. Как показано на рис. 3.1(б), ориентация должна вращаться в направлении перемещения точки, в которой вычисляется поле:

$$\begin{array}{ll} \text{при трехмерных вращениях} & V^i(x) \rightarrow R^{ij}V^j(R^{-1}x); \\ \text{при преобразованиях Лоренца} & V^\mu(x) \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x). \end{array} \quad (3.6)$$

Тензоры произвольного ранга могут быть построены из векторов путем добавления большего количества индексов, и соответственно большего количества множителей  $\Lambda$

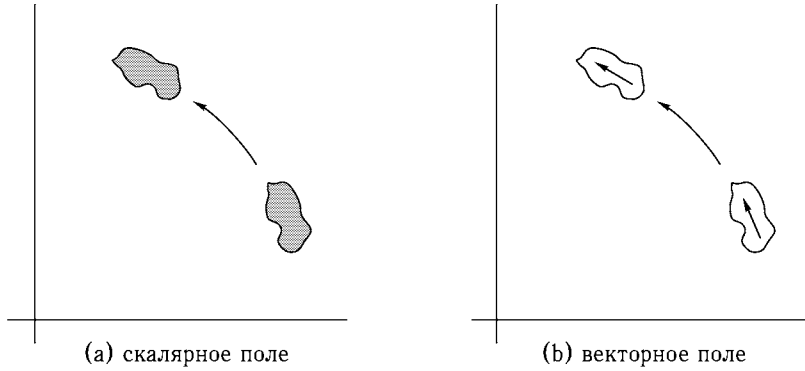


Рис. 3.1. При вращении векторного поля изменяется *ориентация* вектора, а также расположение области локализации этого поля.

в законе преобразования. Используя такие векторные и тензорные поля, можно записать множество лоренц-инвариантных уравнений, например, уравнения Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0,$$

которые следуют из лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{Максвелл}} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2. \quad (3.7)$$

Вообще, любое уравнение, каждый член которого имеет одинаковое число не просуммированных (висячих) лоренцевых индексов, будет инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца. Такой метод тензорных обозначений позволяет построить большой класс лоренц-инвариантных уравнений, но оказывается, что таких уравнений намного больше. Как их искать? Можно было бы попробовать систематически найти все возможные законы преобразований поля. Тогда было бы нетрудно выписать инвариантные лагранжианы. Для простоты ограничимся линейными преобразованиями, так что, если  $\Phi_a$  является  $n$ -компонентным мультиплетом, закон лоренцевского преобразования определяется  $n \times n$  матрицей  $M(\Lambda)$ :

$$\Phi_a(x) \rightarrow M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x). \quad (3.8)$$

Можно показать, что наиболее общие нелинейные законы преобразований могут быть построены из этих линейных преобразований, поэтому нет смысла рассматривать преобразования, более общие, чем (3.8). В последующих рассуждениях мы будем опускать изменение аргумента поля и записывать преобразование (3.8) в виде:

$$\Phi \rightarrow M(\Lambda)\Phi. \quad (3.9)$$

Каков допустимый вид матриц  $M(\Lambda)$ ? Основное ограничение на  $M(\Lambda)$  можно найти, рассматривая два последовательных преобразования  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ . Результат должен быть снова преобразованием Лоренца  $\Lambda''$ , т. е. преобразования Лоренца образуют *группу*. Это дает условие согласованности, которому должны удовлетворять матрицы  $M(\Lambda)$ . При последовательном действии двух преобразований

$$\Phi \rightarrow M(\Lambda')M(\Lambda)\Phi = M(\Lambda'')\Phi, \quad (3.10)$$

где  $\Lambda'' = \Lambda' \Lambda$ . Таким образом, соответствие между матрицами  $M$  и преобразованиями  $\Lambda$  должно сохраняться при умножении. На математическом языке мы говорим, что матрицы  $M$  должны образовывать  $n$ -мерное представление группы Лоренца. Таким образом, на математическом языке наш вопрос перефразируется следующим образом: каковы (конечномерные) матричные представления группы Лоренца?

Прежде чем ответить на этот вопрос для группы Лоренца, рассмотрим более простую группу трехмерных вращений. Эта группа имеет представления любой размерности  $n$ , известные в квантовой механике как матрицы, которые вращают  $n$ -компонентные волновые функции частиц различных спинов. Размерность связана со спиновым квантовым числом  $s$  формулой  $n = 2s + 1$ . Наиболее важное нетривиальное представление — двумерное представление, соответствующее спину  $1/2$ . Матрицы этого представления —  $2 \times 2$  унитарные матрицы с детерминантом, равным 1, которые могут быть представлены как

$$U = e^{-i\theta^i \sigma^i / 2}, \quad (3.11)$$

где  $\theta^i$  — три произвольных параметра и  $\sigma^i$  — сигма-матрицы Паули.

Для любой непрерывной группы преобразования, бесконечно близкие к тождественному, определяют векторное пространство, называемое алгеброй Ли этой группы. Базисные векторы этого векторного пространства называются генераторами алгебры или группы Ли. Для группы вращений генераторы — это операторы углового момента  $J^i$ , которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k. \quad (3.12)$$

Конечные преобразования вращения получаются экспоненцированием этих генераторов или операторов. В квантовой механике оператор

$$R = \exp[-i\theta^i J^i] \quad (3.13)$$

определяет вращение на угол  $|\theta|$  вокруг оси  $\hat{\theta}$ . Коммутационные соотношения операторов  $J^i$  определяют законы умножения этих преобразований вращения. Таким образом, набор матриц, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (3.12), дает при помощи экспоненцирования, как в (3.13), представление группы вращений. В примере из предыдущего раздела представление операторов углового момента

$$J^i \rightarrow \frac{\sigma^i}{2} \quad (3.14)$$

дает представление группы вращений (3.11). Имеет место общее утверждение: матричные представления непрерывной группы можно получить, зная матричные представления генераторов этой группы (которые должны удовлетворять соответствующим коммутационным соотношениям) с последующим экспоненцированием этих бесконечно малых преобразований.

Для решения рассматриваемой задачи необходимо знать коммутационные соотношения генераторов преобразований группы Лоренца. Для группы вращений можно найти коммутационные соотношения, записывая генераторы, как дифференциальные операторы. Из выражения

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (-i\nabla) \quad (3.15)$$

непосредственно следуют коммутационные соотношения (3.12) для углового момента. Использование векторного произведения в (3.15) характерно для трехмерного пространства. Однако можно также записать эти операторы в виде антисимметричных тензоров:

$$J^{ij} = -i(x^i \nabla^j - x^j \nabla^i),$$

так что  $J^3 = J^{12}$  и так далее. Обобщение на четырехмерные преобразования Лоренца теперь очевидно:

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (3.16)$$

Вскоре мы увидим, что эти шесть операторов группы Лоренца генерируют три собственно лоренцевых преобразования и три преобразования пространственных вращений.

Чтобы определить коммутационные соотношения в алгебре Лоренца, можно просто вычислить коммутаторы дифференциальных операторов (3.16). В результате

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (3.17)$$

Любые матрицы, которые представляют эту алгебру, должны удовлетворять таким же коммутационным соотношениям.

Чтобы увидеть, что мы получили, рассмотрим одно конкретное представление. Возьмем  $4 \times 4$  матрицы

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha). \quad (3.18)$$

(Здесь  $\mu$  и  $\nu$  нумеруют каждую из шести матриц, в то время как  $\alpha$  и  $\beta$  нумеруют матричные элементы.) Можно легко проверить, что эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.17). Действительно, они являются ничем иным, как матрицами, действующими на обычные лоренцевы 4-векторы. Чтобы увидеть это, параметризуем бесконечно малые преобразования следующим образом:

$$V^\alpha \rightarrow \left( \delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta \right) V^\beta, \quad (3.19)$$

где  $V$  — 4-вектор и  $\omega_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор, задающий бесконечно малые углы. Например, рассмотрим случай, когда  $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ , а все остальные компоненты  $\omega$  равны нулю. Тогда (3.19) дает

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \quad (3.20)$$

что представляет бесконечно малое вращение в плоскости  $xy$ . Можно также проверить, что, полагая  $\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta$ , получим

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \quad (3.21)$$

и это является бесконечно малым бустом в направлении оси  $x$ . Другие компоненты  $\omega$  генерируют оставшиеся бусты и вращения.

### 3.2. Уравнение Дирака

Теперь, когда мы нашли одно конечномерное представление группы Лоренца, следующим логическим шагом является разработка формализма для нахождения всех других представлений. Хотя это не очень трудно сделать (см. задачу 3.1), это едва ли необходимо для наших целей, так как нас главным образом интересуют представления, соответствующие спину  $1/2$ .



Мы можем найти такое представление, используя прием Дирака. Предположим, что мы имеем набор из четырех  $n \times n$  матриц  $\gamma^\mu$ , удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n \times n} \quad (\text{алгебра Дирака}). \quad (3.22)$$

Тогда можно немедленно записать  $n$ -мерное представление алгебры Лоренца. Оно имеет вид:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.23)$$

Повторно используя (3.22), легко проверить, что эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.17).

Это вычисление можно выполнить в пространстве любой размерности с лоренцевой или евклидовой метрикой. В частности, оно должно быть верным в трехмерном евклидовом пространстве. Действительно, можно просто взять

$$\begin{aligned} \gamma^j &\equiv i\sigma^j && (\text{сигма-матрицы Паули}), \\ \text{так что} & \quad \{ \gamma^i, \gamma^j \} && = -2\delta^{ij}. \end{aligned}$$

Множитель  $i$  в первой строке и знак «минус» во второй строке полностью условны. Тогда матрицы, представляющие алгебру Лоренца, имеют вид:

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \sigma^k, \quad (3.24)$$

и мы узнаем известное двумерное представление группы вращений.

Теперь найдем матрицы Дирака  $\gamma^\mu$  для четырехмерного пространства Минковского. Оказывается, что они должны быть по крайней мере матрицами  $4 \times 4$ . (Не существует четвертой  $2 \times 2$  матрицы, которая антикоммутирует с тремя сигма-матрицами Паули.) Далее, все  $4 \times 4$  представления алгебры Дирака унитарно эквивалентны\*. Таким образом, нужно выписать только одну явную реализацию алгебры Дирака. Одно представление в форме  $2 \times 2$  блоков имеет вид:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Это представление называется представлением *Вейля* или *киральным* представлением. Мы увидим, что это представление наиболее удобно, и будем использовать именно его на протяжении всей книги. (Однако будьте внимательными, так как многие учебники по теории поля выбирают другое представление, в котором  $\gamma^0$  является диагональной. Кроме того, в книгах, использующих киральные представления, часто выбирают другие соглашения о знаках.)

В нашем представлении генераторы буста имеют вид:

$$S^{0i} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

а генераторы пространственных вращений равны

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \Sigma^k. \quad (3.27)$$

\*Это и предшествующее утверждения следуют из общей теории представлений группы Лоренца, изложенной в задаче 3.1.

Четырехкомпонентное поле  $\psi$ , преобразующееся при бустах и вращениях согласно (3.26) и (3.27), называется *дираковским спинором*. Заметим, что генератор вращений  $S^{ij}$  представляет собой в точности трехмерную спинорную матрицу преобразования (3.24), взятую дважды. Генераторы бустов  $S^{0i}$  не являются эрмитовыми и, таким образом, наша реализация бустов неунитарна (это было верно и для векторного представления (3.18)). Действительно, так как группа Лоренца некомпактна, она не имеет однозначных конечномерных унитарных представлений. Но для нас это не имеет значения, поскольку  $\psi$  является не волновой функцией, а классическим полем.

Теперь, когда известен закон преобразования для  $\psi$ , следует найти соответствующее полевое уравнение. Одна из возможностей — просто взять уравнение Клейна–Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)\psi = 0. \quad (3.28)$$

Это уравнение годится, поскольку спинорные матрицы преобразования (3.26) и (3.27) действуют только во «внутреннем» пространстве; они коммутируют с дифференциальным оператором. Но можно написать более сильное уравнение первого порядка, содержащее дополнительную информацию и включающее (3.28). Для этого понадобится еще одно свойство  $\gamma$ -матриц. При помощи несложных вычислений можно проверить, что

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{F}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

или эквивалентно,

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right)\gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Это уравнение есть инфинитизимальная форма соотношения

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (3.29)$$

где

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \quad (3.30)$$

является спинорным представлением преобразования Лоренца  $\Lambda$  (сравни с (3.19)). Уравнение (3.29) показывает, что  $\gamma$ -матрицы инвариантны относительно одновременного вращения по векторным и спинорным индексам (точно так же как  $\sigma^i$  инвариантны при пространственных вращениях). Другими словами, можно воспринимать векторный индекс  $\mu$  в  $\gamma^\mu$  всерьез и сворачивать  $\gamma^\mu$  с  $\partial_\mu$ , чтобы образовать лоренц-инвариантный дифференциальный оператор.

Теперь мы готовы записать уравнение Дирака. Оно имеет вид:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (3.31)$$

Чтобы показать, что это уравнение лоренц-инвариантно, подвергнем лоренцевскому преобразованию его левую часть и проведем соответствующие вычисления:

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x) &\rightarrow [i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} [i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} [i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} [i\Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m] \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} [i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \psi(\Lambda^{-1}x) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы увидеть, что из уравнения Дирака вытекает уравнение Клейна–Гордона, действуем слева оператором  $(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = \\ &= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi. \end{aligned}$$

Чтобы записать лагранжиан для теории Дирака, нужно установить, как умножать два дираковских спинора, чтобы получить лоренцевский скаляр. Простейшее предположение  $\psi^\dagger\psi$  не проходит. При лоренцевском преобразовании получаем  $\psi^\dagger\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$ ; если бы матрица буста была унитарна, мы бы имели  $\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$ , и все было бы прекрасно. Но матрица  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  неунитарна, потому что генераторы (3.26) неэрмитовы.

Решение заключается в том, чтобы определить

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0. \quad (3.32)$$

При бесконечно малом преобразовании Лоренца, параметризованном величинами  $\omega_{\mu\nu}$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right)\gamma^0$ . Сумма по  $\mu$  и  $\nu$  имеет шесть различных отличных от нуля слагаемых. Во вращательных слагаемых, где  $\mu$  и  $\nu$  оба отличны от нуля,  $(S^{\mu\nu})^\dagger = S^{\mu\nu}$  и  $S^{\mu\nu}$  коммутирует с  $\gamma^0$ . В слагаемых, отвечающих бусту, где индекс  $\mu$  или  $\nu$  равен 0,  $(S^{\mu\nu})^\dagger = -(S^{\mu\nu})$ , но при этом  $S^{\mu\nu}$  антикоммутирует с  $\gamma^0$ . Поэтому перенос  $\gamma^0$  налево снимает знак эрмитова сопряжения у  $S^{\mu\nu}$ , и в результате приходим к закону преобразования:

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}, \quad (3.33)$$

Таким образом, величина  $\bar{\psi}\psi$  есть лоренцевский скаляр. Аналогично можно показать при помощи (3.29), что  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  является лоренцевским вектором.

Поэтому лоренц-инвариантный дираковский лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (3.34)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа для  $\bar{\psi}$  (или  $\psi^\dagger$ ) немедленно приводит к уравнению Дирака в форме (3.31); уравнение Эйлера–Лагранжа для  $\psi$  дает то же самое уравнение для эрмитово-сопряженной формы:

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0. \quad (3.35)$$

### Вейлевские спиноры

Из блочно-диагонального вида генераторов (3.26) и (3.27) видно, что представление Дирака группы Лоренца *приводимо\**. Мы можем образовать два 2-мерных представления, рассматривая каждый блок отдельно и записав

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

\*При использовании другого представления гамма-матриц приводимость не столь явная; это, по существу, и является причиной использования кирального представления.

Двухкомпонентные объекты  $\psi_L$  и  $\psi_R$  называются левым и правым *вейлевскими спинорами*, соответственно. Можно легко проверить, что их законы преобразования при бесконечно малых вращениях  $\theta$  и бустах  $\beta$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow (1 - i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} - \beta \cdot \frac{\sigma}{2})\psi_L; \\ \psi_R &\rightarrow (1 - i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} + \beta \cdot \frac{\sigma}{2})\psi_R.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Эти законы преобразования связаны комплексным сопряжением. Используя тождество

$$\sigma^2 \sigma^* = -\sigma \sigma^2, \quad (3.38)$$

нетрудно показать, что величина  $\sigma^2 \psi_L^*$  преобразуется подобно правому спинору.

С помощью  $\psi_L$  и  $\psi_R$  уравнение Дирака записывается в виде:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \quad (3.39)$$

В уравнении Дирака два представления группы Лоренца  $\psi_L$  и  $\psi_R$  перемешиваются за счет массового слагаемого. Но если положить  $m = 0$ , то уравнения для  $\psi_L$  и  $\psi_R$  расцепляются:

$$\begin{aligned}i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla)\psi_L &= 0; \\ i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla)\psi_R &= 0.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Они называются *уравнениями Вейля*. Эти уравнения особенно важны при рассмотрении нейтрино и теории слабых взаимодействий.

Возможно некоторое усовершенствование введенных обозначений. Определим

$$\sigma^\mu \equiv (1, \sigma), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma), \quad (3.41)$$

так что

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

(Черта в  $\bar{\sigma}$  не имеет никакого отношения к черте в  $\bar{\psi}$ .) Тогда уравнение Дирака может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma \cdot \partial \\ i\bar{\sigma} \cdot \partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0, \quad (3.43)$$

а уравнения Вейля примут вид:

$$i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi_L = 0; \quad i\sigma \cdot \partial \psi_R = 0. \quad (3.44)$$

### 3.3. Решения уравнения Дирака для свободных частиц

Чтобы ощутить физический смысл уравнения Дирака, обсудим его решения в виде плоских волн. Так как поле Дирака  $\psi$  удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона, мы немедленно делаем вывод, что оно может быть записано как линейная комбинация плоских волн:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad \text{где } p^2 = m^2. \quad (3.45)$$

На время сосредоточим внимание на решениях с положительной частотой, т. е. при  $p^0 > 0$ . Вектор-столбец  $u(p)$  должен удовлетворять дополнительному ограничению, которое находится путем подстановки (3.45) в уравнение Дирака:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0. \quad (3.46)$$

Проще всего проанализировать это уравнение в системе покоя частицы, где  $p = p_0 = (m, \mathbf{0})$ . Решение для произвольного  $p$  может быть затем найдено при помощи буста с  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ . В системе покоя (3.46) принимает вид:

$$(m\gamma^0 - m)u(p_0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0.$$

Его решения имеют вид

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

для любого числового двухкомпонентного спинора  $\xi$ . Мы, как обычно, нормируем  $\xi$  так, что  $\xi^\dagger \xi = 1$ ; множитель  $\sqrt{m}$  вставлен из соображений удобства. Спинор  $\xi$  можно интерпретировать, рассматривая генератор вращения (3.27). Величина  $\xi$  преобразуется при вращениях как обычный двухкомпонентный спинор группы вращения и, следовательно, обычным образом определяет ориентацию спина частицы, описываемой этим дираковским решением. Например, когда  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , спин частицы ориентирован вверх вдоль третьей оси.

Заметим, что после использования уравнения Дирака можно произвольно выбрать только две из четырех компонент поля  $u(p)$ . Это как раз то, что нужно, так как частица со спином  $1/2$  имеет только два физических состояния со спином вверх и вниз. (Конечно, здесь несколько преждевременно говорить о *частицах* и *спине*. Мы докажем в разделе 3.5 после квантования поля Дирака, что спиновый угловой момент дираковской частицы равен  $\hbar/2$ . Пока только обратим внимание, что для любого импульса  $p$  имеются два возможных решения  $u(p)$ .)

Теперь, когда известен общий вид решения  $u(p)$  в системе покоя, можно получить  $u(p)$  в любой другой системе путем применения буста. Рассмотрим буст вдоль третьей оси. Сначала мы должны вспомнить, как буст действует на 4-вектор. В инфинитезимальной форме

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[ 1 + \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\eta$  — бесконечно малый параметр. Для конечного  $\eta$  следует написать:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} &= \exp \left[ \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left[ \text{ch } \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \text{sh } \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \text{ch } \eta \\ m \text{sh } \eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Параметр  $\eta$  называется *быстротой*. Эта величина является аддитивной при последовательных бустах. Теперь применим то же самое преобразование к  $u(p)$ . Соглас-

но (3.26) и (3.30),

$$\begin{aligned}
 u(p) &= \exp \left[ -\frac{1}{2}\eta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = \\
 &= \left[ \operatorname{ch}(\frac{1}{2}\eta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sh}(\frac{1}{2}\eta) \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{\eta/2} \left( \frac{1-\sigma^3}{2} \right) + e^{-\eta/2} \left( \frac{1+\sigma^3}{2} \right) & 0 \\ 0 & e^{\eta/2} \left( \frac{1+\sigma^3}{2} \right) + e^{-\eta/2} \left( \frac{1-\sigma^3}{2} \right) \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = \quad (3.49) \\
 &= \begin{pmatrix} \left[ \sqrt{E+p^3} \left( \frac{1-\sigma^3}{2} \right) + \sqrt{E-p^3} \left( \frac{1+\sigma^3}{2} \right) \right] \xi \\ \left[ \sqrt{E+p^3} \left( \frac{1+\sigma^3}{2} \right) + \sqrt{E-p^3} \left( \frac{1-\sigma^3}{2} \right) \right] \xi \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Последняя строка может быть упрощена, так что

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

где предполагается, что при взятии квадратного корня из матрицы мы извлекаем положительный корень из каждого собственного значения. Это выражение для  $u(p)$  не только более компактно, но и сохраняет силу для произвольного направления  $\mathbf{p}$ . При работе с выражениями такого вида полезно знать тождество

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2. \quad (3.51)$$

Теперь можно непосредственно проверить, что (3.50) есть решение уравнения Дирака в форме (3.43).

На практике часто удобно работать со специальными спинорами  $\xi$ . Полезным был бы выбор собственных состояний  $\sigma^3$ . Например, если  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (спин вверх вдоль третьей оси), имеем:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{большой буст}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

в то время как для  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (спин вниз вдоль третьей оси)

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E-p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{большой буст}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

В пределе  $\eta \rightarrow \infty$  состояния вырождаются в два двухкомпонентных спинора для безмассовой частицы. (Теперь видна причина введения множителя  $\sqrt{m}$  в (3.47) — он сохраняет конечность выражений для спиноров в безмассовом пределе.)

Решения (3.52) и (3.53) являются собственными состояниями оператора *спиральности*

$$h \equiv \hat{p} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Частица с  $h = +1/2$  называется *правополяризованной*, в то время как частица с  $h = -1/2$  — *левополяризованной*. Спиральность массивной частицы зависит от системы отсчета, так как всегда можно перейти к системе отсчета, в которой импульс частицы противоположно направлен (но ее спин неизменен). Для безмассовой частицы, которая движется со скоростью света, такое преобразование выполнить нельзя.

Чрезвычайно простая форма  $u(p)$  для безмассовой частицы в состоянии с определенной спиральностью делает понятным поведение такой частицы. В гл. 1 это дало возможность установить форму сечения рассеяния для процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в безмассовом пределе. В последующих главах мы будем часто сначала проводить на первый взгляд бессмысленные вычисления, а затем рассматривать собственные состояния спиральности в пределе высоких энергий, чтобы понять, что было сделано.

Наконец, мы готовы понять происхождение обозначений  $\psi_L$  и  $\psi_R$  для вейлевских спиноров. Решения уравнений Вейля — это состояния с определенной спиральностью, отвечающие лево- и правополяризованным частицам, соответственно. Лоренц-инвариантность спиральности (для безмассовой частицы) явно видна в записи вейлевских спиноров, так как  $\psi_L$  и  $\psi_R$  относятся к разным представлениям группы Лоренца.

Условие нормировки для  $u(p)$  удобно записывать в лоренц-инвариантном виде. Мы видели выше, что выражение  $\psi^\dagger\psi$  не лоренц-инвариантно. Аналогично,

$$u^\dagger u = \left( \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \sigma}, \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = 2E_p \xi^\dagger \xi. \quad (3.55)$$

Чтобы получить лоренцевский скаляр, определим

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p) \gamma^0. \quad (3.56)$$

Затем при помощи почти такого же вычисления находим:

$$\bar{u}u = 2m \xi^\dagger \xi. \quad (3.57)$$

Это будет наше условие нормировки, причем мы также требуем, чтобы двухкомпонентный спинор  $\xi$  был нормирован как обычно:  $\xi^\dagger \xi = 1$ . Удобно также выбрать взаимно ортогональные базисные спиноры  $\xi^1$  и  $\xi^2$  (типа  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ). Для безмассовой частицы выражение (3.57) тривиально, так что следует пользоваться условием нормировки в форме (3.55).

Подведем промежуточный итог. Общее решение уравнения Дирака может быть записано как линейная комбинация плоских волн. Волны с положительной частотой имеют вид:

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (3.58)$$

Существуют два линейно независимых решения для  $u(p)$ :

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (3.59)$$

которые нормированы условиями:

$$\bar{u}^r(p) u^s(p) = 2m \delta^{rs} \quad \text{или} \quad u^{r\dagger}(p) u^s(p) = 2E_p \delta^{rs}. \quad (3.60)$$

Точно так же можно найти отрицательно-частотные решения:

$$\psi(x) = v(p) e^{+ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (3.61)$$

(Обратим внимание, что мы предпочли изменить знак в экспоненте, но не писать  $p^0 < 0$ ). Имеются два линейно независимых решения для  $v(p)$ :

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (3.62)$$

где  $\eta^s$  — другой базис двухкомпонентных спиноров. Эти решения нормированы согласно

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs} \quad \text{или} \quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = +2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}. \quad (3.63)$$

Столбцы  $u$  и  $v$  также взаимно ортогональны:

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0. \quad (3.64)$$

Следует быть внимательными, так как  $u^{r\dagger}(p)v^s(p) \neq 0$  и  $v^{r\dagger}(p)u^s(p) \neq 0$ . Однако заметим, что

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.65)$$

где мы изменили знак 3-импульса в одном из сомножителей в каждом из спинорных произведений.

### Спиновые суммы

При вычислении вкладов диаграмм Фейнмана часто будет необходимо производить суммирование по поляризациям фермионных состояний. С помощью простых вычислений можно вывести необходимые соотношения полноты:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \sigma} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} & \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Во второй строке мы использовали формулу

$$\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, приходим к желаемой формуле:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m. \quad (3.66)$$

Аналогично,

$$\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m. \quad (3.67)$$

Комбинация  $\gamma p$  встречается настолько часто, что Фейнман ввел обозначение:  $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ . С этого момента мы будем часто использовать эту запись.



### 3.4. Матрицы Дирака и билинейные формы Дирака

Мы видели в разделе 3.2, что величина  $\bar{\psi}\psi$  есть лоренцевский скаляр. Легко показать, что  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  является 4-вектором; мы использовали этот факт для записи дираковского лагранжиана (3.34). Зададим более общий вопрос. Рассмотрим выражение  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ , где  $\Gamma$  — произвольная  $4 \times 4$  постоянная матрица. Можем ли мы разложить это выражение на слагаемые, имеющие определенные трансформационные свойства по отношению к преобразованиям группы Лоренца? Ответ положителен, если представить матрицу  $\Gamma$  разложенной по базису, состоящему из шестнадцати  $4 \times 4$  матриц, определенных как антисимметричные комбинации  $\gamma$ -матриц:

$1$	1 матрица
$\gamma^\mu$	4 матрицы
$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]}$	6 матриц
$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$	4 матрицы
$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}$	<u>1 матрица</u>

Всего 16 матриц

Легко установить свойства этих матриц относительно преобразований Лоренца. Например,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi &\rightarrow (\bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1})\left(\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)(\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi) = \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}} - \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)\psi = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\psi. \end{aligned}$$

Каждый набор матриц преобразуется как антисимметричный тензор последовательно возрастающего ранга. Последние два набора матриц можно упростить, вводя дополнительную гамма-матрицу

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma. \quad (3.68)$$

Тогда  $\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5$  и  $\gamma^{\mu\nu\rho} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5$ . Матрица  $\gamma^5$  имеет следующие свойства, которые могут быть проверены при помощи (3.68) и антикоммутационных соотношений (3.22):

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5; \quad (3.69)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1; \quad (3.70)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (3.71)$$

Из последнего свойства следует, что  $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$ . Таким образом, представление Дирака должно быть приводимо, так как собственные векторы матрицы  $\gamma^5$ , чьи собственные значения различны, преобразуются не смешиваясь (этот критерий приводимости известен как лемма Шура). В нашем базисе матрица

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

т. е. является блочно-диагональной. Таким образом, дираковский спинор только с левой (правой) компонентой является собственным состоянием  $\gamma^5$  с собственным значением  $-1$  ( $+1$ ). Эти спиноры, действительно, преобразуются без смешивания, как мы явно показали в разделе 3.2.

Теперь перепишем таблицу из  $4 \times 4$  матриц, введя стандартную терминологию:

1	скаляр	1
$\gamma^\mu$	вектор	4
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	тензор	6
$\gamma^\mu \gamma^5$	псевдовектор	4
$\gamma^5$	псевдоскаляр	1
		—
		16

Термины *псевдовектор* и *псевдоскаляр* применяются к величинам, которые при непрерывных преобразованиях Лоренца преобразуются как вектор и скаляр, соответственно, но с дополнительным изменением знака при преобразованиях четности (как мы покажем в разделе 3.6).

Из векторных и псевдовекторных матриц можно построить два тока, билинейных относительно дираковских полей:

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x); \quad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x). \quad (3.73)$$

Вычислим дивергенции этих токов, предполагая, что  $\psi$  удовлетворяет уравнению Дирака:

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im\psi) = 0. \quad (3.74)$$

Таким образом,  $j^\mu$  всегда сохраняется, если  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению Дирака. Когда мы связываем поле Дирака с электромагнитным полем, ток  $j^\mu$  приобретает смысл плотности электрического тока. Аналогичным образом можно вычислить

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (3.75)$$

Если  $m = 0$ , этот ток (часто называемый *аксиальным векторным током*) также сохраняется. В этом случае полезно образовать следующие линейные комбинации:

$$j_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi, \quad j_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi. \quad (3.76)$$

Когда  $m = 0$ , эти токи являются плотностями электрических токов левых и правых частиц, соответственно, и сохраняются по отдельности.

Два тока  $j^\mu(x)$  и  $j^{\mu 5}(x)$  являются нетеровскими токами, соответствующими двум преобразованиям

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x).$$

Первое из них представляет собой симметрию дираковского лагранжиана (3.34). Второе, называемое *киральным преобразованием*, является симметрией кинетического слагаемого в  $\mathcal{L}$ , но не массового слагаемого. Таким образом, теорема Нетер подтверждает, что аксиальный векторный ток сохраняется лишь в случае  $m = 0$ .

Произведения дираковских билинейных форм подчиняются соотношениям, известным как *тождества Фирца*. Мы обсудим лишь простейшее из них, которое будет несколько раз использоваться в дальнейшем. Это простейшее тождество легче всего записывается через двухкомпонентные вейлевские спиноры, введенные в (3.36).

Суть этого соотношения — тождество для  $2 \times 2$  матриц  $\sigma^\mu$ , определенных в (3.41):

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}. \quad (3.77)$$

(Здесь  $\alpha, \beta$  и т. д. — спинорные индексы и  $\varepsilon$  — антисимметричный символ.) Чтобы понять это соотношение, заметим, что индексы  $\alpha, \gamma$  преобразуются по лоренцевскому представлению  $\psi_L$ , в то время как  $\beta, \delta$  преобразуются по отдельному представлению  $\psi_R$ , при этом полная величина должна быть лоренц-инвариантной. Альтернативно, можно непосредственно проверить путем перебора все 16 компонент (3.77).

Заключая тождество (3.77) в обкладки из правых частей (то есть нижних половин) дираковских спиноров  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , находим тождество

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1R\alpha}\bar{u}_{3R\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2R\beta}u_{4R\delta} = \\ &= -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R}). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Это нетривиальное соотношение показывает, что произведение билинейных комбинаций в (3.78) антисимметрично относительно перестановок компонент с индексами 2 и 4, и также компонент с индексами 1 и 3. Тождество (3.77) имеет место также для  $\bar{\sigma}^\mu$ , таким образом, находим:

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}) = -(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{4L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{2L}). \quad (3.79)$$

Иногда полезно объединить тождество Фирца (3.78) с тождеством, связывающим  $\sigma^\mu$  и  $\bar{\sigma}^\mu$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\gamma} = (\bar{\sigma}^{\mu T})_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}. \quad (3.80)$$

Последнее соотношение также проверяется непосредственно. Используя (3.80), (3.79) и соотношение

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma_\mu = 4, \quad (3.81)$$

мы можем упростить, например, громоздкие произведения билинейных комбинаций типа

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L}) &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= 2 \cdot (4)^2 \cdot \varepsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}u_{4L\delta} = \\ &= 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Имеются также тождества Фирца для перестановок 4-компонентных дираковских спиноров и  $4 \times 4$  матриц Дирака. Однако для их вывода полезно применить более систематический подход. В задаче 3.6 рассмотрен общий метод и некоторые примеры его применения.

### 3.5. Квантование дираковского поля

Мы теперь готовы построить квантовую теорию свободного дираковского поля. Из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (3.83)$$

видим, что импульс, канонически сопряженный к  $\psi$  есть  $i\psi^\dagger$ , и, таким образом, гамильтониан имеет вид:

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi = \int d^3x \psi^\dagger[-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0]\psi. \quad (3.84)$$

Если определить  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\beta = \gamma^0$ , то величину в скобках можно рассматривать как гамильтониан Дирака в одночастичной квантовой механике:

$$h_D = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta. \quad (3.85)$$

#### Как нельзя квантовать дираковское поле: урок по связи спина и статистики

Чтобы проквантовать дираковское поле по аналогии с полем Клейна–Гордона, следует потребовать выполнения канонических коммутационных соотношений

$$[\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ab}, \quad (\text{времена одинаковые}), \quad (3.86)$$

где  $a$  и  $b$  обозначают компоненты спинора  $\psi$ . Это выглядит довольно странно: если  $\psi(x)$  было бы вещественным, то левая сторона была бы антисимметричной при замене  $\mathbf{x} \longleftrightarrow \mathbf{y}$ , в то время как правая сторона — симметричной. Но так как спинор  $\psi$  комплексный, пока еще противоречия нет. На самом деле мы скоро увидим, что при наложении коммутационных соотношений на дираковское поле возникают более серьезные проблемы. Но, чтобы лучше понять связь между спином и статистикой, полезно посмотреть, как далеко мы можем продвинуться в этом направлении. Так что продолжим; но не забудьте, что рассуждения на нескольких следующих страницах приведут в тупик.

Первая задача — найти представление коммутационных соотношений через операторы рождения и уничтожения, которое диагонализует  $H$ . Из формы гамильтониана (3.84) ясно, что полезно разложить поле  $\psi(x)$  по базису собственных функций  $h_D$ . Мы уже знаем эти собственные функции из вычислений в разделе 3.3. Там было обнаружено, что

$$[i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m]u^s(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = 0,$$

так что  $u^s(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  являются собственными функциями  $h_D$  с собственными значениями  $E_{\mathbf{p}}$ . Аналогично, функции  $v^s(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  (или эквивалентно,  $v^s(-\mathbf{p})e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$ ) — собственные функции  $h_D$  с собственными значениями  $-E_{\mathbf{p}}$ . Они образуют полный набор собственных функций, так как для любого  $\mathbf{p}$  имеются два спинора  $u$  и два спинора  $v$ , дающих четыре собственных вектора  $4 \times 4$  матрицы  $h_D$ .

Раскладывая  $\psi$  по этому базису, получаем:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \sum_{s=1,2} \left( a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^s v^s(-\mathbf{p}) \right), \quad (3.87)$$

где  $a_{\mathbf{p}}^s$  и  $b_{\mathbf{p}}^s$  — операторные коэффициенты. (Пока что мы используем представление Шредингера, где  $\psi$  не зависит от времени.) Постулируем следующие коммутационные соотношения:

$$[a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = [b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs}. \quad (3.88)$$

Тогда нетрудно проверить, что коммутационные соотношения (3.86) для  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  имеют вид:

$$\begin{aligned} [\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} 2E_{\mathbf{q}}}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \times \\ &\quad \times \sum_{r,s} \left( [a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}] u^r(\mathbf{p}) \bar{u}^s(\mathbf{q}) + [b_{-\mathbf{p}}^r, b_{-\mathbf{q}}^{s\dagger}] v^r(-\mathbf{p}) \bar{v}^s(-\mathbf{q}) \right) \gamma^0 = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left[ (\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) + (\gamma^0 E_{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m) \right] \gamma^0 = \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \mathbf{1}_{4 \times 4}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

На втором шаге мы использовали условия полноты (3.66) и (3.67) для сумм по спиновым состояниям. Теперь мы готовы написать  $H$  через операторы  $a$  и  $b$ . После еще одного небольшого вычисления (использующего соотношение ортогональности (3.60), (3.63) и (3.65)) находим:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_s \left( E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right). \quad (3.90)$$

Во втором слагаемом таится какая-то ужасная ошибка: рождая все новые и новые частицы при помощи  $b^\dagger$ , мы можем уменьшать энергию до бесконечности. (Замена  $b \longleftrightarrow b^\dagger$  не помогла бы, так как это разрушило бы коммутационные соотношения (3.89).)

Похоже, мы столкнулись с серьезной трудностью, но попытаемся еще продвинуться вперед и исследуем причинность в этой теории. Для этого нам нужно вычислить  $[\psi(x), \psi^\dagger(y)]$  (или удобнее,  $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]$ ) в разные моменты времени, в надежде получить нуль вне светового конуса. Сначала следует перейти к представлению Гейзенберга и восстановить зависимость от времени  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ . Используя соотношения

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^s e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt} b_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = b_{\mathbf{p}}^s e^{+iE_{\mathbf{p}}t}, \quad (3.91)$$

немедленно получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b_{\mathbf{p}}^s v^s(p) e^{ip\cdot x} \right); \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip\cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{v}^s(p) e^{-ip\cdot x} \right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Теперь можно вычислить общий коммутатор:

$$\begin{aligned}
 [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \sum_s \left( u_a^s(p) \bar{u}_b^s(p) e^{-ip \cdot (x-y)} + v_a^s(p) \bar{v}_b^s(p) e^{ip \cdot (x-y)} \right) = \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left( (\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} + (\not{p} - m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)} \right) = \\
 &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left( e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right) = \\
 &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} [\phi(x), \phi(y)].
 \end{aligned}$$

Так как коммутатор вещественного поля Клейна–Гордона  $[\phi(x), \phi(y)]$  равен нулю вне светового конуса, эта величина также равна нулю.

Однако в этом решении проблемы причинности имеется что-то странное. Пусть  $|0\rangle$  — состояние, которое уничтожается всеми операторами  $a_p^s$  и  $b_p^s$ :  $a_p^s |0\rangle = b_p^s |0\rangle = 0$ . Тогда

$$[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = \langle 0 | [\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle,$$

так же, как для поля Клейна–Гордона. Но в случае поля Клейна–Гордона в коммутатор давали вклады каждая из этих двух частей: вне светового конуса распространение частицы от  $y$  до  $x$  сокращалось с распространением античастицы от  $x$  до  $y$ . Здесь же оба вклада исходят от первой части  $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ , так как вторая часть нулевая. Сокращение происходит между частицами с положительной энергией и частицами с отрицательной энергией, причем обе распространяются от  $y$  к  $x$ .

Это наблюдение может привести нас к разрешению проблемы отрицательной энергии. Одно из предположений, сделанных при квантовании теории Дирака, должно быть неправильным. Таким образом, забудем постулированные коммутационные соотношения (3.86) и (3.88) и посмотрим, можем ли мы найти способ обоснования распространения частиц с положительной энергией в обоих направлениях. Мы будем также вынуждены отбросить наше определение вакуума  $|0\rangle$  как состояния, которое уничтожается всеми  $a_p^s$  и  $b_p^s$ . Однако мы сохраним выражения (3.92) для  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  как операторов Гейзенберга, так как, если  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  являются решениями уравнения Дирака, то они должны разлагаться по таким плоско-волновым решениям.

Сначала рассмотрим амплитуду распространения  $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ , которая должна представлять частицу с положительной энергией, распространяющуюся от  $y$  к  $x$ . В этом случае мы хотели бы, чтобы гейзенберговское состояние  $\bar{\psi}(y) | 0 \rangle$  было линейной комбинацией состояний только с положительной или только с отрицательной энергией (так как гейзенберговское состояние равно  $\Psi_H = e^{+iHt} \Psi_S$ ). Таким образом, вклад могут давать только слагаемые с  $a_p^{s\dagger}$  из  $\bar{\psi}(y)$ , что означает, что  $b_p^{s\dagger}$  должны при действии на вакуум давать нуль. Аналогично,  $\langle 0 | \psi(x)$  может содержать только положительно-частотные компоненты. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r a_p^r u^r(p) e^{-ipx} \times \\
 &\quad \times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \sum_s a_q^{s\dagger} \bar{u}^s(q) e^{iqy} | 0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Можно кое-что сказать о матричных элементах  $\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle$ , даже не зная перестановочных соотношений  $a_{\mathbf{p}}^r$  и  $a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}$ , а просто используя трансляционную и вращательную инвариантности. Если основное состояние  $|0\rangle$  инвариантно относительно трансляций, то  $|0\rangle = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} |0\rangle$ . Далее, так как  $a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}$  порождает импульс  $\mathbf{q}$ , мы можем для вычисления использовать (2.48):

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} | 0 \rangle = e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \langle 0 | e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle.$$

Отсюда видно, что, если  $\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle$  отличен от нуля, то  $\mathbf{p}$  должен равняться  $\mathbf{q}$ . Аналогично можно показать, что из вращательной инвариантности  $|0\rangle$  вытекает, что  $r = s$ . (Это должно быть интуитивно понятно и может быть проверено после изучения оператора углового момента далее в этом разделе.) Из этих рассуждений заключаем, что матричный элемент имеет вид:

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^r a_{\mathbf{q}}^{s\dagger} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \cdot A(\mathbf{p}),$$

где  $A(\mathbf{p})$  пока неопределено. Обратим внимание, что, если норма состояния всегда положительна (что должно выполняться в любом приемлемом гильбертовом пространстве), то  $A(\mathbf{p})$  должно быть больше нуля. Теперь можно вернуться к (3.93) и записать:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) A(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)} = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (\not{p} + m) A(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$

Это выражение явно инвариантно относительно бустов только тогда, когда  $A(\mathbf{p})$  — лоренцевский скаляр, то есть  $A(\mathbf{p}) = A(p^2)$ . Так как  $p^2 = m^2$ , то  $A$  должно быть константой. В конечном итоге получаем:

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \cdot A. \quad (3.94)$$

Аналогично, в амплитуде  $\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle$  мы хотели бы оставить только вклады от положительно-частотных слагаемых в  $\psi(y)$  и отрицательно-частотных слагаемых в  $\psi(x)$ . Таким образом,  $a_{\mathbf{p}}^s$  все еще уничтожает вакуум, но  $b_{\mathbf{p}}^s$  — нет. Согласно аргументам, аналогичным приведенным выше, имеем:

$$\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle = -(i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \cdot B, \quad (3.95)$$

где  $B$  — другая положительная константа. Знак «минус» важен; он происходит из соотношения полноты (3.67) для  $\sum v \bar{v}$  и знака при  $x$  в экспоненте. Отсюда следует, что мы не можем иметь  $\langle 0 | [\psi(x), \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle = 0$  вне светового конуса. Два слагаемых (3.94) и (3.95) действительно сократились бы в случае  $A = -B$ , но это невозможно, так как  $A$  и  $B$  должны быть оба положительными. Теперь мы близки к решению. Полагая  $A = B = 1$ , нетрудно получить (вне светового конуса):

$$\langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle = -\langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle.$$

Иными словами, спинорные поля *антикоммутируют* в точках, разделенных пространственноподобным интервалом. Этого достаточно, чтобы сохранить причинность, так

как любые мыслимые наблюдаемые (такие, как энергия, заряд и число частиц) построены из *четного* числа спинорных полей; для любых наблюдаемых такого типа  $\mathcal{O}_1$  и  $\mathcal{O}_2$  все еще выполнено равенство  $[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0$  для  $(x - y)^2 < 0$ . Примечательно, что постулируя *антикоммутационные* соотношения для дираковского поля, мы одновременно решаем проблему отрицательной энергии. Одновременные антикоммутационные соотношения примут вид:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ab}; \\ \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} &= \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Мы можем разложить  $\psi(\mathbf{x})$  по  $a_{\mathbf{p}}^s$  и  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , как и прежде (см. (3.87)). Операторы рождения и уничтожения должны теперь удовлетворять соотношениям

$$\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})\delta^{rs} \quad (3.97)$$

(все остальные антикоммутаторы равны нулю), чтобы удовлетворялись соотношения (3.96). Другое вычисление приводит к прежнему гамильтониану:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left( E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right).$$

При этом  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  все еще рождает состояния с отрицательной энергией. Однако соотношение  $\{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})\delta^{rs}$  является симметричным относительно  $b_{\mathbf{p}}^r$  и  $b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}$ . Поэтому просто переопределим:

$$\tilde{b}_{\mathbf{p}}^s \equiv b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}; \quad \tilde{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \equiv b_{\mathbf{p}}^s. \quad (3.98)$$

Новые операторы удовлетворяют тем же антикоммутационным соотношениям, но теперь второе слагаемое в гамильтониане равно:

$$-E_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s = +E_{\mathbf{p}} \tilde{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \tilde{b}_{\mathbf{p}}^s - (\text{const}).$$

Если определить  $|0\rangle$  как состояние, которое уничтожается операторами  $a_{\mathbf{p}}^s$  и  $\tilde{b}_{\mathbf{p}}^s$ , то все возбуждения над  $|0\rangle$  имеют положительную энергию.

Что же случилось? Чтобы лучше понять этот прием, на время откажемся от теории поля и рассмотрим теорию с единственной парой операторов  $b$  и  $b^\dagger$ , удовлетворяющих соотношениям  $\{b, b^\dagger\} = 1$  и  $\{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$ . Выберем состояние  $|0\rangle$  таким, что  $b|0\rangle = 0$ . Тогда  $b^\dagger|0\rangle$  — новое состояние; обозначим его  $|1\rangle$ . Это состояние удовлетворяет условиям  $b|1\rangle = |0\rangle$  и  $b^\dagger|1\rangle = 0$ . Таким образом,  $b$  и  $b^\dagger$  действуют в гильбертовом пространстве из двух состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Мы могли бы сказать, что  $|0\rangle$  представляет «пустое» состояние и что  $b^\dagger$  «заполняет» это состояние. Но с таким же успехом можно было бы назвать  $|1\rangle$  пустым состоянием и сказать, что  $b = \tilde{b}^\dagger$  заполняет его. Два описания полностью эквивалентны, пока не определена некоторая наблюдаемая, которая позволяет нам физически различать эти состояния. В нашем случае правильным является такой выбор, когда состояние с более низкой энергией пусто. В результате оператором рождения объявляется тот оператор, который повышает энергию. Именно это и было сделано.

Заметим, между прочим, что так как  $(\tilde{b}^\dagger)^2 = 0$ , состояние не может быть заполнено дважды. Более общо, из антикоммутационных соотношений вытекает, что любое многочастичное состояние антисимметрично при перестановке двух частиц:  $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = -a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ . Таким образом, мы заключаем, что если лестничные операторы подчиняются *антикоммутационным* соотношениям, то соответствующие частицы удовлетворяют статистике *Ферми–Дирака*.



Мы только что показали, что для того, чтобы быть уверенными, что обеспечено наличие только возбуждений с положительными энергиями, следует проквантовать дираковское поле с антикоммутирующими соотношениями; при этих условиях частицы, связанные с дираковским полем, подчиняются статистике Ферми–Дирака. Этот вывод является частью более общего результата, впервые полученного Паули\*: из совместного требования лоренц-инвариантности, положительности энергии, положительности нормы и причинности вытекает то, что частицы с целочисленным спином подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, в то время как частицы с полужелыми спинами подчиняются статистике Ферми–Дирака.

### Квантованное дираковское поле

Теперь систематизируем результаты квантования теории Дирака. Чтобы очистить записи от ненужной шелухи, следует улучшить обозначения. С этого места будем записывать  $\tilde{b}_{\mathbf{p}}$  (оператор, понижающий энергию состояния) просто как  $b_{\mathbf{p}}$ , и  $\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  как  $b_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ . Все выражения, которые понадобятся в дальнейшем, выписаны ниже; соответствующие выражения, приведенные выше, должны быть забыты, если они отличаются от новых. Сначала выпишем полевые операторы:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right); \quad (3.99)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (3.100)$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют антикоммутирующим правилам:

$$\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs}, \quad (3.101)$$

причем все остальные антикоммутирующие операторы равны нулю. Тогда одновременные антикоммутирующие соотношения для  $\psi$  и  $\psi^{\dagger}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^{\dagger}(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab}; \\ \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} &= \{\psi_a^{\dagger}(\mathbf{x}), \psi_b^{\dagger}(\mathbf{y})\} = 0. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Вакуум  $|0\rangle$  определяется как такое состояние, что

$$a_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = 0. \quad (3.103)$$

Гамильтониан может быть записан в виде:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right), \quad (3.104)$$

где отброшено бесконечное постоянное слагаемое, возникающее от антикоммутирования  $b_{\mathbf{p}}^s$  и  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ . Отсюда видно, что вакуум является состоянием с наименьшей энергией, как мы того и хотели. Оператор импульса равен

$$\mathbf{P} = \int d^3x \psi^{\dagger}(-i\nabla)\psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \mathbf{p} \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right). \quad (3.105)$$

\*W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940), перепечатано в Schwinger (1958). Строгое рассмотрение дано в книге: R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That* (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1964).

Таким образом, как  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , так и  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  рождают частицы с энергией  $+E_{\mathbf{p}}$  и импульсом  $\mathbf{p}$ . Мы будем называть частицы, рожденные операторами  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , *фермионами*, а рожденные операторами  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  — *антифермионами*.

Одночастичные состояния

$$|\mathbf{p}, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (3.106)$$

определены так, что их скалярное произведение

$$\langle \mathbf{p}, r | \mathbf{q}, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \quad (3.107)$$

является лоренц-инвариантным. Отсюда следует, что оператор  $U(\Lambda)$ , осуществляющий преобразования Лоренца на состояниях гильбертова пространства, унитарен, хотя бусты  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$  не унитарны.

Для надежности удостоверимся, что  $U(\Lambda)$  осуществляет правильное преобразование поля  $\psi(x)$ . Для этого вычислим

$$U\psi(x)U^{-1} = U \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx} \right) U^{-1}. \quad (3.108)$$

Рассмотрим первое слагаемое; второе рассматривается полностью аналогично. Из уравнения (3.106) следует, что  $a_{\mathbf{p}}^s$  преобразуется согласно правилу:

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^s U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a_{\Lambda p}^s, \quad (3.109)$$

если принять, что ось квантования спина параллельна направлению буста или оси вращения. Для того, чтобы использовать это соотношение для вычисления (3.108), перепишем интеграл в виде:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^s = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \cdot \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^s.$$

Второй множитель просто преобразуется под действием  $U$ , а первый является лоренц-инвариантным интегралом. Таким образом, если мы применим (3.109) и сделаем замену  $\tilde{p} = \Lambda p$ , то (3.108) принимает вид:

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\tilde{p}}} \sum_s u^s(\Lambda^{-1}\tilde{p}) \sqrt{2E_{\tilde{p}}} a_{\tilde{p}}^s e^{-i\tilde{p}\cdot\Lambda x} + \dots$$

Но  $u^s(\Lambda^{-1}\tilde{p}) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} u^s(\tilde{p})$ , поэтому действительно мы имеем:

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_s \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} u^s(\tilde{p}) a_{\tilde{p}}^s e^{-i\tilde{p}\cdot\Lambda x} + \dots = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \psi(\Lambda x). \quad (3.110)$$

Этот результат говорит о том, что преобразованное поле рождает и уничтожает частицы в точке  $\Lambda x$ , как и должно быть. Однако обратим внимание, что это преобразование осуществляется в обратном направлении по сравнению с (3.2), где преобразованное поле  $\phi$  было вычислено в точке  $\Lambda^{-1}x$ . Различие в том, что в разделе 3.1 мы считали, что преобразуется ранее существовавшее распределение поля, которое измерялось

величиной  $\phi(x)$ . Здесь мы преобразовываем действие поля  $\phi(x)$  при рождении или уничтожении частиц. Эти два пути выполнения преобразования Лоренца работают в противоположных направлениях. Тем не менее, отметим, что матрицы, действующие на  $\psi$  и преобразующие координаты  $x$ , имеют правильную относительную ориентацию, согласованную с (3.8).

Обсудим вопрос о спине дираковской частицы. Мы ожидаем, что дираковские фермионы будут иметь спин  $1/2$ . Теперь можно вывести это свойство из нашего формализма. Мы уже показали, что частицы, рожденные операторами  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  и  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , имеют два «спиновых» состояния:  $s = 1, 2$ . Но мы все же не доказали, что этот «спин» имеет какое-либо отношение к угловому моменту. Чтобы сделать это, следует выписать оператор углового момента.

Напомним, что оператор обычного импульса в разделе 2.2 связан с трансляционной инвариантностью. Оператор момента импульса может быть найден аналогично, как следствие инвариантности относительно вращений. При вращении (или любом преобразовании Лоренца) дираковское поле  $\psi$  преобразуется (согласно исходному определению) как

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x).$$

Чтобы применить теорему Нетер, следует вычислить изменение поля в фиксированной точке, то есть

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x).$$

Рассмотрим для определенности бесконечно малое вращение координат на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ . Параметризация этого преобразования дана сразу после формулы (3.19):  $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ . Используя те же параметры, что и в (3.30), находим

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2} \theta \Sigma^3.$$

Теперь можно вычислить

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= \left(1 - \frac{i}{2} \theta \Sigma^3\right) \psi(t, x + \theta y, y - \theta x, z) - \psi(x) = \\ &= -\theta (x \partial_y - y \partial_x + \frac{i}{2} \Sigma^3) \psi(x) \equiv \theta \Delta \psi. \end{aligned}$$

Временная компонента сохраняющегося нетеровского тока будет равна

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \Delta \psi = -i \bar{\psi} \gamma^0 (x \partial_y - y \partial_x + \frac{i}{2} \Sigma^3) \psi.$$

Аналогичные выражения имеют место для вращений вокруг осей  $x$  и  $y$ . Таким образом, оператор углового момента имеет вид:

$$\mathbf{J} = \int d^3x \psi^\dagger \left( \mathbf{x} \times (-i \nabla) + \frac{1}{2} \Sigma \right) \psi. \quad (3.111)$$

Для нерелятивистских фермионов первое слагаемое в (3.111) дает орбитальный угловой момент. Следовательно, второе слагаемое отвечает спиновому угловому моменту. К сожалению, для релятивистских фермионов разделение (3.111) на спиновую и орбитальную части не столь непосредственно очевидно, поэтому не так-то просто написать общее выражение для этой величины в терминах лестничных операторов.

Чтобы доказать, что дираковская частица имеет спин  $1/2$ , достаточно рассмотреть покоящиеся частицы. В этом случае орбитальное слагаемое в (3.111) не дает вклада,

и можно легко записать спиновое слагаемое через лестничные операторы. Проще всего использовать шредингеровское представление (3.87) для  $\psi(\mathbf{x})$ :

$$J_z = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p 2E_{p'}}} e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \times \\ \times \sum_{r, r'} \left( a_{\mathbf{p}'}^{r'\dagger} u^{r'\dagger}(\mathbf{p}') + b_{-\mathbf{p}'}^{r'} v^{r'\dagger}(-\mathbf{p}') \right) \frac{\Sigma^3}{2} \left( a_{\mathbf{p}}^r u^r(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger} v^r(-\mathbf{p}) \right).$$

Мы хотели бы применить этот оператор к одночастичному состоянию с нулевым импульсом  $a_0^{s\dagger} |0\rangle$ . Это легче всего выполнить, используя следующий прием. Так как  $J_z$  уничтожает вакуум, то  $J_z a_0^{s\dagger} |0\rangle = [J_z, a_0^{s\dagger}] |0\rangle$ . Единственное отличное от нуля слагаемое в последней величине имеет структуру  $[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}'}^{r'}, a_0^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}) a_0^{r\dagger} \delta^{r's}$ ; другие три слагаемых в коммутаторе или исчезают, или уничтожают вакуум. Таким образом,

$$J_z a_0^{s\dagger} |0\rangle = \frac{1}{2m} \sum_r \left( u^{r\dagger}(0) \frac{\Sigma^3}{2} u^s(0) \right) a_0^{r\dagger} |0\rangle = \sum_r \left( \xi^{r\dagger} \frac{\sigma^3}{2} \xi^s \right) a_0^{r\dagger} |0\rangle.$$

Чтобы получить последнее выражение, здесь использована явная форма (3.47) для  $u(0)$ . Сумма по  $r$  проще всего берется, если выбрать спиноры  $\xi^r$  как собственные состояния  $\sigma^3$ . Тогда находим, что для  $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  одночастичное состояние есть собственное состояние  $J_z$  с собственным значением  $+1/2$ , в то время как для  $\xi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  оно является собственным состоянием  $J_z$  с собственным значением  $-1/2$ . Этот результат как раз совпадает с нашими ожиданиями для электронов.

Аналогичное вычисление определяет спин антифермиона с нулевым импульсом. Но в этом случае, так как порядок  $b$  и  $b^\dagger$  в  $J_z$  обращен, при вычислении  $[b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_0^\dagger] = [-b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}, b_0^\dagger]$  получаем дополнительный знак «минус». Таким образом, для позитронов связь между спинорами  $\xi^s$  и спиновым угловым моментом противоположная:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  соответствует спину  $-1/2$ , в то время как  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  соответствует спину  $+1/2$ . Это обращение знака согласуется с предсказаниями дираковской теории дырок. С этой точки зрения позитрон есть отсутствие электрона с отрицательной энергией. Если пропавший электрон имел положительную проекцию  $J_z$ , то его отсутствие приводит к отрицательной проекции  $-J_z$ .

Итак, угловой момент фермионов с нулевым импульсом определяется равенствами:

$$J_z a_0^{s\dagger} |0\rangle = \pm \frac{1}{2} a_0^{s\dagger} |0\rangle, \quad J_z b_0^{s\dagger} |0\rangle = \mp \frac{1}{2} b_0^{s\dagger} |0\rangle, \quad (3.112)$$

где верхний знак берется для  $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а нижний знак — для  $\xi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

В теории Дирака имеется еще одна важная сохраняющаяся величина. В разделе 3.4 мы видели, что ток  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  сохраняется. Заряд, связанный с этим током, есть

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{-\mathbf{p}}^s \right),$$

или, если мы отбрасываем еще одну бесконечную константу,

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right). \quad (3.113)$$

Таким образом, операторы  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  рождают фермионы с зарядом  $+1$ , в то время как операторы  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  рождают антифермионы с зарядом  $-1$ . Когда мы связываем дираковское поле с электромагнитным, мы видим, что  $Q$  есть не что иное, как электрический заряд (с точностью до постоянного множителя, который зависит от того, какого типа частицы мы хотим описать; например, для электронов электрический заряд равен  $Qe$ ).

В квантовой электродинамике спинорное поле  $\psi$  используется для описания электронов и позитронов. Частицы, рождаемые операторами  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , — электроны; они имеют энергию  $E_{\mathbf{p}}$ , импульс  $\mathbf{p}$ , спин  $1/2$  с поляризацией, соответствующей  $\xi^s$ , и заряд  $+1$  (в единицах  $e$ ). Частицы, рождаемые операторами  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$ , — позитроны; они имеют энергию  $E_{\mathbf{p}}$ , импульс  $\mathbf{p}$ , спин  $1/2$  с поляризацией, обратной поляризации  $\xi^s$ , и заряд  $-1$ . Состояние  $\psi_{\alpha}(x)|0\rangle$  содержит позитрон в точке  $x$ , чья поляризация соответствует выбранной компоненте спинора. Аналогично,  $\bar{\psi}_{\alpha}(x)|0\rangle$  является состоянием одного электрона в точке  $x$ .

### Пропагатор Дирака

Теперь вычисление амплитуд распространения для дираковского поля становится простым упражнением:

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u_a^s(p)\bar{u}_b^s(p)e^{-ip\cdot(x-y)} = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)},\end{aligned}\quad (3.114)$$

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s v_a^s(p)\bar{v}_b^s(p)e^{-ip\cdot(y-x)} = \\ &= -(i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(y-x)}.\end{aligned}\quad (3.115)$$

Так же, как для уравнения Клейна–Гордона, можно построить для уравнения Дирака функции Грина, удовлетворяющие различным граничным условиям. Например, запаздывающая функция Грина

$$S_R^{ab}(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0|\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}|0\rangle. \quad (3.116)$$

Нетрудно проверить, что

$$S_R(x-y) = (i\not{\partial}_x + m)D_R(x-y), \quad (3.117)$$

так как в правой части слагаемое, включающее  $\partial_0\theta(x^0 - y^0)$ , исчезает. Используя (3.117) и то, что  $\not{\partial}\not{\partial} = \partial^2$ , получаем, что  $S_R$  — функция Грина оператора Дирака:

$$(i\not{\partial}_x - m)S_R(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y) \cdot \mathbf{1}_{4\times 4}. \quad (3.118)$$

Функция Грина оператора Дирака может также быть найдена при помощи преобразования Фурье. Раскладывая  $S_R(x-y)$  в интеграл Фурье и действуя с обеих сторон оператором  $(i\not{\partial}_x - m)$ , находим:

$$i\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\not{p} - m)e^{-ip\cdot(x-y)} \tilde{S}_R(p), \quad (3.119)$$

следовательно,

$$\tilde{S}_R(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \quad (3.120)$$

Чтобы получить запаздывающую функцию Грина, следует вычислить интеграл по  $p^0$  в (3.120) по контуру, показанному после формулы (2.54). Для  $x^0 > y^0$  замыкаем контур внизу, огибая оба полюса, получая в результате сумму (3.115) и (3.114). Для  $x^0 < y^0$  замыкаем контур сверху и получаем ноль.

Функция Грина с граничными условиями Фейнмана определяется контуром, показанным после формулы (2.58):

$$\begin{aligned} S_F(x - y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x - y)} = \\ &= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{для } x^0 > y^0 \text{ (контур замыкается внизу)} \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{для } x^0 < y^0 \text{ (контур замыкается сверху)} \end{cases} \equiv \\ &\equiv \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Здесь мы определили хронологическое произведение спинорных полей с дополнительным изменением знака при перестановке операторов. Это изменение знака чрезвычайно важно в квантовой теории поля фермионов; мы снова встретимся с этим фактом в разделе 4.7.

Как и в теории Клейна–Гордона, выражение (3.121) для фейнмановского пропагатора — наиболее полезный результат этой главы. Когда мы проводим вычисления по теории возмущений с помощью диаграмм Фейнмана, мы сопоставляем множитель  $\tilde{S}_F(p)$  каждой внутренней линии фермиона.

### 3.6. Дискретные симметрии в теории Дирака

В последнем разделе обсуждалась реализация непрерывных преобразований Лоренца на гильбертовом пространстве в теории Дирака. Мы нашли, что для каждого преобразования  $\Lambda$  имеется унитарный оператор  $U(\Lambda)$ , который производит правильное преобразование полей:

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\psi(\Lambda x). \quad (3.122)$$

В этом разделе мы рассмотрим аналогичные операторы, которые реализуют различные дискретные симметрии на дираковском поле.

В дополнение к непрерывным преобразованиям Лоренца имеются две других пространственно-временных операции, которые являются потенциальными симметриями лагранжиана: *четность* и *обращение времени*. Четность, обозначаемая  $P$ , преобразует  $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, -\mathbf{x})$ , обращая ориентацию пространства. Обращение времени, обозначаемое  $T$ , преобразует  $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathbf{x})$ , меняя местами будущий и прошлый световые конусы. Ни одна из этих операций не может быть получена при помощи непрерывных преобразований Лоренца. Обе, однако, сохраняют интервал Минковского  $x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$ . Согласно стандартной терминологии множество непрерывных преобразований Лоренца называется собственной ортохронной группой Лоренца и обозначается  $\mathbf{L}_+^\uparrow$ . Полная группа Лоренца разбивается на четыре несвязные компоненты:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{L}_+^\uparrow & \xleftrightarrow{P} & \mathbf{L}_-^\uparrow = P\mathbf{L}_+^\uparrow & \text{«ортохронная»} \\
 \uparrow T & & \uparrow T & \\
 \mathbf{L}_+^\downarrow = T\mathbf{L}_+^\uparrow & \xleftrightarrow{P} & \mathbf{L}_-^\downarrow = P T \mathbf{L}_+^\uparrow & \text{«неортохронная»} \\
 \text{«собственная»} & & \text{«несобственная»} & 
 \end{array}$$

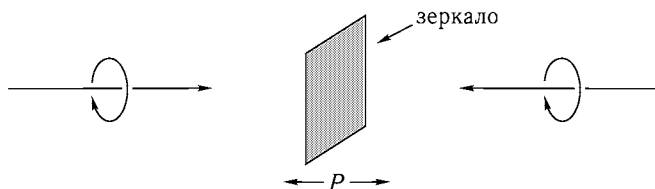
Одновременно с обсуждением симметрий  $P$  и  $T$ , удобно рассмотреть третью (не относящуюся к пространственно-временным) дискретную операцию — *зарядовое сопряжение*, обозначаемое  $C$ . Эта операция меняет местами частицы и античастицы.

Хотя любая релятивистская теория поля должна быть инвариантна относительно  $\mathbf{L}_+^\uparrow$ , она не обязана быть инвариантной относительно преобразований  $P$ ,  $T$  или  $C$ . Какое статус этих операций симметрии в реальном мире? Из эксперимента известно, что три из сил природы — гравитационные, электромагнитные и сильные взаимодействия — симметричны относительно преобразований  $P$ ,  $C$  и  $T$ . Слабые взаимодействия нарушают симметрии  $C$  и  $P$  по отдельности, но сохраняют  $CP$  и  $T$ . Однако некоторые редкие процессы (все до сих пор наблюдавшиеся включают нейтральные  $K$ -мезоны) также нарушают  $CP$  и  $T$ . Все наблюдения показывают, что комбинация  $CPT$  является точной симметрией природы.

Принятая в настоящее время теоретическая модель слабых взаимодействий — калибровочная теория Глэшоу–Вайнберга–Салама, описанная в гл. 20. В этой теории  $C$  и  $P$  нарушаются максимально. То, что  $C$  и  $P$  оказываются весьма хорошими симметриями в большинстве легко наблюдаемых процессов, неожиданно (хотя и не случайно). С другой стороны, никому неизвестна по-настоящему красивая теория, которая нарушает  $CP$ -симметрию. В существующей теории, где имеются три (или более) поколения фермионов, определен параметр, вызывающий  $CP$ -нарушение в случае, когда он отличен от нуля. Но величина этого параметра понята не лучше, чем величина массы электрона. Физическое происхождение  $CP$ -нарушения остается тайной. Мы обсудим этот вопрос далее в разделе 20.3.

### Четность

После этого краткого вступления обсудим действие  $P$ -,  $T$ - и  $C$ -преобразований на дираковские частицы и поля. Сначала рассмотрим четность. Оператор  $P$  должен менять направление импульса частицы без изменения ее спина:



На математическом языке это означает, что операция  $P$  должна быть реализована унитарным оператором (правильнее обозначать его  $U(P)$ , но мы будем писать просто  $P$ ), который преобразует, например, состояние  $a_{\mathbf{p}}^s |0\rangle$  в  $a_{-\mathbf{p}}^s |0\rangle$ . Другими словами, мы хотим иметь следующий закон преобразования:

$$P a_{\mathbf{p}}^s P = \eta_a a_{-\mathbf{p}}^s \quad \text{и} \quad P b_{\mathbf{p}}^s P = \eta_b b_{-\mathbf{p}}^s, \quad (3.123)$$

где  $\eta_a$  и  $\eta_b$  — возможные фазы. Эти фазы ограничены условием, что двукратное применение оператора четности должно возвращать наблюдаемые к их первоначальным

значениям. Так как наблюдаемые построены из четного числа фермионных операторов, то  $\eta_a^2, \eta_b^2 = \pm 1$ .

Так же, как непрерывное преобразование Лоренца реализуется на дираковском поле как  $4 \times 4$  постоянная матрица  $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ , так и преобразование четности должно представляться  $4 \times 4$  постоянной матрицей. Чтобы найти эту матрицу и определить  $\eta_a$  и  $\eta_b$ , вычислим действие  $P$  на  $\psi(x)$ . Используя (3.123), находим:

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left( \eta_a a_{-p}^s u^s(p) e^{-ipx} + \eta_b^* b_{-p}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx} \right). \quad (3.124)$$

Теперь сделаем замену переменных на  $\tilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$ . Заметим, что  $p \cdot x = \tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x})$ . Также  $\tilde{p} \cdot \sigma = p \cdot \bar{\sigma}$  и  $\tilde{p} \cdot \bar{\sigma} = p \cdot \sigma$ . Это позволяет записать:

$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p}); \\ v(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ -\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = -\gamma^0 v(\tilde{p}). \end{aligned}$$

Поэтому (3.124) будет иметь вид:

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_s \left( \eta_a a_{\tilde{p}}^s \gamma^0 u^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}(t, -\mathbf{x})} - \eta_b^* b_{\tilde{p}}^{s\dagger} \gamma^0 v^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}(t, -\mathbf{x})} \right).$$

Это выражение должно равняться некоторой постоянной матрице, умноженной на  $\psi(t, -\mathbf{x})$ , и это действительно выполняется, если положить  $\eta_b^* = -\eta_a$ . Отсюда следует, что

$$\eta_a \eta_b = -\eta_a \eta_a^* = -1. \quad (3.125)$$

Таким образом, преобразование четности поля  $\psi(x)$  в окончательной форме имеет вид:

$$P\psi(t, \mathbf{x})P = \eta_a \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}). \quad (3.126)$$

Нам важно знать (например, при построении лагранжианов), как преобразуются разные дираковские билинейные формы полей под действием преобразования четности. Имеется пять таких билинейных форм:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad i\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (3.127)$$

Множитель  $i$  в некоторых из них присутствует для того, чтобы все эти величины были эрмитовыми, что легко проверяется. (Любое новое слагаемое, дающее вклад в лагранжиан, должно быть вещественным.) Сначала следует вычислить

$$P\bar{\psi}(t, \mathbf{x})P = P\psi^\dagger(t, \mathbf{x})P\gamma^0 = (P\psi(t, \mathbf{x})P)^\dagger \gamma^0 = \eta_a^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^0. \quad (3.128)$$

Тогда скалярная билинейная форма преобразуется как

$$P\bar{\psi}\psi P = |\eta_a|^2 \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^0\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = +\bar{\psi}\psi(t, -\mathbf{x}), \quad (3.129)$$

в то время как для векторной формы получаем:

$$P\bar{\psi}\gamma^\mu\psi P = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(t, -\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0, \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(t, -\mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.130)$$



Обратим внимание, что вектор приобретает тот же самый знак «минус» при пространственных компонентах, как и вектор  $x^\mu$ . Аналогично, найдем преобразования псевдоскаляра и псевдовектора:

$$P i \bar{\psi} \gamma^5 \psi P = i \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = -i \bar{\psi} \gamma^5 \psi(t, -\mathbf{x}); \quad (3.131)$$

$$P \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi P = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = \begin{cases} -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{для } \mu = 0, \\ +\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.132)$$

Как мы и предупреждали в разделе 3.4, приставка «псевдо» означает дополнительный знак «минус» при преобразовании четности. (Свойства преобразования  $i \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi = 2 \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$  разбираются в задаче 3.7.) Заметим, что свойства преобразования фермионных билинейных форм не зависят от  $\eta_\alpha$ , поэтому без потери общности можно положить с самого начала  $\eta_\alpha = -\eta_\beta = 1$ .

Однако относительный знак «минус» в (3.125) в преобразованиях четности фермиона и антифермиона имеет важные следствия. Рассмотрим фермион-антифермионное состояние  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{q}}^{s'\dagger} |0\rangle$ . Применения  $P$ , мы находим  $P(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{q}}^{s'\dagger} |0\rangle) = -(a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{-\mathbf{q}}^{s'\dagger} |0\rangle)$ . Таким образом, состояние, содержащее фермионно-антифермионную пару, приобретает знак  $(-1)$  при преобразовании четности. Эта информация наиболее полезна при изучении связанных состояний, в которых импульсы фермиона и антифермиона интегрируются со шредингеровской волновой функцией, образуя систему, локализованную в пространстве. Мы подробно рассматриваем такие состояния в разделе 5.3, здесь же следует заметить, что если пространственная волновая функция симметрична при замене  $x \rightarrow -x$ , то состояние имеет *отрицательную* четность, в то время как если эта функция антисимметрична при замене  $x \rightarrow -x$ , то состояние имеет *положительную* четность. Например, связанное состояние с  $L = 0$  имеет отрицательную четность; состояния с  $J = 0$  преобразуются как псевдоскаляр, в то время как три состояния с  $J = 1$  преобразуются как пространственные компоненты вектора. Эти свойства обнаруживаются в правилах отбора для распадов позитрония и системы кварк-антикварк (см. задачу 3.8).

### Обращение времени

Теперь обратимся к реализации обращения времени. Мы хотели бы трактовать  $T$  как унитарный оператор, переводящий  $a_{\mathbf{p}}$  в  $a_{-\mathbf{p}}$  (и аналогично для  $b_{\mathbf{p}}$ ) и  $\psi(t, \mathbf{x})$  в  $\psi(-t, \mathbf{x})$  (с точностью до постоянной матрицы). Однако удовлетворить этим требованиям чрезвычайно трудно, так как мы видели, что преобразование, переводящее  $a_{\mathbf{p}}$  в  $a_{-\mathbf{p}}$ , эквивалентно преобразованию, переводящему  $(T, \mathbf{x})$  в  $(T, -\mathbf{x})$  в разложении  $\psi$ . Трудность еще более очевидна, когда мы требуем, чтобы операция обращения времени являлась симметрией в свободной теории Дирака,  $[T, H] = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}) &= e^{iHt} \psi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \Rightarrow \\ \Rightarrow T \psi(t, \mathbf{x}) T &= e^{iHt} [T \psi(\mathbf{x}) T] e^{-iHt} \Rightarrow \\ \Rightarrow T \psi(t, \mathbf{x}) T |0\rangle &= e^{iHt} [T \psi(\mathbf{x}) T] |0\rangle, \end{aligned}$$

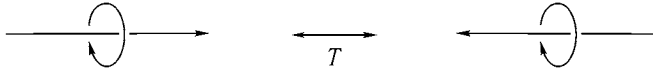
в предположении, что  $H |0\rangle = 0$ . Здесь правая часть есть сумма лишь отрицательно-частотных слагаемых. Но, если  $T$  обращает временную зависимость поля  $\psi(t, \mathbf{x})$ , тогда левая часть равна (с точностью до постоянной матрицы)  $\psi(-t, \mathbf{x}) |0\rangle = e^{-iHt} \psi(\mathbf{x}) |0\rangle$ , что является суммой положительно-частотных слагаемых. Таким образом, мы доказали, что  $T$  не может действовать как линейный унитарный оператор.

Что можно сделать? Выход был бы в сохранении условия унитарности  $T^\dagger = T^{-1}$ , но при этом  $T$  должен действовать как на с-числа, так и на операторы по правилу:

$$T(\text{с-число}) = (\text{с-число})^* T. \quad (3.133)$$

Тогда, даже если  $[T, H] = 0$ , зависимость от времени всех множителей в показателе экспоненты обращается:  $T e^{+iHt} = e^{-iHt} T$ . Так как вся эволюция во времени в квантовой механике выполняется при помощи таких экспоненциальных множителей, это фактически изменяет знак  $t$ . Заметим, что операция комплексного сопряжения нелинейна, поэтому  $T$  называется *антилинейным* или *антиунитарным* оператором.

Кроме изменения импульса частицы,  $T$  также должен переворачивать спин:



Чтобы формально описать это, следует найти математическую операцию, которая переворачивает спинор  $\xi$ .

В предыдущих частях этой главы мы обозначали спиновое состояние фермиона индексом  $s = 1, 2$ . В оставшейся части этого раздела, мы свяжем  $s$  с физической проекцией спина фермиона на определенную ось. Если эта ось имеет полярные координаты  $\theta, \phi$ , то двухкомпонентные спиноры со спином вверх и вниз вдоль этой оси имеют вид:

$$\xi(\uparrow) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \xi(\downarrow) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\xi^s = (\xi(\uparrow), \xi(\downarrow))$  для  $s = 1, 2$ . Определим также

$$\xi^{-s} = -i\sigma^2(\xi^s)^*. \quad (3.134)$$

Эта величина есть перевернутый спинор; из явных формул находим:

$$\xi^{-s} = (\xi(\downarrow), -\xi(\uparrow)). \quad (3.135)$$

Вид формулы для обращения спина в более общем случае следует из тождества  $\sigma\sigma^2 = \sigma^2(-\sigma^*)$ . Из него следует, что если  $\xi$  удовлетворяет  $\mathbf{n} \cdot \sigma \xi = +\xi$  для некоторой оси  $\mathbf{n}$ , то

$$(\mathbf{n} \cdot \sigma)(-i\sigma^2 \xi^*) = -i\sigma^2(-\mathbf{n} \cdot \sigma)^* \xi^* = i\sigma^2(\xi^*) = -(-i\sigma^2 \xi^*).$$

Обратим внимание, что, приняв такое определение переворота спина, находим, что два последовательных переворота приводят к умножению первоначального спинового состояния на  $(-1)$ .

Теперь сопоставим различные фермионные спиновые состояния выписанным спинорам. Электронный оператор уничтожения  $a_{\mathbf{p}}^s$  уничтожает электрон, описываемый спинором  $u^s(p)$ , содержащим  $\xi^s$ . Оператор уничтожения позитрона  $b_{\mathbf{p}}^s$  уничтожает позитрон, чей спинор  $v^s(p)$  содержит  $\xi^{-s}$ :

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^{-s} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^{-s} \end{pmatrix}. \quad (3.136)$$

Как и в (3.135), определяем:

$$a_{\mathbf{p}}^{-s} = (a_{\mathbf{p}}^2, -a_{\mathbf{p}}^1), \quad b_{\mathbf{p}}^{-s} = (b_{\mathbf{p}}^2, -b_{\mathbf{p}}^1). \quad (3.137)$$

Теперь можно вывести соотношение между дираковскими спинорами  $u$  и  $v$  и их обращениями во времени. Определим  $\tilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$ . Этот вектор удовлетворяет тождеству  $\sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} \sigma^2 = \sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma^*}$ . Для доказательства разложим квадратный корень как в (3.49). При некотором выборе спина и импульса, связанных с дираковским спинором  $u^s(p)$ , пусть  $u^{-s}(\tilde{p})$  обозначает спинор с обращенным импульсом и перевернутым спином. Эти величины связаны соотношением:

$$\begin{aligned} u^{-s}(\tilde{p}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p} \cdot \sigma} (-i\sigma^2 \xi^{s*}) \\ \sqrt{\tilde{p} \cdot \bar{\sigma}} (-i\sigma^2 \xi^{s*}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma^*} \xi^{s*} \\ -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}^*} \xi^{s*} \end{pmatrix} = \\ &= -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} [u^s(p)]^* = -\gamma^1 \gamma^3 [u^s(p)]^*. \end{aligned}$$

Аналогично для  $v^s(p)$ ,

$$v^{-s}(\tilde{p}) = -\gamma^1 \gamma^3 [v^s(p)]^*;$$

в этом соотношении  $v^{-s}$  содержит  $\xi^{(-s)} = -\xi^s$ .

Используя (3.137), определим преобразование обращения времени фермионных операторов уничтожения следующим образом:

$$T a_{\mathbf{p}}^s T = a_{-\mathbf{p}}^{-s}, \quad T b_{\mathbf{p}}^s T = b_{-\mathbf{p}}^{-s}. \quad (3.138)$$

(Дополнительная общая фаза не имеет никакого влияния на дальнейшее изложение и для простоты опускается.) Соотношения (3.138) позволяют вычислить действие  $T$  на фермионное поле  $\psi(x)$ :

$$\begin{aligned} T \psi(t, \mathbf{x}) T &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s T \left( a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx} \right) T = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( a_{-\mathbf{p}}^{-s} [u^s(p)]^* e^{ipx} + b_{-\mathbf{p}}^{-s\dagger} [v^s(p)]^* e^{-ipx} \right) = \\ &= (-\gamma^1 \gamma^3) \int \frac{d^3 \tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_s \left( a_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-s} u^{-s}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}(t, -\mathbf{x})} + b_{\tilde{\mathbf{p}}}^{-s\dagger} v^{-s}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}(t, -\mathbf{x})} \right) = \\ &= (-\gamma^1 \gamma^3) \psi(-t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.139)$$

На последнем шаге мы использовали  $\tilde{p} \cdot (t, -\mathbf{x}) = -\tilde{p} \cdot (-t, \mathbf{x})$ . Как и для четности, мы получили простой закон преобразования для фермионного поля  $\psi(x)$ . Относительный знак «минус» в законах преобразования для частицы и античастицы неявно присутствует и здесь, в дважды перевернутом спиноре в  $v^{-s}$ .

Теперь можно установить результат действия  $T$  на различные билинейные формы. Нам потребуется формула:

$$T \bar{\psi} T = (T \psi T)^\dagger (\gamma^0)^* = \psi^\dagger(-t, \mathbf{x}) [-\gamma^1 \gamma^3]^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) [\gamma^1 \gamma^3]. \quad (3.140)$$

Тогда для преобразования скалярной билинейной формы имеем:

$$T \bar{\psi} \psi(t, \mathbf{x}) T = \bar{\psi}(\gamma^1 \gamma^3) (-\gamma^1 \gamma^3) \psi(-t, \mathbf{x}) = +\bar{\psi} \psi(-t, \mathbf{x}). \quad (3.141)$$

При протаскивании  $T$  через  $i$ , псевдоскаляр приобретает дополнительный знак «минус»:

$$T i \bar{\psi} \gamma^5 \psi T = -i \bar{\psi} (\gamma^1 \gamma^3) \gamma^5 (-\gamma^1 \gamma^3) \psi = -i \bar{\psi} \gamma^5 \psi(-t, \mathbf{x}).$$

Для вектора нужно провести вычисления отдельно для каждого из четырех случаев  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . После небольшой работы находим:

$$T\bar{\psi}\gamma^\mu\psi T = \bar{\psi}(\gamma^1\gamma^3)(\gamma^\mu)^*(-\gamma^1\gamma^3)\psi = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(-t, \mathbf{x}) & \text{для } \mu = 0; \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(-t, \mathbf{x}) & \text{для } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.142)$$

Это как раз то свойство преобразования, которое нужно для таких векторов, как плотность тока. Можно проверить, что при обращении времени псевдовектор преобразуется таким же образом.

### Зарядовое сопряжение

Последняя из трех дискретных симметрий — это симметрия относительного зарядового сопряжения  $C$ , меняющая местами частицы и античастицы. Без труда можно реализовать  $C$  как унитарный линейный оператор. Зарядовое сопряжение обычно определяется как преобразование фермиона с заданной ориентацией спина в антифермион с той же спиновой ориентацией. Таким образом, удобным выбором для преобразования фермионных операторов уничтожения будет

$$Ca_{\mathbf{p}}^s C = b_{\mathbf{p}}^s; \quad Cb_{\mathbf{p}}^s C = a_{\mathbf{p}}^s. \quad (3.143)$$

Снова для простоты мы игнорируем возможные дополнительные фазы.

Далее мы хотим выяснить результат действия  $C$  на поле  $\psi(x)$ . Прежде всего нам понадобится соотношение между  $v^s(p)$  и  $u^s(p)$ . Используя (3.136) и (3.134), находим:

$$(v^s(p))^* = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma}(-i\sigma^2 \xi^*) \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}(-i\sigma^2 \xi^*) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^* \\ i\sigma^2 \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^* \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix},$$

где  $\xi$  стоит за  $\xi^s$ . Это означает, что

$$u^s(p) = -i\gamma^2 (v^s(p))^*, \quad v^s(p) = -i\gamma^2 (u^s(p))^*. \quad (3.144)$$

Если подставить (3.144) в выражение для оператора фермионного поля и затем преобразовать этот оператор при помощи  $C$ , то

$$\begin{aligned} C\psi(x)C &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left( -i\gamma^2 b_{\mathbf{p}}^s (v^s(p))^* e^{-ipx} - i\gamma^2 a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} (u^s(p))^* e^{ipx} \right) = \\ &= -i\gamma^2 \psi^*(x) = -i\gamma^2 (\psi^\dagger)^T = -i(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Обратим внимание, что  $C$  является линейным унитарным оператором, несмотря на то, что он переводит  $\psi \rightarrow \psi^*$ .

Снова мы хотели бы знать, как  $C$  действует на фермионные билинейные формы. Во-первых, нам понадобится формула:

$$C\bar{\psi}(x)C = C\psi^\dagger C\gamma^0 = (-i\gamma^2\psi)^T\gamma^0 = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T. \quad (3.146)$$

Вывод преобразований для билинейных форм несколько сложнее. Удобнее всего явно выписывать спинорные индексы. Для скаляра

$$\begin{aligned} C\bar{\psi}\psi C &= (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T (-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = -\gamma_{ab}^0\gamma_{bc}^2\psi_c\bar{\psi}_d\gamma_{de}^0\gamma_{ea}^2 = \\ &= +\bar{\psi}_d\gamma_{de}^0\gamma_{ea}^2\gamma_{ab}^0\gamma_{bc}^2\psi_c = -\bar{\psi}\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2\psi = +\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (3.147)$$

(Знак «минус» на третьем шаге вытекает из антикоммутируемости фермионов.) Для псевдоскаляра вывод не более сложен:

$$C i \bar{\psi} \gamma^5 \psi C = i (-i \gamma^0 \gamma^2 \psi)^T \gamma^5 (-i \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T = i \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (3.148)$$

Преобразование для каждой компоненты вектора и псевдовектора следует делать отдельно. Учитывая, что  $\gamma^0$  и  $\gamma^2$  являются симметричными матрицами, в то время как  $\gamma^1$  и  $\gamma^3$  — антисимметричны, находим:

$$C \bar{\psi} \gamma^\mu \psi C = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi; \quad (3.149)$$

$$C \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi C = +\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (3.150)$$

Хотя оператор  $C$  меняет местами  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , он реально не меняет порядка операторов уничтожения и рождения. Таким образом, если  $\bar{\psi} \gamma^0 \psi$  определена так, что в ней вычтена бесконечная константа, упомянутая перед (3.113), то эта константа не появляется вновь в результате зарядового сопряжения.

### Сводка формул по $C$ , $P$ и $T$ преобразованиям

Свойства преобразования различных фермионных билинейных форм под действием преобразований  $C$ ,  $P$ , и  $T$  сведены вместе в приведенной ниже таблице. Здесь мы используем сокращения  $(-1)^\mu \equiv 1$  для  $\mu = 0$  и  $(-1)^\mu \equiv -1$  для  $\mu = 1, 2, 3$ .

	$\bar{\psi} \psi$	$i \bar{\psi} \gamma^5 \psi$	$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$	$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$	$\partial_\mu$
$P$	+1	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu (-1)^\nu$	$(-1)^\mu$
$T$	+1	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu (-1)^\nu$	$-(-1)^\mu$
$C$	+1	+1	-1	+1	-1	+1
$CPT$	+1	+1	-1	-1	+1	-1

Мы включили сюда свойства преобразования тензорной билинейной формы (см. задачу 3.7), а также оператора производной.

Во-первых, заметим, что свободный дираковский лагранжиан  $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$  инвариантен относительно преобразований  $C$ ,  $P$  и  $T$  по отдельности. Можно построить более общие квантовые системы, которые нарушают любые из этих симметрий, добавляя к  $\mathcal{L}_0$  некоторые возмущения  $\delta\mathcal{L}$ . Но  $\delta\mathcal{L}$  должен быть лоренцевым скаляром, и последняя строка таблицы показывает, что все комбинации  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ , являющиеся лоренцевыми скалярами, инвариантны относительно комбинированной симметрии  $CPT$ . На самом деле в общем случае справедливо утверждение, что невозможно построить лоренц-инвариантную квантовую теорию поля с эрмитовым гамильтонианом, в которой нарушается  $CPT$  симметрия\*.

## Задачи

**3.1. Группа Лоренца.** Напомним вытекающие из (3.17) коммутационные соотношения для генераторов группы Лоренца:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}).$$

\* Эта теорема и теорема о связи спина со статистикой строго доказаны в книге: Streater и Wightman, *op. cit.*

- (а) Определим генераторы вращений и собственно лоренцевых преобразований (бустов) как

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{0i},$$

где  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Тогда бесконечно малое преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\Phi \rightarrow (1 - i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L} - i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})\Phi.$$

Выпишите явно коммутационные соотношения для этих векторных операторов. (Например,  $[L^i, L^j] = i\varepsilon^{ijk} L^k$ .) Покажите, что комбинации

$$\mathbf{J}_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + i\mathbf{K}) \quad \text{и} \quad \mathbf{J}_- = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - i\mathbf{K})$$

коммутируют друг с другом и по отдельности удовлетворяют коммутационным соотношениям углового момента.

- (б) Конечномерные представления группы вращений в точности соответствуют допустимым значениям углового момента, который может быть целым или полуцелым числом. Из результата части (а) следует, что все конечномерные представления группы Лоренца соответствуют парам целых или полуцелых чисел  $(j_+, j_-)$ , соответствующих парам представлений группы вращений. Используя тот факт, что  $J = \sigma/2$  в представлении углового момента со спином  $1/2$ , выпишите явно законы преобразования для двухкомпонентных объектов, преобразующихся по представлениям группы Лоренца, соответствующим парам  $(\frac{1}{2}, 0)$  и  $(0, \frac{1}{2})$ . Покажите, что они в точности соответствуют преобразованиям  $\psi_L$  и  $\psi_R$ , заданным в (3.37).
- (с) Тождество  $\sigma^T = -\sigma^2 \sigma \sigma^2$  позволяет переписать преобразование для  $\psi_L$  в унитарно эквивалентной форме

$$\psi' \rightarrow \psi' \left( 1 + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right),$$

где  $\psi' = \psi_L^T \sigma^2$ . Применяя этот закон, можно представить объект, преобразующийся по представлению  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  в виде  $2 \times 2$  матрицы, которая включает левый закон преобразования для  $\psi_R$  вместе с правым законом преобразования для транспонированного  $\psi_L$ . Параметризуем эту матрицу как

$$\begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что объект  $V^\mu$  преобразуется как 4-вектор.

### 3.2. Получите тождество Гордона

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p),$$

где  $q = (p' - p)$ . Мы будем использовать эту формулу в гл. 6.

**3.3. Произведения спиноров.** (Эта задача, вместе с задачами 5.3 и 5.6, дает эффективный вычислительный метод для процессов, включающих безмассовые частицы.) Пусть  $k_0^\mu, k_1^\mu$  — фиксированные 4-векторы, удовлетворяющие условиям  $k_0^2 = 0, k_1^2 = -1, k_0 \cdot k_1 = 0$ . Определим базисные спиноры следующим способом. Пусть  $u_{L0}$  — левополяризованный спинор для фермиона с импульсом  $k_0$ . Пусть  $u_{R0} = \not{k}_1 u_{L0}$ . Тогда для любого изотропного (светоподобного) ( $p^2 = 0$ ) 4-импульса  $p$  определим

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0} \quad \text{и} \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}.$$

Этот набор условий однозначно определяет фазы спиноров (за исключением того случая, когда  $p$  параллелен  $k_0$ ).

- (а) Покажите, что  $\not{k}_0 u_{R0} = 0$ . Покажите, что для любого изотропного  $p$   $\not{p} u_L(p) = \not{p} u_R(p) = 0$ .
- (б) Для случаев  $k_0 = (E, 0, 0, -E), k_1 = (0, 1, 0, 0)$ , постройте явно  $u_{L0}, u_{R0}, u_L(p)$  и  $u_R(p)$ .
- (с) Определим *произведение спиноров*  $s(p_1, p_2)$  и  $t(p_1, p_2)$  для изотропных  $p_1, p_2$  согласно формуле

$$s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1) u_L(p_2), \quad t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1) u_R(p_2).$$

Используя явный вид  $u_\lambda$ , заданный в (б), вычислите явно произведения спиноров и покажите, что  $t(p_1, p_2) = (s(p_2, p_1))^*$  и  $s(p_1, p_2) = -s(p_2, p_1)$ . Кроме того, покажите, что

$$|s(p_1, p_2)|^2 = 2p_1 \cdot p_2.$$

Таким образом, произведение спиноров является квадратным корнем из скалярного произведения 4-векторов.

**3.4. Майорановские фермионы.** Напомним, что при помощи (3.40) можно написать релятивистское уравнение для безмассового 2-компонентного фермионного поля, преобразующегося как две верхних компоненты дираковского спинора ( $\psi_L$ ). Обозначим такое двухкомпонентное поле  $\chi_a(x), a = 1, 2$ .

- (а) Покажите, что уравнение для  $\chi(x)$  можно записать как уравнение для массивного поля:

$$i\vec{\sigma} \cdot \partial \chi - im\sigma^2 \chi^* = 0.$$

Иначе говоря, во-первых, покажите, что это уравнение является релятивистски инвариантным и, во-вторых, что из него следует уравнение Клейна–Гордона  $(\partial^2 + m^2)\chi = 0$ . Этот вид массового слагаемого для фермиона назван майорановским массовым слагаемым.

- (б) Следует ли уравнение Майорана из лагранжиана? Казалось бы, массовое слагаемое, получается варьированием выражения  $(\sigma^2)_{ab} \chi_a^* \chi_b^*$ ; Однако, так как  $\sigma^2$  — антисимметричная матрица, это выражение обратилось бы в нуль, если бы  $\chi(x)$  было обычным  $c$ -числовым полем. Известно, что при переходе к квантовой теории поля  $\chi(x)$  становится антикоммутирующим квантовым полем. Следовательно, имеет смысл развивать классическую теорию этого поля, рассматривая  $\chi(x)$  как классическое антикоммутирующее поле, то есть как поле, которое принимает значения в *грасмановых числах*, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha \quad \text{для любых } \alpha, \beta.$$

Заметим, что из этих соотношений следует, что  $\alpha^2 = 0$ . Грассманово поле  $\xi(x)$  может быть разложено по базису функций как

$$\xi(x) = \sum_n \alpha_n \phi_n(x),$$

где  $\phi_n(x)$  — ортогональные  $c$ -числовые функции и  $\alpha_n$  — набор независимых грассмановых чисел. Определим комплексное сопряжение произведения грассмановых чисел как обращающее их порядок:

$$(\alpha\beta)^* \equiv \beta^* \alpha^* = -\alpha^* \beta^*.$$

Это правило по форме совпадает с эрмитовым сопряжением квантовых полей. Покажите, что классическое действие

$$S = \int d^4x \left[ \chi^\dagger i \vec{\sigma} \cdot \partial \chi + \frac{im}{2} (\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*) \right],$$

(где  $\chi^\dagger = (\chi^*)^T$ ) является вещественным ( $S^* = S$ ) и варьирование  $S$  относительно  $\chi$  и  $\chi^*$  приводит к уравнению Майорана.

- (с) Запишем 4-компонентное дираковское поле как

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

и напомним, что нижняя компонента  $\psi$  преобразуется по представлению, унитарно эквивалентному комплексно-сопряженному представлению  $\psi_L$ . Таким образом, можно переписать 4-компонентное дираковское поле в терминах двух 2-компонентных спиноров:

$$\psi_L(x) = \chi_1(x), \quad \psi_R(x) = i\sigma^2 \chi_2^*(x).$$

Перепишите лагранжиан Дирака в терминах  $\chi_1$  и  $\chi_2$  и обратите внимание на форму массового слагаемого.

- (d) Покажите, что действие пункта (с) имеет глобальную симметрию. Вычислите дивергенции токов

$$J^\mu = \chi^\dagger \vec{\sigma}^\mu \chi, \quad J^\mu = \chi_1^\dagger \vec{\sigma}^\mu \chi_1 - \chi_2^\dagger \vec{\sigma}^\mu \chi_2,$$

для теорий пунктов (b) и (с), соответственно, и свяжите результаты с симметриями этих теорий. Постройте теорию из  $N$  свободных массивных 2-компонентных фермионных полей с  $O(N)$  симметрией (то есть с вращательной симметрией в  $N$ -мерном пространстве).

- (e) Проквантуйте теорию Майорана пунктов (a) и (b). Иными словами, рассмотрите  $\chi(x)$  как квантовое поле, удовлетворяющее каноническому антикоммутиационному соотношению

$$\{\chi_a(\mathbf{x}), \chi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Постройте эрмитовый гамильтониан и найдите представление канонических коммутационных соотношений, которое диагонализует гамильтониан в терминах набора операторов рождения и уничтожения. (Указание: сравните поле  $\chi(x)$  с двумя верхними компонентами проквантованного дираковского поля.)



**3.5. Суперсимметрия.** Можно написать теории поля с непрерывными симметриями, смешивающими фермионы и бозоны. Соответствующие преобразования названы *суперсимметриями*.

- (а) Простейший пример суперсимметричной теории поля — теория свободных комплексного бозонного и фермионного вейлевского полей с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \chi + F^* F.$$

Здесь  $F$  является дополнительным комплексным скалярным полем с уравнением движения  $F = 0$ . Покажите, что этот лагранжиан является инвариантным (с точностью до полной производной) относительно бесконечно малых преобразований вида

$$\begin{aligned} \delta \phi &= -i \varepsilon^T \sigma^2 \chi, \\ \delta \chi &= \varepsilon F + \sigma \cdot \partial \phi \sigma^2 \varepsilon^*, \\ \delta F &= -i \varepsilon^\dagger \bar{\sigma} \cdot \partial \chi, \end{aligned}$$

где параметр  $\varepsilon_a$  есть 2-компонентный грассмановский спинор.

- (б) Покажите, что слагаемое

$$\Delta \mathcal{L} = [m \phi F + \frac{1}{2} i m \chi^T \sigma^2 \chi] + (\text{комплексно-сопряженное})$$

является также лево-инвариантным под действием преобразования, заданного в части (а). Устраните  $F$  из полного лагранжиана  $\mathcal{L} + \Delta \mathcal{L}$ , решая его уравнение движения, и покажите, что бозонное и фермионное поля  $\phi$  и  $\chi$  имеют одинаковые массы.

- (с) Можно написать суперсимметричные нелинейные уравнения поля, добавляя к лагранжиану слагаемые кубического и более высокого порядков. Покажите, что следующая, достаточно общая теория поля, содержащая поля  $(\phi_i, \chi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , является суперсимметричной:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^* \partial^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \chi_i + F_i^* F_i + \left( F_i \frac{\partial W[\phi]}{\partial \phi_i} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 W[\phi]}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i^T \sigma^2 \chi_j + \text{к.с.} \right),$$

где  $W[\phi]$  — произвольная функция поля  $\phi_i$ , называемая *суперпотенциалом*. Для простого случая  $n = 1$  и  $W = g\phi^3/3$  выпишите уравнения движения для полей  $\phi$  и  $\chi$  (после устранения  $F$ ).

**3.6. Преобразования Фирца.** Пусть  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  — четыре 4-компонентных дираковских спинора. В тексте мы доказали формулы перестановки Фирца (3.78) и (3.79). Первая из этих формул может быть записана в 4-компонентных обозначениях как

$$\bar{u}_1 \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_2 \bar{u}_3 \gamma_\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_4 = -\bar{u}_1 \gamma^\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_4 \bar{u}_3 \gamma_\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u_2.$$

На самом деле подобные формулы перестановки имеют место для любого произведения

$$(\bar{u}_1 \Gamma^A u_2)(\bar{u}_3 \Gamma^B u_4),$$

где  $\Gamma^A, \Gamma^B$  — любая из 16 комбинаций матриц Дирака, перечисленных в разделе 3.4.

- (а) Для начала нормируем эти 16 матриц  $\Gamma^A$  по правилу

$$\text{tr}[\Gamma^A \Gamma^B] = 4\delta^{AB}.$$

Это дает  $\Gamma^A = \{1, \gamma^0, i\gamma^j, \dots\}$ . Выпишите все 16 элементов этого набора.

- (б) Выпишите главное тождество Фирца как уравнение

$$(\bar{u}_1 \Gamma^A u_2)(\bar{u}_3 \Gamma^B u_4) = \sum_{C,D} C^{AB}_{CD} (\bar{u}_1 \Gamma^C u_4)(\bar{u}_3 \Gamma^D u_2)$$

с неизвестными коэффициентами  $C^{AB}_{CD}$ . Используя условие полноты для шестнадцати матриц  $\Gamma^A$ , покажите, что

$$C^{AB}_{CD} = \frac{1}{16} \text{tr}[\Gamma^C \Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B].$$

- (с) Найдите явно законы преобразования Фирца для произведений  $(\bar{u}_1 u_2)(\bar{u}_3 u_4)$  и  $(\bar{u}_1 \gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3 \gamma_\mu u_4)$ .

### 3.7. Эта задача касается дискретных симметрий $P$ , $C$ , и $T$ .

- (а) Найдите свойства преобразования под действием  $P$ ,  $C$ , и  $T$  преобразований антисимметричной тензорной фермионной билинейной формы  $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$ , где  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Это завершает таблицу свойств преобразования билинейных форм, приведенную в конце главы.
- (б) Пусть  $\phi(x)$  — комплексное поле Клейна–Гордона, которое было рассмотрено в задаче 2.2. Найдите унитарные операторы  $P$ ,  $C$  и антиунитарный оператор  $T$  (определенные в терминах их действия на операторы уничтожения  $a_p$  и  $b_p$  для частиц и античастиц Клейна–Гордона), которые дают следующие преобразования поля Клейна–Гордона:

$$P \phi(t, \mathbf{x}) P = \phi(t, -\mathbf{x});$$

$$T \phi(t, \mathbf{x}) T = \phi(-t, \mathbf{x});$$

$$C \phi(t, \mathbf{x}) C = \phi^*(t, \mathbf{x}).$$

Найдите свойства преобразования компонент тока

$$J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi)$$

при преобразованиях  $P$ ,  $C$  и  $T$ .

- (с) Покажите, что любой эрмитовый скалярный по отношению к преобразованиям Лоренца локальный оператор, построенный из полей  $\psi(x)$ ,  $\phi(x)$  и их сопряженных, имеет  $CPT = +1$ .

### 3.8. Связанные состояния. Две частицы со спином 1/2 могут объединяться в состояние с полным спином, равным либо 0, либо 1. Волновые функции этих состояний при перестановке их спинов будут, соответственно, нечетные или четные.

- (а) Используйте эту информацию, чтобы вычислить квантовые числа  $P$ - и  $C$ -четностей всех связанных состояний электрона и позитрона с  $S$ ,  $P$  или  $D$  волновыми функциями.

(b) Так как электрон-фотонное взаимодействие задается гамильтонианом

$$\Delta H = \int d^3x e A_\mu j^\mu,$$

где  $j^\mu$  — электрический ток, то электродинамика инвариантна относительно преобразований  $P$  и  $C$ , если компоненты векторного потенциала имеют такие же  $P$ - и  $C$ -четности, как и соответствующие компоненты  $j^\mu$ . Покажите, что отсюда вытекает следующий удивительный факт: основное состояние позитрония со спином 0 может распадаться на 2 фотона, но основное состояние со спином 1 должно распадаться на 3 фотона. Найдите правила отбора для аннигиляции высших состояний позитрония, а также для однофотонных переходов между уровнями позитрония.

## ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ И ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА

### 4.1. Теория возмущений — философия и примеры

Мы достаточно подробно обсудили квантование двух свободных теорий поля, приближенно описывающих многие из найденных в природе свободных частиц. Однако до сих пор состояния свободных частиц были собственными состояниями гамильтониана. У нас не было ни взаимодействия, ни рассеяния. Чтобы получить описание, более близкое к реальности, следует включить в гамильтониан (или лагранжиан) новые, нелинейные слагаемые, связывающие друг с другом различные фурье-моды (и частицы, которые их населяют). Для сохранения причинности потребуем, чтобы новые слагаемые содержали произведения полей только в одной и той же точке пространства-времени. Так, выражение  $[\phi(x)]^4$  прекрасно подходит, а выражение  $\phi(x)\phi(y)$  не годится. Таким образом, слагаемые, описывающие взаимодействия, будут иметь вид:

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}}[\phi(x)] = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi(x)].$$

Пока ограничимся рассмотрением теорий, в которых  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  ( $= -\mathcal{L}_{\text{int}}$ ) является функцией только самих полей, но не их производных.

В этой главе мы обсудим три важных примера взаимодействующих теорий поля. Первый из них — это теория  $\phi^4$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (4.1)$$

где  $\lambda$  — безразмерная *константа связи*. (Взаимодействие  $\phi^3$  было бы немного проще, но в этом случае энергия не будет положительно определена, до тех пор, пока не добавить более высокую четную степень  $\phi$ .) Хотя мы рассматриваем эту теорию в чисто педагогических целях (так как она — самая простая из всех квантовых теорий с взаимодействием), модели реального мира содержат взаимодействия  $\phi^4$ . Наиболее важный пример такого взаимодействия в физике частиц — самодействие хиггсовского поля в стандартной электрослабой теории. В части II мы увидим, что теория  $\phi^4$  возникает также в статистической механике. Уравнение движения для теории  $\phi^4$  имеет вид

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (4.2)$$

Оно не может быть решено с помощью фурье-разложения по примеру свободного уравнения Клейна–Гордона. В квантовой теории мы налагаем одновременные коммутационные соотношения

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

на которые не влияет  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ . (Заметим, однако, что если бы в  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  содержалось  $\partial_\mu \phi$ , то определение  $\pi(\mathbf{x})$  было бы иным.) Нетрудно записать гамильтониан этой теории и найти гейзенберговские уравнения движения для оператора  $\phi(x)$ . Так же, как это было в свободной теории, результат совпадает с классическим уравнением движения (4.2).

Нашим вторым примером взаимодействующей теории поля будет квантовая электродинамика:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{КЭД}} &= \mathcal{L}_{\text{Дирак}} + \mathcal{L}_{\text{Максвелл}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = \\ &= \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $A_\mu$  — электромагнитный векторный потенциал,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — тензор электромагнитного поля и  $e = -|e|$  — электрический заряд. (Чтобы описать фермион с зарядом  $Q$ , заменим  $e$  на  $Q$ . Если мы хотим рассмотреть сразу несколько разновидностей заряженных частиц, мы просто продублируем  $\mathcal{L}_{\text{Дирак}}$  и  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  для каждой отдельной разновидности.) Удивительно, что этот простой лагранжиан описывает почти все наблюдаемые явления от макроскопических масштабов до масштабов  $10^{-13}$  см. На самом деле лагранжиан в КЭД может быть записан еще проще:

$$\mathcal{L}_{\text{КЭД}} = \bar{\psi}(iD - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2, \quad (4.4)$$

где  $D_\mu$  — калибровочно-ковариантная производная,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ie A_\mu(x). \quad (4.5)$$

Определяющее свойство лагранжиана КЭД состоит в том, что он инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (4.6)$$

которое действует на дираковское поле как *локальное* фазовое вращение. Эта инвариантность при локальных фазовых вращениях имеет фундаментальное геометрическое значение, которое мотивирует появление *ковариантной производной*. Однако для наших целей достаточно того факта, что преобразование (4.6) является симметрией теории.

Уравнения движения получаются из (4.3) при помощи канонической процедуры. Уравнение Эйлера–Лагранжа для  $\psi$  имеет вид:

$$(iD - m)\psi(x) = 0. \quad (4.7)$$

Это уравнение является уравнением Дирака, связанным с электромагнитным полем по рецепту *минимальной связи*, отвечающей замене  $\partial \rightarrow D$ . Уравнение Эйлера–Лагранжа для поля  $A_\nu$  имеет вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = e j^\nu. \quad (4.8)$$

Это неоднородные уравнения Максвелла с плотностью тока  $j^\nu = \bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ , определяемой сохраняющимся дираковским векторным током (3.73). Так же, как и в теории  $\phi^4$ , уравнения движения могут быть получены как гейзенберговские уравнения для операторов  $\psi(x)$  и  $A_\mu(x)$ . Это нетрудно проверить для поля  $\psi(x)$ , но мы до сих пор не провели квантование электромагнитного поля.

На самом деле мы вообще не будем обсуждать в этой книге каноническое квантование электромагнитного поля. Это весьма запутанный вопрос, главным образом из-за

калибровочной инвариантности. Заметим, что, так как  $\dot{A}^0$  не содержится в лагранжиане (4.3), то импульс, сопряженный к  $A^0$ , тождественно равен нулю. Это противоречит каноническому коммутационному соотношению  $[A^0(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Одно из решений состоит в квантовании в кулоновской калибровке, когда  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  и компонента  $A^0$  является не динамической переменной, а подчиняется некой связи. Но в этом случае неочевидна явная лоренц-инвариантность. С другой стороны, можно квантовать поле в лоренцевской калибровке  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Тогда можно модифицировать лагранжиан, добавляя слагаемое с  $\dot{A}^0$ . При таком подходе возникают коммутационные соотношения  $[A^\mu(\mathbf{x}), \dot{A}^\nu(\mathbf{y})] = -ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , по существу совпадающие с аналогичными соотношениями для четырех полей Клейна–Гордона. Но дополнительный знак «минус» в коммутаторе  $[A^0, \dot{A}^0]$  приводит к другой (преодолимой) трудности: состояния, рожденные оператором  $a_p^{0\dagger}$ , имеют отрицательную норму\*.

Правила Фейнмана для вычисления амплитуд рассеяния, включающих фотоны, легче получаются в рамках формулировки теории поля на языке функционального интегрирования, излагаемом в главе 9. Как мы увидим в части III, этот метод имеет дополнительное преимущество обобщения на случай неабелевых калибровочных полей. В данной главе мы просто попытаемся угадать правила Фейнмана для фотонов. Сделать это будет совсем нетрудно после того, как мы получим правила Фейнмана для аналогичной, но более простой теории — *теории Юкавы*:

$$\mathcal{L}_{\text{Юкава}} = \mathcal{L}_{\text{Дирак}} + \mathcal{L}_{\text{Клейн-Гордон}} - g\bar{\psi}\psi\phi. \quad (4.9)$$

Это будет нашим третьим примером. Теория Юкавы подобна КЭД, но в ней фотон заменен скалярной частицей  $\phi$ . Слагаемое с взаимодействием содержит безразмерную константу связи  $g$ , аналогичную электрическому заряду  $e$ . Вначале Юкава предложил эту теорию для описания взаимодействия нуклонов ( $\psi$ ) и пионов ( $\phi$ ). В современной теории частиц стандартная модель содержит слагаемое с взаимодействием Юкавы, связывающий скалярное поле Хиггса с кварками и лептонами; большинство свободных параметров в стандартной модели — это юкавские константы связи.

Выписав три основополагающих взаимодействия, сделаем паузу и обсудим, какие другие взаимодействия можно найти в природе. Сначала может показаться, что список будет бесконечен; даже для скалярной теории можно было бы записать взаимодействия вида  $\phi^n$  при любом  $n$ . Однако одна простая и убедительная аксиома устраняет почти все из возможных взаимодействий, кроме нескольких. Эта аксиома заключается в том, что теория должна быть *перенормируемой*, и возникает следующим образом. Как упоминалось в главе 1, слагаемые более высокого порядка в теории возмущений включают интегралы по 4-импульсам промежуточных («виртуальных») частиц. Эти интегралы часто формально расходятся, поэтому в общем случае необходимо применять некоторую процедуру обрезания. Простейший метод заключается в обрезании интегралов при некотором большом, но конечном импульсе  $\Lambda$ . В конце вычисления переходят к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ожидая, что физические величины окажутся независимыми от  $\Lambda$ . Если это действительно имеет место, то теория называется *перенормируемой*. Предположим, однако, что теория включает взаимодействия с константами связи, имеющими размерность массы в некоторой *отрицательной* степени. Тогда, для получения безразмерной амплитуды рассеяния, эта константа связи должна быть умножена на некоторую величину положительной массовой размерности. Эта обезразмеривающая величина оказывается ни чем иным, как параметром обрезания  $\Lambda$ . Такое слагаемое расходится при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , так что теория оказывается *неперенормируемой*.

\* Легко найти превосходное изложение обеих процедур квантования. Так, для квантования в кулоновской калибровке см. Bjorken, Drell (1965), глава 14; для квантования в лоренцевой калибровке см. Mandl и Shaw (1984), глава 5.

Мы обсудим эти вопросы подробно в главе 10. Пока что просто обратим внимание на то, что любая теория, содержащая константу связи с отрицательной массовой размерностью, перенормируема. Размерный анализ позволяет легко отвергнуть почти всех кандидатов на взаимодействие. Так как действие  $S = \int \mathcal{L} d^4x$  безразмерно, то лагранжиан  $\mathcal{L}$  должен иметь размерность (масса)<sup>4</sup> (или просто размерность 4). Из вида кинетических слагаемых различных свободных лагранжианов следует, что скалярное и векторное поля  $\phi$  и  $A^\mu$  имеют размерность 1, в то время как спинорное поле  $\psi$  имеет размерность 3/2. Теперь можно свести в таблицу все допустимые перенормируемые взаимодействия. Для теорий, включающих только скаляры, допустимые слагаемые, описывающие взаимодействия, имеют вид

$$\mu\phi^3 \quad \text{и} \quad \lambda\phi^4.$$

Константа связи  $\mu$  имеет размерность 1, в то время как  $\lambda$  безразмерна. Члены вида  $\phi^n$  для  $n > 4$  не подходят, так как их константы связи имели бы размерность  $4 - n$ . Конечно, более интересные теории могут быть получены включением нескольких вещественных или комплексных скалярных полей (см. задачу 4.3).

Теперь добавим спинорные поля. Спинорные самодействия не допускаются, так как  $\psi^3$  (не говоря уже о нарушении лоренцевской инвариантности) имеет размерность 9/2. Таким образом, единственное новое допустимое взаимодействие имеет вид взаимодействия Юкавы

$$g\bar{\psi}\psi\phi.$$

Правда, подобные взаимодействия могут быть построены также из вейлевских и майорановских спиноров.

Много новых взаимодействий можно получить, добавляя векторные поля. Наиболее знакомое из них — это векторно-спинорное взаимодействие в КЭД:

$$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

И вновь нетрудно построить аналогичные слагаемые с помощью вейлевских и майорановских спиноров. Менее важной теорией является *скалярная КЭД* с лагранжианом

$$\mathcal{L} = |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2,$$

который содержит слагаемые

$$eA^\mu\phi\partial_\mu\phi^*, \quad e^2|\phi|^2A^2.$$

Это — наш первый пример взаимодействия с производными; квантование такой теории будет намного проще в формализме функционального интегрирования, поэтому мы откладываем ее рассмотрение до главы 9. Другие возможные лоренц-инвариантные слагаемые, включающие векторные поля, имеют вид

$$A^2(\partial_\mu A^\mu) \quad \text{и} \quad A^4.$$

Хотя это далеко не очевидно, выписанные слагаемые приводят к противоречиям, если только их константы связи не выбраны на основе специального типа симметрии, которая должна включать несколько векторных полей. Эта симметрия лежит в основе *неабелевых калибровочных теорий*, которые будут основным предметом изучения в части III. Массовое слагаемое  $\frac{1}{2}m^2A^2$  для векторных полей также приводит к противоречию за исключением отдельного случая, когда оно добавляется к КЭД; в любом случае оно нарушает (абелеву или неабелеву) калибровочную инвариантность.

Сказанное выше исчерпывает список возможных лагранжианов, включающих скалярные, спинорные и векторные частицы. Интересно отметить, что принятые в настоящее время модели сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий включают *все* перечисленные выше типы взаимодействий. Три типа взаимодействий, которые будут изучаться в этой главе, покрывают почти половину всех возможностей. Другие взаимодействия мы подробно рассмотрим далее в этой книге.

Предположение, что реалистичные теории должны быть перенормируемыми, конечно, удобно, так как перенормируемая теория имела бы минимальную предсказательную силу. Однако возникает вопрос, *почему* природа так добра, что использует только перенормируемые взаимодействия. Можно было бы ожидать, что истинная теория природы является квантовой теорией гораздо более общего вида. Однако можно показать, что какой бы сложной не была фундаментальная теория при очень высоких энергиях, низкоэнергетическое приближение к этой теории, наблюдаемое в экспериментах, должно быть перенормируемой квантовой теорией поля. Мы покажем это в разделе 12.1.

На более практическом уровне предыдущий анализ высвечивает большую методологическую разницу в построении нерелятивистской квантовой механики и релятивистской квантовой теории поля. Так как потенциал  $V(\mathbf{r})$ , появляющийся в уравнении Шредингера, абсолютно произволен, нерелятивистская квантовая механика не накладывает ограничений на вид взаимодействий в реальном мире. Но мы только что видели, что квантовая теория поля налагает очень жесткие ограничения на природу (или наоборот). Образно говоря, из нашего обсуждения вытекает, что единственная оставшаяся задача в физике частиц состоит в перечислении существующих элементарных частиц, измерении их масс и констант связи. Может быть, эта точка зрения несколько радикальна, но тот факт, что она существует, по-видимому, означает, что физика частиц находится на верном пути к фундаментальной теории.

Имея данный набор частиц и взаимодействий, нужно еще получить экспериментальные следствия. Как мы должны анализировать квантовую механику взаимодействующей теории поля? Было бы хорошо, если бы мы могли явно решить по крайней мере несколько примеров (то есть точно найти собственные значения и собственные векторы, как мы это делали в свободных теориях), чтобы получить представление о свойствах взаимодействующих теорий. К сожалению, это проще сказать, чем сделать. Точно решаемые (интегрируемые) взаимодействующие теории поля в пространстве-времени с размерностью, больше двух, не известны. Даже интегрируемые модели, содержащие специальные симметрии, чрезвычайно сложны\*. Рассмотрение этих теорий было бы интересно, но едва ли стоит усилий на этом уровне изучения. Вместо этого мы вернемся к более простому и применимому в большинстве случаев подходу. Будем рассматривать гамильтониан взаимодействия  $H_{\text{int}}$  как возмущение и вычислим производимые им эффекты с помощью теории возмущений, предполагая, что константа связи достаточно мала для того, чтобы получалось разумное приближение к точному ответу. На самом деле ряд теории возмущений, который мы получим, окажется очень простым по своей структуре. Эффекты взаимодействий в произвольно высоком порядке удастся, по крайней мере, сделать наглядными с помощью *диаграмм Фейнмана*.

Такое упрощение ряда теории возмущений для релятивистских теорий поля было огромным достижением Томонаги, Швингера и Фейнмана. Чтобы достичь этого упрощения, каждый независимо нашел способ, как переформулировать квантовую механику, устранив выделенную роль времени, и затем применил новую точку зрения, чтобы представить каждый член ряда теории возмущений как пространственно-временной процесс. В главе 9 мы разовьем квантовую теорию поля с пространственно-времен-

\*Краткий обзор интегрируемых квантовых теорий поля дан в Эпilogue.



ной точки зрения, используя метод *функционального интегрирования* Фейнмана. В данной главе мы следуем путем, более пригодным для новичка и впервые разработанным Дайсоном, чтобы получить пространственно-временную картину теории возмущений с помощью обычной техники квантовой механики<sup>†</sup>.

## 4.2. Разложение корреляционных функций по теории возмущений

Начнем изучение теории возмущений для взаимодействующих полей с построения формализма, который позволит сделать наглядными ряды теории возмущений как пространственно-временные процессы. Хотя нам не потребуется переформулировать всю квантовую механику, мы вновь построим зависящую от времени теорию возмущений в форме, удобной для наших целей. Ясно, что в конечном счете мы хотим вычислить вероятности распадов и сечения рассеяния. Поставим пока менее амбициозную задачу вычислить простейшую (но более абстрактную) величину — *двухточечную корреляционную функцию* или *двухточечную функцию Грина*

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle, \quad (4.10)$$

в теории  $\phi^4$ . Символом  $|\Omega\rangle$  мы обозначим основное состояние взаимодействующей теории, которое в общем случае отличается от основного состояния свободной теории  $|0\rangle$ . Символ хронологического упорядочения  $T$  введен для дальнейшего удобства. Корреляционную функцию можно физически интерпретировать как амплитуду распространения частицы или возбуждения между точками  $y$  и  $x$ . В свободной теории — это фейнмановский пропагатор:

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle_{\text{free}} = D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i p \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i \varepsilon}. \quad (4.11)$$

Мы хотели бы знать, как это выражение изменяется во взаимодействующей теории. Как только мы проанализируем двухточечную корреляционную функцию, будет легко обобщить результаты на корреляционные функции более высокого порядка, в которых содержится более двух полевых операторов. В разделах 4.3 и 4.4 мы продолжим анализ корреляционных функций и разработаем в конце концов формализм фейнмановских диаграмм для вычисления этих функций по теории возмущений. Затем в разделах 4.5 и 4.6 мы научимся с помощью этой же техники вычислять сечения рассеяния и вероятности распадов.

Чтобы приступить к задаче, запишем гамильтониан теории  $\phi^4$  в виде:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{Клейн-Гордон}} + \int d^3 x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

Мы хотим получить выражение для двухточечной корреляционной функции (4.10) в виде ряда по степеням константы  $\lambda$ . Гамильтониан взаимодействия  $H_{\text{int}}$  встречается в (4.10) в двух местах: во-первых, в определении гейзенберговского поля

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}, \quad (4.13)$$

и, во-вторых, в определении основного состояния  $|\Omega\rangle$ . Мы должны выразить как  $\phi(x)$ , так и  $|\Omega\rangle$  через величины, с которыми мы знаем, как обращаться, а именно, через операторы свободного поля и вакуум в свободной теории  $|0\rangle$ .

<sup>†</sup> Историческую справку о вкладах Томонаги, Швингера, Фейнмана и Дайсона см. в Schweber (1994).

Проще начать с  $\phi(x)$ . В любой фиксированный момент времени  $t_0$  мы можем, как и прежде, разложить  $\phi$  по лестничным операторам:

$$\phi(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right).$$

Тогда, чтобы получить  $\phi(t, \mathbf{x})$  при  $t \neq t_0$ , мы, как обычно, переходим в гейзенберговское представление:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}.$$

При  $\lambda = 0$  гамильтониан  $H$  совпадает с  $H_0$ , и последняя формула сводится к

$$\phi(t, \mathbf{x}) \Big|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Если  $\lambda$  мало, то это выражение будет все еще определять самую важную часть временной зависимости поля  $\phi(x)$ , поэтому удобно присвоить этой величине название: поле в *представлении взаимодействия*  $\phi_I(t, \mathbf{x})$ . Так как мы можем диагонализировать  $H_0$ , легко выписать  $\phi_I$  явно:

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left( a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \Big|_{x^0=t-t_0}. \quad (4.15)$$

Это знакомое выражение для свободного поля из гл. 2.

Задача теперь состоит в том, чтобы выразить полное гейзенберговское поле  $\phi$  в терминах  $\phi_I$ . Формально

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(t, \mathbf{x}) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \equiv \\ &\equiv U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \mathbf{x}) U(t, t_0), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где мы определили унитарный оператор

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}, \quad (4.17)$$

известный как пропагатор в представлении взаимодействия или оператор временной эволюции. Мы хотели бы выразить  $U(t, t_0)$  полностью через поле  $\phi_I$ , для которого существует явное выражение через лестничные операторы. Чтобы сделать это, заметим, что  $U(t, t_0)$  — единственное решение с начальным условием  $U(t_0, t_0) = 1$  обыкновенного дифференциального уравнения (уравнения Шредингера):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{\text{int}}) e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= e^{iH_0(t-t_0)} (H_{\text{int}}) e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = \\ &= H_I(t) U(t, t_0), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} (H_{\text{int}}) e^{-iH_0(t-t_0)} = \int d^3 x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4 \quad (4.19)$$

является гамильтонианом взаимодействия, записанным в представлении взаимодействия. Решение этого дифференциального уравнения для  $U(t, t_0)$  должно иметь вид, похожий на выражение  $U \sim \exp(-iH_I t)$ ; это было бы искомым формулой для  $U$  через  $\phi_I$ .

Более аккуратно покажем, что настоящее решение является следующим степенным рядом по  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\
 & + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Чтобы проверить это, вычислим производную по времени. При этом каждый член ряда дает предыдущий член, умноженный на  $-iH_I(t)$ . Очевидно, что начальное условие  $U(t, t_0) = 1$  для  $t = t_0$  удовлетворено.

Обратим внимание, что различные множители  $H_I$  в (4.20) расположены в *хронологическом порядке*, т.е. отвечающий более позднему времени расположен всегда левее. Это позволяет существенно упростить выражение, используя символ хронологического упорядочения  $T$ . Например, слагаемое порядка  $H_I^2$  записывается в виде

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\}.
 \tag{4.21}$$

Двойной интеграл справа учитывает все дважды, так как в  $t_1 t_2$ -плоскости подынтегральное выражение  $T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\}$  симметрично относительно прямой  $t_1 = t_2$  (см. рис. 4.1).

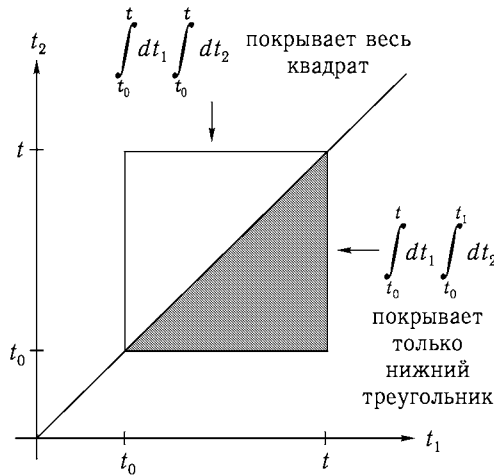


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация формулы (4.21).

Аналогичное тождество имеет место для высших слагаемых:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\}.$$

Хотя этот случай несколько труднее изобразить наглядно, но нетрудно убедиться, что формула верна. С помощью последнего тождества можно записать  $U(t, t_0)$  в чрезвычайно компактной форме:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \dots \equiv \\ &\equiv T\left\{\exp\left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')\right]\right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где хронологически упорядоченная экспонента определяется как ряд Тейлора, в котором каждый член хронологически упорядочен. В реальных вычислениях мы оставляем лишь несколько первых членов этого ряда; хронологически упорядоченная экспонента является лишь компактным способом записи и запоминания нужного выражения.

Теперь мы контролируем поле  $\phi(t, \mathbf{x})$  в следующем смысле: мы записали его, как и хотели, полностью через поля  $\phi_I$ . Прежде чем перейти к рассмотрению  $|\Omega\rangle$ , удобно обобщить определение оператора  $U$ , допуская, что его второй аргумент может принимать значения, отличающиеся от нашей «точки отсчета»  $t_0$ . Правильное определение вполне естественно:

$$U(t, t') \equiv T\left\{\exp\left[-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'')\right]\right\} \quad (t \geq t'). \quad (4.23)$$

Проверим несколько свойств, непосредственно следующих из этого определения. Во-первых,  $U(t, t')$  удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению (4.18):

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = H_I(t) U(t, t'), \quad (4.24)$$

но теперь с начальным условием  $U = 1$  для  $t = t'$ . Из этого уравнения следует:

$$U(t, t') = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)}, \quad (4.25)$$

что доказывает унитарность оператора  $U$ . Наконец,  $U(t, t')$  удовлетворяет следующим тождествам (для  $t_1 \geq t_2 \geq t_3$ ):

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3); \quad U(t_1, t_3)[U(t_2, t_3)]^\dagger = U(t_1, t_2). \quad (4.26)$$

Теперь мы можем перейти к обсуждению состояния  $|\Omega\rangle$ . Так как  $|\Omega\rangle$  — основное состояние гамильтониана  $H$ , можно выделить его при помощи следующей процедуры. Допустим, что мы начинаем с  $|0\rangle$ , являющегося основным состоянием  $H_0$ , и рассматриваем его эволюцию во времени, определяющуюся полным гамильтонианом  $H$ :

$$e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle,$$

где  $E_n$  — собственные значения  $H$ . Мы должны предположить, что  $|\Omega\rangle$  перекрывается с  $|0\rangle$ , то есть  $\langle\Omega|0\rangle \neq 0$  (если это не так, то  $H_I$  ни в каком смысле не может считаться малым возмущением). Тогда выписанный выше ряд содержит  $|\Omega\rangle$ , и мы можем записать:

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle,$$

где  $E_0 \equiv \langle \Omega | H | \Omega \rangle$ . (Нулевая энергия определяется как  $H_0 | 0 \rangle = 0$ .) Так как  $E_n > E_0$  для всех  $n \neq 0$ , можно избавиться от всех слагаемых в разложении с  $n \neq 0$ , устремляя  $T$  к  $\infty$  в направлении с малой мнимой добавкой в комплексной плоскости:  $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ . Тогда экспоненциальный множитель  $e^{-iE_n T}$  вымирает медленнее всего для  $n = 0$ :

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} | 0 \rangle. \quad (4.27)$$

Так как теперь  $T$  очень велико, можно сдвинуть его на малую константу:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} | 0 \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iH(t_0 - (-T))} e^{-iH_0(-T-t_0)} | 0 \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} U(t_0, -T) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Во второй строке мы использовали равенство  $H_0 | 0 \rangle = 0$ . Если отбросить с-числовой множитель, видим, что состояние  $|\Omega\rangle$  может быть получено простой эволюцией состояния  $| 0 \rangle$  во времени от  $-T$  до  $t_0$  при помощи оператора  $U$ . Точно так же можно представить состояние  $\langle \Omega |$  как

$$\langle \Omega | = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \langle 0 | U(T, t_0) (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle)^{-1}. \quad (4.29)$$

Соберем вместе отдельные слагаемые двухточечной корреляционной функции. На время предположим, что  $x^0 > y^0 > t_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle)^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) \times \\ &\quad \times [U(x^0, t_0)]^\dagger \phi_I(x) U(x^0, t_0) [U(y^0, t_0)]^\dagger \phi_I(y) U(y^0, t_0) \times \\ &\quad \times U(t_0, -T) | 0 \rangle (e^{-iE_0(t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} (|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)})^{-1} \times \\ &\quad \times \langle 0 | U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Это выражение выглядело бы простым, если бы не громоздкий множитель впереди. Чтобы избавиться от него, разделим это выражение на 1, представленную в виде

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = (|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0(2T)})^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle.$$

Тогда наша формула все еще для  $x^0 > y^0$  принимает вид:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle}.$$

Теперь обратим внимание на то, что все поля в обеих частях этого выражения упорядочены по времени. Это сохраняет силу и для случая  $y^0 > x^0$ . Таким образом, получаем окончательное выражение, справедливое теперь для любых  $x^0$  и  $y^0$ :

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)1-i} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] \} | 0 \rangle}. \quad (4.31)$$

Преимущество рассмотрения хронологически упорядоченного произведения состоит в следующем. Это позволяет вставлять что угодно под знак общего оператора  $T$ -упорядочения. Подобная формула имеет место и для корреляционных функций более высокой степени от произвольного числа полей: для каждого дополнительного множителя  $\phi$  слева поместим дополнительный множитель  $\phi_I$  справа. Пока что полученное выражение остается точным. Но теперь оно идеально подходит для выполнения вычислений по теории возмущений. Нужно только сохранить столько членов, сколько требуется, в ряде Тейлора для экспоненты.

### 4.3. Теорема Вика

Проблема вычисления корреляционных функций сведена к вычислению выраженной вида

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle,$$

т. е. к вычислению вакуумных средних от хронологически упорядоченных произведений конечного (но произвольного) числа свободных полевых операторов. При  $n = 2$  это выражение является просто фейнмановским пропагатором. Для больших  $n$  эту величину можно вычислить непосредственно, используя разложение  $\phi_I$  в терминах лестничных операторов. Однако в этом и следующем разделах мы покажем, как можно невероятно упростить такие вычисления.

Рассмотрим снова случай двух полей  $\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} | 0 \rangle$ . Мы знаем, как вычислять эту величину, но теперь хотим переписать это выражение в форме, удобной для вычислений, а также для обобщения на случай более двух полей. Чтобы сделать это, разложим поле  $\phi_I(x)$  на положительно- и отрицательночастотные части:

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x), \quad (4.32)$$

где

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p e^{-ip \cdot x}; \quad \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x}.$$

Это разложение может быть выполнено для любого свободного поля. Оно полезно, так как

$$\phi_I^+(x) | 0 \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle 0 | \phi_I^-(x) = 0.$$

Например, рассмотрим случай  $x^0 > y^0$ . Хронологически упорядоченное произведение двух полей записывается в виде

$$\begin{aligned} T \phi_I(x) \phi_I(y) &\stackrel{x^0 > y^0}{=} \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^+(x) \phi_I^-(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) = \\ &= \phi_I^+(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(y) \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) \phi_I^+(y) + \phi_I^-(x) \phi_I^-(y) + [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

В каждом слагаемом за исключением коммутатора все операторы  $a_p$  находятся справа от всех операторов  $a_p^\dagger$ . Говорят, что такое слагаемое (как, например,  $(a_p^\dagger a_q^\dagger a_k a_l)$ ) является *нормально упорядоченным*, и оно имеет нулевое вакуумное среднее. Определим также символ нормального произведения  $N()$ , который располагает в нормальном порядке все операторы, на которые действует. Например,

$$N(a_p a_k^\dagger a_q) \equiv a_k^\dagger a_p a_q. \quad (4.34)$$

Порядок записи операторов  $a_{\mathbf{p}}$  и  $a_{\mathbf{q}}$  в правой части не имеет значения, поскольку они коммутируют\*. Если мы вместо предыдущего рассмотрим случай  $y^0 > x^0$ , мы получим те же самые четыре нормально упорядоченных слагаемых, как и в (4.33), но на этот раз последний коммутатор будет равен  $[\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)]$ . Поэтому определим еще одну величину, *свертку* двух полей, следующим образом:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{для } x^0 > y^0; \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{для } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Эта величина равна в точности фейнмановскому пропагатору

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x - y). \quad (4.36)$$

(Начиная с этого момента мы будем часто для удобства опускать нижний индекс  $I$ ; свертки будут всегда подразумевать, что поля рассматриваются в представлении взаимодействия).

Теперь чрезвычайно просто записать, по крайней мере для двух полей, связь между хронологическим и нормальным произведениями:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(x)\phi(y) + \overline{\phi(x)\phi(y)}\}. \quad (4.37)$$

Когда введены все эти новые обозначения, легко получается обобщение на случай произвольного числа полей:

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m)\} = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_m) + \text{все возможные свертки}\}. \quad (4.38)$$

Это тождество известно как *теорема Вика*, которую мы сейчас докажем. При  $m = 2$  эта теорема эквивалентна равенству (4.37). Фраза *все возможные свертки* означает, что для каждой возможной свертки  $m$  полей в пары соответствует одно слагаемое. Таким образом, при  $m = 4$  (записывая для краткости  $\phi(x_a)$  как  $\phi_a$ ) имеем:

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{ & \overline{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \\ & + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Когда символ свертки связывает два не находящиеся рядом оператора, мы по-прежнему определим эту свертку как множитель  $D_F$ . Например,

$$N\{\overline{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4\} \text{ означает } D_F(x_1 - x_3) \cdot N\{\phi_2\phi_4\}.$$

В вакуумном среднем (4.39) любое слагаемое, в котором остаются несвернутые операторы, дает нуль (так как  $\langle 0|N(\text{любой оператор})|0\rangle = 0$ ). Выживают только три полностью свернутых слагаемых в последней строке, и все они — с-числовые, так что

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = & D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + \\ & + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (4.40)$$

\*В литературе также часто используется обозначение  $:\phi_1\phi_2:$  вместо  $N(\phi_1\phi_2)$ .

Теперь докажем теорему Вика. Доказательство проводится индукцией по числу полей  $m$ . Случай  $m = 2$  уже рассмотрен. Предположим, что теорема верна для  $m - 1$  полей, и докажем ее справедливость для  $m$  полей. Без потери общности можно ограничиться случаем  $x_1^0 \geq x_2^0 \geq \dots x_m^0$ ; если это обстоит не так, можно просто переобозначить точки, не изменяя обеих частей равенства (4.38). Тогда, применяя теорему Вика к  $\phi_2 \dots \phi_m$ , получаем:

$$\begin{aligned} T\{\phi_1 \dots \phi_m\} &= \phi_1 \dots \phi_m = \\ &= \phi_1 N\left\{\phi_2 \dots \phi_m + \left(\begin{array}{c} \text{все свертки,} \\ \text{не включающие } \phi_1 \end{array}\right)\right\} = \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) N\left\{\phi_2 \dots \phi_m + \left(\begin{array}{c} \text{все свертки,} \\ \text{не включающие } \phi_1 \end{array}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Мы хотим внести  $\phi_1^+$  и  $\phi_1^-$  под знак  $N\{\}$ . Для слагаемого  $\phi_1^-$  это сделать нетрудно: следует просто поместить его под знак нормального произведения, так как (находясь слева) он уже нормально упорядочен. Слагаемое с  $\phi_1^+$  следует привести к нормальной форме, переставляя  $\phi_1^+$  правее всех других операторов  $\phi$ . Рассмотрим, например, слагаемое без свертки:

$$\begin{aligned} \phi_1^+ N(\phi_2 \dots \phi_m) &= N(\phi_2 \dots \phi_m) \phi_1^+ + [\phi_1^+, N(\phi_2 \dots \phi_m)] = \\ &= N(\phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_m) + N([\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \dots \phi_m + \phi_2 [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_4 \dots \phi_m + \dots) = \\ &= N(\phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_m + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_m} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots} + \dots). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последней строке комбинирует с частью  $\phi_1^-$  — слагаемого из (4.41), чтобы образовать  $N\{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_m\}$ , так что получаем первое слагаемое в правой части теоремы Вика, а также все слагаемые, включающие одиночную свертку поля  $\phi_1$  с другим полем. Точно так же слагаемое в (4.41), включающее одну свертку, дает все возможные слагаемые, включающие как эту свертку, так и свертку поля  $\phi_1$  с одним из других полей. Прodelывая то же самое со всеми слагаемыми в (4.41), мы в конечном счете получаем все возможные свертки всех полей, включая  $\phi_1$ . Таким образом, шаг индукции проверен и теорема Вика доказана.

### 4.4. Диаграммы Фейнмана

Теорема Вика позволяет представить любое выражение вида

$$\langle 0 | T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\dots\phi_I(x_n)\} | 0 \rangle$$

как сумму произведений фейнмановских пропагаторов. Теперь мы готовы развить диаграммную интерпретацию таких выражений. Рассмотрим сначала случай четырех полей, заданных в различных точках пространства-времени, который был рассмотрен в (4.40). Представим каждую из точек  $x_1, \dots, x_4$  в виде точки, а каждый множитель  $D_F(x - y)$  — в виде линии, соединяющей точки  $x$  и  $y$ . Тогда (4.40) можно представить как сумму трех диаграмм (называемых *диаграммами Фейнмана*):

$$\langle 0 | T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} | 0 \rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline 3 & 4 \end{array} & + & \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 3 \end{array} & + & \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 4 \end{array} & + & \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ & 3 & 4 \end{array} \end{array} \tag{4.42}$$



Хотя эта величина не является непосредственно измеримой, диаграммы допускают физическую интерпретацию. Частицы рождаются в двух точках пространства-времени, затем распространяются в другие точки и там уничтожаются. В данном случае это может произойти тремя способами, соответствующими трем способам объединения точек в пары, как показано на трех диаграммах. Полная амплитуда процесса есть сумма трех диаграмм. Ситуация становится интереснее, когда выражение содержит более одного поля в одной и той же точке пространства-времени. Поэтому вернемся к вычислению двухточечной функции  $\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle$ , используя формулу (4.31). Мы игнорируем знаменатель до конца этого раздела. Числитель с разложенной в степенной ряд экспонентой равен

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) + \phi(x) \phi(y) \left[ -i \int dt H_I(t) \right] + \dots \} | 0 \rangle. \quad (4.43)$$

Первое слагаемое дает результат свободной теории  $\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = D_F(x - y)$ . Второе слагаемое в теории  $\phi^4$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int dt \int d^3 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \} | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) \} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Теперь применим теорему Вика. Мы получим по одному слагаемому для каждого способа попарной свертки шести  $\phi$ -операторов друг с другом. Имеется 15 способов сделать это, но (к счастью) только два из них действительно различны. Если мы свернули  $\phi(x)$  с  $\phi(y)$ , то имеется три способа свернуть четыре  $\phi(z)$  друг с другом, и все они дают одинаковые выражения. Другая возможность состоит в том, чтобы свернуть  $\phi(x)$  с одним из  $\phi(z)$  (четыре выбора),  $\phi(y)$  с одним из оставшихся  $\phi(z)$  (три выбора) и оставшиеся два  $\phi(z)$  друг с другом (один выбор). Имеется двенадцать способов сделать это, и все приводят к одинаковым выражениям. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) (-i) \int dt \int d^3 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \} | 0 \rangle = \\ = 3 \cdot \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) D_F(x - y) \int d^4 z D_F(z - z) D_F(z - z) + \\ + 12 \cdot \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4 z D_F(x - z) D_F(y - z) D_F(z - z). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Можно лучше понять это выражение, если представить каждое слагаемое как диаграмму Фейнмана. Снова изобразим каждую свертку  $D_F$  как линию и каждую точку пространства-времени в виде точки. Но на этот раз следует делать различие между «внешними» точками  $x$  и  $y$  и «внутренней» точкой  $z$ ; каждая внутренняя точка связана с множителем  $(-i\lambda) \int d^4 z$ . Чуть ниже мы займемся постоянными множителями. При помощи этих правил видно, что приведенное выше выражение (4.44) равно сумме вкладов двух диаграмм:

$$\left( \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad y \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ z \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ x \quad z \quad y \end{array} \right).$$

Мы называем линии в этих диаграммах *пропагаторами*, так как они представляют амплитуды распространения  $D_F$ . Внутренние точки, где встречаются четыре линии,

называются *вершинами*. Так как  $D_F(x - y)$  — амплитуда распространения между точками  $x$  и  $y$  для свободной частицы Клейна–Гордона, то диаграммы фактически интерпретируют аналитическую формулу как процесс рождения, распространения и уничтожения частиц, происходящий в пространстве-времени.

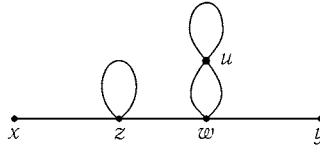
Теперь рассмотрим более сложную свертку, возникающую из  $\lambda^3$ -члена в разложении корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x)\phi(y) \frac{1}{3!} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^3 \int d^4z \phi\phi\phi\phi \int d^4w \phi\phi\phi\phi \int d^4u \phi\phi\phi\phi | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{3!} \left(-i \frac{\lambda}{4!}\right)^3 \int d^4z d^4w d^4u D_F(x - z)D_F(z - z)D_F(z - w) \times \\ \times D_F(w - y)D_F^2(w - u)D_F(u - u). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Число «различных» сверток, дающих одно и то же выражение, достаточно велико:

$$\underbrace{3!}_{\text{перестановка вершин}} \times \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{расположение свертки в } z \text{ вершине}} \times \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{расположение свертки в } w \text{ вершине}} \times \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{расположение свертки в } u \text{ вершине}} \times \underbrace{1/2}_{\text{перестановка } w-u \text{ свертки}}$$

Произведение этих комбинаторных множителей равно 10 368, примерно 1/13 от общего количества 135 135 возможных полных сверток 14 операторов. Структура этой специфической свертки может быть представлена следующей диаграммой-«кактусом»:



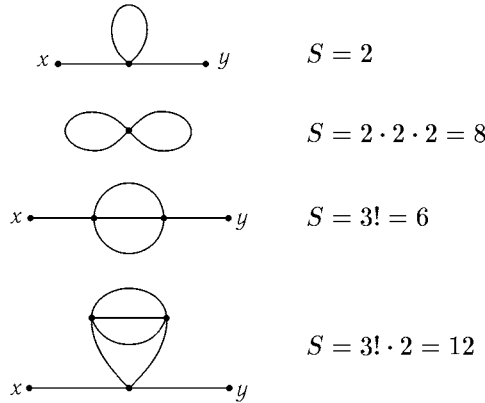
По очевидным причинам принято считать, что одна эта диаграмма представляет сумму всех 10 368 одинаковых слагаемых.

На практике всегда сначала рисуют диаграмму, используя ее как мнемонический способ записи аналитического выражения. Но тогда возникает вопрос, чему равен общий коэффициент? Мы могли бы, конечно, вычислить его, как и раньше, т. е. сопоставить множитель  $\int d^4z (-i\lambda/4)!$  каждой вершине, учесть множитель  $1/n!$  из разложения в ряд Тейлора и затем вычислить комбинаторный множитель, выписывая произведения полей как в (4.45). Но множитель  $1/n!$  из ряда Тейлора почти всегда сокращает множитель  $n!$  от перестановок вершин, так что мы можем забыть про оба этих множителя. Кроме того, исходная вершина имеет четыре линии, приходящие из четырех различных мест, так что различные размещения этих сверток в  $\phi\phi\phi\phi$  дают множитель  $4!$  (как в  $w$ -вершине выше), который сокращает знаменатель в  $(-i\lambda/4!)$ . Поэтому принято сопоставлять каждой вершине выражение  $\int d^4z (-i\lambda)$ . (Именно в этом причина введения множителя  $4!$  в лагранжиане  $\phi^4$ -взаимодействия.)

Для вышеприведенной диаграммы эта схема дает константу, которая слишком велика из-за множителя  $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ , называемого *множителем симметрии* диаграммы. Два множителя 2 происходят от линий, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине: диаграмма симметрична относительно перестановки двух концов такой линии. Оставшийся множитель 2 происходит от соединения  $w$  с  $u$  двумя пропагаторами: диаграмма симметрична при взаимной перестановке этих двух линий. Третий возможный тип симметрии — эквивалентность двух вершин. Чтобы получить

правильный полный множитель, мы делим на множитель симметрии диаграммы, который в общем случае равен числу способов перестановок компонент, не изменяющих диаграмму.

Большинству читателей никогда не придется вычислять диаграммы с множителем симметрии большим 2, так что нет нужды особенно беспокоиться относительно этих технических тонкостей. Но имеется несколько примеров, поясняющих смысл приведенных правил:

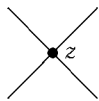


Если Вы сомневаетесь, то всегда можете определить множитель симметрии, подсчитав эквивалентные свертки, как мы сделали выше.

Теперь мы готовы собрать вместе наши правила для вычисления числителя выражения (4.31) для  $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ :

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[ -i \int dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \left( \begin{array}{l} \text{сумма всех возможных диаграмм} \\ \text{с двумя внешними точками} \end{array} \right),$$

где каждая диаграмма построена из пропагаторов, вершин и внешних точек. Правила для сопоставления аналитических выражений соответствующим частям диаграмм называются *правилами Фейнмана*. В теории  $\phi^4$  эти правила таковы:

1. для каждого пропагатора  $x \text{---} y = D_F(x - y)$ ;
2. для каждой вершины   $= (-i \lambda) \int d^4 z$ ;
3. для каждой внешней точки  $x \bullet \text{---} = 1$ ;
4. разделить на порядок симметрии диаграммы.

Один из способов интерпретации фейнмановских правил состоит в том, чтобы считать множитель  $(-i \lambda)$  при вершине амплитудой испускания и/или поглощения частиц в вершине. Интеграл  $\int d^4 z$  производит суммирование по всем точками, где может происходить этот процесс. Это в точности соответствует принципу *суперпозиции* в квантовой механике. Если процесс может происходить разными путями, следует *складывать* амплитуды для каждого из них. Чтобы вычислить каждую отдельную амплитуду согласно правилам Фейнмана, следует *перемножить* амплитуды (пропагаторы и множители при вершинах) для каждой независимой части процесса.

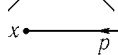
Так как эти правила написаны с использованием пространственно-временных точек  $x$ ,  $y$  и т. д., они иногда называются *правилами Фейнмана в координатном представлении*. Для большинства вычислений проще сформулировать правила Фейнмана в импульсном пространстве, введя разложение Фурье для каждого пропагатора:

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}. \quad (4.46)$$

Представим это на диаграмме, сопоставляя 4 импульс  $p$  каждому пропагатору и указывая направление стрелкой. (Так как  $D_F(x - y) = D_F(y - x)$ , то направление импульса  $p$  произвольно.) Тогда, если четыре линии встречаются в вершине, то  $z$ -зависимые множители диаграммы имеют вид:

$$\begin{array}{c} \nearrow p_1 \\ \searrow p_2 \\ \nwarrow p_3 \\ \nearrow p_4 \end{array} \longleftrightarrow \int d^4 z e^{-ip_1 z} e^{-ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{ip_4 z} = \quad (4.47) \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4).$$

Иными словами, импульс сохраняется в каждой вершине. Дельта-функции в вершинах теперь могут быть использованы для взятия некоторых из интегралов по импульсам в пропагаторах. Мы получаем следующие *правила Фейнмана в импульсном представлении*:

1. для каждого пропагатора  $\overrightarrow{p} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ ;
2. для каждой вершины   $= -i\lambda$ ;
3. для каждой внешней точки   $= e^{-ip \cdot x}$ ;
4. потребовать выполнения закона сохранения импульса в каждой вершине;
5. проинтегрировать по каждому не зафиксированному закону сохранения импульсу:  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ ;
6. разделить на множитель симметрии диаграммы.

Мы снова можем интерпретировать каждый множитель как амплитуду для соответствующей части процесса, а интегрирование — как следствие принципа суперпозиции. Экспоненциальный множитель для внешней точки является в точности амплитудой вероятности того, что частица в этой точке имеет соответствующий импульс, или, в зависимости от направления стрелки, вероятности того, что частица с определенным импульсом обнаруживается в этой точке.

На этом мы завершаем наше обсуждение вычисления корреляционных функций. Однако остается еще несколько невыясненных вопросов. Во-первых, что произошло с большим временем  $T$ , которое было взято в виде  $\infty(1 - i\epsilon)$ ? Мы в данном разделе полностью умалчивали об этом, начиная с формулы (4.43). Удобный случай вернуться к этому вопросу — рассмотреть выражение (4.47), где вместо интегрирования по  $d^4 z$  следует подразумевать

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)} \int_{-T}^T dz^0 \int d^3 z e^{-i(p_1 + p_2 + p_3 - p_4) \cdot z}.$$

Экспонента расходится, когда  $z^0 \rightarrow \infty$  или  $z^0 \rightarrow -\infty$ , если только ее аргумент не является чисто мнимым. Чтобы сделать аргумент чисто мнимым, можно взять каждую компоненту  $p^0$  с малой мнимой частью:  $p^0 \propto (1 + i\varepsilon)$ . Но это — в точности то, что делается при определении фейнмановских граничных условий для вычисления  $D_F$ . Мы интегрируем по контуру, который слегка сдвинут от вещественной оси так, что  $p^0 \propto (1 + i\varepsilon)$ :



Когда мы переходим к пределу  $T \rightarrow \infty$  в (4.46), явная зависимость от  $T$  на первый взгляд исчезает. Однако рассмотрим диаграмму

(4.48)

Дельта-функция в левой вершине имеет вид  $(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2)$ , так что сохранение импульса в правой вершине автоматически выполняется, и мы получаем множитель  $(2\pi)^4 \delta(0)$ . Происхождение этого неудобного множителя легко понять, возвращаясь к пространственно-временной картине. Он является просто интегралом от константы по  $d^4w$ :

$$\int d^4w (\text{const}) \propto (2T) \cdot (\text{объем пространства}). \tag{4.49}$$

Это означает, что пространственно-временной процесс (4.48) может произойти в любом месте пространства и в любой момент времени между  $-T$  и  $T$ . Каждая *несвязная* часть диаграммы, т. е. каждая часть, которая не связана с внешней точкой, будет содержать один такой множитель  $(2\pi)^4 \delta(0) = 2T \cdot V$ .

Вклады в корреляционную функцию от таких диаграмм можно лучше понять при помощи очень красивого тождества — *экспоненцирования несвязных диаграмм*. Оно работает следующим образом. Типичная диаграмма имеет вид

(4.50)

и содержит часть, связанную с точками  $x$  и  $y$ , и несколько несвязных частей. (Так как каждая вершина имеет четное число входящих в нее линий, то точки  $x$  и  $y$  должны быть связаны друг с другом.) Обозначим различные возможные несвязные части при помощи  $V_i$ :

$$V_i \in \left\{ \text{loop}, \text{two loops}, \text{two spheres}, \text{loop and sphere}, \dots \right\}. \tag{4.51}$$

Элементы  $V_i$  внутренне связаны, но отделены от внешних точек. Предположим, что диаграмма (типа (4.50)) имеет  $n_i$  частей вида  $V_i$  для каждого  $i$ , кроме этой части,

которая связывает точки  $x$  и  $y$ . (В любой диаграмме только конечное число значений  $n_i$  будет отлично от нуля.) Если мы через  $V_i$  обозначим также вклад части  $V_i$ , тогда вклад такой диаграммы равен

$$(\text{вклад связной части}) \cdot \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i}.$$

Множитель  $1/n_i!$  является множителем симметрии, происходящим от перестановок  $n_i$  копий  $V_i$ . Поэтому сумма всех диаграмм, представляющих числитель нашей формулы для двухточечной корреляционной функции, равна

$$\sum_{\substack{\text{все возможные} \\ \text{связные части}}} \sum_{\text{все } \{n_i\}} \left( \begin{array}{c} \text{вклад} \\ \text{связной части} \end{array} \right) \times \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right),$$

где «все  $\{n_i\}$ » означает «все упорядоченные наборы  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  неотрицательных целых чисел». Сумма связных частей выносится в качестве множителя, приводя к выражению

$$= \left( \sum \text{связные} \right) \times \sum_{\text{все } \{n_i\}} \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right),$$

где  $(\sum \text{связные})$  — сокращенное обозначение для суммы вкладов всех связных частей. Нетрудно видеть, что оставшая часть выражения может также быть разложена на множители (попробуйте действовать в обратном порядке):

$$\begin{aligned} &= \left( \sum \text{связные} \right) \times \left( \sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} V_1^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} V_2^{n_2} \right) \left( \sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} V_3^{n_3} \right) \dots = \\ &= \left( \sum \text{связные} \right) \times \prod_i \left( \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) = \\ &= \left( \sum \text{связные} \right) \times \prod_i \exp(V_i) = \\ &= \left( \sum \text{связные} \right) \times \exp \left( \sum_i V_i \right). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Мы только что показали, что сумма *всех* диаграмм равна сумме всех *связных* диаграмм, умноженной на экспоненту от суммы всех *несвязных* диаграмм. (Мы должны были бы говорить «части» вместо «диаграммы» в правой части равенства, однако далее мы часто будем называть отдельную часть «диаграммой».) Графически тождество имеет вид:

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ x \quad y \quad x \quad y \quad x \quad y \end{array} \right) \exp \left[ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Теперь рассмотрим *знаменатель* формулы (4.31) для двухточечной функции. При помощи аргументов, аналогичных приведенным выше, получаем:

$$\langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle = \exp \left[ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right].$$

В результате происходит сокращение этой экспоненты с экспонентой от несвязных диаграмм в числителе. Это окончательное упрощение формулы, которая теперь принимает вид:

$$\langle \Omega | T [\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle = \text{сумма всех связных диаграмм с двумя внешними точками} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad y \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad y \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad y \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad y \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (4.54)$$

Согласитесь, что мы прошли длинный путь от исходной формулы (4.31).

После избавления от несвязных диаграмм в формуле для корреляционной функции можно на мгновение вернуться назад и попытаться дать им физическую интерпретацию. Посмотрим вновь на формулу (4.30), которую можно переписать как

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle =$$

$$= \langle \Omega | T \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle \cdot \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (| \langle 0 | 0 \rangle |^2 e^{-iE_0(2T)}).$$

Рассматривая в обеих сторонах равенства только  $T$ -зависимые части, получаем

$$\exp \left[ \sum_i V_i \right] \propto \exp \left[ -i E_0(2T) \right]. \quad (4.55)$$

Так как каждая несвязная диаграмма  $V_i$  содержит множитель  $(2\pi)^4 \delta(0) = 2T \cdot (\text{объем})$ , то получаем формулу для плотности энергии вакуума (относительно нулевого значения энергии, определенного равенством  $H_0 | 0 \rangle = 0$ ):

$$\frac{E_0}{\text{объем}} = i \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \right] / \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \right]. \quad (4.56)$$

Следует подчеркнуть, что правая часть равенства не зависит от  $T$  и объема; в частности, мы приходим к успокоительному выводу, что энергия  $E_0$  пропорциональна объему пространства. В гл. 11 мы увидим, что эта формула действительно полезна.

Этим завершается анализ двухточечной корреляционной функции. Обобщение на более высокие корреляционные функции получается непосредственно:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \left( \begin{array}{c} \text{сумма всех связных диаграмм} \\ \text{с } n \text{ внешними точками} \end{array} \right). \quad (4.57)$$

Несвязные диаграммы экспоненцируются, факторизуются и сокращаются, как и выше. Однако теперь возможна путаница в терминологии. Под «несвязными» диаграммами мы понимаем диаграммы, «отделенные от всех внешних точек», т. е. те же самые диаграммы, что и в (4.51). (Они иногда называются «вакуумными пузырями» или «переходами вакуум-вакуум».) В более высоких корреляционных функциях диаграммы могут также быть несвязными, но в другом смысле. Рассмотрим, например, четырехточечную функцию:

$$\langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \\ + \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \\ + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (4.58)$$

Во многих из этих диаграмм внешние точки не связаны *друг с другом*. Такие диаграммы не экспоненцируются и не факторизуются; они дают вклад в амплитуду точно так же, как это делают полностью связанные диаграммы (в которых любая точка может быть достигнута из любой другой путем движения вдоль линий).

Обратим внимание, что в теории  $\phi^4$  все корреляционные функции от нечетного числа полей исчезают, так как невозможно вычертить допустимую диаграмму с нечетным числом внешних точек. Это можно увидеть, обращаясь к теореме Вика. Гамильтониан взаимодействия  $H_I$  содержит четное число полей, так что все слагаемые в разложении по теории возмущений нечетной корреляционной функции будут содержать нечетное число полей. Однако невозможно полностью свернуть нечетное число полей в пары, а только полностью свернутые слагаемые имеют неисчезающее вакуумное среднее.

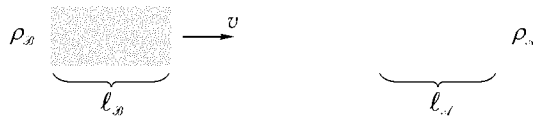
## 4.5. Сечения рассеяния и $S$ -матрица

Теперь в нашем распоряжении чрезвычайно красивая формула (4.57) для вычисления совершенно абстрактной величины —  $n$ -точечной корреляционной функции. Следующая задача — найти в равной степени красивые пути вычисления величин, которые могут быть фактически измерены, — сечений рассеяния и вероятностей распада. В этом разделе после краткого обзора определений этих величин мы свяжем их (без излишней строгости, но вполне аккуратным образом) с более примитивной величиной —  $S$ -матрицей. В следующем разделе мы узнаем, как вычислять элементы  $S$ -матрицы, используя диаграммы Фейнмана.

### Сечение рассеяния

Эксперименты, которые исследуют поведение элементарных частиц, особенно в релятивистском режиме, являются экспериментами по рассеянию. Сталкивают два пучка частиц с известными импульсами и наблюдают за тем, что происходит. Вероятность обнаружения любого отдельного конечного состояния может быть выражена через *сечение рассеяния* — величину, которая характеризует внутренние свойства сталкивающихся частиц и, следовательно, позволяет провести сравнение двух различных экспериментов с пучками разных размеров и интенсивностей.

Сечение рассеяния определяется следующим образом. Рассмотрим покоящуюся мишень, состоящую из частиц типа  $\mathcal{A}$  с плотностью  $\rho_{\mathcal{A}}$  (число частиц на единицу объема). Направим на эту мишень пучок частиц типа  $\mathcal{B}$  с плотностью числа частиц  $\rho_{\mathcal{B}}$  и скоростью  $v$ :



Пусть  $l_{\mathcal{A}}$  и  $l_{\mathcal{B}}$  — длины пучков частиц. Тогда мы ожидаем, что полное число событий рассеяния (или событий рассеяния любого заданного типа) должно быть пропорционально  $\rho_{\mathcal{A}}$ ,  $\rho_{\mathcal{B}}$ ,  $l_{\mathcal{A}}$ ,  $l_{\mathcal{B}}$  и площади пересечения пучков рассеяния  $A$ , общей для двух пучков. *Сечение рассеяния*, обозначаемое  $\sigma$ , равно общему числу событий (любого заданного типа), деленному на произведение всех этих величин:

$$\sigma \equiv \frac{\text{Число событий рассеяния}}{\rho_{\mathcal{A}} l_{\mathcal{A}} \rho_{\mathcal{B}} l_{\mathcal{B}} A}. \quad (4.59)$$

Данное определение симметрично относительно  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , поэтому можно было бы считать покоящимися частицы типа  $\mathcal{B}$  или проводить рассмотрение в любой другой системе отсчета.



Сечение рассеяния имеет размерность площади. Действительно, это есть эффективная площадь куска, выбиваемого из одного пучка каждой частицей другого пучка и впоследствии переходящего в интересующее нас конечное состояние.

В реальных пучках  $\rho_{\mathcal{A}}$  и  $\rho_{\mathcal{B}}$  не постоянны — плотность частиц в центре пучка обычно больше, чем на краях. Однако мы будем полагать, что как радиус взаимодействия частиц, так и ширина отдельных волновых пакетов частиц малы по сравнению с диаметром пучка. Поэтому в дальнейшем можно считать  $\rho_{\mathcal{A}}$  и  $\rho_{\mathcal{B}}$  постоянными, не забывая при этом, что для вычисления вероятности событий в реальном ускорителе нужно проинтегрировать по сечению пучка:

$$\text{Число событий} = \sigma \ell_{\mathcal{A}} \ell_{\mathcal{B}} \int d^2x \rho_{\mathcal{A}}(x) \rho_{\mathcal{B}}(x). \quad (4.60)$$

Если плотности постоянны или если мы используем эту формулу для вычисления эффективной площади  $A$  сечения пучков, то

$$\text{Число событий} = \frac{\sigma N_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{B}}}{A}, \quad (4.61)$$

где  $N_{\mathcal{A}}$  и  $N_{\mathcal{B}}$  — полное число частиц типа  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

Сечения многих различных процессов могут быть получены в одном эксперименте рассеяния. Например, в столкновениях  $e^+e^-$  можно измерять сечения рождения  $\mu^+\mu^-$ ,  $\tau^+\tau^-$ ,  $\mu^+\mu^-\gamma$ ,  $\mu^+\mu^-\gamma\gamma$  и т. д. и бесчисленных процессов, включающих рождение адронов, не говоря уже о простом  $e^+e^-$  рассеянии. Обычно мы хотим определить не только тип частиц в конечном состоянии, но также и их импульсы. Определение (4.59) сечения  $\sigma$  все еще применимо и в этом случае, но если мы выделяем точные значения импульсов, то  $\sigma$  будет бесконечно малым. Решение состоит в том, чтобы определить *дифференциальное сечение рассеяния*  $d\sigma/(d^3p_1 \dots d^3p_n)$ . Это величина, которая в результате интегрирования по любому малому объему  $d^3p_1 \dots d^3p_n$  определяет сечение рассеяния в этот объем импульсов конечного состояния. Импульсы в конечном состоянии не являются независимыми. Четыре компоненты будут всегда связаны условием сохранения 4-импульса. В самом простом случае, когда имеется только две частицы в конечном состоянии, это условие оставляет только две независимых компоненты импульса, в качестве которых обычно выбираются углы  $\theta$  и  $\phi$  импульса одной из частиц. Интегрирование  $d\sigma/(d^3p_1 d^3p_2)$  по четырем ограниченному законом сохранения компонентам импульса приводит к обычному дифференциальному сечению рассеяния  $d\sigma/d\Omega$ .

Более простая измеримая величина — это *вероятность распада*  $\Gamma$  нестабильной частицы  $\mathcal{A}$  (которая считается покоящейся) в определенное конечное состояние (из двух или более частиц). Эта вероятность определяется как

$$\Gamma \equiv \frac{\text{Число распадов в единицу времени}}{\text{Число имеющихся частиц типа } \mathcal{A}}. \quad (4.62)$$

Тогда время жизни  $\tau$  частицы является обратным сумме ее вероятностей распадов во все возможные конечные состояния. (Время полураспада частицы —  $\tau \cdot \ln 2$ .)

В нерелятивистской квантовой механике нестабильное атомное состояние проявляет себя в экспериментах по рассеянию как *резонанс*. Вблизи резонансной энергии  $E_0$  амплитуда рассеяния определяется формулой Брейта – Вигнера:

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}. \quad (4.63)$$

Следовательно, сечение рассеяния имеет пик вида

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Ширина пика резонанса равна вероятности распада нестабильного состояния.

Формула Брейта–Вигнера (4.63) имеет место также и в релятивистской квантовой механике. В частности, она определяет амплитуду рассеяния для процессов, в которых начальные частицы образуют составную частицу, которая затем распадается. Нестабильная частица, рассматриваемая как возбужденное состояние вакуума, является прямым аналогом нестабильного нерелятивистского атомного состояния. Если задать 4-импульс  $p$  нестабильной частицы массой  $m$ , то можно получить релятивистски инвариантное обобщение формулы (4.63):

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \approx \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(p^0 - E_{\mathbf{p}} + i(m/E_{\mathbf{p}})\Gamma/2)}. \quad (4.64)$$

Вероятность распада нестабильной частицы в произвольной системе отсчета равна  $(m/E_{\mathbf{p}})\Gamma$ , что согласуется с релятивистским растяжением времени. Хотя обе части равенства в (4.64) равны в окрестности резонанса, запись слева, которая является явно лоренц-инвариантной, намного удобнее.

## S-матрица

Как теперь вычислить сечение рассеяния? Мы должны построить волновые пакеты, представляющие частицы в начальном состоянии, подействовать на это начальное состояние в течение очень длительного времени оператором эволюции  $\exp(-iHt)$  для теории поля с взаимодействием и затем спроектировать возникающее в результате конечное состояние на заданное состояние, описывающее определенный набор расходящихся частиц в конечном состоянии. Это дает амплитуду вероятности рождения заданного состояния, которая связана простым соотношением с сечением рассеяния. Мы найдем, что в пределе, когда волновые пакеты очень узки в импульсном пространстве, амплитуда зависит только от импульсов волновых пакетов, а не от их конкретной формы\*.

Волновой пакет, представляющий некоторое заданное состояние  $|\phi\rangle$ , может быть представлен в виде:

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \phi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \quad (4.65)$$

где  $\phi(\mathbf{k})$  — фурье-образ пространственной волновой функции, а  $|\mathbf{k}\rangle$  — одночастичное состояние с импульсом  $\mathbf{k}$  в теории с взаимодействием. В свободной теории мы имели бы  $|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ . Множитель  $\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$  преобразует релятивистскую нормировку  $|\mathbf{k}\rangle$  в стандартную нормировку, в которой сумма всех вероятностей равна 1:

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1, \quad \text{если} \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (4.66)$$

\*Большая часть этого раздела основывается на изложении теории нерелятивистского рассеяния, данным в книге Тейлора (Taylor, 1972), в гл. 2, 3 и 17. Мы концентрируем внимание на дополнительных трудностях в релятивистской теории, опуская многие общие для обоих случаев тонкости, которые подробно обсуждаются Тейлором.

Вероятность, которую мы хотим вычислить, равна:

$$\mathcal{P} = \left| \underbrace{\langle \phi_1 \phi_2 \dots |}_{\text{будущее}} \underbrace{|\phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle}_{\text{прошлое}} \right|^2, \quad (4.67)$$

где  $|\phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle$  — состояние двух волновых пакетов в далеком прошлом и  $\langle \phi_1 \phi_2 \dots |$  — состояние нескольких волновых пакетов (по одному для каждой частицы конечного состояния) в далеком будущем. Волновые пакеты локализованы в пространстве, так что каждый может быть построен независимо от других. Состояния, построенные таким образом, называются *in*- и *out*-состояниями, соответственно. Обратим внимание на то, что мы используем представление Гейзенберга. Состояния не зависят от времени, но название, которое мы даем состоянию, зависит от собственных значений или средних значений зависящих от времени операторов. Таким образом, состояния с различными именами, созданные в разное время, имеют нетривиальное скалярное произведение, определяющееся временной зависимостью операторов.

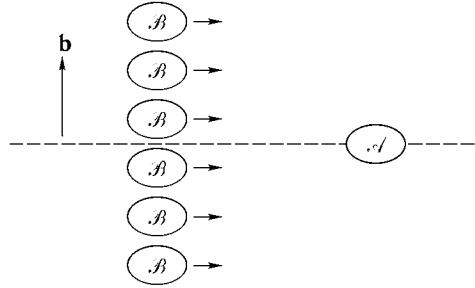


Рис. 4.2. Начальные волновые пакеты однородно распределены по прицельному параметру  $\mathbf{b}$ .

Если взять состояние  $|\phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle$  в отдаленном прошлом и затем перейти к пределу, в котором волновые пакеты  $\phi_i(\mathbf{k}_i)$  концентрируются вблизи определенных импульсов  $\mathbf{p}_i$ , то это определяет *in*-состояние  $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}}$  с определенными начальными импульсами. Полезно рассматривать  $|\phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle$  как линейную суперпозицию таких состояний. Однако важно принять во внимание поперечное смещение волнового пакета  $\phi_{\mathcal{B}}$  относительно  $\phi_{\mathcal{A}}$  в координатном пространстве (рис. 4.2). Хотя это можно неявно учесть формой  $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$ , мы примем соглашение, что опорные волновые функции в импульсном пространстве коллинеарны (т. е. прицельный параметр  $\mathbf{b} = 0$ ), и запишем  $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})$  с явным множителем  $\exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_{\mathcal{B}})$ , учитывающим пространственную трансляцию. Так как волновые пакеты  $\phi_{\mathcal{A}}$  и  $\phi_{\mathcal{B}}$  построены независимо в разных областях пространства, то можно записать начальное состояние в виде:

$$|\phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3 k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \frac{\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{\mathcal{A}}) \phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}) e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_{\mathcal{B}}}}{\sqrt{(2E_{\mathcal{A}})(2E_{\mathcal{B}})}} |\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}}. \quad (4.68)$$

Мы могли бы разложить  $\langle \phi_1 \phi_2 \dots |$  по аналогично определенным *out*-состояниям с заданными импульсами в асимптотическом будущем\*:

$$\text{out} \langle \phi_1 \phi_2 \dots | = \left( \prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2E_f}} \right) \text{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots |.$$

\*Здесь и ниже знак произведения применяется (символически) к интегралу так же, как и к другим множителям в круглых скобках; интегралы также применяются к множителям вне круглых скобок.

Намного проще, однако, использовать *out*-состояния с заданными импульсами как конечные состояния в амплитуде вероятности (4.67) и умножать их на различные нормировочные множители после квадрирования амплитуды. Это физически осмыслено до тех пор, пока детекторы частиц конечного состояния измеряют главным образом импульс, т. е. определяют координаты с точностью не более порядка длин волн де Бройля.

Теперь можно связать вероятность рассеяния в реальном эксперименте с набором идеализированных амплитуд перехода между асимптотически определенными *in*- и *out*-состояниями с заданными импульсами

$$\text{out}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}}. \quad (4.69)$$

Чтобы вычислить перекрытие *in*- и *out*-состояний, заметим, что условия для определения двух наборов состояний связаны трансляцией во времени:

$$\begin{aligned} \text{out}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots |}_{T} \underbrace{| \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle}_{-T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | e^{-iH(2T)} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.70)$$

В последней строке состояния определены в любой одинаковый момент времени. Таким образом, *in*- и *out*-состояния связаны при помощи предела последовательности унитарных операторов. Этот предельный унитарный оператор называется *S*-матрицей:

$$\text{out}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle_{\text{in}} \equiv \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | S | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \quad (4.71)$$

*S*-матрица имеет следующую структуру. Если рассматриваемые частицы вообще не взаимодействуют, то *S* — просто тождественный оператор. Даже если теория содержит взаимодействия, частицы имеют некоторую вероятность просто пройти друг сквозь друга. Чтобы выделить интересную часть *S*-матрицы, то есть часть, возникающую из-за взаимодействия, определим *T*-матрицу формулой:

$$S = \mathbf{1} + iT. \quad (4.72)$$

Теперь заметим, что элементы матрицы *S* должны отражать сохранение 4-импульса. Таким образом, *S* или *T* должны всегда содержать множитель  $\delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$ . Выделяя этот множитель, мы определяем *инвариантный матричный элемент*  $\mathcal{M}$ :

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | iT | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f) \cdot i \mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f). \quad (4.73)$$

Это выражение записано через 4-импульсы *p* и *k*, но, конечно, все 4-импульсы находятся на массовой поверхности:  $p^0 = E_{\mathbf{p}}$ ,  $k^0 = E_{\mathbf{k}}$ . (Обратим внимание, что наше изложение относится к случаю, когда начальное состояние содержит только две частицы. Для процессов  $3 \rightarrow$  много или много  $\rightarrow$  много можно написать аналогичные выражения, но мы не будем рассматривать в этой книге такие сложные эксперименты.)

Матричный элемент  $\mathcal{M}$  аналогичен амплитуде рассеяния *f* в одночастичной квантовой механике. Он полезен, так как позволяет отделить всю физику, зависящую от деталей гамильтониана взаимодействия («динамику»), от остальной физики («кинматики»). В следующем разделе мы обсудим, как вычислить матричный элемент  $\mathcal{M}$ , используя диаграммы Фейнмана. Но прежде следует выяснить, как, зная  $\mathcal{M}$ , получить сечение рассеяния  $\sigma$ .

Чтобы сделать это, выразим через  $\mathcal{M}$  вероятность рассеяния начального состояния  $|\phi_A \phi_B\rangle$  с переходом в конечное состояние *n* частиц, чьи импульсы находятся в малой

области  $d^3 p_1 \dots d^3 p_n$ . В нашей нормировке эта вероятность равна:

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} \mathcal{B} \rightarrow 1 2 \dots n) = \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | \phi_{\mathcal{A}} \phi_{\mathcal{B}} \rangle|^2. \quad (4.74)$$

Для одиночной частицы-мишени ( $\mathcal{A}$ ) и многих падающих частиц ( $\mathcal{B}$ ) с разными направленными параметрами  $\mathbf{b}$  число событий рассеяния определяется формулой:

$$N = \sum_{\substack{\text{все падающие} \\ \text{частицы } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2 b n_{\mathcal{B}} \mathcal{P}(\mathbf{b}),$$

где  $n_{\mathcal{B}}$  — плотность числа частиц  $\mathcal{B}$  (число частиц на единицу площади). Так как мы считаем, что это число в области взаимодействия постоянно, то плотность числа частиц  $n_{\mathcal{B}}$  может быть вынесена за знак интеграла. Тогда сечение рассеяния имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2 b \mathcal{P}(\mathbf{b}). \quad (4.75)$$

Теперь с помощью прямых вычислений можно получить простое выражение для  $\sigma$  через  $\mathcal{M}$ . Объединяя (4.75), (4.74) и (4.68), имеем (записываем  $d\sigma$  вместо  $\sigma$ , так как это — бесконечно малая величина):

$$d\sigma = \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2 b \left( \prod_{i=\mathcal{A}, \mathcal{B}} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\bar{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}} \right) \times \quad (4.76)$$

$$\times e^{i\mathbf{b} \cdot (\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}_{\mathcal{B}})} (\text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}}) (\text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{\text{in}})^*,$$

где мы использовали  $\bar{k}_{\mathcal{A}}$  и  $\bar{k}_{\mathcal{B}}$  как вспомогательные переменные интегрирования во второй части квадратированной амплитуды. Интегрирование по  $d^2 b$  в результате дает множитель  $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$ . Мы получим больше дельта-функций, записав последние два множителя (4.76) через  $\mathcal{M}$ . Предполагая, что нас не интересует тривиальный случай рассеяния вперед, когда никакого взаимодействия не происходит, можно отбросить  $\mathbf{1}$  в (4.72) и записать эти множители как

$$(\text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}}) = i \mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum k_i - \sum p_f);$$

$$(\text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{\text{in}})^* = -i \mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\} \rightarrow \{p_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{k}_i - \sum p_f).$$

Мы можем использовать вторую из этих дельта-функций вместе с  $\delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$  для выполнения всех шести интегрирований по  $\bar{\mathbf{k}}$  в (4.76). Из этих шести интегралов только взятие интегралов по  $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z$  и  $\bar{k}_{\mathcal{B}}^z$  требует некоторых усилий:

$$\int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z d\bar{k}_{\mathcal{B}}^z \delta(\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_{\mathcal{B}}^z - \sum p_f^z) \delta(\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_{\mathcal{B}} - \sum E_f) =$$

$$= \int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z \delta(\sqrt{\bar{k}_{\mathcal{A}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{\bar{k}_{\mathcal{B}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2} - \sum E_f) \Big|_{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z = \sum p_f^z - \bar{k}_{\mathcal{A}}^z} =$$

$$= \frac{1}{\left| \frac{\bar{k}_{\mathcal{A}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{A}}} - \frac{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{B}}} \right|} \equiv \frac{1}{|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|}. \quad (4.77)$$

В последней строке и в остальной части (4.76) подразумевается, что теперь накладываются связи  $\vec{k}_{\mathcal{A}}^z + \vec{k}_{\mathcal{B}}^z = \sum p_f^z$  и  $\vec{E}_{\mathcal{A}} + \vec{E}_{\mathcal{B}} = \sum E_f$  (в дополнение к связям  $\vec{k}_{\mathcal{A}}^\perp = k_{\mathcal{A}}^\perp$  и  $\vec{k}_{\mathcal{B}}^\perp = k_{\mathcal{B}}^\perp$ , возникающим в других четырех интегралах). Разность  $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|$  есть относительная скорость пучков в лабораторной системе отсчета.

Напомним, что начальные волновые пакеты локализованы в импульсном пространстве вблизи  $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ . Это означает, что можно вычислить все множители, являющиеся гладкими функциями от  $\mathbf{k}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathbf{k}_{\mathcal{B}}$ , в точках  $\mathbf{p}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathbf{p}_{\mathcal{B}}$  и вынести их за знак интегралов. Эти множители включают  $E_{\mathcal{A}}$ ,  $E_{\mathcal{B}}$ ,  $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|$  и  $\mathcal{M}$ , т. е. все, за исключением остающейся под интегралом дельта-функции. Сделав это, получаем выражение:

$$d\sigma = \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow \{p_f\})|^2}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \int \frac{d^3 k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} \times \quad (4.78)$$

$$\times |\phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_{\mathcal{A}})|^2 |\phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f).$$

Чтобы еще упростить эту формулу, следует обратиться к свойствам реальных детекторов частиц. Мы уже отмечали, что реальные детекторы проектируют главным образом на собственные состояния импульса. Но такие детекторы имеют конечную разрешающую способность, т. е. они суммируют некогерентно по конечным областям импульсного пространства. Обычно измерение импульсов конечных состояний не имеет достаточно высокого качества, чтобы различить малые изменения таких импульсов, возникающие в результате разброса импульсов начальных волновых пакетов  $\phi_{\mathcal{A}}$ ,  $\phi_{\mathcal{B}}$ . В этом случае можно с хорошей точностью заменить вектор импульса  $k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}}$  внутри дельта-функции его наиболее вероятной величиной  $p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}}$ . При помощи этого приближения можно взять интегралы по  $k_{\mathcal{A}}$  и  $k_{\mathcal{B}}$ , используя условие нормировки (4.66). В результате приходим к окончательной форме соотношения между элементами  $S$ -матрицы и сечением рассеяния:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum p_f). \quad (4.79)$$

Всякая зависимость от формы волновых пакетов исчезла.

Интеграл по импульсам конечных состояний в (4.79) имеет структуру:

$$\int d\Pi_n = \left( \prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum p_f), \quad (4.80)$$

где  $P$  — полный начальный 4-импульс. Этот интеграл явно лоренц-инвариантен, так как построен из инвариантных интегралов по 3-импульсам, связанным одной дельта-функцией от 4-импульсов. Этот интеграл известен как *релятивистски-инвариантный  $n$ -частичный фазовый объем*. Среди других компонентов в (4.79) матричный элемент  $\mathcal{M}$  также лоренц-инвариантен. Следовательно, свойства преобразования величины (4.79) при преобразованиях Лоренца полностью определяются множителем

$$\frac{1}{E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} = \frac{1}{|E_{\mathcal{B}} p_{\mathcal{A}}^z - E_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{B}}^z|} = \frac{1}{|\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_{\mathcal{A}}^\mu p_{\mathcal{B}}^\nu|}.$$

Хотя эта величина не лоренц-инвариантна, но она инвариантна относительно бустов вдоль оси  $z$ . Фактически это выражение имеет в точности свойства преобразования площади поперечного сечения.

Для частного случая двух частиц в конечном состоянии можно упростить общее выражение (4.79), вычисляя часть интегралов по фазовому объему в системе центра инерции. Обозначим импульсы двух конечных частиц через  $p_1$  и  $p_2$ . Сначала мы интегрируем по трем компонентам  $\mathbf{p}_2$  с помощью дельта-функции, определяющей закон сохранения 3-импульса. В результате получаем  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$  и интеграл по фазовому пространству двух частиц преобразуется к виду:

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1 p_1^2 d\Omega}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta(E_{\text{ци}} - E_1 - E_2), \quad (4.81)$$

где  $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$ ,  $E_2 = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$  и  $E_{\text{ци}}$  — полная начальная энергия. Интегрирование с помощью оставшейся дельта-функции дает:

$$\int d\Pi_2 = \int d\Omega \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left( \frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right)^{-1} = \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{ци}}}. \quad (4.82)$$

Для реакций, симметричных относительно оси столкновения, двухчастичный фазовый объем можно записать как интеграл по полярному углу в системе центра инерции:

$$\int d\Pi_2 = \int d\cos\theta \frac{1}{16\pi} \frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{ци}}}. \quad (4.83)$$

Последний множитель стремится к 1 при больших энергиях.

Применяя это упрощение к (4.79), находим следующий вид сечения рассеяния для двух частиц в конечном состоянии:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{2E_{\text{с}} 2E_{\text{б}} |v_{\text{с}} - v_{\text{б}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\text{ци}}} |\mathcal{M}(p_{\text{с}}, p_{\text{б}} \rightarrow p_1, p_2)|^2. \quad (4.84)$$

В частном случае, когда все четыре частицы имеют одинаковые массы (включая обычно рассматриваемый предел  $m \rightarrow 0$ ), последнее выражение сводится к формуле, приведенной в главе 1:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{ци}}^2} \quad (\text{все четыре массы одинаковы}). \quad (4.85)$$

В завершение раздела следует получить формулу для дифференциальной вероятности распада  $d\Gamma$  через  $\mathcal{M}$ . Нужное выражение является лишь небольшой модификацией выражения (4.79), для его получения надо только устранить из (4.79) множители, которые не имеют смысла, когда начальное состояние состоит из одной частицы. Определение вероятности  $\Gamma$  предполагает, что распадающаяся частица находится в покое, так что нормировочный множитель  $(2E_{\text{с}})^{-1}$  становится равным  $(2m_{\text{с}})^{-1}$ . (В любой другой системе отсчета этот множитель дал бы обычное замедление времени.) Таким образом, формула для вероятности распада имеет вид:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_{\text{с}}} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_{\text{с}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\text{с}} - \sum p_f). \quad (4.86)$$

К сожалению, смысл этой формулы не вполне ясен. Так как нестабильная частица не может быть отправлена в бесконечно отдаленное прошлое, наше определение (4.73)

амплитуды  $\mathcal{M}(m_{s\ell} \rightarrow \{p_f\})$  через элементы  $S$ -матрицы теряет смысл. Тем не менее, формула (4.86) правильна, если матрица  $\mathcal{M}$  вычислена согласно правилам Фейнмана, для матричных элементов  $S$ -матрицы, которые мы опишем в следующем разделе. Мы откладываем дальнейшее обсуждение этих вопросов и доказательство (4.86) до раздела 7.3. До тех пор удовлетворимся интуитивным представлением  $\mathcal{M}$  как амплитуды перехода.

Уравнения (4.79) и (4.86) являются общими независимо от того, содержит или нет конечное состояние тождественные частицы. (Конечно, при наличии тождественных частиц вычисление матрицы  $\mathcal{M}$  будет иным, но это другой вопрос.) При интегрировании любой из этих формул для получения *полного* сечения рассеяния или вероятности распада следует быть внимательными, чтобы избежать повторного учета одного и того же конечного состояния. Если в конечном состоянии имеется  $n$  тождественных частиц, нужно либо ограничиться интегрированием по неэквивалентным конфигурациям, либо разделить результат интегрирования по всем наборам импульсов на  $n!$ .

#### 4.6. Вычисление элементов $S$ -матрицы с помощью диаграмм Фейнмана

Теперь, когда получены формулы для сечения рассеяния и вероятности распада через инвариантные матричные элементы  $\mathcal{M}$ , единственная оставшаяся задача состоит в том, чтобы найти способ вычисления  $\mathcal{M}$  для различных процессов в различных теориях поля с взаимодействием. В этом разделе мы запишем (и попробуем мотивировать) формулу, представляющую  $\mathcal{M}$  через диаграммы Фейнмана. Мы отложим фактическое доказательство этой формулы до раздела 7.2, так как оно в достаточной мере техническое и станет намного легче для понимания после демонстрации практического использования формулы.

Напомним, что по определению (4.71)  $S$ -матрица есть оператор временной эволюции  $\exp(-iHt)$  в пределе очень большого значения времени  $t$ :

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | S | \mathbf{k}_{s\ell} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots | e^{-iH(2T)} | \mathbf{k}_{s\ell} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle. \quad (4.87)$$

Чтобы вычислить эту величину, мы хотим заменить внешние состояния плоских волн в (4.87), являющиеся собственными состояниями гамильтониана  $H$ , их аналогами в невозмущенной теории, являющимися собственными состояниями  $H_0$ . Мы успешно сделали такую замену для вакуумного состояния  $|\Omega\rangle$  в (4.27):

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle.$$

На этот раз мы хотим найти соотношение вида

$$|\mathbf{k}_{s\ell} \mathbf{k}_{\mathcal{B}}\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\mathbf{k}_{s\ell} \mathbf{k}_{\mathcal{B}}\rangle_0, \quad (4.88)$$

где опущены некоторые неизвестные фазовые множители, аналогичные содержащимся в (4.27). Найти такое соотношение не просто. В (4.27) мы использовали тот факт, что вакуум является состоянием с абсолютно наименьшей энергией. Здесь мы можем использовать только намного более слабое утверждение, что внешние состояния с хорошо разделенными начальными и конечными частицами имеют наименьшую энергию среди состояний с заданными значениями отличных от нуля импульсов. Возникшая проблема достаточно глубока; это связано с одной из наиболее фундаментальных трудностей



теории поля, состоящей в том, что взаимодействия влияют не только на рассеяние различных частиц, но также и на форму самих одночастичных состояний.

Если бы формула (4.88) была так или иначе получена, мы могли бы использовать ее, чтобы переписать правую часть (4.87) в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | e^{-iH(2T)} | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \propto \\ & \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | T \left( \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

При вычислении вакуумных средних громоздкие коэффициенты пропорциональности между свободными и взаимодействующими вакуумными состояниями сокращались в окончательной формуле (4.31). В данном случае эти множители настолько ужасны, что мы даже не пытаемся выписать их; мы только надеемся, что подобное драматическое сокращение произойдет и здесь. Такое сокращение, действительно, происходит, хотя в данном подходе получить его не так просто. С точностью до одного небольшого изменения (несущественного для наших целей) формула для нетривиальной части  $S$ -матрицы может быть упрощена до вида:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | iT | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left( {}_0\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | T \left( \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \right) \cdot \end{aligned} \quad (4.90)$$

связная,  
ампутированная

Термины «связный» и «ампутированный» относятся к ограничениям на класс возможных диаграмм Фейнмана и будут определены несколько позже. Мы докажем (4.90) в разделе 7.2. В оставшейся части этого раздела мы объясним эту формулу и дадим мотивировку добавленным новым ограничениям.

Сначала следует понять, как представить матричный элемент из (4.90) в виде суммы диаграмм Фейнмана. Вычислим явно несколько первых слагаемых в  $\phi^4$ -теории для случая двух частиц в конечном состоянии. Первое слагаемое будет равно:

$$\begin{aligned} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}}} \langle 0 | a_1 a_2 a_{\mathcal{A}}^\dagger a_{\mathcal{B}}^\dagger | 0 \rangle = \\ &= 2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} (2\pi)^6 \left( \delta(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_2) + \delta(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} - \mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \mathbf{p}_1) \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Благодаря дельта-функции конечное состояние должно быть равно начальному, так что это слагаемое является частью «1» в матрице  $S = 1 + iT$  и не дает вклада в нетривиальный элемент матрицы  $\mathcal{M}$ . Мы можем представить это в виде диаграммы:



Используя теорему Вика, получим следующее слагаемое в  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle$ :

$$\begin{aligned} & {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T \left( -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_I^4(x) \right) | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 = \\ & = {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | N \left( -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi_I^4(x) + \text{свертки} \right) | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Так как внешние состояния не являются вакуумными состояниями  $|0\rangle$ , то слагаемые, которые не полностью свернуты, не обязательно исчезают. Можно использовать оператор уничтожения из  $\phi_I(x)$ , чтобы уничтожить частицу начального состояния, или оператор рождения из  $\phi_I(x)$ , чтобы породить частицу конечного состояния. Например,

$$\begin{aligned}\phi_I^+(x)|\mathbf{p}\rangle_0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0\rangle = \\ &= e^{-ip \cdot x} |0\rangle.\end{aligned}\quad (4.93)$$

Несвернутый оператор  $\phi_I$  внутри  $N$ -произведения (4.92) имеет два слагаемых: оператор  $\phi_I^+$  крайний справа и оператор  $\phi_I^-$  крайний слева. Мы получаем один вклад в элемент  $S$ -матрицы для каждого способа коммутирования  $a$  из  $\phi_I^+$  с  $a^\dagger$  из начального состояния и один вклад для каждого способа коммутирования  $a^\dagger$  из  $\phi_I^-$  с  $a$  из конечного состояния. Тогда естественно определить свертки полевых операторов с внешними состояниями как

$$\overline{\phi_I(x)|\mathbf{p}\rangle} = e^{-ip \cdot x}; \quad \langle \mathbf{p} | \overline{\phi_I(x)} = e^{+ip \cdot x}.\quad (4.94)$$

Чтобы вычислить элемент  $S$ -матрицы типа (4.92), просто запишем все возможные полные свертки  $\phi_I$  операторов с внешними состояниями с заданными импульсами.

Чтобы увидеть, что это предписание является правильным, вычислим аккуратно величину (4.92).  $N$ -произведение содержит слагаемые вида

$$\phi\phi\phi\phi; \quad \overline{\phi\phi\phi\phi}; \quad \overline{\phi\phi\phi\phi}.\quad (4.95)$$

Последнее слагаемое, в котором операторы  $\phi$  полностью свернуты друг с другом, равно вакуумной пузырьковой диаграмме, умноженной на вычисленную выше величину (4.91):

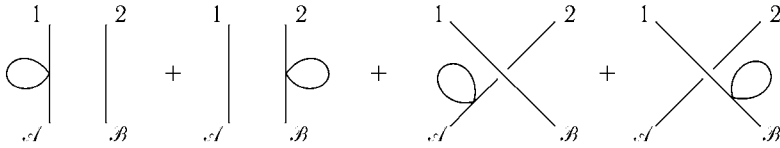
$$\begin{aligned}-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \overline{\phi\phi\phi\phi} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle_0 &= \\ &= \infty \times \left( \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \mathcal{A} \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} \right).\end{aligned}\quad (4.96)$$

Это — еще один вклад в тривиальную часть  $S$ -матрицы, и мы его игнорируем.

Теперь рассмотрим второе выражение в (4.95), в котором два из четырех  $\phi$  операторов свернуты. Нормально упорядоченное произведение оставшихся двух полей имеет вид  $(a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + aa)$ . Коммутируя эти оставшиеся операторы с операторами  $a$  и  $a^\dagger$  начального и конечного состояний, находим, что может выжить только слагаемое с равным числом операторов  $a$  и  $a^\dagger$ . На языке сверток это означает, что один из  $\phi$  операторов должен быть свернут с начальным состоянием  $|\mathbf{p}\rangle$ , другой — с конечным состоянием  $\langle \mathbf{p} |$ . Несвернутые  $|\mathbf{p}\rangle$  и  $\langle \mathbf{p} |$  дают дельта-функцию, как и в (4.91). Чтобы представить эти величины на диаграммах, мы добавляем в наши правила Фейнмана *внешние линии*:

$$\overline{\phi_I(x)|\mathbf{p}\rangle} = \begin{array}{c} \nearrow_x \\ \hline \mathbf{p} \end{array} \quad \langle \mathbf{p} | \overline{\phi_I(x)} = \begin{array}{c} \hline \mathbf{p} \\ \searrow_x \end{array}.\quad (4.97)$$

Диаграммы Фейнмана для элементов  $S$ -матрицы будут всегда содержать внешние линии, а не внешние точки, как в диаграммах для корреляционных функций. Таким образом, второе выражение в (4.95) приводит к четырем диаграммам:



Интегралы  $\int d^4x$  приводят к появлению в каждой вершине дельта-функций, отражающих сохранение импульсов (включая внешние импульсы), так что эти диаграммы снова описывают тривиальные процессы, в которых начальные и конечные состояния тождественны. Это иллюстрирует общий принцип: вклад в  $T$ -матрицу дают только *полностью связанные* диаграммы, в которых все внешние линии связаны друг с другом.

В заключение рассмотрим выражение в (4.95), в котором ни один из операторов  $\phi$  не свернут ни с каким другим. Наше предписание требует, чтобы мы свернули два из операторов  $\phi$  с  $|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle$  и другие два — с  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2|$ . Для этого существует  $4!$  способов. Таким образом, получаем диаграмму:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= (4!) \cdot \left(-i \frac{\lambda}{4!}\right) \int d^4x e^{-i(p_A + p_B - p_1 - p_2) \cdot x} = \\
 &= -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2).
 \end{aligned}
 \tag{4.98}$$

Это выражение в точности имеет вид  $i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$  с  $\mathcal{M} = -\lambda$ .

Прежде чем продолжить обсуждение диаграмм Фейнмана для элементов  $S$ -матрицы, применим полученный результат к сечению рассеяния. Для рассеяния в системе центра инерции можно просто подставить  $|\mathcal{M}|^2 = \lambda^2$  в (4.85), в результате:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{цм}}^2}.
 \tag{4.99}$$

Таким образом, мы вычислили наше первое сечение рассеяния в квантовой теории поля. Это довольно скучный результат, вообще не содержащий никакой угловой зависимости. (Ситуация будет исправлена в следующем разделе, когда мы рассмотрим фермионы.) Проинтегрировав по  $d\Omega$  и разделив на 2, так как имеются две тождественные частицы в конечном состоянии, находим полное сечение рассеяния:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{цм}}^2}.
 \tag{4.100}$$

На практике, вероятно, можно было бы использовать этот результат для измерения значения  $\lambda$ .

Возвращаясь к нашему общему обсуждению, рассмотрим некоторые вклады в  $T$ -матрицу более высокого порядка для процесса  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \rightarrow 1, 2$ . Если мы на время проигнорируем наше предписание, согласно которому остаются только «связные и ам-

путированные» диаграммы, то

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | iT | 1 \rangle &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots \\
 &+ \left( \text{Diagram 5} \right) + \dots + \left( \text{Diagram 6} \right) + \dots \quad (4.101) \\
 &+ \text{Diagram 7} + \dots
 \end{aligned}$$

плюс диаграммы, в которых не все четыре внешних линии связаны друг с другом. Мы уже видели, что этот последний класс диаграмм не дает вклада в  $T$ -матрицу. Первая диаграмма, показанная в (4.101), дает вклад в  $T$  наинизшего порядка, который мы вычислили выше. Следующие три диаграммы дают ожидаемые поправки к этой амплитуде, которые учитывают рождение и уничтожение дополнительных «виртуальных» частиц.

Диаграммы во второй строке (4.101) содержат несвязные «вакуумные пузыри». При помощи тех же аргументов, что и в конце раздела 4.4, несвязные части собираются в показателе экспоненты, давая общий фазовый множитель, определяющий сдвиг энергии взаимодействующего вакуумного состояния, на фоне которого происходит рассеяние. Таким образом, эти «вакуумные пузыри» являются несущественными для  $S$ -матрицы. Мы теперь видим, что только полностью связанные диаграммы дают существенные вклады в элементы  $S$ -матрицы.

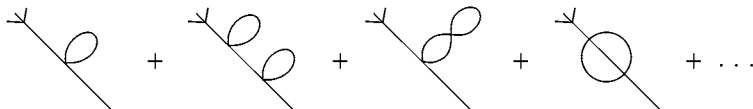
Последняя диаграмма более сложна; вычислим ее. После интегрирования по координатам двух вершин получаем:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 7} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \times \\
 &\times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p' - p_1 - p_2) \times \\
 &\times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{B}} - p'). \quad (4.102)
 \end{aligned}$$

Можно проинтегрировать по  $p'$ , используя вторую дельта-функцию. Для этого нужно найти величину

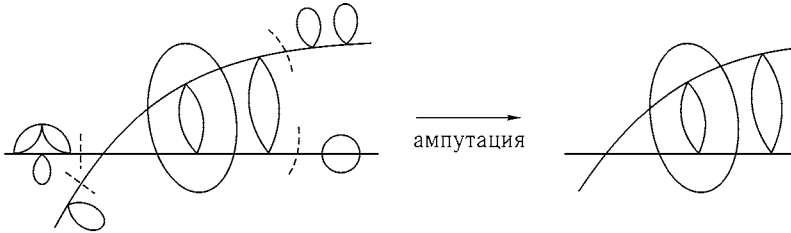
$$\left. \frac{1}{p'^2 - m^2} \right|_{p'=p_{\mathcal{B}}} = \frac{1}{p_{\mathcal{B}}^2 - m^2} = \frac{1}{0}.$$

Мы получаем бесконечность, так как  $p_{\mathcal{B}}$ , являясь импульсом внешней частицы, находится «на массовой поверхности»:  $p_{\mathcal{B}}^2 = m^2$ . Это создает трудность. Ясно, что наша формула для  $S$  имеет смысл только в том случае, если мы исключаем диаграммы такого вида, т.е. диаграммы с петлями, связанными только с одной внешней линией. К счастью, это физически разумно. Точно так же, как вакуумные пузырьковые диаграммы описывают эволюцию  $|0\rangle$  в  $|\Omega\rangle$ , поправки к внешним линиям



описывают эволюцию состояния  $|\mathbf{p}\rangle_0$  в состояние  $|\mathbf{p}\rangle$ , которое является одночастичным состоянием во взаимодействующей теории. Так как эти поправки не имеют никакого отношения к процессу рассеяния, их следует исключить из вычисления  $S$ -матрицы.

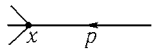
Для диаграммы общего вида с внешними линиями определим *ампутацию* следующим образом. Начиная с конца каждой внешней линии, найдем последнюю точку, в которой диаграмма может быть разрезана по одному пропагатору так, что эта операция отделит линию от остальной части диаграммы. Там и разрежем. Например,



Резюмируем наше предписание для вычисления амплитуд рассеяния. Формула для элементов  $S$ -матрицы (4.90) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum p_f) = \\
 = \left( \begin{array}{l} \text{сумма всех связных ампутированных диаграмм} \\ \text{Фейнмана с входящими } p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \text{ и выходящими } p_f \end{array} \right). \quad (4.103)
 \end{aligned}$$

Термином «связная» мы теперь обозначаем полностью связную диаграмму, то есть диаграммы без вакуумных пузырьков и со связанными друг с другом всеми внешними линиями. Правила Фейнмана для амплитуд рассеяния в теории  $\phi^4$  в координатном представлении имеют вид:

1. для каждого пропагатора  $x \longrightarrow y = D_F(x - y);$
2. для каждой вершины   $= (-i\lambda) \int d^4 x;$
3. для каждой внешней линии   $= e^{-ip \cdot x};$
4. разделить на множитель симметрии диаграммы.

Заметим, что множитель для входящей линии есть как раз амплитуда вероятности обнаружения частицы в вершине, с которой эта линия соединяется, т. е. волновая функция частицы. Точно также, множитель для выходящей линии — это амплитуда вероятности того, что частица, рожденная в вершине, имеет заданный конечный импульс.

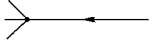
Так же как и в случае правил Фейнмана для корреляционных функций, обычно проще ввести импульсное представление пропагаторов, затем взять вершинные интегралы, чтобы получить сохраняющие импульс дельта-функции, а затем использовать эти дельта-функции для вычисления как можно большего числа интегралов по импульсам. Однако в амплитуде рассеяния будет всегда иметься общая дельта-функция от суммы всех импульсов, которую можно использовать, чтобы сократить дельта-функцию, стоящую в левой части (4.103). В результате:

$$i\mathcal{M} = \text{сумма всех связных ампутированных диаграмм}, \quad (4.104)$$

где диаграммы вычисляются по следующим правилам:

1. для каждого пропагатора   $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$ ;

2. для каждой вершины   $= -i\lambda$ ;

3. для каждой внешней линии   $= 1$ ;

4. потребовать выполнения закона сохранения импульса в каждой вершине;

5. проинтегрировать по всем неопределенным петлевым импульсам:  $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ ;

6. разделить на множитель симметрии.

Это — наш окончательный вариант правил Фейнмана для теории  $\phi^4$ ; для удобства эти правила также приводятся в приложении.

На самом деле формула (4.103) еще не совсем правильна. Необходимо еще одно уточнение, включающее коэффициенты пропорциональности, опущенные из (4.89). Но это уточнение касается только диаграмм, содержащих петли, поэтому мы откладываем его обсуждение до глав 6 и 7, где мы сначала вычислим такие диаграммы. В разделе 7.2 мы докажем справедливость исправленной формулы (4.103), связывая элементы  $S$ -матрицы с корреляционными функциями, для которых фактически мы получили формулу в терминах диаграмм Фейнмана.

## 4.7. Правила Фейнмана для фермионов

Пока что во избежание излишних усложнений мы рассматривали в этой главе лишь теорию  $\phi^4$ . Теперь мы готовы обобщить наши результаты на теории, содержащие фермионы.

Результаты из раздела 4.2, касающиеся корреляционных функций, обобщаются без труда. Условие лоренц-инвариантности требует, чтобы гамильтониан взаимодействия  $H_I$  был произведением четного числа спинорных полей, так что никаких трудностей при определении хронологически упорядоченной экспоненты от  $H_I$  не возникает.

Однако, чтобы применить теорему Вика, необходимо обобщить определения символов хронологического и нормального упорядочений на случай фермионов. В конце раздела 3.5 мы видели, что оператор хронологического упорядочения  $T$ , действующий на два спинорных поля, удобнее определить с дополнительным знаком «минус»:

$$T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) \equiv \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & \text{для } x^0 > y^0; \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & \text{для } x^0 < y^0. \end{cases} \quad (4.105)$$

Согласно этому определению фейнмановский пропагатор для дираковского поля равен

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle. \quad (4.106)$$

Для произведений более двух спинорных полей мы естественным образом обобщаем это определение: в хронологически упорядоченном произведении возникает один знак «минус» при каждой перестановке операторов, которые необходимы для того, чтобы расположить поля в хронологическом порядке. Например,

$$T(\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4) = (-1)^3 \psi_3 \psi_1 \psi_4 \psi_2, \quad \text{если } x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0.$$

Определение нормально упорядоченного произведения спинорных полей аналогично. Следует поставить дополнительный знак «минус» для каждой перестановки фермионов. Свойства антикоммутации делают возможным запись нормально упорядоченного произведения несколькими способами, однако с учетом принятых определений все они являются полностью эквивалентными:

$$N(a_p a_q a_r^\dagger) = (-1)^2 a_r^\dagger a_p a_q = (-1)^3 a_r^\dagger a_q a_p.$$

Используя эти определения, нетрудно обобщить теорему Вика. Рассмотрим сначала случай двух дираковских полей, например,  $T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]$ . По аналогии с (4.37) определим свертку двух полей как

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = N[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}. \quad (4.107)$$

Очевидно, что для дираковского поля

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \equiv \begin{cases} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} & \text{для } x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & \text{для } x^0 < y^0 \end{cases} = S_F(x-y); \quad (4.108)$$

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0. \quad (4.109)$$

Определим свертки под символом нормального упорядочения так, чтобы они включали знаки «минус» для оператора перестановок:

$$N(\overline{\psi_1\psi_2\bar{\psi}_3\bar{\psi}_4}) = -\overline{\psi_1\bar{\psi}_3} N(\psi_2\bar{\psi}_4) = -S_F(x_1-x_3)N(\psi_2\bar{\psi}_4). \quad (4.110)$$

С учетом этих определений теорема Вика имеет прежний вид:

$$T[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\dots] = N[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\dots + \text{все возможные свертки}]. \quad (4.111)$$

По существу доказательство не отличается от бозонного случая, так как все дополнительные знаки «минус» учитываются вышеприведенными определениями.

## Теория Юкавы

Теперь нетрудно было бы выписать фейнмановские правила для фермионных корреляционных функций, но мы все же поспешим обсудить процессы рассеяния. Для определенности начнем с анализа теории Юкавы:

$$H = H_{\text{Дирак}} + H_{\text{Клейн-Гордон}} + \int d^3x g\bar{\psi}\psi\phi. \quad (4.112)$$

Это — упрощенная модель квантовой электродинамики. В этом разделе мы тщательно выведем правила вычисления в теории Юкавы так, чтобы в следующем разделе их можно было без больших затруднений применить к КЭД.

Для определенности рассмотрим реакцию двухчастичного рассеяния:

$$\text{фермион } (p) + \text{фермион } (k) \longrightarrow \text{фермион } (p') + \text{фермион } (k').$$

Главный вклад дает слагаемое  $H_I^2$  в  $S$ -матрице:

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | T \left( \frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I \right) (-ig) \int d^4y \bar{\psi}_I \psi_I \phi_I | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_0. \quad (4.113)$$

Для вычисления этого выражения используем теорему Вика, чтобы свести  $T$ -произведение к  $N$ -произведению сверток и затем подействовать несвернутыми полями на начальные и конечные состояния частиц. Представим этот последний процесс как свертку

$$\overline{\psi_I(x) | \mathbf{p}, s} = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s'} a_{\mathbf{p}'}^{s'} u^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle = e^{-ip \cdot x} u^s(p) |0\rangle. \quad (4.114)$$

Аналогичные выражения имеют место для свертки  $\bar{\psi}_I$  с фермионом конечного состояния и для сверток  $\psi_I$  и  $\bar{\psi}_I$  с антифермионными состояниями. Заметим, что  $\psi_I$  может быть свернуто с фермионом справа или антифермионом слева; противоположное верно для  $\bar{\psi}_I$ .

Типичный вклад в матричный элемент (4.113) можно выписать как свертку

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi} \psi \phi (-ig) \int d^4y \bar{\psi} \psi \phi | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle. \quad (4.115)$$

С точностью до возможного знака «минус» значение этой величины равно

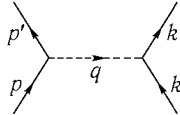
$$(-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta(p' - p - q) (2\pi)^4 \delta(k' - k + q) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k).$$

(Мы опустили множитель  $1/2!$ , потому что имеется второе, идентичное слагаемое, которое происходит от перестановки местами  $x$  и  $y$  в (4.115)). Используя любую дельта-функцию для выполнения интегрирования, находим, что это выражение имеет вид  $i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta(\Sigma p)$ , где

$$i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k). \quad (4.116)$$

При такой записи нельзя забывать накладывать связь  $p - p' = q = k' - k$ .

Вместо того чтобы исходить из (4.115), можно было бы начертить фейнмановскую диаграмму



Здесь скалярные частицы обозначаем пунктирными линиями, а фермионные — сплошными. Элемент  $S$ -матрицы мог бы быть получен непосредственно при помощи следующих фейнмановских правил в импульсном представлении.

1. Пропагаторы:

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x)\phi(y)} &= \text{---} \overset{q}{\text{---}} \text{---} = \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\varepsilon}, \\ \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} &= \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned}$$



2. Вершины:  =  $-ig$ .

3. Свертки с внешними концами:

$$\begin{aligned} \overbrace{\phi}^{\mathbf{q}} | \mathbf{q} \rangle &= \text{---} \langle \text{---} \rangle_q = 1 & \langle \mathbf{q} | \phi &= \text{---} \langle \text{---} \rangle_q = 1 \\ \overbrace{\psi}^{\mathbf{p}, s} | \mathbf{p}, s \rangle &= \text{---} \langle \text{---} \rangle_p = u^s(p) & \langle \mathbf{p}, s | \overbrace{\bar{\psi}}^{\mathbf{p}, s} &= \text{---} \langle \text{---} \rangle_p = \bar{u}^s(p) \\ \text{фермион} & & \text{фермион} & \\ \overbrace{\bar{\psi}}^{\mathbf{k}, s} | \mathbf{k}, s \rangle &= \text{---} \langle \text{---} \rangle_k = \bar{v}^s(k) & \langle \mathbf{k}, s | \overbrace{\psi}^{\mathbf{k}, s} &= \text{---} \langle \text{---} \rangle_k = v^s(k). \\ \text{антифермион} & & \text{антифермион} & \end{aligned}$$

4. Потребовать выполнения закона сохранения импульса в каждой вершине.

5. Проинтегрировать по каждому неопределенному петлевому импульсу.

6. Вычислить полный знак диаграммы.

Дадим несколько комментариев относительно этих правил.

Во-первых, заметим, что множитель  $1/n!$  в ряде Тейлора для хронологически упорядоченной экспоненты всегда сокращается с  $n!$  способами перестановок вершин, дающих одни и те же свертки. Диаграммы в теории Юкавы никогда не имеют множителей симметрии, так как три поля  $(\bar{\psi}\psi\phi)$  в  $H_I$  нельзя поменять местами друг с другом при свертках.

Во-вторых, направление импульса на фермионных линиях всегда существенно. На внешних линиях, как для бозонов, направление импульса — всегда входящее для начальных состояний частиц и исходящее для конечных состояний. Это немедленно следует из разложений  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , в которых операторы уничтожения  $a_p$  и  $b_p$  умножаются на  $e^{-ip \cdot x}$ , а операторы рождения  $a_p^\dagger$  и  $b_p^\dagger$  умножаются на  $e^{+ip \cdot x}$ . На внутренних фермионных линиях (пропагаторах) импульс должен указывать направление тока числа частиц (для электронов это — направление тока отрицательного заряда). Это требование легче всего увидеть, разбирая наш пример с самого начала. Рассмотрим аннигиляцию фермиона и антифермиона в два бозона:

$$\begin{aligned} \text{---} \langle \text{---} \rangle &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{k}' | \int d^4x \phi \bar{\psi} \psi \int d^4y \phi \bar{\psi} \psi | \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle \sim \\ &\sim \int d^4x \int d^4y \bar{v}(p') e^{-ip' \cdot x} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i(q+m)}{q^2-m^2} e^{-iq \cdot (x-y)} u(p) e^{-ip \cdot y}. \end{aligned}$$

Интегралы по  $x$  и  $y$  дают дельта-функции, которые показывают, что  $q$  течет от  $y$  к  $x$ . На внутренних бозонных линиях направление импульсов несущественно и может быть выбрано произвольно из соображений удобства, так как  $D_F(x-y) = D_F(y-x)$ .

Принято чертить стрелки на фермионных линиях так, чтобы представить направление тока числа частиц. Тогда импульс фермионного пропагатора направлен по этой стрелке. Однако для внешних античастиц импульс направлен в сторону, противоположную стрелке; это удобно показывать непосредственно, изображая вторую стрелку рядом с линией.

В-третьих, заметим, что в наших примерах дираковские индексы сворачиваются друг с другом вдоль фермионных линий. Это также имеет место в более сложных диаграммах:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & | & & | & & | & \\
 \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\
 p_3 & & p_2 & & p_1 & & p_0
 \end{array}
 \end{array}
 \sim \bar{u}(p_3) \cdot \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2} \cdot \frac{i(\not{p}_1 + m)}{p_1^2 - m^2} \cdot u(p_0). \quad (4.117)$$

Наконец, обсудим вопрос о фермионных знаках «минус». Вернемся к примеру процесса фермион-фермионного рассеяния. Мы принимаем следующее соглашение о знаках для начальных и конечных состояний:

$$|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle \sim a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle, \quad \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| \sim \langle 0| a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}, \quad (4.118)$$

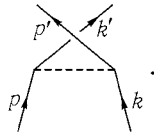
так что  $(|p, k\rangle)^\dagger = \langle p, k|$ . Тогда свертка

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle \sim \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'} \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle$$

получается путем перемещения  $\bar{\psi}_y$  на два места левее, что дает множитель  $(-1)^2 = +1$ . Заметим, что в свертке

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle \sim \langle 0 | a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'} \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle$$

достаточно передвинуть  $\bar{\psi}_y$  на одно место левее, что дает множитель  $-1$ . Эта свертка соответствует диаграмме



Таким образом, в низшем порядке полный вклад в элемент  $S$ -матрицы для этого процесса будет равен

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \begin{array}{c} p' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} k' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k \end{array} + \begin{array}{c} p' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} k' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k \end{array} = \quad (4.119) \\
 &= (-i g^2) \left( \bar{u}(p') u(p) \frac{1}{(p'-p)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(k) - \bar{u}(p') u(k) \frac{1}{(p'-k)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(p) \right).
 \end{aligned}$$

Знак «минус» между этими диаграммами отражает статистику Ферми. Превращение этого выражения в сечение рассеяния потребовало бы некоторой дополнительной работы; мы откладываем эти вычисления до главы 5, где уже можно будет рассмотреть процессы КЭД вместо менее интересной теории Юкавы.

В сложных диаграммах часто можно упростить процесс определения знаков «минус», замечая, что произведение  $(\bar{\psi}\psi)$  или любые другие фермионные пары *коммутируют* с любым оператором. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \dots (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_w \dots &= \dots (+1) (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_w \dots = \\
 &= \dots S_F(x-z) S_F(z-y) S_F(y-w) \dots
 \end{aligned}$$

Но заметим, что в замкнутой петле из  $n$  фермионных пропагаторов

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: a circle with four external dashed lines and four arrows on the circle indicating a clockwise fermion loop.} \\
 & = \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} = \\
 & = (-1) \overbrace{\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi\psi} \overbrace{\psi} = \\
 & = (-1) \text{tr}[S_F S_F S_F S_F].
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

Замкнутые фермионные петли всегда приводят к дополнительному множителю  $-1$ , а также *следу* от произведения дираковских матриц.

### Потенциал Юкавы

Теперь у нас есть все формальные правила, необходимые для вычисления амплитуд рассеяния в теории Юкавы. Прежде чем переходить к изучению КЭД, отвлечемся от абстракций и обратимся к конкретной физике, чтобы рассмотреть очень простое применение этих правил к рассеянию *нетождественных* фермионов в нерелятивистском пределе. Сравнивая амплитуду этого процесса с формулой для борновского приближения в нерелятивистской квантовой механике, можно определить потенциал  $V(r)$ , создаваемый взаимодействием Юкавы.

Если две взаимодействующих частицы нетождественны, то вклад дает только первая диаграмма в (4.119). Чтобы вычислить амплитуду в нерелятивистском пределе, сохраняем лишь слагаемые наименьшего порядка по 3-импульсам. Таким образом, с точностью до  $\mathcal{O}(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}'^2, \dots)$ , имеем

$$\begin{aligned}
 p &= (m, \mathbf{p}), & k &= (m, \mathbf{k}), \\
 p' &= (m, \mathbf{p}'), & k' &= (m, \mathbf{k}').
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

Используя эти выражения, получаем:

$$\begin{aligned}
 (p' - p)^2 &= -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4), \\
 u^s(p) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.,}
 \end{aligned}$$

где  $\xi^s$  — двухкомпонентный постоянный спинор, нормированный условием  $\xi^{s'\dagger} \xi^s = \delta^{ss'}$ . Тогда спинорные произведения в (4.119) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^{s'}(p') u^s(p) &= 2m \xi^{s'\dagger} \xi^s = 2m \delta^{ss'}; \\
 \bar{u}^{r'}(k') u^r(k) &= 2m \xi^{r'\dagger} \xi^r = 2m \delta^{rr'}.
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Таким образом, наш первый физический вывод состоит в том, что в этом нерелятивистском процессе рассеяния спин каждой частицы сохраняется по отдельности. Это приятный результат.

Собирая вместе вклады в амплитуду рассеяния (4.119), находим:

$$i\mathcal{M} = \frac{i g^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + m_\phi^2} 2m \delta^{ss'} 2m \delta^{rr'}. \tag{4.123}$$

Это выражение надо сравнить с борновским приближением для амплитуды рассеяния в нерелятивистской квантовой механике, записанной с помощью потенциала  $V(\mathbf{x})$ :

$$\langle p' | iT | p \rangle = -i\tilde{V}(\mathbf{q}) (2\pi) \delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}), \quad (\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}). \quad (4.124)$$

Очевидно, для взаимодействия Юкавы

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}. \quad (4.125)$$

(Множители  $2m$  в (4.123) возникают из релятивистских условий нормировки, и должны быть опущены при сравнении с (4.124), где предполагается стандартная нерелятивистская нормировка состояний. Дополнительный множитель  $\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  пропадает, когда мы интегрируем по импульсу мишени.)

Обращение фурье-образа для нахождения  $V(\mathbf{x})$  требует небольшого вычисления:

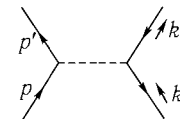
$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 + m_\phi^2} = \frac{-g^2}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{iqr}}{q^2 + m_\phi^2}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Контур в этом интеграле может быть замкнут в верхней полуплоскости, при этом берется вычет в простом полюсе в точке  $q = +im_\phi$ . Таким образом, получаем *притягивающий* «потенциал Юкавы»:

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-m_\phi r}, \quad (4.127)$$

с радиусом взаимодействия  $1/m_\phi = \hbar/m_\phi c$ , равным комптоновской длине волны обмениваемого бозона. Юкава взял этот потенциал за основу в теории ядерных сил и пошел обратным путем, начиная с радиуса сил (приблизительно 1 фм), получив массу требуемого бозона, названного пионом (приблизительно 200 МэВ).

Что получится, если мы будем рассеивать частицы на *античастицах*? Для процесса

$$f_1(p)\bar{f}_2(k) \longrightarrow f_1(p')\bar{f}_2(k'),$$


необходимо вычислить (в нерелятивистском приближении)

$$\bar{v}^s(k)v^{s'}(k') \approx m(\xi^{s\dagger}, -\xi^{s\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2m \delta^{ss'}. \quad (4.128)$$

Мы должны также разобраться с фермионным знаком «минус». Используя  $|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$  и  $\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| = \langle 0| b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}$ , можно записать свернутый матричный элемент как

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'| \overbrace{\bar{\psi}\psi} \overbrace{\bar{\psi}\psi} | \mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = \langle 0| b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'} \overbrace{\bar{\psi}\psi} \overbrace{\bar{\psi}\psi} a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle.$$

Чтобы выполнить свертки, необходимо сделать три перестановки операторов; так возникает общий множитель  $-1$ . В результате в (4.128) исчезает дополнительный знак «минус» и мы видим, что потенциал Юкавы между фермионом и антифермионом оказывается также притягивающим и равным по силе потенциалу между двумя фермионами.

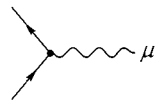
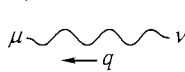
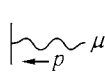
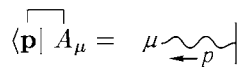
Осталось рассмотреть случай рассеяния двух антифермионов. Неудивительно, что потенциал снова будет притягивающим; имеется дополнительный знак «минус» вследствие замены  $\bar{u}$  на  $\bar{v}$ , а число необходимых для проведения свертки перестановок является четным. Таким образом, приходим к выводу, что потенциал Юкавы *универсально притягивающий*, является ли он потенциалом взаимодействия пары фермионов, пары антифермионов или пары фермион-антифермион.

### 4.8. Правила Фейнмана для квантовой электродинамики

Теперь мы готовы перейти от теории Юкавы к квантовой электродинамике. Чтобы сделать это, заменим скалярную частицу  $\phi$  на векторную частицу  $A_\mu$  и гамильтониан взаимодействия Юкавы на

$$H_{\text{int}} = \int d^3x e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (4.129)$$

Как изменятся фейнмановские правила? Ответ легко предположить, хотя и трудно доказать. В дополнение к правилам для фермионов из предыдущего раздела

Новая вершина:		= $-ie\gamma^\mu$ ;
Пропагатор фотона:		= $\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$ ;
Внешние линии фотона:		= $\epsilon_\mu(p)$ ;
		= $\epsilon_\mu^*(p)$ .

Фотоны обычно изображаются волнистыми линиями. Символ  $\epsilon_\mu(p)$  задает *вектор поляризации* фотона в начальном или конечном состоянии.

Чтобы оправдать эти правила, напомним, что в калибровке Лоренца (которую мы выбрали, чтобы сохранить явную релятивистскую инвариантность) уравнение поля для  $A_\mu$  имеет вид:

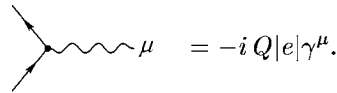
$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (4.130)$$

Таким образом, каждая компонента  $A$  в отдельности подчиняется уравнению Клейна–Гордона ( $s = m = 0$ ). Решениями этого уравнения в импульсном представлении будут функции  $\epsilon_\mu(p)e^{-ip \cdot x}$ , где  $p^2 = 0$  и  $\epsilon_\mu(p)$  — произвольный 4-вектор. Интерпретация  $\epsilon$  как вектора поляризации поля должна быть известна из классического электромагнетизма. Если разложить квантованное электромагнитное поле по полному набору классических решений волнового уравнения, как это делалось для поля Клейна–Гордона, то получим:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=0}^3 \left( a_{\mathbf{p}}^r \epsilon_\mu^r(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{r*} \epsilon_\mu^{r*}(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (4.131)$$

где  $r = 0, 1, 2, 3$  нумерует базис векторов поляризации. Множители внешних линий в вышеприведенных фейнмановских правилах немедленно получаются из этого разложения, также как мы получили  $u$  и  $v$  в качестве множителей внешних линий для дираковских частиц. Единственная тонкость заключается в том, что нужно ограничить начальные и конечные фотонные состояния поперечно поляризованными. Векторы поляризации этих состояний всегда имеют вид  $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$ , где  $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ . Для  $\mathbf{p}$ , направленного вдоль оси  $z$ , право- и левополяризованные векторы поляризации есть  $\varepsilon^\mu = (0, 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ .

Вид вершинного множителя в КЭД также просто объяснить, рассматривая гамильтониан взаимодействия (4.129). Обратим внимание, что  $\gamma$ -матрицы в амплитудах КЭД всегда находятся между спинорами или другими  $\gamma$ -матрицами с дираковскими индексами, свернутыми вдоль фермионной линии. Заметим также, что этот вид взаимодействия относится к случаю электрона (и его античастицы — позитрона). Вообще, для дираковской частицы с электрическим зарядом  $Q|e|$  имеет место формула:



$$\text{Diagram} = -i Q |e| \gamma^\mu.$$

Например, электрон имеет заряд  $Q = -1$ , верхний кварк — заряд  $Q_u = +2/3$  и нижний кварк —  $Q_d = -1/3$ .

Не существует простого способа получить формулу для пропагатора фотона, так что пока ограничимся правдоподобными рассуждениями. Так как электромагнитное поле в калибровке Лоренца удовлетворяет безмассовому уравнению Клейна–Гордона, то неудивительно, что пропагатор фотона почти идентичен пропагатору безмассовой частицы Клейна–Гордона. Однако множитель  $-g_{\mu\nu}$  требует пояснения. В силу лоренц-инвариантности пропагатор фотона должен быть изотропным тензором второго ранга, который может сворачиваться на каждом конце с вершинными матрицами  $\gamma^\mu$  и  $\gamma^\nu$ . Самый простой кандидат — это  $g^{\mu\nu}$ . Чтобы понять смысл полного знака пропагатора, вычислим его фурье-образ:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} e^{-i q \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{q}|} e^{-i q \cdot (x-y)} \cdot (-g_{\mu\nu}). \quad (4.132)$$

Предположительно это выражение равно  $\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle$ . Теперь положим  $\mu = \nu$  и возьмем предел  $x^0 \rightarrow y^0$  с положительного направления. Тогда эта величина становится нормой состояния  $A_\mu(x)|0\rangle$ , которая должна быть положительной. Мы видим, что наш выбор знака в пропагаторе означает, что три состояния, рожденные  $A_i$  с  $i = 1, 2, 3$ , действительно имеют положительную норму. Эти состояния включают все реальные (не виртуальные) фотоны, которые всегда имеют пространственноподобные поляризации. К сожалению, так как  $g_{\mu\nu}$  не положительно определен, состояния, рожденные полем  $A_0$ , неизбежно имеют отрицательную норму. Потенциально это серьезная проблема для любой теории с векторными частицами. Как мы покажем в разделе 5.5, для квантовой электродинамики состояния с отрицательной нормой, рожденные полем  $A_0$ , никогда не возникают в физических процессах. В разделе 9.4 будет дан строгий вывод выражения для пропагатора фотона.

### Кулоновский потенциал

В качестве простого применения фейнмановских правил, а также для лучшего понимания смысла знака пропагатора, повторим вычисления для нерелятивистского

рассеяния, проведенные в предыдущем разделе, но на сей раз в КЭД. Главный вклад в амплитуду равен

$$i\mathcal{M} = \begin{array}{c} p' \nearrow \\ \text{---} \\ p \nearrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \searrow k' \\ \text{---} \\ \searrow k \end{array} = (-ie)^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p' - p)^2} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k). \quad (4.133)$$

В нерелятивистском пределе

$$\bar{u}(p') \gamma^0 u(p) = u^\dagger(p') u(p) \approx +2m \xi'^\dagger \xi.$$

Можно легко проверить, что другие вклады  $\bar{u}(p') \gamma^i u(p)$  исчезают, если  $p = p' = 0$ ; следовательно, ими можно пренебречь по сравнению с  $\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$  в нерелятивистском случае. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &\approx \frac{+ie^2}{-|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} (2m \xi'^\dagger \xi)_p (2m \xi'^\dagger \xi)_k \cdot g_{00} = \\ &= \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} (2m \xi'^\dagger \xi)_p (2m \xi'^\dagger \xi)_k. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Сравнивая полученное со случаем Юкавы (4.123), видим, что имеется дополнительный множитель  $-1$ ; потенциал является *отталкивающим* потенциалом Юкавы с  $m = 0$ , то есть отталкивающим кулоновским потенциалом:

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}, \quad (4.135)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры. Для рассеяния частица-античастица прежде всего заметим, что

$$\bar{v}(k) \gamma^0 v(k') = v^\dagger(k) v(k') \approx +2m \xi^\dagger \xi'.$$

Присутствие матрицы  $\gamma^0$  устраняет знак «минус», который мы имеем в случае Юкавы. Нерелятивистская амплитуда рассеяния, следовательно, равна

$$i\mathcal{M} = \begin{array}{c} p' \nearrow \\ \text{---} \\ p \nearrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \searrow k' \\ \text{---} \\ \searrow k \end{array} = (-1) \cdot \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} (+2m \xi'^\dagger \xi)_p (+2m \xi^\dagger \xi')_k, \quad (4.136)$$

где множитель  $(-1)$  — это тот же самый фермионный знак «минус», который мы видели в случае Юкавы. Это *притягивающий* потенциал. Точно так же для антифермион-антифермионного рассеяния потенциал оказывается отталкивающим. Таким образом, мы проверили, что в квантовой теории поля при обмене векторной частицей одинаковые заряды отталкиваются, в то время как противоположные заряды притягиваются. Обратим внимание, что отталкивание в фермион-фермионном рассеянии возникло полностью из-за дополнительного множителя  $-g_{00} = -1$  в пропагаторе векторного бозонна. Тензорный бозон, например, гравитон имел бы пропагатор

$$\mu \nu \text{---} \text{---} \text{---} \rho \sigma = \frac{1}{2} \left( (-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma}) + (-g_{\mu\sigma})(-g_{\nu\rho}) \right) \left( \frac{i}{q^2 + i\varepsilon} \right),$$

который в нерелятивистских столкновениях давал бы множитель  $(-g_{00})^2 = +1$ ; это приводит к универсально притягивающему потенциалу. Это убеждает, что квантовая теория поля действительно воспроизводит очевидные свойства электрических и гравитационных сил:

Обменные частицы	$ff$ и $\bar{f}\bar{f}$	$f\bar{f}$
скаляр (Юкава)	притяжение	притяжение
вектор (электричество)	отталкивание	притяжение
тензор (гравитация)	притяжение	притяжение

## Задачи

**4.1.** Вернемся к проблеме рождения частиц Клейна–Гордона классическим источником. Напомним, что согласно гл. 2 этот процесс может быть описан гамильтонианом

$$H = H_0 + \int d^3x (-j(t, \mathbf{x})\phi(x)),$$

где  $H_0$  — свободный гамильтониан Клейна–Гордона,  $\phi(x)$  — поле Клейна–Гордона и  $j(x)$  —  $c$ -числовая скалярная функция. Мы нашли, что если система до включения источника находится в вакуумном состоянии, то среднее число частиц, рождаемых источником, равно

$$\langle N \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} |\tilde{j}(p)|^2.$$

В этой задаче мы проверим это утверждение и получим более детальную информацию, используя разложение в ряд теории возмущений по интенсивности источника.

- (а) Покажите, что вероятность того, что источник не рождает *ни одной* частицы, задается формулой:

$$P(0) = \left| \langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int d^4x j(x)\phi_I(x) \right] \right\} | 0 \rangle \right|^2.$$

- (б) Вычислите слагаемое в  $P(0)$  порядка  $j^2$  и покажите, что  $P(0) = 1 - \lambda + \mathcal{O}(j^4)$ , где  $\lambda$  равняется выражению, заданному выше для  $\langle N \rangle$ .
- (с) Представьте слагаемое, вычисленное в части (б), в виде фейнмановской диаграммы. Теперь представьте весь ряд теории возмущений для  $P(0)$  с помощью диаграмм. Покажите, что этот ряд собирается в экспоненту так, что он может быть точно просуммирован:  $P(0) = \exp(-\lambda)$ .
- (д) Вычислите вероятность того, что источник рождает одну частицу с импульсом  $k$ . Выполните это вычисление сначала с точностью  $\mathcal{O}(j)$ , а затем для всех порядков, используя прием из части (с) для суммирования рядов.
- (е) Покажите, что вероятность рождения  $n$  частиц задается формулой:

$$P(n) = (1/n!) \lambda^n \exp(-\lambda).$$

Это — *распределение Пуассона*.



(f) Докажите следующие факты для распределения Пуассона:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1; \quad \langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n) = \lambda.$$

Первое тождество говорит о том, что  $P(n)$  — правильно нормированные вероятности, в то время как второе подтверждает наше утверждение о  $\langle N \rangle$ . Вычислите среднее квадратичное отклонение  $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$ .

**4.2. Распад скалярной частицы.** Рассмотрим лагранжиан, включающий два вещественных скалярных поля  $\Phi$  и  $\phi$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mu\Phi\phi\phi.$$

Последнее слагаемое есть взаимодействие, которое позволяет  $\Phi$  частице распасться на две  $\phi$  частицы при условии, что  $M > 2m$ . Предполагая, что это условие выполнено, вычислите время жизни частицы  $\Phi$  в наинизшем порядке по  $\mu$ .

**4.3. Линейная сигма-модель.** Взаимодействия пионов при низкой энергии могут быть описаны феноменологической моделью, названной *линейной сигма-моделью*. По существу, эта модель состоит из  $N$  вещественных скалярных полей, связанных при помощи  $\phi^4$ -взаимодействия, которое симметрично относительно вращений  $N$  полей. Более определенно, пусть  $\Phi^i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  — набор  $N$  полей с гамильтонианом

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\Pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi^i)^2 + V(\Phi^2) \right),$$

где  $(\Phi^i)^2 = \Phi \cdot \Phi$  и

$$V(\Phi^2) = \frac{1}{2}m^2(\Phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}((\Phi^i)^2)^2$$

является функцией, симметричной относительно вращений поля  $\Phi$ . Для (классических) конфигураций поля  $\Phi^i(x)$ , которые постоянны в пространстве и времени, только это выражение дает вклад в гамильтониан  $H$ ; следовательно,  $V$  является потенциальной энергией поля.

(Какое отношение имеет этот гамильтониан к сильным взаимодействиям? Имеются два типа легких кварков  $u$  и  $d$ . Эти кварки идентичны в отношении сильного взаимодействия, но имеют разные массы. Если кварки безмассовые, то гамильтониан сильного взаимодействия инвариантен относительно унитарных преобразований 2-компонентного объекта  $(u, d)$ :

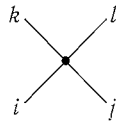
$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \exp(i\alpha \cdot \sigma/2) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}.$$

Это преобразование названо *изоспиновым вращением*. Если, кроме того, сильное взаимодействие описывается векторным «глюонным» полем (что верно в КХД), гамильтониан сильного взаимодействия инвариантен относительно изоспиновых вращений, проводимых отдельно для левых и правых компонентов кварковых полей. Таким образом, полная симметрия в КХД с двумя безмассовыми кварками есть  $SU(2) \times SU(2)$ . Известно, что  $SO(4)$  — группа вращений 4-мерного пространства — изоморфна группе  $SU(2) \times SU(2)$ , так что для  $N = 4$  линейная сигма-модель имеет ту же группу симметрии, что и сильное взаимодействие.)

- (а) Проанализируйте линейную сигма-модель для  $m^2 > 0$  замечая, что для  $\lambda = 0$  приведенный выше гамильтониан является в точности суммой гамильтонианов  $N$  независимых полей Клейна–Гордона. Тогда можно вычислить амплитуды рассеяния как ряд теории возмущений по параметру  $\lambda$ . Покажите, что пропагатор равен

$$\overbrace{\Phi^i(x)\Phi^j(y)} = \delta^{ij} D_F(x-y),$$

где  $D_F$  — стандартный пропагатор Клейна–Гордона для массы  $m$ , и что имеется одна вершина, заданная согласно правилу:



$$= -2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{il}\delta^{jk} + \delta^{ik}\delta^{jl}).$$

(Это означает, что вершина между двумя  $\Phi^1$  и двумя  $\Phi^2$  полями имеет значение  $(-2i\lambda)$ ; между четырьмя полями  $\Phi^1$  вершина имеет значение  $(-6i\lambda)$ .) Вычислите в главном порядке по  $\lambda$  дифференциальные сечения рассеяния  $d\sigma/d\Omega$  в системе центра инерции для процессов рассеяния

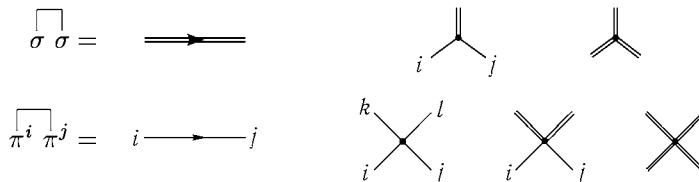
$$\Phi^1\Phi^2 \rightarrow \Phi^1\Phi^2, \quad \Phi^1\Phi^1 \rightarrow \Phi^2\Phi^2 \quad \text{и} \quad \Phi^1\Phi^1 \rightarrow \Phi^1\Phi^1$$

как функции энергии центра инерции.

- (б) Теперь рассмотрим случай  $m^2 < 0$ :  $m^2 = -\mu^2$ . В этом случае  $V$  имеет локальный максимум, а не минимум. Так как  $V$  — потенциальная энергия, то основное состояние теории находится не вблизи  $\Phi^i = 0$ , а получается при сдвиге  $\Phi^i$  по направлению к минимуму  $V$ . Вследствие вращательной инвариантности можно полагать, что этот сдвиг будет происходить в направлении  $N$ -ой компоненты. Тогда запишем:

$$\begin{aligned} \Phi^i(x) &= \pi^i(x), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \Phi^N(x) &= v + \sigma(x), \end{aligned}$$

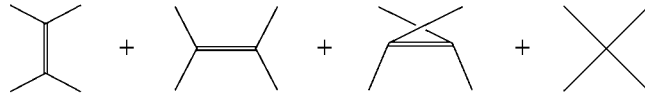
где  $v$  — константа, выбранная из условия минимизации  $V$ . (Запись  $\pi^i$  обозначает пионное поле и не должна быть спутана с каноническим импульсом). Покажите, что в этих новых координатах (при подстановке вместо  $v$  соответствующего выражения через параметры  $\lambda$  и  $\mu$ ) получаем теорию, содержащую массивное поле  $\sigma$  и  $N-1$  безмассовых пионных полей, взаимодействующих через слагаемое в потенциальной энергии кубичной и четвертой степени, которые становятся малыми при  $\lambda \rightarrow 0$ . Выпишите фейнмановские правила, задавая значения для пропагаторов и вершин:



- (с) Вычислите амплитуду рассеяния для процесса

$$\pi^i(p_1)\pi^j(p_2) \rightarrow \pi^k(p_3)\pi^l(p_4)$$

в главном порядке по  $\lambda$ . Здесь дают вклад четыре диаграммы



Покажите, что на пороге ( $\mathbf{p}_i = 0$ ) сумма этих диаграмм равна *нулю*. (Подсказка: может быть, прежде чем заняться общим случаем, сначала проще рассмотреть частный случай  $\pi^1 \pi^1 \rightarrow \pi^2 \pi^2$ , для которого только первая и четвертая диаграммы отличны от нуля.) Покажите, что в частном случае  $N = 2$  (один сорт пионов) слагаемое порядка  $\mathcal{O}(p^2)$  также сокращается.

(d) Добавим к  $V$  нарушающее симметрию слагаемое вида

$$\Delta V = -a\Phi^N,$$

где  $a$  — (малая) константа. (В КХД слагаемое такого вида возникает, если  $u$  и  $d$  имеют одинаковую ненулевую массу.) Найдите новое значение  $v$ , которое минимизирует  $V$ , и опишите теорию вблизи этой точки. Покажите, что пион приобретает массу порядка  $m_\pi^2 \sim a$  и что пионная амплитуда рассеяния при пороговой энергии теперь не исчезает и также пропорциональна  $a$ .

**4.4. Резерфордское рассеяние.** Сечение рассеяния электрона кулоновским полем ядра может быть вычислено в наинизшем порядке без квантования электромагнитного поля. Вместо этого будем трактовать заданное электромагнитное поле как классический потенциал  $A_\mu(x)$ . Гамильтониан взаимодействия равен

$$H_I = \int d^3x e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu,$$

где  $\psi(x)$  — обычное квантованное дираковское поле.

(a) Покажите, что элемент  $T$ -матрицы для электронного рассеяния на локализованном классическом потенциале в наинизшем порядке равен

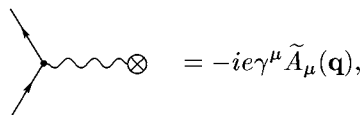
$$\langle p' | iT | p \rangle = -ie \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \cdot \tilde{A}_\mu(p' - p),$$

где  $\tilde{A}_\mu(q)$  — четырехмерный фурье-образ потенциала  $A_\mu(x)$ .

(b) Если  $A_\mu(x)$  не зависит от времени, то его фурье-образ содержит дельта-функцию от энергии. Тогда естественно определить

$$\langle p' | iT | p \rangle \equiv i\mathcal{M} \cdot (2\pi) \delta(E_f - E_i),$$

где  $E_i$  и  $E_f$  — начальная и конечная энергии частицы, и принять новое фейнмановское правило для вычисления  $\mathcal{M}$ :



где  $\tilde{A}_\mu(\mathbf{q})$  — трехмерный фурье-образ  $A_\mu(x)$ . При таком определении  $\mathcal{M}$  покажите, что сечение рассеяния на постоянном во времени и локализованном потенциале равно:

$$d\sigma = \frac{1}{v_i} \frac{1}{2E_i} \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2 (2\pi) \delta(E_f - E_i),$$

где  $v_i$  — начальная скорость частицы. Эта формула является естественной модификацией формулы (4.79). Проинтегрируйте по  $|p_f|$ , чтобы найти простое выражение для  $d\sigma/d\Omega$ .

- (с) Рассмотрите частный случай рассеяния электрона кулоновским потенциалом ( $A^0 = Ze/4\pi r$ ). В нерелятивистском пределе получите формулу Резерфорда:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4m^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}.$$

(Если воспользоваться некоторыми вычислительными приемами из раздела 5.1, не возникает трудностей при вычислении любых сечений рассеяния в релятивистском случае; см. задачу 5.1.)

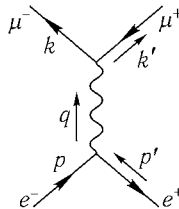
## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Наконец-то, после трех обширных глав, посвященных формализму, мы готовы к тому, чтобы осуществить ряд действительно релятивистских вычислений, начать исследование предсказаний КЭД. Сначала вернемся к обсуждавшемуся в гл. 1 процессу аннигиляции электрон-позитронных пар в пары более тяжелых фермионов. Этот базисный процесс будет детально рассмотрен в трех следующих разделах. Затем в разделах 5.4 и 5.5 мы проделаем несколько более простых расчетов КЭД. Задачи в конце главы касаются некоторых других процессов, описываемых КЭД. Более полное изложение КЭД можно найти в книгах Jauch, Rohrlich (1976) и Berestetskii, Lifshitz, Pitaevskii (1982).

### 5.1. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : введение

Реакция  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  самая простая из всех реакций в КЭД, и в то же время одна из наиболее важных в физике высоких энергий. Она является фундаментальной для понимания всех реакций, происходящих на  $e^+e^-$  коллайдерах. На самом деле именно этот процесс используется для калибровки коллайдеров. Для изучения свойств элементарных частиц оказывается чрезвычайно полезным связанный с предыдущим процесс  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  (аннигиляция электрон-позитронной пары с образованием пары кварк-антикварк).

В этом разделе мы вычислим в низшем порядке теории возмущений сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в случае *неполяризованных частиц*. В гл. 1 с помощью элементарных соображений мы угадали ответ в пределе, когда все фермионы безмассовые (выражение (1.8)). Теперь можно ослабить это условие и учесть при вычислениях массу мюона. Учет массы электрона не трудней, но не имеет смысла, так как отношение  $m_e/m_\mu \approx 1/200$  гораздо меньше, чем относительная ошибка, вносимая вкладом следующих порядков теории возмущений. С помощью правил Фейнмана из раздела 4.8 можно нарисовать диаграмму и выписать выражение для амплитуды процесса:



$$= \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k').$$

Слегка преобразуя это выражение и опуская спиновые индексы, получаем:

$$i\mathcal{M}(e^-(p)e^+(p') \rightarrow \mu^-(k)\mu^+(k')) = \frac{ie^2}{q^2} \left( \bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \right) \left( \bar{u}(k)\gamma_\mu v(k') \right). \quad (5.1)$$

Этот ответ для амплитуды  $\mathcal{M}$  выглядит простым, но все же он не так прозрачен, как хотелось бы.

Чтобы вычислить дифференциальное сечение, нужно получить выражение для  $|\mathcal{M}|^2$ , следовательно, нужно найти комплексно-сопряженную амплитуду к  $\mathcal{M}$ . Комплексное сопряжение произведений биспиноров типа  $\bar{v}\gamma^\mu u$  выполняется так:

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v.$$

(Здесь еще раз проявляется удобство использования дираковски-сопряженных биспиноров  $\bar{u}$ .) Следовательно, квадрат матричного элемента равен:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left( \bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p') \right) \left( \bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k) \right). \quad (5.2)$$

Мы пока что свободны в выборе любых конкретных спиноров  $u^s(p)$ ,  $\bar{v}^s(p)$  и т. д., соответствующих произвольному желаемому спиновому состоянию фермионов. В реальных экспериментах сложно контролировать спиновые состояния (хотя и возможно в принципе). Для этого нужно приготовить начальное состояние из поляризованных частиц и/или анализировать конечное состояние, используя зависящее от спина многократное рассеяние. В большинстве экспериментов электронный и позитронный пучки не поляризованы, а мюонные детекторы не способны определять поляризацию, так что измеряемое сечение есть *среднее* по спинам электрона и позитрона  $s$  и  $s'$  и *сумма* по спинам мюонов  $r$  и  $r'$ .

Если таким способом избавиться от информации о спинах, выражение для  $|\mathcal{M}|^2$  существенно упрощается. Мы хотим вычислить

$$\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2.$$

Суммирование по спинам проводится с помощью соотношений полноты из раздела 3.3:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m; \quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (5.3)$$

Выписывая явно спиновые индексы в первом множителе формулы (5.2), чтобы можно было свободно переставить  $v$  к  $\bar{v}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} \bar{v}_a^{s'}(p')\gamma_{ab}^\mu u_b^s(p)\bar{u}_c^s(p)\gamma_{cd}^\nu v_d^{s'}(p') &= (\not{p}' - m)_{da}\gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m)_{bc}\gamma_{cd}^\nu = \\ &= \text{trace}[(\not{p}' - m)\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma^\nu]. \end{aligned}$$

Аналогично поступая со вторым множителем, найдем желаемое более простое выражение для квадрата амплитуды:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu (\not{p} + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu]. \quad (5.4)$$

Спиноры  $u$  и  $v$  исчезли из ответа. Вместо этого возникло значительно более ясное выражение, записанное через  $\gamma$ -матрицы. Такая процедура является весьма общей. Любая амплитуда КЭД, содержащая внешние фермионы, после возведения в квадрат и суммирования или усреднения по спинам приобретает вид следа от произведения матриц Дирака.

### Техника вычисления следов

Этот последний шаг вряд ли привел к упрощению, если бы след по матрицам Дирака нужно было вычислять в лоб. Однако Фейнман нашел, что если воспользоваться алгебраическими свойствами этих матриц, то взятие следа действительно оказывается простой задачей. Так как вычисления подобных следов — необходимое условие решения практически любой задачи КЭД, сделаем паузу и разберемся раз и навсегда с техникой таких вычислений.

Итак, нам необходимо научиться вычислять след от произведения  $n$   $\gamma$ -матриц, где  $n = 0, 1, 2, \dots$  (Для задачи об аннигиляции  $e^+e^-$  достаточно значений  $n = 2, 3, 4$ .) Случай  $n = 0$  тривиален:  $\text{tr } \mathbf{1} = 4$ . Взять след от одной  $\gamma$ -матрицы тоже не составляет труда. Из явного выражения для матриц в киральном представлении следует, что

$$\text{tr } \gamma^\mu = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Полезно доказать этот результат более абстрактным способом, который легко обобщается на произведение любого нечетного числа матриц Дирака:

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma^\mu &= \text{tr } \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu && \text{(так как } (\gamma^5)^2 = 1) \\ &= -\text{tr } \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 && \text{(так как } \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0) \\ &= -\text{tr } \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu && \text{(используя свойства цикличности следа)} \\ &= -\text{tr } \gamma^\mu. \end{aligned}$$

Так как след от  $\gamma^\mu$  равен самому себе со знаком минус, то он равен нулю. Для  $n$   $\gamma$ -матриц получилось бы  $n$  минусов на втором шаге (когда вторая матрица  $\gamma^5$  перемещается через остальные направо), поэтому след от любого нечетного числа матриц Дирака равен нулю.

Чтобы взять след от произведения двух  $\gamma$ -матриц, снова воспользуемся свойствами антикоммутиации и циклической перестановки под знаком следа:

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu &= \text{tr} (2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1} - \gamma^\nu \gamma^\mu) && \text{(антикоммутиация)} \\ &= 8g^{\mu\nu} - \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu && \text{(циклическая перестановка)}. \end{aligned}$$

Отсюда  $\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$ . Подобным образом можно взять след от произведения любого четного числа  $\gamma$ -матриц: следует передвинуть первую  $\gamma$ -матрицу через остальные направо, используя соотношения антикоммутиации, а затем, пользуясь свойством циклической перестановки, вернуть ее налево. Так, например, след от произведения четырех матриц Дирака равен:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{tr}(2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = \\ &= \text{tr}(2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho} \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu). \end{aligned}$$

Используя свойство циклической перестановки для последнего слагаемого и перенося его в левую часть равенства, найдем, что

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu} \text{tr } \gamma^\rho \gamma^\sigma - g^{\mu\rho} \text{tr } \gamma^\nu \gamma^\sigma + g^{\mu\sigma} \text{tr } \gamma^\nu \gamma^\rho = \\ &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned}$$

Этим способом всегда можно свести след от  $n$   $\gamma$ -матриц к сумме следов от  $(n - 2)$   $\gamma$ -матриц. Легко получить выражение для  $n = 6$ , оно содержит 15 членов (число способов разбиения 6 индексов на пары так, чтобы получались слагаемые вида  $g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} g^{\alpha\beta}$ ).

К счастью, нигде в книге это выражение нам не понадобится. (Если вам тем не менее понадобится вычислять сложные следы от большого числа  $\gamma$ -матриц, может быть, стоит научиться работать с одной из нескольких компьютерных программ, умеющих манипулировать с символьными выражениями, содержащими матрицы Дирака.)

Начиная с раздела 5.2, нам часто будет нужно вычислять следы от произведений, содержащих  $\gamma^5$ . Так как  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , то след от произведения  $\gamma^5$  на любое нечетное число других  $\gamma$ -матриц равен нулю. Легко также показать, что равен нулю след от самой  $\gamma^5$ :

$$\text{tr } \gamma^5 = \text{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\text{tr}(\gamma^0\gamma^5\gamma^0) = -\text{tr}(\gamma^0\gamma^0\gamma^5) = -\text{tr } \gamma^5.$$

Тот же трюк годится и для  $\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5)$ , если вставить в произведение два множителя  $\gamma^\alpha$  с индексом  $\alpha$ , отличным от  $\mu$  и  $\nu$ . Первый не равный нулю след с  $\gamma^5$  содержит четыре других  $\gamma$ -матрицы Дирака. Трюк все еще работает в этом случае, пока какие-либо из этих  $\gamma$ -матриц совпадают, так что  $\text{tr} \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5 = 0$ , если  $(\mu\nu\rho\sigma)$  не является некоторой перестановкой (0123). Из правила антикоммутиации также следует, что перестановка любых двух индексов приводит просто к изменению знака следа, так что след  $\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)$  пропорционален  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Константа пропорциональности равна  $-4i$ , что легко проверить подстановкой  $(\mu\nu\rho\sigma) = (0123)$ .

Ниже для удобства выписаны все установленные нами соотношения:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{1}) &= 4, \\ \text{tr}(\text{любое нечетное число } \gamma\text{-матриц}) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}, \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \\ \text{tr}(\gamma^5) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0, \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выражения, полученные при использовании последней формулы, можно упростить с помощью следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24, \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu_\nu, \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Их легко получить, используя соображения симметрии, а затем вычисляя в частном случае для определения общей постоянной. Еще одно полезное тождество позволяет обратить порядок расположения  $\gamma$ -матриц под знаком следа:

$$\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \dots) = \text{tr}(\dots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu). \quad (5.7)$$

Для доказательства этого соотношения рассмотрим матрицу  $C \equiv \gamma^0\gamma^2$  (оператор зарядового сопряжения). Она удовлетворяет условиям  $C^2 = 1$  и  $C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$ . Таким образом, если под знаком следа находятся  $n$   $\gamma$ -матриц, то

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu \dots) &= \text{tr}(C\gamma^\mu C C\gamma^\nu C \dots) = \\ &= (-1)^n \text{tr}[(\gamma^\mu)^T(\gamma^\nu)^T \dots] = \\ &= \text{tr}(\dots\gamma^\nu\gamma^\mu), \end{aligned}$$



поскольку след равен нулю, если только  $n$  не является четным. Легко показать, что тождество (5.7) остается справедливым, если под знаком следа стоит одна или больше матриц  $\gamma^5$ .

Когда под знаком следа находится свертка двух  $\gamma$ -матриц, то их легко исключить до вычисления самого следа. Например,

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4. \quad (5.8)$$

Следующие *тождества свертки*, которые легко доказываются с помощью соотношений антикоммутиации, можно использовать, когда между  $\gamma$ -матрицами расположены другие комбинации:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho}, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Отметим обратный порядок индексов справа в последнем тождестве. Все тождества для  $\gamma$ -матриц собраны для дальнейших справок в Приложении.

### Сечение в случае неполяризованных частиц

Вернемся к выражению для квадрата матричного элемента (5.4). След по спиновым индексам электрона и позитрона равен:

$$\text{tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu] = 4[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(p \cdot p' + m_e^2)].$$

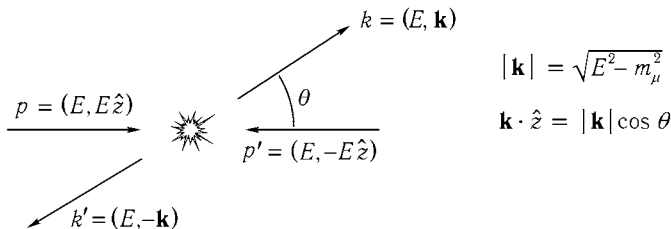
Члены, пропорциональные  $m$ , исчезают, так как содержат нечетное число  $\gamma$  матриц. Аналогично, след по спиновым индексам мюонов равен:

$$\text{tr}[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu] = 4[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k \cdot k' + m_\mu^2)].$$

Начиная с этого места, положим массу электрона равной нулю, как обсуждалось в начале раздела. Перемножая полученные выражения и собирая все слагаемые, находим простой результат:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + m_\mu^2(p \cdot p')]. \quad (5.10)$$

Чтобы получить более явную формулу, следует выбрать определенную систему отсчета и перейти от векторов  $p$ ,  $p'$ ,  $k$ ,  $k'$ ,  $q$  к обычным кинематическим переменным — углам рассеяния и энергиям в этой системе. На практике выбор системы отсчета диктуется условиями эксперимента. В этой книге для простоты мы обычно будем делать простейший выбор и вычислять сечения в системе центра инерции. Кинематика задачи в этой системе выглядит так:



Для вычисления квадрата матричного элемента нужны соотношения:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p + p')^2 = 4E^2; & p \cdot p' &= 2E^2; \\ p \cdot k &= p' \cdot k' = E^2 - E|\mathbf{k}| \cos \theta; & p \cdot k' &= p' \cdot k = E^2 + E|\mathbf{k}| \cos \theta. \end{aligned}$$

Теперь перепишем (5.10) в переменных  $E$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4} \left[ E^2(E - |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + E^2(E + |\mathbf{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right] = \\ &= e^4 \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Остается подставить это выражение в формулу для сечения, полученную в разделе 4.5. Так как в конечном состоянии имеются только две частицы, а все выражения выписываются в системе центра масс, то можно использовать упрощенное выражение (4.84). Кроме того, в нашей задаче  $|v_{sd} - v_{\mathcal{B}}| = 2$  и  $E_{sd} = E_{\mathcal{B}} = E_{\text{ци}}/2$ , так что

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{\text{ци}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{\text{ци}}} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Интегрируя по телесному углу, получаем полное сечение:

$$\sigma_{\text{полное}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{ци}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \quad (5.13)$$

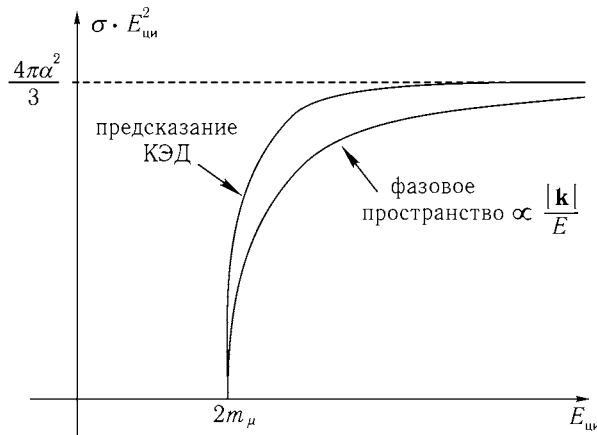


Рис. 5.1. Зависимость от энергии полного сечения рассеяния для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в сравнении с энергетической зависимостью «фазового пространства».

В пределе высоких энергий, когда  $E \gg m_\mu$ , эти формулы переходят в выражения, полученные в первой главе:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\xrightarrow{E \gg m_\mu} \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2} (1 + \cos^2 \theta); \\ \sigma_{\text{полное}} &\xrightarrow{E \gg m_\mu} \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{ци}}^2} \left( 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{m_\mu}{E} \right)^4 - \dots \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Отметим, что все эти выражения имеют правильную размерность. В высокоэнергетическом пределе  $E_{\text{ци}}$  — единственный размерный параметр в задаче, так что размерный анализ требует  $\sigma_{\text{полное}} \propto E_{\text{ци}}^{-2}$ . Так как с самого начала было известно, что  $\sigma_{\text{полное}} \propto \alpha^2$ , то вся задача фактически состояла в вычислении множителя  $4\pi/3$ .

Зависимость полного сечения (5.13) от энергии вблизи порога реакции показана на рисунке 5.1.

Конечно, сечение обращается в нуль при  $E_{\text{ци}} < 2m_\mu$ . Интересно сравнить кривую, получающуюся расчетом в КЭД, с той, которая получается из предположения, что квадрат матричного элемента не зависит от энергии, т.е. вся зависимость от энергии возникает от фазового объема  $\frac{|\mathbf{k}|}{E}$ . Чтобы проверить КЭД, эксперимент должен уметь фиксировать отклонения от наивных предсказаний, основанных только на вкладе фазового объема. Опыты по рождению пар  $\mu$  и  $\tau$  лептонов в самом деле подтверждают справедливость КЭД. На рисунке 5.2 формула (5.13) сравнивается с экспериментальными данными вблизи порога рождения  $\tau^+\tau^-$ .

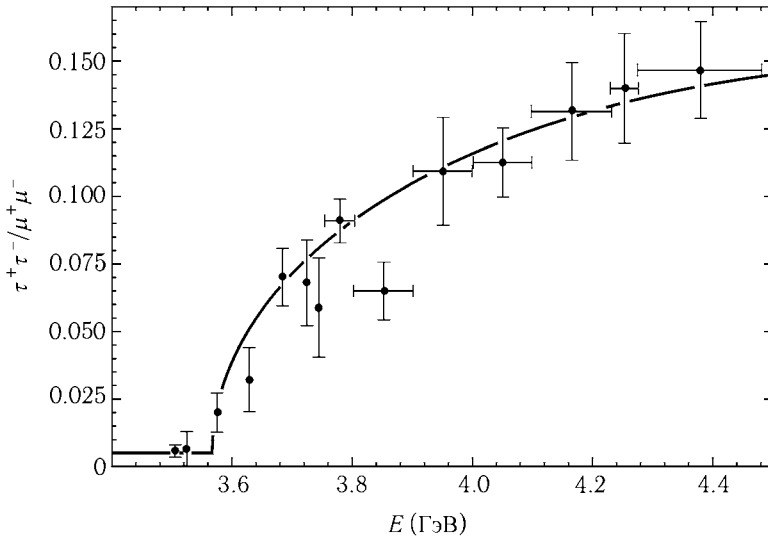


Рис. 5.2. Отношение  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-)/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$  вблизи порога рождения пар  $\tau^+\tau^-$  по данным коллаборации DELCO (W. Vacino, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **41**, 13 (1978)). Включена только доля  $\tau$ -распадов, поэтому общий масштаб мал. Кривая согласуется с теоретической формулой (5.13), если не считать небольшого не зависящего от энергии фона. Обработка данных приводит к значению  $m_\tau = 1782_{-7}^{+2}$  МэВ.

Прежде чем продолжить обсуждение результатов, сделаем паузу и повторим все этапы их получения.

Использованный метод полностью пригоден для непосредственного вычисления сечений процессов КЭД в случае неполяризованных частиц. Общая процедура состоит в следующем.

1. Изображаем диаграммы Фейнмана интересующего нас процесса.
2. Используя фейнмановские правила, выписываем выражение для амплитуды  $\mathcal{M}$ .
3. Возводим его в квадрат и усредняем или суммируем по спиновым состояниям, используя соотношения полноты (5.3). (Для процессов с участием фотонов существуют аналогичные соотношения полноты, которые будут выведены в разделе 5.5.)
4. Вычисляем следы, используя теоремы (5.5), приводим подобные члены и максимально упрощаем ответ.
5. Переходим в конкретную систему отсчета и рисуем картинку кинематических переменных в этой системе. Выражаем все векторы 4-импульсов через выбранный набор переменных типа  $E$  и  $\theta$ .
6. Подставляем окончательное выражение для квадрата матричного элемента в формулу (4.79) для сечения рассеяния и интегрируем по тем переменным в фазовом пространстве, которые не измеряются в эксперименте. В результате получаем желаемое дифференциальное сечение. (В нашем случае интегрирования проводились по импульсам  $\mathbf{k}'$  и  $|\mathbf{k}|$  и были осуществлены при выводе формулы (4.84).)

Хотя другие расчеты (особенно те, которые включают петлевые диаграммы) часто требуют дополнительных приемов, почти каждое вычисление в рамках КЭД включает в себя перечисленные выше пункты.

## Рождение пар кварк-антикварк

Асимптотическая зависимость формулы для сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  от энергии устанавливает характерный масштаб для всех сечений процессов  $e^+e^-$ -аннигиляции. Особенно важным примером является сечение процесса

$$e^+e^- \rightarrow \text{адроны},$$

т. е. полное сечение образования произвольного числа сильно взаимодействующих частиц.

Согласно современным представлениям о сильных взаимодействиях, в рамках теории, называемой квантовой хромодинамикой, все адроны состоят из дираковских фермионов, *кварков*. Кварки классифицируются по типам (*ароматам*), причем каждый кварк имеет определенную массу и электрический заряд. Кроме того, каждый кварк является носителем еще одного квантового числа, *цвета*, которое может принимать одно из трех значений. Как мы подробно расскажем в гл. 17, цвет играет роль «заряда» в КЭД. Согласно КЭД, простейшим  $e^+e^-$  процессом, приводящим к образованию адронов, является аннигиляция электрон-позитронной пары через виртуальный фотон с образованием пары кварк-антикварк

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}.$$

После рождения кварки взаимодействуют друг с другом, и сильное взаимодействие между ними порождает дополнительные кварковые пары. В конце концов кварки и антикварки объединяются друг с другом, образуя некоторое число мезонов и барионов. Чтобы перенести результаты по образованию мюонов на процесс с участием кварков, следует внести три изменения:

1. заменить электрический заряд мюона  $e$  электрическим зарядом кварка  $Q|e|$ ;
2. учесть каждый кварк три раза по одному на каждый цвет;
3. включить эффекты сильного взаимодействия для образованных кварка и антикварка.

С первыми двумя изменениями довольно легко разобраться. Чтобы учесть первый пункт, нужно просто знать массы и заряды кварка каждого атома. Для  $u$ ,  $c$ , и  $t$  кварков  $Q = 2/3$ , а для  $d$ ,  $s$ , и  $b$  кварков —  $Q = -1/3$ . Формулы для сечения пропорциональны квадрату заряда частицы в конечном состоянии, так что для получения сечения рождения любой разновидности кварков, можно просто вставить множитель  $Q^2$  в любую из этих формул.

Учет цвета необходим, так как в экспериментах измеряется только полное сечение рождения кварков всех трех цветов. (Реально наблюдаемые адроны бесцветны.) В любом случае учет цвета очень прост: достаточно умножить ответ на 3.

Однако, если вы кое-что знаете о сильных взаимодействиях, то вправе подумать, что все это не более чем большой розыгрыш. Очевидно, что третье изменение очень трудно реализовать, и оно кардинально изменяет предсказания КЭД! Поразительно, что в пределе высоких энергий влиянием сильного взаимодействия на процесс рождения кварков можно на самом деле полностью пренебречь.

Как мы узнаем в гл. III, единственный эффект сильного взаимодействия (в этом пределе) состоит в «одевании» кварков в конечном состоянии с образованием адронных пучков. Такое упрощение связано с явлением, называемым *асимптотической свободой*. Оно играет ключевую роль в признании квантовой хромодинамики правильной теорией сильных взаимодействий.

Итак, ожидается, что в пределе высоких энергий сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  стремится к  $3 \cdot Q^2 \cdot 4\pi\alpha^2 / 3E_{\text{ци}}^2$ . Величину сечения аннигиляции электрон-позитронной пары принято измерять в единицах:

$$1 \text{ единица } R \equiv \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{ци}}^2} = \frac{86.8 \text{ nbarns}}{(E_{\text{ци}} \text{ в ГэВ})^2}. \quad (5.15)$$

Значение сечения в единицах  $R$  равно, таким образом, отношению этого сечения к асимптотическому значению сечения  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , определяемому формулой (5.14). На опыте проще всего измерить полную вероятность рождения всех возможных типов адронов. В пределе высоких энергий можно ожидать, что

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) \xrightarrow{E_{\text{ци}} \rightarrow \infty} 3 \cdot \left( \sum_i Q_i^2 \right) R, \quad (5.16)$$

где суммирование производится по всем типам (ароматам) кварков массы, которых меньше, чем  $E_{\text{ци}}/2$ . Когда значение  $E_{\text{ци}}/2$  близко к одной из кварковых масс, сильное взаимодействие приводит к большим отклонениям от этого выражения. Наиболее ярко этот эффект проявляется в появлении при значениях энергии чуть меньше  $E_{\text{ци}} = 2m_q$  очень острых пиков в сечении, отвечающих *связанным состояниям*.

Результаты измерений сечения аннигиляции  $e^+e^-$  с образованием адронов при энергиях в диапазоне от 2.5 до 40 ГэВ показаны на рис. 5.3. Ясно видны три области: область низких энергий, где рождаются пары  $u$ ,  $d$ , и  $s$  кварков; область за порогом рождения  $c$  пар и область за порогом рождения  $b$  пар. Та часть зависимости, которая хорошо согласуется с (5.16), выделена на графике сплошными линиями. В каждой области эти линии хорошо согласуются с данными, пока энергия далека от порогов, где

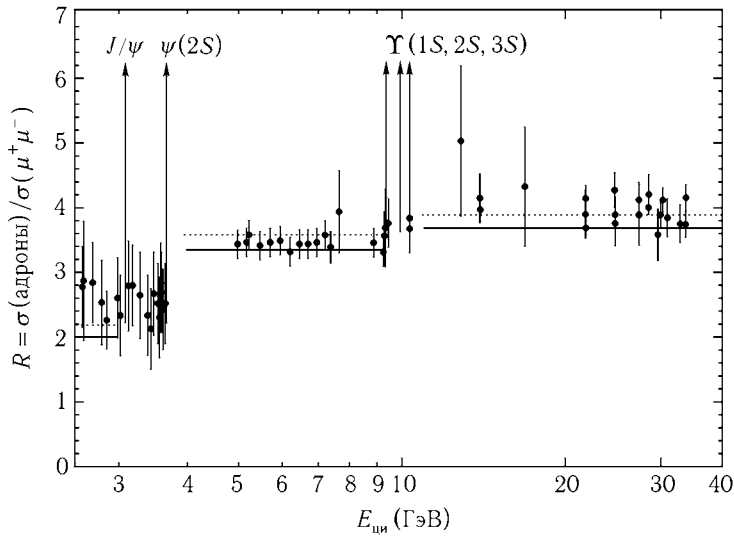


Рис. 5.3. Измерения полного сечения реакции  $e^+e^- \rightarrow$  адроны (M. Swartz, *Phys. Rev.* **D53**, 5268 (1996)). В этой работе даны подробные ссылки на разные эксперименты. Измерения сравниваются с предсказаниями квантовой хромодинамики (см. основной текст). Сплошная линия — простое предсказание (5.16).

высокоэнергетическое приближение неприменимо. Пунктирной линией показаны предсказания теории с учетом поправок высших порядков КХД, которые будут обсуждаться в разделе 17.2.

Объяснение величины сечения аннигиляции  $e^+e^-$  является замечательным успехом КХД. В частности, экспериментальное подтверждение множителя 3 в формуле (5.16) считается одним из доказательств существования цвета.

Угловая зависимость сечения аннигиляции также экспериментально наблюдалась\*.

При высоких энергиях адроны-продукты реакции испускаются в виде *струй*, т.е. сгустков нескольких адронов, движущихся приблизительно в одном направлении. В большинстве случаев образуется две струи с противоположно направленными импульсами, и угловое распределение этих струй действительно имеет вид  $(1 + \cos^2 \theta)$ .

## 5.2. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : спиральная структура

В общем случае довольно легко вычислить (и измерить) сечение реакции с неполяризованными частицами, однако понять полученное выражение непросто. Какова природа множителя  $(1 + \cos^2 \theta)$ ? На этот вопрос можно ответить, вычисляя сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  для каждого конкретного набора ориентаций спинов частиц. Сначала нужно выбрать базис поляризованных состояний. Чтобы получить простой ответ в пределе высоких энергий, лучше всего было бы квантовать каждый спин вдоль направления движения частицы, то есть использовать состояния с определенной спиральностью. Но вспомним, что в пределе равных нулю масс состояния дираковской частицы с левой и правой спиральностью преобразуются по различным представлениям группы Лоренца. Таким образом, можно ожидать, что они независимы. Так это и есть на самом деле.

\*Обзор по рождению адронов в процессе электрон-позитронной аннигиляции — P. Duinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 325 (1982).

В этом разделе двумя различными способами вычислим сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в случае поляризованных частиц, используя спиральный базис: а) используя технику вычисления следов и операторов проектирования на состояния с определенной спиральностью; б) с помощью непосредственной подстановки в формулу для амплитуды  $\mathcal{M}$  явных выражений для спиноров. В этом разделе будем проводить вычисления в пределе высоких энергий, когда все фермионы эффективно безмассовые (можно выполнить расчет и в случае меньших энергий, но это сложнее сделать технически, а результат, который мы получим, не будет более поучителен)\*.

И в первом, и во втором методе вычисления сечения поляризованных частиц исходным является выражение для амплитуды  $\mathcal{M}$  (5.1). Как и ранее, мы хотим использовать тождества для суммирования по спинам и записать квадрат амплитуды через следы, хотя теперь мы хотим рассматривать только один набор поляризаций в данный момент. Для этого заметим, что для безмассовых фермионов матрицы

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

являются *проекционными операторами* на правые и левые спиноры, соответственно. Таким образом, если в (5.1) выполнить замену:

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \longrightarrow \bar{v}(p')\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) u(p),$$

амплитуда рассеяния правополяризованного электрона не изменится, а амплитуда рассеяния левополяризованного электрона обратится в нуль. Кроме того, так как

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) u(p) = v^\dagger(p') \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) \gamma^0 \gamma^\mu u(p), \quad (5.18)$$

то эта же замена накладывает требование, чтобы  $v(p')$  также был правополяризованным спинором. Из результата раздела 3.5 мы знаем, что правый спинор  $v(p')$  соответствует *левополяризованному* позитрону. Отсюда, амплитуда процесса аннигиляции равна нулю в том случае, когда и электрон, и позитрон правополяризованы. В общем случае, амплитуда обращается в нуль (в безмассовом пределе), за исключением случая, когда электрон и позитрон имеют разные спиральности или, что то же самое, спиноры, им соответствующие, имеют одинаковые спиральности. После введения проекционных операторов в выражение для квадрата амплитуды можно просуммировать по спиновым состояниям электрона и позитрона. Из четырех слагаемых в сумме только одно (то, которое нам нужно) не равно нулю. Для случая правополяризованного электрона и левополяризованного позитрона электронная часть  $|\mathcal{M}|^2$  равна:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{спины}} \left| \bar{v}(p')\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) u(p) \right|^2 &= \sum_{\text{спины}} \bar{v}(p')\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) v(p') = \\ &= \text{tr} \left[ \not{p}'\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) \not{p}\gamma^\nu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) \right] = \\ &= \text{tr} \left[ \not{p}'\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) \right] = \\ &= 2(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta). \end{aligned} \quad (5.19)$$

\*Общий анализ элементов  $S$ -матрицы между состояниями определенной спиральности дан в замечательной работе M. Jacob and G. C. Wick, *Ann. Phys.* **7**, 404 (1959).

По лоренцевым индексам затем нужно произвести свертку с мюонной частью квадрата амплитуды. Аналогичное вычисление для левополяризованного  $\mu^+$  и правополяризованного  $\mu^-$  дает

$$\sum_{\text{спины}} \left| \bar{u}(k) \gamma_\mu \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) v(k') \right|^2 = 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma). \quad (5.20)$$

Свертывая (5.19) и (5.20), получаем, что квадрат амплитуды процесса  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_R^+$  в системе центра инерции равен:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} \left[ 2(p \cdot k)(p' \cdot k') + 2(p \cdot k')(p' \cdot k) - \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p'_\alpha p_\beta k^\rho k'^\sigma \right] = \\ &= \frac{8e^4}{q^4} \left[ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) \right] = \\ &= \frac{16e^4}{q^4} (p \cdot k')(p' \cdot k) = \\ &= e^4 (1 + \cos \theta)^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Дифференциальное сечение можно получить подстановкой этого выражения в (4.85):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2} (1 + \cos \theta)^2. \quad (5.22)$$

Нет необходимости снова повторять все вычисления для получения трех остальных не равных нулю спиральных амплитуд. Например, выражение для квадрата амплитуды процесса  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$  выглядит точно так же, как (5.20) с точностью до замены в его левой части  $\gamma^5$  на  $-\gamma^5$ , а, следовательно, в правой —  $\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$  на  $-\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$ . Учитывая это изменение знака в (5.21), легко находим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2} (1 - \cos \theta)^2. \quad (5.23)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2} (1 - \cos \theta)^2; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{ци}}^2} (1 + \cos \theta)^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

(Эти два результата, на самом деле, следуют из предыдущих в силу инвариантности относительно преобразования четности.) Как мы видели из (5.18), остальные 12 сечений (например, процесса  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_L^+$ ) равны нулю. Сложив все 16 вкладов и поделив на 4 (чтобы усреднить по поляризациям электрона и позитрона), мы вновь получим сечение (5.14) для случая неполяризованных частиц в безмассовом пределе. Заметим, что сечение (5.22) процесса  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$  обращается в нуль при  $\theta = 180^\circ$ . Это именно то, что мы ожидали, потому что для  $\theta = 180^\circ$  полный угловой момент конечного состояния противоположен угловому моменту начального состояния (рис. 5.4).

Этим завершается первый способ вычисления сечения аннигиляции  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . Повторим это вычисление теперь другим способом, более непосредственным, ясным



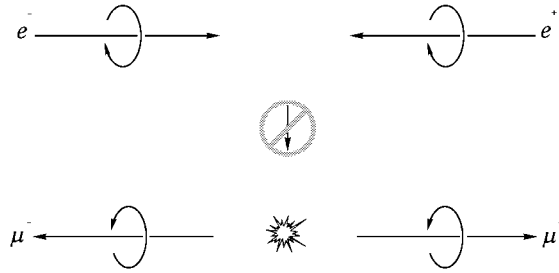


Рис. 5.4. В силу закона сохранения момента импульса при измерении  $z$ -компоненты момента она должна иметь то же значение, что и в начале процесса.

и менее сложным. Будем вычислять амплитуду  $\mathcal{M}$ , непосредственно используя явные выражения для спиноров и  $\gamma$ -матриц. На самом деле этот метод имеет ряд недостатков. Например, мы вынуждены уже на ранних этапах вычисления выбирать определенную систему отсчета, тем самым явная лоренц-инвариантность на каждом шаге расчета теряется. Кроме того, с практической точки зрения такой способ расчета довольно громоздок кроме нерелятивистского и ультрарелятивистского пределов.

Снова рассмотрим амплитуду

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \left( \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \right) \left( \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k') \right). \quad (5.25)$$

В пределе высоких энергий общие выражения для дираковских спиноров принимают вид:

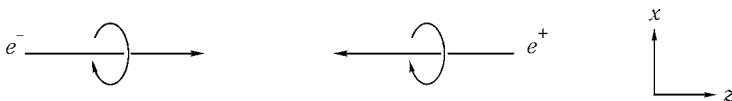
$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \sigma) \xi \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \sigma) \xi \end{pmatrix}; \quad (5.26)$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \sigma) \xi \\ -\frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \sigma) \xi \end{pmatrix}.$$

Правый спинор удовлетворяет уравнению  $(\hat{p} \cdot \sigma) \xi = +\xi$ , а левый —  $(\hat{p} \cdot \sigma) \xi = -\xi$ . (Стоит еще раз напомнить, что правый спинор для частиц соответствует левому спинору для античастиц, и наоборот.) Для вычисления выражений типа  $\bar{v} \gamma^\mu u$  нужна формула:

$$\gamma^0 \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Отсюда явно видно, что амплитуда процесса равна нулю, если один из спиноров правый, а другой — левый. Пользуясь терминологией гл. 1, коэффициенты Клебша–Гордана, связывающие векторный фотон с произведением таких спиноров, равны нулю. Эти коэффициенты совпадают с недиагональными элементами матрицы  $\gamma^0 \gamma^\mu$  (в киральном представлении). Выберем теперь  $p$  и  $p'$  так, чтобы они были направлены в направлениях  $\pm z$ , и рассмотрим сначала случай, когда электрон правополяризован, а позитрон — левополяризован:



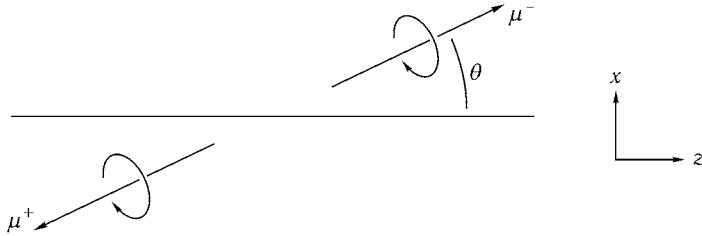
Тогда для электрона имеем  $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , что соответствует спину, направленному вверх вдоль оси  $z$ , а для позитрона —  $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , что также соответствует (физическому) спину вверх вдоль оси  $z$ . Для обеих частиц  $(\hat{p} \cdot \sigma)\xi = +\xi$ , так что спиноры равны:

$$u(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v(p') = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Электронная половина матричного элемента равна поэтому

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = 2E (0, -1)\sigma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2E (0, 1, i, 0). \quad (5.29)$$

Это выражение можно интерпретировать следующим образом: виртуальный фотон циркулярно поляризован в положительном направлении вдоль оси  $z$ , и его вектор поляризации равен  $\epsilon_+ = (1/\sqrt{2})(\hat{x} + i\hat{y})$ . Теперь следует вычислить мюонную половину матричного элемента. Предположим, что  $\mu^-$  испускается под углом  $\theta$  к оси  $z$ , и рассмотрим сначала случай, когда он правополяризован (а  $\mu^+$  левополяризован):



Чтобы вычислить  $\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')$ , можно было бы вернуться к выражениям (5.26), но тогда нужно найти правильные спиноры  $\xi$ , соответствующие поляризации вдоль импульса мюона. Удобно воспользоваться следующим приемом. Так как любое выражение вида  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  преобразуется как 4-вектор, можно просто повернуть выражение (5.29). Выполнив поворот вектора на угол  $\theta$  в плоскости  $xz$ , найдем:

$$\begin{aligned} \bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') &= [\bar{v}(k')\gamma^\mu u(k)]^* = \\ &= [-2E(0, \cos\theta, i, -\sin\theta)]^* = -2E(0, \cos\theta, -i, -\sin\theta). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Этот вектор вновь можно интерпретировать, как вектор поляризации виртуального фотона. Ненулевая амплитуда получится при условии, если скалярное произведение этого вектора с (5.29) не равно нулю. После подстановки (5.29) и (5.30) в (5.25) мы видим, что амплитуда равна:

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = \frac{e^2}{q^2} (2E)^2 (-\cos\theta - 1) = -e^2 (1 + \cos\theta), \quad (5.31)$$

в согласии (с точностью до знака) с (1.6) и (5.21). Дифференциальное сечение для данного набора спиральностей можно получить уже известным нам способом, что приводит к (5.22).

Три другие не обращающиеся в нуль спиральные амплитуды можно вычислить аналогично. Для левополяризованного электрона и правополяризованного позитрона легко находим:

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = -2E(0, 1, -i, 0) \equiv -2E \cdot \sqrt{2} \epsilon_-^\mu.$$

Выполним поворот, чтобы получить вектор, соответствующий левополяризованному  $\mu^-$  и правополяризованному  $\mu^+$ :

$$\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') = -2E(0, \cos\theta, i, \sin\theta).$$

Подставляя эти куски в различных комбинациях, получим оставшиеся амплитуды:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= -e^2(1 + \cos\theta); \\ \mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = -e^2(1 - \cos\theta). \end{aligned} \quad (5.32)$$

### 5.3. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : нерелятивистский предел

Перейдем теперь к другому концу спектра и обсудим нерелятивистский предел процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Когда  $E$  едва превышает массу мюона  $m_\mu$ , наш предыдущий результат (5.12) для сечения в случае неполяризованных частиц примет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{2E_{\text{ци}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{ци}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{E}. \quad (5.33)$$

Вычисляя амплитуду с точными выражениями для спиноров, мы можем воспроизвести этот результат, заодно узнав кое-что о спиновой зависимости реакции. Снова начнем с матричного элемента

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \left( \bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \right) \left( \bar{u}(k)\gamma_\mu v(k') \right).$$

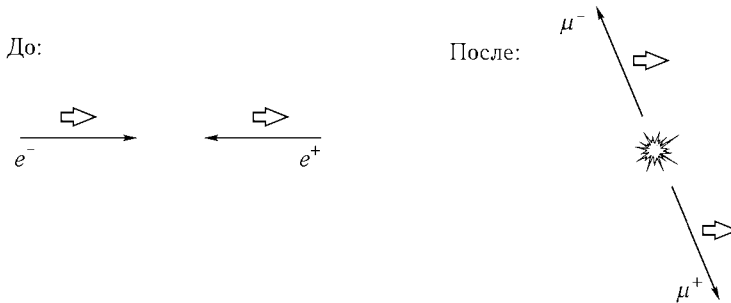


Рис. 5.5. В нерелятивистском пределе полный спин системы сохраняется, поэтому оба образовавшихся мюона имеют спин, направленный вдоль оси  $z$ .

Электрон и позитрон по-прежнему существенно релятивистские, так что это выражение будет самым простым, если выбрать состояния этих частиц с определенной спиральностью. Пусть электрон правополяризован и движется в положительном направлении вдоль оси  $z$ , а позитрон — левополяризован и движется в отрицательном направлении вдоль оси  $z$ . Тогда из (5.29) следует, что

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = -2E(0, 1, i, 0). \quad (5.34)$$

В другой половине матричного элемента следует использовать нерелятивистские выражения:

$$u(k) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad v(k') = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi' \\ -\xi' \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

В дальнейшем обсуждении в этом разделе не следует забывать, что спинор  $\xi'$  соответствует перевернутому спину античастицы. Оставляя пока мюонные спиноры  $\xi$  и  $\xi'$  неопределенными, можно без труда получить:

$$\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') = m(\xi^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ -\xi' \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{для } \mu = 0, \\ -2m\xi^\dagger \sigma^i \xi' & \text{для } \mu = i. \end{cases} \quad (5.36)$$

Чтобы найти  $\mathcal{M}$ , свернем (5.34) с (5.36) и умножим результат на  $e^2/q^2 = e^2/4m^2$ . Окончательный ответ:

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-) = -2e^2 \xi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi'. \quad (5.37)$$

Так как это выражение не зависит от угла, мюоны равновероятно вылетают во всех направлениях. Точнее говоря, они испускаются в  $s$ -волне, то есть их угловой момент равен нулю. Сохранение углового момента требует, чтобы полный спин конечного состояния был равен 1, и, действительно, произведение матриц дает нуль, если только мюон, и антимюон не поляризованы вдоль оси  $z$  (рис. 5.5).

Суммируя по спиновым состояниям мюона и антимюона, получим  $\mathcal{M}^2 = 4e^4$ , что позволяет записать сечение в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{\alpha^2}{E_{\text{цм}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{E}. \quad (5.38)$$

Для случая левополяризованного электрона и правополяризованного позитрона получается такое же выражение. Усредненное по спинам сечение реакции составляет  $2 \cdot (1/4)$  от усредненного в согласии с (5.33).

### Связанные состояния

До сих пор считалось, что начальные и конечные состояния в процессах рассеяния — это состояния изолированных отдельных частиц. Однако вблизи порога реакции кулоновское взаимодействие между мюонами становится существенным. Если энергия лишь чуть ниже пороговой, пары мюон-антимюон могут образовывать электромагнитные связанные состояния.

Изучение связанных состояний — богатый красивыми результатами и сложный раздел квантовой теории поля, но он лежит за пределами этой книги\*. К счастью, многие известные в природе связанные состояния можно рассматривать как нерелятивистские системы (по крайней мере, в первом приближении), в которых скорости относительного движения малы. Процесс рождения из вакуума частиц, образующих связанную систему, является тем не менее релятивистском эффектом и требует для

\*Хорошие обзоры по связанным состояниям в квантовой теории поля можно найти в статьях Bodwin, Yennie, Gregorio, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 723 (1985), и Sapirstein и Yennie, в сборнике Kinoshita (1990).

своего описания применения квантовой теории поля. В этом разделе мы разовьем формализм для вычисления амплитуды рождения и аннигиляции двухчастичных нерелятивистских связанных состояний. Начнем с вычисления сечения рождения связанного состояния пары мюон-антимюон в процессе  $e^+e^-$  аннигиляции.

Рассмотрим сначала случай, когда спины позитрона и электрона направлены вверх вдоль оси  $z$ . Из предыдущего обсуждения нам известно, что спины мюона и антимюона будут сонаправлены, и единственное связанное состояние, которое может родиться, обладает спином 1, также направленным вверх. Амплитуда рождения свободных мюонов с этой конфигурацией спинов равна:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1\uparrow, \mathbf{k}_2\uparrow) = -2e^2 \quad (5.39)$$

и не зависит от импульсов мюона и антимюона (которые теперь обозначаются  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ ).

Теперь необходимо понять, как записать связанное состояние через состояния свободных частиц. Для произвольной системы, состоящей из двух нерелятивистских частиц с одинаковыми массами, радиус-вектор центра инерции и вектор относительной координаты равны:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (5.40)$$

Соответствующие сопряженные импульсы:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (5.41)$$

Полный импульс  $\mathbf{K}$  в системе центра инерции равен нулю. Если известна сила взаимодействия между частицами (для  $\mu^+\mu^-$  это просто кулоновское притяжение), можно решить нерелятивистское уравнение Шредингера и найти шредингеровскую волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$ . Связанное состояние является просто линейной суперпозицией свободных состояний с определенными  $\mathbf{r}$  или  $\mathbf{k}$ , взвешенных с этой волновой функцией. Удобней строить такую суперпозицию в импульсном, а не координатном представлении, используя фурье-преобразование  $\psi(\mathbf{r})$ :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}); \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (5.42)$$

Если  $\psi(\mathbf{r})$  нормирована как обычно,  $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$  определяет амплитуду вероятности обнаружения состояния с импульсом  $\mathbf{k}$ . Явное выражение для волновой функции связанного состояния с массой  $M \approx 2m$ , импульсом центра инерции  $\mathbf{K} = 0$  и спином 1, направленным вверх, имеет вид:

$$|B\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} |\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow\rangle. \quad (5.43)$$

Благодаря множителям  $(1/\sqrt{2m})$  наши релятивистские нормированные состояния свободных частиц превращаются в такие состояния, что интеграл от их произведения  $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$  оказывается нормированным на 1. (На самом деле нужно писать  $\sqrt{2E_{\pm\mathbf{k}}}$ , но в нерелятивистском пределе  $|\mathbf{k}| \ll m$ .) Множитель  $\sqrt{2M}$  за знаком интеграла восходит к релятивистски-инвариантной нормировке, которая подразумевается в нашей формуле для сечения. Эти нормировочные множители можно легко модифицировать для описания

связанного состояния с ненулевым полным моментом  $\mathbf{K}$ . Имея выражение для связанного состояния, теперь можно выписать амплитуду его рождения:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{2M} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{2m}} \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow). \quad (5.44)$$

Так как амплитуда свободного состояния (5.39) не зависит от импульсов мюонов, то интеграл по  $\mathbf{k}$  равен  $\psi^*(0)$ , т. е. координатной волновой функции, взятой в начале координат. Вполне естественно, что амплитуда рождения двухчастичного состояния точечным виртуальным фотоном должна быть пропорциональна значению волновой функции в нуле. Собирая эти результаты, находим, что амплитуда равна:

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \psi^*(0). \quad (5.45)$$

Прежде чем вычислять сечение по заданной амплитуде, обобщим рассуждения на случай связанных состояний с произвольными спиновыми конфигурациями. Анализ, аналогичный тому, что привел к (5.37), показывает, что любой элемент  $S$ -матрицы для рождения нерелятивистских фермионов с импульсами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$  имеет вид спинового матричного элемента:

$$i\mathcal{M}(\text{что-то} \rightarrow \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \xi^\dagger [\Gamma(\mathbf{k})] \xi', \quad (5.46)$$

где  $\Gamma(\mathbf{k})$  — некоторая  $2 \times 2$ -матрица. Заменяем теперь спиноры нормированной волновой функцией связанного состояния. В только что рассмотренном примере была сделана замена:

$$\xi' \xi^\dagger \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

В общем случае состояние со спином 1 получается заменой:

$$\xi' \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.48)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор. Выбор  $\mathbf{n} = (\hat{x} + i\hat{y})/\sqrt{2}$  соответствует (5.47), а  $\mathbf{n} = (\hat{x} - i\hat{y})/\sqrt{2}$  и  $\mathbf{n} = \hat{z}$  дают оставшиеся два состояния для спина 1:  $\downarrow\downarrow$  и  $(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ . (Относительный знака минус в (5.48) в последнем случае появляется в соответствии с правилом (3.135) для перевернутого спина.) Аналогично, состояние с нулевым спином  $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$  получается с помощью замены

$$\xi' \xi^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}, \quad (5.49)$$

содержащей единичную  $2 \times 2$  матрицу. С помощью этих правил от элемента  $S$ -матрицы вида (5.46) можно легко перейти к элементу  $S$ -матрицы, соответствующему образованию связанного состояния в покое:

$$i\mathcal{M}(\text{что-то} \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) \text{tr} \left( \frac{\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}} \Gamma(\mathbf{k}) \right), \quad (5.50)$$

где след берется по индексам двухкомпонентного спинора. В случае связанного состояния со спином 0 нужно заменить  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  на единичную матрицу.

### Рождение и распад векторного мезона

Легко преобразовать (5.45) в выражение для сечения рождения  $\mu^+\mu^-$ -связанных состояний в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции. Чтобы облегчить извлечение физической информации из этого выражения, введем векторы поляризации для начального и конечного спинового состояния:  $\varepsilon_+ = (\hat{x} + i\hat{y})/\sqrt{2}$ , из (5.29) и  $\mathbf{n}$ , из (5.48). Теперь (5.45) можно переписать в более инвариантной форме:

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow B) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) (\mathbf{n}^* \cdot \varepsilon_+) \psi^*(0). \quad (5.51)$$

Спиновая поляризация связанного состояния  $\mathbf{n}$  проектируется на  $\varepsilon_+$ . Отметим, что если начальные электроны не поляризованы, то сечение рождения  $B$  включает усреднение по поляризациям:

$$\frac{1}{4} (|\mathbf{n}^* \cdot \varepsilon_+|^2 + |\mathbf{n}^* \cdot \varepsilon_-|^2) = \frac{1}{4} ((n^x)^2 + (n^y)^2). \quad (5.52)$$

Таким образом, связанные состояния будут преимущественно поляризованы вдоль оси столкновения электрона и позитрона.

Предполагая, что пучок электронов не поляризован, и суммируя в (5.52) по трем возможным направлениям  $\mathbf{n}$ , найдем следующее выражение для полного сечения рождения связанного состояния:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \frac{1}{2} \frac{1}{2m} \frac{1}{2m} \int \frac{d^3K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_K} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p' - K) \frac{2}{M} (4e^4) \frac{1}{2} |\psi(0)|^2. \quad (5.53)$$

Отметим, что интеграл по одночастичному фазовому пространству устраняет только три из четырех дельта-функций. Принято переписывать оставшуюся дельта-функцию, используя соотношение  $\delta(P^0 - K^0) = 2K^0 \delta(P^2 - K^2)$ . Тогда

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 64\pi^3 \alpha^2 \frac{|\psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{\text{цм}}^2 - M^2). \quad (5.54)$$

Здесь дельта-функция означает, что полная энергия в системе центра инерции равна массе связанного состояния; таким образом, связанное состояние рождается как резонанс в электрон-позитронной аннигиляции. Если оно имеет конечное время жизни, то дельта-функция уширяется, превращаясь в резонанский пик. Более существенным механизмом такого уширения является разброс по энергиям частиц в пучке. В любом случае (5.54) правильно предсказывает площадь под резонансным пиком.

Если связанное состояние  $B$  может образоваться в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции, оно может и аннигилировать с образованием  $e^+e^-$ , или любой другой достаточно легкой пары лептонов. Согласно (4.86) полная ширина  $B$  для этой моды распада дается формулой

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{1}{2M} \int d\Pi_2 |\mathcal{M}|^2, \quad (5.55)$$

где  $\mathcal{M}$  — комплексно-сопряженный элемент к (5.51), по которому вычислялось сечение рождения  $B$ . Следовательно,

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \left( \frac{1}{2\pi} \frac{d\cos\theta}{2} \right) \frac{8e^4}{M} |\psi(0)|^2 (|\mathbf{n} \cdot \varepsilon|^2 + |\mathbf{n} \cdot \varepsilon^*|^2). \quad (5.56)$$

Теперь нужно просуммировать по состояниям поляризации электронов и усреднить по трем возможным значениям  $\mathbf{n}$ , после чего получим:

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{3} \frac{|\psi(0)|^2}{M^2}. \quad (5.57)$$

Формула для ширины распада  $B$  очень похожа на выражение для сечения его рождения, и в этом нет ничего удивительного: в обоих вычислениях фигурирует квадрат одного и того же матричного элемента, просуммированный по начальным и конечным поляризациям. Два вычисления отличаются только тем, как произведено усреднение по поляризациям, и фазовыми объемами. Если следовать этой логике, то связь между сечением рождения и шириной:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = 4\pi^2 \cdot \frac{3\Gamma(B \rightarrow e^+e^-)}{M} \cdot \delta(E_{\text{ци}}^2 - M^2), \quad (5.58)$$

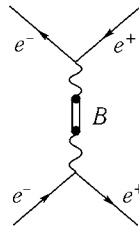
совершенно общая и полностью не зависит от деталей вычисления матричного элемента. Множитель 3 в (5.58) появился из-за суммирования по направлениям  $\mathbf{n}$ , для связанного состояния со спином  $J$  он равен  $(2J + 1)$ .

Наиболее известное применение этого формализма состоит в изучении связанного состояния не мюонов, а кварков, так называемого *кваркония*. Экспериментальные свидетельства существования  $q\bar{q}$  связанных состояний (например,  $J/\psi$  или  $\Upsilon$ ) были приведены на рис. 5.2. (Резонансные пики на графике слишком узки и высоки, чтобы их можно было увидеть в таком масштабе, однако их характеристики точно измерены.) Выражения (5.54) и (5.57) следует умножить на цветовой фактор 3, чтобы получить сечение рождения и ширину распада  $q\bar{q}$  связанного состояния со спином 1. Значение  $\psi(0)$  волновой функции  $q\bar{q}$  нельзя получить из первых принципов, его обычно оценивают, исходя из нерелятивистской модели кваркового спектра с феноменологически выбранным потенциалом взаимодействия. Также можно использовать формулу:

$$\Gamma(B(q\bar{q}) \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 Q^2 \frac{|\psi(0)|^2}{M^2} \quad (5.59)$$

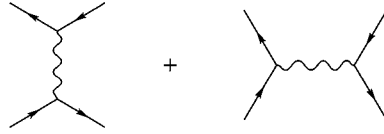
для нахождения  $\psi(0)$  для  $q\bar{q}$  связанного состояния. Например,  $1S$  состояние пары  $s\bar{s}$  со спином 1, то есть  $\phi$ -мезон, обладает парциальной шириной распада по каналу  $e^+e^-$  1.4 кэВ и массой 1.02 ГэВ. Из этих данных можно найти, что  $|\psi(0)|^2 = (1.2 \text{ фм})^{-3}$ . Этот результат является физически разумным, поскольку характерные размеры адронов как раз порядка 1 фм.

Наш подход в этом разделе сильно отличается от развивавшегося в предыдущих разделах. Вместо вычисления всех величин из первых принципов, мы, используя лишь немного сведений из квантовой теории поля и квантовой механики, собрали по кусочкам приближенную формулу. В принципе, мы могли бы описать связанные состояния полностью в рамках релятивистской теории. Рассмотрим аннигиляцию пары  $e^+e^-$  с образованием связанного состояния пары  $\mu^+\mu^-$ , которое затем обратно распадется в пару  $e^+e^-$ . Такой процесс можно описать диаграммой:

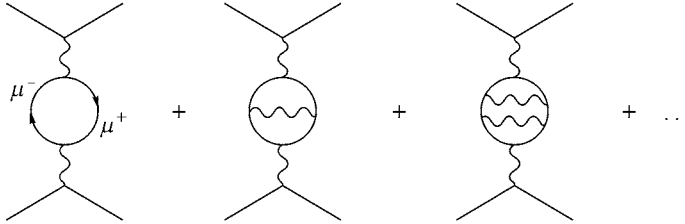


Фактически процесс выглядит как  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  (рассеяние Баба). Что произойдет, если попытаться вычислить сечение этого процесса, непосредственно используя теорию возмущений КЭД? Очевидно,  $\mu^+\mu^-$ -пары не вносят вклада в древесные диаграммы:





Если же рассмотреть процесс в высших порядках теории возмущений, то (помимо прочих) вклад дадут следующие диаграммы:



Для большинства значений  $E_{\text{ци}}$  эти диаграммы приводят лишь к небольшим поправкам к древесному приближению. Однако вблизи порога  $\mu^+\mu^-$  в диаграммах, содержащих обмен фотонами в мюонной петле, становится существенным кулоновское взаимодействие между мюонами, и их вклады будут достаточно большими. Следует просуммировать по всем таким диаграммам и можно показать, что это суммирование эквивалентно решению нерелятивистского уравнения Шредингера\*. Окончательный вывод: сечение содержит резонансный пик, площадь под которым равна (5.54), а ширина дается (5.57).

### 5.4. Кроссинг-симметрия.

#### Рассеяние электрона на мюоне

Завершив обсуждение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , рассмотрим другой, но тесно связанный с предыдущим процесс КЭД — рассеяние электрона на мюоне или  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ . Диаграмма Фейнмана низшего порядка выглядит также, как диаграмма, описывающая аннигиляцию, если ее повернуть набок:

$$= \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2).$$

Связь между процессами  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  и  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$  становится очевидной после того, как мы вычислим квадрат амплитуды, усредненный и просуммированный по спинам:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{tr}[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{tr}[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu)\gamma_\nu].$$

Это выражение полностью совпадает с (5.2) для процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , если сделать замены:

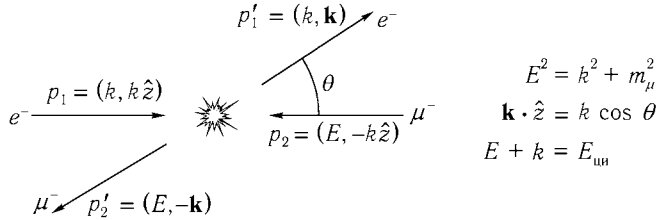
$$p \rightarrow p_1, \quad p' \rightarrow -p'_1, \quad k \rightarrow p'_2, \quad k' \rightarrow -p_2. \tag{5.60}$$

\*Такой анализ выполнен в книге: Берестетский, Лифшиц и Питаевский (1982).

Поэтому вместо того, чтобы снова считать следы, можно выполнить эту же замену в окончательном ответе (5.10). Положив массу электрона равной нулю, получаем:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[ (p_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot p_2) + (p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) - m_\mu^2 (p_1 \cdot p'_1) \right]. \quad (5.61)$$

Чтобы продолжить вычисления, следует разобраться в кинематике, которая теперь совсем иная. Перейдем в систему центра инерции и введем следующие величины:



Нужные нам комбинации таковы:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= p'_1 \cdot p'_2 = k(E + k); & p'_1 \cdot p_2 &= p_1 \cdot p'_2 = k(E + k \cos \theta); \\ p_1 \cdot p'_1 &= k^2(1 - \cos \theta); & q^2 &= -2p_1 \cdot p'_1 = -2k^2(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Выражение для квадрата матричного элемента примет вид:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{k^2(1 - \cos \theta)^2} \left( (E + k)^2 + (E + k \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta) \right). \quad (5.62)$$

Чтобы отсюда найти сечение, используем выражение (4.84), которое в случае, когда одна из частиц безмассовая, принимает простой вид:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{СМ}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E + k)^2}. \quad (5.63)$$

Итак, сечение рассеяния электрона на мюоне в случае неполяризованных частиц равно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2k^2(E + k)^2(1 - \cos \theta)^2} \left( (E + k)^2 + (E + k \cos \theta)^2 - m_\mu^2(1 - \cos \theta) \right), \quad (5.64)$$

где  $k = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$ . В пределе высоких энергий можно положить  $m_\mu = 0$ , и дифференциальное сечение рассеяния принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{цм}}^2(1 - \cos \theta)^2} \left( 4 + (1 + \cos \theta)^2 \right). \quad (5.65)$$

В формулах (5.64) и (5.65) следует обратить внимание на сингулярное поведение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\theta^4}, \quad \text{если } \theta \rightarrow 0. \quad (5.66)$$

Эта сингулярность — того же типа, что и в формуле Резерфорда (задача 4.4). Такое поведение всегда присутствует при кулоновском рассеянии, оно возникает из-за приближения виртуального фотона к массовой оболочке ( $q^2 \approx 0$ ).

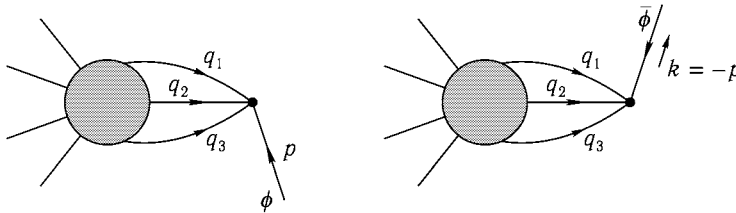
### Кроссинг-симметрия

Использованный прием, а именно, получение соотношения между процессами  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  и  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ , является первым примером того типа соотношений, которые известны как *кроссинг-симметрия*. В общем случае  $S$ -матрица любого процесса с частицей, имеющей 4-импульс  $p$  в начальном состоянии, равна  $S$ -матрице для во всем остальном тождественного процесса с античастицей в конечном состоянии, обладающей 4-импульсом  $k = -p$ . Это означает, что

$$\mathcal{M}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}(\dots \rightarrow \dots + \bar{\phi}(k)), \quad (5.67)$$

где  $\bar{\phi}$  — античастица, соответствующая частице  $\phi$  и  $k = -p$ . (Отметим, что не существует значения  $p$ , для которого и  $p$ , и  $k$  одновременно физически допустимы, так как для частицы должно выполняться  $p^0 > 0$ , а для античастицы —  $k^0 > 0$ . Поэтому формально следует говорить о том, что одна амплитуда может быть получена из другой аналитическим продолжением).

Соотношение (5.67) следует непосредственно из фейнмановских правил. Диаграммы, вносящие вклад в эти две амплитуды, находятся в естественном однозначном соответствии: входящая линия  $\phi$  заменяется на выходящую линию поля  $\bar{\phi}$ . Типичная пара таких диаграмм изображена на рисунке:



На первой диаграмме импульсы  $q_i$ , входящие в вершину из остальной части диаграммы, должны дать в сумме  $-p$ , тогда как на второй диаграмме они должны дать в сумме  $k$ . Таким образом, если  $-p = k$ , то вклады диаграмм одинаковы, если не принимать во внимание возможной разницы во множителях, отвечающих внешним линиям. Если поле  $\phi$  — скалярный бозон, то таких факторов нет, и соотношение доказано. Если  $\phi$  — фермион, анализ усложняется, так как это соотношение зависит от соглашения об относительных фазах внешних спиноров  $u$  и  $v$ . Если просто заменить  $p$  на  $-k$  в сумме по поляризациям фермионов, то

$$\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum v(k)\bar{v}(k). \quad (5.68)$$

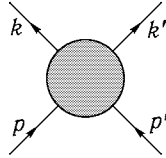
Знак минус можно скомпенсировать выбором фазового множителя при  $v$ . На практике проще всего вообще отбрасывать один знак для каждого фермиона, возникшего в результате кроссинга. При соответствующих соглашениях для спиноров  $u(p)$  и  $v(k)$  можно доказать тождество (5.67) без усреднения по спинам.

### Мандельштамовские переменные

Часто удобно записывать выражения для амплитуды рассеяния в таких переменных, в которых проще использовать соотношения кроссинг-симметрии.

Для процессов с двумя начальными и двумя конечными частицами это можно

сделать следующим образом. Обозначим четыре внешних импульса как

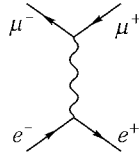


Теперь определим новые переменные (*мандельстамовские переменные*):

$$\begin{aligned} s &= (p + p')^2 = (k + k')^2; \\ t &= (k - p)^2 = (k' - p')^2; \\ u &= (k' - p)^2 = (k - p')^2. \end{aligned} \tag{5.69}$$

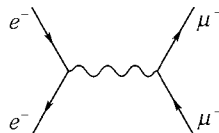
Определения  $t$  и  $u$  переходят одно в другое, если переобозначить  $k \rightarrow k'$ ; принято определять  $t$  как квадрат разности начальных и конечных импульсов наиболее похожих частиц. Для любого процесса  $s$  равна квадрату полного начального 4-импульса. Отметим, что если все импульсы считать входящими в диаграмму, все знаки в этих определениях положительны.

Чтобы продемонстрировать использование мандельстамовских переменных, рассмотрим квадрат амплитуды процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , считая для простоты все частицы безмассовыми. В этом приближении  $t = -2p \cdot k = -2p' \cdot k'$  и  $u = -2p \cdot k' = -2p' \cdot k$ ,  $s = (p + p')^2 = q^2$ . Вспоминая (5.10), получим:



$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[ \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]. \tag{5.70}$$

Чтобы перейти к процессу  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ , повернем диаграмму набок и воспользуемся соотношениями кроссинг-симметрии, которые выглядят особенно просто в мандельстамовских переменных. Например, кроссинг-соотношения говорят, что можно изменить знак  $p'$  импульса позитрона и интерпретировать его как импульс вылетающего электрона. Таким образом,  $s = (p + p')^2$  теперь превращается в то, что следует называть  $t$ , т. е. разность импульсов начального и вылетающего электронов. Соответственно,  $t$  становится  $s$ , а  $u$  не изменяется. Поэтому для процесса  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$  можно сразу же получить:

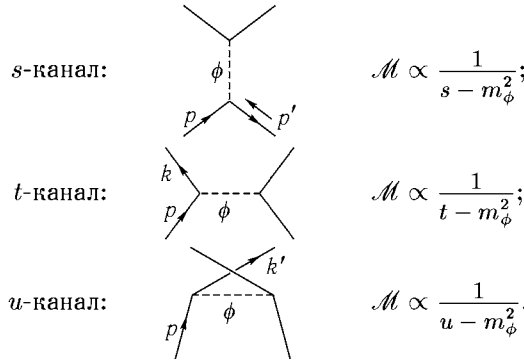


$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[ \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]. \tag{5.71}$$

Легко проверить, что это выражение в безмассовом пределе согласуется с (5.61). Отметим, что хотя (5.70) и (5.71) выглядят весьма похожими друг на друга, они физически совершенно различны: в первом случае знаменатель просто равен  $s^2 = E_{\text{цм}}^4$ , а во втором содержит переменную  $t$ , которая является функцией углов и стремится к нулю при  $\theta \rightarrow 0$ .

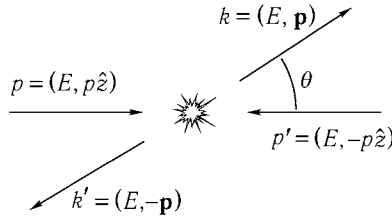
Если диаграмма процесса  $2 \rightarrow 2$  содержит только одну виртуальную частицу, ее удобно рассматривать как распространяющуюся в определенном «канале». Его можно

определить из вида фейнмановской диаграммы, и каждый из них приводит к своей характерной угловой зависимости сечения:



Во многих случаях в процесс дают вклад несколько каналов, и они должны когерентно складываться. Так, амплитуда *рассеяния Баба*  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  есть сумма вкладов диаграмм в  $s$  и  $t$ -каналах, амплитуда *меллеровского рассеяния*  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  содержит вклады  $t$  и  $u$ -каналов.

Чтобы лучше прочувствовать смысл мандельстамовских переменных  $s, t, u$ , найдем их явные выражения в системе центра инерции для частиц одной массы  $m$ . Кинематика выглядит обычно:



Поэтому мандельстамовские переменные равны:

$$\begin{aligned}
 s &= (p + p')^2 = (2E)^2 = E_{\text{цм}}^2; \\
 t &= (k - p)^2 = -p^2 \sin^2 \theta - p^2 (\cos \theta - 1)^2 = -2p^2 (1 - \cos \theta); \\
 u &= (k' - p)^2 = -p^2 \sin^2 \theta - p^2 (\cos \theta + 1)^2 = -2p^2 (1 + \cos \theta).
 \end{aligned}
 \tag{5.72}$$

Мы видим, что  $t \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow 0$ , а  $u \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow \pi$ . (Когда массы частиц разные, предельные значения  $t$  и  $u$  немного сдвигаются.)

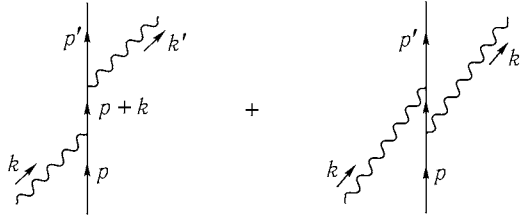
Отметим, что в случае, когда все частицы обладают массой  $m$ , из (5.72) следует, что сумма мандельстамовских переменных  $s + t + u = 4E^2 - 4p^2 = 4m^2$ . Это частный случай более общего соотношения, которое часто бывает полезным:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2,
 \tag{5.73}$$

где суммирование проводится по всем четырем внешним частицам. Это тождество легко доказать, суммируя правые части в (5.69) и используя закон сохранения 4-импульса в виде  $(p + p' - k - k')^2 = 0$ .

## 5.5. Комптоновское рассеяние

Рассмотрим теперь другой процесс КЭД: комптоновское рассеяние, или  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ . Вычислим его сечение в низшем порядке по  $\alpha$  в случае неполяризованных частиц. При вычислении будем использовать всю развитую до сих пор технику, в том числе мандельштамовские переменные из предыдущего раздела. Кроме того, для обращения с внешними фотонами мы разовьем новую технику расчетов. Это первый пример расчета, включающего вклады двух диаграмм:



Как обычно, выражение для амплитуды записывается согласно фейнмановским правилам. Отметим, что так как фермионные части в обеих диаграммах одинаковы, между слагаемыми, соответствующими разным диаграммам, не возникает относительного знака минус. Обозначив векторы поляризации начального и конечного фотонов  $\varepsilon_\nu(k)$  и  $\varepsilon_\mu^*(k')$ , соответственно, имеем:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(k')\frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2}(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k)u(p) + \\ &+ \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(k)\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2}(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(k')u(p) = \\ &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2}\right]u(p). \end{aligned}$$

Прежде чем возводить это выражение в квадрат, можно сделать некоторые упрощения. Так как  $p^2 = m^2$  и  $k^2 = 0$ , то знаменатели пропагаторов равны:

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p \cdot k \quad \text{и} \quad (p-k')^2 - m^2 = -2p \cdot k'.$$

Чтобы упростить числители, воспользуемся алгеброй Дирака:

$$\begin{aligned} (\not{p} + m)\gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + \gamma^\nu m)u(p) = \\ &= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu (\not{p} - m)u(p) = \\ &= 2p^\nu u(p). \end{aligned}$$

Продельвая этот трюк с числителем каждого пропагатора, находим:

$$i\mathcal{M} = -ie^2\varepsilon_\mu^*(k')\varepsilon_\nu(k)\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p \cdot k'}\right]u(p). \quad (5.74)$$

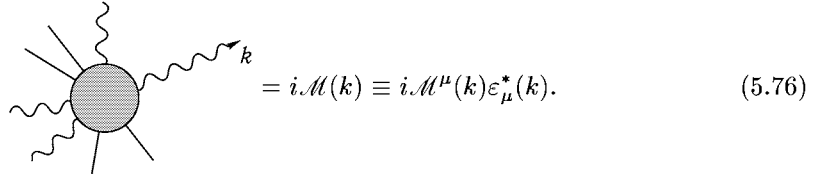
### Суммирование по поляризациям фотона

Следующий шаг в вычислении — возведение  $\mathcal{M}$  в квадрат и суммирование по состояниям поляризации электронов и фотонов. По поляризациям электрона можно

суммировать как и раньше, используя тождество  $\Sigma u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m$ . К счастью, аналогичное соотношение существует и для суммирования по поляризациям фотона. Правильный рецепт состоит в том, чтобы выполнить замену:

$$\sum_{\text{поляризация}} \varepsilon_{\mu}^* \varepsilon_{\nu} \longrightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (5.75)$$

Стрелка показывает, что это не настоящее тождество, и тем не менее такая замена справедлива до тех пор, пока обе части включены в остальное выражение для КЭД амплитуды  $\mathcal{M}$ . Чтобы вывести эту формулу, рассмотрим произвольный процесс КЭД, включающий внешнюю фотонную линию с импульсом  $k$ :



$$= i\mathcal{M}(k) \equiv i\mathcal{M}^{\mu}(k)\varepsilon_{\mu}^*(k). \quad (5.76)$$

Так как амплитуда всегда содержит  $\varepsilon_{\mu}^*(k)$ , то мы выделили этот множитель в явном виде, а оставшуюся часть амплитуды назвали  $\mathcal{M}^{\mu}(k)$ . Сечение будет пропорционально

$$\sum_{\varepsilon} |\varepsilon_{\mu}^*(k)\mathcal{M}^{\mu}(k)|^2 = \sum_{\varepsilon} \varepsilon_{\mu}^* \varepsilon_{\nu} \mathcal{M}^{\mu}(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k).$$

Для простоты выберем  $k$  вдоль оси  $z$ , так что  $k^{\mu} = (k, 0, 0, k)$ . Тогда два вектора поперечной поляризации, по которым производится суммирование, можно выбрать в виде:

$$\varepsilon_1^{\mu} = (0, 1, 0, 0); \quad \varepsilon_2^{\mu} = (0, 0, 1, 0).$$

С учетом этих соглашений получим:

$$\sum_{\varepsilon} |\varepsilon_{\mu}^*(k)\mathcal{M}^{\mu}(k)|^2 = |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2. \quad (5.77)$$

Вспомним теперь из материала гл. 4, что внешние фотонные линии возникают от слагаемого с взаимодействием  $\int d^4x e^{ik \cdot x} A_{\mu}$ , где  $j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$  — дираковский вектор тока. Таким образом, можно ожидать, что  $\mathcal{M}^{\mu}(k)$  определяется матричным элементом гейзенберговского поля  $j^{\mu}$ :

$$\mathcal{M}^{\mu}(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle f | j^{\mu}(x) | i \rangle, \quad (5.78)$$

где начальное и конечное состояние включают все частицы, кроме выделенного фотона. Из классических уравнений движения следует, что ток  $j^{\mu}$  сохраняется:  $\partial_{\mu}j^{\mu}(x) = 0$ . Предполагая, что это утверждение справедливо и в квантовой теории, можно умножить (5.78) на  $k_{\mu}$  и получить:

$$k_{\mu}\mathcal{M}^{\mu}(k) = 0. \quad (5.79)$$

Амплитуда  $\mathcal{M}$  обращается в нуль, если заменить вектор поляризации фотона  $\varepsilon_{\mu}(k)$  на  $k_{\mu}$ . Это соотношение известно как знаменитое *тождество Уорда*. По существу

это утверждение о сохранении тока, являющееся следствием калибровочной симметрии (4.6) КЭД. Мы дадим формальное доказательство тождества Уорда в разделе 7.4 и обсудим ряд тонких моментов, пропущенных в быстром «доказательстве».

Полезно непосредственно проверить, что комптоновская амплитуда (5.74) удовлетворяет тождеству Уорда. Для этого заменим  $\varepsilon_\nu(k)$  на  $k_\nu$  или  $\varepsilon_\mu^*(k')$  на  $k'_\mu$ , а затем вычислим произведения дираковских матриц. После несложных алгебраических преобразований слагаемые, соответствующие двум разным диаграммам, сократятся, и в итоге получится ноль.

Вернемся к выводу формулы (5.75) для суммы по поляризациям. Отметим, что если  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ , тождество Уорда принимает вид:

$$k\mathcal{M}^0(k) - k\mathcal{M}^3(k) = 0. \quad (5.80)$$

Следовательно,  $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$  и

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k) &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 = \\ &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 = \\ &= -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k). \end{aligned}$$

Таким образом, можно суммировать по поляризациям внешних фотонов, просто заменяя  $\sum \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu$  на  $-g_{\mu\nu}$ .

Отметим, что это доказывает (если, конечно, считать доказанным тождество Уорда), что в вычислениях КЭД можно выбрасывать нефизические времениподобные и продольные фотоны, так как для любого процесса квадраты амплитуд рождения таких состояний сокращают друг друга. Отрицательная норма состояния времениподобного фотона, столь беспокоившая нас при обсуждении формулы (4.134), играет в этом сокращении существенную роль.

### Формула Клейна–Нишины

Оставшиеся расчеты сечения комптоновского рассеяния проводятся непосредственно, хотя их следует упорядочить. Мы хотим усреднить квадрат амплитуды по поляризациям начальных электрона и фотона и просуммировать по поляризациям электрона и фотона в конечном состоянии. Стартуя с выражения (5.74) для  $\mathcal{M}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \cdot \text{tr} \left\{ (\not{p}' + m) \left[ \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times (\not{p} + m) \left[ \frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho + 2\gamma^\rho p^\sigma}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not{k}' \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p^\rho}{2p \cdot k'} \right] \right\} \equiv \quad (5.81) \\ &\equiv \frac{e^4}{4} \left[ \frac{\text{I}}{(2p \cdot k)^2} + \frac{\text{II}}{(2p \cdot k)(2p \cdot k')} + \frac{\text{III}}{(2p \cdot k')(2p \cdot k)} + \frac{\text{IV}}{(2p \cdot k')^2} \right], \end{aligned}$$

где **I**, **II**, **III**, и **IV** — некоторые сложные следы. Отметим, что **IV** равен **I**, если заменить  $k$  на  $-k'$ . Кроме того, если с помощью (5.7) поменять порядок  $\gamma$ -матриц под знаком следа, можно видеть, что **II** = **III**. Таким образом, фактически нам нужно найти только **I** и **II**.

Первый из следов равен

$$\text{I} = \text{tr} [(\not{p}' + m)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m)(\gamma_\nu \not{k}' \gamma_\mu + 2\gamma_\nu p^\rho)].$$



Под знаком следа находится 16 слагаемых, но половина из них является произведениями нечетного числа  $\gamma$ -матриц и не дает вклада. Найдем теперь остальные 8 слагаемых. Например,

$$\begin{aligned} \text{tr}[\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu] &= \text{tr}[(-2\not{p}') \not{k} (-2\not{p}) \not{k}] = \\ &= \text{tr}[4\not{p}' \not{k} (2p \cdot k - \not{k} \not{p})] = 8p \cdot k \text{tr}[\not{p}' \not{k}] = 32(p \cdot k)(p' \cdot k). \end{aligned}$$

Путем использования (5.8) и (5.9), и других соотношений дираковской алгебры типа  $\not{p}\not{p} = p^2 = m^2$ , можно свести каждое слагаемое в  $\mathbf{I}$  к следу от произведения не более чем двух  $\gamma$ -матриц. После того, как рассеется дым, мы получим:

$$\mathbf{I} = 16(4m^4 - 2m^2 p \cdot p' + 4m^2 p \cdot k - 2m^2 p' \cdot k + 2(p \cdot k)(p' \cdot k)). \quad (5.82)$$

Хотя это и не вполне очевидно, выражение (5.82) можно еще больше упростить. Для этого введем мандельштамовские переменные

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = 2p \cdot k + m^2 = 2p' \cdot k' + m^2; \\ t &= (p' - p)^2 = -2p \cdot p' + 2m^2 = -2k \cdot k'; \\ u &= (k' - p)^2 = -2k' \cdot p + m^2 = -2k \cdot p' + m^2. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Вспомним, что закон сохранения 4-импульса приводит к равенству  $s + t + u = 2m^2$ . Перепишывая (5.82) через мандельштамовские переменные  $s, t, u$  и используя это тождество, имеем:

$$\mathbf{I} = 16(2m^4 + m^2(s - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)). \quad (5.84)$$

Выполняя замену  $k \leftrightarrow -k'$ , мы немедленно получаем:

$$\mathbf{IV} = 16(2m^4 + m^2(u - m^2) - \frac{1}{2}(s - m^2)(u - m^2)). \quad (5.85)$$

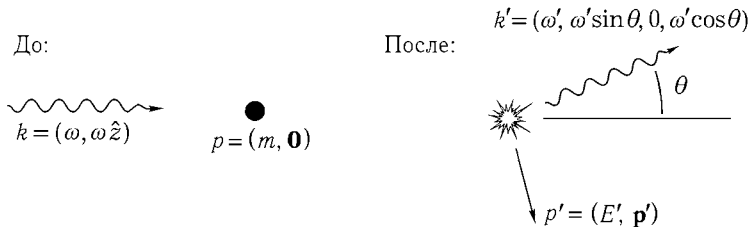
Вычисление следов  $\mathbf{II}$  и  $\mathbf{III}$  требует примерно такого же объема работы. Выпишем ответ:

$$\mathbf{II} = \mathbf{III} = -8(4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)). \quad (5.86)$$

Собирая все слагаемые в квадрате матричного элемента (5.81) и перепишывая  $s$  и  $u$  через скалярные произведения  $p \cdot k$  и  $p \cdot k'$ , находим окончательно:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[ \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]. \quad (5.87)$$

Чтобы превратить это выражение в формулу для сечения, нужно выбрать систему отсчета и описать кинематику задачи. Чаще всего комптоновское рассеяние анализируется в лабораторной системе, где начальный электрон покоится:



Мы хотим выразить сечение через переменные  $\omega$  и  $\theta$ . Энергия фотона в конечном состоянии  $\omega'$  легко находится с помощью следующего трюка:

$$\begin{aligned} m^2 &= (p')^2 = (p + k - k')^2 = p^2 + 2p \cdot (k - k') - 2k \cdot k' = \\ &= m^2 + 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta), \end{aligned}$$

$$\text{следовательно, } \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta). \quad (5.88)$$

Последняя строка — это формула Комптона для сдвига длины волны фотона. Для наших целей, однако, полезнее разрешить это уравнение относительно  $\omega'$ :

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \quad (5.89)$$

Интеграл по фазовому пространству в этой системе отсчета равен:

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) = \\ &= \int \frac{(\omega')^2 d\omega' d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega' E'} 2\pi \delta(\omega' + \sqrt{m^2 + \omega^2 + (\omega')^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} - \omega - m) = \\ &= \int \frac{d \cos\theta}{2\pi} \frac{\omega'}{4E'} \frac{1}{\left|1 + \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{E'}\right|} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d \cos\theta \frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos\theta)} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d \cos\theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Подставляя все выражения в общую формулу для сечения (4.79) и полагая  $|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}| = 1$ , находим:

$$\frac{d\sigma}{d \cos\theta} = \frac{1}{2\omega} \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega')^2}{\omega m} \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2\right).$$

Для вычисления  $|\mathcal{M}|^2$  в (5.87) выполним замену  $p \cdot k = m\omega$  и  $p \cdot k' = m\omega'$ . Наиболее компактно сечение может быть записано в виде:

$$\frac{d\sigma}{d \cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right], \quad (5.91)$$

где  $\omega'/\omega$  определяется формулой (5.89). Полученное выражение называется *формулой Клейна–Нишины*, оно было впервые выведено в 1929 году\*. В пределе  $\omega \rightarrow 0$  из (5.89) следует, что  $\omega'/\omega \rightarrow 1$ , и выражение для сечения принимает вид:

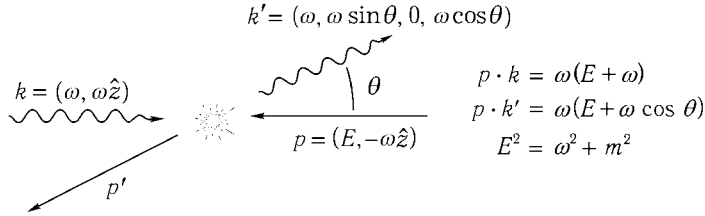
$$\frac{d\sigma}{d \cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} (1 + \cos^2\theta); \quad \sigma_{\text{полное}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \quad (5.92)$$

Это известная формула Томсона для сечения комптоновского рассеяния классического электромагнитного излучения свободным электроном.

\*О. Klein, Y. Nishina, *Z. Physik*, **52**, 853 (1929).

**Поведение при высоких энергиях**

Чтобы проанализировать поведение сечения комптоновского рассеяния при высоких энергиях, проще всего перейти в систему центра инерции. Нетрудно записать дифференциальное сечение в этой системе отсчета, используя инвариантное выражение (5.87). Кинематика реакции теперь следующая:



После подстановки этих выражений в (5.87) легко видеть, что при  $\theta \approx \pi$ , слагаемое  $p \cdot k / p \cdot k'$  становится очень большим, а остальные слагаемые — порядка  $\mathcal{O}(1)$  или меньше. При  $E \gg m$  и  $\theta \approx \pi$  получаем:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \cdot \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} = 2e^4 \cdot \frac{E + \omega}{E + \omega \cos \theta}. \quad (5.93)$$

Сечение в системе центра инерции определяется формулой (4.84):

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2E} \cdot \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\omega}{(2\pi)4(E + \omega)} \cdot \frac{2e^4(E + \omega)}{E + \omega \cos \theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + s(1 + \cos \theta)}. \quad (5.94)$$

Отметим, что, так как  $s \gg m^2$ , знаменатель в (5.94) обращается в нуль, если фотон излучается назад ( $\theta \approx \pi$ ). Фактически массой электрона  $m$  в этой формуле можно было бы пренебречь, если бы не было необходимости обрезать особенность в интеграле. При интегрировании по  $\cos \theta$  можно отбросить слагаемые с массой электрона, введя эквиваленты обрезания вблизи  $\theta = \pi$ . Таким образом полное сечение приближенно равно:

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s} \int_{-1+2m^2/s}^1 d(\cos \theta) \frac{1}{(1 + \cos \theta)}. \quad (5.95)$$

Окончательно находим, что полное сечение в пределе высоких энергий ведет себя как

$$\sigma_{\text{полное}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right). \quad (5.96)$$

Главная зависимость  $\alpha^2/s$  следует из размерного анализа, однако сингулярность, связанная с рассеянием фотона назад, приводит к дополнительному логарифму энергии.

Попытаемся понять физическую природу этой сингулярности. Это слагаемое появляется из квадрата диаграммы  $u$ -канала:

$$= -ie^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu^*(k') \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p - k')^2 - m^2} \gamma^\nu u(p). \quad (5.97)$$

Амплитуда при  $\theta \approx \pi$  велика, так как знаменатель пропагатора мал ( $\sim m^2$ ) по сравнению с  $s$ . Чтобы уточнить результат, введем  $\chi \equiv \pi - \theta$ . Представляют интерес такие  $\chi$ , которые больше, чем  $m/\omega$ , но все же настолько малы, что можно приближенно записать  $1 - \cos \chi \approx \chi^2/2$ . Для  $\chi$  из этой области знаменатель пропагатора равен:

$$(p - k')^2 - m^2 = -2p \cdot k' \approx -2\omega^2 \left( \frac{m^2}{2\omega^2} + 1 - \cos \chi \right) \approx -(\omega^2 \chi^2 + m^2). \quad (5.98)$$

В большой части области значений  $\chi$  это выражение мало по сравнению с  $s$ , откуда и получается рост полного сечения.

Возвращаясь к (5.93), видим, что в области  $\chi$  такой, что  $m/\omega \ll \chi \ll 1$ , квадрат амплитуды пропорционален  $1/\chi^2$ , следовательно,  $\mathcal{M}$  пропорциональна  $\chi$ . Но мы только что видели, что знаменатель  $\mathcal{M}$  пропорционален  $\chi^2$ , так что числитель должен компенсировать лишнюю степень  $\chi$ . Физическое происхождение этой компенсации можно понять, если рассмотреть электрон и фотон с определенными поляризациями.

Предположим, что исходный электрон правополяризован. Основной вклад в (5.97) вносит слагаемое, содержащееся в числителе пропагатора ( $\not{p} - \not{k}'$ ). Так как между  $\bar{u}$  и  $u$  три  $\gamma$ -матрицы, то конечный электрон должен также быть правополяризован. Амплитуда имеет вид:

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu(k) \varepsilon_\nu^*(k') u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \frac{\bar{\sigma} \cdot (p - k')}{-(\omega^2 \chi^2 + m^2)} \sigma^\nu u_R(p), \quad (5.99)$$

где

$$u_R(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u_R(p') = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.100)$$

Если исходный фотон левополяризован (его вектор поляризации  $\varepsilon_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0)$ ), то

$$\sigma^\mu \varepsilon_\mu(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

и комбинация  $u_R^\dagger(p') \sigma^\mu \varepsilon_\mu(k)$  обращается в нуль. Следовательно, исходный фотон должен быть правополяризован. Кинематика для этого набора поляризаций изображена на рис. 5.6. Заметим, что суммарный угловой момент конечного состояния на единицу меньше, чем у начального.

Продолжая вычисления, рассмотрим числитель пропагатора в (5.99). В интересующей нас области  $\chi$  ведущее слагаемое

$$-\sigma^1(p - k')^1 = \sigma^1 \cdot \omega \chi.$$

Это тот самый множитель  $\chi$ , появление которого ожидалось. Он показывает, что конечное состояние является  $p$ -волной, что требуется законом сохранения момента импульса. Окончательно получаем:

$$\mathcal{M}(e_R^- \gamma_R \rightarrow e_R^- \gamma_R) \approx e^2 \sqrt{2E} \sqrt{2} \frac{\omega \chi}{(\omega^2 \chi^2 + m^2)} \sqrt{2E} \sqrt{2} \approx \frac{4e^2 \chi}{\chi^2 + m^2/\omega^2}. \quad (5.101)$$

Аналогичный результат получается и в случае, когда все начальные и конечные частицы левополяризованы.

Отметим, что при рассеянии строго назад  $\chi = 0$ , и матричный элемент (5.101) обращается в нуль из-за нулевого углового момента в числителе. Таким образом, при

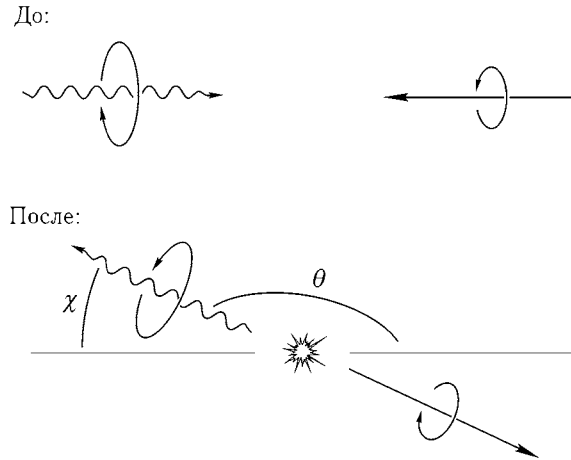


Рис. 5.6. В пределе высоких энергий высока вероятность того, что фотон излучится в направлении назад. Так как спиральность сохраняется, единичное значение спинового момента превращается в орбитальный угловой момент.

углах, близких к  $\chi = 0$ , в числителе пропагатора в (5.97) следует учитывать слагаемое с массой. Оно содержит только две  $\gamma$ -матрицы и поэтому переводит правополяризованный электрон в левополяризованный. Если провести анализ, аналогичный тому, что привел нас к (5.101), можно выяснить, что эта амплитуда не обращается в нуль лишь в том случае, когда исходный фотон левополяризован, а конечный — правополяризован. Продолав выкладки, находим:

$$\mathcal{M}(e_R^- \gamma_L \rightarrow e_L^- \gamma_R) \approx \frac{4e^2 m / \omega}{\chi^2 + m^2 / \omega^2}. \quad (5.102)$$

Матричный элемент реакции, в которой переворачиваются все четыре спиральности, имеет тот же вид. Для сравнения этих результатов с предыдущим выражением нужно сложить сечение из (5.101) и (5.102) с аналогичным вкладом от процессов с левополяризованными электронами и результат разделить на 4 для усреднения по спинам начальных частиц. В итоге выражение для дифференциального сечения комptonовского рассеяния неполяризованных частиц принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2E} \frac{1}{2\omega} \frac{\omega}{(2\pi) 4(E + \omega)} \left[ \frac{8e^4 \chi^2}{(\chi^2 + m^2 / \omega^2)^2} + \frac{8e^4 m^2 / \omega^2}{(\chi^2 + m^2 / \omega^2)^2} \right] = \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{s(\chi^2 + 4m^2/s)}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

что в точности совпадает с (5.94).

Важность процесса с переворотом спиральности (5.102) в кинематической предельной точке  $\theta = \pi$  подтверждается интересным экспериментальным следствием. Рассмотрим так называемый *обратный комpton-эффект* — столкновение пучка электронов больших энергий с пучком фотонов малой энергии (например, лазерным лучом) для производства высокоэнергетических фотонов. Пусть энергия электронов равна  $E$ , а фотонов лазерного пучка —  $\varpi$ , кроме того, энергия рассеянного фотона  $E' = yE$ . Для простоты предположим, что  $s = 4E\varpi \gg m^2$ . В этом случае проделанное вычисление вполне применимо, фотоны с наибольшей энергией возникают от рассеяния назад

в с. с. и. Вычисляя  $2kk'$  в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс, легко показать, что энергия фотона в конечном состоянии связана с углом рассеяния в системе центра инерции:

$$y \approx \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \approx 1 - \frac{\chi^2}{4}.$$

Уравнение (5.103) может быть переписано как формула для распределения рассеянных назад фотонов по энергиям вблизи предельной точки:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{s((1-y) + m^2/s)^2} \left[ (1-y) + \frac{m^2}{s} \right], \quad (5.104)$$

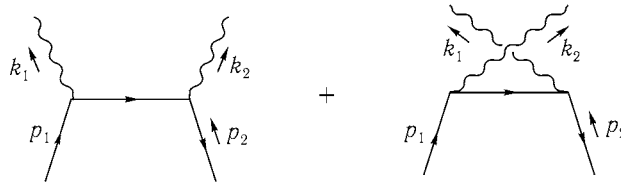
где первое слагаемое в квадратных скобках соответствует процессу с сохранением спинальности, а второе — процессу с ее изменением. Так, если правополяризованный лазерный пучок рассеивается на неполяризованном пучке электронов большей энергии, то большая часть рассеянных назад фотонов будет правополяризована, но наиболее энергичные фотоны окажутся левополяризованными. Этот эффект можно использовать для того, чтобы измерить поляризацию электронного пучка или создавать фотонные источники с настраиваемым распределением по энергии и поляризации.

### Аннигиляция пар в фотоны

Из амплитуды комптоновского рассеяния можно получить еще один результат. Рассмотрим процесс аннигиляции

$$e^+e^- \rightarrow 2\gamma,$$

который в низшем порядке описывается двумя диаграммами:



Этот процесс связан с комптоновским рассеянием соотношением кроссинг-симметрии. Правильное выражение для амплитуды аннигиляции получится, если в комптоновской амплитуде сделать замену:

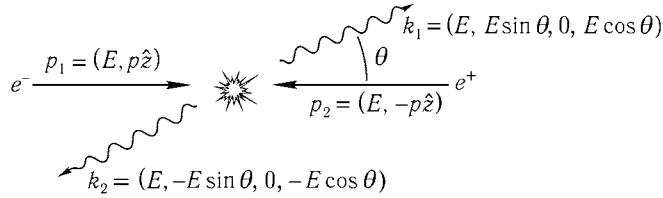
$$p \rightarrow p_1 \quad p' \rightarrow -p_2 \quad k \rightarrow -k_1 \quad k' \rightarrow k_2.$$

Совершая такую замену в (5.87), найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \\ = -2e^4 \left[ \frac{p_1 \cdot k_2}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot k_1}{p_1 \cdot k_2} + 2m^2 \left( \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right) - m^4 \left( \frac{1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{1}{p_1 \cdot k_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Общий знак «минус» есть результат соотношений кроссинга (5.68) и может быть отброшен.

Теперь перейдем в систему центра инерции. Кинематика такова:



После стандартных вычислений дифференциальное сечение примет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{p}\right) \left[ \frac{E^2 + p^2 \cos^2\theta}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2 \sin^2\theta)^2} \right]. \quad (5.106)$$

В пределе высоких энергий отсюда получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \xrightarrow{E \gg m} \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right), \quad (5.107)$$

за исключением области, где  $\sin\theta$  порядка или меньше  $m/p$ . Отметим, что так как оба фотона тождественны, то все конечные состояния учитываются интегрированием только по области  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Полное сечение может быть вычислено по формуле:

$$\sigma_{\text{полное}} = \int_0^1 d(\cos\theta) \frac{d\sigma}{d\cos\theta}.$$

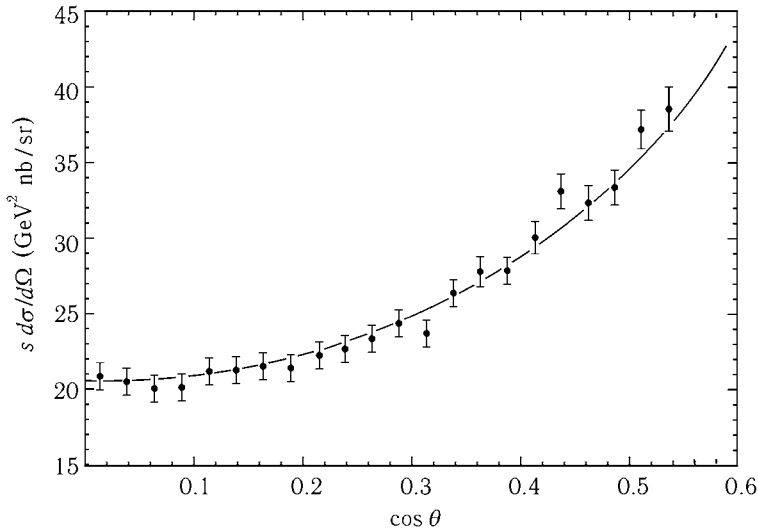


Рис. 5.7. Угловая зависимость сечения рассеяния  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$  при  $E_{\text{ци}} = 29$  ГэВ, измеренное коллаборацией HRS (М. Деррик и др., *Phys. Rev.* **D34**, 3286 (1986)). Сплошная линия показывает теоретическое предсказание (5.107).

На рис. 5.7 показано соответствие между асимптотической формулой (5.107) и результатами измерений сечения аннигиляции электрон-позитронной пары с образованием двух фотонов при очень высоких энергиях.

## Задачи

**5.1. Кулоновское рассеяние.** Повторите решение задачи 4.4, часть (с), на этот раз используя для матричного элемента полное релятивистское выражение. Необходимо показать, что усредненное по спинам сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2\beta^2 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

где  $\mathbf{p}$  — 3-импульс электрона, а  $\beta$  — его скорость. Это формула получила название *формулы Мотта* для кулоновского рассеяния релятивистских электронов. Выведите эту формулу другим способом, используя сечение рассеяния электрона на мюоне, в системе покоя мюона и в пределе  $m_\mu \rightarrow \infty$ .

**5.2. Рассеяние Баба.** Вычислите дифференциальное сечение  $d\sigma/d\cos\theta$  процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ . Вычисления можно сделать в пределе  $E_{\text{cm}} \gg m_e$ , то есть пренебречь массой электрона. Процесс описывается двумя фейнмановскими диаграммами. Вклады от них следует сложить, прежде чем находить квадрат инвариантного матричного элемента. Убедитесь, что вы получили правильный относительный знак между вкладом диаграмм. Вычисления довольно сложны, но окончательный результат очень прост. В частности, его удобно записать, используя мандельштамовские переменные  $s, t, u$ . Заметим, что в пределе нулевой массы электрона  $u + s + t = 0$ . Попробуйте привести дифференциальное сечение к виду:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left[ u^2 \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right)^2 + \left( \frac{t}{s} \right)^2 + \left( \frac{s}{t} \right)^2 \right].$$

Перепишите эту формулу через  $\cos\theta$  и постройте соответствующий график. Почему сечение расходится при  $\theta \rightarrow 0$ ?

**5.3. Спинорные произведения,** введенные в задаче 3.3, позволяют эффективно вычислять древесные диаграммы, включающие безмассовые частицы. Вспомним, как мы определяли спинорные произведения в задаче 3.3. Пусть  $u_{L0}$  и  $u_{R0}$  являются соответственно левым и правым спинорами при некотором фиксированном светоподобном импульсе  $k_0$ . Они удовлетворяют соотношениям:

$$u_{L0}\bar{u}_{L0} = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\not{k}_0, \quad u_{R0}\bar{u}_{R0} = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\not{k}_0. \quad (1)$$

(Эти соотношения есть просто проекции более стандартной формулы  $\sum u_0\bar{u}_0 = \not{k}_0$  на состояние с определенной спиральностью.) Затем определим спиноры для любого другого светоподобного импульса  $p$  как

$$u_L(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{R0}, \quad u_R(p) = \frac{1}{\sqrt{2p \cdot k_0}} \not{p} u_{L0}. \quad (2)$$

Мы показали, что эти спиноры удовлетворяют условию  $\not{p}u(p) = 0$ . Так как в задаче не входит масса  $m$ , то эти спиноры можно использовать как для фермионов, так и для антифермионов. Определим

$$s(p_1, p_2) = \bar{u}_R(p_1)u_L(p_2), \quad t(p_1, p_2) = \bar{u}_L(p_1)u_R(p_2).$$

В выделенной системе отсчета доказаны тождества:

$$t(p_1, p_2) = (s(p_2, p_1))^*, \quad s(p_1, p_2) = -s(p_2, p_1), \quad |s(p_1, p_2)|^2 = 2p_1 \cdot p_2. \quad (3)$$

Теперь воспользуемся этими результатами.



- (а) Для разминки дайте другое доказательство последнего соотношения в (3): воспользуйтесь (1), чтобы переписать  $|s(p_1, p_2)|^2$  как след от матриц Дирака, а затем вычислите след.
- (б) Покажите, что для любого набора дираковских матриц

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots] = \text{tr}[\dots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu],$$

где  $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$ , и 5. Воспользуйтесь этим тождеством для доказательства соотношения

$$\bar{u}_L(p_1) \gamma^\mu u_L(p_2) = \bar{u}_R(p_2) \gamma^\mu u_R(p_1).$$

- (с) Докажите тождество Фирца:

$$\bar{u}_L(p_1) \gamma^\mu u_L(p_2) [\gamma_\mu]_{ab} = 2 [u_L(p_2) \bar{u}_L(p_1) + u_R(p_1) \bar{u}_R(p_2)]_{ab},$$

где  $a, b = 1, 2, 3, 4$  — дираковские индексы. Доказательство может быть проведено путем проверки следующих утверждений. Правая часть этого соотношения является матрицей Дирака; следовательно, она может быть записана как линейная комбинация  $\Gamma$ -матриц, которые обсуждались в разделе 3.4. Эта правая часть удовлетворяет равенству

$$\gamma^5 [M] = -[M] \gamma^5,$$

и, следовательно, должна иметь вид:

$$[M] = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \gamma_\mu V^\mu + \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \gamma_\mu W^\mu,$$

где  $V^\mu$  и  $W^\mu$  — 4-векторы. Их можно найти с помощью техники вычисления следов, например:

$$V^\nu = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \gamma^\nu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) M \right].$$

- (д) Рассмотрим процесс  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  в главном порядке по  $\alpha$ , пренебрегая массами электрона и мюона. Сначала рассмотрим случаи, когда электрон и конечный мюон правополяризованы, а позитрон и антимюон — левополяризованы\*. Используя тождество Фирца, покажите, что амплитуду можно выразить через спинорные произведения. Возведите ее в квадрат и воспроизведите выражение (5.22) для

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+).$$

Вычислите сечения для других спиральностей частиц и покажите, что они идентичны приведенным в разделе 5.2.

- (е) Используя формализм спинорного произведения, вычислите дифференциальное сечение рассеяния Баба для состояний с заданными спиральностями частиц в случае безмассовых электронов. Сечение, усредненное по спиральностям исходных и просуммированное по спиральностям конечных частиц, должно воспроизводить ответ задачи 5.2. Нужно обратить внимание на то, как суммируются вклады от определенных спиральностей.

\*Используйте спинор  $v_R$  для антимюона и  $\bar{u}_R$  для позитрона.

#### 5.4. Время жизни позитрония.

- (а) Вычислите амплитуду  $\mathcal{M}$  аннигиляции электрон-позитронной пары с образованием двух фотонов в нерелятивистском пределе (т.е. оставьте только слагаемые, пропорциональные нулевым степеням 3-импульсов электрона и позитрона). Используя этот результат и формализм связанных состояний фермион-антифермион, исследуйте аннигиляцию 1S-состояния позитрония с образованием двух фотонов. Покажите, что состояния позитрония со спином 1 не могут аннигилировать в два фотона (что подтверждает соображения симметрии, высказанные в задаче 3.8). Для состояния позитронов со спином 0 покажите, что результат пропорционален квадрату волновой функции 1S-состояния в нуле. Подставив волновую функцию, известную из нерелятивистской квантовой механики, нужно получить следующий ответ:

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \frac{\alpha^5 m_e}{2} \approx 8.03 \times 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Последние измерения\* дают  $\Gamma = 7.994 \pm 0.011 \text{ нс}^{-1}$ ; расхождение в 0.5% говорит о необходимости учета радиационных поправок.

- (b) Вычисление вероятностей распада состояний с большими значениями  $l$  — несколько более сложная задача. Мы рассмотрим случай  $l = 1$ . Прежде всего, выделим слагаемые в амплитуде  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ , которые пропорциональны первой степени 3-импульса (для простоты ведем расчет в системе центра инерции). Так как

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^i \psi(\mathbf{p}) = i \frac{\partial}{\partial x^i} \psi(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0},$$

эта часть амплитуды будет «перекрываться» со связанными  $P$ -состояниями. Покажите, что состояния со спином 1 (а не со спином 0) могут аннигилировать в два фотона. Это снова есть следствие  $C$ -инвариантности.

- (c) Чтобы вычислить вероятности распада  $P$ -состояний, нам нужны соответствующим образом отнормированные волновые функции. Обозначим три волновые функции  $P$ -состояний как

$$\psi_i = x^i f(|\mathbf{x}|), \quad \text{причем они нормированы условием } \int d^3 x \psi_i^*(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij},$$

а их фурье-образы как  $\psi_i(\mathbf{p})$ . Покажите, что

$$|B(\mathbf{k})\rangle = \sqrt{2M} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \psi_i(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}+\mathbf{k}/2}^\dagger \Sigma^i b_{-\mathbf{p}+\mathbf{k}/2}^\dagger |0\rangle$$

— правильно нормированный вектор связанного состояния, если  $\Sigma^i$  обозначает набор трех матриц  $2 \times 2$ , нормированных условием:

$$\sum_i \text{tr}(\Sigma^{i\dagger} \Sigma^i) = 1.$$

\*D. W. Gidley et. al., *Phys. Rev. Lett.* **49**, 525 (1982).

Чтобы построить состояния с  $S = 1$ , нужно сделать так, чтобы каждая  $\Sigma^i$  содержала матрицу Паули. Вообще говоря, спин-орбитальное взаимодействие расщепит мультиплет с  $S = 1$ ,  $L = 1$  в соответствии с полным моментом  $J$ . Состояния с определенным  $J$  таковы:

$$\begin{aligned} J = 0: \quad \Sigma^i &= \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma^i, \\ J = 1: \quad \Sigma^i &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}n^j\sigma^k, \\ J = 2: \quad \Sigma^i &= \frac{1}{\sqrt{3}}h^{ij}\sigma^j, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор поляризации, удовлетворяющий  $|\mathbf{n}|^2 = 1$ , а  $h^{ij}$  — тензор с нулевым следом, типичное значение которого  $h^{12} = 1$ , а все остальные компоненты равняются нулю.

- (d) Используя выражение для амплитуды аннигиляции, выведенное в (b), и явное выражение в (c) для состояний позитрона с  $S = 1$ ,  $L = 1$  и определенным  $J$ , вычислите для каждого  $J$  вероятность аннигиляции состояния с образованием двух фотонов.

**5.5. Физика массивного векторного бозона.** Введем в КЭД массивное фотонное поле  $B_\mu$  массой  $M$ , которое взаимодействует с электроном по закону

$$\Delta H = \int d^3x (g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu).$$

Массивный фотон в начальном и конечном состоянии имеет три возможные физические поляризации, соответствующие трем пространственноподобным единичным векторам в системе покоя бозона. Они могут быть инвариантно описаны (через 4-импульс бозона  $k^\mu$ ) как три вектора  $\varepsilon_\mu^{(i)}$ , удовлетворяющие условиям:

$$\varepsilon^{(i)} \cdot \varepsilon^{(j)} = -\delta^{ij}, \quad k \cdot \varepsilon^{(i)} = 0.$$

Четыре вектора  $(k_\mu/M, \varepsilon_\mu^{(i)})$  образуют ортогональный базис. Так как  $B_\mu$  связано с сохраняющимся током  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , то из тождества Уорда вытекает, что произведение  $k_\mu$  на амплитуду рождения  $B$  равно нулю. Поэтому мы можем заменить

$$\sum_i \varepsilon_\mu^{(i)} \varepsilon_\nu^{(i)*} \rightarrow -g_{\mu\nu}.$$

Это обобщает фейнмановский прием с векторами поляризации фотона на случай массивных бозонов и упрощает вычисление сечений процессов рождения  $B$ . (Внимание! Этот прием не работает (по крайней мере, столь просто) в случае неабелевых калибровочных полей.) Выполните некоторые вычисления, во всех случаях пренебрегая массой электрона.

- (a) Вычислите сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow B$ . Найдите время жизни  $B$ , предполагая, что он распадается только на электроны. Проверьте соотношение

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \frac{12\pi^2}{M} \Gamma(B \rightarrow e^+e^-) \delta(M^2 - s)$$

(оно обсуждалось в разделе 5.3).

- (b) Вычислите дифференциальное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \gamma + B$  в системе центра масс. (Аналогичный процесс, действительно имеющий место, — это  $e^+e^- \rightarrow \gamma + Z^0$ . Полученный результат позволяет измерить число распадов  $Z_0$  в ненаблюдаемые конечные состояния, которое в свою очередь оказывается пропорциональным числу типов нейтрино.)
- (c) Заметьте, что сечение из (b) расходится при  $\theta \rightarrow 0$  или  $\pi$ . Проанализируем область вблизи  $\theta = 0$ . Здесь главный вклад дает  $t$ -канал. Интуитивно это соответствует тому, что фотон излучается с электронной линии до момента аннигиляции. Преобразуйте формулу так, чтобы показать, что такая интерпретация действительно правильна. Прежде всего, заметьте, что расходимость при  $\theta \rightarrow 0$  обрезается электронной массой. Положите импульс электрона равным  $(E, 0, 0, k)$ , где  $k = (E^2 - m_e^2)^{1/2}$ , а импульс фотона —  $k^\mu = (xE, xE \sin \theta, 0, xE \cos \theta)$ . Покажите, что знаменатель пропагатора никогда не становится меньше, чем  $\mathcal{O}(m_e^2/s)$ . Теперь проинтегрируйте сечение из (b) по углам, обрезая интеграл по  $\theta$  при  $\theta^2 \sim (m_e^2/s)$  и оставляя только ведущий логарифмический вклад, пропорциональный  $\ln(s/m_e^2)$ . Покажите, что в этом приближении сечение для излучения фотона в направлении вперед может быть записано как

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma + B) \approx \int dx f(x) \cdot \sigma(e^+e^- \rightarrow B \text{ при } E_{\text{цм}}^2 = (1-x)s),$$

где сечение аннигиляции вычислено для случая столкновения позитрона с энергией  $E$  и электрона с энергией  $(1-x)E$ , а  $f(x)$ , а *функция распределения Вайцеккера-Вильямса*  $f(x)$  равна

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 + (1-x)^2}{x} \cdot \ln\left(\frac{s}{m_e^2}\right).$$

Эта функция всегда возникает в тех процессах, где фотон излучается коллинеарно с электронной линии. Мы встретимся с ней снова в задаче 6.2.

**5.6.** В этой задаче формализм спинорного произведения распространяется на внешние фотоны.

- (a) Пусть  $k$  — импульс фотона, а  $p$  — другой светоподобный вектор, выбранный так, что  $p \cdot k \neq 0$ . Введем  $u_R(p)$  и  $u_L(p)$  — спиноры с определенной спиральностью, соответствующие фермионам со светоподобным импульсом  $p$ , определенные в соответствии с соглашением из задачи 5.3. Определим векторы поляризации фотона:

$$\varepsilon_+^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{4p \cdot k}} \bar{u}_R(k) \gamma^\mu u_R(p), \quad \varepsilon_-^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{4p \cdot k}} \bar{u}_L(k) \gamma^\mu u_L(p).$$

Воспользуйтесь тождеством

$$u_L(p) \bar{u}_L(p) + u_R(p) \bar{u}_R(p) = \not{p}$$

и вычислите сумму по поляризациям:

$$\varepsilon_+^\mu \varepsilon_+^{\nu*} + \varepsilon_-^\mu \varepsilon_-^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu}{p \cdot k}.$$

Второе слагаемое справа даст нуль, если его свернуть с любой амплитудой излучения фотона  $\mathcal{M}^\mu$ , так что

$$|\varepsilon_+ \cdot \mathcal{M}|^2 + |\varepsilon_- \cdot \mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*} (-g_{\mu\nu});$$

Таким образом, векторы  $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  можно использовать для вычисления сумм по поляризациям фотонов.

- (b) Используя только что введенные поляризации и тождество Фирца из задачи 5.3, вычислите дифференциальное сечение аннигиляции безмассовых электрона и позитрона с образованием двух фотонов. Покажите, что в системе центра инерции результат совпадает с безмассовым пределом (5.107):

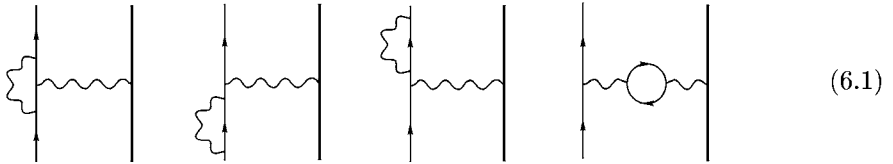
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right).$$

Из результатов (a) следует, что ответ не зависит от вектора  $p$ , который использовался для определения поляризационных векторов; однако вычисление сильно упрощается, если выбрать этот вектор равным первоначальному 4-вектору электрона.

## РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ: ВВЕДЕНИЕ

После того, как мы приобрели некоторый опыт вычислений процессов КЭД, перейдем к более сложным задачам. В главе 5 мы рассмотрели только процессы в *древесном приближении*, т. е. такие, которые описываются диаграммами, не содержащими петель. Но все такие процессы получают вклады высших порядков от диаграмм с петлями, носящие название *радиационных поправок*. Другим источником радиационных поправок в КЭД является тормозное излучение, т. е. испускание в реакции дополнительных фотонов в конечном состоянии. В этой главе мы рассмотрим оба типа радиационных поправок и обнаружим, что некорректно учитывать поправки одного типа без учета поправок другого.

Чтобы показать эти идеи на простейшем примере, мы везде в этой главе будем рассматривать процесс рассеяния электрона на другой очень тяжелой частице (на древесном уровне этот процесс изучался в разделе 5.4 и в задаче 5.1). В следующем порядке теории возмущений вклад дают следующие диаграммы:



Поправка в сечение порядка  $\alpha$  возникает от интерференции между вкладом этих диаграмм и диаграмм древесного приближения. Кроме (6.1) существуют еще шесть диаграмм, содержащих в петле тяжелую частицу, но в пределе, когда масса электрона много меньше массы тяжелой частицы, ими можно пренебречь, так как большая масса возникает в знаменателе пропагатора. (На физическом языке, более тяжелая частица меньше ускоряется, а следовательно, меньше излучает в процессе соударения.)

Из четырех диаграмм в (6.1) наиболее сложна и приводит к наибольшему числу новых эффектов первая, известная как *поправка к вершине*. В частности, она определяет аномальный магнитный момент электрона, который мы вычислим в разделе 6.3. Следующие две диаграммы являются *поправками к внешним линиям*. Мы пренебрежем ими в данной главе, поскольку эти диаграммы не ампутированы, как требуется нашей формулой (4.90) для элементов  $S$ -матрицы. Мы детально обсудим эти диаграммы после доказательства формулы (4.90) в разделе 7.2.

Последняя диаграмма в (6.1) называется *поляризацией вакуума*. Мы также не будем ее рассматривать до раздела 7.5, поскольку ее расчет требует более сложной техники, чем других. Изучение радиационных поправок осложняется тем, что все диаграммы в (6.1) плохо определены. Действительно, каждая такая диаграмма содержит интегрирование по неопределенному импульсу в петле, и всякий раз такой интеграл расходится на верхнем пределе, т. е. при  $k \rightarrow \infty$ , или в *ультрафиолетовой области*. К счастью, в выражениях для наблюдаемых величин, таких, как сечение рассеяния, бесконечные части этих интегралов всегда сокращаются.

Первые три диаграммы в (6.1) содержат кроме того *инфракрасные расходимости*, т. е. бесконечности, возникающие на нижнем пределе интегралов по импульсам при  $k \rightarrow 0$ . В разделе 6.4 мы увидим, что и эти расходимости сокращаются, если учесть диаграммы *тормозного излучения*:

(6.2)

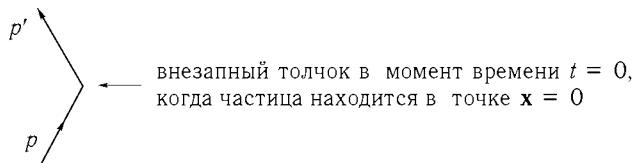
Эти диаграммы расходятся в пределе, когда энергия излученного фотона стремится к нулю. Такой фотон не может быть зафиксирован никаким реальным детектором, поэтому всегда имеет смысл добавлять сечение рождения таких фотонов малой энергии к сечению рассеяния без излучения. Диаграммы тормозного излучения являются поэтому существенной частью радиационной поправки к этому и любым другим процессам КЭД. Основная цель в этой главе — понять тормозное излучение мягких фотонов, рассмотреть диаграмму поправки к вершине и разобраться, как сокращаются инфракрасные расходимости в этих двух типах радиационных поправок.

## 6.1. Излучение мягких фотонов

Итак, начнем изучение радиационных поправок с рассмотрения процесса тормозного излучения. В этом разделе будет вычислена классическая интенсивность излучения фотонов малых энергий при внезапном ускорении электрона. После этого мы рассмотрим родственный процесс квантовой теории поля (сечение испускания одного очень мягкого фотона, описываемое диаграммами (6.2)) и поймем, как классический результат получается предельным переходом из квантового.

### Классическое вычисление.

Предположим, что по электрону, находящемуся в точке  $\mathbf{x} = 0$  в момент времени  $t = 0$  наносится внезапный удар так, что импульс электрона мгновенно изменяется от значения  $p$  до  $p'$ . (Конечно, мгновенное изменение импульса является математической абстракцией. Однако точная форма траектории в процессе ускорения не влияет на излучение малых частот. Поэтому наши вычисления будут справедливы для излучения с частотой, меньшей обратного времени рассеяния.) Поле излучения можно найти, выписав выражения для тока электрона и рассматривая его как источник в уравнениях Максвелла.



Какова плотность тока такой частицы? Для покоящейся в точке  $\mathbf{x} = 0$  заряженной частицы ток был бы равен:

$$j^\mu(x) = (1, \mathbf{0})^\mu \cdot e \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \int dt (1, \mathbf{0})^\mu \cdot e \delta^{(4)}(x - y(t)), \quad \text{где } y^\mu(t) = (t, \mathbf{0})^\mu.$$

Это выражение позволяет угадать ток в случае произвольной траектории  $y^\mu(\tau)$ :

$$j^\mu(x) = e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^{(4)}(x - y(\tau)). \quad (6.3)$$

Отметим, что это выражение не зависит от точного способа параметризации траектории: замена переменной  $\tau$  на  $\sigma(\tau)$  дает в мере интегрирования множитель  $d\tau/d\sigma$ , который при умножении на  $dy^\mu/d\tau$  превращается в  $dy^\mu/d\sigma$ . Используя (6.3), можно показать, что такой ток автоматически сохраняется: для любой «пробной функции»  $f(x)$ , убывающей на бесконечности, получаем:

$$\begin{aligned} \int d^4x f(x) \partial_\mu j^\mu(x) &= \int d^4x f(x) e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \partial_\mu \delta^{(4)}(x - y(\tau)) = \\ &= -e \int d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x) \Big|_{x=y(\tau)} = \\ &= -e \int d\tau \frac{d}{d\tau} f(y(\tau)) = \\ &= -e f(y(\tau)) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

В нашем случае траектория имеет вид:

$$y^\mu(\tau) = \begin{cases} (p^\mu/m)\tau & \text{для } \tau < 0; \\ (p'^\mu/m)\tau & \text{для } \tau > 0. \end{cases}$$

Поэтому ток может быть переписан как

$$j^\mu(x) = e \int_0^\infty d\tau \frac{p'^\mu}{m} \delta^{(4)}\left(x - \frac{p'}{m}\tau\right) + e \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{p^\mu}{m} \delta^{(4)}\left(x - \frac{p}{m}\tau\right).$$

Нам потребуется фурье-образ этой функции. Чтобы сделать интеграл сходящимся, вставим множители  $e^{-\varepsilon\tau}$  и  $e^{\varepsilon\tau}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{j}^\mu(k) &= \int d^4x e^{ik \cdot x} j^\mu(x) = \\ &= e \int_0^\infty d\tau \frac{p'^\mu}{m} e^{i(kp'/m + i\varepsilon)\tau} + e \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{p^\mu}{m} e^{i(kp/m - i\varepsilon)\tau} = \\ &= ie \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p' + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{k \cdot p - i\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Теперь можно начинать решать уравнения Максвелла. В лоренцевской калибровке ( $\partial^\mu A_\mu = 0$ ) уравнения Максвелла сводятся к  $\partial^2 A^\mu = j^\mu$ , или, переходя к фурье-компонентам:

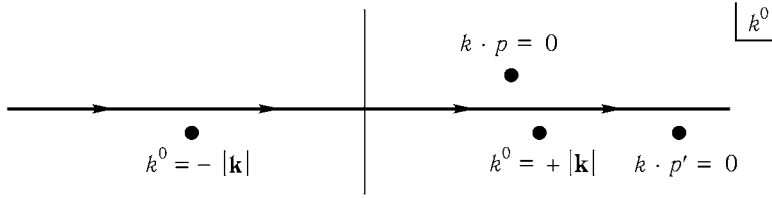
$$\tilde{A}^\mu(k) = -\frac{1}{k^2} \tilde{j}^\mu(k).$$

Подставляя сюда (6.4), сразу получаем формулу для векторного потенциала:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{-ie}{k^2} \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p' + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{k \cdot p - i\varepsilon} \right). \quad (6.5)$$



Интеграл по  $k^0$  можно вычислить, рассматривая его как контурный интеграл в комплексной плоскости. Полюсы находятся в точках:



Мы сдвинули полюсы  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$  ниже действительной оси для того, чтобы поле излучения удовлетворяло запаздывающим граничным условиям (мы вскоре подтвердим этот вывод).

При  $t < 0$  замыкаем контур в верхней полуплоскости, захватывая полюс  $k \cdot p = 0$  так, что  $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/p^0$ . В этом случае

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}/p^0)t} \frac{(2\pi i)(+ie)}{(2\pi)k^2} \frac{p^\mu}{p^0}.$$

В системе отсчета, где электрон первоначально покоится, 4-импульс равен  $p^\mu = (p^0, \mathbf{0})$ , и выражение для вектор-потенциала сводится к

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{e}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (1, \mathbf{0}).$$

Это кулоновский потенциал неускоренного заряда. Как и следовало ожидать, до того момента, пока электрон не рассеется, излучения нет.

Наоборот, при  $t > 0$  замкнем контур в нижней полуплоскости, захватывая три полюса, расположенные ниже действительной оси. Полюс при  $k^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}'/p'^0$  приводит к кулоновскому потенциалу вылетающей частицы. Следовательно, два других полюса ответственны за поле излучения. Их вклад таков:

$$\begin{aligned} A_{\text{rad}}^\mu(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{-e}{2|\mathbf{k}|} \left\{ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) + \text{с.с.} \right\} \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} = \\ &= \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где амплитуда в импульсном пространстве  $\mathcal{A}(\mathbf{k})$  равна:

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) = \frac{-e}{|\mathbf{k}|} \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right). \quad (6.7)$$

(Здесь и далее неявно подразумевается выполнение условия  $k^0 = |\mathbf{k}|$ .)

Чтобы вычислить излученную энергию, нужно найти электрическое и магнитное поля. Проще записать  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  как действительные части от комплексных интегралов Фурье (как это было сделано для  $A^\mu$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}; \\ \mathbf{B}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{B}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Амплитуды полей излучения в импульсном пространстве  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  и  $\mathcal{B}(\mathbf{k})$  равны:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{k}) &= -i\mathbf{k}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + ik^0\mathcal{A}(\mathbf{k}), \\ \mathcal{B}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k} \times \mathcal{A}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \mathcal{E}(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (6.9)$$

Используя явный вид  $\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k})$  (6.7), легко проверить, что электрическое поле поперечно:  $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k}) = 0$ .

Теперь можно найти энергию излучения:

$$\text{Энергия} = \frac{1}{2} \int d^3x (|\mathbf{E}(x)|^2 + |\mathbf{B}(x)|^2). \quad (6.10)$$

Первое слагаемое (от электрического поля):

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} (\mathcal{E}(\mathbf{k})e^{-ikx} + \mathcal{E}^*(\mathbf{k})e^{ikx}) \cdot (\mathcal{E}(\mathbf{k}')e^{-ik'x} + \mathcal{E}^*(\mathbf{k}')e^{ik'x}) = \\ = \frac{1}{8} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}(-\mathbf{k})e^{-2ik^0t} + 2\mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) + \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(-\mathbf{k})e^{2ik^0t}).\end{aligned}$$

Второе слагаемое, содержащее  $\mathcal{B}(\mathbf{k})$ , имеет аналогичный вид. Используя (6.9) и утверждение о поперечности электрического поля, можно показать, что зависящие от времени слагаемые в  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{B}$  сокращаются, а оставшиеся складываются и дают

$$\text{Энергия} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(\mathbf{k}). \quad (6.11)$$

Так как вектор  $\mathcal{E}(\mathbf{k})$  поперечен, введем два поперечных единичных вектора поляризации  $\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Тогда подынтегральное выражение можно переписать в виде:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}^*(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=1,2} |\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k})|^2 = |\mathbf{k}|^2 \sum_{\lambda=1,2} |\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{k})|^2.$$

Воспользовавшись явным выражением (6.7) для  $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ , получим окончательное выражение для энергии излучения\*:

$$\text{Энергия} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \frac{e^2}{2} \left| \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\mathbf{p}'}{k \cdot p'} - \frac{\mathbf{p}}{k \cdot p} \right) \right|^2. \quad (6.12)$$

Здесь можно свободно заменить векторы  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{p}'$ , и  $\mathbf{p}$  на соответствующие 4-векторы. Заметив, что замена  $\varepsilon^\mu$  на  $k^\mu$  должна давать нуль,

$$k_\mu \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) = 0,$$

находим, что суммирование по поляризациям можно провести с помощью приема, описанного в разделе 5.5, то есть заменив  $\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^*$  на  $-g_{\mu\nu}$ . В результате

$$\begin{aligned}\text{Энергия} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2} (-g_{\mu\nu}) \left( \frac{p'^\mu}{k \cdot p'} - \frac{p^\mu}{k \cdot p} \right) \left( \frac{p'^\nu}{k \cdot p'} - \frac{p^\nu}{k \cdot p} \right) = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2} \left( \frac{2p \cdot p'}{(k \cdot p')(k \cdot p)} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} \right).\end{aligned}\quad (6.13)$$

\*Этот результат получен в книге: Jackson (1975), p. 703.

Чтобы сделать эту формулу более ясной, выберем систему отсчета, в которой  $p^0 = p'^0 = E$ . Тогда 4-импульсы равны:

$$k^\mu = (k, \mathbf{k}), \quad p^\mu = E(1, \mathbf{v}), \quad p'^\mu = E(1, \mathbf{v}').$$

В такой системе выражение для энергии излучения приобретает вид:

$$\text{Энергия} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int dk \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'), \quad (6.14)$$

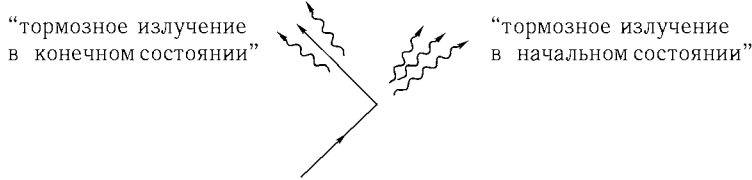
где  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  т. е. (дифференциальная интенсивность  $d(\text{энергия})/dk$ ) дается выражением:

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}}{4\pi} \left( \frac{2(1-\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')}{(1-\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})(1-\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}')} - \frac{m^2/E^2}{(1-\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})^2} - \frac{m^2/E^2}{(1-\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}')^2} \right). \quad (6.15)$$

Так как  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  не зависит от  $k$ , то интеграл в (6.14) по  $k$  тривиален, но расходится. Эта расходимость на самом деле возникает из-за незаконности использованного нами приближения мгновенного изменения импульса. Формула справедлива лишь для излучения с частотами, меньшими, чем обратное время рассеяния. Следует учитывать также обрезание за счет релятивистских эффектов, когда отдельные фотоны уносят заметную часть энергии релятивистского электрона. И в том, и в другом случае формула справедлива в пределе малых частот, так что можно обрезать интеграл на некотором значении максимальной частоты  $k_{\text{max}}$ . В этом случае

$$\text{Энергия} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot k_{\text{max}} \cdot \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (6.16)$$

Подынтегральное выражение  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  велико, когда  $\hat{\mathbf{k}}$  параллелен  $\mathbf{v}$  или  $\mathbf{v}'$ :



В ультррелятивистском пределе основной вклад в энергию набегаёт от двух максимумов в первом слагаемом в (6.15). Вычислим  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  в этом пределе, ограничившись областями в окрестности максимумов. Разобьем интеграл на куски, отвечающие каждому максимуму, и положим в каждом случае  $\theta = 0$  в направлении максимума. Тогда, интегрируя по малой окрестности  $\theta = 0$ ,

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \approx \int_{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{(1 - v \cos \theta)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')} + \int_{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}^{\cos \theta = 1} d \cos \theta \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')(1 - v' \cos \theta)}.$$

(Нижние пределы в интегралах на самом деле несущественны: можно выбрать  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = 1 - x(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')$  так, чтобы  $x$  не был бы слишком близок к 0 и не намного больше 1. Легко показать, что ведущий вклад в ультррелятивистском пределе не зависит от  $x$ .) Выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &\approx \ln\left(\frac{1 - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{1 - |\mathbf{v}|}\right) + \ln\left(\frac{1 - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{1 - |\mathbf{v}'|}\right) = \ln\left(\frac{(E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')^2}{E^2(E - p)^2}\right) \approx \\ &\approx 2 \ln\left(\frac{p \cdot p'}{(E^2 - p^2)/2}\right) = 2 \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

где  $q^2 = (p' - p)^2$ .

Итак, мы нашли, что энергия, излученная при низких частотах, равна

$$\text{Энергия} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\max}} dk \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \xrightarrow{E \gg m} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\max}} dk \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \quad (6.18)$$

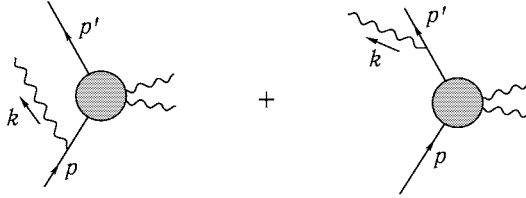
Если рассматривать излучение как совокупность фотонов, каждый из которых несет энергию  $k$ , то можно найти их число:

$$\text{Число фотонов} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{k_{\max}} dk \frac{1}{k} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (6.19)$$

Надеемся, что вычисление в рамках квантовой механики подтвердит этот результат.

### Квантово-механическое вычисление

Рассмотрим теперь квантово-механический процесс, состоящий в излучении одного фотона в процессе рассеяния электрона:



Пусть  $\mathcal{M}_0$  обозначает часть амплитуды, возникающую от взаимодействия электрона с внешним полем. Амплитуда всего процесса в целом такова:

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p') \left( \mathcal{M}_0(p', p-k) \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k) + \gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k) \frac{i(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p'+k)^2 - m^2} \mathcal{M}_0(p'+k, p) \right) u(p). \quad (6.20)$$

Так как нас интересует связь с классическим пределом, предположим, что излучаемый фотон мягкий:  $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$ . Тогда можно приближенно записать:

$$\mathcal{M}_0(p', p-k) \approx \mathcal{M}_0(p'+k, p) \approx \mathcal{M}_0(p', p), \quad (6.21)$$

где можно пренебречь  $\not{k}$  в числителях пропагаторов. Числители можно еще больше упростить, пользуясь алгеброй матриц Дирака. Так, в первом слагаемом получим:

$$(\not{p}' + m) \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* u(p) = [2p'^\mu \varepsilon_\mu^* + \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* (-\not{p}' + m)] u(p) = 2p'^\mu \varepsilon_\mu^* u(p).$$

Аналогично, во втором слагаемом:

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu \varepsilon_\mu^* (\not{p}' + m) = \bar{u}(p') 2p'^\mu \varepsilon_\mu^*.$$

Знаменатели пропагаторов также упрощаются:

$$(p-k)^2 - m^2 = -2p \cdot k; \quad (p'+k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k.$$

Таким образом, в приближении, когда излучается низкоэнергетический фотон, амплитуда приобретает вид:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p') [\mathcal{M}_0(p', p)] u(p) \cdot \left[ e \left( \frac{p' \cdot \varepsilon^*}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon^*}{p \cdot k} \right) \right]. \quad (6.22)$$

Она равна просто амплитуде упругого рассеяния (без излучения дополнительного мягкого фотона), умноженной на выражение (в скобках), описывающее испускание фотона.

Сечение процесса так же легко выразить через сечение упругого рассеяния: достаточно просто проинтегрировать по переменной  $k$ . Суммируя по двум состояниям поляризации фотона, получаем:

$$d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma) = d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=1,2} e^2 \left| \frac{p' \cdot \varepsilon^{(\lambda)}}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon^{(\lambda)}}{p \cdot k} \right|^2. \quad (6.23)$$

Таким образом, дифференциальная вероятность того, что электрон, рассеянный с изменением импульса от  $p$  до  $p'$ , излучит фотон с 4-импульсом  $k$ , равна:

$$d(\text{вероятность}) = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \frac{e^2}{2k} \left| \varepsilon_{\lambda} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}'}{p' \cdot k} - \frac{\mathbf{p}}{p \cdot k} \right) \right|^2. \quad (6.24)$$

Это выражение на самом деле нам уже знакомо: если его умножить на энергию фотона  $k$ , получив тем самым излученную энергию, мы возвращаемся к классическому выражению (6.12).

Однако возникает одна проблема. Уравнение (6.24) не является выражением для числа излученных фотонов, а определяет вероятность излучения одного фотона. Все еще больше усложнится, если проинтегрировать по импульсу фотона. Как и в (6.16), интеграл на верхнем пределе следует обрезать при энергии, при которой перестает работать наше приближение. Разумная оценка энергии обрезания  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$ . В результате

$$\text{Полная вероятность} \approx \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{|\mathbf{q}|} dk \frac{1}{k} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \quad (6.25)$$

Так как  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  не зависит от  $k$ , то интеграл расходится на нижнем пределе (хотя все сделанные приближения там очень хорошо выполняются). Другими словами, полная вероятность излучения очень мягкого фотона бесконечна. В этом и состоит известная проблема инфракрасной расходимости в КЭД.

Мы можем искусственно сделать интеграл в (6.25) хорошо определенным, если предположить, что фотон имеет маленькую ненулевую массу  $\mu$ . Эта масса определяет обрезание интеграла на нижнем пределе, и в результате полученный ответ таков:

$$\begin{aligned} d\sigma(p \rightarrow p' + \gamma(k)) &= d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \Big|_{-q^2 \rightarrow \infty} \approx \\ &\approx_{-q^2 \rightarrow \infty} d\sigma(p \rightarrow p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Зависимость этого ответа от  $q^2$ , известная как *судаковский двойной логарифм*, на самом деле имеет физический смысл, и мы вновь столкнемся с ней в разделе 6.4. Однако зависимость от  $\mu$  — проблема, которую еще предстоит решить. Нетрудно догадаться, что

решение этой проблемы будет включать новую интерпретацию выражения (6.24) как ожидаемого числа излученных фотонов, а не вероятности излучения одного фотона. В разделах 6.4 и 6.5 мы увидим, как эта новая интерпретация получается из рассмотрения фейнмановских диаграмм. Однако, чтобы подготовиться к этому обсуждению, нужно углубить понимание амплитуды рассеяния без излучения.

### 6.2. Электронная вершинная функция: формальная структура

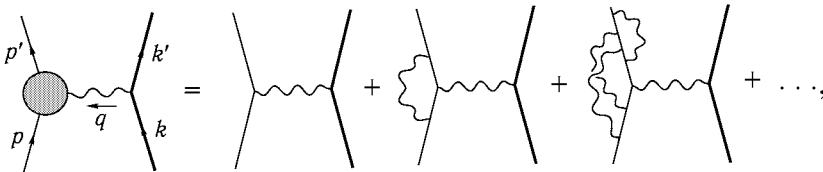
После краткого обсуждения радиационных поправок КЭД, возникающих из-за излучения дополнительных мягких фотонов, рассмотрим поправки к рассеянию электрона, появляющиеся из-за присутствия дополнительного *виртуального* фотона:



Это станет нашим первым опытом работы с фейнмановскими диаграммами, содержащими петли. Такие диаграммы порождают в квантовой теории поля значительные и глубокие осложнения.

Результат вычисления этой диаграммы довольно сложен, так что полезно заранее попробовать понять, какую форму поправки следует ожидать и как можно физически интерпретировать отдельные возможные слагаемые. В этом разделе мы рассмотрим общие свойства диаграмм вершинных поправок и увидим, что фундаментальные требования лоренц-инвариантности, инвариантности относительно дискретных симметрий в КЭД и тождество Уорда сильно ограничивают возможную форму вершины.

Итак, рассмотрим класс диаграмм:



где серым кружочком обозначена сумма вершины взаимодействия электрона с фотоном в низшем порядке и всех ампутированных петлевых поправок к ней. В дальнейшем мы будем обозначать эту сумму вершинных диаграмм как  $-ie\Gamma^\mu(p', p)$ . Согласно основной формуле (4.103) для элементов  $S$ -матрицы амплитуда рассеяния электрона на тяжелой частице-мишени равна

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left( \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \right) \frac{1}{q^2} \left( \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \right). \tag{6.28}$$

В более общем случае, функция  $\Gamma^\mu(p', p)$  возникает в элементе  $S$ -матрицы рассеяния электрона во внешнем электромагнитном поле. Как и в задаче (4.4), добавим в гамильтониан КЭД слагаемое с взаимодействием:

$$\Delta H_{\text{int}} = \int d^3x e A_\mu^{\text{cl}} j^\mu, \tag{6.29}$$

где  $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  — ток, а  $A_\mu^{\text{cl}}$  — заданный вектор-потенциал классического внешнего поля. В ведущем порядке теории возмущений матричный элемент рассеяния электрона на таком внешнем поле равен:

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p^{0'} - p^0) = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(p' - p),$$

где  $\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q)$  — фурье-образ  $A_\mu^{\text{cl}}(x)$ . Вершинные поправки изменяют это выражение так, что

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p^{0'} - p^0) = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p) \cdot \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(p' - p). \quad (6.30)$$

В (6.28) и (6.30) мы преднамеренно опускаем вклад поляризации вакуума (все диаграммы типа четвертой в (6.1)). Причина состоит в том, что такие диаграммы описывают квантовые поправки к самому электромагнитному полю, тогда как диаграммы в  $\Gamma^\mu$  — поправки к отклику электрона на заданное приложенное поле\*.

Чтобы понять, какие ограничения наложены на вид  $\Gamma^\mu(p', p)$ , воспользуемся общими соображениями. Очевидно, что в низшем порядке  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ . Вообще же говоря,  $\Gamma^\mu$  является некоторым выражением, включающим  $p, p', \gamma^\mu$ , разные константы типа  $m, e$  и числовые коэффициенты. Этот список исчерпывающий, т. к. никакие другие величины не входят в фейнмановские правила для вычисления диаграмм в  $\Gamma^\mu$ . Единственный объект, который кроме этого мог бы появиться, это  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  (или, что то же самое,  $\gamma^5$ ); однако появление полностью антисимметричного тензора запрещено в любой сохраняющей четность теории. Можно существенно сузить возможный выбор форм для  $\Gamma^\mu$ , обратившись к требованию лоренц-инвариантности. Поскольку  $\Gamma^\mu$  преобразуется как 4-вектор (в том же смысле, как  $\gamma^\mu$ ), то она должна быть некоторой линейной комбинацией векторов из приведенного выше списка  $\gamma^\mu, p^\mu$  и  $p'^\mu$ . Если воспользоваться для удобства комбинациями  $p' + p$  и  $p' - p$ , то

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C. \quad (6.31)$$

Коэффициенты  $A, B$  и  $C$  могут включать в себя  $\not{p}$  и  $\not{p}'$ , но так как  $\not{p}u(p) = m \cdot u(p)$  и  $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p') \cdot m$ , можно без потери общности записать коэффициенты как обычные числа. Единственный нетривиальный скаляр  $q^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$ , так что  $A, B$  и  $C$  являются функциями только  $q^2$  (и констант вроде  $m$ ).

Список разрешенных векторов еще больше сократится, если применить тождество Уорда (5.79):  $q_\mu \Gamma^\mu = 0$  (отметим, что наше доказательство этого тождества в разделах 5.5 и 7.4 не требует  $q^2 = 0$ ). Если свернуть  $q_\mu$  с (6.31) по лоренцевским индексам и взять в обкладку между  $\bar{u}(p')$  и  $u(p)$ , то можно видеть, что первое и второе слагаемое обращается в нуль, а третье — нет, так что  $C$  следует положить равным нулю.

На основании общих принципов дальнейшее упрощение в (6.31) невозможно. Однако удобно переписать (6.31) с помощью тождества Гордона (см. задачу (3.2)):

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p). \quad (6.32)$$

Это тождество позволяет выразить слагаемые с  $(p' + p)$  через слагаемое, содержащее  $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ . Окончательный результат можно записать в виде:

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (6.33)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — неизвестные функции  $q^2$ , носящие название *форм-факторов*.

\* Чтобы оправдать это утверждение, мы обязаны строго определить, что же называть приложенным внешним полем в квантовой теории. Это будет сделано в гл. 11.

В низшем порядке теории возмущений  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 0$ . В следующем разделе для них будут вычислены однопетлевые (первого порядка по  $\alpha$ ) поправки за счет вершинной диаграммы (6.27). В принципе форм-факторы можно найти в любом порядке теории возмущений.

Так как  $F_1$  и  $F_2$  содержат в себе всю информацию о влиянии электромагнитного поля на электрон, они должны, в частности, содержать полный электрический заряд электрона и его магнитный момент. Для нахождения электрического заряда воспользуемся (6.30) и вычислим амплитуду упругого кулоновского рассеяния нерелятивистского электрона на области с ненулевым электростатическим потенциалом. Положим  $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{0})$ . Тогда  $\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q) = ((2\pi)\delta(q^0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}), \mathbf{0})$ . Подставляя это выражение в (6.30), находим:

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^0(p', p)u(p) \cdot \tilde{\phi}(\mathbf{q}).$$

Если электростатическое поле очень медленно изменяется в большой (быть может, макроскопической) области,  $\phi(\mathbf{q})$  будет локализована в окрестности  $\mathbf{q} = 0$ ; следовательно, в спинорном матричном элементе можно перейти к пределу  $\mathbf{q} \rightarrow 0$ . Вклад вносит только форм-фактор  $F_1$ . Воспользовавшись выражениями для спиноров в нерелятивистском пределе, найдем:

$$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = u^\dagger(p')u(p) \approx 2m\xi'^\dagger\xi,$$

и амплитуда рассеяния электрона на электростатическом поле принимает вид:

$$i\mathcal{M} = -ieF_1(0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \cdot 2m\xi'^\dagger\xi. \quad (6.34)$$

Это есть борновское приближение для рассеяния на потенциале

$$V(\mathbf{x}) = eF_1(0)\phi(\mathbf{x}).$$

Таким образом,  $F_1(0)$  играет роль эффективного электрического заряда электрона в единицах  $e$ . Поскольку уже в ведущем порядке теории возмущений  $F_1(0) = 1$ , радиационные поправки к  $F_1(q^2)$  должны обращаться в нуль при  $q^2 = 0$ .

Повторяя эти рассуждения для рассеяния электрона на статическом вектор-потенциале, можно найти связь между форм-факторами и магнитным моментом электрона\*. Положим  $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (0, \mathbf{A}^{\text{cl}}(\mathbf{x}))$ . Амплитуда рассеяния на этом поле равна:

$$i\mathcal{M} = +ie\left[\bar{u}(p')\left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}F_2\right)u(p)\right]\tilde{A}_{\text{cl}}^i(\mathbf{q}). \quad (6.35)$$

Выражение в скобках обращается в нуль при  $\mathbf{q} = 0$ , так что нужно аккуратно выделить из него вклад, линейный по  $q^i$ . Чтобы сделать это, подставим нерелятивистское разложение спиноров  $u(p)$  и оставим только линейные по импульсам слагаемые:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma \xi} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma} \xi} \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2m)\xi \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2m)\xi \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Слагаемое с  $F_1$  можно упростить следующим образом:

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = 2m\xi'^\dagger \left( \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \xi.$$

\* Следующие выкладки содержат много множителей  $(-1)$ , возникающих от поднятия и опускания пространственноподобных индексов. При проверке вычислений будьте внимательны!



Воспользовавшись тождеством  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma^k$ , находим слагаемое, не зависящее от спина (пропорциональное  $(\mathbf{p}' + \mathbf{p})$ ) и зависящее от него (пропорциональное  $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ ). Первое из этих слагаемых — вклад от оператора  $[\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}]$  в обычную кинетическую энергию нерелятивистской квантовой механики. Второе же слагаемое — искомое взаимодействие магнитного момента. Оставляя только его, получим:

$$\bar{u}(p') \gamma^i u(p) = 2m \xi^{\dagger} \left( \frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi.$$

Член с  $F_2$  уже содержит явно множитель  $q$ , так что его можно вычислить, используя главный член разложения спиноров. Имеем:

$$\bar{u}(p') \left( \frac{i}{2m} \sigma^{i\nu} q_\nu \right) u(p) = 2m \xi^{\dagger} \left( \frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi.$$

Таким образом, полное слагаемое электрон-фотонной функции, пропорциональное  $q$ , имеет вид:

$$\bar{u}(p') \left( \gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu} q_\nu}{2m} F_2 \right) u(p) \underset{q \rightarrow 0}{\approx} 2m \xi^{\dagger} \left( \frac{-i}{2m} \varepsilon^{ijk} q^j \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi.$$

Подставляя это выражение в (6.35), находим:

$$i\mathcal{M} = -i(2m) \cdot e \xi^{\dagger} \left( \frac{-1}{2m} \sigma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi \tilde{B}^k(\mathbf{q}),$$

где

$$\tilde{B}^k(\mathbf{q}) = -i\varepsilon^{ijk} q^i \tilde{A}_{\text{cl}}^j(\mathbf{q})$$

— фурье-образ магнитного поля, порождаемого  $\mathbf{A}^{\text{cl}}(\mathbf{x})$ .

Как и при нахождении эффективного заряда электрона, будем интерпретировать  $\mathcal{M}$  как амплитуду рассеяния электрона на некотором потенциале в борновском приближении. Потенциал соответствует взаимодействию магнитного момента

$$V(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{\mu} \rangle \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

где

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi.$$

Это выражение для магнитного момента электрона можно переписать в стандартной форме:

$$\boldsymbol{\mu} = g \left( \frac{e}{2m} \right) \mathbf{S},$$

где  $\mathbf{S}$  — спин электрона. Коэффициент  $g$ , носящий название *множителя Ланде*, равен:

$$g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0). \quad (6.37)$$

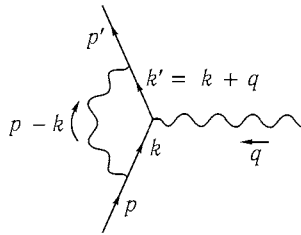
Итак, из КЭД следует, что  $g = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$  (так как в ведущем порядке теории возмущений член с  $F_2$  не появляется). Главный член в  $g$ -факторе предсказывает уравнение Дирака. Однако в высших порядках  $F_2$  перестает быть равным нулю, и возникает небольшая добавка (называемая *аномальным магнитным моментом*) к дираковскому значению магнитного момента. В следующем разделе мы найдем ее в первом порядке по  $\alpha$ .

Так как наш вывод выражения для структуры вершины (6.33) опирался только на общие принципы симметрии, естественно ожидать, что формула применима к взаимодействию с электромагнитным полем не только электрона, но и любого фермиона.

Например, электромагнитная амплитуда рассеяния протона на фотоне так же должна описываться двумя инвариантными функциями от  $q^2$ . Однако, так как протон не является элементарной частицей, не следует ожидать, что дираковские значения  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 0$  являются хорошими приближенными значениями для форм-факторов протона. На самом деле оба форм-фактора протона сильно зависят от  $q^2$ . Однако описание вершинной функции с помощью форм-факторов позволяет удобно суммировать данные о рассеянии при разных энергиях и углах. Точная связь форм-факторов с сечениями рассматривается в задаче 6.1. Наконец, только что выведенные общие ограничения при  $q^2 = 0$  применимы и к протону  $F_1(0) = 1$  и  $2F_2(0) = (g_p - 2)$ , хотя  $\gamma$ -фактор протона отличается от дираковского значения на 40%.

### 6.3. Электрон-фотонная вершина: оценка выражения

Теперь, когда мы знаем, в какой форме следует искать ответ (6.33), можно приступить к вычислению однопетлевой поправки к вершинной функции электрона. Обозначим импульсы на диаграмме:



Применяя фейнмановские правила, получаем в первом порядке по  $\alpha$ , что  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$ , где

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) &= \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\varepsilon} \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ie\gamma^\rho)u(p) = \\ &= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu]u(p)}{((k-p)^2 + i\varepsilon)(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Во второй строчке было использовано тождество  $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = -2\gamma^\mu$ . Отметим, что члены  $+i\varepsilon$  в знаменателях опускать нельзя — они будут необходимы для правильного вычисления интеграла по петле.

Интеграл выглядит пугающе, и, в самом деле, его нахождение является нетривиальной задачей. Однако специально для вычисления интегралов такого вида существует техника, известная как метод *фейнмановских параметров* (хотя очень похожий способ ранее был предложен Швингером).

#### Фейнмановские параметры

Цель этого метода состоит в том, чтобы привести произведение трех знаменателей в (6.38) к одному квадратичному полиному по  $k$ , возведенному в третью степень. Затем можно сдвинуть  $k$  на константу, чтобы выделить полный квадрат и вычислить получившийся сферически-симметричный интеграл. Однако за это придется заплатить введением некоторых произвольных параметров, по которым тоже нужно интегрировать.

Для начала будем рассматривать более простой случай двух множителей в знаменателе. Используем следующее тождество:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}. \quad (6.39)$$

Пример его использования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2-m^2)]^2} = \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2]^2}. \end{aligned}$$

Если теперь положить  $\ell \equiv k - xp$ , видно, что знаменатель зависит только от  $\ell^2$ . Теперь интегрировать по  $d^4k$  куда проще, т.к.  $d^4k = d^4\ell$  и подынтегральное выражение сферически-симметрично по  $\ell$ . Переменные  $x$  и  $y$ , которые введены, чтобы получить этот результат, называются *фейнмановскими параметрами*.

В знаменателе подынтегрального выражения (6.38) содержатся не два, а три множителя, так что в этом случае нам нужно несколько иное тождество. Дифференцируя (6.39) по  $B$ , легко доказать, что

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}}. \quad (6.40)$$

Но этого результата все еще недостаточно. На самом деле более общая формула имеет вид:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n}. \quad (6.41)$$

Доказательство проводится по индукции. При  $n = 2$  это тождество очевидным образом переходит в (6.39), а при дальнейшем доказательстве удобно пользоваться (6.40).

Последовательно дифференцируя (6.41), можно вывести еще более общее тождество:

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \cdots + m_n)}{\Gamma(m_1) \cdots \Gamma(m_n)}. \quad (6.42)$$

Эта формула верна даже в том случае, когда  $m_i$  не целые; в разделе 10.5 мы столкнемся как раз с таким случаем.

### Вычисления форм-факторов

Применим (6.41) к знаменателю (6.38):

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\varepsilon)(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3},$$

где новый знаменатель  $D$  равен:

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k - p)^2 + (x + y + z)i\varepsilon = \\ &= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\varepsilon \end{aligned} \quad (6.43)$$

(во второй строчке были использованы равенства  $x + y + z = 1$  и  $k' = k + q$ ). Совершим сдвиг переменной  $k$ , чтобы дополнить до полного квадрата:

$$\ell \equiv k + yq - zp.$$

После небольших выкладок находим, что  $D$  приобретает вид:

$$D = \ell^2 - \Delta + i\varepsilon,$$

где

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1 - z)^2 m^2. \quad (6.44)$$

Так как в процессе рассеяния  $q^2 < 0$ , то  $\Delta$  положительна, будем считать ее эффективным массовым слагаемым.

Выразим числитель (6.38) через  $\ell$ . Эта задача сильно упростится, если заметить, что поскольку  $D$  зависит только от абсолютного значения  $\ell$ ,

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{D^3} = 0; \quad (6.45)$$

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4} g^{\mu\nu} \ell^2}{D^3}. \quad (6.46)$$

Первое тождество следует из соображений симметрии. Для доказательства второго заметим, что интеграл обращается в нуль, если не выполнено условие  $\mu = \nu$ . Таким образом, из лоренц-инвариантности следует, что в ответе должно получиться выражение, пропорциональное  $g^{\mu\nu}$ . Чтобы проверить правильность коэффициента, достаточно свернуть обе части с  $g_{\mu\nu}$ . Воспользовавшись этими тождествами, легко найти, что

$$\begin{aligned} \text{Числитель} &= \bar{u}(p') \left[ \not{k} \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu \right] u(p) \rightarrow \\ &\rightarrow \bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} \gamma^\mu \ell^2 + (-y\not{q} + z\not{p}) \gamma^\mu ((1 - y)\not{q} + z\not{p}) + \right. \\ &\quad \left. + m^2 \gamma^\mu - 2m((1 - 2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p) \end{aligned}$$

(не забудем, что  $k' = k + q$ ).

Привести это выражение к более компактному виду можно с помощью алгебры Дирака (это займет примерно страницу или две вычислений). Именно сейчас окупаются затраты усилий на вычисления в конце предыдущего раздела, т.к. мы знаем, каков вид ожидаемого ответа. В конце концов все возникающие слагаемые надо сгруппировать в два слагаемых, пропорциональных  $\gamma^\mu$  и  $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ . Наиболее короткий путь — стремиться получить вместо этого выражение типа

$$\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C$$

(так же, как и в (6.31)). Приведение к такому виду требует только соотношения антикоммутации (например,  $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}$ ) и уравнения Дирака ( $\not{p}u(p) = m u(p)$ ) и  $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$ ; отсюда, кстати, вытекает, что  $\bar{u}(p')\not{q}u(p) = 0$ ). Кроме того, полезно помнить, что  $x + y + z = 1$ . После того, как рассеется дым, получим:

$$\begin{aligned} \text{Числитель} = \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \cdot \left( -\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) + \right. \\ \left. + (p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y) \right] u(p). \end{aligned}$$

В силу тождества Уорда коэффициент при  $q^\mu$  должен быть равен нулю. Чтобы показать это, заметим, что знаменатель (см. (6.44)) симметричен по отношению к замене  $x \leftrightarrow y$ . Коэффициент при  $q^\mu$  нечетен относительно  $x \leftrightarrow y$  и, следовательно, обращается в нуль после интегрирования по  $x$  и  $y$ .

Следуя схеме предыдущего раздела, воспользуемся тождеством Гордона (6.32) и выразим  $(p' + p)$  через  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ . При этом выражение для вклада в порядке  $\mathcal{O}(\alpha)$  в вершину преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) = 2ie^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \times \\ \times \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \cdot \left( -\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2z(1-z)) \right] u(p), \end{aligned} \quad (6.47)$$

где, как и ранее,

$$D = \ell^2 - \Delta + i\varepsilon, \quad \Delta = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 > 0.$$

Теперь разложение на форм-факторы становится очевидным.

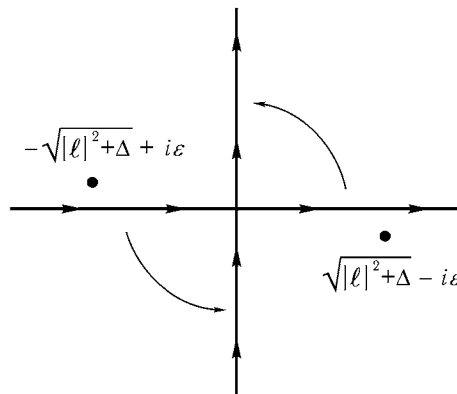


Рис. 6.1. Контур интегрирования по  $\ell^0$  можно повернуть следующим образом.

Большая часть работы позади, и главной оставшейся задачей становится вычисление интеграла по импульсам. Нетрудно взять интеграл по  $\ell^0$ , рассматривая его как контурный, а интеграл по пространственным компонентам вычислить в сферических координатах. Мы воспользуемся даже более простым приемом, носящим название *виковского поворота*. Заметим, что если бы не знаки «минус» в метрике Минковского, мы могли бы вычислить весь четырехмерный интеграл в сферических координатах. Чтобы устранить знаки «минус», рассмотрим контур интегрирования в плоскости  $\ell^0$  (рис. 6.1). Расположение полюсов и тот факт, что подынтегральное выражение

достаточно быстро спадает при больших  $|\ell^0|$ , позволяют повернуть контур на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Определим теперь *евклидов* 4-импульс  $\ell_E$ :

$$\ell^0 \equiv i\ell_E^0; \quad \ell = \ell_E. \quad (6.48)$$

Повернутый контур начинается от  $\ell_E^0 = -\infty$  и заканчивается на  $\infty$ . Заменяя переменные интегрирования на  $\ell_E$ , можно теперь вычислить интеграл в четырехмерных сферических координатах.

Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\ell_E \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} = \\ &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}. \end{aligned}$$

Хотя сейчас нужен только случай  $m = 3$ , будет полезным знать общий результат — он нужен при вычислении петлевых поправок более высокого порядка. Множитель  $\int d\Omega_4$  — площадь поверхности четырехмерной сферы единичного радиуса, которая равна  $2\pi^2$ . (Один из способов вычислить ее — перейти к четырехмерным сферическим координатам

$$x = (r \sin \omega \sin \theta \cos \phi, r \sin \omega \sin \theta \sin \phi, r \sin \omega \cos \theta, r \cos \omega).$$

Мера интегрирования при этом равна  $d^4x = r^3 \sin^2 \omega \sin \theta d\phi d\theta d\omega dr$ .) Окончательно получим:

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}. \quad (6.49)$$

Аналогично,

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}. \quad (6.50)$$

Отметим, что второй результат справедлив лишь при  $m > 3$ . При  $m = 3$  виковский поворот делать нельзя, и такой интеграл в любом случае расходится. Но именно этот случай нужен в (6.47).

В дальнейшем мы поймем физический смысл этой расходимости, а сейчас воспользуемся искусственным рецептом, чтобы сделать интеграл сходящимся. Для этого вернемся к первоначальному выражению для фейнмановского интеграла (6.38) и изменим фотонный пропагатор следующим образом:

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (6.51)$$

где  $\Lambda$  — некоторая очень большая масса. Такая замена не оказывает никакого влияния на интеграл в области малых  $k$  (так как  $\Lambda$  велика), однако теперь при  $k \gtrsim \Lambda$  интеграл мягко обрезается. Будем считать второе слагаемое пропагатором некоторого фиктивного тяжелого фотона, вклад которого вычитается из вклада обычного фотона. С его введением в числитель остается прежним, а знаменатель изменяется как

$$\Delta \longrightarrow \Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 + z\Lambda^2. \quad (6.52)$$

Теперь интеграл (6.50) становится сходящимся и можно выполнить виковский поворот и вычислить его:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left( \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right) = \\ & = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left( \frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2 + \Delta]^3} - \frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^3} \right) = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left( \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Кроме того, к сходящимся членам в (6.47) возникают поправки порядка  $\Lambda^{-2}$ , которые мы опустим.

Способ регуляризации фейнмановских интегралов путем введения фиктивных тяжелых частиц носит название *регуляризации Паули – Вилларса*. Следует помнить о том, что введение фиктивного фотона не имеет никакого физического смысла, и такой метод регуляризации — всего лишь один из многих возможных. (Мы обсудим их в следующей главе, в частности, в задаче 7.2.) Наша надежда заключается в том, что в окончательное выражение для наблюдаемых сечений новый параметр  $\Lambda$  не войдет.

Воспользовавшись для оценки интегралов в (6.47) выражениями (6.49) и (6.53), получим явное, хотя и довольно сложное, выражение для однопетлевой поправки к вершинной функции:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} & = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ & \times \bar{u}(p') \left( \gamma^\mu \left[ \ln \frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \left( (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \left[ \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z) \right] \right) u(p). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Выражения в квадратных скобках и есть желаемые поправки к форм-факторам.

Прежде чем анализировать этот результат, суммируем использованные вычислительные методы. Они типичны для любых вычислений с петлями.

1. Рисуем диаграмму (диаграммы) и выписываем выражение для амплитуды.
2. Вводим фейнмановские параметры и объединяем произведение знаменателей пропагаторов.
3. Новый знаменатель с помощью сдвига петлевой импульсной переменной  $k \rightarrow \ell$  дополняем до полного квадрата.
4. Переписываем числитель через  $\ell$ . Отбрасываем нечетные степени  $\ell$ , а четные переписываем с использованием тождеств типа (6.45).
5. С помощью виковского поворота и использования четырехмерных сферических координат вычисляем интеграл по импульсу.

На последнем шаге интеграл по импульсам часто оказывается расходящимся. В этом случае следует доопределить (или *регуляризовать*) интеграл, используя рецепт Паули – Вилларса или какой-нибудь другой.

Попытаемся разобраться с ультрафиолетовой расходимостью, параметризованной в (6.54). Отметим, что расходимость возникает в самом неприятном месте. Она вносит вклад в  $F_1(q^2 = 0)$ , который должен быть равен 1 (см. обсуждение в предыдущем

разделе). Но это единственное следствие наличия расходящегося слагаемого. Поэтому примем простую, но полностью подходящую к этому случаю процедуру фиксации расходящегося слагаемого: вычтем из (6.54) слагаемое, пропорциональное вершинной функции нулевого порядка  $(\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p))$  так, чтобы условие  $F_1(0) = 1$  выполнилось. Другими словами, выполним замену:

$$\delta F_1(q^2) \rightarrow \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0) \quad (6.55)$$

(где  $\delta F_1$  — поправка первого порядка к  $F_1$ ). Для оправдания такой процедуры требуется ввести небольшое исправление в выражении для  $S$ -матрицы (4.103) (см. раздел 4.5). Вкратце, слагаемое, который мы вычитаем, исправляет отбрасывание диаграмм с поправками к внешним линиям в (6.1) Все объяснения, касающиеся правомерности такой замены, мы отложим до раздела 7.2.

Кроме ультрафиолетовой в  $F_1(q^2)$  содержится еще инфракрасная расходимость, возникающая от слагаемого с  $1/\Delta$ . Так, при  $q^2 = 0$  это слагаемое равно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1-4z+z^2}{\Delta(q^2=0)} &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-2 + (1-z)(3-z)}{m^2(1-z)^2} = \\ &= \int_0^1 dz \frac{-2}{m^2(1-z)} + \text{конечные слагаемые.} \end{aligned}$$

Эту болезнь также можно вылечить, предположив, что у фотона есть маленькая масса  $\mu$ . Тогда в знаменателе фотонного пропагатора  $(k-p)^2$  перейдет в  $(k-p)^2 - \mu^2$ . Знаменатель в (6.43) еще умножался на  $z$ , и это приводит в результате к добавлению слагаемого  $z\mu^2$  к  $\Delta$ . В следующих двух разделах мы подробно обсудим инфракрасную расходимость.

Итак, с учетом изменений, возникающих из-за инфракрасной и ультрафиолетовой расходимостей, выражения для форм-факторов выглядят так:

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ &\times \left[ \ln\left(\frac{m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy}\right) + \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy + \mu^2 z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2); \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[ \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (6.57)$$

Заметим, что никакая из расходимостей не оказывает влияние на  $F_2(q^2)$ . Следовательно можно сразу же однозначно вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} F_2(q^2 = 0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.58)$$



Таким образом, поправка к  $g$ -фактору электрона равна:

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.0011614. \quad (6.59)$$

Впервые этот результат был получен Швингером в 1948 г.\* Эксперименты дают  $a_e = 0.0011597$ . Это значит, что найденное нами значение  $F_2(0)$  правильно с точностью до высших порядков  $\alpha$ .

### Точные эксперименты по проверке КЭД

После того, как оказалось, что найденные поправки к  $a_e$  порядка  $\alpha$  так хорошо отвечают экспериментальным данным, последующие поколения физиков повысили точность как теоретических расчетов, так и экспериментов для определения этой величины. В настоящее время коэффициенты в теоретической формуле КЭД для  $a_e$  известны вплоть до членов порядка  $\alpha^4$ . Вычисление поправок порядка  $\alpha^2$  и выше требует разработанной схемы обращения с ультрафиолетовыми расходимостями.

Результаты теоретических расчетов всякий раз подтверждались все более и более точными экспериментами. Последние измерения  $a_e$  используют методику, разработанную Демельтом с сотрудниками и состоящую в том, что одиночные электроны улавливаются системой электро- и магнитостатических полей, после чего возбуждаются в спиновом резонансе†. В настоящий момент экспериментальное и теоретическое значения  $a_e$  находятся в согласии друг с другом с точностью до восьмого знака после запятой.

Расчеты поправок высших порядков КЭД были проведены для множества других величин. Сюда относятся энергии переходов между уровнями атома водорода и водородоподобных атомов, аномальный магнитный момент мюона, вероятности распадов синглетного и триплетного позитрония. Большинство этих величин с высокой точностью измерялось в экспериментах. Все множество этих сравнений представляет детальную проверку справедливости КЭД в различных ситуациях. Результаты приведены в таблице 6.1.

При демонстрации результатов точных сравнений теории КЭД и опыта возникает определенная тонкость, поскольку теоретические предсказания требуют максимально точного значения  $\alpha$ , которое может быть получено только из другого точного эксперимента. Поэтому мы приводим каждое сравнение теории и опыта как независимое определение  $\alpha$ . Каждой величине  $\alpha$  приписывается ошибка, которая складывается из ожидаемых неточностей, проистекающих от теории и эксперимента. КЭД подтверждается до той степени, до которой совпадают значения  $\alpha$ , полученные разными способами.

Первые девять строчек в таблице 6.1 основаны на КЭД расчетах в атомной физике. В частности, сверхтонкое расщепление уровней в атоме водорода, измеренное с использованием водородного лазера Ремзи, является наиболее точно измеренной в физике величиной. К сожалению, влияние внутренней структуры протона ведет к неопределенностям, которые задают предел точности, с которым данная величина может быть предсказана теорией. Та же самая сложность возникает при рассмотрении лэмбовского сдвига — расщепления между  $j = 1/2$   $2S$ - и  $2P$ -уровнями водорода. Поэтому наиболее точные опыты по проверке КЭД проводятся над системами, не содержащими сильновзаимодействующих частиц, например, опыты по определению  $(g-2)$ -фактора электрона и сверхтонкого расщепления в атоме  $e^- \mu^+$  (мюонии). Последним в группе экспериментов по проверке КЭД при низких энергиях упо-

\*J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416L (1948).

†R. Van Dyck, Jr., P. Schwinberg, H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26 (1987).

Таблица 6.1. Значения  $\alpha^{-1}$ , полученные в результате точных экспериментов.

КЭД при низких энергиях:

Значения $(g - 2)$ для электрона	137.035 992 35 (73)
Значения $(g - 2)$ для мюона	137.035 5 (1 1)
Сверхтонкое расщепление в мюонии	137.035 994 (18)
Лэмбовский сдвиг	137.036 8 (7)
Сверхтонкое расщепление в водороде	137.036 0 (3)
$2^3S_1-1^3S_1$ -расщепление в позитронии	137.034 (16)
Вероятность распада $^1S_0$ -состояния позитрония	137.00 (6)
Вероятность распада $^3S_1$ -состояния позитрония	136.971 (6)
Комптоновская длина волны нейтрона	137.036 010 1 (5 4)

КЭД при высоких энергиях:

$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-e^+e^-)$	136.5 (2.7)
$\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-\mu^+\mu^-)$	139.9 (1.2)

Физика твердого тела:

Квантовый эффект Холла	137.035 997 9 (3 2)
Эффект Джозефсона	137.035 977 0 (7 7)

Каждое значение  $\alpha$  из приведенных в таблице получено сравнением результатов соответствующего эксперимента с теоретическим выражением, содержащим  $\alpha$  как параметр. Числа в скобках — стандартные ошибки в последних значащих цифрах, причем учтены и эксперимент, и теория. Эта таблица основывается на результатах, представленных в книге Т. Киношиты (1990), содержащей ряд ясно написанных обзоров по теории и технологии эксперимента по проверке КЭД. Пять наиболее точных значений приведены Т. Киношitou в книге *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics*, H. Newman and T. Ypsilantis, eds. (Plenum Press, New York, 1995). В этой книге помимо прочего рассказано о перспективах будущих точных экспериментов по проверке КЭД.

минается новый метод определения  $\alpha$ , заключающийся в преобразовании очень точно измеренной комптоновской длины волны нейтрона к значению электронной массы с использованием очень точно известного отношения масс. Это можно скомбинировать с известным значением постоянной Ридберга и точной формулы КЭД, чтобы найти  $\alpha$ .

Единственное серьезно отклоняющееся от остальных значение постоянной тонкой структуры получено в экспериментах по определению вероятности распада триплетного состояния позитрония. Однако имеются основания считать, что большую поправку к величине, приведенной в таблице, вносят диаграммы порядка  $\alpha^2$ .

Следующие два пункта в таблице касаются определения  $\alpha$  из реакций на электронных коллайдерах больших энергий. Эти эксперименты обычно обеспечивают точность всего лишь на уровне процентов, но важно, что их результаты согласуются с точной информацией, полученной из низкоэнергетической КЭД.

В двух последних строчках таблицы показаны результаты независимых измерений  $\alpha$  в опытах, касающихся экзотических квантовых интерференционных явлений в физике конденсированного состояния. В двух упомянутых эффектах измеряются соответственно стандартное сопротивление и стандартная частота. Считается, что при

этом измеряется заряд электрона, причем поправки к его значению строго равны нулю в макроскопическом теле\*.

Картина в целом поистине поражает воображение. На основании доказательств, собранных в таблице, можно утверждать, что КЭД — наиболее точно проверенная (а потому наиболее успешная!) из всех физических теорий.

#### 6.4. Электрон-фотонная вершина: инфракрасная расходимость

Теперь разберемся с инфракрасной расходимостью в формуле (6.56) для  $F_1(g^2)$ . В пределе  $\mu \rightarrow 0$  главный вклад в интеграл имеет вид:

$$F_1(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) \left[ \frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2xy + \mu^2z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2z} \right]. \quad (6.60)$$

Чтобы понять это выражение, его следует немного упростить, выделив и вычислив расходящуюся часть интеграла. В дальнейшем в этом разделе мы будем оставлять лишь члены, расходящиеся в пределе  $\mu \rightarrow 0$ .

Прежде всего заметим, что расходимость возникает в той части пространства фейнмановских параметров, где  $z \approx 1$  (и поэтому  $x \approx y \approx 0$ ). В этой области можно положить  $z = 1$  и  $x = y = 0$  в числителях (6.60). Кроме того, можно положить  $z = 1$  в слагаемых с  $\mu^2$  в знаменателях. Пользуясь дельта-функцией для вычисления интеграла по  $x$ , получим:

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2(1-z)^2 - q^2y(1-z-y) + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right]$$

(нижний предел в интеграле  $z$  неважен). После замены переменных

$$y = (1-z)\xi, \quad w = (1-z),$$

выражение приобретает вид:

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d(w^2) \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{[m^2 - q^2\xi(1-\xi)]w^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2w^2 + \mu^2} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[ \frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \ln\left(\frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{\mu^2}\right) + 2\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

В пределе  $\mu \rightarrow 0$  все детали устройства числителей под знаком логарифмов можно опустить; все, что пропорционально  $m^2$  или  $q^2$ , становится примерно одним и тем же. Следовательно, можно написать:

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2 \text{ или } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (6.61)$$

\*Описание этих эффектов и их отношение к измерению  $\alpha$  см. в D. R. Yennie, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 781 (1987).

где коэффициент при расходящемся логарифме равен:

$$f_{\text{IR}}(q^2) = \int_0^1 \left( \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 \xi(1-\xi)} \right) d\xi - 1. \quad (6.62)$$

Так как  $q^2$  отрицательно, а максимальное значение  $\xi(1-\xi)$  равно  $1/4$ , то первое слагаемое в этом выражении больше 1, и, следовательно,  $f_{\text{IR}}(q^2)$  положительно.

Каким образом такое бесконечное слагаемое влияет на сечение рассеяния электрона на потенциале? Так как  $F_1(q^2)$  в матричном элементе умножается на  $\gamma^\mu$ , сделав замену  $e \rightarrow e \cdot F_1(q^2)$ , можно найти новое выражение для сечения. Для процесса  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$  сечение равно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \cdot \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln \left( \frac{-q^2 \text{ или } m^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right], \quad (6.63)$$

где первый множитель — дифференциальное сечение в древесном приближении. Отметим, что поправка к сечению порядка  $\mathcal{O}(\alpha)$  не только бесконечна, но еще и отрицательна. Это означает, что в нашей теории что-то серьезно не в порядке.

Чтобы лучше понять смысл расходимости, оценим коэффициент  $f_{\text{IR}}(q^2)$  при расходящемся логарифме в пределе  $-q^2 \rightarrow \infty$ . В этом пределе возникает еще один логарифм:

$$\int_0^1 d\xi \frac{-q^2/2}{-q^2 \xi(1-\xi) + m^2} \simeq \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2 \xi + m^2} + \left( \begin{array}{c} \text{аналогичный вклад} \\ \text{от } \xi \approx 1 \end{array} \right) = \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right). \quad (6.64)$$

Поэтому в этом пределе форм-фактор равен:

$$F_1(-q^2 \rightarrow \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (6.65)$$

Заметим, что числитель во втором логарифме равен не  $m^2$ , а  $-q^2$ . Таким образом, это выражение содержит правильный коэффициент не только при  $\ln^2(1/\mu^2)$ , но и при  $\ln^2(q^2)$ .

Аналогичный двойной логарифм от  $-q^2$  возникает в выражении для сечения мягкого тормозного излучения (6.26). Это соответствие указывает способ решения проблемы инфракрасной расходимости. Сравнивая (6.65) с (6.26), находим, что в пределе  $-q^2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma) &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \left[ + \frac{\alpha}{\pi} \ln \left( \frac{-q^2}{m^2} \right) \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Каждое из этих двух сечений по отдельности расходится, но их сумма не зависит от  $\mu$  и, следовательно, конечна.

На самом деле ни сечение упругого рассеяния, ни сечение мягкого тормозного излучения нельзя измерить независимо, наблюдаемой величиной является только их сумма. В любом реальном эксперименте детектор фотонов может регистрировать фотоны

с энергией не ниже определенной предельной энергии  $E_\ell$ . Вероятность того, что рассеяние имеет место, но детектор не смог зарегистрировать фотон, равна сумме

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \rightarrow p' + \gamma(k < E_\ell)) \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{наблюдаем}}. \quad (6.67)$$

Расходящаяся часть этого «измеряемого» дифференциального сечения

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{наблюдаем}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2 \text{ или } m^2}{\mu^2}\right) + \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right].$$

Мы уже знаем, что пределе  $-q^2 \gg m^2$   $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$ . Если такое же соотношение имеет место при произвольных  $q^2$ , измеряемое сечение равно:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{наблюдаем}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2 \text{ или } m^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right], \quad (6.68)$$

и оно зависит от экспериментальных условий, но больше не зависит от  $\mu^2$ . Инфракрасные расходимости в сечении тормозного мягкого излучения и в  $F_1(q^2)$  сокращают друг друга, и мы получаем конечное сечение для величины, которую в самом деле можно измерить.

Все же нужно еще доказать, что тождество  $\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$  выполняется для произвольных значений  $q^2$ . Из (6.13) можно получить:

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \left( \frac{2p \cdot p'}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot p')(\hat{\mathbf{k}} \cdot p)} - \frac{m^2}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot p)^2} \right). \quad (6.69)$$

Легко вычислить последние два слагаемых:

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot p)^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{1}{(p^0 - p \cos \theta)^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{m^2}.$$

В первом слагаемом воспользуемся техникой фейнмановских параметров для объединения знаменателей и преобразуем интеграл, как и ранее, к виду:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot p')(\hat{\mathbf{k}} \cdot p)} &= \int_0^1 d\xi \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{[\xi \hat{\mathbf{k}} \cdot p' + (1-\xi)\hat{\mathbf{k}} \cdot p]^2} \\ &= \int_0^1 d\xi \frac{1}{[\xi p' + (1-\xi)p]^2} = \int_0^1 d\xi \frac{1}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге было использовано соотношение  $2p \cdot p' = 2m^2 - q^2$ . Собирая все слагаемые в (6.69), окончательно получаем:

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int_0^1 \left( \frac{2m^2 - q^2}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2} \right) d\xi - 2 = 2f_{\text{IR}}(q^2), \quad (6.70)$$

что и требовалось доказать для демонстрации сокращения инфракрасной расходимости.

Хотя инфракрасные расходимости в (6.68) сокращаются, практической пользы от этого выражения мало. Экспериментатору хотелось бы знать точную зависимость от  $q^2$ , но мы ее аккуратно не вычислили. Однако вспомним из (6.65), что в пределе  $-q^2 \gg m^2$  удалось получить правильный коэффициент при  $\ln^2(-q^2)$ . В этом случае (6.68) приобретает вид:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{наблюдаем.}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \quad (6.71)$$

Такое выражение однозначно и полезно. Заметим, что поправка порядка  $\mathcal{O}(\alpha)$  вновь содержит судаковский двойной логарифм.

### 6.5. Суммирование и интерпретация инфракрасных расходимостей

Изложенные в предыдущем разделе методы достаточны для устранения инфракрасных расходимостей в тормозном излучении и поправке к вершине. Однако остались невыясненными несколько важных моментов.

1. Мы не доказали сокращение инфракрасных расходимостей в высших порядках теории возмущений.
2. Поправка к наблюдаемой величине сечения, полученная после сокращения инфракрасных расходимостей (см. (6.68) и (6.71)), может быть сделана сколь угодно большой по модулю отрицательной величиной, если создать фотонные детекторы с достаточно малой пороговой энергией  $E_\ell$ .
3. Пока что не удалось воспроизвести классическое выражение (6.19) для числа фотонов, излученных при столкновении.

Оказывается, что решение второй и третьей проблем непосредственно следует из решения первой, которой мы сейчас и займемся.

Полное доказательство того, что инфракрасные расходимости сокращаются во всех порядках, выходит за рамки этой книги\*. Мы же будем обсуждать только слагаемые с наибольшими (логарифмическими) усилениями, возникающие в каждом порядке теории возмущений. Вообще говоря, такие слагаемые в  $n$ -ом порядке теории возмущений имеют вид:

$$\left[\frac{\alpha}{\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\right]^n. \quad (6.72)$$

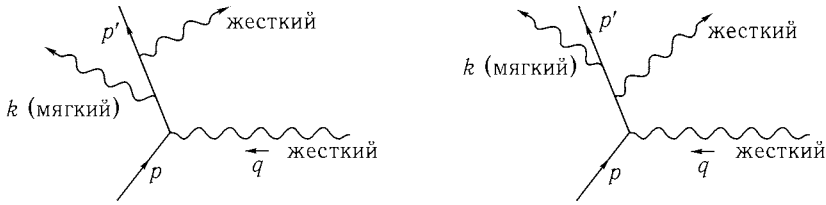
Окончательные физические выводы были впервые сформулированы в работе Блоха и Нордсика, фактически написанной до создания квантовой релятивистской теории†. Мы же будем следовать современной и упрощенной версии их анализа, предложенной Вайнбергом‡.

\* Подробное исследование см. D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, *Ann. Phys.* **13**, 379 (1961).

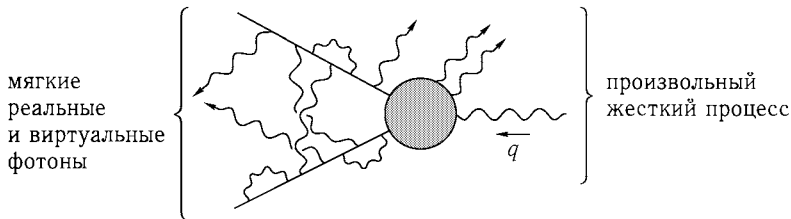
† F. Bloch, A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52**, 54 (1937).

‡ S. Weinberg, *Phys. Rev.* **140**, B516 (1965).

Инфракрасные расходимости возникают из-за вклада фотонов с «мягкими» импульсами: реальных с энергиями меньше, чем  $E_\ell$ , и виртуальных с  $k^2 < E_\ell^2$  (после выполнения виковского поворота). Типичная диаграмма высшего порядка содержит большое число реальных и виртуальных фотонных линий. Но для получения расходимости недостаточно иметь мягкий фотон: необходима еще и сингулярность в пропагаторе электрона. Рассмотрим, например, следующие две диаграммы:

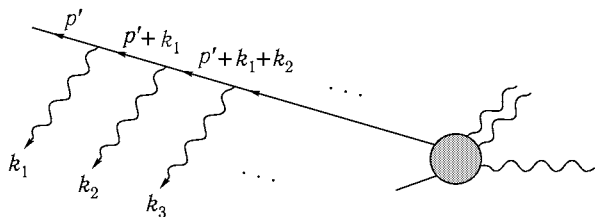


Первая диаграмма, в которой электрон излучает сначала мягкий, а затем жесткий фотон, не содержит инфракрасной расходимости, так как импульсы в обоих электронных пропагаторах лежат далеко от массовой оболочки. Если же последним излучается не жесткий, а мягкий фотон, знаменатель в соответствующем пропагаторе равен  $(p' + k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k$  и обращается в нуль при  $k \rightarrow 0$ . Таким образом, во второй диаграмме в самом деле содержится расходимость. Итак, будем рассматривать такие диаграммы, в которых произвольный жесткий процесс, возможно, содержащий излучение мягких фотонов, изменен так, что к внешним электронным линиям прикреплены линии, соответствующие излучению мягких реальных или виртуальных фотонов:



Следуя Вайнбергу, будем суммировать вклады от всех таких диаграмм. Единственная новая трудность здесь — комбинаторика подсчета всех способов, которыми может возникнуть фотон.

Сначала рассмотрим внешнюю линию, вылетающего электрона:



Прикрепим к ней  $n$  фотонов с импульсами  $k_1 \dots k_n$ , причем пока не будем заботиться о том, какие это фотоны — реальные, виртуальные, соединенные друг с другом, или виртуальные, связанные с вершинами на входящей электронной линии. Дираковская

структура диаграммы такова:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(p' + k_1 + m)}{2p' \cdot k_1}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(p' + k_1 + k_2 + m)}{2p' \cdot (k_1 + k_2) + \mathcal{O}(k^2)} \dots \\ \dots (-ie\gamma^{\mu_n})\frac{i(p' + k_1 + \dots + k_n + m)}{2p' \cdot (k_1 + \dots + k_n) + \mathcal{O}(k^2)}(i\mathcal{M}_{\text{жест.}}) \dots \end{aligned} \quad (6.73)$$

Будем предполагать, что все  $k_i$  малы, и слагаемыми в знаменателях порядка  $\mathcal{O}(k^2)$  можно пренебречь. Опустим также, как и в разделе 6.1, слагаемые типа  $k_i$  в числителях. Кроме того, множители  $(p' + m)$  можно сдвинуть налево и воспользоваться уравнением  $\bar{u}(p')(-p' + m) = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^{\mu_1}(p' + m)\gamma^{\mu_2}(p' + m) \dots = \bar{u}(p')2p'^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}(p' + m) \dots = \\ = \bar{u}(p')2p'^{\mu_1}2p'^{\mu_2} \dots \end{aligned}$$

Выражение (6.73) принимает вид:

$$\bar{u}(p')\left(e\frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1}\right)\left(e\frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot (k_1 + k_2)}\right) \dots \left(e\frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot (k_1 + \dots + k_n)}\right) \dots \quad (6.74)$$

Продолжая рассматривать только исходящую электронную линию, мы должны теперь просуммировать по всем перестановкам  $k_1 \dots k_n$ . (Если два фотона соединены и образуют один виртуальный фотон, мы учтем их лишней раз. Как быть в этом случае, будет ясно позднее). В сумме имеется  $n!$  различных диаграмм, отвечающих  $n!$  перестановкам  $n$  фотонных импульсов. Обозначим такую перестановку  $\pi$ , так что  $\pi(i)$  есть число между 1 и  $n$ , в которое  $i$  переходит при перестановке. Например, если  $\pi$  обозначает перестановку  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$  и  $3 \rightarrow 2$ , то  $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1$  и  $\pi(3) = 2$ .

Вооружившись таким определением, мы можем просуммировать по всем перестановкам с помощью тождества:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{все перестановки } \pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \dots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)} + \dots + k_{\pi(n)})} = \\ = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \dots \frac{1}{p \cdot k_n}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Доказательство проводится по индукции. При  $n = 2$  имеем:

$$\sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2)} + \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot (k_2 + k_1)} = \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2}.$$

Для того, чтобы выполнить индукцию, заметим, что последний множитель слева в (6.75) не меняется при произвольной перестановке  $\pi$ . После вынесения его за знак суммы, левая часть равенства принимает вид:

$$\text{Левая часть} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{\pi} \frac{1}{p \cdot k_{\pi(1)}} \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + k_{\pi(2)})} \dots \frac{1}{p \cdot (k_{\pi(1)} + \dots + k_{\pi(n-1)})}.$$

Для любого заданного  $\pi$  величина под знаком суммы не зависит от  $k_{\pi(n)}$ . Если положить  $i = \pi(n)$ , то можно написать

$$\sum_{\pi} = \sum_{i=1}^n \sum_{\pi'(i)},$$

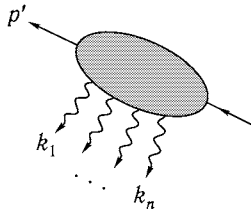


где  $\pi'(i)$  — все перестановки оставшихся  $n - 1$  чисел. Предположим по индукции, что (6.75) верно для  $n - 1$ . Тогда

$$\text{Левая часть} = \frac{1}{p \cdot \sum k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \dots \frac{1}{p \cdot k_{i-1}} \frac{1}{p \cdot k_{i+1}} \dots \frac{1}{p \cdot k_n}.$$

Если теперь умножить и разделить каждое слагаемое в сумме на  $p \cdot k_i$ , то легко получить желаемый результат(6.75).

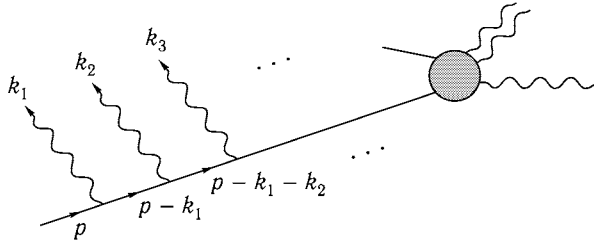
Применяя (6.75) к (6.74), найдем



$$= \bar{u}(p') \left( e \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} \right) \left( e \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} \right) \dots \left( e \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} \right), \quad (6.76)$$

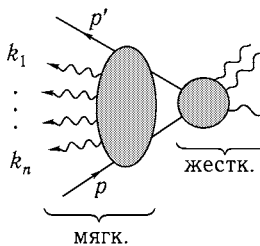
где заштрихованная область соответствует сумме по всем возможным способам прикрепления  $n$  фотонных линий к электронной.

Точно таким же образом можно упростить сумму по включению мягких фотонов к линии начального электрона. Импульсы в пропагаторах равны  $p - k_1, p - k_1 - k_2$  и т. д.:



Таким образом, каждому фотону соответствует дополнительный знак «минус», так что  $(p - \Sigma k)^2 - m^2 \approx -2p \cdot \Sigma k$ .

Теперь рассмотрим диаграммы, в которых  $n$  мягких фотонов в любом возможном порядке соединены с линией начального или конечного электрона. Сумма таких диаграмм может быть записана в виде:



$$= \bar{u}(p') i \mathcal{M}_{\text{жест.}} u(p) \cdot e \left( \frac{p'^{\mu_1}}{p' \cdot k_1} - \frac{p^{\mu_1}}{p \cdot k_1} \right) \times \quad (6.77)$$

$$\times e \left( \frac{p'^{\mu_2}}{p' \cdot k_2} - \frac{p^{\mu_2}}{p \cdot k_2} \right) \dots e \left( \frac{p'^{\mu_n}}{p' \cdot k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p \cdot k_n} \right).$$

Раскрывая скобки в сомножителях, мы можем увидеть, что получаем правильный вклад для каждого способа разделения  $n$  фотонов между двумя электронными линиями.

Теперь следует решить, какие фотоны реальные и какие виртуальные.

Виртуальный фотон можно получить, соединяя два фотонных импульса  $k_i$  и  $k_j$ , полагая  $k_j = -k_i \equiv k$ , умножая выражение на пропагатор фотона и интегрируя по всем  $k$ . Таким образом, для каждого виртуального фотона получим выражение:

$$\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right) \cdot \left( \frac{p'}{-p' \cdot k} - \frac{p}{-p \cdot k} \right) \equiv \mathbf{X}. \quad (6.78)$$

Поскольку в такой процедуре мы учитываем соответствующую фейнмановскую диаграмму дважды (перестановка  $k_i$  и  $k_j$  дает одну и ту же диаграмму), необходим множитель  $1/2$ . Это выражение можно вычислить с помощью аккуратного контурного интегрирования, но существует более простой способ. Заметим, что в рамках рассматриваемой приближенной схемы каждой однопетлевой диаграмме, не содержащей внешних фотонных линий, приписывается значение

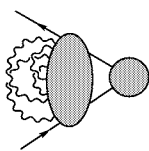
$$\bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{\text{жест.}})u(p) \cdot \mathbf{X}.$$

Следовательно,  $\mathbf{X}$  — инфракрасный предел однопетлевой поправки к форм-фактору (см. (6.61)):

$$\mathbf{X} = -\frac{\alpha}{2\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right). \quad (6.79)$$

Непосредственный вывод этого выражения из (6.78) имеется в цитированной выше работе Вайнберга. Отметим, что результат (6.79) следовал из рассуждения в предыдущем разделе только после вычитания при  $q^2 = 0$ , так что следует побеспокоиться, согласуется ли (6.79) с аналогичным вычислением в диаграмме  $n$ -го порядка. Заметим, наконец, что некоторые из просуммированных диаграмм содержат поправки к внешним линиям, которые мы не обсуждаем. Оказывается, что они не влияют на конечный результат — доказательство этого факта, а также некоторые другие моменты, опущенные нами, можно найти в работе Йенни, Фраучи и Суура.

Если число виртуальных фотонов равно  $m$ , получим  $m$  множителей типа (6.79), и кроме того, множитель  $1/m!$ , возникающий за счет того, что перестановка импульсов виртуальных фотонов не меняет диаграммы. Чтобы получить полную поправку, связанную с наличием произвольного числа мягких виртуальных фотонов, просуммируем по  $m$ :



$$= \text{diagram} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^m}{m!} = \bar{u}(p')(i\mathcal{M}_{\text{жест.}})u(p) \exp(\mathbf{X}). \quad (6.80)$$

Если вдобавок к  $m$  виртуальным фотонам излучается реальный фотон, нужно умножить на его вектор поляризации, просуммировать по всем поляризациям и проинтегрировать квадрат матричного элемента по фазовому пространству фотона. В этом случае в сечении возникнет дополнительный множитель

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^2 (-g_{\mu\nu}) \left( \frac{p'^{\mu}}{p' \cdot k} - \frac{p^{\mu}}{p \cdot k} \right) \left( \frac{p'^{\nu}}{p' \cdot k} - \frac{p^{\nu}}{p \cdot k} \right) \equiv \mathbf{Y}. \quad (6.81)$$

Если предположить, что энергия фотона больше, чем  $\mu$ , но меньше, чем  $E_\ell$  (пороговая энергия детектора), выражение упрощается:

$$\mathbf{Y} = \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \ln\left(\frac{E_\ell}{\mu}\right) = \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right). \quad (6.82)$$

Если же излучаются  $n$  реальных фотонов, то получим  $n$  таких множителей, и, кроме того, симметричный множитель  $1/n!$  (т.к. в конечном состоянии имеется  $n$  тождественных бозонов). Сечение испускания произвольного числа мягких фотонов равно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' + n\gamma) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{Y}^n = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \cdot \exp(\mathbf{Y}). \quad (6.83)$$

Объединяя результаты для реальных и виртуальных фотонов, получим окончательное выражение во всех порядках по  $\alpha$  для измеряемого сечения процесса  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' +$  (произвольное число фотонов с  $k < E_\ell$ ):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{наблюдаем.}} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp(2\mathbf{X}) \times \exp(\mathbf{Y}) = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\right] \times \exp\left[\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Поправочный множитель может зависеть лишь от пороговой энергии детектора, но не зависит от инфракрасного обрезания  $\mu$ . Заметим, что если разложить этот результат до членов  $O(\alpha)$ , получится прежний результат (6.68). Однако теперь контролируется величина поправочного множителя — он всегда находится между 0 и 1.

В пределе  $-q^2 \gg m^2$  это выражение принимает вид:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{наблюдаем.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \times \left| \exp\left[-\frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right)\right] \right|^2. \quad (6.85)$$

Фактически в этом пределе вероятность рассеяться и не излучить жесткий фотон спадает быстрее любой степени  $q^2$ . Экспоненциальный поправочный множитель, содержащий двойной логарифм, носит название *форм-фактора Судакова*.

В заключение вычислим вероятность того, что некоторый процесс рассеяния сопровождается излучением  $n$  мягких фотонов с энергиями, лежащими в интервале от  $E_-$  до  $E_+$ . Интеграл по их фазовому пространству дает не  $\ln(E_\ell/\mu)$ , а  $\ln(E_+/E_-)$ . Если приписать фотоны с энергией, большей чем  $E_x$ , к жесткой части процесса, то сечение равно (6.84), умноженному на дополнительный множитель:

$$\begin{aligned} \text{Вероятность}(n\gamma \text{ с } E_- < E < E_+) &= \frac{1}{n!} \left[ \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{E_+^2}{E_-^2}\right) \right]^n \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \ln\left(\frac{E_+^2}{E_-^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Это выражение имеет вид распределения Пуассона:

$$P(n) = \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda},$$

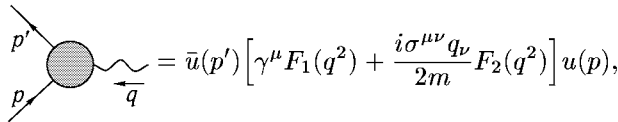
где

$$\lambda = \langle n \rangle = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left( \frac{E_+}{E_-} \right) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}'),$$

и совпадает с квазиклассической оценкой числа излученных фотонов (6.19).

## Задачи

**6.1. Формула Розенблюта.** Как упоминалось в разделе 6.2, точная вершина электромагнитного взаимодействия дираковского фермиона может быть в общем виде выражена через форм-факторы  $F_1(q^2)$  и  $F_2(q^2)$ :



где  $q = p' - p$  и  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Если фермион — частица, участвующая в сильном взаимодействии (например, протон), в форм-факторах это взаимодействие должно быть учтено, и, следовательно, их нельзя найти из первых принципов. Однако выражения для форм-факторов извлекаются из опыта. Рассмотрим рассеяние электрона с энергией  $E \gg m_e$  на первоначально покоящемся протоне. Покажите, что приведенное выше выражение для вершины приводит к формуле для сечения упругого рассеяния в ведущем порядке по  $\alpha$ , но с учетом всех порядков по сильному взаимодействию (формула Розенблюта):

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2 \left[ (F_1^2 - \frac{q^2}{4m^2} F_2^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} (F_1 + F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}{2E^2 \left[ 1 + \frac{2E}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

где  $\theta$  — угол рассеяния в лабораторной системе отсчета, а форм-факторы  $F_1$  и  $F_2$  вычисляются при значении  $q^2$ , связанном с упругим рассеянием на этот угол. Изменяя  $(d\sigma/d \cos \theta)$  как функцию угла, можно, таким образом, извлечь  $F_1$  и  $F_2$ . Заметим, что при  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 0$  эта формула переходит в формулу Мотта (в безмассовом пределе) для рассеяния на точечной частице (см. задачу 5.1).

**6.2. Приближение эквивалентных фотонов.** Рассмотрим процесс рассеяния высокоэнергетических электронов на некоторой мишени. В ведущем по  $\alpha$  порядке электрон связан с мишенью одним фотонным пропагатором. Если начальная и конечная энергии электрона равны соответственно  $E$  и  $E'$ , фотон несет импульс  $q$  такой, что  $q^2 \approx -2EE'(1 - \cos \theta)$ . В предельном случае рассеяния вперед импульс фотона стремится к  $q^2 = 0$  при любой потере энергии. Отсюда сечение имеет пик в направлении вперед. Возникает искушение предположить, что в этом пределе виртуальный фотон становится реальным. Выясним, в каком смысле такое предположение можно считать правильным.

- (а) Матричный элемент процесса рассеяния можно записать в виде

$$\mathcal{M} = (-ie)\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \hat{\mathcal{M}}^\nu(q),$$

где  $\hat{\mathcal{M}}^\nu$  обозначает (в общем случае, сложную) вершину взаимодействия виртуального фотона с мишенью. Будем анализировать структуру  $\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$ . Пусть  $q = (q^0, \mathbf{q})$ . Определим  $\tilde{q} = (q^0, -\mathbf{q})$ . Произведение спиноров можно разложить на сумму

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = A \cdot q^\mu + B \cdot \tilde{q}^\mu + C \cdot \varepsilon_1^\mu + D \cdot \varepsilon_2^\mu,$$

где  $A, B, C, D$  — функции угла рассеяния и потери энергии, а  $\varepsilon_i$  — два единичных вектора, нормальных к  $\mathbf{q}$ . Сворачивая это выражение с  $q_\mu$ , покажите, что  $B$  не более, чем порядка  $\theta^2$ . Это означает, что в дальнейшем анализе этим коэффициентом можно пренебречь. Кроме того, коэффициент  $A$  велик, но его также следует отбросить вследствие тождества Уорда  $q^\mu \hat{\mathcal{M}}_\mu = 0$ .

- (б) В системе отсчета, где  $p = (E, 0, 0, E)$ , получите явное выражение для

$$\bar{u}(p')\gamma \cdot \varepsilon_i u(p).$$

Используйте безмассовые электроны,  $u(p)$  и  $u(p')$  — спиноры с определенной спиральностью и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — единичные векторы, один из которых параллелен, а другой перпендикулярен плоскости рассеяния. На самом деле эта величина нам нужна лишь в случае рассеяния вперед, т. е. можно вычислять только слагаемое порядка  $\theta$ . Заметьте, однако, что малая  $\hat{z}$ -компонента  $\varepsilon$ , лежащего в плоскости рассеяния, также имеет порядок  $\theta$ , и ее следует учитывать.

- (с) Запишите выражение для сечения рассеяния электрона через квадрат матричного элемента. Его нужно затем проинтегрировать по конечному импульсу электрона  $p'$ . Интеграл по  $p'^3$  эквивалентен интегралу по энергии, потерянной электроном. Покажите, что интеграл по  $p'_\perp$  в случае рассеяния вперед логарифмически расходится, если  $p'_\perp$  или  $\theta \rightarrow 0$ .
- (д) Расходимость при  $\theta \rightarrow 0$  возникла из-за того, что мы слишком часто пренебрегали массой электрона. Покажите, что при учете массы электрона в выражении для  $q^2$ :

$$q^2 = -2(EE' - pp' \cos \theta) + 2m^2$$

логарифмическая расходимость обрезается, что приводит к появлению множителя  $\ln(s/m^2)$ .

- (е) Собирая все результаты и предполагая, что сечения не зависят от поляризации фотона, покажите, что наибольшую часть сечения рассеяния электрона на мишени можно получить, если предположить, что электрон является источником пучка реальных фотонов с распределением по энергии ( $x = E_\gamma/E$ ):

$$N_\gamma(x)dx = \frac{dx}{x} \frac{\alpha}{2\pi} [1 + (1-x)^2] \ln\left(\frac{s}{m^2}\right).$$

В этом и состоит *приближение эквивалентных фотонов* Вайцзеккера–Вильямса. Оно, например, позволяет изучать рассеяние света на свете, используя  $e^+e^-$ -столкновения. Отметим, что если рассматривать излучение мягкого фотона до момента рассеяния, полученное выше распределение совпадает с возникающим в задаче (5.5).

**6.3. Экзотические вклады в  $g - 2$ .** Любая взаимодействующая с электроном частица должна давать поправки к электрон-фотонным форм-факторам и, в частности, к  $g - 2$ . Так как  $g - 2$  для электрона находится в замечательном согласии с предсказаниями КЭД, поправки позволяют накладывать ограничения на свойства новых гипотетических частиц.

- (а) В объединенной теории электромагнитного и слабого взаимодействия рассматривается скалярная частица  $h$ , которую называют *бозоном Хиггса*. Она взаимодействует с электроном следующим образом:

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h \bar{\psi} \psi.$$

Вычислите вклад виртуального хиггсовского бозона в электронный  $(g - 2)$ -фактор (все должно выражаться через  $\lambda$  и массу  $m_h$  хиггсовского бозона).

- (б) КЭД дает очень точное выражение для аномального магнитного момента электрона. Если  $a = (g - 2)/2$ ,

$$|a_{\text{эксп.}} - a_{\text{КЭД}}| < 1 \times 10^{-10}.$$

Какие ограничения накладывает это на  $\lambda$  и  $m_h$ ? В простейшей версии электрослабой теории  $\lambda = 3 \times 10^{-6}$  и  $m_h > 60$  ГэВ. Покажите, что такие значения не исключаются неравенством для  $a$ . Константа взаимодействия хиггсовского бозона с мюоном больше электронной в  $(m_\mu/m_e)$  раз:  $\lambda = 6 \times 10^{-4}$ . Следовательно, несмотря на неточность в экспериментальном значении аномального магнитного момента мюона,

$$|a_{\text{эксп.}} - a_{\text{КЭД}}| < 3 \times 10^{-8},$$

это условие накладывает более сильное ограничение на  $m_h$ . Достаточно ли оно сильно?

- (в) Существуют более сложные варианты электрослабой теории, содержащие псевдоскалярную частицу *аксион*. Она взаимодействует с электроном следующим образом:

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \frac{i\lambda}{\sqrt{2}} a \bar{\psi} \gamma^5 \psi.$$

Аксион, возможно, столь же легок, как и электрон, или даже легче, и в то же время взаимодействует с электроном более сильно, чем хиггсовский бозон. Вычислите вклад виртуального аксиона в электронный  $g - 2$ -фактор и найдите, какие значения  $\lambda$  и  $m_a$  исключены.

## ГЛАВА 7

# РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ: НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ФОРМАЛИЗМА

В трех последних главах мы четырежды\* высказывали определенные утверждения (иногда мотивируя их) без приведения доказательства. Речь идет о следующих результатах.

1. Формула (4.86) для вероятностей распада, выраженных через элементы  $S$ -матрицы.
2. Основная формула (4.103) для элементов  $S$ -матрицы, записанных через диаграммы Фейнмана.
3. Тожество Уорда (5.79).
4. Специально использованная процедура вычитания для устранения ультрафиолетовой расходимости в диаграмме поправки к вершине (6.55).

Теперь пора вернуться к этим вопросам и рассмотреть их с должной аккуратностью. В разделах 7.2–7.4 мы докажем все четыре утверждения. Те знания, которые мы приобретем в процессе доказательства, помогут интерпретировать три оставшиеся петлевые поправки для рассеяния электрона на тяжелой частице (см. (6.1)): поправки к внешним линиям и поляризацию вакуума. Мы вычислим первые в разделе 7.1, а последнюю — в разделе 7.5.

Эта глава будет более абстрактной, чем две предыдущие. Главной ее темой будут особенности фейнмановских диаграмм, рассматриваемых как аналитические функции внешних импульсов.

Однако мы обнаружим, что этот кажущийся предназначенным для избранных вопросов богат физическими приложениями и проливает свет на связь между фейнмановскими диаграммами и общими принципами квантовой теории.

### 7.1. Перенормировка напряженности поля

В этом разделе будем изучать аналитическую структуру двухточечной корреляционной функции

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \quad \text{или} \quad \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle.$$

В свободной теории поля двухточечная функция  $\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$  имеет простую интерпретацию. Она является амплитудой вероятности того, что частица распространяется из точки  $y$  в точку  $x$ . В какой степени такая интерпретация является справедливой в теории с взаимодействием?

---

\*Пятый случай касается постулирования, а не вывода выражения для фотонного пропагатора. Мы оправдаемся в главе 9.

Наш анализ двухточечной функции будет опираться только на общие принципы теории относительности и квантовой механики и не будет зависеть от природы взаимодействий или от разложения в ряд по теории возмущений. Однако ограничимся скалярными полями. Аналогичные результаты можно получить и для корреляционных функций полей со спином. В качестве примера в конце мы приведем аналогичный результат для дираковского поля.

Разобьем двухточечную функцию  $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ , для чего вставим в нее между  $\phi(x)$  и  $\phi(y)$  тождественный оператор в виде суммы по полному набору состояний. В качестве этих состояний выберем собственные состояния полного гамильтониана с взаимодействием  $H$ . Так как оператор импульса  $\mathbf{P}$  коммутирует с  $H$ , эти состояния можно выбрать так, чтобы они являлись собственными состояниями  $\mathbf{P}$ . Утверждение можно усилить, если учесть лоренц-инвариантность. Пусть  $|\lambda_0\rangle$  — собственное состояние  $H$  с нулевым импульсом:  $\mathbf{P}|\lambda_0\rangle = 0$ . Тогда все бусты  $|\lambda_0\rangle$  также являются собственными состояниями  $H$  и обладают всеми возможными значениями 3-импульса. Обратно, любое собственное состояние  $H$  с определенным импульсом может быть записано в виде буста состояния с нулевым импульсом  $|\lambda_0\rangle$ . Собственные значения оператора 4-импульса  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$  лежат на гиперболоидах, как показано на рис. 7.1.

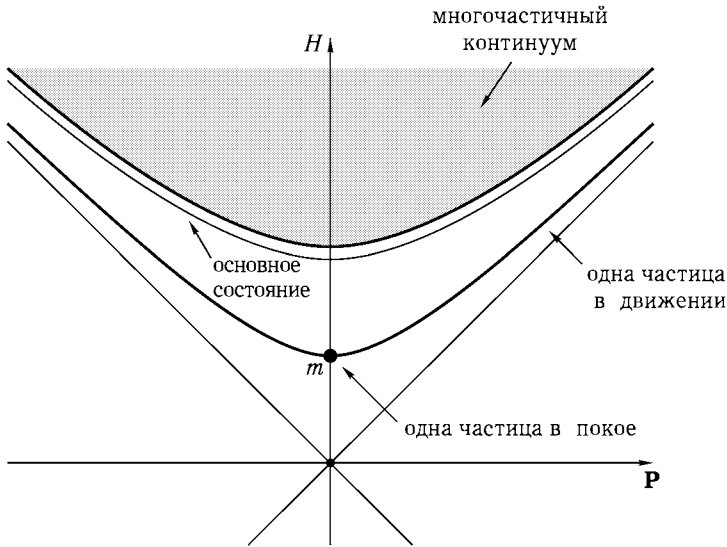


Рис. 7.1. Собственные значения оператора 4-импульса  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$  покрывают поверхности последовательности гиперболоидов в импульсно-энергетическом пространстве. В типичной теории состояния описывает одну или более частиц массой  $m$ . Таким образом, имеется гиперболоид одночастичных состояний и бесконечный набор гиперболоидов двухчастичных, трехчастичных и т. д. состояний. Кроме того, ниже порога образования двух свободных частиц может быть один или больше гиперболоидов, соответствующих связанным состояниям.

Вспомним (гл. 2), что соотношение полноты для одночастичных состояний имеет вид:

$$(1)_{\text{одночастичное}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|. \quad (7.1)$$

С помощью переобозначений можно записать аналогичное соотношение полноты и для всего гильбертового пространства. Пусть  $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$  — буст  $|\lambda_0\rangle$  с импульсом  $\mathbf{p}$ . Пред-



положим, что состояния  $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ , подобно одночастичным состояниям  $|\mathbf{p}\rangle$ , нормируются релятивистски инвариантным образом. Положим  $E_{\mathbf{p}}(\lambda) \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_{\lambda}^2}$ , где  $m_{\lambda}$  — «масса» состояния  $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ , так что его энергия  $|\lambda_0\rangle$ . Искомое соотношение полноты выглядит так:

$$\mathbf{1} = |\Omega\rangle \langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle \langle\lambda_{\mathbf{p}}|, \quad (7.2)$$

где суммирование ведется по всем состояниям с нулевым импульсом  $|\lambda_0\rangle$ .

Теперь вставим это разложение между операторами в двухточечной функции. Будем считать, что  $x^0 > y^0$ . Можно отбросить неинтересный постоянный вклад  $\langle\Omega| \phi(x) |\Omega\rangle \langle\Omega| \phi(y) |\Omega\rangle$ .\* Двухточечная функция равна:

$$\langle\Omega| \phi(x) \phi(y) |\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} \langle\Omega| \phi(x) |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle \langle\lambda_{\mathbf{p}}| \phi(y) |\Omega\rangle. \quad (7.3)$$

Матричные элементы можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle\Omega| \phi(x) |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle &= \langle\Omega| e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle = \\ &= \langle\Omega| \phi(0) |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \\ &= \langle\Omega| \phi(0) |\lambda_0\rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Последнее равенство является следствием лоренц-инвариантности  $\langle\Omega|$  и  $\phi(0)$ . Чтобы убедиться в этом, следует вставить два множителя  $U^{-1}U$ , где  $U$  — унитарный оператор, осуществляющий буст от  $\mathbf{p}$  к 0, и воспользоваться равенством  $U\phi(0)U^{-1} = \phi(0)$ .† После введения интегрирования по  $p^0$  выражение для двухточечной функции (по-прежнему  $x^0 > y^0$ ) приобретает вид:

$$\langle\Omega| \phi(x) \phi(y) |\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle\Omega| \phi(0) |\lambda_0\rangle|^2. \quad (7.5)$$

Обратим внимание на возникновение пропагатора  $D_F(x-y)$  с  $m$ , замененным на  $m_{\lambda}$ .

В случае  $y^0 > x^0$  верны аналогичные выражения. Оба случая могут быть объединены. Общее представление двухточечной функции носит название *спектрального представления Челлена–Лемана*:

$$\langle\Omega| T\phi(x)\phi(y) |\Omega\rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x-y; M^2), \quad (7.6)$$

где  $\rho(M^2)$  — положительная *спектральная плотность*,

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle\Omega| \phi(0) |\lambda_0\rangle|^2. \quad (7.7)$$

\* Он обычно равен нулю вследствие симметрии; для полей с высшими спинами он равен нулю в силу лоренц-инвариантности.

† Для полей со спином нужно учитывать их нетривиальное преобразование Лоренца.

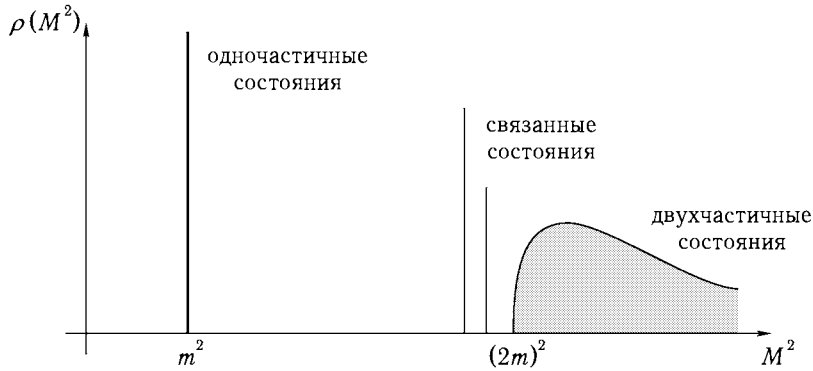


Рис. 7.2. Спектральная плотность  $\rho(M^2)$  в случае типичной теории поля с взаимодействием. Одночастичные состояния вносят дельта-функциональный вклад при  $m^2$  (квадрат массы частицы). Многочастичные состояния дают непрерывный спектр, начинающийся при  $(2m)^2$ . Кроме того, могут быть вклады связанных состояний.

Спектральная плотность  $\rho(M^2)$  для типичной теории поля показана на рис. 7.2. Заметим, что одночастичные состояния вносят в нее вклад в виде изолированных дельта-функций:

$$\rho(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + (\text{ничего другого вплоть до } M^2 \gtrsim (2m)^2), \quad (7.8)$$

где  $Z$  — некоторое число, определяемое квадратом матричного элемента в (7.7). Будем называть  $Z$  *константой перенормировки напряженности поля*. Величина  $m$  есть точная масса одной частицы или точное собственное значение энергии покоящейся частицы. Эта величина, вообще говоря, отличается от того параметра, который фигурирует в лагранжиане, который мы в дальнейшем будем обозначать  $m_0$  и называть *голой* массой. Величина же  $m$  является *физической* массой  $\phi$ -бозона. Непосредственно наблюдаема только физическая масса  $m$ .

С помощью выражения (7.6) легко найти фурье-образ двухточечной функции:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} = \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Аналитическая структура этой функции в комплексной  $p^2$ -плоскости показана на рис. 7.3. Первое слагаемое отвечает простому изолированному полюсу при  $p^2 = m^2$ , а второе — разрезу, начинающемуся в точке  $p^2 = (2m)^2$ . Если существуют любые двухчастичные связанные состояния, то в  $\rho(M^2)$  возникнут дополнительные дельта-функции, а в комплексной плоскости — новые полюсы.

В разделе 2.4 было найдено точное выражение для двухточечной корреляционной функции в случае свободного скалярного поля:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (7.10)$$

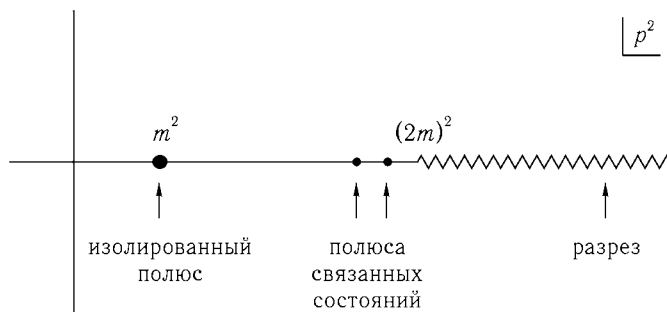


Рис. 7.3. Аналитическая структура фурье-образа двухточечной функции типичной теории в комплексной  $p^2$ -плоскости. Одночастичные состояния дают вклад в виде изолированных полюсов, находящихся в точках, соответствующих массам частиц. Состояния двух и более частиц дают разрез, а связанные состояния — дополнительные полюсы.

При  $x^0 > 0$  она была интерпретирована как амплитуда вероятности того, что частица распространяется от 0 до  $x$ . Из уравнения (7.9) видно, что двухточечная функция имеет похожий вид в самой общей скалярной теории с взаимодействием. Общее выражение — просто сумма скалярных амплитуд распространения состояний, рождающихся из вакуума путем действия на него оператора  $\phi(0)$ . Однако между (7.9) и (7.10) существуют два различия. Первое заключается в том, что (7.9) содержит константу перенормировки напряженности поля  $Z = |\langle \lambda_0 | \phi(0) | \Omega \rangle|^2$ , то есть вероятность того, что  $\phi(0)$  родит данное состояние из вакуума. В (7.10) этот множитель неявно содержится, так как для свободной теории  $\langle p | \phi(0) | 0 \rangle = 1$ . Второе различие состоит в том, что (7.9) содержит вклады от многочастичных промежуточных состояний с непрерывным спектром масс. В свободной теории оператор  $\phi(0)$  может родить из вакуума только одночастичное состояние. С учетом этих двух различий (7.9) является непосредственным обобщением (7.10).

При дальнейшем анализе будет важным то, что вклады в (7.9) от одночастичных и многочастичных промежуточных состояний можно различать по силе соответствующих им сингулярностей. Полюсы в плоскости  $p^2$  возникают исключительно из-за одночастичных состояний, а многочастичным состояниям соответствуют разрезы (более слабые сингулярности). В следующем разделе мы увидим, что это довольно формальное замечание обобщается и на случай многоточечных корреляционных функций и играет решающую роль при выводе диаграммной формулы для элементов  $S$ -матрицы.

Анализ, выполненный в этом разделе, непосредственно обобщается на двухточечные функции полей с ненулевым спином. Главное затруднение возникает при обобщении (7.4), так как теперь поле нетривиально преобразуется под действием бустов. Вообще говоря, для описания многочастичных состояний требуется несколько инвариантных спектральных функций. Тем не менее, это не влияет на окончательный вывод о том, что полюсы в плоскости  $p^2$  могут возникнуть только от вклада одночастичных состояний, порождаемых оператором поля. Например, двухточечная функция дираковских полей имеет структуру:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle = \frac{iZ_2 \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \frac{iZ_2 (\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots, \quad (7.11)$$

где отброшенные слагаемые дают разрез, соответствующий многочастичным состояниям. Как и в случае скалярного поля, константа  $Z_2$  является вероятностью того, что

оператор квантового поля создаст или уничтожит одночастичное собственное состояние  $H$ :

$$\langle \Omega | \psi(0) | p, s \rangle = \sqrt{Z_2} u^s(p). \quad (7.12)$$

(В случае античастицы нужно заменить  $u$  на  $\bar{v}$ .) Таким образом, дираковская двухточечная функция с точностью до изменяющего масштаб множителя  $Z_2$  совпадает со случаем свободного дираковского поля с физической массой.

### Пример: собственная энергия электрона

Такой непертурбативный анализ двухточечной корреляционной функции коренным образом отличается от обычного непосредственного анализа фейнмановских диаграмм. Но так как этот вывод был сделан в самом общем виде, следующая из него сингулярная структура двухточечной корреляционной функции должна быть видна и при вычислении фейнмановских диаграмм. В оставшейся части этого раздела мы непосредственно проверим это на примере электронной двухточечной функции в КЭД.

Электронная двухточечная функция равна сумме диаграмм

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots \quad (7.13)$$

Согласно фейнмановским правилам для корреляционных функций каждая из этих диаграмм содержит множитель  $e^{ip \cdot (x-y)}$  для двух внешних точек и интегрирование  $\int \left( \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \right)$  по импульсу  $p$ , переносимому начальным и конечным пропагаторами.

В данном разделе будем опускать эти множители; другими словами, каждая диаграмма будет обозначать соответствующее слагаемое в фурье-образе двухточечной функции.

Первая диаграмма — просто пропагатор свободного поля:

$$\text{diagram 1} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}. \quad (7.14)$$

В ходе вычисления в качестве массы, фигурирующей в электронном пропагаторе, будем писать  $m_0$  вместо  $m$ . Это явно подчеркивает отмеченный выше факт, что масса, стоящая в лагранжиане, отличается от наблюдаемой энергии покоя частицы. Однако, если применима теория возмущений, выражение для пропагатора в ведущем порядке должно аппроксимировать точное выражение. Действительно, функция (7.14) имеет при  $p^2 = m_0^2$  полюс вида (7.11). Поэтому естественно ожидать, что окончательное выражение для двухточечной функции имеет полюс того же вида, но его положение чуть сдвинуто:  $m^2 = m_0^2 + \mathcal{O}(\alpha)$ .

Вторая диаграмма в (7.13), носящая название *собственной энергии электрона*, более сложна:

$$\text{diagram 2} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} [-i\Sigma_2(p)] \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2}, \quad (7.15)$$

где

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (7.16)$$

(Обозначение  $\Sigma_2$  показывает, что это вклад второго порядка (по  $e$ ) в величину  $\Sigma$ , которую мы определим ниже.) Интеграл  $\Sigma_2$  имеет инфракрасную расходимость, которую можно регуляризовать, введя малую массу фотона  $\mu$ . Помимо этого интеграла, диаграмма, похоже, имеет двойной полюс при  $p^2 = m_0^2$ . В целом, вся поправка выглядит не слишком приятно. Однако попробуем вычислить  $\Sigma_2(p)$ , используя технику, разработанную при вычислении поправки к вершине в разделе 6.3.

Сначала введем фейнмановский параметр и объединим два знаменателя в один:

$$\frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - x\mu^2 - (1-x)m_0^2 + i\varepsilon]^2}.$$

Затем выделим полный квадрат и выполним замену  $\ell \equiv k - xp$ . Отбрасывая в числителе линейное по  $\ell$  слагаемое, получим:

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x\not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta + i\varepsilon]^2}, \quad (7.17)$$

где  $\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2$ . Интеграл по  $\ell$  расходится, поэтому сначала регуляризуем его с помощью процедуры Паули-Вилларса:

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}.$$

Второе слагаемое аналогично (7.17) с точностью до замены  $\mu$  на  $\Lambda$ . Как в разделе 6.3, выполним виковский поворот и перейдем к евклидовой переменной  $\ell_E^0 = -i\ell^0$ . В результате

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^2} \rightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left( \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^2} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^2} \right) = \frac{i}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right), \quad (7.18)$$

где

$$\Delta_\Lambda = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} x\Lambda^2.$$

Окончательный результат таков:

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m_0 - x\not{p}) \ln\left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2}\right). \quad (7.19)$$

Прежде чем обсуждать характер расходимостей этого выражения, изучим его аналитическое поведение как функции  $p^2$ . Логарифм в (7.19) имеет разрез в комплексной плоскости, когда его аргумент отрицателен. Для любого фиксированного  $x$  это происходит при достаточно больших  $p^2$ . Более точно, разрез начинается в точке, где

$$(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно  $x$ , найдем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{(p^2 + m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^4} - \frac{m_0^2}{p^2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

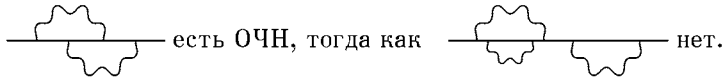
Итак, функция  $\Sigma_2(p^2)$  имеет разрез в комплексной плоскости, который начинается при минимальном значении  $p^2$ , таком, что это уравнение имеет действительное решение при  $x$  между 0 и 1. Это происходит, когда  $p^2 = (m_0 + \mu)^2$ , т. е., когда достигается порог рождения двухчастичного (электрон и фотон) состояния. На самом деле, нетрудно показать, что квадратный корень в (7.20), переписанный в виде

$$k = \frac{1}{2\sqrt{p^2}} \sqrt{[p^2 - (m_0 + \mu)^2][p^2 - (m_0 - \mu)^2]},$$

является импульсом в системе центра масс двух частиц с массами  $m_0$  и  $\mu$  и энергией  $\sqrt{p^2}$ . Естественно, что этот импульс становится действительным за порогом рождения двухчастичного состояния. Разрез расположен в полном соответствии с формулой Челлена–Лемана\*.

Итак, мы получили разрез, предсказываемый формулой Челлена–Лемана, но еще не нашли простого полюса в точке  $p^2 = m^2$ . Для этого на самом деле нужно учесть бесконечный ряд фейнмановских диаграмм, который, к счастью, легко просуммировать.

Определим *одночастично неприводимую* (ОЧН) диаграмму как диаграмму, которую нельзя разделить на две путем удаления одной единственной линии:



Пусть  $-i\Sigma(p)$  обозначает сумму всех ОЧН диаграмм с двумя внешними фермионными линиями:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= \text{---} \textcircled{\text{ОЧН}} \text{---} = \\
 &= \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

(При этом не будем включать в  $\Sigma(p)$  пропагаторы, соответствующие этим внешним линиям.) В ведущем порядке по  $\alpha$   $\Sigma = \Sigma_2$ .

Перепишем теперь фурье-образ двухточечной функции в виде:

$$\begin{aligned}
 \int d^4x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} &= \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} = \\
 &= \text{---} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{ОЧН}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{ОЧН}} \textcircled{\text{ОЧН}} \text{---} + \dots \\
 &= \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} (-i\Sigma) \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Первая диаграмма имеет при  $p^2 = m_0^2$  простой полюс, каждая из диаграмм второго типа — двойной полюс при  $p^2 = m_0^2$  и каждая из диаграмм третьего типа — тройной полюс. С учетом диаграмм следующих типов, поведение при  $p^2 = m_0^2$  становится все хуже и хуже, но к счастью, сумма всех диаграмм образует геометрическую прогрессию. Заметим, что  $\Sigma(p)$  коммутирует с  $\not{p}$ , так как  $\Sigma(p)$  зависит только от  $\not{p}$  и численных

\*В реальной КЭД  $\mu = 0$ , и разрез сливается с одностичным полюсом. Эта тонкость играет роль при подробном исследовании сокращения инфракрасных расходимостей, но ее обсуждение находится за рамками теперешнего анализа.

коэффициентов. Фактически, если записать  $p^2 = (\not{p})^2$ , то  $\Sigma(p)$  можно рассматривать как функцию  $\not{p}$ . Таким образом, каждый электронный пропагатор можно переписать как  $i/(\not{p} - m_0)$ , а затем просуммировать ряд:

$$\begin{aligned} \int d^4x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} &= \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right) + \frac{i}{\not{p} - m_0} \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots = \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Точный пропагатор имеет простой полюс, сдвинутый от точки  $m_0$  на величину  $\Sigma(\not{p})$ .

Положение этого полюса является физической массой  $m$  и определяется решением уравнения

$$[\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})] \Big|_{\not{p}=m} = 0. \quad (7.24)$$

Заметим, что если  $\Sigma(\not{p})$  определена условием (7.21), положительный вклад в  $\Sigma$  обеспечивает увеличение массы электрона. В окрестности полюса знаменатель (7.23) имеет вид:

$$(\not{p} - m) \cdot \left( 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2). \quad (7.25)$$

Таким образом, точный электронный пропагатор имеет одночастичный полюс вида (7.11), где  $m$  определяется из (7.24), а

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m}. \quad (7.26)$$

Явное вычисление  $\Sigma_2$  позволяет нам найти первые поправки к  $m$  и  $Z_2$ . Начнем с  $m$ . В первом порядке по  $\alpha$  сдвиг равен:

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma_2(\not{p} = m) \approx \Sigma_2(\not{p} = m_0). \quad (7.27)$$

Следовательно, используя (7.19),

$$\delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx (2-x) \ln \left( \frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x\mu^2} \right). \quad (7.28)$$

Сдвиг массы содержит ультрафиолетовую расходимость. Расходящееся слагаемое равно:

$$\delta m \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right). \quad (7.29)$$

Является ли отличие  $m$  от  $m_0$  на расходящуюся величину в самом деле проблемой? На этот вопрос можно взглянуть с двух точек зрения: концептуальной и практической.

С концептуальной точки зрения следует ожидать, что масса электрона должна изменяться за счет взаимодействия с электромагнитным полем. В классической электродинамике к энергии покоя любой заряженной частицы добавляется энергия электростатического поля, которое она создает. Если заряженная частица точечная, этот вклад расходится:

$$\int d^3r \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 = \int d^3r \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4\pi r^2} \right)^2 = \frac{\alpha}{2} \int \frac{dr}{r^2} \sim \alpha \Lambda. \quad (7.30)$$

В этом смысле не очень понятно, почему расходимость в (7.29) так слаба, являясь логарифмической по  $\Lambda$  вместо линейной, как в (7.30). Чтобы понять, в чем тут дело, устремим  $m_0$  к 0. Тогда в гамильтониане КЭД две спиральные компоненты электронного поля  $\psi_L$  и  $\psi_R$  не будут взаимодействовать друг с другом. Отсюда вытекает, что поправки теории возмущений никоим образом не могут привести ни к взаимодействию  $\psi_L$  с  $\psi_R$ , ни, в частности, к появлению массового слагаемого. Другими словами, при  $m_0 = 0$   $\delta m$  должна обращаться в нуль. Следовательно, сдвиг массы должен быть пропорционален  $m_0$ , и из соображений размерности ясно, что зависимость от  $\Lambda$  может быть только логарифмической.

С практической точки зрения возникновение бесконечностей не вызывает доверия к результатам вычислений по теории возмущений. Например, все теоретические результаты главы 5 содержат  $m_0$ , а не  $m$ . Для сравнения теории с экспериментом нужно заменить  $m_0$  на  $m$ , используя соотношение  $m_0 = m + \mathcal{O}(\alpha)$ . Так как «малая» поправка  $\mathcal{O}(\alpha)$  на самом деле бесконечна, обоснованность процедуры вызывает сомнение. Применимость теории возмущений была бы более очевидной, если бы при вычислении фейнмановских диаграмм мы пользовались вместо  $\frac{i}{(\not{p} - m_0)}$  пропагатором  $\frac{i}{(\not{p} - m)}$ , полюс которого расположен правильно. В главе 10 мы покажем, как перегруппировать ряд теории возмущений так, чтобы  $m_0$  заменилась на  $m$ , и пропагатор в нулевом порядке имел бы полюс, соответствующий физической массе. В оставшейся части главы мы просто будем заменять  $m_0$  на  $m$  в поправках порядка  $\alpha$ .

Наконец, найдем поправку к  $Z_2$ . Из (7.26) получим, что поправка порядка  $\alpha$  к  $\delta Z_2 = (Z_2 - 1)$  имеет вид:

$$\delta Z_2 = \frac{d\Sigma_2}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ -x \ln \frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} + 2(2-x) \frac{x(1-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} \right]. \quad (7.31)$$

Это выражение опять логарифмически расходится в ультрафиолетовой области. Наблюдаемость расходящегося слагаемого будет обсуждаться в конце раздела 7.2. Однако уже сейчас интересно отметить, что (7.31) очень похожа по виду на то взятое «с потолка» слагаемое, которое мы вычитали при вычислении поправки к вершине в разделе 6.3. Согласно (6.56), это слагаемое имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta F_1(0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[ \ln \left( \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (1-z) \left[ \ln \left( \frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) + \frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.32)$$



Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz (1-2z) \ln \left( \frac{\Lambda^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right) &= - \int_0^1 dz z(1-z) \frac{2(1-z)m^2 - \mu^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} = \\ &= \int_0^1 dz \left[ (1-z) - \frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{(1-z)^2 m^2 + z\mu^2} \right], \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что  $\delta F_1(0) + \delta Z_2 = 0$ . Это тождество будет играть решающую роль при обосновании вида вычитания, сделанного при вычислении поправки к вершине в разделе 6.3.

## 7.2. Редукционная формула Лемана – Симанчика – Циммермана

В прошлом разделе мы видели, что фурье-образ двухточечной корреляционной функции, рассматриваемой как аналитическая функция  $p^2$ , имеет простой полюс, соответствующий массе одночастичного состояния:

$$\int d^4 x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (7.33)$$

(Здесь и далее символ  $\sim$  будет означать, что выражение в левой части обладает теми же особенностями, что и выражение в правой части. Существуют и дополнительные конечные слагаемые, в данном случае определяемые (7.9).) В этом разделе мы обобщим этот результат на случай корреляционных функций более высокого порядка. Мы выведем формулу, связывающую корреляционные функции и элементы  $S$ -матрицы, впервые полученную Леманом, Симанчиком и Циммерманом и называемую редукционной формулой Лемана – Симанчика – Циммермана\*. Этот результат вместе с фейнмановскими правилами вычисления корреляционных функций позволит обосновать основную формулу (4.103), для элементов  $S$ -матрицы через фейнмановские диаграммы. Для простоты проведем все рассуждения для скалярных полей.

Стратегия вывода такова. Чтобы вычислить элемент  $S$ -матрицы для процесса «2 частицы»  $\rightarrow$  « $n$  частиц», начнем с корреляционной функции  $n + 2$  гейзенберговских полей. Совершая фурье-преобразование по координате любого из этих полей, получим полюс типа (7.33) в плоскости фурье-образа  $p^2$ . Мы покажем, что одночастичные состояния, соответствующие этим полюсам, являются на самом деле асимптотическими состояниями, получающимися в пределе хорошо локализованных волновых пакетов с определенными импульсами. Переходя к пределу, когда все  $n + 2$  частиц находятся на массовой оболочке, можно считать коэффициент при многократном полюсе элементом  $S$ -матрицы.

Итак, сначала совершим фурье-преобразование  $(n + 2)$ -точечной корреляционной функции по одному аргументу  $x$ . Нужно проанализировать интеграл

$$\int d^4 x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(z_1) \phi(z_2) \cdots \} | \Omega \rangle.$$

\*H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 1425 (1955).

Хотелось бы выделить полюсы по  $p^0$ . Для этого разобьем интеграл по  $x^0$  на три области:

$$\int dx^0 = \int_{T_+}^{\infty} dx^0 + \int_{T_-}^{T_+} dx^0 + \int_{-\infty}^{T_-} dx^0, \quad (7.34)$$

где  $T_+$  много больше, а  $T_-$  много меньше, чем все  $z_i^0$ . Назовем эти области I, II и III. Так как область II ограничена и подынтегральное выражение зависит от  $p^0$  через аналитическую функцию  $\exp(ip^0 x^0)$ , вклад от этой области также будет аналитическим по  $p^0$ . Области же I и III неограниченны и могут содержать сингулярности по  $p^0$ .

Сначала рассмотрим область I. Здесь  $x^0$  — самый поздний момент времени, и  $\phi(x)$  стоит первым в хронологическом произведении. Вставим полный набор промежуточных состояний в виде (7.2):

$$1 = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{q}}\rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}}|.$$

Таким образом, интеграл по области I равен:

$$\int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int d^3 x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{q}}\rangle \langle \lambda_{\mathbf{q}} | T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\} | \Omega\rangle. \quad (7.35)$$

Используя (7.4),

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{q}}\rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0\rangle e^{-iq\cdot x} \Big|_{q^0=E_{\mathbf{q}}(\lambda)},$$

и вставляя множитель  $e^{-\varepsilon x^0}$  для того, чтобы интеграл был хорошо определен, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} e^{ip^0 x^0} e^{-iq^0 x^0} e^{-\varepsilon x^0} \times \\ & \quad \times \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0\rangle (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \langle \lambda_{\mathbf{q}} | T\{\phi(z_1)\cdots\} | \Omega\rangle = \\ & = \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} \frac{i e^{i(p^0 - E_{\mathbf{p}} + i\varepsilon)T_+}}{p^0 - E_{\mathbf{p}}(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0\rangle \langle \lambda_{\mathbf{p}} | T\{\phi(z_1)\cdots\} | \Omega\rangle. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Знаменатель этого выражения такой же, как в (7.5):  $p^2 - m^2$ . Итак, имеется аналитическая сингулярность по  $p^0$ ; как и в разделе 7.1, она может быть либо полюсом, либо разрезом в зависимости от того, изолирована ли энергия покоя  $m_{\lambda}$ . Одночастичное состояние соответствует изолированному значению энергии  $p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ , и в этой точке (7.36) имеет полюс:

$$\int d^4 x e^{ip\cdot x} \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(z_1)\cdots\} | \Omega\rangle \underset{p^0 \rightarrow +E_{\mathbf{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{p} | T\{\phi(z_1)\cdots\} | \Omega\rangle. \quad (7.37)$$

Множитель  $\sqrt{Z}$  — та же самая константа перенормировки напряженности поля, которая фигурирует в (7.8), т. к. она заменяет такой же матричный элемент, как в (7.7).

Чтобы вычислить вклад от области III, поставим оператор  $\phi(x)$  последним в хронологическом произведении и вставим полный набор состояний между  $T\{\phi(z_1)\cdots\}$  и  $\phi(x)$ . Повторяя рассуждения, видим, что при  $p^0 \rightarrow -E_p$  вновь имеется полюс:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(z_1)\cdots\} | \Omega \rangle \underset{p^0 \rightarrow -E_p}{\sim} \langle \Omega | T\{\phi(z_1)\cdots\} | -\mathbf{p} \rangle \sqrt{Z} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (7.38)$$

Теперь сделаем фурье-преобразования по отношению к остальным координатам полей. Однако, чтобы избежать интерференции между внешними частицами, нужно изолировать их друг от друга в пространстве. Для этого повторим предыдущее вычисление, используя не обычное фурье-преобразование, а волновой пакет. В (7.35) сделаем замену

$$\int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{ip^0 x^0} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}), \quad (7.39)$$

где  $\varphi(\mathbf{k})$  — некоторое узкое распределение, локализованное вблизи  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ . Благодаря ему  $x$  будет локализовано в области с характерным размером волнового пакета, окружающей траекторию частицы с импульсом  $\mathbf{p}$ . С учетом этого изменения правая часть (7.36) имеет более сложную сингулярную структуру:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}) \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\mathbf{k}}(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_{\mathbf{k}} | T\{\phi(z_1)\cdots\} | \Omega \rangle \underset{p^0 \rightarrow +E_p}{\sim} \\ \underset{p^0 \rightarrow +E_p}{\sim} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{k}) \frac{i}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \langle \mathbf{k} | T\{\phi(z_1)\cdots\} | \Omega \rangle, \quad (7.40)$$

где во второй строке  $\tilde{p} = (p_0, \mathbf{k})$ . Теперь одночастичная сингулярность представляет разрез, длина которого порядка ширины волнового пакета  $\varphi(\mathbf{k})$  в импульсном пространстве. Однако, если  $\varphi(\mathbf{k})$  достаточно узок, разрез также очень короткий, и (7.40) имеет хорошо определенный предел, когда  $\varphi(\mathbf{k})$  стремится к  $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ , и сингулярность (7.40) стремится к полюсу (7.36).

Сингулярность (7.38), связанная с одночастичными состояниями в далеком прошлом, изменяется аналогично.

Теперь рассмотрим интегрирование по каждой координате полей из  $(n+2)$ -точечной корреляционной функции с соответствующим весом\*:

$$\left( \prod_i \int \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\} | \Omega \rangle. \quad (7.41)$$

Волновые пакеты нужно выбрать так, чтобы они перекрывались в области вокруг  $x = 0$  и разделялись в далеком прошлом и далеком будущем. Чтобы проанализировать этот интеграл, выберем большое положительное значение времени  $T_+$  так, что все волновые пакеты отделены друг от друга при  $x_i^0 > T_+$ , а большое отрицательное значение времени  $T_-$  так, что они разделены при  $x_i^0 < T_-$ . Затем каждый из интегралов по  $x_i^0$  разобьем на три области, как это делалось в (7.34). Любой из интегралов по  $x_i^0$  в области II аналитичен по соответствующей энергии  $p_i^0$ , и вновь нужно сосредоточиться на областях, где все  $x_i^0$  лежат в далеком прошлом или будущем.

\*Как и в разделе 4.5, знак произведения относится как к интегрированим, так и к множителям в скобках: интегрирование по  $x_i$  относится ко всему выражению в целом.

Для определенности рассмотрим случай, когда только две координаты,  $x_1^0$  и  $x_2^0$  лежат в будущем. Тогда поля  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_2)$  в хронологическом произведении будут стоять слева от остальных. Вставляя полный набор состояний  $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$ , найдем, что интегралы по координатам в (7.41) приобретают вид:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \left( \prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \int d^4 x_i e^{i\bar{p}_i \cdot x_i} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \right) \times \\ \times \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_{\mathbf{K}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{K}} | T \{ \phi(x_3) \cdots \} | \Omega \rangle.$$

Состояние  $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$  уничтожается двумя полевыми операторами. Следовательно, оно должно состоять из двух различных возбуждений вакуума, находящихся в разных точках. Если эти возбуждения достаточно удалены друг от друга, они должны быть независимы, так что можно приближенно записать:

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \lambda_{\mathbf{K}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{K}} | = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_1}} \times \\ \times \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{q_2}} \langle \Omega | \phi(x_1) | \lambda_{q_1} \rangle \langle \Omega | \phi(x_2) | \lambda_{q_2} \rangle \langle \lambda_{q_1} \lambda_{q_2} |.$$

Суммирование по  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в этом выражении производится по всем состояниям с нулевым импульсом, но вклад в искомые полюсы дают только одночастичные состояния. Интегралы по  $x_1^0$  и  $\mathbf{q}_1$  приводят к сингулярности по  $p_1^0$  типа (7.40), а интегралы по  $x_2^0$  и  $\mathbf{q}_2$  — к аналитической сингулярности по  $p_2^0$ . Слагаемое в (7.41), содержащее обе сингулярности, имеет вид:

$$\left( \prod_{i=1,2} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \varphi_i(\mathbf{k}_i) \frac{i}{\bar{p}_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T \{ \phi(x_3) \cdots \} | \Omega \rangle.$$

В пределе, когда волновые пакеты превращаются в дельта-функции, локализованные вокруг определенных импульсов  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , это выражение переходит в

$$\left( \prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z} \right)_{\text{out}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T \{ \phi(x_3) \cdots \} | \Omega \rangle.$$

Состояние  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |$  есть в точности асимптотическое конечное out состояние (см. раздел 4.5), так как оно является пределом с хорошо определенными импульсами, полученными из состояния, образованного хорошо разделенными волновыми пакетами. Применение подобных рассуждений к временам  $x_i^0$ , соответствующим далекому прошлому, показывает, что коэффициент при наиболее сингулярном слагаемом, соответствующем  $p_i^0$ , является матричным элементом между вакуумом и асимптотическим начальным in состоянием. Таким образом, наиболее сингулярное слагаемое в (7.41) имеет вид:

$$\left( \prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z} \right) \left( \prod_{i=3,\dots} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \cdot \sqrt{Z} \right)_{\text{out}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | - \mathbf{p}_3 \cdots \rangle_{\text{in}}.$$

Последний множитель как раз есть элемент  $S$ -матрицы.

Итак, мы показали, что элемент  $S$ -матрицы можно получить, рассматривая соответствующее вакуумное среднее по волновым пакетам полей, выделяя главные сингулярности по энергиям  $p_i^0$  и затем переходя к пределу, в котором волновые пакеты становятся дельта-функциями от импульсов. Однако это вычисление можно сделать проще, если провести его в обратном порядке, т.е. сначала перейти от волновых пакетов к дельта-функциям, вернувшись к обычному фурье-преобразованию, а только потом выделить сингулярность. Конечный результат для главной сингулярности не будет зависеть от порядка выполнения этих операций. Однако доказательство этого является довольно тонким. Грубо можно дать такое объяснение. Новые сингулярности могут возникнуть, если в фурье-преобразовании  $x_1$  и  $x_2$  становятся в далеком будущем близкими друг к другу. Однако в этой области экспоненциальный множитель приблизительно равен  $\exp[i(p_1+p_2) \cdot x_1]$ . Следовательно, новые сингулярности должны быть простыми полюсами в плоскости  $(p_1^0 + p_2^0)$ , а не произведением полюсов по  $p_1^0$  и  $p_2^0$  по отдельности. Более строгое объяснение (к сожалению, изложенное на совершенно другом языке) можно найти в цитированной оригинальной работе Лемана, Симанчика и Циммермана.

Итак, принимая возможность перемены порядка операций, можно найти точное соотношение между фурье-образами корреляционных функций и элементами  $S$ -матрицы. Это есть редукционная формула Лемана – Симанчика – Циммермана (ЛСЦ):

$$\prod_1^n \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \prod_1^m \int d^4 y_j e^{-ik_j \cdot y_j} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \} | \Omega \rangle \underset{\substack{\text{каждый } p_i^0 \rightarrow +E_{p_i} \\ \text{каждый } k_j^0 \rightarrow +E_{k_j}}}{\sim} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z} i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left( \prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z} i}{k_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_m \rangle. \quad (7.42)$$

каждый  $p_i^0 \rightarrow +E_{p_i}$   
каждый  $k_j^0 \rightarrow +E_{k_j}$

Величина  $Z$ , появившаяся в этом выражении, в точности совпадает с константой перенормировки напряженности поля, определенной в разделе 7.1 как вычет в одночастичном полюсе двухточечной функции полей. Каждой частице соответствует свой определенный множитель  $Z$ , получаемый из соответствующей двухточечной функции. Для полей с высшими спинами каждый множитель  $\sqrt{Z}$  входит с поляризационным множителем типа  $u^s(p)$ , как в (7.12). Во второй строке (7.42) следует суммировать по поляризациям  $s$ .

Словесно формула ЛСЦ утверждает, что элемент  $S$ -матрицы может быть найден следующим образом. Нужно вычислить фурье-образ соответствующей корреляционной функции, рассмотреть область в импульсном пространстве, где импульсы внешних частиц лежат вблизи массовой оболочки, и найти коэффициент при многочастичном полюсе. Для полей со спином нужно еще умножить на поляризационный спинор (типа  $u^s(p)$ ) или вектор (например,  $\varepsilon^r(k)$ ), чтобы спроектировать на нужное спиновое состояние.

Наша следующая цель состоит в том, чтобы описать эту процедуру на языке фейнмановских диаграмм. Будем анализировать связь между диаграммным разложением четырехточечной функции скалярного поля и элементом  $S$ -матрицы процесса 2 частицы  $\rightarrow$  2 частицы.

Будем рассматривать только полностью связанные диаграммы, дающие вклад в коррелятор. Легко показать, что несвязными диаграммами можно пренебречь, так как они не имеют сингулярной структуры в виде произведения четырех полюсов, как в (7.42).

Точная четырехточечная функция

$$\left( \prod_1^2 \int d^4 x_i e^{ip_i \cdot x_i} \right) \left( \prod_1^2 \int d^4 y_i e^{-ik_i \cdot y_i} \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(y_1) \phi(y_2) \} | \Omega \rangle$$

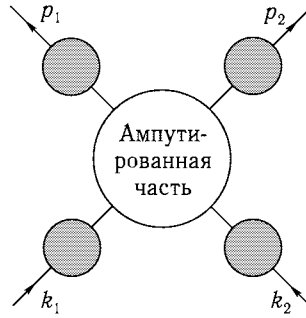


Рис. 7.4. Структура четырехточечной корреляционной функции в скалярной теории поля.

имеет общую структуру, показанную на рис. 7.4. На нем явно показаны диаграммные поправки к каждой внешней линии; кружок в центре представляет сумму всех ампутированных четырехточечных диаграмм.

Поправки к каждой внешней линии можно просуммировать так же, как это делалось при нахождении точного пропагатора электрона в предыдущем разделе. Пусть  $-iM^2(p^2)$  обозначает сумму одночастично неприводимых (ОЧН) вставок в пропагатор скалярного поля:

$$-iM^2(p^2) = \text{loop diagrams} + \dots = \text{ОЧН}$$

Следовательно, точный пропагатор может быть записан как сумма геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \text{propagator} &= \text{ОЧН} + \text{ОЧН} \text{ОЧН} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-iM^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Заметим, что, как и в случае электронного пропагатора, из соглашения о знаках при  $M^2(p^2)$  вытекает, что положительный вклад  $M^2(p^2)$  соответствует увеличению физической массы скалярной частицы. Если разложить каждый просуммированный пропагатор в окрестности физического полюса, можно видеть, что каждая внешняя линия четырехточечной амплитуды вносит вклад:

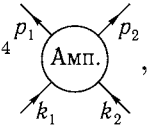
$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2} \underset{p^0 \rightarrow E_p}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{регулярные слагаемые}). \tag{7.44}$$

Таким образом, сумма диаграмм содержит произведение четырех полюсов:

$$\frac{iZ}{p_1^2 - m^2} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2} \frac{iZ}{k_1^2 - m^2} \frac{iZ}{k_2^2 - m^2}.$$

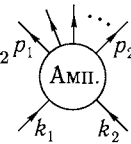
Это та же самая сингулярность, что и во второй строке (7.42). Сравнивая коэффи-

циенты при произведениях полюсов, получим соотношение:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^4 \text{Амп.},$$


где кружок обозначает сумму ампутированных четырехточечных диаграмм, а  $Z$  — константу перенормировки напряженности поля.

Аналогичные рассуждения можно применять и к фурье-образу  $(n + 2)$ -точечного коррелятора произвольной теории поля. Общее соотношение между элементами  $S$ -матрицы и фейнмановскими диаграммами имеет вид:

$$\langle \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = (\sqrt{Z})^{n+2} \text{Амп.} \quad (7.45)$$


(Если внешние частицы — разных сортов, то каждому сорту соответствует свой множитель  $\sqrt{Z}$ ; кроме того, если частицы обладают ненулевым спином, справа необходимо вводить дополнительные поляризационные множители типа  $u^s(k)$ .) Это почти та самая формула, которая постулировалась в разделе 4.6. Единственная новая особенность — появление констант перенормировки  $\sqrt{Z}$ . Эти константы несущественны при расчетах в ведущем порядке теории возмущений, но важны при расчете высших поправок.

До сих пор был выполнен только один полный расчет высших поправок, а именно, поправка порядка  $\alpha$  к форм-факторам электрона. Влияние перенормировки электронного поля не принималось в расчет. Учтем этот множитель и рассмотрим его влияние на результат.

Так как выражения для рассеяния электрона на тяжелой мишени (6.28) и (6.30) были получены с использованием старой неправильной формулы для элемента  $S$ -матрицы, подправим их, вставив для начального и конечного электронов множители  $\sqrt{Z_2}$ . Выражение (6.33) для структуры точной вершины приобретает вид:

$$Z_2 \Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (7.46)$$

где  $\Gamma^\mu(p', p)$  — сумма ампутированных вершинных электрон-фотонных диаграмм.

Воспользуемся этим выражением и вновь вычислим форм-факторы в первом порядке по  $\alpha$ . Так как  $Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$ , а  $F_2$  появляется только в первом по  $\alpha$  порядке, наш старый результат для  $F_2$  не меняется. Для вычисления  $F_1$  запишем левую часть (7.46) как

$$Z_2 \Gamma^\mu = (1 + \delta Z_2)(\gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta \Gamma^\mu + \gamma^\mu \cdot \delta Z_2,$$

где  $\delta Z_2$  и  $\delta \Gamma^\mu$  означают поправки порядка  $\alpha$  к этим величинам. Сравнивая это с правой частью (7.46), видим, что к  $F_1(q^2)$  добавляется новый вклад, равный  $\delta Z_2$ . Пусть  $\delta F_1(q^2)$  обозначает поправку (без вычитаний) к форм-фактору, вычисленному в разделе 6.3. Напомним, что из результатов в конце раздела 7.1 следует:  $\delta Z_2 = -\delta F_1(0)$ . Тогда

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + [\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)].$$

Это в точности совпадает с постулированным, но не доказанным выражением в разделе 6.3. Как видно, учет перенормировки напряженности поля обосновывает добавление нового слагаемого, что в разделе 6.3 было сделано без достаточной аргументации.

На данном этапе анализа трудно понять, каким образом при вычислении  $F_1$  будут сокращаться расходимости в высших порядках. Хуже того, хоть мы и пытались в разделе 6.3 показать, что  $F_1(0) = 1$  в любом порядке, справедливость этого предположения в первом по  $\alpha$  порядке кажется результатом случайного совпадения чисел.

Строгая постановка задачи такова. Определим второй изменяющийся масштаб множитель  $Z_1$  соотношением

$$\Gamma^\mu(q=0) = Z_1^{-1} \gamma^\mu, \quad (7.47)$$

где  $\Gamma^\mu$  — точная ампутированная вершинная функция. Для доказательства соотношения  $F_1(0) = 1$  нужно доказать, что  $Z_1 = Z_2$ , т. е. перенормировка вершины в точности компенсирует перенормировку напряженности поля. В конце раздела 7.4 будет доказано, что это тождество справедливо в любом порядке теории возмущений.

Завершив анализ редукционной формулы ЛСЦ еще одним формальным наблюдением. Начальные и конечные частицы в этой формуле различаются только знаком соответствующего полученного фурье-преобразованием импульса  $p_i^0$  или  $k_i^0$ . Это означает, что аналитически продолжая вычет полюса в точке  $p^2$  от положительных к отрицательным  $p^0$ , можно преобразовать элемент  $S$ -матрицы с  $\phi(\mathbf{p})$  в конечном состоянии к элементу  $S$ -матрицы с античастицей  $\phi^*(-\mathbf{p})$  в начальном состоянии. Следовательно, справедлива *кроссинг-симметрия*, полученная на диаграммном языке в разделе 5.4:

$$\langle \dots \phi(p) | S | \dots \rangle \Big|_{p=-k} = \langle \dots | S | \phi^*(k) \dots \rangle.$$

Так как доказательство формулы ЛСЦ не зависит от теории возмущений, кроссинг-симметрия  $S$ -матрицы является не просто свойством фейнмановских диаграмм, а общим свойством квантовой теории поля.

### 7.3. Оптическая теорема

В разделе 7.1 было показано, что двухточечная корреляционная функция квантовых полей, рассматриваемая как аналитическая функция импульса  $p^2$ , имеет разрезы, которые соответствуют многочастичным промежуточным состояниям. Этот вывод не будет неожиданным для тех, кто знаком с нерелятивистской теорией рассеяния, — амплитуда рассеяния как функция энергии имеет разрез вдоль положительной действительной полуоси. Мнимая часть амплитуды возникает из-за скачка на этом разрезе. Можно показать, что мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному сечению рассеяния. Это утверждение называется *оптической теоремой*. В этом разделе мы докажем ее релятивистский аналог и покажем, как она возникает при вычислениях фейнмановских диаграмм.

Оптическая теорема непосредственно следует из унитарности  $S$ -матрицы:  $S^\dagger S = 1$ . Вводя  $S = 1 + iT$  как в (4.72), получим:

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T. \quad (7.48)$$

Рассмотрим матричный элемент этого выражения между двухчастичными состояниями  $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle$  и  $|\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle$ . Чтобы вычислить выражение в правой части, вставим полный набор промежуточных состояний:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T^\dagger T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle = \sum_n \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T^\dagger | \{ \mathbf{q}_i \} \rangle \langle \{ \mathbf{q}_i \} | T | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \rangle.$$



$$2 \operatorname{Im} \left( \text{Diagram} \right) = \sum_f \int d\Pi_f \left( \text{Diagram}_1 \right) \left( \text{Diagram}_2 \right)$$

Рис. 7.5. Оптическая теорема. Мнимая часть амплитуды рассеяния вперед возникает за счет вкладов всех возможных многочастичных промежуточных состояний.

Теперь представим элементы  $T$ -матрицы как инвариантные матричные элементы  $\mathcal{M}$ , умноженные на дельта-функции, выражающие сохранение 4-импульса. Тогда тождество (7.48) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & -i \left[ \mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow p_1 p_2) - \mathcal{M}^*(p_1 p_2 \rightarrow k_1 k_2) \right] = \\ & = \sum_n \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \mathcal{M}^*(p_1 p_2 \rightarrow \{q_i\}) \mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow \{q_i\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \sum_i q_i), \end{aligned}$$

умноженный на общую дельта-функцию  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$ . Запишем это равенство сокращенно как

$$-i \left[ \mathcal{M}(a \rightarrow b) - \mathcal{M}^*(b \rightarrow a) \right] = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f), \quad (7.49)$$

где суммирование ведется по всем возможным наборам  $f$  частиц в конечном состоянии. Хотя до сих пор предполагалось, что  $a$  и  $b$  — двухчастичные состояния, с тем же успехом можно использовать одночастичные или многочастичные асимптотические состояния.

Для важного случая рассеяния вперед положим  $p_i = k_i$  и получим упрощенное тождество, структура которого графически показана на рис. 7.5. Добавляя требуемые формулой (4.79) кинематические множители, чтобы образовать сечение рассеяния, получаем стандартный вид оптической теоремы:

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow k_1, k_2) = 2E_{\text{ци}} p_{\text{ци}} \sigma_{\text{tot}}(k_1, k_2 \rightarrow \text{все}), \quad (7.50)$$

где  $E_{\text{ци}}$  — полная энергия, а  $p_{\text{ци}}$  — импульс каждой из частиц в системе центра масс. Это выражение связывает амплитуду рассеяния на нулевой угол с полным сечением рождения всех конечных состояний. Так как мнимая часть амплитуды рассеяния вперед определяет затухание распространяющейся вперед волны, в то время, как пучок проходит сквозь мишень, вполне естественно, что она пропорциональна вероятности рассеяния. Тождество (7.50) дает точную связь между ними.

### Оптическая теорема для фейнмановских диаграмм

Исследуем вопрос о том, как это тождество для мнимой части элемента  $S$ -матрицы возникает в разложении по фейнмановским диаграммам. Легко проверить (например, в рамках КЭД), что каждая диаграмма, дающая вклад в элемент  $S$ -матрицы  $\mathcal{M}$ , чисто действительная, если только знаменатели не становятся настолько малы, что становятся существенной добавка  $i\epsilon$ . Таким образом, фейнмановская диаграмма дает мнимый вклад в  $\mathcal{M}$  только когда виртуальные частицы в диаграмме попадают на массовую оболочку. Покажем, как выделить и вычислить эту мнимую часть.

Определим  $\mathcal{M}$  с помощью фейнмановских правил для теории возмущений. Это позволит рассматривать  $\mathcal{M}(s)$  как аналитическую функцию комплексной переменной

$s = E_{\text{ци}}^2$ , даже несмотря на то, что элементы  $S$ -матрицы определены только для частиц с действительными импульсами.

Прежде всего, покажем, что мнимая часть  $\mathcal{M}(s)$  может возникнуть только при наличии сингулярности типа разреза. Пусть  $s_0$  — пороговая энергия рождения легчайшего многочастичного состояния. Для действительных  $s$ , меньших, чем  $s_0$ , промежуточное состояние не может лежать на массовой оболочке, и  $\mathcal{M}(s)$  действительна. Следовательно, для действительных  $s < s_0$  справедливо тождество:

$$\mathcal{M}(s) = [\mathcal{M}(s^*)]^*. \quad (7.51)$$

И правая, и левая часть его является аналитической функцией  $s$ , так что оно может быть аналитически продолжено на всю комплексную плоскость  $s$ . В частности, вблизи действительной оси при  $s > s_0$  из (7.51) вытекает:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{M}(s + i\varepsilon) &= \operatorname{Re} \mathcal{M}(s - i\varepsilon); \\ \operatorname{Im} \mathcal{M}(s + i\varepsilon) &= -\operatorname{Im} \mathcal{M}(s - i\varepsilon). \end{aligned}$$

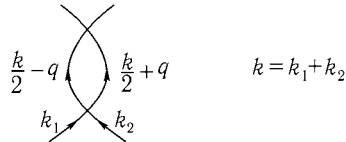
Итак, вдоль действительной оси существует разрез, начинающийся при пороговой энергии  $s_0$ ; скачок на разрезе равен:

$$\operatorname{Disc} \mathcal{M}(s) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{M}(s + i\varepsilon).$$

Обычно проще вычислить этот скачок, а не непосредственно мнимую часть. Предписание  $i\varepsilon$  в фейнмановском пропагаторе показывает, что физические амплитуды рассеяния следует вычислять над разрезом при  $s + i\varepsilon$ .

В разделе 7.1 мы выяснили, что диаграмма собственной энергии электрона также имеет разрез, начинающийся на физическом пороге рождения состояния электрон-фотон. Рассмотрим более общие однопетлевые диаграммы и покажем, что скачки на разрезах соответствуют мнимым частям, которые требуются выражением (7.49). Обобщение этого результата на многопетлевые диаграммы было получено Каткоским\*, который показал, что скачок фейнмановской диаграммы на разрезе определяется набором простых *правил разрезания*†.

Начнем с проверки (7.49) для теории  $\phi^4$ . Так как правая часть (7.49) появляется в порядке  $\lambda^2$ , можно предположить, что первый вклад в  $\operatorname{Im} \mathcal{M}$  также возникает от диаграмм высших порядков. Рассмотрим, например, диаграмму порядка  $\lambda^2$ :



с петлей в  $s$ -канале. (Легко показать, что соответствующие  $t$ - и  $u$ -канальные диаграммы не имеют разрезов в плоскости  $s$  над порогом.) Полный импульс равен:  $k = k_1 + k_2$ , и для простоты выберем импульсы симметрично, как показано на рисунке. Значение этой фейнмановской диаграммы равно:

$$i\delta \mathcal{M} = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k/2 - q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k/2 + q)^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (7.52)$$

\*R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.* 1, 429 (1960).

†Эти правила выглядят просто только для сингулярностей в физической области. Вне этой области сингулярности трех- и многочастичных амплитуд выглядят довольно запутанно. Этот предмет обсуждается в книге: R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix* (Cambridge University Press, 1966).

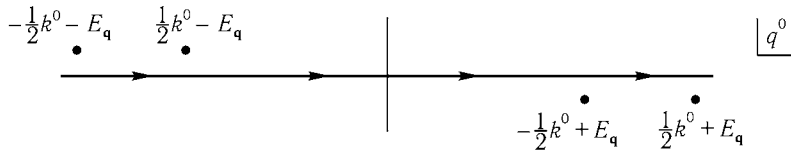
Если вычислить этот интеграл с помощью методов из раздела 6.3, то виковский поворот даст дополнительный множитель  $i$ , и ниже порога  $\delta\mathcal{M}$  чисто действительна.

Необходимо показать, что в физической области  $k^0 > 2m$  интеграл (7.52) имеет скачок вдоль действительной оси. Проще всего найти этот скачок, вычисляя интеграл для  $k^0 < 2m$ , а затем совершая аналитическое продолжение. Интеграл нетрудно посчитать, вводя фейнмановские параметры (см. задачу 7.1). Однако интереснее воспользоваться не столь прямолинейным подходом.

Будем проводить рассуждения в системе центра инерции, где  $k = (k^0, \mathbf{0})$ . Тогда подынтегральное выражение в (7.52) имеет четыре полюса в плоскости переменной интегрирования  $q^0$ . Они находятся в точках:

$$q^0 = \frac{1}{2}k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\varepsilon), \quad q^0 = -\frac{1}{2}k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\varepsilon).$$

Два из этих полюсов лежат выше действительной оси  $q^0$ , а два — ниже:



Замкнем контур снизу и вычислим вычеты в полюсах в нижней полуплоскости. Из двух полюсов только один,  $q^0 = -(1/2)k^0 + E_{\mathbf{q}}$ , дает вклад в скачок. Заметим, что взятие вычета в этом полюсе эквивалентно замене

$$\frac{1}{(k/2 + q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((k/2 + q)^2 - m^2) \tag{7.53}$$

под знаком интеграла по  $dq^0$ .

Вклад этого полюса приводит к интегралу:

$$\begin{aligned} i\delta\mathcal{M} &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}} \frac{1}{(k^0 - E_{\mathbf{q}})^2 - E_{\mathbf{q}}^2} = \\ &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_m^\infty dE_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}} |\mathbf{q}| \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}} \frac{1}{k^0(k^0 - 2E_{\mathbf{q}})}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Подынтегральное выражение во второй строке имеет полюс при  $E_{\mathbf{q}} = k^0/2$ . Когда  $k^0 < 2m$ , он не лежит на контуре интегрирования, так что  $\delta\mathcal{M}$  явно действительна. Когда же  $k^0 > 2m$ , он лежит чуть выше или чуть ниже контура интегрирования в зависимости от того, каков знак малой мнимой части  $k^0$ :



Таким образом, интеграл испытывает скачок между  $k^2 + i\varepsilon$  и  $k^2 - i\varepsilon$ . Чтобы вычислить этот скачок, воспользуемся соотношением:

$$\frac{1}{k^0 - 2E_{\mathbf{q}} \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{k^0 - 2E_{\mathbf{q}}} \mp i\pi \delta(k^0 - 2E_{\mathbf{q}})$$

(где  $P$  означает главное значение интеграла). Скачок получается заменой полюса на дельта-функцию, что, в свою очередь, эквивалентно замене на дельта-функцию первоначального пропагатора:

$$\frac{1}{(k/2 - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((k/2 - q)^2 - m^2). \quad (7.55)$$

Проследим еще раз за всеми этапами и попытаемся понять, что же было доказано. Вернемся к первоначальному интегралу (7.52), переобозначим импульсы в пропагаторах через  $p_1, p_2$  и сделаем замену:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k).$$

Мы показали, что скачок в интеграле можно вычислить, заменив каждый из пропагаторов на дельта-функцию:

$$\frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p_i^2 - m^2). \quad (7.56)$$

Скачок в  $\mathcal{M}$  возникает от той области интеграла по  $d^4 q$ , где одновременно удовлетворяются условия, диктуемые обеими дельта-функциями. Интегрируя по ним, мы помещаем импульсы  $p_i$  на массовую оболочку и преобразуем интегралы  $d^4 p_i$  в интегралы по релятивистскому фазовому объему. Кроме того, в выражении (7.52) остались множитель  $\lambda^2$ , квадрат амплитуды в ведущем порядке и симметричный множитель  $(1/2)$ , который можно интерпретировать как множитель, возникающий из-за тождественности бозонов в конечном состоянии. Таким образом, мы показали, что в порядке  $\lambda^2$

$$\text{Disc } \mathcal{M}(k) = 2i \text{Im } \mathcal{M}(k) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} |\mathcal{M}(k)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k).$$

Это явно подтверждает справедливость (7.49) в порядке  $\lambda^2$  для теории  $\phi^4$ .

В приведенном рассуждении не использовалось то, что обоим пропагаторам в диаграмме соответствуют равные массы или то, что эти пропагаторы связаны с простой точечной вершиной. Действительно, анализ можно распространить и на произвольную однопетлевую диаграмму. Всякий раз, когда в области интегрирования по импульсам в диаграмме оба пропагатора одновременно попадают на массовую оболочку, можно воспользоваться этими рассуждениями для вычисления скачка  $\mathcal{M}$ . Величину скачка можно найти, выполнив для каждого из двух пропагаторов замену (7.56). Например, в случае рассеяния Баба диаграммы порядка  $\alpha^2$  для которого приведены на рис. 7.6, мнимые части можно вычислить, разрезая диаграммы и помещая импульсы разрезанных пропагаторов на массовую оболочку, используя (7.56). Полюсы дополнительных пропагаторов не вносят вклада в скачок. Интегрируя по дельта-функциям, как и ранее, можно найти соотношения между мнимыми частями этих диаграмм и вкладом в полное сечение.

Катковский показал, что такой метод вычисления скачка совершенно общий. Физический скачок любой диаграммы можно найти, следуя алгоритму:

1. разрезаем диаграмму всеми возможными способами так, что импульсы разрезанных пропагаторов одновременно должны лежать на массовой оболочке;
2. для каждого разрезанного пропагатора делаем замену:  $\frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2)$ , затем вычисляем петлевые интегралы;
3. суммируем вклады от всех возможных разрезов.

Используя эти *правила разрезания*, можно доказать оптическую теорему (7.49) в любом порядке теории возмущений.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & 2 \operatorname{Im} \left( \text{Diagram with a vertical dashed line through a box} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram with a vertical dashed line through a box} \right|^2 \\
 (b) \quad & 2 \operatorname{Im} \left( \text{Diagram with a circle in the middle of a box} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram with a circle in the middle of a box} \right|^2
 \end{aligned}$$

Рис. 7.6. Два вклада в оптическую теорему для рассеяния Баба.

### Нестабильные частицы

Из правил разрезания следует, что оптическая теорема (7.49) справедлива не только для элементов  $S$ -матрицы, но и для любых амплитуд  $\mathcal{M}$ , которые можно определить с помощью фейнмановских диаграмм. Это оказывается очень полезным, когда мы имеем дело с нестабильными частицами, в принципе не являющимися асимптотическими состояниями.

Вспомним, что в силу соотношения (7.43) точная двухточечная функция скалярного поля имеет вид:

$$\text{Diagram of a shaded circle} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}.$$

Мы определили величину  $-iM^2(p^2)$  как сумму всех возможных ОЧН вставок в бозонный пропагатор, но с равными основаниями можно рассматривать ее как сумму всех ампутированных диаграмм для процесса «рассеяния» 1 частица  $\rightarrow$  1 частица. Из формулы ЛСЦ следует, что

$$\mathcal{M}(p \rightarrow p) = -Z M^2(p^2). \tag{7.57}$$

Воспользуемся этим соотношением и оптической теоремой для обсуждения свойств мнимой части  $M^2(p^2)$ .

Сначала рассмотрим знакомый уже случай стабильного скалярного бозона. Тогда нет никакого возможного конечного состояния, способного внести вклад в правую часть (7.49). Следовательно,  $M^2(p^2)$  действительна. Положение полюса в пропагаторе определяется уравнением  $m^2 - m_0^2 - M^2(m^2) = 0$ , которое обладает действительным решением  $m$ . Полюс, таким образом, лежит на действительной оси  $p^2$  ниже многочастичного разреза.

Однако часто частица может распадаться на две или более частиц с меньшей массой. В этом случае  $M^2(p^2)$  приобретает мнимую часть, так что нужно слегка изменить определения. Определим массу частицы  $m$  с помощью условия:

$$m^2 - m_0^2 - \operatorname{Re} M^2(m^2) = 0. \tag{7.58}$$

Тогда полюс пропагатора сместится с действительной оси:

$$\text{Diagram of a shaded circle} \sim \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ \operatorname{Im} M^2(p^2)}.$$

Если пропагатор возникает в  $s$ -канале диаграммы, сечение в окрестности полюса ведет себя как

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 - iZ \operatorname{Im} M^2(s)} \right|^2. \tag{7.59}$$

Это выражение очень похоже на релятивистскую формулу Брейта–Вигнера (4.64) сечения рассеяния в окрестности резонанса:

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \right|^2. \quad (7.60)$$

Масса  $m$ , определенная согласно (7.58), есть положение резонанса. Если  $\text{Im } M^2(m^2)$  мала, резонанс в (7.59) узок, можно в пределах резонанса приближенно записать  $\text{Im } M^2(s)$  как  $\text{Im } M^2(m^2)$ ; тогда (7.59) в точности совпадает с формулой Брейта–Вигнера. В этом случае можно отождествить

$$\Gamma = -\frac{Z}{m} \text{Im } M^2(m^2). \quad (7.61)$$

Если резонанс широкий, будут проявляться отклонения от формы брейт-вигнеровского резонанса, сводящееся к сужению на переднем крае и уширению «на хвосте».

Чтобы вычислить  $\text{Im } M^2$  и  $\Gamma$ , воспользуемся определением  $M^2$  как суммы ОЧН вкладов в пропагатор. Мнимые части соответствующих петлевых диаграмм дадут ширину распада. Однако использование оптической теоремы (7.49), обобщенной на фейнмановские диаграммы с помощью правил разрезания, позволяет упростить эту процедуру. Если взять (7.57) за определение матричного элемента  $\mathcal{M}(p \rightarrow p)$  и аналогично определить матричные элементы распада  $\mathcal{M}(p \rightarrow f)$  через фейнмановские диаграммы, (7.49) даст

$$Z \text{Im } M^2(p^2) = -\text{Im } \mathcal{M}(p \rightarrow p) = -\frac{1}{2} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2, \quad (7.62)$$

где суммирование ведется по всем возможным конечным состояниям  $f$ . Поэтому ширина распада равна:

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \rightarrow f)|^2 \quad (7.63)$$

(как и указывалось в (4.86)).

Еще раз подчеркнем, что вывод этого уравнения годится только для долгоживущих нестабильных частиц, когда  $\Gamma \ll m$ . В случае широкого резонанса нужно учитывать полную зависимость  $M^2(p^2)$  от энергии.

#### 7.4. Тожество Уорда–Такахаша

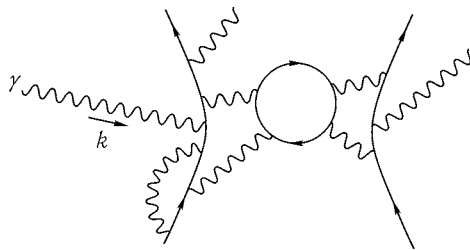
Итак, из четырех утверждений, о которых мы говорили в самом начале главы, осталось доказать только одно — тождество Уорда. Вспомним (раздел 5.5), что оно утверждает следующее. Если  $\mathcal{M}(k) = \varepsilon_\mu(k) \mathcal{M}^\mu(k)$  — амплитуда некоторого процесса КЭД, включающего в начальном или конечном состоянии фотон с импульсом  $k$ , то она обращается в нуль, если заменить  $\varepsilon_\mu$  на  $k_\mu$ :

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (7.64)$$

Чтобы получить это утверждение, полезно доказать более общее тождество для корреляционных функций КЭД, называемого *тождеством Уорда–Такахаша*. Для этого обозначим  $\mathcal{M}$  фурье-образ корреляционной функции, в которой внешние импульсы не обязательно лежат на массовой оболочке. В этом случае правая часть (7.64) содержит ненулевые слагаемые. Однако, когда для выделения элемента  $S$ -матрицы мы воспользуемся формулой ЛСЦ, то увидим, что эти слагаемые не дают вклада.

Будем доказывать тождество Уорда – Такахаши в порядке за порядком по  $\alpha$ , непосредственно рассматривая фейнмановские диаграммы, вносящие вклад в  $\mathcal{M}(k)$ . Тождество вообще говоря несправедливо для отдельных фейнмановских диаграмм — нужно просуммировать по всем диаграммам в данном порядке.

Рассмотрим типичную диаграмму, соответствующую типичной амплитуде  $\mathcal{M}(k)$ :

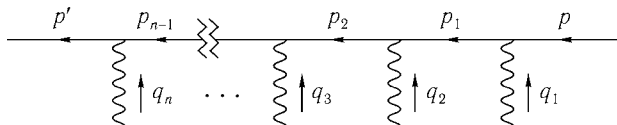


Если убрать фотон  $\gamma(k)$ , получим более простую диаграмму, являющуюся частью упрощенной амплитуды  $\mathcal{M}_0$ . Если в упрощенную диаграмму вновь где-нибудь вставить фотон, мы опять получим вклад в  $\mathcal{M}(k)$ . Ключевое наблюдение состоит в том, что если просуммировать по всем диаграммам, дающим вклад в  $\mathcal{M}_0$ , а затем — по всем возможным точкам вставки фотона в каждой из этих диаграмм, то получится  $\mathcal{M}(k)$ .

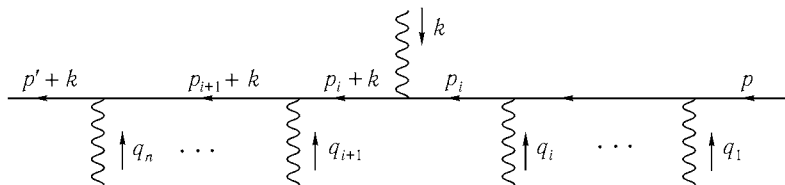
Тождество Уорда – Такахаши справедливо для каждой диаграммы, вносящей вклад в  $\mathcal{M}_0$ , если только проводится суммирование по всем возможным точкам вставки. Это утверждение мы и докажем.

Вставить фотонную линию в диаграмму можно двумя способами: прикрепить ее либо к электронной линии, выходящей из диаграммы и соединяющей две внешние точки, либо к электронной петле. Рассмотрим по очереди каждый из этих способов.

Предположим сначала, что электронная линия соединяет две внешние точки диаграммы. До того, как мы вставили фотон, линия выглядит так:



Импульсы электронных пропагаторов равны:  $p, p_1 = p + q_1, p_2 = p_1 + q_2$  и т. д. до  $p' = p_{n-1} + q_n$ . Если имеется  $n$  вершин, фотон можно вставить в  $n + 1$  различных мест. Предположим, что мы вставили его после  $i$ -й вершины:



К импульсам всех электронных пропагаторов, стоящих слева от нового фотона, теперь добавился  $k$ .

Посмотрим теперь на значения этих диаграмм, если  $\varepsilon_\mu(k)$  заменен на  $k_\mu$ . Произведение  $k_\mu$  и новой вершины удобно записать в виде:

$$-iek_\mu\gamma^\mu = -ie[(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)].$$

Умножая на примыкающие электронные пропагаторы, получим:

$$\frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} (-ie\not{k}) \frac{i}{\not{p}_i - m} = e \left( \frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right). \quad (7.65)$$

Таким образом, диаграмма с фотоном, вставленным после вершины  $i$ , имеет вид:

$$\dots \left( \frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left( \frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \left( \frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots$$

Аналогично, диаграмма с фотоном, вставленным после вершины  $i - 1$ , имеет вид:

$$\dots \left( \frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left( \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \times \left( \frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} - \frac{i}{\not{p}_{i-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots$$

Заметим, что первое слагаемое в этом выражении сокращается со вторым в предыдущем. Такое сокращение будет иметь место для любой пары диаграмм, у которых точки вставки фотона находятся рядом.

Если просуммировать по всем возможным точкам вставки, то сокращаются все слагаемые за исключением тех, у которых нет пары на концах. Слагаемое, возникающее от вставки фотона после последней вершины (слева), равно  $e$ , умноженному на значение, соответствующее первоначальной диаграмме; другое слагаемое без пары, появляющееся от вставки фотона перед первой вершиной, имеет тот же вид за исключением знака минус и замены везде  $p$  на  $p + k$ . На диаграммном языке ответ выглядит так:

$$\sum_{\text{точки вставки}} k_\mu \cdot \left( \text{Diagram with photon insertion at vertex } \mu \right) = e \left( \text{Diagram with photon insertion at vertex } p \right) - \left( \text{Diagram with photon insertion at vertex } p+k \right), \quad (7.66)$$

где из соображений симметрии сделана замена  $p' + k \rightarrow q$ .

В каждой диаграмме слева в (7.66) входящий импульс электронной линии равен  $p$ , а выходящий —  $q$ . Согласно формуле ЛСЦ из каждой диаграммы можно выделить вклад в  $S$ -матрицу. Для этого нужно взять коэффициент при произведении полюсов:

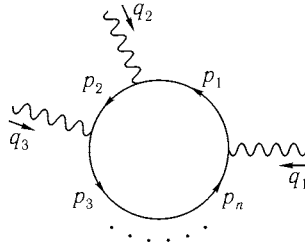
$$\left( \frac{i}{\not{q} - m} \right) \left( \frac{i}{\not{p} - m} \right).$$

Каждый член справа в (7.66) содержит один из этих полюсов, но ни один не содержит сразу оба. Таким образом, правая часть (7.66) не дает никакого вклада в  $S$ -матрицу\*.

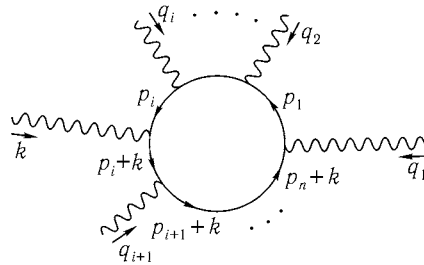
\*Этот шаг доказательства прост, если мы перераспределили ряд теории возмущений так, чтобы пропагатор содержал  $m$ , а не  $m_0$ . Это будет сделано в гл. 10.



Для завершения доказательства нужно рассмотреть случай, когда фотон присоединяется к электронной петле. До вставки фотона типичная петля выглядит так:



Электронные пропагаторы имеют импульсы  $p_1, p_1 + q_2 = p_2$  и т. д. до  $p_n$ . Предположим, что фотон  $\gamma(k)$  вставлен между вершинами  $i$  и  $i + 1$ :



Теперь по петле бежит дополнительный импульс  $k$ , вошедший в новую вершину. По соглашению будем считать, что он выходит в первой вершине.

Чтобы просуммировать по всем возможным способам вставки фотона в петлю, для каждой диаграммы воспользуемся тождеством (7.65). Для диаграммы, в которой фотон вставлен между первой и второй вершинами, получаем:

$$-e \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \left( \frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left( \frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \left( \frac{i}{\not{p}_1 - m} - \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right].$$

Первое слагаемое сократится с одним из слагаемых диаграммы, где фотон вставлен между второй и третьей вершинами.

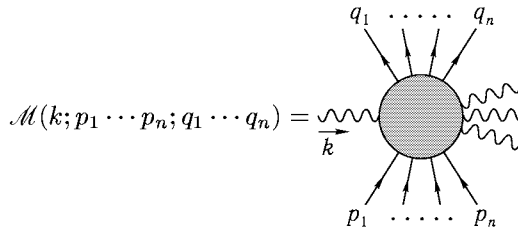
Такие сокращения будут иметь место для любой пары диаграмм-соседей. После суммирования по  $n$  возможным способам вставки фотона останется:

$$-e \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \left( \frac{i}{\not{p}_n - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left( \frac{i}{\not{p}_{n-1} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left( \frac{i}{\not{p}_1 - m} \right) \gamma^{\lambda_1} - \left( \frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left( \frac{i}{\not{p}_{n-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left( \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right]. \quad (7.67)$$

Сдвигая переменную интегрирования во втором слагаемом на  $k$ , получим, что оставшиеся два слагаемые тоже сокращаются. Таким образом, диаграммы, в которых фотон прикрепляется к замкнутой петле, не вносят вклада.

Теперь соберем вместе все куски доказательства. Предположим, что амплитуда  $\mathcal{M}$  имеет  $2n$  внешних электронных линий:  $n$  входящих и  $n$  выходящих. Обозначим входя-

щие импульсы  $p_i$ , а выходящие —  $q_i$ :



(Кроме того, амплитуда может иметь произвольное количество дополнительных внешних фотонных линий.) Амплитуда  $\mathcal{M}_0$  отличается только отсутствием фотона  $\gamma(k)$ . Чтобы из  $\mathcal{M}_0$  получить  $k_\mu \mathcal{M}^\mu$ , нужно просуммировать по всем диаграммам, вносящим вклад в  $\mathcal{M}_0$ , а в каждой из этих диаграмм просуммировать по всем возможным способам вставки фотона. Суммирование по точкам вставки фотона в петле для любой диаграммы даст нуль. Суммирование по точкам вставки фотона в проходящей насквозь электронной линии в любой диаграмме дает вклад вида (7.66). Суммируя по *всем* точкам вставки для каждой диаграммы, получим:

$$\sum_{\text{точки вставки}} k_\mu \cdot \left( \text{штрихованный кружок} \right) = e \sum_i \left( \text{штрихованный кружок} - \text{штрихованный кружок} \right),$$

где заштрихованный кружок обозначает любую диаграмму, дающую вклад в  $\mathcal{M}_0$ . Суммируя по всем таким диаграммам, окончательно получим:

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_n) = e \sum_i \left[ \mathcal{M}_0(p_1 \dots p_n; q_1 \dots (q_i - k) \dots) - \mathcal{M}_0(p_1 \dots (p_i + k) \dots; q_1 \dots q_n) \right]. \quad (7.68)$$

Это и есть тождество Уорда–Такахаша для корреляционных функций в КЭД. Мы уже выяснили, что правая часть не дает вклада в элемент  $S$ -матрицы; следовательно, в том частном случае, когда  $\mathcal{M}$  — элемент  $S$ -матрицы, (7.68) переходит в тождество Уорда (7.64).

Прежде чем обсуждать его дальше, отметим потенциальную шероховатость в нашем доказательстве. Чтобы получить сокращение слагаемых в (7.67), был выполнен сдвиг переменной интегрирования на константу. Однако, если интеграл расходится, делать сдвиг недопустимо. Аналогично, в выражениях, приводящих к (7.66), тоже могут быть расходящиеся интегралы по петлям. Хотя здесь нет явного сдвига переменной, на практике при вычислении интегралов его действительно выполняют. В любом случае ультрафиолетовые расходимости потенциально способны нарушить справедливость тождества Уорда–Такахаша. Пример этой проблемы, а также ее общее решение будут рассмотрены в следующем разделе.

Простейшим примером тождества Уорда–Такахаша можно считать случай, когда в левой части стоит трехточечная функция с одним входящим и одним выходящим

электронами и одним внешним фотоном:

$$k_\mu \cdot \left( \begin{array}{c} \downarrow p+k \\ \mu \text{ wavy line} \\ \xrightarrow{k} \\ \uparrow p \end{array} \right) = e \left( \begin{array}{c} \downarrow p \\ \uparrow p \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow p+k \\ \uparrow p+k \end{array} \right).$$

Величины в правой части — точные электронные пропагаторы с импульсами  $p$  и  $(p+k)$  соответственно. Обозначим их  $S(p)$  и  $S(p+k)$ ; из (7.23) видно, что

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}.$$

Полная трехточечная амплитуда в левой части может быть переписана, как и в (7.44), в виде произведения точных пропагаторов входящего и выходящего электронов и диаграммы рассеяния с ампутированными внешними линиями. В этом случае ампутированная диаграмма — это вершина  $\Gamma^\mu(p+k, p)$ . Тожество Уорда – Такахаши утверждает, что

$$S(p+k) [-iek_\mu \Gamma^\mu(p+k, p)] S(p) = e(S(p) - S(p+k)).$$

Для упрощения этого выражения домножим соответственно слева и справа на дираковские матрицы  $S^{-1}(p+k)$  и  $S^{-1}(p)$ , после чего

$$-ik_\mu \Gamma^\mu(p+k, p) = S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p). \quad (7.69)$$

Часто название *тождество Уорда – Такахаши* используется именно для этого частного случая.

Тожеством (7.69) можно воспользоваться, чтобы получить общее соотношение между константами  $Z_1$  и  $Z_2$ . Определим  $Z_1$  в (7.47) соотношением:

$$\Gamma^\mu(p+k, p) \rightarrow Z_1^{-1} \gamma^\mu \quad \text{при } k \rightarrow 0.$$

Константу  $Z_2$  мы определяли, как вычет в полюсе  $S(p)$ :

$$S(p) \sim \frac{iZ_2}{\not{p} - m}.$$

Беря  $p$  вблизи массовой оболочки и раскладывая (7.69) в окрестности  $k=0$ , находим для слагаемых первого порядка слева и справа:

$$-iZ_1^{-1} \not{k} = -iZ_2^{-1} \not{k},$$

т. е.

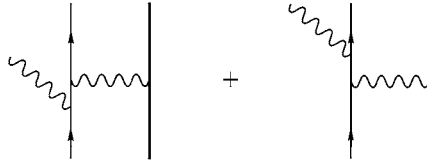
$$Z_1 = Z_2. \quad (7.70)$$

Таким образом, тождество Уорда – Такахаши гарантирует точные сокращения бесконечных перенормировочных множителей в амплитуде электронного рассеяния, о котором шла речь в разделе 7.2. Если рассмотреть этот результат совместно с точным формальным выражением для электронных форм-факторов (7.46), то тождество гарантирует равенство  $F_1(0) = 1$  во всех порядках теории возмущений.

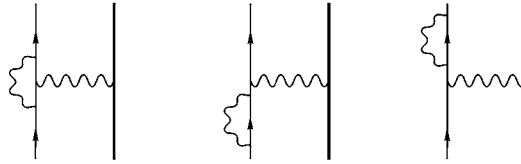
Очень часто в литературе понятия *тождество Уорда*, *сохранение тока* и *калибровочная инвариантность* используются как синонимы. Это вполне естественно, так как тождество Уорда является диаграммным представлением утверждения о сохранении электрического тока, которое в свою очередь следует из калибровочной инвариантности. В этой книге мы, тем не менее, будем различать их. Под *калибровочной инвариантностью* будем подразумевать фундаментальную симметрию лагранжиана, под *сохранением тока* — уравнения движения, следующие из этой симметрии и, наконец, под *тождеством Уорда* — диаграммное тождество, накладывающее требование на квантово-механическую амплитуду.

## 7.5. Перенормировка электрического заряда

В начале гл.6 мы рассматривали радиационные поправки порядка  $\alpha$  к рассеянию электрона на тяжелой мишени. Мы рассчитали диаграммы тормозного излучения (по крайней мере, в классическом пределе):

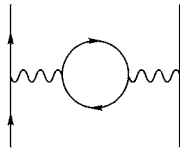


и поправки, обусловленные виртуальными фотонами:



Обсуждение перенормировки напряженности поля в этой главе прояснило роль последних двух диаграмм. В частности, мы увидели, что тождество Уорда и вытекающее из него соотношение  $Z_1 = Z_2$  обеспечивает, что сумма всех поправок, связанных с виртуальным фотоном, обращается в нуль при  $q$ , стремящемся к нулю.

Остался еще один тип радиационных поправок к этому процессу:



Это диаграмма *поляризации вакуума* первого порядка по  $\alpha$ , которую иногда еще называют *собственной энергией фотона*. Ее можно понимать как изменение структуры фотонного пропагатора за счет виртуальной электрон-позитронной пары. Эта диаграмма изменяет эффективное поле  $A^\mu(x)$ , которое чувствует рассеянный электрон. В принципе, это сдвигает величину напряженности поля и, кроме того, может изменить его зависимость от  $x$  (или в фурье-пространстве — от  $q$ ). В данном разделе мы рассчитаем эту диаграмму и увидим, что она приводит к обоим названным эффектам.

### Общий взгляд на перенормировку заряда

Прежде чем приступить к детальному вычислению, попробуем понять, какого рода ответ следует ожидать и какова может быть интерпретация результата. Интересующая нас часть диаграммы — электронная петля:

$$\begin{aligned} \mu \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \nu &= (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] = \\ &\equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q). \end{aligned} \tag{7.71}$$

(Дополнительный множитель  $(-1)$  для фермионной петли был выведен в (4.120)). В более общем виде определим  $i\Pi^{\mu\nu}(q)$  как сумму всех ОЧН вставок в фотонный пропагатор:

$$\mu \text{---} \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_q \text{---} \text{---} \nu \equiv i\Pi^{\mu\nu}(q), \quad (7.72)$$

так, что  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  — вклад второго порядка (по  $e$ ) в  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ . Единственные тензоры, которые могут возникнуть в  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  — это  $g^{\mu\nu}$  и  $q^\mu q^\nu$ . Однако, согласно тождеству Уорда,  $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$ . Следовательно,  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  пропорционален проектору  $(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2)$ . Кроме того, можно ожидать, что  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  не имеет полюса при  $q^2 = 0$ , единственным очевидным источником которого могло бы быть одночастичное безмассовое промежуточное состояние, которое не может возникнуть ни в одной из ОЧН диаграмм\*. Поэтому удобно выделить тензорную структуру  $\Pi^{\mu\nu}$  следующим образом:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \quad (7.73)$$

где  $\Pi(q^2)$  регулярен при  $q^2 = 0$ .

Тогда точная двухточечная фотонная функция равна:

$$\begin{aligned} \mu \text{---} \text{---} \nu &= \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left[ i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \right] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots = \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma \Pi^2(q^2) + \dots, \end{aligned}$$

где  $\Delta_\nu^\rho \equiv \delta_\nu^\rho - q^\rho q_\nu / q^2$ . Замечая, что  $\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma = \Delta_\nu^\rho$ , можно упростить это выражение:

$$\begin{aligned} \mu \text{---} \text{---} \nu &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) = \\ &= \frac{-i}{q^2 (1 - \Pi(q^2))} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{-i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \end{aligned} \quad (7.74)$$

При вычислении любого элемента  $S$ -матрицы по меньшей мере один из концов этого пропагатора присоединен к фермионной линии. Если просуммировать по всем возможным точкам присоединения вдоль электронной линии, то, согласно тождеству Уорда, найдем, что слагаемые, пропорциональные  $q_\mu$  или  $q_\nu$ , исчезают. Имея в виду вычисление элементов  $S$ -матрицы, можно сокращенно записать:

$$\mu \text{---} \text{---} \nu = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 (1 - \Pi(q^2))}. \quad (7.75)$$

Заметим, что до тех пор, пока  $\Pi(q^2)$  регулярен при  $q^2 = 0$ , точный пропагатор всегда имеет полюс при  $q^2 = 0$ . Другими словами, фотон остается безмассовым во всех порядках теории возмущений. Справедливость этого утверждения довольно сильно зависит

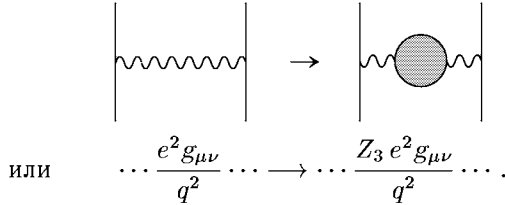
\* Можно доказать, что такого полюса на самом деле нет, но доказательство нетривиально. Швингер показал, что в двух пространственно-временных измерениях сингулярность в  $\Pi_2$ , связанная с парой безмассовых фермионов, является полюсом, а не разрезом. Это знаменитый контрпример нашим рассуждениям. Однако в четырех измерениях такой проблемы не возникает.

от использования тождества Уорда (7.73). Если, к примеру, в  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  содержится слагаемое  $M^2 g^{\mu\nu}$  (без компенсирующего слагаемого  $q^\mu q^\nu$ ), масса фотона будет сдвинута на величину  $M$ .

Вычет в полюсе при  $q^2 = 0$  равен:

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} \equiv Z_3.$$

Амплитуда любого процесса рассеяния при малых  $q^2$  будет сдвинута по отношению к вкладу древесного приближения на этот множитель:



или

$$\dots \frac{e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \dots \rightarrow \dots \frac{Z_3 e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \dots$$

Так как на каждом конце фотонного пропагатора входит множитель  $e$ , можно учесть этот сдвиг с помощью замены  $e \rightarrow \sqrt{Z_3} e$ . Эта замена носит название *перенормировки заряда*, и она во многом аналогична перенормировке массы, о которой шла речь в разделе 7.1. В частности, заметим, что экспериментально наблюдается именно «физический» заряд  $\sqrt{Z_3} e$ . Поэтому изменим обозначения и будем именно эту величину называть  $e$ . С этого момента «голый» заряд (величину, на которую умножается  $A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  в лагранжиане) будем обозначать  $e_0$ . Таким образом,

$$(\text{«физический» заряд}) = e = \sqrt{Z_3} e_0 = \sqrt{Z_3} \cdot (\text{«голый» заряд}). \quad (7.76)$$

В низшем порядке  $Z_3 = 1$ , и  $e = e_0$ .

Вдобавок к постоянному сдвигу величины электрического заряда,  $\Pi(q^2)$  приводит к еще одному эффекту. Рассмотрим процесс рассеяния с ненулевым  $q^2$  и предположим, что  $\Pi(q^2)$  вычислена в ведущем по  $\alpha$  порядке:  $\Pi(q^2) \approx \Pi_2(q^2)$ . Тогда амплитуда этого процесса будет включать величину

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} \right) \stackrel{\text{O}(\alpha)}{=} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{e^2}{1 - [\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)]} \right)$$

(замена  $e^2$  на  $e_0^2$  в низшем порядке не играет роли). Величину в скобках можно интерпретировать как электрический заряд, зависящий от  $q^2$ . Таким образом, весь эффект от замены фотонного пропагатора в древесном приближении на точный фотонный пропагатор состоит в замене:

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\text{O}(\alpha)}{=} \frac{\alpha}{1 - [\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)]}. \quad (7.77)$$

(В ведущем порядке нужно добавить  $\Pi$ -члены и в числитель, однако в главе 12 мы увидим, что если заменить  $\Pi_2$  на  $\Pi$ , то в таком виде выражение справедливо во всех порядках.)

## Вычисление $\Pi_2$

Потратив столько усилий на  $\Pi_2(q^2)$ , нам следует вычислить его. Возвращаясь к (7.71), имеем:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right] = \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Вместо  $e_0$  и  $m_0$  мы для удобства написали  $e$  и  $m$ , хотя разница между ними дает в  $\Pi^{\mu\nu}$  вклад порядка  $\alpha^2$ .

Введем фейнмановские параметры и объединим множители в знаменателях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}, \end{aligned}$$

где  $\ell = k + xq$ . Числитель (7.78), выраженный через  $\ell$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{Числитель} &= 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) + \\ &+ (\text{слагаемые, линейные по } \ell). \end{aligned}$$

Выполняя виковский поворот и делая замену  $\ell^0 = i\ell_E^0$ , получим:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \ell_E^2 + g^{\mu\nu} \ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}, \quad (7.79)$$

где  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ . Этот интеграл очень сильно расходится на ультрафиолетовом пределе. Если бы его можно было обрезать при  $\ell_E = \Lambda$ , ведущее слагаемое было бы равно:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$$

и не содержало бы компенсирующего слагаемого  $q^\mu q^\nu$ . Этот результат нарушает тождество Уорда, фотон приобретает бесконечно большую массу  $M \propto e\Lambda$ .

Таким образом, наше доказательство тождества Уорда разрушается в точности предсказанным образом: если интеграл расходится, то сдвиг переменной в (7.67) недопустим. В данном случае нарушение тождества Уорда вообще катастрофично: оно приводит к бесконечной массе фотона и противоречию с экспериментом\*. К счастью, существует способ спасти тождество Уорда.

\*Физическую массу фотона можно было бы сделать равной нулю, добавив в лагранжиан компенсирующее слагаемое с бесконечной массой фотона. В общем случае в лагранжиан можно добавить слагаемые, которые обеспечат выполнение тождества Уорда для любой  $n$ -точечной корреляционной функции. Эта процедура приводит к тем же результатам, как и метод, которому мы собираемся следовать, однако она значительно сложнее.

Выше мы регуляризовали расходящийся интеграл наиболее простым и наивным образом, обрезая его большим импульсом  $\Lambda$ . Возможны и другие способы регуляризации, и некоторые из них позволяют сохранить тождество Уорда. При вычислении поправок к вершине и собственной энергии электрона мы пользовались регуляризацией Паули–Вилларса. Такой способ регуляризации в отличие от наивного обрезания (см. задачу 7.2) сохраняет тождество  $Z_1 = Z_2$ , которое является следствием тождества Уорда. Можно было бы завершить начатые вычисления, введя фермионы Паули–Вилларса. К сожалению, требуется несколько наборов фермионов, что делает метод Паули–Вилларса довольно сложным\*. Мы будем пользоваться более простым *методом размерной регуляризации*, предложенным 'т Хофтом и Вельтманом†. Размерная регуляризация сохраняет тождество Уорда не только в КЭД, но и в широком классе более общих теорий.

В том случае, когда разные способы регуляризации приводят к разным ответам для наблюдаемых величин, это происходит потому, что или один, или оба способа нарушают какую-нибудь симметрию (например, тождество Уорда). В этих случаях принимается, что симметрия фундаментальна, и требуется, чтобы регуляризация ее сохраняла. Но доказать выбор регуляризации строго невозможно, поскольку мы принимаем существование симметрии в качестве новой аксиомы.

### Размерная регуляризация

Основная идея этого метода формулируется очень просто. Будем рассматривать фейнмановские диаграммы как аналитические функции размерности пространства  $d$ . Для достаточно малых  $d$  любой петлевой интеграл сходится, и можно доказать тождество Уорда. Окончательное выражение для любой наблюдаемой величины должно иметь хорошо определенный предел при  $d \rightarrow 4$ . Проведем конкретное вычисление, чтобы увидеть эту технику в действии. Рассмотрим пространство-время с одной временной и  $(d - 1)$  пространственными координатами. Как и ранее, можно совершить виковский поворот и получить интегралы в  $d$ -мерном евклидовом пространстве. Типичный пример:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}. \quad (7.80)$$

Первый в (7.80) множитель содержит площадь  $d$ -мерной сферы единичного радиуса. Для вычисления воспользуемся следующим трюком:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp\left(-\sum_{i=1}^d x_i^2\right) = \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \left( \int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)} = \\ &= \left( \int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(d/2). \end{aligned}$$

Таким образом, площадь  $d$ -мерной единичной сферы равна:

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (7.81)$$

\* Подробности можно найти в книге Бьеркена и Дрелла (1964), стр. 154.

† G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* B44, 189 (1972).



Ее известные частные случаи приведены в таблице:

$d$	$\Gamma(d/2)$	$\int d\Omega_d$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	$2\pi$
3	$\sqrt{\pi}/2$	$4\pi$
4	1	$2\pi^2$

Второй множитель в (7.80) равен:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\ell \frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell^2) \frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2 + \Delta)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1}, \end{aligned}$$

где во второй строке была выполнена замена  $x = \Delta/(\ell^2 + \Delta)$ . Используя определение бета-функции:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad (7.82)$$

можно легко вычислить интеграл по  $x$ . Окончательный результат для  $d$ -мерного интеграла:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}.$$

Так как  $\Gamma(z)$  имеет при  $z = 0, -1, -2, \dots$  изолированные полюсы, интеграл также имеет полюсы в точках  $d = 4, 6, 8, \dots$ . Чтобы найти его поведение в окрестности  $d = 4$ , введем  $\varepsilon = 4 - d$  и используем разложение\*:

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma(\varepsilon/2) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (7.83)$$

где  $\gamma \approx 0.5772$  — постоянная Эйлера–Маскерони (эта постоянная во всех наблюдаемых величинах всегда сокращается). Интеграл, таким образом, приобретает вид:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right). \quad (7.84)$$

Когда мы определили этот интеграл с помощью регуляторов Паули–Вилларса (см. (7.18)), то

$$\int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\ln \frac{x\Lambda^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1})\right).$$

\*Этот разложение непосредственно следует из представления гамма-функции в виде ряда:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Таким образом, полюс  $1/\varepsilon$  в методе размерной регуляризации соответствует логарифмической расходимости в интеграле по импульсам. Отметим любопытный факт: в (7.84) входит логарифм  $\Delta$ , аргумент которого — размерная величина. Слагаемое, обезразмеривающее его, скрыто в слагаемом  $1/\varepsilon$  и всегда проявляется после сокращения расходимостей.

Так же легко можно проверить более общие формулы:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}}; \quad (7.85)$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \quad (7.86)$$

В  $d$  измерениях  $g^{\mu\nu}$  удовлетворяет условию:  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$ . Таким образом, если числитель подынтегрального выражения содержит  $\ell^\mu \ell^\nu$ , нужно заменять

$$\ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} \quad (7.87)$$

(аналогично (4.126)). В многомерной КЭД дираковскими матрицами можно считать набор  $d$  матриц, удовлетворяющих соотношениям:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \text{tr}[1] = 4. \quad (7.88)$$

При анализе (7.78) эти правила дают тот же самый результат, что и в четырехмерном случае. Однако при работе с другими диаграммами возникают дополнительные вклады порядка  $\varepsilon$ . В частности, тождества (5.9) в  $d = 4 - \varepsilon$  измерениях выглядят как

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(2 - \varepsilon) \gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \varepsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Дополнительные слагаемые могут дать вклад в конечный ответ, если они умножаются на множитель  $\varepsilon^{-1}$ , возникающий от расходящегося интеграла. В однопетлевом приближении КЭД такие дополнительные слагаемые возникают при вычислении поправок к вершине или электронной собственной энергии, но при объединении этих диаграмм, при вычислении наблюдаемых величин, они взаимно сокращаются.

## Продолжение вычисления $\Pi_2$

Применим формулы размерной регуляризации к интегралу по импульсам (7.79). Неприятные слагаемые с  $\ell^2$  в числителе дают

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1) g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{-1}{(4\pi)^{d/2}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \cdot (-\Delta g^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Следовало бы ожидать полюса при  $d = 2$ , так как квадратичная расходимость в четырех измерениях становится логарифмической в двух измерениях. Но полюс сокращается, тождество Уорда действует.

Вычисляя оставшиеся слагаемые в (7.79) и используя формулу  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ , получим:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Delta^{2-d/2}} \times \\ &\times [g^{\mu\nu}(-m^2 + x(1-x)q^2) + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu] = \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i\Pi_2(q^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_2(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow 4} -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left( \frac{2}{\varepsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) \right) \quad (\varepsilon = 4 - d). \end{aligned} \quad (7.90)$$

Благодаря размерной регуляризации  $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$  приобретает вид, требуемый тождеством Уорда. Тем не менее, поляризационный оператор все еще логарифмически расходится.

Теперь можно вычислить поправку порядка  $\alpha$  к электрическому заряду:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \delta Z_3 \underset{\theta(\alpha)}{=} \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\varepsilon}.$$

Голый заряд бесконечно больше наблюдаемого, но эта разница ненаблюдаема. Наблюдать же в эксперименте можно зависимость (7.77) эффективного электрического заряда от  $q^2$ . Эта величина зависит от разности

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right), \quad (7.91)$$

которая в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  не зависит от  $\varepsilon$ . В оставшейся части этого раздела выясним, какую физику содержит это выражение.

### Интерпретация $\Pi_2$

Прежде всего рассмотрим аналитическую структуру  $\widehat{\Pi}_2(q^2)$ . При  $q^2 < 0$  (например, в случае, когда фотонный пропагатор имеется в  $t$ - или  $u$ -каналах)  $\widehat{\Pi}_2(q^2)$  явно действительна и аналитична. Но для процесса в  $s$ -канале  $q^2$  будет положительным. Логарифмическая функция при отрицательном аргументе имеет разрез в комплексной плоскости, в данном случае при

$$m^2 - x(1-x)q^2 < 0.$$

Произведение  $x(1-x)$  не превышает  $1/4$ , поэтому  $\widehat{\Pi}_2(q^2)$  имеет разрез, начинающийся при

$$q^2 = 4m^2,$$

на пороге рождения реальной электрон-позитронной пары.

Вычислим мнимую часть  $\widehat{\Pi}_2$  при  $q^2 > 4m^2$ . Для любого фиксированного  $q^2$  вносящие вклад значения  $x$  лежат между точками  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta$ , где  $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$ . Так как  $\text{Im}[\ln(-X \pm i\varepsilon)] = \pm\pi$ , получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im}[\widehat{\Pi}_2(q^2 \pm i\varepsilon)] &= -\frac{2\alpha}{\pi} (\pm\pi) \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} dx x(1-x) = \\ &= \mp 2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left(\frac{1}{4} - y^2\right) = \quad (y \equiv x - \frac{1}{2}) \\ &= \mp \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \end{aligned} \quad (7.92)$$

Зависимость от  $q^2$  точно такая же, как и в выражении для сечения рождения фермион-антифермионной пары (5.13). Этого и следовало ожидать из соотношения унитарности, показанного на 7.6(б); разрезанная пополам диаграмма для рассеяния Баба на нулевой угол дает полное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow ff$ . Параметр  $\beta$  в точности совпадает со скоростью фермионов в системе центра масс.

Выясним теперь, как величина  $\widehat{\Pi}_2(q^2)$  модифицирует электромагнитное взаимодействие (7.77). В нерелятивистском пределе имеет смысл вычислить эффективный потенциал  $V(r)$ . Для взаимодействия между разными зарядами имеем по аналогии с (4.126)

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2 [1 - \widehat{\Pi}_2(-|\mathbf{q}|^2)]}. \quad (7.93)$$

Раскладывая  $\widehat{\Pi}_2$  при  $|q^2| \ll m^2$ , находим:

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (7.94)$$

Поправка показывает, что на малых расстояниях электромагнитное взаимодействие становится очень сильным. Этот эффект может быть измерен в атоме водорода, где энергетические уровни сдвигаются на величину

$$\Delta E = \int d^3x |\psi(\mathbf{x})|^2 \cdot \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x})\right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2.$$

Волновая функция  $\psi(\mathbf{x})$  в начале координат отлична от нуля только для  $s$ -волновых состояний. Для  $2S$  состояния сдвиг равен:

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \cdot \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1.123 \times 10^{-7} \text{ эВ}.$$

Это одна (малая) часть лэмбовского сдвига (см. таблицу 6.1).

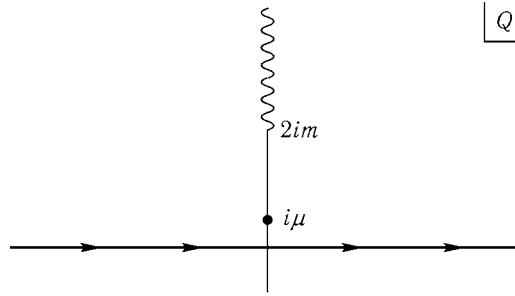


Рис. 7.7. Контур для вычисления эффективной интенсивности электромагнитного взаимодействия в нерелятивистском пределе. Полюс при  $Q = i\mu$  соответствует кулоновскому потенциалу, а разрез — поправке порядка  $\alpha$ , вызванной поляризацией вакуума.

Дельта-функция в (7.94) является только приближением; чтобы найти точный вид поправки, перепишем (7.93) в виде

$$V(\mathbf{x}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2} [1 + \hat{\Pi}_2(-Q^2)] \quad (Q \equiv |\mathbf{q}|),$$

где для регуляризации кулоновского потенциала мы вставили массу фотона  $\mu$ . Замкнем контур интегрирования сверху (см. рис. 7.7). Основной вклад возникает от полюса в точке  $Q = i\mu$ , что приводит к кулоновскому потенциалу  $-\alpha/r$ . Кроме того, имеется дополнительный вклад от разреза, начинающегося при  $Q = 2mi$ . Действительная часть подынтегрального выражения на правом и левом берегах разреза одна и та же, так что он дает вклад только в мнимую часть  $\hat{\Pi}_2$ . Определяя  $q = -iQ$ , найдем, что вклад от разреза равен:

$$\begin{aligned} \delta V(r) &= \frac{-e^2}{(2\pi)^2 r} \cdot 2 \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \text{Im}[\hat{\Pi}_2(q^2 - i\varepsilon)] = \\ &= -\frac{\alpha}{r} \frac{2}{\pi} \int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q} \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \end{aligned}$$

При  $r \gg 1/m$  интеграл определяется областью, где  $q \approx 2m$ . Приблизительно записывая в этой области подынтегральное выражение и делая подстановку  $t = q - 2m$ , получаем:

$$\begin{aligned} \delta V(r) &= -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-(t+2m)r}}{2m} \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{m}} \left(\frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(t) \approx \\ &\approx -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}, \end{aligned}$$

так что

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots\right). \quad (7.95)$$

Таким образом, область, где поправка велика, определяется комптоновской длиной волны электрона  $1/m$ . Так как в этой области волновые функции атома водорода можно считать приближенно постоянными, дельта-функция в (7.94) является хорошим приближением. Радиационная поправка к закону Кулона  $V(r)$  носит название *потенциала Юлинга*.

Поправку можно интерпретировать как результат экранирования. При  $r \gtrsim 1/m$  виртуальные  $e^+e^-$ -пары превращают вакуум в диэлектрическую среду, в которой кажущийся заряд меньше истинного (см. рис. 7.8). На меньших расстояниях мы начинаем проникать через поляризационное облако и чувствуем голый заряд. Это явление известно как *поляризация вакуума*.

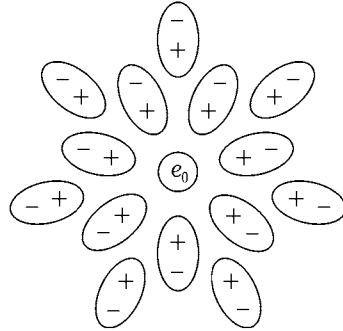


Рис. 7.8. Виртуальные  $e^+e^-$ -пары эффективно являются диполями длиной  $\sim 1/m$ , которые экранируют голый заряд электрона.

Теперь рассмотрим обратный предел: малые расстояния или  $-q^2 \gg m^2$ . Уравнение (7.91) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_2(q^2) &\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \ln(x(1-x)) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right] = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Эффективная константа взаимодействия в этом пределе

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{Am^2}\right)}, \quad (7.96)$$

где  $A = \exp(5/3)$ . Таким образом, на малых расстояниях эффективный электрический заряд становится намного больше, когда мы проникаем сквозь экранирующее его облако виртуальных электрон-позитронных пар. Совместный эффект поляризации вакуума электронами и более тяжелыми кварками и лептонами обеспечивает увеличение  $\alpha_{\text{eff}}(q^2)$  примерно на 5% в области от  $q = 0$  до  $q = 30$  ГэВ. Этот эффект наблюдается в экспериментах при высоких энергиях. На рис. 7.9 показано сечение рассеяния Баба при  $E_{\text{Ци}} = 29$  ГэВ и проведено его сравнение с результатами КЭД с поляризацией вакуума и без нее.

Если положить  $q = 1/r$ , можно найти  $\alpha_{\text{eff}}$  как функцию  $r$ . Поведение  $\alpha_{\text{eff}}(r)$  для всех  $r$  показано на рис. 7.10. Идея зависящей от расстояния (или зависящей от масштаба, или «бегущей») константы связи будет главной темой оставшейся части книги.

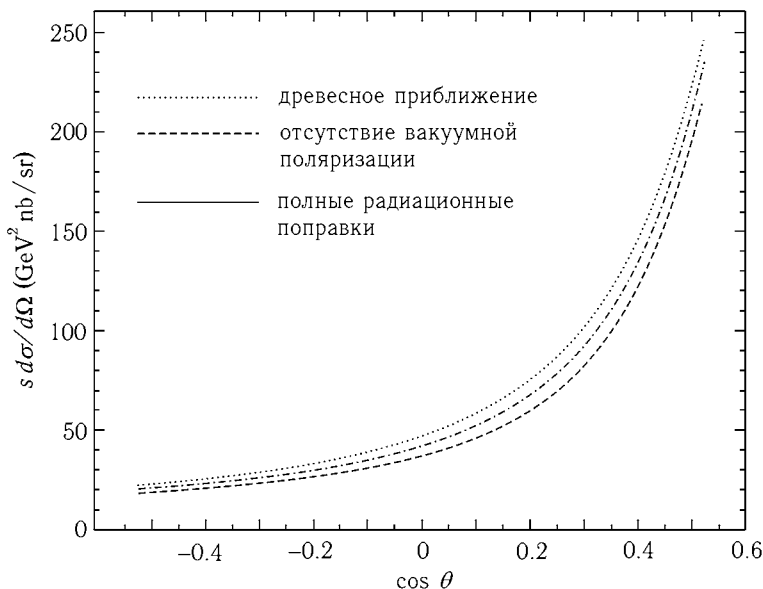


Рис. 7.9. Дифференциальное сечение рассеяния Баба  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  при  $E_{\text{ц.м.}} = 29$  ГэВ (измерения коллаборации HRS, M. Derrick, et. al., *Phys. Rev.* **D34**, 3286 (1986)). Верхняя кривая соответствует учету поправки порядка  $\alpha^2$ , о которой шла речь в задаче 5.2 и малой поправки ( $\sim 2\%$ ), связанной со слабым взаимодействием. Нижняя кривая учитывает все радиационные поправки КЭД порядка  $\alpha^3$  за исключением вклада поляризации вакуума; заметим, что эти поправки зависят от условий эксперимента (см. главу 6). Средняя кривая соответствует учету вклада от поляризации вакуума (и всех остальных вкладов), что при данной энергии увеличивает значение  $\alpha^2$  почти на 10%.

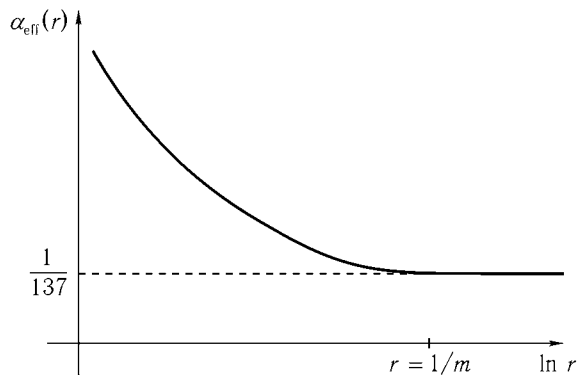


Рис. 7.10. Качественное поведение эффективной константы электромагнитного взаимодействия, порождаемое однопетлевыми диаграммами поляризации вакуума, как функция расстояния. Горизонтальная шкала покрывает много порядков.

## Задачи

**7.1.** В разделе 7.3 при анализе однопетлевой  $s$ -канальной диаграммы для рассеяния бозона на бозоне в теории  $\phi^4$  использовался косвенный метод. Для проверки этого метода воспользуйтесь техникой фейнмановских параметров и вычислите вклады всех

трех однопетлевых диаграмм. Проверьте справедливость оптической теоремы.

**7.2. Альтернативные способы регуляризации в КЭД.** В разделе 7.5 мы видели, что неудачно выбранный способ регуляризации может привести к нарушению тождества Уорда. Проверьте, что для способов регуляризации, о которых идет речь ниже, в первом порядке по  $\alpha$  справедливо тождество  $Z_1 = Z_2$ . Это уже было проверено для регуляризации Паули–Вилларса.

- (а) Вычислите заново  $\delta Z_1$  и  $\delta Z_2$ , обрезая (6.49) и (6.50) при интегрировании по  $\ell_E$  на верхнем пределе величиной  $\Lambda$ . Покажите, что при этом  $\delta Z_1 \neq \delta Z_2$ .
- (б) Вычислите  $\delta Z_1$  и  $\delta Z_2$ , определив (6.49) и (6.50) с помощью размерной регуляризации. Можно пользоваться обычными дираковскими матрицами  $4 \times 4$ , но при этом в  $d$  измерениях

$$g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = d.$$

Покажите, что в этом случае  $\delta Z_1 = \delta Z_2$ .

**7.3.** Рассмотрите теории элементарных фермионов, взаимодействующих с калибровочным полем КЭД и юкавским полем  $\phi$ :

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \phi \bar{\psi}\psi + \int d^3x e A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

- (а) Проверьте, что вклад в  $Z_1$  от вершинной диаграммы с виртуальным  $\phi$  равен вкладу в  $Z_2$  от диаграммы с виртуальным  $\phi$ . Используйте размерную регуляризацию. Справедливо ли тождество Уорда в такой теории?
- (б) Теперь рассмотрите перенормировку вершины  $\phi\bar{\psi}\psi$ . Покажите, что изменение масштаба этой вершины при  $q^2 = 0$  не сокращается с поправкой к  $Z_2$  (достаточно вычислить ультрафиолетовую расходящуюся часть). В этой теории константы перенормировки для вершины и напряженности поля дают дополнительные сдвиги наблюдаемой константы взаимодействия по сравнению с ее голым значением.



## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ

# ИСПУСКАНИЕ ГЛЮОННЫХ ДЖЕТОВ

Хотя на протяжении последних двух глав мы и рассматривали различные радиационные поправки, вычисление сечения какого-нибудь процесса с их учетом нами ни разу не проводилось. Причина этого, конечно же, в том, что такие вычисления, как правило, довольно длинные. Тем не менее, человек, занимавшийся лишь изучением отдельных диаграмм, не может претендовать на то, что понимает радиационные поправки. В этом разделе мы попытаемся исправить существующее положение: вычислим одно из простейших сечений с учетом радиационных поправок. Для понимания того, что здесь написано, вам необходимо прочесть главу 6, а главу 7 можно опустить.

Сильно взаимодействующие частицы — пионы, каоны и протоны — в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции могут рождаться, если виртуальный фотон распадется в пару кварк-антикварк. Если игнорировать влияние сильного взаимодействия, то вычисление полного сечения рождения кварк-антикварковой пары оказывается довольно простой задачей. В этом разделе мы попробуем проанализировать первые поправки к такому сечению, связанные с сильным взаимодействием.

Представим себе, что сильные взаимодействия описываются следующей простой моделью: имеется безмассовая векторная частица, *глюон*, взаимодействующая с кварками согласно

$$\Delta H = \int d^3x g \bar{\psi}_{fi} \gamma^\mu \psi_{fi} B_\mu.$$

Здесь  $f$  обозначает тип («аромат») кварка ( $u, d, s, c$ , и т. д.), а индекс  $i = 1, 2, 3$  — цвет. Константа сильного взаимодействия  $g$  от цвета и аромата не зависит. Электромагнитное же взаимодействие зависит от аромата, так как кварки  $u$  и  $c$  обладают электрическим зарядом  $Q_f = +2/3$ , а кварки  $d$  и  $s$  — электрическим зарядом  $Q_f = -1/3$ . По аналогии с  $\alpha$  определим

$$\alpha_g = \frac{g^2}{4\pi}.$$

В этом разделе мы займемся тем, что вычислим радиационные поправки к рождению кварковой пары, пропорциональные  $\alpha_g$ .

Такая модель сильных взаимодействий не вполне совпадает с принятой теорией — квантовой хромодинамикой (КХД). Однако все результаты, которые мы получим, справедливы и для КХД, если сделать замену

$$\alpha_g \rightarrow \frac{4}{3} \alpha_s.$$

В главе 17 это утверждение будет доказано.

В дальнейшем будем игнорировать массы кварков. Кроме того, можно опускать массу электрона и усреднять по поляризациям электрона и позитрона. Чтобы контролировать инфракрасные расходимости, необходимо ввести небольшую массу глюона  $\mu$  (а в конце вычисления положить ее равной нулю).

Тем не менее (см. задачу 5.5), по поляризациям такого массивного бозона нужно суммировать с помощью соотношения

$$\sum \varepsilon^\mu \varepsilon^{\nu*} \rightarrow -g^{\mu\nu};$$

и, следовательно, использовать пропагатор

$$\overline{B^\mu B^\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}.$$

- (а) Вспомните (раздел 5.1), что в низшем порядке по  $\alpha$  и при пренебрежении влиянием глюонов полное сечение рождения кварк-антикварковой пары аромата  $f$  имеет вид:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2.$$

Вычислите вклад в  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$  от диаграммы, включающей виртуальный глюон. Сведите это выражение к виду интеграла по фейнмановским параметрам и перенормируйте его вычитанием соответствующего слагаемого с  $q^2 = 0$  (аналогично (6.55)). Заметьте, что окончательное выражение можно интерпретировать как поправку к кварковому форм-фактору  $F_1(q^2)$ . Докажите, что в случае безмассовых кварков для сечения рождения кварк-антикварковой пары (без учета глюонов) в любом порядке по  $\alpha_g$  верно соотношение

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3|F_1(q^2 = s)|^2$$

с  $F_1(q^2 = 0) = Q_f$ .

- (б) Прежде чем вычислять интеграл по фейнмановским параметрам из пункта (а), рассмотрим процесс  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}qg$  рождения кварк-антикварковой пары с излучением дополнительного глюона. Сначала разберемся с кинематикой. Пусть  $q$  — полный 4-импульс,  $k_1$  и  $k_2$  — 4-импульсы кварка и антикварка, соответственно, а  $k_3$  — 4-импульс глюона. Введем

$$x_i = \frac{2k_i \cdot q}{q^2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

эта величина равна отношению энергии частицы  $i$  в системе центра масс к максимально возможной энергии. Покажите, что (1)  $\sum x_i = 2$ , (2) все другие лоренцевские скаляры, зависящие от импульса конечного состояния, выражаются через  $x_i$  и массы частиц и (3) полный интеграл по фазовому пространству 3 частиц в конечном состоянии можно записать в виде

$$\int d\Pi_3 = \prod_i \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - \sum_i k_i) = \frac{q^2}{128\pi^3} \int dx_1 dx_2.$$

Найдите область интегрирования по  $x_1$  и  $x_2$  в случае, когда кварк и антикварк безмассовые, а глюон обладает массой  $\mu$ .

- (с) В ведущем порядке по  $\alpha$  and  $\alpha_g$  нарисуйте фейнмановские диаграммы процесса  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}qg$  и вычислите сечение. Информацию о корреляции между первоначальным направлением пучка и направлениями импульсов конечных частиц можно

выбросить. Это удобно сделать так: обычный трюк со следами для нахождения квадрата матричного элемента в данном случае приводит к ответу вида

$$\int d\Pi_3 \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = L_{\mu\nu} \int d\Pi_3 H^{\mu\nu},$$

где  $L_{\mu\nu}$  — электронный след, а  $H^{\mu\nu}$  — кварковый. Если по всем параметрам в конечном состоянии за исключением  $x_1$  и  $x_2$  (а они скаляры) проинтегрировать, то единственным 4-вектором, характеризующим состояние, станет  $q^\mu$ . С другой стороны,  $H_{\mu\nu}$  удовлетворяет

$$q^\mu H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} q^\nu = 0.$$

Почему это справедливо? (Существует объяснение, основанное на первых принципах, однако полезно проверить тождество непосредственно.) Так как после интегрирования по векторам конечного состояния  $\int H^{\mu\nu}$  зависит только от  $q^\mu$  и скаляров, он должен иметь вид:

$$\int d\Pi_3 H^{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \cdot H,$$

где  $H$  — скаляр. С учетом этого покажите, что

$$L_{\mu\nu} \int d\Pi_3 H^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (g^{\mu\nu} L_{\mu\nu}) \cdot \int d\Pi_3 (g^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}).$$

Используя этот трюк, получите выражение для дифференциального сечения:

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2} (e^+ e^- \rightarrow \bar{q} q g) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \frac{\alpha_g}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

в пределе  $\mu \rightarrow 0$ . Если предположить, что каждая из частиц в конечном состоянии физически реализуется как джет сильно взаимодействующих частиц, эта формула определяет вероятность наблюдать в процессе  $e^+ e^-$ -аннигиляции три джета. Форма распределения в  $x_i$  совпадает с экспериментальными данными.

- (d) Теперь в формуле для дифференциального сечения из пункта (с) выполните замену  $\mu \neq 0$ , а затем аккуратно проинтегрируйте по области, найденной в пункте (b). Можно полагать  $\mu^2 \ll q^2$ . В этом пределе найдите инфракрасно расходящиеся члены порядков  $\ln(q^2/\mu^2)$  и  $\ln^2(q^2/\mu^2)$ , конечные члены порядка 1, а так же члены, подавленные степенями  $(\mu^2/q^2)$ . Члены последнего типа можно отбросить. Фактически нужно собрать вместе и оценить только члены с инфракрасными расходимостями.
- (e) Теперь проанализируйте интеграл по фейнмановским параметрам, найденный в (a), вновь работая в пределе  $\mu^2 \ll q^2$ . Заметьте, что в области интегрирования имеются сингулярности. Их можно проконтролировать, если вычислить интеграл для пространственноподобного  $q$ , а затем аналитически продолжить результат в физическую область. Положите  $Q^2 = -q^2$  и вычислите интеграл для  $Q^2 > 0$ , а затем аккуратно выполните аналитическое продолжение на  $Q^2 = -q^2 - i\epsilon$ . Теперь скомбинируйте ответ с результатом пункта (d) и получите полное сечение процесса для  $e^+ e^- \rightarrow$  в порядке  $\alpha_g$ . Покажите, что в этом выражении все инфракрасные логарифмы сокращаются, так что оно в пределе  $\mu \rightarrow 0$  хорошо определено.

- (f) Наконец, соберите вместе члены порядка 1 в интегрированиях из пунктов (d) и (e). Для их оценки может оказаться полезной формула

$$\int_0^1 dx \frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\pi^2}{6},$$

которую нетрудно доказать. Покажите, что полное сечение в порядке  $\alpha_g$  имеет вид:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q \text{ or } \bar{q}qg) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \left(1 + \frac{3\alpha_g}{4\pi}\right).$$

Этой формулой определяется второй способ измерения константы сильного взаимодействия. Экспериментальные результаты находятся (с учетом ошибок) в согласии с выражениями из пункта (c). Более подробно методы измерения  $\alpha_s$  мы будем обсуждать в разделе 17.6.

**Часть II**

**ПЕРЕНОРМИРОВКИ**



## ПРИГЛАШЕНИЕ К ТЕМЕ: УЛЬТРАФИОЛЕТОВОЕ ОБРЕЗАНИЕ И КРИТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ

Основной целью второй части этой книги является разработка общей теории перенормировок. Эта теория позволяет объяснить происхождение ультрафиолетовых расходимостей в теории поля и показать, при каких условиях расходимости могут быть систематически удалены. Кроме того, она указывает путь превращения расходимостей фейнмановских диаграмм из проблемы в рабочий инструмент. Мы применим этот инструмент для изучения асимптотического поведения амплитуд в теории поля при больших и малых импульсах.

Когда в разделе 6.3 мы впервые столкнулись с ультрафиолетовой расходимостью при вычислении однопетлевой вершинной поправки, это показалось недоразумением, которое должно исчезнуть, не причинив больших неприятностей. Дальнейшие примеры ультрафиолетово расходящихся диаграмм, рассмотренные в гл. 7, убедили нас в том, что такие расходимости сплошь и рядом возникают при вычислениях фейнмановских диаграмм. Следовательно, каждый, кто изучает теорию поля, должен выработать точку зрения на эти расходимости. Поначалу большинство людей придерживалось убеждения, что любая теория, содержащая расходимости, не имеет смысла. Но такая точка зрения чересчур ограничена, так как исключает из рассмотрения не только квантовую теорию поля, но и классическую электродинамику точечных частиц.

Приобретя некоторый опыт, можно принять менее строгую точку зрения, согласившись на мирное сосуществование с расходимостями. Пусть теория содержит расходимости, лишь бы они не проявлялись в физических предсказаниях. В гл. 7 мы видели, что все расходимости, появляющиеся в однопетлевых радиационных поправках в процессе рассеяния электрона на тяжелой мишени, могут быть последовательно удалены заменой голых значений массы и заряда электрона на их экспериментально измеренные физические значения. В гл. 10 мы докажем, что таким способом могут быть удалены все ультрафиолетовые расходимости в КЭД во всех порядках теории возмущений. Таким образом, до тех пор, пока масса и заряд электрона рассматриваются как измеряемые внешние параметры, предсказания теории возмущений КЭД будут всегда свободны от расходимостей. Мы также покажем в гл. 10, что КЭД принадлежит к хорошо определенному классу теорий поля, в которых все ультрафиолетовые расходимости устраняются после фиксации небольшого числа взятых из эксперимента физических параметров. Эти теории, называемые *перенормируемыми* квантовыми теориями поля, являются единственными, в которых теория возмущений дает хорошо определенные предсказания.

Конечно, хорошо было бы сделать следующий шаг и попытаться понять физические причины появления расходимостей и то, почему их влияние в одних теориях более серьезно, чем в других. Такой прямой подход к проблеме расходимостей был предложен в 70-х гг. Кеннетом Вильсоном. Ключевые идеи, необходимые для решения этой проблемы, возникли из открытого Вильсоном и другими соответствия между квантовой теорией поля и статистической физикой магнетиков и жидкостей. Вильсоновский

подход к теории перенормировок будет рассмотрен в гл. 12. В данной же главе дается краткое введение в те вопросы физики конденсированных сред, которые позволили проникнуть в проблему ультрафиолетовых расходимостей.

### Формальное и физическое обрезание

Ультрафиолетовые расходимости указывают на то, что рассчитанные в рамках квантовой теории поля величины зависят от некоторого очень большого значения импульсов, называемого ультрафиолетовым обрезанием. Эквивалентно, в координатном пространстве расходящиеся величины зависят от некоторого очень малого масштаба расстояний.

Идея обрезания на малых расстояниях при непрерывном описании системы является еще и в классических теориях поля. Обычно обрезание происходит на масштабах атомных расстояний, где непрерывное описание уже неприменимо. Однако размер обрезания проявляется в некоторых параметрах непрерывной теории. Например, в гидродинамике порядок величины таких параметров, как вязкость и скорость звука, должен совпадать с тем, что можно получить путем комбинирования типичных значений атомных радиусов и скоростей. Аналогично, магнитную восприимчивость в магнетиках можно оценить с помощью предположения о том, что энергия, затрачиваемая на переворот спина электрона, порядка одной десятой эВ, что и следует ожидать из атомной физики. В каждой из этих систем существует естественное ультрафиолетовое обрезание на атомных масштабах. Понимая физические явления на атомных масштабах, можно вычислить параметры, определяющие явления на больших масштабах.

Однако в квантовой теории поля фундаментальная физика на очень малых масштабах неизвестна. Поэтому такие параметры, как физический заряд и масса электрона, можно только измерить, но не вычислить из первых принципов. Присутствие ультрафиолетовых расходимостей в выражениях, связывающих физические параметры с их голыми значениями, свидетельствует, что эти параметры описываются неизвестной физикой на малых расстояниях.

Независимо от того, знаем ли мы фундаментальную физику на малых расстояниях или нет, для создания эффективной теории явлений на больших расстояниях нужно знать две вещи. Во-первых, необходимо знать, сколько параметров, описывающих явления на малых расстояниях, имеют отношение к физике на больших расстояниях. Во-вторых, что более важно, нужно знать, какие степени свободы фундаментальной теории проявятся в теории на больших расстояниях.

С точки зрения атомной физики кажется чудом тот факт, что в гидродинамике вообще существуют крупномасштабные степени свободы. Тем не менее, уравнения, выражающие перенос энергии и массы на большие расстояния, имеют гладкие когерентные решения. Крупномасштабные степени свободы — это потоки, переносящие эти сохраняющиеся величины, и звуковые волны большой длины волны.

В квантовой теории поля физика на больших расстояниях включает только те частицы, масса которых очень мала по сравнению с фундаментальным масштабом обрезания. Эти частицы и их динамика являются квантовым аналогом крупномасштабных потоков в гидродинамике. Простейший способ естественно ввести такие частицы связан с использованием частиц, имеющих нулевую массу. До сих пор в этой книге мы обсуждали два типа частиц, масса которых в точности равна нулю, — фотон и киральный фермион. (В главе 11 появится еще одна естественным образом безмассовая частица — *голдстоуновский бозон*.) Можно показать, что КЭД как теория существует на масштабах много больших, чем масштаб ее обрезания, потому что фотон является естественным образом безмассовым и потому что левые и правые электроны являются почти киральными фермионами.



В квантовой теории поля существует другой путь возникновения частиц с нулевой или почти нулевой массой. Можно просто настроить параметры скалярной теории поля так, чтобы массы скалярных частиц были малы по сравнению с обрезанием. Этот метод введения частиц с малыми массами кажется произвольным и неестественным. Тем не менее, он имеет аналог в статистической механике, что представляет большой интерес и является весьма поучительным.

В конденсированной среде при обычных условиях температурные флуктуации коррелированы только на атомных расстояниях. Однако в особых случаях эти флуктуации могут иметь значительно большие масштабы. Простейший пример этого явления наблюдается в ферромагнетиках. При высокой температуре спины электронов в магнетике разупорядочены и флуктуируют; однако при низкой температуре эти спины выстраиваются в определенном направлении\*. Как возникает такая выстроенность при понижении температуры магнетика? Когда сильно нагретый магнетик охлаждается, области, в которых спины коррелированы, становятся все больше и больше. При достижении определенной точки — температуры намагниченности — весь образец становится одним большим кластером с хорошо определенной макроскопической ориентацией. При несколько большей температуре магнетик содержит большие кластеры с одинаковой ориентацией спинов, которые, в свою очередь, принадлежат еще к большим кластерам, так что ориентация в самых больших масштабах все еще хаотична в объеме образца. Ситуация показана на рис. 8.1. Аналогичное явление происходит в окрестности любого другого фазового перехода второго рода, например, при переходе порядок-беспорядок в бинарных сплавах, в критической точке в жидкостях или при переходе в сверхтекучее состояние в гелии-4.

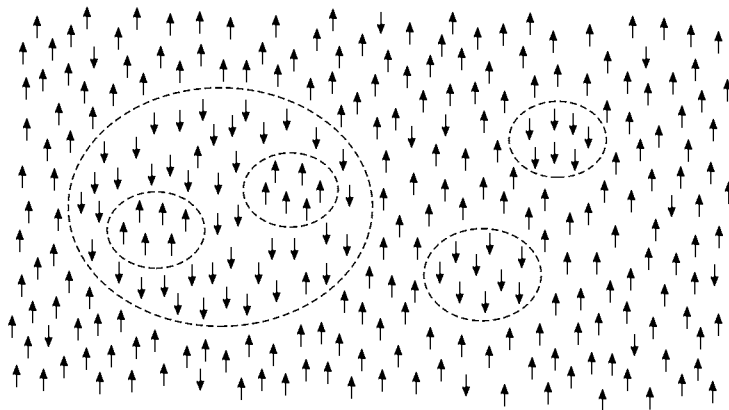


Рис. 8.1. Кластеры ориентированных спинов в ферромагнетике вблизи критической точки.

Естественно описывать эти флуктуации с большой длиной волны как флуктуирующее непрерывное поле. На простейшем интуитивном уровне можно заменить статистические флуктуации на квантовые и попробовать описать эту систему как квантовую теорию поля. В части 9.3 мы выведем несколько более тонкое соотношение, устанавли-

\*В реальном ферромагнетике дальнедействующее магнитное диполь-дипольное взаимодействие является причиной разрушения состояния однородной намагниченности и появления совокупности магнитных доменов. В этой книге мы будем игнорировать такое взаимодействие и считать, что спиновый магнитный момент имеет определенную ориентацию. Эта идеализированная система имеет прямой аналог в квантовой теории поля.

вающее точную связь между статистическими и квантовыми системами. Благодаря такой связи поведение любой статистической системы в окрестности фазового перехода второго рода может быть представлено как поведение определенной квантовой теории поля. Такая квантовая теория поля включает поле с массой, много меньшей основного атомного масштаба масс и обращающейся строго в нуль в точке фазового перехода.

Но, похоже, эта связь и составляет проблему ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля. Действительно, если множество наблюдаемых в природе фазовых переходов порождает такое же множество квантовых теорий поля, то как можно определить квантовую теорию поля без детальных ссылок на ее физические истоки на масштабе ультрафиолетового обрезания? Сказать что квантовая теория поля делает предсказания, независимые от обрезания, все равно что сказать, что статистические флуктуации в окрестности критической точки не зависят от системы — будь то магнетик, жидкость или сплав. Но является ли это утверждение таким уж очевидно неправильным? Обращая логику рассуждений, можно сделать вывод, что квантовая теория поля позволяет сделать очень мощное предсказание относительно поведения конденсированных сред, а именно предсказание *универсальности* для статистических флуктуаций в окрестности критической точки. Это предсказание действительно экспериментально подтверждено. Главной темой второй части книги будет мысль, что две идеи — независимость от обрезания в квантовых теориях поля и универсальность в теории критических явлений — на самом деле представляют одну и ту же идею, и понимание каждой из них позволяет глубже понять другую.

### Теория фазовых переходов Ландау

Для того чтобы получить первое представление об универсальности в явлениях фазовых переходов, рассмотрим, следуя Ландау, простейшую непрерывную теорию фазовых переходов второго рода.

Во-первых, напомним немного термодинамику и уточним обозначения. В термодинамике *фазовый переход первого рода* — это точка, при переходе через которую скачкообразно меняются некоторые термодинамические переменные (плотность жидкости, намагниченность ферромагнетика). В точке фазового перехода два совершенно различных термодинамических состояния (жидкость и газ или намагниченность, параллельная и антипараллельная заданной оси) находятся в равновесии. Термодинамическая величина, изменяющаяся скачком при переходе и характеризующая разницу между двумя конкурирующими фазами, называется *параметром порядка*. В большинстве случаев можно так изменять другой термодинамический параметр, что эти два конкурирующих состояния в термодинамическом пространстве приблизятся друг к другу, так что при некотором значении этого параметра два состояния становятся тождественными, и скачок параметра порядка исчезает. Эта конечная точка на линии фазового перехода первого рода называется *фазовым переходом второго рода*, или, более точно, *критической точкой*. Если смотреть с другой стороны, то критическая точка — это точка, в которой одно термодинамическое состояние разветвляется на два макроскопически различных состояния. Эта бифуркация и приводит к крупномасштабным тепловым флуктуациям, обсуждавшимся в предыдущем разделе.

Ферромагнетик представляет конкретный пример такого поведения. Предположим для простоты, что вещество имеет предпочтительную ось намагниченности, так что при низкой температуре спины системы будут упорядочены либо параллельно, либо антипараллельно этой оси. Общая намагниченность вдоль этой оси  $M$  и есть параметр порядка. При низкой температуре приложение внешнего магнитного поля  $H$  будет усиливать либо одно, либо другое из двух возможных состояний. При  $H = 0$  состояния

будут в равновесии; если  $H$  изменяется от малого отрицательного до малого положительного значения, то термодинамическое состояние и значение  $M$  изменяются скачкообразно. Следовательно, при любой фиксированной (низкой) температуре существует переход первого рода при  $H = 0$ . Рассмотрим теперь, что произойдет при возрастании температуры. Флуктуации спинов возрастают и значение  $|M|$  уменьшается. При некоторой температуре  $T_C$  система перестает быть намагниченной при  $H = 0$ . В этой точке исчезает фазовый переход первого рода, и два конкурирующих термодинамических состояния соединяются. Таким образом в системе имеется критическая точка при  $T = T_C$ . Положение различных переходов в плоскости  $H$ - $T$  показано на рис. 8.2.

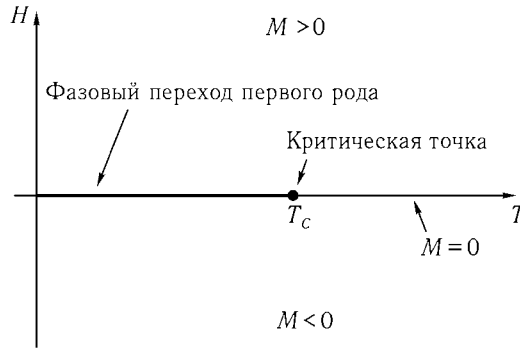


Рис. 8.2. Фазовая диаграмма в плоскости  $H$ - $T$  для одноосного ферромагнетика.

Ландау описал это поведение с помощью свободной энергии Гиббса  $G$ . Этот термодинамический потенциал зависит от  $M$  и  $T$  так, что

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = H. \quad (8.1)$$

Он предложил сосредоточиться на окрестности критической точки:  $T \approx T_C$ ,  $M \approx 0$ . Тогда разумно разложить  $G(M)$  в ряд Тейлора по степеням  $M$ . При  $H = 0$  можно записать:

$$G(M) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 + \dots \quad (8.2)$$

Так как система симметрична относительно замены  $M \rightarrow -M$ , то  $G(M)$  содержит только четные степени  $M$ . Поскольку  $M$  мало, можно пренебречь высшими степенями в разложении. С учетом (8.2) можно найти возможные значения  $M$  при  $H = 0$ , решив уравнение

$$0 = \frac{\partial G}{\partial M} = 2B(T)M + 4C(T)M^3. \quad (8.3)$$

Если  $B$  и  $C$  положительны, то единственное решение есть  $M = 0$ . Однако, если  $C > 0$ , а  $B$  отрицательно при некоторой температуре ниже  $T_C$ , возникает нетривиальное решение для  $T < T_C$ , как показано на рис. 8.3. Более конкретно запишем приближенно при  $T \approx T_C$ :

$$B(T) = b(T - T_C), \quad C(T) = c. \quad (8.4)$$

Тогда решение уравнения (8.3) имеет вид:

$$M = \begin{cases} 0 & \text{для } T > T_C; \\ \pm [(b/2c)(T_C - T)]^{1/2} & \text{для } T < T_C. \end{cases} \quad (8.5)$$

Это и есть то качественное поведение, которое мы ожидаем в критической точке.

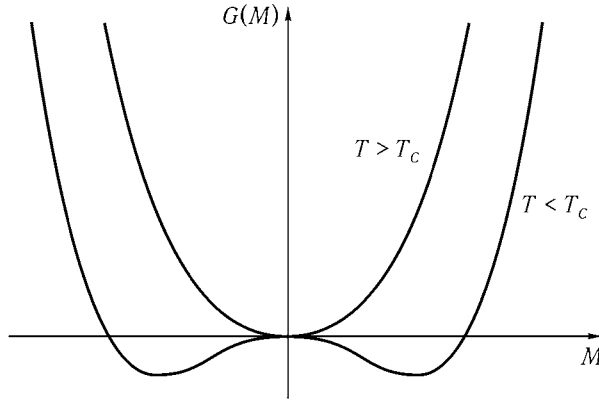


Рис. 8.3. Поведение свободной энергии Гиббса  $G(M)$  в теории Ландау ниже и выше критической температуры.

Для нахождения значения  $M$  при ненулевом внешнем поле следует решить (8.1) с левой частью, заданной в (8.2). Это эквивалентно процедуре минимизации новой функции, связанной с (8.2). Определим

$$G(M, H) = A(T) + B(T)M^2 + C(T)M^4 - HM. \quad (8.6)$$

Тогда минимизация  $G(M, H)$  по  $M$  при фиксированном  $H$  дает значение  $M$ , удовлетворяющее (8.1). Минимум единственен, за исключением случая  $H = 0$  и  $T < T_C$ , где мы нашли два минимума на второй линии (8.5). Это соответствует фазовой диаграмме рис. 8.2.

Для изучения корреляций в окрестности фазового перехода Ландау обобщил это описание, рассмотрев намагниченность  $M$  как интеграл от локальной спиновой плотности:

$$M = \int d^3x s(\mathbf{x}). \quad (8.7)$$

Тогда свободная энергия Гиббса (8.6) становится интегралом от локальной функции  $s(\mathbf{x})$ ,

$$G = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\nabla s)^2 + b(T - T_C)s^2 + cs^4 - Hs \right], \quad (8.8)$$

которая должна быть минимизирована по отношению к полевой конфигурации  $s(\mathbf{x})$ . Первое слагаемое есть простейший возможный способ описания стремления соседних спинов выстраиваться. Мы изменили масштаб  $s(\mathbf{x})$  так, что коэффициент при этом слагаемом стал равным  $1/2$ . При записи интеграла свободной энергии можно рассматривать  $H$  как функцию координат и на самом деле это полезно сделать. После этого можно включать  $H(\mathbf{x})$  в окрестности  $x = 0$  и смотреть на отклик в другой точке. Минимум выражения свободной энергии (8.8) по  $s(\mathbf{x})$  задается решением вариационного уравнения

$$0 = \delta G[s(\mathbf{x})] = -\nabla^2 s + 2b(T - T_C)s + 4cs^3 - H(\mathbf{x}). \quad (8.9)$$

При  $T > T_C$  макроскопическая намагниченность исчезает, и  $s(\mathbf{x})$  должно быть мало, поэтому можно найти качественное поведение, опустив слагаемое  $s^3$ . Тогда  $s(\mathbf{x})$

удовлетворяет линейному уравнению

$$(-\nabla^2 + 2b(T - T_C))s(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}). \quad (8.10)$$

Для изучения корреляции спинов положим

$$H(\mathbf{x}) = H_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (8.11)$$

Результирующая конфигурация  $s(\mathbf{x})$  есть функция Грина дифференциального оператора (8.10), которую мы назовем  $D(\mathbf{x})$ :

$$(-\nabla^2 + 2b(T - T_C))D(\mathbf{x}) = H_0 \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (8.12)$$

Эта функция Грина дает отклик в точке  $\mathbf{x}$ , когда в точке  $\mathbf{x} = 0$  спин выстроен по полю  $H$ . В разделах 9.2 и 9.3 мы увидим, что  $D(\mathbf{x})$  также пропорциональна спин-спиновой корреляционной функции термодинамического ансамбля при нулевом поле:

$$D(\mathbf{x}) \propto \langle s(\mathbf{x})s(0) \rangle \equiv \sum_{\text{все } s(\mathbf{x})} s(\mathbf{x})s(0)e^{-\mathbf{H}/kT}, \quad (8.13)$$

где  $\mathbf{H}$  — гамильтониан магнетика.

Решение (8.12) может быть найдено с помощью преобразования Фурье:

$$D(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + 2b(T - T_C)}. \quad (8.14)$$

Этот интеграл уже встречался при обсуждении потенциала Юкавы (4.126). Вычислив его таким же способом, находим

$$D(\mathbf{x}) = \frac{H_0}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-r/\xi}, \quad (8.15)$$

где

$$\xi = [2b(T - T_C)]^{-1/2} \quad (8.16)$$

есть *корреляционная длина*, т. е. размер скоррелированных спиновых флуктуаций. Заметим, что эта длина расходится при  $T \rightarrow T_C$ .

Главный результат проведенного анализа — это выражения (8.5) и (8.16), включающие неизвестные константы  $b$  и  $c$ , зависящие от физических явлений на атомном масштабе. С другой стороны, степенной закон зависимости от  $(T - T_C)$  в этих формулах следует просто из структуры уравнений Ландау и не зависит от каких-либо деталей микроскопической физики. На самом деле, наш вывод этой зависимости даже не использует тот факт, что  $G$  описывает ферромагнетик; мы предположили только, что  $G$  может быть разложена по степеням параметра порядка, и что  $G$  обладает симметрией относительно отражения  $M \rightarrow -M$ . Эти предположения в равной степени применимы для широкого круга систем других типов: бинарные сплавы, сверхтекучесть и даже (хотя симметрия отражения здесь менее очевидна) переход жидкость-газ. Теория Ландау предсказывает, что вблизи критической точки все эти системы проявляют универсальную зависимость  $M$ ,  $\xi$  и других термодинамических величин от  $(T - T_C)$ .

## Критические показатели

Предшествующее рассмотрение теории фазовых переходов Ландау подчеркивает ее сходство с классической теорией поля. Мы построили выражение для свободной энергии и нашли термодинамически предпочтительную конфигурацию, решив классические вариационные уравнения. Это лишь приближение к точной статистической задаче, аналогичное замене квантовой динамики на классическую в теории поля. В гл. 13 мы используем методы квантовой теории поля для точного учета флуктуаций в окрестности термодинамически предпочтительного состояния Ландау. Эти применения окажутся глубокими и в значительной степени противоречащими интуиции.

Для описания вида этих изменений запишем (8.15) в более общем виде:

$$\langle s(\mathbf{x})s(0) \rangle = A \frac{1}{r^{1+\eta}} f(r/\xi), \quad (8.17)$$

где  $A$  — константа и  $f(y)$  — функция, удовлетворяющая условиям  $f(0) = 1$  и  $f(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Теория Ландау предсказывает, что  $\eta = 0$  и  $f(y)$  есть простая экспонента. Это выражение имеет форму, аналогичную функции Грина в квантовой теории поля. Константа  $A$  может быть устранена перенормировкой величины поля  $s(x)$ . Корреляционная длина  $\xi$  в общем случае является сложной функцией атомных параметров, но при непрерывном описании можно просто включить эти параметры в  $|\xi|$ . Удобно рассматривать  $\xi$  как независимый от обрезания физический параметр, т. к. он определяет крупномасштабное поведение физических корреляций. На самом деле аналогия между (8.15) и потенциалом Юкавы предполагает, что мы должны идентифицировать  $\xi^{-1}$  с физической массой в соответствующей квантовой теории поля. Тогда (8.17) дает независимое от обрезания непрерывное представление статистической системы.

Если бы мы работали в квантовой теории поля, мы получили бы поправки в (8.17) в виде ряда теории возмущений по параметру  $c$ , стоящему множителем в нелинейном слагаемом в (8.9). Это — обобщение результата Ландау:

$$\langle s(\mathbf{x})s(0) \rangle = \frac{1}{r} F(r/\xi, c). \quad (8.18)$$

Пертурбативные поправки будут зависеть от свойств непрерывной теории поля. Например,  $F(y, c)$  будет зависеть от числа компонент поля  $s(\mathbf{x})$ , и ее разложение в ряд будет по-разному зависеть от того, задана ли намагниченность вдоль определенной оси, в определенной плоскости или все изотропно. Для параметров порядка со многими компонентами разложение будет также зависеть от высших дискретных симметрий задачи. Однако мы ожидаем, что система, описываемая одинаковой свободной энергией Ландау (например, одноосный ферромагнетик и система жидкость-газ), будет иметь одинаковое пертурбативное разложение, если оно будет записано через физические массы и константы связи. Полная универсальность теории Ландау становится тогда более ограниченной концепцией, в рамках которой системы обладают одинаковыми крупномасштабными корреляциями, если их параметры порядка имеют одинаковые симметрии. Можно сказать, что статистические системы разделяются на разные *классы универсальности*, каждый с характерным крупномасштабным поведением.

Если бы это было истинным поведением систем в окрестности точки фазового перехода второго рода, то это стало бы прекрасным подтверждением идей, необходимых для формулировки независимых от обрезания квантовых теорий поля. Однако истинное поведение статистической системы является все же более тонким. Экспериментально обнаруживается зависимость вида (8.17), где функция  $F(y)$  одинакова для каждого класса универсальности. Нет нужды во вспомогательном параметре  $c$ . С другой стороны, показатель  $\eta$  принимает специфическое ненулевое значение в каждом

классе универсальности. Другие степенные законы в теории Ландау модифицируются также конкретно для каждого класса универсальности. Например, (8.5) изменяется при  $T < T_C$  и принимает вид:

$$M \propto (T_C - T)^\beta, \quad (8.19)$$

где показатель  $\beta$  имеет фиксированное значение для всех систем в данном классе универсальности. Для трехмерных одноосных магнетиков и жидкостей  $\beta = 0.313$ . Показатели степени в этих нетривиальных масштабных соотношениях называются *критическими показателями (индексами)*.

Переход от (8.17) к (8.18) не разрушает саму идею о том, что конденсированная среда в окрестности фазового перехода второго рода имеет хорошо определенное, независящее от обрезания, непрерывное поведение. Однако мы хотели бы понять, почему (8.17) должно считаться правильным? Ответ на этот вопрос может быть дан путем тщательного анализа ультрафиолетовых расходимостей в соответствующей квантовой теории поля. В гл. 12, где мы наконец завершим изложение теории ультрафиолетовых расходимостей, мы поймем, что имеем в руках инструмент, не только доказывающий справедливость (8.17), но и применимый для вычисления значений критических показателей с помощью фейнмановских диаграмм. Таким образом мы открываем красивое приложение квантовой теории поля в области атомной физики. Успех этого приложения позволит нам в части III развить еще более мощные средства исследования, которые понадобятся в релятивистской теории элементарных частиц.

## ГЛАВА 9

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Однажды Фейнман заметил, что\* «...каждый приличный физик-теоретик знает шесть или семь теоретических обоснований одних и тех же физических фактов». Следуя его совету, в этой главе мы рассматриваем альтернативный метод получения правил Фейнмана для квантовой теории поля со взаимодействием, а именно метод *функционального интегрирования*.

Помимо общего фейнмановского принципа, есть и различные конкретные причины введения этого формализма. Он позволяет дать сравнительно легкий вывод выражения для пропагатора фотона, завершая тем самым доказательство данных в разделе 4.8. фейнмановских правил для КЭД. Функциональный метод легче обобщается на другие теории со взаимодействием, такие как скалярная КЭД (задача 9.1), и особенно на неабелевы калибровочные теории (часть III). Поскольку он использует как фундаментальную величину лагранжиан, а не гамильтониан, этот формализм явно сохраняет все симметрии теории. Наконец, функциональный подход обнаруживает тесную аналогию между квантовой теорией поля и статистической механикой. Используя эту аналогию, мы перевернем совет Фейнмана с ног на голову и применим одно и то же теоретическое представление к двум полностью различным областям физики.

### 9.1. Интеграл по путям в квантовой механике

Начнем с приложения метода функционального интеграла (или *интеграла по путям*) к простейшей мыслимой системе — нерелятивистской квантово-механической частице, движущейся в одном измерении. Гамильтониан этой системы имеет вид:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Пусть мы хотим вычислить амплитуду перехода частицы из точки ( $x_a$ ) в другую точку ( $x_b$ ) за данное время ( $T$ ). Назовем эту амплитуду  $U(x_a, x_b; T)$ ; это координатное представление шредингеровского оператора эволюции во времени. В каноническом гамильтоновом формализме  $U$  дается выражением

$$U(x_a, x_b; T) = \langle x_b | e^{-iHT/\hbar} | x_a \rangle. \quad (9.1)$$

(На следующих нескольких страницах мы будем выписывать все множители  $\hbar$  явно.)

В формализме интеграла по путям  $U$  задается выражением, которое выглядит совершенно иначе. Сначала мы попытаемся обосновать это выражение, а затем докажем, что оно эквивалентно (9.1).

Напомним, что в квантовой механике справедлив *принцип суперпозиции*. Если процесс может произойти более чем одним способом, его полная амплитуда является когерентной суммой амплитуд каждого способа. Простым, но нетривиальным примером

---

\* *Характер физических законов*, М.: Мир.



является знаменитый эксперимент с двойной щелью (рис. 9.1.) Полная амплитуда попадания электрона в детектор складывается из амплитуд для двух путей, показанных на рисунке. Поскольку пути имеют разную длину, амплитуды, вообще говоря, различаются, что приводит к интерференции.

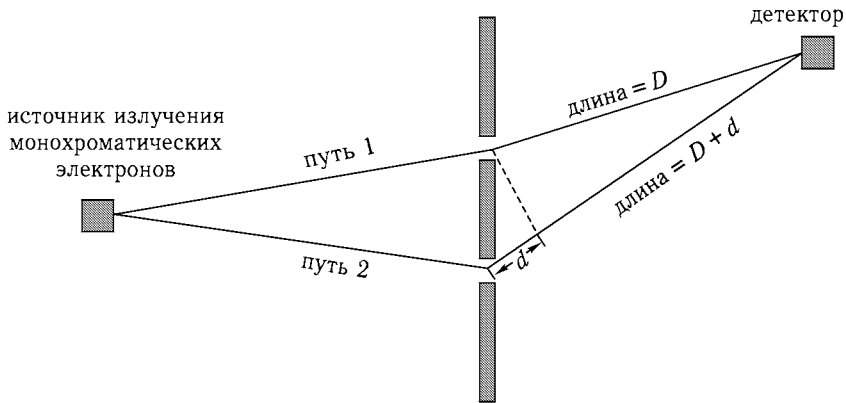


Рис. 9.1. Эксперимент с двойной щелью. Путь 2 больше, чем путь 1, на величину  $d$  и, следовательно, имеет фазу, которая больше на  $2\pi d/\lambda$ , где  $\lambda = 2\pi\hbar/p$  — длина волны де Бройля этой частицы. При  $d = 0, \lambda, \dots$  возникает усиливающая интерференция, а при  $d = \lambda/2, 3\lambda/2, \dots$  возникает ослабляющая интерференция.

Следовательно, для произвольной системы мы могли бы написать полную амплитуду перехода из  $x_a$  в  $x_b$  как

$$U(x_a, x_b; T) = \sum_{\text{все пути}} e^{i \cdot (\text{фаза})} = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \cdot (\text{фаза})}. \quad (9.2)$$

Чтобы соблюсти демократию, мы записали амплитуду для каждого конкретного пути в виде чистой фазы, так что ни один путь не является более важным, чем другие. Символ  $\int \mathcal{D}x(t)$  — просто другой способ написать словами «сумма по всем путям»; поскольку есть один путь для каждой функции  $x(t)$ , который начинается в  $x_a$  и заканчивается в  $x_b$ , сумма действительно равняется интегралу по этому непрерывному пространству функций.

Мы можем определить этот интеграл как часть естественного обобщения дифференциального исчисления на пространства функций. Функция, отображающая функции в числа, называется *функционалом*. Подынтегральное выражение в (9.2) есть функционал, поскольку он сопоставляет любой функции  $x(t)$  комплексную амплитуду. Аргумент функционала  $F[x(t)]$  обычно записывают в квадратных, а не в круглых скобках. Обычная функция  $y(x)$  может быть проинтегрирована по пространству точек  $x$ , аналогично, функционал  $F[x(t)]$  может быть проинтегрирован по пространству функций  $x(t)$ ; мера такого *функционального интеграла* обычно пишется большой буквой  $\mathcal{D}$ , как в (9.2). Функционал можно дифференцировать по своему аргументу (функции), и эта *функциональная производная* обозначается  $\delta F/\delta x(t)$ . Ниже мы дадим более точные определения новых интеграла и производной.

Что следует считать «фазой» в (9.2)? В классическом пределе мы должны получить, что вклад в полную амплитуду дает только один — классический — путь. Следовательно, можно надеяться вычислить интеграл в (9.2) методом стационарной фазы, получив

классический путь  $x_{\text{cl}}(t)$  из условия стационарности,

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \left( \text{фаза}[x(t)] \right) \Big|_{x_{\text{cl}}} = 0.$$

Но классический путь — это тот, который удовлетворяет принципу наименьшего действия,

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \left( S[x(t)] \right) \Big|_{x_{\text{cl}}} = 0,$$

где  $S = \int L dt$  — классическое действие. Поэтому возникает искушение с точностью до константы отождествить фазу с  $S$ . Поскольку приближение стационарной фазы должно быть верным в классическом пределе, т. е. когда  $S \gg \hbar$ , в качестве фазы мы возьмем  $S/\hbar$ . Таким образом, окончательная конечная формула для амплитуды распространения принимает вид:

$$\langle x_b | e^{-iHT/\hbar} | x_a \rangle = U(x_a, x_b; T) = \int \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)]/\hbar}. \quad (9.3)$$

Можно легко проверить, что эта формула приводит к правильной интерференционной картине в опыте с двойной щелью. Действие для каждого из путей, показанных на (рис. 9.1), есть просто  $(1/2)mv^2t$ , т. е. кинетическая энергия, умноженная на время. Для первого пути скорость равна  $v_1 = D/t$ , и фаза  $mD^2/2\hbar t$ . Для второго пути  $v_2 = (D+d)/t$ , и фаза равна  $m(D+d)^2/2\hbar t$ . Следует считать, что  $d \ll D$ , так что  $v_1 \approx v_2$  (т. е. электрон имеет хорошо определенную скорость). Тогда дополнительная фаза для второго пути равна  $mDd/\hbar t \approx pd/\hbar$ , где  $p$  — импульс. Именно это мы и ожидали из соотношения де Бройля  $p = \hbar/\lambda$ . Похоже, мы на верном пути.

Для вычисления функционального интеграла в более общем виде следует определить символ  $\int \mathcal{D}x(t)$  в случае, когда число путей  $x(t)$  больше, чем два (на самом деле, когда их бесконечно много). Используем грубое определение с помощью дискретизации. Разобьем временной интервал от 0 до  $T$  на много маленьких кусочков длительностью  $\varepsilon$ , как показано на (рис. 9.2.) Аппроксимируем путь  $x(t)$  последовательностью прямолинейных участков, по одному для каждого маленького интервала времени. Действие для этого дискретизированного пути равно:

$$S = \int_0^T dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right) \rightarrow \sum_k \left[ \frac{m}{2} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\varepsilon} - \varepsilon V \left( \frac{x_{k+1} + x_k}{2} \right) \right].$$

Затем определяем интеграл по путям:

$$\int \mathcal{D}x(t) \equiv \frac{1}{C(\varepsilon)} \int \frac{dx_1}{C(\varepsilon)} \int \frac{dx_2}{C(\varepsilon)} \dots \int \frac{dx_{N-1}}{C(\varepsilon)} = \frac{1}{C(\varepsilon)} \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{C(\varepsilon)}, \quad (9.4)$$

где  $C(\varepsilon)$  — константа, которая будет определена ниже. (Мы включим по одному множителю  $C(\varepsilon)$  для каждого из  $N$  отрезков времени по причинам, которые станут ясны ниже.) В конце вычисления следует перейти к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ . (Как и в разделах 4.5 и 6.2, символ  $\prod$  означает краткую запись того, что указанное выражение нужно взять для каждого  $k$ .)

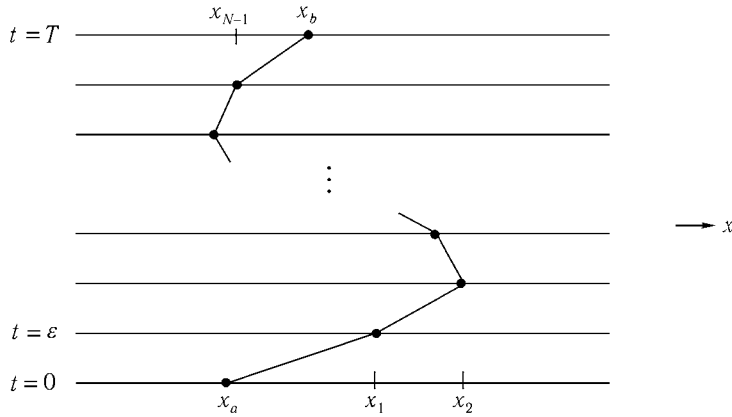


Рис. 9.2. Мы определяем интеграл по путям с помощью деления временного интервала на маленькие куски длительностью  $\epsilon$ , и затем интегрируем по координатам  $x_k$  на каждом отрезке.

Используя (9.4) как определение правой части (9.3), мы продемонстрируем справедливость выражения (9.3) для задачи о движении одной частицы в произвольном потенциальном поле. Для этого покажем, что левая и правая части (9.3) получаются интегрированием одного и того же дифференциального уравнения с одним и тем же начальным условием. Попутно мы определим константу  $C(\epsilon)$ .

Для вывода дифференциального уравнения, которому удовлетворяет (9.4), рассмотрим добавление самого последнего интервала времени на рис. 9.2. Согласно (9.3) и определению (9.4), мы должны иметь:

$$U(x_a, x_b; T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{C(\epsilon)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m(x_b - x')^2}{2\epsilon} - \frac{i}{\hbar} \epsilon V \left( \frac{x_b + x'}{2} \right) \right] U(x_a, x'; T - \epsilon).$$

Интеграл по  $x'$  как раз и есть вклад в  $\int \mathcal{D}x$  от последнего промежутка времени, а экспоненциальный множитель есть вклад этого промежутка в  $e^{iS/\hbar}$ . Все вклады от предшествующих отрезков времени содержатся в  $U(x_a, x'; T - \epsilon)$ . Как только мы устремляем  $\epsilon \rightarrow 0$ , быстрые осцилляции первого слагаемого в экспоненте ограничивают значения  $x'$  теми, которые очень близки к  $x_b$ . Следовательно, можно разложить это выражение по степеням  $(x' - x_b)$ :

$$U(x_a, x_b; T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{C} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\epsilon} (x_b - x')^2 \right) \left[ 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_b) + \dots \right] \times \quad (9.5)$$

$$\times \left[ 1 + (x' - x_b) \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{1}{2} (x' - x_b)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + \dots \right] U(x_a, x_b; T - \epsilon).$$

Теперь можно выполнить интегрирование по  $x'$ , поскольку интеграл имеет гауссов вид. (На самом деле, для сходимости следует ввести в показатель экспоненты малую вещественную добавку; но мы проигнорируем это слагаемое до следующего раздела, в котором будут выведены фейнмановские правила с помощью функциональных мето-

дов.) Напомним формулы для гауссовых интегралов:

$$\int d\xi e^{-b\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}, \quad \int d\xi \xi e^{-b\xi^2} = 0, \quad \int d\xi \xi^2 e^{-b\xi^2} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

Применяя эти выражения к (9.5), находим:

$$U(x_a, x_b; T) = \left( \frac{1}{C} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon}{-im}} \right) \left[ 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x_b) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] U(x_a, x_b, T-\varepsilon).$$

Это выражение не имеет никакого смысла в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если только множитель в круглых скобках не равен 1. Поэтому можно дать правильное определение для  $C$ :

$$C(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon}{-im}}. \quad (9.6)$$

С учетом этого определения можно собрать слагаемые одинакового порядка по  $\varepsilon$  и, умножив на  $i\hbar$ , получить:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial T} U(x_a, x_b; T) &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + V(x_b) \right] U(x_a, x_b; T) = \\ &= HU(x_a, x_b, T). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Это уравнение Шредингера. Однако легко показать, что оператор временной эволюции  $U$ , определенный в (9.1), удовлетворяет тому же уравнению.

При  $T \rightarrow 0$  левая часть (9.3) переходит в  $\delta(x_a - x_b)$ . Сравним это значение с величиной (9.4) в случае одного отрезка времени:

$$\frac{1}{C(\varepsilon)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m(x_b - x_a)^2}{2\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right].$$

Это как раз экспоненциальный пик (9.5), при  $\varepsilon \rightarrow 0$  он тоже стремится к  $\delta(x_a - x_b)$ . Таким образом, левая и правая стороны в (9.3) удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению с одним и тем же начальным условием. Отсюда мы заключаем, что определение оператора временной эволюции (9.1) с помощью гамильтониана и определение с помощью интеграла по путям (9.3) эквивалентны, по крайней мере в случае простой одномерной системы.

В заключение этого раздела, обобщим формулу для интеграла по путям на более сложные квантовые системы. Рассмотрим самую общую квантовую систему, описываемую произвольным набором координат  $q^i$ , сопряженных им импульсов  $p^i$ , и гамильтонианом  $H(q, p)$ . Мы дадим прямое доказательство формулы интеграла по путям для амплитуд перехода в этой системе.

Амплитуда перехода, которую мы хотели бы вычислить, имеет вид:

$$U(q_a, q_b; T) = \langle q_b | e^{-iHT} | q_a \rangle. \quad (9.8)$$

(Когда  $q$  или  $p$  не содержат надстрочного индекса, это означает весь набор координат  $\{q^i\}$  или импульсов  $\{p^i\}$ . Кроме того, для удобства мы положим  $\hbar = 1$ .) Чтобы записать амплитуду как функциональный интеграл, сначала разобьем временной интервал на  $N$  коротких кусков длительностью  $\varepsilon$ . Таким образом, можно написать

$$e^{-iHT} = e^{-iH\varepsilon} e^{-iH\varepsilon} e^{-iH\varepsilon} \dots e^{-iH\varepsilon} \quad (N \text{ множителей}).$$

Следующий трюк, состоит в том, чтобы вставить между каждым множителем полный набор промежуточных состояний в виде:

$$1 = \left( \prod_i \int dq_k^i \right) |q_k\rangle \langle q_k|.$$

Вставив такие множители для  $k = 1 \dots (N - 1)$ , получим произведение множителей вида

$$\langle q_{k+1} | e^{-iH\varepsilon} |q_k\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle q_{k+1} | (1 - iH\varepsilon + \dots) |q_k\rangle. \quad (9.9)$$

Чтобы записать первый и последний множители в такой форме, положим  $q_0 = q_a$  и  $q_N = q_b$ .

Теперь мы должны обратиться к  $H$  и рассмотреть, какого типа слагаемые он может содержать. Простейшим для вычислений было бы слагаемое, являющееся функцией только координат, но не импульсов. Матричный элемент такого слагаемого равен

$$\langle q_{k+1} | f(q) |q_k\rangle = f(q_k) \prod_i \delta(q_k^i - q_{k+1}^i).$$

По причинам, которые скоро станут очевидными, удобно переписать его в виде:

$$\langle q_{k+1} | f(q) |q_k\rangle = f\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}\right) \left( \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \right) \exp\left[ i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) \right].$$

Теперь рассмотрим слагаемое в гамильтониане, являющееся функцией только импульсов. Вводя полный набор собственных состояний импульса, получим:

$$\langle q_{k+1} | f(p) |q_k\rangle = \left( \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \right) f(p_k) \exp\left[ i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) \right].$$

Таким образом, если  $H$  содержит только слагаемые вида  $f(q)$  и  $f(p)$ , его матричный элемент может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1} | H(q, p) |q_k\rangle &= \\ &= \left( \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \right) H\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k\right) \exp\left[ i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) \right]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Было бы приятно, если бы (9.10) было верно, даже когда  $H$  содержит произведения  $p$  и  $q$ . В общем случае эта формула неправильна, поскольку порядок произведения  $pq$  влияет на вид левой части (где  $H$  — оператор), но не существенен в правой части (где  $H$  — просто функция чисел  $p_k$  и  $q_k$ ). Однако для одного частного случая упорядочения можно сохранить выражение (9.10). Например, комбинация

$$\langle q_{k+1} | \frac{1}{4} (q^2 p^2 + 2qp^2 q + p^2 q^2) |q_k\rangle = \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2} \right)^2 \langle q_{k+1} | p^2 |q_k\rangle$$

имеет желаемый вид, потому что  $q$  появляется симметрично в левой и правой частях. Когда такое случается, то говорят, что гамильтониан *упорядочен по Вейлю*. Любой гамильтониан может быть упорядочен по Вейлю путем коммутирования  $p$  и  $q$ ; в общем случае, такая процедура приводит к появлению добавочных слагаемых, которые должны возникнуть в правой части (9.10).

С этого места будем полагать, что  $H$  вейлевски упорядочен, и наш типичный матричный элемент из (9.9) может быть выражен как

$$\langle q_{k+1} | e^{-i\varepsilon H} | q_k \rangle = \left( \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \right) \exp \left[ -i\varepsilon H \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k \right) \right] \exp \left[ i \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) \right].$$

(Мы снова использовали то, что  $\varepsilon$  мало, когда заменяли  $1 - i\varepsilon H$  на  $e^{-i\varepsilon H}$ .) Для получения  $U(q_a, q_b; T)$  возьмем произведение  $N$  таких слагаемых, по одному для каждого  $k$ , и проинтегрируем по промежуточным координатам  $q_k$ :

$$U(q_0, q_N; T) = \left( \prod_{i,k} \int dq_k^i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \right) \times \exp \left[ i \sum_k \left( \sum_i p_k^i (q_{k+1}^i - q_k^i) - \varepsilon H \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, p_k \right) \right) \right]. \quad (9.11)$$

Возникает один интеграл по импульсам для каждого  $k$  от 1 до  $N$  и один интеграл по координатам для каждого  $k$  от 1 до  $N - 1$ . Поэтому это выражение является дискретизированной формой записи выражения

$$U(q_a, q_b; T) = \left( \prod_i \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \right) \exp \left[ i \int_0^T dt \left( \sum_i p^i \dot{q}^i - H(q^i, p^i) \right) \right], \quad (9.12)$$

где функции  $q(t)$  закреплены в конечных точках, а функции  $p(t)$  — нет. Заметим, что мера интегрирования  $\mathcal{D}q$  не содержит никакой специфической константы, как это было в (9.4). Функциональная мера в (9.12) есть в точности произведение стандартных интегралов по фазовому пространству

$$\prod_i \int \frac{dq^i dp^i}{2\pi\hbar}$$

в каждый момент времени. Выражение (9.12) — наиболее общая формула для вычисления амплитуд перехода с помощью функциональных интегралов.

Для нерелятивистской частицы гамильтониан:  $H = p^2/2m + V(q)$ . В этом случае можно точно взять интегралы по  $p$  (показатель экспоненты квадратичен):

$$\int \frac{dp_k}{2\pi} \exp \left[ i(p_k(q_{k+1} - q_k) - \varepsilon p_k^2/2m) \right] = \frac{1}{C(\varepsilon)} \exp \left[ \frac{im}{2\varepsilon} (q_{k+1} - q_k)^2 \right],$$

где  $C(\varepsilon)$  — тот же фактор, что и в (9.6). Обратим внимание, что возникает по одному такому множителю для каждого отрезка времени. Таким образом, мы воспроизводим выражение (9.3) в дискретной форме, включая правильные множители  $C$ :

$$U(q_a, q_b; T) = \left( \frac{1}{C(\varepsilon)} \prod_k \int \frac{dq_k}{C(\varepsilon)} \right) \exp \left[ i \sum_k \left( \frac{m}{2} \frac{(q_{k+1} - q_k)^2}{\varepsilon} - \varepsilon V \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2} \right) \right) \right]. \quad (9.13)$$

## 9.2. Функциональное квантование скалярных полей

В этом разделе мы применим формализм функционального интеграла к квантовой теории вещественного скалярного поля  $\phi(x)$ . Нашей целью является получение правил Фейнмана для этой теории непосредственно из выражений для функционального интеграла.

Общая формула для функционального интеграла (9.12), выведенная в предшествующем разделе, справедлива для любой квантовой системы, в том числе и для квантовой теории поля. В случае вещественного скалярного поля координаты  $q^i$  есть полевые амплитуды  $\phi(\mathbf{x})$ , а гамильтониан равен

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right].$$

Поэтому формула принимает вид:

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left[ i \int_0^T d^4x \left( \pi \dot{\phi} - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right) \right],$$

где функции  $\phi(x)$ , по которым проводится интегрирование, ограничены конкретными конфигурациями  $\phi_a(\mathbf{x})$  при  $x^0 = 0$  и  $\phi_b(\mathbf{x})$  при  $x^0 = T$ . Так как показатель экспоненты квадратичен по  $\pi$ , можно выделить полный квадрат и взять интеграл по  $\mathcal{D}\pi$ , так что

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_0^T d^4x \mathcal{L} \right], \quad (9.14)$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)$$

— плотность лагранжиана. Мера интегрирования  $\mathcal{D}\phi$  в (9.14) снова включает отвратительную константу, которую мы явно не выписываем.

Интегрирование по времени в показателе экспоненты (9.14) производится от 0 до  $T$ , что определяется выбором той функции перехода, которую мы хотим вычислить; во всех остальных отношениях эта формула явно лоренц-инвариантна. Любые другие симметрии, которыми может обладать лагранжиан, также явно сохраняются функциональным интегралом. В процессе изучения квантовой теории поля симметрии и связанные с ними законы сохранения будут играть все большую роль. Поэтому мы предлагаем сделать решительный шаг — отказаться от гамильтонового формализма и взять выражения (9.14) за *определение* гамильтоновой динамики. Любая такая формула соответствует некоторому гамильтониану; чтобы найти его, всегда можно продифференцировать по  $T$  и вывести уравнение Шредингера, как в предыдущем разделе. Таким образом, мы рассматриваем лагранжиан  $\mathcal{L}$  как самую фундаментальную величину в квантовой теории поля. Далее мы увидим, что можно использовать функциональный интеграл для расчетов, непосредственно исходя из знания  $\mathcal{L}$ , и совсем не вводить гамильтониан.

### Корреляционные функции

Чтобы использовать функциональный интеграл, нам нужна функциональная формула для вычисления корреляционных функций. Чтобы найти такое выражение, рассмотрим объект

$$\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1)\phi(x_2) \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}(\phi) \right], \quad (9.15)$$

где граничные условия в интеграле по путям имеют вид:  $\phi(-T, \mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x})$  и  $\phi(T, \mathbf{x}) = \phi_b(\mathbf{x})$  для заданных  $\phi_a, \phi_b$ . Свяжем эту величину с двухточечной корреляционной функцией  $\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle$ . (Чтобы отличать операторы от обычных чисел, пишем операторы в представлении Гейзенберга с явным подстрочным индексом  $\phi_H(x)$ . Аналогично, для оператора в представлении Шредингера пишем  $\phi_S(x)$ .) Сначала разобьем функциональный интеграл (9.15) следующим образом:

$$\int \mathcal{D}\phi(x) = \int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x}) \int_{\substack{\phi(x_1^0, \mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi(x_2^0, \mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x})}} \mathcal{D}\phi(x). \quad (9.16)$$

Основной функциональный интеграл  $\int \mathcal{D}\phi(x)$  теперь ограничен временами  $x_1^0$  и  $x_2^0$  (дополнительно к конечным точкам  $-T$  и  $T$ ), но мы должны отдельно проинтегрировать по промежуточным конфигурациям  $\phi_1(\mathbf{x})$  и  $\phi_2(\mathbf{x})$ . После такого разложения добавочные множители  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_2)$  в (9.15) превращаются в  $\phi_1(\mathbf{x}_1)$  и  $\phi_2(\mathbf{x}_2)$  и могут быть вынесены из-под знака основного интеграла. После этого основной интеграл разбивается на три части, каждая из которых согласно формуле (9.14) является простой амплитудой перехода. Времена  $x_1^0$  и  $x_2^0$  автоматически упорядочиваются; например, если  $x_1^0 < x_2^0$ , выражение (9.15) принимает вид:

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}_1) \phi_2(\mathbf{x}_2) \langle \phi_b | e^{-iH(T-x_2^0)} | \phi_2 \rangle \times \\ \times \langle \phi_2 | e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-iH(x_1^0+T)} | \phi_a \rangle.$$

Можно заменить поле  $\phi_1(\mathbf{x}_1)$  на шредингеровский оператор с помощью равенства  $\phi_S(\mathbf{x}_1) | \phi_1 \rangle = \phi_1(\mathbf{x}_1) | \phi_1 \rangle$ . Соотношение полноты  $\int \mathcal{D}\phi_1 | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | = \mathbf{1}$  позволяет затем устранить промежуточные состояния  $|\phi_1\rangle$ . Аналогичные манипуляции над  $\phi_2$  приводят к выражению:

$$\langle \phi_b | e^{-iH(T-x_2^0)} \phi_S(\mathbf{x}_2) e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} \phi_S(\mathbf{x}_1) e^{-iH(x_1^0+T)} | \phi_a \rangle.$$

Большинство экспоненциальных множителей могут быть скомбинированы со шредингеровскими операторами, превращаясь в гейзенберговские операторы. В случае  $x_1^0 > x_2^0$  просто нужно поменять порядок  $x_1$  и  $x_2$ . Таким образом, выражение (9.15) равно:

$$\langle \phi_b | e^{-iHT} T \{ \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \} e^{-iHT} | \phi_a \rangle. \quad (9.17)$$

Это выражение почти совпадает с двухточечной корреляционной функцией. Чтобы сделать это совпадение еще более точным, перейдем к пределу  $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$ . Как и в разделе 4.2, благодаря этому трюку происходит проектирование состояний  $|\phi_a\rangle$  и  $|\phi_b\rangle$  на вакуумное состояние  $|\Omega\rangle$  (подразумевается, что эти состояния имеют некоторое перекрытие с  $|\Omega\rangle$ ). Например, разложив  $|\phi_a\rangle$  по собственным состояниям  $|n\rangle$  оператора  $H$ , имеем:

$$e^{-iHT} | \phi_a \rangle = \sum_n e^{-iE_n T} | n \rangle \langle n | \phi_a \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \Omega | \phi_a \rangle e^{-iE_0 \cdot \infty(1-i\epsilon)} | \Omega \rangle.$$

Как и в разделе 4.2, мы получили некоторую страшную фазу и перекрывающиеся множители. Но эти множители исчезнут, если разделить на такую же величину, что



и (9.15), но без двух добавочных полей  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_2)$ . Таким образом, приходим к простой формуле:

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}. \quad (9.18)$$

Именно ее мы и хотели получить для выражения корреляционной функции через функциональные интегралы. Для корреляционных функций более высоких порядков нужно просто включить дополнительные множители  $\phi$  с обеих сторон.

### Фейнмановские правила

Следующей задачей будет вычисление произвольных корреляционных функций непосредственно из правой части формулы (9.18). Другими словами, мы будем использовать (9.18) для вывода фейнмановских правил в скалярной теории поля. Начнем с вычисления двухточечной функции в свободной теории Клейна–Гордона, затем произведем обобщение на высшие корреляционные функции в свободной теории. Наконец, рассмотрим теорию  $\phi^4$ , в которой можно выполнить разложение по теории возмущений для получения тех же фейнмановских правил, что и в разделе 4.4.

Рассмотрим сначала невзаимодействующее вещественнозначное скалярное поле:

$$S_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0 = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (9.19)$$

Поскольку  $\mathcal{L}_0$  квадратичен по  $\phi$ , функциональные интегралы в (9.18) принимают форму обобщенных бесконечномерных гауссовых интегралов. Поэтому их можно точно вычислить.

Так как это наше первое вычисление функционального интеграла, проделаем его очень подробно, хотя и некрасивым способом. Сначала следует определить интеграл  $\mathcal{D}\phi$  по полевым конфигурациям. Для этого используем метод (9.4), рассматривая континуальный интеграл как предел большого, но конечного числа интегралов. Таким образом, мы заменяем переменные  $\phi(x)$ , определенные на континууме точек, переменными  $\phi(x_i)$ , определенными в точках  $x_i$  квадратной решетки. Пусть шаг решетки равен  $\epsilon$ , а объем четырехмерного пространства-времени —  $L^4$ . Определим

$$\mathcal{D}\phi = \prod_i d\phi(x_i) \quad (9.20)$$

с точностью до несущественного общего множителя.

Значения полей  $\phi(x_i)$  могут быть представлены дискретным рядом Фурье:

$$\phi(x_i) = \frac{1}{V} \sum_n e^{-ik_n \cdot x_i} \phi(k_n), \quad (9.21)$$

где  $k_n^\mu = 2\pi n^\mu / L$ , с целыми  $n^\mu$ ,  $|n^\mu| < \pi/\epsilon$ , и  $V = L^4$ . Коэффициенты Фурье  $\phi(k)$  комплексны. Однако  $\phi(x)$  вещественно, поэтому коэффициенты должны удовлетворять ограничению  $\phi^*(k) = \phi(-k)$ . Будем рассматривать вещественную и мнимую части  $\phi(k_n)$  с  $k_n^0 > 0$  как независимые переменные. Переход от переменных  $\phi(x_i)$  к новым переменным  $\phi(k_n)$  является унитарным преобразованием, поэтому можно переписать интеграл как

$$\mathcal{D}\phi(x) = \prod_{k_n^0 > 0} d\text{Re} \phi(k_n) d\text{Im} \phi(k_n).$$

Позже мы перейдем к пределу  $L \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Результатом такого перехода будет преобразование дискретных, конечных сумм по  $k_n$  в непрерывный интеграл по  $k$ :

$$\frac{1}{V} \sum_n \rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (9.22)$$

Ниже этот предельный переход воспроизведет фейнмановскую теорию возмущений в той же форме, что и в части I. Мы не будем устранять инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости фейнмановских диаграмм, с которыми столкнулись в гл. 6, но функциональный интеграл по крайней мере не вводит никаких новых типов сингулярного поведения.

Определив меру интегрирования, вычислим теперь функциональный интеграл по  $\phi$ . Действие (9.19) может быть переписано через фурье-компоненты

$$\begin{aligned} \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] &= -\frac{1}{V} \sum_n \frac{1}{2} (m^2 - k_n^2) |\phi(k_n)|^2 = \\ &= -\frac{1}{V} \sum_{k_n^0 > 0} (m^2 - k_n^2) [(\operatorname{Re} \phi_n)^2 + (\operatorname{Im} \phi_n)^2], \end{aligned}$$

где для краткости во второй строке  $\phi(k_n)$  записано как  $\phi_n$ . Величина  $(m^2 - k_n^2) = (m^2 + |\mathbf{k}_n|^2 - k_n^{02})$  положительна, пока  $k_n^0$  не слишком велико. Далее мы будем обращаться с этой величиной так, как если бы она была положительной. Более точно, мы вычисляем ее путем аналитического продолжения из области, где  $|\mathbf{k}_n| > k_n^0$ .

Знаменатель в формуле (9.18) приобретает теперь форму произведения гауссовых интегралов:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0} &= \left( \prod_{k_n^0 > 0} \int d\operatorname{Re} \phi_n d\operatorname{Im} \phi_n \right) \exp \left[ -\frac{i}{V} \sum_{n|k_n^0 > 0} (m^2 - k_n^2) |\phi_n|^2 \right] = \\ &= \prod_{k_n^0 > 0} \left( \int d\operatorname{Re} \phi_n \exp \left[ -\frac{i}{V} (m^2 - k_n^2) (\operatorname{Re} \phi_n)^2 \right] \right) \times \\ &\quad \times \left( \int d\operatorname{Im} \phi_n \exp \left[ -\frac{i}{V} (m^2 - k_n^2) (\operatorname{Im} \phi_n)^2 \right] \right) = \\ &= \prod_{k_n^0 > 0} \sqrt{\frac{-i\pi V}{m^2 - k_n^2}} \sqrt{\frac{-i\pi V}{m^2 - k_n^2}} = \prod_{\text{все } k_n} \sqrt{\frac{-i\pi V}{m^2 - k_n^2}}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Для оправдания использования формул для гауссовых интегралов в ситуации, когда показатель экспоненты является чисто мнимым, вспомним, что интегрирование по времени в (9.18) идет вдоль контура, повернутого по часовой стрелке в комплексной плоскости  $t \rightarrow t(1 - i\varepsilon)$ . Это означает, что мы должны заменить  $k^0 \rightarrow k^0(1 + i\varepsilon)$  в (9.21) и во всех последующих уравнениях; в частности, мы должны заменить  $(k^2 - m^2) \rightarrow (k^2 - m^2 + i\varepsilon)$ . Добавка  $i\varepsilon$  приводит к появлению необходимого для сходимости гауссовых интегралов множителя. Эта же добавка определяет направление аналитического продолжения, которое может понадобиться при определении квадратных корней в (9.23).

Для понимания результата (9.23) рассмотрим аналогию с гауссовым интегралом общего вида:

$$\left( \prod_k \int d\xi_k \right) \exp[-\xi_i B_{ij} \xi_j],$$

где  $B$  — симметричная матрица с собственными значениями  $b_i$ . Для вычисления этого интеграла записываем  $\xi_i = O_{ij}x_j$ , где  $O$  — ортогональная матрица из собственных векторов, которая диагонализует  $B$ . Заменяя переменные  $\xi_i$  на  $x_i$ , имеем:

$$\begin{aligned} \left( \prod_k \int d\xi_k \right) \exp[-\xi_i B_{ij} \xi_j] &= \left( \prod_k \int dx_k \right) \exp\left[-\sum_i b_i x_i^2\right] = \\ &= \prod_i \left( \int dx_i \exp[-b_i x_i^2] \right) = \\ &= \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{b_i}} = \\ &= \text{const} \times [\det B]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Аналогия более ясна, если мы, выполнив интегрирование по частям, запишем действие Клейна–Гордона как

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \phi (-\partial^2 - m^2) \phi + (\text{поверхностное слагаемое}).$$

Следовательно, матрица  $B$  соответствует оператору  $(m^2 + \partial^2)$ , и можно формально записать результат как

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0} = \text{const} \times [\det(m^2 + \partial^2)]^{-1/2}. \quad (9.25)$$

Получившийся объект называется *функциональным детерминантом*. Фактически результат (9.23) кажется плохо определенным, но на самом деле все множители в (9.18) сократятся. Однако во многих случаях функциональный детерминант сам по себе имеет физическое значение. Примеры этого мы увидим в разделах 9.5 и 11.4.

Сейчас рассмотрим числитель формулы (9.18). Нам потребуется разложение Фурье двух добавочных полей  $\phi$ :

$$\phi(x_1)\phi(x_2) = \frac{1}{V} \sum_m e^{-ik_m \cdot x_1} \phi_m \frac{1}{V} \sum_l e^{-ik_l \cdot x_2} \phi_l.$$

Таким образом, числитель равен:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^2} \sum_{m,l} e^{-i(k_m \cdot x_1 + k_l \cdot x_2)} &\left( \prod_{n|k_n^0 > 0} \int d\text{Re } \phi_n d\text{Im } \phi_n \right) \times \\ &\times (\text{Re } \phi_m + i \text{Im } \phi_m)(\text{Re } \phi_l + i \text{Im } \phi_l) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{i}{V} \sum_{n|k_n^0 > 0} (m^2 - k_n^2) [(\text{Re } \phi_n)^2 + (\text{Im } \phi_n)^2]\right]. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Для большинства значений  $k_m$  и  $k_l$  это выражение равно нулю, поскольку дополнительные множители  $\phi$  делают подынтегральное выражение нечетным. Ситуация более сложна, когда  $k_m = \pm k_l$ . Например, предположим, что  $k_m^0 > 0$ . Тогда, если  $k_l = +k_m$ , слагаемое, содержащее  $(\text{Re } \phi_m)^2$ , не равно нулю, но в точности сокращается со слагаемым, содержащим  $(\text{Im } \phi_m)^2$ . Однако, если  $k_l = -k_m$ , соотношение  $\phi(-k) = \phi^*(k)$

приводит к добавочному знаку минус в слагаемом  $(\text{Im } \phi_m)^2$ , так что оба слагаемых складываются. Когда  $k_m^0 < 0$ , получаем такое же выражение, так что числитель равен:

$$\text{Числитель} = \frac{1}{V^2} \sum_m e^{-ik_m \cdot (x_1 - x_2)} \left( \prod_{k_n^0 > 0} \frac{-i\pi V}{m^2 - k_n^2} \right) \frac{-iV}{m^2 - k_m^2 - i\varepsilon}.$$

Множитель в скобках идентичен знаменателю в (9.23), в то время как остальная часть выражения является дискретной формой фейнмановского пропагатора. Переходя к непрерывному пределу (9.22), находим:

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = D_F(x_1 - x_2). \quad (9.27)$$

Это совершенно правильное выражение, включая  $+i\varepsilon$ .

Теперь вычислим высшие корреляционные функции в свободной теории Клейна–Гордона.

Вставляя добавочный множитель  $\phi$  в (9.18), видим, что трехточечная функция равна нулю, потому что числитель подынтегрального выражения нечетен. Все другие нечетные корреляционные функции исчезают по той же причине.

Четырехточечная корреляционная функция имеет четыре множителя  $\phi$  в числителе. Разложив поля в ряды Фурье, мы получим выражение, подобное (9.26), но с четверной суммой по индексам, которые мы назовем  $m, l, p, \text{ и } q$ . Подынтегральное выражение содержит произведение

$$(\text{Re } \phi_m + i \text{Im } \phi_m)(\text{Re } \phi_l + i \text{Im } \phi_l)(\text{Re } \phi_p + i \text{Im } \phi_p)(\text{Re } \phi_q + i \text{Im } \phi_q).$$

Опять большинство слагаемых обращается в нуль из-за нечетности. Одно из ненулевых слагаемых возникает, когда  $k_l = -k_m$  и  $k_q = -k_p$ . После взятия гауссовых интегралов это слагаемое в числителе равно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V^4} \sum_{m,p} e^{-ik_m \cdot (x_1 - x_2)} e^{-ik_p \cdot (x_3 - x_4)} \times \\ & \times \left( \prod_{n|k_n^0 > 0} \frac{-i\pi V}{m^2 - k_n^2} \right) \frac{-iV}{m^2 - k_m^2 - i\varepsilon} \frac{-iV}{m^2 - k_p^2 - i\varepsilon} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \left( \prod_{n|k_n^0 > 0} \frac{-i\pi V}{m^2 - k_n^2} \right) D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4). \end{aligned}$$

Множитель в скобках опять сокращается со знаменателем. Аналогичные слагаемые получаем для каждого из двух других способов группирования четырех импульсов по парам. Чтобы проследить за способом группирования, определим *спаривание* двух полей:

$$\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0} \phi(x_1) \phi(x_2)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0}} = D_F(x_1 - x_2). \quad (9.28)$$

Тогда четырехточечная функция равна

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle &= \text{сумма всех полных спариваний} = \\ &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + \\ &+ D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + \\ &+ D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3), \end{aligned} \quad (9.29)$$

Точно такое же выражение мы получили, используя теорему Вика в соотношении (4.40).

Такой же метод позволяет вычислять высшие корреляционные функции. В каждом случае ответ является именно суммой всех возможных полных спариваний полей. Этот результат, тождественный полученному по теореме Вика в разделе 4.3, возникает здесь из простых правил взятия гауссовых интегралов.

Теперь мы готовы перейти от свободной теории Клейна–Гордона к теории  $\phi^4$ . Добавим в  $\mathcal{L}_0$  взаимодействие  $\phi^4$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Допустим, что  $\lambda$  мало, тогда можно осуществить разложение:

$$\exp \left[ i \int d^4 x \mathcal{L} \right] = \exp \left[ i \int d^4 x \mathcal{L}_0 \right] \left( 1 - i \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots \right).$$

Раскладывая и числитель, и знаменатель (9.18), видим, что (помимо постоянного общего множителя (9.23), который опять сократится) каждое слагаемое можно выразить через корреляционные функции свободного поля. Более того, поскольку  $i \int d^3 x \mathcal{L}_{\text{int}} = -i H_{\text{int}}$ , мы получаем точно такое же выражение, как и в (4.31). Можно представить и числитель, и знаменатель как вклады фейнмановских диаграмм с фундаментальным взаимодействием, задаваемым опять с помощью вершины

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p). \quad (9.30)$$

Вся комбинаторика совпадает с проделанной в разделе 4.4. В частности, несвязные вакуумные диаграммы-пузыри экспоненцируются, объединяются в общий множитель в числителе (9.18) и сокращаются со знаменателем, как и происходило в (4.31).

Правила для вклада вершин в теории  $\phi^4$  чрезвычайно просто следуют из вида лагранжиана. Оказывается, что эта простая процедура верна и для других квантовых теорий. Если правильно понять квадратичные слагаемые в лагранжиане и вычислить пропагаторы, то вершины могут быть непосредственно прочитаны из лагранжиана как коэффициенты перед кубическим слагаемым и слагаемыми высшего порядка.

### Функциональные производные и производящий функционал

В завершение этого раздела введем более формальный метод вычисления корреляционных функций. Этот метод, основанный на величине, называемой *производящим функционалом*, позволяет обойтись без неудобного фурье-разложения, использованного в предыдущем выводе.

Сначала определим *функциональную производную*  $\delta/\delta J(x)$ . Функциональная производная в четырех измерениях удовлетворяет основной аксиоме:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x - y) \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y J(y) \phi(y) = \phi(x). \quad (9.31)$$

Это определение есть естественное обобщение на непрерывные функции правил для обычных дискретных векторов,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_j k_j = k_i.$$

Чтобы вычислять производные от более сложных функционалов, мы просто используем обычные правила вычисления производных от сложных функций. Например,

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[ i \int d^4 y J(y) \phi(y) \right] = i \phi(x) \exp \left[ i \int d^4 y J(y) \phi(y) \right]. \quad (9.32)$$

Когда функционал зависит от производной по  $J$ , мы, перед тем, как взять функциональную производную, сначала интегрируем по частям:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y \partial_\mu J(y) V^\mu(y) = -\partial_\mu V^\mu(x). \quad (9.33)$$

Основным объектом этого формализма является *производящий функционал* для корреляционных функций  $Z[J]$ . (Некоторые авторы обозначают его  $W[J]$ .) В скалярной теории поля  $Z[J]$  определяется как

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4 x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right]. \quad (9.34)$$

Это функциональный интеграл по  $\phi$ , в котором мы в показателе экспоненты добавляем к  $\mathcal{L}$  источник  $J(x)\phi(x)$ .

Корреляционные функции в теории поля Клейна–Гордона могут быть вычислены простым взятием функциональных производных от производящего функционала. Например, двухточечная функция равна:

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{Z_0} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (9.35)$$

где  $Z_0 = Z[J = 0]$ . Каждая функциональная производная опускает вниз множитель  $\phi$  в числителе  $Z[J]$ ; полагая  $J = 0$ , мы возвращаемся к выражению (9.18). Для вычисления высших корреляционных функций просто следует взять больше функциональных производных.

Формула (9.35) полезна, поскольку в свободной теории поля  $Z[J]$  можно переписать в явном виде. Рассмотрим показатель (9.34) в свободной теории Клейна–Гордона. Интегрируя по частям, получаем:

$$\int d^4 x [\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi] = \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} \phi (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon) \phi + J\phi \right]. \quad (9.36)$$

(Множитель  $i\varepsilon$  введен для сходимости функционального интеграла, как обсуждалось выше в (9.23).) Мы можем выделить полный квадрат, введя сдвинутое поле

$$\phi'(x) \equiv \phi(x) - i \int d^4 y D_F(x-y) J(y).$$

Используя эту подстановку и тот факт, что  $D_F$  есть функция Грина оператора Клейна–Гордона, находим, что формула (9.36) принимает вид:

$$\begin{aligned} \int d^4 x [\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi] &= \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} \phi' (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon) \phi' - \right. \\ &\quad \left. - \int d^4 x d^4 y \frac{1}{2} J(x) (-i D_F)(x, y) J(y) \right]. \end{aligned}$$

Более символично можно представить замену переменных как

$$\phi' \equiv \phi + (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} J, \quad (9.37)$$

и результат имеет вид:

$$\int d^4 x [\mathcal{L}_0(\phi) + J\phi] = \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} \phi' (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon) \phi' - \frac{1}{2} J (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} J \right]. \quad (9.38)$$

Теперь произведем замену переменных  $\phi$  на  $\phi'$  в функциональном интеграле (9.34). Это простой сдвиг, поэтому якобиан преобразования равен 1. В результате

$$\int \mathcal{D}\phi' \exp \left[ i \int d^4 x \mathcal{L}_0(\phi') \right] \exp \left[ -i \int d^4 x d^4 y \frac{1}{2} J(x) [-iD_F(x-y)] J(y) \right].$$

Второй экспоненциальный множитель не зависит от  $\phi'$ , в то время как остающийся интеграл по  $\phi'$  есть в точности  $Z_0$ . Таким образом, производящий функционал свободной теории Клейна–Гордона есть просто

$$Z[J] = Z_0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) D_F(x-y) J(y) \right]. \quad (9.39)$$

Используем (9.39) и (9.35) для вычисления нескольких корреляционных функций. Двухточечная корреляционная функция равна

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= \\ &= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) D_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0} = \\ &= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[ -\frac{1}{2} \int d^4 y D_F(x_2-y) J(y) - \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2} \int d^4 x J(x) D_F(x-x_2) \right] Z[J] \Big|_{J=0} = D_F(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Взятие одной функциональной производной приводит к двум одинаковым слагаемым; вторая производная дает несколько слагаемых, но при  $J = 0$  выживает только то из них, которое получено действием на внешний множитель.

Полезно вычислить этим методом четырехточечную функцию. Чтобы вычисления не занимали слишком много места, введем сокращенные обозначения:  $\phi_1 \equiv \phi(x_1)$ ,  $J_x \equiv J(x)$ ,  $D_{x_4} \equiv D_F(x-x_4)$  и т. д. По повторяющимся индексам подразумевается интегрирование. Четырехточечная функция равна:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle &= \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \frac{\delta}{\delta J_3} [-J_x D_{x_4}] e^{-\frac{1}{2} J_x D_{x_y} J_y} \Big|_{J=0} = \\ &= \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} [-D_{34} + J_x D_{x_4} J_y D_{y3}] e^{-\frac{1}{2} J_x D_{x_y} J_y} \Big|_{J=0} = \\ &= \frac{\delta}{\delta J_1} [D_{34} J_x D_{x_2} + D_{24} J_y D_{y3} + J_x D_{x_4} D_{23}] e^{-\frac{1}{2} J_x D_{x_y} J_y} \Big|_{J=0} = \\ &= D_{34} D_{12} + D_{24} D_{13} + D_{14} D_{23}, \end{aligned} \quad (9.41)$$

в согласии с (9.29). Правила дифференцирования экспоненты порождают знакомую картину. Получается одно слагаемое для каждого возможного способа спаривания четырех точек в пары с множителем  $D_F$  для каждого спаривания.

Метод функционального интеграла, только что использованный для конструирования корреляционных функций в свободной теории поля, может быть с успехом использован и для представления корреляционных функций в теории поля со взаимодействием. Формула (9.35) не зависит от того, рассматривается ли свободная теория или теория со взаимодействием. В случае теории поля со взаимодействием множитель  $Z[J = 0]$  нетривиален, но он приводится к знаменателю в (9.18), то есть к сумме вакуумных диаграмм. Кроме того, в этом подходе комбинаторика, связанная с вычислением корреляционных функций, та же, что и в разделе 4.4.

### 9.3. Аналогия между квантовой теорией поля и статистической механикой

Прервем рассмотрение технических аспектов и обсудим некоторые приложения выведенных нами формул. Сначала суммируем формальные выводы предшествующего раздела. Для теории поля с лагранжианом  $\mathcal{L}$  производящий функционал корреляционных функций есть

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right]. \quad (9.42)$$

Переменная времени в интеграле, который находится в экспоненте, изменяется в пределах от  $-T$  до  $T$ , причем  $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ . Корреляционная функция, например (9.18), получается путем вычисления выражения

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = Z[J]^{-1} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (9.43)$$

Производящий функционал (9.42) напоминает статистическую сумму из статистической механики. Он обладает той же общей структурой интеграла по всем возможным конфигурациям с экспоненциальным статистическим весом. Источник  $J(x)$  играет роль внешнего поля. Фактически наш метод вычисления корреляционных функций дифференцированием по  $J(x)$  похож на часто используемый в статистической механике прием для вычисления корреляционных функций дифференцированием по таким переменным, как, например, давление или магнитное поле.

Эта аналогия может быть сделана еще более точной с помощью манипулирования временной переменной интегрирования в (9.42). Вывод формулы для функционального интеграла подразумевал, что интегрирование по времени немного смещено в комплексную плоскость и производится по контуру, повернутому по часовой стрелке к мнимой оси. Мы уже отмечали при обсуждении после формулы (9.23), что исходное инфинитезимальное вращение дает правильное  $i\varepsilon$ -предписание для получения фейнмановского пропагатора. Конечное вращение в конфигурационном пространстве аналогично повороту Вика временной компоненты импульса, показанному на рис. 6.1. Подобно повороту Вика в интеграле по импульсам, поворот Вика временной координаты  $t \rightarrow -ix^0$  приводит к евклидовому скалярному произведению 4-векторов:

$$x^2 = t^2 - |\mathbf{x}|^2 \rightarrow -(x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2 = -|x_E|^2. \quad (9.44)$$



Манипулируя выражениями для каждой фейнмановской диаграммы, можно показать, что аналитическое продолжение временных переменных в любой функции Грина квантовой теории поля делает корреляционную функцию инвариантной относительно вращений в четырехмерном евклидовом пространстве. Поворот Вика, осуществленный в функциональном интеграле, демонстрирует тот же вывод более общим способом.

Чтобы понять, чего мы достигли этим вращением, рассмотрим пример теории  $\phi^4$ . Действие для теории  $\phi^4$  с источниками равно

$$\int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) = \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi \right]. \quad (9.45)$$

После поворота Вика (9.44) это выражение принимает вид:

$$i \int d^4x_E (\mathcal{L}_E - J\phi) = i \int d^4x_E \left[ \frac{1}{2}(\partial_{E\mu}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - J\phi \right]. \quad (9.46)$$

Оно идентично по форме выражению (8.8) для свободной энергии Гиббса ферромагнетика в теории Ландау. Поле  $\phi(x_E)$  играет роль флуктуирующего спинового поля  $s(\mathbf{x})$ , а источник  $J(\mathbf{x})$  играет роль внешнего магнитного поля. Заметим, что ферромагнетик теперь рассматривается не в трех, а в четырех пространственных измерениях.

Подвергнутый повороту Вика производящий функционал  $Z[J]$  принимает вид:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ - \int d^4x_E (\mathcal{L}_E - J\phi) \right]. \quad (9.47)$$

Функционал  $\mathcal{L}_E[\phi]$  имеет форму энергии: он ограничен снизу и становится большим, когда поле  $\phi$  имеет большую амплитуду или большие градиенты. Следовательно, экспонента является разумной формой статистического веса для флуктуаций  $\phi$ . В этой новой форме  $Z[J]$  есть в точности статистическая сумма, описывающая статистическую механику макроскопической системы, которая приближенно описывается флуктуирующей переменной, рассматриваемой как непрерывное поле.

После поворота Вика функция Грина для  $\phi(x_E)$  может быть вычислена из функционального интеграла (9.47) точно так же, как в предыдущем разделе вычислялась функция Грина в пространстве Минковского. В свободной теории ( $\lambda = 0$ ) манипуляции, аналогичные тем, которые привели к (9.27) или (9.40), дают корреляционную функцию поля  $\phi$  в виде:

$$\langle \phi(x_{E1})\phi(x_{E2}) \rangle = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_E \cdot (x_{E1} - x_{E2})}}{k_E^2 + m^2}. \quad (9.48)$$

Это как раз фейнмановский пропагатор, вычисленный в пространственноподобной области; в согласии с (2.52), эта функция спадает как  $\exp(-m|x_{E1} - x_{E2}|)$ . Такое поведение есть четырехмерный аналог спиновой корреляционной функции (8.15). Мы видим, что при евклидовом продолжении функций Грина теории поля комптоновская длина волны кванта  $m^{-1}$  становится корреляционной длиной статистических флуктуаций.

Это соответствие между квантовой теорией поля и статистической механикой будет играть важную роль в нескольких следующих главах. В сущности, оно добавляет к нашим запасам знаний совершенно новый источник интуитивных представлений о том, как могут себя вести средние значения в теории поля. Такая интуиция будет полезна для представления общих свойств петлевых диаграмм, и, как мы уже обсуждали в главе 8, даст возможность правильно понять роль ультрафиолетовых расходимостей при вычислениях в теории поля. В главе 13 мы увидим, что и теория поля может вносить вклад в статистическую механику, приводя на основании свойств фейнмановских диаграмм к глубоким предсказаниям о поведении термодинамических систем.

## 9.4. Квантование электромагнитного поля

В разделе 4.8 мы сформулировали без доказательства фейнмановское правило для фотонного пропагатора:

$$\text{wavy line} \xrightarrow{k} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (9.49)$$

Теперь, когда в нашем распоряжении есть метод квантования с помощью функциональных интегралов, применим его для вывода этого выражения.

Рассмотрим функциональный интеграл

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}, \quad (9.50)$$

где  $S[A]$  — действие свободного электромагнитного поля. (Функциональный интеграл берется по каждой из четырех компонент:  $\mathcal{D}A \equiv \mathcal{D}A^0 \mathcal{D}A^1 \mathcal{D}A^2 \mathcal{D}A^3$ .) Интегрируя по частям и раскладывая поле в интеграл Фурье, можно записать действие как

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k). \end{aligned} \quad (9.51)$$

Это выражение обращается в нуль, когда  $\tilde{A}_\mu(k) = k_\mu \alpha(k)$  при любой скалярной функции  $\alpha(k)$ . Для такого большого набора полевых конфигураций подынтегральное выражение в (9.50) равно 1, поэтому функциональный интеграл сильно расходится (нет гауссового подавления). Эквивалентно, уравнение

$$\begin{aligned} (\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) D_F^{\nu\rho}(x-y) &= i\delta_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y) \\ \text{или} \quad (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) &= i\delta_\mu^\rho, \end{aligned} \quad (9.52)$$

которое должно было бы определить фейнмановский пропагатор  $D_F^{\nu\rho}$ , не имеет решения, поскольку  $4 \times 4$  матрица  $(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)$  сингулярна.

Эта трудность является следствием калибровочной инвариантности. Напомним, что  $F_{\mu\nu}$ , и следовательно  $\mathcal{L}$ , инвариантны относительно произвольного калибровочного преобразования вида:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

Беспокойство причиняют те моды, для которых  $A_\mu(x) = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$ , т.е. те, которые калибровочно эквивалентны  $A_\mu(x) = 0$ . Функциональный интеграл является плохо определенным из-за того, что мы производим лишние интегрирования по бесконечному континууму физически эквивалентных полевых конфигураций. Чтобы разрешить проблему, хорошо было бы выделить интересующую нас часть функционального интеграла, в которой каждая физическая конфигурация учитывается только один раз.

Это можно сделать с помощью трюка, предложенного Фаддеевым и Поповым\*. Пусть  $G(A)$  — некоторая функция, которую мы хотим приравнять нулю для фиксации калибровки; например,  $G(A) = \partial_\mu A^\mu$  соответствует калибровке Лоренца. Мы

\*L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

могли бы ограничить интегрирование в функциональном интеграле только на конфигурации  $G(A) = 0$ , вставив функциональную дельта-функцию,  $\delta(G(A))$ . (Представьте себе этот объект как бесконечное произведение дельта-функций, по одной для каждой точки  $x$ .) Чтобы сделать это корректно, вставим 1 в интеграл (9.50) в следующей форме:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right), \quad (9.53)$$

где  $A^\alpha$  обозначает калибровочно преобразованное поле,

$$A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

Уравнение (9.53) является континуальным обобщением тождества

$$1 = \left( \prod_i \int da_i \right) \delta^{(n)}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j}\right)$$

для дискретных  $n$ -мерных векторов. В калибровке Лоренца  $G(A^\alpha) = \partial^\mu A_\mu + (1/e)\partial^2\alpha$ , так что функциональный детерминант  $\det(\delta G(A^\alpha)/\delta\alpha)$  равен  $\det(\partial^2/e)$ . Важным для дальнейшего свойством этого детерминанта является то, что он не зависит от  $A$ , так что его можно рассматривать как константу в функциональном интеграле.

После вставки (9.53) функциональный интеграл (9.50) принимает вид:

$$\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A^\alpha)).$$

Перейдем от переменных  $A$  к  $A^\alpha$ . Это простой сдвиг, следовательно,  $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\alpha$ . Кроме того в силу калибровочной инвариантности  $S[A] = S[A^\alpha]$ . Поскольку  $A^\alpha$  стала сейчас просто немой переменной интегрирования, ее можно переименовать, опять обозначив как  $A$ , так что

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A)). \quad (9.54)$$

Дельта-функция ограничивает функциональный интеграл по  $A$  физически неэквивалентными полевыми конфигурациями, чего мы и добивались. При этом расходящийся интеграл по  $\alpha(x)$  просто дает бесконечный множитель.

Чтобы продвинуться дальше, следует определить фиксирующую калибровку функцию  $G(A)$ . Мы выбираем общий класс функций

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x), \quad (9.55)$$

где  $\omega(x)$  может быть любой скалярной функцией. Полагая  $G(A)$  равной нулю, получаем обобщение калибровки Лоренца. Функциональный детерминант остался таким же, как и при обычной лоренцевой калибровке,  $\det(\delta G(A^\alpha)/\delta\alpha) = \det(\partial^2/e)$ . Таким образом, функциональный интеграл принимает вид:

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det\left(\frac{1}{e} \partial^2\right) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)).$$

Это равенство остается справедливым для любой функции  $\omega(x)$ , так что оно сохранится, если заменить правую часть на любую должным образом нормированную линейную

комбинацию различных функций  $\omega(x)$ . Финальным трюком будет интегрирование по всем  $\omega(x)$  с гауссовой весовой функцией с центром в точке  $\omega = 0$ . Предыдущее выражение, таким образом, равно:

$$\begin{aligned} N(\xi) \int \mathcal{D}\omega \exp \left[ -i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi} \right] \det \left( \frac{1}{\epsilon} \partial^2 \right) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)) = \\ = N(\xi) \det \left( \frac{1}{\epsilon} \partial^2 \right) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \exp \left[ -i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right], \end{aligned} \quad (9.56)$$

где  $N(\xi)$  — несущественная нормировочная константа, и мы использовали дельта-функцию, чтобы выполнить интегрирование по  $\omega$ . Можно положить  $\xi$  равным любой конечной константе. В итоге, мы добавили в лагранжиан новое слагаемое  $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$ .

До сих пор мы исследовали только знаменатель формулы для корреляционных функций:

$$\langle \Omega | T \mathcal{O}(A) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}.$$

Те же действия могут быть выполнены и с числителем, при условии, что оператор  $\mathcal{O}(A)$  калибровочно-инвариантен. (Если это не так, то замена переменных  $A$  на  $A^\alpha$  в (9.54) не работает). Допустим, что  $\mathcal{O}(A)$  калибровочно-инвариантна, тогда можно найти ее корреляционную функцию:

$$\langle \Omega | T \mathcal{O}(A) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \left[ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right] \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \left[ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right] \right]}. \quad (9.57)$$

Неудобные постоянные множители в (9.56) сократились; единственное, что осталось от всех наших манипуляций, это — добавочное  $\xi$ -слагаемое в действии.

В начале этого раздела на основании формулы (9.52) мы видели, что невозможно получить фотонный пропагатор из действия  $S[A]$ . Однако с учетом нового  $\xi$ -слагаемого, уравнение принимает вид:

$$\left( -k^2 g_{\mu\nu} + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \right) \tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = i\delta_\mu^\rho,$$

так что оно имеет решение

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right). \quad (9.58)$$

Это и есть желаемое выражение для фотонного пропагатора. Как и в случае поля Клейна–Гордона, в знаменателе возникает добавка  $i\epsilon$ . Обратите внимание на общий знак минус относительно пропагатора Клейна–Гордона, который был уже очевиден из (9.52). Практически, когда производят вычисления, обычно используют конкретное значение  $\xi$ . Два часто используемых удобных выбора:

$$\begin{aligned} \xi = 0 & \quad (\text{калибровка Ландау}); \\ \xi = 1 & \quad (\text{калибровка Фейнмана}). \end{aligned}$$

До сих пор в этой книге мы всегда использовали калибровку Фейнмана\*.

\* В конкретных приложениях могут быть полезными и другие варианты выбора  $\xi$ . Например, в ряде задач в связанных состояниях в КЭД калибровка Иенни,  $\xi = 3$ , приводит к сокращению, которое в противном случае трудно выполнить в явном виде. Смотри Н. М. Fried и D. R. Yennie, *Phys. Rev.* **112**, 1391 (1958).

Процедура Фаддеева–Попова гарантирует, что значение любой корреляционной функции калибровочно-инвариантных операторов, вычисленное по фейнмановским диаграммам, не будет зависеть от значения  $\xi$ , использованного при вычислении, до тех пор, пока используется одна и та же величина  $\xi$ . В случае КЭД несложно явно доказать независимость от  $\xi$ . Заметим, что в (9.58)  $\xi$  умножается на слагаемое в фотонном пропагаторе, пропорциональное  $k^\nu$ . Согласно тождеству Уорда–Такахаша (7.68), замена в функции Грина любого фотонного пропагатора на  $k^\mu k^\nu$  дает нуль, за исключением слагаемых, содержащих внешние фермионы вне массовой оболочки. Эти слагаемые равны по величине и противоположны по знаку для частиц и античастиц и сокращаются, когда фермионы сгруппированы в калибровочно-инвариантные комбинации.

Чтобы завершить исследование квантования электромагнитного поля, нужен еще один ингредиент. В главах 5 и 6 мы вычислили элементы  $S$ -матрицы КЭД из корреляционных функций калибровочно-инвариантных операторов  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и  $A_\mu(x)$ . Сейчас мы покажем, что эти элементы  $S$ -матрицы были выведены правильно. Поскольку  $S$ -матрица определена между асимптотическими состояниями, можно вычислить  $S$ -матричные элементы в формализме, в котором константа связи адиабатически выключена в далеком прошлом и далеком будущем. В пределе нулевой связи есть явное различие между калибровочно-инвариантными состояниями и состояниями, зависящими от калибровки. Одночастичное состояние, содержащее один электрон, один позитрон или один поперечно поляризованный фотон, является калибровочно-инвариантным, в то время как состояния с времениподобной и продольной поляризациями изменяются под действием калибровочного преобразования. Таким образом, можно определить калибровочно-инвариантную  $S$ -матрицу следующим способом. Пусть  $S_{\text{FP}}$  —  $S$ -матрица между произвольными асимптотическими состояниями, вычисленная с помощью процедуры Фаддеева–Попова. Эта матрица унитарна, но не калибровочно-инвариантна. Пусть  $P_0$  — проектор на подпространство пространства асимптотических состояний, в котором все частицы являются электронами, позитронами или поперечными фотонами. Положим

$$S = P_0 S_{\text{FP}} P_0. \quad (9.59)$$

Эта  $S$ -матрица калибровочно-инвариантна по построению, потому что она спроектирована на калибровочно-инвариантные состояния. Неочевидно, что она унитарна. Однако мы отсылаем с этим вопросом к разделу 5.5. Там было показано, что любой матричный элемент  $\mathcal{M}^\mu \varepsilon_\mu^*$  испускания фотона удовлетворяет условию:

$$\sum_{i=1,2} \varepsilon_{i\mu}^* \varepsilon_{i\nu} \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} = (-g_{\mu\nu}) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu}, \quad (9.60)$$

где сумма в левой части берется только по поперечным поляризациям. Тот же аргумент применим, если  $\mathcal{M}^\mu$  и  $\mathcal{M}^{*\nu}$  являются разными амплитудами, до тех пор, пока они удовлетворяют тождеству Уорда. Этой информации достаточно для того, чтобы увидеть, что

$$SS^\dagger = P_0 S_{\text{FP}} P_0 S_{\text{FP}}^\dagger P_0 = P_0 S_{\text{FP}} S_{\text{FP}}^\dagger P_0. \quad (9.61)$$

Теперь можно использовать унитарность  $S_{\text{FP}}$ , чтобы увидеть, что  $S$  унитарна,  $SS^\dagger = 1$ , на подпространстве калибровочно-инвариантных состояний. Легко проверить явно, что формула (9.59) для  $S$ -матрицы не зависит от  $\xi$ . Тождество Уорда требует, чтобы любой матричный элемент в КЭД со всеми внешними фермионами на массовой оболочке не изменялся, если добавить к фотонному пропагатору  $D^{\mu\nu}(q)$  любое слагаемое, пропорциональное  $q^\mu$ .

## 9.5. Функциональное квантование спинорных полей

Функциональные методы, которые мы до сих пор использовали, позволяют, используя (9.18) или (9.35), вычислить корреляционные функции, включающие в себя поля, подчиняющиеся каноническим коммутационным соотношениям. Для обобщения этих методов на спинорные поля, подчиняющиеся каноническим антикоммутационным соотношениям, нужно сделать нечто иное. Даже классические поля мы должны описывать антикоммутирующими числами.

### Антикоммутирующие числа

Определим антикоммутирующие числа (еще называемые *грассмановыми числами*) с помощью задания алгебраических правил действий с ними. Эти формальные правила могут рассматриваться как заданные *ad hoc*. Мы подтвердим их, показав, что они приводят к знакомой квантовой теории уравнения Дирака.

Основным свойством антикоммутирующих чисел является их *антикоммутативность*. Для любых двух таких чисел  $\theta$  и  $\eta$

$$\theta\eta = -\eta\theta. \quad (9.62)$$

В частности, квадрат любого грассманова числа равен нулю:

$$\theta^2 = 0.$$

(Этот факт делает алгебру чрезвычайно простой.) Произведение  $(\theta\eta)$  двух грассмановых чисел коммутирует с другими грассмановыми числами. Еще нам понадобится складывать грассмановы числа и умножать их на обычные числа; эти операции обладают всеми свойствами сложения и скалярного умножения в любом векторном пространстве.

Главная задача — научиться интегрировать по антикоммутирующим числам. Для определения функционального интегрирования нам не нужны произвольные определенные интегралы, а достаточен только аналог  $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ . Таким образом определим интеграл от произвольной функции  $f$  грассмановой переменной  $\theta$ , берущийся по всей области изменения  $\theta$ :

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (A + B\theta).$$

В общем случае  $f(\theta)$  можно разложить в ряд Тейлора, который обрывается после второго слагаемого, поскольку  $\theta^2 = 0$ . Интеграл должен быть линеен по  $f$ ; следовательно, это должна быть линейная функция  $A$  и  $B$ . Значения интеграла фиксируется одним дополнительным свойством. При анализе бозонных функциональных интегралов (например, в (9.38) и (9.54)), мы пользовались инвариантностью интеграла по отношению к сдвигу переменной интегрирования. В разделе 9.6 мы увидим, что эта трансляционная инвариантность функционального интеграла играет главную роль в выводе квантово-механических уравнений движения и законов сохранения, и поэтому она должна рассматриваться как фундаментальное свойство формализма. Следовательно, мы должны потребовать выполнения того же самого свойства для интеграла по  $\theta$ . Инвариантность по отношению к сдвигу  $\theta \rightarrow \theta + \eta$  приводит к условию:

$$\int d\theta (A + B\theta) = \int d\theta ((A + B\eta) + B\theta).$$

Сдвиг изменяет постоянное слагаемое, оставляя неизменным линейное слагаемое. Единственная линейная функция от  $A$  и  $B$ , обладающая таким свойством, есть константа (по соглашению взятая равной 1), умноженная на  $B$ , так что определяем\*

$$\int d\theta (A + B\theta) = B. \quad (9.63)$$

Когда берется многократный интеграл более чем по одной грасмановой переменной, возникает неопределенность в знаке; мы принимаем соглашение:

$$\int d\theta \int d\eta \eta\theta = +1, \quad (9.64)$$

причем внутренний интеграл берется первым.

Поскольку уравнение Дирака комплекснозначное, будем с самого начала работать с комплексными грасмановыми числами, которые обычным способом составляются из вещественной и мнимой частей. Удобно определить комплексное сопряжение так, чтобы порядок умножения менялся на обратный, подобно эрмитовому сопряжению операторов:

$$(\theta\eta)^* \equiv \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^*. \quad (9.65)$$

Для интегрирования по комплексным грасмановым числам определим:

$$\theta = \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}}, \quad \theta^* = \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}},$$

так что  $d\theta_1 d\theta_2 = d\theta d\theta^*$ . Теперь можно обращаться с  $\theta$  и  $\theta^*$  как с независимыми грасмановыми числами и принять соглашение  $\int d\theta^* d\theta (\theta\theta^*) = 1$ .

Вычислим гауссов интеграл по комплексной грасмановой переменной:

$$\int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* b\theta} = \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* b\theta) = \int d\theta^* d\theta (1 + \theta\theta^* b) = b. \quad (9.66)$$

Если бы  $\theta$  было обычным комплексным числом, тогда интеграл был бы равен  $2\pi/b$ . Множитель  $2\pi$  не важен, основное различие в случае антикоммутирующих чисел состоит в том, что  $b$  появляется в числителе, а не в знаменателе. Однако, если под интегралом есть дополнительный множитель  $\theta\theta^*$ , получаем:

$$\int d\theta^* d\theta \theta\theta^* e^{-\theta^* b\theta} = 1 = \frac{1}{b} \cdot b. \quad (9.67)$$

Добавка  $\theta\theta^*$  приводит к множителю  $(1/b)$  так же, как и в обычном гауссовом интеграле.

Чтобы вычислить обычные гауссовы интегралы в пространствах большего числа измерений, следует сначала доказать, что интеграл по комплексным грасмановым переменным инвариантен по отношению к унитарным преобразованиям. Рассмотрим набор из  $n$  комплексных грасмановых переменных  $\theta_i$  и унитарную матрицу  $U$ .

\*Это определение принадлежит Ф. А. Березину: Berezin, F. A., *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.

Если  $\theta'_i = U_{ij}\theta_j$ , то

$$\begin{aligned}
 \prod_i \theta'_i &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ij\dots l} \theta'_i \theta'_j \dots \theta'_l = \\
 &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ij\dots l} U_{ii'} \theta_{i'} U_{jj'} \theta_{j'} \dots U_{ll'} \theta_{l'} = \\
 &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ij\dots l} U_{ii'} U_{jj'} \dots U_{ll'} \varepsilon^{i'j'\dots l'} \left( \prod_i \theta_i \right) = \\
 &= (\det U) \left( \prod_i \theta_i \right).
 \end{aligned} \tag{9.68}$$

В произвольном интеграле

$$\left( \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) f(\theta)$$

выживает только то единственное слагаемое в  $f(\theta)$ , которое содержит ровно по одному множителю  $\theta_i$  и  $\theta_i^*$ ; это слагаемое пропорционально  $(\prod_i \theta_i) (\prod_i \theta_i^*)$ . Если заменить  $\theta$  на  $U\theta$ , оно приобретает множитель  $(\det U)(\det U)^* = 1$ , так что интеграл не изменяется под действием унитарного преобразования.

Теперь можно вычислить произвольный гауссов интеграл, содержащий эрмитовую матрицу  $B$  с собственными значениями  $b_i$ :

$$\left( \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = \left( \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) e^{-\sum_i \theta_i^* b_i \theta_i} = \prod_i b_i = \det B. \tag{9.69}$$

(Если бы  $\theta$  было обычным числом, мы получили бы  $(2\pi)^n / (\det B)$ .) Аналогично, читатель может показать, что

$$\left( \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \right) \theta_k \theta_l^* e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = (\det B) (B^{-1})_{kl}. \tag{9.70}$$

Вставив под знак интеграла другую пару  $\theta_m \theta_n^*$ , получим второй множитель  $(B^{-1})_{mn}$  и второе слагаемое, в котором индексы  $l$  и  $n$  взаимно переставлены (сумма по всем возможным спариваниям). В общем случае, за исключением детерминанта в числителе, а не в знаменателе, гауссовы интегралы по грассмановым переменным ведут себя подобно гауссовым интегралам по обычным переменным.

### Дираковский пропагатор

Грассманово поле — это функция пространственно-временных координат, значениями которой являются антикоммутирующие числа. Более точно можно определить грассманово поле  $\psi(x)$  через любую совокупность ортонормированных базисных функций:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x). \tag{9.71}$$

Базисные функции  $\phi_i(x)$  являются обычными  $c$ -числовыми функциями, в то время как коэффициенты  $\psi_i$  — грассмановы числа. Чтобы описать поле Дирака, возьмем в качестве  $\phi_i$  базис четырехкомпонентных спиноров.



Сейчас мы обладаем всей необходимой техникой для вычисления функциональных интегралов и, следовательно, корреляционных функций, содержащих фермионы. Например, дираковская двухточечная функция дается выражением

$$\langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int d^4x \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi \right] \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int d^4x \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi \right]}.$$

(Для удобства пишем  $\mathcal{D}\bar{\psi}$  вместо  $\mathcal{D}\psi^*$ ; эти выражения унитарно эквивалентны. Кроме того, не выписываем явно пределы интегрирования по времени; они такие же, как в (9.18), и приводят к обычному  $i\varepsilon$ -слагаемому в пропагаторе). Согласно (9.69), знаменатель этого выражения есть  $\det(i\rlap{\not{\partial}} - m)$ . Согласно (9.70), числитель есть тот же детерминант, умноженный на оператор, обратный к  $-i(i\rlap{\not{\partial}} - m)$ . Вычисляя эти обратные операторы в фурье-пространстве, приходим к знакомому результату для фейнмановского пропагатора:

$$\langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = S_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{\not{k} - m + i\varepsilon}. \quad (9.72)$$

Высшие корреляционные функции свободных дираковских полей могут быть вычислены аналогичным способом. Как мы и нашли из теоремы Вика в гл. 4, ответом всегда будет сумма по всем возможным полным спариваниям операторов с множителем  $S_F$  для каждого спаривания.

### Производящий функционал для поля Дирака

Как и для поля Клейна–Гордона, можно альтернативным способом вывести фейнмановские правила для свободного поля Дирака с помощью производящего функционала. По аналогии с (9.34), определим дираковский производящий функционал как

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] \right], \quad (9.73)$$

где  $\eta(x)$  — есть грассмановозначное поле источника. Можно без труда сдвинуть  $\psi(x)$  для выделения полного квадрата и получить более простое выражение:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = Z_0 \cdot \exp \left[ - \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) \right], \quad (9.74)$$

где, как и раньше,  $Z_0$  — значение производящего функционала с нулевыми внешними источниками.

Чтобы получить корреляционные функции, мы продифференцируем  $Z$  по  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ . Сначала, однако, следует принять соглашение о знаках для производных по грассмановым числам. Пусть  $\eta$  и  $\theta$  — антикоммутирующие числа, тогда определим

$$\frac{d}{d\eta} \theta \eta = - \frac{d}{d\eta} \eta \theta = -\theta. \quad (9.75)$$

Отсюда, используя определение (9.73) для  $Z$ , видим, что например, двухточечная функция, задается выражением:

$$\langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = Z_0^{-1} \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left( +i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) Z[\bar{\eta}, \eta] \Big|_{\bar{\eta}, \eta = 0}.$$

Подставляя в формулу (9.74) для  $Z[\bar{\eta}, \eta]$  и внимательно следя за знаками на всем пути вычислений, мы находим, что это выражение эквивалентно фейнмановскому пропагатору  $S_F(x_1 - x_2)$ . Высшие корреляционные функции могут быть вычислены аналогично.

## КЭД

Как мы видели в разделе 9.2 для случая скалярных полей, метод функционального интеграла позволяет получить фейнмановские правила для вершин непосредственно из лагранжиана теории поля со взаимодействием. В квантовой электродинамике полный лагранжиан равен:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{КЭД}} &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 = \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \\ &= \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,\end{aligned}$$

где  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  — калибровочно-ковариантная производная.

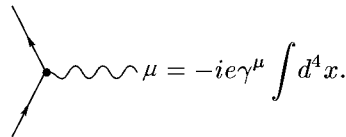
Для вычисления корреляционных функций раскладываем экспоненту в ряд по степеням взаимодействия:

$$\exp[i\int \mathcal{L}] = \exp[i\int \mathcal{L}_0] \left[ 1 - ie \int d^4x \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \dots \right].$$

Два слагаемых свободного лагранжиана дают дираковский и электромагнитный пропагаторы, выведенные в этом и следующих разделах:

$$\begin{aligned}\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x-y)}}{\not{p} - m + i\varepsilon}; \\ \text{---}\xrightarrow{q}\text{---} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu} e^{-iq \cdot (x-y)}}{q^2 + i\varepsilon} \quad (\text{Калибровка Фейнмана}).\end{aligned}$$

Слагаемое с взаимодействием дает вершину КЭД:



$$\text{---}\xrightarrow{\quad}\text{---} \text{---}\text{---} \mu = -ie\gamma^\mu \int d^4x.$$

Как и в главе 4, можно переписать эти правила, выполняя интегрирование по координатам вершин, получая при этом дельта-функции от закона сохранения импульса и используя эти дельта-функции для вычисления большинства интегралов по импульсам.

Остался еще один аспект фейнмановских правил КЭД — появление различных знаков минус. Эти знаки возникают еще в функциональном интеграле; например, перестановка  $\theta_k$  и  $\theta_l^*$  в (9.70) приводит к множителю  $-1$ . Нижеследующие вычисления дадут другой пример возникновения фермионных знаков минус.

## Функциональные детерминанты

В этой главе мы сталкивались с выражениями, которые формально были записаны как функциональные детерминанты. В завершение этого раздела исследуем один из

этих объектов более подробно. Мы увидим, что по крайней мере в этом случае можно записать детерминант явно как сумму вкладов фейнмановских диаграмм.

Рассмотрим объект

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ i \int d^4x \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi \right], \quad (9.76)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  и  $A_\mu(x)$  — заданное внешнее фоновое поле. Формально это выражение представляет собой функциональный детерминант:

$$\begin{aligned} &= \det(i\not{D} - m) = \det(i\not{\partial} - m - e\not{A}) = \\ &= \det(i\not{\partial} - m) \cdot \det \left( 1 - \frac{i}{i\not{\partial} - m} (-ie\not{A}) \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении первое слагаемое есть просто бесконечная константа. Второе слагаемое содержит зависимость детерминанта от внешнего поля  $A$ . Сейчас мы покажем, что эта зависимость хорошо определена и на самом деле эквивалента сумме вакуумных диаграмм.

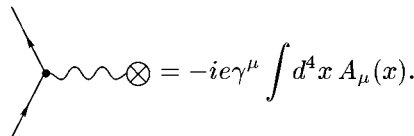
Чтобы показать это, нам нужно только лишь применить стандартные тождества из линейной алгебры. Заметим сначала, что если матрица  $B$  имеет собственные значения  $b_i$ , можно записать ее детерминант в виде:

$$\det B = \prod_i b_i = \exp \left[ \sum_i \ln b_i \right] = \exp \left[ \text{Tr}(\ln B) \right], \quad (9.77)$$

где логарифм матрицы определяется через его разложение в степенной ряд. Применяя это тождество к детерминанту и выписывая степенной ряд для логарифма, находим\*:

$$\det \left( 1 - \frac{i}{i\not{\partial} - m} (-ie\not{A}) \right) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \text{Tr} \left[ \left( \frac{i}{i\not{\partial} - m} (-ie\not{A}) \right)^n \right] \right]. \quad (9.78)$$

Альтернативно можно вычислить этот детерминант, возвратившись к выражению (9.76) и используя фейнмановские диаграммы. Разлагая в ряд слагаемое со взаимодействием, получаем правило для вершины:



$$\text{Diagram} = -ie\gamma^\mu \int d^4x A_\mu(x).$$

Наш детерминант равен поэтому сумме фейнмановских диаграмм:

$$\begin{aligned} \det \left( 1 - \frac{i(-ie\not{A})}{i\not{\partial} - m} \right) &= 1 + \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots = \\ &= \exp \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (9.79)$$

\*Мы используем  $\text{Tr}()$  для обозначения операторного следа и  $\text{tr}()$  для обозначения дираковского следа.

Этот ряд собирается в экспоненту, поскольку несвязные диаграммы равны произведениям связанных кусков (с соответствующими симметричными множителями, когда кусок повторяется). Например,

$$\begin{array}{c} \otimes \\ | \\ \circlearrowleft \\ | \\ \otimes \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \otimes \end{array} = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \otimes \\ | \\ \circlearrowleft \\ | \\ \otimes \end{array} \right)^2.$$

Вычислим теперь  $n$ -ю диаграмму в экспоненте (9.79). Следует учесть множитель  $-1$  от фермионной петли, и фактор симметрии  $1/n$ , так как можно поворачивать взаимодействия вокруг диаграммы до  $n$  раз, не изменяя вид диаграммы. (Множитель не равен  $1/n!$ , поскольку важен циклический порядок точек взаимодействия.) Следовательно, диаграмма равна

$$\begin{array}{c} \otimes \\ | \\ \circlearrowleft \\ | \\ \otimes \\ \vdots \\ \circlearrowleft \\ | \\ \otimes \\ \vdots \\ \circlearrowleft \\ | \\ \otimes \end{array} = -\frac{1}{n} \int dx_1 \cdots dx_n \operatorname{tr} \left[ (-ie\mathcal{A}(x_1)) S_F(x_2 - x_1) \cdots \right. \tag{9.80}$$

$$\left. (-ie\mathcal{A}(x_n)) S_F(x_1 - x_n) \right] = -\frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left[ \left( \frac{i}{i\not{\partial} - m} (-ie\mathcal{A}) \right)^n \right],$$

в точном соответствии с (9.78), включая знак минус и множитель симметрии.

Как будет видно в гл. 11, вычисление функциональных детерминантов с помощью фейнмановских диаграмм является важным расчетным инструментом.

### 9.6. Симметрии в функциональном формализме

Мы видим, что теоретические квантово-полевые корреляционные функции скалярного, векторного и спинорного полей можно вычислить с помощью функционального интеграла, полностью обойдя построение гамильтониана, гильбертово пространство состояний и уравнения движения. Формализм функционального интеграла делает явным симметрии задачи; любая инвариантность лагранжиана будет инвариантностью квантовой динамики\*. Однако хотелось бы также иметь возможность апеллировать к тем законам сохранения, которые следуют из квантовых уравнений движения, или к самим уравнениями движения. Например, тождество Уорда, игравшее основную роль в обсуждении КЭД (раздел 5.5), по существу является законом сохранения электрического тока. Как мы видели в разделе 2.2, законы сохранения следуют из симметрий лагранжиана, поэтому можно думать, что эти законы сохранения нетрудно вывести непосредственно из функционального интеграла. В этом разделе мы покажем, как это сделать. Мы увидим, что функциональный интеграл самым прямым образом приводит к квантовому обобщению теоремы Нётер. Из этого результата будет следовать аналог тождества Уорда–Такахаши для любой симметрии произвольной квантовой теории поля.

\*Существует несколько тонких исключений из этого правила, которые мы обсудим в гл. 19.

### Уравнения движения

Чтобы подготовиться к обсуждению, следует определить, каким образом из формализма функционального интеграла следуют квантовые уравнения движения. В качестве первой задачи рассмотрим функции Грина свободной скалярной теории. Именно, рассмотрим трехточечную функцию:

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) | \Omega \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3), \quad (9.81)$$

где  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$  и  $Z$  — сокращенное обозначения для  $Z[J=0]$ . В классической механике уравнения движения выводятся из требования, чтобы действие оставалось неизменным в результате бесконечно малой вариации

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon(x). \quad (9.82)$$

Подходящее обобщение на квантовый случай заключается в том, чтобы рассматривать (9.82) как бесконечно малую замену переменных. При такой замене значения интеграла не изменяется. Сдвиг переменной не изменяет меры интегрирования:  $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ . Таким образом, можно записать:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi']} \phi'(x_1) \phi'(x_2) \phi'(x_3),$$

где  $\phi' = \phi + \varepsilon$ . Разлагая это выражение до первого порядка по  $\varepsilon$ , находим

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \left\{ \left( i \int d^4x \varepsilon(x) \left[ (-\partial^2 - m^2) \phi(x) \right] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \varepsilon(x_2) \phi(x_3) + \phi(x_1) \phi(x_2) \varepsilon(x_3) \right\}. \quad (9.83)$$

Три последних слагаемых могут быть скомбинированы с первым, если написать, например,  $\varepsilon(x_1) = \int d^4x \varepsilon(x) \delta(x-x_1)$ . Помня, что правая часть выражения должна быть равна нулю при любых вариациях  $\varepsilon(x)$ , получаем:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \left[ (\partial^2 + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + \right. \\ \left. + i \delta(x-x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \delta(x-x_2) \phi(x_3) + i \phi(x_1) \phi(x_2) \delta(x-x_3) \right]. \quad (9.84)$$

Аналогичное уравнение верно для любого количества полей  $\phi(x_i)$ . Чтобы понять приложения (9.84), рассмотрим частный случай одного поля  $\phi(x_1)$  в (9.81). Заметим, что производные, действующие на  $\phi(x)$ , можно вынести за знак функционального интеграла. Тогда, разделив (9.84) на  $Z$ , получим тождество:

$$(\partial^2 + m^2) \langle \Omega | T \phi(x) \phi(x_1) | \Omega \rangle = -i \delta(x-x_1). \quad (9.85)$$

Левая часть этого соотношения есть оператор Клейна–Гордона, действующий на корреляционную функцию  $\phi(x)$ . Правая часть равна нулю, за исключением точки  $x = x_1$ . Это означает, что корреляционная функция удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона кроме точки, в которой аргументы двух полей  $\phi$  совпадают. Эта модификация уравнения Клейна–Гордона в точке  $x_1$  называется *контактным членом*. В этом простом

случае модификация, конечно, нам знакома. Из выражения (9.85) следует, что фейнмановский пропагатор является функцией Грина оператора Клейна–Гордона, как и было первоначально показано в разделе 2.4. Там мы видели, что появление дельта-функции обязано производной по времени в  $\partial^2$ , действующей на символ хронологического упорядочения. Мы покажем ниже, что в общем случае в квантовой теории поля классические уравнения движения для полей удовлетворяются всеми квантовыми корреляционными функциями этих полей с точностью до контактных членов.

Например, рассмотрим тождество, следующее из (9.84) для  $(n+1)$ -точечной корреляционной функции скалярных полей:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2) \langle \Omega | T \phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \\ = \sum_{i=1}^n \langle \Omega | T \phi(x_1) \cdots (-i\delta(x - x_i)) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Это тождество говорит о том, что уравнению Клейна–Гордона подчиняются поля  $\phi(x)$  внутри любого среднего по вакууму с точностью до контактных членов, связанных с упорядочением по времени. Этот результат может быть также выведен из гамильтонового формализма с помощью методов раздела 2.4 или с помощью специальных свойств свободной теории поля путем вычисления обеих частей уравнения по теореме Вика.

Пока мера функционального интеграла остается инвариантной относительно сдвига переменной интегрирования, можно повторить эту аргументацию и получить квантовые уравнения движения для функций Грина в любой теории скалярных, векторных или спинорных полей. Это и есть причина того, что в (9.63) инвариантность относительно сдвига рассматривалась как фундаментальное свойство грассманового интеграла.

В произвольной теории поля  $\varphi(x)$  с лагранжианом  $\mathcal{L}[\varphi]$  манипуляции, ведущие к (9.83), дают тождество:

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}} \left\{ i \int d^4x \varepsilon(x) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left( \int d^4x' \mathcal{L} \right) \cdot \varphi(x_1) \varphi(x_2) + \right. \\ \left. + \varepsilon(x_1) \varphi(x_2) + \varphi(x_1) \varepsilon(x_2) \right\}, \end{aligned} \quad (9.87)$$

и похожие тождества для корреляционных функций от  $n$  полей. По правилам функционального дифференцирования (9.31) производная от действия равна

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left( \int d^4x' \mathcal{L} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right);$$

т. е. это та величина, которая равна нулю на классических уравнениях Эйлера–Лагранжа (2.3) для  $\varphi$ . Формула (9.87) и ее обобщения ведут к набору тождеств:

$$\left\langle \left( \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \int d^4x' \mathcal{L} \right) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \varphi(x_1) \cdots (i\delta(x - x_i)) \cdots \varphi(x_n) \rangle. \quad (9.88)$$

В этом уравнении угловые скобки обозначают хронологически упорядоченную корреляционную функцию, в которой производные  $\varphi(x)$  располагаются за пределами символа хронологического упорядочения, как в (9.86). Соотношение (9.88) говорит о том, что классическим уравнениям Эйлера–Лагранжа для поля  $\varphi$  подчиняются все

функции Грина полей  $\varphi$ , с точностью до контактных членов, возникающих из нетривиальных коммутационных соотношений полевых операторов. Эти квантовые уравнения движения для функций Грина, включающие соответствующие контактные члены, называются *уравнениями Швингера – Дайсона*.

### Законы сохранения

В рамках классической теории поля теорема Нетер утверждает, что каждой симметрии локального лагранжиана соответствует сохраняющийся ток. В разделе 2.2 теорема Нетер была доказана с помощью инфинитезимальных преобразований симметрии лагранжиан. В духе приведенного выше обсуждения уравнений движения следует найти квантовый аналог этой теоремы, подвергая функциональный интеграл инфинитезимальной замене переменных вдоль направления симметрии.

Как и выше, полезнее всего начать с примера. Рассмотрим теорию свободного комплекснозначного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2. \quad (9.89)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразования  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ . Классические следствия этой инвариантности обсуждались в разделе 2.2 после формулы (2.14). Для того чтобы найти квантовую формулировку, рассмотрим бесконечно малую замену переменных

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + i\alpha(x)\phi(x). \quad (9.90)$$

Заметим, что мы сделали бесконечно малый угол поворота функцией от  $x$ ; причина этого скоро станет ясной.

Мера функционального интеграла инвариантна относительно преобразования (9.90), поскольку это унитарное преобразование переменных  $\phi(x)$ . Следовательно, в случае двух полей,

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1) \phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}[\phi']} \phi'(x_1) \phi'^*(x_2) \Big|_{\phi'=(1+i\alpha)\phi}.$$

Разлагая это уравнение с точностью до первого порядка по  $\alpha$ , находим:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}} \left\{ i \int d^4x \left[ (\partial_\mu \alpha) \cdot i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \right] \phi(x_1) \phi^*(x_2) + \right. \\ \left. + [i\alpha(x_1)\phi(x_1)] \phi^*(x_2) + \phi(x_1) [-i\alpha(x_2)\phi^*(x_2)] \right\}.$$

Заметим, что вариация лагранжиана содержит только слагаемые, пропорциональные  $\partial_\mu \alpha$ , поскольку подстановка (9.90) с постоянным  $\alpha$  оставляет лагранжиан инвариантным. Чтобы записать это выражение в привычной форме, проинтегрируем слагаемое, содержащее  $\partial_\mu \alpha$ , по частям. Тогда, взяв коэффициент при  $\alpha(x)$  и разделив на  $Z$ , получим:

$$\langle \partial_\mu j^\mu(x) \phi(x_1) \phi^*(x_2) \rangle = (-i) \left\langle (i\phi(x_1)\delta(x-x_1)) \phi^*(x_2) + \right. \\ \left. + \phi(x_1) (-i\phi^*(x_2)\delta(x-x_2)) \right\rangle, \quad (9.91)$$

где

$$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \quad (9.92)$$

есть нетеровский ток, отождествляемый с (2.16). Как и в (9.88), корреляционная функция означает хронологически упорядоченное произведение с производными от  $j^\mu(x)$ , расположенными вне символа хронологического упорядочения. Соотношение (9.91) является классическим законом сохранения с учетом контактных членов, т. е. уравнением Швингера–Дайсона, связанным с сохраняющимся током.

Немного сложнее выглядит сохранение тока в более общих случаях. Рассмотрим локальную теорию набора полей  $\varphi_a(x)$  с лагранжианом  $\mathcal{L}[\varphi]$ . Инфинитезимальное преобразование симметрии полей  $\varphi_a$  в общем виде будет иметь вид:

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi_a(x) + \varepsilon \Delta \varphi_a(x). \quad (9.93)$$

Предположим, что действие инвариантно по отношению к этим преобразованиям. Тогда, как и в (2.10), если параметр  $\varepsilon$  считается постоянным, лагранжиан должен быть инвариантным с точностью до полной дивергенции:

$$\mathcal{L}[\varphi] \rightarrow \mathcal{L}[\varphi] + \varepsilon \partial_\mu \mathcal{J}^\mu. \quad (9.94)$$

Если параметр симметрии  $\varepsilon$  зависит от  $x$ , как в предшествующем разделе, то вариация лагранжиана будет несколько сложнее:

$$\mathcal{L}[\varphi] \rightarrow \mathcal{L}[\varphi] + (\partial_\mu \varepsilon) \Delta \varphi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} + \varepsilon \partial_\mu \mathcal{J}^\mu.$$

Подразумевается суммирование по всем  $a$ . Тогда

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x)} \int d^4x \mathcal{L}[\varphi + \varepsilon \Delta \varphi] = -\partial_\mu j^\mu(x), \quad (9.95)$$

где  $j^\mu$  — нетеровский ток (2.12):

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \Delta \varphi_a - \mathcal{J}^\mu. \quad (9.96)$$

Используя результат (9.95) и делая те же шаги, которые привели к (9.91), находим уравнение Швингера–Дайсона:

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu j^\mu(x) \varphi_a(x_1) \varphi_b(x_2) \rangle = & (-i) \langle (\Delta \varphi_a(x_1) \delta(x - x_1)) \varphi_b(x_2) + \\ & + \varphi_a(x_1) (\Delta \varphi_b(x_2) \delta(x - x_2)) \rangle. \end{aligned} \quad (9.97)$$

Аналогичное уравнение может быть получено для коррелятора  $\partial_\mu j^\mu$  с  $n$  полями  $\varphi(x)$ . Это дает полный набор уравнений Швингера–Дайсона, связанных с классической теоремой Нетер.

В качестве примера применения этой вариационной процедуры для получения нетеровского тока рассмотрим симметрию лагранжиана по отношению к пространственно-временным трансляциям. Под действием преобразования

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a + a^\mu(x) \partial_\mu \varphi_a \quad (9.98)$$



лагранжиан преобразуется как

$$\mathcal{L} \rightarrow \partial_\nu a^\mu \partial_\mu \varphi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_a)} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}.$$

Тогда вариация  $\int d^4x \mathcal{L}$  по  $a^\mu$  дает уравнение сохранения тензора энергии-импульса  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , где

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_a)} \partial^\mu \varphi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (9.99)$$

в соответствии с (2.17).

Прием, использованный в этом разделе, состоявший в том, что рассматривалось преобразование симметрии с параметром, являющимся функцией пространственно-временной координаты, напоминает технические детали более раннего обсуждения, в котором был введен лагранжиан КЭД. В (4.6) обращалось внимание на то, что рецепт введения минимальной связи фотона и заряженного поля делает лагранжиан инвариантным не только по отношению к глобальной симметрии с постоянным  $\varepsilon$ , но еще и по отношению к преобразованию, в котором параметр симметрии зависит от  $x$ . В гл. 15 мы соединим эти две идеи при общем обсуждении теорий поля с *локальными* симметриями.

### Тождество Уорда–Такахаша

В заключение рассмотрим приложение методов этого раздела к выводу уравнений Швингера–Дайсона, связанных с глобальной симметрией КЭД. Рассмотрим замену переменных, производимую в функциональном интеграле для КЭД:

$$\psi(x) \rightarrow (1 + ie\alpha(x))\psi(x), \quad (9.100)$$

без соответствующего слагаемого в законе преобразования для  $A_\mu$  (который и сделает лагранжиан инвариантным по отношению к этому преобразованию). Тогда лагранжиан КЭД (4.3) преобразуется по закону:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - e\partial_\mu \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (9.101)$$

Таким образом, преобразование (9.100) приводит к следующему тождеству для функционального интеграла с двумя фермионными полями:

$$0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{i\int d^4x \mathcal{L}} \left\{ -i \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) \left[ j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \right] + \right. \\ \left. + (ie\alpha(x_1) \psi(x_1)) \bar{\psi}(x_2) + \psi(x_1) (-ie\alpha(x_2) \bar{\psi}(x_2)) \right\}, \quad (9.102)$$

где  $j^\mu = e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . Как и в других примерах, аналогичные уравнения верны для любого числа фермионных полей.

Чтобы понять следствия этой системы уравнений, рассмотрим сначала частный случай (9.102). Разделив это соотношение на  $Z$ , мы найдем

$$i\partial_\mu \langle 0 | T j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = -ie\delta(x - x_1) \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle + \\ + ie\delta(x - x_2) \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle. \quad (9.103)$$

Для написания этого уравнения в более привычной форме, совершим преобразование Фурье:

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \int d^4x_1 e^{+iq \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{-ip \cdot x_2}. \quad (9.104)$$

Тогда амплитуды в (9.103) перейдут в амплитуды  $\mathcal{M}(k; p; q)$  и  $\mathcal{M}(p; q)$ , определенные раньше в (7.67) при нашем обсуждении тождества Уорда–Такахаши. Действительно, (9.103) сразу же принимает вид:

$$-ik_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p; q) = -ie \mathcal{M}_0(p; q - k) + ie \mathcal{M}_0(p + k; q). \quad (9.105)$$

Это в точности тождество Уорда–Такахаши для двух внешних фермионов, которое мы вывели на диаграммном языке в разделе 7.4. Нетрудно проверить, что более общие соотношения, содержащие  $n$  фермионных полей, ведут к общему тождеству Уорда–Такахаши, представленному в (7.68). Из-за этой связи формулу (9.97), связанную с произвольной симметрией (9.93), обычно также называют тождеством Уорда–Такахаши, связанным с этой симметрией и ее нетеровским током.

Мы пришли к более общему пониманию слагаемых в правой части тождеств Уорда–Такахаши. Это контактные члены, которые мы теперь надеемся найти, превращая классические уравнения движения в уравнения Швингера–Дайсона для квантовых функций Грина. Формализм функционального интеграла позволяет дать простой и изящный способ вывода этих квантово-механических слагаемых.

## Задачи

**9.1. Скалярная КЭД.** Эта задача имеет отношение к теории комплексного скалярного поля  $\phi$ , взаимодействующего с электромагнитным полем  $A^\mu$ . Лагранжиан равен:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi,$$

где  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  — обычная ковариантная производная.

- (а) Используя функциональный метод из раздела 9.2, покажите, что пропагатор комплексного скалярного поля имеет тот же вид, что и у вещественного поля:

$$\text{---}\overleftarrow{p}\text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Выведите фейнмановские правила для взаимодействий между фотонами и скалярными частицами; должны получиться следующие ответы:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{---}\overleftarrow{p'}\text{---} \\ \text{---}\overleftarrow{p}\text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---}\mu \\ \text{---}\mu \end{array} & = -ie(p + p')^\mu; & \begin{array}{c} \text{---}\mu \\ \text{---}\nu \end{array} \begin{array}{c} \text{---}\mu \\ \text{---}\nu \end{array} & = 2ie^2 g^{\mu\nu}. \end{array}$$

- (б) Вычислите в низшем порядке дифференциальное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \phi\phi^*$ , пренебрегая массой электрона (но не массой скалярной частицы) и усреднив по поляризациям электрона и позитрона. Найдите асимптотическую угловую зависимость и полное сечение. Сравните результаты с соответствующей формулой для  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

- (с) Используя размерную регуляризацию, вычислите вклад заряженного скаляра в фотонную поляризацию вакуума. Заметим, что вклад дают две диаграммы. Чтобы привести ответ к ожидаемому виду

$$\Pi^{\mu\nu}(q^2) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2),$$

полезно сначала сложить две диаграммы, приведя оба слагаемых к общему знаменателю перед введением фейнмановского параметра. Покажите, что при  $-q^2 \gg m^2$  вклад заряженного бозона в  $\Pi(q^2)$  в точности равен 1/4 вклада от виртуальной электрон-позитронной пары.

## 9.2. Квантовая статистическая механика.

- (а) Вычислите квантовую статистическую сумму

$$Z = \text{tr}[e^{-\beta H}]$$

(где  $\beta = 1/kT$ ), используя стратегию раздела 9.1 для вычисления матричных элементов  $e^{-iHt}$  через функциональные интегралы. Покажите, что она снова находится через функциональный интеграл по функциям, определенным в области размером  $\beta$  и периодически соединенным в временном направлении. Заметим, что в весе появляется евклидова форма лагранжиана.

- (б) Вычислите этот интеграл для простого гармонического осциллятора

$$L_E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2,$$

введя фурье-разложение для  $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_n x_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{2\pi i n t / \beta}.$$

Получить явную зависимость результата от  $\beta$  довольно непросто, поскольку мера интеграла по  $x(t)$  зависит от  $\beta$  при любой дискретизации. Тем не менее зависимость от  $\omega$  должна быть однозначной. Покажите, что с точностью до (возможно, расходящейся и зависящей от  $\beta$ ) константы интеграл точно воспроизводит известное выражение для квантовой статистической суммы осциллятора. Может понадобиться полезное тождество

$$\text{sh } z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(n\pi)^2}\right).$$

- (с) Обобщите эту конструкцию на теорию поля. Покажите, что квантовая статистическая сумма свободного скалярного поля может быть записана через функциональный интеграл. Значение этого интеграла формально дается выражением

$$\left[\det(-\partial^2 + m^2)\right]^{-1/2},$$

где оператор действует на функции в евклидовом пространстве, которые периодичны по времени с периодом  $\beta$ . Как и раньше, зависимость этого выражения от  $\beta$  трудно вычислить в явном виде. Однако зависимость от  $m^2$  однозначна. (В общем случае, обычно можно вычислить вариацию функционального детерминанта по любому явному параметру в лагранжиане.) Покажите, что этот детерминант действительно воспроизводит статистическую сумму релятивистской скалярной частицы.

- (d) Пусть  $\psi(t), \bar{\psi}(t)$  — грассмановозначные координаты. Определим фермионный осциллятор, написав лагранжиан:

$$L_E = \bar{\psi}\dot{\psi} + \omega\bar{\psi}\psi.$$

Этот лагранжиан соответствует гамильтониану

$$H = \omega\bar{\psi}\psi \quad \text{с} \quad \{\bar{\psi}, \psi\} = 1;$$

т.е. описывает простую двухуровневую систему. Вычислите функциональный интеграл, допустив, что фермионы подчиняются антипериодическим граничным условиям:  $\psi(t+\beta) = -\psi(t)$ . (Почему это разумно?) Покажите, что результат воспроизводит статистическую сумму квантово-механической двухуровневой системы, т.е. квантовое состояние, подчиняющееся статистике Ферми.

- (e) Определим статистическую сумму фотонного поля как калибровочно-инвариантный функциональный интеграл

$$Z = \int \mathcal{D}A \exp\left(-\int \left[\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2\right]\right)$$

по векторным полям  $A_\mu$ , которые периодичны по времени с периодом  $\beta$ . Примените процедуру фиксации калибровки, обсуждавшуюся в разделе 9.4 (работая, например, в фейнмановской калибровке). Вычислите функциональные детерминанты, используя результат части (c), и покажите, что функциональный интеграл дает правильный квантовый статистический результат (включая правильный учет состояний поляризации).

## ГЛАВА 10

# СИСТЕМАТИКА ПЕРЕНОРМИРОВОК

При вычислении радиационных поправок в гл. 6 и 7 мы столкнулись с тремя диаграммами КЭД, содержащими ультрафиолетовые расходимости:



В каждом случае мы убедились, что расходимость может быть регуляризована и устранена, так что в результате получаются конечные выражения для измеримых величин. В гл. 8 было отмечено, что при вычислениях в рамках квантовой теории поля возникновение подобных расходимостей — частое и, на самом деле, вполне естественное событие. Мы наметили физическую интерпретацию этих расходимостей, применимую как в квантовой теории поля, так и в статистической теории фазовых переходов. В нескольких следующих главах мы превратим эти наброски в количественную теорию, позволяющую производить точные расчеты. В этой главе начнем анализ с классификации тех ультрафиолетовых расходимостей, которые могут возникать в квантовой теории поля. Вместо того чтобы спотыкаться по очереди на каждой такой расходимости и придумывать от случая к случаю, как с нею справиться, мы хотим установить раз и навсегда, какие диаграммы расходятся и в рамках каких теорий подобные расходимости можно систематически устранить. В качестве примеров будут рассмотрены КЭД и скалярные теории поля.

### 10.1. Подсчет ультрафиолетовых расходимостей

В этом разделе, используя элементарные соображения, мы определим, при каких условиях фейнмановская диаграмма содержит ультрафиолетовую расходимость. Начнем с анализа квантовой электродинамики. Для характеристики типичной диаграммы КЭД введем следующие обозначения:

$N_e$  = число внешних электронных линий;

$N_\gamma$  = число внешних фотонных линий;

$P_e$  = число электронных пропагаторов;

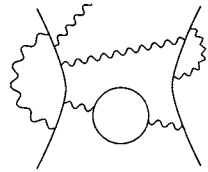
$P_\gamma$  = число фотонных пропагаторов;

$V$  = число вершин;

$L$  = число петель.

(Такой анализ применим как для амплитуд рассеяния, так и для корреляционных функций. В последнем случае пропагаторы, связанные с внешними точками, следует засчитывать не как пропагаторы, а как внешние линии.)

Выражение, соответствующее типичной диаграмме, имеет вид:



$$\sim \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2 \cdots d^4 k_L}{(k_i - m) \cdots (k_j^2) \cdots (k_n^2)}.$$

Каждой петле соответствует потенциально расходящийся интеграл по 4-импульсу, однако каждый пропагатор улучшает сходимость этого интеграла, внося одну или две степени импульса в знаменатель. Грубо говоря, диаграмма не расходится, если степень импульса в знаменателе больше, чем в числителе. Определим поэтому *кажущуюся степень расходимости*  $D$  как разность

$$D \equiv (\text{степень } k \text{ в числителе}) - (\text{степень } k \text{ в знаменателе}) = 4L - P_e - 2P_\gamma. \quad (10.1)$$

Наивные ожидания сводятся к тому, что при  $D > 0$  диаграмма расходится как  $\Lambda^D$ , где  $\Lambda$  — обрезание по импульсу. При  $D = 0$  можно ожидать расходимости вида  $\ln \Lambda$ , а при  $D < 0$  расходимость отсутствует.

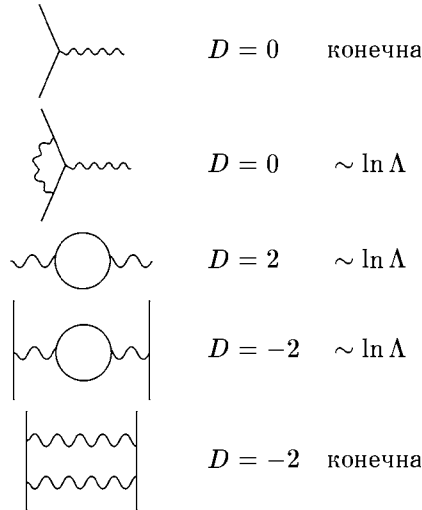


Рис. 10.1. Некоторые простейшие диаграммы КЭД, иллюстрирующие понятие кажущейся степени расходимости. Первая диаграмма конечна, даже несмотря на то, что  $D = 0$ . Для третьей диаграммы  $D = 2$ , но она расходится только логарифмически в силу тождества Уорда (см. раздел 7.5). Четвертая диаграмма расходится несмотря на то, что  $D < 0$ , так как она содержит расходящуюся поддиаграмму. Только для второй и пятой диаграмм кажущаяся степень расходимости совпадает с реальной.

Такие ожидания часто оказываются ошибочными по одной из трех причин (см. рис. 10.1).

1. Если диаграмма содержит расходящуюся поддиаграмму, истинная расходимость диаграммы может оказаться сильнее, чем та, которая определяется индексом  $D$ .

2. Если наличие симметрий (подобных тождеству Уорда) приводит к сокращению ряда слагаемых, то расходимость диаграммы может быть ослаблена или вообще ликвидирована.

3. Наконец, тривиальная диаграмма без пропагаторов и петель имеет  $D = 0$ , но она не расходится.

Несмотря на эти осложнения,  $D$  все же является полезной характеристикой. Чтобы понять причину этого, перепишем  $D$ , выразив ее через число внешних линий ( $N_e$ ,  $N_\gamma$ ) и вершин ( $V$ ). Заметим, что число интегрирований по петлям в диаграмме равно

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1, \quad (10.2)$$

т. к. согласно исходным фейнмановским правилам каждому пропагатору отвечает интеграл по импульсу, каждая вершина содержит дельта-функцию, а одна дельта-функция просто отражает общий закон сохранения импульса. Кроме того, число вершин равно

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e), \quad (10.3)$$

поскольку в каждой вершине сходятся ровно одна фотонная и две электронных линии. (Пропагаторы учитываются дважды, т. к. они начинаются и заканчиваются в вершинах.) С учетом всех этих соотношений находим, что  $D$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} D &= 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = \\ &= 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e, \end{aligned} \quad (10.4)$$

не зависящем от числа вершин. Кажущаяся степень расходимости диаграммы КЭД зависит только от числа внешних хвостов каждого типа.

Согласно соотношению (10.4) только у диаграмм с малым числом внешних хвостов  $D \geq 0$ ; все семь возможных типов таких диаграмм показаны на рис. 10.2. Поскольку внешние хвосты не дают вклада в потенциально расходящиеся интегралы, можно ограничиться рассмотрением ампутированных диаграмм. Кроме того, можно ограничиться рассмотрением одночастично неприводимых диаграмм, т. к. приводимые диаграммы являются простыми произведениями интегралов, отвечающих их неприводимым частям. Таким образом задача перечисления всех расходящихся диаграмм КЭД сводится к анализу семи типов ампутированных одночастично неприводимых амплитуд, показанных на рис. 10.2. Другие диаграммы могут расходиться только, если они содержат одну из указанных семи диаграмм в качестве поддиаграммы. Поэтому рассмотрим по очереди каждую из семи диаграмм.

Вакуумная функция (рис. 10.2, а) расходится очень сильно. Однако этот объект приводит всего лишь к ненаблюдаемому сдвигу энергии вакуума и никогда не дает вклада в элементы  $S$ -матрицы.

Для анализа фотонной одноточечной функции (рис. 10.2, б) заметим, что внешняя фотонная линия должна прикрепляться к вершине КЭД. Пренебрегая внешним фотонным пропагатором, получаем для такой амплитуды выражение:

$$\text{Diagram} = -ie \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \Omega | T j_\mu(x) | \Omega \rangle, \quad (10.5)$$

где  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  — оператор электромагнитного тока. Но среднее по вакууму от  $j^\mu$  должно обращаться в нуль в силу релятивистской инвариантности, т. к. в противном случае

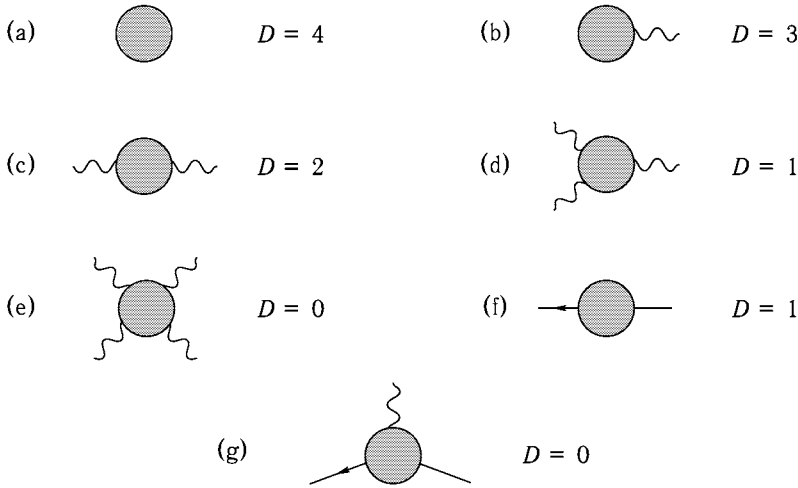


Рис. 10.2. Семь амплитуд КЭД, кажущаяся степень расходимости которых  $D \geq 0$ . (Каждый кружок представляет сумму всех возможных диаграмм КЭД.) Как пояснено в тексте, амплитуда (a) не имеет отношения к процессам рассеяния, а амплитуды (b) и (d) обращаются в нуль в силу симметрий. Амплитуда (e) не равна нулю, но ее расходящиеся куски сокращаются в силу тождества Уорда. Все остающиеся амплитуды (c, f и g) расходятся логарифмически, даже несмотря на то, что для (c) и (f)  $D > 0$ .

оно равнялось бы некоему выделенному 4-вектору. Фотонная одноточечная функция исчезает и по другой причине — в силу инвариантности относительно зарядового сопряжения. Напомним, что  $C$  является симметрией КЭД, так что  $C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ . Однако  $j^\mu(x)$  изменяет знак под действием зарядового сопряжения,  $Cj^\mu(x)C^\dagger = -j^\mu(x)$ , поэтому среднее по вакууму этого оператора должно обращаться в нуль:

$$\langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | C^\dagger C j^\mu(x) C^\dagger C | \Omega \rangle = - \langle \Omega | T j^\mu(x) | \Omega \rangle = 0.$$

Аналогичный аргумент применим к любому вакуумному среднему нечетного числа электромагнитных токов. В частности, обращается в нуль фотонная трехточечная функция (рис. 10.2, d). (Этот результат известен как теорема Фарри.) Нетрудно убедиться явными вычислениями, что фотонная одноточечная и трехточечная функции обращаются в нуль в старшем порядке теории возмущений (см. задачу 10.1).

Все оставшиеся амплитуды на рис. 10.2 отличны от нуля, так что следует детальнее изучить их структуру. Рассмотрим, например, собственную энергию электрона (рис. 10.2, f). Эта амплитуда является функцией импульса электрона  $p$ , поэтому разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки  $p = 0$ :

$$\left( \text{diagram (f)} \right) = A_0 + A_1 \not{p} + A_2 p^2 + \dots$$

Каждый коэффициент не зависит от  $p$ :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{d\not{p}^n} \left( \text{diagram (f)} \right) \right|_{\not{p}=0}.$$



(Эти коэффициенты инфракрасно расходятся; для их явного вычисления необходима инфракрасная регуляризация, как в гл. 6.) Зависимость от  $p$  в диаграммах, дающих вклад в собственную энергию электрона, содержится в знаменателях пропагаторов. Чтобы вычислить коэффициенты  $A_n$ , дифференцируем эти пропагаторы и получаем выражения типа

$$\frac{d}{d\not{p}} \left( \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{k} + \not{p} - m)^2}.$$

Таким образом, каждая производная по внешнему импульсу  $p$  понижает кажущуюся степень расходимости на единицу. Поскольку постоянное слагаемое  $A_0$  имеет (кажущуюся) линейную расходимость, то  $A_1$  может расходиться только логарифмически, а все остальные  $A_n$  конечны. (Приведенный аргумент теряет силу, если расходимость содержится в поддиаграмме, поскольку тогда не все пропагаторы содержат большой импульс  $k$ . Мы столкнемся с этой проблемой в разделе 10.4.)

С амплитудой собственной энергии электрона связана еще одна тонкость. Если бы постоянное слагаемое  $A_0$  было пропорционально ультрафиолетовому обрезанию  $\Lambda$ , то сдвиг массы электрона должен был бы, согласно анализу, проведенному в разделе 7.1, также содержать слагаемое, пропорциональное  $\Lambda$ . Однако на самом деле сдвиг массы электрона должен быть пропорционален  $m$ , так как киральная симметрия запрещала бы сдвиг массы, если  $m = 0$ . В худшем случае, постоянное слагаемое должно быть пропорционально  $m \ln \Lambda$ . Поэтому мы ожидаем, что полная амплитуда собственной энергии должна иметь вид:

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = a_0 m \ln \Lambda + a_1 \not{p} \ln \Lambda + (\text{конечные слагаемые}), \quad (10.6)$$

который в точности совпадает со слагаемым в порядке  $\alpha$ , найденным в (7.19).

Перейдем к аналогичному анализу электрон-фотонной вершины (рис. 10.2, g). (Вновь мы неявно предполагаем, что инфракрасные расходимости регуляризованы.) Разлагая по степеням трех внешних импульсов, немедленно получаем, что расходится только постоянное слагаемое, так как дифференцирование по отношению к любому внешнему импульсу понижает степень расходимости на единицу. Поэтому амплитуда содержит только одну расходящуюся константу:

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \begin{matrix} \mu \\ \uparrow \end{matrix} \propto -ie\gamma^\mu \ln \Lambda + \text{конечные слагаемые}. \quad (10.7)$$

Как обсуждалось в разделе 7.5, в силу ограничений, накладываемых тождеством Уорда, собственная энергия фотона (рис. 10.2, c) имеет вид:

$$\begin{matrix} \mu \\ \uparrow \end{matrix} \circlearrowleft \begin{matrix} \nu \\ \uparrow \end{matrix} = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2). \quad (10.8)$$

Рассматривая это выражение как ряд Тейлора по  $q$ , видим, что постоянное и линейное слагаемые отсутствуют, что уменьшает кажущуюся степень расходимости от 2 до 0. Поэтому единственная расходимость содержится в постоянном слагаемом  $\Pi(q^2)$ , и она только логарифмическая. Именно этот результат мы получили в уравнении (7.90) для вклада в  $\Pi(q^2)$  в низшем порядке теории возмущений.

Наконец, рассмотрим амплитуду рассеяния фотона на фотоне (рис. 10.2, е). Если мы заменим любой внешний фотон его вектором 4-импульса, то в силу тождества Уорда амплитуда обратится в нуль:

$$k^\mu \left( \begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \rho \quad \sigma \end{array} \right) = 0. \quad (10.9)$$

Перебирая все мыслимые комбинации, можно показать, что это условие удовлетворяется, только если амплитуда пропорциональна  $(g^{\mu\nu}k^\sigma - g^{\mu\sigma}k^\nu)$  и аналогичным множителям для трех других хвостов. Каждый из этих множителей содержит одну степень импульса, так что все слагаемые в ряде Тейлора для этой амплитуды со степенью импульса меньше четырех должны обратиться в нуль. Первое неисчезающее слагаемое имеет  $D = 0 - 4 = -4$ , и поэтому амплитуда конечна.

Суммируя результаты, мы обнаружили, что в КЭД имеется только три «примитивно» расходящиеся амплитуды — те самые, которые уже были найдены в главах 6 и 7. (Другие амплитуды также могут расходиться, но только из-за диаграмм, содержащих примитивно расходящиеся амплитуды в качестве компонентов.) Кроме того, зависимость этих расходящихся амплитуд от внешних импульсов чрезвычайно проста. Если разложить каждую из амплитуд в степенной ряд по внешним импульсам, то в эти разложения войдут всего четыре расходящихся коэффициента. Иными словами, в КЭД содержится только четыре расходящихся числа. В следующем разделе мы покажем, каким образом эти числа могут быть поглощены ненаблюдаемыми параметрами лагранжиана, так что наблюдаемые амплитуды рассеяния всегда оказываются конечными.

В оставшейся части этого раздела попробуем понять смысл кажущейся степени расходимости с более общей точки зрения. Теория КЭД в четырёх пространственно-временных измерениях является довольно частным случаем, поэтому прежде всего обобщим результаты на КЭД в  $d$  измерениях. В этом случае  $D$  имеет вид:

$$D \equiv dL - P_e - 2P_\gamma, \quad (10.10)$$

так как каждая петля соответствует  $d$ -мерному интегралу по импульсу. Соотношения (10.2) и (10.3) остаются справедливыми, так что можно снова переписать  $D$  через  $V$ ,  $N_e$  и  $N_\gamma$ . На этот раз получаем:

$$D = d + \left(\frac{d-4}{2}\right)V - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e. \quad (10.11)$$

Сокращение  $V$  в этом выражении происходит в частном случае  $d = 4$ . При  $d < 4$  диаграммы с бóльшим числом вершин имеют меньшую степень расходимости, так что полное число расходящихся *диаграмм* конечно. При  $d > 4$  диаграммы с бóльшим числом вершин имеют бóльшую степень расходимости, так что любая амплитуда в достаточно высоком порядке теории возмущений становится кажущимся образом расходящейся.

Перечисленные три типа ультрафиолетового поведения возникают и в других квантовых теориях поля. Будем называть эти типы следующим образом.

Суперперенормируемая теория:	только конечное число фейнмановских диаграмм имеет кажущуюся расходимость.
Перенормируемая теория:	только конечное число амплитуд имеет кажущуюся расходимость, однако расходимости возникают во всех порядках теории возмущений.
Неперенормируемые теории:	все амплитуды расходятся в достаточно высоком порядке теории возмущений.

На основе этой классификации можно сказать, что КЭД перенормируема в 4 измерениях, суперперенормируема при числе измерений меньше четырех и неперенормируема при числе измерений больше четырех. В большинстве детально изученных случаев анализ, основанный на кажущейся расходимости, правильно описывает истинную структуру расходимостей. Известны примеры, когда истинное поведение оказывается лучше, чем предсказываемое этой картиной, и это связано с мощными симметриями, в силу которых некоторые или все кажущимся образом расходящиеся амплитуды обращаются в нуль\*. С другой стороны, как мы поясним в разделе 10.4, всегда верно утверждение, что расходимости в кажущимся образом перенормируемых теориях могут быть поглощены конечным числом параметров лагранжиана. Для теорий, включающих поля спина 1 или выше, петлевые диаграммы могут доставлять дополнительные проблемы, в том числе нарушение унитарности. Мы обсудим эту трудность в гл. 16.

В качестве другого примера подсчета ультрафиолетовых расходимостей рассмотрим чисто скалярную теорию в  $d$  измерениях со взаимодействием  $\phi^n$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{n!}\phi^n. \quad (10.12)$$

Пусть  $N$  — число внешних линий в диаграмме,  $P$  — число пропагаторов и  $V$  — число вершин. Число петель в диаграмме равно  $L = P - V + 1$ . В каждой вершине сходятся  $n$  линий, так что  $nV = N + 2P$ . Собирая эти выражения, находим, что кажущаяся степень расходимости диаграммы равна

$$D = dL - 2P = d + \left[ n\left(\frac{d-2}{2}\right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2}\right) N. \quad (10.13)$$

В четырех измерениях взаимодействие  $\phi^4$  перенормируемо, а для более высоких степеней  $\phi$  неперенормируемо. В трех измерениях перенормируемо взаимодействие  $\phi^6$ , а  $\phi^4$  уже суперперенормируемо. В двух пространственно-временных измерениях любое взаимодействие вида  $\phi^n$  суперперенормируемо.

Выражение (10.13) можно вывести несколько иначе на основании анализа размерностей. В любой квантовой теории поля действие  $S = \int d^d x \mathcal{L}$  должно быть безразмерно, поскольку мы работаем в системе единиц, в которой  $\hbar = 1$ . В этой системе произведение дифференциалов  $d^d x$  имеет размерность (масса) $^{-d}$ , так что лагранжиан имеет размерность (масса) $^d$ . Так как размерности всех величин могут быть выражены через степени массы, вполне однозначно можно сказать, что лагранжиан имеет «размерность  $d$ ». С помощью этого результата можно из явного вида (10.12) установить

\*Некоторые экзотические четырехмерные теории поля на самом деле свободны от расходимостей. См., например, статью: P. West in *Shelter Island II*, R. Jackiw, N. N. Khuri, S. Weinberg, and E. Witten, eds. (MIT Press, Cambridge, 1985).

размерности поля  $\phi$  и константы связи  $\lambda$ . Из кинетического слагаемого в  $\mathcal{L}$  видно, что размерность  $\phi$  равна  $(d-2)/2$ . Заметим, что параметр  $m$  самосогласованным образом имеет размерность массы. Из слагаемого со взаимодействием с учетом размерности  $\phi$  выводим, что размерность  $\lambda$  равна  $d - n(d-2)/2$ .

Рассмотрим теперь произвольную диаграмму с  $N$  внешними линиями. Такая диаграмма может возникнуть только из слагаемого со взаимодействием  $\eta\phi^N$  в лагранжиане. Размерность  $\eta$  должна быть тогда равной  $d - N(d-2)/2$ , поэтому мы приходим к выводу, что любая (ампутированная) диаграмма с  $N$  внешними линиями имеет размерность  $d - N(d-2)/2$ . В рассматриваемой теории с единственной вершиной  $\lambda\phi^n$  в случае, когда диаграмма имеет  $V$  вершин, ее расходящаяся часть пропорциональна  $\lambda^V \Lambda^D$ , где  $\Lambda$  — обрезание по большому импульсу, а  $D$  — кажущаяся степень расходимости. (Это «базовый» случай; все упомянутые выше исключения содержатся здесь.) Используя анализ размерностей, получаем

$$d - N\left(\frac{d-2}{2}\right) = V\left[d - n\left(\frac{d-2}{2}\right)\right] + D,$$

в согласии с (10.13).

Заметим, что величина, на которую умножается  $V$  в этом выражении, в точности равна размерности константы связи  $\lambda$ . Такой анализ с теми же результатами можно провести для КЭД и других теорий поля. Таким образом, можно вторым способом охарактеризовать три типа перенормируемости теории поля:

Суперперенормируемость:	константа связи имеет размерность массы в положительной степени.
Перенормируемость:	константа связи безразмерна.
Неперенормируемость:	константа связи имеет размерность массы в отрицательной степени.

Именно это мы утверждали без доказательства в разделе 4.1. В КЭД константа связи безразмерна, поэтому КЭД перенормируема (по крайней мере, кажущимся образом).

## 10.2. Перенормируемая теория возмущений

Как мы видели в предыдущем разделе, перенормируемая квантовая теория поля содержит только небольшое количество кажущимся образом расходящихся амплитуд. Так, в КЭД имеются три такие амплитуды, содержащие четыре бесконечные константы. В главах 6 и 7 эти бесконечности исчезали в конце вычислений: бесконечность в диаграмме поправки к вершине сокращалась путем перенормировки поля электрона, а бесконечность в диаграмме поляризации вакуума приводила лишь к ненаблюдаемому сдвигу величины заряда электрона. На самом деле, в общем случае верно утверждение, что в перенормируемой квантовой теории поля расходимости никогда не проявляются в наблюдаемых величинах.

При получении конечного результата для амплитуды, включающей расходящиеся диаграммы, до сих пор использовалась следующая процедура. Производилось вычисление диаграмм с использованием регуляризаторов с тем, чтобы получить выражение, зависящее от голой массы ( $m_0$ ), голой константы связи ( $e_0$ ) и некоторого ультрафиолетового обрезания ( $\Lambda$ ). Затем вычислялись физическая масса ( $m$ ) и физическая константа связи ( $e$ ) в том порядке теории возмущений, который был согласован с осталь-

ными расчетами. Указанные величины также зависят от  $m_0$ ,  $e_0$  и  $\Lambda$ . Чтобы вычислить элемент  $S$ -матрицы (но не корреляционную функцию), следует также рассчитать константу(ы) перенормировки  $Z$  (согласно формуле (7.45)). Собирая все полученные выражения, следует исключить из них  $m_0$  и  $e_0$ , заменив на  $m$  и  $e$ ; этот шаг называется «перенормировкой». Получившееся выражение для амплитуды должно быть конечным в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

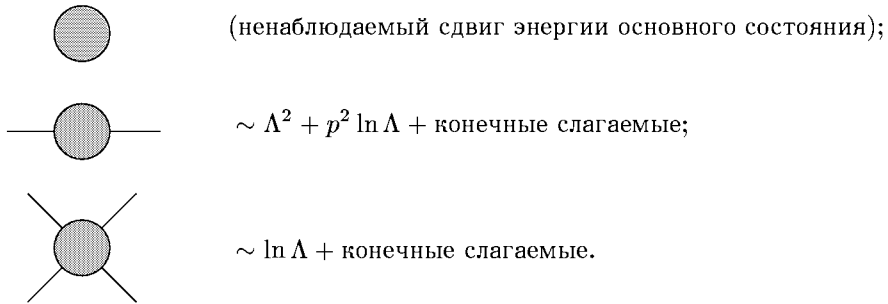
Указанная процедура всегда работает в перенормируемой квантовой теории поля. Однако часто она может быть громоздкой, особенно в высших порядках теории возмущений. В этом разделе мы разовьем альтернативную процедуру, работающую с большей степенью автоматизма. Сделаем это сначала на примере теории  $\phi^4$ , а в следующем разделе вернемся к КЭД. Лагранжиан теории  $\phi^4$  имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4.$$

Мы пишем в этом выражении  $m_0$  и  $\lambda_0$ , чтобы подчеркнуть, что это голые значения массы и константы связи, а не те значения, которые измеряются на опыте. Согласно (10.13), кажущаяся степень расходимости диаграммы с  $N$  внешними хвостами равна

$$D = 4 - N.$$

Так как теория инвариантна относительно замены  $\phi \rightarrow -\phi$ , все амплитуды с нечетным числом внешних хвостов обращаются в нуль. Поэтому единственными расходящимися амплитудами будут:



Отбрасывая вакуумные диаграммы, видим, что в амплитуды входят три бесконечные константы. Наша цель — поглотить эти константы тремя ненаблюдаемыми параметрами теории: голой массой, голой константой связи и напряженностью поля. Чтобы осуществить эту цель, удобно переформулировать разложение в ряд теории возмущений таким образом, чтобы эти ненаблюдаемые величины не возникали бы явно в фейнмановских правилах.

Прежде всего, устраним сдвиг напряженности поля. Напомним из раздела 7.1, что точная двухточечная функция имеет вид:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + \text{слагаемые, регулярные при } p^2 = m^2, \tag{10.14}$$

где  $m$  — физическая масса. Можно устранить неприятный вычет  $Z$  из этого уравнения, изменив масштаб поля:

$$\phi = Z^{1/2} \phi_r. \tag{10.15}$$

Такое преобразование изменяет значения корреляционных функций на множитель  $Z^{-1/2}$  для каждого поля. Таким образом, при вычислении элементов  $S$ -матрицы нам уже не нужны множители  $Z$  в (7.45); амплитуда рассеяния является простой суммой всех связанных ампутированных диаграмм, как мы и предполагали в (4.103).

После изменения масштаба лагранжиан выглядит намного уродливее:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2Z\phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!}Z^2\phi_r^4. \quad (10.16)$$

В  $\mathcal{L}$  все еще содержатся голые масса и константа связи, но их можно устранить следующим способом. Определим

$$\delta_Z = Z - 1, \quad \delta_m = m_0^2Z - m^2, \quad \delta_\lambda = \lambda_0Z^2 - \lambda, \quad (10.17)$$

где  $m$  и  $\lambda$  — физически измеряемые масса и константа связи. Тогда лагранжиан принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi_r^4 + \\ & + \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi_r)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\phi_r^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi_r^4. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Первая строчка выглядит теперь как знакомый лагранжиан теории  $\phi^4$ , но записанный через физические массу и заряд. Слагаемые во второй строке, которые носят название *контрчленов*, поглотили бесконечные, но ненаблюдаемые сдвиги между голыми и физическими параметрами. Есть искушение сказать, что мы «добавили» эти контрчлены в лагранжиан, но на самом деле, мы просто разбили каждое слагаемое в (10.16) на две части.

Определения в (10.17) малополезны, пока мы не дадим точных определений физических массы и константы связи. Формула (10.14) определяет  $m^2$  как положение полюса в пропагаторе. Нет явно лучшего определения  $\lambda$ , но достаточно хорошее получается, если положить  $\lambda$  равным значению амплитуды рассеяния при нулевом импульсе. Итак, имеем два определяющих соотношения:

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \frac{i}{p^2 - m^2} + (\text{слагаемые, регулярные при } p^2 = m^2); \\ \left( \bigcirc \right) &= -i\lambda \quad \text{при } s = 4m^2, t = u = 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

ампутированная

Эти уравнения носят название *условий перенормировки*. (В первом условии на самом деле содержатся два условия, так как задаются как положение полюса, так и его вычет.) Новый лагранжиан (10.18) определяет новый набор фейнмановских правил, показанный на рис. 10.3.

Пропагатор и первая вершина возникают из слагаемых в первой строке (10.18) и совпадают со старыми правилами, если не считать того, что вместо голых входят физические масса и константа связи. Контрчлены во второй строке (10.18) приводят к двум новым вершинам (их также называют контрчленами).

Новые фейнмановские правила можно использовать для вычисления любой амплитуды в теории  $\phi^4$ . Процедура такова. Вычисляем желаемую амплитуду как сумму всех возможных диаграмм, построенных из пропагаторов и вершин, указанных на рис. 10.3.

$$\begin{aligned}
 \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \text{---} \times \text{---} &= -i\lambda \\
 \text{---} \otimes \text{---} &= i(p^2 \delta_Z - \delta_m) \\
 \text{---} \otimes \times &= -i\delta_\lambda
 \end{aligned}$$

Рис. 10.3. Фейнмановские правила для теории  $\phi^4$  в рамках перенормированной теории возмущений.

Интегралы по петлям в диаграммах чаще всего будут расходиться, так что следует ввести регуляризатор. Результатом этого вычисления будет функция трех неизвестных параметров  $\delta_Z$ ,  $\delta_m$  и  $\delta_\lambda$ . Следует настроить (или «перенормировать») эти три параметра так, чтобы обеспечить выполнение условий перенормировки (10.19). После этой настройки выражение для амплитуды станет конечным и независимым от регуляризатора.

Такая процедура, использующая фейнмановские правила с контрчленами, носит название *перенормированной теории возмущений*. Ее следует сопоставить с той процедурой, которую мы использовали в части I и упомянули в начале этого раздела. Ее называют *теорией возмущений с голыми параметрами* (поскольку в фейнмановских правилах фигурируют голые масса и константа связи). Оба метода совершенно эквивалентны. Разница между ними сводится к бухгалтерии. Используя любую процедуру, вы получите один и тот же ответ, поэтому выбирайте ту, которая вам кажется удобнее. В общем случае перенормированная теория возмущений технически проще, особенно в случае диаграмм с большим числом петель; однако теория возмущений с голыми параметрами несколько легче в случае сложных однопетлевых вычислений. В остальной части книги мы будем в большинстве случаев использовать перенормированную теорию возмущений.

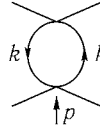
### Однопетлевая структура теории $\phi^4$

Чтобы лучше уяснить смысл процедуры перенормировки, явно выполним ее на однопетлевом уровне.

Рассмотрим сначала базисную двухчастичную амплитуду рассеяния

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) &= \text{---} \otimes \text{---} = \\
 &= \text{---} \times \text{---} + \left( \text{---} \otimes \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} \right) + \text{---} \otimes \times + \dots
 \end{aligned}$$

Если ввести  $p = p_1 + p_2$ , то вклад второй диаграммы примет вид:



$$\begin{aligned} &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \equiv \\ &\equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Заметим, что  $p^2$  есть мандельстамовская переменная  $s$ . Две другие диаграммы дают такой же вклад, не считая того, что  $s$  должно быть заменено на  $t$  и  $u$ . Поэтому полная амплитуда равна:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda. \quad (10.21)$$

Согласно нашему условию перенормировки (10.19), эта амплитуда должна быть равна  $-i\lambda$  при  $s = 4m^2$  и  $t = u = 0$ . Поэтому следует положить

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)]. \quad (10.22)$$

(В более высоких порядках теории возмущений будут дополнительные вклады в  $\delta_\lambda$ .) Можно явно вычислить  $V(p^2)$ , используя размерную регуляризацию. Процедура в точности совпадает с описанной в разделе 7.5. Вводится фейнмановский параметр, производится сдвиг переменной интегрирования, поворот к евклидовому пространству и вычисляется интеграл по импульсу. Получаем:

$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2xk \cdot p + xp^2 - m^2]^2} = \\ &= \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\ell^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2} = \quad (\ell = k + xp) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\ell_E^2 - x(1-x)p^2 + m^2]^2} = \quad (\ell_E^0 = -i\ell^0) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-d/2}} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow 4} -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln[m^2 - x(1-x)p^2] \right), \end{aligned} \quad (10.23)$$

где  $\varepsilon = 4 - d$ . Поэтому поправка к константе связи (10.22) равна

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= \frac{\lambda^2}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{[m^2 - x(1-x)4m^2]^{2-d/2}} + \frac{2}{[m^2]^{2-d/2}} \right) \xrightarrow{d \rightarrow 4} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left( \frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma + 3 \ln(4\pi) - \ln[m^2 - x(1-x)4m^2] - 2 \ln[m^2] \right). \end{aligned} \quad (10.24)$$



Эти выражения расходятся при  $d \rightarrow 4$ . Однако, если скомбинировать их согласно (10.21), получаем конечный (хотя и сложный) результат:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2}\right) + \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2}\right) \right]. \quad (10.25)$$

Чтобы определить  $\delta_Z$  и  $\delta_m$ , следует вычислить двухточечную функцию. Как и в разделе 7.2, определим  $-iM^2(p^2)$  как сумму всех одночастично неприводимых вставок в пропагатор:

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -iM^2(p^2). \quad (10.26)$$

Тогда полная двухточечная функция определяется геометрической прогрессией:

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Условия перенормировки (10.19) требуют, чтобы полюс полного пропагатора находился в точке  $p^2 = m^2$  и вычет в нем был бы равен 1. Эти два условия эквивалентны, соответственно, условиям:

$$M^2(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dp^2} M^2(p^2)|_{p^2=m^2} = 0. \quad (10.28)$$

(Для проверки последнего условия следует разложить  $M^2$  в (10.27) в окрестности  $p^2 = m^2$ .) Явное выражение в однопетлевом приближении:

$$\begin{aligned} -iM^2(p^2) &= \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} = \\ &= -i\lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m) = \\ &= -\frac{i\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}} + i(p^2 \delta_Z - \delta_m). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Так как первое слагаемое не зависит от  $p^2$ , результат довольно тривиален. Полагая

$$\delta_Z = 0 \quad \text{и} \quad \delta_m = -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}}, \quad (10.30)$$

получаем, что  $M^2(p^2) = 0$  для всех  $p^2$ , что удовлетворяет обоим условиям в (10.28). Первые ненулевые вклады в  $M^2(p^2)$  и  $\delta_Z$ , пропорциональные  $\lambda^2$ , возникают от диаграмм

$$\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \otimes \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} \quad (10.31)$$

Вторая диаграмма содержит контрчлен  $\delta_\lambda$ , который уже был вычислен. Он сокращает ультрафиолетовые расходимости в первой диаграмме, возникающие при условии, когда один из импульсов в петле велик, а другой мал. Третья диаграмма представляет собой контрчлен  $(p^2\delta_Z - \delta_m)$  и фиксируется в порядке  $\lambda^2$  требованием, чтобы сократились оставшиеся расходимости (отвечающие случаю, когда оба импульса в петле велики). В разделе 10.4 на примере двухпетлевого вычисления мы увидим взаимное влияние разных контрчленов.

Обращение в нуль  $\delta_Z$  в однопетлевом приближении есть специфическое свойство теории  $\phi^4$ , не имеющее места в более общих теориях скалярных полей. Представленная в разделе 4.7 теория Юкавы демонстрирует явный пример однопетлевой поправки, в которой требуется учет этого контрчлена. В теории Юкавы поправки к пропагатору скалярного поля в порядке  $g^2$  возникают от диаграммы с фермионной петлей и от двух пропагаторных контрчленов. С помощью фейнмановских правил для фермионов из раздела 4.7 вычисляем вклад петли:

$$\begin{aligned}
 -iM^2(p^2) &= \text{---} \overrightarrow{p} \text{---} \bigcirc_k^{k+p} \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} = \\
 &= -(-ig)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{tr} \left[ \frac{i(\not{k} + \not{p} + m_f)}{(k+p)^2 - m_f^2} \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2} \right] + i(p^2\delta_Z - \delta_m) = \quad (10.32) \\
 &= -4g^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k \cdot (p+k) + m_f^2}{((p+k)^2 - m_f^2)(k^2 - m_f^2)} + i(p^2\delta_Z - \delta_m),
 \end{aligned}$$

где  $m_f$  — масса фермиона, взаимодействующего с юкавским полем. Для вычисления интеграла объединим знаменатели и сделаем сдвиг как в (10.23). Тогда первое слагаемое примет вид:

$$\begin{aligned}
 &-4g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 - x(1-x)p^2 + m_f^2}{(\ell^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2)^2} = \\
 &= -4g^2 \int_0^1 dx \frac{-i}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{\frac{d}{2}\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Delta^{1-d/2}} - \frac{\Delta\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \right) = \quad (10.33) \\
 &= \frac{4ig^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Delta^{1-d/2}},
 \end{aligned}$$

где  $\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2$ .

Теперь видно, что условия перенормировки (10.28) удовлетворяются только, если оба контрчлена  $\delta_m$  и  $\delta_Z$  принимают ненулевые значения. Для определения  $\delta_m$  вычитаем, как и раньше, значение петлевой диаграммы при  $p^2 = m^2$ , так что

$$\delta_m = \frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{[m_f^2 - x(1-x)m^2]^{1-d/2}} + m^2\delta_Z. \quad (10.34)$$

Для нахождения  $\delta_Z$  сокращаем также первую производную по  $p^2$  от петлевого интег-

рала (10.33). В результате

$$\delta_Z = -\frac{4g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m_f^2 - x(1-x)m^2]^{2-d/2}} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \xrightarrow{d \rightarrow 4} -\frac{3g^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \frac{2}{3} + \ln(4\pi) - \ln[m_f^2 - x(1-x)m^2] \right). \quad (10.35)$$

Таким образом, в теории Юкавы поправки к пропагатору в однопетлевом приближении требуют квадратично расходящейся перенормировки массы и логарифмически расходящейся перенормировки самого поля. Эта ситуация обычна для скалярных теорий поля.

### 10.3. Перенормировка квантовой электродинамики

Рассмотренная в предыдущем разделе процедура, использующая «перенормированную» теорию возмущений, включающую только физически измеримые параметры, может быть суммирована следующим образом.

1. Следует включить перенормировки напряженностей полей в лагранжиан путем изменения масштаба полей.
2. Разбить каждое слагаемое в лагранжиане на две части, включив бесконечные ненаблюдаемые сдвиги в контрчлены.
3. Задать условия перенормировки, определяющие физические массы и константы связи, и положить константы перенормировки напряженностей полей равными единице.
4. Вычислить амплитуды по новым фейнмановским правилам, подбирая контрчлены так, чтобы соблюсти условия перенормировки.

Воспользуемся этой процедурой для построения перенормированной теории возмущений в квантовой электродинамике. Исходный лагранжиан КЭД равен

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\partial - m_0)\psi - e_0\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

Вычислив с помощью этого лагранжиана электронный и фотонный пропагаторы, получаем в общем случае выражения вида

$$\text{---} \circ \text{---} = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots; \quad \text{---} \circ \text{---} = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots.$$

(Именно эти выражения были получены в явных однопетлевых вычислениях в гл. 7.) Чтобы поглотить  $Z_2$  и  $Z_3$  в  $\mathcal{L}$  и, следовательно, устранить их из формулы (7.45) для  $S$ -матрицы, совершаем подстановки  $\psi = Z_2^{1/2}\psi_r$  и  $A^\mu = Z_3^{1/2}A_r^\mu$ . Тогда лагранжиан примет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}_r(i\partial - m_0)\psi_r - e_0Z_2Z_3^{1/2}\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\mu}. \quad (10.36)$$

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \leftarrow q \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (\text{калибровка Фейнмана}). \\
\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \rightarrow p \\ \text{~~~~~} \end{array} &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \\
\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} &= -ie\gamma^\mu. \\
\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} &= -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3. \\
\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \leftarrow \otimes \\ \text{~~~~~} \end{array} &= i(\not{p}\delta_2 - \delta_m). \\
\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} &= -ie\gamma^\mu\delta_1.
\end{aligned}$$

Рис. 10.4. Фейнмановские правила для квантовой электродинамики в перенормированной теории возмущений.

Можно ввести физический электрический заряд  $e$ , измеренный на больших расстояниях ( $q = 0$ ), определив масштабный множитель  $Z_1$  как\*

$$e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1. \quad (10.37)$$

Если положить, что  $m$  — физическая масса (положение полюса электронного пропагатора), то можно разбить каждое слагаемое в лагранжиане на две части:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\not{\partial} - m)\psi_r - e\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\mu} - \\
&-\frac{1}{4}\delta_3(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\delta_2\not{\partial} - \delta_m)\psi_r - e\delta_1\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\mu},
\end{aligned} \quad (10.38)$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_3 &= Z_3 - 1, & \delta_2 &= Z_2 - 1, \\
\delta_m &= Z_2 m_0 - m, & \text{и} & \quad \delta_1 = Z_1 - 1 = (e_0/e)Z_2 Z_3^{1/2} - 1.
\end{aligned}$$

Фейнмановские правила для перенормированной КЭД приведены на рис. 10.4. В дополнение к знакомым пропагаторам и вершине появляются три контрчленные диаграммы. Вершины  $ee$  и  $ee\gamma$  можно непосредственно увидеть из лагранжиана (10.38). Чтобы вывести выражение для вклада двухфотонного контрчлена, следует проинтегрировать  $-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$  по частям, что дает  $-\frac{1}{2}A_\mu(-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu$ ; отсюда и получается выражение, приведенное на рисунке. В оставшейся части книги при рассмотрении перенормированной теории возмущений мы будем опускать использовавшийся до сих пор индекс  $r$ , отмечавший перенормированные поля.

Каждый из четырех контрчленных коэффициентов должен быть фиксирован с помощью условия перенормировки. Требуемые четыре условия уже неявно были сформулированы. Два из них фиксируют константы перенормировки фотонного и электронного полей, полагая их равными единице, а другие два определяют физическую массу

\*Так как  $e$  определяется условием перенормировки  $\Gamma^\mu(q=0) = \gamma^\mu$ , множитель  $Z_1$  в лагранжиане должен сокращать мультипликативный поправочный множитель, возникающий от петлевых поправок. Поэтому приведенное определение  $Z_1$  эквивалентно тому, которое дано в (7.47).

электрона и его заряд. Чтобы в более явном виде записать эти условия, вспомним наши обозначения из гл. 6 и 7:

$$\begin{aligned}
 \mu \text{---} \text{OCH} \text{---} \nu &= i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2), \\
 \text{---} \text{OCH} \text{---} &= -i\Sigma(\not{p}), \\
 \left( \text{---} \text{OCH} \text{---} \right) &= -ie\Gamma^\mu(p', p).
 \end{aligned} \tag{10.39}$$

ампутированная

Теперь следует вычислить эти амплитуды в рамках перенормированной теории возмущений. Иными словами, мы переопределяем  $\Pi(q^2)$ ,  $\Sigma(\not{p})$  и  $\Gamma(p', p)$ , включая в них контрчленные вершины. Кроме того, новое определение  $\Gamma$  включает физический заряд электрона. С учетом этих обозначений четыре условия принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \Sigma(\not{p} = m) &= 0; \\
 \frac{d}{d\not{p}}\Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} &= 0; \\
 \Pi(q^2 = 0) &= 0; \\
 -ie\Gamma^\mu(p' = p = 0) &= -ie\gamma^\mu.
 \end{aligned} \tag{10.40}$$

Первое условие фиксирует массу электрона равной  $m$ , а два следующих фиксируют вычеты электронного и фотонного пропагаторов равными единице. При выполнении этих условий последнее условие фиксирует заряд электрона равным  $e$ .

### Однопетлевая структура КЭД

Четыре условия (10.40) позволяют определить четыре контрчлена в (10.38), выразив их через значения петлевых диаграмм. В главах 6 и 7 мы вычислили вклады всех диаграмм, необходимые для того, чтобы определить контрчлены в однопетлевом приближении. Соберем эти результаты и найдем явные выражения для перенормировочных констант КЭД в порядке  $\alpha$ . Для общей согласованности будем использовать размерную регуляризацию для контроля за ультрафиолетовыми расходимостями и введем массу фотона  $\mu$  для контроля за инфракрасными расходимостями. В части I, еще до введения размерной регуляризации, вклады вершинной диаграммы и диаграмм собственной энергии были вычислены с использованием схемы регуляризации Паули–Вилларса. Теперь мы имеем возможность воспользоваться вкладом этих диаграмм, считая их полученными в рамках размерной регуляризации.

Первые два условия относятся к собственной энергии электрона. В разделе 7.1 мы вычислили вклад однопетлевой диаграммы в  $\Sigma(p)$ , используя регуляризацию Паули–Вилларса. Результат приведен в формуле (7.19). Если заново вычислить вклад диаграммы с помощью размерной регуляризации, появятся несколько дополнительных слагаемых в дираковской алгебре, возникающих от измененных правил свертки (7.89). Учитывая эти слагаемые, получаем для данной диаграммы ( $\epsilon = 4 - d$ ):

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_2(p) &= -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{((1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2)^{2-d/2}} \times \\
 &\quad \times ((4-\epsilon)m - (2-\epsilon)x\not{p}).
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

Поэтому согласно первому из условий (10.40)

$$m\delta_2 - \delta_m = \Sigma_2(m) = \frac{e^2 m}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2}) \cdot (4-2x-\varepsilon(1-x))}{((1-x)^2 m^2 + x\mu^2)^{2-d/2}}. \quad (10.42)$$

Аналогично, второе условие (10.40) определяет  $\delta_2$ :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{d}{d\mu} \Sigma_2(m) = \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{((1-x)^2 m^2 + x\mu^2)^{2-d/2}} \times \\ &\quad \times \left[ (2-\varepsilon)x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{2x(1-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} (4-2x-\varepsilon(1-x)) \right]. \end{aligned} \quad (10.43)$$

Заметим, что второе слагаемое в скобках приводит к конечному результату при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , так как на него умножается расходящаяся гамма-функция. Для третьего условия (10.40) требуется значение (7.90) вклада диаграммы собственной энергии фотона:

$$\Pi_2(q^2) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2-d/2}} (8x(1-x)).$$

Тогда

$$\delta_3 = \Pi_2(0) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2)^{2-d/2}} (8x(1-x)). \quad (10.44)$$

Для последнего условия требуется значение вершинной функции электрона, вычисленной в разделе 6.3. Опять нужно заново вычислить вклад этой диаграммы в рамках размерной регуляризации. Тогда сдвиг форм-фактора  $F_1(q^2)$  (6.53) окажется равным

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \frac{(2-\varepsilon)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}} (q^2[2(1-x)(1-y) - \varepsilon xy] + m^2[2(1-4z+z^2) - \varepsilon(1-z)^2]) \right], \end{aligned} \quad (10.45)$$

где, как и ранее,  $\Delta = (1-z)^2 m^2 + z\mu^2 - xyq^2$ . После этого четвертое условие перенормировки определяет

$$\begin{aligned} \delta_1 = -\delta F_1(0) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dz (1-z) \left[ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{((1-z)^2 m^2 + z\mu^2)^{2-d/2}} \frac{(2-\varepsilon)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{((1-z)^2 m^2 + z\mu^2)^{3-d/2}} [2(1-4z+z^2) - \varepsilon(1-z)^2] m^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.46)$$

С помощью интегрирования по частям, аналогичного тому, которое привело к (7.32), можно получить непосредственно из (10.46) и (10.43), что  $\delta_1 = \delta_2$ , т.е. что  $Z_1 = Z_2$  в порядке  $\alpha$ . Как и в предыдущем случае, эта формула вытекает из тождества Уорда. Лагранжиан (10.38) при условии, что контрчлены приравнены нулю, является калибровочно-инвариантным. Если процедура регуляризации также калибровочно-инвариантна (а мы используем размерную регуляризацию), отсюда вытекает тождество Уорда для диаграмм без контрчленных вершин. В частности, отсюда вытекает, что  $\delta F_1(0) = -d\Sigma_2/d\psi|_m$ . Тогда те контрчлены  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , которые требуются, чтобы сократить эти два множителя, обязаны равняться друг другу.

Продолжая эти рассуждения, можно непосредственно построить полное диаграммное доказательство того, что  $\delta_1 = \delta_2$  во всех порядках перенормированной теории возмущений, используя метод, который мы уже применили в разделе 7.4 для доказательства тождества Уорда–Такахаси в теории возмущений с голыми параметрами. Обобщая приведенные там аргументы, можно показать, что диаграммное тождество (7.68) выполняется для диаграмм, включающих контрчленные вершины в петлях. Следовательно, если контрчлены  $\delta_1$  и  $\delta_2$  определены в порядке  $\alpha^n$ , перенормированная вершинная диаграмма при  $q^2 = 0$  равна производной от перенормированной диаграммы собственной энергии на массовой оболочке в порядке  $\alpha^{n+1}$ . Чтобы удовлетворить условиям перенормировки (10.40), мы должны поэтому положить контрчлены  $\delta_1$  и  $\delta_2$  равными друг другу в порядке  $\alpha^{n+1}$ . Такое рекурсивное рассуждение приводит еще к одному доказательству равенства  $Z_1 = Z_2$  во всех порядках теории возмущений КЭД.

Соотношение (10.37) между голым и перенормированным зарядом

$$e = \frac{Z_2}{Z_1} Z_3^{1/2} e_0 \quad (10.47)$$

позволяет расширить физическую интерпретацию тождества  $Z_1 = Z_2$ . Используя его, можно переписать (10.47) в виде

$$e = \sqrt{Z_3} e_0,$$

что в точности совпадает с соотношением (7.76), выведенным на основании диаграммных рассуждений в разделе 7.5. Отсюда следует, что связь между голым и перенормированным электрическим зарядом зависит только от перенормировки поля фотона, а не от величин, связанных с электроном. Чтобы понять важность этого наблюдения, рассмотрим перенормированную квантовую электродинамику с двумя сортами заряженных частиц, скажем, электронами и мюонами. Тогда в дополнение к (10.37) будем иметь соотношение для фотон-мюонной вершины

$$e Z_2'^{-1} Z_3^{-1/2} = e_0 Z_1'^{-1}, \quad (10.48)$$

где  $Z_1'$  и  $Z_2'$  — перенормировки вершины и поля мюона. Каждая из этих двух констант зависит от массы мюона, поэтому есть угроза, что (10.48) определяет иное соотношение между  $e_0$  и  $e$ , чем выписанное в (10.47). Однако в силу тождества Уорда множители  $Z_1'$  и  $Z_2'$  выпадают из этого соотношения, так что остается универсальный электрический заряд, имеющий одно и то же значение для всех сортов частиц.

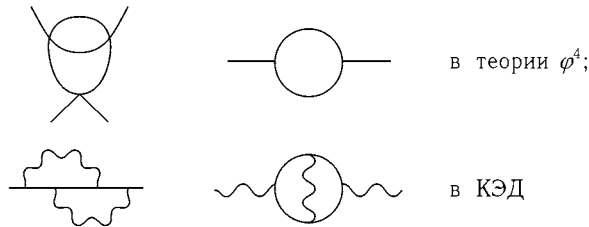
## 10.4. Перенормировка в высших порядках

В последних двух разделах мы развили алгоритм расчета амплитуд рассеяния в любом порядке теории возмущений для перенормируемой теории поля. Мы воочию убедились, что этот алгоритм приводит к конечным результатам на однопетлевом уровне как

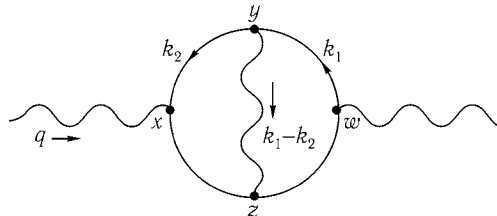
в теории  $\phi^4$ , так и в КЭД. Как следует из наивного анализа в разделе 10.1, алгоритм должен работать и в высших порядках. Однако этот анализ не учитывал многие тонкости, возникающие в многопетлевых диаграммах; в частности, он игнорировал то, что такие диаграммы могут содержать расходящиеся поддиаграммы. Если по всем остальным признакам конечная диаграмма содержит расходящуюся поддиаграмму, то действия с расходимостью сравнительно просты. Например, сумма диаграмм

$$(10.49)$$

конечна: расходимость в фотонном пропагаторе сокращается так же, как если бы этот пропагатор возник в древесной диаграмме. Конечная сумма двух пропагаторных диаграмм дает подынтегральное выражение для внешней петли, которое убывает достаточно быстро для того, чтобы интеграл продолжал сходиться. Более сложная ситуация возникает в случае так называемых *перекрывающихся* расходимостей, т. е. таких, у которых в пропагаторе содержатся две расходящиеся петли. Примеры диаграмм с перекрывающимися расходимостями:



Чтобы понять, в чем трудность, рассмотрим диаграмму собственной энергии фотона:



Один вклад в эту диаграмму возникает от области импульсного пространства, в которой  $k_2$  очень велико. Это означает, что в координатном пространстве  $x, y$  и  $z$  находятся очень близко друг к другу, а  $w$  может быть дальше. В этой области можно считать, что виртуальный фотон дает поправку к вершине в точке  $x$ . В разделе 6.3. мы видели, что в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  такая вершинная поправка вносит логарифмическую расходимость вида

$$\sim -ie\gamma^\mu \cdot \alpha \ln \Lambda^2.$$

Вставляя эту вершину в остальную часть диаграммы и интегрируя по  $k_1$ , получаем выражение, тождественное представленной в (7.90) однопетлевой поправке к собственной



энергии фотона  $\Pi_2(q^2)$ , умноженной на дополнительную логарифмическую расходимость:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &\sim \alpha(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi_2(q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2 \sim \\
 &\sim \alpha(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)(\ln \Lambda^2 + \ln q^2) \cdot \alpha \ln \Lambda^2.
 \end{aligned}
 \tag{10.50}$$

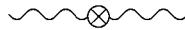
Слагаемое с  $\ln^2 \Lambda^2$  возникает от области интегрирования, где оба импульса  $k_1$  и  $k_2$  велики, а слагаемое с  $\ln q^2 \ln \Lambda^2$  возникает от области, где  $k_2$  велик, но  $k_1$  мал. Другое такое слагаемое возникнет от области, где  $k_1$  велик, а  $k_2$  мал.

Появление слагаемых, пропорциональных  $\Pi_2(q^2) \cdot \ln \Lambda^2$ , в двухпетлевой диаграмме поляризации вакуума противоречит основанному на критерии кажущейся степени расходимости наивному аргументу, что расходящиеся слагаемые в фейнмановском интеграле всегда являются простыми полиномами по  $q^2$ . Будем называть расходимости, умноженные на полиномы по  $q^2$ , *локальными расходимостями*, поскольку их фурье-преобразование обратно в координатное пространство дает дельта-функции или производные дельта-функций. Новое неполиномиальное слагаемое будем называть *нелокальной расходимостью*. К счастью, наш вывод нелокально расходящегося слагаемого позволяет дать ему физическую интерпретацию. Это локальная расходимость, окруженная обычным нерасходящимся процессом квантовой теории поля.

Если подобная картина аккуратно описывает все расходящиеся слагаемые двухпетлевой диаграммы, можно ожидать, что эти расходимости сокращаются двумя типами контрчленных диаграмм. Во-первых, можно построить диаграммы в порядке  $\alpha^2$ , включив контрчленную вершину порядка  $\alpha$  в однопетлевую диаграмму поляризации вакуума:



Такие диаграммы должны сократить нелокальную расходимость в (10.50) и соответствующий вклад от области, где  $k_1$  велик, а  $k_2$  мал. На самом деле, детальный анализ показывает, что сумма исходной диаграммы и этих двух контрчленных диаграмм содержит только локальные расходимости. После добавления этих диаграмм единственная остающаяся расходимость локальна, и она может быть сокращена диаграммой



т. е. добавлением слагаемого порядка  $\alpha^2$  в  $\delta_3$ .

Уроки, извлеченные из этого примера, можно распространить на общую картину расходимостей фейнмановских диаграмм с большим числом петель и на процедуру их сокращения. Данная диаграмма может содержать локальные расходимости, как предсказывает анализ в разделе 10.1. Кроме того, она может содержать нелокальные расходимости, связанные с поддиаграммами, находящимися внутри петель, несущих малый импульс. Эти расходимости сокращаются диаграммами, в которых расходящиеся поддиаграммы заменены на их контрчленные вершины. Все же можно задать два вопроса. Во-первых, устраняет ли такая процедура все нелокальные расходимости? Во-вторых, сохраняет ли эта процедура конечность амплитуд типа (10.49), которые не расходятся с точки зрения критерия кажущейся степени расходимости из раздела 10.1? Для ответа на эти вопросы требуется тонкий анализ структуры перекрывающихся фейнмановских интегралов. Общий анализ был начат Боголюбовым и Парасюком, завершен Хеппом и элегантно переформулирован Циммерманном\*.

\*N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227 (1957); K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301 (1966); W. Zimmermann, in Deser, et. al. (1970).

Они показали, что ответ на оба вопроса положителен. Этот результат, известный как теорема БПХЦ, утверждает, что для произвольной перенормируемой квантовой теории поля в любом порядке теории возмущений все расходимости устраняются включением контрчленных вершин, отвечающих кажущимся образом расходящимся амплитудам. Иными словами, каждая кажущаяся перенормируемой квантовая теория поля на самом деле оказывается конечной, если использовать перенормированную теорию возмущений с полным набором контрчленов. Доказательство теоремы БПХЦ весьма формально, и мы не включили его в эту книгу. Вместо этого исследуем подробно один пример двухпетлевого вычисления, который явно продемонстрирует возникновение и сокращение нелокальных расходимостей.

### 10.5. Пример диаграммы с двумя петлями

Чтобы проиллюстрировать обсуждавшиеся в предыдущем разделе вопросы, рассмотрим двухпетлевой вклад в четырехточечную функцию в теории  $\phi^4$ . На рис. 10.5 показаны 16 относящихся к этому вкладу диаграмм. (Есть, кроме того, несколько диаграмм, содержащих однопетлевые поправки к пропагатору. Однако, как мы видели в (10.29), каждая из них в точности сокращается со своим контрчленом, так что эти диаграммы можно опустить.) К счастью, многие из оставшихся диаграмм просто связаны друг с другом. Кроссинг-симметрия сводит число существенных диаграмм к шести:

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \quad (10.51)$$

где последняя диаграмма соответствует только  $s$ -канальному куску вершинного контрчлена второго порядка. Если сумма этих диаграмм конечна, то простая замена  $s$  на  $t$  или  $u$  дает конечный результат и для остальных диаграмм.

Значение последней диаграммы в (10.51) есть константа, и мы вправе подобрать ее так, чтобы поглотить любое расходящееся слагаемое, не зависящее от внешних импульсов. Наша задача, поэтому, заключается в том, чтобы показать, что все зависящие от импульсов расходящиеся слагаемые в пяти оставшихся диаграммах взаимно сокращаются. Четвертая и пятая диаграммы в (10.51) включают однопетлевой вершинный контрчлен, вычисленный нами в (10.24). Вкратце напомним это вычисление. Мы определили  $iV(p^2)$  как базисный интеграл по петле:

$$= (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2) = (-i\lambda)^2 \left[ -\frac{i}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-d/2}} \right]. \quad (10.52)$$

Согласно условию перенормировки (10.19), контрчлен должен сократить три однопетлевых диаграммы (по одной на каждый канал), вычисленных на пороге ( $s = 4m^2$ ,  $t = u = 0$ ); поэтому

$$= -i\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 [-iV(4m^2) - 2iV(0)].$$

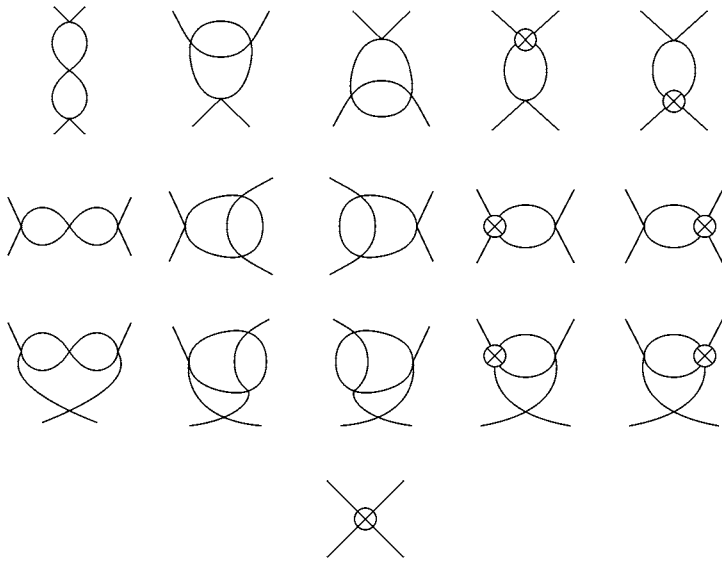
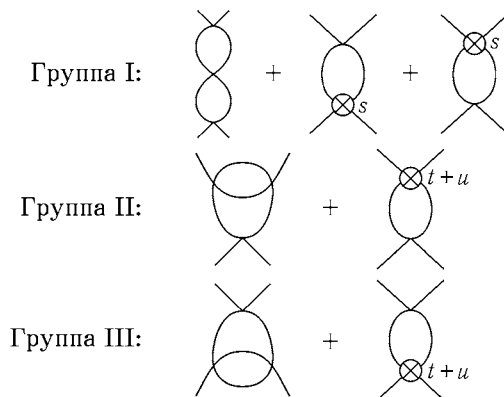


Рис. 10.5. Двухпетлевые вклады в четырехточечную функцию в теории  $\phi^4$ . Заметим, что диаграммы в первых трех строчках связаны друг с другом операцией кроссинга и отвечают, соответственно,  $s$ -,  $t$ - и  $u$ -каналам. Две последние диаграммы в каждой из этих строчек включают вершинный контрчлен  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , а последняя диаграмма соответствует вкладу  $\mathcal{O}(\lambda^3)$  в вершинный контрчлен.

Для наших теперешних целей удобно разделить два слагаемых в этом выражении. Определим

$$\text{Diagram with loop and vertex } \otimes_s = (-i\lambda)^2 \cdot -iV(4m^2); \quad \text{Diagram with loop and vertex } \otimes_{t+u} = (-i\lambda)^2 \cdot -2iV(0).$$

Теперь можно разбить первые пять диаграмм в (10.51) на три группы:



Мы обнаружим, что все расходящиеся слагаемые, зависящие от импульса, сокращаются независимо внутри каждой группы. Поскольку диаграммы групп II и III связаны простой перестановкой начальных и конечных импульсов, то достаточно показать, что это сокращение происходит для групп I и II. Для группы I задача довольно проста, так как каждая диаграмма распадается на произведение величин, уже нами вычисленных

ранее. Обращаясь к выражению (10.52), имеем:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = (-i\lambda)^3 \cdot [iV(p^2)]^2; \\
 & \text{Diagram 2} = (-i\lambda)^3 \cdot iV(p^2) \cdot -iV(4m^2).
 \end{aligned}$$

Поэтому сумма всех трех диаграмм равна

$$(-i\lambda)^3 \left( [iV(p^2)]^2 - 2iV(p^2)iV(4m^2) \right) = (-i\lambda)^3 \left( -[V(p^2) - V(4m^2)]^2 + [V(4m^2)]^2 \right). \tag{10.53}$$

Однако разность  $V(p^2) - V(4m^2)$  конечна, что вытекает из требования сокращения расходимостей в однопетлевом вычислении:

$$V(p^2) - V(4m^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left( \frac{m^2 - x(1-x)p^2}{m^2 - x(1-x)4m^2} \right).$$

Единственная остающаяся расходимость содержится в независимом от импульса слагаемом  $[V(4m^2)]^2$ , и поэтому может быть поглощена контрчленом второго порядка в (10.51).

Трудно переоценить два общих свойства результата (10.53). Во-первых, расходящаяся часть (а следовательно вершинный контрчлен  $\mathcal{O}(\lambda^3)$ ) пропорциональна

$$[V(4m^2)]^2 \propto [\Gamma(2 - \frac{d}{2})]^2 \xrightarrow{d \rightarrow 4} \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^2 \quad \text{при } d = 4 - \epsilon.$$

В противоположность простому полюсу, возникающему в однопетлевом контрчлене, это полюс второго порядка. Соответственно, диаграммы с бóльшим числом петель будут иметь полюсы более высокого порядка, и во всех случаях расходящиеся слагаемые будут оставаться независимыми от импульса константами. Во-вторых, рассмотрим предел больших импульсов:

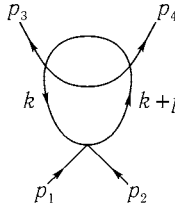
$$V(p^2) - V(4m^2) \underset{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

Двухпетлевая вершина пропорциональна  $\ln^2(p^2/m^2)$ . Диаграмма подобной же структуры с  $n$  петлями будет иметь вид:

$$\underbrace{\text{Diagram with } n \text{ loops}}_{n \text{ петель}} \sim \lambda^{n+1} \left( \ln \frac{p^2}{m^2} \right)^n.$$

Такое асимптотическое поведение на самом деле присуще всем многопетлевым диаграммам. Детальнее мы рассмотрим этот вопрос в гл. 12.

Рассмотрим теперь более сложную диаграмму из группы II:



$$= (-i\lambda)^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} iV((k+p_3)^2). \quad (10.54)$$

Для ее расчета объединим знаменатели так, чтобы простейшим образом извлечь расходящиеся слагаемые ценой усложнения вычисления конечных частей. Другой подход к вычислению такой диаграммы обсуждается в задаче 10.4. Чтобы начать вычисление (10.54), объединим пару выписанных явно знаменателей и подставим выражение (10.52) для  $V(p^2)$ . В результате получим выражение:

$$- \frac{\lambda^3}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2yk \cdot p + yp^2 - m^2]^2} \times \\ \times \frac{1}{[m^2 - x(1-x)(k+p_3)^2]^{2-\frac{d}{2}}}. \quad (10.55)$$

Эту пару знаменателей можно объединить с помощью тождества

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \int_0^1 dw \frac{w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1}}{[wA + (1-w)B]^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \quad (10.56)$$

Это частный случай формулы (6.42), приведенной в разделе 6.3. Для доказательства заменим переменные под интегралом:

$$z \equiv \frac{wA}{wA + (1-w)B}, \quad (1-z) = \frac{(1-w)B}{wA + (1-w)B}, \quad dz = \frac{AB dw}{[wA + (1-w)B]^2},$$

так что

$$\int_0^1 dw \frac{w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1}}{[wA + (1-w)B]^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{A^\alpha B^\beta} \int_0^1 dz z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} = \frac{1}{A^\alpha B^\beta} B(\alpha, \beta),$$

где  $B(\alpha, \beta)$  — бета-функция (7.82). Более общее тождество (6.42) можно доказать по индукции. Применяя тождество (10.56) к (10.55), находим:

$$- \frac{\lambda^3}{2} \frac{\Gamma(4-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dw \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times \frac{w^{1-\frac{d}{2}} (1-w)}{(w[m^2 - x(1-x)(k+p_3)^2] + (1-w)[m^2 - k^2 - 2yk \cdot p - yp^2])^{4-\frac{d}{2}}}. \quad (10.57)$$

Дополнение до полного квадрата в знаменателе приводит к полиному вида

$$-[(1-w) + wx(1-x)]\ell^2 - P^2 + m^2, \quad (10.58)$$

где  $\ell$  — сдвинутая импульсная переменная, а  $P^2$  — довольно сложная функция  $p$ ,  $p_3$  и различных фейнмановских параметров. Для проводимого анализа важно, что при  $w \rightarrow 0$

$$P^2(w) = y(1-y)p^2 + \mathcal{O}(w), \quad (10.59)$$

что легко видеть из (10.57). Заменяя переменные на  $\ell$ , совершая виковский поворот и вычисляя интеграл, получим:

$$= -\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dw \frac{w^{1-\frac{d}{2}}(1-w)}{[1-w+wx(1-x)]^{d/2}} \frac{\Gamma(4-d)}{(m^2 - P^2)^{4-d}}. \quad (10.60)$$

Один очевидный полюс этого выражения при  $d \rightarrow 4$  возникает от гамма-функции. Однако есть и менее очевидный полюс, возникающий от нулевого предела интеграла по  $w$ . Запишем (10.60) как

$$\int_0^1 dw w^{1-\frac{d}{2}} f(w),$$

где  $f(w)$  включает все явно не выписанные множители. Чтобы изолировать полюс при  $w = 0$ , можно добавить и вычесть  $f(0)$ :

$$\int_0^1 dw w^{1-\frac{d}{2}} f(w) = \int_0^1 dw w^{1-\frac{d}{2}} f(0) + \int_0^1 dw w^{1-\frac{d}{2}} [f(w) - f(0)]. \quad (10.61)$$

Второй кусок равен:

$$-\frac{i\lambda^3 \Gamma(4-d)}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dw w^{1-\frac{d}{2}} \times \\ \times \left( \frac{(1-w)}{[1-w+wx(1-x)]^{d/2}} \frac{1}{[m^2 - P^2(w)]^{4-d}} - \frac{1}{[m^2 - P^2(0)]^{4-d}} \right).$$

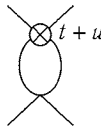
Это слагаемое имеет только простой полюс при  $d \rightarrow 4$ ; вычет в этом полюсе равен независимой от импульса константе, которая получается, если положить  $d = 4$  везде за исключением  $\Gamma(4-d)$ . Поэтому возникшую расходимость можно включить в вершинный контрчлен  $\mathcal{O}(\lambda^3)$ . (Конечная часть этого выражения имеет очень сложную зависимость от импульса, но для завершения рассуждений нам эта часть не понадобится.)

Остается лишь первое слагаемое в (10.61). Это выражение содержит только  $P^2(0)$ , что дается выражением (10.59). Интеграл по  $w$  в этом слагаемом вычисляется непосредственно, а интеграл по  $x$  тривиален. Полагая  $\varepsilon = 4 - d$ , получаем остающееся

выражение в виде

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^d} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \int_0^1 dy \frac{\Gamma(\varepsilon)}{[m^2 - y(1-y)p^2]^\varepsilon} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \\
 & \xrightarrow{d \rightarrow 4} -\frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^4} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \int_0^1 dy \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln[m^2 - y(1-y)p^2]\right),
 \end{aligned} \tag{10.62}$$

где мы сохранили во второй точке только расходящиеся слагаемые. Логарифм, умноженный на полюс  $2/\varepsilon$ , представляет нелокальную расходимость, о которой шла речь в разделе 10.4. К счастью, следует всего лишь добавить к этому выражению вклад контрчленной диаграммы « $t+u$ » из группы II. С этого момента вычисления становятся очевидными:



$$\begin{aligned}
 & = (-i\lambda)^3 \cdot -2iV(0) \cdot iV(p^2) = \\
 & = \frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dy \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2]^{2-d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2 - y(1-y)p^2]^{2-d/2}} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \\
 & \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^4} \int_0^1 dy \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln m^2\right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln[m^2 - y(1-y)p^2]\right).
 \end{aligned} \tag{10.63}$$

(Мы снова отбросили в последней строке все конечные слагаемые.) Это выражение также содержит нелокальную расходимость, определяемую первым полюсом, умноженным на второй логарифм. Она в точности сокращается с нелокальной расходимостью в (10.62). Все оставшиеся слагаемые либо конечны, либо расходятся, но не зависят от импульса. Этим завершается доказательство того, что двухпетлевой вклад в четырехточечную функцию конечен. Два свойства диаграмм группы I сохраняются и для диаграмм группы II. Расходящиеся куски из (10.62) и (10.63) содержат двойные полюсы, которые не сокращаются, поэтому мы снова видим, что вершинный контрчлен второго порядка должен содержать двойной полюс. Конечные части (10.62) и (10.63) содержат двойные логарифмы, и мы снова убеждаемся, что двухпетлевая амплитуда ведет себя как  $\lambda^3 \ln^2 p^2$  при  $p \rightarrow \infty$ .

## Задачи

**10.1. Однопетлевая структура КЭД.** В разделе 10.1, исходя из общих принципов, мы показали, что одноточечная и трехточечная фотонные функции обращаются в нуль, а четырехточечная функция конечна.

- (а) Проверьте непосредственно, что однопетлевой вклад в одноточечную функцию равен нулю. В трехточечную функцию в однопетлевом приближении дают вклад две фейнмановские диаграммы. Покажите, что они сокращают друг друга. Покажите, что диаграммы, дающие вклад в любую  $n$ -точечную фотонную амплитуду, попарно сокращаются при нечетном  $n$ .
- (б) Четырехточечная фотонная функция есть сумма шести диаграмм. Покажите явными вычислениями, что возможные логарифмические расходимости этих диаграмм сокращаются.

**10.2. Перенормировка теории Юкавы.** Рассмотрите псевдоскалярный юкавский лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi,$$

где  $\phi$  — действительное скалярное поле, а  $\psi$  — дираковский фермион. Заметим, что этот лагранжиан инвариантен относительно преобразования четности  $\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0\psi(t, -\mathbf{x})$ ,  $\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\phi(t, -\mathbf{x})$ , если поле  $\phi$  обладает отрицательной четностью.

- (а) Определите кажущимся образом расходящиеся диаграммы и сформулируйте фейнмановские правила для перенормированной теории возмущений с данным лагранжианом. Включите все необходимые контрчленные вершины. Покажите, что теория содержит кажущимся образом расходящуюся амплитуду  $4\phi$ . Это означает, что теорию нельзя перенормировать, если не включить скалярное самодействие

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

и аналогичный контрчлен. Конечно, можно положить перенормированное значение этой константы связи равным нулю, но это неестественный выбор, так как контрчлен все равно будет отличным от нуля. Требуется ли какие-то другие взаимодействия?

- (б) Вычислите расходящуюся часть (полюс при  $d \rightarrow 4$ )каждого контрчлена в однопетлевом приближении теории возмущений, наложив необходимое количество условий перенормировки. Не следует беспокоиться о конечных частях контрчленов. Поскольку расходящиеся части должны иметь фиксированную зависимость от внешних импульсов, можно упростить вычисления, выбрав эти импульсы простейшим возможным способом.

**10.3. Перенормировка поля в теории  $\phi^4$ .** Двухпетлевой вклад в пропагатор в теории  $\phi^4$  включает три диаграммы, показанные в (10.31). Используя размерную регуляризацию, вычислите вклад первой из этих диаграмм в пределе нулевой массы скалярного поля. Покажите, что вблизи значения  $d = 4$  диаграмма принимает вид

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -ip^2 \cdot \frac{\lambda^2}{12(4\pi)^4} \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln p^2 + \dots \right],$$

где  $\varepsilon = 4 - d$ . Коэффициент в этом выражении включает интеграл по фейнмановским параметрам, который можно вычислить, положив  $d = 4$ . Проверьте, что вторая диаграмма в (10.31) обращается в нуль при  $d = 4$ . Отсюда, первая диаграмма должна содержать полюс только при  $\varepsilon = 0$ , который можно сократить контрчленом перенормировки поля.

**10.4. Асимптотическое поведение диаграмм в теории  $\phi^4$ .** Рассчитайте ведущие слагаемые в матричном элементе  $S$ -матрицы для бозон-бозонного рассеяния в теории  $\phi^4$  в пределе  $s \rightarrow \infty$ ,  $t$  фиксировано. Игнорируйте все массы внутренних линий и удерживайте массы внешних линий только для инфракрасной регуляризации, если это необходимо. Покажите, что

$$i\mathcal{M}(s, t) \sim -i\lambda - i\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln s - i\frac{5\lambda^3}{2(4\pi)^4} \ln^2 s + \dots$$

Обратите внимание, что пренебрежение внутренними массами позволяет сделать несколько приятных упрощений в интегралах по фейнмановским параметрам.



## ПЕРЕНОРМИРОВКА И СИММЕТРИЯ

После того как мы установили общую структуру ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля, было бы естественно продолжить исследование проявлений этих расходимостей при расчетах фейнмановских диаграмм. Однако мы отложим эти вопросы до гл. 12 и двинемся в направлении, которое может показаться неожиданным. В гл. 8 и разделе 9.3 мы отметили формальное сходство между квантовой теорией поля и статистической механикой. Было показано, что ближайшим формальным аналогом скалярной теории поля является непрерывное описание ферромагнетика или другой системы, в которой возможен фазовый переход второго рода. Эта аналогия указывает, что и в квантовой теории поля возможна ситуация, когда поле принимает глобально ненулевое значение. Как и в магнетике, это глобальное поле может быть направленным и тем самым нарушать симметрию лагранжиана. В подобных случаях говорят, что теория поля обладает *скрытой* или *спонтанно нарушенной* симметрией. Мы посвятим эту главу анализу такого механизма нарушения симметрии.

Есть две причины, по которым спонтанно нарушенная симметрия является центральным понятием при изучении квантовой теории поля. Во-первых, она играет главную роль в приложениях квантовой теории поля к явлениям природы. В этой книге мы приведем два весьма различающихся примера таких приложений. В гл. 13 теория скрытой симметрии будет применена к статистической механике, особенно, к поведению термодинамических переменных в окрестности точек фазовых переходов второго рода. Далее, в гл. 20, мы увидим, что скрытая симметрия является существенной составной частью теории слабых взаимодействий. Спонтанное нарушение симметрии находит применение и в теории сильных взаимодействий, а также при поиске единых моделей фундаментальной физики.

Однако спонтанное нарушение симметрии представляет интерес и с теоретической точки зрения. Квантовые теории поля со спонтанно нарушенной симметрией содержат ультрафиолетовые расходимости. Поэтому естественно задать вопрос, не вносит ли лежащая в основе теории симметрия каких-то ограничений на эти расходимости? Ответ на этот вопрос, впервые данный Бенджаменом Ли\*, проливает дополнительный свет на природу ультрафиолетовых расходимостей и смысл перенормировки.

### 11.1. Спонтанное нарушение симметрии

Начнем с анализа спонтанного нарушения симметрии в классической теории поля. Рассмотрим знакомый лагранжиан теории  $\phi^4$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

---

\*Превосходный обзор результатов, полученных Ли, дан в сборнике его лекций: B. Lee, *Chiral Dynamics* (Gordon and Breach, New York, 1972).

но с заменой  $m^2$  на отрицательный параметр  $-\mu^2$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (11.1)$$

Этот лагранжиан обладает дискретной симметрией. Он инвариантен относительно преобразования  $\phi \rightarrow -\phi$ . Соответствующий гамильтониан равен

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right].$$

Классической конфигурацией с минимальной энергией является однородное поле  $\phi(x) = \phi_0$ , где  $\phi_0$  выбрано так, чтобы минимизировать потенциал

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

(см. рис. 11.1). Этот потенциал имеет два минимума, определяемых значениями

$$\phi_0 = \pm v = \pm \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu. \quad (11.2)$$

Константа  $v$  носит название *вакуумного среднего* поля  $\phi$ .

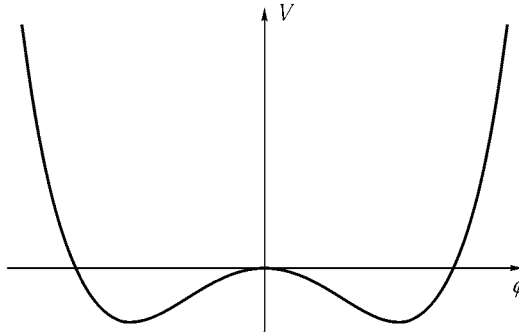


Рис. 11.1. Потенциал спонтанного нарушения симметрии в дискретном случае.

Чтобы интерпретировать такую теорию, предположим, что система находится вблизи одного из минимумов (например, положительного). Удобно определить

$$\phi(x) = v + \sigma(x) \quad (11.3)$$

и переписать  $\mathcal{L}$  через  $\sigma(x)$ . Подставляя (11.3) в (11.1), находим, что слагаемое, линейное по  $\sigma$ , обращается в нуль (как и должно быть, поскольку минимум потенциала находится при  $\sigma = 0$ ). Отбрасывая также постоянное слагаемое, приходим к лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4. \quad (11.4)$$

Этот лагранжиан описывает простое скалярное поле массой  $\sqrt{2}\mu$  с взаимодействиями  $\sigma^3$  и  $\sigma^4$ . Симметрия  $\phi \rightarrow -\phi$  уже больше не видна. Ее единственное проявление заключается в связи между тремя коэффициентами в (11.4), конкретным образом зависящими только от двух параметров. Это простейший пример спонтанно нарушенной симметрии.

### Линейная сигма-модель

Более интересная теория возникает, если нарушенная симметрия не дискретна, а непрерывна. Самый важный пример — обобщение предыдущей теории, называемое *линейной сигма-моделью*, которую мы кратко рассматривали в задаче 4.3. Вся данная глава будет посвящена подробному изучению этой модели. Лагранжиан линейной сигма-модели включает набор из  $N$  действительных скалярных полей  $\phi^i(x)$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2, \quad (11.5)$$

где подразумевается суммирование по  $i$  в каждом множителе  $(\phi^i)^2$ . Заметим, что мы изменили масштаб константы связи  $\lambda$  из лагранжиана теории  $\phi^4$ , чтобы устранить неудобные множители типа 6 в предыдущих формулах. Лагранжиан (11.5) инвариантен относительно преобразований симметрии

$$\phi^i \longrightarrow R^{ij} \phi^j \quad (11.6)$$

с любой  $N \times N$  ортогональной матрицей  $R$ . Группа преобразований (11.6) является просто группой вращений в  $N$  измерениях, которую также называют  $N$ -мерной *ортогональной группой*, или просто  $O(N)$ .

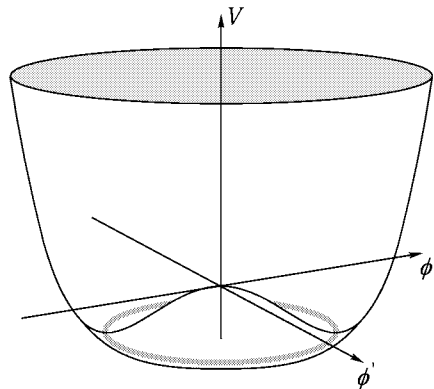


Рис. 11.2. Потенциал спонтанного нарушения  $O(N)$  симметрии, изображенный для случая  $N = 2$ . Колебания во впадине потенциала соответствуют безмассовым полям  $\pi$ .

Мы снова видим, что классическая конфигурация с минимальной энергией есть постоянное поле  $\phi_0^i$ , значение которого выбирается так, чтобы минимизировать потенциал

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2$$

(см. рис. 11.2). Такой потенциал минимизируется для любых  $\phi_0^i$ , удовлетворяющих условию

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Это условие определяет только длину вектора  $\phi_0^i$ , но его направление остается произвольным. Принято выбирать координаты так, чтобы  $\phi_0^i$  было направлено по  $N$ -й оси:

$$\phi_0^i = (0, 0, \dots, 0, v), \quad \text{где } v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (11.7)$$

Теперь можно определить множество смещенных полей:

$$\phi^i(x) = (\pi^k(x), v + \sigma(x)), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (11.8)$$

(Обозначения, как и в задаче 4.3, связаны с применением этого формализма к пионам в случае  $N = 4$ .)

Теперь не составляет труда переписать лагранжиан (11.5) через поля  $\pi$  и  $\sigma$ . В результате

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \\ & - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}[(\pi^k)^2]^2. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Мы получили массивное поле  $\sigma$ , как и в (11.4), а также набор  $N-1$  безмассовых полей  $\pi$ . Исходная  $O(N)$  симметрия оказывается скрытой, и от нее остается подгруппа  $O(N-1)$  вращений полей  $\pi$  в своем пространстве. Обращаясь к рис. 11.2, замечаем, что массивное поле  $\sigma$  описывает колебания  $\phi^i$  в радиальном направлении, в котором потенциал имеет ненулевую вторую производную. Безмассовые поля  $\pi$  описывают колебания  $\phi^i$  в касательных направлениях вдоль впадины потенциала. Эта впадина представляет собой  $(N-1)$ -мерную поверхность, и все  $N-1$  направлений эквивалентны, что отражает наличие ненарушенной  $O(N-1)$  симметрии.

### Теорема Голдстоуна

Возникновение безмассовых частиц в результате спонтанного нарушения непрерывной симметрии является общим результатом, известным как *теорема Голдстоуна*. Чтобы дать ее точную формулировку, нужно подсчитать число линейно независимых непрерывных преобразований симметрии. В линейной сигма-модели при  $N = 1$  нет непрерывных симметрий, при  $N = 2$  имеется единственное направление вращения. Вращение в  $N$  измерениях может осуществляться в любой из  $N(N-1)/2$  плоскостей, так что  $O(N)$ -симметричная теория обладает  $N(N-1)/2$  непрерывными симметриями. После спонтанного нарушения симметрии остается  $(N-1)(N-2)/2$  симметрий, соответствующих вращениям  $(N-1)$  полей  $\pi$ . Число *нарушенных* симметрий равно разности этих чисел:  $N-1$ .

Теорема Голдстоуна утверждает, что для каждой спонтанно нарушенной непрерывной симметрии в теории должна содержаться безмассовая частица\*. Мы только что показали, что эта теорема выполняется в линейной сигма-модели, по крайней мере, на классическом уровне. Безмассовые поля, возникающие в результате спонтанного нарушения симметрии, называются *голдстоуновскими бозонами*. Многие наблюдаемые легкие бозоны, например, пионы, можно интерпретировать (по крайней мере, приблизительно) как голдстоуновские бозоны. Мы завершаем этот раздел общим доказательством теоремы Голдстоуна для классических скалярных теорий поля. Остальная часть главы посвящена квантово-механическому анализу теорий со скрытой симметрией. В конце главы мы покажем, что голдстоуновские бозоны не могут приобрести массу за счет квантовых поправок любого порядка.

Рассмотрим теорию, содержащую несколько полей  $\phi^a(x)$ , лагранжиан которой имеет вид:

$$\mathcal{L} = (\text{члены с производными}) - V(\phi). \quad (11.10)$$

\*J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961). Полезная четырехстраничная работа: J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962) содержит три различных доказательства теоремы.

Пусть  $\phi_0^a$  есть постоянное поле, минимизирующее  $V$ , так что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi^a} V \right|_{\phi^a(x)=\phi_0^a} = 0.$$

Разлагая  $V$  в окрестности этого минимума, находим:

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^a(\phi - \phi_0)^b \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} + \dots$$

Коэффициент при квадратичном слагаемом

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0} = m_{ab}^2 \quad (11.11)$$

является симметричной матрицей, собственные значения которой равны массам полей. Эти собственные значения не могут быть отрицательными, так как поле  $\phi_0$  отвечает минимуму потенциала. Для доказательства теоремы Голдстоуна нужно показать, что всякая непрерывная симметрия лагранжиана (11.10), которая не является симметрией  $\phi_0$ , приводит к нулевому собственному значению этой матрицы.

Произвольное преобразование непрерывной симметрии имеет вид:

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \alpha \Delta^a(\phi), \quad (11.12)$$

где  $\alpha$  — бесконечно малый параметр, а  $\Delta^a$  — некоторая функция всех  $\phi$ . Ограничимся постоянными полями. Тогда слагаемые с производными в  $\mathcal{L}$  обращаются в нуль, и потенциал должен быть сам по себе инвариантен относительно (11.12). Это условие можно записать в виде:

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + \alpha \Delta^a(\phi)) \quad \text{или} \quad \Delta^a(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi^a} V(\phi) = 0.$$

Теперь продифференцируем его по  $\phi^b$  и положим  $\phi = \phi_0$ :

$$0 = \left( \frac{\partial \Delta^a}{\partial \phi^b} \right)_{\phi_0} \left( \frac{\partial V}{\partial \phi^a} \right)_{\phi_0} + \Delta^a(\phi_0) \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V \right)_{\phi_0}. \quad (11.13)$$

Первое слагаемое исчезает, так как  $\phi_0$  есть минимум  $V$ , так что второе слагаемое также должно обратиться в нуль. Если преобразование не изменяет  $\phi_0$  (т.е. если основное состояние обладает рассматриваемой симметрией), то  $\Delta^a(\phi_0) = 0$ , и такое соотношение тривиально. Спонтанно нарушенная симметрия — это симметрия, для которой  $\Delta^a(\phi_0) \neq 0$ . В этом случае  $\Delta^a(\phi_0)$  и представляет желаемый вектор с собственным значением нуль. Таким образом, теорема Голдстоуна доказана.

## 11.2. Перенормировка и симметрия: явный пример

Перейдем к исследованию квантово-механической теории со спонтанно нарушенной симметрией. В качестве примера вновь обратимся к линейной сигма-модели. Лагранжиан этой теории, записанный через сдвинутые поля, определяется выражением (11.9). Глядя на него, можно извлечь фейнмановские правила для такой теории. Они показаны на рис. 11.3.

$$\begin{aligned}
\sigma \xrightarrow{p} &= \frac{i}{p^2 - 2\mu^2} & \pi^i \xrightarrow{p} \pi^j &= \frac{i\delta^{ij}}{p^2} \\
\begin{array}{c} \parallel \\ \diagdown \\ \diagup \\ \parallel \end{array} &= -6i\lambda v & \begin{array}{c} \parallel \\ \diagdown \\ \diagup \\ \parallel \end{array} &= -2i\delta^{ij}\lambda v \\
\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -6i\lambda & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} &= -2i\delta^{ij} \\
\begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \diagup \\ l \\ \diagdown \\ \diagup \\ i \\ \diagdown \\ \diagup \\ j \end{array} &= -2i\lambda[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]
\end{aligned}$$

Рис. 11.3. Фейнмановские правила для линейной сигма-модели.

Пользуясь этими правилами, можно без труда вычислять древесные диаграммы. В то же время, диаграммы с петлями будут чаще всего расходиться. Кажущаяся степень расходимости для амплитуды с  $N_e$  внешними концами равна

$$D = 4 - N_e,$$

как и было показано в разделе 10.2 для теории  $\phi^4$ . (Диаграммы, содержащие трехточечную вершину, расходятся слабее, чем показывает это выражение, так как подобная вершина содержит множитель размерности массы.) Однако симметричные ограничения на амплитуды в этом случае значительно слабее. В линейной сигма-модели имеется восемь различных кажущимся образом расходящихся амплитуд (рис. 11.4). У ряда из них  $D > 0$ , поэтому они могут включать более одной бесконечной константы. В то же время число имеющихся голых параметров, которые могут поглотить эти бесконечности, много меньше. Если последовать процедуре, описанной в разделе 10.2, и переписать исходный лагранжиан через физические параметры и контрчлены, мы обнаружим только три контрчлена:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 + \\
& + \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\phi^i)^2 - \frac{1}{2}\delta_\mu(\phi^i)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2.
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Если записать вторую строку через поля  $\pi$  и  $\sigma$ , то она примет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_Z}{2}(\partial_\mu\pi^k)^2 - \frac{1}{2}(\delta_\mu + \delta_\lambda v^2)(\pi^k)^2 + \frac{\delta_Z}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}(\delta_\mu + 3\delta_\lambda v^2)\sigma^2 - \\
- (\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3)\sigma - \delta_\lambda v\sigma(\pi^k)^2 - \delta_\lambda v\sigma^3 - \frac{\delta_\lambda}{4}[(\pi^k)^2]^2 - \frac{\delta_\lambda}{2}\sigma^2(\pi^k)^2 - \frac{\delta_\lambda}{4}\sigma^4.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Связанные с этими контрчленами фейнмановские правила показаны на рис. 11.5. Число контрчленов теперь достаточно велико, но они все еще зависят только от трех параметров перенормировки  $\delta_Z$ ,  $\delta_\mu$  и  $\delta_\lambda$ . Было бы чудом, если бы эти три параметра могли поглотить все бесконечности, возникающие в расходящихся амплитудах, показанных на рис. 11.4.

Если чуда не происходит, т. е. если контрчлены в (11.15) не поглощают все бесконечности, можно все же сделать такую теорию перенормируемой, введя в лагранжиан новые нарушающие симметрию слагаемые. Эти слагаемые породят дополнительные

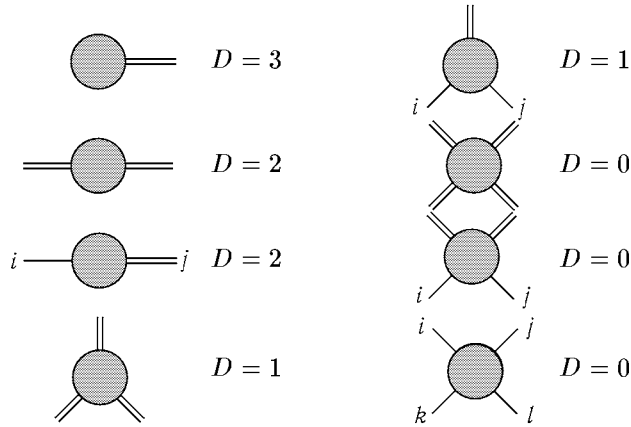


Рис. 11.4. Расходящиеся амплитуды в линейной сигма-модели.

$$\begin{aligned}
 \text{⊗} &= -i(\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3) \\
 \text{⊗} &= -i(\delta_Z p^2 + \delta_\mu + 3\delta_\lambda v^2) \\
 i \text{---} \text{⊗} \text{---} j &= -i\delta^{ij}(\delta_Z p^2 + \delta_\mu + 3\delta_\lambda v^2) \\
 \text{⊗} &= -6i\delta_\lambda v & \text{⊗} &= -6i\delta_\lambda \\
 i \text{---} \text{⊗} \text{---} j &= -2i\delta^{ij}\delta_\lambda v & i \text{---} \text{⊗} \text{---} j &= -2i\delta^{ij}\delta_\lambda \\
 i \text{---} \text{⊗} \text{---} j &= -2i\delta_\lambda[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]
 \end{aligned}$$

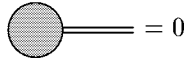
Рис. 11.5. Фейнмановские правила для контрчленных вершин в линейной сигма-модели.

контрчлены, которые можно подобрать так, чтобы сделать теорию конечной. При желании можно положить физические значения нарушающих симметрию констант связи равными нулю. Тем не менее, голые значения этих констант будут ненулевыми, так что сам лагранжиан уже не будет инвариантным относительно  $O(N)$  симметрии. Мы будем вынуждены заключить, что симметрия несовместима с квантовой механикой. К счастью, чудо происходит. Как мы увидим ниже, несмотря на то, что контрчлены в (11.15) содержат только три настраиваемых параметра, их оказывается достаточно, чтобы сократить все возникающие в этой теории бесконечности. В этом разделе мы покажем в явном виде, как происходит такое сокращение на однопетлевом уровне. Остальная часть главы посвящена более общему анализу этих вопросов.

### Условия перенормировки

В последующем обсуждении будем следить только за расходящимися частями фейнмановских диаграмм. Однако полезно держать в памяти набор условий перенорми-

ровки, которые в принципе могут быть использованы и для определения конечных частей контрчленов. Так как контрчлены содержат три настраиваемых параметра, число условий также равно трем. В качестве них можно выбрать условия (10.19) (дополненные в соответствии с (10.28)), которые задают физическую массу  $m$  поля  $\sigma$ , величину этого поля и амплитуду рассеяния на пороге. Однако технически проще заменить одно из этих условий ограничением на одноточечную амплитуду для  $\sigma$  (сумма *диаграмм-головастики*):



$$\text{шaded circle with two lines} = 0$$

Как мы видели в (10.5), диаграммы-головастики в КЭД автоматически обращаются в нуль. Однако в линейной сигма-модели нет симметрий, запрещающих появление ненулевой одноточечной по полю  $\sigma$  амплитуды. Эта амплитуда соответствует среднему по вакууму поля  $\sigma$ , и так как  $\phi^N = v + \sigma$ , она сдвигает вакуумное среднее поля  $\phi$ . Такой сдвиг вполне приемлем до тех пор, пока он конечен после соответствующего добавления контрчленов при вычислении амплитуды. Однако наша бухгалтерия упростится, если принять такие условия, чтобы соотношение

$$\langle \phi^N \rangle = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tag{11.16}$$

удовлетворялось во всех порядках теории возмущений. Определим  $\lambda$  как в (10.19) как амплитуду рассеяния на пороге. Тогда формула (11.16) определяет параметр  $\mu$ , так что масса  $m$  поля  $\sigma$  будет отличаться от вытекающего из классических уравнений результата  $m^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2$  слагаемыми порядка  $(\lambda\mu^2)$ . Если мы действительно можем устранить все расходимости из теории путем подбора трех контрчленов, указанные поправки будут конечными и будут составлять предсказание квантовой теории поля.

Суммируя, будем использовать следующие условия перенормировки.

$$\begin{aligned} \text{шaded circle with two lines} &= 0; \\ \frac{d}{dp^2} \left( \text{шaded circle with two lines} \right) &= 0 \quad \text{при } p^2 = m^2; \\ \text{circle with four external lines} &= -6i\lambda \quad \text{при } s = 4m^2, t = u = 0. \end{aligned} \tag{11.17}$$

В последнем условии круг представляет ампутированную четырехточечную амплитуду. Заметим, что два последних условия зависят от физической массы  $m$   $\sigma$ -частицы. Теперь мы должны показать, что этих трех условий достаточно, чтобы сделать конечными все однопетлевые амплитуды в линейной сигма-модели.

### Вершинный контрчлен

Начнем с определения контрчлена  $\delta_\lambda$  путем вычисления  $4\sigma$ -амплитуды. Древесное слагаемое возникает из  $4\sigma$ -вершины и автоматически удовлетворяет (11.17). Однопет-



левой вклад в эту амплитуду равен сумме вкладов диаграмм

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \left( \text{кроссканальные диаграммы} \right) + \\
 & + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \left( \text{кроссканальные диаграммы} \right) + \\
 & + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \left( \text{кроссканальные диаграммы} \right) + \text{Diagram 7}
 \end{aligned} \tag{11.18}$$

Согласно (11.17) мы должны подобрать  $\delta_\lambda$  так, чтобы эта сумма диаграмм обращалась бы в нуль на пороге. При вычислении будем следить только за ультрафиолетовыми расходимостями. Это чрезвычайно упрощает анализ, так как большая часть диаграмм в (11.18) конечна. Все диаграммы, у которых петли образованы тремя или более пропагаторами, конечны, так как содержат по меньшей мере шесть степеней текущего по петле импульса в знаменателе. Например,

$$\text{Diagram 3} \sim \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2}.$$

Конечность этой диаграммы можно увидеть и альтернативным способом. Каждая трехточечная вершина содержит множитель  $\mu$ , имеющий размерность массы. Согласно размерному анализу из раздела 10.1, каждый такой множитель понижает степень расходимости диаграммы на 1. Так как у  $4\sigma$  амплитуды уже  $D = 0$ , всякая диаграмма, содержащая трехточечную вершину, должна быть конечна. Остаются первые две диаграммы в (11.18) и четыре диаграммы, связанные с этими кроссингом. Вычислим первую диаграмму, используя метод размерной регуляризации.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \frac{1}{2} \cdot (-6i\lambda)^2 \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \frac{i}{(k+p)^2 - 2\mu^2} = \\
 &= 18\lambda^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - \Delta]^2} = \\
 &= 18\lambda^2 \int_0^1 dx \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \\
 &= 18i\lambda^2 \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^2} + (\text{конечные слагаемые}).
 \end{aligned} \tag{11.19}$$

Здесь  $\Delta$  — функция  $p$  и  $\mu$ , точный вид которой для нас несуществен. Нашей целью является демонстрация сокращения расходимостей, поэтому здесь и далее во всем разделе мы будем пренебрегать конечными слагаемыми. Вторая диаграмма в (11.18) (с  $\pi$  вместо  $\sigma$  для внутренних линий) совпадает с первой, с той разницей, что в каждой вершине

вместо  $-6i\lambda$  пишется множитель  $-2i\lambda\delta^{ij}$ . (Латинские индексы  $i, j, \dots$  пробегает значения от 1 до  $N-1$ .) Поэтому

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} = 2i\lambda^2(N-1) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} + (\text{конечные слагаемые}). \tag{11.20}$$

Поскольку бесконечная часть каждой из этих диаграмм представляет просто не зависящую от импульса постоянную, бесконечные части соответствующих диаграмм  $t$ - и  $u$ -каналов должны быть такими же. Поэтому бесконечная часть  $4\sigma$ -вершины равна просто утроенной сумме (11.19) и (11.20):

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} + \left( \begin{array}{c} \text{кроссканальные} \\ \text{диаграммы} \end{array} \right) \sim 6i\lambda^2(N+8) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \tag{11.21}$$

(В этом разделе мы используем символ  $\sim$  для обозначения равенства с точностью до опущенных конечных поправок.) Применяя третье условие (11.17), находим, что контрчлен  $\delta_\lambda$  имеет вид:

$$\delta_\lambda \sim \lambda^2(N+8) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \tag{11.22}$$

Определив значение  $\delta_\lambda$ , мы одновременно зафиксировали контрчлены для двух других четырехточечных амплитуд. Стали ли эти амплитуды конечными? Рассмотрим амплитуду с двумя  $\sigma$  и двумя  $\pi$ . Однопетлевые поправки возникают от диаграмм

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array}. \tag{11.23}$$

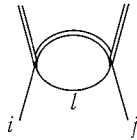
и от нескольких диаграмм с трехточечными вершинами, которые, как мы показали выше, явно конечны. Каждая из диаграмм в (11.23) содержит петлевой интеграл, аналогичный (11.19), с бесконечной частью, всегда имеющей вид  $-i\Gamma(2-\frac{d}{2})/(4\pi)^2$ . Единственное отличие состоит в других вершинных и симметричных множителях. Например, бесконечная часть первой диаграммы в (11.23) равна

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ i \quad j \end{array} \sim \frac{1}{2} \cdot (-6i\lambda)(-2i\lambda\delta^{ij}) \cdot \frac{-i}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) = 6i\lambda^2\delta^{ij} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

Вторая диаграмма чуть посложнее:

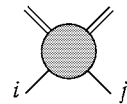
$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ i \quad j \end{array} \begin{array}{c} k \\ l \end{array} \sim \frac{1}{2} \cdot (-2i\lambda\delta^{kl})(-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})) \cdot \frac{-i}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) = \\ = 2i\lambda^2(N+1)\delta^{ij} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

В третьей диаграмме нет симметричного множителя:



$$\sim (-2i\lambda\delta^{il})(-2i\lambda\delta^{jl}) \cdot \frac{-i}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) = 4i\lambda^2\delta^{ij} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

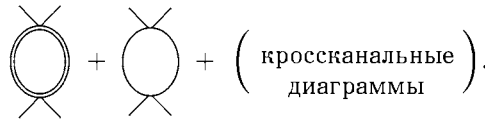
Четвертая диаграмма из (11.23) дает такое же выражение, так как она совпадает с третьей при перестановке индексов  $i$  и  $j$ . Сумма четырех диаграмм дает поэтому следующий вклад в бесконечную часть вершины  $\sigma\sigma\pi\pi$ :



$$\sim 2i\lambda^2\delta^{ij}(N+8) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \quad (11.24)$$

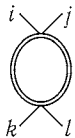
Это расходящееся слагаемое действительно сокращается контрчленом  $\sigma\sigma\pi\pi$ , причем значение  $\delta_\lambda$  определено в (11.22).

Остающаяся четырехточечная амплитуда содержит четыре поля  $\pi$ . Расходящиеся однопетлевые диаграммы:



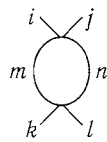
$$+ \left( \text{кроссканальные диаграммы} \right). \quad (11.25)$$

Все они имеют уже знакомый вид. Первая равна:



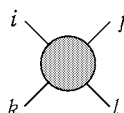
$$\sim \frac{1}{2} \cdot (-2i\lambda\delta^{ij})(-2i\lambda\delta^{kl}) \cdot \frac{-i}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) = 2i\lambda^2\delta^{ij}\delta^{kl} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

Вторая диаграмма посложнее:



$$\begin{aligned} &\sim \frac{1}{2} \cdot (-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{mn} + \delta^{im}\delta^{jn} + \delta^{in}\delta^{jm})) \times \\ &\quad \times (-2i\lambda(\delta^{kl}\delta^{mn} + \delta^{km}\delta^{ln} + \delta^{kn}\delta^{lm})) \cdot \frac{-i}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) = \\ &= 2i\lambda^2((N+3)\delta^{ij}\delta^{kl} + 2\delta^{ik}\delta^{jl} + 2\delta^{il}\delta^{jk}) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \end{aligned}$$

Каждой из этих диаграмм соответствуют две диаграммы в кросс-каналах, отличающиеся только способом спаривания внешних индексов  $ijkl$  друг с другом. Например, диаграммы  $t$ -канала идентичны диаграммам  $s$ -канала с перестановкой  $j$  и  $k$ . Суммируя вклад всех шести диаграмм, находим для вершины  $4\pi$ :



$$\sim 2i\lambda^2(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})(N+8) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \quad (11.26)$$

И снова значение  $\delta_\lambda$ , приведенное в (11.22), дает контрчлен с правильным значением и правильной структурой индексов, сокращающий эту расходимость.

Определенное нами значение  $\delta_\lambda$  фиксирует также контрчлены для трехточечных амплитуд. Таким образом, у нас больше нет свободы выбора при сокращении расходимостей в трехточечных амплитудах. Нам остается только скрестить пальцы и надеяться, что они также окажутся конечными. Амплитуда  $3\sigma$  имеет вид:

$$\left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \left( \text{кроссканальные диаграммы} \right) \right) + \text{diagram 3} + \text{diagram 4}. \quad (11.27)$$

Диаграммы, куда входят три трехточечные вершины, конечны и не играют роли при сокращении расходимостей. Из расходящихся диаграмм в (11.27) первая имеет вид:

$$\text{diagram 1} = \frac{1}{2} \cdot (-6i\lambda)(-6i\lambda v) \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \frac{i}{(k+p)^2 - 2\mu^2} \sim 18i\lambda^2 v \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

Это в точности совпадает с соответствующей диаграммой в (11.19) для  $4\sigma$  вершины, если не считать дополнительного множителя  $v$ . Это же верно и для других пяти расходящихся диаграмм. Таким образом,

$$\text{diagram 2} \sim 6i\lambda^2 v(N+8) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}. \quad (11.28)$$

Полученное выражение точно сокращается с вершинным контрчленом  $3\sigma$  на рис. 11.5, с  $\delta_\lambda$ , определяемой (11.22).

Аналогичное соответствие имеет место между амплитудами  $\sigma\pi\pi$  и  $\sigma\sigma\pi\pi$ . Четыре расходящиеся диаграммы в  $\sigma\pi\pi$  амплитуде идентичны диаграммам в (11.23), с той разницей, что одна внешняя линия  $\sigma$  заменена на множитель  $v$ . Обращаясь к контрчленной вершине  $\sigma\pi\pi$  на рис. 11.5, видим, что и в этом случае происходит сокращение расходимостей.

Что же случилось? Все появлявшиеся до сих пор расходимости были проявлениями расходимости в базовой диаграмме

$$\text{diagram 3} \quad (11.29)$$

содержащей либо четыре внешних частицы, либо одну линию с нулевым импульсом, которая ассоциируется со средним по вакууму поля  $\phi$ . Так как  $O(N)$  симметрия нарушена, эта диаграмма возникает во многих самых разных случаях. Но, по-видимому, нарушение симметрии не влияет на расходящуюся часть этой диаграммы.

### Двухточечные и одноточечные амплитуды

Чтобы завершить исследование однопетлевой структуры рассматриваемой теории, необходимо вычислить двухточечную и одноточечную амплитуды. Определим сначала

контрчлен  $\delta_\mu$ , применив первое условие перенормировки в (11.17). В однопетлевом приближении это условие принимает вид:

$$0 = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}. \quad (11.30)$$

В дальнейшем нам понадобится конечная часть контрчлена, поэтому будем следить при вычислении (11.30) за конечными слагаемыми. Вклад первой диаграммы равен:

$$\text{Diagram 1} = \frac{1}{2}(-6i\lambda v) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = -3i\lambda v \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{2\mu^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \quad (11.31)$$

Вторая диаграмма содержит расходящийся интеграл от безмассового пропагатора. Чтобы не возникало сомнений в том, что мы понимаем, как обращаться с этим слагаемым, добавим малую массу  $\zeta$  к полю  $\pi$  в качестве инфракрасного регулятора. Тогда вклад второй диаграммы равен:

$$\begin{aligned} \text{Diagram 2} &= \frac{1}{2}(-2i\lambda v)\delta^{ij} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i\delta^{ij}}{k^2 - \zeta^2} = \\ &= -i(N-1)\lambda v \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\zeta^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

Заметим, что при  $d > 2$  этот вклад обращается в нуль в пределе  $\zeta \rightarrow 0$ . Однако у него есть полюс при  $d = 2$ . Несмотря на эти странные свойства, можно сложить (11.32) и (11.31) и наложить условие, что диаграммы-головастики должны сокращаться контрчленом рис. 11.5. Это условие дает:

$$(\delta_\mu + v^2\delta_\lambda) = -\lambda \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{3}{(2\mu^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right). \quad (11.33)$$

Рассмотрим теперь амплитуду  $2\sigma$ . Вклад в одночастично неприводимую амплитуду вносят четыре однопетлевых диаграммы и контрчлен:

$$\text{Diagram 4a} + \text{Diagram 4b} + \text{Diagram 4c} + \text{Diagram 4d} + \text{Diagram 4e}. \quad (11.34)$$

Удобно записать контрчленную вершину в виде:

$$-i(2v^2\delta_\lambda) - i(\delta_\mu + v^2\delta_\lambda) - ip^2\delta_Z. \quad (11.35)$$

В произвольной схеме перенормировок масса  $\sigma$  также будет сдвигаться за счет вклада диаграмм-головастиков и их контрчленов:

$$\text{Diagram 5a} + \text{Diagram 5b} + \text{Diagram 5c}. \quad (11.36)$$

Однако в силу первого условия перенормировки в (11.17) эти диаграммы точно сокращаются. Это пример особой простоты такого условия перенормировки.

Две первые диаграммы опять представляют собой проявления базовой четырехточечной диаграммы (11.29), но с двумя внешними линиями, замененными на средние по вакууму от  $\phi$ . По аналогии с предыдущими вычислениями, получаем для первой диаграммы выражение:

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \sim 18i\lambda^2 v^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2},$$

а для второй — выражение:

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \sim 2i\lambda^2 v^2 (N-1) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}.$$

Используя (11.22), видим, что эти два вклада сокращаются первым слагаемым в (11.35). Третья и четвертая диаграммы в (11.34) содержат в точности те же интегралы, что и диаграммы-головастики в (11.30). Из соотношения (11.33) следует, что они сокращаются вторым слагаемым в (11.35). Заметим, что ни в одной из однопетлевых диаграмм в (11.34) нет расходящегося слагаемого, пропорционального  $p^2$ . Таким образом, перенормировочная постоянная  $\delta_Z$  на однопетлевом уровне конечна, как и в обычной теории  $\phi^4$ .

Остается лишь одна потенциально расходящаяся амплитуда  $\pi\pi$ :

$$\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \otimes \text{---}. \quad (11.37)$$

По аналогии с (11.31) первая диаграмма равна:

$$\frac{\text{---} \bigcirc \text{---}}{i} = \frac{1}{2} (-2i\lambda\delta^{ij}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = -i\lambda\delta^{ij} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{2\mu^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}.$$

Вторая диаграмма похожа на первую. Как и в (11.32), удобно ввести малую массу пиона в качестве инфракрасного регулятора:

$$\begin{aligned} \frac{\text{---} \bigcirc \text{---}}{i} &= \frac{1}{2} (-2i\lambda(\delta^{ij}\delta^{kk} + \delta^{ik}\delta^{jk} + \delta^{ik}\delta^{jk})) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} = \\ &= -i\lambda(N+1)\delta^{ij} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\zeta^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Вклад третьей диаграммы равен:

$$\begin{aligned} \frac{\text{---} \bigcirc \text{---}}{i} &= (-2i\lambda v\delta^{ik})(-2i\lambda v\delta^{kj}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - \zeta^2} \frac{i}{(k+p)^2 - 2\mu^2} = \\ &= 4i\lambda^2 v^2 \delta^{ij} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{2\mu^2 x + (1-x)\zeta^2 - p^2 x(1-x)} \right)^{2-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Расходящаяся часть этого выражения не зависит от  $p$ , так что для проверки сокращения расходимости достаточно положить  $p = 0$ . Поучительно провести вычисление полной амплитуды при  $p = 0$ , включая конечные слагаемые. Складывая три петлевые диаграммы и контрчлен, значение которого дается выражением (11.33), находим:

$$\begin{aligned} \text{---} \bigcirc \text{---} \Big|_{p=0} &= (-i\lambda\delta^{ij}) \left\{ \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{1}{(2\mu^2)^{1-d/2}} + \frac{N+1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right) - \right. \\ &\quad - 4\lambda v^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left( \frac{1}{2\mu^2 x + \zeta^2(1-x)} \right)^{2-\frac{d}{2}} - \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{3}{(2\mu^2)^{1-d/2}} + \frac{N-1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Нетрудно упростить это выражение. Можно скомбинировать первую и третью строки, так что в результате получаем:

$$2\lambda\delta^{ij} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left[ \frac{1}{(\zeta^2)^{1-d/2}} - \frac{1}{(2\mu^2)^{1-d/2}} \right].$$

Вблизи  $d = 2$  выражение в скобках пропорционально  $1 - d/2$ , и этот множитель сокращает полюс в гамма-функции. Таким образом, наихудшая расходимость сокращается и остается только полюс при  $d = 4$ . Используя тождество  $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ , можно переписать предыдущее выражение в виде:

$$2\lambda\delta^{ij} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{1-d/2} \left[ \frac{\zeta^2}{(\zeta^2)^{2-d/2}} - \frac{2\mu^2}{(2\mu^2)^{2-d/2}} \right]. \quad (11.39)$$

Первое слагаемое исчезает при  $d > 2$  и  $\zeta \rightarrow 0$ , так что им можно пренебречь. В то же время во второй строке выражения (11.38) содержится элементарный интеграл

$$\int_0^1 dx (2\mu^2 x + (1-x)\zeta^2)^{\frac{d}{2}-2} = \frac{1}{d/2-1} \cdot \frac{(2\mu^2)^{d/2-1} - (\zeta^2)^{d/2-1}}{2\mu^2 - \zeta^2}.$$

Это выражение также несингулярно при  $d = 2$  и сводится к

$$\frac{1}{d/2-1} (2\mu^2)^{d/2-2}$$

при  $d > 2$  и  $\zeta \rightarrow 0$ . Сравнивая эту строку с оставшимся слагаемым в (11.39), и вспоминая, что  $\lambda v^2 = \mu^2$ , находим, что амплитуда  $\pi\pi$  не только конечна, но полностью *обращается в нуль* при  $p = 0$ . Этот результат чрезвычайно привлекателен. При  $p = 0$   $\pi\pi$ -амплитуда в точности равна сдвигу массы  $\delta m_\pi^2$  поля  $\pi$ . Мы уже знаем, что частицы  $\pi$  — безмассовые в древесном приближении, так как они являются теми  $N-1$  безмассовыми бозонами, существования которых требует теорема Голдстоуна. Теперь

мы убедились, что эти бозоны остаются безмассовыми и на однопетлевом уровне в линейной сигма-модели. Иными словами, первые квантовые поправки к линейной сигма-модели не нарушают теоремы Голдстоуна. В конце главы мы дадим общее доказательство того, что теорема Голдстоуна остается справедливой во всех порядках теории возмущений.

### 11.3. Эффективное действие

В первом разделе этой главы мы анализировали спонтанное нарушение симметрии в классической теории поля. Этот анализ носил геометрический характер: вакуумное состояние было найдено на дне самой глубокой ямы, которую имеет потенциальная поверхность, а теорема Голдстоуна была доказана путем демонстрации, что симметрия требует существования линии вырожденных минимумов на дне ямы. Однако в разделе 11.2 эта геометрическая картина была утеряна или, по крайней мере, искажена благодаря учету однопетлевых поправок. Представляется полезным развить формализм, который позволит при рассмотрении спонтанного нарушения симметрии использовать геометрические аргументы и на квантовом уровне.

Чтобы точнее определить цель, к которой мы будем стремиться, рассмотрим проблему определения среднего по вакууму квантового поля  $\phi$ . Это среднее должно быть определено как функция параметров лагранжиана. На классическом уровне  $\langle \phi \rangle$  легко вычислить: нужно просто минимизировать потенциальную энергию. Однако, как мы показали в предыдущем разделе, классическое значение может меняться за счет пертурбативных петлевых поправок. На самом деле, мы видели, что  $\langle \phi \rangle$  может сдвинуться на потенциально бесконечную величину, которую необходимо контролировать процедурой перенормировки.

Было бы замечательно иметь в точной квантовой теории поля такую функцию, минимум которой давал бы точное значение  $\langle \phi \rangle$ . Эта функция согласовывалась бы с классической потенциальной энергией в низшем порядке теории возмущений, и модифицировалась бы квантовыми поправками в высших порядках. Предположительно, такие поправки требовали бы перенормировки, чтобы устранить бесконечности. Тем не менее, после перенормировки эта величина приводила бы к тем же соотношениям между  $\langle \phi \rangle$ , массами частиц и константами связи, которые мы бы могли найти путем прямого вычисления фейнмановских диаграмм. В этом разделе мы найдем функцию с указанными свойствами, которая называется *эффективным потенциалом*. В разделе 11.4 мы объясним, как рассчитать эффективный потенциал в теории возмущений, выразив его через перенормированные массы и константы связи. Затем мы используем его как инструмент для анализа перенормируемости теорий со скрытыми симметриями.

Чтобы определить эффективный потенциал, рассмотрим указанную в разделе 9.3 аналогию между квантовой теорией и статистической механикой. В этом разделе мы нашли соответствие между корреляционными функциями квантовой теории и их аналогами для статистической системы, заменив квантовые флуктуации на тепловые. При нулевой температуре термодинамическое основное состояние является состоянием с наименьшей энергией, но при отличной от нуля температуре все еще имеется геометрическая картина предпочтительного термодинамического состояния: это то состояние, которое минимизирует свободную энергию Гиббса. Более подробно, рассматривая в качестве примера магнитную систему, определим свободную энергию Гельмгольца  $F(H)$  равенством:

$$Z(H) = e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}s \exp \left[ -\beta \int dx (\mathcal{H}[s] - Hs(x)) \right], \quad (11.40)$$



где  $H$  — внешнее магнитное поле,  $\mathcal{H}[s]$  — плотность энергии спинов,  $\beta = 1/kT$ . Намагниченность системы находится дифференцированием  $F(H)$ :

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial F}{\partial H} \right|_{\beta \text{ fixed}} &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z = \\ &= \frac{1}{Z} \int dx \int \mathcal{D}s s(x) \exp \left[ -\beta \int dx (\mathcal{H}[s] - Hs) \right] = \\ &= \int dx \langle s(x) \rangle \equiv M. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Свободная энергия Гиббса  $G$  определяется с помощью преобразования Лежандра

$$G = F + MH,$$

так что она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial G}{\partial M} = \frac{\partial F}{\partial M} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H = \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial F}{\partial H} + M \frac{\partial H}{\partial M} + H = H \quad (11.42)$$

(где все частные производные взяты при фиксированной величине  $\beta$ ). Если  $H = 0$ , свободная энергия Гиббса достигает экстремума при соответствующем значении  $M$ . Термодинамически наиболее стабильное состояние соответствует минимуму  $G(M)$ . Таким образом, функция  $G(M)$  определяет такую картину предпочтительного термодинамического состояния, которая геометрична и в то же время включает все эффекты термодинамических флуктуаций.

По аналогии можно построить похожую величину в квантовой теории поля. Для простоты будем рассматривать в этом разделе только теорию одного скалярного поля. Все результаты непосредственно обобщаются на системы с несколькими спинорными, скалярными и векторными полями.

Рассмотрим квантовую теорию скалярного поля  $\phi$  в присутствии внешнего источника  $J$ . Как и в гл. 9, полезно считать, что внешний источник зависит от  $x$ . Таким образом, определяем функционал энергии  $E[J]$  равенством:

$$Z[J] = e^{-iE[J]} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi) \right]. \quad (11.43)$$

Правая часть этого выражения есть представление в виде функционального интеграла амплитуды  $\langle \Omega | e^{-iHT} | \Omega \rangle$ , где  $T$  — предел интегрирования по времени в функциональном интеграле в присутствии источника  $J$ . Таким образом,  $E[J]$  представляет собой энергию вакуума как функцию внешнего источника. Функционал  $E[J]$  есть аналог свободной энергии Гельмгольца, а  $J$  — аналог внешнего магнитного поля.

В принципе, теперь можно совершить преобразование Лежандра над  $E[J]$  по отношению к постоянному значению источника. Однако, так как мы уже развили формализм функционального интегрирования и дифференцирования, не так уж трудно перейти к рассмотрению внешнего источника  $J(x)$ , произвольным образом зависящего от  $x$ . Как мы увидим, это обобщение приводит к дополнительным соотношениям, связывающим этот формализм с общим рассмотрением теории перенормировок\*.

\*Описанное функциональное обобщение термодинамики было сделано в работе: С. DeDominicis and P. Martin, *J. Math. Phys.* **5**, 14 (1964) и переформулировано для релятивистской теории поля в работе: G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cim.* **34A**, 1790 (1964).

Рассмотрим, таким образом, функциональную производную  $E[J]$  по  $J(x)$ :

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} E[J] = i \frac{\delta}{\delta J(x)} \ln Z = - \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iJ(\mathcal{L}+J\phi)} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iJ(\mathcal{L}+J\phi)}}. \quad (11.44)$$

Сокращенно запишем это соотношение в виде:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} E[J] = - \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J. \quad (11.45)$$

Здесь правая часть есть среднее по вакууму в присутствии ненулевого источника  $J(x)$ . Это соотношение есть функциональный аналог формулы (11.41): функциональная производная  $E[J]$  дает среднее значение  $\phi$  в присутствии переменного в пространстве источника. Будем рассматривать это среднее значение как термодинамическую переменную, сопряженную к  $J(x)$ . Таким образом, мы определяем величину  $\phi_{\text{cl}}(x)$ , называемую *классическим полем*, с помощью равенства:

$$\phi_{\text{cl}}(x) = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J. \quad (11.46)$$

Классическое поле связано с  $\phi(x)$  так же, как намагниченность  $M$  связана с локальным полем спинов  $s(x)$  — это взвешенное среднее по всем возможным флуктуациям. Заметим, что  $\phi_{\text{cl}}(x)$  зависит от внешнего источника  $J(x)$  так же, как  $M$  зависит от  $H$ . Теперь, по аналогии с построением свободной энергии Гиббса, определим преобразование Лежандра для  $E[J]$ :

$$\Gamma[\phi_{\text{cl}}] \equiv -E[J] - \int d^4y J(y) \phi_{\text{cl}}(y). \quad (11.47)$$

Эта величина известна как *эффективное действие*. По аналогии с (11.42) можно теперь вычислить

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \Gamma[\phi_{\text{cl}}] &= - \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} E[J] - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \phi_{\text{cl}}(y) - J(x) = \\ &= - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \frac{\delta E[J]}{\delta J(y)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \phi_{\text{cl}}(y) - J(x) = -J(x). \end{aligned} \quad (11.48)$$

На последнем шаге мы использовали (11.45). Для каждой термодинамической величины из обсуждавшихся в начале раздела мы сумели определить аналогичную величину в квантовой теории поля. Эти аналогии суммированы в табл. 11.1.

Из соотношения (11.48) вытекает, что если внешний источник обратить в нуль, эффективное действие удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \Gamma[\phi_{\text{cl}}] = 0. \quad (11.49)$$

Решения этого уравнения являются значениями  $\langle \phi(x) \rangle$  в стабильных квантовых состояниях теории. Для трансляционно инвариантного вакуумного состояния получаем решение, в котором  $\phi_{\text{cl}}$  не зависит от  $x$ . Иногда уравнение (11.49) может иметь дополнительные решения, соответствующие локализованным сгусткам поля, удерживаемым за счет самодействия. В таких состояниях, называемых *солитонами*, решение  $\phi_{\text{cl}}(x)$

Магнитная система	Квантовая теория поля
$\mathbf{x}$	$x = (t, \mathbf{x})$
$s(\mathbf{x})$	$\phi(x)$
$H$	$J(x)$
$\mathcal{H}(s)$	$\mathcal{L}(\phi)$
$Z(H)$	$Z[J]$
$F(H)$	$E[J]$
$M$	$\phi_{\text{cl}}(x)$
$G(M)$	$-\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$

Таблица 11.1. Аналогии между величинами в магнитной системе и скалярной квантовой теории поля.

зависит от  $x$ . С этого места мы будем предполагать, что возможные вакуумные состояния в рассматриваемых теориях поля инвариантны относительно трансляций и лоренцовских преобразований\*.

Тогда для каждого возможного вакуумного состояния соответствующее решение  $\phi_{\text{cl}}$  будет константой, не зависящей от  $x$ , и процесс решения уравнения (11.49) сводится к решению обыкновенного уравнения относительно одной переменной ( $\phi_{\text{cl}}$ ). Более того, мы знаем, что в терминах термодинамики  $\Gamma$  есть экстенсивная величина — она пропорциональна объему пространственно-временной области, по которой берется функциональный интеграл. Если  $T$  — временная протяженность этой области, а  $V$  — ее трехмерный объем, то

$$\Gamma[\phi_{\text{cl}}] = -(VT) \cdot V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}). \quad (11.50)$$

Коэффициент  $V_{\text{eff}}$  называется *эффективным потенциалом*. Таким образом, условие, что  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  имеет экстремум, сводится к простому уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{\text{cl}}} V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}) = 0. \quad (11.51)$$

Каждое решение уравнения (11.51) есть трансляционно инвариантное состояние с  $J = 0$ . Из уравнения (11.47) следует, что в этом случае  $\Gamma = -E$ , и поэтому  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$ , вычисленное в точке решения (11.51), есть плотность энергии соответствующего состояния.

На рис. 11.6 показан возможный вид функции  $V_{\text{eff}}(\phi)$ . Локальные максимумы (или возможные седловые точки для систем нескольких полей  $\phi^i$ ) являются нестабильными конфигурациями, которые не могут быть реализованы как стационарные состояния. На рисунке также показан локальный минимум  $V_{\text{eff}}$ , не являющийся абсолютным минимумом. Это метастабильное вакуумное состояние, которое может распасться в

\*Некоторые системы в физике конденсированного вещества имеют основные состояния с преимущественной ориентацией. См., например, P. G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford University Press, 1974).

истинный вакуум за счет квантово-механического тунеллирования. Абсолютный минимум  $V_{\text{eff}}$  есть состояние с наименьшей энергией в теории, и оно является истинным стабильным вакуумным состоянием. У системы со спонтанно нарушенной симметрией имеется несколько минимумов  $V_{\text{eff}}$ , обладающих благодаря симметрии одинаковой энергией. Выбор одного из этих вакуумов есть акт спонтанного нарушения симметрии.

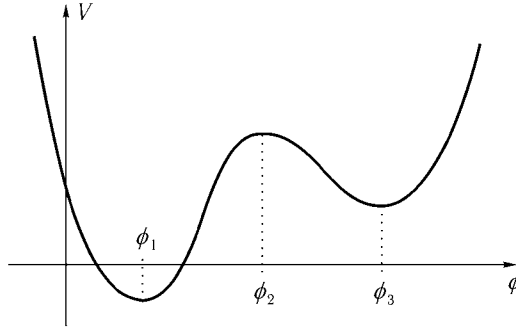


Рис. 11.6. Возможная форма эффективного потенциала в скалярной теории поля. Экстремумы эффективного потенциала возникают в точках  $\phi_{cl} = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ . Состояние истинного вакуума соответствует  $\phi_1$ . Состояние  $\phi_2$  нестабильно. Состояние  $\phi_3$  метастабильно, но оно может распадаться в  $\phi_1$  в результате квантово-механического тунеллирования.

Изображая график на рис. 11.6, мы предполагали, что эффективный потенциал вычисляется при фиксированном постоянном фоновом значении  $\phi$ . При определенных обстоятельствах это состояние не реализует истинную конфигурацию с минимумом энергии для состояний с заданным средним значением  $\phi$ . Это несоответствие может возникать следующим образом. Рассмотрим систему, для которой эффективный потенциал для постоянных фоновых полей определяется рис. 11.6. Выберем для нее значение  $\phi_{cl}$ , лежащее в промежутке между локально стабильными вакуумными состояниями  $\phi_1$  и  $\phi_3$ :

$$\phi_{cl} = x\phi_1 + (1-x)\phi_3, \quad 0 < x < 1. \quad (11.52)$$

Предположение о постоянстве фонового поля приводит к большому значению эффективного потенциала, как и показано на рисунке. Конфигурацию с меньшей энергией можно получить, рассматривая состояния с макроскопическими областями, в которых  $\langle \phi \rangle = \phi_1$  и другими областями, в которых  $\langle \phi \rangle = \phi_3$ , так что среднее значение  $\langle \phi \rangle$  по всей системе равно  $\phi_{cl}$ . Для такой конфигурации средняя вакуумная энергия равна

$$V_{\text{eff}}(\phi_{cl}) = xV_{\text{eff}}(\phi_1) + (1-x)V_{\text{eff}}(\phi_3), \quad (11.53)$$

как показано на рис. 11.7. Мы назвали левую часть этого равенства  $V_{\text{eff}}(\phi_{cl})$ , так как формула (11.53) была бы результатом точного вычисления  $V_{\text{eff}}$ , выраженного в виде функционального интеграла, для значений  $\phi_{cl}$ , удовлетворяющих (11.52). Интерполляция (11.53) является теоретико-полевым аналогом максвелловского построения для термодинамической свободной энергии. В общем случае для любых  $\phi_{cl}, \phi_1, \phi_3$ , удовлетворяющих (11.52), оценка (11.53) будет верхней границей эффективного потенциала. Мы говорим, что эффективный потенциал является *выпуклой* функцией  $\phi_{cl}$ .\*

\* Выпуклость свободной энергии Гиббса есть хорошо известный точный результат статистической механики. См., например: D. Ruelle, *Statistical Mechanics* (W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1969).

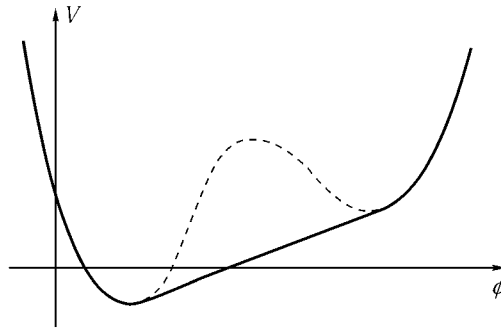


Рис. 11.7. Точная выпуклая форма эффективного потенциала для системы на рис. 11.6.

Как и в термодинамике, прямые схемы вычисления эффективного потенциала не учитывают возможности разделения фаз и приводят поэтому к структуре нестабильных и метастабильных конфигураций типа показанных на рис. 11.6. Чтобы достичь конечной формы  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$ , построение Максвелла должно осуществляться руками. К счастью, эти тонкости не влияют на абсолютный минимум  $V_{\text{eff}}$ .

Мы разрешили проблему, сформулированную в начале этого раздела. Эффективный потенциал, определенный формулами (11.47) и (11.50), представляет собой обозримую функцию, минимизация которой определяет точное вакуумное состояние квантовой теории поля, включающее все эффекты квантовых поправок. Из этих определений не очевидно, как вычислять  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$ . В следующем разделе мы покажем, как это сделать путем прямого вычисления функционального интеграла.

## 11.4. Вычисление эффективного действия

После того как мы определили объект, минимизация которого дает точное вакуумное состояние квантовой теории поля, необходимо научиться вычислять его. Это можно сделать несколькими способами. Простейший из них, который мы используем ниже, предполагает, что мы достаточно храбры, чтобы не побояться вычислить полное эффективное действие  $\Gamma$  непосредственно из его определения через функциональный интеграл. После вычисления  $\Gamma$  можно получить  $V_{\text{eff}}$ , задав постоянные значения  $\phi_{\text{cl}}$ .\*

Наш план состоит в нахождении разложения по теории возмущений производящего функционала  $Z$ , отталкиваясь от его определения через функциональный интеграл (11.43). После этого мы возьмем логарифм, чтобы получить функционал энергии  $E$ , и в конце совершим преобразование Лежандра по формуле (11.47) и получим  $\Gamma$ . Мы будем использовать перенормированную теорию возмущений, так что удобно разбить лагранжиан, как мы это делали в (10.18), на кусок, зависящий от параметров перенормировки, и кусок, содержащий контрчлены:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}. \quad (11.54)$$

Мы хотим вычислить  $\Gamma$  как функцию  $\phi_{\text{cl}}$ . Однако функционал  $Z[J]$  зависит от  $\phi_{\text{cl}}$  через зависимость от  $J$ . Поэтому нужно найти, по крайней мере, неявно, связь между  $J(x)$  и  $\phi_{\text{cl}}(x)$ . В низшем порядке теории возмущений эта связь есть просто классическое уравнение движения:

$$\left. \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \right|_{\phi=\phi_{\text{cl}}} + J(x) = 0 \quad (\text{в низшем порядке}).$$

\*Этот метод изложен в работе: R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9**, 1686 (1974).

Пусть  $J_1(x)$  — любая функция, которая точно удовлетворяет этому уравнению, когда  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ :

$$\left. \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta \phi} \right|_{\phi = \phi_{\text{cl}}} + J_1(x) = 0 \quad (\text{точно}). \quad (11.55)$$

Будем понимать разность между  $J$  и  $J_1$  как контрчлен, аналогичный  $\delta \mathcal{L}$ , так что

$$J(x) = J_1(x) + \delta J(x), \quad (11.56)$$

где  $\delta J$  определяется, последовательно, порядок за порядком, по теории возмущений исходным определением (11.46) поля  $\phi_{\text{cl}}$ , а именно,  $\langle \phi(x) \rangle_J = \phi_{\text{cl}}(x)$ .

Используя эти обозначения, перепишем выражение (11.43) как

$$e^{-iE[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_1[\phi] + J_1\phi)} e^{i \int d^4x (\delta \mathcal{L}[\phi] + \delta J\phi)}. \quad (11.57)$$

Вторая экспонента содержит контрчлены. Отложим на время ее рассмотрение. В первой экспоненте разложим показатель в окрестности  $\phi_{\text{cl}}$ , заменив  $\phi(x) = \phi_{\text{cl}}(x) + \eta(x)$ . Этот показатель примет вид:

$$\begin{aligned} \int d^4x (\mathcal{L}_1 + J_1\phi) &= \int d^4x (\mathcal{L}_1[\phi_{\text{cl}}] + J_1\phi_{\text{cl}}) + \int d^4x \eta(x) \left( \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta \phi} + J_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \eta(x) \eta(y) \frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} + \\ &+ \frac{1}{3!} \int d^4x d^4y d^4z \eta(x) \eta(y) \eta(z) \frac{\delta^3 \mathcal{L}_1}{\delta \phi(x) \delta \phi(y) \delta \phi(z)} + \dots, \end{aligned} \quad (11.58)$$

где различные функциональные производные  $\mathcal{L}_1$  берутся в точке  $\phi_{\text{cl}}(x)$ . Заметим, что слагаемое, линейное по  $\eta$ , обращается в нуль после использования соотношения (11.55). Таким образом, интеграл по  $\eta$  — гауссовый, причем кубические и более высокие слагаемые определяют квантовые поправки.

Опишем формальное вычисление этого интеграла, следуя предписаниям раздела 9.2. В этом вычислении будут участвовать коэффициенты (11.58), т.е. последовательные функциональные производные  $\mathcal{L}_1$ . Представим на время, что эти производные — хорошо определенные операторы. После получения общего выражения для  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ , мы проведем явное вычисление на примере скалярной теории поля и увидим, что формальные операторы соответствуют выражениям, знакомым нам по диаграммной технике теории возмущений.

Рассмотрим вычисление интеграла по  $\eta(x)$  с помощью выражения (11.58). Удерживая только слагаемые до квадратичных по  $\eta$ , и все еще пренебрегая контрчленами, получаем чисто гауссов интеграл, который можно выразить через функциональный детерминант:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\eta \exp \left[ i \left( \int (\mathcal{L}_1[\phi_{\text{cl}}] + J_1\phi_{\text{cl}}) + \frac{1}{2} \int \eta \frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta \phi \delta \phi} \eta \right) \right] &= \\ &= \exp \left[ i \int (\mathcal{L}_1[\phi_{\text{cl}}] + J_1\phi_{\text{cl}}) \right] \cdot \left( \det \left[ -\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta \phi \delta \phi} \right] \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (11.59)$$

Этот функциональный детерминант определяет квантовую поправку низшего порядка к эффективному действию. Во многих случаях нет нужды двигаться дальше в разложении (11.58). Позднее мы увидим, что если включить кубические и более высокой

степени слагаемые в  $\eta$ , они определяют разложение функционального интеграла (11.57) по фейнмановским диаграммам, в котором пропагатор равен обратному оператору

$$-i\left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta\phi \delta\phi}\right)^{-1}, \quad (11.60)$$

а вершинами являются третья и более высокие функциональные производные  $\mathcal{L}_1$ .

Вернемся, наконец, к рассмотрению влияния второй экспоненты в (11.57), т. е. учтем лагранжиан контрчленов. Полезно разложить это слагаемое в окрестности  $\phi = \phi_{\text{cl}}$ , записав его в виде:

$$(\delta\mathcal{L}[\phi_{\text{cl}}] + \delta J\phi_{\text{cl}}) + (\delta\mathcal{L}[\phi_{\text{cl}} + \eta] - \delta\mathcal{L}[\phi_{\text{cl}}] + \delta J\eta). \quad (11.61)$$

Второе слагаемое в (11.61) можно представить в виде ряда Тейлора по  $\eta$ . Последовательные слагаемые определяют контрчленные вершины, которые можно включить в упомянутые выше фейнмановские диаграммы. Первое слагаемое является константой по отношению к функциональному интегралу по  $\eta$  и поэтому вносит дополнительные слагаемые в экспоненту в (11.59).

Объединяя интеграл (11.59) со вкладом от вершин более высокого порядка и контрчленов, можно получить полное выражение для функционального интеграла (11.57). В приводимом ниже примере мы увидим, что фейнмановские диаграммы, представляющие слагаемые более высокого порядка, можно собрать так, что они дают экспоненту от суммы связных диаграмм. Таким образом, приходим к следующему выражению для  $E[J]$ :

$$\begin{aligned} -iE[J] = & i \int d^4x (\mathcal{L}_1[\phi_{\text{cl}}] + J_1\phi_{\text{cl}}) - \frac{1}{2} \ln \det \left[ -\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi} \right] + \\ & + (\text{связные диаграммы}) + i \int d^4x (\delta\mathcal{L}[\phi_{\text{cl}}] + \delta J\phi_{\text{cl}}). \end{aligned} \quad (11.62)$$

Из этого выражения непосредственно находится  $\Gamma$ . Используя равенство  $J_1 + \delta J = J$  и преобразование Лежандра (11.47), находим:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_{\text{cl}}] = & \int d^4x \mathcal{L}_1[\phi_{\text{cl}}] + \frac{i}{2} \ln \det \left[ -\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi} \right] - \\ & - i \cdot (\text{связные диаграммы}) + \int d^4x \delta\mathcal{L}[\phi_{\text{cl}}]. \end{aligned} \quad (11.63)$$

Заметим, что не осталось слагаемых, явно зависящих от  $J$ . Следовательно  $\Gamma$ , как и должно быть, является функцией  $\phi_{\text{cl}}$ . Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ , не содержат внешних линий, причем простейшие диаграммы имеют две петли. Квантовая поправка низшего порядка к  $\Gamma$  определяется функциональным детерминантом, и во всей книге мы ограничимся использованием только этого слагаемого.

Последнее слагаемое в (11.63) определяет набор контрчленов, который можно использовать для того, чтобы удовлетворить условиям перенормировки, накладываемым на  $\Gamma$ , и одновременно сократить расходимости, возникающие при вычислении функционального детерминанта и диаграмм. В разобранном ниже примере мы увидим, как происходит это сокращение. Условия перенормировки определяют все контрчлены в  $\delta\mathcal{L}$ . Однако построенный формализм включает новый контрчлен  $\delta J$ . Этот коэффициент определяется следующим специальным условием. Рассматривая уравнение (11.55), мы

проводили анализ так, что в старшем порядке  $\langle \phi \rangle = \phi_{\text{cl}}$ . Однако, в принципе, это соотношение может нарушаться в высших порядках. Дополнительный вклад фейнмановских диаграмм в величину  $\langle \phi \rangle$  может сдвинуть ее от значения  $\phi_{\text{cl}}$ . Это происходит в том случае, если имеются ненулевые диаграммы-головастики, дающие вклад в  $\langle \eta \rangle$ . Но такая амплитуда получает также вклад от контрчлена  $(\delta J \eta)$  в (11.61). Следовательно можно удерживать  $\langle \eta \rangle = 0$ , и последовательно определять  $\delta J$  в любом порядке, подстраивая  $\delta J$  так, чтобы удовлетворялось диаграммное уравнение

$$\text{---} \bigcirc \text{---} + \delta J \left( \text{---} \otimes \text{---} \right) = 0. \quad (11.64)$$

На практике мы будем удовлетворять этому условию, просто игнорируя любые одночастично неприводимые диаграммы, поскольку всякая такая диаграмма будет сокращаться за счет должной настройки  $\delta J$ . Таким образом, устранение диаграмм-головастиков, потребовавшее определенных усилий в разделе 11.2, производится теперь как естественная часть формализма.

### Эффективное действие в линейной сигма-модели

Формула (11.63) дает полное, хотя и не до конца прозрачное выражение для вычисления  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ . Разъясним смысл этого уравнения, заодно с пользой применив его для вычисления  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  в линейной сигма-модели. Мы увидим, что те результаты, которые были получены в разделе 11.2 лобовым способом с помощью теории возмущений, возникают значительно естественнее из формулы (11.63).

Вновь начнем с лагранжиана (11.5):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2. \quad (11.65)$$

Проведем разложение в окрестности классического поля:  $\phi^i = \phi_{\text{cl}}^i + \eta^i$ . Поскольку мы рассчитываем получить трансляционно-инвариантное вакуумное состояние, ограничимся случаем *постоянного* классического поля. Это упростит некоторые элементы вычисления. В частности, согласно (11.50), окончательный результат будет пропорционален четырехмерному объему ( $VT$ ) функционального интегрирования. После отбрасывания этой зависимости получим хорошо определенное явное выражение для эффективного потенциала. В любом случае, после такого упрощения (11.65) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\mu^2(\phi_{\text{cl}}^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi_{\text{cl}}^i)^2]^2 + (\mu^2 - \lambda(\phi_{\text{cl}}^i)^2)\phi_{\text{cl}}^i\eta^i + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\eta^i)^2 - \frac{\lambda}{2}[(\phi_{\text{cl}}^i)^2(\eta^i)^2 + 2(\phi_{\text{cl}}^i\eta^i)^2] + \dots \end{aligned} \quad (11.66)$$

Согласно (11.63) следует отбросить слагаемое, линейное по  $\eta$ .

Из квадратичных по  $\eta$  слагаемых находим:

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi^i \delta \phi^j} = -\partial^2 \delta^{ij} + \mu^2 \delta^{ij} - \lambda [(\phi_{\text{cl}}^k)^2 \delta^{ij} + 2\phi_{\text{cl}}^i \phi_{\text{cl}}^j]. \quad (11.67)$$

Заметим, что получившееся выражение имеет общий вид оператора Клейна–Гордона. Чтобы прояснить смысл соотношения, выберем координаты так, чтобы  $\phi_{\text{cl}}^i$  было направлено в  $N$ -м направлении:

$$\phi_{\text{cl}}^i = (0, 0, \dots, 0, \phi_{\text{cl}}), \quad (11.68)$$



как это уже было сделано в (11.7). Тогда оператор (11.67) просто равен оператору Клейна–Гордона  $(-\partial^2 - m_i^2)$ , где

$$m_i^2 = \begin{cases} \lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2 & \text{при действии на } \eta^1, \dots, \eta^{N-1}; \\ 3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2 & \text{при действии на } \eta^N. \end{cases} \quad (11.69)$$

Функциональный детерминант в (11.63) есть произведение детерминантов этих операторов Клейна–Гордона

$$\det \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta\phi\delta\phi} = [\det(\partial^2 + (\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2))]^{N-1} [\det(\partial^2 + (3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2))]. \quad (11.70)$$

Нетрудно получить явное выражение для детерминанта оператора Клейна–Гордона. Для начала воспользуемся приемом (9.77) и запишем:

$$\ln \det(\partial^2 + m^2) = \text{Tr} \ln(\partial^2 + m^2).$$

Вычислим теперь след оператора как сумму его собственных значений:

$$\text{Tr} \ln(\partial^2 + m^2) = \sum_k \ln(-k^2 + m^2) = (VT) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2). \quad (11.71)$$

Во второй строке мы превратили сумму по импульсам в интеграл. Множитель  $(VT)$  есть четырехмерный объем. Выше мы заметили, что он должен возникнуть как общий множитель в  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ . В результате приходим к интегралу, который после виковского поворота можно вычислить в схеме размерной регуляризации:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2) &= i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln(k_E^2 + m^2) = \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - d/2}} \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= -i \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{(m^2)^{-d/2}}. \end{aligned} \quad (11.72)$$

В последней строке была использована формула  $\Gamma(\alpha) \rightarrow 1/\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Таким образом,

$$\frac{1}{(VT)} \ln \det(\partial^2 + m^2) = -i \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^{d/2}. \quad (11.73)$$

Применяя полученный результат для вычисления детерминанта в (11.63) и выбирая лагранжиан контрчленов как в (11.14), находим:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi) &= -\frac{1}{(VT)} \Gamma[\phi_{\text{cl}}] = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{cl}}^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_{\text{cl}}^4 - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} [(N-1)(\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)^{d/2} + (3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)^{d/2}] + \frac{1}{2} \delta_\mu \phi_{\text{cl}}^2 + \frac{1}{4} \delta_\lambda \phi_{\text{cl}}^4. \end{aligned} \quad (11.74)$$

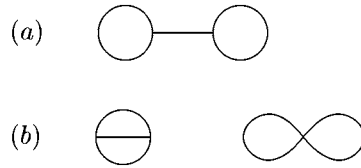


Рис. 11.8. Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в вычисление эффективного потенциала в  $O(N)$  линейной сигма-модели: а) диаграмма, устранимая с помощью (11.64); б) первые отличные от нуля диаграммные поправки.

Здесь мы кратко записали  $\phi_{\text{cl}}^2$  вместо  $(\phi_{\text{cl}}^i)^2$ . Так как вторая строка в этом выражении соответствует главной радиационной поправке, мы вправе ожидать, что этот результат имеет структуру однопетлевой фейнмановской диаграммы. Действительно, видно, что содержащиеся в нем гамма-функции и ультрафиолетовые расходимости аналогичны тем, которые были получены в однопетлевом приближении в разделе 11.2. Ниже мы покажем, что на самом деле это слагаемое имеет точно те же ультрафиолетовые расходимости, что и найденные в разделе 11.2. Эти расходимости сокращаются контрчленами в последней строке (11.74).

Так как вычисление детерминанта в (11.63) эквивалентно однопетлевым поправкам, можно ожидать, что фейнмановские диаграммы, дающие вклад в (11.63), начинаются с диаграмм с двумя петлями. Это можно явно увидеть в случае  $O(N)$  сигма-модели. Разложение по теории возмущений, описанное после формулы (11.60), включает пропагатор, являющийся обратным оператором к (11.67):

$$\langle \eta^i(k) \eta^j(-k) \rangle = \frac{i}{k^2 - m_i^2} \delta^{ij}, \quad (11.75)$$

где  $m_i^2$  дается выражением (11.69). Вершины определяются слагаемыми порядка  $\eta^3$  и  $\eta^4$  в разложении лагранжиана. Собирая эти ингредиенты, находим, что главные фейнмановские диаграммы, дающие вклад в энергию вакуума, имеют вид, показанный на рис. 11.8. Диаграмма рис. 11.8, а на самом деле сокращается за счет контрчлена  $\delta J$ , как показано в (11.64). Таким образом, главный диаграммный вклад в эффективный потенциал обязан двухпетлевым диаграммам рис. 11.8, б.

Результат (11.74) явно  $O(N)$ -симметричен. Как следует из заданного в начале раздела 11.2 вопроса, можно было опасаться, что это свойство будет разрушено после расчета радиационных поправок к состоянию со спонтанно нарушенной симметрией. Однако  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  — та функция, которую мы минимизируем для нахождения вакуумного состояния, поэтому она обязана быть симметричной, даже если вакуум с самой низкой энергией асимметричен. В построенном здесь формализме не о чем беспокоиться. Формула (11.63) явно инвариантна в каждом слагаемом относительно исходной  $O(N)$  симметрии лагранжиана. Следовательно, мы с необходимостью получим  $O(N)$ -симметричный результат для  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$ .

Прежде чем переходить к точному определению  $\delta_\mu$  и  $\delta_\lambda$ , следует проверить, что контрчлены в (11.74) достаточны для того, чтобы сделать выражение  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  конечным. Множитель  $\Gamma(-d/2)$  имеет полюсы при  $d = 0, 2, 4$ . Полюс при  $d = 0$  есть константа, не зависящая от  $\phi_{\text{cl}}$ , поэтому не имеет физического значения. Полюс при  $d = 2$  является четным квадратичным полиномом по  $\phi_{\text{cl}}$ . Отсюда (11.74) становится конечным выражением в пределе  $d \rightarrow 2$ , если положить:

$$\delta_\mu = -\lambda(N+2) \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)} + \text{конечные слагаемые.}$$

Выражение конечно при  $d \rightarrow 4$ , если положить:

$$\begin{aligned}\delta_\mu &= -\lambda\mu^2(N+2)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} + \text{конечные слагаемые;} \\ \delta_\lambda &= \lambda^2(N+8)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} + \text{конечные слагаемые.}\end{aligned}\tag{11.76}$$

Эти выражения согласуются с полученными ранее в разделе 11.2 формулами (11.33) и (11.22) при переходе к пределу  $d \rightarrow 2$  и  $d \rightarrow 4$ , соответственно. Конечные части  $\delta_\lambda$  и  $\delta_\mu$  зависят от точного вида наложенных условий перенормировки. Например, в разделе 11.2 мы потребовали выполнения условия (11.16), что вакуумное среднее  $\phi$  равно  $\mu/\sqrt{\lambda}$ , и дополнительных условий в (11.17) на амплитуду рассеяния и напряженность поля  $\sigma$ . Условие (11.16) легко выражается через эффективный потенциал:

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_{\text{cl}}}(\phi_{\text{cl}} = \mu/\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Используя связь между производными  $\Gamma$  и одночастично неприводимыми амплитудами, можно записать два других условия как фурье-преобразования функциональных производных  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  в импульсное пространство. Таким способом можно, в принципе, реконструировать конкретную схему перенормировок, использованную в разделе 11.2.

Однако, если мы хотим сделать более зримой модификацию результатов низшего порядка, порождаемую квантовыми поправками, можно применить более наглядную схему перенормировок. Одна из таких схем, известная как схема *минимального вычитания* ( $MS$ ), заключается в том, что в потенциально расходящихся величинах просто устраняются все полюсы ( $1/\varepsilon$ ) (при  $\varepsilon = 4 - d$ ). Однако обычно эти полюсы ( $1/\varepsilon$ ) сопровождаются слагаемыми, включающими величины  $\gamma$  и  $\ln(4\pi)$ . Никак не ограничивая произвольность процедуры, удобно вычесть и эти слагаемые. В таком рецепте, известном как *модифицированная схема минимального вычитания* или  $\overline{MS}$ , производится замена:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}(m^2)^{2-d/2}} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2) \right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{1}{(4\pi)^2} (-\ln(m^2/M^2)),\end{aligned}\tag{11.77}$$

где  $M$  — произвольный массовый параметр, который введен для того, чтобы сделать окончательное выражение правильным по размерности. Можно думать, что  $M$  параметризует последовательность возможных условий перенормировки. Схема перенормировки  $\overline{MS}$  обычно включает однопетлевые поправки в особенно простой форме. Цена этой простоты в том, что обычно требуются некоторые усилия, чтобы выразить физически измеряемые величины через параметры, входящие в выражение в схеме  $\overline{MS}$ .

Чтобы применить рецепт перенормировки  $\overline{MS}$  к (11.74), необходимо разложить расходящиеся слагаемые в этом уравнении по степеням  $\varepsilon$ . В качестве примера рас-

смотрим регуляризацию в схеме  $\overline{MS}$  выражения (11.73):

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^{d/2} &= \frac{1}{\frac{d}{2}(\frac{d}{2}-1)} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^{d/2} = \\ &= \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2) + \frac{3}{2} \right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left( -\ln(m^2/M^2) + \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.78)$$

Модифицируя в таком духе выражение (11.74), находим:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= -\frac{1}{2}\mu^2\phi_{\text{cl}}^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_{\text{cl}}^4 + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( (N-1)(\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)^2 \left( \ln[(\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)/M^2] - \frac{3}{2} \right) + \right. \\ &\left. + (3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)^2 \left( \ln[(3\lambda\phi_{\text{cl}}^2 - \mu^2)/M^2] - \frac{3}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (11.79)$$

Таким образом, эффективный потенциал после модификации становится более плавным при больших значениях  $\phi_{\text{cl}}$  и более отрицательным при меньших значениях, что показано на рис. 11.9. Для каждого набора значений  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $M$  можно определить предпочтительное вакуумное состояние, минимизируя  $V_{\text{eff}}(\phi)$  относительно  $\phi_{\text{cl}}$ . Если аргументы логарифмов становятся отрицательными, поправка к  $V_{\text{eff}}$  не определена, но, к счастью, как видно из рисунка, минимумы  $V_{\text{eff}}$  находятся вне этой области.

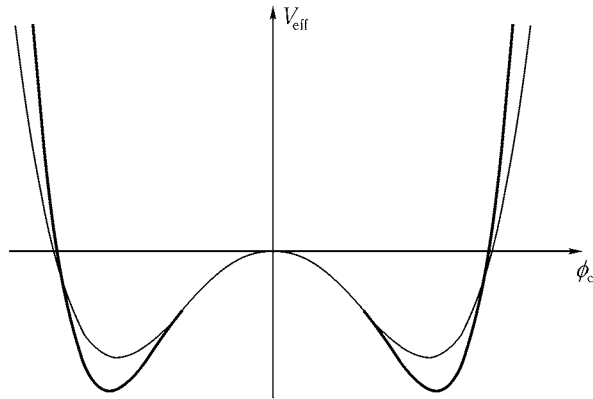


Рис. 11.9. Эффективный потенциал в теории  $\phi^4$  ( $N = 1$ ) с квантовыми поправками, включенными как в (11.79). Более тонкая кривая показывает для сравнения классическую потенциальную энергию.

Прежде чем двигаться дальше, мы хотим обсудить два вопроса, касающихся этого выражения для эффективного потенциала. Возникающие проблемы органически присущи всем расчетам в квантовой теории поля, но выражение (11.79) позволяет увидеть конкретную иллюстрацию этих трудностей. Большая часть материала двух следующих глав будет посвящена развитию такого формализма, в рамках которого можно получить ответ на эти вопросы.

Во-первых, вызывает беспокойство, что, несмотря на то, что классический лагранжиан содержит только два параметра  $\mu$  и  $\lambda$ , результат (11.79) зависит от трех параметров, один из которых — произвольный массовый масштаб  $M$ . Казалось бы, на это замечание может быть дан следующий ответ. Рассмотрим изменение  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$ , возникающее в результате изменения значения  $M^2$  на  $M^2 + \delta M^2$ . Из явного вида (11.79) следует, что можно полностью компенсировать это изменение, сдвинув значения  $\mu$  и  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\lambda &\rightarrow \lambda + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} (N+8) \cdot \frac{\delta M^2}{M^2}, \\ \mu^2 &\rightarrow \mu^2 - \frac{\lambda \mu^2}{(4\pi)^2} (N+2) \cdot \frac{\delta M^2}{M^2}.\end{aligned}\tag{11.80}$$

Следовательно, изменение в  $M^2$  полностью эквивалентно изменениям параметров  $\mu$  и  $\lambda$ . Однако неясно, почему это должно быть верно, или каким образом этот факт помогает понять зависимость наших формул от  $M^2$ .

Вторая проблема возникает из-за того, что однопетлевая поправка в (11.79) содержит логарифм, который может стать достаточно большим, чтобы компенсировать малую константу связи  $\lambda$ . Проблема становится особенно ясной в пределе  $\mu^2 \rightarrow 0$ . Тогда формула (11.79) принимает вид:

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}} &= \frac{\lambda}{4} \phi_{\text{cl}}^4 + \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \phi_{\text{cl}}^4 \left( (N+8) (\ln(\lambda \phi_{\text{cl}}^2 / M^2) - \frac{3}{2}) + 9 \ln 3 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \phi_{\text{cl}}^4 \left[ \lambda + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \left( (N+8) (\ln(\lambda \phi_{\text{cl}}^2 / M^2) - \frac{3}{2}) + 9 \ln 3 \right) \right].\end{aligned}\tag{11.81}$$

Где же минимум этого потенциала? Если мы принимаем это выражение на веру, то находим, что  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  проходит через нуль, когда  $\phi_{\text{cl}}$  достигает очень малого значения порядка

$$\phi_{\text{cl}}^2 \sim \frac{M^2}{\lambda} \cdot \exp \left[ -\frac{(4\pi)^2}{(N+8)\lambda} \right],$$

и в окрестности этой точки достигает минимума с ненулевым значением  $\phi_{\text{cl}}$ . Но нуль достигается за счет сокращения ведущего слагаемого квантовой поправкой. Иными словами, теория возмущений полностью разрушается до того, как мы можем задать вопрос о том, имеет ли  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  при  $\mu^2 = 0$  нарушающий симметрию минимум. Представляется, что имеющиеся в нашем распоряжении приемы совершенно не пригодны для решения этой проблемы.

Хотя это и далеко не очевидно, две указанные проблемы связаны друг с другом. Одним из основных результатов гл. 12 будет объяснение взаимозависимости  $M^2$ ,  $\lambda$  и  $\mu^2$ , выраженной соотношениями (11.80). Затем, в гл.13, мы воспользуемся полученными знаниями для полного решения второй проблемы, а именно, возникновения больших логарифмов. Однако, прежде чем переходить к исследованию, нужно обсудить еще несколько вопросов, касающихся более формальных аспектов перенормировки теорий со спонтанно нарушенной симметрией.

## 11.5. Эффективное действие как производящий функционал

После того как мы определили эффективное действие и вычислили его для одной конкретной теории, вернемся к главной задаче изучения перенормировки теорий

со скрытой симметрией. В разделе 11.6 мы используем для этого эффективное действие. Однако прежде необходимо более детально исследовать связь между эффективным действием и фейнмановскими диаграммами.

В разделе 9.2 было показано, что функциональные производные  $Z[J]$  по  $J(x)$  порождают корреляционные функции скалярного поля (см., например, (9.35)). Иными словами,  $Z[J]$  является *производящим функционалом* корреляционных функций. Наша задача — показать, что  $\Gamma[\phi_{cl}]$  также является производящим функционалом. Точнее, это производящий функционал для одночастично неприводимых (ОЧН) корреляционных функций. Так как ОЧН корреляционные функции занимают важное место в теории перенормировок, этот результат будет основным при обсуждении перенормировки в данном разделе.

Для начала рассмотрим функциональные производные не величины  $\Gamma[\phi_{cl}]$ , а величины  $E[J] = i \ln Z[J]$ . Первая производная, определенная выражением (11.44), в точности равна  $-\langle \phi(x) \rangle$ . Вторая производная равна:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} &= -\frac{i}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{i\int (\mathcal{L} + J\phi)} \phi(x)\phi(y) + \\ &+ \frac{i}{Z^2} \int \mathcal{D}\phi e^{i\int (\mathcal{L} + J\phi)} \phi(x) \cdot \int \mathcal{D}\phi e^{i\int (\mathcal{L} + J\phi)} \phi(y) = \\ &= -i \left[ \langle \phi(x)\phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (11.82)$$

Если мы хотим вычислить слагаемое  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$  с помощью фейнмановских диаграмм, то возникнут вклады двух типов:

$$x \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} y \quad + \quad x \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y, \quad (11.83)$$

где каждый кружок соответствует сумме *связных* диаграмм. Второе слагаемое в последней строке формулы (11.82) сокращает второе несвязное слагаемое в (11.83). Отсюда вторая производная от  $E[J]$  содержит только те вклады в  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$ , которые происходят от связных фейнмановских диаграмм. Назовем этот объект *связным коррелятором*:

$$\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = -i \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{\text{связн.}} \quad (11.84)$$

Аналогично, третья функциональная производная от  $E[J]$  равна

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 E[J]}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} &= \left[ \langle \phi(x)\phi(y)\phi(z) \rangle - \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \langle \phi(z) \rangle - \right. \\ &- \langle \phi(x)\phi(z) \rangle \langle \phi(y) \rangle - \langle \phi(y)\phi(z) \rangle \langle \phi(x) \rangle + 2 \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle \langle \phi(z) \rangle \left. \right] = \\ &= \langle \phi(x)\phi(y)\phi(z) \rangle_{\text{связн.}} \end{aligned} \quad (11.85)$$

В каждой последующей производной  $E[J]$  сокращаются все вклады кроме тех, которые вносятся полностью связными диаграммами. Общая формула для  $n$ -й производной имеет вид:

$$\frac{\delta^n E[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} = (i)^{n+1} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{\text{связн.}} \quad (11.86)$$

Поэтому мы называем  $E[J]$  *производящим функционалом для связанных корреляционных функций*. Это все об  $E[J]$ . Что можно сказать о функциональных производных эффективного действия? Рассмотрим сначала производную от (11.48) по  $J(y)$ :

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} = -\delta(x - y).$$

С помощью формулы Лейбница можно переписать левую часть этого уравнения, так что

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= - \int d^4 z \frac{\delta \phi_{\text{cl}}(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}}(z) \delta \phi_{\text{cl}}(x)} = \\ &= \int d^4 z \frac{\delta^2 E}{\delta J(y) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}}(z) \delta \phi_{\text{cl}}(x)} = \\ &= \left( \frac{\delta^2 E}{\delta J \delta J} \right)_{yz} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}} \delta \phi_{\text{cl}}} \right)_{zx}. \end{aligned} \quad (11.87)$$

Во второй строке мы использовали (11.44). Последняя строка является абстрактной формой записи второй строки, где каждая из вторых производных понимается как бесконечномерная матрица, а интеграл по  $z$  представляется матричным умножением. Мы показали, на самом деле, что эти две матрицы обратны друг другу:

$$\left( \frac{\delta^2 E}{\delta J \delta J} \right) = \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}} \delta \phi_{\text{cl}}} \right)^{-1}. \quad (11.88)$$

Согласно (11.84), первая из этих матриц равна  $-i$ , умноженной на связную двухточечную функцию, т.е. равна точному пропагатору поля  $\phi$ . Назовем этот пропагатор  $D(x, y)$ :

$$\left( \frac{\delta^2 E}{\delta J(x) \delta J(y)} \right) = -i \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\text{связн.}} \equiv -i D(x, y). \quad (11.89)$$

Следовательно, другая матрица (умноженная на  $-i$ ) может быть названа *обратным пропагатором*:

$$\left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}}(x) \delta \phi_{\text{cl}}(y)} \right) = i D^{-1}(x, y). \quad (11.90)$$

Это своего рода интерпретация второй функциональной производной эффективного действия. Такая интерпретация становится более конкретной, если перейти в импульсное представление. При условии трансляционно-инвариантного вакуумного состояния (т.е. такого, в котором  $\phi_{\text{cl}}$  постоянно) матрица  $D(x, y)$  должна быть диагональна по импульсу:

$$D(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}(p). \quad (11.91)$$

В соотношении (7.43) было показано, что пропагатор в импульсном пространстве  $\tilde{D}(p)$  является геометрической прогрессией по одночастично неприводимым фейнмановским диаграммам. Фурье-образ  $D^{-1}(x, y)$  определяет обратный пропагатор:

$$\tilde{D}^{-1}(p) = -i(p^2 - m^2 - M^2(p^2)), \quad (11.92)$$

где  $M^2(p)$  есть сумма одночастично неприводимых двухточечных диаграмм.

Чтобы вычислить производные эффективного действия более высокого порядка, вновь используем формулу Лейбница:

$$\frac{\delta}{\delta J(z)} = \int d^4 w \frac{\delta \phi_{\text{cl}}(w)}{\delta J(z)} \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(w)} = i \int d^4 w D(z, w) \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(w)}, \quad (11.93)$$

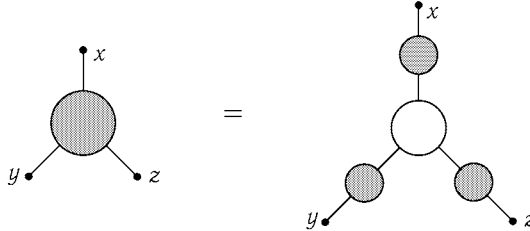
а также стандартное правило дифференцирования обратной матрицы:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} M^{-1}(\alpha) = -M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \alpha} M^{-1}. \quad (11.94)$$

Применяя эти тождества к (11.88), находим (используя сокращенные обозначения):

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 E[J]}{\delta J_x \delta J_y \delta J_z} &= i \int d^4 w D(z, w) \frac{\delta}{\delta \phi_w^{\text{cl}}} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^{\text{cl}} \delta \phi_y^{\text{cl}}} \right)^{-1} = \\ &= i \int d^4 w D_{zw} (-1) \int d^4 u \int d^4 v (-i D_{xu}) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_u^{\text{cl}} \delta \phi_v^{\text{cl}} \delta \phi_w^{\text{cl}}} (-i D_{vy}) = \\ &= i \int d^4 u d^4 v d^4 w D_{xu} D_{yv} D_{zw} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_u^{\text{cl}} \delta \phi_v^{\text{cl}} \delta \phi_w^{\text{cl}}}. \end{aligned} \quad (11.95)$$

Это соотношение яснее всего интерпретируется на диаграммном языке. Левая часть представляет связную трехточечную функцию. Если выделить точные пропагаторы, как показано в (11.95), получается следующее разложение:



На этой картинке каждый темно-серый кружок представляет сумму связных диаграмм, а светлый кружок справа представляет третью производную  $i\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ . Мы видим, что третья производная  $i\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  равна связной корреляционной функции, у которой удалены все три полных пропагатора, т.е. равна одночастично неприводимой трехточечной функции:

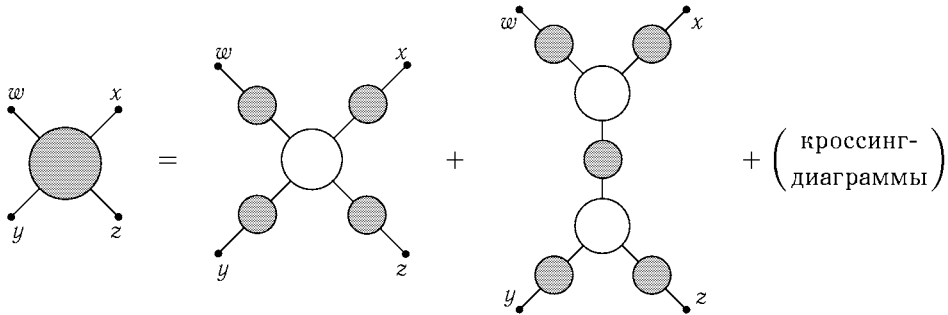
$$\frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}}(x) \delta \phi_{\text{cl}}(y) \delta \phi_{\text{cl}}(z)} = \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \rangle_{\text{OCH}}.$$

Аналогичными, хотя и все более сложными манипуляциями можно вывести такое же соотношение для каждой последующей производной  $\Gamma$ . Например, дифференцируя (11.95), мы в конце концов получим (используя матричные обозначения, причем повторяющиеся индексы подразумевают неявное интегрирование по соответствующей переменной):

$$\begin{aligned} \frac{-i\delta^4 E}{\delta J_w \delta J_x \delta J_y \delta J_z} &= D_{sw} D_{xt} D_{yu} D_{zv} \times \\ &\times \left[ \frac{i\delta^4 \Gamma}{\delta \phi_s^{\text{cl}} \delta \phi_t^{\text{cl}} \delta \phi_u^{\text{cl}} \delta \phi_v^{\text{cl}}} + \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_s^{\text{cl}} \delta \phi_t^{\text{cl}} \delta \phi_r^{\text{cl}}} D_{qr} \frac{i\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_q^{\text{cl}} \delta \phi_u^{\text{cl}} \delta \phi_v^{\text{cl}}} + (t \leftrightarrow u) + (t \leftrightarrow v) \right]. \end{aligned}$$



Так как левая часть этого уравнения есть связанная четырехточечная функция, можно переписать его на диаграммном языке в виде:



Как и выше, темно-серые кружки соответствуют сумме связанных диаграмм, а светлые кружки — величине  $i$ , умноженной на различные производные  $\Gamma$ . Вычитая последние три слагаемые с каждой стороны, мы удаляем все одночастично неприводимые куски из связанной четырехточечной функции и таким образом идентифицируем четвертую производную  $i\Gamma$  как одночастично неприводимую четырехточечную функцию. Общее соотношение (для  $n \geq 3$ ) имеет вид:

$$\frac{\delta^n \Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x_1) \cdots \delta \phi_{cl}(x_n)} = -i \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{0ch} . \tag{11.96}$$

Иными словами, эффективное действие является производящим функционалом одночастично неприводимых корреляционных функций.

Из этого следует, что  $\Gamma$  содержит полный набор физических предсказаний квантовой теории поля. Рассмотрим, как раскодировать эту информацию. Вакуумное состояние теории поля сопоставляется с минимумом эффективного потенциала. Положение минимума определяет, являются ли симметрии лагранжиана сохраняющимися или спонтанно нарушенными. Вторая производная  $\Gamma$  равна обратному пропагатору. Полюсы пропагатора или нули обратного пропагатора определяют значения масс частиц. Таким образом, массы  $m^2$  определяются как значения  $p^2$ , являющиеся решениями уравнения

$$\tilde{D}^{-1}(p^2) = \int d^4x e^{ip \cdot (x-y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi}(x, y) = 0. \tag{11.97}$$

Высшие производные  $\Gamma$  являются одночастично неприводимыми амплитудами. Они могут быть соединены полными пропагаторами и объединены вместе, чтобы построить связанные четырех- и многоточечные амплитуды, дающие значения элементов  $S$ -матрицы. Таким образом, зная  $\Gamma$ , можно реконструировать качественное поведение квантовой теории поля, ее тип нарушения симметрии, а затем количественные детали поведения частиц и их взаимодействий.

### 11.6. Перенормировка и симметрии: общий анализ

При анализе расходимостей квантовых теорий поля (особенно в разделе после формулы (10.4)) мы отмечали, что основные расходимости фейнмановских интегралов связаны с одночастично неприводимыми диаграммами. Следовательно, можно ожидать, что эффективное действие будет полезным объектом при обсуждении перенормируемости квантовых теорий поля, особенно теорий со спонтанно нарушенной симметрией. В данном разделе мы используем эффективное действие для указанных целей.

В разделе 11.4 был приведен конкретный пример того, что формализм вычисления эффективного действия включает контрчлены, необходимые для устранения ультрафиолетовых расходимостей, по крайней мере, на однопетлевом уровне. Эти контрчлены в точности совпадают с теми, которые входят в исходный лагранжиан. Покажем теперь, применяя рассуждения, связанные с подсчетом степеней (см. раздел 10.1), непосредственно к вычислению эффективного действия, что этот набор контрчленов всегда достаточен — во всех порядках теории возмущений и для любой перенормируемой теории поля. Мы будем рассуждать на примере скалярных теорий поля, однако все доводы можно обобщить на случай теорий спинорных и векторных полей.

Рассмотрим сначала вычисление эффективного потенциала для постоянных (не зависящих от  $x$ ) классических полей в теории с произвольным числом полей  $\phi^i$ . Массовая размерность эффективного потенциала равна 4, так что мы ожидаем, что  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  будет включать расходящиеся слагаемые вплоть до  $\Lambda^4$ . Для понимания этих расходимостей разложим  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  в ряд Тейлора:

$$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}) = A_0 + A_2^{ij} \phi_{\text{cl}}^i \phi_{\text{cl}}^j + A_4^{ijkl} \phi_{\text{cl}}^i \phi_{\text{cl}}^j \phi_{\text{cl}}^k \phi_{\text{cl}}^l + \dots$$

В теориях без симметрии  $\phi^i \rightarrow -\phi^i$  могут входить также слагаемые, линейные и кубичные по  $\phi^i$ ; для простоты мы их опускаем. Коэффициенты  $A_0$ ,  $A_2$ ,  $A_4$  имеют массовую размерность 4, 2 и 0, соответственно. Поэтому можно ожидать, что они содержат, соответственно, расходимости  $\Lambda^4$ ,  $\Lambda^2$  и  $\ln \Lambda$ . Анализ, основанный на подсчете степеней, предсказывает, что все слагаемые более высокой степени в ряде Тейлора должны быть конечны. Постоянное слагаемое  $A_0$  не зависит от  $\phi_{\text{cl}}$  и не имеет физического значения. Однако расходимости в  $A_2$  и  $A_4$  входят в физические величины, так как эти коэффициенты содержатся в обратном пропагаторе (11.90) и в неприводимой четырехточечной функции (11.96), а следовательно входят в элементы  $S$ -матрицы. Есть еще один коэффициент в эффективном действии с неотрицательной массовой размерностью. Это коэффициент при слагаемом, квадратичном по  $\partial_\mu \phi_{\text{cl}}^i$ , возникающий при вычислении эффективного действия для непостоянного фонового поля:

$$\Delta\Gamma[\phi_{\text{cl}}] = \int d^4x B_2^{ij} \partial_\mu \phi_{\text{cl}}^i \partial^\mu \phi_{\text{cl}}^j. \quad (11.98)$$

Все другие коэффициенты в разложении Тейлора для эффективного действия по степеням  $\phi_{\text{cl}}^i$  конечны с точки зрения подсчета степеней.

Покажем теперь, что в исходном лагранжиане контрчленов достаточно, чтобы устранить те расходимости, которые могут возникать при вычислении  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ . Рассуждение проводится в два этапа. Сначала мы используем теорему БПХЦ для доказательства того, что расходимости функций Грина можно устранить, подобрав набор контрчленов, соответствующих тем допустимым операторам, которые можно добавить к лагранжиану с коэффициентами, имеющими массовую размерность, большую или равную нулю. Коэффициенты этих контрчленов находятся в одно-однозначном соответствии с коэффициентами  $A_2$ ,  $A_4$  и  $B_2$  эффективного действия. Далее мы используем тот факт, что эффективное действие явно инвариантно по отношению к исходной группе симметрии модели. Это верно даже в случае, когда вакуумное состояние модели спонтанно нарушает симметрию. Такая симметрия эффективного действия следует из анализа, проведенного в разделе 11.4, так как представленный там метод расчета эффективного действия был явно инвариантен относительно исходной симметрии лагранжиана. Объединяя эти два результата, заключаем, что эффективное действие всегда можно сделать конечным, подобрав набор контрчленов, которые инвариантны относительно исходной симметрии теории, даже если затем эта симметрия спонтанно

нарушается. Используя результаты раздела 11.5, показывающие, как построить функции Грина с помощью функциональных производных эффективного действия, можно распространить этот вывод о перенормируемости на все функции Грина теории.

Чтобы конкретизировать это абстрактное рассуждение, покажем на простом примере, как функциональные производные эффективного действия приводят к набору фейнмановских диаграмм, расходимости которых соответствуют симметричным контрчленам. Для этого вернемся вновь к  $O(N)$ -инвариантной сигма-модели и вычислим вторую функциональную производную  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ . Если весь построенный формализм самосогласован, мы сможем опознать полученный результат как диаграммное разложение обратного пропагатора с расходимостями, соответствующим контрчленам  $O(N)$ -симметричной скалярной теории поля. Для начала запишем явное выражение (11.63) для данной модели:

$$\Gamma[\phi_{\text{cl}}] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu^2 \phi_{\text{cl}}^i)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_{\text{cl}}^i)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{4} ((\phi_{\text{cl}}^i)^2)^2 + \frac{i}{2} \ln \det[-i\mathcal{D}^{ij}] + \dots \right), \quad (11.99)$$

где

$$-i\mathcal{D}^{ij} = -\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi_{\text{cl}}^i \delta \phi_{\text{cl}}^j} = \partial^2 \delta^{ij} + (\lambda (\phi_{\text{cl}}^k(x))^2 - \mu^2) \delta^{ij} + 2\lambda \phi_{\text{cl}}^i(x) \phi_{\text{cl}}^j(x). \quad (11.100)$$

При постоянных  $\phi_{\text{cl}}^i$  величина  $\mathcal{D}^{ij}$  есть оператор, действующий на данную компоненту скалярного поля и равный оператору Клейна–Гордона с квадратом массы, определяемым выражением (11.69). Это соответствует приближению старшего порядка для обратного пропагатора линейной сигма-модели.

Чтобы найти поправки более высоких порядков к обратному пропагатору, необходимо вычислить вторую функциональную производную от слагаемых с квантовыми поправками в  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ . Из (11.99) находим:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{\text{cl}}^i(x) \delta \phi_{\text{cl}}^j(y)} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \phi_{\text{cl}}^i(x) \delta \phi_{\text{cl}}^j(y)} + \frac{i}{2} \frac{\delta^2}{\delta \phi_{\text{cl}}^i(x) \delta \phi_{\text{cl}}^j(y)} \ln \det[-i\mathcal{D}] + \dots$$

Первое слагаемое есть оператор Клейна–Гордона  $i\mathcal{D}^{ij} \delta(x-y)$ . Чтобы вычислить второе слагаемое, используем тождество (9.77) для детерминантов матриц:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \det M(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{tr} \ln M(\alpha) = \text{tr} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial \alpha}. \quad (11.101)$$

С его помощью находим:

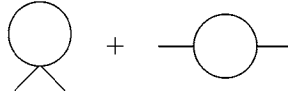
$$\frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}^k(z)} \ln \det[-i\mathcal{D}] = \\ = i \text{Tr} \left[ \lambda \left( \phi_{\text{cl}}^k(z) \delta^{ij} + \phi_{\text{cl}}^i(z) \delta^{jk} + \phi_{\text{cl}}^j(z) \delta^{ik} \right) (i\mathcal{D}^{-1})^{ij}(z, z) \right] = \\ = -\lambda \left( \phi_{\text{cl}}^k(z) \delta^{ij} + \phi_{\text{cl}}^i(z) \delta^{jk} + \phi_{\text{cl}}^j(z) \delta^{ik} \right) (\mathcal{D}^{-1})^{ij}(z, z).$$

Величина  $(\mathcal{D}^{-1})^{ij}(x, y)$  есть пропагатор Клейна–Гордона. Дифференцируя вторично,

можно использовать тождество (11.94), откуда

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi_{\text{cl}}^k(z)\delta\phi_{\text{cl}}^\ell(w)} \ln \det[-i\mathcal{D}] = & \quad (11.103) \\ = -\lambda(\delta^{k\ell}\delta^{ij} + \delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})(\mathcal{D}^{-1})^{ij}(z, z)\delta(z-w) + \\ & + 2i\lambda^2(\phi_{\text{cl}}^k(z)\delta^{ij} + \phi_{\text{cl}}^i(z)\delta^{jk} + \phi_{\text{cl}}^j(z)\delta^{ik})(\mathcal{D}^{-1})^{im}(z, w) \times \\ & \times (\phi_{\text{cl}}^\ell(z)\delta^{mn} + \phi_{\text{cl}}^m(z)\delta^{n\ell} + \phi_{\text{cl}}^n(z)\delta^{m\ell})(\mathcal{D}^{-1})^{nj}(w, z). \end{aligned}$$

Мы ожидаем, что получена формальная поправка к обратному пропагатору в однопетлевом приближении. И действительно, в (11.103) можно опознать значения однопетлевых диаграмм



Обратите внимание, как при этом выводе каждая функциональная производная от  $\mathcal{D}^{-1}$  добавляет дополнительный пропагатор к диаграмме, понижая тем самым степень расходимости в полном согласии с общими рассуждениями в разделе 10.1.

Этот пример показывает что последовательные функциональные производные  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  вычисляются с помощью диаграммного разложения с пропагаторами и вершинами, зависящими от классического поля. Когда классическое поле постоянно, пропагаторы сводятся к обычным пропагаторам Клейна–Гордона, так что применима теорема БПХЦ. Все ультрафиолетовые расходимости можно устранить из всех амплитуд, полученных дифференцированием  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ , используя самый общий набор перенормировок массы, вершины и напряженности поля. В то же время, теория возмущений явно инвариантна относительно симметрии исходного лагранжиана, и поэтому единственными возникающими расходимостями — а следовательно, и единственными требуемыми контрчленами — являются те, которые не нарушают эту симметрию. Тогда в общем случае все амплитуды перенормируемой теории скалярных полей, инвариантной относительно группы симметрии, могут быть сделаны конечными с помощью только набора контрчленов, инвариантных относительно этой симметрии. Это есть полный и вполне удовлетворительный ответ на вопрос, поставленный в начале раздела 11.2.

Вычисление эффективного действия в пространственно переменных фоновых полях не был проанализирован на уровне строгости, соответствующим доказательству теоремы БПХЦ. Однако ожидается, что и в этой ситуации будет достаточно стандартного набора контрчленов симметричной теории. Можно привести интуитивные аргументы в пользу этого утверждения, учитывая тот факт, что ультрафиолетовые расходимости фейнмановских диаграмм локальны в пространстве-времени. Отсюда, для понимания расходимостей при вычислении в гладко меняющемся фоновом поле  $\phi_{\text{cl}}(x)$  можно разделить пространство- время на малые ящики, в каждом из которых  $\phi_{\text{cl}}(x)$  приближенно постоянно, и разложить по производным  $\partial_\mu\phi_{\text{cl}}(x)$ . В этом разложении по степеням  $\partial_\mu\phi_{\text{cl}}(x)$  коэффициенты ряда Тейлора будут функциональными производными  $\Gamma$  в постоянном фоновом поле, которые, как нам известно, могут быть перенормированы. Вывод из этих интуитивных рассуждений был проверен на двухпетлевом уровне для ряда нетривиальных конфигураций фонового поля.

Из общего результата, касающегося перенормировки теорий со спонтанно нарушенной симметрией, вытекает важное следствие, касающееся физических предсказаний таких теорий. Большинство основных величин в перенормируемой теории поля нельзя предсказать, так как эти величины должны быть заданы как часть определения самой теории. Например, в КЭД для того, чтобы определить теорию, необходимо

известно настроить массу и заряд электрона. Предсказаниями КЭД являются те величины, которые не содержатся в лагранжиане, например, аномальный магнитный момент электрона. Однако в перенормируемых теориях со спонтанно нарушенной симметрией в результате нарушения симметрии возникает большое количество разных масс и констант связи, зависящих от сравнительно небольшого числа параметров исходной симметричной теории. После того как исходные параметры зафиксированы, любая дополнительная наблюдаемая в теории определяется однозначно. Например, в линейной сигма-модели, изучавшейся в этой главе, мы взяли в качестве исходных параметров значения четырехточечной константы связи  $\lambda$  и среднее по вакууму  $\langle\phi\rangle$ . Затем мы однозначно вычислили массу частицы  $\sigma$  через эти параметры.

Есть общее утверждение, гласящее, что как только мы фиксируем параметры лагранжиана, мы должны получить однозначную конечную формулу для массы  $\sigma$  в теории  $\phi^4$ , или, обобщая, конечную формулу для любого дополнительного параметра перенормируемой квантовой теории поля. В общем случае этот параметр будет определяться на классическом уровне через константы связи в лагранжиане. В случае массы  $\sigma$  в линейной сигма-модели это классическое соотношение имеет вид:

$$m - \sqrt{2}\lambda \langle\phi\rangle = 0, \quad (11.104)$$

где  $m$  — масса  $\sigma$ , а  $\lambda$  определяет амплитуду рассеяния четырех  $\phi$  на пороге. В общем случае петлевые поправки будут изменять это соотношение, внося ненулевой вклад в правую часть уравнения. Однако, поскольку соотношение (11.104) верно на классическом уровне, то как бы не изменялись параметры лагранжиана, оно будет выполняться при добавлении к лагранжиану контрчленов и их подстройки в последовательных порядках теории возмущений. Следовательно, контрчлены должны давать нулевой вклад в правую часть (11.104). Отсюда пертурбативные поправки к (11.104) должны быть автоматически ультрафиолетово конечными. Соотношение такого типа, верное на классическом уровне для всех значений констант в лагранжиане, но поправленное за счет петлевых эффектов, носит название *естественного соотношения нулевого порядка*. Из представленных рассуждений следует, что для любого такого соотношения петлевые поправки конечны и образуют предсказания квантовой теории поля. Еще с одним примером такого соотношения мы столкнемся в задаче 11.2.

### Уточненная теорема Голдстоуна

В качестве заключительного приложения формализма эффективного действия вернемся к вопросу, верна ли теорема Голдстоуна в присутствии квантовых поправок. Напомним, что мы доказали эту теорему на классическом уровне в конце раздела 11.1. Мы показали в (11.13), что, если лагранжиан обладает непрерывной симметрией, которая спонтанно нарушается, то матрица вторых производных классического потенциала  $V(\phi)$  обладает соответствующим нулевым собственным значением. Согласно (11.11), отсюда следует, что классическая теория содержит скалярную безмассовую частицу, связанную со спонтанно нарушенной симметрией.

С помощью формализма эффективного действия это рассуждение можно почти слово в слово повторить в полной квантовой теории. Эффективный потенциал  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  содержит в себе полное решение теории, включающее квантовые поправки всех порядков. В то же время, он удовлетворяет общим свойствам классического потенциала. Этот потенциал инвариантен относительно симметрий теории, а его минимум определяет среднее по вакууму поля  $\phi$ . Это означает, что рассуждения, приведшие к (11.13), точно так же распространяются на  $V_{\text{eff}}$ , как они были верны для  $V$ . Если непрерывная симметрия исходного лагранжиана спонтанно нарушена за счет  $\langle\phi\rangle$ , матрица вторых

производных  $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}})$  имеет нулевое собственное значение вдоль направления симметрии.

Приведем доказательство, что, так же как и на классическом уровне, наличие нулевого собственного значения влечет за собой существование безмассовой скалярной частицы. При обсуждении общих свойств эффективного действия мы показали, что его вторая функциональная производная является обратным пропагатором и что в силу (11.97) эта производная определяет спектр масс квантовой теории. Перепишем (11.97) для теории с несколькими скалярными полями:

$$\int d^4x e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi^i \delta \phi^j}(x, y) = 0. \quad (11.105)$$

Частица массой  $m$  соответствует нулевому собственному значению этого матричного уравнения при  $p^2 = m^2$ . Пусть теперь  $p = 0$ . Отсюда следует, что мы дифференцируем  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  по постоянным полям. Следовательно, мы можем заменить  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  его значением при постоянных классических полях, что как раз и есть эффективный потенциал. Получаем, что квантовая теория поля содержит скалярную частицу нулевой массы, когда матрица вторых производных

$$\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial \phi_{\text{cl}}^i \partial \phi_{\text{cl}}^j},$$

имеет нулевое значение. Это завершает доказательство теоремы Голдстоуна.

Приведенные рассуждения, касающиеся теоремы Голдстоуна, демонстрируют мощь формализма эффективного действия. Этот формализм дает геометрическую картину спонтанного нарушения симметрии, верную в каждом порядке по квантовым поправкам. Дополнительное преимущество в том, что в нем используются объекты, перенормируемые простым образом. Этот формализм окажется полезным для понимания приложений спонтанного нарушения симметрии, которые в разных контекстах будут несколько раз упоминаться в оставшейся части книги.

## Задачи

### 11.1. Теория спиновых волн.

- (а) Докажите следующую замечательную формулу. Пусть  $\phi(x)$  — свободное скалярное поле с пропагатором  $\langle T\phi(x)\phi(0) \rangle = D(x)$ . Тогда

$$\langle T e^{i\phi(x)} e^{-i\phi(0)} \rangle = e^{[D(x) - D(0)]}.$$

(Множитель  $D(0)$  дает формально расходящийся вклад в общую нормировку.)

- (б) Эту формулу можно использовать в евклидовой теории поля для обсуждения корреляционных функций в теории со спонтанно нарушенной симметрией при  $T < T_C$ . Рассмотрим простейший случай нарушенной  $O(2)$  или  $U(1)$  симметрии. Локальную спиновую плотность можно записать как комплексную переменную

$$s(x) = s^1(x) + i s^2(x).$$

Глобальная симметрия описывается преобразованием

$$s(x) \rightarrow e^{-i\alpha} s(x).$$

Если предположить, что по физическим причинам модуль  $s(x)$  фиксирован, то можно ввести параметризацию

$$s(x) = A e^{i\phi(x)}$$

и записать эффективный лагранжиан для поля  $\phi(x)$ . Симметрия теории становится трансляционной симметрией

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) - \alpha.$$

Покажите, что (при  $d > 0$ ) самый общий перенормируемый лагранжиан, совместимый с этой симметрией — это лагранжиан свободной теории поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho (\vec{\nabla} \phi)^2.$$

В статистической механике постоянную  $\rho$  называют *модулем спиновой волны*. Разумно считать, что  $\rho$  конечен при  $T < T_C$  и стремится к нулю при  $T \rightarrow T_C$  снизу.

- (с) Вычислите корреляционную функцию  $\langle s(x) s^*(0) \rangle$ . Подберите  $A$  так, чтобы получить физически осмысленную нормировку (предполагая, что в системе есть физическое обрезание на масштабах порядка расстояния между атомами), и постройте зависимость этой корреляционной функции от  $x$  для  $d = 1, 2, 3, 4$ . Объясните значение ваших результатов.

**11.2. Естественное соотношение нулевого порядка.** В этой задаче изучается  $N = 2$  линейная сигма-модель со связью с фермионами:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4} ((\phi^i)^2)^2 + \bar{\psi} (i \not{\partial}) \psi - g \bar{\psi} (\phi^1 + i \gamma^5 \phi^2) \psi, \quad (1)$$

где  $\phi^i$  — двухкомпонентное поле,  $i = 1, 2$ .

- (а) Покажите, что в этой теории имеется следующая глобальная симметрия:

$$\begin{aligned} \phi^1 &\rightarrow \cos \alpha \phi^1 - \sin \alpha \phi^2, \\ \phi^2 &\rightarrow \sin \alpha \phi^1 + \cos \alpha \phi^2, \\ \psi &\rightarrow e^{-i\alpha \gamma^5 / 2} \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажите также, что решение классических уравнений движения с минимальной энергией спонтанно нарушает эту симметрию.

- (б) Обозначим среднее по вакууму поля  $\phi^i$  как  $v$  и сделаем замену переменных

$$\phi^i(x) = (v + \sigma(x), \pi(x)). \quad (3)$$

Запишите лагранжиан в новых переменных и покажите, что фермион приобретает массу

$$m_f = g \cdot v. \quad (4)$$

- (с) Вычислите однопетлевую радиационную поправку к  $m_f$ , выбирая условия перенормировки так, чтобы  $v$  и  $g$  (определенные как вершина  $\psi\psi\pi$  при нулевом переданном импульсе) не получали радиационных поправок. Покажите, что в соотношении (4) дают вклад ненулевые радиационные поправки, но что эти поправки *конечны*. Это находится в согласии с общими выводами в разделе 11.6.

**11.3. Модель Гросса–Неве.** Модель Гросса–Неве — это модель фермионов в двух пространственно-временных измерениях с дискретной киральной симметрией:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i i \not{\partial} \psi_i + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}_i \psi_i)^2,$$

где  $i = 1, \dots, N$ . Кинетическое слагаемое для двумерных фермионов строится из матриц  $\gamma^\mu$ , удовлетворяющих двумерной дираковской алгебре. Этими матрицами могут быть  $2 \times 2$  матрицы

$$\gamma^0 = \sigma^2, \quad \gamma^1 = i\sigma^1,$$

где  $\sigma^i$  — сигма-матрицы Паули. Определим

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma^3;$$

эта матрица антикоммутирует с  $\gamma^\mu$ .

(а) Покажите, что такая теория инвариантна относительно преобразования

$$\psi_i \rightarrow \gamma^5 \psi_i,$$

и что такая симметрия запрещает появление массы у фермионов.

(б) Покажите (на уровне размерного анализа), что теория перенормируема в двух измерениях.

(в) Покажите, что функциональный интеграл в этой теории можно представить в виде:

$$\int \mathcal{D}\psi e^{i \int d^2x \mathcal{L}} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \exp \left[ i \int d^2x \left\{ \bar{\psi}_i i \not{\partial} \psi_i - \sigma \bar{\psi}_i \psi_i - \frac{1}{2g^2} \sigma^2 \right\} \right],$$

где  $\sigma(x)$  (не путать с матрицами Паули) — новое скалярное поле, слагаемые кинетической энергии для которого отсутствуют.

(д) Вычислите ведущие поправки к эффективному потенциалу для  $\sigma$ , интегрируя по фермионным полям  $\psi_i$ . Вы придете к детерминанту от дираковского оператора. Чтобы вычислить такой детерминант, диагонализуйте оператор, сначала перейдя к фурье-компонентам, а затем диагонализуя  $2 \times 2$  матрицы Паули, связанные с каждой фурье-модой. (Альтернативно можно просто взять детерминант этой  $2 \times 2$  матрицы.) Этот однопетлевой вклад требует перенормировки, пропорциональной  $\sigma^2$  (т.е. перенормировки  $g^2$ ). Совершите перенормировку путем минимального вычитания.

(е) Пренебрегая двухпетлевым вкладом и вкладами более высокого порядка, минимизируйте этот потенциал. Покажите, что поле  $\sigma$  получает среднее по вакууму, нарушающее симметрию из пункта а). Убедитесь, что этот результат не зависит от выбранных конкретных условий перенормировки.

(ф) Заметим, что эффективный потенциал, полученный в пункте е), зависит от  $g$  и  $N$  следующим образом:

$$V_{\text{eff}}(\sigma_{\text{cl}}) = N \cdot f(g^2 N).$$

(Общий множитель  $N$  возникает в теории с  $N$  полями.) Постройте несколько вкладов более высокого порядка в эффективный потенциал и покажите, что они содержат дополнительные множители  $N^{-1}$ , подавляющие эти вклады в пределе  $N \rightarrow \infty$  при фиксированном  $(g^2 N)$ . В таком пределе результат пункта (е) однозначен.



## ГЛАВА 12

# РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА

Нашей основной целью в последних двух главах было выяснение вопроса, когда и как происходит сокращение ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля. Мы видели, что в большом классе теорий поля расходимости возникают только в величинах нескольких параметров: — голых масс и констант связи или в перенормированной теории возмущений — контрчленов. В этих теориях виртуальные частицы с очень большим импульсом не оказывают влияния на результаты вычислений за исключением сдвига в этих параметрах.

Если теория претендует на количественные предсказания физических величин, то сокращение ультрафиолетовых расходимостей является существенным. Но на более глубоком уровне понимания тот факт, что виртуальные кванты с большим импульсом могут так слабо влиять на теорию, является довольно неожиданным. Одной из существенных особенностей квантовой теории поля является локальность, т. е. утверждение, что поля в различных пространственно-временных точках представляют собой независимые степени свободы с независимыми квантовыми флуктуациями. Квантовые флуктуации на произвольно малых расстояниях возникают в фейнмановских диаграммах как виртуальные кванты с произвольно большим импульсом. В перенормированной теории интегралы по импульсам виртуальных частиц, распространяющихся в петлях, всегда подавляются величинами, сравнимыми с конечными импульсами внешних частиц. Но почему? Нелегко понять, как квантовые флуктуации, связанные с экстремально короткими расстояниями, могут быть настолько несущественными, что влияют на теорию только через величины нескольких ее параметров.

Эта глава начинается с принадлежащего Кеннету Вильсону описания физической картины, объясняющей это необычное и противоречащее интуиции упрощение. Такая картина обобщает идею о зависимости электрического заряда от расстояния или масштаба, введенную в конце главы 7, и предполагает, что все параметры перенормированной теории поля понимаются как зависящие от масштаба величины. Мы увидим, что эта зависимость может быть описана простыми дифференциальными уравнениями, называемыми уравнениями *ренормализационной группы*. Решения этих уравнений приведут к физическим предсказаниям совершенно нового типа, а именно, предсказаниям, что при определенных обстоятельствах корреляционные функции квантового поля, рассматриваемые как функции координат, обладают необычными, но вычислимыми скейлинговыми свойствами.

### 12.1. Вильсоновский подход к теории перенормировок

Вильсоновский метод основан на описании теории поля с помощью функционального интеграла, в котором степени свободы квантового поля являются переменными интегрирования. В этом подходе можно изучить источник ультрафиолетовых расходимостей, изолируя зависимость функционального интеграла от степеней свободы кван-

тового поля на малых расстояниях\*. В этом разделе мы проиллюстрируем данную идею на простейшем примере теории  $\phi^4$ .

Чтобы сделать анализ более конкретным, не будем использовать элегантный, но несколько загадочный метод размерной регуляризации, а вместо него воспользуемся в этом разделе методом обрезания импульса. Поскольку мы будем рассматривать только теорию  $\phi^4$ , то не нужно беспокоиться о том, что из-за такого обрезания трудно удовлетворить тождествам Уорда. Анализ Вильсона может быть приспособлен к КЭД и другим ситуациям, где это обстоятельство существенно, но случая  $\phi^4$ -теории достаточно, чтобы продемонстрировать качественные результаты такого подхода.

В разделе 9.2 были построены функции Грина теории  $\phi^4$  с помощью представления производящего функционала  $Z[J]$  в виде функционального интеграла. Основные переменные интегрирования — это фурье-компоненты поля  $\phi(k)$ , так что  $Z[J]$  дается конкретным выражением

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\mathcal{L}+J\phi]} = \left( \prod_k \int d\phi(k) \right) e^{iS[\mathcal{L}+J\phi]}. \quad (12.1)$$

Чтобы наложить ультрафиолетовое обрезание  $\Lambda$ , ограничим число переменных интегрирования в (12.1). Иначе говоря, будем интегрировать только по  $\phi(k)$  при  $|k| \leq \Lambda$  и положим  $\phi(k) = 0$  при  $|k| > \Lambda$ .

Такая модификация функционального интеграла дает метод оценки влияния квантовых флуктуаций на очень малых расстояниях или при очень больших импульсах. В представлении функционального интеграла эти флуктуации описываются интегралами по фурье-компонентам поля  $\phi$  с импульсом вблизи обрезания. Так почему бы в явном виде не проинтегрировать по этим переменным? Тогда мы сможем сравнить результат с первоначальным функциональным интегралом и точно определить влияние мод с большим импульсом на физические предсказания теории.

Перед тем как начать этот анализ, все же следует сделать еще одно изменение. На первый взгляд кажется наиболее естественным определить ультрафиолетовое обрезание в пространстве Минковского. Однако обрезание  $k^2 \leq \Lambda^2$  не является полностью эффективным для контролирования больших импульсов, поскольку в светоподобных направлениях компоненты  $k$  могут быть очень большими, в то время как  $k^2$  остается малым. Поэтому мы наложим обрезание на евклидовы импульсы, полученные поворотом Вика. Иначе говоря, мы рассмотрим евклидову форму функционального интеграла, представленную в разделе 9.3, и ограничим его переменные  $\phi(k)$  с евклидовыми  $k$  значениями  $|k| \leq \Lambda$ .

Переход к евклидовому пространству ближе подводит нас к заявленной в гл. 8 связи между теорией перенормировок и статистической механикой. Как мы видели в разделе 9.3, евклидов функциональный интеграл для теории  $\phi^4$  имеет точно ту же форму, что и непрерывное описание статистической механики магнетика. Поле  $\phi(x)$  интерпретируется как флуктуирующие спиновое поле  $s(x)$ . Реальный магнетик состоит из атомов, и межатомное расстояние определяет физическое обрезание, т. е. наименьшее расстояние, на котором могут возникать флуктуации. Обрезание в функциональном интеграле грубым образом моделирует влияние этого атомного размера.

Углубляя аналогию, можно развить некоторые физические представления об эффектах, порождаемых ультрафиолетовым обрезанием в теории поля. В магнетике довольно легко наблюдать эффекты статистических спиновых флуктуаций на атомном масштабе. В действительности, для значений температуры вдали от критических точек, статистические флуктуации ограничены именно этим масштабом; на расстояниях

\* Обзор идей Вильсона можно найти в работе: K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Repts.* **12C**, 75 (1974).

порядка десятков межатомных расстояний магнетик уже проявляет однородное макроскопическое поведение. Мы видели в гл. 8, что можно аппроксимировать корреляционные функции спинового поля с помощью пропагатора евклидовой теории  $\phi^4$ . В этом приближении

$$\langle s(x)s(0) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 + m^2} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 |x|^2} e^{-m|x|}. \quad (12.2)$$

Пока температура далека от критической, размер «массы»  $m$  определяется одним естественным масштабом задачи — межатомным расстоянием. Поэтому мы ожидаем, что  $m \approx \Lambda$ . В теоретико-полевых вычислениях мы особенно интересовались ситуацией, когда  $m \ll \Lambda$ , и подгоняли параметры теории так, чтобы удовлетворить этому условию. При описании магнетика оказывается, что такая подгонка не требуется.

Однако в гл. 8 мы видели, что имеется одна ситуация, при которой корреляционная длина спинового поля гораздо больше, чем межатомное расстояние, так что на самом деле  $m \ll \Lambda$ . Когда спиновая система начинает намагничиваться, то в непосредственной близости от критической точки спины становятся скоррелированными на произвольно больших расстояниях, поскольку флуктуирующие спины стремятся выбрать общее направление намагниченности. Чтобы изучать эти дальнедействующие корреляции в магнетике, нужно точно подстроить температуру, чтобы подвести систему к области фазового перехода. Аналогично, можно представить, что происходит тонкая подстройка параметра  $m$  теории  $\phi^4$ , приводящая квантовую теорию в область параметров, где действительно обнаруживаются корреляции поля  $\phi(x)$  на расстояниях, много больших, чем  $1/\Lambda$ .

### Интегрирование по единственной импульсной оболочке

После такого введения начнем интегрирование по степеням свободы  $\phi$  с большими импульсами. Начнем с более детального выражения функционального интеграла (12.1) для случая теории  $\phi^4$ . Применим описанный ранее рецепт обрезания и положим для простоты  $J = 0$ . Тогда

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_{\Lambda} \exp\left(-\int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right]\right), \quad (12.3)$$

где

$$[\mathcal{D}\phi]_{\Lambda} = \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k). \quad (12.4)$$

В лагранжиане в уравнении (12.3)  $m$  и  $\lambda$  являются голыми параметрами, так что контрчлены отсутствуют. Аналогично анализу кажущейся степени расходимости, полезно провести анализ в пространстве-времени произвольной размерности  $d$ .

Теперь разделим переменные интегрирования  $\phi(k)$  на две группы. Выберем число  $b < 1$ . Переменные  $\phi(k)$  с  $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$  являются степенями свободы с большим импульсом, по которым мы будем интегрировать. Чтобы выделить эти степени свободы, определим

$$\hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{для } b\Lambda \leq |k| < \Lambda; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее определим новые  $\phi(k)$ , которые совпадают со старыми для  $|k| < b\Lambda$  и равны нулю для  $|k| > b\Lambda$ . Тогда можно заменить старые  $\phi$  в лагранжиане на  $\phi + \hat{\phi}$  и переписать

уравнение (12.3) как

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(-\int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2(\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi + \hat{\phi})^4\right]\right) = \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(-\int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2 \hat{\phi}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda\left(\frac{1}{6}\phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4}\phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6}\phi \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!}\hat{\phi}^4\right)\right]\right). \end{aligned} \quad (12.5)$$

В последнем выражении мы собрали все слагаемые, не зависящие от  $\hat{\phi}$ , в выражение для  $\mathcal{L}(\phi)$ . Заметим, что квадратичные слагаемые вида  $\phi\hat{\phi}$  исчезают, поскольку компоненты Фурье с различными длинами волн ортогональны.

В следующих нескольких разделах мы покажем, как проинтегрировать по  $\hat{\phi}$ . Это интегрирование преобразует (12.5) в выражение вида

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_{b\Lambda} \exp\left(-\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}}\right), \quad (12.6)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi)$  включает только те фурье-компоненты  $\phi(k)$ , для которых  $|k| < b\Lambda$ . Мы увидим ниже, что на самом деле  $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) = \mathcal{L}(\phi)$  плюс поправки, пропорциональные степеням  $\lambda$ . Эти поправочные члены компенсируют удаленные фурье-компоненты  $\hat{\phi}$  с большими  $k$ , добавляя взаимодействия между оставшимися  $\phi(k)$ , которые первоначально передавались флуктуациями  $\hat{\phi}$ .

Чтобы взять интегралы по  $\hat{\phi}(k)$ , используем тот же метод, который применялся в разделе 9.2 при получении фейнмановских правил. Ниже мы увидим, что новые члены в  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  могут быть представлены в диаграммной форме. В этом анализе все слагаемые четвертой степени в (12.5), которые пропорциональны  $\lambda$ , рассматриваются как возмущения. Поскольку нас в основном интересует ситуация, когда  $m^2 \ll \Lambda^2$ , будем также трактовать массовое слагаемое  $\frac{1}{2}m^2 \hat{\phi}^2$  как возмущение. Тогда слагаемое старшего порядка в части лагранжиана, включающей  $\hat{\phi}$ , имеет вид:

$$\int \mathcal{L}_0 = \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{\phi}^*(k) k^2 \hat{\phi}(k). \quad (12.7)$$

Это слагаемое приводит к пропагатору:

$$\overline{\hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p)} = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0} \hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p)}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int \mathcal{L}_0}} = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k+p) \Theta(k), \quad (12.8)$$

где

$$\Theta(k) = \begin{cases} 1 & \text{если } b\Lambda \leq |k| < \Lambda; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (12.9)$$

Мы будем рассматривать оставшиеся в (12.5)  $\hat{\phi}$ -слагаемые как возмущения и разложим экспоненту. Различные вклады этих возмущений могут быть вычислены по теореме Вика с пропагатором (12.8).

Рассмотрим сначала слагаемое, возникающее из  $\phi^2 \hat{\phi}^2$  при учете первого члена в разложении экспоненты в (12.5). Получаем:

$$-\int d^d x \frac{\lambda}{4} \phi^2 \hat{\phi} \hat{\phi} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \mu \phi(k_1) \phi(-k_1), \quad (12.10)$$

где коэффициент  $\mu$  есть результат спаривания двух полей  $\hat{\phi}$ :

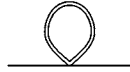
$$\mu = \frac{\lambda}{2} \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} = \frac{\lambda}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \Lambda^{d-2}. \quad (12.11)$$

Слагаемое (12.10) может быть также получено из разложения экспоненты:

$$\exp\left(-\int d^d x \frac{1}{2} \mu \phi^2 + \dots\right). \quad (12.12)$$

Мы вскоре увидим, что оставшаяся часть ряда теории возмущений также приводится к этому виду. Таким образом, коэффициент  $\mu$  дает положительную поправку к слагаемому с  $m^2$  в  $\mathcal{L}$ .

Аналогично могут быть получены поправки в высших порядках теории возмущений. Как и при выводе правил стандартной теории возмущений для теории  $\phi^4$ , полезно использовать диаграммные обозначения. Представим пропагатор (12.8) двойной линией. Он будет связывать пары полей  $\hat{\phi}$  из различных взаимодействий четвертого порядка. Представим в таких взаимодействиях поля  $\phi$ , по которым нет интегрирования, как одинарные внешние линии. Тогда, например, вклад (12.10) отвечает следующей диаграмме:



В порядке  $\lambda^2$  среди прочих получим вклады, включающие спаривания двух слагаемых с взаимодействием  $\lambda \phi^2 \hat{\phi}^2$ . Каждое слагаемое соответствует вершине, соединяющей две одинарные линии и две двойные линии. Имеются два возможных спаривания:

$$\left( \text{---} \bigcirc \text{---} \right)^2, \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (12.13)$$

Из них первое, отвечающее несвязной диаграмме, вносит в экспоненту вклад порядка  $\lambda^2$  (12.12). Второе спаривание дает новый вклад, который станет поправкой к взаимодействию  $\phi^4$  в  $\mathcal{L}(\phi)$ .

Вычислим этот второй вклад. Для простоты рассмотрим предел, в котором внешние импульсы, переносимые множителями  $\phi$ , очень малы по сравнению с  $b\Lambda$ , так что ими можно пренебречь. Тогда вклад этой диаграммы равен

$$-\frac{1}{4!} \int d^d x \zeta \phi^4, \quad (12.14)$$

где

$$\zeta = -4! \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \int_{b\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{-3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2})} \frac{(1 - b^{d-4})}{d-4} \Lambda^{d-4} \xrightarrow{d \rightarrow 4} -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln \frac{1}{b}. \quad (12.15)$$

Множитель 2 в числителе учитывает два возможных спаривания. Дополнительных комбинаторных факторов от подсчета внешних хвостов или вершин не возникает. При анализе теории  $\phi^4$  в разделе 10.2 мы столкнулись с аналогичной диаграммой, интегрируя по области импульсов от 0 до  $\Lambda$ , что приводит к логарифмической расходимости. В подходе Вильсона эта расходимость является не патологией, а указывает на то, что вклад в диаграмму дают все области импульсов. Действительно, она получает равные вклады от каждого логарифмического интервала между  $t$  и  $\Lambda$ . Мы увидим ниже, что (конечный) вклад в эту диаграмму от каждого интервала импульса физически важен.

Диаграммная теория возмущений, которую мы описали, не только генерирует вклады, пропорциональные  $\phi^2$  и  $\phi^4$ , но и вклады высших степеней  $\phi$ . Например, следующая диаграмма генерирует вклад взаимодействия  $\phi^6$ :

$$\begin{array}{c} \downarrow p_1 \\ \hline \leftarrow p_2 \quad \rightarrow \\ \hline \uparrow p_3 \end{array} \propto \frac{\lambda^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^2} \Theta(p_1 + p_2 + p_3). \quad (12.16)$$

Имеются также взаимодействия с производными, которые возникают, если не пренебрегать внешними импульсами в диаграммах. Более точно следовало бы провести разложение в ряд Тейлора по этим импульсам. Например в дополнение к выражению (12.14) мы получили бы слагаемые с двумя степенями внешнего импульса, которые можно было бы переписать в виде:

$$-\frac{1}{4} \int d^d x \eta \phi^2 (\partial_\mu \phi)^2. \quad (12.17)$$

Мы бы нашли также слагаемые с четвертой, шестой и более высокими степенями импульса, переносимыми  $\phi$ . В общем случае процедура интегрирования по  $\hat{\phi}$  генерирует все возможные взаимодействия полей  $\phi$  и их производных.

Диаграммные поправки могут быть слегка упрощены, если просуммировать их, собрав в экспоненту. Мы уже видели в (12.13), что диаграммное разложение генерирует несвязные диаграммы. С помощью тех же комбинаторных рассуждений, которые мы использовали в уравнении (4.52), можно переписать сумму ряда как экспоненту от суммы связных диаграмм. Это в точности приводит к выражению (12.6) с

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + (\text{сумма связных диаграмм}). \quad (12.18)$$

Диаграммные вклады включают поправки к  $m^2$  и  $\lambda$ , а также всевозможные операторы высшей размерности. Мы теперь можем использовать новый лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi)$ , чтобы вычислить корреляционные функции  $\phi(k)$  или элементы  $S$ -матрицы. Поскольку  $\phi(k)$  включает только импульсы, не превышающие  $b\Lambda$ , петлевые диаграммы в таком вычислении будут интегрироваться только до этого нижнего обрезания. Поправочные члены в (12.18) в точности компенсируют это изменение.

Появление слагаемых высшей размерности в (12.18) вызывает недоумение. Первоначальный лагранжиан теории  $\phi^4$  был выбран так, чтобы он содержал только перенормируемые взаимодействия. На первый взгляд, вызывает беспокойство тот факт, что при интегрировании по переменным  $\hat{\phi}$  возникают все возможные неперенормируемые взаимодействия. Однако мы увидим ниже, что такая процедура в действительности контролирует вклады этих взаимодействий. На самом деле из нашего анализа будет вытекать, что присутствие в исходном лагранжиане неперенормируемых взаимодействий, по определению требующих очень большого обрезания  $\Lambda$ , пренебрежимо мало влияет на физику на масштабах, много меньших  $\Lambda$ .

### Ренормгрупповые потоки

Проведем более точное сравнение нового функционального интеграла (12.6) с исходным интегралом (12.3). Удобнее всего это сделать, если изменить масштаб расстояний и импульсов в (12.6) по правилу:

$$k' = k/b, \quad x' = xb, \quad (12.19)$$

так что переменная  $k'$  будет интегрироваться по области  $|k'| < \Lambda$ . Схематически представим явное выражение для (12.18) как

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2}(1 + \Delta Z)(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4}(\lambda + \Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C(\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D\phi^6 + \dots \right]. \quad (12.20)$$

В терминах новой переменной  $x'$  действие переписывается в виде:

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x' b^{-d} \left[ \frac{1}{2}(1 + \Delta Z)b^2(\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4}(\lambda + \Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C b^4(\partial'_\mu \phi)^4 + \Delta D\phi^6 + \dots \right]. \quad (12.21)$$

Во время этого анализа все члены, кроме первого, рассматривались как малые возмущения. До тех пор пока исходные константы связи малы, это остается правильным приближением при работе с (12.21).

Первоначальный функциональный интеграл приводил к пропагатору (12.8). Новое действие (12.21) порождает такой же пропагатор, если изменить масштаб поля  $\phi$  по правилу:

$$\phi' = [b^{2-d}(1 + \Delta Z)]^{1/2} \phi. \quad (12.22)$$

После такого изменения невозмущенное действие принимает первоначальную форму, а различные возмущения подвергаются преобразованию:

$$\int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^d x' \left[ \frac{1}{2}(\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2}m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4}\lambda' \phi'^4 + C'(\partial'_\mu \phi')^4 + D' \phi'^6 + \dots \right]. \quad (12.23)$$

Новые параметры лагранжиана равны:

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2 + \Delta m^2)(1 + \Delta Z)^{-1} b^{-2}, \\ \lambda' &= (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta Z)^{-2} b^{d-4}, \\ C' &= (C + \Delta C)(1 + \Delta Z)^{-2} b^d, \\ D' &= (D + \Delta D)(1 + \Delta Z)^{-3} b^{2d-6} \end{aligned} \quad (12.24)$$

и т. д. (В исходном лагранжиане  $C = D = 0$ , но если бы величины  $C$  и  $D$  были ненулевыми, были бы верны те же уравнения.) Если теория возмущений справедлива, то

все поправки  $\Delta m^2$ ,  $\Delta \lambda$  и т. д. возникают из диаграмм и поэтому малы по сравнению с ведущими членами.

Комбинируя операцию интегрирования по степеням свободы с большими импульсами с изменением масштаба (12.19), мы переписали это как преобразование лагранжиана. Повторяя такую процедуру, можно проинтегрировать по другой оболочке в пространстве импульсов и продолжить преобразование лагранжиана. Последовательные интегрирования приводят к дальнейшим итерациям преобразования (12.24). Если взять параметр  $b$  близким к единице, так что область в пространстве импульсов будет бесконечно тонкой, то преобразование станет непрерывным. Поэтому можно описать результат интегрирования по степеням свободы с большими импульсами как траекторию или поток в пространстве всех возможных лагранжианов.

По историческим причинам эти непрерывно порождаемые преобразования лагранжианов известны как *ренормализационная группа* (сокращенно *ренормгруппа*). Они не образуют группу в формальном смысле, поскольку операция интегрирования по степеням свободы необратима. Но как мы сейчас увидим, они определенно связаны с перенормировкой.

Пусть мы хотим вычислить корреляционную функцию полей, импульсы которых много меньше  $\Lambda$ . Мы могли бы вычислить эту корреляционную функцию по теории возмущений, используя либо начальный лагранжиан  $\mathcal{L}$ , либо эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ , полученный после интегрирования по всем импульсным оболочкам, меньшим величины внешних импульсов  $p_i$ . Оба способа должны обязательно приводить к одному результату. Но в первом случае эффекты флуктуаций поля с большими импульсами не проявляются, пока мы не вычисляем петлевые диаграммы. Во втором случае эти эффекты уже учтены в новых константах ( $m'$ ,  $\lambda'$  и т. д.), так что их влияние можно увидеть прямо из лагранжиана.

В первой процедуре большие сдвиги от первоначальных значений (голых) параметров к значениям, соответствующим процессам с малыми импульсами, неожиданно возникают в однопетлевых диаграммах и на первый взгляд запрещают использование теории возмущений. Во втором подходе эти поправки вводятся плавно и систематически. Пертурбативный подход справедлив на каждом шаге, пока эффективные константы связи, такие как  $\lambda'$ , остаются малыми.

Однако параметры эффективного лагранжиана могут сильно отличаться от параметров первоначального лагранжиана, поскольку мы должны итерировать преобразование (12.24) много раз, чтобы перейти от больших импульсов  $\Lambda$  к импульсам, масштаб которых типичен в физическом эксперименте. Поэтому посмотрим более внимательно на то, как изменяется лагранжиан под действием преобразований ренормгруппы.

Проще всего рассмотреть лагранжиан в окрестности точки  $m^2 = \lambda = C = D = \dots = 0$ , где все возмущения исчезают. Мы определили преобразования так, чтобы эта точка оставалась неподвижной; мы говорим, что лагранжиан свободного поля

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 \quad (12.25)$$

является *фиксированной точкой* преобразований ренормгруппы.

В окрестности  $\mathcal{L}_0$  можно отбросить слагаемые  $\Delta m^2$ ,  $\Delta \lambda$  и т. д. в итерационных уравнениях (12.24) и оставить только те слагаемые, которые линейны по возмущениям. Это дает особенно простой закон преобразования:

$$m'^2 = m^2 b^{-2}, \quad \lambda' = \lambda b^{d-4}, \quad C' = C b^d, \quad D' = D b^{2d-6} \quad \text{и т. д.} \quad (12.26)$$

Поскольку  $b < 1$ , параметры, которые умножаются на отрицательные степени  $b$ , растут,



а параметры, которые умножаются на положительные степени  $b$ , уменьшаются. Если лагранжиан содержит растущие коэффициенты, они будут уводить его от точки  $\mathcal{L}_0$ .

Принято понимать различные члены в эффективном лагранжиане как множество локальных операторов, которые могут быть добавлены к  $\mathcal{L}_0$  как возмущения. Мы называем операторы, коэффициенты которых при рекурсионной процедуре возрастают, *существенными* операторами. Коэффициенты, которые вымирают, связаны с *несущественными* операторами. Например, оператор массы скалярного поля  $\phi^2$  всегда существенный, а оператор  $\phi^4$  является существенным, если  $d < 4$ . Если коэффициент некоторого оператора умножается на  $b^0$  (например, оператор  $\phi^4$  при  $d = 4$ ), мы называем его *маргинальным*; чтобы узнать, растут или уменьшаются его коэффициенты, нужно учесть эффекты от поправок высшего порядка.

В общем случае коэффициент при операторе с  $N$  степенями  $\phi$  и  $M$  производными преобразуется как

$$C'_{N,M} = b^{N(d/2-1)+M-d} C_{N,M}. \quad (12.27)$$

Заметим, что этот коэффициент есть просто  $(d_{N,M} - d)$ , где  $d_{N,M}$  — массовая размерность оператора, вычисленная в конце раздела 10.1. Иными словами, существенные и маргинальные операторы в окрестности точки, отвечающей свободной теории  $\mathcal{L}_0$ , в точности соответствуют суперперенормируемым и перенормируемым членам взаимодействия при анализе подсчета степеней в разделе 10.1.

Теперь можно также понять и эволюцию коэффициентов вблизи фиксированной точки свободного поля, используя непосредственный размерный анализ. Оператор с размерностью  $d_i$  в единицах массы имеет коэффициент с размерностью масса <sup>$d-d_i$</sup> . Естественный порядок величины этой массы равен параметру обрезания  $\Lambda$ . Таким образом, если  $d_i < d$ , возмущение все более важно при малых импульсах. С другой стороны, если  $d_i > d$ , относительный вклад этого слагаемого уменьшается как  $(p/\Lambda)^{d_i-d}$  при  $p \rightarrow 0$ ; тогда это слагаемое действительно несущественно.

Мы сейчас показали, что по крайней мере в окрестности фиксированной точки с нулевым взаимодействием произвольно сложный лагранжиан вырождается на масштабах обрезания в лагранжиан, имеющий только конечное число перенормируемых взаимодействий. Полезно сравнить этот результат с выводами гл. 10. Там мы придерживались точки зрения, что от обрезания  $\Lambda$  нужно освободиться, как можно быстрее переходя к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Мы обнаружили, что этот предел хорошо определен, только если лагранжиан не содержит параметров с отрицательной массовой размерностью. С этой точки зрения кажется чрезвычайно удачным, что, например, КЭД не содержит таких параметров, поскольку в противном случае эта теория не приводила бы к хорошо определенным предсказаниям.

Вильсоновский анализ основан на противоположной точке зрения, согласно которой любая квантовая теория поля на фундаментальном уровне определена с обрезанием  $\Lambda$ , которое имеет некоторое физическое значение. В приложениях к статистической механике, этот масштаб импульсов равен обратному межатомному расстоянию. В КЭД и других квантовых теориях поля, имеющих отношение к физике элементарных частиц, обрезание должно быть связано с фундаментальной зернистостью пространства-времени, возможно, обусловленной квантовыми флуктуациями гравитационного поля. Некоторые соображения о природе такого обрезания обсуждаются в Эпilogue. Но чем бы ни был этот масштаб, он лежит далеко от области, достижимой сегодняшними экспериментами. Аргумент, который мы сейчас представили, показывает, что это обстоятельство *объясняет* перенормируемость КЭД и других теорий взаимодействия элементарных частиц. Чем бы ни был лагранжиан КЭД на фундаментальных масштабах, до тех пор пока константы в нем достаточно малы, при энергиях наших экспериментов он должен описываться перенормируемым эффективным лагранжианом.

С другой стороны, нужно подчеркнуть, что эти простые выводы могут измениться при достаточно сильных взаимодействиях. Вдали от фиксированной точки свободного поля в простом законе преобразования (12.26) становятся существенными поправки, пропорциональные высшим степеням констант связи. Если эти поправки достаточно велики, то они могут остановить или повернуть ренормгрупповой поток. Они могут даже породить новые неподвижные точки, которые будут давать новые типы пределов  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

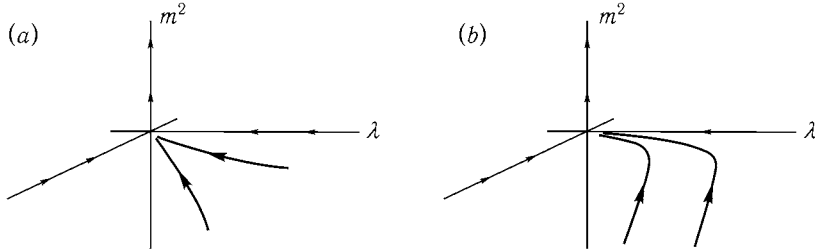


Рис. 12.1. Ренормгрупповые потоки вблизи свободно-полевой фиксированной точки свободного поля в скалярной теории: (a)  $d > 4$ ; (b)  $d = 4$ .

Чтобы проиллюстрировать возможное влияние взаимодействий в относительно простом случае, обсудим ренормгрупповые потоки вблизи  $\mathcal{L}_0$  в частном случае теории  $\phi^4$ . Полезно рассмотреть три случая:  $d > 4$ ,  $d = 4$  и  $d < 4$ . Когда  $d > 4$ , единственный существенный оператор — это массовое слагаемое скалярного поля. Тогда ренормгрупповой поток вблизи  $\mathcal{L}_0$  имеет вид, показанный на рис. 12.1(a). Взаимодействии  $\phi^4$  и возможные взаимодействия высших порядков вымирают, в то время как массовое слагаемое становится все более существенным.

В предыдущих главах теория  $\phi^4$  всегда обсуждалась в пределе, в котором масса мала по сравнению с обрезанием. Воспользуемся случаем, чтобы переписать это условие на языке ренормгрупповых потоков. Вдоль потока слагаемое эффективной массы  $m'^2$  становится большим и в конце концов равным текущему обрезанию. Например, вблизи фиксированной точки после  $n$  итераций  $m'^2 = m^2 b^{-2n}$ , и в конце концов найдется такое  $n$ , что  $m'^2 \sim \Lambda^2$ . В этой точке мы проинтегрировали по области импульсов между первоначальным  $\Lambda$  и эффективной массой скалярной теории. Тогда массовое слагаемое подавляет остающиеся квантовые флуктуации. В общем случае критерий того, что массовое слагаемое скалярного поля мало по сравнению с обрезанием, эквивалентен утверждению, что  $m'^2 \sim \Lambda^2$  только после большого числа итераций преобразований ренормгруппы.

Этот критерий верен вне зависимости от того, подобраны ли начальные условия ренормгруппового потока так, чтобы траектория проходила очень близко от фиксированной точки. В принципе, траектория могла бы начаться и далеко, вдоль направления несущественного оператора. Исходное значение  $m^2$  не обязательно должно быть малым, пока оно сокращается поправками, возникающими из диаграммных вкладов в  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ . Таким образом, можно вообразить построение скалярной теории поля при  $d > 4$  путем выписывания сложного нелинейного лагранжиана, но так подбирая начальное  $m^2$ , чтобы траектория, начавшаяся из этого лагранжиана, действительно проходила вблизи фиксированной точки свободного поля  $\mathcal{L}_0$ . В этом случае эффективная теория при малых по сравнению с обрезанием импульсах должна быть особенно простой — это должна быть свободная теория поля с пренебрежимо малым нелинейным взаимодействием. Как будет обсуждаться в следующей главе, это замечательное предсказание было проверено в математических моделях магнитных систем при значениях размерности

большей четырех. Даже если начальная модель была сильно нелинейной, корреляционная спиновая функция вблизи фазового перехода имеет вид свободного поля, даваемый многомерным аналогом уравнения (12.2).

Теперь рассмотрим случай  $d = 4$ . В этом случае уравнение (12.26) не дает достаточно информации, чтобы установить важно или нет взаимодействие  $\phi^4$  на больших расстояниях. Поэтому мы должны вернуться к полному закону преобразования (12.24). Главный вклад в  $\Delta\lambda$  дается уравнением (12.15). Главный вклад в  $\Delta Z$  порядка  $\lambda^2$ , так что им можно пренебречь. (То же самое произошло с первой поправкой к  $\delta_Z$  в разделе 10.2.) Таким образом, мы находим преобразование

$$\lambda' = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln(1/b). \quad (12.28)$$

Отсюда следует, что  $\lambda$  медленно уменьшается по мере того, как мы интегрируем по степеням свободы с большими импульсами.

Диаграмма, дающая вклад в поправку  $\Delta\lambda$ , имеет ту же структуру, что и однопетлевая диаграмма, вычисленная в разделе 10.2. На самом деле это совершенно одинаковые диаграммы, отличающиеся только тем, проведено ли интегрирование итерациями или сразу. Однако в то время как диаграммы раздела 10.2 содержали ультрафиолетовые расходимости, соответствующая диаграмма в подходе Вильсона хорошо определена и дает коэффициент в простом эволюционном уравнении для константы связи. Это преобразование дает первый пример новой интерпретации ультрафиолетовых расходимостей, которая будет сделана в этой главе.

Закон преобразования (12.28) требует, чтобы ренормгрупповой поток вблизи  $\mathcal{L}_0$  имел вид, показанный на рис. 12.1(b), с одним направлением медленного вытекания. Если проследовать вдоль потоков достаточно далеко, поведение должно опять соответствовать свободному полю. Эта картина приводит к сбивающему с толку выводу, что четырехмерная теория с взаимодействием  $\phi^4$  не существует в пределе, когда обрезание стремится к бесконечности. Мы обсудим этот результат в разделе 12.3, где объясним, почему тем не менее имеет смысл использовать теорию  $\phi^4$  как модель теории поля.

Наконец, рассмотрим случай  $d < 4$ . Теперь  $\lambda$  становится существенным параметром. Поэтому по мере интегрирования по степеням свободы теория вытекает из точки свободной теории  $\mathcal{L}_0$ . На больших расстояниях взаимодействие  $\phi^4$  становится все более существенным. Однако, когда  $\lambda$  становится большим, должны быть учтены и нелинейные поправки, подобные приведенным в выражении (12.28). Если учесть этот специфический эффект при  $d < 4$ , получим рекурсивную формулу

$$\lambda' = \left[ \lambda - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{b^{d-4} - 1}{4-d} \Lambda^{d-4} \right] b^{d-4}. \quad (12.29)$$

Из этого уравнения следует, что существует такая величина  $\lambda$ , при которой рост, связанный с изменением масштаба, компенсируется уменьшением, обусловленным нелинейностью. При этом значении  $\lambda$  не меняется после интегрирования по степеням свободы. Соответствующий лагранжиан есть вторая фиксированная точка ренормгруппового потока. В пределе  $d \rightarrow 4$  поток (12.29) стремится к (12.28) и, таким образом, новая фиксированная точка сливается с фиксированной точкой свободного поля. Для значения  $d$ , достаточно близкого к 4, новая неподвижная точка приобретет то свойство точки  $\mathcal{L}_0$ , что массовый параметр  $m^2$  растет в результате итераций. Тогда оператор массы будет существенным оператором вблизи новой неподвижной точки, и ренормгрупповой поток будет иметь вид, показанный на рис. 12.2.

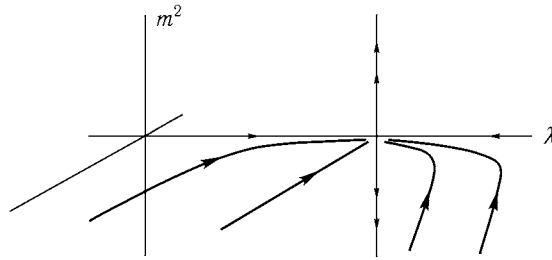


Рис. 12.2. Ренормгрупповые потоки вблизи фиксированной точки свободного поля в скалярной теории:  $d < 4$ .

В этом примере новая неподвижная точка ренормгруппы имеет лагранжиан с константами связи, достаточно малыми для того, чтобы уравнения преобразований могли быть вычислены по теории возмущений. В принципе можно также найти фиксированные точки, лагранжианы которых содержат сильные взаимодействия, так что ренормгрупповые преобразования не могут быть поняты на основе анализа фейнмановских диаграмм. Большое число примеров фиксированных точек такого типа известно в точно решаемых модельных теориях поля в двух измерениях\*. Однако все важные для физических приложений примеры квантовых теорий поля, которые известны на сегодняшний день, контролируются либо точками свободного поля, либо фиксированными точками типа той, что описана в предыдущем разделе, когда она в специальном пределе стремится к фиксированной точке свободного поля. Никто не понимает, почему так должно быть. Из этого наблюдения следует, что анализ фейнмановских диаграмм оказывается неожиданно мощным средством при получении физических следствий квантовой теории поля.

Требует комментария еще один аспект теории  $\phi^4$ . Поскольку массовое слагаемое  $m^2\phi^2$  является существенным оператором, его коэффициент быстро расходится под действием ренормгруппового потока. Выше мы видели, что для того, чтобы при малых импульсах остановиться при некоторой требуемой величине  $m^2$ , следует представить, что величина  $m^2$  в исходном лагранжиане подобрана специальным образом. Эта подстройка имеет естественную интерпретацию и в магнитной системе как необходимость аккуратно подстраивать температуру, чтобы находиться очень близко от критической точки. Но это кажется весьма искусственным требованием в приложениях к квантовой теории полей элементарных частиц, претендующей на роль фундаментальной теории Природы. Эта проблема возникает только для скалярных полей, поскольку для фермионов перенормировка массы пропорциональна голой массе, а не является произвольной аддитивной константой. Вероятно, в этом причина того, почему в природе, по-видимому, нет скалярных элементарных частиц. Мы вернемся к этому вопросу в Эпilogue.

## 12.2. Уравнение Каллана–Симанчика

Вильсоновская картина перенормировок как потока в пространстве возможных лагранжианов является прекрасной интуитивной картиной и дает глубокое понимание того, почему природа должна описываться с помощью перенормируемых квантовых теорий поля. Кроме того, эта идея позволяет получить из таких теорий количественные предсказания. В оставшейся части главы мы разработаем формализм для получения

\*Мы упомянем некоторые из этих примеров и обсудим другие непертурбативные подходы к квантовой теории поля в Эпilogue.

этих предсказаний. В частности, мы увидим, что вильсоновская картина предсказывает форму поведения корреляционных функций при больших и малых импульсах. В простейших случаях оказывается, что корреляционные функции изменяют масштаб как степени внешних импульсов, причем со степенными законами, не возникающими в любом порядке теории возмущений.

Вывод этих предсказаний возможен непосредственно из вильсоновской процедуры интегрирования по слоям в импульсном пространстве, как это и сделал первоначально сам Вильсон. Но поскольку мы уже поняли основную идею ренормгрупповых потоков, технически легче работать в рамках обычной перенормированной теории возмущений. Обсуждение в предыдущем разделе было физически обосновано, но оказалась технически сложно. Это обсуждение включало неудобные интегралы по конечным областям и использовало искусственный параметр  $b$ , который должен выпасть в окончательных ответах. Более того, мы знаем из раздела 7.5, что регуляризация обрезанием приводит к еще большим проблемам в КЭД, поскольку она нарушает тождество Уорда. В этом разделе обсуждение будет гораздо более формальным и абстрактным, однако позволит устранить указанные технические проблемы. В этом и следующем разделах мы выведем уравнение потока для константы связи, аналогичное полученному в разделе 12.1. Чтобы получить потоки наиболее общих лагранжианов, потребуются некоторые дополнительные приемы, которые будут рассмотрены в разделах 12.4 и 12.5.

Как можно надеяться получить информацию о ренормгрупповых потоках из выражений для перенормированных функций Грина, в которых обрезание уже было устремлено к бесконечности? Во-первых, мы должны понимать, что перенормируемые квантовые теории поля отвечают ограниченному классу из полного множества всех возможных рассмотренных в предыдущем разделе лагранжианов. На языке Вильсона перенормируемая теория с произвольно большим обрезанием отвечает траектории, которая за произвольно большое время проэволюционировала до большой величины массового параметра. Тогда такая траектория должна пройти произвольно близко от фиксированной точки, являющейся, как мы предполагаем, фиксированной точкой со слабым взаимодействием. При дальнейшей медленной эволюции несущественные операторы в первоначальном лагранжиане вымирают и остаются только существенные и маргинальные операторы. Коэффициенты этих операторов находятся во взаимно-однозначном соответствии с параметрами перенормируемой теории поля. Таким образом, при работе с перенормированной теорией мы отбрасываем информацию об эволюции несущественных возмущений, но сохраняем информацию о потоках существенных и маргинальных возмущений.

Потоки этих параметров нельзя определить, зная их зависимость от обрезания, поскольку в таком подходе обрезание уже устремлено к бесконечности. Однако в нашем распоряжении имеется альтернативный, хотя и более абстрактный способ. Параметры перенормированной теории поля определяются набором условий перенормировки, которые применены при определенном масштабе импульсов (называемым *перенормировочным масштабом*). В зависимости от того, как параметры теории зависят от перенормировочного масштаба, можно восстановить информацию, которая содержалась в ренормгрупповых потоках предыдущего раздела.

Рассмотрим сначала частный случай теории  $\phi^4$  в четырех измерениях, где константа связи  $\lambda$  безразмерна, а соответствующий оператор маргинальный. Будем также предполагать для простоты, что массовое слагаемое  $m^2$  выбрано равным нулю, так что теория находится в своей критической точке. Проведем этот анализ в пространстве Минковского, используя пространственноподобные импульсы. Этот анализ будет по существу идентичен анализу в евклидовом пространстве. Если мы хотим рассмотреть предсказания ренормгруппового подхода для времениподобных импульсов, следует рассмотреть возможности появления новых сингулярностей, которые усложняют

анализ. Они включают физические пороговые эффекты и судаковские двойные логарифмы, которые обсуждались в разделе 6.4. Мы отложим обсуждение этих усложнений до главы 17 и 18.

### Условия перенормировки

Чтобы полностью определить теорию, необходимо зафиксировать условия перенормировки. В главе 10 был использован естественный набор перенормировочных условий (10.19) для теории  $\phi^4$ , определенный через физическую массу  $m$ . Однако для теории с  $m = 0$  эти условия непригодны, поскольку они приводят к сингулярностям в контрчленах. (Рассмотрите, например, предел  $m^2 \rightarrow 0$  в выражении (10.24).) Чтобы их избежать, выберем произвольный масштаб импульсов  $M$  и наложим условия перенормировки при пространственноподобном импульсе  $p$  с  $p^2 = -M^2$ :

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \left( \text{ОЧН} \right) \text{---} \xrightarrow{p} = 0 \quad \text{при } p^2 = -M^2; \\
 & \frac{d}{dp^2} \left( \text{---} \left( \text{ОЧН} \right) \text{---} \right) = 0 \quad \text{при } p^2 = -M^2; \\
 & \begin{array}{c} \nearrow p_3 \\ \bullet \\ \searrow p_4 \\ \nwarrow p_1 \\ \nearrow p_2 \end{array} = -i\lambda \\
 & \quad \text{при } (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2.
 \end{aligned} \tag{12.30}$$

Параметр  $M$  называется *перенормировочным масштабом*. Эти условия определяют значения двух- и четырехточечных функций Грина в определенной точке и по ходу дела последовательно удаляют все расходимости. Грубо говоря, мы «определяем теорию на масштабе  $M$ ».

Эти новые условия перенормировки отчасти уже использовались. Второе условие подразумевает, в частности, что двухточечные функции Грина имеют коэффициент 1 при нефизическом импульсе  $p^2 = -M^2$ , а не на массовой оболочке (при  $p^2 = 0$ ):

$$\langle \Omega | \phi(p) \phi(-p) | \Omega \rangle = \frac{i}{p^2} \quad \text{при } p^2 = -M^2.$$

Здесь  $\phi$  — перенормированное поле, связанное с голым полем  $\phi_0$  масштабным фактором, который мы опять назовем  $Z$ :

$$\phi = Z^{-1/2} \phi_0. \tag{12.31}$$

Однако этот множитель  $Z$  не является вычетом в физическом полюсе в двухточечной функции Грина голых полей, как это было в гл. 7 и 10. Вместо этого теперь

$$\langle \Omega | \phi_0(p) \phi_0(-p) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2} \quad \text{при } p^2 = -M^2.$$

Фейнмановские правила для перенормируемой теории возмущений те же, что и в гл. 10, и с тем же соотношением между  $Z$  и контрчленом  $\delta_Z$ :

$$\delta_Z = Z - 1.$$

Но теперь контрчлены  $\delta_Z$  и  $\delta_\lambda$  должны быть подобраны так, чтобы обеспечить новые условия (12.30).

Первое условие перенормировки в (12.30) сохраняет физическую массу скалярного поля равной нулю. Мы видели в гл. 10, что в теории  $\phi^4$  однопетлевая поправка к пропагатору не зависит от импульса и полностью сокращается контрчленом перенормировки массы. Однако в двухпетлевом приближении ситуация усложняется, и поправки к пропагатору требуют перенормировки как массы, так и напряженности поля. В более общих скалярных теориях, таких как рассмотренная в конце раздела 10.2 теория Юкавы, это усложнение возникает уже на однопетлевом уровне. Поскольку перенормировочный контрчлен напряженности поля будет играть важную роль в дальнейшем, полезно кратко обсудить, как будет рассматриваться это двойное вычитание.

Вычисление поправок к пропагатору упрощается в случае рассматриваемого сейчас безмассового скалярного поля, причем особенное упрощение происходит при использовании размерной регуляризации. Рассмотрим, например, однопетлевую поправку к пропагатору в теории Юкавы. В разделе 10.2 было получено выражение вида:

$$\text{---} \overset{\longleftarrow}{p} \text{---} \circ \text{---} \sim \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Delta^{1-d/2}}, \quad (12.32)$$

где  $\Delta$  есть линейная комбинация фермионной массы  $m_f$  и  $p^2$ . Если вычислить диаграмму, используя только безмассовые пропагаторы, то  $\Delta$  пропорциональна  $p^2$ . Выражение (12.32) имеет полюс при  $d = 2$ , соответствующий квадратично расходящейся перенормировке массы. Однако вычет в этом полюсе не зависит от  $p^2$ , так что можно полностью сократить полюс с массовым контрчленом  $\delta_m$ . Это позволяет аналитически продолжить (12.32) к  $d = 4$ . Тогда выражение принимает вид:

$$-p^2 \left( \frac{1}{2-d/2} + \ln \frac{1}{-p^2} + C \right) \quad (12.33)$$

и приводит не к дополнительному сдвигу массы, а только к перенормировке напряженности поля. Оставшаяся расходимость сокращается контрчленом  $\delta_Z$ . Если принять правило, что следует просто продолжить выражения вида (12.32) к значению  $d = 4$ , можно вообще забыть о контрчлене  $\delta_m$ .

В схеме регуляризации с обрезанием по импульсу вклады в  $\delta_m$  и  $\delta_Z$  перепутываются друг с другом. Поэтому затруднительно определить безмассовый предел. В дальнейшем будем предполагать, что используется размерная регуляризация. Однако, чтобы подчеркнуть физическую роль обрезания, мы будем записывать все выражения вида (12.33) как

$$-p^2 \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} + C \right). \quad (12.34)$$

Логарифмически расходящиеся слагаемые, пропорциональные  $p^2$ , будут согласовываться с расходимостями, полученными путем обрезания по импульсу, а постоянные слагаемые — нет, но последние выпадают из окончательных ответов.

В теории  $\phi^4$ , где однопетлевая поправка к пропагатору не зависит от импульса, однопетлевую диаграмму можно по этому рецепту просто положить равной нулю. Тогда предшествующий анализ следует применять к двухпетлевым поправкам и поправкам более высокого порядка.

Обобщение анализа этого раздела для массивной скалярной теории требует развития дополнительного формализма, и мы отложим этот вопрос до раздела 12.5.

### Уравнение Каллана–Симанчика

В условиях перенормировки (12.30) масштаб перенормировки  $M$  произволен. Мы могли бы определить ту же самую теорию при другом масштабе  $M'$ . Под «той же самой теорией» мы понимаем теорию, голые функции Грина которой

$$\langle \Omega | T \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \cdots \phi_0(x_n) | \Omega \rangle$$

даются теми же самыми функциями голой константы связи  $\lambda_0$  и обрезания  $\Lambda$ . Эти функции не имеют отношения к  $M$ . Зависимость от  $M$  появляется, только когда мы снимаем зависимость от обрезания изменением масштаба полей и удаляем  $\lambda_0$ , заменяя ее на перенормированную константу связи  $\lambda$ . Перенормированные функции Грина численно равны голым функциям Грина с точностью до изменения масштаба путем умножения на степени константы перенормировки напряженности поля  $Z$ :

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = Z^{-n/2} \langle \Omega | T \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \cdots \phi_0(x_n) | \Omega \rangle. \quad (12.35)$$

Перенормированные функции Грина можно определить и при другом масштабе  $M'$ , используя новую перенормированную константу связи  $\lambda'$  и новый множитель изменения масштаба  $Z'$ .

Выпишем более точно результат бесконечно малого сдвига величины  $M$ . Пусть  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  — связанная  $n$ -точечная функция, вычисленная по перенормированной теории возмущений:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle_{\text{связные}}. \quad (12.36)$$

Предположим, что  $M$  сдвинута на  $\delta M$ . Соответствующий сдвиг возникнет в константе связи и напряженности поля, так что голые функции Грина останутся неизменными:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M + \delta M, \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \delta \lambda, \\ \phi &\rightarrow (1 + \delta \eta) \phi. \end{aligned} \quad (12.37)$$

Тогда сдвиг в любой перенормированной функции Грина индуцируется изменением масштаба поля,

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n\delta\eta) G^{(n)}.$$

Если рассматривать  $G^{(n)}$  как функцию  $M$  и  $\lambda$ , можно записать это преобразование как

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}. \quad (12.38)$$

Вместо того чтобы выписывать это соотношение через  $\delta \lambda$  и  $\delta \eta$ , принято определять безразмерные параметры:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda; \quad \gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta. \quad (12.39)$$

Подставляя их в уравнение (12.38) и умножая все на  $M/\delta M$ , получим:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0. \quad (12.40)$$



Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  те же самые для каждого  $n$  и не должны зависеть от  $x_i$ . Поскольку функция Грина  $G^{(n)}$  перенормирована,  $\beta$  и  $\gamma$  не могут зависеть от обрезания, следовательно, по размерным соображениям эти функции не могут зависеть от  $M$ . Поэтому они являются функциями только безразмерной переменной  $\lambda$ . Можно заключить, что любая функция Грина безмассовой теории  $\phi^4$  должна удовлетворять уравнению

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(\{x_i\}; M, \lambda) = 0. \quad (12.41)$$

Это соотношение называется уравнением Каллана–Симанчика\*. Оно утверждает, что существуют две универсальные функции  $\beta(\lambda)$  и  $\gamma(\lambda)$ , связанные со сдвигами константы связи и напряженности поля, которые компенсируют сдвиг в масштабе перенормировки  $M$ .

Это рассуждение без труда обобщается на другие безмассовые теории с безразмерными константами связи. В теориях с большим числом полей и констант связи для каждого поля имеется слагаемое  $\gamma$ , а для каждой константы связи — слагаемое  $\beta$ . Например, можно определить КЭД при нулевой массе электрона, вводя масштаб перенормировки как в уравнении (12.30). Условия перенормировки для пропагаторов применяются при  $p^2 = -M^2$ , а для вершин — в точке, где все три инварианта порядка  $-M^2$ . Тогда перенормированные функции Грина этой теории удовлетворяют уравнению Каллана–Симанчика вида:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n\gamma_2(e) + m\gamma_3(e) \right] G^{(n,m)}(\{x_i\}; M, e) = 0, \quad (12.42)$$

где  $n$  и  $m$  равны числу электронных и фотонных полей в функциях Грина  $G^{(n,m)}$  соответственно, а  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  — функции, определяющие изменение масштаба электронного и фотонного полей.

### Вычисление $\beta$ и $\gamma$

Прежде чем рассматривать приложения уравнения Каллана–Симанчика, более внимательно изучим возникающие в нем функции  $\beta$  и  $\gamma$ . Из их определений (12.39) следует, что с ростом масштаба перенормировок  $M$  эти функции пропорциональны, соответственно, сдвигу константы связи и изменению в перенормировке поля. Особенно интересно поведение константы связи при изменении  $M$ , поскольку оно определяет интенсивность взаимодействия и условия, при которых применима теория возмущений. Мы увидим в следующем разделе, что сдвиг в напряженности поля также непосредственно отражается на значениях функций Грина.

Простейший способ вычислить функции Каллана–Симанчика — начать с явных пертурбативных выражений для некоторых специально выбранных функций Грина. Если потребовать, чтобы эти функции удовлетворяли уравнению Каллана–Симанчика, мы получим уравнения, которые можно решить относительно  $\beta$  и  $\gamma$ . Поскольку зависимость перенормированных функций Грина от  $M$  обусловлена контрчленами, которые сокращают ее логарифмические расходимости, получим, что функции  $\beta$  и  $\gamma$  связаны с этими контрчленами или, эквивалентно, с коэффициентами при расходящихся логарифмах. Точная формула, связывающая  $\beta$  и  $\gamma$  с контрчленами, будет зависеть конкретно от рецепта перенормировки и других деталей схемы вычисления. Но в однопетлевом приближении выражения для  $\beta$  и  $\gamma$  просты и однозначны.

В качестве первого примера вычислим однопетлевой вклад в  $\beta(\lambda)$  и  $\gamma(\lambda)$  в безмассовой теории  $\phi^4$ . Можно упростить анализ, работая не в координатном, а в импульсном

\*C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D2**, 1541 (1970), K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18**, 227 (1970).

представлении. Наша стратегия будет состоять в приложении уравнения Каллана–Симанчика к диаграммным выражениям для двух- и четырехточечных функций Грина.

Двухточечная функция равна

$$\text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \otimes \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} +$$

В безмассовой теории  $\phi^4$  однопетлевая поправка к пропагатору полностью сокращается массовым контрчленом. Следовательно первая нетривиальная поправка к пропагатору возникает из двухпетлевой диаграммы и ее контрчлена и имеет порядок  $\lambda^2$ . Между тем, четырехточечная функция равна

$$\text{---} \times \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots + \text{---} \otimes \text{---} +,$$

где мы опустили сократившиеся однопетлевые поправки к пропагаторам внешних линий. Диаграммы порядка  $\lambda^3$  включают неисчезающие двухпетлевые поправки к пропагаторам внешних линий.

Для вычисления  $\beta$  применим уравнение Каллана–Симанчика к четырехточечной функции:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = 0. \quad (12.43)$$

Используя результат (10.21) из раздела 10.2, можно записать  $G^{(4)}$  в виде:

$$G^{(4)} = [-i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda] \cdot \prod_{i=1, \dots, 4} \frac{i}{p_i^2},$$

где  $V(s)$  — петлевой интеграл в (10.20). Наши условия перенормировки (12.30) требуют, чтобы поправочные слагаемые сокращались при  $s = t = u = -M^2$ . Поэтому вершинный контрчлен порядка  $\lambda^2$  равен

$$\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot 3V(-M^2) = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(x(1-x)M^2)^{2-d/2}}. \quad (12.44)$$

Последнее выражение следует из формулы (10.23) для  $V(p^2)$  при  $m = 0$  и  $p^2 = -M^2$ . В пределе, когда  $d \rightarrow 4$ , формула (12.44) принимает вид:

$$\delta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{2 - d/2} - \ln M^2 + \text{конечные слагаемые} \right], \quad (12.45)$$

где конечные слагаемые не зависят от  $M$ . Этот контрчлен определяет зависимость  $G^{(4)}$  от  $M$ :

$$M \frac{\partial}{\partial M} G^{(4)} = \frac{3i\lambda^2}{(4\pi)^2} \prod_i \frac{i}{p_i^2}.$$

Предположим временно, что  $\gamma(\lambda)$  не содержит слагаемого порядка  $\lambda$ ; мы обоснуем это предположение в следующем абзаце. Тогда уравнение Каллана–Симанчика (12.43)

будет удовлетворяться до порядка  $\lambda^2$ , только если  $\beta$  функция теории  $\phi^4$  имеет вид

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (12.46)$$

Далее, рассмотрим уравнение Каллана–Симанчика для двухточечной функции:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(p) = 0. \quad (12.47)$$

Поскольку в однопетлевом приближении пропагаторные поправки к  $G^{(2)}$  отсутствуют, то в порядке  $\lambda$  не возникает и зависимости от  $M$  или  $\lambda$ . Таким образом, функция  $\gamma$  в этом порядке равна нулю:

$$\gamma = 0 + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (12.48)$$

Это подтверждает предположение, сделанное в предыдущем абзаце. Двухпетлевая поправка к пропагатору расходится, и ее контрчлен содержит зависящее от  $M$  слагаемое порядка  $\lambda^2$ . Это дает вклад в первое слагаемое в (12.47). Поскольку  $\beta$  — порядка  $\lambda^2$  и поправки к  $G^{(2)}$  имеют порядок  $\lambda^2$ , главные вклады во второе слагаемое в (12.47) оказываются порядка  $\lambda^3$ . Поэтому  $\gamma$  приобретает ненулевой вклад в порядке  $\lambda^2$ . Этот главный вклад в  $\gamma$  вычислен в задаче 13.2.

Предыдущий пример показывает как можно вычислить  $\beta$  и  $\gamma$  в более общих теориях с безразмерными константами связи. В таких теориях зависимость функций Грина от  $M$  появляется через вклад контрчленов напряженности поля и вершин, используемых для сокращения расходящихся логарифмов. Выражения для  $\beta$  и  $\gamma$  в низшем порядке можно вычислить непосредственно из этих контрчленов или из коэффициентов при расходящихся логарифмах.

В любой перенормируемой безмассовой скалярной теории поля двухточечные функции Грина имеют общий вид:

$$G^{(2)}(p) = \text{---} \otimes \text{---} = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left( A \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} + \text{конечные слагаемые} \right) + \frac{i}{p^2} (ip^2 \delta_Z) \frac{i}{p^2} + \dots \quad (12.49)$$

Зависимость этого выражения от  $M$  в низшем порядке возникает только из контрчлена  $\delta_Z$ . Применяя к  $G^{(2)}(p)$  уравнение Каллана–Симанчика и пренебрегая  $\beta$ -членом (степень константы связи в нем всегда меньше по крайней мере на единицу), находим:

$$-\frac{i}{p^2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta_Z + 2\gamma \frac{i}{p^2} = 0,$$

или

$$\gamma = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta_Z \quad (\text{в низшем порядке}). \quad (12.50)$$

Чтобы более явно записать этот результат, заметим, что для сокращения расходящегося логарифма в  $G^{(2)}$  контрчлен должен иметь вид:

$$\delta_Z = A \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} + \text{конечные слагаемые}.$$

Таким образом,  $\gamma$  — просто коэффициент перед логарифмом:

$$\gamma = -A \quad (\text{в низшем порядке}). \quad (12.51)$$

В большинстве теорий (например, теория Юкавы или КЭД), первая логарифмическая расходимость в  $\delta_Z$  возникает на однопетлевом уровне. Однако в теории  $\phi^4$  формулы (12.50) и (12.51) остаются верны для первого неисчезающего слагаемого в  $\delta_Z$ , которое определяется в этом случае двухпетлевым вкладом\*. Заменяя пропагатор скалярного поля ( $i/p^2$ ) фермионным пропагатором ( $i/\not{p}$ ), можно буквально повторить это рассуждение и выразить функцию  $\gamma$  фермионного поля через контрчлен напряженности поля  $\delta_Z$ .

Можно вывести аналогичные выражения для  $\beta$ -функции общей безразмерной константы связи  $g$ , ассоциированной с  $n$ -точечной вершиной. С учетом поправок к пропагатору общая форма полной связной функции Грина в однопетлевом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} G^{(n)} &= \left( \begin{array}{c} \text{древесная} \\ \text{диаграмма} \end{array} \right) + \\ &+ \left( \begin{array}{c} \text{ОЧН петлевые} \\ \text{диаграммы} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{вершинный} \\ \text{контрчлен} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{поправки} \\ \text{к внешним линиям} \end{array} \right) = \\ &= \left( \prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left[ -ig - iB \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} - i\delta_g + (-ig) \sum_i \left( A_i \ln \frac{\Lambda^2}{-p_i^2} - \delta_{Zi} \right) \right] + \\ &\quad + \text{конечные слагаемые}. \quad (12.52) \end{aligned}$$

В этом выражении  $p_i$  — импульсы внешних линий, а  $p^2$  — типичный инвариант, построенный из этих импульсов. Предполагается, что условия перенормировки применяются в точке, где все такие инварианты пространственноподобны и порядка  $-M^2$ . Зависимость этого выражения от  $M$  происходит из контрчленов  $\delta_g$  and  $\delta_{Zi}$ . Применяя уравнение Каллана–Симанчика, получаем:

$$M \frac{\partial}{\partial M} \left( \delta_g - g \sum_i \delta_{Zi} \right) + \beta(g) + g \sum_i \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta_{Zi} = 0,$$

или

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} \left( -\delta_g + \frac{1}{2} g \sum_i \delta_{Zi} \right) \quad (\text{в низшем порядке}). \quad (12.53)$$

Для точности заметим, что

$$\delta_g = -B \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} + \text{конечные слагаемые}.$$

Поэтому  $\beta$ -функция есть просто комбинация коэффициентов при расходящихся логарифмах:

$$\beta(g) = -2B - g \sum_i A_i \quad (\text{в низшем порядке}). \quad (12.54)$$

\*В однопетлевом приближении формула (12.33) подразумевает, что можно идентифицировать  $A$  как коэффициент перед  $2/(4-d)$  в ОЧН собственной энергии в пределе  $d \rightarrow 4$ . Это соотношение меняется в высших поправках. Однако формула (12.50) остается правильной.

Заметим, что конечные части контрчленов не зависят от  $M$  и поэтому никогда не дают вклада в  $\beta$  или  $\gamma$ . Это означает, что для вычисления главных членов в функциях Каллана–Симанчика не нужно быть особенно точными в определении условий перенормировки: любой масштаб импульсов порядка  $M^2$  будет давать те же результаты. Расходящиеся части контрчленов можно оценить, полагая все инварианты под знаками логарифмов равными  $M^2$ , как это делалось выше в выражении для  $n$ -точечной функции Грина.

Как и при вычислении  $\gamma$ , это рассуждение может быть почти без изменений применено для вычисления констант связи в случае полей со спином. Например, рассмотрим в теории Юкавы трехточечную функцию с одним входящим, одним исходящим фермионом и одним скаляром с импульсами  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Тогда в древесном приближении для трехточечной функции имеем:

$$\frac{i}{\not{p}_1} \frac{i}{\not{p}_2} \frac{1}{p_3^2} (-ig). \quad (12.55)$$

Однопетлевые поправки заменяют величину  $(-ig)$  на выражение в скобках в формуле (12.52). Тогда формулы (12.53) и (12.54) сохраняют свой вид и для  $\beta$ -функции в этой теории.

Аналогичные выражения применимы и в КЭД, хотя и с некоторым числом небольших усложнений. Первое возникает при вычислении  $\gamma$ -функции фотонного пропагатора. Из выражения (7.74) следует, что общая форма фотонного пропагатора в фейнмановской калибровке:

$$D^{\mu\nu}(q) = D(q) \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{-i q^\mu q^\nu}{q^2}. \quad (12.56)$$

Коэффициент в последнем слагаемом в (12.56) зависит от калибровки. К счастью, это слагаемое выпадает из всех калибровочно-инвариантных наблюдаемых величин. Таким образом, имеет смысл сконцентрироваться на первом слагаемом, спроектировав все внешние фотоны на их поперечные компоненты. Проектируя фотонный пропагатор, видим, что  $D(q)$  удовлетворяет уравнению Каллана–Симанчика. Поскольку поправки к этой функции имеют вид (12.49), заключаем, что формула верна как для фотонов, так и для электронов и для скаляров. Поэтому в главном порядке

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta_2, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta_3, \quad (12.57)$$

где  $\delta_2$  и  $\delta_3$  — контрчлены, определенные в разделе 10.3.

Аналогично можно рассмотреть трехточечную связную функцию Грина  $\langle \bar{\psi}(p_1) \psi(p_2) A_\mu(q) \rangle$ , спроектированную на поперечные компоненты фотона. В ведущем порядке эта функция равна

$$\frac{i}{\not{p}_1} (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{p}_2} \frac{-i}{q^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right).$$

Расходящиеся однопетлевые поправки имеют ту же форму, но с заменой  $(-ie)$  на логарифмически расходящиеся слагаемые. Таким образом, из (12.53) находим  $\beta$ -функцию в низшем порядке:

$$\beta(e) = M \frac{\partial}{\partial M} (-e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{e}{2}\delta_3). \quad (12.58)$$

Чтобы найти точные выражения для функций Каллана–Симанчика в КЭД, следует написать выражения для контрчленов  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ . В разделе 10.3 мы вычислили эти контрчлены, используя условия перенормировки на массовой оболочке с массивными фермионами. Теперь нужно сделать новое вычисление для безмассовых фермионов и для перенормировки при  $-M^2$ . К счастью, достаточно вычислить только логарифмически расходящиеся части контрчленов, которые в этих двух случаях совпадают. Из уравнений (10.43) и (10.44) находим:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} + \text{конечные члены}, \quad (12.59)$$

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} + \text{конечные члены}.$$

Используя формулы (12.57) и (12.59), получаем в ведущем порядке:

$$\gamma_2(e) = \frac{e^2}{16\pi^2}, \quad \gamma_3(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}. \quad (12.60)$$

Наконец из (12.58) находим:

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (12.61)$$

Важно напомнить, что выражения, которые использовались для  $\delta_2$ , явно используют фейнмановскую калибровку. На самом деле,  $\delta_2$  зависит от калибровочного параметра, и это имеет смысл, поскольку функции Грина отдельных полей  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  калибровочно неинвариантны. С другой стороны, поляризация вакуума в КЭД и, следовательно,  $\gamma_3$  и  $\beta$  калибровочно-инвариантны.

### Смысл $\beta$ и $\gamma$

В случае теории  $\phi^4$  можно глубже понять природу функций  $\beta$  и  $\gamma$ , если выразить их через голые параметры теории возмущений:  $Z$ ,  $\lambda_0$  и  $\Lambda$ .

Напомним, во-первых, что голое и перенормированное поля связаны соотношением:

$$\phi(p) = Z(M)^{-1/2} \phi_0(p). \quad (12.62)$$

Это уравнение выражает зависимость изменения масштаба поля от  $M$ . Если  $M$  увеличивается на  $\delta M$ , перенормированное поле сдвигается на величину

$$\delta\eta = \frac{Z(M + \delta M)^{-1/2}}{Z(M)^{-1/2}} - 1.$$

Следовательно из первоначального определения (12.39) функции  $\gamma$  немедленно вытекает:

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{M}{Z} \frac{\partial}{\partial M} Z. \quad (12.63)$$

Поскольку  $\delta_Z = Z - 1$  (формула (10.17)), это выражение находится в согласии с (12.50) в ведущем порядке. Но формула (12.63) является точным соотношением. Это выражение проясняет связь  $\gamma$  с изменением масштаба напряженности поля, однако затуманивает то, что  $\gamma$  не зависит от обрезания  $\Lambda$ . Чтобы понять это свойство  $\gamma$ , следует вернуться к первоначальному определению функции  $\gamma$  через перенормированные функции Грина, независимость которых от обрезания следует из перенормируемости теории.

Аналогично можно получить поучительное выражение для  $\beta$  через параметры голой теории возмущений. Первоначальное определение  $\beta$  в формуле (12.39) использовало величину  $\delta\lambda$ , определенную как сдвиг перенормированной константы связи  $\lambda$ , который необходим, чтобы сохранить значения голых функций Грина при сдвиге перенормировки на бесконечно малое расстояние. Поскольку голые функции Грина зависят от голой константы  $\lambda_0$  и обрезания, это определение можно переписать в виде:

$$\beta(\lambda) = M \frac{\partial}{\partial M} \lambda \Big|_{\lambda_0, \Lambda}. \quad (12.64)$$

Таким образом,  $\beta$ -функция — это скорость изменения перенормированной константы на масштабе  $M$ , соответствующая фиксированной голой константе связи. Вспоминая анализ из раздела 12.1, заманчиво ассоциировать  $\lambda(M)$  с константой связи  $\lambda'$ , которая получена после интегрирования по степеням свободы до масштаба  $M$ . В таком случае,  $\beta$ -функция — это просто скорость ренормгруппового потока константы связи  $\lambda$ . Положительный знак  $\beta$ -функции указывает, что перенормированная константа связи возрастает при больших и уменьшается при малых импульсах. Можно явно убедиться в справедливости этого для теории  $\phi^4$  в главном порядке  $\lambda$  путем сравнения формул (12.28) и (12.46). В следующем разделе это соответствие станет еще яснее.

Совпадение точной формулы (12.64) с формулой первого порядка (12.53) снова следует из определений контрчленов (10.17). Так же как и в формуле (12.63), не очевидно, что эта формула для  $\beta(\lambda)$  не зависит от  $\Lambda$ , однако это опять следует из перенормируемости. Обратное, можно доказать перенормируемость теории  $\phi^4$ , демонстрируя в рамках теории возмущений, в порядке за порядком, что выражения (12.63) и (12.64) не зависят от  $\Lambda^*$ .

## 12.3. Эволюция констант связи

Поскольку мы уже обсудили все детали уравнения Каллана–Симанчика, перейдем к анализу его приложений. Начнем с нахождения точного решения этого уравнения в простейшем случае, двухточечной функции Грина скалярной теории поля. Это решение прояснит физические особенности уравнения. В частности, оно даст обоснование упомянутой в конце предыдущего раздела связи  $\beta$ -функции со скоростью ренормгруппового потока константы связи. Затем мы используем это соотношение, чтобы обсудить качественные особенности ренормгруппового потока в перенормируемых теориях поля.

### Решение уравнения Каллана–Симанчика

Мы хотим решить уравнение Каллана–Симанчика для двухточечной функции Грина  $G^{(2)}(p)$  в теории с одним скалярным полем. Поскольку  $G^{(2)}(p)$  имеет размерность

\*В своей статье *Methods in Field Theory*, R. Balian and J. Zinn-Justin, eds. (North Holland, Amsterdam, 1976) Каллан представил красивое доказательство перенормируемости теории  $\phi^4$ , основанное на утверждении, что уравнение Каллана–Симанчика сохраняется в порядке за порядком по  $\lambda$ .

(масса)<sup>-2</sup>, можно выразить ее зависимость от  $p$  и  $M$  в виде:

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2} g(-p^2/M^2). \quad (12.65)$$

Это уравнение позволяет использовать производную по  $M$  для вычисления производной по  $p^2$ . В оставшейся части этой главы будем использовать переменную  $p$  в качестве величины пространственноподобного импульса:  $p = (-p^2)^{1/2}$ . Тогда уравнение Каллана–Симанчика можно переписать в виде:

$$\left[ p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2 - 2\gamma(\lambda) \right] G^{(2)}(p) = 0. \quad (12.66)$$

В свободной теории поля  $\beta$  и  $\gamma$  обращаются в нуль, и мы получаем тривиальный результат

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2}. \quad (12.67)$$

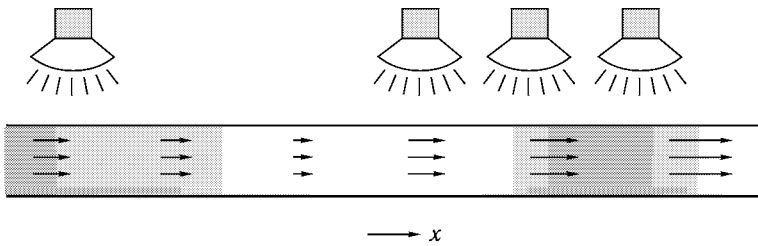


Рис. 12.3. Бактериологическая аналогия Коулмена для уравнения Каллана–Симанчика. Трубка населена бактериями с заданной первоначальной плотностью  $D_i(x)$ . Скорость роста (определяемая освещенностью) и скорость потока являются заданными функциями  $x$ . Задача состоит в определении плотности  $D(t, x)$  во все последующие моменты времени.

В теории с взаимодействием  $\beta$  и  $\gamma$  являются ненулевыми функциями  $\lambda$ . Однако все еще возможно написать точное решение уравнения Каллана–Симанчика, используя метод характеристик. Эквивалентно (для тех, кто не очень сведущ в теории дифференциальных уравнений с частными производными) применим прелестную гидродинамическо-бактериологическую аналогию Сиднея Коулмена\*. Представим тонкую трубку, расположенную вдоль оси  $x$  и содержащую жидкость, скорость которой равна  $v(x)$  (рис. 12.3). Трубка населена бактериями, плотность которых равна  $D(t, x)$  и скорость роста  $\rho(x)$ . Тогда поведение функции  $D(t, x)$  во времени определяется уравнением

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - \rho(x) \right] D(t, x) = 0. \quad (12.68)$$

Второе слагаемое в этом уравнении отвечает тому, что бактерии переносятся вместе с жидкостью, так что их плотность в данной точке определяет будущую плотность на некотором расстоянии по течению. Это уравнение совпадает с уравнением (12.66), если

\*Coleman (1985), глава 3.



сделать замены:

$$\begin{aligned}
 \ln(p/M) &\leftrightarrow t, \\
 \lambda &\leftrightarrow x, \\
 -\beta(\lambda) &\leftrightarrow v(x), \\
 2\gamma(\lambda)-2 &\leftrightarrow \rho(x), \\
 G^{(2)}(p, \lambda) &\leftrightarrow D(t, x).
 \end{aligned} \tag{12.69}$$

Пусть мы знаем начальную концентрацию бактерий:  $D(t, x) = D_i(x)$  в момент времени  $t = 0$ . Тогда можно определить концентрацию бактерий в элементе жидкости в точке  $x$  в последующие моменты времени, вычисляя траекторию этого элемента жидкости и интегрируя скорость роста вдоль этого пути. Рассмотрим элемент жидкости, расположенный в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Мы можем отыскать, где он находился в нулевой момент времени, интегрируя движение назад по времени. Положение этого элемента при  $t = 0$  определяется координатой  $\bar{x}(t; x)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt'} \bar{x}(t'; x) = -v(\bar{x}), \quad \text{с} \quad \bar{x}(0; x) = x. \tag{12.70}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 D(t, x) &= D_i(\bar{x}(t; x)) \cdot \exp\left(\int_0^t dt' \rho(\bar{x}(t'; x))\right) = \\
 &= D_i(\bar{x}(t; x)) \cdot \exp\left(\int_{\bar{x}(t)}^x dx' \frac{\rho(x')}{v(x')}\right).
 \end{aligned} \tag{12.71}$$

Перенесем это решение обратно в задачу из теории поля, заменяя при этом каждый бактериологический параметр на соответствующий параметр теории поля. Время  $t = 0$  соответствует  $-p^2 = M^2$ , а начальная концентрация  $D_i(x)$  становится неизвестной функцией  $\hat{\mathcal{G}}(\lambda)$ . Тогда

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{\mathcal{G}}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \cdot \exp\left(-\int_{p'=M}^{p'=p} d\ln(p'/M) \cdot 2[1 - \gamma(\bar{\lambda}(p'; \lambda))]\right), \tag{12.72}$$

где  $\bar{\lambda}(p; \lambda)$  есть решение уравнения

$$\frac{d}{d\ln(p/M)} \bar{\lambda}(p; \lambda) = \beta(\bar{\lambda}), \quad \bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda. \tag{12.73}$$

Это дифференциальное уравнение описывает поток модифицированной константы связи  $\bar{\lambda}(p; \lambda)$  как функции импульса. Скорость этого потока как раз равна  $\beta$ -функции. Таким образом, поток сильно напоминает зависимость перенормированной константы от масштаба перенормировки, даваемую уравнением (12.64). Мы будем называть  $\bar{\lambda}(p)$  *бегающей константой связи*. Уравнение для нее (12.73) часто называют *уравнением ре-нормализационной группы*.

Используя тождество

$$\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} = \int_{p'=M}^{p'=p} d\ln(p'/M), \quad (12.74)$$

можно напрямую проверить, что (12.72) есть решение уравнения Каллана–Симанчика. Из тождества следует, что

$$\left( p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \bar{\lambda} = 0. \quad (12.75)$$

Удобно записывать решение (12.72) в виде:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \frac{i}{p^2} \mathcal{G}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \cdot \exp\left( 2 \int_M^p d\ln(p'/M) \gamma(\bar{\lambda}(p'; \lambda)) \right), \quad (12.76)$$

где  $\mathcal{G}(\bar{\lambda})$  есть искомая функция. Эта функция не может быть определена из общих принципов теории перенормировок. Поэтому следует вычислить  $G^{(2)}(p)$  как ряд теории возмущений по  $\lambda$  и сравнить слагаемые с разложением (12.76) в виде ряда по тому же параметру. Для двухточечной функции теории  $\phi^4$  это сравнение тривиально:  $\mathcal{G}(\bar{\lambda}) = 1 + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2)$ .

Предыдущий анализ можно применить к любому семейству функций Грина, связанных однородным изменением масштаба импульсов. Рассмотрим например, связную четырехточечную функцию теории  $\phi^4$ , вычисленную при таком значении пространственноподобного импульса  $p_i$ , что  $p_i^2 = -P^2$ ,  $p_i \cdot p_j = 0$ , так что  $s, t, u$  порядка  $-P^2$ . В главном порядке теории возмущений эта функция равна

$$G^{(4)}(P) = \left( \frac{i}{P^2} \right)^4 (-i\lambda). \quad (12.77)$$

Используя то, что  $G^{(4)}$  имеет размерность (масса) $^{-8}$ , можно заменить в уравнении Каллана–Симанчика  $M$  на  $P$  и записать его в виде:

$$\left[ P \frac{\partial}{\partial P} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 8 - 4\gamma(\lambda) \right] G^{(4)}(P; \lambda) = 0. \quad (12.78)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$G^{(4)}(P; \lambda) = \frac{1}{P^8} \mathcal{G}^{(4)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) \cdot \exp\left( 4 \int_M^p d\ln(p'/M) \gamma(\bar{\lambda}(p'; \lambda)) \right). \quad (12.79)$$

Эта формула должна согласовываться с (12.77) в главном порядке по  $\lambda$ ; такое согласование требует, чтобы

$$\mathcal{G}^{(4)}(\bar{\lambda}(p; \lambda)) = -i\bar{\lambda} + \mathcal{O}(\bar{\lambda}^2). \quad (12.80)$$

Теперь можно рассмотреть физические приложения уравнения Каллана–Симанчика. Ряды обычной фейнмановской теории возмущений для функций Грина зависят

и от константы связи  $\lambda$ , и от безразмерного параметра  $\ln(-p^2/M^2)$ . Теория возмущений может вести себя плохо, даже когда  $\lambda$  мало, если при этом отношение  $p^2/M^2$  велико. Решения (12.76) и (12.79) превращают эту зависимость в функцию бегущей константы связи и экспоненциального масштабного фактора. Рассмотрим по очереди эти зависимости.

Первый множитель в формулах (12.76) и (12.79) есть функция бегущей константы связи, вычисленная на масштабе импульсов  $p$ . Если  $p$  был бы порядка масштаба перенормировки  $M$ , эта функция была бы обычной вычисленной по теории возмущений функцией Грина. Результаты (12.76) и (12.79) учат, что нужно использовать то же самое выражение на масштабе  $p$ , только с заменой  $\lambda$  на соответствующую данному масштабу новую константу связи  $\bar{\lambda}$ . Таким образом, бегущая константа связи  $\bar{\lambda}(p)$  является не чем иным, как эффективной константой связи ренормгруппового потока. Эта интерпретация особенно ясна в решении (12.79) для  $G^{(4)}(P)$ , поскольку эта функция напрямую измеряет величину константы связи в теории  $\phi^4$ .

Экспоненциальный фактор в формулах (12.76) и (12.79) также имеет простую интерпретацию: это общая величина изменения масштаба напряженности поля в корреляционной функции от исходной точки  $M$  до той реальной величины импульса  $p$ , при которой функции Грина вычислены. В этот множитель вносится множество поправок от каждого промежуточного масштаба между  $M$  и  $p$ . Каждая из этих поправок соответствующим образом вычисляется использованием бегущей константы связи на каждом этом масштабе.

В качестве проверки этих формальных рассуждений, для вычисления бегущей константы связи теории  $\phi^4$  можно использовать явную формулу  $\beta$ -функции теории  $\phi^4$ , найденную в уравнении (12.46), и уравнение ренормализационной группы (12.73). Бегущая константа связи удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d \ln(p/M)} \bar{\lambda} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{16\pi^2} \quad \text{с} \quad \bar{\lambda}(M; \lambda) = \lambda. \quad (12.81)$$

Интегрируя, находим:

$$\left(\frac{3}{16\pi^2}\right)^{-1} \left[\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\right] = \ln \frac{p}{M},$$

поэтому

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\lambda}{1 - (3\lambda/16\pi^2) \ln(p/M)}. \quad (12.82)$$

Из этого соотношения можно увидеть многие свойства решения уравнения Каллана–Симанчика. Во-первых, разложение этой формулы по  $\bar{\lambda}$  до порядка  $\lambda^2$  в точности согласуется с выражением (12.28) для скорости ренормгруппового потока, полученного методом Вильсона. Во-вторых, выражение для бегущей константы связи стремится логарифмически к нулю, когда  $p \rightarrow 0$ . Это совпадает с нашими ожиданиями, что из положительности  $\beta$ -функции следует, что эффективная константа связи становится сильнее при большем импульсе и слабее при меньшем.

Если разложить бегущую константу  $\bar{\lambda}(p)$  по степеням  $\lambda$ , то обнаруживается, что последовательные степени константы связи умножаются на степени логарифмов

$$\lambda^{n+1} (\ln p/M)^n,$$

которые становятся большими и разрушают простую теорию возмущений при  $p$ , много больших или много меньших, чем  $M$ . Мы видели, как эта проблема больших логарифмов несколько раз возникала в вычислениях диаграмм, и мы специально обращали на

нее внимание в обсуждении после уравнения (11.81). Теперь мы видим, что ренормализационная группа дает частичное решение этой проблемы. В рассмотренном примере и во многих других, которые мы будем изучать, уравнение Каллана–Симанчика объясняет, как просуммировать большие логарифмы, превратив их в бегущую константу связи и многократные изменения масштаба. Если бегущая константа становится большой, как происходит, например, в теории  $\phi^4$  при  $p \rightarrow \infty$ , ряд теории возмущений все равно разрушается, и в этом случае нужны более совершенные методы. Однако если бегущая константа связи становится малой как в теории  $\phi^4$  при  $p \rightarrow 0$ , можно успешно собирать степени логарифмов в осмысленное и контролируемое выражение. Конкретная задача, сформулированная в конце раздела 11.4, будет точно решена этим методом в разделе 13.2.

### Приложение к КЭД

Для более конкретного приложения уравнения Каллана–Симанчика рассмотрим снова электромагнитный потенциал между статическими зарядами  $V(\mathbf{x})$ , уже изучавшийся в разделе 7.5. На очень малых расстояниях или при больших импульсах, при вычислении поправок-КЭД к этому потенциалу можно пренебречь массой электрона. В этом приближении потенциал должен удовлетворять уравнению Каллана–Симанчика для безмассовой КЭД. Мы могли бы выписать это уравнение либо для самого  $V(\mathbf{x})$ , либо для его фурье-образа; мы предпочтем работать с фурье-образами, чтобы облегчить сравнения с результатами раздела 7.5.

Определим безмассовый предел КЭД, задавая масштаб перенормировки  $M$ , при котором определена перенормированная константа связи  $e_r$ . Если масштаб  $M$  выбран близким к перенормированной массе электрона  $m$  в точке, где безмассовое приближение только становится применимым, величина  $e_r$  будет близка к физическому заряду электрона  $e$ . Потенциал взаимодействия статических зарядов — измеримая величина, поэтому ее нормировка однозначна и не сдвигается от одной точки перенормировки к другой. Поэтому уравнение Каллана–Симанчика для фурье-образа потенциала не сдвигает  $\gamma$ -члена и принимает вид:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e_r) \frac{\partial}{\partial e_r} \right] V(q; M, e_r) = 0. \quad (12.83)$$

Фурье-образ потенциала имеет размерность (масса)<sup>-2</sup>, так что можно заменить зависимость от  $M$  на зависимость от  $q$ , как было сделано в предыдущем обсуждении скалярного поля. Это дает:

$$\left[ q \frac{\partial}{\partial q} - \beta(e_r) \frac{\partial}{\partial e_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0. \quad (12.84)$$

Уравнение (12.84) почти совпадает с уравнением (12.66), поэтому можно сразу выписать его решение как частный случай (12.76):

$$V(q, e_r) = \frac{1}{q^2} \mathcal{Y}(\bar{e}(q; e_r)), \quad (12.85)$$

где  $\bar{e}(q)$  есть решение уравнения ренормгруппы

$$\frac{d}{d \ln(q/M)} \bar{e}(q; e_r) = \beta(\bar{e}), \quad \bar{e}(M; e_r) = e_r. \quad (12.86)$$

Сравнивая это с формулой для  $V(q)$  в старшем порядке:

$$V(q) \approx \frac{e^2}{q^2},$$

можно приравнять  $\mathcal{V}(\bar{e}) = \bar{e}^2 + \mathcal{O}(\bar{e}^4)$ . Тогда

$$V(q, e_r) = \frac{\bar{e}^2(q; e_r)}{q^2}, \quad (12.87)$$

с точностью до поправок, которые подавлены степенями  $e_r^2$  и не содержат компенсирующих больших логарифмов от  $q/M$ .

Чтобы преобразовать (12.87) в совершенно точную формулу, нужно только решить уравнение КЭД ренормализационной группы (12.86). Используя  $\beta$ -функцию, можно проинтегрировать (12.86) и получить:

$$\frac{12\pi^2}{2} \left( \frac{1}{e_r^2} - \frac{1}{\bar{e}^2} \right) = \ln \frac{q}{M}.$$

Это выражение упрощается:

$$\bar{e}^2(q) = \frac{e_r^2}{1 - (e_r^2/6\pi^2) \ln(q/M)}. \quad (12.88)$$

Полученный результат почти совпадает с формулой для эффективного электрического заряда (7.96). Чтобы подтвердить это совпадение, положим  $M$  порядка массы электрона,  $M^2 = Am^2$ , и аппроксимируем  $e_r$  в этой точке величиной  $e$ , где  $\alpha = e^2/4\pi$ . Тогда уравнение (12.88) примет вид:

$$\bar{\alpha}(q) = \frac{\alpha}{1 - (\alpha/3\pi) \ln(-q^2/Am^2)}. \quad (12.89)$$

В частном случае  $A = \exp(5/3)$  воспроизводится уравнение (7.96). Конечно, мы не смогли бы найти это точное соответствие без детального однопетлевого вычисления в разделе 7.5. Тем не менее представленный анализ воспроизводит правильную асимптотическую формулу для эффективного заряда. Более того, описанный формализм можно применить к любой перенормируемой теории поля, он не основан на специальных симметриях КЭД, которые использовались в разделе 7.5.

### Возможные типы поведения константы связи

После того, как мы вычислили поведение бегущей константы связи в двух конкретных квантовых теориях поля, рассмотрим в общем виде возможные в принципе типы поведения константы связи. Ниже мы ограничимся обсуждением перенормируемых теорий в безмассовом пределе с единственной безразмерной константой связи  $\lambda$ .

Как вытекает из рассуждений предыдущего раздела, функции Грина любой такой теории удовлетворяют уравнению Каллана–Симанчика. Его решение зависит от бегущей константы связи  $\bar{\lambda}(p)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \ln(p/M)} \bar{\lambda} = \beta(\bar{\lambda}), \quad (12.90)$$

в котором функция  $\beta(\lambda)$  может быть вычислена в виде степенного ряда по константе связи. В примерах, которые мы обсуждали, главный коэффициент в этом ряде был положителен. Однако в принципе возможны три типа поведения в области малых  $\lambda$ :

- (1)  $\beta(\lambda) > 0$ ;
- (2)  $\beta(\lambda) = 0$ ;
- (3)  $\beta(\lambda) < 0$ .

Известны примеры квантовых теорий поля, представляющих каждый из этих типов поведений.

Мы уже видели, как в теориях первого типа бегущая константа связи стремится к нулю в инфракрасной области, приводя к определенным предсказаниям о поведении теории при малых импульсах. Но в области больших импульсов бегущая константа становится большой. Таким образом, поведение теории на малых масштабах не может быть вычислено по фейнмановской диаграммной теории возмущений. На самом деле, в рассмотренных выше примерах константа связи формально стремится к бесконечности при большом, но конечном значении импульса, так что даже не ясно, обладают ли эти теории нетривиальным пределом  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Анализ фейнмановских диаграмм в таких теориях полезен, если интересоваться в основном поведением на больших расстояниях, или макроскопическим поведением. В главе 13 мы используем это наблюдение для решения задач статистической механики для систем с критическими точками.

В теориях второго типа константа связи не изменяется. В этих теориях бегущая константа связи не зависит от масштаба импульса и поэтому равна голой константе. Это означает, что в соотношении между константами связи может не быть ультрафиолетовых расходимостей. Единственно возможные ультрафиолетовые расходимости в таких теориях связаны с изменением масштаба поля, и они автоматически сокращаются при вычислении элементов  $S$ -матрицы. Такие теории называются *конечными* квантовыми теориями поля. До возникновения современного понимания перенормировки эти теории воспринимались как решение проблемы ультрафиолетовых расходимостей. Однако известные конечные квантовые теории поля в четырех измерениях являются очень специальными конструкциями, образуя так называемые калибровочные теории с расширенной суперсимметрией, физические приложения которых неизвестны.

В теориях третьего типа бегущая константа связи становится большой на больших расстояниях и малой на малых расстояниях. Представим, например, что знак  $\beta$ -функции КЭД был бы другим:

$$\beta(e) = -\frac{1}{2}Ce^3. \quad (12.91)$$

Тогда, следуя проведенному выше анализу, мы бы получили:

$$\bar{e}^2(p) = \frac{e^2}{1 + Ce^2 \ln(p/M)}. \quad (12.92)$$

Такая константа связи с ростом импульса логарифмически стремится к нулю. Подобные теории называются *асимптотически свободными*. В них поведение на малых расстояниях полностью определяется расчетами по теории возмущений с помощью фейнмановских диаграмм. Хотя ультрафиолетовые расходимости возникают в каждом порядке теории возмущений, результаты ренормализационной группы утверждают, что сумма этих расходимостей совершенно безвредна. Если рассматривать такие теории с помощью голой константы связи  $e_b$  и конечного обрезания  $\Lambda$ , результат (12.92) показывает, что имеется гладкий предел, при котором  $e_b$  стремится к нулю, когда  $\Lambda$  стремится к бесконечности. Таким образом, асимптотически свободные теории дают

другое, более сложное решение проблемы ультрафиолетовых расходимостей. В гл. 17 мы увидим, что асимптотическая свобода играет существенную роль в формулировке теории поля, описывающей сильные взаимодействия в физике элементарных частиц.

Теперь, после того как мы перечислили все возможности поведения ренормгруппового потока в области слабой связи, обратим внимание на область сильной связи. В этом случае не удастся вычислить  $\beta$ -функцию, но можно, по крайней мере, использовать уравнения ренормализационной группы, чтобы качественно обсудить возможные типы поведения потока константы связи. Все точные решения для бегущих констант связи (формулы (12.82), (12.88), (12.92)) предсказывают, что эта константа связи становится бесконечной при конечном значении импульса  $p$ . Например, в соответствии с (12.82), бегущая константа связи теории  $\phi^4$  должна расходиться при

$$p \sim M \exp\left(\frac{16\pi^2}{3\lambda}\right). \quad (12.93)$$

Возможно, что это истинное поведение квантовой теории поля, но мы не доказали этого, поскольку, когда бегущая константа связи становится большой, та аппроксимация, которую мы сделали, игнорируя слагаемые высшего порядка в  $\beta$ -функции, более не верна. Имеется логическая возможность, что высшие слагаемые в  $\beta$ -функции отрицательны, так что  $\beta$ -функция имеет вид, показанный на рис. 12.4(а). В этом случае  $\beta$ -функция обращается в нуль при ненулевом значении  $\lambda_*$ . Когда  $\bar{\lambda}$  приближается к этому значению, ренормгрупповой поток замедляется до остановки, поэтому  $\lambda = \lambda_*$  была бы нетривиальной фиксированной точкой ренормгруппы. В этой модели в пределе большого импульса бегущая константа связи  $\bar{\lambda}$  стремится к  $\lambda_*$ .

В частном случае теории  $\phi^4$  в четырех измерениях на основании численных расчетов можно сделать обоснованный вывод, что такой нетривиальной фиксированной точки не существует. Однако мы скоро покажем, что нетривиальная фиксированная точка имеется в теории  $\phi^4$  при  $d < 4$ . Известно и много других примеров. Поэтому имеет смысл исследовать следствия существования неподвижной точки в ренормгрупповом потоке.

$\beta$ -функция вида, показанного на рис. 12.4(а), в окрестности неподвижной точки ведет себя как

$$\beta \approx -B(\lambda - \lambda_*), \quad (12.94)$$

где  $B$  — положительная константа. При  $\bar{\lambda}$  вблизи  $\lambda_*$

$$\frac{d}{d \ln p} \bar{\lambda} \approx -B(\bar{\lambda} - \lambda_*). \quad (12.95)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{\lambda}(p) = \lambda_* + C \left(\frac{M}{p}\right)^B. \quad (12.96)$$

Таким образом,  $\bar{\lambda}$  в самом деле стремится к  $\lambda_*$  при  $p \rightarrow \infty$ , причем скорость приближения определяется наклоном  $\beta$ -функции в фиксированной точке.

Такое поведение приводит к драматическим следствиям для точного решения (12.72) уравнения Каллана–Симанчика для  $G(p)$ . При достаточно больших  $p$  интеграл в экспоненциальном множителе будет определяться теми значениями  $p$ , для которых  $\bar{\lambda}(p)$  близка к  $\lambda_*$ . Тогда

$$\begin{aligned} G(p) &\approx \mathcal{G}(\lambda_*) \exp\left[-\left(\ln \frac{p}{M}\right) \cdot 2(1 - \gamma(\lambda_*))\right] \approx \\ &\approx C \cdot \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1-\gamma(\lambda_*)}. \end{aligned} \quad (12.97)$$

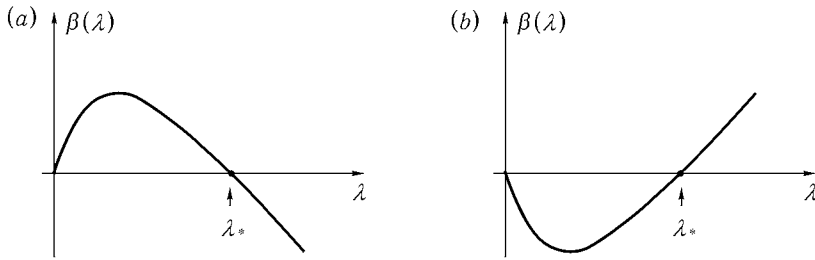


Рис. 12.4. Возможные типы  $\beta$ -функции с нетривиальными нулями: (а) ультрафиолетово стабильная неподвижная точка; (b) инфракрасно стабильная неподвижная точка.

Поэтому двухточечная корреляционная функция возвращается к виду простого закона скейлинга, но со степенным законом, отличным от ожидаемого из анализа размерностей. В неподвижной точке мы имеем масштабно-инвариантную квантовую теорию поля, в которой взаимодействия влияют на закон изменения масштаба. Сдвиг показателя степени  $\gamma(\lambda_*)$  называется *аномальной размерностью* скалярного поля. По соглашению, функция  $\gamma(\lambda)$  часто называется аномальной размерностью, даже если в теории нет неподвижной точки.

В асимптотически свободной теории возможно аналогичное поведение. Если  $\beta$ -функция имеет вид, показанный на рис. 12.4(b), бегущая константа связи будет стремиться к фиксированной точке  $\lambda_*$  при  $p \rightarrow 0$ . Двухточечная корреляционная функция полей  $G(p)$  при асимптотически малых импульсах будет стремиться к степенному закону как в (12.97). Два случая, показанные на рис. 12.4(a) и (b), называются, соответственно, *ультрафиолетово стабильной* и *инфракрасно стабильной* неподвижными точками.

В предыдущем разделе мы видели, что выражения для функций Каллана–Симанчика  $\beta$  и  $\gamma$  в главном порядке просто связаны с ультрафиолетово расходящимися частями однопетлевых контрчленов. Однако мы отметили, что в высших порядках теории возмущений  $\beta$  и  $\gamma$  зависят от конкретных правил перенормировки, использованных для определения функций Грина. Тем не менее, ряд свойств этих функций не зависит от каких-либо соглашений. Коэффициент перед логарифмом в знаменателе выражений типа (12.82) или (12.89) может быть однозначно определен из экспериментов по измерению константы связи. Это подтверждает условие независимости первого коэффициента  $\beta$ -функции. Эксперименты, чувствительные к величине константы связи, могут определить и существование нуля у  $\beta$ -функции при сильной связи, и скорость приближения к асимптотике. Таким образом, существование нуля  $\beta$ -функции (но не обязательно величины  $\lambda_*$ ), наклон  $B$  в нуле и величина аномальной размерности в фиксированной точке не должны зависеть от соглашений, использованных при вычислении  $\beta$  и  $\gamma$ .

## 12.4. Перенормировка локальных операторов

В двух предыдущих разделах рассмотрение было ограничено квантовыми теориями с безразмерными коэффициентами, то есть теориями, строго перенормируемыми в безмассовом пределе. Нетрудно обобщить этот формализм на теории с массовыми слагаемыми и другими операторами, коэффициенты которых имеют массовую размерность. Однако сначала стоит уделить внимание промежуточному шагу — анализу ренормгрупповых свойств матричных элементов локальных операторов. Эта задача



интересна сама по себе, и в гл. 18 мы посвятим заметное место приложениям такого формализма.

Матричные элементы локальных операторов часто возникают в квантово-полевых вычислениях. Обычно рассматривается набор взаимодействующих частиц, которые слабо взаимодействуют с дополнительной частицей, переносящей новое взаимодействие. Рассмотрим, например, теорию сильно взаимодействующих кварков, в которой возмущением являются эффекты, обусловленные процессами слабого распада. Слабое взаимодействие переносится массивным векторным бозоном  $W$ . Схематически запишем взаимодействие кварков с  $W$  в виде:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi, \quad (12.98)$$

и припишем  $W$ -бозону пропагатор

$$\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 - m_W^2 + i\epsilon}. \quad (12.99)$$

(Более корректно мы обсудим это взаимодействие в разделе 18.2 и гл. 20.) Обмен  $W$ -бозоном ведет к взаимодействию, показанному на рис. 12.5. Для передаваемых импульсов, малых по сравнению с  $m_W$ , можно не учитывать в пропагаторе  $W$  слагаемое  $q^2$  и записать это взаимодействие как матричный элемент оператора

$$\frac{g^2}{2m_W^2} \mathcal{O}(x), \quad \text{где } \mathcal{O}(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi \bar{\psi} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi. \quad (12.100)$$

В духе вильсоновской процедуры перенормировок можно утверждать, что на расстояниях, больших чем  $m_W^{-1}$ , можно заинтегрировать  $W$ -бозон и получить взаимодействие (12.100).

Как следовало бы анализировать влияние оператора (12.100) на сильно взаимодействующие частицы, состоящие из кварков и антикварков? Полезно начать с вычисления функции Грина оператора  $\mathcal{O}$  вместе с полями рождения и уничтожения кварков. Если аппроксимировать теорию кварков теорией свободных фермионов, эти функции Грина легко вычислить. Например:

$$\begin{aligned} \langle \psi(p_1) \bar{\psi}(-p_2) \psi(p_3) \bar{\psi}(-p_4) \mathcal{O}(0) \rangle = \\ = S_F(p_1) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) S_F(p_2) S_F(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) S_F(p_4). \end{aligned} \quad (12.101)$$

Однако во взаимодействующей теории поля ответ будет значительно сложнее. Некоторые из этих сложностей будут включать низкоэнергетические взаимодействия кварков, и мы оставим их за рамками данного обсуждения. Однако в перенормируемой теории кварковых взаимодействий обнаруживается, что содержащие  $\mathcal{O}$  функции Грина содержат новые ультрафиолетовые расходимости. Однопетлевые поправки к (12.101) будут содержать диаграммы, которые равны правой части (12.101), умноженной на расходящийся интеграл. Такие диаграммы можно интерпретировать как перенормировки напряженности поля в операторе  $\mathcal{O}$ . Как в случае корреляционных функций элементарных полей, можно получить конечные и хорошо определенные матричные элементы локальных операторов, только если установить правила перенормировки локальных операторов и ввести для сохранения этих правил последовательно в каждом порядке теории возмущений операторные изменения масштаба в виде контрчленов. Конкретнее, в безмассовой перенормируемой теории поля фермионов  $\psi$  следует принять соглашение,

что уравнение (12.101) является точным в некоторой пространственноподобной точке нормировки, для которой  $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = -M^2$ . Затем нужно добавить контрчлен вида  $\delta_{\mathcal{O}}\mathcal{O}(x)$  и подстроить его в каждом порядке теории возмущений так, чтобы обеспечить сохранение соотношений. Будем обозначать оператор, удовлетворяющий условию перенормировки (12.101) при  $M^2$  как  $\mathcal{O}_M$ .

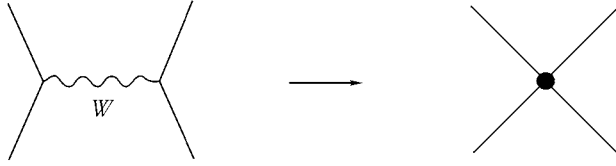


Рис. 12.5. Взаимодействие кварков, порожденное обменом  $W$  бозоном.

Перенормированный оператор  $\mathcal{O}_M$  получается изменением масштаба из оператора  $\mathcal{O}_0$ , построенного из голых полей:

$$\mathcal{O}_0(x) = \bar{\psi}_0 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_0 \bar{\psi}_0 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_0. \quad (12.102)$$

Так же, как для элементарных полей, можно записать это соотношение в виде:

$$\mathcal{O}_0 = Z_{\mathcal{O}}(M) \mathcal{O}_M. \quad (12.103)$$

Это позволяет обобщить соотношение (12.35) между функциями Грина голых и перенормированных полей. Вернемся к рассуждениям на языке скалярных теорий поля и рассмотрим  $\mathcal{O}(x)$  как локальный оператор в скалярной теории. Определим

$$G^{(n;1)}(p_1, \dots, p_n; k) = \langle \phi(p_1) \cdots \phi(p_n) \mathcal{O}_M(k) \rangle. \quad (12.104)$$

Тогда функция  $G^{(n;1)}$  связана с функцией Грина голых полей соотношением

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n; k) = Z(M)^{-n/2} Z_{\mathcal{O}}(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \cdots \phi_0(p_n) \mathcal{O}_0(k) \rangle. \quad (12.105)$$

Повторяя вывод соотношений (12.63) и (12.64), находим, что функции Грина, содержащие локальный оператор, подчиняются уравнению Каллана–Симанчика

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \gamma_{\mathcal{O}}(\lambda) \right] G^{(n)} = 0, \quad (12.106)$$

где

$$\gamma_{\mathcal{O}} = M \frac{\partial}{\partial M} \ln Z_{\mathcal{O}}(M). \quad (12.107)$$

Часто квантовая теория поля содержит несколько операторов с одинаковыми квантовыми числами. Например, в квантовой электродинамике операторы  $\bar{\psi}[\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu]\psi$  и  $F^{\mu\lambda} F^{\nu\lambda}$  являются симметричными тензорами с нулевым электрическим зарядом, кроме того, оба оператора имеют массовую размерность 4. Операторы с одинаковыми квантовыми числами и массовой размерностью могут смешиваться за счет квантовых поправок\*. Для такого набора операторов  $\{\mathcal{O}^i\}$  связь перенормированных и голых операторов должна быть обобщена:

$$\mathcal{O}_0^i = Z_{\mathcal{O}}^{ij}(M) \mathcal{O}_M^j. \quad (12.108)$$

\*Наше предположение, что мы рассматриваем безмассовую теорию поля, ограничивает возможности смешивания. В массивной теории операторы данной размерности могут также смешиваться с операторами меньшей размерности.

Это соотношение на самом деле подразумевает, что аномальная размерность  $\gamma_\theta$  в уравнении Каллана–Симанчика должна быть обобщена до матрицы

$$\gamma_\theta^{ij} = [Z_\theta^{-1}(M)]^{ik} M \frac{\partial}{\partial M} [Z_\theta(M)]^{kj}. \quad (12.109)$$

Большинство наших приложений (12.106) в гл. 18 потребует именно такого обобщения.

С другой стороны, для некоторых операторов изменение масштаба и аномальные размерности особенно просты. Если  $\theta$  — ток числа кварков  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , его нормировка раз и навсегда фиксирована, так как соответствующий заряд

$$Q = \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi$$

является сохраняющимся целым числом, равным числу кварков минус число антикварков в данном состоянии. В более общем случае, для любого сохраняющегося тока  $J^\mu$   $Z_J(M) = 1$  и  $\gamma_J = 0$ . Те же рассуждения применимы к тензору энергии-импульса. Таким образом, в вышеприведенном примере КЭД специальная линейная комбинация

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}[\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu]\psi + \frac{1}{4}F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda \quad (12.110)$$

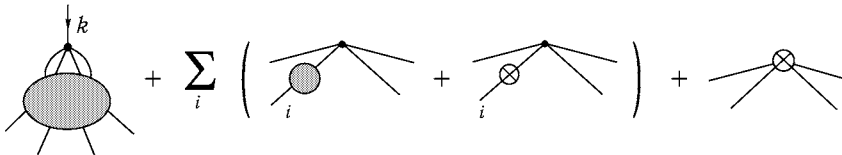
не испытывает изменения масштаба и не имеет аномальной размерности. Эта линейная комбинация операторов должна быть собственным вектором матрицы  $\gamma^{ij}$  с нулевым собственным значением.

До сих пор наше обсуждение операторных матричных элементов было достаточно абстрактным. Чтобы сделать его более конкретным, построим формулу для вычисления  $\gamma_\theta$  в главном порядке из однопетлевых контрчленов и затем применим эту формулу в простом случае теории  $\phi^4$ .

Чтобы найти простую формулу для  $\gamma_\theta$ , последуем тем же путем, который привел нас от выражения (12.52) к формуле (12.53) для  $\beta$ -функции. Рассмотрим оператор, условие нормировки которого основано на функции Грина с  $m$  скалярными полями:

$$G^{(m;1)} = \langle \phi(p_1) \cdots \phi(p_m) \theta_M(k) \rangle. \quad (12.111)$$

Чтобы вычислить эту функцию Грина в однопетлевом приближении, используем набор диаграмм:

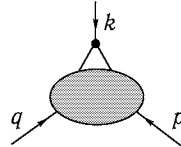


Последняя диаграмма — контрчлен  $\delta_\theta$ , необходимый, чтобы сохранить условие перенормировки. Заметим, что возникает и контрчлен  $\delta_Z$ . Если потребовать, чтобы эта сумма диаграмм удовлетворяла в главном порядке по  $\lambda$  уравнению Каллана–Симанчика (12.106), мы получим аналогичное (12.53) соотношение

$$\gamma_\theta(\lambda) = M \frac{\partial}{\partial M} \left( -\delta_\theta + \frac{m}{2} \delta_Z \right). \quad (12.112)$$

В качестве конкретного примера использования этой формулы вычислим аномальную размерность  $\gamma_\theta$  массового оператора  $\phi^2$  в теории  $\phi^4$ . В этом вычислении

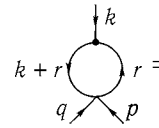
есть небольшая тонкость. Фейнмановские диаграммы теории  $\phi^4$  генерируют аддитивную перенормировку массы, которая в каждом порядке теории возмущений должна быть устранена массовым контрчленом. Мы хотели бы определить массовый оператор как возмущение, которое можно добавить к определенной таким образом безмассовой теории. Чтобы выяснить разницу между исходной массой, которая перенормируется в нуль, и явной возмущающей массой, проанализируем функцию Грина  $\phi^2$ , в которой этот оператор несет определенный ненулевой импульс. Поэтому выбираем следующее правило нормировки  $\phi^2$ :



$$= \langle \phi(p)\phi(q)\phi^2(k) \rangle = \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \cdot 2 \quad (12.113)$$

при  $p^2 = q^2 = k^2 = -M^2$ .

Одночастичная неприводимая однопетлевая поправка к (12.113) есть



$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} (-i\lambda) \frac{i}{r^2} \frac{i}{(k+r)^2} = \quad (12.114)$$

$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} \left[ -\frac{\lambda}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \right],$$

где  $\Delta$  — функция внешнего импульса. В точке  $-M^2$  этот вклад должен сократиться вкладом диаграммы контрчлена



$$= \frac{i}{p^2} \frac{i}{q^2} 2\delta_{\phi^2}. \quad (12.115)$$

Поэтому контрчлен должен иметь вид

$$\delta_{\phi^2} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \quad (12.116)$$

Поскольку  $\delta_Z$  является конечной до порядка  $\lambda$ , это единственный вклад в (12.112), так что находим:

$$\gamma_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2}. \quad (12.117)$$

Вместе с функциями  $\gamma$  и  $\beta$  чисто безмассовой теории  $\phi^4$ , эту функцию можно использовать для обсуждения скейлинга функций Грина, включающих массовый оператор.

## 12.5. Эволюция массовых параметров

Обсудим, наконец, ренормализационную группу для теорий с массами. Заметим, что хотя мы и рассматриваем эти массы как произвольные параметры, мы будем продолжать использовать условия перенормировки, которые не зависят от массы, и поэтому часто будем считать массы малыми параметрами. Этот подход становится некорректным при масштабах импульсов, много меньших, чем масштаб масс, но для большинства физических приложений ренормализационной группы он достаточен и проще других подходов.

В предыдущем разделе мы рассмотрели изменение масштаба функций Грина, содержащих одну степень оператора массы. Легко обобщить это рассмотрение и включить произвольное число  $\ell$  массовых операторов — нужно просто взять уравнение (12.106) с коэффициентом  $\ell$  перед слагаемым  $\gamma_\theta$ . Посмотрим, что случилось бы, если массовый оператор был добавлен прямо в лагранжиан безмассовой теории  $\phi^4$  и рассмотрен как возмущение. Если  $\mathcal{L}_M$  — безмассовый лагранжиан, перенормированный на масштабе  $M$ , новый лагранжиан равен

$$\mathcal{L}_M + \frac{1}{2}m^2\phi_M^2. \quad (12.118)$$

Функции Грина  $n$  скалярных полей в теории (12.118) могут быть выражены как ряды теории возмущений по массовому параметру  $m^2$ . Коэффициент  $(m^2)^\ell$  был бы объединенной корреляционной функцией  $n$  скалярных полей с  $\ell$  степенями  $\phi_M^2$ , и как отмечалось выше, удовлетворял бы уравнению Каллана–Симанчика (12.106) с дополнительным фактором  $\ell$ . В общем случае, можно использовать оператор  $m^2(\partial/\partial m^2)$  для подсчета числа вставок  $\ell$  оператора  $\phi^2$ . Тогда функции Грина массивной теории  $\phi^4$ , перенормированные по независимой от масс схеме, удовлетворяют уравнению

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \gamma_{\phi^2} m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, m^2) = 0. \quad (12.119)$$

Это рассуждение распространяется на любое возмущение безмассовой теории  $\phi^4$ . В общем случае

$$\mathcal{L}(C_i) = \mathcal{L}_M + C_i \theta_M^i(x), \quad (12.120)$$

и функции Грина этой возмущенной теории удовлетворяют уравнению

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \sum_i \gamma_i(\lambda) C_i \frac{\partial}{\partial C_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{C_i\}) = 0. \quad (12.121)$$

Чтобы интерпретировать это уравнение, полезно слегка изменить обозначения, чтобы согласовать их с новой точкой зрения. Пусть  $d_i$  — массовая размерность оператора  $\theta^i$ . Перепишем (12.120), представляя каждый коэффициент  $C_i$  в виде произведения степени по  $M$  и безразмерного коэффициента  $\rho_i$ :

$$\mathcal{L}(\rho_i) = \mathcal{L}_M + \rho_i M^{4-d_i} \theta_M^i(x). \quad (12.122)$$

Величина каждого коэффициента  $\rho_i$  указывает на важность соответствующего оператора на масштабе  $M$ . Это новое соглашение вводит в функции Грина явную зависимость от  $M$ , которая компенсируется изменением масштаба  $\rho_i$ . Таким образом, уравнение (12.121) должно быть модифицировано к виду:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma + \sum_i [\gamma_i(\lambda) + d_i - 4] \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0. \quad (12.123)$$

Смысл этого уравнения становится яснее, если определить

$$\beta_i = (d_i - 4 + \gamma_i) \rho_i. \quad (12.124)$$

Тогда

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + n\gamma \right] G^{(n)}(\{p_i\}; M, \lambda, \{\rho_i\}) = 0. \quad (12.125)$$

Теперь все константы связи  $\rho_i$  можно рассматривать на равных основаниях с  $\lambda$ . Можно решить это обобщенное уравнение Каллана–Симанчика, используя тот же самый метод, что и в разделе 12.3, введя в рассмотрение бактерии, которые теперь живут в многомерном поле скоростей  $(\beta, \beta_i)$ . Решение будет зависеть от набора бегущих констант связи, подчиняющихся уравнениям

$$\frac{d}{d \ln(p/M)} \bar{\rho}_i = \beta_i(\bar{\rho}, \bar{\lambda}). \quad (12.126)$$

Интересно рассмотреть этот поток констант связи для случая, когда все безразмерные параметры  $\lambda, \rho_i$  малы, так что мы близки к лагранжиану свободного скалярного поля. В этой ситуации можно не учитывать вклад от  $\gamma_i$  в  $\beta_i$ . Тогда

$$\frac{d}{d \ln(p/M)} \bar{\rho}_i = [d_i - 4 + \dots] \bar{\rho}_i. \quad (12.127)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{\rho}_i = \rho_i \left( \frac{p}{M} \right)^{d_i - 4}. \quad (12.128)$$

Операторы с массовой размерностью больше 4, соответствующие неперенормируемым взаимодействиям, вымирают при  $p \rightarrow 0$  по степенному закону по  $p$ . Именно это поведение было найдено в уравнении (12.27) с помощью метода Вильсона. Поскольку мы обобщили уравнение Каллана–Симанчика так, чтобы учесть наиболее общее возмущение лагранжиана свободного поля, приятно отметить, что мы тем самым получили полную структуру вильсоновского потока констант связи. Кроме того, этот более формальный метод дает способ вычислений с помощью диаграмм Фейнмана в порядке за порядком по  $\lambda$  поправок к вильсоновскому потоку, возникающих благодаря  $\lambda \phi^4$  взаимодействиям.

Можно сделать еще один шаг к общим результатам раздела 12.1, переходя от четырех к произвольному числу измерений  $d$ . Нам потребуется только два небольших изменения в формализме. Во-первых, когда  $d \neq 4$ , оператор  $\phi^4$  приобретает размерный коэффициент, и мы должны это учесть. В дискуссии после уравнения (10.13) мы получили, что скалярное поле имеет размерность  $(d-2)/2$ . Таким образом, оператор  $\phi^4$  имеет массовую размерность  $(2d-4)$ , и его коэффициент имеет размерность  $4-d$ . Чтобы применить ренормализационную группу, определим  $\lambda$  так, чтобы этот коэффициент оставался безразмерным в  $d$  измерениях. Аналогично поступим с массовым членом, заменяя  $m^2 \rightarrow \rho_m M^2$ . Таким образом, разложение лагранжиана вблизи лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  свободной скалярной теории имеет вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} \rho_m M^2 \phi_M^2 - \frac{1}{4} \lambda M^{4-d} \phi_M^4 + \dots. \quad (12.129)$$

Второе требуемое изменение формализма состоит в новом вычислении  $\beta$  и  $\gamma$  функций при новой размерности. Вплоть до порядка  $\lambda$ , результат оказывается удивительно безвредным. Рассмотрим, например, вычисление  $\gamma_{\phi^2}$  (12.114). Это вычисление, проведенное способом размерной регуляризации, существенно не меняется. При произвольных значениях  $d$  производная контрчлена  $\delta_{\phi^2}$  по  $\ln M$  по-прежнему включает множитель

$$M \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \right) = -2 + \mathcal{O}(4-d). \quad (12.130)$$

Это наблюдение верно для всех  $\gamma_i$ , и  $\beta$ -функция сдвигается только за счет вклада массовой размерности  $\lambda$ . Таким образом, при  $d$  вблизи 4

$$\begin{aligned}\beta &= (d-4)\lambda + \beta^{(4)}(\lambda) + \dots, \\ \beta_m &= [-2 + \gamma_{\phi^2}^{(4)}]\rho_m + \dots, \\ \beta_i &= [d_i - d + \gamma_i^{(4)}]\rho_i + \dots,\end{aligned}\tag{12.131}$$

где функции со значком (4) обозначают четырехмерные результаты, полученные ранее в этом разделе, а опущенные поправочные слагаемые имеют порядок  $\lambda \cdot (d-4)$ . Точная форма этих поправок зависит от схемы перенормировок\*.

Используя явный четырехмерный результат (12.46) для  $\beta$ , получаем

$$\beta = -(4-d)\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}.\tag{12.132}$$

При  $d \geq 4$  эта функция положительна и предсказывает, что константа связи гладко стремится к нулю на больших расстояниях. Однако, когда  $d < 4$ ,  $\beta(\lambda)$  имеет вид, показанный на рис. 12.4(b). Таким образом, это порождает тот же поток константы связи, который мы обсуждали с вильсоновской точки зрения после формулы (12.29). При малых  $\lambda$  константа связи становится все более существенной с ростом расстояния, как и предсказывает размерный анализ. Но при больших  $\lambda$ , константа связи уменьшается в результате своих собственных нелинейных эффектов. Эти две тенденции приходят в равновесие в нуле  $\beta$ -функции,

$$\lambda_* = \frac{16\pi^2}{3}(4-d),\tag{12.133}$$

что дает нетривиальную фиксированную точку ренормгруппового потока в скалярной теории для  $d < 4$ . Если мы формально рассмотрим величины  $d$ , близкие к 4, эта фиксированная точка возникнет в области, где константа связи мала, и для исследования ее свойств можно использовать фейнмановские диаграммы. Существование такой фиксированной точки, открытой Вильсоном и Фишером<sup>†</sup>, имеет важные следствия в статистической механике, которые мы обсудим в гл. 13.

### Критические показатели: первый взгляд

Как приложение формализма этого раздела, вычислим ренормгрупповой поток коэффициента массового оператора в теории  $\phi^4$ . Его можно найти интегрированием уравнения (12.126), используя величину  $\beta_m$  из (12.131):

$$\frac{d}{d \ln p} \bar{\rho}_m = [-2 + \gamma_{\phi^2}(\bar{\lambda})]\bar{\rho}_m.\tag{12.134}$$

Для  $\lambda = 0$  это уравнение дает тривиальное соотношение:

$$\bar{\rho}_m = \rho_m \left( \frac{M}{p} \right)^2.\tag{12.135}$$

\* Это разложение до довольно высокого порядка представлено в работе E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D9**, 1121 (1974).

<sup>†</sup> K. G. Wilson and M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972).

Если вспомнить, как мы первоначально определили  $\rho_m = m^2/M^2$ , то это просто сложный способ сказать, что когда  $p$  становится порядка  $m$ , то тогда массовое слагаемое в лагранжиане становится существенным. В этой точке корреляции поля  $\phi$  начинают экспоненциально вымирать. Характеристическая область корреляций, которую в статистической механике называют корреляционной длиной  $\xi$ , дается соотношением

$$\xi \sim p_0^{-1}, \quad \text{где } \bar{\rho}_m(p_0) = 1. \quad (12.136)$$

Если мы сделаем оценку по этому критерию, получим  $\xi \sim (M^2 \rho_m)^{-1/2}$ , т.е.  $\rho \sim m^{-1}$ , как и ожидалось.

Однако применение этого критерия в фиксированной точке  $\lambda_*$  дает более интересный результат. Если положить  $\bar{\lambda} = \lambda_*$ , тогда уравнение (12.134) имеет следующее решение:

$$\bar{\rho}_m = \rho_m \left( \frac{M}{p} \right)^{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \quad (12.137)$$

Это дает нетривиальное соотношение:

$$\xi \sim \rho_m^{-\nu}, \quad (12.138)$$

где индекс  $\nu$  формально дается выражением:

$$\nu = \frac{1}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \quad (12.139)$$

Используя результаты (12.133) и (12.117), можно явно вычислить это выражение для  $d$  вблизи 4:

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{1}{3}(4 - d). \quad (12.140)$$

Вильсон и Фишер показали, что это выражение может быть расширено до последовательного разложения  $\nu$  по степеням  $\epsilon = (4 - d)$ .

Поскольку степень  $\nu$  имеет определенный смысл в статистической механике, она непосредственно измерима в реальном случае трех измерений. В интерпретации теории скалярного поля на языке статистической механики  $\rho_m$  — параметр, который можно точно подстроить так, чтобы привести систему к критической температуре ( $T - T_C$ ). Таким образом,  $\rho_m$  пропорционально отклонению  $T - T_C$  от критической температуры. Из теоретико-полевого анализа следует, что корреляционная длина в магнетике растет при  $T \rightarrow T_C$  в соответствии со скейлинговым законом

$$\xi \sim (T - T_C)^{-\nu}. \quad (12.141)$$

Это также дает вполне определенные и иногда неожиданные предсказания для величины  $\nu$ . Так, предсказывается, что  $\nu$  близко к  $1/2$ , как и получается в приближении Ландау, изучавшемся в гл. 8 (см. 8.16), но отличается от этой величины на определенные поправки.

Скейлинговое поведение типа (12.141) наблюдается в магнетиках. Известно, что существует несколько определенных законов скейлинга, зависящих от симметрии спинового упорядочивания. Магнетики могут быть охарактеризованы числом флуктуирующих спиновых компонент:  $N=1$  для магнетиков с выделенной осью,  $N=2$  для магнетиков с выделенной плоскостью и  $N=3$  для изотропных трехмерных магнетиков.



Экспериментальное значение  $\nu$  зависит от этого параметра. Теория поля  $\phi^4$ , обсуждавшаяся в этой главе, содержит только одно флуктуирующее поле; это аналог магнетика с одной спиновой компонентой. В гл. 11 мы рассматривали обобщение теории  $\phi^4$  на теорию  $N$  полей с  $O(N)$  симметрией. Можно предположить, что эта система моделирует магнетики с произвольным  $N$ .

Если это соответствие правильно, то выражение (12.140) предсказывает величину  $\nu$  в магнетиках с выделенной осью. В разделе 13.1 мы повторим анализ, приводящий к этому уравнению в случае  $O(N)$ -симметричной теории  $\phi^4$ , и получим формулу:

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8}(4-d), \quad (12.142)$$

которая верна для произвольных  $N$  до первого порядка по  $(4-d)$ . Для случаев  $N = 1, 2, 3$  и  $d = 3$  эта формула предсказывает:

$$\nu = 0.60, 0.63, 0.65. \quad (12.143)$$

Для сравнения лучшие последние экспериментальные измерения  $\nu$  в магнитных системах дают величины\*

$$\nu = 0.64, 0.67, 0.71 \quad (12.144)$$

для  $N = 1, 2, 3$ . Предсказание (12.143) дает разумное первое приближение к экспериментальным результатам.

Способность квантовой теории поля предсказывать критические показатели является конкретным приложением как формальной связи между квантовой теорией поля и статистической механикой, так и поведения констант связи, предсказываемых ренормгрупповым потоком. Однако есть и другой экспериментальный аспект критического поведения, который еще более замечателен и убедителен. Критическое поведение может быть изучено не только в магнетиках, но и в жидкостях, бинарных сплавах, сверхтекучем гелии и во множестве других систем. Было давно известно, что для систем с такой разнообразной микроскопической динамикой скейлинговые показатели в критической точке зависят только от размерности  $N$  флуктуирующих переменных и не зависят от других деталей атомной структуры. Жидкости, бинарные сплавы и одноосные магнетики, например, имеют одинаковые критические показатели. Это кажется чудом для непосвященного. Но для теоретика-специалиста по квантовой теории поля это естественный результат применения идеи ренормализационной группы, в которой большинство деталей полевого взаимодействия описывается операторами, которые становятся несущественными в области, где теория поля определяет свое истинное простое поведение на больших расстояниях.

## Задачи

**12.1. Бета-функции в теории Юкавы.** В псевдоскалярной теории Юкавы, изученной в задаче 10.2, при массах, равных нулю, лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \bar{\psi}(i\not{\partial})\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi.$$

Вычислите  $\beta$ -функции Каллана–Симанчика для  $\lambda$  и  $g$ :

$$\beta_\lambda(\lambda, g), \quad \beta_g(\lambda, g),$$

\* Дальнейшие детали и соответствующее обсуждение можно найти в таблице 13.1.

в главном порядке по константам связи, предполагая, что  $\lambda$  и  $g^2$  одинакового порядка. Нарисуйте потоки констант связи на плоскости  $\lambda$ - $g$ .

**12.2. Бета-функция модели Гросса–Невье.** Вычислите  $\beta(g)$  в двумерной модели Гросса–Невье, изученной в задаче 11.3:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i i \not{\partial} \psi_i + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}_i \psi_i)^2,$$

с  $i = 1, \dots, N$ . Вы должны обнаружить, что эта модель асимптотически свободна. Как этот факт отражен в решении задачи 11.3?

**12.3. Асимптотическая симметрия.** Рассмотрим следующий лагранжиан с двумя скалярными полями  $\phi_1$  и  $\phi_2$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2) - \frac{\lambda}{4!} (\phi_1^4 + \phi_2^4) - \frac{2\rho}{4!} (\phi_1^2 \phi_2^2).$$

Заметьте, что в частном случае  $\rho = \lambda$  этот лагранжиан инвариантен относительно  $O(2)$ -вращений в двумерном пространстве этих двух полей.

- (a) Действуя в четырех измерениях, найдите  $\beta$ -функции для двух констант связи  $\lambda$  и  $\rho$  в главном порядке по константе связи.
- (b) Напишите уравнение ренормализационной группы для отношения констант связи  $\rho/\lambda$ . Покажите, что если  $\rho/\lambda < 3$  в точке перенормировки  $M$ , это отношение стремится на больших расстояниях к условию  $\rho = \lambda$ . Отсюда внутренняя  $O(2)$ -симметрия возникает асимптотически.
- (c) Напишите  $\beta$ -функции для  $\lambda$  и  $\rho$  в  $4 - \varepsilon$  измерениях. Покажите, что имеются нетривиальные фиксированные точки ренормгруппового потока при  $\rho/\lambda = 0, 1, 3$ . Какая из них наиболее устойчива? Нарисуйте распределение потоков констант связи. Из вида потока следует, что критические показатели соответствуют симметричному двухкомпонентному магнетизму.

## КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ И СКАЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Идея бегущей константы связи и ренормгрупповых потоков дает новый язык для обсуждения качественного поведения скалярной теории поля. В первом обсуждении теории  $\phi^4$  каждая величина константы связи и, более общо, каждая форма потенциала и каждое значение размерности пространства-времени ставили перед нами отдельные проблемы для исследования. Но в гл. 12 мы видели, что теории  $\phi^4$  с различными значениями константы связи связаны ренормгрупповыми потоками, и картина этих потоков непрерывно изменяется при изменении размерности пространства-времени. Поэтому уместно задать весьма общий вопрос: как ведет себя теория  $\phi^4$  как функция размерности? Данная глава дает детальный ответ на этот вопрос.

Центральным объектом нашего анализа будет неподвижная точка Вильсона–Фишера, обсуждавшаяся в разделе 12.5. Такая точка существует в пространстве-времени с размерностью  $d$  при  $d < 4$ , и при этих размерностях она контролирует ренормгрупповые потоки безмассовой теории  $\phi^4$ . Скалярная теория поля имеет явную или спонтанно нарушенную симметрию в соответствии со знаком массового параметра  $m^2$ . Вблизи  $m^2 = 0$  теория демонстрирует скейлинговое поведение с аномальными размерностями, значения которых определяются уравнениями ренормализационной группы. При  $d > 4$  неподвижная точка Вильсона–Фишера исчезает, и остается только неподвижная точка, отвечающая свободному полю. Опять теория имеет две различные фазы, но поведение при переходе определяется потоками ренормализационной группы вблизи неподвижной точки свободного поля, так что законы скейлинга совпадают с теми, которые следуют из простого анализа размерностей.

Продолжение этих результатов в евклидово пространство имеет важные приложения в теории фазовых переходов в магнетиках и жидкостях. Как обсуждалось в предыдущей главе, идеи ренормализационной группы приводят к выводу, что степенное поведение термодинамических величин вблизи точки фазового перехода определяется поведением корреляционных функций в евклидовой теории  $\phi^4$ . Установленные в предыдущем разделе результаты приводят к следующим выводам для критических скейлинговых законов. Для статистических систем в пространстве размерности  $d > 4$  законы скейлинга совпадают с теми, которые следуют из простого размерного анализа. Это именно те предсказания теории Ландау, которые мы обсудили в главе 8. С другой стороны, при  $d < 4$  законы критического скейлинга подвергаются изменению, которое можно вычислить с помощью ренормализационной группы.

При  $d = 4$  мы находимся на границе между двумя типами скейлингового поведения. Это отвечает ситуации, в которой теория  $\phi^4$  точно перенормируема. В этом случае возникают поправки к предсказаниям размерного анализа, имеющие логарифмический характер. Мы специально проанализируем этот случай в разделе 13.2.

Хотя это и не очевидно, но случай  $d = 2$  соответствует другой границе. Здесь переход к спонтанно нарушенной симметрии описывается другой квантовой теорией поля,

которая становится перенормируемой в двух измерениях. Мы введем эту теорию, называемую *нелинейной сигма-моделью*, в разделе 13.3 и покажем, как ее ренормгрупповое поведение гладко сливается с поведением теории  $\phi^4$ . Собирая все результаты этой главы, мы получим количественное понимание поведения теории  $\phi^4$  и критических явлений при всех значениях размерностей пространства-времени.

### 13.1. Теория критических показателей

В конце гл. 12 мы использовали свойства ренормализационной группы для скалярной теории поля, чтобы предсказать поведение корреляций вблизи критической точки термодинамической системы. Мы показали, что мера корреляций — корреляционная длина  $\xi$  — должна при подходе к критической точке стремиться к бесконечности в соответствии с законом скейлинга (12.141). Показатель степени в этом выражении, обозначенный  $\nu$ , должен зависеть только от симметрии параметра порядка. Мы показали далее, что этот показатель связан с аномальной размерностью локального оператора в теории  $\phi^4$  и что он может быть вычислен с помощью фейнмановских диаграмм. В этом разделе мы покажем, что аналогичные выводы применимы к большому числу законов скейлинга, связанных с критической точкой.

Для начала систематически зададим набор *критических показателей*, т. е. показателей степени в законах скейлинга, которые описывают термодинамическое поведение в окрестности критической точки. Затем с помощью уравнения Каллана–Симанчика покажем, что все эти показатели могут быть сведены к двум основным аномальным размерностям. Наконец, сравним это замечательное предсказание квантовой теории поля с экспериментом.

Для определения набора критических законов скейлинга начнем с поведения корреляционной функции флуктуаций упорядочивающего поля. Для определенности будем использовать язык, применяемый для описания магнетиков, как в гл. 8. Как пояснялось в разделе 9.3, мы хотим вычислить классические термодинамические средние как корреляционные функции в евклидовой квантовой теории поля. Будем называть флуктуирующее поле спиновым полем  $s(x)$ , его интеграл — намагниченностью  $M$ , и внешнее поле, которое взаимодействует с  $s(x)$ , — магнитным полем  $H$ . (Чтобы не перепутать с намагниченностью, в этом разделе будем обозначать перенормировочный масштаб в уравнении Каллана–Симанчика буквой  $\mu$ .)

Определим двухточечную корреляционную функцию как

$$G(x) = \langle s(x)s(0) \rangle \quad (13.1)$$

или связанной с ней средним, если мы находимся в такой фазе намагниченности, где  $\langle s(x) \rangle \neq 0$ . Вдали от критической точки  $G(x)$  должна экспоненциально убывать по закону

$$G(x) \sim \exp[-|x|/\xi]. \quad (13.2)$$

Степень отклонения от критической точки характеризуется параметром

$$t = \frac{T - T_C}{T_C}. \quad (13.3)$$

Мы ожидаем, что, когда  $t \rightarrow 0$ , корреляционная длина возрастает до бесконечности. Определим показатель степени  $\nu$  (12.141) по формуле

$$\xi \sim |t|^{-\nu}. \quad (13.4)$$

При  $t = 0$  корреляционная функция должна спадать всего лишь по степенному закону. Определим показатель степени  $\eta$  формулой

$$G(x) \sim \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}}, \quad (13.5)$$

где  $d$  — размерность евклидова пространства.

Поведение разных термодинамических величин вблизи критической точки задает ряд дополнительных показателей. Обычно удельная теплоемкость термодинамической системы расходится при  $t \rightarrow 0$ . Определим показатель степени  $\alpha$  по формуле для удельной теплоемкости при фиксированном внешнем поле  $H = 0$ :

$$C_H \sim |t|^{-\alpha}. \quad (13.6)$$

Так как порядок устанавливается при  $t = 0$ , намагниченность при нулевом поле стремится к нулю, когда  $t \rightarrow 0$  снизу. Определим показатель степени  $\beta$  (не путать с функцией Каллана–Симанчика) формулой

$$M \sim |t|^\beta. \quad (13.7)$$

Даже при  $t = 0$  имеется ненулевая намагниченность при ненулевом магнитном поле. Запишем закон, по которому эта намагниченность стремится к нулю, когда  $H \rightarrow 0$ , в виде соотношения:

$$M \sim H^{1/\delta}. \quad (13.8)$$

Наконец, магнитная восприимчивость расходится в критической точке. Представим эту расходимость в виде

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}. \quad (13.9)$$

Уравнения (13.4)–(13.9) определяют набор критических показателей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\nu$ ,  $\eta$ , которые можно экспериментально измерить для различных термодинамических систем\*.

В гл. 12 мы показали, следуя рассуждениям Вильсона, что термодинамическая система вблизи своей критической точки может быть описана евклидовой квантовой теорией поля. Лагранжиан этой квантовой теории поля на атомных масштабах может быть сложным, однако после интегрирования по степеням свободы на малых масштабах лагранжиан упрощается. Если подстроить параметр теории так, чтобы обеспечить присутствие длинноволновых корреляций, то лагранжиан должен приблизиться к неподвижной точке ренормализационной группы. В общем случае лагранжиан будет приближаться к неподвижной точке с единственным нестабильным или подходящим направлением, отвечающим массовому параметру теории  $\phi^4$ . При  $d < 4$  это неподвижная точка Вильсона–Фишера. При  $d \geq 4$  это неподвижная точка свободного поля. Для определенности далее будем предполагать, что  $d < 4$ .

### Показатели спиновой корреляционной функции

В этом подходе можно изучить поведение спин-спиновой корреляционной функции  $G(x)$ . В силу только что рассмотренных аргументов  $G(x)$  пропорциональна двухточечной корреляционной функции евклидовой скалярной теории поля. Введенная в предыдущей главе технология может быть применена непосредственно. Корреляционная

\*Ряд других критических показателей и соотношений представлен в М. Е. Fisher, *Repts. Prog. Phys.* **30**, 615 (1967).

функция подчиняется уравнению Каллана–Симанчика (12.125):

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + 2\gamma \right] G(x; \mu, \{\rho_i\}) = 0. \quad (13.10)$$

Здесь в число обобщенных констант связи  $\rho_i$  мы включили константу взаимодействия  $\lambda$  теории  $\phi^4$ .

Из размерного анализа в  $d$  измерениях

$$G(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}} g(\mu|x|, \{\rho_i\}), \quad (13.11)$$

где  $g$  — произвольная функция безразмерных параметров. (Это выражение является фурье-образом формулы, согласно которой  $G(p) \sim p^{-2}$ , умноженному на безразмерную функцию). Исходя из этого, можно решить уравнение Каллана–Симанчика (13.10) методом раздела 12.3 и получить:

$$G(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}} h(\{\bar{\rho}_i(x)\}) \cdot \exp \left[ -2 \int_{1/\mu}^{|x|} d \ln(|x'|) \gamma(\{\bar{\rho}(x')\}) \right], \quad (13.12)$$

где  $h$  — безразмерное начальное условие. Бегущие константы связи  $\bar{\rho}_i$  подчиняются дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d \ln(1/\mu|x|)} \bar{\rho}_i = \beta_i(\{\rho_j\}). \quad (13.13)$$

Решения этого уравнения были рассмотрены в разделе 12.5. Мы видели тогда, что для потоков, проходящих в окрестности неподвижной точки Вильсона–Фишера, безразмерный коэффициент массового оператора растет при движении в сторону больших расстояний, в то время как другие безразмерные параметры становятся малыми. Пусть  $\lambda_*$  — положение неподвижной точки. Тогда более точно можно написать:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_m &= \rho_m (\mu|x|)^{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}, \\ \bar{\rho}_i &= \rho_i (\mu|x|)^{-A_i}, \end{aligned} \quad (13.14)$$

где  $A_i > 0$  для  $i \neq m$ . Если отклонение  $\lambda$  от неподвижной точки рассматривается как одна из констант  $\rho_i$ ,

$$\rho_\lambda = \lambda - \lambda_*, \quad (13.15)$$

то влияние этого параметра также падает как степень  $|x|$ , что было продемонстрировано в уравнении (12.97). На языке раздела 12.1 все параметры  $\rho_i$ , за исключением  $\rho_m$ , умножаются на несущественные операторы, а  $\rho_m$  умножается на существенный оператор. Чтобы приблизиться к критической точке, подберем параметры теории так, чтобы при некотором масштабе  $(1/\mu)$  вблизи атомного масштаба  $\rho_m \ll 1$ . Если параметр  $\rho_m$  подобран путем настройки температуры термодинамической системы, то  $\rho_m \sim t$ . Закон критического скейлинга будет выполняться, если существует область расстояний, где  $\bar{\rho}_m$  остается малой, в то время как другими  $\bar{\rho}_i$  можно пренебречь. Тогда законы критического поведения могут быть определены из решения уравнения Каллана–Симанчика с  $\bar{\rho}_m$ , которое дается (13.14), и остальными  $\bar{\rho}_i$ , приравненными к нулю. Можно

показать, что поправки к этому приближению будут пропорциональны положительным степеням  $t$ .

В этом приближении следует вычислить функцию  $\gamma(\lambda)$  в (13.12) при  $\bar{\rho}_\lambda = 0$ , т. е. в неподвижной точке. Используя это значение и решение для  $\bar{\rho}_m$ , находим, что уравнение (13.12) принимает вид:

$$G(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}} \cdot \frac{1}{(\mu|x|)^{2\gamma(\lambda_*)}} \cdot h(t(\mu|x|)^{2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}). \quad (13.16)$$

Из этого уравнения следуют законы скейлинга (13.5) и (13.4). При достаточно малом значении аргумента  $h$   $G(x)$  подчиняется уравнению (13.5) с

$$\eta = 2\gamma(\lambda_*). \quad (13.17)$$

На больших расстояниях  $h$  должна спадать экспоненциально, поскольку эта функция получена из пропагатора скалярного поля. Из вида аргумента функции мы заключаем, что эта экспонента должна иметь вид

$$\exp[-|x|(\mu t^\nu)], \quad (13.18)$$

где, как и в (12.139),

$$\nu = \frac{1}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \quad (13.19)$$

Это в точности закон скейлинга (13.2), (13.4), если отождествить  $\nu$  с аномальной размерностью оператора  $\phi^2$ .

### Критические показатели для термодинамических функций

Термодинамические критические законы скейлинга могут быть получены аналогичным способом при изучении скейлингового поведения макроскопических термодинамических переменных. Последние выводятся из свободной энергии Гиббса, или, на языке квантовых полей, из эффективного потенциала скалярной теории поля. Поскольку эффективный потенциал и, на более общем языке, эффективное действие построены из корреляционных функций, эти величины должны удовлетворять уравнениям Каллана–Симанчика. Мы сейчас построим эти уравнения и затем используем их, чтобы определить термодинамические критические показатели.

В уравнении (11.96) мы показали, что эффективное действие  $\Gamma$  зависит от классического поля  $\phi_{cl}$  таким образом, что  $n$ -я производная  $\Gamma$  по  $\phi_{cl}$  дает одночастично неприводимую  $n$ -точечную корреляционную функцию теории поля. Поэтому можно реконструировать  $\Gamma$  из ОЧН функций, выписывая ряды Тейлора

$$\Gamma[\phi_{cl}] = i \sum_2^\infty \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \phi_{cl}(x_1) \cdots \phi_{cl}(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (13.20)$$

где  $\Gamma^{(n)}$  — ОЧН амплитуды.

Для нахождения уравнения Каллана–Симанчика для  $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$  легче всего сначала получить уравнение для  $\Gamma^{(n)}$ . Начнем с рассмотрения трехточечной функции  $\Gamma^{(3)}$ . Она определена формулой

$$\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{G^{(2)}(p_1)G^{(2)}(p_2)G^{(2)}(p_3)} G^{(3)}(p_1, p_2, p_3). \quad (13.21)$$

После изменения масштаба умножением на  $Z(\mu)$  мы видим, что  $\Gamma^{(3)}$  связана с неприводимой трехточечной функцией голых полей:

$$\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = Z(\mu)^{+3/2} \Gamma_0^{(3)}(p_1, p_2, p_3).$$

Аналогично, неприводимая  $n$ -точечная функция связана с соответствующей функцией голых полей соотношением

$$\Gamma^{(n)} = Z(\mu)^{n/2} \Gamma_0^{(n)}. \quad (13.22)$$

Это соотношение совпадает по форме с соответствующим соотношением для полных функций Грина (12.35), за исключением измененного знака в показателе. Начиная с этого места, можно следовать логике рассуждений, использованной при выводе уравнения Каллана–Симанчика для функций Грина (12.41), с той лишь разницей, что слагаемое  $n\gamma$  входит с противоположным знаком. Таким образом, находим:

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right] \Gamma^{(n)}(\{p_i\}; \mu, \lambda) = 0. \quad (13.23)$$

Чтобы превратить это в уравнение для эффективного действия, заметим, что в правой части уравнения (13.20) функция  $\Gamma^{(n)}$  умножается на  $n$ -ю степень классического поля. Тогда уравнение (13.23), проинтегрированное с  $n$  степенями  $\phi_{\text{cl}}$  и просуммированное по  $n$ , эквивалентно уравнению

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma(\lambda) \int dx \phi_{\text{cl}}(x) \frac{\delta}{\delta \phi_{\text{cl}}(x)} \right] \Gamma([\phi_{\text{cl}}]; \mu, \lambda) = 0. \quad (13.24)$$

Оператор, который умножается на  $\gamma(\lambda)$ , подсчитывает степени  $\phi_{\text{cl}}$  в каждом слагаемом ряда Тейлора. Полагая в уравнении (13.24)  $\phi_{\text{cl}}$  константой, получим уравнение Каллана–Симанчика для  $V_{\text{eff}}$ :

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma \phi_{\text{cl}} \frac{\partial}{\partial \phi_{\text{cl}}} \right] V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}, \mu, \lambda) = 0. \quad (13.25)$$

Чтобы применить уравнение (13.25) к проблеме критических показателей, сначала перепишем его в обозначениях статистической механики, заменяя  $\phi_{\text{cl}}$  на намагниченность  $M$ , сопряженный источник  $J$  на  $H$  и эффективный потенциал  $V_{\text{eff}}$  на свободную энергию Гиббса  $\mathbf{G}(M)$ . Одновременно мы заменим  $\lambda$  на полный набор констант связи  $\rho_i$ . Тогда (13.25) принимает вид:

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} - \gamma M \frac{\partial}{\partial M} \right] \mathbf{G}(M, \mu, \{\rho_i\}) = 0. \quad (13.26)$$

Теперь найдем решение этого уравнения. Как и раньше, начнем с размерного анализа. В  $d$  измерениях эффективный потенциал имеет массовую размерность  $d$ , а скалярное поле — массовую размерность  $(d-2)/2$ . Таким образом,

$$\mathbf{G}(M, \mu, \{\rho_i\}) = M^{2d/(d-2)} \widehat{\mathbf{G}}(M \mu^{-(d-2)/2}, \{\rho_i\}), \quad (13.27)$$



где  $\widehat{g}$  — новая безразмерная функция. Подставляя (13.27) в (13.26), видим, что  $\widehat{g}$  удовлетворяет уравнению:

$$\left[ \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} - \left( \frac{d-2}{2} + \gamma \right) M \frac{\partial}{\partial M} - d \frac{2}{d-2} \gamma \right] \widehat{g}(M \mu^{-(d-2)/2}, \{\rho_i\}) = 0, \quad (13.28)$$

т. е.

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} - \sum_i \frac{2\beta_i}{(d-2+2\gamma)} \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \frac{4d\gamma}{(d-2)(d-2+2\gamma)} \right] \widehat{g} = 0. \quad (13.29)$$

Решая это уравнение, находим, что

$$\mathbf{G}(M) = M^{2d/(d-2)} \widehat{h}(\{\bar{\rho}_i(M)\}) \exp \left[ - \int_{\mu^{(d-2)/2}}^M d \ln(M') \frac{4d\gamma}{(d-2)(d-2+2\gamma)} (\{\bar{\rho}(M')\}) \right], \quad (13.30)$$

где бегущая константа связи  $\bar{\rho}_i$  подчиняется уравнению

$$\frac{d}{d \ln M} \bar{\rho}_i = \frac{2\beta_i(\{\bar{\rho}_i\})}{d-2+2\gamma(\{\bar{\rho}_i\})}. \quad (13.31)$$

Как и при обсуждении спиновой корреляционной функции, определим критическую область, полагая, что мы находимся в ренормгрупповом потоке, проходящем вблизи неподвижной точки Вильсона–Фишера. Мы снова игнорируем влияние несущественных операторов. Затем следует положить

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_m &= \rho_m (M \mu^{-(d-2)/2})^{-2(2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*))/(d-2+2\gamma(\lambda_*))}, \\ \bar{\rho}_i &= 0 \quad \text{для } i \neq m, \end{aligned} \quad (13.32)$$

с  $\rho_m \sim t$ . В этом приближении свободная энергия Гиббса принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(M, t) &= M^{2d/(d-2)} \cdot (M \mu^{-(d-2)/2})^{-4d\gamma(\lambda_*)/(d-2)(d-2+2\gamma(\lambda_*))} \times \\ &\times \widehat{h}(t (M \mu^{-(d-2)/2})^{-2(2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*))/(d-2+2\gamma(\lambda_*))}), \end{aligned} \quad (13.33)$$

где  $\widehat{h}$  — гладкое начальное условие.

Для упрощения вида показателя в этом выражении используем заранее некоторые последующие результаты и заменим

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d-2+2\gamma(\lambda_*)}{2(2-\gamma_{\phi^2}(\lambda_*))}, \\ \delta &= \frac{2d}{d-2+2\gamma(\lambda_*)} - 1 = \frac{d+2-2\gamma(\lambda_*)}{d-2+2\gamma(\lambda_*)}. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Необходимо установить, что эти новые показатели в самом деле соответствуют тем, которые были определены формулами (13.7) и (13.8). С учетом этих замен (и отбрасывая с этого момента зависимость от  $\mu$ ) находим для  $\mathbf{G}$  формулу скейлинга:

$$\mathbf{G}(M, t) = M^{1+\delta} \widehat{h}(t M^{-1/\beta}), \quad (13.35)$$

где  $\widehat{h}$  имеет гладкий предел при  $t \rightarrow 0$ . Эквивалентное представление для этой формулы имеет вид:

$$\mathbf{G}(M, t) = t^{\beta(1+\delta)} \widehat{f}(Mt^{-\beta}). \quad (13.36)$$

Из этих соотношений непосредственно следуют законы скейлинга для термодинамических величин. Из (13.35) находим, что вдоль линии  $t = 0$

$$H = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial M} = \widehat{h}(0) M^\delta, \quad (13.37)$$

что в точности совпадает с (13.8). Ниже критической температуры мы обнаруживаем ненулевое значение намагниченности, находя минимум  $\mathbf{G}$  относительно  $M$ . В области скейлинга этот минимум возникает в точке минимума  $m_0$  функции  $\widehat{f}(m)$  в формуле (13.36). Это приводит к соотношению (13.7), которое можно записать в виде:

$$Mt^{-\beta} = m_0. \quad (13.38)$$

Если мы рассматриваем область выше  $T_C$  и нулевое поле, то минимум  $\widehat{f}$  должен возникнуть при  $M = 0$ . Тогда

$$\mathbf{G}(t) \sim t^{\beta(1+\delta)}. \quad (13.39)$$

Чтобы вычислить удельную теплоемкость, дважды дифференцируем по температуре. Это дает закон скейлинга (13.6) с

$$2 - \alpha = \beta(1 + \delta) = \frac{d}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \quad (13.40)$$

Наконец, мы можем получить закон скейлинга для магнитной восприимчивости. Из (13.36) получаем закон скейлинга для  $H$  при ненулевом  $t$ :

$$H = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial M} = t^{\beta\delta} \widehat{f}'(Mt^{-\beta}). \quad (13.41)$$

Обратное к нему соотношение является законом скейлинга

$$M = t^\beta \widehat{c}(Ht^{-\beta\delta}). \quad (13.42)$$

Тогда магнитная восприимчивость при нулевом поле равна

$$\chi = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_t = \widehat{c}'(0) t^{-(\delta-1)\beta}. \quad (13.43)$$

Таким образом, мы подтверждаем формулу (13.9), в которой

$$\gamma = (\delta - 1)\beta = \frac{2(1 - \gamma(\lambda_*))}{2 - \gamma_{\phi^2}(\lambda_*)}. \quad (13.44)$$

Итак, найдены явные выражения для всех критических показателей степени через функции Каллана–Симанчика. При приближении размерности  $d$  к значению 4 снизу, неподвижная точка  $\lambda_*$  стремится к нулю. Тогда шесть критических показателей приближаются к величинам, которые можно было бы получить из простого размерного анализа:

$$\begin{aligned} \eta = 0; \quad \nu = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \frac{1}{2}; \\ \gamma = 1; \quad \delta = 3. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Неудивительно, что значения  $\eta$ ,  $\nu$  и  $\beta$ , данные в (13.45), совпадают с полученными в гл. 8 из теории критических явлений Ландау. Аналогично показывается, что и другие значения следуют из теории Ландау. Анализ, основанный на ренормализационной группе, показывает, как следует систематически корректировать предсказания теории Ландау с учетом длинноволновых флуктуаций спинового поля.

Заметим, что все показатели, связанные с термодинамическими величинами, строятся из тех же объектов, что и показатели, связанные с корреляционными функциями. С точки зрения теории поля это очевидно, поскольку все законы скейлинга в теории поля должны однозначно следовать из аномальных размерностей операторов  $\phi(x)$  и  $\phi^2(x)$ , которые в точности совпадают с  $\gamma(\lambda_*)$  и  $\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)$ . Однако этот результат имеет интересное экспериментальное следствие. Из него следуют соотношения между критическими показателями, которые не зависят от модели. Например, в любой системе с критической точкой эта теория предсказывает:

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad \beta = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta)\nu. \quad (13.46)$$

Эти соотношения проверяют общую схему сопоставления критической точки с неподвижной точкой потока ренормализационной группы.

Кроме того, теоретико-полевой подход к критическим явлениям предсказывает, что критические показатели степени являются *универсальными* в том смысле, что они принимают одинаковые значения в твердотельных системах, которые в пределе  $T \rightarrow T_C$  приближаются к одной и той же неподвижной точке скалярного поля.

### Значения критических показателей

Наконец, скалярная теория поля реально предсказывает значения  $\gamma(\lambda_*)$  и  $\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)$  либо из степенного разложения  $\varepsilon = 4 - d$ , которое было описано в разделе 12.5, либо из прямого разложения функций  $\beta$  и  $\gamma$  по степеням  $\lambda$ . Мы можем воспользоваться этими разложениями, чтобы получить количественные предсказания для критических показателей. В конце раздела 12.5 был дан пример такого вычисления, когда в выражении (12.143) мы привели значения двух первых слагаемых в разложении по  $\nu$ . Вернемся к этому вопросу и получим теоретико-полевые предсказания для всех критических показателей.

В дискуссии в конце раздела 12.5 мы отметили, что в магнетиках с различным числом флуктуирующих спиновых компонент наблюдаются различные значения критических показателей. Оптимистической гипотезой было бы предположение, что любая термодинамическая система с  $N$  флуктуирующими спиновыми компонентами, или, в более общей формулировке, с  $N$  флуктуирующими в критической точке термодинамическими переменными, должна описываться теорией поля с  $N$  скалярными полями с одной и той же неподвижной точкой. Естественным кандидатом для этой неподвижной точки была бы неподвижная точка Вильсона–Фишера  $O(N)$ -симметричной теории  $\phi^4$ , рассмотренной в гл. 11. Сейчас мы опишем вычисление критических показателей этой теории для произвольных значений  $N$ .

В качестве первого шага следует вычислить функции  $\beta(\lambda)$ ,  $\gamma(\lambda)$ , и  $\gamma_{\phi^2}(\lambda)$  в четырех измерениях. Это вычисление аналогично проделанному в гл. 12 для обычной теории  $\phi^4$ , поэтому лишь укажем, какие изменения нужно сделать для этого случая. Так же как и в обычной теории  $\phi^4$ , в пропагаторе безмассовой  $O(N)$ -симметричной теории отсутствуют однопетлевые поправки к напряженности поля и поэтому однопетлевое слагаемое в  $\gamma(\lambda)$  снова равно нулю. В задаче 13.2 мы вычислили лидирующий

двухпетлевой вклад в  $\gamma(\lambda)$  в  $O(N)$ -симметричной теории  $\phi^4$ :

$$\gamma = (N + 2) \frac{\lambda^2}{4(8\pi^2)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (13.47)$$

Однопетлевой вклад в  $\beta$ -функцию в теории  $\phi^4$  получается из однопетлевого вершинного контрчлена  $\delta_\lambda$ , который определен формулой (12.44). Расходящаяся часть соответствующего вершинного контрчлена для  $O(N)$ -симметричного случая вычислена в разделе 11.2. Из формулы (11.22) имеем:

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}} (N + 8) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} + \text{конечная часть}. \quad (13.48)$$

Следуя логике вывода формулы (12.46) или используя уравнение (12.54), находим:

$$\beta = (N + 8) \frac{\lambda^2}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (13.49)$$

Это сводится к  $\beta$ -функции теории  $\phi^4$ , если положить  $N = 1$  и заменить  $\lambda \rightarrow \lambda/6$ , как объяснено после формулы (11.5). Наконец, чтобы вычислить  $\gamma_{\phi^2}$ , следует повторить вычисление, сделанное в конце раздела 12.4. Если рассмотреть вместо (12.113) функцию Грина  $\langle \phi^i(p) \phi^j(q) \phi^2(k) \rangle$  и заменить вершину теории  $\phi^4$  на четырехточечную вершину, возникающую из лагранжиана (11.5), множитель  $(-i\lambda)$  в первой строке (12.114) заменится на

$$(-2i\lambda) [\delta^{ij} \delta^{k\ell} + \delta^{ik} \delta^{j\ell} + \delta^{i\ell} \delta^{jk}] \cdot \delta^{k\ell} = -2i\lambda(N + 2) \delta^{ij}.$$

Тогда

$$\gamma_{\phi^2} = (N + 2) \frac{\lambda}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (13.50)$$

Рассмотрим теперь ту же самую теорию в  $(4 - \varepsilon)$  измерениях. Функция  $\beta$  теперь примет вид:

$$\beta = -\varepsilon\lambda + (N + 8) \frac{\lambda^2}{8\pi^2}, \quad (13.51)$$

так что неподвижная точка Вильсона–Фишера возникает при

$$\lambda_* = \frac{8\pi^2\varepsilon}{N + 8}. \quad (13.52)$$

В этой точке находим:

$$\gamma(\lambda_*) = \frac{N + 2}{4(N + 8)^2} \varepsilon^2 + \dots, \quad \gamma_{\phi^2}(\lambda_*) = \frac{N + 2}{N + 8} \varepsilon + \dots. \quad (13.53)$$

Из этих двух результатов можно получить значения всего набора критических показателей в порядке  $\varepsilon$ . Например, подставляя (13.53) в (13.19), получаем

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N + 2}{N + 8} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (13.54)$$

как и утверждалось в конце раздела 12.5.

Таблица 13.1. Значения критических показателей для трехмерных статистических систем.

Показатель	Ландау	КТП	Решетка	Эксперимент	
$N = 1$ системы:					
$\gamma$	1.0	1.241 (2)	1.239 (3)	1.240 (7) 1.22 (3) 1.24 (2)	бинарная жидкость жидкость-газ $\beta$ -латунь
$\nu$	0.5	0.630 (2)	0.631 (3)	0.625 (5) 0.65 (2)	бинарная жидкость $\beta$ -латунь
$\alpha$	0.0	0.110 (5)	0.103 (6)	0.113 (5) 0.12 (2)	бинарная жидкость жидкость-газ
$\beta$	0.5	0.325 (2)	0.329 (9)	0.325 (5) 0.34 (1)	бинарная жидкость жидкость-газ
$\eta$	0.0	0.032 (3)	0.027(5)	0.016 (7) 0.04 (2)	бинарная жидкость $\beta$ -латунь
$N = 2$ системы:					
$\gamma$	1.0	1.316 (3)	1.32 (1)		
$\nu$	0.5	0.670 (3)	0.674 (6)	0.672 (1)	сверхтекучий ${}^4\text{He}$
$\alpha$	0.0	-0.007 (6)	0.01 (3)	-0.013 (3)	сверхтекучий ${}^4\text{He}$
$N = 3$ системы:					
$\gamma$	1.0	1.386 (4)	1.40 (3)	1.40 (3) 1.33 (3) 1.40 (3)	EuO, EuS Ni RbMnF <sub>3</sub>
$\nu$	0.5	0.705 (3)	0.711 (8)	0.70 (2) 0.724 (8)	EuO, EuS RbMnF <sub>3</sub>
$\alpha$	0.0	-0.115 (9)	-0.09 (6)	-0.011 (2)	Ni
$\beta$	0.5	0.365 (3)	0.37 (5)	0.37 (2) 0.348 (5) 0.316 (8)	EuO, EuS Ni RbMnF <sub>3</sub>
$\eta$	0.0	0.033 (4)	0.041 (14)		

Значения критических показателей в столбце «КТП» получены пересуммированием рядов теории возмущений для аномальных размерностей в неподвижной точке Вильсона–Фишера для  $O(N)$ -симметричной теории  $\phi^4$  в трех измерениях. Значения в столбце «Решетка» основаны на анализе высокотемпературных разложений для решеточных моделей статистической механики. Значения в столбце «Эксперимент» взяты из экспериментов в критических точках описанных систем. Во всех случаях числа в скобках обозначают стандартные ошибки в последних цифрах. Эта таблица базируется на данных, взятых из работ: J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **B21**, 3976 (1980) и J. Zinn-Justin (1993), Chapter 27. Полный набор ссылок для двух последних столбцов можно найти в этих источниках.

При обсуждении результатов в гл. 12, мы утверждали, что вычисленные значения критических показателей хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако с учетом высших порядков можно значительно точнее сравнить теорию и эксперимент. Сейчас  $\varepsilon$ -разложение критических показателей получено до порядка  $\varepsilon^5$ . Более впечатляющим является разложение по  $\lambda$  для критических показателей при  $d = 3$ , где оно получено до порядка  $\lambda^9$ . Суммируя эти ряды теории возмущений, можно добиться очень точных оценок аномальных размерностей  $\gamma(\lambda_*)$  и  $\gamma_{\phi^2}(\lambda_*)$  и, как следствие, точных предсказаний для критических показателей.

Сравнение этих значений с прямыми определениями критических показателей приведено в таблице 13.1. Столбец «КТП» дает значения критических показателей, полученных вычислением аномальных размерностей по теории возмущений в теории  $\phi^4$  в трех измерениях. В столбце «Эксперимент» приведены значения критических показателей, экспериментально измеренных в различных системах. Эти системы включают критическую точку жидкость-газ в Хе,  $\text{CO}_2$  и других жидкостях, критическую точку в бинарных жидкостях с фазовой границей жидкость-жидкость, переход порядок-беспорядок в атомном упорядочении сплава Cu-Zn  $\beta$ -латунь, сверхтекучий переход в  $^4\text{He}$  и переходы порядок-беспорядок в ферромагнетиках ( $\text{RbMnF}_3$ ). Совпадение экспериментальных значений критических показателей в различных системах является прямым подтверждением гипотезы универсальности. Для случая систем с единственным параметром порядка ( $N = 1$ ), замечательным является то, что совершенно различные системы характеризуются одинаковыми значениями критических показателей.

Столбец «Решетка» содержит оценки критических показателей в абстрактных решеточных моделях статистической механики. Для этих упрощенных моделей статистико-механическая функция распределения может быть вычислена при помощи высокотемпературного разложения. С некоторыми усилиями эти разложения можно провести до 15 слагаемого или более. После пересуммирования таких рядов можно получить прямые теоретические оценки для критических показателей с точностью, сравнимой с точностью лучших экспериментов. Согласие между этими значениями и экспериментальными данными является тестом на правильность соответствия между экспериментальными системами и простыми гамильтонианами, которые были отправной точкой в ренормгрупповом анализе.

Согласие между всеми тремя способами определения критических показателей весьма впечатляет. Картина, конечно, не идеальна, и более аккуратное исследование таблицы 13.1 обнаруживает некоторые важные расхождения. Но в общем совершенно очевидно, что квантовая теория поля дает правильное объяснение термодинамики критического поведения в широком диапазоне физических систем.

## 13.2. Критическое поведение в четырех измерениях

Обсудив общую теорию критических показателей для  $d < 4$ , обратимся к случаю  $d = 4$ . Безусловно, этот случай имеет особый интерес для приложений квантовой теории поля к физике элементарных частиц. Кроме того, мы знаем теперь, что значение  $d = 4$  находится на границе, на которой исчезает неподвижная точка Вильсона-Фишера. Мы бы хотели понять особенности поведения предсказаний квантовой теории поля на этой границе. Наиболее очевидная разница между случаями  $d < 4$  и  $d = 4$  заключается в том, что если при  $d < 4$  величина отклонения по  $\lambda$  из неподвижной точки умножается на несущественный (иррелевантный) оператор, то в случае  $d = 4$   $\lambda$  умножается на маргинальный оператор. В уравнении (12.82) было видно, что при малых импульсах или на больших расстояниях текущее значение  $\lambda$  продолжает приближаться к своей неподвижной точке, которая теперь расположена при  $\lambda = 0$ . Но теперь это приближение управляется менее быстро растущей функцией — не степенью, а логарифмом масштаба расстояний. Поэтому обычно не правильно игнорировать отклонение  $\lambda$  от неподвижной точки. С учетом этого эффекта мы найдем дополнительные логарифмические слагаемые, аналогичные зависимости корреляционных функций от  $\ln p$ , что, как мы уже знаем, характерно для перенормируемой теории.

Чтобы проиллюстрировать эту логарифмическую зависимость, вернемся к задаче, упомянутой в конце главы 11. В (11.81), было получено выражение для эффективного потенциала теории  $\phi^4$  до второго порядка по  $\lambda$  в пределе, когда исчезает параметр

массы:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \phi_{\text{cl}}^4 \left[ \lambda + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \left( (N+8) (\ln(\lambda \phi_{\text{cl}}^2/M^2) - \frac{3}{2}) + 9 \ln 3 \right) \right]. \quad (13.55)$$

(Заметим, что сейчас мы вернулись к стандартным обозначениям, в которых  $M$  — масштаб перенормировки и  $\mu$  — параметр массы.) Тогда казалось, что это выражение имеет минимум при очень малых значениях  $\phi_{\text{cl}}$ , во всяком случае малых настолько, что

$$|\lambda \ln(\lambda \phi_{\text{cl}}^2/M^2)| \sim 1. \quad (13.56)$$

Поскольку в  $n$ -ом порядке теории возмущений мы получаем  $n$  степеней этого логарифма, из (13.56) следует, что слагаемые высших порядков по  $\lambda$  не обязательно пренебрежимо малы. Поэтому сейчас нужно развить технику суммирования этих слагаемых.

Такое суммирование обеспечивает уравнение Каллана–Симанчика. Из (13.24) или (13.25) уравнение Каллана–Симанчика для эффективного потенциала в безмассовом пределе четырехмерной теории  $\phi^4$  имеет вид

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma \phi_{\text{cl}} \frac{\partial}{\partial \phi_{\text{cl}}} \right] V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}, M, \lambda) = 0. \quad (13.57)$$

Как и раньше, можно найти его решение для  $V_{\text{eff}}$ , комбинируя это уравнение с результатами размерного анализа. При  $d = 4$

$$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}, M, \lambda) = \phi_{\text{cl}}^4 v(\phi_{\text{cl}}/M, \lambda). \quad (13.58)$$

Тогда  $v$  удовлетворяет уравнению:

$$\left[ \phi_{\text{cl}} \frac{\partial}{\partial \phi_{\text{cl}}} - \frac{\beta}{1+\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{4\gamma}{1+\gamma} \right] v = 0. \quad (13.59)$$

Уравнение для  $v$  можно решить нашими стандартными методами и получить:

$$v(\phi/M, \lambda) = v_0(\bar{\lambda}) \exp \left[ - \int_M^{\phi_{\text{cl}}} d \ln \phi_{\text{cl}} \frac{4\gamma}{1+\gamma} (\bar{\lambda}(\phi_{\text{cl}})) \right], \quad (13.60)$$

где  $\bar{\lambda}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d \ln(\phi_{\text{cl}}/M)} \bar{\lambda} = \frac{\beta(\bar{\lambda})}{1+\gamma(\bar{\lambda})}. \quad (13.61)$$

Однако, поскольку мы проводим вычисления только до лидирующего порядка в петлевых поправках, и поскольку  $\gamma(\lambda)$  равно нулю в этом порядке, можно не учитывать экспоненту в (13.60). Кроме того, можно игнорировать знаменатель в правой части (13.61), так что это уравнение сводится к более стандартному виду уравнения (12.73) для бегущей константы связи. Таким образом, используя функцию Каллана–Симанчика в лидирующем порядке, получим:

$$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}) = v_0(\bar{\lambda}(\phi_{\text{cl}})) \phi_{\text{cl}}^4. \quad (13.62)$$

Функция  $v_0$  в (13.62) не определяется уравнением Каллана–Симанчика. Чтобы ее найти, сравним (13.62) с результатом (13.55), который был получен из точного однопетлевого вычисления эффективного потенциала. Точное ограничение следующее. После выбора функции  $v_0(\bar{\lambda})$  подставим для  $\bar{\lambda}$  решение (12.82) уравнения ренормализационной группы

$$\bar{\lambda}(\phi_{cl}) = \frac{\lambda}{1 - (\lambda/8\pi^2)(N+8) \ln(\phi_{cl}/M)}. \quad (13.63)$$

Затем разложим результат по степеням  $\lambda$  и опустим слагаемые порядка  $\lambda^3$  и выше. Если  $v_0$  выбрано правильно, результат должен согласовываться с (13.55). Применяя этот критерий, находим следующий результат для эффективного потенциала:

$$V_{\text{eff}}(\phi_{cl}) = \frac{1}{4} \phi_{cl}^4 \left[ \bar{\lambda} + \frac{\bar{\lambda}^2}{(4\pi)^2} \left( (N+8) \left( \ln \bar{\lambda} - \frac{3}{2} \right) + 9 \ln 3 \right) \right], \quad (13.64)$$

где  $\bar{\lambda}$  дается (13.63).

Ошибка в формуле (13.64) возникает из-за определения  $v_0$  в виде степенного ряда по  $\bar{\lambda}$ . Таким образом, эта ошибка порядка  $\bar{\lambda}^3$ . Когда же  $\phi_{cl} \rightarrow 0$ , то  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ , и представление (13.64) становится все более точным. Следовательно, эта формула с успехом суммирует степени опасных логарифмов (13.56). Как функция  $\phi_{cl}$ , функция (13.64) имеет минимум при  $\phi_{cl} = 0$ . Таким образом, якобы нарушающий симметрию минимум выражения (13.55) на самом деле является артефактом неполного разложения в ряд теории возмущений и исчезает при более точном рассмотрении. Это решает вопрос, поставленный в разделе 11.4. Здесь следует отметить, что в более сложных примерах минимум, будто бы нарушающий симметрию эффективного потенциала, который найден в однопетлевом порядке теории возмущений, может выжить и при полном анализе на основе ренормализационной группы. Пример приведен в Заключительном проекте для части II.

Процедура, которую мы использовали в этих рассуждениях, называется *ренормгрупповое улучшение* теории возмущений. Эта техника может быть применена также и для вычисления корреляционных функций и других предсказаний основанных на технике фейнмановских диаграмм теории возмущений. Для этого следует сравнить решение уравнения Каллана–Симанчика с результатом прямого вычисления по теории возмущений в том же порядке по константе взаимодействия и подобрать при этом неопределенную функцию в ренормгрупповом решении так, чтобы воспроизвести этот результат. Таким способом получается более компактная формула, в которой большие логарифмы, такие как в (13.56), пересуммированы в бегущую константу связи. Такое пересуммирование приводит к зависимости корреляционных функций от масштаба массы, характеризующего теорию с маргинальным или перенормированным возмущением.

В случае теории  $\phi^4$  бегущая константа связи стремится к нулю при малых импульсах и становится большой при больших. Поскольку слагаемое с ошибкой в улучшенной теории возмущений является степенью  $\bar{\lambda}$ , то улучшенная теория возмущений становится все более точной при малых импульсах, и выходит из-под контроля при больших. Это согласуется с нашей физической интуицией. Мы должны ожидать, что теория возмущений применима только тогда, когда бегущая константа связи остается малой.

В асимптотически свободной теории, где бегущая константа связи становится малой при больших импульсах, можно найти точные выражения для корреляционных



функций при больших импульсах, используя ренормгрупповое улучшение теории возмущений. В гл. 17 и 18 мы используем эту идею в качестве основного инструмента при анализе поведения сильных взаимодействий на малых расстояниях.

### 13.3. Нелинейная сигма-модель

В завершение нашего изучения скалярной теории поля обсудим нелинейную теорию скалярных полей, структура которой совершенно отличается от теории  $\phi^4$ . Эта теория, называемая *нелинейной сигма-моделью*, первоначально была предложена, как альтернативное описание спонтанного нарушения симметрии. Она интересна нам по трем причинам. Во-первых, она дает простой явный пример асимптотически свободной теории. Во-вторых, она дает второе размерное разложение, с помощью которого можно изучать неподвижную точку Вильсона–Фишера. При этом мы сможем увидеть, во что переходит неподвижная точка Вильсона–Фишера в пространстве лагранжианов для размерностей меньше 4. Наконец, мы увидим, что нелинейная сигма-модель является точно решаемой в пределе, который отличен от стандартного предела слабой константы связи. Это решение позволит глубже понять зависимость нарушения симметрии от размерности пространства-времени.

#### $d = 2$ нелинейная сигма-модель

Начнем с двух измерений. При  $d = 2$  скалярное поле безразмерно, поэтому любая теория скалярных полей  $\phi^i$  с лагранжианом вида

$$\mathcal{L} = f_{ij}(\{\phi^i\})\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j \quad (13.65)$$

имеет безразмерные константы связи и поэтому перенормируема. Поскольку любая функция  $f(\{\phi^i\})$  приводит к перенормируемой теории, то этот класс скалярных теорий поля содержит бесконечное число маргинальных параметров. Чтобы как-то ограничить возможные параметры, следует потребовать выполнения в теории некоторых симметрий.

Простейший выбор — это предположить, что скалярные поля  $\phi^i$  образуют  $N$ -компонентное векторное поле  $n^i(x)$ , ограниченное условием

$$\sum_{i=1}^N |n^i(x)|^2 = 1. \quad (13.66)$$

Если мы потребуем, чтобы теория поля обладала  $O(N)$  симметрией, то тогда функция  $f$  в (13.65) будет зависеть только от инвариантной длины вектора  $\vec{n}(x)$ , который ограничен условием (13.66). Таким образом, наиболее общий допустимый выбор для  $f$  — это константа. Другими словами, единственно возможный вид взаимодействия  $g(\{n^i\})$ , не содержащего производных, и который можно добавить к (13.65) — это константа, и она не будет влиять на функции Грина поля  $\vec{n}$ . С учетом этих ограничений наиболее общий лагранжиан с  $O(N)$  симметрией, который можно построить из  $\vec{n}(x)$  с двумя производными, имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} |\partial_\mu \vec{n}|^2. \quad (13.67)$$

Такая теория имеет прямую физическую интерпретацию. Это феноменологическое описание системы с  $O(N)$  симметрией, спонтанно нарушенной вакуумным средним

поля, которое преобразуется относительно группы  $O(N)$  как вектор. Рассмотрим, например, случай  $N$ -компонентной теории  $\phi^4$  в ее спонтанно нарушенной фазе. Поле  $\phi^i$  приобретает вакуумное среднее, которое можно записать через величину и направления, т. е. параметризуемое единичным вектором

$$\langle \phi^i \rangle = \phi_0 n^i(x). \quad (13.68)$$

Флуктуации  $\phi_0$  отвечают массивному полю, которое в гл. 11 называлось  $\sigma$ . Флуктуации направления единичного вектора  $\vec{n}(x)$  соответствуют  $N - 1$  голдстоуновским бозонам. Заметим, что  $\vec{n}$  имеет  $N$  компонент, подчиненных одной связи (13.66), и, следовательно, содержит  $N - 1$  степеней свободы. Иначе говоря, нелинейная сигма-модель — это предел теории  $\phi^4$ , при котором масса поля  $\sigma$  стремится к бесконечности, в то время как  $\phi_0$  остается постоянной.

Независимо от этой предполагаемой связи, проанализируем сначала нелинейную сигма-модель как самостоятельную квантовую теорию поля. Для этого удобно разрешить связь и параметризовать  $\vec{n}$  с помощью  $N - 1$  полей голдстоуновских бозонов  $\pi^k$ :

$$n^i = (\pi^1, \dots, \pi^{N-1}, \sigma), \quad (13.69)$$

где по определению

$$\sigma = (1 - \pi^2)^{1/2}. \quad (13.70)$$

Конфигурация  $\pi^k = 0$  соответствует единственному состоянию спонтанного нарушения симметрии, ориентированному в направлении  $N$ . Из представления (13.69) вытекает, что

$$|\partial_\mu n^i|^2 = |\partial_\mu \vec{\pi}|^2 + \frac{(\vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi})^2}{1 - \pi^2}. \quad (13.71)$$

Тогда лагранжиан (13.67) принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \left[ |\partial_\mu \vec{\pi}|^2 + \frac{(\vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi})^2}{1 - \pi^2} \right]. \quad (13.72)$$

Заметим, что в лагранжиане отсутствует массовое слагаемое для поля  $\vec{\pi}$ , как и требует теорема Голдстоуна.

Теория возмущений для поля  $\pi^k$  может быть получена непосредственно из разложения лагранжиана по степеням  $\pi^k$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} |\partial_\mu \vec{\pi}|^2 + \frac{1}{2g^2} (\vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi})^2 + \dots \quad (13.73)$$

Это приводит к правилам Фейнмана, которые показаны на рис. 13.1, а также к дополнительным вершинам с четным числом полей  $\pi^k$ . Поскольку лагранжиан (13.67) является наиболее общим  $O(N)$ -симметричным лагранжианом с безразмерными коэффициентами, который можно построить из этих полей, то теорию можно сделать конечной путем перенормировки константы связи  $g$  и  $O(N)$ -симметричного изменения масштаба полей  $\pi^k$  и  $\sigma$ . В перенормированной теории возмущений для каждой возможной  $2n$ - $\pi$  вершины имеются расходимости и контрчлены. Однако все эти контрчлены связаны основным требованием, что голый лагранжиан обладает  $O(N)$ -симметрией.

$$\begin{aligned}
 i \xrightarrow{p} j &= \frac{ig^2}{p^2} \delta^{ij} \\
 \begin{array}{c} k \\ \swarrow p_3 \\ \bullet \\ \nearrow p_4 \\ \ell \\ \downarrow p_2 \\ i \\ \swarrow p_1 \\ \bullet \\ \nearrow p_2 \\ j \end{array} &= -\frac{i}{g^2} \left[ (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) \delta^{ij} \delta^{k\ell} + \right. \\
 &\quad \left. + (p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4) \delta^{ik} \delta^{j\ell} + \right. \\
 &\quad \left. + (p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3) \delta^{i\ell} \delta^{jk} \right]
 \end{aligned}$$

Рис. 13.1. Правила Фейнмана для нелинейной сигма-модели.

Теперь вычислим функции Каллана–Симанчика для этой теории. Поскольку теория перенормируема, ее функции Грина подчиняются уравнению Каллана–Симанчика с некоторыми функциями  $\beta, \gamma$ . В явном виде:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma(g) \right] G^{(n)} = 0, \tag{13.74}$$

где  $G^{(n)}$  — функция Грина  $n$  полей  $\pi^k$  или  $\sigma$ . Чтобы узнать функции  $\beta$  и  $\gamma$  в лидирующем порядке теории возмущений, вычислим две простые функции Грина в однопетлевом порядке и посмотрим, какого вида функции необходимы для выполнения уравнения Каллана–Симанчика.

Первая функция Грина, которую мы рассмотрим, такова:

$$G^{(1)} = \langle \sigma(x) \rangle. \tag{13.75}$$

Разлагая определение (13.70), получим:

$$\langle \sigma(0) \rangle = 1 - \frac{1}{2} \langle \pi^2(0) \rangle + \dots = 1 + \text{[loop diagram]}. \tag{13.76}$$

Чтобы вычислить это выражение, используем пропагатор, приведенный на рис. 13.1:

$$\langle \pi^k(0) \pi^\ell(0) \rangle = \text{[loop diagram]} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{ig^2}{k^2 - \mu^2} \delta^{k\ell}. \tag{13.77}$$

Мы здесь добавили малую массу  $\mu$  для инфракрасного обрезания. Тогда

$$\langle \pi^k(0) \pi^\ell(0) \rangle = \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(\mu^2)^{1-d/2}} \delta^{k\ell}. \tag{13.78}$$

Подставляя этот результат в выражение для  $\langle \sigma \rangle$  и делая затем вычитание на масштабе импульсов  $M$ , находим:

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma \rangle &= 1 - \frac{1}{2} (N-1) \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1-d/2) \left( \frac{1}{(\mu^2)^{1-d/2}} - \frac{1}{(M^2)^{1-d/2}} \right) + \mathcal{O}(g^4) \xrightarrow{d \rightarrow 2} \\
 &\xrightarrow{d \rightarrow 2} 1 - \frac{g^2 (N-1)}{8\pi} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(g^4). \tag{13.79}
 \end{aligned}$$

Это выражение удовлетворяет уравнению Каллана–Симанчика до порядка  $g^2$ , только если

$$\gamma(g) = \frac{g^2(N-1)}{4\pi} + \mathcal{O}(g^4). \quad (13.80)$$

Теперь рассмотрим двухточечную функцию  $\pi^k$ :

$$\begin{aligned} \langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p) \rangle &= \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \dots = \\ &= \frac{ig^2}{p^2} \delta^{k\ell} + \frac{ig^2}{p^2} (-i\Pi^{k\ell}) \frac{ig^2}{p^2} + \dots \end{aligned} \quad (13.81)$$

При вычислении  $\Pi^{k\ell}$  по правилам Фейнмана на рис. 13.1 мы снова встречаемся с интегралом (13.77), а также с интегралом

$$\langle \partial_\mu \pi^k(0) \partial^\mu \pi^\ell(0) \rangle = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{ig^2 k^2}{k^2 - \mu^2} \delta^{k\ell} = \frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\frac{d}{2} \Gamma(-\frac{d}{2})}{(\mu^2)^{-d/2}} \delta^{k\ell}. \quad (13.82)$$

В этом выражении нет полюса при  $d = 0$ , а для  $d > 0$  оно пропорционально положительной степени  $\mu^2$ , следовательно, можно положить это спаривание равным нулю. Тогда

$$\Pi^{k\ell}(p) = -\delta^{k\ell} p^2 \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(\mu^2)^{1-d/2}}. \quad (13.83)$$

Производя вычитание, как и ранее, в точке  $M$  и переходя к пределу  $d \rightarrow 2$ , получим:

$$\begin{aligned} \langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p) \rangle &= \frac{ig^2}{p^2} \delta^{k\ell} + \frac{ig^2}{p^2} \left( +ip^2 \frac{1}{4\pi} \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \frac{ig^2}{p^2} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2} \delta^{k\ell} \left( g^2 - \frac{g^4}{4\pi} \ln \frac{M^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(g^6) \right). \end{aligned} \quad (13.84)$$

Применение к этому результату уравнения Каллана–Симанчика дает:

$$\begin{aligned} \left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g) \right] \langle \pi^k(p)\pi^\ell(-p) \rangle &= 0, \\ &= \frac{i\delta^{k\ell}}{p^2} \left[ -\frac{g^4}{2\pi} + \beta(g) \cdot 2g + 2g^2 \gamma(g) \right]. \end{aligned} \quad (13.85)$$

Подставляя результат (13.80) для  $\gamma(g)$ , находим:

$$\beta(g) = -(N-2) \frac{g^3}{4\pi} + \mathcal{O}(g^5). \quad (13.86)$$

При  $N=2$  бета-функция обращается в нуль. Это не случайный факт, а скорее нетривиальная проверка наших вычислений. При  $N=2$  можно сделать замену переменных  $\pi^1 = \sin \theta$ . Тогда  $\sigma = \cos \theta$ , и лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \theta)^2. \quad (13.87)$$

Это свободная теория поля  $\theta(x)$ , так что она может и не иметь потока ренормализационной группы.

При  $N > 2$   $\beta$ -функция отрицательна и теория асимптотически свободна. Бегущая константа связи  $\bar{g}$  становится малой на малых расстояниях и растет на больших расстояниях.

В квантовой электродинамике мы нашли привлекательное физическое объяснение знака константы связи. Как обсуждалось в разделе 7.5, процесс рождения виртуальных пар делает вакуум диэлектрической средой, экранирующей электрический заряд. Поэтому следует ожидать, что эффективное кулоновское взаимодействие уменьшается на больших расстояниях и увеличивается на малых расстояниях. Легко вообразить, что аналогичное явление экранировки должно возникать в любой квантовой теории поля. Поэтому удивительно, что в этой теории с помощью явного вычисления мы нашли, что эволюция константы связи имеет противоположный знак. Каково физическое объяснение этому?

На самом деле, ясное физическое обоснование знака эволюции константы связи было дано Поляковым\* в работе, где дано доказательство асимптотической свободы нелинейной сигма-модели. Поскольку мы вывели выражение для  $\beta$ -функции, пользуясь автоматически приводящим к ответу методом Каллана–Симанчика, изложим теперь более физичный вывод методом Полякова.

Поляков анализировал нелинейную сигма-модель, используя вильсоновскую технику импульсных слоев, которую мы обсуждали в разделе 12.1. Рассмотрим, таким образом, нелинейную сигма-модель, определенную с помощью обрезания по импульсу вместо размерной регуляризации. Как и в разделе 12.1, проводим рассмотрение в евклидовом пространстве с начальным обрезанием  $\Lambda$ .

Исходными переменными интегрирования являются фурье-компоненты поля единичного вектора  $n^i(x)$ . Мы хотим проинтегрировать в функциональном интеграле по тем фурье-компонентам, у которых импульсы  $k$  находятся в области  $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$ . Если совершить фурье-преобразование оставшихся компонент обратно в координатное пространство, то они будут описывать сглаженное среднее от первоначального единичного векторного поля. Это усредненное поле можно с помощью изменения масштаба привести в каждой точке к новому единичному векторному полю. Обозначим это усредненное поле с измененным масштабом как  $\tilde{n}^i$ . Тогда можно записать связь между  $n^i$  и  $\tilde{n}^i$  в виде:

$$n^i(x) = \tilde{n}^i(x)(1 - \phi^2)^{1/2} + \sum_{a=1}^{N-1} \phi_a(x)e_a^i(x). \quad (13.88)$$

В этом уравнении векторы  $\vec{e}_a(x)$  образуют базис единичных векторов, ортогональных к  $\tilde{n}(x)$ . В картине Полякова  $\tilde{n}(x)$  и  $\vec{e}_a(x)$  медленно изменяются. С другой стороны, коэффициенты  $\phi_a(x)$  содержат только компоненты Фурье из области  $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$ . Это те переменные, по которым мы интегрируем, чтобы получить преобразование ренормализационной группы.

Чтобы взять интеграл по  $\phi_a$ , сначала запишем

$$\partial_\mu n^i = \partial_\mu \tilde{n}^i (1 - \phi^2)^{1/2} - \tilde{n}^i \left( \frac{\phi \cdot \partial_\mu \phi}{(1 - \phi^2)^{1/2}} \right) + \partial_\mu \phi_a e_a^i + \phi_a \partial_\mu e_a^i. \quad (13.89)$$

По определению векторов  $\tilde{n}$ ,  $\vec{e}_a$  они удовлетворяют соотношениям:

$$|\tilde{n}|^2 = 1; \quad \tilde{n} \cdot \vec{e}_a = 0. \quad (13.90)$$

\* A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **59B**, 79 (1975).

Беря производную от этих тождеств, получим:

$$\tilde{n} \cdot \partial_\mu \tilde{n} = 0; \quad \tilde{n} \cdot \partial_\mu \vec{e}_a + \partial_\mu \tilde{n} \cdot \vec{e}_a = 0. \quad (13.91)$$

Используя тождества (13.90) и (13.91), можно вычислить лагранжиан нелинейной сигма-модели с точностью до слагаемых, квадратичных по  $\phi_a$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} |\partial_\mu n^i|^2 = \frac{1}{2g^2} [ & |\partial_\mu \tilde{n}^i|^2 (1 - \phi^2) + (\partial_\mu \phi_a)^2 + \\ & + 2(\phi_a \partial^\mu \phi_b)(\vec{e}_a \cdot \partial_\mu \vec{e}_b) + \partial^\mu \phi_a \partial_\mu \tilde{n} \cdot \vec{e}_a + \phi_a \phi_b \partial^\mu \vec{e}_a \cdot \partial_\mu \vec{e}_b + \dots ]. \end{aligned} \quad (13.92)$$

Будем рассматривать второе слагаемое из (13.92) как лагранжиан нулевого порядка для  $\phi_a$ . Таким образом,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \phi_a)^2, \quad (13.93)$$

что дает пропагатор

$$\langle \phi_a(p) \phi_b(-p) \rangle = \frac{g^2}{p^2} \delta_{ab}, \quad (13.94)$$

ограниченный областью импульсов  $b\Lambda \leq |p| < \Lambda$ . Этот пропагатор можно использовать для интегрирования по  $\phi_a$  оставшихся слагаемых в лагранжиане. Заимствуя интегралы из вывода соотношения (13.84), можно получить:

$$\langle \phi_a(0) \partial_\mu \phi_b(0) \rangle = \langle \partial^\mu \phi_a(0) \partial_\mu \phi_b(0) \rangle = 0 \quad (13.95)$$

и

$$\langle \phi_a(0) \phi_b(0) \rangle = \delta_{ab} \frac{g^2}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{(b\Lambda)^2}. \quad (13.96)$$

Тогда, после интегрирования по  $\phi$ , новый лагранжиан приближенно записывается в виде:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2g^2} [ |\partial_\mu \tilde{n}|^2 (1 - \langle \phi^2 \rangle) + \langle \phi_a \phi_b \rangle \partial_\mu \vec{e}_a \cdot \partial^\mu \vec{e}_b + \mathcal{O}(g^4) ], \quad (13.97)$$

где средние значения  $\phi_a$  задаются формулой (13.96).

Для дальнейшего упрощения следует упростить выражение  $(\partial_\mu \vec{e}_a)^2$ , которое появляется во втором слагаемом (13.97). Введем полный базис векторов:

$$(\partial_\mu \vec{e}_a)^2 = (\tilde{n} \cdot \partial_\mu \vec{e}_a)^2 + (\vec{e}_c \cdot \partial_\mu \vec{e}_a)^2. \quad (13.98)$$

Второе слагаемое в правой части является новой структурой, связанной с кручением системы координат для  $e_a$ ; оказывается, что она соответствует несущественному оператору, возникающему в результате процедуры перенормировки. Однако первое слагаемое можно привести к знакомому виду, используя два тождества (13.91):

$$(\tilde{n} \cdot \partial_\mu \vec{e}_a)^2 = (\vec{e}_a \cdot \partial_\mu \tilde{n})^2 = (\partial_\mu \tilde{n})^2. \quad (13.99)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2g^2} [ |\partial_\mu \tilde{n}|^2 \left( 1 - (N-1) \frac{g^2}{4\pi} \ln \frac{1}{b^2} + \frac{g^2}{4\pi} \ln \frac{1}{b^2} \right) + \dots ] = \\ &= \frac{1}{2} \left( g^2 + \frac{g^4}{2\pi} (N-2) \ln \frac{1}{b} + \dots \right)^{-1} |\partial_\mu \tilde{n}|^2. \end{aligned} \quad (13.100)$$

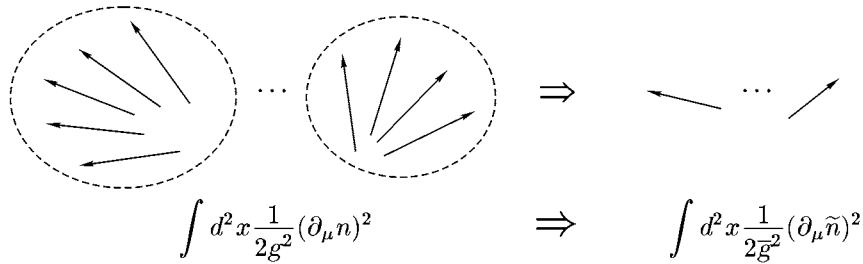


Рис. 13.2. Усреднение направления  $\vec{n}$  и его интерпретация как увеличение бегущей константы связи.

Величина в скобках равна квадрату бегущей константы связи. С той же точностью, что и наши вычисления, эта величина подчиняется уравнению:

$$\frac{d}{d \ln b} \bar{g} = -(N-2) \frac{\bar{g}^3}{4\pi}, \tag{13.101}$$

что согласуется с (13.86).

В этом вычислении знак перенормировки константы связи проистекает из того факта, что эффективная длина единичного вектора  $\vec{n}$  уменьшается при усреднении по коротковолновым флуктуациям. Это уменьшает эффективное действие, связанное с теми конфигурациями, в которых направление  $\vec{n}$  изменяется в результате смещения на  $\Delta x$  (рис. 13.2). Возвращаясь к (13.67), видим, что уменьшение величины  $\mathcal{L}$  для той же конфигурации  $\vec{n}$  можно интерпретировать как *увеличение* эффективной константы связи. Тем самым, на больших расстояниях взаимодействие в нелинейной сигма-модели более сильное, или физическая конфигурация поля  $\vec{n}$  более разупорядочена.

Наше вычисление означает так же, что если любая статистическая система первоначально имела спонтанно нарушенную симметрию и голдстоуновские бозоны, то на больших расстояниях упорядочение исчезает. Это неожиданное заключение. Однако оно находится в согласии с теоремой, доказанной Мермином и Вагнером\* о том, что двумерная система с непрерывной симметрией не может иметь упорядоченное состояние, в котором нарушающее симметрию поле имеет ненулевое вакуумное среднее. Эта теорема применима и к случаю  $N = 2$ , и к случаю  $N > 2$ . Мы обсуждали ее в задаче 11.1.

### Нелинейная сигма-модель при $2 < d < 4$

Теперь обобщим результаты нашего анализа для числа измерений  $d > 2$ . При произвольных  $d$  мы по-прежнему определяем действие нелинейной сигма-модели как

$$\int d^d x \mathcal{L} = \int d^d x \frac{1}{2g^2} (\partial_\mu \vec{n})^2, \tag{13.102}$$

где  $\vec{n}$  все еще остается безразмерным, поскольку он подчиняется ограничению  $|\vec{n}|^2 = 1$ . Таким образом,  $g$  имеет размерность (масса) $^{(2-d)/2}$ . Определим безразмерную константу связи:

$$T = g^2 M^{d-2}, \tag{13.103}$$

\*N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* 17, 1133 (1966).

как это делалось в (12.122). Если рассматривать (13.102) как больцмановский вес статистической суммы, тогда  $T$  — безразмерная переменная, пропорциональная температуре.

По аналогии с (12.131) из (13.103) можно найти  $\beta$ -функцию для  $T$  в  $d$  измерениях:

$$\beta(T) = (d - 2)T + 2g\beta^{(2)}(g), \quad (13.104)$$

где множитель  $2g$  во втором слагаемом возникает из определения  $T \sim g^2$ . Поскольку  $\vec{n}$  является безразмерной величиной, функция  $\gamma$ , выраженная через безразмерную константу связи, не отличается от двумерного результата. Следовательно, при  $d = 2 + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \beta(T) &= +\varepsilon T - (N-2)\frac{T^2}{2\pi}; \\ \gamma(T) &= (N-1)\frac{T}{4\pi}. \end{aligned} \quad (13.105)$$

Заметим, что  $\beta$ -функция для  $T$  имеет нетривиальный нуль, который приближается к  $T = 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Этот нуль расположен при

$$T_* = \frac{2\pi\varepsilon}{N-2}. \quad (13.106)$$

Вид  $\beta$ -функции представлен на рис. 13.3. В отличие от нуля Вильсона–Фишера при  $d = 4 - \varepsilon$ , который обсуждался в разделе 12.5, это ультрафиолетово стабильная неподвижная точка. Потoki в инфракрасную область выходят из этой точки. Поскольку  $T$  пропорциональна температуре соответствующей статистической системы,  $t \rightarrow 0$  соответствует состоянию полного порядка, в то время как  $t \gg 1$  — состоянию полного беспорядка. Эта картина согласуется с интуитивными представлениями при поляковском выводе  $\beta$ -функции. Неподвижная точка  $T_*$  соответствует критической температуре. Таким образом, в соответствии с теоремой Мермина–Вагнера критическая температура стремится к нулю при  $d \rightarrow 2$ .

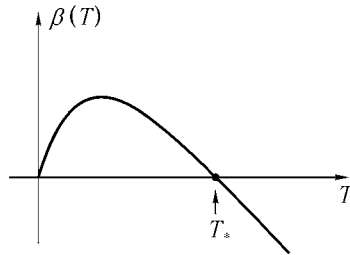


Рис. 13.3. Вид  $\beta$  функции в нелинейной сигма-модели при  $d > 2$ .

Теперь можно вычислить критические показатели нелинейной сигма-модели, используя разложение по  $\varepsilon = d - 2$ . Степень  $\eta$  непосредственно дается выражением

$$\eta = 2\gamma(T_*) = \frac{\varepsilon}{N-2}. \quad (13.107)$$

Для нахождения второй степени  $\nu$  следует установить соответствующее возмущение, отвечающее потоку ренормализационной группы, вытекающему из неподвижной точки при  $T \neq T_*$ . Это просто отклонение  $T$  от  $T_*$ :

$$\rho_T = T - T_*. \quad (13.108)$$



Из уравнения ренормализационной группы для бегущей константы связи находим, что отклонение  $\rho_T$  подчиняется уравнению:

$$\frac{d}{d \ln p} \bar{\rho}_T = \left[ \frac{d}{dT} \beta(T) \Big|_{T=T_*} \right] \cdot \bar{\rho}_T. \quad (13.109)$$

Величина в скобках отрицательна. Как и в уравнениях (12.134) и (12.137), можно идентифицировать эту величину с  $(-1/\nu)$ . При значении импульса  $p \ll M$

$$\bar{\rho}_T(p) = \rho_T \left( \frac{p}{M} \right)^{-1/\nu}; \quad (13.110)$$

и, таким образом,  $\bar{\rho}(p)$  становится порядка 1 при значении импульса, обратном величине  $\xi \sim (T - T_*)^{-\nu}$ , что и требовалось. Используя точный вид  $\beta$ -функции из (13.105), находим:

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (13.111)$$

независимо от  $N$  в данном порядке по  $\varepsilon$ . (Конечно, эти результаты применимы только при  $N \geq 3$ .) Термодинамические критические показатели можно найти из (13.107) и (13.111), используя модельно-независимые соотношения, полученные в разделе 13.1. Если экстраполировать найденные здесь выражения для  $\nu$  и  $\eta$  к  $d = 3$  (т. е. к  $\varepsilon = 1$ ), согласие с экспериментом не будет столь замечательным, но эти результаты указывают, по крайней мере, что найдется неподвижная точка, которая может быть продолжением неподвижной точки Вильсона – Фишера в окрестность двух измерений.

### Точное решение для больших $N$

Можно достичь более глубокого понимания природы этой неподвижной точки, используя другой подход для изучения сигма-модели. Поскольку нелинейная сигма-модель зависит от параметра  $N$  — числа компонент единичного вектора, имеет смысл спросить, как ведет себя эта модель при  $N \rightarrow \infty$ . Сейчас мы покажем, что если перейти к такому пределу, оставляя  $g^2 N$  фиксированным, можно получить точное решение модели с нетривиальным поведением.

Метод получения этого решения наиболее прозрачен если действовать в евклидовом пространстве, рассматривая лагранжиан как больцмановский вес спиновой системы. Поэтому нужно вычислить функциональный интеграл

$$Z = \int \mathcal{D}n \exp \left[ - \int d^d x \frac{1}{2g_0^2} (\partial_\mu n)^2 \right] \cdot \prod_x \delta(n^2(x) - 1). \quad (13.112)$$

Здесь  $g_0$  — значение голой константы связи, а произведение дельта-функций, по одной в каждой точке, накладывает связь. Введем интегральное представление для дельта-функций, тогда это потребует второго функционального интегрирования по лагранжевому множителю  $\alpha(x)$ :

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}n \exp \left[ - \int d^d x \frac{1}{2g_0^2} (\partial_\mu n)^2 - \frac{i}{2g_0^2} \int d^d x \alpha(n^2 - 1) \right]. \quad (13.113)$$

Теперь переменная  $n$  не ограничена никакими связями и возникает в экспоненте только

квадратично. Тем самым, можно проинтегрировать по  $n$ , получив:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\alpha (\det[-\partial^2 + i\alpha(x)])^{-N/2} \exp\left[\frac{i}{2g_0^2} \int d^d x \alpha\right] = \\ &= \int \mathcal{D}\alpha \exp\left[-\frac{N}{2} \text{tr} \ln(-\partial^2 + i\alpha) + \frac{i}{2g_0^2} \int d^d x \alpha\right]. \end{aligned} \quad (13.114)$$

Поскольку мы переходим к пределу  $N \rightarrow \infty$  при фиксированном  $g_0^2 N$ , оба слагаемых в экспоненте имеют порядок  $N$ . Следовательно, имеет смысл вычислить интеграл методом перевала. Для этого необходимо найти функцию  $\alpha(x)$ , которая минимизирует экспоненту. Чтобы определить эту функцию, вычислим функциональную производную экспоненты по  $\alpha(x)$ . Это дает вариационное уравнение:

$$\frac{N}{2} \langle x | \frac{1}{-\partial^2 + i\alpha} | x \rangle = \frac{1}{2g_0^2}. \quad (13.115)$$

Левая часть этого уравнения должна быть вещественной постоянной; следовательно нужно искать решение, в котором  $\alpha(x)$  является чисто мнимой постоянной. Запишем:

$$\alpha(x) = -im^2; \quad (13.116)$$

тогда  $m^2$  подчиняется соотношению:

$$N \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{1}{g_0^2}. \quad (13.117)$$

Сначала изучим это уравнение при  $d = 2$ . Если интеграл в (13.117) определить с обрезанием, то его можно вычислить и получить уравнение для  $m$ :

$$\frac{N}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{m} = \frac{1}{g_0^2}. \quad (13.118)$$

Это уравнение можно сделать конечным с помощью перенормировки

$$\frac{1}{g_0^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{N}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{M}, \quad (13.119)$$

которая вводит произвольный масштаб перенормировки  $M$ . Теперь можно найти  $m$ :

$$m = M \exp\left[-\frac{2\pi}{g^2 N}\right]. \quad (13.120)$$

Это ненулевое  $O(N)$ -инвариантное массовое слагаемое для  $N$  не ограниченных связями компонент вектора  $\vec{n}$ . В этом решении  $\langle \vec{n} \rangle = 0$ , и симметрия не нарушена при любых значениях  $g^2$  или  $T$ .

Решение теории зависит от произвольного масштаба перенормировки  $M$ ; эта зависимость просто отражает произвол в определении перенормированной константы связи. Утверждение, что  $m$  однозначно определяется из заданной теории с фиксированной голой константой связи и обрезанием эквивалентно утверждению, что  $m$  подчиняется уравнению Каллана–Симанчика без общего изменения масштаба:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g^2) \frac{\partial}{\partial g}\right] m(g^2, M) = 0. \quad (13.121)$$

Переходя в (13.86) к пределу больших  $N$ , находим:

$$\beta(g) = -\frac{g^3 N}{4\pi}, \quad (13.122)$$

и легко проверить, что (13.121) выполняется. Обратное, из справедливости (13.121) с учетом (13.122) следует, что выражение (13.122) есть *точное* представление для  $\beta$ -функции во всех порядках по  $g^2 N$  в пределе больших  $N$ . Поправки к (13.122) имеют порядок  $(1/N)$  или, эквивалентно, они имеют порядок  $g^2$  без компенсационного множителя  $N$ . Выражение (13.122) согласуется с нашими недавними вычислениями (13.86) в этом порядке.

Повторим теперь это упражнение при  $d > 2$ . В этом случае интеграл в (13.117) расходится как степень величины обрезания. Даже когда зависимость от  $\Lambda$  удалена перенормировкой, это изменение в поведении приводит к изменению зависимости интеграла от  $m$ , что имеет важные физические приложения.

Нетрудно вычислить интеграл в (13.117) в виде разложения по  $(\Lambda/m)$ . Получаем:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2} = \begin{cases} C_1 \Lambda^{d-2} - C_2 m^{d-2} + \dots & \text{для } d < 4, \\ C_1 \Lambda^{d-2} - \tilde{C}_2 m^2 \Lambda^{d-4} + \dots & \text{для } d > 4, \end{cases} \quad (13.123)$$

где  $C_1, C_2, \tilde{C}_2$  — некоторые функции  $d$ . В частности,

$$C_1 = \left[ 2^{d-1} \pi^{(d+1)/2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) (d-2) \right]^{-1}. \quad (13.124)$$

При  $d > 4$  первая производная интеграла по  $m^2$  является гладкой при  $m^2 \rightarrow 0$ . В этом и состоит причина изменения поведения.

В случае  $d = 2$  левая часть (13.117) при изменении  $m$  покрывает всю область от 0 до  $\infty$ , т.о. всегда можно найти решение для любой величины  $g_0^2$ . При  $d > 2$  это уже неверно. Уравнение (13.117) можно решить для  $m$ , только если  $N g_0^2$  больше, чем критическое значение

$$N g_C^2 = (C_1 \Lambda^{d-2})^{-1}. \quad (13.125)$$

Точно на границе  $m = 0$ . Для голых констант связи, меньших, чем (13.125), можно уменьшить величину эффективного действия, придавая ненулевое вакуумное среднее одной компоненте вектора  $\vec{n}$  и оставляя остальные компонентеты безмассовыми. Таким образом, (13.125) является критерием фазового перехода второго рода в этой модели. Формула (13.124) означает, что критическая величина  $g_0^2$ , которая пропорциональна критической температуре, стремится к нулю при  $d \rightarrow 2$  в согласии с ренормгрупповым анализом.

В симметричной фазе нелинейной сигма-модели масса  $m$  задает экспоненциальное спадание корреляций, так что  $\xi = m^{-1}$ . Поэтому можно определить показатель  $\nu$ , находя зависимость  $m$  от отклонения  $g_0^2$  от критической температуры. Запишем

$$t = \frac{g_0^2 - g_C^2}{g_C^2}. \quad (13.126)$$

Тогда при  $2 < d < 4$  можно использовать (13.123), чтобы решить (13.117) относительно  $m$  при малых значениях  $t$ . Это дает

$$\frac{1}{N g_C^4} \cdot t = C_2 m^{d-2}, \quad (13.127)$$

откуда  $m \sim t^\nu$  и

$$\nu = \frac{1}{d-2}, \quad 2 < d < 4. \quad (13.128)$$

Аналогично,

$$\nu = \frac{1}{2}, \quad d \geq 4. \quad (13.129)$$

Скачок в зависимости  $\nu$  от  $d$  в точности такой, какой мы предсказывали из ренорм-группового анализа. При  $d > 4$  величина  $\nu$  превышает наивные предсказания размерного анализа. Величина  $\nu$ , даваемая (13.128), точно согласуется с (13.111), при разложении по  $\varepsilon = d - 2$ , и с пределом  $N \rightarrow \infty$  выражения (12.142), при разложении по  $\varepsilon = 4 - d$ . Видим, что все результаты для критических показателей вполне удовлетворительно согласованы друг с другом.

Объединяя все результаты, приходим к радующей глаз картине поведения скалярной теории поля как функции размерности пространства-времени. При числе измерений больше четырех любое взаимодействие скалярного поля является несущественным, и ожидаемое поведение тривиально. В четырех измерениях константа связи на больших масштабах стремится к нулю всего лишь логарифмически, приводя к перенормируемой теории, характеристики которой предсказывались в разделе 13.2. При числе измерений меньше четырех взаимодействие в теории существенно определяется неподвижной точкой Вильсона–Фишера. Взаимодействие в этой точке мало вблизи четырех измерений, но растет при уменьшении размерности. Наконец (при  $N > 2$ ), когда  $d \rightarrow 2$ , теория в неподвижной точке приближается к пределу слабой связи совершенно другого лагранжиана нелинейной сигма-модели с теми же симметриями.

Эта эволюция поведения модели как функции  $d$  иллюстрирует основную идею предыдущих двух глав. Качественное поведение квантовой теории поля определяется не исходным лагранжианом, а скорее природой потока ренормализационной группы и ее неподвижными точками. Это, в свою очередь, зависит только от основных симметрий, которыми обладает семейство лагранжианов, перетекающих один в другой. Такое заключение указывает на глубинную роль принципов симметрии при определении фундаментальных физических законов.

## Задачи

**13.1. Показатель поправки к скейлингу.** Для критических явлений в  $4 - \varepsilon$  измерениях несущественные вклады, убывающие наиболее медленно, связаны с отклонением константы связи  $\lambda$  от ее значения в неподвижной точке. Это дает наиболее существенную неуниверсальную поправку к полученному в разделе 13.1 закону скейлинга. Изучая решение уравнения Каллана–Симанчика, покажите, что если голое значение  $\lambda$  слегка отличается от  $\lambda_*$ , то поправка к свободной энергии Гиббса равна

$$G(M, t) \rightarrow G(M, t) \cdot (1 + (\lambda - \lambda_*) t^{\omega\nu} \widehat{k}(tM^{-1/\beta})).$$

Эта формула определяет новый критический показатель  $\omega$ , называемый *индексом поправки к скейлингу*. Покажите, что

$$\omega = \left. \frac{d}{d\lambda} \beta \right|_{\lambda_*} = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

**13.2. Показатель  $\eta$ .** Объединяя результат задачи 10.3 с подходящим способом перенормировки, покажите, что лидирующее слагаемое в  $\gamma(\lambda)$  в теории  $\phi^4$  есть

$$\gamma = \frac{\lambda^2}{12(4\pi)^4}.$$

Обобщите этот результат для  $O(N)$ -симметричной теории  $\phi^4$ , чтобы получить выражение (13.47). Вычислите вклад лидирующего порядка ( $\epsilon^2$ ) в  $\eta$ .

**13.3.  $CP^N$  модель.** Нелинейная сигма-модель, обсуждавшаяся в тексте, может рассматриваться как квантовая теория полей, которые являются координатами на единичной сфере. Чуть более сложное пространство с более высокой симметрией — это комплексное проективное пространство  $CP^N$ . Его можно определить как пространство  $(N+1)$ -мерных комплексных векторов  $(z_1, \dots, z_{N+1})$ , подчиненных условию

$$\sum_j |z_j|^2 = 1,$$

с отождествлением точек, связанных общим фазовым поворотом, т. е.

$$(e^{i\alpha} z_1, \dots, e^{i\alpha} z_{N+1}) \text{ отождествляются с } (z_1, \dots, z_{N+1}).$$

В этой задаче мы изучаем двумерную квантовую теорию, в которой поля являются координатами в этом пространстве.

- (а) Один способ представить теорию координат на  $CP^N$  состоит в написании лагранжиана, зависящего от полей  $z_j(x)$ , которые подчинены связи, также обладающей локальной симметрией:

$$z_j(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} z_j(x),$$

независимо в каждой точке  $x$ . Покажите, что следующий лагранжиан обладает этой симметрией:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} [|\partial_\mu z_j|^2 + |z_j^* \partial_\mu z_j|^2].$$

Чтобы доказать инвариантность, нужно использовать связь для  $z_j$ , и ее следствие:

$$z_j^* \partial_\mu z_j = -(\partial_\mu z_j^*) z_j.$$

Покажите, что нелинейная сигма-модель при  $N = 3$  может быть преобразована в  $CP^N$  модель при  $N = 1$  с помощью подстановки

$$n^i = z^* \sigma^i z,$$

где  $\sigma^i$  — матрицы Паули.

- (б) Чтобы написать лагранжиан в более простой форме, введите скалярный лагранжев множитель  $\lambda$ , который обеспечивает связь, а также векторный лагранжев множитель  $A_\mu$ , чтобы учесть локальную симметрию. Покажите, что лагранжиан  $CP^N$  модели получается из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} [ |D_\mu z_j|^2 - \lambda(|z_j|^2 - 1) ],$$

где  $D_\mu = (\partial_\mu + iA_\mu)$ , после функционального интегрирования по полям  $\lambda$  и  $A_\mu$ .

- (c) Можно решить  $CP^N$  модель в пределе  $N \rightarrow \infty$ , интегрируя по полям  $z_j$ . Покажите, что этот интеграл приводит к выражению

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda \exp \left[ -N \operatorname{tr} \ln(-D^2 - \lambda) + \frac{i}{g^2} \int d^2 x \lambda \right],$$

где оставлены только старшие слагаемые при  $N \rightarrow \infty$  и фиксированном  $g^2 N$ . Пользуясь методами, аналогичными использованным для нелинейной сигма-модели, проверьте условия минимума экспоненты относительно  $\lambda$  и  $A_\mu$ . Покажите, что эти условия имеют решение при  $A_\mu = 0$  и  $\lambda = m^2 > 0$ . Покажите, что если  $g^2$  перенормируется на масштабе  $M$ , то  $m$  можно переписать в виде

$$m = M \exp \left[ -\frac{2\pi}{g^2 N} \right].$$

- (d) Разложите экспоненту в окрестности  $A_\mu = 0$ . Покажите, что первое нетривиальное слагаемое в этом разложении пропорционально поляризации вакуума массивных скалярных полей. Вычислите это выражение, используя размерную регуляризацию, и покажите, что получается стандартное слагаемое кинетической энергии для  $A_\mu$ . Таким образом, имевшаяся вначале странная нелинейная теория поля преобразовалась в конце в теорию  $(N + 1)$  массивных скалярных полей, взаимодействующих с безмассовым фотоном.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ

# ПОТЕНЦИАЛ КОУЛМЕНА–ВАЙНБЕРГА

В главе 11 и разделе 13.2 мы обсудили эффективный потенциал для  $O(N)$ -симметричной теории  $\phi^4$  в четырех измерениях. Мы вычислили по теории возмущений поправки к эффективному потенциалу и использовали ренормализационную группу, чтобы прояснить поведение потенциала для малых значений массы скалярного поля. Однако после всей этой работы мы обнаружили, что качественная зависимость теории от массового параметра не менялась поправками теории возмущений. Теория, как функция массы, по-прежнему имела фазовый переход второго рода. Петлевые поправки сказывались в этой картине только в виде логарифмических поправок к скейлинговому поведению вблизи фазового перехода.

Однако петлевые поправки не всегда столь мало существенны. Для некоторых систем они могут качественно изменить структуру фазового перехода. Этот заключительный проект рассматривает простейший пример такой системы — *модель Коулмена–Вайнберга*. Анализ этой модели проведен в широком диапазоне тем, затронутых в части II; он представляет пример весьма нетривиального приложения формализма эффективного потенциала и использует уравнение ренормализационной группы. Явление, исследуемое в этом упражнении, возникает во многих контекстах, начиная от фазовых переходов смещения в твердых телах и кончая термодинамикой ранней Вселенной.

Эта задача использует материал из разделов книги, которые помечены звездочкой, в частности, разделы 11.3, 11.4 и 13.2. Части (а) и (е) зависят, однако, только от материала части II, который не помечен звездочкой. Мы рекомендуем часть (е) в качестве прекрасного упражнения по вычислению функций ренормализационной группы.

Модель Коулмена–Мандулы представляет собой квантовую электродинамику скалярного поля в четырех измерениях, рассматриваемую для малых значений массы скалярного поля. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{8}(\phi^\dagger\phi)^2,$$

где  $\phi(x)$  является комплекснозначным скалярным полем и  $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ .

- (а) Предположим, что  $m^2 = -\mu^2 < 0$ , так что симметрия  $\phi(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\phi(x)$  спонтанно нарушена. Напишем выражение для  $\mathcal{L}$ , разложенное вблизи состояния с нарушенной симметрией, вводя переменную

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma(x) + i\pi(x)],$$

где  $\phi_0$ ,  $\sigma(x)$  и  $\pi$  вещественнозначные. Покажите, что поле  $A_\mu$  приобретает массу. Этот механизм генерирования массы для векторных полей называется *механизмом Хиггса*. Мы будем его изучать детально в главе 20.

- (b) Работая в калибровке Ландау ( $\partial^\mu A_\mu = 0$ ), вычислите однопетлевую поправку к эффективному потенциалу  $V(\phi_{cl})$ . Покажите, что она перенормируется контрчленом для  $m^2$  и  $\lambda$ . Перенормируйте с помощью минимального вычитания, вводя масштаб перенормировки  $M$ .
- (c) Возьмите предел  $\mu^2 \rightarrow 0$  в результате, полученном в части (b). Результат должен быть эффективным потенциалом, который масштабно инвариантен с точностью до логарифмов, содержащих  $M$ . Проанализируйте это выражение для очень малых  $\lambda$ , порядка  $(e^2)^2$ . Покажите, что при этой константе связи  $V(\phi_{cl})$  имеет нарушающий симметрию минимум при такой величине  $\phi_{cl}$ , при которой нет большого логарифма, так что прямой анализ по теории возмущений должен быть правильным. Таким образом, теория с  $\mu^2 = 0$  для этого выбора константы связи все еще имеет спонтанно нарушенную симметрию благодаря влиянию квантовых поправок.
- (d) Нарисуйте на обеих сторонах от  $m^2 = 0$  график поведения  $V(\phi_{cl})$  как функцию  $m^2$  для значения константы связи, выбранного в части (c).
- (e) Вычислите  $\beta$  функции Каллана–Симанчика для  $e$  и  $\lambda$ . Вы должны получить

$$\beta_e = \frac{e^3}{48\pi^2}, \quad \beta_\lambda = \frac{1}{24\pi^2} (5\lambda^2 - 18e^2\lambda + 54e^4).$$

Нарисуйте потоки ренормализационной группы в плоскости  $(\lambda, e^2)$ . Покажите, что каждая траектория ренормализационной группы проходит через область констант связи, которая рассмотрена в части (c).

- (f) Применяя результаты части (e) к вычислению части (c), постройте ренормгрупповой улучшенный эффективный потенциал при  $\mu^2 = 0$ . Вычислите  $\langle \phi \rangle$  и массу  $\sigma$  частицы как функцию  $\lambda, e^2, M$ . Вычислите отношение  $m_\sigma/m_A$  к ведущему порядку по  $e^2$  для  $\lambda \ll e^2$ .
- (g) Включите в анализ части (f) эффекты ненулевой  $m^2$ . Покажите, что  $m_\sigma/m_A$  принимает минимальное ненулевое значение, когда  $m^2$  увеличивается от нуля до того, как состояние с нарушенной симметрией полностью исчезнет. Вычислите эту величину как функцию  $e^2$  для  $\lambda \ll e^2$ .
- (h) Лагранжиан этой задачи (в ее евклидовой форме) эквивалентен свободной энергии Ландау для сверхпроводника в  $d$  измерениях, который взаимодействует с электромагнитным полем. Это выражение известно как свободная энергия Гинзбурга–Ландау. Вычислите  $\beta$  функцию для этой системы и нарисуйте потоки ренормализационной группы для  $d = 4 - \varepsilon$ . Опишите качественное поведение, которое вы ожидали для фазового перехода в сверхпроводниках в трех измерениях. (Для реальных сверхпроводников величина  $e^2$  — после ее обезмеривания — очень мала. Эффект, который вы обнаружите, будет важен только при  $|T - T_C|/T_C < 10^{-5}$ .)



**Часть III**

**НЕАБЕЛЕВЫ  
КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ**



## ПРИГЛАШЕНИЕ: ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ АДРОНОВ

Во второй части книги мы формально исследовали структуру квантовых теорий поля. Мы разработали сложные вычислительные алгоритмы (гл. 10), создали формализм для нахождения законов скейлинга и асимптотического поведения теории (гл. 12) и изучили некоторые последствия спонтанного нарушения симметрии (гл. 11). Оказалось, что многое из этого формализма имеет неожиданные приложения к статистической физике. Однако мы еще не исследовали его применения к физике элементарных частиц. Для того чтобы сделать это, следует сначала узнать, какие же конкретные квантовые теории поля описывают взаимодействия элементарных частиц.

С середины 1970-х гг. большинство физиков согласилось с тем, что элементарные частицы, из которых состоит материя, являются фермионами, взаимодействующими главным образом через обмен векторными бозонами. Элементарные фермионы подразделяются на *лептоны* (электроны, их тяжелые двойники  $\mu$  и  $\tau$ , а также нейтральные почти безмассовые нейтрино, соответствующие каждому сорту лептонов) и *кварки*, связанными состояниями которых являются мезоны и барионы — частицы с ядерным взаимодействием (в совокупности их называют адронами). Существует три типа взаимодействий этих фермионов: сильное, слабое и электромагнитное взаимодействие. *Сильное взаимодействие* ответственно за образование ядер и взаимодействия их составляющих, а *слабое взаимодействие* — за процессы радиоактивного бета-распада. *Электромагнитные взаимодействия* описываются квантовой электродинамикой и связаны со всеми заряженными кварками и лептонами. Неясно, достаточно ли этих трех сил для объяснения самых тонких свойств элементарных частиц. Мы обсудим этот вопрос в гл. 20, однако, безусловно, эти силы самые существенные. В настоящее время считается, что эти силы переносятся в результате обмена векторными бозонами. Уравнения, описывающие электромагнитные взаимодействия, были открыты Максвеллом, и их квантово-механическое применение подробно обсуждалось в первой части. Правильные теории слабых и сильных взаимодействий были открыты гораздо позднее.

Изучение в конце 50-х гг. зависимости вероятностей распада и сечений слабых взаимодействий от поляризаций показало, что слабые взаимодействия включают связь векторных токов, построенных из кварковых и лептонных полей\*. Поэтому было естественным предположить, что слабые взаимодействия обусловлены обменом очень тяжелыми векторными бозонами. Действительно, такие бозоны  $W$  и  $Z$  были открыты в 1982 г. в экспериментах в ЦЕРНе. Однако полная теория слабых сил должна содержать не только правильные взаимодействия бозонов и фермионов, но и уравнения движения самих бозонных полей, т. е. аналог уравнений Максвелла для  $W$  и  $Z$ -бозонов. Найти правильный вид этих уравнений прямо не удавалось, поскольку уравнения Максвелла запрещают генерацию масс векторных частиц. Оказалось, что примирение обобщенных уравнений Максвелла с существованием ненулевых масс у  $W$  и  $Z$ -бозонов требует

\* Обзор феноменологии слабых взаимодействий см. в книге: Перкинс (1987), гл. 7, или в любой другой современной книге по физике элементарных частиц.

включения в теорию спонтанного нарушения симметрии. Этот вопрос обсуждается более подробно в гл. 20 и 21, где описывается взаимодействие в теориях векторных полей со спонтанным нарушением симметрии. Такое взаимодействие приводит к новым связям и новым явлениям, помимо изучавшихся нами при рассмотрении спонтанного нарушения симметрии в гл. 11. Полная теория слабых взаимодействий требует также одновременного включения электромагнитного взаимодействия, образуя единую структуру, как впервые предположили Глэшоу, Вайнберг и Салам.

С другой стороны, долгое время считалось сомнительным, что теория с обменом векторными бозонами может правильно описывать сильные взаимодействия. Частично затруднения вызывало то, что кварки не существуют в свободном состоянии. Доказательства их существования и квантовые числа были получены из изучения спектра наблюдаемых сильновзаимодействующих частиц. Кроме того, в теории возникали трудности из-за того, что сильные взаимодействия на самом деле сильны. Разложение в ряд при помощи фейнмановских диаграмм подразумевает, что константа взаимодействия мала; когда же она становится большой, следует учитывать большое количество диаграмм (если ряд вообще сходится) и становится невозможно выделить все вклады элементарных вершин взаимодействия. Ключевая догадка о векторном характере сильных взаимодействий основана на факте (поначалу также казавшимся мистическим), что сильное взаимодействие выключается при достаточно больших переданных импульсах в смысле, который мы сейчас опишем.

### Почти свободные партоны

В разделе 5.1 мы вычислили сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в КЭД. Тогда же мы заметили, что соответствующее сечение аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны можно вычислять аналогично, используя упрощенную модель, в которой кварки рассматриваются как невзаимодействующие фермионы. Этот метод привел к удивительно точной формуле для сечения, описывающей его наиболее важные качественные особенности. Но мы отложили объяснение этой загадки: каким образом модель невзаимодействующих кварков может описывать поведение сил, которые при других условиях являются чрезвычайно *сильными*?

На самом деле, существует довольно много случаев, когда при высоких энергиях сильные взаимодействия имеют неожиданно малое влияние. Исторически это впервые проявилось в протон-протонных столкновениях. При энергиях порядка 10 ГэВ или выше в системе центра инерции при столкновении протонов (или любых других адронов) образуется большое количество пионов. Можно было бы думать, что эти пионы будут заполнять весь допустимый фазовый объем, однако в действительности они в основном рождаются с импульсами, почти параллельными оси соударения. Вероятность образования пиона с большим значением компоненты импульса, перпендикулярной к оси соударения, экспоненциально падает с увеличением этой компоненты, в результате чего рождение пионов с поперечной компонентой, бóльшей нескольких сотен Мэв, сильно подавлено.

Это явление ограниченности поперечного импульса приводит к картине адрона как ансамбля из большого числа слабо связанных частей. С этой точки зрения протон, сталкивающийся с другим протоном, разбивается на облако отдельных осколков. При этом импульсы осколков будут почти параллельны начальному импульсу протона, так что в конце концов эти части преобразуются в адроны, летящие вдоль оси столкновения. По предположению, эти осколки не могут поглощать большой переданный импульс. На математическом языке такая гипотеза может быть сформулирована следующим образом. В соударениях при высоких энергиях импульсы двух сталкивающихся частиц почти светоподобны. Осколки адронов, летящие вдоль оси столкновения, также име-

ют светоподобные импульсы, параллельные начальным. Это конечное состояние может быть образовано за счет обмена импульсом  $q$  между осколками таким образом, что инвариант  $q^2$  всегда будет мал, хотя компоненты  $q$  и могут быть большими. Образование из этих осколков адрона с достаточно большим поперечным импульсом требует большого (пространственноподобного)  $q^2$ , но такой процесс очень редок. Таким образом, было высказано предположение, что адроны представляют собой нечто вроде желе из составляющих их частей, которые не могут поглощать большие  $q^2$ .

Эта картина адронной структуры подверглась критической проверке в конце 1960-х гг. в экспериментах SLAC-MIT по глубоконеупругому рассеянию\*. В этих экспериментах пучок электронов энергией 20 ГэВ рассеивался на водородной мишени, и измерялась интенсивность рассеяния на большие углы, соответствующие большой передаче импульса от электрона к протону мишени. Большая передача импульса происходила в основном за счет электромагнитных, а не сильных взаимодействий, и величина переданного импульса могла быть вычислена, если известен импульс рассеянного электрона. При этом в моделях, в которых адроны составлены из слабо связанных частей, ожидалась очень малая вероятность рассеяния.

Вместо этого, в экспериментах SLAC-MIT наблюдалась большая вероятность жесткого рассеяния электронов на протонах. Полное сечение реакции было сравнимо с тем, которое могло бы ожидаться, если бы протон был бы элементарной частицей, рассеивавшейся в соответствии с простейшими предсказаниями КЭД. Однако только в редких случаях рассеяние происходило так же, как на одном протоне. Большую часть вклада в сечение давала *глубоконеупругая* область фазового пространства, в которой электромагнитные взаимодействия разрушали протон, и образовывалась система из большого количества адронов.

Каким образом можно было примирить наличие электромагнитных процессов жесткого рассеяния с практическим отсутствием жесткого рассеяния в сильных взаимодействиях? Бьеркен и Фейнман выдвинули следующую простую модель, названную *партонной моделью*. Предположим, что протон состоит из нескольких слабосвязанных частей, так называемых *партонов*. Они включают в себя кварки (и антикварки), являющиеся фермионами, несущими электрический заряд, и, возможно, другие нейтральные части, отвечающие за их связывание. По предположению, эти составные части не способны обмениваться большими  $q^2$  при сильных взаимодействиях. Однако, кварки взаимодействуют электромагнитным образом с другими заряженными частицами, поэтому электрон, рассеиваясь на кварке, может выбить его из протона. Выбитый кварк взаимодействует с остатками протона, в результате чего части протона образуют адронную струю. Образующиеся адроны должны вылетать параллельно направлению протона, выбитого в начале.

Хотя партонная модель и неполна, она налагает сильное ограничение на сечение глубоконеупругого рассеяния электронов на протонах. Чтобы вывести это ограничение, рассмотрим сначала сечение рассеяния электронов на уединенном кварке. Мы обсуждали связанный с этим процесс электрон-мюонного рассеяния в разделе 5.4 и можем воспользоваться полученным там результатом. Поскольку предполагается, что процесс происходит при высоких энергиях, будем пренебрегать всеми массами. Квадрат модуля инвариантной амплитуды в безмассовом пределе записан в простой форме в выражении (5.71):

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4 Q_i^2}{\hat{t}^2} \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{4} \right), \quad (14.1)$$

\* Описание этих экспериментов см. в статье J. I. Friedman, H. W. Kendall, and R. E. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 573 (1991).

где  $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{u}$  — переменные Мандельштама для столкновения электрона с кварком,  $Q_i$  — электрический заряд кварка в единицах  $|e|$ . Напомним, что из (5.73) следует, что для столкновений безмассовых частиц  $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0$ . Тогда дифференциальное сечение рассеяния в системе центра инерции равно:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta_{CM}} = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{16\pi} \frac{8e^4 Q_i^2}{\hat{t}^2} \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{4} \right) = \frac{\pi \alpha^2 Q_i^2}{\hat{s}} \left( \frac{\hat{s}^2 + (\hat{s} + \hat{t})^2}{\hat{t}^2} \right). \quad (14.2)$$

Или, поскольку  $\hat{t} = -\hat{s}(1 - \cos \theta_{CM})/2$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} = \frac{2\pi \alpha^2 Q_i^2}{\hat{s}^2} \left( \frac{\hat{s}^2 + (\hat{s} + \hat{t})^2}{\hat{t}^2} \right). \quad (14.3)$$

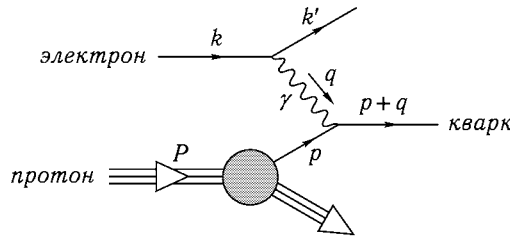


Рис. 14.1. Кинематика глубоконеупругого электронного рассеяния в партонной модели.

Чтобы использовать этот результат, следует выразить инварианты  $\hat{s}$  и  $\hat{t}$  через величины, измеряемые в процессе электрон-протонного неупругого рассеяния. Кинематические переменные показаны на рис. 14.1. Переданный электроном импульс  $q$  может быть вычислен из измерений импульса и энергии конечного электрона, без использования информации об образовавшихся адронах. Поскольку  $q^\mu$  — пространственноподобный вектор, удобно выразить его квадрат через положительную величину  $Q$ :

$$Q^2 \equiv -q^2. \quad (14.4)$$

Тогда инвариант  $\hat{t}$  будет равен просто  $-Q^2$ .

Выразить  $\hat{s}$  через экспериментально измеримые величины более трудно. Если столкновение изучается в системе центра инерции электрона и протона, и протон рассматривается как составленный из слабо связанных партонов (продолжаем пренебрегать их массами), данный партон характеризуется той долей полного импульса протона, которую он несет. Обозначим эту *продольную долю импульса* параметром  $\xi$ , причем  $0 < \xi < 1$ . Для  $i$ -того сорта партонов, например, для верхних кварков с электрическим зарядом  $Q_i = +2/3$ , введем функцию  $f_i(\xi)$ , выражающую вероятность того, что протон содержит кварк  $i$ -того типа с продольной долей импульса  $\xi$ . Выражение для полного сечения электрон-протонного неупругого рассеяния будет содержать интегрирование по значению  $\xi$  для партона, с которым взаимодействует электрон. Импульс этого партона равен  $p = \xi P$ , где  $P$  — полный импульс протона. Тогда, если  $k$  — начальный импульс электрона, то

$$\hat{s} = (p + k)^2 = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi s, \quad (14.5)$$

где через  $s$  обозначен квадрат суммарной энергии электрона и протона.

Замечательно, что  $\xi$  также можно определить только из измерений импульса электрона, если допустить, что электрон упруго рассеивается на партоне. Поскольку масса этого партона мала по сравнению с  $s$  и  $Q^2$ ,

$$0 \approx (p + q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = 2\xi P \cdot q - Q^2. \quad (14.6)$$

Таким образом,

$$\xi = x, \quad \text{где } x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}. \quad (14.7)$$

Для каждого рассеянного электрона можно определить значения  $Q^2$  и  $x$ . Партонная модель предсказывает, каким должно быть распределение событий на плоскости  $x - Q^2$ . Используя партонную функцию распределения  $f_i(\xi)$ , вычисленную в точке  $\xi = x$ , и формулу (14.3) для сечения рассеяния, находим:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \sum_i f_i(x) Q_i^2 \cdot \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{Q^2}{xs} \right)^2 \right]. \quad (14.8)$$

Функция распределения  $f_i(x)$  зависит от деталей внутренней структуры протона, и неизвестно, как вычислить ее из первых принципов. Однако формула (14.8) все же дает замечательное предсказание, что если разделить сечение глубоконеупругого рассеяния на множитель

$$\frac{1 + (1 - Q^2/xs)^2}{Q^4}, \quad (14.9)$$

чтобы исключить кинематическую зависимость от вклада КЭД в сечение, то получится величина, зависящая только от  $x$  и не зависящую от  $Q^2$ . Это поведение сечения известно как *бьеркеновский скейлинг*. Данные эксперимента SLAC-MIT на самом деле подтвердили наличие бьеркеновского скейлинга для значений  $Q$ , больших 1 ГэВ с точностью примерно 10% (см. рис. 14.2).

По существу, бьеркеновский скейлинг — это утверждение о том, что структура протона выглядит одинаково с точки зрения электромагнитного пробника, независимо от того, насколько сильно он ударяет протон. В системе протона энергия виртуального обменного фотона равна

$$q^0 = \frac{P \cdot q}{m} = \frac{Q^2}{2xm}, \quad (14.10)$$

где  $m$  — масса протона. Величина, обратная этой энергии, грубо говоря, равна длительности процесса рассеяния в системе отсчета, связанной с компонентами протона. Это время следует сравнить с обратной массой протона, которая является характерным временем партонного взаимодействия. Глубоконеупругий режим наступает, когда  $q^0 \gg m$ , т.е. когда рассеяние происходит гораздо быстрее по сравнению с естественным для протона временными масштабами. Бьеркеновский скейлинг означает, что во время такого быстрого процесса рассеяния можно пренебречь взаимодействием между составляющими протона. Можно считать, что на малых временных масштабах, соответствующих энергиям порядка 1 ГэВ или более, партоны являются приближенно свободными частицами, хотя на больших временных масштабах они сильно взаимодействуют.

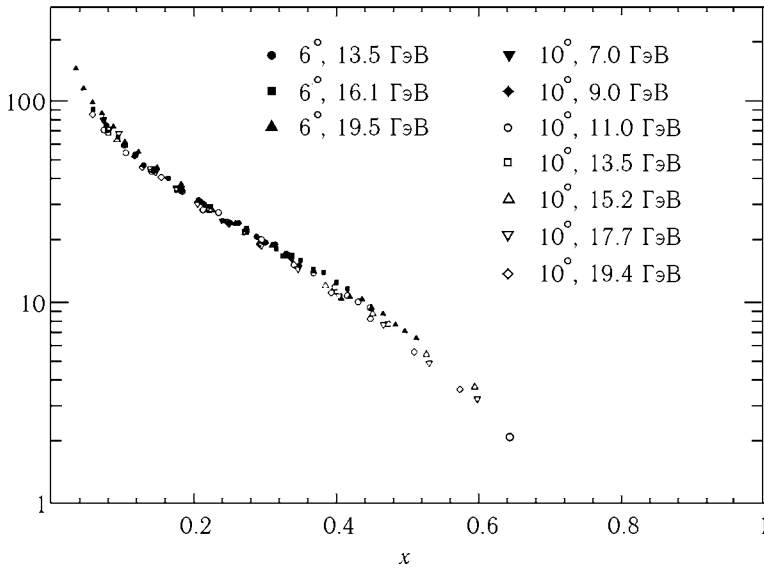


Рис. 14.2. Проверка бьеркеновского скейлинга в эксперименте SLAC-MIT по измерению глубоконеупругого сечения  $e^-p$ -рассеяния (J.S.Poucher, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **32**, 118 (1974)). Показана зависимость от  $x$  величины  $d^2\sigma/dxdQ^2$ , деленной на множитель (14.9), для разных значений энергии электрона и углов рассеяния. Данные охватывают область  $1 \text{ ГэВ}^2 < Q^2 < 8 \text{ ГэВ}^2$ .

### Асимптотически свободные партоны

Картина структуры протона, связанная с бьеркеновским скейлингом, была замечательно проста, однако она вызвала новые фундаментальные вопросы. В квантовой теории поля фермионы взаимодействуют посредством обмена виртуальными частицами. Эти виртуальные частицы могут иметь сколь угодно большой импульс, следовательно, флуктуации, связанные с ними, могут возникать на сколь угодно малых временных масштабах. С этой точки зрения процессы взаимодействия в квантовой теории поля не выключаются на малых временах, так что уравнения для свободных частиц не удовлетворяются. Поэтому открытие бьеркеновского скейлинга вызвало конфликт между наблюдаемыми почти свободными партонами и основными принципами квантовой теории поля.

Решение этого парадокса дается при помощи метода ренормгруппы. В гл. 12 мы видели, что константы связи изменяются с изменением пространственного масштаба. В КЭД и в теории  $\phi^4$  мы нашли, что взаимодействия становятся сильными при больших энергиях и слабыми — при малых. Однако была отмечена возможность того, что в некоторых теориях константа связи может иметь обратное поведение, становясь большой при малых энергиях или больших временах, и малой при больших энергиях или малых временах. Мы называли такое поведение *асимптотической свободой*. В разделе 13.3 обсуждается пример асимптотически свободной квантовой теории поля — нелинейная сигма-модель в двух измерениях. Проблема, поставленная в предыдущем абзаце, была бы решена, если бы существовала подходящая асимптотически свободная квантовая теория поля в четырех измерениях, которая могла бы описывать взаимодействие и связывание кварков. Тогда по крайней мере в некотором приближении сильные взаимодействия, описываемые этой теорией, выключались бы при высоких энергиях или на малых временах.



В момент открытия бьеркеновского скейлинга не было известно ни одной асимптотически свободной теории поля в четырех измерениях. Затем, в начале 1970-х гг. 'т Хофт, Политцер, Гросс и Вильчек открыли целый класс таких теорий. Это — так называемые *неабелевы калибровочные теории*, т. е. теории взаимодействующих векторных бозонов, которые могут быть построены как обобщения квантовой электродинамики. Позднее было показано, что это единственно возможные асимптотически свободные теории в четырех измерениях. Это открытие дало ключ к построению фундаментальной теории сильных взаимодействий. По-видимому, кварки связываются вместе при помощи обмена векторными бозонами (называемыми *глюонами*) именно такого типа.

Тем не менее, калибровочные теории не могут точно воспроизвести предсказания строгого бьеркеновского скейлинга. При повышении точности измерений в экспериментах по глубоководному рассеянию и изучению других процессов сильного взаимодействия при высоких энергиях появляются различия между моделью свободных партонных и моделью квантовой теории поля с асимптотической свободой. В асимптотически свободной квантовой теории поля константа связи остается все еще отличной от нуля при любом конечном переданном импульсе. На самом деле ее приближение к нулю идет очень медленно, логарифмически по импульсу. Следовательно на определенном уровне необходимо найти малые поправки к бьеркеновскому скейлингу, связанные с обменом или испусканием глюонов с большим импульсом. Аналогично, другие качественные упрощения в адронной физике при больших передаваемых импульсах — например, явление ограниченных поперечных передаваемых импульсов в адрон-адронных столкновениях, должны выполняться только приближенно и содержать поправки за счет обмена или испускания глюонов. Таким образом, предсказания асимптотически свободной теории сильных взаимодействий — двоякие. С одной стороны, такая теория предсказывает качественные упрощения поведения при больших импульсах. С другой стороны, она предсказывает конкретную структуру поправок к этому поведению.

На самом деле, эксперименты 1970-х гг. в физике частиц выявили именно такую картину. Оказалось, что бьеркеновский скейлинг выполняется только приближенно, и его нарушение связано с медленной эволюцией партонных функций распределения  $f_i(x)$  в логарифмическом масштабе по  $Q^2$ . Было найдено, что вероятность образования частиц в адрон-адронных столкновениях падает при очень больших значениях переданного импульса степенным, а не экспоненциальным образом, и что эти частицы связаны с адронными струями, образующимися при мягкой эволюции жестко рассеянных кварков или глюонов. Наиболее примечательно то, что вид сечений, измеренных в этих и других случаях отклонения от закона скейлинга, явился прямым доказательством векторного характера элементарных полей, являющихся переносчиками сильного взаимодействия.

Мы рассмотрим все эти явления в гл. 17 при изучении конкретной калибровочной теории, описывающей сильные взаимодействия. Однако сначала нужно понять, как строить неабелевы калибровочные теории и как получать следующие из них предсказания, используя фейнмановские диаграммы. В процессе анализа этих теорий существенную роль будет играть аппарат ренормгруппы. Одной из привлекательных сторон изучения неабелевых калибровочных теорий является то, что наиболее мощные общие идеи квантовой теории поля приобретают еще большую силу, когда они переплетаются со специфическими особенностями этих замысловато устроенных моделей. Такое взаимодействие между основными принципами и конкретными особенностями калибровочных теорий будет основной темой III части этой книги.

## НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

До сих пор в книге рассматривался только ограниченный класс квантовых полей и взаимодействий, приводящий к теориям со скалярными полями, теории Юкавы и квантовой электродинамике. Неудивительно, что этих теорий недостаточно для описания всех известных взаимодействий элементарных частиц. Какие еще теории можно построить, зная, что лагранжиан перенормируемой теории не должен содержать слагаемых с массовой размерностью больше 4?

Естественно попытаться добавить в лагранжиан взаимодействие векторных полей, например, в виде  $A^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu$  или  $A^4$ . Однако разумные теории такого типа трудно построить из-за состояний с отрицательной нормой, возникающих от компоненты  $A^0$  векторного поля. В разделе 5.5 мы видели, что в КЭД состояния с отрицательной нормой не вызывают проблем — с помощью тождества Уорда их вклад эффективно сокращается со вкладом от состояний с продольной поляризацией. Тождества Уорда в свою очередь являются следствием калибровочной инвариантности лагранжиана КЭД относительно локальных калибровочных преобразований. Возможно, если удастся обобщить принцип калибровочной инвариантности, это приведет к построению другой разумной теории векторных частиц.

Как раз в этом и заключается цель данной главы. Во-первых, мы ненадолго вернемся к рассмотрению КЭД, на этот раз взяв за основу калибровочную инвариантность, и выведем из этого принципа всю теорию. Затем, в разделе 15.2, мы покажем, что калибровочная инвариантность КЭД — это только наиболее тривиальный пример симметрии, зависящей от бесконечного количества параметров, и что более общие примеры приводят к другим интересным лагранжианам. Эти теории поля, первая из которых была построена Янгом и Миллсом\*, являются глубоким обобщением электродинамики. Их лагранжианы описывают несколько векторных частиц, взаимодействие которых сильно ограничено принципами симметрии. В последующих главах мы изучим квантование этих теорий и их применение к реальному миру элементарных частиц.

### 15.1. Геометрия калибровочной инвариантности

В разделе 4.1 мы выписали лагранжиан квантовой электродинамики и отметили любопытный факт, что он инвариантен относительно весьма широкой группы преобразований (4.6), допускающей независимые преобразования симметрии в каждой точке пространства-времени. В этом и заключается знаменитая *калибровочная симметрия* КЭД. Однако с современной точки зрения калибровочная инвариантность является не случайностью, а фундаментальным принципом, определяющим форму лагранжиана. Рассмотрим, как, пользуясь этим принципом, строить различные теории поля.

---

\*C. N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).

Начнем с комплекснозначного дираковского поля  $\psi(x)$  и потребуем, чтобы теория была инвариантна относительно преобразования:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x). \quad (15.1)$$

Это есть фазовый поворот на угол  $\alpha(x)$ , произвольно меняющийся от точки к точке. Как записать лагранжиан, инвариантный относительно такого преобразования? Построить слагаемые, не содержащие производных, легко — мы просто пишем те же слагаемые, которые инвариантны относительно глобальных фазовых преобразований. Например, массовое слагаемое

$$m\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

допускается глобальной инвариантностью, и локальная инвариантность не вносит дополнительных ограничений.

Трудности возникают, когда мы пытаемся написать инвариантные слагаемые, содержащие производные. Производная  $\psi(x)$  по направлению вектора  $n^\mu$  определяется, как известно, при помощи предельного перехода:

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\psi(x + \varepsilon n) - \psi(x)]. \quad (15.2)$$

Однако в теории с локальной фазовой инвариантностью это определение не годится, поскольку поля  $\psi(x + \varepsilon n)$  и  $\psi(x)$ , разность которых входит в определение, преобразуются совершенно по-разному относительно преобразования (15.1). Другими словами, величина  $\partial_\mu \psi$  уже не имеет простого закона преобразований и, соответственно, ясной геометрической интерпретации.

Для того чтобы придать смысл вычитанию полей  $\psi(x)$  в соседних точках, следует ввести какой-то множитель, компенсирующий различие в их преобразованиях в разных точках. Наиболее просто это можно сделать, определив скалярную величину  $U(y, x)$ , зависящую от двух точек и преобразующуюся по закону

$$U(y, x) \rightarrow e^{i\alpha(y)}U(y, x)e^{-i\alpha(x)} \quad (15.3)$$

одновременно с преобразованием (15.1) фермионного поля. В совпадающих точках полагаем  $U(y, y) = 1$ ; в общем случае можно потребовать, чтобы  $U(y, x) = \exp[i\phi(y, x)]$ . Согласно этому определению, объекты  $\psi(y)$  и  $U(y, x)\psi(x)$  преобразуются одинаково, поэтому их разность уже хорошо определена, несмотря на локальную симметрию. Теперь можно определить осмысленную производную, которая называется *ковариантной производной*:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\psi(x + \varepsilon n) - U(x + \varepsilon n, x)\psi(x)]. \quad (15.4)$$

Для того чтобы это определение приняло явный вид, потребуется выражение для функции сравнения  $U(y, x)$  в двух бесконечно близких точках. Если фаза  $\phi(y, x)$  является гладкой функцией,  $U(y, x)$  может быть разложена в ряд:

$$U(x + \varepsilon n, x) = 1 - ie\varepsilon n^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (15.5)$$

Здесь мы нарочно выделили константу  $e$ . Коэффициент при векторе смещения  $\varepsilon n^\mu$  является новым векторным полем  $A_\mu(x)$ . Такое поле, возникающее как бесконечно малый предел функции сравнения локальных преобразований симметрии, называется *связностью*. Итак, ковариантная производная принимает вид:

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x). \quad (15.6)$$

Подставляя (15.5) в (15.3), находим, что под действием локального калибровочного преобразования  $A_\mu$  преобразуется как

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (15.7)$$

Для проверки согласованности всех этих выражений можно преобразовать  $D_\mu \psi(x)$  при помощи (15.1) и (15.7):

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[ \partial_\mu + ie \left( A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \right] e^{i\alpha(x)} \psi(x) = \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi(x) = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (15.8)$$

Таким образом, ковариантная производная действительно преобразуется так же, как и само поле  $\psi$  в полном соответствии с тем, как она была построена в исходном определении (15.4).

Теперь мы восстановили почти все знакомые составляющие лагранжиана КЭД. Однако с новой точки зрения определение ковариантной производной и закон преобразования связности  $A_\mu$  следуют из постулата симметрии относительно локального изменения фазы. Даже само существование векторного поля  $A_\mu$  — следствие локальной симметрии, т. к. без него мы не могли бы написать инвариантного лагранжиана, включающего производные  $\psi$ .

Как правило, проведенный анализ позволяет нам строить все возможные лагранжианы, инвариантные относительно локальной симметрии. Для этого в каждом слагаемом, содержащем обычные производные  $\psi$ , их надо заменить на ковариантные производные. В соответствии с (15.8) они преобразуются точно так же, как сами  $\psi$ . Поэтому любая комбинация  $\psi$  и ее ковариантных производных, инвариантная относительно глобальных фазовых вращений (и только такая комбинация), будет также и локально инвариантной.

Для завершения построения локально инвариантного лагранжиана следует найти кинетическое слагаемое для поля  $A_\mu$ , т. е. локально инвариантное слагаемое, зависящее только от  $A_\mu$  и его производных, но не от  $\psi$ . Это слагаемое может быть построено либо интегрально, при помощи функции сравнения  $U(y, x)$ , либо инфинитезимально, при помощи ковариантной производной.

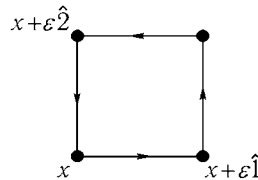


Рис. 15.1. Построение напряженности поля при переносе по маленькому квадрату в  $(1, 2)$ -плоскости.

В первом случае следует распространить явную формулу (15.5) на следующее слагаемое в разложении по степеням  $\varepsilon$  в (15.5). Используя предположение о том, что  $U(y, x)$  имеет вид чисто фазового множителя, и условие  $(U(y, x))^\dagger = U(y, x)$ , получим:

$$U(x + \varepsilon n, x) = \exp \left[ -ie \varepsilon n^\mu A_\mu \left( x + \frac{\varepsilon}{2} n \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right]. \quad (15.9)$$

(Ослабление этих условий приведет к появлению дополнительных векторных полей и, соответственно, к излишнему усложнению теории). Используя разложение

для  $U(y, x)$ , можно связать вместе изменения фазы при переносе поля по маленькому квадрату в пространстве-времени. Для определенности, выберем этот квадрат лежащим в (1,2)-плоскости, которая задается единичными векторами  $\hat{1}, \hat{2}$  (рис. 15.1). Определим  $U(x)$  как произведение четырех вкладов от углов петли:

$$U(x) \equiv U(x, x + \varepsilon\hat{2})U(x + \varepsilon\hat{2}, x + \varepsilon\hat{1} + \varepsilon\hat{2}) \times \\ \times U(x + \varepsilon\hat{1} + \varepsilon\hat{2}, x + \varepsilon\hat{1})U(x + \varepsilon\hat{1}, x). \quad (15.10)$$

Из закона преобразования (15.3) для  $U$  следует, что  $U(x)$  калибровочно инвариантно. Поэтому, переходя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , мы найдем калибровочно-инвариантную функцию от  $A_\mu$ . Чтобы определить форму этой функции, подставим разложение (15.9) в (15.10):

$$U(x) = \exp \left\{ -i\varepsilon e \left[ -A_2(x + \frac{\varepsilon}{2}\hat{2}) - A_1(x + \frac{\varepsilon}{2}\hat{1} + \varepsilon\hat{2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2(x + \varepsilon\hat{1} + \frac{\varepsilon}{2}\hat{2}) + A_1(x + \frac{\varepsilon}{2}\hat{1}) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\}. \quad (15.11)$$

Разлагая экспоненту по степеням  $\varepsilon$ , получим:

$$U(x) = 1 - i\varepsilon^2 e [\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (15.12)$$

Таким образом, комбинация

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (15.13)$$

калибровочно-инвариантна. Конечно,  $F_{\mu\nu}$  — хорошо известный тензор напряженности электромагнитного поля, и его инвариантность относительно преобразования (15.7) может быть проверена непосредственно. Тем не менее, построенная выше конструкция раскрывает геометрический смысл  $F_{\mu\nu}$ . Любая функция, зависящая от  $A_\mu$  только через тензор  $F_{\mu\nu}$  и его производные, калибровочно-инвариантна. Изменение более общих функций, таких, например, как массовое слагаемое  $A_\mu A^\mu$ , при преобразовании (15.7) не может быть скомпенсировано, поэтому они не могут содержаться в инвариантном лагранжиане.

Другой способ доказательства инвариантности  $F_{\mu\nu}$  основывается на использовании ковариантной производной. Выше мы видели, что, если поле преобразуется по закону (15.1), его ковариантная производная тоже преобразуется по этому же закону. Поэтому вторая ковариантная производная  $\psi$  тоже преобразуется согласно (15.1). Это, конечно, верно и для коммутаторов таких производных:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi(x). \quad (15.14)$$

Однако коммутатор сам не является производной:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + ie([\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu])\psi - e^2[A_\mu, A_\nu]\psi = \\ = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \cdot \psi. \quad (15.15)$$

Таким образом,

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \quad (15.16)$$

Множитель  $\psi(x)$  в правой части (15.14) учитывает полный закон преобразования, так что мультипликативный фактор  $F_{\mu\nu}$  должен быть инвариантным. Можно получить

наглядное представление о коммутаторе ковариантных производных, считая, что он сравнивает разности значений  $\psi$  вдоль малого квадрата. Поэтому по существу это рассуждение эквивалентно приведенному в предыдущем абзаце.

Каким бы не был способ доказательства инвариантности  $F_{\mu\nu}$ , теперь мы имеем все необходимые ингредиенты для написания наиболее общего локально-инвариантного лагранжиана для электронного поля  $\psi$  и ассоциированной связности  $A_\mu$ . Этот лагранжиан должен зависеть от  $\psi$  и его ковариантных производных, а также от  $F_{\mu\nu}$  и его производных, и быть инвариантным относительно глобальных фазовых преобразований. Есть только четыре возможных слагаемых с размерностью не больше 4:

$$\mathcal{L}_4 = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - c\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} - m\bar{\psi}\psi. \quad (15.17)$$

Мы привели коэффициенты при первых двух слагаемых к их стандартному виду соответствующей нормировкой полей  $\psi$  и  $A_\mu$ . При этом в исходном определении (15.5)  $A_\mu$  появляется произвольный скалярный множитель  $e$ . Присутствие третьего слагаемого приводит к нарушению  $P$  и  $T$ -инвариантности, поэтому мы должны его исключить, если признаем эти симметрии\*. Тогда  $\mathcal{L}_4$  будет содержать только два свободных параметра — масштабный множитель  $e$  и коэффициент  $m$ .

Используя операторы размерности 5 и 6, можно образовать дополнительные калибровочно-инвариантные комбинации:

$$\mathcal{L}_6 = ic_1\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + c_2(\bar{\psi}\psi)^2 + c_3(\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 + \dots \quad (15.18)$$

В каждом высшем порядке по массовой размерности появляется все больше разрешенных слагаемых. Однако все они описывают неперенормируемые взаимодействия. На языке раздела 12.1 можно сказать, что в четырех измерениях в пределе бесконечного обрезания они несущественны.

Итак, мы пришли к замечательному выводу. В начале мы постулировали симметрию теории относительно преобразования (15.1) для электронного поля. Мы показали, что из этого постулата следует наличие электромагнитного векторного потенциала. Далее, из принципа симметрии следует, что самый общий перенормируемый (или, по Вильсону, существенный) лагранжиан в четырех измерениях есть  $\mathcal{L}_4$ . Если потребовать, чтобы этот лагранжиан был также инвариантен относительно обращения времени или инверсии координат, мы однозначно приходим к лагранжиану Максвелла–Дирака, который лежит в основе квантовой электродинамики.

## 15.2. Лагранжиан Янга–Миллса

Если простая геометрическая конструкция из прошлого раздела приводит к максвелловской электродинамике, то наверняка можно построить другие интересные теории, используя более общие геометрические образы. Янг и Миллс предположили, что аргументы предыдущего раздела можно обобщить от случая инвариантности по отношению к локальным фазовым вращениям на случай инвариантности относительно любой непрерывной группы симметрии. В этом разделе мы рассмотрим такое обобщение локальной симметрии. В основном мы будем рассматривать локальную симметрию относительно трехмерной группы вращений  $O(3)$  или  $SU(2)$ , поскольку необходимые сведения из теории групп должны быть для этого случая хорошо известны читателю. В конце раздела мы перейдем к случаю произвольной локальной симметрии.

\*Общие правила отбора по  $C$ ,  $P$  и  $T$ -инвариантности обсуждаются в разделе 20.3.

Итак, рассмотрим следующее обобщение преобразования поворота фазы (15.1). Вместо одного фермионного поля введем дублет дираковских полей:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (15.19)$$

которые при произвольных трехмерных вращениях преобразуются как двухкомпонентные спиноры:

$$\psi \rightarrow \exp\left(i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}\right) \psi. \quad (15.20)$$

Здесь  $\sigma^i$  — матрицы Паули, и, как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Важно отличать это абстрактное преобразование от вращения в физическом трехмерном пространстве. Так, в своей первой работе Янг и Миллс описывали при помощи  $(\psi_1, \psi_2)$  дублет протон-нейтрон, и его преобразованиям соответствовали вращения в изотопическом пространстве. Как и в случае фазового вращения, нетрудно построить лагранжиан, инвариантный по отношению к глобальным преобразованиям (15.20).

Пусть теперь  $\alpha^i$  в (15.20) будет произвольной функцией от  $x$ . Потребуем, чтобы наш лагранжиан был инвариантен относительно таких локальных преобразований. Напишем их в виде

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x), \quad \text{где } V(x) = \exp\left(i\alpha^i(x) \frac{\sigma^i}{2}\right). \quad (15.21)$$

Можно построить подходящий лагранжиан, используя методы предыдущего раздела. Однако, мы столкнемся с дополнительными трудностями, поскольку теперь имеются три ортогональных преобразования симметрии, не коммутирующие друг с другом. Это свойство достаточно важно для того, чтобы обладающие им теории получили специальное название. Теории поля типа электродинамики называются *абелевыми*, а более общие, связанные с некоммутативными группами симметрии — *неабелевыми*. Теория поля, связанная с локальной некоммутативной группой симметрии, называется *неабелевой калибровочной теорией*.

Чтобы сконструировать лагранжиан, инвариантный относительно новой группы преобразований, мы должны опять подходящим образом определить ковариантную производную. Используем для этого определение (15.4), но поскольку теперь  $\psi$  — двухкомпонентный объект, функция  $U(y, x)$  должна быть матрицей  $2 \times 2$ . Закон преобразования  $U(y, x)$  имеет теперь вид:

$$U(y, x) \rightarrow V(y) U(y, x) V^\dagger(x), \quad (15.22)$$

где  $V(x)$  — такое же, как и в (15.21), и снова мы полагаем  $U(y, y) = 1$ . В точках  $x \neq y$  можно считать, что  $U(y, x)$  — унитарная матрица. В окрестности  $U = 1$  любая такая матрица может быть разложена при помощи эрмитовых генераторов  $SU(2)$ :

$$U(x + \varepsilon n, x) = 1 + ig\varepsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (15.23)$$

Здесь для удобства выделена константа  $g$ . Подставляя это разложение в определение (15.4), находим следующее выражение для ковариантной производной, связанной с локальной  $SU(2)$ -симметрией:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}. \quad (15.24)$$

Эта ковариантная производная требует введения трех векторных полей, по одному для каждого генератора группы преобразований.

Мы можем найти закон преобразования связности  $A_\mu^i$ , подставляя (15.23) в (15.22):

$$1 + ig\epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x + \epsilon n) \left( 1 + ig\epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \right) V^\dagger(x). \quad (15.25)$$

Мы должны разложить правую часть до членов порядка  $\epsilon$ , принимая во внимание, что разные матрицы Паули не коммутируют друг с другом. Это удобно сделать, используя тождество:

$$\begin{aligned} V(x + \epsilon n) V^\dagger(x) &= \left[ \left( 1 + \epsilon n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) V(x) \right] V^\dagger(x) = \\ &= 1 + \epsilon n^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V(x) \right) V^\dagger(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= 1 + \epsilon n^\mu V(x) \left( -\frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\dagger(x) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (15.26)$$

Тогда, собирая в (15.25) слагаемые, пропорциональные  $\epsilon n^\mu$ , находим закон преобразования:

$$A_\mu^i(x) \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x) \left( A_\mu^i(x) \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x). \quad (15.27)$$

Вычислить производную, действующую на  $V^\dagger(x) = \exp(-i\alpha^i \sigma^i / 2)$ , не так просто, поскольку экспонента не обязательно коммутирует со своей производной. Для инфинитезимальных преобразований можно разложить  $V^\dagger(x)$  до первого порядка по  $\alpha$ . В этом случае получим:

$$A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + i [\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}] + \dots \quad (15.28)$$

Последнее слагаемое в этом преобразовании — новое и возникло из-за некоммутативности локальных преобразований. Комбинируя это соотношение с инфинитезимальной формой преобразования спинора:

$$\psi \rightarrow \left( 1 + i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2} \right) \psi + \dots, \quad (15.29)$$

можно с точностью до слагаемых порядка  $\alpha^2$  проверить закон преобразования ковариантной производной:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\rightarrow \left( \partial_\mu - ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - i(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + g [\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}] \right) \left( 1 + i\alpha^k \frac{\sigma^k}{2} \right) \psi = \\ &= \left( 1 + i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2} \right) D_\mu \psi. \end{aligned} \quad (15.30)$$

Используя (15.27) и (15.21), несложно убедиться, что даже для конечных преобразований ковариантная производная преобразуется так же, как и поле, на которое она действует.

Используя ковариантную производную, можно построить наиболее общий калибровочно-инвариантный лагранжиан, включающий  $\psi$ . Однако, чтобы написать полный лагранжиан, следует найти еще и калибровочно-инвариантные слагаемые, зависящие



только от  $A_\mu^i$ . Для этого построим аналог тензора напряженности электромагнитного поля. Воспользуемся вторым методом из предыдущего раздела и будем работать с ковариантными производными. Согласно закону преобразования ковариантных производных

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \rightarrow V(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x). \quad (15.31)$$

В то же время, раскрыв коммутатор при помощи (15.24), мы увидим, что  $[D_\mu, D_\nu]$  действует на  $\psi$  не как дифференциальный оператор, а просто как множитель (матрица). Теперь, однако, появляется новое свойство: последнее слагаемое в разложении коммутатора уже не обращается в нуль. В итоге мы получаем:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2}, \quad (15.32)$$

где

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} = \partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}]. \quad (15.33)$$

Мы можем упростить это соотношение с помощью известных коммутационных соотношений для матриц Паули:

$$[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\varepsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}. \quad (15.34)$$

Тогда

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (15.35)$$

Из (15.21) и (15.31) находим следующий закон преобразования напряженности поля:

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow V(x)F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2} V^\dagger(x). \quad (15.36)$$

В инфинитезимальной форме

$$F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \rightarrow F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} + [i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}, F_{\mu\nu}^j \frac{\sigma^j}{2}]. \quad (15.37)$$

Заметим, что напряженность поля уже больше не является калибровочно-инвариантной величиной. Это невозможно, поскольку теперь существуют три различные напряженности, каждая из которых связана с данным направлением вращения в абстрактном пространстве. Однако легко образовать из них калибровочно-инвариантные комбинации. Например,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left( F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} \right)^2 \right] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2 \quad (15.38)$$

является калибровочно-инвариантным кинетическим слагаемым для  $A_\mu^i$ . Заметим, что в отличие от случая квантовой электродинамики, лагранжиан с такой добавкой содержит кубические и четвертичные слагаемые по  $A_\mu^i$ . Таким образом, этот лагранжиан описывает нетривиальную теорию с взаимодействием, которая называется *теорией Янга – Миллса*. Это простейший пример неабелевой калибровочной теории.

Чтобы построить теорию янг-милловских векторных полей, взаимодействующих с фермионами, просто добавим в дираковский лагранжиан слагаемое (15.38) и заменим обычную производную ковариантной. Результат выглядит почти совпадающим с лагранжианом КЭД:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i)^2 - m\bar{\psi}\psi. \quad (15.39)$$

Это знаменитый лагранжиан Янга–Миллса. Так же, как и в КЭД, он зависит от двух параметров: скалярного множителя  $g$  (являющегося аналогом заряда электрона) и фермионной массы  $m$ . Варьируя этот лагранжиан, мы найдем классические уравнения движения для калибровочной теории. Это уравнение Дирака для фермионного поля и уравнение

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^i + g\varepsilon^{ijk}A^{j\mu}F_{\mu\nu}^k = -g\bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\sigma^i}{2}\psi \quad (15.40)$$

для векторного поля.

Все, что было получено выше для группы  $SU(2)$ , легко обобщается на случай любой непрерывной группы симметрии. Полный набор возможных групп симметрии перечислен и классифицирован в разделе 15.4. Лагранжианы для всех этих групп имеют похожий вид. Рассмотрим любую непрерывную группу преобразований, представленную множеством  $V$  унитарных матриц  $n \times n$ . Тогда базисные поля  $\psi(x)$  образуют  $n$ -плет, и преобразуются согласно закону:

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x), \quad (15.41)$$

где зависимость  $V$  от  $x$  делает преобразования локальными. Для инфинитезимальных преобразований  $V(x)$  можно разложить в ряд по набору генераторов группы симметрии, которые задаются эрмитовыми матрицами  $t^a$ :

$$V(x) = 1 + i\alpha^a(x)t^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (15.42)$$

Теперь для произвольной группы симметрии можно проделать весь путь от уравнения (15.22) к (15.33), просто делая на каждом шаге замену:

$$\frac{\sigma^i}{2} \rightarrow t^a. \quad (15.43)$$

Чтобы обобщить явное выражение (15.35) для тензора напряженности, необходимо знать коммутационные соотношения для матриц  $t^a$ . Их принято записывать в стандартной форме:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (15.44)$$

где числа  $f^{abc}$  называются *структурными константами*. Они заменяют  $\varepsilon^{ijk}$  в (15.34). Принято выбирать базис матриц  $t^a$ , в котором  $f^{abc}$  полностью антисимметричны; в разделе 15.4 мы докажем, что это всегда возможно.

Теперь можно суммировать все результаты. Ковариантная производная, связанная с общим преобразованием (15.41), имеет вид:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a, \quad (15.45)$$

и содержит одно векторное поле для каждого независимого генератора симметрии. Законы преобразования для  $\psi$  и  $A_\mu^a$  в инфинитезимальной форме имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow (1 + i\alpha^a t^a)\psi; \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + f^{abc}A_\mu^b\alpha^c.\end{aligned}\quad (15.46)$$

Конечное преобразование имеет в точности вид (15.27):

$$A_\mu^a(x)t^a \rightarrow V(x)\left(A_\mu^a(x)t^a + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)V^\dagger(x).\quad (15.47)$$

Эти законы преобразований означают, что ковариантная производная  $\psi$  преобразуется так же, как само поле  $\psi$ . Тензор напряженности определяется формулой:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a, \quad (15.48)$$

или, в более явном виде,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (15.49)$$

Эта величина имеет инфинитеземальное преобразование:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc}\alpha^b F_{\mu\nu}^c. \quad (15.50)$$

Используя (15.46) и (15.50), можно показать, что любая глобально инвариантная функция  $\psi$ ,  $F_{\mu\nu}^a$  и их ковариантных производных будет также локально инвариантна и поэтому может быть кандидатом на включение в лагранжиан. Однако существует очень мало допустимых слагаемых с размерностью не больше 4. Наиболее общий калибровочно-инвариантный, перенормируемый,  $P$ -,  $T$ -инвариантный лагранжиан опять дается формулой (15.39). Соответствующие классические уравнения движения имеют вид:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + gf^{abc}A^{b\mu}F_{\mu\nu}^c = -gj_\nu^a, \quad (15.51)$$

где

$$j_\nu^a = \bar{\psi}\gamma_\nu t^a\psi \quad (15.52)$$

является глобально инвариантным током фермионного поля.

Заметим, что нелинейные слагаемые в лагранжиане Янга–Миллса (15.39) появляются из-за ковариантной производной, где они пропорциональны  $t^a$ , и из-за тензора напряженности, где они пропорциональны  $f^{abc}$ . Таким образом, вид взаимодействий в неабелевой калибровочной теории диктуется выбором группы локальной симметрии. Нелинейные взаимодействия векторного поля с самим собой пропорциональны коммутаторам генераторов симметрии и поэтому их наличие явно требует неабелевой группы симметрии.

### 15.3. Калибровочно-инвариантная вильсоновская петля

В двух предыдущих разделах мы использовали функцию сравнения  $U(y, x)$ , которая переводила калибровочное преобразование фермионного поля из точки  $x$  в точку  $y$ . До настоящего момента было достаточно выражения для  $U(y, x)$ , записанного в предположении, что точки  $x$  и  $y$  бесконечно близки. Однако стоит подумать над тем, как будет

выглядеть функция сравнения в случае, если точка  $y$  удалена от  $x$ . Это позволит по-новому взглянуть на геометрию калибровочных полей и выявить некоторые полезные дополнительные свойства калибровочного поля, которые мы применим в главе 19.

Вернемся сначала к абелевой теории и обсудим свойства  $U(y, x)$  в этом контексте. В уравнении (15.10) мы построили произведение функций сравнения вдоль пути в виде маленького квадрата. Мы показали, что это произведение  $U(x)$  не тривиально, несмотря на то, что в конце концов мы вернулись в начальную точку. Более того, мы нашли, что  $U(x)$  отличается от единицы на слагаемое, пропорциональное напряженности электромагнитного поля и площади квадрата. Это частный случай общего правила: функция сравнения между двумя точками  $x$  и  $y$  зависит от пути между  $x$  и  $y$ .

Чтобы объяснить это утверждение, полезно обратить логику рассуждений из раздела 15.1. Начнем со связности  $A_\mu$ , предположив для нее закон преобразования (15.7), и построим  $U(y, x)$  как функцию  $A_\mu$ , которая преобразуется в соответствии с (15.3). Нетрудно проверить, что выражение

$$U_P(z, y) = \exp \left[ -ie \int_P dx^\mu A_\mu(x) \right] \quad (15.53)$$

удовлетворяет этому требованию, если интеграл берется по любому пути  $P$  из  $y$  в  $z$ . Этот объект  $U_P(z, y)$  называется *вильсоновской линией*\*. При помощи выражения (15.53) можно в явном виде записать любую функцию сравнения  $U(y, x)$  для точек, находящихся на конечном расстоянии друг от друга.

Важнейшим свойством вильсоновской линии является ее зависимость от пути интегрирования  $P$ . Если  $P$  — замкнутый путь, возвращающийся в точку  $y$ , мы получаем *вильсоновскую петлю*,

$$U_P(y, y) = \exp \left[ -ie \oint_P dx^\mu A_\mu(x) \right]. \quad (15.54)$$

Эта величина является нетривиальной функцией  $A_\mu$ , которая по построению калибровочно-инвариантна. На самом деле, все калибровочно-инвариантные функции  $A_\mu$  могут быть представлены в виде некоторых комбинаций вильсоновских петель для различных выборов замкнутых путей  $P$ . Для обоснования этого утверждения применим теорему Стокса, и перепишем вильсоновскую петлю в виде:

$$U_P(y, y) = \exp \left[ -i \frac{e}{2} \int_\Sigma d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right], \quad (15.55)$$

где  $\Sigma$  — поверхность, натянутая на замкнутую петлю  $P$ ,  $d\sigma^{\mu\nu}$  — элемент площади этой поверхности, а  $F_{\mu\nu}$  — тензор напряженности (15.13). Это соотношение между вильсоновской петлей и тензором напряженности проиллюстрировано на рис. 15.2. Поскольку вильсоновская петля калибровочно-инвариантна, это дает нам еще один способ увидеть калибровочную инвариантность тензора напряженности. И наоборот, поскольку (почти) все калибровочно-инвариантные функции от  $A_\mu$  могут быть построены из  $F_{\mu\nu}$ , это соотношение обосновывает утверждение о том, что  $U_P(y, y)$  является наиболее общим калибровочным инвариантом.

\*Зависящая от пути фаза использовалась еще задолго до Вильсона в ранних работах Швингера по КЭД, а также в работе: Y. Aharonov and D. Böhm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).

И вильсоновская линия, и вильсоновская петля допускают обобщение на неабелев случай. Однако при этом возникают дополнительные сложности из-за наличия экспонент от некоммутирующих матриц. Построим сначала вильсоновскую линию, преобразующуюся в соответствии с (15.53). Было бы неправильно просто переписать (15.53), подставив в экспоненту  $A_\mu^\alpha t^\alpha$ , поскольку эти матрицы не обязательно коммутируют в разных точках. Вместо этого мы должны подходящим образом упорядочить эти матрицы. Сейчас мы дадим рецепт правильного упорядочивания, а затем докажем его закон преобразования.

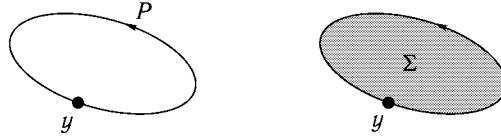


Рис. 15.2. Интеграл по вильсоновской петле берется по произвольному контуру. Он может быть так же представлен как поток напряженности поля через поверхность, натянутую на этот контур.

Пусть  $s$  параметризует путь  $P$  и принимает значения от 0 при  $x = y$  до 1 при  $x = z$ . Определим линию Вильсона как разложение экспоненты в степенной ряд, в каждом слагаемом которого матрицы с большим значением  $s$  стоят слева от матриц с меньшим  $s$ . Это называется *упорядочиванием вдоль пути* и обозначается символом  $P\{\}$ . Таким образом, вильсоновская линия записывается в виде:

$$U_P(z, y) = P \left\{ \exp \left[ ig \int_0^1 ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^\alpha(x(s)) t^\alpha \right] \right\}. \quad (15.56)$$

Это выражение похоже на упорядоченную по времени экспоненту, которую мы писали для пропагатора в представлении взаимодействия (4.23). Продолжая эту аналогию, можно показать, что это выражение для  $U_P$  является решением дифференциального уравнения, похожего на (4.24):

$$\frac{d}{ds} U_P(x(s), y) = \left( ig \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu^\alpha(x(s)) t^\alpha \right) U_P(x(s), y). \quad (15.57)$$

(Здесь мы считаем  $U_P$  непрерывной функцией параметра  $s$ , не фиксируя значение  $s = 1$  в конечной точке.)

Чтобы показать, что выражение (15.56) является корректным обобщением линии Вильсона, следует убедиться в том, что при калибровочных преобразованиях оно преобразуется в соответствии с правилом (15.22). Это следует из дифференциального уравнения (15.57), которое можно переписать в виде:

$$\frac{dx^\mu}{ds} D_\mu U_P(x, y) = 0. \quad (15.58)$$

Пусть  $A^V$  представляет калибровочное преобразование полевой конфигурации  $A$ . Используем эти аргументы, чтобы явно обозначить зависимость калибровочных функций от калибровочного поля. Мы хотим показать, что

$$U_P(z, y, A^V) = V(z) U_P(z, y, A) V^\dagger(y), \quad (15.59)$$

что эквивалентно (15.22). В (15.30) мы доказали, что для инфинитезимальных преобразований

$$D_\mu(A^V) V(x) = V(x) D_\mu(A). \quad (15.60)$$

Из этого соотношения вытекает, что правая сторона (15.59) удовлетворяет (15.58) для калибровочного поля  $A^V$ , если  $U_P(z, y, A)$  удовлетворяет этому уравнению для калибровочного поля  $A$ . Однако решение дифференциального уравнения первого порядка с заданными граничными условиями единственно. Поэтому, если  $U_P(z, y)$  определена как решение (15.57) или (15.58), ее закон преобразования действительно имеет вид (15.59). Вильсоновская линия, связанная с замкнутым путем, заканчивающимся в начальной точке  $y$ , преобразуется только при помощи калибровочного параметра, взятого в точке  $y$ ; тем не менее, она не является калибровочно-инвариантной:

$$U_P(y, y) \rightarrow V(y) U_P(y, y) V^\dagger(y). \quad (15.61)$$

Чтобы лучше понять этот закон преобразования, можно записать величину  $U_P(x, x)$ , для которой путь является маленьким квадратом в  $(1, 2)$ -плоскости, как показано на рис. 15.1. К слагаемым из (15.11) теперь добавятся поправки порядка  $\varepsilon^2$ , возникающие из произведений множителей  $(A_\mu^a t^a)$  от пар соседних сторон, которые просуммируются в коммутатор этих множителей. Получаем:

$$U_P(x, x) = 1 + ig\varepsilon^2 F_{12}^a(x) t^a + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (15.62)$$

где  $F_{\mu\nu}^a$  дается полным выражением (15.49). Если теперь разложить закон преобразования (15.61) по степеням  $\varepsilon$  и приравнять слагаемые при  $\varepsilon^2$ , получится закон преобразования (15.36) для  $F_{\mu\nu}^a$ .

Чтобы преобразовать вильсоновскую линию для замкнутого пути в истинный калибровочный инвариант, возьмем след. Используя циклическое свойство следа, получаем из (15.61):

$$\text{tr} U_P(x, x) \rightarrow \text{tr} U_P(x, x). \quad (15.63)$$

Таким образом, мы определили вильсоновскую петлю в неабелевой калибровочной теории как след от вильсоновской линии по замкнутому пути.

Вычислим  $\text{tr} U_P(x, x)$  более явно для случая калибровочной группы  $SU(2)$ . Если  $U(\varepsilon)$  — унитарная матрица  $2 \times 2$ , которая стремится к единичной при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , мы можем разложить ее в ряд по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} U(\varepsilon) &= \exp\left[i(\varepsilon\beta^i + \varepsilon^2\gamma^i + \dots) \frac{\sigma^i}{2}\right] = \\ &= 1 + i(\varepsilon\beta^i + \varepsilon^2\gamma^i + \dots) \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{2}(\varepsilon\beta^i \cdot \varepsilon\beta^j + \dots) \frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^j}{2} + \dots \end{aligned} \quad (15.64)$$

Тогда, поскольку матрицы Паули обладают нулевым следом и удовлетворяют соотношению  $\text{tr}[\sigma^i \sigma^j] = 2\delta^{ij}$ ,

$$\text{tr} U(\varepsilon) = 2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2(\beta^i)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (15.65)$$

Применяя эту формулу к (15.62), находим:

$$\text{tr} U_P(x, x) = 2 - \frac{1}{4}g^2\varepsilon^4(F_{12}^i)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \quad (15.66)$$

Таким образом, калибровочная инвариантность  $(F_{\mu\nu}^i)^2$  может быть выведена из геометрических соображений, так же как и в абелевом случае. Используя обозначения, которые будут введены в следующем разделе, можно показать, что те же соображения применимы в случае любой калибровочной группы.

## 15.4. Основные положения из теории алгебр Ли

В конце раздела 15.2 мы видели, что класс неабелевых калибровочных теорий очень велик. Для того, чтобы более эффективно работать с этими теориями, полезно прервать изложение и рассмотреть общие свойства непрерывных групп, с помощью которых они строятся. В этом разделе мы перечислим все возможные группы, которые могут быть использованы для конструирования неабелевых калибровочных теорий. Затем мы вычислим ряд числовых множителей, построенных из групповых матриц, которые необходимы для явных вычислений в калибровочных теориях\*.

С математической точки зрения, группа состоит из абстрактных объектов, подчиняющихся некоторым алгебраическим правилам. Однако в квантовой механике интересны группы унитарных операторов, действующих в векторном пространстве квантовых состояний. Сосредоточим внимание на непрерывных группах, т.е. на группах, которые содержат элементы, сколь угодно близкие к единице, так что произвольный элемент группы может быть получен повторяющимся действием этих инфинитезимальных элементов. Тогда любой инфинитезимальный групповой элемент  $g$  можно записать в виде:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (15.67)$$

Коэффициенты при инфинитезимальных групповых параметрах  $\alpha^a$  есть эрмитовы операторы  $T^a$ , называемые *генераторами* группы симметрии. Непрерывная группа с такой структурой называется *группой Ли*.

Набор генераторов  $T^a$  должен быть базисом пространства инфинитезимальных групповых преобразований, поэтому коммутатор генераторов  $T^a$  должен быть линейной комбинацией генераторов. Таким образом, коммутационные соотношения для  $T^a$  могут быть записаны следующим образом:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (15.68)$$

где числа  $f^{abc}$  называются *структурными константами* группы. Векторное пространство, натянутое на генераторы, вместе с дополнительной операцией коммутации, называется *алгеброй Ли*.

Коммутационные соотношения (15.68) и тождество

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \quad (15.69)$$

подразумевают, что структурные константы подчиняются условию

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0, \quad (15.70)$$

\* В этом разделе мы приведем без доказательств некоторые общие результаты теории непрерывных групп. Существует много прекрасных книг, в которых они излагаются систематически. Среди них мы особенно рекомендуем краткую, но содержательную книгу Cahn (1984), а также книгу: S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* (Academic Press, 1978), в которой можно найти строгое и элегантное изложение материала. В обзоре: R. Slansky, *Phys. Repts.* **79**, 1 (1981), собраны таблицы теоретико-групповых тождеств, особенно полезных для построения неабелевых калибровочных теорий.

которое называют *тождеством Якоби*. С математической точки зрения (когда генераторы рассматриваются просто как абстрактные величины, а не как эрмитовы операторы), тождество Якоби является аксиомой, которая должна удовлетворяться для того, чтобы данный набор коммутационных соотношений (или, что то же, структурных констант) определял алгебру Ли.

Коммутационные соотношения в алгебре Ли полностью определяют закон группового умножения соответствующей группы Ли в окрестности единицы. Для достаточно далеких от единичного преобразований вступают в игру дополнительные вопросы глобальности. Хорошо известным примером являются группы  $SU(2)$  и  $O(3)$ , имеющие одинаковые коммутационные соотношения, но разную глобальную структуру. Однако лагранжиан неабелевой калибровочной теории зависит только от алгебры Ли локальной группы калибровочной симметрии, поэтому далее мы будем игнорировать вопросы глобальной структуры группы.

### Классификация алгебр Ли

В приложениях к калибровочным теориям локальная симметрия обычно задается унитарным преобразованием набора полей. Таким образом, нас в первую очередь интересуют алгебры Ли, которые имеют конечномерные эрмитовы представления, приводящие к конечномерным унитарным представлениям соответствующих групп Ли. Мы будем также предполагать, что число генераторов конечно. Такие алгебры Ли называются *компактными*, потому что эти условия предполагают, что соответствующие им группы Ли — конечномерные компактные многообразия.

Если один из генераторов  $T^a$  коммутирует со всеми остальными, он генерирует независимую непрерывную абелеву группу. Такую группу, имеющую структуру группы фазовых вращений

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad (15.71)$$

мы называем  $U(1)$ . Если алгебра не содержит таких коммутирующих элементов, она называется *полупростой*. Если к тому же генераторы алгебры не могут быть разбиты на два взаимно коммутирующих набора, алгебра является *простой*. В общем случае алгебра Ли является прямой суммой неабелевых простых компонент и дополнительных абелевых генераторов.

Удивительным образом условия простоты и компактности алгебры Ли накладывают на нее очень большие ограничения. Классификация всех возможных компактных простых алгебр Ли Киллингом и Картаном явилась одним из триумфов математики XIX в. Почти все из этих алгебр, за исключением пяти, принадлежат к одному из трех бесконечных семейств. Эти три бесконечные семейства алгебр соответствуют так называемым *классическим группам*, чью структуру удобно определять через конкретные матричные представления. Определения трех семейств классических групп таковы.

#### 1. Группа унитарных преобразований $N$ -мерных векторов.

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  являются комплексными  $N$ -мерными векторами. Тогда общее линейное преобразование имеет вид:

$$\eta_a \rightarrow U_{ab}\eta_b, \quad \xi_a \rightarrow U_{ab}\xi_b. \quad (15.72)$$

Мы говорим, что это преобразование *унитарно*, если оно сохраняет внутреннее произведение  $\eta_a^*\xi_a$ . Чисто фазовые преобразования

$$\xi_a \rightarrow e^{i\alpha}\xi_a \quad (15.73)$$



образуют подгруппу  $U(1)$ , которая коммутирует со всеми остальными унитарными преобразованиями. Исключив эту подгруппу, мы получим простую группу Ли, называемую  $SU(N)$ . Она состоит из всех унитарных матриц  $N \times N$ , удовлетворяющих условию  $\det(U) = 1$ . Генераторы группы  $SU(N)$  представляются  $N \times N$  эрмитовыми матрицами  $t^a$ , подчиненными условию ортогональности оператору (15.73):

$$\text{tr}[t^a] = 0. \quad (15.74)$$

Всего существует  $N^2 - 1$  независимых матриц, удовлетворяющих этим условиям.

### 2. Группа ортогональных преобразований $N$ -мерных векторов.

Это подгруппа унитарных преобразований, сохраняющих симметричное внутреннее произведение:

$$\eta_a E_{ab} \xi_b, \quad \text{где } E_{ab} = \delta_{ab}. \quad (15.75)$$

Это обычное скалярное произведение векторов, поэтому эта группа есть группа вращений в  $N$  измерениях  $SO(N)$ . (Добавление отражения приводит к группе  $O(N)$ ). Каждой плоскости в  $N$  измерениях соответствует независимое вращение, поэтому  $SO(N)$  имеет  $N(N - 1)/2$  генераторов.

### 3. Группа симплектических преобразований $N$ -мерных векторов.

Это подгруппа  $N \times N$  унитарных преобразований с четным  $N$ , сохраняющих антисимметричное внутреннее произведение:

$$\eta_a E_{ab} \xi_b, \quad \text{где } E_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.76)$$

где элементами матрицы  $E_{ab}$  являются блочные матрицы  $N/2 \times N/2$ . Эта группа обозначается  $Sp(N)$ ; число ее генераторов  $N(N + 1)/2$ .

Кроме этих трех семейств существует еще пять *исключительных* алгебр Ли, обозначаемых в картановской классификации через  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  и  $E_8$ . Из них  $E_6$  и  $E_8$  находят применение как группы локальных симметрий единых моделей фундаментальных взаимодействий. Тем не менее, мы не будем далее обсуждать эти исключительные группы. На самом деле, большинство наших примеров будет включать только группы  $SU(N)$ .

## Представления

Как только задана локальная группа симметрии, калибровочные поля, появляющиеся в лагранжиане, наиболее естественно преобразуются по конечномерному унитарному представлению этой группы. Поэтому возникает вопрос: как систематически находить все такие представления для любой данной группы Ли? Вспомним, что для группы  $SU(2)$  представления могут быть построены прямо из коммутационных соотношений применением повышающих и понижающих операторов  $J_+$  и  $J_-$ . Это построение можно обобщить для нахождения конечномерных представлений любой компактной алгебры Ли. Тем не менее, в этой книге мы будем работать с относительно простыми представлениями, которые могут быть построены при помощи менее формальных методов.

Прежде чем обсуждать представления алгебр Ли, следует рассмотреть некоторые общие вопросы теории представлений групп. Для данной группы симметрии  $G$  конечномерное унитарное представление алгебры, соответствующей этой группе, дается набором  $t^a$  эрмитовых матриц размерностью  $d \times d$ , удовлетворяющих коммутационным

соотношениям (15.68). Число  $d$  есть *размерность* представления. Произвольное представление может быть разложено на прямую сумму *неприводимых* представлений выбором базиса, в котором все матрицы представления одновременно блочно-диагональны. Обозначим матрицы  $r$ -го неприводимого представления через  $t_r^a$ .

Обычно нормировку матриц  $t_r^a$  определяют, исходя из значения следа их произведений. Для полупростой алгебры Ли сами матрицы  $t_r^a$  бесследовы. Рассмотрим след произведения двух матриц генераторов:

$$\text{tr}[t_r^a t_r^b] \equiv D^{ab}. \quad (15.77)$$

До тех пор, пока матрицы  $t_r^a$  — эрмитовы, матрица  $D^{ab}$  положительно определена. Выберем базис генераторов  $T^a$  так, чтобы эта матрица была пропорциональна единичной. Можно показать, что если это сделано для одного неприводимого представления, это же будет верно для всех неприводимых представлений. В таком базисе

$$\text{tr}[t_r^a t_r^b] = C(r)\delta^{ab}, \quad (15.78)$$

где  $C(r)$  является константой для каждого представления. Из уравнения (15.78) и коммутационных соотношений (15.68) получаем следующее выражение для структурных констант:

$$f^{abc} = -\frac{i}{C(r)} \text{tr} \{ [t_r^a, t_r^b] t_r^c \}. \quad (15.79)$$

Из этого выражения следует, что  $f^{abc}$  полностью антисимметричны.

Для каждого неприводимого представления  $r$  группы  $G$  существует соответствующее *сопряженное* представление  $\bar{r}$ . Представление  $r$  порождает следующее инфинитезимальное преобразование:

$$\phi \rightarrow (1 + i\alpha^a t_r^a)\phi. \quad (15.80)$$

Комплексно-сопряженное преобразование

$$\phi^* \rightarrow (1 - i\alpha^a (t_r^a)^*)\phi^*, \quad (15.81)$$

должно также давать инфинитезимальный элемент представления группы  $G$ . Таким образом, сопряженное к  $r$  представление дается матрицами:

$$t_{\bar{r}}^a = -(t_r^a)^* = -(t_r^a)^T. \quad (15.82)$$

Поскольку произведение  $\phi^* \phi$  инвариантно относительно унитарных преобразований, из полей, преобразующихся по представлениям  $r$  и  $\bar{r}$ , можно образовать групповой инвариант.

Если существует унитарное преобразование  $U$ , такое, что  $t_{\bar{r}}^a = U t_r^a U^\dagger$ , представления  $r$  и  $\bar{r}$  эквивалентны. При этом представление  $r$  *действительно*. В этом случае существует матрица  $G_{ab}$  такая, что если  $\eta$  и  $\xi$  принадлежат представлению  $r$ , комбинация  $G_{ab}\eta_a\xi_b$  есть инвариант. Иногда удобно различать случаи, когда  $G_{ab}$  симметрична и антисимметрична. В первом случае представление *строго действительно*; во втором — *псевдодействительно*. Оба случая появляются уже в  $SU(2)$ : из двух векторов можно построить инвариантную комбинацию  $v_a w_a$ , поэтому вектор преобразуется по действительному представлению, а из двух спиноров можно построить инвариантную комбинацию  $\varepsilon^{ab}\eta_a\xi_b$ , поэтому спинор преобразуется по псевдодействительному представлению.

На этом языке можно обсудить простейшие представления классических групп. Для  $SU(N)$  основное неприводимое представление (часто его называют *фундаментальным* представлением) задается  $N$ -мерным комплексным вектором. Для  $N > 2$  это представление комплексно, поэтому существует второе неэквивалентное представление  $\bar{N}$ . (В случае  $SU(2)$  это псевдодействительное спинорное представление). Для  $SO(N)$  фундаментальный  $N$ -мерный вектор реализует (строго) действительное представление. Для  $Sp(N)$  фундаментальное представление псевдодействительно.

Для любой простой алгебры Ли существует еще одно выделенное неприводимое представление, которому принадлежат генераторы алгебры. Это представление называется *присоединенным* и обозначается через  $r = G$ . Матрицы представления равны структурным константам:

$$(t_G^b)_{ac} = if^{abc}. \quad (15.83)$$

При этом условие коммутации

$$([t_G^b, t_G^c])_{ae} = if^{bcd}(t_G^d)_{ae} \quad (15.84)$$

— это просто переписанное в другом виде тождество Якоби (15.70). Поскольку структурные константы действительны и антисимметричны,  $t_G^a = -(t_G^a)^*$ , присоединенное представление всегда действительно. Таким образом, размерность присоединенного представления для классических групп Ли дается выражением:

$$d(G) = \begin{cases} N^2 - 1 & \text{для } SU(N), \\ N(N-1)/2 & \text{для } SO(N), \\ N(N+1)/2 & \text{для } Sp(N). \end{cases} \quad (15.85)$$

Интерпретация  $f^{abc}$  как матричных элементов представления позволяет по-новому взглянуть на некоторые величины, введенные в разделе 15.2. Ковариантная производная действует на поля в присоединенном представлении следующим образом:

$$(D_\mu \phi)_a = \partial_\mu \phi_a - ig A_\mu^b (t_G^b)_{ac} \phi_c = \partial_\mu \phi_a + g f^{abc} A_\mu^b \phi_c. \quad (15.86)$$

Следовательно, в инфинитезимальной форме калибровочного преобразования можно узнать движение:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu \alpha)^a. \quad (15.87)$$

Уравнение движения (15.51) для калибровочных полей может быть переписано в виде:

$$(D^\mu F_{\mu\nu})^a = -gj_\nu^a. \quad (15.88)$$

В этих двух выражениях произвольные на первый взгляд слагаемые  $f^{abc}$  естественно возникают как части ковариантной производной. Дополнительное тождество следует из рассмотрения двойного антисимметричного коммутатора ковариантных производных:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} [D_\nu, [D_\lambda, D_\sigma]].$$

Эта величина обращается в нуль из-за полной антисимметричности, подобно (15.69). Результат может быть записан в виде:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (D_\nu F_{\lambda\sigma})^a = 0. \quad (15.89)$$

Это уравнение называется *тождеством Бьянки* для неабелевой калибровочной теории и является аналогом однородных уравнений Максвелла в электродинамике.

## Оператор Казимира

Представления группы  $SU(2)$  характеризуются собственными значениями полного спина  $J^2$ . Для произвольной алгебры Ли оператор

$$T^2 = T^a T^a \quad (15.90)$$

(по повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование) коммутирует со всеми операторами группы. Действительно,

$$[T^b, T^a T^a] = (i f^{bac} T^c) T^a + T^a (i f^{bac} T^c) = i f^{bac} \{T^c, T^a\}, \quad (15.91)$$

что обращается в нуль из-за антисимметричности  $f^{abc}$ . Иначе говоря,  $T^2$  является инвариантом алгебры; это означает, что в каждом неприводимом представлении  $T^2$  принимает постоянное значение. Следовательно, матричное представление  $T^2$  пропорционально единичной матрице:

$$t_r^a t_r^a = C_2(r) \cdot \mathbf{1}, \quad (15.92)$$

где  $\mathbf{1}$  означает  $d(r) \times d(r)$  единичную матрицу, а константа  $C_2(r)$  называется значением *квадратичного оператора Казимира* данного представления. В присоединенном представлении (15.92) удобно переписать в виде:

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}. \quad (15.93)$$

Операторы Казимира очень часто появляются в вычислениях в неабелевых калибровочных теориях. Кроме того, инвариант  $C(r)$  из (15.78) просто связан со значением оператора Казимира: если свернуть (15.78) с  $\delta^{ab}$  и преобразовать левую часть, используя (15.92), то:

$$d(r) C_2(r) = d(G) C(r). \quad (15.94)$$

Поэтому полезно вычислить  $C_2(r)$  для простейших представлений  $SU(N)$ .

Для  $SU(2)$  фундаментальным двумерным представлением является спинорное представление, которое при помощи матриц Паули записывается в виде:

$$t_2^a = \frac{\sigma^a}{2}. \quad (15.95)$$

При этом  $\text{tr}[t_2^a t_2^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ . Выберем генераторы  $SU(N)$  так, чтобы три из них совпадали с генераторами (15.95), действующими на первые две компоненты  $N$ -вектора  $\xi$ . Тогда для любой матрицы фундаментального представления

$$\text{tr}[t_N^a t_N^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (15.96)$$

Это соглашение фиксирует значения  $C(r)$  и  $C_2(r)$  для всех неприводимых представлений  $SU(N)$ . Для фундаментальных представлений  $N$  и  $\bar{N}$   $C(N)$  дается прямо формулой (15.96), а  $C_2(N)$  следует из (15.94):

$$C(N) = \frac{1}{2}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (15.97)$$

Чтобы вычислить оператор Казимира в присоединенном представлении, построим это представление из произведения  $N$  и  $\bar{N}$ . Обсудим сначала с общей точки зрения произведение неприводимых представлений. Тензорное произведение двух представлений  $r_1, r_2$  есть представление размерности  $d(r_1) \cdot d(r_2)$ . Объект, преобразующийся по этому представлению, может быть записан как тензор  $\Xi_{pq}$ , в котором первый индекс преобразуется по  $r_1$ , а второй — по  $r_2$ . В общем случае такое произведение может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений; символически:

$$r_1 \times r_2 = \sum r_i. \quad (15.98)$$

Матрицы операторов в представлении  $r_1 \times r_2$  равны:

$$t_{r_1 \times r_2}^a = t_{r_1}^a \otimes 1 + 1 \otimes t_{r_2}^a, \quad (15.99)$$

где первая матрица в каждом произведении действует на первый индекс, а вторая — на второй.

Оператор Казимира в построенном представлении равен:

$$(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = (t_{r_1}^a)^2 \otimes 1 + 2t_{r_1}^a \otimes t_{r_2}^a + 1 \otimes (t_{r_2}^a)^2.$$

Возьмем след; поскольку матрицы  $t_r^a$  бесследовы, след второго слагаемого в правой части равен нулю. Тогда

$$\text{tr}(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = (C_2(r_1) + C_2(r_2))d(r_1)d(r_2). \quad (15.100)$$

С другой стороны, разложение (15.98) означает, что

$$\text{tr}(t_{r_1 \times r_2}^a)^2 = \sum C_2(r_i)d(r_i). \quad (15.101)$$

Приравнявая (15.100) и (15.101), получаем полезное тождество для  $C_2(r)$ .

Применим это тождество для произведения представлений  $N$  и  $\bar{N}$   $SU(N)$ . В этом случае тензор  $\Xi_{pq}$  может содержать слагаемое, пропорциональное инвариантному тензору  $\delta^{ab}$ . Остальные  $N^2 - 1$  независимых компонент  $\Xi_{pq}$  преобразуются как общий бесследовый тензор  $N \times N$ ; матрицы, осуществляющие эти преобразования, образуют присоединенное представление  $SU(N)$ . В этом случае (15.98) принимает вид:

$$N \times \bar{N} = 1 + (N^2 - 1). \quad (15.102)$$

Для этого разложения из формул (15.100) и (15.101) следует тождество

$$\left(2 \cdot \frac{N^2 - 1}{2N}\right)N^2 = 0 + C_2(G) \cdot (N^2 - 1). \quad (15.103)$$

Таким образом, для  $SU(N)$

$$C_2(G) = C(G) = N. \quad (15.104)$$

Некоторые дополнительные примеры вычисления значений квадратичного оператора Казимира даны в задаче 15.5. Однако примеры, которые мы обсудили в этом разделе, в совокупности с основными рассмотренными теоретико-групповыми понятиями дают достаточно материала для проведения наиболее важных вычислений в физически интересных неабелевых калибровочных теориях.

## Задачи

**15.1. Явные вычисления для группы  $SU(3)$ .** Стандартный базис для фундаментального представления  $SU(3)$  дается матрицами:

$$\begin{aligned}
 t^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0-i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0-i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 t^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & t^8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

- Объясните, почему в этом базисе ровно восемь матриц.
- Вычислите все коммутаторы этих матриц и определите структурные константы для  $SU(3)$ . Покажите, что в используемой нормировке  $f^{abc}$  полностью антисимметричны. (Это упражнение довольно утомительно; при желании можно ограничиться только наиболее типичными примерами коммутаторов.)
- Проверьте справедливость соотношения ортогональности (15.78) и вычислите константу  $C(r)$  в данном представлении.
- Вычислите значение квадратичного оператора Казимира прямо из определения (15.92) и проверьте связь (15.94) между  $C_2(r)$  и  $C(r)$ .

**15.2.** Выпишите базисные матрицы присоединенного представления  $SU(2)$ . Вычислите  $C(G)$  и  $C_2(G)$  согласно определениям (15.78) и (15.92).

### 15.3. Кулоновский потенциал.

- Используя функциональный интеграл, вычислите вакуумное среднее вильсоновской петли в квантовой электродинамике без фермионов. Покажите, что

$$\langle U_P(z, z) \rangle = \exp i \left[ -e^2 \oint_P dx^\mu \oint_P dy^\nu g_{\mu\nu} \frac{1}{2\pi^2(x-y)^2} \right],$$

где интегрирование идет по замкнутой кривой  $P$ .

- Рассмотрим прямоугольную вильсоновскую петлю с (пространственноподобной) шириной  $R$  и (временноподобной) длиной  $T$ ,  $T \gg R$ . Вычислите вакуумное среднее вильсоновской петли в этом пределе и сравните с общим выражением для оператора эволюции,

$$\langle U_P \rangle = \exp[-iE(R)T],$$

где  $E(R)$  — энергия электромагнитных источников, связанная с вильсоновской петлей. Покажите, что потенциальная энергия этих источников описывается кулоновским потенциалом  $V(R) = -e^2/4\pi R$ .

- (с) Предполагая, что пропагатор неабелевого калибровочного поля дается выражением в фейнмановской калибровке:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\mu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{p^2} e^{-ip \cdot (x-y)},$$

вычислите вакуумное среднее неабелевой вильсоновской петли с точностью до  $g^2$ . Результат будет зависеть от представления  $r$  калибровочной группы, в котором принимают значения матрицы, стоящие в экспоненте. Покажите, что с принятой точностью кулоновский потенциал в неабелевой калибровочной теории имеет вид  $V(R) = -g^2 C_2(r)/4\pi R$ .

- 15.4. Скалярный пропагатор в калибровочной теории.** Рассмотрим уравнение для функции Грина уравнения Клейна–Гордона:

$$(\partial^2 + m^2) D_F(x, y) = -i \delta^{(4)}(x - y).$$

Можно найти интересное представление для этой функции Грина, переписав ее в виде:

$$D_F(x, y) = \int_0^\infty dT D(x, y, T),$$

где  $D(x, y, T)$  удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial T} - (\partial^2 + m^2) \right] D(x, y, T) = i \delta(T) \delta^{(4)}(x - y).$$

При помощи решения уравнения Шредингера в виде функционального интеграла, полученного в разделе 9.1, найдите  $D(x, y, T)$ .

- (а) Используя явную формулу для пропагатора уравнения Шредингера, покажите, что это интегральное представление совпадает со стандартным выражением для фейнмановского пропагатора.
- (б) Используя описанный выше метод, покажите, что выражение

$$D_F(x, y) = \int_0^\infty dT \int \mathcal{D}x \exp \left[ i \int dt \frac{1}{2} \left( \left( \frac{dx^\mu}{dt} \right)^2 - m^2 \right) - ie \int dt \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu(x) \right]$$

является представлением в виде функционального интеграла для скалярного пропагатора в произвольном внешнем электромагнитном поле. Покажите, в частности, что функциональный интеграл удовлетворяет подходящему уравнению Шредингера. Заметьте, что этот интеграл зависит от  $A_\mu$  через вильсоновскую петлю.

- (с) Обобщите это выражение на случай неабелевой калибровочной теории. Покажите, что функциональный интеграл удовлетворяет подходящему уравнению Шредингера только если матрицы, стоящие в экспоненте для вильсоновской петли, упорядочены вдоль траектории.

**15.5. Вычисления значений оператора Казимира.** Альтернативный способ вычисления квадратичного оператора Казимира состоит в вычислении  $C(r)$  в формуле:

$$\text{tr}[t_r^a t_r^b] = C(r) \delta^{ab},$$

путем выбора  $t_r^a$  и  $t_r^b$  лежащими в подгруппе  $SU(2)$  калибровочной группы.

- (а) Под действием подгруппы  $SU(2)$  калибровочной группы  $G$  неприводимое представление  $r$  группы  $G$  разлагается на сумму представлений  $SU(2)$ :

$$r \rightarrow \sum j_i,$$

где  $j_i$  являются значениями спинов представлений  $SU(2)$ . Покажите, что

$$3C(r) = \sum_i j_i(j_i + 1)(2j_i + 1).$$

- (b) Под действием подгруппы  $SU(2)$  группы  $SU(N)$  фундаментальное представление  $N$  преобразуется как двухкомпонентный спинор ( $j = \frac{1}{2}$ ) и  $(N - 2)$  синглетов. Используйте это, чтобы проверить формулу  $C(N) = \frac{1}{2}$ . Покажите, что присоединенное представление  $SU(N)$  распадается на одно со спином 1,  $2(N - 2)$  со спинами  $\frac{1}{2}$  и синглеты. Используйте это разложение, чтобы проверить, что  $C(G) = N$ .
- (c) Симметричные и антисимметричные тензоры второго ранга образуют неприводимые представления  $SU(N)$ . Вычислите  $C_2(r)$  для каждого из этих представлений. Прямая сумма этих представлений — это произведение представлений  $N \times N$ . Проверьте, что ваши результаты для  $C_2(r)$  удовлетворяют тождеству для произведений представлений, которое следует из (15.100) и (15.101).



## КВАНТОВАНИЕ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

В предыдущей главе мы показали, как строить лагранжианы с неабелевой калибровочной симметрией. Однако это только первый шаг на пути применения идеи неабелевой калибровочной инвариантности к описанию реальных взаимодействий в физике элементарных частиц. Мы должны вывести правила для вычисления фейнмановских диаграмм, содержащих неабелевы калибровочные векторные частицы и затем использовать эти правила для вычисления амплитуд рассеяния и сечений. В этой главе мы разберем необходимую для таких вычислений технику.

Параллельно с техническими вопросами мы выясним, как калибровочная симметрия влияет на фейнмановские амплитуды. В любой теории с локальной симметрией некоторые степени свободы полей, появляющихся в лагранжиане, *нефизичны* в том смысле, что их можно произвольно изменять с помощью подходящих калибровочных преобразований. В электродинамике компоненты поля  $A_\mu$ , пропорциональные  $k^\mu$ , направлены вдоль направления преобразований симметрии в функциональном пространстве. В разделе 9.4 мы видели, что этот факт приводит к двум важным следствиям. Во-первых, пропагатор поля  $A_\mu$  неоднозначен: существует много эквивалентных выражений для пропагатора, следующих из лагранжиана КЭД. Во-вторых, вершины в электродинамике таковы, что эта неоднозначность не приводит к разным результатам при вычислении сечений. Например, формула (9.58) дает непрерывное семейство фотонных пропагаторов, параметризованное непрерывным параметром  $\xi$ , но мы немедленно видим, что вся зависимость от  $\xi$  элементов  $S$ -матрицы устраняется в силу тождества Уорда. Неабелевы калибровочные теории содержат подобные неоднозначности и сокращения, но, как мы увидим ниже, структура этих сокращений более запутанна.

Дополнительной целью этой главы является вычисление  $\beta$ -функции Каллана–Симанчика и, соответственно, определение поведения бегущей константы связи в неабелевых калибровочных теориях. Как уже говорилось в гл. 14, эти теории на самом деле *асимптотически свободны*: константа связи в них становится малой при больших импульсах. Этот результат означает применимость неабелевой калибровочной теории как модели сильных взаимодействий. Мы сможем вывести этот результат, как только определим фейнмановские правила для неабелевых калибровочных теорий.

### 16.1. Взаимодействия неабелевых калибровочных бозонов

Большинство фейнмановских правил для неабелевых калибровочных теорий можно получить прямо из лагранжиана Янга–Миллса, следуя методу раздела 9.2. Однако при квантовании электромагнитного поля в разделе 9.4 мы видели, что функциональный интеграл по калибровочному полю следует определять с осторожностью и что в результате аккуратного рассмотрения в квантовой теории могут появиться новые объекты. В этом разделе мы увидим, насколько можно продвинуться в неабелевой

калибровочной теории, игнорируя эти тонкости. В разделе 16.2, внимательно анализируя функциональный интеграл, мы осуществим более точный вывод фейнмановских правил.

### Фейнмановские правила для фермионов и калибровочных бозонов

Как было показано в предыдущей главе, лагранжиан Янга–Миллса имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (16.1)$$

где суммирование по индексу  $a$  означает суммирование по генераторам калибровочной группы  $G$ , а фермионный мультиплет  $\psi$  принадлежит неприводимому представлению группы  $G$ . Тензор напряженности поля равен

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (16.2)$$

где  $f^{abc}$  — структурные константы  $G$ . Ковариантная производная определена при помощи матриц представления  $t_r^a$ :

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t_r^a. \quad (16.3)$$

Далее мы будем опускать индекс  $r$ , за исключением тех случаев, когда он необходим для ясности.

Фейнмановские правила для этого лагранжиана можно вывести из функционального интеграла по полям  $\psi, \bar{\psi}$  и  $A_\mu^a$ . Рассмотрим разложение функционального интеграла в ряд теории возмущений, начав со свободного лагранжиана, соответствующего  $g = 0$ . Свободная теория содержит число свободных фермионов, равное размерности  $d(r)$  представления  $r$ , и число свободных бозонов, равное числу  $d(G)$  генераторов  $G$ . Используя методы раздела 9.5, можно непосредственно вывести фермионный пропагатор:

$$\langle \psi_{i\alpha}(x) \bar{\psi}_{j\beta}(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{\not{k} - m} \right)_{\alpha\beta} \delta_{ij} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (16.4)$$

где  $\alpha, \beta$  — дираковские спинорные индексы, а  $i, j$  — индексы группы симметрии:  $i, j = 1, \dots, d(r)$ . По аналогии с электродинамикой можно предположить, что пропагатор векторных бозонов имеет вид:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \right) \delta^{ab} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (16.5)$$

где  $a, b = 1, \dots, d(G)$ . Мы выведем эту формулу в следующем разделе.

Чтобы найти вид вершин, выпишем нелинейные слагаемые в (16.1). Если обозначить через  $\mathcal{L}_0$  лагранжиан свободного поля, то

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 &+ gA_\lambda^a \bar{\psi} \gamma^\lambda t^a \psi - gf^{abc} (\partial_\kappa A_\lambda^a) A^{\kappa b} A^{\lambda c} - \\ &- \frac{1}{4} g^2 (f^{eab} A_\kappa^a A_\lambda^b) (f^{ecd} A^{\kappa c} A^{\lambda d}). \end{aligned} \quad (16.6)$$

Первое из трех нелинейных слагаемых дает фермион-бозонную вершину

$$ig\gamma^\mu t^a; \quad (16.7)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Feynman rule for fermion vertex: } = ig\gamma^\mu t^a \\
 & \text{Feynman rule for three-gauge boson vertex: } = gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \\
 & \text{Feynman rule for four-gauge boson vertex: } = -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]
 \end{aligned}$$

Рис. 16.1. Правила Фейнмана для фермионных и бозонных вершин в неабелевой калибровочной теории.

которая является матрицей, действующей на спинорные и калибровочные индексы фермионов. Второе нелинейное слагаемое приводит к вершине из трех калибровочных бозонов. Чтобы выписать эту вершину, выберем сначала определенное соглашение для внешних импульсов и лоренцевских и калибровочных индексов. Удобное условие показано на рис. 16.1, где все импульсы входят в вершину. Рассмотрим сначала свертку внешней калибровочной частицы с импульсом  $k$  с первым множителем  $A_\mu^a$ , калибровочной частицы с импульсом  $p$  — со вторым множителем, и калибровочной частицы с импульсом  $q$  — с третьим. Производная вносит множитель  $(-ik_\kappa)$ , если импульс входит в диаграмму. Тогда вклад в целом равен:

$$-igf^{abc}(-ik^\nu)g^{\mu\rho}. \quad (16.8)$$

Всего есть  $3!$  возможных сверток, знаки которых различаются из-за антисимметрии  $f^{abc}$ . Их сумма изображена на рис. 16.1. Наконец, последнее слагаемое в (16.6) приводит к четырехбозонной вершине. В соответствии с правилами рис. 16.1, одна из возможных сверток дает вклад:

$$-ig^2 f^{eab} f^{ecd} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}. \quad (16.9)$$

Всего есть  $4!$  возможных сверток, среди которых группы по 4 одинаковых. Их сумма показана на рис. 16.1.

Заметим, что все эти вершины содержат одну и ту же константу связи  $g$ . Мы вывели такой вид вершин, а следовательно, и равенство констант связи как часть построения лагранжиана из принципа неабелевой калибровочной инвариантности. Однако необходимость этого равенства также можно было бы увидеть *a posteriori*, из свойств фейнмановских амплитуд.

### Равенство констант связи

Мы ожидаем, что фейнмановские амплитуды в неабелевых калибровочных теориях будут удовлетворять тождествам Уорда, похожим на имеющие место в КЭД. Эти тождества Уорда выражают сохранение токов симметрии, которое следует уже из глобальной симметрии теории. В КЭД простейший вид тождеств Уорда получался при

помещении внешних электронов и позитронов на массовую поверхность. В неабелевых калибровочных теориях калибровочные бозоны также несут заряд и поэтому их тоже надо поместить на массовую поверхность, чтобы избавиться от контактных слагаемых. Если все внешние частицы находятся на массовой поверхности, амплитуда рождения калибровочного бозона должна подчиняться условию:

$$k^\mu \left( \text{diagram} \right) = 0 \quad (16.10)$$

Это тождество является не только указанием на локальную калибровочную симметрию, но и имеет глубокий физический смысл. Как и фотон, неабелевый калибровочный бозон имеет только два физических состояния поляризации. В КЭД тождества Уорда на массовой поверхности выражают тот факт, что в процессах рассеяния не образуются нефизические состояния с продольной поляризацией. Тождество Уорда на массовой поверхности в неабелевом случае играют похожую роль.

Давайте проверим тождество Уорда в простом случае на диаграммах низшего порядка, дающих вклад в аннигиляцию фермиона и антифермиона в пару калибровочных бозонов. В порядке  $g^2$  имеется три диаграммы, показанных на рис. 16.2. Первые две похожи на диаграммы КЭД, которые мы изучали в разделе 5.5; их сумма равна

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) &= (ig)^2 \bar{v}(p_+) \left\{ \gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma^\nu t^b + \right. \\ &\left. + \gamma^\nu t^b \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}_+ - m} \gamma^\mu t^a \right\} u(p) \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2). \end{aligned} \quad (16.11)$$

Здесь  $\varepsilon(k_i)$  — векторы поляризации калибровочных бозонов; для физических поляризаций справедливо равенство  $k_i^\mu \varepsilon(k_i) = 0$ . Чтобы проверить тождество Уорда (16.10), мы заменим  $\varepsilon_\nu^*(k_i)$  на  $k_{2\nu}$ . Это дает:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} &= (ig)^2 \bar{v}(p_+) \left\{ \gamma^\mu t^a \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \not{k}_2 t^b + \right. \\ &\left. + \not{k}_2 t^b \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}_+ - m} \gamma^\mu t^a \right\} u(p) \varepsilon_{1\mu}^*. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Поскольку

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{v}(p_+)(-\not{p}_+ - m) = 0, \quad (16.13)$$

можно добавить эти величины к  $\hat{k}_2$  в первом и втором слагаемом в (16.12), чтобы сократить знаменатели. Отсюда

$$i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = (ig)^2 \bar{v}(p_+) \left\{ -i\gamma^\mu [t^a, t^b] \right\} u(p) \varepsilon_{1\mu}^*. \quad (16.14)$$

В абелевом случае это выражение обращается в нуль. Однако в неабелевом случае остающийся член не равен нулю и зависит от коммутатора генераторов калибровочной группы:

$$i\mathcal{M}_{1,2}^{\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = -g^2 \bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p) \varepsilon_{1\mu}^* \cdot f^{abc} t^c. \quad (16.15)$$

Чтобы сократить этот член, нужно найти еще один вклад. Заметим, что это слагаемое имеет структуру групповых индексов фермион-бозонной вершины ( $g\gamma^\mu t^c$ ), умноженной

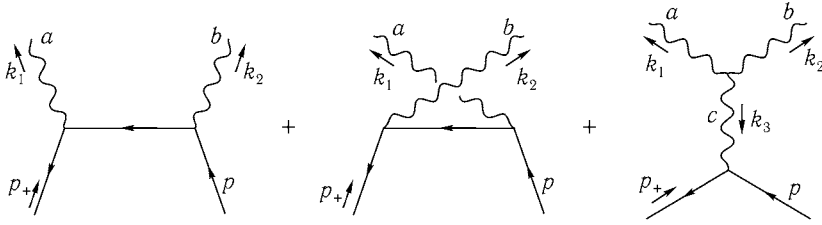


Рис. 16.2. Диаграммы, дающие вклад в амплитуду аннигиляции фермиона и антифермиона в два калибровочных бозона.

на трехбозонную вершину ( $gf^{abc}$ ). Но это как раз та структура, которую имеет третья диаграмма на рис. 16.2.

Чтобы проверить, что сокращение на самом деле происходит, вычислим вклад третьей диаграммы:

$$i\mathcal{M}_3^{\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^* \varepsilon_{2\nu}^* = ig\bar{v}(p_+) \gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2} \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \times \\ \times gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k_2 - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)^\nu],$$

где  $k_3 = -k_1 - k_2$ . Если заменить  $\varepsilon_\nu(k_2)$  на  $k_{2\nu}$ , а затем исключить  $k_2$ , используя сохранение импульса, выражение в скобках упростится:

$$\varepsilon_\nu^*(k_2) [g^{\mu\nu}(k_2 - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3)^\nu] \rightarrow \\ \rightarrow k_2^\mu (k_2 - k_1)^\rho + k_2^\rho (k_3 - k_2)^\mu + g^{\rho\mu}(k_1 - k_3) \cdot k_2 = \quad (16.16) \\ = g^{\rho\mu} k_3^2 - k_3^\rho k_3^\mu - g^{\rho\mu} k_1^2 + k_1^\rho k_1^\mu.$$

Предположим, что другой калибровочный бозон с импульсом  $k_1$  находится на массовой поверхности ( $k_1^2 = 0$ ) и что он имеет поперечную поляризацию ( $k_1^\mu \varepsilon_\mu(k_1) = 0$ ). Тогда третье и четвертое слагаемые в последней строчке обращаются в нуль. Кроме того, слагаемое  $k_3^\rho k_3^\mu$  обращается в нуль после свертки с фермионным током. В оставшемся слагаемом  $k_3^2$  сокращает бозонный пропагатор, и остается выражение

$$i\mathcal{M}_3^{\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^* k_{2\nu} = +g^2 \bar{v}(p_+) \gamma^\mu u(p) \varepsilon_{1\mu}^* \cdot f^{abc} t^c, \quad (16.17)$$

которое точно сокращает (16.15).

Заметим, что это сокращение имеет место, только если значение константы связи в трехбозонной вершине равно ее значению в фермион-бозонной вершине. Аналогично, сумма диаграмм для бозон-бозонного рассеяния, изображенных на рис. 16.3, не удовлетворяет тождеству Уорда, если константа связи в четырехбозонной вершине не равняется константе связи в трехбозонной вершине. Таким образом, константы связи всех трех нелинейных слагаемых в лагранжиане Янга–Миллса *должны* быть одинаковыми, чтобы сохранить тождества Уорда и не допустить рождения бозонов с нефизической поляризацией. Обратное, неабелева калибровочная симметрия лагранжиана гарантирует, что эти константы *на самом деле* равны. Симметрия, таким образом, выполняет ту роль, которую мы ожидали от нее в нашем обсуждении в начале гл. 15, приводя к согласованной теории взаимодействия векторных частиц.

### Пробел в доказательстве

Преыдушие рассуждения имеют один серьезный недостаток. На последнем этапе мы должны были предположить, что второй калибровочный бозон поперечен. Однако

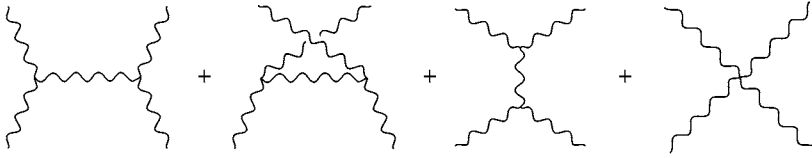


Рис. 16.3. Диаграммы, дающие вклад в амплитуду бозон-бозонного рассеяния.

можно ожидать, что эта информация должна следовать из самого вывода, а не быть привнесена извне. В КЭД фейнмановские диаграммы предсказывают, что когда электрон и позитрон аннигилируют в два фотона, образуются только имеющие физический смысл состояния фотонов с поперечной поляризацией. Амплитуды образования фотонов с другой поляризацией сокращают друг друга и дают нуль, как мы видели в (5.80). Это утверждение несправедливо для фейнмановских правил в неабелевой калибровочной теории, которые мы разработали до сих пор.

Чтобы более конкретно обрисовать это противоречие, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть  $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$  — светоподобный вектор:  $k^2 = 0$ . Тогда существуют два чисто пространственных вектора, ортогональных к  $\mathbf{k}$ . Если  $k$  — импульс калибровочного бозона, эти векторы задают две поперечных поляризации. Чтобы построить ортогональный базис, мы должны также включить состояния с продольной поляризацией, вектор поляризации которого параллелен  $k$ , и времениподобное поляризационное состояние. Наиболее удобно работать с двумя светоподобными линейными комбинациями этих состояний, векторы поляризации которых параллельны векторам  $k^\mu$  и  $\bar{k}^\mu = (k^0, -\mathbf{k})$ . Эти два состояния безмассовых векторных частиц с нефизической поляризацией можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_\mu^+(k) = \left( \frac{k^0}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}, \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|} \right); \quad \varepsilon_\mu^-(k) = \left( \frac{k^0}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}, -\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|} \right). \quad (16.18)$$

Будем называть  $\varepsilon^+(k)$  и  $\varepsilon^-(k)$  соответственно *направленным вперед* и *направленным назад* светоподобным вектором поляризации. Обозначим два состояния с поперечной поляризацией через  $\varepsilon_{i\mu}^T(k)$ , где  $i = 1, 2$ . Четыре вектора поляризации подчиняются условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^T \cdot \varepsilon_j^{*T} &= -\delta_{ij}, & \varepsilon^+ \cdot \varepsilon_i^T &= \varepsilon^- \cdot \varepsilon_i^T = 0, \\ (\varepsilon^+)^2 &= (\varepsilon^-)^2 = 0, & \varepsilon^+ \cdot \varepsilon^- &= 1. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Они также удовлетворяют соотношению полноты:

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^{*+} + \varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^{*-} - \sum_i \varepsilon_{i\mu}^T \varepsilon_{i\nu}^{*T}. \quad (16.20)$$

Используя эти обозначения, можно конкретно указать на пробел в доказательстве тождества Уорда. Фейнмановские диаграммы на рис. 16.2, очевидно, предсказывают ненулевую амплитуду образования поляризованного вперед и поляризованного назад калибровочных бозонов. В этом случае мы подставляем  $\varepsilon_\mu^{+*}(k)$  и  $\varepsilon_\nu^{-*}(k)$  в качестве двух векторов поляризации. Тогда слагаемое, пропорциональное  $k^\rho k^\mu$ , в (16.16) больше не равно нулю; теперь

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= ig\bar{v}(p_+) \gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2} \varepsilon_\mu^{-*}(k_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{k}_2|} \cdot g f^{abc} [-k_1^\rho k_1^\mu] = \\ &= ig\bar{v}(p_+) \gamma_\rho t^c u(p) \frac{-i}{k_3^2} \cdot (-g) f^{abc} k_1^\rho \cdot \frac{|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}_2|}. \end{aligned} \quad (16.21)$$

Можно ли просто проигнорировать этот полностью нефизический процесс? Мы вольны сделать это в вычислениях амплитуд в ведущем порядке, но этот процесс будет снова преследовать нас в петлевых диаграммах. Вспомним, как в разделе 7.3 оптическая теорема (7.49) связывала мнимую часть петлевой диаграммы с квадратом соответствующей амплитуды рассеяния, получаемой разрезанием диаграммы поперек петли. Если мы применим оптическую теорему к диаграмме, показанной на рис. 16.4, то получим парадокс. В петле из калибровочных бозонов в левой части можно заменить множители  $g_{\mu\nu}$  в пропагаторах на суммы (16.20) по всем векторам поляризации. Тогда из оптической теоремы вытекает, что все четыре поляризации, даже нефизические, надо включить в конечные состояния калибровочных бозонов в правой части. Мы сталкиваемся с необходимостью выбора: либо разрешить образование нефизических состояний, либо признать несправедливой оптическую теорему. Третьей возможностью, в равной степени непривлекательной, был бы отказ от нашего выражения (16.5) для пропагатора калибровочных бозонов. Ясно, что мы упустили какой-то ключевой элемент квантово-механической структуры неабелевых калибровочных теорий.

$$2 \operatorname{Im} \text{---} \text{---} \text{---} \stackrel{?}{=} \int d\Pi \left| \text{---} \right|^2$$

Рис. 16.4. Парадокс для оптической теоремы в калибровочных теориях.

## 16.2. Лагранжиан Фаддеева–Попова

Неудивительно, что у нас возникли проблемы с фейнмановскими правилами для неабелевых калибровочных теорий, поскольку мы были не очень внимательны при их выводе. В частности, мы на самом деле не вывели выражение (16.5) для пропагатора калибровочного поля. В этом разделе мы устраним возникшие трудности, проделав формальный вывод этого выражения. Мы обнаружим, что, хотя выражение (16.5) действительно верно, оно является неполным: к нему следует добавить дополнительные правила совершенно нового типа.

Чтобы определить функциональный интеграл в теории с неабелевой калибровочной инвариантностью, мы используем метод Фаддеева–Попова, как в разделе 9.4 при квантовании электромагнитного поля. Наше рассуждение будет близко следовать разделу 9.4. Однако, как теперь можно ожидать, неабелева локальная симметрия привнесет новые хитрости и сюрпризы.

Рассмотрим сначала квантование чисто калибровочной теории без фермионов. Чтобы вывести правила Фейнмана, нужно рассмотреть функциональный интеграл:

$$\int \mathcal{D}A \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \right) \right]. \quad (16.22)$$

Как и в абелевом случае, лагранжиан остается неизменным вдоль бесконечного числа направлений в пространстве полевых конфигураций, соответствующих локальным калибровочным преобразованиям. Чтобы вычислить функциональный интеграл, мы должны выделить интегрирования вдоль этих направлений в качестве множителя, ограничив область интегрирования оставшегося интеграла меньшим пространством.

Как в электродинамике, ограничим калибровочные направления, потребовав фиксации калибровки  $G(A) = 0$  в каждой точке  $x$ . Следуя Фаддееву и Попову, можно ввести это ограничение, вставив тождество (9.53) под знак функционального интеграла:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right). \quad (16.23)$$

Здесь  $A^\alpha$  — калибровочное поле  $A$ , преобразованное при помощи конечного калибровочного преобразования, как в (15.47):

$$(A^\alpha)_\mu^a t^a = e^{i\alpha^a t^a} [A_\mu^b t^b + \frac{i}{g} \partial_\mu] e^{-i\alpha^c t^c}. \quad (16.24)$$

При вычислении детерминанта более полезна инфинитезимальная форма этого преобразования:

$$(A^\alpha)_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a, \quad (16.25)$$

где  $D_\mu$  — ковариантная производная (15.86), действующая на поле в присоединенном представлении. Заметим, что, поскольку фиксирующая калибровку функция  $G(A)$  линейна, функциональная производная  $\delta G(A^\alpha)/\delta \alpha$  не зависит от  $\alpha$ .

Так как лагранжиан калибровочно-инвариантен, можно заменить  $A$  на  $A^\alpha$  в экспоненте (16.22). Тогда, как и в абелевом случае, можно изменить порядок интегрирования по  $A$  и  $\alpha$  и сделать замену переменных  $A$  на  $A' = A^\alpha$  во внутреннем интеграле. Преобразование (16.24) выглядит более сложно, чем в абелевом случае, однако это не более чем линейный сдвиг поля  $A_\mu^a$  вместе с унитарным вращением различных компонент симметричного мультиплетта  $A_\mu^a(x)$  в каждой точке. Обе эти операции сохраняют меру

$$\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{a,\mu} dA_\mu^a. \quad (16.26)$$

Таким образом,  $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A'$  под интегралом по  $\alpha$ . Так же как и в абелевом случае, интеграл по калибровочным движениям  $\alpha$  факторизуется и может быть отнесен к общему нормировочному множителю, что дает

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right). \quad (16.27)$$

Этот нормировочный множитель сокращается при вычислении корреляционных функций калибровочно-инвариантных операторов.

С этой точки зрения вывод пропагатора для калибровочного бозона происходит так же, как и для пропагатора фотона. Выберем обобщенное условие калибровки Лоренца:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x), \quad (16.28)$$

с гауссовым весом для  $\omega^a$  как и в (9.56). Манипуляции из раздела 9.4 приводят к классу пропагаторов калибровочных полей:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (16.29)$$



со свободно настраиваемым калибровочным параметром  $\xi$ . Наша догадка (16.5) соответствует выбору  $\xi = 1$ , который называют *калибровкой Фейнмана – ‘т Хофта*.

До сих пор весь вывод шел параллельно случаю электродинамики. Здесь, однако, возникает еще один нетривиальный момент. В КЭД детерминант в (16.23) не зависел от  $A$ , поэтому его можно было трактовать просто как еще один вклад в нормировочный множитель. В неабелевом случае это больше не верно. Используя инфинитезимальную форму (16.25) калибровочного преобразования, можно вычислить

$$\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu, \quad (16.30)$$

действующий на поле в присоединенном представлении; этот оператор зависит от  $A$ . Таким образом, функциональный детерминант от (16.30) добавляет новые слагаемые в лагранжиан.

Фаддеев и Попов предложили представить этот детерминант как функциональный интеграл по новому набору антикоммутирующих полей, принадлежащих присоединенному представлению:

$$\det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu\right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp\left[i \int d^4x \bar{c}(-\partial^\mu D_\mu)c\right]. \quad (16.31)$$

Мы вывели это формальное тождество в (9.69), используя правила для фермионных функциональных интегралов. (Множитель  $1/g$  поглощен выбором нормировки полей  $c$  и  $\bar{c}$ .) Но для того чтобы давать правильное выражение,  $c$  и  $\bar{c}$  должны быть антикоммутирующими полями, являющимися скалярами по отношению к преобразованиям Лоренца. Квантовые возбуждения этих полей имеют неправильную связь спина со статистикой и поэтому не могут быть физическими частицами. Однако в вычислениях фейнмановских диаграмм мы, тем не менее, можем трактовать эти возбуждения как дополнительные частицы. Эти новые поля и соответствующие им возбуждения-частицы называются *духами Фаддеева – Попова*.

Если временно подавить в себе любопытство по поводу физической интерпретации духов, можно вывести для них правила Фейнмана. Напишем лагранжиан для духов в более явной форме:

$$\mathcal{L}_{\text{дух}} = \bar{c}^a \left( -\partial^2 \delta^{ac} - g \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b \right) c^c. \quad (16.32)$$

Первое слагаемое дает пропагатор духов:

$$\langle c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (16.33)$$

В диаграммах этому пропагатору приписывается стрелка, которая показывает поток духового числа, как на рис 16.5. В слагаемом с взаимодействием в (16.32) производная стоит слева от калибровочного поля; это означает, что такая производная вычисляется при значении импульса, который выходит из вершины вдоль духовой линии. Точное фейнмановское правило изображено на рис. 16.5. Как и для остальных вершин, которые нам встречались, чтобы избежать нарушения тождеств Уорда, константа связи  $g$  в этой вершине должна быть равна константе связи  $g$  в трехбозонной вершине.

Других трудностей в построении теории возмущений для неабелевой калибровочной теории не возникает. В частности, легко ввести фермионы. Окончательный лагранжиан, включающий все эффекты от фиксации калибровки по Фаддееву – Попову, имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c^c. \quad (16.34)$$

Этот лагранжиан приводит к пропагатору (16.29) и набору фейнмановских правил для вершин, изображенных на рис. 16.1 и 16.5.

$$\begin{aligned}
 a \cdots \longleftarrow \cdots b &= \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \\
 \begin{array}{c} b, \mu \\ \text{wavy line} \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad p \quad c \end{array} &= -gf^{abc}p^\mu
 \end{aligned}$$

Рис. 16.5. Правила Фейнмана для духов Фаддеева – Попова.

Рассуждение, которое только что проведено, достаточно для вывода разложения по фейнмановским диаграммам любой корреляционной функции калибровочно-инвариантных операторов в неабелевой теории. В конце раздела 9.4 мы объяснили, что метод Фаддеева – Попова фиксации калибровки также дает правильное калибровочно-инвариантное выражение для элементов  $S$ -матрицы. Это остается верным и в неабелевом случае. Однако доказательство, данное в разделе 9.4, основывается на сокращении амплитуд испускания времениподобных и продольных фотонов, но, как мы уже видели, в неабелевом случае этого сокращения не происходит. В разделе 16.4 мы приведем более тонкое доказательство, в котором духи Фаддеева – Попова будут играть основную роль, что позволит корректно обобщить наше предыдущее доказательство на случай неабелевых калибровочных теорий.

### 16.3. Духи и унитарность

Теперь мы вправе спросить, могут ли новые объекты, обнаруженные в предыдущем разделе, а именно, духи Фаддеева – Попова, разрешить парадокс, с которым мы столкнулись в конце раздела 16.1. Тогда мы увидели, что первая диаграмма на рис. 16.6 содержит ненулевой вклад в мнимую часть амплитуды, что не соответствует никакому возможному конечному состоянию с физическими поляризациями калибровочного бозона. Теперь мы вычислим этот вклад более осторожно. Нужно добавить новый вклад от духов, соответствующий второй диаграмме на рис. 16.6.

Обозначим через  $\mathcal{M}$  изученную в разделе 16.1 амплитуду фермион-антифермионной аннигиляции в калибровочные бозоны:

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2); \tag{16.35}$$

а через  $\mathcal{M}'$  — амплитуду перехода двух калибровочных бозонов в фермион-антифермионную пару. Тогда, следуя правилам Катковского из раздела 7.3, мы найдем мнимую часть первой диаграммы на рис. 16.6, заменив пропагатор калибровочного бозона с импульсом  $k_i$  на

$$-ig_{\mu\nu} \cdot (-2\pi i) \delta(k_i^2). \tag{16.36}$$

Замена обоих пропагаторов дает две дельта-функции, из-за которых четырехмерные интегралы по импульсам калибровочных бозонов превращаются в трехмерные интегралы по фазовому пространству, как в примере из раздела 7.3. Таким образом, получаем выражение:

$$\frac{1}{2} (i\mathcal{M}^{\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (i\mathcal{M}'^{\rho\sigma}), \tag{16.37}$$

проинтегрированное по фазовому пространству двух безмассовых частиц. Множитель  $1/2$  — симметричный фактор для фейнмановской диаграммы, или, иначе, поправка к интегралу по фазовому пространству из-за тождественности частиц.

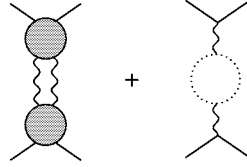


Рис. 16.6. Диаграмма слева, на которой каждый кружок представляет сумму трех вкладов рис. 16.2, является источником возможных расхождений с оптической теоремой. Духовая диаграмма справа сокращает аномальные слагаемые.

Теперь введем представление (16.20) для  $g_{\mu\rho}$  и  $g_{\nu\sigma}$ . Куски, включающие только поперечные поляризации, соответствуют мнимым частям, необходимым, чтобы удовлетворить оптической теореме. Эти слагаемые можно далее не рассматривать. Перекрестные слагаемые между физическими и нефизическими поляризациями обращаются в нуль. Мы показали в разделе 16.1, что

$$i\mathcal{M}^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu}^{T*}(k_1)\varepsilon_{\nu}^{+*}(k_2) = 0. \quad (16.38)$$

Похожее тождество справедливо, если  $\mathcal{M}$  заменить на  $\mathcal{M}'$  и  $\varepsilon^+$  заменить на  $\varepsilon^-$ . Более того, амплитуда обращается в нуль, если оба вектора поляризации направлены либо вперед, либо назад. Выживают только перекрестные слагаемые между поляризациями вперед и назад, которые дают выражение

$$\frac{1}{2}[(i\mathcal{M}^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu}^{-*}\varepsilon_{\nu}^{+*})(i\mathcal{M}'^{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho}^{+}\varepsilon_{\sigma}^{-}) + (i\mathcal{M}^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu}^{+*}\varepsilon_{\nu}^{-*})(i\mathcal{M}'^{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho}^{-}\varepsilon_{\sigma}^{+})], \quad (16.39)$$

проинтегрированное по фазовому пространству. Мы вычислили значение первого множителя в (16.21), и свертка с  $\mathcal{M}'$  производится похожим способом. Подставляя эти результаты, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( ig\bar{v}(p_+)\gamma_{\mu}t^c u(p) \cdot \frac{-i}{(k_1+k_2)^2} \cdot (-gf^{abc}k_1^{\mu}) \right) \times \\ & \times \left( ig\bar{u}(p')\gamma_{\rho}t^d v(p'_+) \cdot \frac{-i}{(k_1+k_2)^2} \cdot (-gf^{abd}(-k_2)^{\rho}) \right) + (k_1 \leftrightarrow k_2). \end{aligned} \quad (16.40)$$

Используя тождество

$$\bar{v}(p_+)\gamma_{\mu}(k_1+k_2)^{\mu}u(p) = \bar{v}(p_+)\gamma_{\mu}(p+p_+)^{\mu}u(p) = 0, \quad (16.41)$$

видим, что два слагаемых в (16.40) равны.

Теперь добавим вклад от духов Фаддеева–Попова. Используя правила Фейнмана (рис. 16.5), можно записать амплитуду фермион-антифермионной аннигиляции в пару духов:

$$i\mathcal{M}_{\text{дух}} = ig\bar{v}(p_+)\gamma_{\mu}t^c u(p) \cdot \frac{-i}{(k_1+k_2)^2} \cdot (-gf^{abc}k_1^{\mu}). \quad (16.42)$$

Это в точности первая половина выражения (16.40). Аналогично, амплитуда аннигиляции пары дух-антидух в фермионы равна второй половине (16.40). Наконец, поскольку

духовые поля Фаддеева–Попова антикоммутируют, следует приписать множитель  $-1$  каждой духовой петле. Таким образом, вклад духов точно сокращает вклад нефизических поляризованных калибровочных бозонов в разрезанных по Каткоскому диаграммах на рис. 16.6.

Этот пример иллюстрирует общую физическую интерпретацию духов Фаддеева–Попова. Эти «частицы» служат отрицательными степенями свободы, сокращающими эффекты от нефизических времениподобных и продольных поляризационных состояний калибровочных бозонов. Простейший эффект от духов можно увидеть из рассмотрения детерминантов, которые появляются при интегрировании по калибровочным и духовым полям в лагранжиане Фаддеева–Попова (16.34). В общем случае  $d$  измерений в фейнмановской калибровке и, для простоты, при нулевой константе связи функциональный интеграл по калибровочным и духовым полям в (16.34) дает:

$$(\det[-\partial^2])^{-d/2} \cdot (\det[-\partial^2])^{+1}. \quad (16.43)$$

Второй детерминант, который входит в положительной степени, поскольку духовые поля антикоммутируют, сокращает вклад от двух компонент поля  $A_\mu$  в первый детерминант. Этот физический эффект был проиллюстрирован с помощью методов раздела 9.4 в задаче 9.2.

## 16.4. Симметрия БРСТ

Чтобы показать, как это сокращение распространяется на полную теорию с взаимодействием, Бекки, Руе, Стора и Тютин ввели в качестве красивого формального инструмента для исследования новую симметрию лагранжиана с фиксированной калибровкой (16.34), которая естественным образом включает духи\*. Эта *БРСТ-симметрия* содержит непрерывный параметр, который является антикоммутирующим числом. Чтобы записать симметрию в простейшем виде, перепишем лагранжиан Фаддеева–Попова, добавив новое (коммутирующее) скалярное поле  $B^a$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2\xi}(B^a)^2 + B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c. \quad (16.44)$$

Новое поле  $B^a$  дает квадратичное слагаемое без производных, так что оно не является обычным динамическим полем. Функциональное интегрирование по  $B^a$  можно выполнить, дополняя выражение (16.44) до полного квадрата; эта процедура возвращает нас к (16.34). Поле такого типа, которое появляется в функциональном интеграле, но не имеет независимой динамики, называется *вспомогательным полем*.

Пусть  $\varepsilon$  — инфинитезимальный антикоммутирующий параметр. Рассмотрим следующее инфинитезимальное преобразование полей в (16.44):

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \varepsilon D_\mu^{ac} c^c, \\ \delta \psi &= i g \varepsilon c^a t^a \psi, \\ \delta c^a &= -\frac{1}{2} g \varepsilon f^{abc} c^b c^c, \\ \delta \bar{c}^a &= \varepsilon B^a, \\ \delta B^a &= 0. \end{aligned} \quad (16.45)$$

\* С. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976); I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint (1975, unpublished); M. Z. Iofa and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **27**, 316 (1976).

Преобразование полей  $A_\mu^a$  и  $\psi$  является локальным калибровочным преобразованием, параметр которого пропорционален духовому полю:  $\alpha^a(x) = g\varepsilon c^a(x)$ . Таким образом, первые два слагаемых в (16.44) инвариантны по отношению к (16.45). Инвариантность третьего слагаемого тривиальна. Преобразование  $A_\mu^a$  в четвертом слагаемом сокращает преобразование  $\bar{c}^a$  в последнем слагаемом. Наконец, нужно проверить преобразование последнего вклада в (16.44):

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu^{ac}c^c) &= D_\mu^{ac}\delta c^c + gf^{abc}\delta A_\mu^b c^c = \\ &= -\frac{1}{2}g\varepsilon\partial_\mu(f^{abc}c^b c^c) - \frac{1}{2}g^2\varepsilon f^{abc}f^{cde}A_\mu^b c^d c^e + \\ &\quad + g\varepsilon f^{abc}(\partial_\mu c^b)c^c + g^2\varepsilon f^{abc}f^{bde}A_\mu^d c^e c^c. \end{aligned} \quad (16.46)$$

Два слагаемых порядка  $g$  явно сокращаются. Используя свойства антикоммутации духовых полей и переставляя индексы, можно переписать оставшиеся два слагаемых в виде:

$$-\frac{1}{2}g^2 f^{abc}f^{cde}(A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A_\mu^e c^b c^d), \quad (16.47)$$

что равно нулю в силу тождества Якоби (15.70). Очевидно, БРСТ-преобразование (16.45) отражает глобальную симметрию лагранжиана с фиксированной калибровкой (16.34) для любого значения калибровочного параметра  $\xi$ .

БРСТ-преобразование имеет еще одно замечательное свойство, которое является естественным следствием его антикоммутативной природы. Пусть  $Q\phi$  — преобразование-БРСТ поля  $\phi$ :  $\delta\phi = \varepsilon Q\phi$ . Например,  $QA_\mu^a = D_\mu^{ac}c^c$ . Тогда для любого поля БРСТ-вариация  $Q\phi$  обращается в нуль:

$$Q^2\phi = 0. \quad (16.48)$$

Обращение в нуль (16.46) доказывает это тождество для второй БРСТ-вариации калибровочного поля. Для духового поля

$$Q^2c^a = \frac{1}{2}g^2 f^{abc}f^{bde}c^c c^d c^e, \quad (16.49)$$

что обращается в нуль в силу тождества Якоби. Легко проверить, что вторая БРСТ-вариация остальных полей в (16.44) также обращается в нуль.

Чтобы описать приложения тождества (16.48), рассмотрим эффективную теорию (16.44) в гамильтоновой формулировке после канонического квантования. Поскольку лагранжиан обладает непрерывной симметрией (16.45), в теории есть сохраняющийся ток, и интеграл от временной компоненты этого тока будет сохраняющимся зарядом  $Q$ , который коммутирует с  $H$ . Действие  $Q$  на полевые конфигурации будет таким же, как описано в предыдущем разделе. Соотношение (16.48) эквивалентно операторному тождеству

$$Q^2 = 0. \quad (16.50)$$

Мы говорим, что БРСТ-оператор  $Q$  *нильпотентен*.

Нильпотентный оператор, коммутирующий с  $H$ , делит пространство собственных состояний  $H$  на три подпространства. Много собственных состояний  $H$  должно уничтожаться действием  $Q$ , так что (16.50) будет удовлетворяться. Обозначим через  $\mathcal{H}_1$  подпространство состояний, которые *не* уничтожаются действием  $Q$ . Через  $\mathcal{H}_2$  обозначим подпространство состояний вида

$$|\psi_2\rangle = Q|\psi_1\rangle, \quad (16.51)$$

где  $|\psi_1\rangle$  принадлежит  $\mathcal{H}_1$ . В соответствии с (16.50) повторное действие  $Q$  на эти состояния дает нуль. Наконец, пусть  $\mathcal{H}_0$  — подпространство состояний  $|\psi_0\rangle$ , удовлетворяющих условию  $Q|\psi_0\rangle = 0$ , но не представимых в виде (16.51). Подпространство  $\mathcal{H}_2$  довольно своеобразно, поскольку в силу (16.50) любые два состояния из этого подпространства имеют нулевое скалярное произведение:

$$\langle\psi_{2a}|\psi_{2b}\rangle = \langle\psi_{1a}|Q|\psi_{2b}\rangle = 0. \quad (16.52)$$

По тем же соображениям равны нулю скалярные произведения состояний из  $\mathcal{H}_2$  с состояниями из  $\mathcal{H}_0$ .

Эти рассуждения кажутся чрезвычайно абстрактными, однако они непосредственно связаны с физикой\*. Чтобы увидеть это, рассмотрим одночастичное состояние в неабелевой калибровочной теории в пределе нулевой константы связи. В соответствии с преобразованием (16.45)  $Q$  превращает направленную вперед компоненту  $A_\mu^a$  в духовое поле; аналогично,  $Q$  превращает один поляризованный по направлению движения калибровочный бозон в дух. При  $g = 0$   $Q$  уничтожает однодуховое состояние. С другой стороны,  $Q$  превращает антидуховое состояние в квант  $B^a$ . Чтобы идентифицировать это состояние, заметим, что из лагранжиана (16.44) вытекает классическое уравнение движения

$$\frac{1}{\xi}B^a = \partial^\mu A_\mu^a. \quad (16.53)$$

Таким образом, кванты  $B^a$  — это кванты  $A_\mu^a$  с такими векторами поляризации, что  $k^\mu \varepsilon_\mu(k) \neq 0$ ; это поляризованные против направления движения калибровочные бозоны.

Теперь мы видим, что среди одночастичных состояний в калибровочной теории поляризованные вперед калибровочные бозоны и антидухи принадлежат к  $\mathcal{H}_1$ , духи и поляризованные назад калибровочные бозоны принадлежат к  $\mathcal{H}_2$ , а поперечно поляризованные калибровочные бозоны принадлежат к  $\mathcal{H}_0$ . В общем виде можно показать, что асимптотические состояния, содержащие духи, антидухи или калибровочные бозоны с нефизической поляризацией, всегда принадлежат к  $\mathcal{H}_1$  или к  $\mathcal{H}_2$ , а асимптотические состояния из  $\mathcal{H}_0$  являются калибровочными бозонами только с поперечной поляризацией. Таким образом, БРСТ-оператор устанавливает точное соответствие между нефизическими поляризационными состояниями калибровочных бозонов и духами и антидухами как положительными и отрицательными степенями свободы.

В разделе 9.4 мы доказали, что процедура Фаддеева–Попова дает правильный калибровочно-инвариантный ответ для некоторого подкласса элементов  $S$ -матрицы, при помощи которых можно вычислить физическое сечение рассеяния поперечно поляризованных калибровочных бозонов. Эти  $S$ -матричные элементы строились как результат действия в далеком прошлом операторов, создающих поперечно поляризованные калибровочные бозоны, последующего адиабатического включения и выключения взаимодействия, и действия операторов, уничтожающих поперечно поляризованные калибровочные бозоны в далеком будущем. Однако в этом доказательстве таится возможная трудность: если состояния, созданные в далеком прошлом как набор поперечно поляризованных бозонов, могут переходить в состояния, содержащие в далеком будущем калибровочные бозоны с другими поляризациями,  $S$ -матрица для переходов между поперечными калибровочными бозонами будет неунитарной. Эта проблема будет также приводить к техническим трудностям, которые мы обсуждали в предыдущем разделе: нефизические поляризации будут давать ненулевой вклад в разрезанные по Каткоскому

\* Нижеследующая аргументация представлена только на интуитивном уровне. Строгие рассуждения см. в Т. Kugo and I. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **66**, 1 (1979).

диаграммы, определяющие соответствующие  $S$ -матричные элементы. В разделе 9.4 мы использовали способ доказательства, пригодный для абелева случая, чтобы показать, что эти проблемы не возникают в КЭД. В неабелевом случае устранение нефизических поляризаций калибровочных бозонов происходит более тонким способом, и мы видели, что оно существенным образом включает появление духов. Чтобы решить эту тонкую проблему, применим принцип БРСТ-симметрии.

Пусть  $|A; \text{tr}\rangle$  — внешнее состояние без духов или антидухов, содержащее только поперечно поляризованные калибровочные бозоны. Мы хотим показать, что  $S$ -матрица, спроектированная на такие состояния, унитарна:

$$\sum_C \langle A; \text{tr} | S^\dagger | C; \text{tr}\rangle \langle C; \text{tr} | S | B; \text{tr}\rangle = \langle A; \text{tr} | 1 | B; \text{tr}\rangle. \quad (16.54)$$

Как объяснялось выше, физические состояния  $\langle A; \text{tr} |$  принадлежат подпространству  $\mathcal{H}_0$ , определенному оператором БРСТ и, на самом деле, образуют его базис. В частности, все эти состояния уничтожаются  $Q$ . Поскольку  $Q$  коммутирует с гамильтонианом, эволюция во времени любого такого состояния должна порождать состояния, уничтожаемые  $Q$ . Таким образом,

$$Q \cdot S | A; \text{tr}\rangle = 0. \quad (16.55)$$

Это означает, что состояния  $S | A; \text{tr}\rangle$  должны быть линейной комбинацией состояний из  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_2$ . Однако, состояния из  $\mathcal{H}_2$  ортогональны друг другу и состояниям из  $\mathcal{H}_0$ . Поэтому в скалярное произведение любых двух состояний вида  $S | A; \text{tr}\rangle$  дают вклад только перекрывающиеся компоненты из  $\mathcal{H}_0$ , так что можно написать:

$$\langle A; \text{tr} | S^\dagger \cdot S | B; \text{tr}\rangle = \sum_C \langle A; \text{tr} | S^\dagger | C; \text{tr}\rangle \langle C; \text{tr} | S | B; \text{tr}\rangle. \quad (16.56)$$

Поскольку полная  $S$ -матрица унитарна, из этого соотношения следует, что ограниченная  $S$ -матрица также унитарна, т. е. выполнено (16.54). Кроме того, из (16.56) следует, что сумма разрезанных по Каткоскому диаграмм, дающих вклад в  $S$ -матрицу в данном порядке, равна сумме разрезов, содержащих только поперечные поляризации калибровочных бозонов. Таким образом, сокращение между диаграммами, соответствующими появлению двух калибровочных бозонов с нефизическими поляризациями и появлению духов, является общим свойством, сохраняющимся во всех порядках теории возмущений.

Поскольку БРСТ-преобразование соответствует непрерывной симметрии, оно приводит к набору тождеств Уорда. Эти тождества по структуре похожи на соответствующие тождества для неабелевой калибровочной симметрии, поскольку БРСТ-симметрия содержит калибровочное преобразование, параметром которого является духовое поле. Тем не менее, тождества, следующие из БРСТ-симметрии, более просты. Мы не будем дальше в этой книге изучать тождества Уорда в неабелевой калибровочной теории. Однако при обсуждении перенормировок в калибровочных теориях на более высоком уровне основные соотношения между перенормировочными константами, следующие из тождеств Уорда, наиболее просто выводятся с использованием БРСТ-симметрии\*.

## 16.5. Однопетлевые расходимости в неабелевой калибровочной теории

Теперь, когда мы обсудили общие свойства древесных диаграмм в неабелевых калибровочных теориях, обратимся к диаграммам с петлями. Как всегда бывает в кван-

\*Введение в тождества Уорда для БРСТ-симметрии дано в Taylor (1976).

товой теории поля, некоторые из этих петлевых диаграмм будут расходиться, и мы должны позаботиться о правильном обращении с расходящимися интегралами.

Лагранжиан неабелевой калибровочной теории (15.39) не содержит взаимодействий с размерностью более 4. Поэтому, в соответствии с общей аргументацией в гл. 10, этот лагранжиан перенормируем в том смысле, что расходимости могут быть устранены с помощью конечного числа контрчленов. Однако, в неабелевых калибровочных теориях, как и в КЭД, калибровочные симметрии налагают более строгие ограничения на структуру расходимостей. В КЭД, при условии, что мы используем калибровочно-инвариантную регуляризацию, существует только четыре расходящихся коэффициента, которые сокращаются контрчленами для электромагнитной вершины ( $\delta_1$ ), напряженностей полей электрона и фотона ( $\delta_2$  и  $\delta_3$ ) и массы электрона ( $\delta_m$ ). В частности, калибровочная инвариантность исключает возможность перенормировки массы фотона. Кроме того, в силу тождества Уорда два контрчлена  $\delta_1$  и  $\delta_2$  равны друг другу и сокращаются при вычислении электрон-фотонной вершинной функции. Неабелевые калибровочные симметрии накладывают аналогичные ограничения на расходимости фейнмановских диаграмм. В этом разделе мы проиллюстрируем некоторые из этих ограничений на примерах однопетлевых диаграмм.

### Собственная энергия калибровочного бозона

Самые строгие ограничения в КЭД, вытекающие из калибровочной инвариантности, возникают при вычислении собственной энергии фотона. Тождество Уорда подразумевает выполнение соотношения

$$q^\mu \left( \text{---} \text{---} \text{---} \right) = 0, \quad (16.57)$$

которое в свою очередь означает, что диаграммы собственной энергии фотона имеют структуру:

$$\text{---} \text{---} \text{---} = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2). \quad (16.58)$$

Единственная возможная расходимость — это логарифмически расходящийся вклад в  $\Pi(q^2)$ . В неабелевых калибровочных теориях соотношение (16.57) также выполняется, так что собственная энергия опять имеет лоренцевскую структуру (16.58). Однако сокращения, приводящие к этой структуре, более сложные. Ниже мы проследим за этими сокращениями, подробно вычислив собственную энергию калибровочного бозона в однопетлевом приближении. Чтобы сохранить калибровочную инвариантность, воспользуемся размерной регуляризацией.

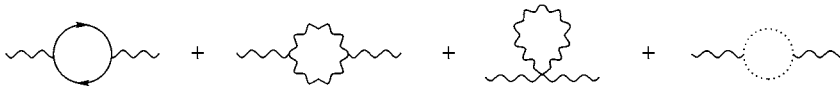


Рис. 16.7. Вклады порядка  $g^2$  в собственную энергию калибровочного бозона.

Вклады порядка  $g^2$  в собственную энергию калибровочного бозона показаны на рис. 16.7. (В дополнение к этим ОЧН диаграммам есть еще три «головастика», однако их вклад автоматически обращается в нуль, как и в КЭД, в соответствии с рассуждениями, приведенным после (10.5).) Диаграмму с фермионной петлей можно рассматривать отдельно от остальных, поскольку в принципе мы могли бы включить любое



число фермионов в теорию. Ниже мы увидим, что вклады трех оставшихся диаграмм существенным образом взаимосвязаны.

Вычислим сначала диаграмму с фермионной петлей. Фейнмановские правила для вершин в этой диаграмме такие же, как и в КЭД, за исключением добавления групповой матрицы  $t^a$ , действующей на индексы фермиона, отвечающие калибровочной группе. Поэтому вклад этой диаграммы такой же, как в КЭД, и равен выражению (7.90), умноженному на след от произведения групповых матриц:

$$\begin{aligned} \text{---}\bigcirc\text{---} &= \text{tr}[t^a t^b] i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \times \\ &\times \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx 8x(1-x) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(m^2 - x(1-x)q^2)^{2-d/2}}. \end{aligned}$$

Значение следа дается формулой (15.78):  $\text{tr}[t^a t^b] = C(r)\delta^{ab}$ . В теории с несколькими типами фермионов каждому типу будет соответствовать вклад такой же диаграммы. Мы будем, главным образом, интересоваться расходящейся частью этой диаграммы, которая не зависит от массы фермиона. Если имеется  $n_f$  типов фермионов, все в одном и том же представлении  $r$ , то полный вклад от диаграмм с фермионными петлями примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{фермионы}} \left( \text{---}\bigcirc\text{---} \right) &= \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left( \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{4}{3} n_f C(r) \Gamma(2-\frac{d}{2}) + \dots \right). \end{aligned} \quad (16.59)$$

Теперь рассмотрим три диаграммы чисто калибровочного сектора. Вклад этих диаграмм зависит от калибровки; мы будем использовать калибровку Фейнмана – т Хофта  $\xi = 1$ .

Используя трехбозонную вершину из рис. 16.1, можно записать первую из трех диаграмм в виде:

$$\begin{aligned} \text{---}\bigcirc\text{---} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 f^{acd} f^{bcd} N^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (16.60)$$

где численный множитель равен

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho] \times \\ &\times [\delta^\nu_\rho(p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \delta^\nu_\sigma(p+2q)_\rho]. \end{aligned}$$

Перед интегралом стоит симметричный множитель  $1/2$ . Свертка структурных констант может быть вычислена при помощи (15.93):  $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}$ .

Чтобы упростить дальнейшее выражение, объединим стандартным способом знаменатели:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{((1-x)p^2 + x(p+q)^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2}, \quad (16.61)$$

где  $P = p + xq$  и  $\Delta = -x(1-x)q^2$ . Тогда (16.60) может быть переписано в виде:

$$\text{Diagram} = -\frac{g^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2} N^{\mu\nu}.$$

Структуру числителя можно упростить, выражая  $p$  через  $P$ , отбрасывая слагаемые, линейные по  $P^\mu$  (которые дают нуль при интегрировании из соображений симметрии), и заменяя  $P^\mu P^\nu$  на  $g^{\mu\nu} P^2/d$  (также по соображениям симметрии):

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} [(2q+p)^2 + (q-p)^2] - d(q+2p)^\mu (q+2p)^\nu + \\ &\quad + [(2q+p)^\mu (q+2p)^\nu + (q-p)^\mu (2q+p)^\nu - \\ &\quad - (q+2p)^\mu (q-p)^\nu + (\mu \leftrightarrow \nu)] \rightarrow \\ &\rightarrow -g^{\mu\nu} P^2 \cdot 6(1-\frac{1}{d}) - g^{\mu\nu} q^2 [(2-x)^2 + (1+x)^2] + \\ &\quad + q^\mu q^\nu [(2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x)]. \end{aligned}$$

Последний шаг в вычислении состоит в выполнении виковского поворота и применении формул интегрирования (7.85) и (7.86). Это приводит диаграмму к следующему виду:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times \\ &\quad \times \left( \Gamma(1-\frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{3}{2}(d-1)x(1-x) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(2-\frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(2-\frac{d}{2}) q^\mu q^\nu \left[ (1-\frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right] \right). \end{aligned} \quad (16.62)$$

Рассмотрим теперь диаграмму с четырехбозонной вершиной. Используя фейнмановские правила на рис. 16.1, находим

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{p^2} \delta^{cd} (-ig^2) \times \\ &\quad \times [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \\ &\quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \\ &\quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]. \end{aligned} \quad (16.63)$$

В первой строке стоит симметричный множитель  $1/2$ . Первая комбинация структурных констант в квадратных скобках обращается в нуль из-за антисимметричности, вторую и третью можно упростить при помощи (15.93). В результате:

$$\text{Diagram} = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \cdot g^{\mu\nu} (d-1). \quad (16.64)$$

В схеме размерной регуляризации интеграл по  $p$  имеет полюс при  $d = 2$ , но обращается в нуль при  $d \rightarrow 4$ . Мы можем просто отбросить эту диаграмму и поверить, что полюс при  $d = 2$  сокращается другими диаграммами. Однако поучительно и не так уж сложно продемонстрировать это сокращение явно. Для этого можно привести интеграл к виду, похожему на вид интеграла для предыдущей диаграммы, умножив подынтегральное выражение на единицу, представленную как  $(q + p)^2 / (q + p)^2$ . Затем преобразуем знаменатели, как и раньше, и заменим  $p$  на сдвинутую переменную  $P = p + xq$ . После отбрасывания линейного по  $P$  слагаемого получаем:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2} \times \\
 &\quad \times g^{\mu\nu} (d-1) [P^2 + (1-x)^2 q^2].
 \end{aligned}$$

Теперь можно совершить виковский поворот и проинтегрировать по  $P$ . В результате

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times \\
 &\quad \times \left( -\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2} d(d-1)x(1-x) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 [(d-1)(1-x)^2] \right).
 \end{aligned} \tag{16.65}$$

Выражения (16.62) и (16.65) сами по себе в сумме не дают разумного значения: полюс при  $d = 2$  не сокращается и не имеет поперечной лоренцевской структуры. Чтобы привести собственную энергию к желаемому виду, нужно учесть вклад диаграммы с духовой петлей. В соответствии с правилом, показанным на рис. 16.5, вклад этой диаграммы равен

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{dac} (p+q)^\mu f^{cbd} p^\nu.
 \end{aligned} \tag{16.66}$$

В этом случае нет симметричного множителя, но есть множитель  $(-1)$  из-за того, что духовые поля антикоммутируют. Духовую диаграмму можно упростить с помощью тех же трюков, что и две предыдущие: преобразованием знаменателей, сдвигом интеграла по  $P$ , виковским поворотом и интегрированием по  $P$  с использованием размерной регуляризации. В результате

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times \\
 &\quad \times \left( -\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[ \frac{1}{2} x(1-x) \right] + \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu [x(1-x)] \right).
 \end{aligned} \tag{16.67}$$

Теперь мы готовы сложить вместе все результаты. В сумме трех диаграмм коэффициент при  $\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 x(1-x)$  равен

$$\frac{1}{2} (3d - 3 - d^2 + d - 1) = \left(1 - \frac{d}{2}\right) (d - 2). \tag{16.68}$$

Первый множитель сокращает полюс гамма-функции при  $d = 2$ . Таким образом, сумма трех диаграмм не имеет квадратичной расходимости и не приводит к перенормировке массы калибровочного бозона. Заметим, что духовая диаграмма играет существенную роль в этом сокращении.

После сокращения полюса при  $d = 2$ ,  $\Gamma(1 - \frac{d}{2})$  переходит в  $\Gamma(2 - \frac{d}{2})$ . Тогда это слагаемое в сумме с остальными, пропорциональными  $\Gamma(2 - \frac{d}{2})g^{\mu\nu}q^2$ , дает:

$$(d-2)x(1-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 - (d-1)(1-x)^2. \quad (16.69)$$

Поскольку не очевидно, как лучше всего упростить это выражение, давайте пока оставим его и сначала поработаем с коэффициентом при  $\Gamma(2 - \frac{d}{2})q^\mu q^\nu$ :

$$-(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 - (1+x)(2-x) + x(1-x) = -(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 - 2.$$

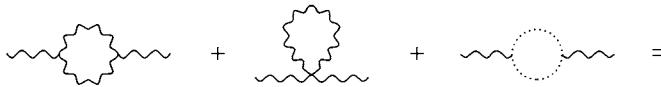
Если полная собственная энергия должна быть пропорциональна  $(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)$ , должен существовать способ привести выражение (16.69) к такой форме (умноженной на  $-1$ ). Чтобы сделать это, заметим, что  $\Delta$  симметрична относительно замены  $x \leftrightarrow (1-x)$ , поэтому можно подставить  $(1-x)$  вместо  $x$  в любое слагаемое в числителе. В частности, слагаемые, линейные по  $x$ , можно преобразовать следующим образом:

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1-x) = \frac{1}{2}.$$

В конце концов, сумма трех чисто калибровочных диаграмм сводится к выражению:

$$\frac{i g^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) [(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 + 2]. \quad (16.70)$$

Это выражение явно поперечно, как того требует тождество Уорда в неабелевой калибровочной теории. Для дальнейших ссылок выпишем ультрафиолетово расходящуюся часть (16.70):



$$= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left( \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \cdot \left( -\frac{5}{3} \right) C_2(G) \Gamma(2 - \frac{d}{2}) + \dots \right). \quad (16.71)$$

Как было замечено выше, результат (16.70) зависит от калибровки, использованной в вычислениях. Собственная энергия бозона в любой калибровке поперечна и свободна от квадратичных расходимостей. Однако коэффициент при поперечной лоренцевской структуре может зависеть от  $\xi$ . Оказывается, что при произвольном значении  $\xi$  коэффициент при ультрафиолетово расходящейся части в (16.71) изменяется по правилу:

$$-\frac{5}{3} \rightarrow -\left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right). \quad (16.72)$$

Тот факт, что собственная энергия бозона зависит от калибровки, не противоречит общей теореме о том, что элементы  $S$ -матрицы не зависят от  $\xi$ . Полный набор однопетлевых поправок к  $S$ -матричным элементам в калибровочной теории всегда содержит ряд радиационных поправок к вершинам и пропагаторам: зависимость от калибровки сложным образом сокращается между этими различными слагаемыми.

### $\beta$ -функция

Простейшее вычисление, содержащее калибровочно-инвариантную комбинацию радиационных поправок, это расчет старшего члена в  $\beta$ -функции Каллана–Симанчика в неабелевой калибровочной теории. В инвариантности старшего члена в  $\beta$ -функции можно убедиться на интуитивном уровне, заметив, что константа связи в калибровочной теории не должна эволюционировать к большим значениям при одном способе вычислений и оставаться малой при другом. В разделе 17.2 мы покажем это более явно, показав, что старший коэффициент в  $\beta$ -функции можно извлечь из сечения взаимодействия и поэтому он не должен зависеть от калибровки. (Удивительно, что это заключение на самом деле применимо к первым *двум* коэффициентам в разложении  $\beta$ -функции по степеням  $g$ .)

Вспомним, что, как показано в разделе 12.2,  $\beta$ -функция определяет скорость изменения перенормированной константы связи с ростом масштаба перенормировки  $M$ . Поскольку функции Грина зависят от  $M$  через контрчлены, вычитающие ультрафиолетовые расходимости,  $\beta$ -функция может быть вычислена из контрчленов, входящих в соответствующие функции Грина. Например, в (12.58) мы видели, что  $\beta$ -функцию в КЭД можно вычислить из контрчленов для электрон-фотонной вершины, собственной энергии электрона и собственной энергии фотона. Такой же вывод верен и в случае неабелевой калибровочной теории. Таким образом, в низшем порядке

$$\beta(g) = gM \frac{\partial}{\partial M} \left( -\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2} \delta_3 \right), \quad (16.73)$$

где соглашения для вершин контрчленов показаны на рис. 16.8. В КЭД первые два слагаемых сокращаются в силу тождества Уорда, так что  $\beta$ -функция зависит только от  $\delta_3$ . В неабелевом случае вклад дают все три слагаемые. Труднее всего вычислить  $\delta_3$ , но мы недавно уже сделали это при вычислении собственно-энергетических диаграмм калибровочного бозона. Завершим теперь вычисление  $\beta$ -функции в неабелевой калибровочной теории.

Для того чтобы контрчлен  $\delta_3$  сократил расходимость в выражении (16.59) и (16.71), он должен иметь вид:

$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \left[ \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right], \quad (16.74)$$

где  $M$  — масштаб перенормировки. В зависимости от использованных точных условий перенормировки, возможны дополнительные конечные вклады в  $\delta_3$ , однако они не влияют на  $\beta$ -функцию (в однопетлевом приближении). Аналогично, конечные части в  $\delta_2$  и  $\delta_1$  будут зависеть от деталей схемы перенормировки. Однако, как упоминалось в разделе 12.2, однопетлевой вклад в  $\beta$ -функцию одинаков при любой схеме, в которой амплитуды перенормируются в точке, где все инварианты, построенные из импульсов, одного и того же порядка  $M^2$ . При размерной регуляризации логарифмическая расходимость всегда имеет вид  $\Gamma(2-\frac{d}{2})/\Delta^{2-d/2}$ , где  $\Delta$  — одна и та же комбинация инвариантов, построенных из импульсов. Поэтому, чтобы вычислить  $\beta$ -функцию, можно просто положить  $\Delta = M^2$  в таких выражениях.

$$\begin{aligned}
 \text{wavy line with a circle and cross} &= -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{ab} \delta_3 \\
 \text{fermion line with a circle and cross} &= i \not{k} \delta_2 \\
 \text{gluon vertex with a circle and cross} &= i g t^a \gamma^\mu \delta_1
 \end{aligned}$$

Рис. 16.8. Контрчлены, необходимые для вычисления взаимодействий фермионов в неабелевой калибровочной теории.

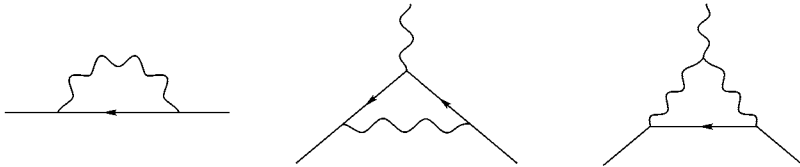


Рис. 16.9. Диаграммы, расходимости которых сокращаются контрчленами  $\delta_2$  и  $\delta_1$ .

Чтобы завершить вычисление  $\beta$ -функции, следует с одинаковой точностью вычислить  $\delta_2$  и  $\delta_1$ . Контрчлен для собственной энергии фермиона  $\delta_2$  сокращает расходимость, пропорциональную  $\not{k}$  в первой диаграмме на рис. 16.9. В калибровке Фейнмана–’т Хофта значение этой диаграммы

$$\text{Feynman-Hoft gauge fermion self-energy} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig)^2 \gamma^\mu t^a \frac{i(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2} \gamma_\mu t^a \frac{-i}{p^2}. \tag{16.75}$$

Поскольку расходимость в перенормировке не зависит от фермионной массы, мы упростили (16.75), положив эту массу равной нулю. По определению (15.92), произведение групповых матриц равно значению квадратичного оператора Казимира. Дираковскую матричную структуру можно упростить, используя тождества (7.89). Остальные вычисления полностью соответствуют проделанным при подсчете собственно-энергетических диаграмм бозона:

$$\begin{aligned}
 \text{Feynman-Hoft gauge fermion self-energy} &= g^2 C_2(r)(d-2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2 p^2} = \\
 &= g^2 C_2(r)(d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)\not{k}}{(P^2 - \Delta)^2} = \\
 &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(r) \not{k} \int_0^1 dx (1-x)(d-2) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} = \\
 &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \not{k} C_2(r) \Gamma(2-\frac{d}{2}) + \dots
 \end{aligned} \tag{16.76}$$

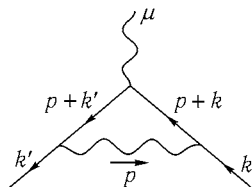
(Здесь  $P = p + xk$  и  $\Delta = -x(1-x)k^2$ .)

Расходящаяся часть этого выражения должна сокращаться диаграммой для второго контрчлена на рис. 16.8. Таким образом, если масштаб перенормировки равен  $M$ , контрчлен должен равняться

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \cdot C_2(r), \tag{16.77}$$

плюс конечные слагаемые. Заметим, что, как и  $\delta_3$ ,  $\delta_2$  зависит от выбора калибровки; например,  $\delta_2$  в калибровке Ландау ( $\xi = 0$ ) вообще не имеет однопетлевых расходимостей.

Чтобы определить  $\delta_1$ , нужно вычислить вторую и третью диаграммы на рис. 16.9. Вторая диаграмма, вычисленная в калибровке Фейнмана–т Хофта и для безмассовых фермионов, равна




$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}. \tag{16.78}$$

Групповые матрицы можно упростить в соответствии с равенством

$$\begin{aligned} t^b t^a t^b &= t^b t^b t^a + t^b [t^a, t^b] = C_2(r) t^a + i t^b f^{abc} t^c = \\ &= C_2(r) t^a + \frac{1}{2} i f^{abc} \cdot i f^{bcd} t^d = [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a. \end{aligned} \tag{16.79}$$


В третьей строке мы воспользовались антисимметрией  $f^{abc}$ , чтобы переписать произведение матриц как коммутатор; в последней строке мы использовали (15.93).

Диаграммы, вычисленные ранее в этом разделе, имели положительные кажущиеся степени расходимости, поэтому следует аккуратно выделить их логарифмические расходимости. Интеграл в (16.78), однако, расходится кажущимся образом логарифмически, поэтому коэффициент при этой расходимости может быть легко выделен из рассмотрения предела, в котором переменная интегрирования  $p$  много больше, чем любой внешний импульс. В этом пределе диаграмма оценивается следующим образом:



$$\sim g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{p^2 \cdot p^2 \cdot p^2}. \tag{16.80}$$

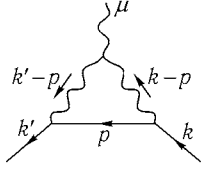
Если заменить  $p^\rho p^\sigma$  на  $g^{\rho\sigma} p^2/d$  в числителе (16.80), это выражение легко упростить:



$$\begin{aligned} &\sim g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a (2-d)^2 \frac{1}{d} \gamma^\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2} \sim \\ &\sim \frac{i g^3}{(4\pi)^2} [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] t^a \gamma^\mu (\Gamma(2-\frac{d}{2}) + \dots). \end{aligned} \tag{16.81}$$

Эта оценка дает правильный коэффициент при расходящемся слагаемом. Здесь опущены конечные слагаемые в вершинной функции, однако для вычисления  $\beta$ -функции они не нужны.

Третью диаграмму на рис 16.9 можно проанализировать тем же способом. В калибровке Фейнмана–'т Хофта для случая безмассовых фермионов вклад этой диаграммы равен:

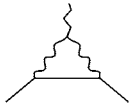


$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (i g \gamma_\nu t^b) \frac{i \not{p}}{p^2} (i g \gamma_\rho t^c) \frac{-i}{(k'-p)^2} \frac{-i}{(k-p)^2} \times \\
 &\quad \times g f^{abc} [g^{\mu\nu} (q+k'-p)^\rho + g^{\nu\rho} (-k'-k+2p)^\mu + \\
 &\quad + g^{\rho\mu} (k-p-q)^\nu].
 \end{aligned} \tag{16.82}$$

Произведение калибровочных матриц можно преобразовать следующим образом:

$$f^{abc} t^b t^c = \frac{1}{2} f^{abc} \cdot i f^{bcd} t^d = \frac{i}{2} C_2(G) t^a.$$

Логарифмическую расходимость этой диаграммы мы опять можем определить, пренебрегая всеми внешними импульсами по сравнению с  $p$ . Прямое вычисление дает:



$$\begin{aligned}
 &\sim \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \frac{g^{\mu\nu} p^\rho - 2g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu}{(p^2)^3} \sim \\
 &\sim \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \frac{1}{d} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho + \gamma^\sigma \gamma_\sigma \gamma^\mu] \sim \\
 &\sim \frac{i g^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^\mu (\Gamma(2-\frac{d}{2}) + \dots).
 \end{aligned} \tag{16.83}$$

Во второй строке мы снова заменили  $p^\rho p^\sigma$  на  $g^{\rho\sigma} p^2/d$ .

Сумма расходимостей в выражениях (16.81) и (16.83) должна сокращаться диаграммой для третьего контрчлена на рис. 16.8. При значении масштаба  $M$  имеем:

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} [C_2(r) + C_2(G)]. \tag{16.84}$$

Заметим, что  $\delta_1$  не равно  $\delta_2$ , как это было в абелевом случае; здесь в  $\delta_1$  имеется дополнительный вклад, пропорциональный  $C_2(G)$ .

Теперь мы готовы вычислить  $\beta$ -функцию. Подставляя три контрчлена (16.74), (16.77) и (16.84) в формулу (16.73), находим:

$$\beta(g) = (-2) \frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[ (C_2(r) + C_2(G)) - C_2(r) + \frac{1}{2} \left( \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right) \right];$$

иначе говоря,

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right]. \tag{16.85}$$

Заметим, что по крайней мере для малых значений  $n_f$   $\beta$ -функция отрицательна и поэтому неабелевы калибровочные теории являются асимптотически свободными. Это



исключительно важный для физики результат был впервые получен 'т Хофтом, Политцером и Гроссом и Вильчеком\*. Мы обсудим физическую интерпретацию этого результата в разделе 16.7 и в нескольких последующих главах. Однако до конца этого раздела мы не поддадимся искушению обратиться к физике и завершим наш технический анализ расходимостей в неабелевых калибровочных теориях.

### Соотношения между контрчленами

В только что завершеном анализе мы провели вычисление  $\beta$ -функции в неабелевой калибровочной теории из расходимостей в фермионной вершине и перенормировок тензора напряженности калибровочного поля. Можно наглядно представлять себе, что мы вычисляли величину бегущей константы связи в фермион-бозонной вершине. Альтернативно, мы могли бы изучать расходимости в трехбозонной или в четырехбозонной вершине и таким образом вычислить закон изменения соответствующих констант связи. Однако в разделе 16.1 мы уже видели, что калибровочная инвариантность связывает эти различные константы и требует их равенства друг другу. Поэтому можно ожидать, что различные вычисления должны давать одинаковые значения  $\beta$ -функции.

Чтобы пояснить это, аккуратно перечислим все контрчлены, возникающие в неабелевой калибровочной теории. Начнем с лагранжиана (16.34), рассматриваемого как комбинация затравочных полей и констант связи. Ниже мы обозначаем затравочные величины индексом 0.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{0\nu}^a - \partial_\nu A_{0\mu}^a)^2 + \bar{\psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\psi_0 - \bar{c}_0^a \partial^2 c_0^a + \\ & + g_0 A_{0\mu}^a \bar{\psi}_0 \gamma^\mu t^a \psi_0 - g_0 f^{abc} (\partial_\mu A_{0\nu}^a) A_{0\mu}^b A_{0\nu}^c - \\ & - \frac{1}{4} g^2 (f^{eab} A_{0\mu}^a A_{0\nu}^b) (f^{ecd} A_{0\mu}^c A_{0\nu}^d) - g \bar{c}_0^a f^{abc} \partial^\mu A_{b\mu}^c c_0^a. \end{aligned} \quad (16.86)$$

Для простоты мы выбрали  $\xi = 0$ . Теперь изменим масштаб полей, выделив множители  $Z_2, Z_3, Z_2^c$  для калибровочных бозонов, фермионов и духов, и сдвинем константу связи к перенормированному значению  $g$ . Тогда лагранжиан примет вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ren}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}},$$

где  $\mathcal{L}_{\text{ren}}$  — лагранжиан (16.34), а  $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$  равен:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{c.t.}} = & -\frac{1}{4} \delta_3 (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi} (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \psi - \delta_2^c \bar{c}^a \partial^2 c^a + \\ & + g \delta_1 A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - g \delta_1^{3g} f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c - \\ & - g^2 \delta_1^{4g} (f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b) (f^{ecd} A_\mu^c A_\nu^d) - g \delta_1^c \bar{c}^a f^{abc} \partial^\mu A_\mu^b c^c, \end{aligned} \quad (16.87)$$

с контрчленами, определенными согласно равенствам:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= Z_2 - 1, & \delta_3 &= Z_3 - 1, & \delta_2^c &= Z_2^c - 1, & \delta_m &= Z_2 m_b - m, \\ \delta_1 &= \frac{g_0}{g} Z_2 (Z_3)^{1/2} - 1, & \delta_1^{3g} &= \frac{g_0}{g} (Z_3)^{3/2} - 1, \\ \delta_1^{4g} &= \frac{g_0^2}{g^2} (Z_3)^2 - 1, & \delta_1^c &= \frac{g_0}{g} Z_2^c (Z_3)^{1/2} - 1. \end{aligned} \quad (16.88)$$

\*G. 't Hooft, неопубликовано; H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973); D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).

Заметим, что эти восемь контрчленов зависят от пяти параметров: таким образом, между ними имеются три соотношения. Эта ситуация очень похожа на ту, которая описана в гл. 11, когда мы изучали скалярные теории со спонтанно нарушенной симметрией. Внутренняя симметрия теории — в данном случае это локальная калибровочная инвариантность — приводит к соотношениям между расходящимися амплитудами в теории и контрчленами, которые надо вводить, чтобы сократить расходимости. В данном случае набор из пяти условий однозначно определяет все контрчлены таким образом, что расходимости исчезают.

Эта программа выглядит особенно просто в однопетлевом приближении. В этом случае можно разложить  $g_0/g$  и различные множители  $Z$  в окрестности единицы, оставляя только лидирующий вклад в каждый контрчлен. Тогда три соотношения между контрчленами можно записать следующим образом:

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta_1^{3g} - \delta_3 = \frac{1}{2}(\delta_1^{4g} - \delta_3) = \delta_1^c - \delta_2^c. \quad (16.89)$$

Полезно явно проверить, что значения  $\delta_1^{3g}$ ,  $\delta_1^{4g}$  и  $\delta_1^c$ , определяемые из (16.89), в самом деле сокращают расходимости в соответствующих вершинах. Это является предметом задачи 16.3. Используя соотношения (16.89), легко показать что однопетлевое вычисление  $\beta$ -функции будет давать одно и тоже значение независимо от использованной в вычислении вершины калибровочного бозона. В общем случае рассмотрим неабелеву калибровочную теорию с разными типами частиц, бозонов и фермионов, взаимодействующих с калибровочным полем. Тогда в однопетлевом приближении величина

$$\delta_1^i - \delta_2^i,$$

где  $\delta_1^i$  — вершинный контрчлен для  $i$ -го типа частиц, а  $\delta_2^i$  — соответствующий контрчлен для напряженности поля, принимает универсальное значение. Это значение зависит от калибровки, так что при вычислении  $\beta$ -функции зависимость от калибровки его расходящейся части сокращает зависимость  $\delta_3$  от калибровки.

При обсуждении контрчленов в КЭД в конце раздела 10.3 мы отметили, что соотношение между  $\delta_1$  и  $\delta_2$  гарантирует, что все электрически заряженные частицы видят общее универсальное значение константы связи  $e$ . В неабелевых калибровочных теориях соотношения (16.89) и их обобщения в старших петлях сохраняют универсальность неабелевых констант связи. В КЭД мы могли получить даже более строгое соотношение,  $\delta_1 = \delta_2$ , или  $Z_1 = Z_2$ , из сохранения нормировки матричных элементов векторного тока. Однако, в неабелевых калибровочных теориях соответствующий векторный ток, имеющий вид  $j^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi$ , преобразуется при калибровочных преобразованиях по присоединенному представлению. Поэтому рецепт Фаддеева–Попова не может быть использован для однозначного вычисления матричных элементов этого тока, и, таким образом, нормировка этих матричных элементов не сохраняется в теории возмущений.

## 16.6. Асимптотическая свобода: метод фонового поля

В предыдущем разделе мы видели, что  $\beta$ -функция в неабелевой калибровочной теории с достаточно малым числом фермионов отрицательна. Этот результат достаточно важен для того, чтобы вывести его дважды. Предыдущий вывод был прямолинеен, но не очень поучителен. В этом разделе мы дадим второй вывод этого же результата, более абстрактный, но зато ясный и прозрачный.

Метод этого раздела отражает суть идеи Вильсона об интегрировании по отвечающим большим энергиям степеням свободы с одновременным сохранением калибровочной инвариантности. Мы вычислим эффективное действие в неабелевой калибровочной

теории при фиксированном, медленно меняющемся классическом фоновом поле  $A_\mu^a$ . Применяя каноническую нормировку этого поля, мы можем интерпретировать коэффициент при эффективном действии как бегущую константу связи. Этот метод аналогичен методу Полякова вычисления  $\beta$ -функции в нелинейной сигма-модели, рассмотренному в разделе 13.3.

### Теория возмущений в фоновом поле

Для начала изменим масштаб калибровочного поля  $gA_\mu^a \rightarrow A_\mu^a$ . При такой нормировке калибровочная константа исчезает из ковариантной производной и появляется в коэффициенте при кинетическом слагаемом для калибровочного поля. Таким образом, мы начинаем с лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D})\psi, \quad (16.90)$$

где

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - iA_\mu^a t^a, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned} \quad (16.91)$$

и фермионная масса для простоты положена равной нулю. Законы преобразования  $A_\mu^a$  и  $\psi$  также не зависят от  $g$ :

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c, \quad \delta \psi = i\alpha^a t^a \psi. \quad (16.92)$$

С другой стороны, константа связи  $g$  появится в пропагаторе калибровочного поля.

Затем разделим калибровочное поле на классическое фоновое поле и флуктуирующее квантовое поле:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \mathcal{A}_\mu^a. \quad (16.93)$$

Мы будем рассматривать классическую часть  $A_\mu^a$  как фиксированную полевую конфигурацию, а флуктуирующую часть  $\mathcal{A}_\mu^a$  как переменную интегрирования в функциональном интеграле. Далее будем использовать символ  $D_\mu$  для обозначения ковариантной производной по отношению к фоновому полю:  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a t^a$ . Тогда

$$\bar{\psi}(i\not{D})\psi \rightarrow \bar{\psi}(i\not{D})\psi + \mathcal{A}_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi. \quad (16.94)$$

Напряженность поля Янга–Миллса разлагается следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &\rightarrow \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c + \\ &+ \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + f^{abc} (A_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c - A_\nu^b \mathcal{A}_\mu^c) + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c = \\ &= F_{\mu\nu}^a + D_\mu \mathcal{A}_\nu^a - D_\nu \mathcal{A}_\mu^a + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \end{aligned} \quad (16.95)$$

где в последней строчке  $F_{\mu\nu}^a$  — напряженность классического поля, а  $D_\mu$  — ковариантная производная в присоединенном представлении, (15.86). Заметим, что и в (16.94), и в (16.95) производная  $\partial_\mu$  появляется только как часть ковариантной производной по отношению к фоновому полю.

Если фоновое поле  $A_\mu^a$  предполагается фиксированным, лагранжиан имеет локальную калибровочную симметрию, соответствующую преобразованиям  $\mathcal{A}_\mu^a$ :

$$\mathcal{A}_\mu^a \rightarrow \mathcal{A}_\mu^a + D_\mu \alpha^a + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \alpha^c. \quad (16.96)$$

Чтобы определить функциональный интеграл, мы должны фиксировать калибровку, используя процедуру Фаддеева–Попова. Выберем вместо (16.28) фиксирующее калибровку условие, которое ковариантно по отношению к фоновому полю:

$$G(A) = D^\mu \mathcal{A}_\mu^a - \omega^a, \quad (16.97)$$

Детерминант Фаддеева–Попова содержит вариацию этого оператора по отношению к калибровочному преобразованию (16.96). Как и в разделе 16.2, мы можем возвести слагаемое, фиксирующее калибровку, в экспоненту и квантовать теорию в аналогичной калибровке Фейнмана–т Хофта для ситуации с фоновым полем. Тогда лагранжиан в фиксированной калибровке будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{FP}} = & -\frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu}^a + D_\mu \mathcal{A}_\nu^a - D_\nu \mathcal{A}_\mu^a + f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c)^2 - \\ & -\frac{1}{2g^2} (D^\mu \mathcal{A}_\mu^a)^2 + \bar{\psi} (i\not{D} + \mathcal{A}_\mu^a \gamma^\mu t^a) \psi + \bar{c}^a (-D^2 - D^\mu f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b) c^c. \end{aligned} \quad (16.98)$$

В лагранжиане (16.98) калибровка фиксирована, но он инвариантен относительно локальных преобразований, затрагивающих как поле  $\mathcal{A}_\mu^a$ , так и фоновое поле  $A_\mu^a$ :

$$\begin{aligned} A_\mu^a & \rightarrow A_\mu^a + D_\mu \beta^a, \\ \mathcal{A}_\mu^a & \rightarrow \mathcal{A}_\mu^a - f^{abc} \beta^b \mathcal{A}_\mu^c, \\ \psi & \rightarrow \psi + i\beta^a t^a \psi, \\ c^a & \rightarrow c^a - f^{abc} \beta^b c^c. \end{aligned} \quad (16.99)$$

Относительно этого преобразования  $\mathcal{A}_\mu^a$  преобразуется как поле материи в присоединенном представлении, в то время как преобразование  $A_\mu^a$  содержит часть локального калибровочного преобразования, пропорциональную  $\partial_\mu \beta^a$ . Чтобы доказать, что (16.99) является симметрией лагранжиана (16.98), следует только заметить, что выражение (16.98) глобально инвариантно, и что  $A_\mu^a$  входит в (16.98) только через ковариантную производную и напряженность поля. Преобразование (16.98) также не меняет меру интегрирования в функциональном интеграле. Поэтому если мы проинтегрируем по  $\mathcal{A}_\mu^a$ ,  $\psi$  и  $c^a$ , чтобы получить эффективное действие, результат должен быть инвариантен по отношению к локальным калибровочным преобразованиям  $A_\mu^a$ . Это наблюдение намного упрощает анализ эффективного действия.

### Однопетлевые поправки к эффективному действию

Вычислим теперь эффективное действие, используя метод из раздела 11.4. Чтобы вычислить  $\Gamma[A_\mu^a]$  в однопетлевом приближении, опустим слагаемые, линейные по флуктуирующему полю  $\mathcal{A}_\mu^a$  и затем проинтегрируем по квадратичным по  $\mathcal{A}_\mu^a$  слагаемым, по фермионам и духам. Это приведет к появлению детерминантов, которые мы можем вычислить в подходящей для эффективного действия форме.

Чтобы выполнить эту программу, нужно выделить в (16.98) квадратичные по полям слагаемые. Для поля  $\mathcal{A}_\mu^a$  находим:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2} \left\{ \frac{1}{2} (D_\mu \mathcal{A}_\nu^a - D_\nu \mathcal{A}_\mu^a)^2 + F^{a\mu\nu} f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c + (D^\mu \mathcal{A}_\mu^a)^2 \right\}. \quad (16.100)$$

После интегрирования по частям можно переписать это в виде:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2} \left\{ \mathcal{A}_\mu^a [-(D^2)^{ab} g^{\mu\nu} + (D^\nu D^\mu)^{ab} - \right. \quad (16.101) \\ \left. - (D^\mu D^\nu)^{ab}] \mathcal{A}_\nu^b - \mathcal{A}_\mu^a f^{abc} F^{b\mu\nu} \mathcal{A}_\nu^c \right\}.$$

Слагаемое в скобках содержит коммутатор ковариантных производных. Его можно упростить при помощи (15.42) и в сумме со вторым слагаемым это дает:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2} \left\{ \mathcal{A}_\mu^a [-(D^2)^{ac} g^{\mu\nu} - 2f^{abc} F^{b\mu\nu}] \mathcal{A}_\nu^c \right\}. \quad (16.102)$$

Первое слагаемое — это часть ковариантного оператора Даламбера. Второе слагаемое выглядит довольно специально, но мы можем привести его к виду, который будет удобен в дальнейшем, следующим образом: во-первых, мы вспомним, что  $F_{\mu\nu}^b$  свернут с генераторами группы в присоединенном представлении. Во-вторых, введем матрицу (3.18), которая есть генератор лоренцевских преобразований 4-векторов:

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = i(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma - \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho). \quad (16.103)$$

После этой замены можно переписать (16.102) в виде:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2g^2} \left\{ \mathcal{A}_\mu^a [-(D^2)^{ac} g^{\mu\nu} + 2\left(\frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^b \mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)^{\mu\nu} (t_G^b)^{ac}] \mathcal{A}_\nu^c \right\}. \quad (16.104)$$

На объект в скобках можно смотреть как на обобщение даламбертиана для флуктуаций фонового поля.

Точно так же преобразуем квадратичные по фермионным полям слагаемые. Квадратичный лагранжиан для этих полей имеет вид:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\not{D}) \psi. \quad (16.105)$$

Производя интегрирование по фермионным полям, получаем детерминант оператора  $(i\not{D})$ . Его удобно представить как квадратный корень из детерминанта оператора

$$(i\not{D})^2 = -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \left( -\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) D_\mu D_\nu = \quad (16.106) \\ = -D^2 + 2i \left( \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) D_\mu D_\nu.$$

В последней строчке коммутатор матриц Дирака образует генератор преобразований Лоренца в спинорном представлении  $S^{\mu\nu}$  (3.23). Поскольку этот объект антисимметричен по индексам, произведение  $D_\mu D_\nu$ , которое с ним свертывается, можно заменить на половину коммутатора. Тогда (16.106) принимает вид:

$$(i\not{D})^2 = -D^2 + 2\left(\frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^b S^{\rho\sigma}\right) t^b, \quad (16.107)$$

где  $t^a$  теперь находится в том же представлении, что и фермионы. Это не что иное, как даламбертиан в (16.104), переписанный для нового набора спинов и калибровочных квантовых чисел. Если в теории имеется  $n_f$  видов фермионов, функциональный интеграл по фермионам дает детерминант (16.107) в степени  $n_f/2$ .

Квадратичный вклад духов равен

$$\mathcal{L}_c = \bar{c}^a [-(D^2)^{ab}] c^b; \quad (16.108)$$

Это приводит к тому же даламбертиану, но для случая нулевого спина.

Чтобы объединить все результаты, введем общий ковариантный даламбертиан в фоновом поле

$$\Delta_{r,j} = -D^2 + 2\left(\frac{1}{2}F_{\rho\sigma}^b \mathcal{F}^{\rho\sigma}\right), \quad (16.109)$$

действующий на поля спина  $j$ , находящиеся в представлении  $r$ . Квадрат ковариантной производной дает обычное минимальное взаимодействие частицы, описываемой  $\Delta_{r,j}$ , с калибровочным полем. Дополнительное слагаемое отвечает взаимодействию магнитного момента с калибровочным полем, чья напряженность соответствует множителю  $g = 2$ . Используя это общее выражение, мы можем записать эффективное действие для классических полей  $A_\mu^a$  в однопетлевом приближении как

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[A]} &= \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}c \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{FP}} + \mathcal{L}_{\text{c.t.}})\right] = \\ &= \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4g^2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \mathcal{L}_{\text{c.t.}}\right)\right] \times \\ &\quad \times (\det \Delta_{G,1})^{-1/2} (\det \Delta_{r,1/2})^{+n_f/2} (\det \Delta_{G,0})^{+1}, \end{aligned} \quad (16.110)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$  — лагранжиан для контрчленов, а три детерминанта появляются в результате интегрирования по калибровочным полям, фермионам и духам в функциональном интеграле. Дополнительные петлевые поправки к эффективному действию подавлены множителем  $g^2$ .

Поскольку каждый интеграл, дающий вклад в (16.110), инвариантен по отношению к (16.99), каждый детерминант является калибровочно-инвариантным функционалом от  $A_\mu^a$ . Если мы разложим детерминанты по степеням фонового поля, получим ряд, начинающийся со слагаемого

$$\ln \det \Delta_{r,j} = i \int d^4x \left( \frac{1}{4} \mathbf{C}_{r,j} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \dots \right), \quad (16.111)$$

где последующие слагаемые содержат калибровочно-инвариантные операторы старших размерностей. Коэффициент  $\mathbf{C}_{r,j}$  может зависеть от представления  $r$  и спина  $j$ . Первый член разложения поправляет эффективное действие нулевого приближения в соответствии с формулой

$$\frac{1}{4g^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 \rightarrow \frac{1}{4} \left( \frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{G,1} - \mathbf{C}_{G,0} - \frac{n_f}{2} \mathbf{C}_{r,1/2} \right) (F_{\mu\nu}^a)^2. \quad (16.112)$$

Множители  $\mathbf{C}_{r,j}$  безразмерны, но, поскольку они возникают из однопетлевого вычисления, мы должны ожидать, что они будут логарифмически расходиться:

$$\mathbf{C}_{r,j} = c_{r,j} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} + \dots, \quad (16.113)$$

где через  $k$  обозначен импульс, характеризующий изменение фонового поля. Контрчлен  $\delta_3$  сокращает расходимость: если мы наложим условие перенормировки на масштабе  $M$ , то сложение (16.113) и соответствующего контрчлена даст в результате (16.112) с заменой

$$C_{r,j} = c_{r,j} \ln \frac{M^2}{k^2} + \dots \quad (16.114)$$

Тогда первоначально фиксированная константа связи в эффективном действии заменится бегущей константой связи

$$\frac{1}{g^2(k^2)} = \frac{1}{g^2} + \left( \frac{1}{2} c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2} c_{r,1/2} \right) \ln \frac{M^2}{k^2}, \quad (16.115)$$

или

$$g^2(k^2) = \frac{g^2}{1 - \left( \frac{1}{2} c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2} c_{r,1/2} \right) g^2 \ln k^2 / M^2}. \quad (16.116)$$

Сравнивая с (12.88), мы видим, что эта бегущая константа связи является решением уравнения ренормгруппы для  $\beta$ -функции:

$$\beta(g) = \left( \frac{1}{2} c_{G,1} - c_{G,0} - \frac{n_f}{2} c_{r,1/2} \right) g^3. \quad (16.117)$$

Таким образом, вычисляя  $c_{r,j}$ , мы можем прямо получить старший член в  $\beta$ -функции.

### Вычисление функциональных детерминантов

Чтобы вычислить  $c_{r,j}$ , мы должны получить первое слагаемое в разложении детерминанта в ряд по степеням внешнего поля. Чтобы разложить детерминант, будем действовать как в примере в разделе 9.5. Напишем

$$\Delta_{r,j} = -\partial^2 + \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{F})}, \quad (16.118)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= i[\partial^\mu A_\mu^a t^a + A_\mu^a t^a \partial^\mu], \\ \Delta^{(2)} &= g^2 A^{a\mu} t^a A_\mu^b t^b, \\ \Delta^{(\mathcal{F})} &= 2\left(\frac{1}{2} F_{\rho\sigma}^b \mathcal{F}^{\rho\sigma}\right). \end{aligned} \quad (16.119)$$

Части  $\Delta^{(1)}$  и  $\Delta^{(\mathcal{F})}$  содержат внешнее поле линейно;  $\Delta^{(2)}$  содержит  $A_\mu^a$  квадратично. Рассматривая эти члены как возмущения, запишем:

$$\begin{aligned} \ln \det \Delta_{r,j} &= \ln \det[-\partial^2 + (\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{F})})] = \\ &= \ln \det[-\partial^2] + \ln \det[1 + (-\partial^2)^{-1}(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{F})})] = \\ &= \ln \det[-\partial^2] + \text{tr} \ln[1 + (-\partial^2)^{-1}(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{F})})] = \\ &= \ln \det[-\partial^2] + \text{tr}[(-\partial^2)^{-1}(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(\mathcal{F})}) + \dots]. \end{aligned} \quad (16.120)$$



Рис. 16.10. Квадратичные по внешнему полю слагаемые в разложении  $\ln \det \Delta_{r,j}$ . Дополнительная вершина возникает из взаимодействия  $F^{\rho\sigma} \mathcal{J}_{\rho\sigma}$ .

Первое слагаемое справа в (16.120) — несущественная постоянная. Слагаемые в разложении, линейные по  $A_\mu^a$ , обращаются в нуль в силу калибровочной инвариантности (или, более точно, поскольку  $\text{tr}[t^a] = 0$ ). Слагаемые, квадратичные по  $A_\mu^a$ , должны собираться в структуру (16.111) и слагаемые со старшими производными.

Слагаемые в (16.111), квадратичные по  $A_\mu^a$ , можно переписать при помощи фурье-преобразования в виде:

$$\ln \det \Delta_{r,j} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^b(k) (k^2 \gamma^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \cdot [\mathbf{C}_{r,j} + \mathcal{O}(k^2)]. \quad (16.121)$$

Теперь мы явно вычислим эти слагаемые из (16.120) и приведем их к форме (16.121). Квадратичные по  $A_\mu^a$  слагаемые в (16.120) содержат одну степень  $\Delta^{(2)}$  или две степени  $\Delta^{(1)}$  или  $\Delta^{(\mathcal{J})}$ . Далее, слагаемые, линейные по  $\Delta^{(\mathcal{J})}$ , пропорциональны  $\text{tr}[\mathcal{J}^{\rho\sigma}] = 0$ , так что перекрестное произведение между этими двумя структурами обращается в нуль. Оставшиеся три вклада соответствуют фейнмановским диаграммам, показанным на рис. 16.10.

Слагаемое, квадратичное по  $\Delta^{(1)}$ , равно

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \text{tr}[(-\partial^2)^{-1} \Delta^{(1)} (-\partial^2)^{-1} \Delta^{(1)}] = \text{diagram} = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{p^2} (2p+k)^\mu t^a \frac{1}{(p+k)^2} (2p+k)^\nu t^b, \end{aligned} \quad (16.122)$$

где след берется просто по калибровочным и спиновым индексам. Множитель  $1/2$  берется из разложения логарифма. Слагаемое, линейное по  $\Delta^{(2)}$ , равно

$$\text{tr}[(-\partial^2)^{-1} \Delta^{(2)}] = \text{diagram} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} t^a t^b. \quad (16.123)$$

Как следует из рис. 16.10, эти два вклада прямо пропорциональны вкладу скалярной частицы в поляризацию вакуума в КЭД, с множителем

$$\text{tr}[t^a t^b] = C(r) d(j) \delta^{ab}, \quad (16.124)$$

где  $d(j)$  — это число спиновых компонент. Значения диаграмм можно вычислить, используя методы предыдущего раздела (или просто из решения задачи 9.1). В результате две диаграммы вместе собираются в калибровочно-инвариантную форму (16.121) и дают

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^b(k) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \cdot \left[ i \frac{C(r) d(j)}{3(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \dots \right]. \quad (16.125)$$



Член, содержащий две степени  $\Delta(\mathcal{F})$ , равен

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \operatorname{tr} [(-\partial^2)^{-1} \Delta(\mathcal{F}) (-\partial^2)^{-1} \Delta(\mathcal{F})] &= \text{diagram} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \frac{1}{p^2} (2i k_\rho g_{\mu\sigma} \mathcal{F}^{\rho\sigma}) t^a \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(p+k)^2} (-2i k_\alpha g_{\nu\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta}) t^b.
 \end{aligned} \tag{16.126}$$

Чтобы его вычислить, определим  $C(j)$  из следа по спиновым индексам:

$$\operatorname{tr} [\mathcal{F}^{\rho\sigma} \mathcal{F}^{\alpha\beta}] = (g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta} g^{\sigma\alpha}) C(j). \tag{16.127}$$

Прямой проверкой показывается, что

$$C(j) = \begin{cases} 0 & \text{(скаляры);} \\ 1 & \text{(дираковские спиноры);} \\ 2 & \text{(4-векторы).} \end{cases} \tag{16.128}$$

Тогда (16.126) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a A_\nu^b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+k)^2} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) 4C(r) C(j) &= \\
 = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu^a(-k) A_\nu^b(k) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left( -i \frac{4C(r)C(j)}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) + \dots \right).
 \end{aligned} \tag{16.129}$$

Складывая (16.125) и (16.129), мы находим, что коэффициент  $C_{r,j}$  в (16.111) равен

$$C_{r,j} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} d(j) - 4C(j) \right] C(r) \Gamma(2-\frac{d}{2}). \tag{16.130}$$

Таким образом,

$$c_{r,j} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} d(j) - 4C(j) \right] C(r), \tag{16.131}$$

или явно,

$$c_{r,j} = \frac{C(r)}{(4\pi)^2} \cdot \begin{cases} +1/3 & \text{(скаляры);} \\ -8/3 & \text{(дираковские спиноры);} \\ -20/3 & \text{(4-векторы).} \end{cases} \tag{16.132}$$

Заметим, что если слагаемое с магнитным моментом не равно нулю, оно доминирует и входит с обратным знаком по отношению к обыкновенным слагаемым.

Подставляя значения из (16.132) в (16.117), находим:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right). \tag{16.133}$$

Таким образом, мы подтвердили вывод предыдущего раздела о том, что неабелевы калибровочные теории с достаточно малым числом фермионов являются асимптотически свободными.

## 16.7. Асимптотическая свобода: качественное объяснение

В предыдущих двух разделах мы\* дважды вычислили  $\beta$ -функцию в неабелевой калибровочной теории:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right). \quad (16.134)$$

Здесь  $n_f$  — число фермионов в представлении  $r$ ,  $C(r)$  — константа, появляющаяся в соотношении ортогональности (15.78) для матриц представления, а  $C_2(G)$  — значение квадратичного оператора Казимира в присоединенном представлении группы, определенное в (15.92). В калибровочной теории с группой  $SU(N)$  и фермионами в фундаментальном представлении этот результат принимает вид:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right). \quad (16.135)$$

Общий знак минус означает, что для достаточно малых  $n_f$  неабелева калибровочная теория асимптотически свободна. В этом случае бегущая константа связи стремится к нулю при больших энергиях в соответствии с (12.92):

$$g^2(k) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \right) \ln(k^2/M^2)}. \quad (16.136)$$

Асимптотическая свобода неабелевых калибровочных теорий является удивительным свойством. Когда мы впервые встретились с перенормировкой константы электромагнитного взаимодействия в разделе 7.5, мы нашли, что направление ренормгруппового потока легко объяснить: вакуум приобретает диэлектрические свойства из-за создания виртуальных электрон-позитронных пар, которые приводят к уменьшению эффективного электрического заряда на больших расстояниях. В неабелевых калибровочных теориях, в соответствии с (16.134), фермионы по-прежнему дают тот же эффект. Более того, поскольку неабелевы калибровочные бозоны заряжены, они должны давать дополнительный экранирующий эффект. Но в соответствии с (16.134), результирующий вклад калибровочных бозонов имеет *противоположный* знак. Очевидно, должны существовать другие, компенсирующие эффекты, которые перекрывают эффект экранирования и меняют знак  $\beta$ -функции.

Точная форма этих эффектов зависит от калибровки. Проще всего их описать в кулоновской калибровке, в которой

$$\partial_i A^{a i} = 0. \quad (16.137)$$

Мы не будем проводить полное квантование в этой калибровке, скорее, мы просто опишем ее качественные особенности. Как и в электродинамике, квант поля в кулоновской калибровке описывается лоренц-нековариантным способом при помощи поперечно-поляризованных фотонов. Не существует времениподобных или продольных фотонов и свободно распространяющихся духов. Однако есть кулоновский потенциал, описываемый полем  $A^{a0}$ , которой обязан удовлетворять уравнению, аналогичному закону

\*В разделе 16.7 используются результаты разделов 16.5 и 16.6, но он является независимым от этих предыдущих разделов. Однако, даже если вы не прочитали раздел 16.5, было бы желательно, чтобы вы просмотрели страницы 496–505, чтобы составить представление о том, как вычисляется  $\beta$ -функция.

Гаусса. Неудивительно, что в неабелевом случае закон Гаусса принимает калибровочно-ковариантный вид:

$$D_i E^{ai} = g\rho^a, \quad (16.138)$$

где  $E^{ai} = F^{a0i}$ , а  $\rho^a$  — плотность заряда тока глобальной симметрии фермионов. Напомним, что в соответствии с (15.86) ковариантная производная, действующая на поле в присоединенном представлении, дается выражением

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + g f^{abc} A_\mu^b \phi^c.$$

Чтобы анализировать следствия (16.138), выберем насколько возможно простой и явный пример. Пусть калибровочная группа будет  $SU(2)$ , так что  $a = 1, 2, 3$  и  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ . Вычислим кулоновский потенциал точечного единичного заряда с ориентацией  $a = 1$ . Мы будем решать уравнение для  $E^{ai}$  методом итераций, перенеся слагаемое с калибровочным полем из ковариантной производной в правую часть уравнения:

$$\partial_i E^{ai} = g\delta^{(3)}(\mathbf{x})\delta^{a1} + g\epsilon^{abc} A^{bi} E^{ci}. \quad (16.139)$$

Второе слагаемое справа говорит о том, что в неабелевой калибровочной теории область, содержащая векторные потенциалы и электрические поля, параллельные в физическом и перпендикулярные в групповом пространстве, является источником электрического поля.

Смысл (16.139) схематически изображен на рис. 16.11. Лидирующий член в правой части (16.139) соответствует электрическому полю типа  $a = 1$ , распространяющемуся по закону  $1/r^2$  из точки  $\mathbf{x} = 0$ . Где-то в пространстве это электрическое поле пересекается с частью векторного потенциала  $A^{ai}$ , возникающего как результат флуктуаций вакуума. Для определенности предположим, что эти флуктуации происходят в направлении  $a = 2$ , как показано на рис. 16.11(a). Тогда второе слагаемое правой части (16.139) отрицательно для  $a = 3$ : поле  $E^{3i}$  имеет сток в этой окрестности, как показано на рис. 16.11(b). Эти два новых поля параллельны и антипараллельны флуктуациям начального поля  $A^{ai}$ . Взглянув опять на второе слагаемое в (16.139), видим, что ближе к начальному заряду имеется источник электрического поля с  $a = 1$ , а дальше от заряда находится сток с  $a = 1$ . Это индуцированный в вакууме электрический диполь, показанный на рис. 16.11(c). Посмотрим на знаки: этот диполь ориентирован на начальный заряд, и таким образом усиливает, а не экранирует его поле! Поэтому влияние начального заряда становится сильнее на больших расстояниях.

Соревнование между этим антиэкранирующим эффектом и экранировкой благодаря парам виртуальных калибровочных бозонов надо оценить количественно. Если это сделать\*, окажется, что антиэкранирующий эффект в 12 раз сильнее.

В соответствии с этим аргументом, именно благодаря набору динамических особенностей, свойственных неабелевой калибровочной теории, взаимодействие усиливается, а не экранируется на больших расстояниях. Это предполагает, что асимптотическая свобода должна быть специальным свойством неабелевых калибровочных теорий. Хотя это утверждение можно доказать, только исключив все остальные случаи, оно в самом деле оказывается верным: среди перенормируемых квантовых теорий поля в четырех измерениях только неабелевы калибровочные теории являются асимптотически свободными†. Мы уже видели в гл. 14, что асимптотическая свобода была предложена экспериментально как свойство сильных взаимодействий. В следующей главе мы построим модель сильных взаимодействий, которая основывается на неабелевой калибровочной теории, и детально исследуем ее свойства.

\*T. Appelquist, M. Dine, and I. Muzinich, *Phys. Lett.* **69B**, 231 (1977).

†S. Coleman and D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 851 (1973).

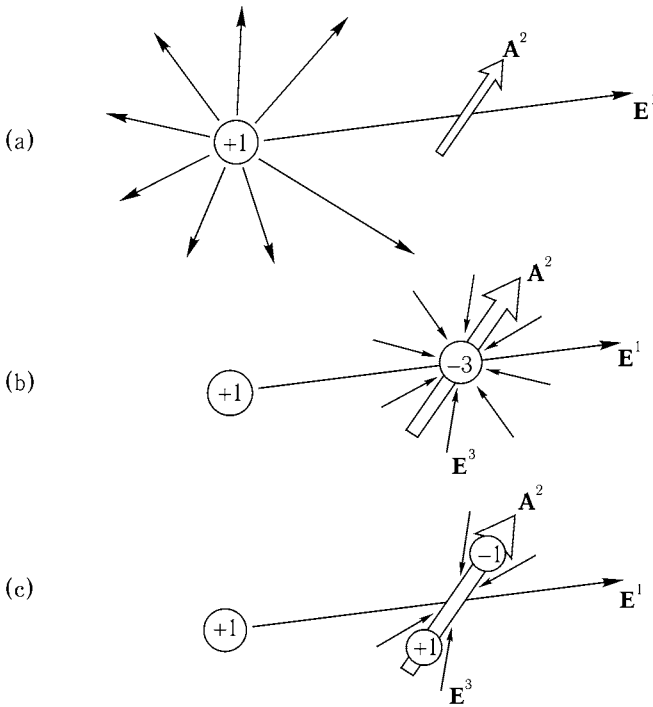


Рис. 16.11. Эффект вакуумных флуктуаций кулоновского поля в  $SU(2)$  калибровочной теории. На рис. (а) флуктуации  $A^2$  накладываются на поле  $E^1$ , пропорциональное  $1/r^2$ . Эти поля создают сток поля  $E^3$ , как показано на рис. (b). Поле  $E^3$ , в свою очередь, комбинируется с полем  $A^2$  и создает эффективное поле диполя  $E^1$ , рис. (c). Точки диполя ориентированы на первоначальный заряд, увеличивая его поле на больших расстояниях.

**Задачи**

**16.1. Калибровка Арновитта–Финклера.** Выполните квантование теории Янга–Милса по Фаддееву–Попову в калибровке  $A^{3a} = 0$  и выпишите правила Фейнмана. Покажите, что свободные духи не распространяются, и калибровочное поле имеет две степени свободы с положительно-определенной метрикой. (Хотя фиксация калибровки нарушает лоренц-инвариантность, эта симметрия восстанавливается при вычислении калибровочно-инвариантных  $S$ -матричных элементов.)

**16.2. Скалярное поле с неабелевым зарядом.** Рассмотрим неабелеву калибровочную теорию с калибровочной группой  $G$ . Добавим в теорию комплексное скалярное поле в представлении  $r$ .

- (а) Покажите, что фейнмановские правила для скалярного поля являются простой модификацией фейнмановских правил для скалярной КЭД из задачи 9.1(а).
- (б) Вычислите вклад этого скалярного поля в  $\beta$ -функцию и покажите, что полная  $\beta$ -функция в такой теории равна

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{1}{3} C(r) \right).$$

**16.3. Соотношения между контрчленами.** В разделе 16.5 мы вычислили расходящиеся части  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , и  $\delta_3$ . Вычислите расходящиеся части в оставшихся контрчленах в (16.88) в однопетлевом приближении, используя калибровку Фейнмана–т Хофта и проверьте явно, что соотношения (16.89) совместны с требованием отсутствия ультрафиолетовых расходимостей. Заметим, что перенормировка напряженности поля духов конечна в однопетлевом приближении; таким образом, рассмотрение духовых вершин дает особенно простой способ получения  $\beta$ -функции.

## КВАНТОВАЯ ХРОМОДИНАМИКА

Явление асимптотической свободы — ключ к построению реалистичных моделей сильных взаимодействий. В гл. 14 описано экспериментальное открытие этого явления, а в гл. 16 представлено теоретическое доказательство того, что неабелевы калибровочные теории асимптотически свободны. Теперь мы готовы изучать следствия из этих фактов.

Начнем с изложения аргументов в пользу того, что наиболее естественным кандидатом на роль модели сильных взаимодействий является неабелева калибровочная теория с калибровочной группой  $SU(3)$  с фермионами (кварками) в фундаментальном представлении. Эта теория известна как *квантовая хромодинамика* или КХД. После общего обсуждения КХД в разделе 17.1, мы рассмотрим ряд специфичных для КХД процессов рассеяния (разделы 17.2–17.4). Однако наиболее интересное следствие КХД имеет несколько более сложную природу и состоит в предсказании картины слабых нарушений соотношений бьеркеновского скейлинга, обсуждавшихся в гл. 14. В разделе 17.5 изложены дополнительные технические приемы, необходимые для понимания этих нарушений.

Хотя эта глава включает много ссылок на эксперименты, мы напоминаем читателю, что по отношению к КХД, так же как и по отношению к КЭД и критическим явлениям, эта книга является в первую очередь изложением теоретических методов, а не обзором и интерпретацией экспериментальных данных. Детали техники экспериментов, равно как и результаты в физике сильных взаимодействий, представлены в большом числе превосходных монографий (см. библиографию). Мы надеемся, что эта глава даст читателю теоретические основы, необходимые для понимания и интерпретации этих результатов.

### 17.1. От кварков к КХД

Современная картина сильных взаимодействий началась с установления природы элементарных фермионов, из которых состоят протон и другие адроны. По мере того, как свойства этих элементарных фермионов становились более понятными, на природу их взаимодействия накладывалось все больше ограничений, что в итоге привело к единственной возможной теории. Чтобы обосновать единственность этой теории, мы начнем эту главу с краткой истории ее возникновения.

В 1963 г. Гелл-Манн и Цвейг предложили модель, объясняющую спектр сильно взаимодействующих частиц при помощи элементарных составляющих, названных *кварками*. Ожидалось, что мезоны — это связанные состояния кварк-антикварк. В самом деле, легкие мезоны имеют как раз правильные квантовые числа, подтверждающие такую интерпретацию; это нечетные состояния со спином 0 и спином 1, в точности как фермион-антифермионные пары с нулевым орбитальным моментом из гл. 3. Барионы интерпретировались как связанные состояния трех кварков. Чтобы объяснить

имеющиеся электрические заряды и другие квантовые числа реальных адронов, Гелл-Манн и Цвейг предположили, что существуют три вида кварков,  $u$ -кварк,  $d$ -кварк, и  $s$ -кварк. Дополнительные адроны, найденные с того времени, потребовали введения еще трех видов кварков:  $c$ -кварк,  $b$ -кварк, и  $t$ -кварк. Для того чтобы из кварков можно было образовать барионы, кваркам следует приписать дробный электрический заряд  $+2/3$  для  $u, c, t$ , и  $-1/3$  для  $d, s, b$ . Тогда, например, протон будет состоять из кварков  $uud$ , а нейтрон будет связанным состоянием кварков  $udd$ . Шести типам кварков обычно приписывают разные *ароматы*.

Кварковая модель очень успешно предсказывает новые адронные состояния и объясняет величины амплитуд перехода между разными адронами. В частности, кварковая модель естественно включает наиболее важные соотношения симметрии между сильновзаимодействующими частицами. Если предположить, что  $u$  и  $d$ -кварки имеют одинаковые массы и взаимодействия, то группа  $SU(2)$ , осуществляющая унитарные вращения  $u$  и  $d$ -состояний,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (17.1)$$

должна быть группой симметрии сильных взаимодействий. Действительно, и в ядерной физике, и в физике элементарных частиц квантовые состояния образуют мультиплеты, отвечающие этой  $SU(2)$ -симметрии, которую называют *изотопическим спином* или *изоспином*. Аналогично, поскольку  $s$ -кварк лишь ненамного тяжелее  $u$  и  $d$ -кварков, имеет смысл рассматривать симметрии, соответствующие унитарным преобразованиям триплета  $(u, d, s)$ . Гелл-Манн и Неэман показали, что элементарные частицы естественно заполняют неприводимые представления этой  $SU(3)$ -симметрии.

Несмотря на феноменологический успех исходной кварковой модели, она имела два серьезных недостатка. Во-первых, несмотря на значительные усилия, свободные частицы с дробным зарядом не были найдены. Во-вторых, спектр барионов требовал допустить, что волновая функция трех кварков полностью симметрична по отношению к изменению спина кварка и квантового числа, нумерующего аромат, что противоречит тому факту, что кварки, имея спин  $1/2$ , должны подчиняться статистике Ферми–Дирака. Необходимость такой симметрии наиболее ясно иллюстрируется тем фактом, что легчайшее возбужденное состояние нуклона — это частица  $\Delta^{++}$  со спином  $3/2$  и зарядом  $+2$ . Эта частица легко интерпретируется как связанное состояние  $uuu$  с нулевым орбитальным моментом и параллельными спинами у всех трех кварков.

Чтобы разрешить противоречие между спектром барионов в кварковой модели и теоремой о связи спина во статистикой, Хан и Намбу, Гринберг и Гелл-Манн предположили, что кварки несут дополнительное, ненаблюдаемое квантовое число, которое они назвали *цветом*. Они постулировали, что барионные волновые функции должны быть полностью антисимметричны по цветовым квантовым числам. Тогда, если кварковые волновые функции полностью симметричны по спину и аромату, в целом они будут полностью антисимметричны в согласии со статистикой Ферми–Дирака. Простейшая модель цвета приписывает кваркам в фундаментальном представлении новую внутреннюю глобальную  $SU(3)$ -симметрию. Опуская на время квантовые числа спина и аромата, мы можем записать волновые функции кварков как  $q_i$ , где  $i = 1, 2, 3$  — цветовой индекс. Таким образом, кварки преобразуются по фундаментальному, или триплетному представлению  $\mathbf{3}$  цветовой группы  $SU(3)$ . Антикварки  $\bar{q}^i$  преобразуются по представлению  $\bar{\mathbf{3}}$ . Свертка представлений  $\mathbf{3}$  и  $\bar{\mathbf{3}}$  инвариантна относительно  $SU(3)$ . Инвариант можно образовать и при помощи полностью антисимметричной комбинации трех представлений. Под действием унитарного преобразования этот объект преобразуется как

$$\varepsilon_{ijk} \rightarrow U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} \varepsilon_{i'j'k'} = (\det U) \varepsilon_{ijk}, \quad (17.2)$$

и потому инвариантен относительно преобразований  $SU(3)$ , для которых  $\det U = 1$ . Постулировав, что все адронные волновые функции должны быть инвариантны относительно преобразований из группы  $SU(3)$ , получаем, что простейшими возможными являются только следующие комбинации:

$$\bar{q}^i q_i, \quad \varepsilon^{ijk} q_i q_j q_k, \quad \varepsilon_{ijk} \bar{q}^i \bar{q}^j \bar{q}^k. \quad (17.3)$$

Иными словами, предположение о том, что физические адроны являются синглетами по цвету, приводит к заключению, что единственно возможные легкие адроны — это мезоны, барионы и антибарионы.

Как и исходная кварковая модель, гипотеза о цвете была феноменологически оправдана, но привела к новым вопросам: почему кварки должны иметь такое, кажущееся искусственным свойство, и какой механизм обеспечивает то, что все адронные волновые функции являются синглетами по цвету? Ответы на эти вопросы пришли не из адронной спектроскопии, а из экспериментов по глубоконеупругому рассеянию, описанных в гл. 14, и из поисков теории партонных, связанных в адроны при помощи механизма асимптотической свободы. После того, как было открыто, что неабелевы калибровочные теории обладают этим свойством, все, что осталось, это определить правильную калибровочную группу и представление фермионов. Поскольку цветовая симметрия не имела никакой другой очевидной физической интерпретации, было естественно связать ее с калибровочной группой, где цвета играют роль калибровочных квантовых чисел кварков. Эти соображения привели к модели сильных взаимодействий как системы кварков разных ароматов, принадлежащих фундаментальному представлению локальной калибровочной группы  $SU(3)$ . Кванты калибровочного поля  $SU(3)$  называются *глюонами*, а модель известна под названием квантовой хромодинамики, или КХД.

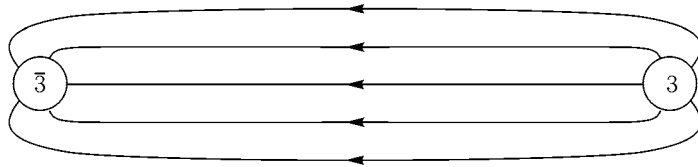


Рис. 17.1. Конфигурация калибровочного электрического поля, связанная с разделением цветных источников в калибровочной теории с сильной связью.

В этой книге мы в основном будем изучать свойства КХД в области высоких энергий, где константа связи становится малой. Однако, стоит отметить, что можно изучать КХД и в режиме сильной связи, используя приближенную схему, предложенную Вильсоном, в которой непрерывная калибровочная теория заменяется на дискретную статистическую механическую систему на четырехмерной евклидовой решетке. Используя это приближение, Вильсон показал, что при достаточно большой константе связи в КХД проявляется *цветовой конфайнмент*: единственные состояния с конечной энергией в теории являются синглетами по цветовой группе  $SU(3)$ . Таким образом, введенное ad hoc предположение, объясняющее наблюдаемый спектр адронов, оказывается следствием неабелевой калибровочной теории, расширенной по цветовой группе. Если кто-то попытается разделить синглетное по цвету состояние на цветовые компоненты, например, расщепить мезон на кварк и антикварк, между ними образуется трубка из калибровочного поля, как показано на рис. 17.1. В неабелевой калибровочной теории при достаточно сильной связи эта трубка имеет фиксированный радиус и плотность энергии, так что энергия, требующаяся для разнесения цветных источников, растет пропорционально расстоянию между ними. Взаимодействие, описываемое та-

ким законом, может согласованным образом быть слабым на малых расстояниях и сильным на больших, учитывая тот факт, что изолированные кварки не наблюдаются. Мы обсудим предел сильной связи и больших масштабов в калибровочных теориях в Эпilogue.

Предел малых расстояний в квантовой хромодинамике можно легко изучить при помощи разработанной в предыдущих главах техники фейнмановских диаграмм. В этом пределе асимптотическая свобода приводит к малости константы связи, и существует разумная диаграммная теория возмущений, в качестве нулевого приближения которой можно взять модель свободных кварков и глюонов. В следующих разделах обсуждаются элементарные взаимодействия между кварками и глюонами, которые можно наблюдать в экспериментах при высоких энергиях.

## 17.2. Аннигиляция $e^+e^-$ в адроны

Простейшая реакция с участием кварков — это образование кварковых пар при аннигиляции  $e^+e^-$ . Этот процесс мы обсуждали в разделе 5.1. Там мы проанализировали его на самом элементарном уровне, рассмотрев просто реакцию КЭД, в которой виртуальные фотоны образуют свободные кварки. Диаграмма для этого процесса низшего порядка показана на рис. 17.2(а). Вычисление полного сечения реакции включает сумму по различным цветовым состояниям кварковых полей и таким образом дает подтверждение того, что число цветов равняется трем. Комбинируя цветовой множитель с квадратом электрических зарядов кварков, мы находим из (5.16):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) = \sigma_0 \cdot 3 \cdot \sum_f Q_f^2, \quad (17.4)$$

где  $\sigma_0$  — сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  в КЭД,

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \quad (17.5)$$

и суммирование в (17.4) идет по ароматам кварков. В этой формуле предполагается, что энергия в системе центра масс достаточно велика, чтобы можно было пренебречь массами кварков.

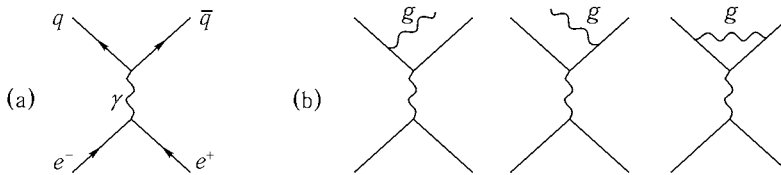


Рис. 17.2. Диаграммы, дающие вклад в реакцию  $e^+e^- \rightarrow$  адроны в КХД: (а) диаграммы в лидирующем порядке; (б) поправки порядка  $\alpha_s$ .

Когда мы включаем кварки в  $SU(3)$  калибровочную теорию, добавляется много важных процессов, оказывающих влияние и на величину рассматриваемого сечения, и на конечные состояния, которые ему соответствуют. Некоторые из наиболее важных эффектов нельзя описать в рамках теории возмущений. В частности, хотя диаграмма, дающая основной вклад, содержит свободные кварки, частицы, которые возникают в результате, являются синглетными по цвету мезонами и барионами. Однако, мы



увидим, что теория возмущений в КХД с кварками и глюонами в самом деле дает ряд важных предсказаний относительно процесса аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны. Идеи, которые мы разовьем при получении этих предсказаний, будут иметь применение ко многим другим процессам сильного взаимодействия.

### Полное сечение аннигиляции

Главные поправки к вероятности аннигиляции  $e^+e^-$ , обязанные процессам обмена и испускания глюонов, показаны на рис. 17.2(b). Это в точности те диаграммы, которые мы вычислили в заключительном проекте к части I. Первые две диаграммы дают вклад порядка  $g^2$  в сечение реакции с образованием дополнительного глюона, где  $g$  — калибровочная константа связи для  $SU(3)$ . Третья диаграмма даст поправку к вероятности образования  $q\bar{q}$  без испускания глюона. В части I мы вычислили эти два вклада, предполагая, что сильные взаимодействия описываются абелевой теорией. Чтобы получить соответствующие выражения в КХД, нам надо только умножить абелевы формулы на групповой множитель

$$\text{tr}[t^a t^a] = C_2(r) \cdot \text{tr}[1] = \frac{4}{3} \cdot 3, \quad (17.6)$$

где для вычисления  $C_2(r)$  для фундаментального представления  $SU(3)$  мы воспользовались (15.97). Множитель 3 отвечает той же сумме цветов, которая возникла в (17.4). Таким образом, можно получать правильные формулы для КХД из соответствующих формул заключительного проекта, делая замену

$$g^2 \rightarrow \frac{4}{3}g^2 \quad \text{или} \quad \alpha_g \rightarrow \frac{4}{3}\alpha_s, \quad (17.7)$$

где

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \quad (17.8)$$

— аналог постоянной тонкой структуры для сильного взаимодействия.

Последним результатом заключительного проекта к части I была формула для полного сечения аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны. Если заменить  $\alpha_g$  на  $(4/3)\alpha_s$ , получим

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) = \sigma_0 \cdot \left(3 \sum_f Q_f^2\right) \cdot \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2)\right]. \quad (17.9)$$

Это на самом деле сумма сечений двух элементарных процессов:  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  (включая поправку от третьей диаграммы на рис. 17.2(b)) и  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ . Хотя вероятности каждого из этих процессов по отдельности расходятся при стремлении массы глюона к нулю, при вычислении полного сечения расходимости сокращаются. Это еще один пример явления сокращения инфракрасных расходимостей, который мы изучали на примере рассеяния электронов в разделах 6.4 и 6.5. Тогда мы показали, что одевание конечного состояния путем испускания мягких и коллинеарных фотонов не влияет на полное сечение рассеяния. Здесь мы снова видим, что инфракрасные расходимости в полном сечении сокращаются, хотя от суммы поправок от реальных и виртуальных глюонов остается простая численная поправка.

Интуитивно нетрудно понять сокращение инфракрасных логарифмов. Первоначальный процесс  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$  происходит слишком быстро. Поскольку виртуальный

фотон находится вне массовой оболочки на расстоянии порядка  $q^2 = s$ , кварки создаются за время порядка  $1/\sqrt{s}$ . Однако испускание коллинеарных глюонов и поправки, связанные с обменом мягкими глюонами, происходят за гораздо более длительный промежуток времени. На диаграммах с испусканием глюонов отклонение виртуального кварка или антикварка от положения на массовой оболочке порядка  $p_{\perp g}^2$ , где  $p_{\perp g}$  — поперечный импульс глюона по отношению к системе  $q\bar{q}$ . Поэтому это виртуальное состояние живет в течении времени порядка  $1/p_{\perp g}$  до своего распада. Такой медленный процесс не может влиять на вероятность образования пар  $q\bar{q}$ ; он может влиять только на свойства конечного состояния, в которое перейдет система  $q\bar{q}$ . В соответствии с этой логикой, единственные поправки, которые могут влиять на полное сечение реакции, это те, для которых  $p_{\perp g} \sim \sqrt{s}$ . Иначе можно сказать, что после сокращения вкладов от инфракрасных областей остаются только вклады от областей с большими значениями импульса реальных и виртуальных глюонов. Так или иначе, формуле (17.9) следовало бы быть осмысленным предсказанием теории возмущений в КХД, хотя она включает интеграл по области испускания мягких глюонов.

### Бегущая константа $\alpha_s$

Формула (17.9) зависит от константы связи КХД  $\alpha_s$ , которая должна определяться в некоторой точке перенормировки  $M$ . Это отличает ее от константы связи в КЭД, которую мы определили естественным образом при помощи перенормировки на массовой поверхности. В КХД мы хотели бы избежать обсуждения поведения кварков на массовой поверхности, поскольку это сильно взаимодействующие частицы, значительное влияние на которые оказывают непертурбативные эффекты. Использование произвольной точки перенормировки  $M$  позволяет избежать этих проблем. Мы будем определять  $\alpha_s$  при помощи условий, налагаемых при большом масштабе энергий  $M$ , где взаимодействие слабо. Затем это значение  $\alpha_s$  можно использовать для предсказания результатов рассеяния с любой большой передачей импульса.

Однако, когда  $P^2$  и  $M^2$  сильно отличаются, использование перенормировки на масштабе  $M$  при вычислениях, содержащих инварианты импульса порядка  $P^2$ , приводит к некоторым тонкостям. В разделе 12.3 мы видели, что при таких условиях фейнмановские диаграммы с  $n$  петлями обычно содержат в качестве поправок члены, пропорциональные  $(\alpha_s \ln(P^2/M^2))^n$ . К счастью, можно включить эти поправки в члены более низкого порядка, используя ренормгруппу, чтобы заменить постоянную константу связи на бегущую.

Чтобы проиллюстрировать, как этот анализ применяется в КХД, давайте исследуем следствия уравнения Каллана–Симанчика для полного сечения  $\sigma$  аннигиляции  $e^+e^-$ , рассматриваемого как функция  $s$ , масштаба перенормировки  $M$  и значения  $\alpha_s$  в точке перенормировки. Как и потенциал КЭД (12.87), полное сечение аннигиляции  $e^+e^-$  является наблюдаемой величиной и поэтому его нормировка не зависит ни от каких условий. Следовательно, оно подчиняется уравнению Каллана–Симанчика с  $\gamma = 0$ :

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \sigma(s, M, \alpha_s) = 0. \quad (17.10)$$

По соображениям размерности можно написать:

$$\sigma = \frac{c}{s} f\left(\frac{s}{M^2}, \alpha_s\right), \quad (17.11)$$

где  $c$  — безразмерная постоянная. Тогда из уравнения Каллана–Симанчика следует, что  $f$  зависит от своих аргументов только через бегущую константу связи  $\alpha_s(Q) = \frac{c}{g^2}/4\pi$ , вычисленную при  $Q^2 = s$ . Константа связи  $\bar{g}$  определена в соответствии

с уравнением ренормгруппы:

$$\frac{d}{d \ln(Q/M)} \bar{g} = \beta(\bar{g}), \quad (17.12)$$

с дополнительным условием  $\alpha_s(M) = \alpha_s$ . Для КХД с тремя цветами и  $n_f$  приближенно безмассовыми кварками  $\beta$ -функция дается выражением (16.135):

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}, \quad \text{где } b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f. \quad (17.13)$$

Тогда решением уравнения ренормгруппы будет

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s}{1 + (b_0\alpha_s/2\pi) \ln(Q/M)}. \quad (17.14)$$

Явная зависимость  $\sigma$  от  $\alpha_s$  может быть найдена из последовательного сравнения членов в разложении  $f(\alpha_s(\sqrt{s}))$  с членами из ряда теории возмущений. В первом порядке находим:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left( 3 \sum_f Q_f^2 \right) \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha_s(\sqrt{s})}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2(\sqrt{s})) \right]. \quad (17.15)$$

Таким образом, уравнение Каллана–Симанчика позволяет заменить фиксированную перенормированную константу связи  $\alpha_s$  на бегущую константу связи  $\alpha_s(Q)$ , вычисленную при  $Q^2 = s$ .

Поскольку фиксированная константа  $\alpha_s$  зависит от произвольной точки перенормировки  $M$ , иногда удобно полностью устранить ее из нашей формулы. Чтобы сделать это, определим масштаб масс, по традиции обозначаемый  $\Lambda$  (не путать с ультрафиолетовым обрезанием!), удовлетворяющий условию:

$$1 = g^2(b_0/8\pi^2) \ln(M/\Lambda). \quad (17.16)$$

Тогда (17.14) можно переписать в виде

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{2\pi}{b_0 \ln(Q/\Lambda)}. \quad (17.17)$$

Эта формула — самое ясное выражение того утверждения, что  $\alpha_s(Q)$  уменьшается как  $(\ln(Q))^{-1}$  при больших  $Q$ . Энергетический масштаб  $\Lambda$  — это масштаб, на котором  $\alpha_s$  становится велика при уменьшении  $Q^2$ .

Экспериментальные измерения вероятности этой и других реакций дают значение  $\Lambda \approx 200$  МэВ. Теория возмущений в КХД справедлива, только если  $Q$  в несколько раз больше этого значения, скажем, при  $Q = 1$  ГэВ, где  $\alpha_s(Q) \approx 0.4$ . Сильные взаимодействия становятся на самом деле сильными на расстояниях больших чем  $\sim 1/\Lambda$ , что грубо равняется размеру легких адронов.

Хотя пример с сечением аннигиляции  $e^+e^-$  особенно прост, поскольку оно зависит только от одного импульсного инварианта, похожие рассуждения применимы и к другим предсказаниям КХД. При анализе процессов сильного взаимодействия, чувствительных к кварковой и глюонной субструктуре, мы получим в лидирующем порядке формулы для сечения реакций, зависящие от  $\alpha_s$ . Чтобы эти выражения удовлетворяли уравнению Каллана–Симанчика, следует заменить фиксированную константу  $\alpha_s$  на

бегущую  $\alpha_s(Q)$ , вычисленную при  $Q$  порядка характерного для реакции инварианта импульса. Поскольку бегущая константа зависит от  $Q$  только логарифмически, нам не нужно беспокоиться о точном выборе  $Q$ . Если мы ошибемся в выборе масштаба в два раза, ошибка в определении  $\alpha_s(Q)$  будет порядка  $(\ln(Q))^{-2} \sim \alpha_s^2(Q)$ . Эта неопределенность разрешится при вычислении члена следующего порядка по  $\alpha_s$ .

Перед тем, как завершить это формальное описание аннигиляции  $e^+e^-$ , необходимо сделать одно уточнение. В начале раздела 12.2 мы заметили, что предсказания ренормгруппы могут усложниться за счет появления физических порогов и связанных с ними сингулярностей, поэтому мы установили справедливость этих предсказаний только для достаточно больших пространственноподобных значений квадрата характерного импульса  $P^2$ . В этой главе мы будем иметь дело с сечениями реакций между кварками и глюонами, вычисленными на массовой оболочке. Это в принципе приводит к дополнительным усложнениям. Например, для того, чтобы применить уравнение Каллана–Симанчика к  $\sigma(s)$ , мы должны знать, что эта величина не содержит инфракрасных расходимостей, чьи регуляторы могли бы играть роль дополнительного размерного параметра. Везде в этой главе мы будем предполагать, что похожие сокращения расходимостей, связанных с мягкими и коллинеарными глюонами, происходят и в интересующих нас процессах. Можно провести полное доказательство таких сокращений, но оно довольно техническое\*. В некоторых случаях допустима альтернативная точка зрения: можно оправдать использование ренормгруппы для анализа амплитуд на массовой поверхности, связывая их с функциями Грина, вычисленными в пространственноподобной области. Этот метод анализа, имеющий свои особенности, будет основным сюжетом гл. 18.

### Испускание глюонов и образование струй

Вторым результатом заключительного проекта к части I была формула для дифференциального сечения реакции образования  $q\bar{q}$  с испусканием глюона. Перевод этой формулы на язык КХД с использованием (17.7) дает следующий результат. Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — отношения энергий кварка, антикварка и глюона к энергии электронов в пучке. Они удовлетворяют условиям  $0 < x_i < 1$  и  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ . Тогда сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$  равно:

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g) = \sigma_0 \cdot \left(3 \sum_f Q_f^2\right) \cdot \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}. \quad (17.18)$$

Это сечение имеет сингулярности при стремлении  $x_1$  или  $x_2$  к единице. Предел  $x_1 \rightarrow 1$  соответствует конфигурациям, в которых кварк имеет максимально возможную энергию, а антикварк и глюон летят в противоположном направлении, унося оставшуюся энергию. Тогда антикварк и глюон имеют почти коллинеарные светоподобные векторы импульсов и, таким образом, образуют систему с очень малой инвариантной массой. Точно так же, предел  $x_2 \rightarrow 1$  соответствует конфигурациям, в которых коллинеарны кварк и глюон. Эти сингулярности ответственны за расходимости в интегральном сечении в пределе нулевой массы глюона.

Как следует интерпретировать эти сингулярности? При обсуждении тормозного излучения в разделе 6.1 мы видели, что вероятность излучения фотона рассеянным электроном для случая коллинеарного излучения усиливается на множитель порядка  $\ln(q^2/m^2)$ , где  $m$  — масса электрона. Таким образом, полная вероятность испускания коллинеарного фотона формально расходится в пределе нулевой массы. Такой же

\* Обзор теорем, подтверждающих формулы пертурбативной КХД см. в J. C. Collins and D. E. Soper, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **37**, 383 (1987).

вывод справедлив и для испускания глюонов кварками. Расходимость для коллинеарного излучения, появляющаяся в пределе нулевой массы, называется *сингулярностью по массе*. В КЭД мы видели, что сингулярность по массе сигнализирует о реальном физическом эффекте сильного коллинеарного излучения при больших  $q^2$ . В КХД в этом пределе мы можем ожидать сильного излучения глюонов, однако следует внимательно подумать о том, как такое излучение может проявиться на опыте. Испускается коллинеарный глюон или нет, кварк и антикварк, образующиеся в реакции, в дальнейшем будут испытывать мягкие взаимодействия с другими продуктами реакции. Эти процессы будут продолжаться, приводя к образованию кварк-антикварковых пар и испусканию и поглощению глюонов, пока все цветные частицы не соберутся в бесцветные адроны. По этой причине формула (17.18) не применима, если поперечный импульс коллинеарного глюона меньше, чем типичный масштаб взаимодействий мягких глюонов, порядка 1 ГэВ.

Когда глюон испускается со значительным поперечным импульсом по отношению к оси разлета  $q\bar{q}$ , последующие мягкие обмены не могут воспроизвести или обратить этот поперечный импульс. В этом случае система  $q\bar{q}g$  переходит в систему из трех разных струй адронов. Таким образом, достаточно далеко от коллинеарной области можно интерпретировать (17.18) как сечение реакции, в которой образуется три адронных струи с энергиями, равными произведению  $x_1, x_2, x_3$  на энергию электронного пучка.

При помощи анализа, похожего на проделанный выше для полного сечения, можно улучшить (17.18), заменив фиксированную константу связи  $\alpha_s$  на бегущую константу  $\alpha_s(Q)$ . Разумно выбрать в качестве  $Q$  поперечный импульс глюона  $p_{\perp g}$ , описанный после (17.9). Однако если этот поперечный импульс слишком мал,  $\alpha_s(Q)$  будет велика, и наша формула для ведущего порядка нарушится. Это вторая причина, по которой нельзя использовать формулу (17.18), когда поперечный импульс глюона меньше чем 1 ГэВ.

С другой стороны, когда поперечный импульс глюона много больше 1 ГэВ, нет причин, по которым нарушалась бы теория возмущений в КХД. Мягкие процессы не могут изменить трехструйную природу адронного состояния, а асимптотическая свобода гарантирует, что константа связи мала, так что лидирующий член в ряде теории возмущений уже достаточно хорошо описывает ситуацию.

Сечение трехструйного процесса (17.18) — это хороший пример предсказания, которое можно получить, используя теорию возмущений в КХД. Мы описываем процесс сильного взаимодействия при помощи инвариантного переданного импульса  $Q$ , переданного адронным составляющим в результате этого процесса. Теория возмущений в КХД делает предсказания относительно потока энергии и импульса, переходящих в конечную систему адронных струй в такой реакции. Если  $Q$  велико, теория возмущений неприменима, и мы не получаем полезных предсказаний. Однако, если  $Q$  велико, асимптотическая свобода КХД означает, что фейнмановские диаграммы для кварков и глюонов будут правильно предсказывать поведение конечной системы адронных струй.

### 17.3. Глубоконеупругое рассеяние

Следующей после аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны простейшей реакцией, включающей сильновзаимодействующие частицы, является рассеяние электрона на протоне или на каком-нибудь другом адроне. На самом элементарном уровне на эту реакцию можно смотреть как на электромагнитное рассеяние электрона на кварке внутри протона\*. На

\*Электрон в этой реакции можно заменить мюоном. В этом случае применимы все те же формулы. Как мы увидим в гл. 20, лептоны также могут рассеиваться на кварках за счет слабого взаимодействия с участием нейтрального тока.

рис. 17.3 показано, как можно изобразить этот процесс. Обозначим импульс протона через  $P$ , начальный импульс кварка — через  $p$ , начальный и конечный импульсы электрона — через  $k$  и  $k'$ . Если конечный импульс электрона измерен, можно вычислить импульс  $q = k - k'$ , переданный адронной системе виртуальным фотоном. Вектор  $q$  пространственноподобен, и его принято записывать как  $q^2 = -Q^2$ .

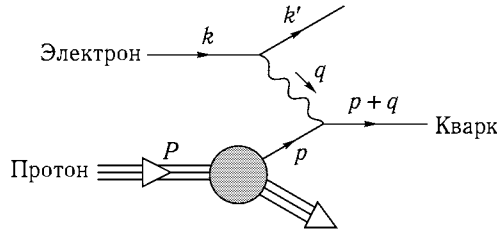


Рис. 17.3. Глубоконеупругое рассеяние в КХД. Диаграмма показывает поток импульса при рассеянии высокоэнергетичного электрона на кварке, волновая функция которого входит в волновую функцию протона.

Если квадрат переданного импульса  $Q^2$  велик, кварк излучается из протона так, что последующие мягкие процессы не могут сбалансировать эту реакцию. Мягкие процессы будут, однако, приводить к образованию глюонов и кварк-антикварковых пар, которые в конце концов нейтрализуют цвет и превратят выбитый кварк в струи адронов, летящие в направлении импульса, переданного электроном. Обычно квадрат полной массы конечной адронной системы велик, поскольку выбитый кварк несет большой импульс по отношению к остальным, как говорят, кваркам — «наблюдателям». В этом случае о процессе говорят как о *глубоконеупругом рассеянии*.

Чтобы получить в первом приближении сечение электрон-протонного рассеяния, рассмотрим эту реакцию в системе отсчета, в которой электрон и протон быстро летят навстречу друг другу, например, в системе центра масс электрона и протона. Мы предполагаем, что энергия в системе центра масс достаточно велика, и при рассмотрении кинематики можно игнорировать наличие массы у протона. Тогда протон имеет почти светоподобный импульс вдоль оси столкновения. Составляющие протона кварки также имеют светоподобные импульсы, которые почти коллинеарны импульсу протона. Это так, поскольку кварк не может приобрести большой поперечный импульс кроме как посредством обмена жестким глюоном, а этот процесс подавлен параметром  $\alpha_s$ , малым на больших масштабах энергий. Таким образом, в ведущем порядке теории возмущений в КХД можно записать:

$$p = \xi P, \quad (17.19)$$

где  $\xi$  — число между 0 и 1, которое называют *продольной долей* конституентного кварка. В лидирующем порядке по  $\alpha_s$  мы также можем игнорировать испускание или обмен глюонами во время процесса столкновения. В результате сечение электрон-протонного рассеяния дается сечением электрон-кваркового рассеяния при данном значении продольной доли, умноженным на вероятность того, что протон содержит кварк с таким значением  $\xi$  и проинтегрированным по  $\xi$ .

Однако вероятность того, что протон содержит кварк с некоторым значением импульса, нельзя вычислить по теории возмущений в КХД, поскольку эта вероятность зависит от мягких процессов, определяющих структуру протона как связанного состояния кварков и глюонов. Поэтому мы будем рассматривать эту вероятность как неизвестную функцию, которую следует определять из эксперимента. В конце концов

нам придется использовать такую вероятностную функцию для каждого вида кварков, антикварков и глюонов, которые можно найти в волновой функции протона. Все вместе эти составляющие называют *партонами*. Для каждого сорта партона  $f$  запишем вероятность найти его внутри протона со значением продольной доли  $\xi$  в виде:

$$\left( \begin{array}{l} \text{вероятность найти партон } f \\ \text{с продольной долей } \xi \end{array} \right) = f_f(\xi) d\xi. \quad (17.20)$$

Функция  $f_f(\xi)$  называется *партонной функцией распределения*. С использованием этого обозначения сечение неупругого рассеяния электрона на протоне в ведущем порядке по  $\alpha_s$  дается выражением:

$$\begin{aligned} \sigma(e^-(k)p(P) \rightarrow e^-(k') + X) = \\ = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) \sigma(e^-(k)q_f(\xi P) \rightarrow e^-(k') + q_f(p')), \end{aligned} \quad (17.21)$$

где  $X$  обозначает любое конечное адронное состояние. Сумма в (17.21) содержит вклады от составляющих — антикварков, также как и от составляющих — кварков.

Уравнение (17.21) эквивалентно формуле (14.8), которую мы получили для этой реакции в гл. 14. Теперь мы видим, что она подтверждается малостью константы связи КХД при больших масштабах импульсов. Важно, однако, напомнить, что (17.21) не является точным предсказанием КХД, а лишь первым членом в разложении по  $\alpha_s$ ; это приближение называется *партонной моделью*. Поправки высшего порядка к уравнению (17.21) в КХД будут включать изменение как сечения электрон-протонного рассеяния, так и партонной функции распределения. Наиболее важные из этих поправок обсуждаются в разделе 17.5.

Таким же образом и все остальные реакции с протонами, в которых имеется большая передача импульса, описываются партонной моделью. В КХД все сечения этих реакций вычисляются из амплитуд рассеяния кварков и глюонов. Начальное движение протона во всех случаях описывается одной и той же партонной функцией распределения  $f_f(\xi)$ , которая появляется в глубоконеупругом рассеянии.

Выведем явную формулу, определяющую сечение глубоконеупругого рассеяния в старшем порядке, пересмотрев анализ гл. 14. В (14.3) мы написали дифференциальное сечение процесса рассеяния в старшем порядке на уровне партонов,

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^-q \rightarrow e^-q) = \frac{2\pi\alpha^2 Q_f^2}{\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right]. \quad (17.22)$$

В общем случае мы будем использовать символы  $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{u}$  для обозначения мандельштамовских переменных для двухчастичных процессов рассеяния на партонном уровне. Эти переменные надо связать с наблюдаемыми свойствами адронной системы или рассеянного электрона. Для безмассовых начальных и конечных частиц

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0.$$

В случае глубоконеупругого рассеяния

$$\hat{t} = -Q^2$$

и

$$\hat{s} = 2p \cdot k = 2\xi P \cdot k = \xi s.$$

Таким образом, сечение глубокоупругого рассеяния при фиксированном  $Q^2$  дается выражением

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) Q_f^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{Q^2}{\xi s} \right)^2 \right] \theta(\xi s - Q^2). \quad (17.23)$$

Последний множитель выражает кинематическое ограничение  $\hat{s} \geq |\hat{t}|$ . Выражение (17.23) должно быть правильным первым приближением к сечению глубокоупругого рассеяния при больших  $Q^2$ . В этом случае поправки к этой формуле из-за испускания и обмена жесткими глюонами будут порядка  $\alpha_s(Q^2)$ .

Мы также показали в гл. 14, что измерение импульса  $k'$  рассеянных электронов и, таким образом, измерение переданного импульса  $q$  однозначно определяет допустимое для упругого электрон-кваркового рассеяния значение  $\xi$ . Это значение дается формулой (14.7):

$$\xi = x, \quad \text{где } x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}. \quad (17.24)$$

Если выразить (17.23) как дважды дифференциальное по  $x$  и  $Q^2$  сечение рассеяния, оно превратится просто в произведение сечения рассеяния на партонном уровне и суммы партонных функций распределения, вычисленных при  $\xi = x$ . В литературе наряду с символом  $\xi$  часто используется символ  $x$ , и далее мы будем часто следовать этой практике.

Сечение реакций особенно удобно представлять при помощи безразмерных комбинаций кинематических переменных. Одной из них будет  $x$ , в качестве другой удобно выбрать

$$y \equiv \frac{2P \cdot q}{2P \cdot k} = \frac{2P \cdot q}{s}. \quad (17.25)$$

В системе отсчета, в которой протон покоится,

$$y = \frac{q^0}{k^0}, \quad (17.26)$$

то есть  $y$  — это доля энергии падающего электрона, переданная адронной системе. С другой стороны, поскольку  $p = \xi P$ , можно выразить  $y$  в терминах партонных переменных:

$$y = \frac{2p \cdot (k - k')}{2p \cdot k} = \frac{\hat{s} + \hat{u}}{\hat{s}}, \quad (17.27)$$

так что

$$\frac{\hat{u}}{\hat{s}} = -(1 - y). \quad (17.28)$$

Из (17.26) или (17.28) мы видим, что  $y \leq 1$ . Таким образом, кинематически разрешенная область на плоскости  $(x, y)$  определяется условием:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Чтобы выразить (17.23) в терминах  $x$  и  $y$ , нам необходима формула:

$$Q^2 = xys, \quad (17.29)$$



которая следует из (17.24) и (17.25) после замены переменных:

$$d\xi dQ^2 = dx dQ^2 = \frac{dQ^2}{dy} dx dy = xs dx dy.$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния принимает вид:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(e^- p \rightarrow e^- X) = \left( \sum_f x f_f(x) Q_f^2 \right) \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4} [1 + (1-y)^2]. \quad (17.30)$$

Множитель  $1/Q^4$  возник из квадрата пропагатора виртуального фотона. Если отбросить этот множитель, зависимость от  $x$  и  $y$  полностью факторизуется. Каждая половина этого соотношения содержит физическую информацию. Тот факт, что партонные распределения  $f_f(x)$  зависят только от  $x$  и не зависят от  $Q^2$ , и есть утверждение о бьеркеновском скейлинге. Оно говорит нам, что начальное распределение партонов не зависит от деталей процесса жесткого рассеяния. Зависимость сечения от  $y$  возникает из-за процессов рассеяния на партонах. В гл. 5 мы видели, что если рассматривать сечения элементарных реакций в КЭД в пределе больших энергий, они зависят от спиральностей взаимодействующих частиц. Поведение  $[1 + (1-y)^2]$  в (17.30) известно под названием *соотношения Каллана–Гросса*; оно специфично для рассеяния электронов на безмассовых фермионах.

В те времена, когда связь между партонами и кварками все еще была неясной, это соотношение свидетельствовало о том, что партоны, участвующие в глубокоупругом рассеянии, на самом деле являются фермионами.

### Глубокоупругое рассеяние нейтрино

Из-за того, что сумма по ароматам кварков в (17.30) факторизуется, нельзя определить отдельную партонную функцию распределения  $f_f(x)$  только из экспериментов по рассеянию электронов. Тем не менее, более детальную информацию о структуре протона можно получить, изучая глубокоупругое рассеяние *нейтрино*. Нейтрино имеют нулевой электрический заряд и поэтому не взаимодействуют посредством обмена фотонами, но они могут взаимодействовать с кварками за счет слабых взаимодействий. Мы будем подробно обсуждать слабые взаимодействия в гл. 20, а сейчас примем упрощенное описание, основывающееся на элементарном процессе, изображенном на рис. 17.4. В этом процессе нейтрино превращается в соответствующий заряженный лептон\*, испустив виртуальный массивный векторный бозон  $W^+$ . Этот бозон взаимодействует с кварковым током, переводящим  $d$ -кварк в  $u$ -кварк. Благодаря такому процессу обмена возникает иная, но полностью контролируемая возможность передачи жесткого импульса  $q$ . Амплитуда этого процесса описывается эффективным лагранжианом:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} \frac{1}{m_W^2} \left[ \bar{\ell}\gamma^\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \nu \right] \left[ \bar{u}\gamma_\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) d \right] + \text{э.с.}, \quad (17.31)$$

где  $\ell$ ,  $\nu$ ,  $d$ ,  $u$  — фермионные поля, связанные с заряженным лептоном, нейтрино,  $d$ - и  $u$ -кварками, а  $g$  — константа слабого взаимодействия. Множитель  $1/m_W^2$  возникает из-за пропагатора  $W$ -бозона, рассматриваемого в пределе  $q^2 \ll m_W^2$ . Первые два

\* Имеется также слабое взаимодействие, описываемое *нейтральным током*, в котором нейтрино остается нейтрино (см. задачу 20.4).

множителя часто записывают при помощи *константы Ферми*  $G_F$ , определенной как

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (17.32)$$

Эта константа определяет интенсивность слабых взаимодействий при энергиях, много меньших  $m_W$ . Как явно видно из (17.31), критическим свойством слабых взаимодействий является то, что  $W$ -бозон взаимодействует только с состояниями релятивистских фермионов с левой спиральностью. Глубокое значение этого свойства будет обсуждаться в гл. 20.

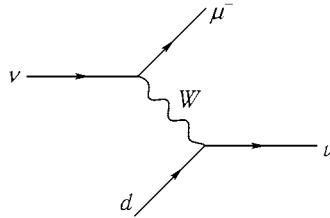


Рис. 17.4. Элементарный процесс рассеяния нейтрино, обусловленный слабым взаимодействием.

По техническим причинам проще всего осуществлять глубоконеупругое рассеяние нейтрино, используя мюонные нейтрино, которые превращаются в мюоны после испускания  $W$ -бозона. На ядерных мишенях можно рассеивать и мюонные антинейтрино, и как мы увидим, интересно сравнить эффекты от рассеяния нейтрино и антинейтрино. Поскольку протон содержит небольшую примесь тяжелых  $s$  и  $c$ -кварков, они также будут давать некоторый вклад в глубоконеупругое рассеяние нейтрино. Однако мы будем игнорировать эти поправки.

Сечение глубоконеупругого рассеяния нейтрино дается формулой, аналогичной (17.21), в которой сечение реакции с обменом фотоном заменено на сечение, возникающее из-за обмена  $W$ -бозоном. Это сечение можно вывести непосредственно. Однако можно получить ответ из (17.22), если вернуться к гл. 5 и вспомнить, как структура этого выражения возникала из вкладов, отвечающим разным спиральностям. В (17.22) множитель  $\hat{t}^2$  в знаменателе возникает из-за фотонного пропагатора, в случае слабого взаимодействия этот множитель заменяется на  $m_W^4$ . Множитель  $[\hat{s}^2 + \hat{u}^2]$  является следствием алгебры матриц Дирака. Мы видели в разделе 5.2, что первое слагаемое соответствует вкладу от рассеяния левых электронов на левых фермионах или правых электронов на правых фермионах, а второе — вкладу других комбинаций спиральностей. В случае рассеяния нейтрино на кварке взаимодействие (17.31) допускает только рассеяние левых нейтрино на левых кварках, так что возникает только слагаемое  $\hat{s}^2$ . Чтобы определить общую нормировку сечения, заметим, что, поскольку нейтрино образуются в слабых взаимодействиях, они всегда левополяризованы, так что не нужно делать усреднения по поляризациям. С другой стороны, все же следует усреднить по поляризациям начального кварка. Окончательно находим:

$$\frac{d\sigma}{dt}(\nu d \rightarrow \mu^- u) = \frac{\pi g^4}{2(4\pi)^2 \hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{s}^2}{m_W^4} \right] = \frac{G_F^2}{\pi}. \quad (17.33)$$

Эту формулу легко проверить прямым вычислением, начав с (17.31).

Сечение рассеяния антинейтрино на кварках можно получить таким же способом. Заметим, что эта реакция включает обмен  $W^-$ -бозонами и таким образом переводит  $u$ -кварки в  $d$ -кварки. Однако  $u$ -кварки все же должны быть левополяризованы. Единственное изменение по сравнению с предыдущим разделом состоит в том, что антинейтрино, связанные с (17.31), правополяризованы, так что выражение для сечения возникает из (17.22) от слагаемого, пропорционального  $\hat{u}^2$ :

$$\frac{d\sigma}{dt}(\bar{\nu}u \rightarrow \mu^+d) = \frac{\pi g^4}{2(4\pi)^2 \hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}^2}{m_W^4} \right] = \frac{G_F^2}{\pi} (1-y)^2. \quad (17.34)$$

Эту формулу опять легко проверить непосредственно. Сечение процесса рассеяния нейтрино на антикварке, в котором  $\bar{u}$  переводится в  $\bar{d}$ , также дается (17.34), в то время как сечение рассеяния антинейтрино на антикварке с переходом  $\bar{d}$  в  $\bar{u}$  дается (17.33).

Чтобы преобразовать эти сечения рассеяния, вычисленные на партонном уровне, в физические сечения, скомбинируем их с партонными функциями распределения. Кинематика точно такая же, как и в случае электронного рассеяния. Таким образом, следуя рассуждениям, которые привели к (17.30), получим выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy}(\nu p \rightarrow \mu^- X) &= \frac{G_F^2 s}{\pi} [x f_d(x) + x f_{\bar{u}}(x) \cdot (1-y)^2], \\ \frac{d^2\sigma}{dx dy}(\bar{\nu} p \rightarrow \mu^+ X) &= \frac{G_F^2 s}{\pi} [x f_u(x) \cdot (1-y)^2 + x f_{\bar{d}}(x)]. \end{aligned} \quad (17.35)$$

В соответствии с этими соотношениями, глубоконеупругое рассеяние нейтрино позволяет разделить партонные функции распределения для  $u$  и  $d$ -кварков и антикварков в протоне.

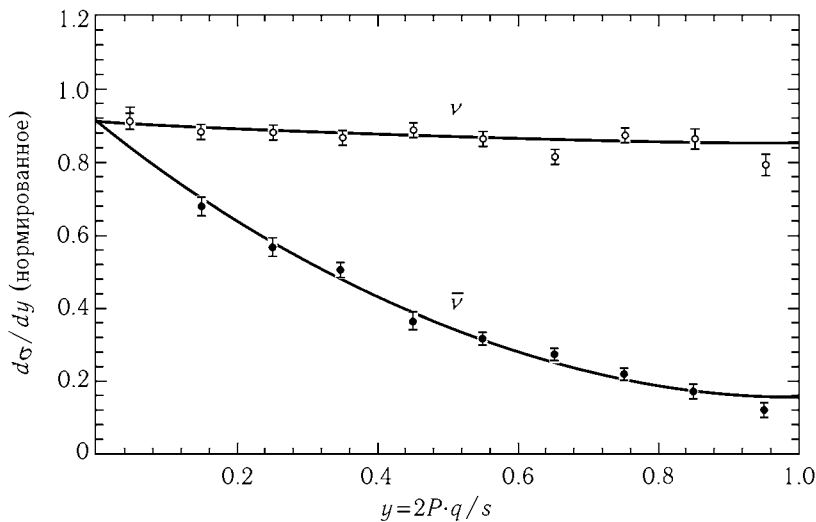


Рис. 17.5. Распределение по  $y$  глубоконеупругих сечений рассеяния нейтрино и антинейтрино на железной мишени, измеренное в эксперименте CDHS, J. G. H. de Groot, et. al., *Z. Phys.* C1, 143 (1979). Сплошные линии — приближение функциями вида  $A + B(1-y)^2$ .

Кроме того, (17.35) дает замечательное качественное предсказание. С той точностью, с которой можно считать протон (или нейтрон) состоящим из кварков с очень ма-

лой примесью кварк-антикварковых пар, сечения глубоконеупругого рассеяния нейтрино не должны зависеть от  $y$ , в то время как сечения рассеяния антинейтрино должны спадать как  $(1 - y)^2$ . Измеренная зависимость от  $y$  этих глубоконеупругих сечений показана на рис. 17.5. Качественное поведение, предсказываемое партонным описанием, очевидно, воспроизводится. Отклонение от точного предсказания можно приписать небольшой примеси антикварков в волновой функции протона.

### Партонные функции распределения

Зная, что предсказания партонной модели для сечений глубоконеупругого рассеяния электронов и нейтрино согласуются с экспериментальными данными, можно использовать эти сечения для извлечения партонных функций распределения, и, таким образом, узнать что-то о структуре протона\*. Набор функций распределения, удовлетворяющих всем экспериментальным данным, показан на рис. 17.6. Поскольку все они, особенно соответствующие антикваркам, сильно растут при малых  $x$ , мы изобразили функции  $xf_f(x)$  для каждого типа распределений. Как было замечено в разделе 17.5, экспериментально наблюдается малое отклонение от бьеркеновского скейлинга, так что эти функции медленно меняются при изменении  $Q^2$ . На рисунке эти функции показаны при  $Q^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$ . Мы увидим в разделе 17.6, что это нарушение бьеркеновского скейлинга обусловлено поправками более высокого порядка в КХД. Мы также покажем, что измерение этого нарушения скейлинга позволяет определить партонную функцию распределения  $f_g(x)$  для глюонов. Опережая события, мы также изобразили эту функцию на рисунке. Неудивительно, что  $u$  и  $d$ -кварки с большей вероятностью несут существенную долю импульса протона, в то время как антикварки и глюоны стремятся иметь малые  $x$ .

Поскольку партонные распределения — это вероятности нахождения различных составляющих протона, они должны быть нормированы способом, отражающим квантовые числа протона. Протон — это связанное состояние  $uud$  с некоторой добавкой кварк-антикварковых пар. Таким образом, он должен содержать избыток в виде двух  $u$ -кварков и одного  $d$ -кварка над соответствующими антикварками. Это подразумевает выполнение условий:

$$\int_0^1 dx [f_u(x) - f_{\bar{u}}(x)] = 2, \quad \int_0^1 dx [f_d(x) - f_{\bar{d}}(x)] = 1. \quad (17.36)$$

До сих пор мы обсуждали партонные распределения только для протона. Тем не менее, похожие рассуждения применимы и к другим адронам. Каждый адрон имеет свой набор партонных функций распределения, они подчиняются правилам сумм, аналогичным (17.36) и учитывающим квантовые числа данного адрона. Партонные функции распределения также должны отражать симметрии, связывающие различные адроны. Например, поскольку с точностью в несколько процентов можно получить нейтрон, поменяв местами  $u$  и  $d$  кварки в протоне, функции распределения нейтрона удовлетворяют соотношениям:

$$f_u^n(x) = f_d(x), \quad f_d^n(x) = f_u(x), \quad f_{\bar{u}}^n(x) = f_{\bar{d}} \quad \text{и т. д.} \quad (17.37)$$

В этих уравнениях и далее функции распределения без специального индекса относятся к протону. Партонные функции распределения антипротона даются точными соотно-

\* Детальное обсуждение того, как извлекать партонные функции распределения из экспериментальных данных, можно найти в обзоре: G. Sterman, et. al., *Rev. Mod. Phys.* **67**, 157 (1995).

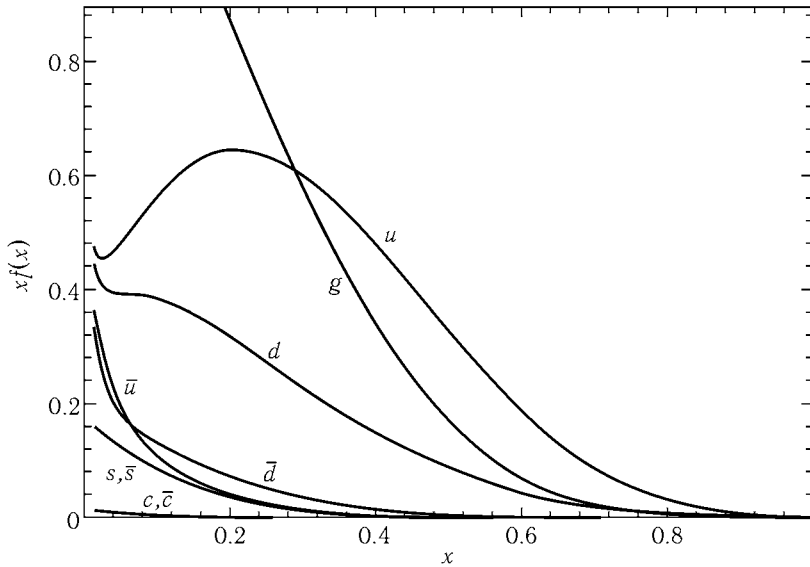


Рис. 17.6. Партонные функции распределения  $xf_f(x)$  для кварков, антикварков и глюонов в протоне при  $Q^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$ . Эти распределения получены из данных по глубоконеупругим рассеяниям, измеренных коллаборацией CTEQ (CTEQ2L) и описанных в работе J. Botts, et. al., *Phys. Lett.* **B304**, 159 (1993).

шениями:

$$f_u^{\bar{p}}(x) = f_{\bar{u}}(x), \quad f_{\bar{u}}^{\bar{p}}(x) = f_u(x) \quad \text{и т. д.} \quad (17.38)$$

В любом случае, суммарный импульс, уносимый партонами, должен совпадать с полным импульсом адрона. Это означает, что

$$\int_0^1 dx x [f_u(x) + f_d(x) + f_{\bar{u}}(x) + f_{\bar{d}}(x) + f_g(x)] = 1. \quad (17.39)$$

Функции распределения кварков и антикварков, извлеченные из данных по глубоконеупругим рассеяниям, дают только *половину* значения этого интеграла. Остальные импульсы должны уносить глюоны.

## 17.4. Процессы жесткого рассеяния при столкновениях адронов

Если сталкивать адроны с другими адронами при очень больших энергиях, почти все столкновения будут описываться мягкими взаимодействиями составляющих их кварков и глюонов. Такие взаимодействия нельзя исследовать при помощи теории возмущений в КХД, поскольку, когда передача импульса мала, константа  $\alpha_s$  велика. Однако в некоторых столкновениях два кварка или глюона будут обмениваться большим импульсом  $p_{\perp}$ , перпендикулярным оси столкновения. Тогда, как и при глубоконеупругом рассеянии, элементарное взаимодействие происходит очень быстро по сравнению с внутренним временным масштабом эволюции волновых функций адронов, так что предсказания КХД в низшем порядке должны правильно описывать процесс. Мы снова получим формулу партонной модели, которая построена из subprocessов ведущего

порядка, проинтегрированных с партонными функциями распределения. Для случая протон-протонного рассеяния эти функции будут теми же, что и измеренные в лептон-протонном глубоконеупругом рассеянии.

Например, если жесткий процесс на партонном уровне включает кварк-антикварковое рассеяние в конечное состояние  $Y$ , предсказание КХД для сечения в ведущем порядке принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma(p(P_1) + p(P_2) \rightarrow Y + X) &= \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_f f_f(x_1) f_{\bar{f}}(x_2) \cdot \sigma(q_f(x_1 P) + \bar{q}_f(x_2 P) \rightarrow Y), \end{aligned} \quad (17.40)$$

где суммирование идет по всем видам кварков и антикварков  $u, d, \bar{u}, \bar{d}, \dots$  (Здесь  $X$  опять обозначает какое-нибудь конечное адронное состояние.) Такая же формула с подходящим образом модифицированными функциями распределения применима к любому процессу адрон-адронного рассеяния. Эта формула будет хорошим первым приближением, если переданный импульс в реакции  $q\bar{q}$  велик по сравнению с некоторым инвариантным значением. В этом разделе мы обсудим некоторые примеры процессов такого типа.

### Образование пар лептонов

Простейший для анализа пример — реакция, в которой образуется лептонная пара  $\ell^+\ell^-$  с большой массой при аннигиляции  $q\bar{q}$  в протон-протонном столкновении. Эта реакция, называемая *процессом Дрелла–Яна*, изображена на рис. 17.7. В этом случае сечение лежащей в основе реакции  $q\bar{q}$  описывается элементарным сечением КЭД. В лидирующем порядке КХД нужное сечение реакции  $\sigma(q\bar{q} \rightarrow \ell^+\ell^-)$  просто связано с сечением  $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ , даваемым (17.4). Единственное отличие между двумя вычислениями состоит в том, что мы должны усреднять, а не суммировать по цветовым ориентациям кварка и антикварка. Это дает два дополнительных множителя  $1/3$ . Таким образом,

$$\sigma(q_f \bar{q}_f \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{1}{3} Q_f^2 \cdot \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}}. \quad (17.41)$$

Если оба импульса конечных лептонов наблюдаемы, можно восстановить полный 4-импульс  $q$  виртуального фотона. Как мы сейчас покажем, можно определить и продольные доли импульса начального кварка и антикварка. Пусть

$$M^2 = q^2 \quad (17.42)$$

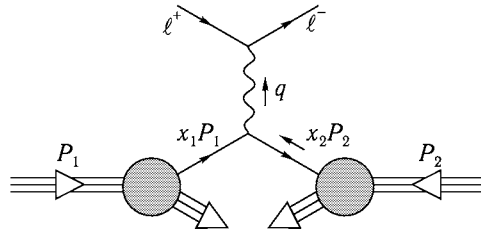
будет квадратом инвариантной массы пары Дрелла–Яна. (Не следует путать эту величину  $M$  с масштабом перенормировки.) Если поперечный импульс начальных партонов мал, поперечный импульс виртуального фотона также будет мал. Его продольный импульс, вообще говоря, может быть значительным. Мы параметризуем его, используя *быстроту*  $Y$  виртуального фотона, определенную в (3.48):

$$q^0 = M \operatorname{ch} Y, \quad (17.43)$$

где  $q^0$  измерено в системе центра масс  $pp$ . Выразим продольные части кварков, а следовательно, и сечение Дрелла–Яна, в терминах наблюдаемых  $M^2$  и  $Y$ .

В системе центра масс  $pp$  импульсы протонов принимают вид:

$$P_1 = (E, 0, 0, E), \quad P_2 = (E, 0, 0, -E),$$


 Рис. 17.7. Процесс Дрелла–Яна:  $pp \rightarrow \ell^+ \ell^- + \text{что-то еще}$ .

где  $E$  удовлетворяет условию  $s = 4E^2$ . Пренебрегая малыми продольными импульсами протонов, можно записать импульсы кварков и антикварков как  $x_1$  и  $x_2$ , умноженные на эти векторы, так что

$$q = x_1 P_1 + x_2 P_2 = ((x_1 + x_2)E, 0, 0, (x_1 - x_2)E). \quad (17.44)$$

Вычисляя квадрат этого вектора, находим:

$$M^2 = x_1 x_2 s. \quad (17.45)$$

Аналогично, из сравнения (17.43) с (17.44) находим:

$$\text{ch } Y = \frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right),$$

откуда

$$\exp Y = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}. \quad (17.46)$$

Эти уравнения можно обратить, чтобы определить  $x_1$  и  $x_2$ :

$$x_1 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^Y, \quad x_2 = \frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y}. \quad (17.47)$$

Соотношения (17.45) и (17.46) позволяют преобразовать интеграл в (17.40) в интеграл по параметрам  $M^2$ ,  $Y$  образовавшихся лептонов. Якобиан замены переменных равен:

$$\frac{\partial(M^2, Y)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} x_2 s & x_1 s \\ 1/2x_1 & -1/2x_2 \end{vmatrix} = s = \frac{M^2}{x_1 x_2}.$$

Таким образом, сечение реакции образования лептонной пары равно

$$\frac{d^2 \sigma}{dM^2 dY} (pp \rightarrow e^+ e^- + X) = \sum_f x_1 f_f(x_1) x_2 f_{\bar{f}}(x_2) \cdot \frac{1}{3} Q_f^2 \cdot \frac{4\pi \alpha^2}{3M^4}, \quad (17.48)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  даются (17.47). Примечательно, что сечение процесса Дрелла–Яна определяется шаг за шагом информацией, извлекаемой из глубоконеупругого рассеяния. К сожалению, соотношение между двумя процессами, вытекающее из (17.48), содержит поправки порядка  $\alpha_s(M)$ , которые оказываются численно большими и должны быть учтены при экспериментальной проверке этого предсказания.

### Общая кинематика образования пар

При выводе (17.48) мы использовали выражение для полного сечения (17.41) процессов партонного уровня, проинтегрированное по угловому распределению образующихся лептонов. В принципе, можно было бы сохранить угловое распределение и получить трижды дифференциальное распределение. Это было бы наиболее полным предсказанием, возможным для двухчастичной реакции на партонном уровне. Полезно разработать кинематику таких реакций с наиболее общей точки зрения. В общем случае партон типа 1 из протона рассеивается на партоне типа 2 из протона, образуя партоны типа 3 и 4 с квадратом переданного импульса  $\hat{t}$ . Этот общий процесс изображен на рис. 17.8. В процессе Дрелла–Яна партоны 3 и 4 являются лептонами. Однако эти партоны могут быть кварками или глюонами, материализующимися как адронные струи. В партонных переменных сечение этого процесса равно

$$\frac{d^3\sigma}{dx_1 dx_2 dt}(pp \rightarrow 3 + 4 + X) = f_1(x_1) f_2(x_2) \frac{d\sigma}{dt}(1 + 2 \rightarrow 3 + 4). \quad (17.49)$$

Переведем эту формулу на язык наблюдаемых параметров конечного состояния.

В ведущем порядке КХД поперечные импульсы партонов 3 и 4 должны быть равны по величине и противоположны по направлению, но на их продольные импульсы ограничений нет. В качестве трех параметров конечного состояния выберем величину общего поперечного партонного импульса  $p_\perp$  и *продольные быстроты*  $y_3, y_4$  конечных партонов, определенные формулами

$$E_i = p_\perp \operatorname{ch} y_i; \quad p_{i\parallel} = p_\perp \operatorname{sh} y_i. \quad (17.50)$$

Продольная быстрота  $y_i$  дает буст  $i$ -ой частицы из системы отсчета, в которой она имеет нулевой продольный импульс\*. Напомним из раздела 3.3, что при коллинеарных бустах быстроты просто складываются. Таким образом,  $(y_3, y_4, p_\perp)$  является набором переменных с подходящими трансформационными свойствами относительно бустов — преобразований Лоренца вдоль осей столкновения. Теперь покажем, что эти три параметра прямо связаны с основными переменными  $x_1, x_2, \hat{t}$ .

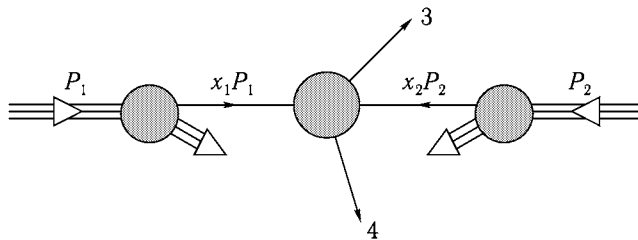


Рис. 17.8. Общий двухчастичный процесс рассеяния партонов.

Рассмотрим систему центра масс сталкивающихся партонов. Полная энергия в этой системе равна  $\sqrt{\hat{s}}$ . Мы будем использовать индекс \* для обозначения других величин, измеренных в этой системе, например,  $\theta_*$  для угла рассеяния партонов. Тогда

$$p_{3\parallel*} = \frac{1}{2} \sqrt{\hat{s}} \cos \theta_*, \quad p_{3\perp*} = \frac{1}{2} \sqrt{\hat{s}} \sin \theta_*, \quad (17.51)$$

\* В литературе по адронным столкновениям  $y_i$  обычно называется просто быстротой с подразумеваемым ограничением на продольные бусты.



и  $p_{4*}$  направлен в противоположную сторону. Эта система также является системой центра масс для партонов 3 и 4, так что

$$y_{3*} = -y_{4*} \equiv y_*. \quad (17.52)$$

Поскольку быстроты преобразуются сдвигами, можно найти  $y_*$  и быстроту  $Y$ , с которой надо сделать буст, чтобы перейти в эту систему отсчета:

$$y_* = \frac{1}{2}(y_3 - y_4), \quad Y = \frac{1}{2}(y_3 + y_4). \quad (17.53)$$

Угол рассеяния  $\theta_*$  определяется по  $y_*$  в результате комбинирования (17.51) с соотношением  $E_* = p_{\perp} \operatorname{ch} y_*$ :

$$\frac{1}{\sin \theta_*} = \operatorname{ch} y_*. \quad (17.54)$$

Тогда мандельстамовские переменные

$$\hat{s} = \frac{4p_{\perp}^2}{\sin^2 \theta_*}, \quad \hat{t} = -\frac{1}{2}\hat{s}(1 - \cos \theta_*) \quad (17.55)$$

могут быть выражены как

$$\hat{s} = 4p_{\perp}^2 \operatorname{ch}^2 y_*, \quad \hat{t} = -2p_{\perp}^2 \operatorname{ch} y_* e^{-y_*}. \quad (17.56)$$

Можно объединить первое из этих выражений с (17.47) и определить  $x_1$  и  $x_2$ :

$$x_1 = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{s}} \operatorname{ch} y_* e^Y, \quad x_2 = \frac{2p_{\perp}}{\sqrt{s}} \operatorname{ch} y_* e^{-Y}. \quad (17.57)$$

Чтобы преобразовать сечение (17.49) к наблюдаемым переменным конечных партонов, необходимо выражение для якобиана:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \hat{t})}{\partial(y_3, y_4, p_{\perp})} = \frac{8p_{\perp}^3}{s} \operatorname{ch}^2 y_* = \frac{2p_{\perp}\hat{s}}{s}. \quad (17.58)$$

Умножение (17.49) на этот множитель дает:

$$\frac{d^3\sigma}{dy_3 dy_4 dp_{\perp}} = f_1(x_1) f_2(x_2) \frac{2p_{\perp}\hat{s}}{s} \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (1 + 2 \rightarrow 3 + 4). \quad (17.59)$$

Это выражение можно немного упростить, используя соотношения  $\hat{s} = x_1 x_2 s$  и  $p_{\perp} dp_{\perp} = d^2 p_{\perp} / 2\pi$ , что дает окончательный ответ:

$$\frac{d^4\sigma}{dy_3 dy_4 d^2 p_{\perp}} = x_1 f_1(x_1) x_2 f_2(x_2) \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{d\hat{t}} (1 + 2 \rightarrow 3 + 4). \quad (17.60)$$

В этой формуле  $x_1$ ,  $x_2$  и мандельстамовские переменные для партонных subprocessов определяются формулами (17.57) и (17.56).

Полученный результат дает полное описание лептонов или струй в конечном состоянии для любой двухчастичной реакции между партонами. Например, чтобы найти распределение конечных лептонов в процессе Дрелла–Яна, следует подставить в эту формулу дифференциальное сечение аннигиляции кварков в лептоны:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q_f \bar{q}_f \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{1}{3} Q_f^2 \cdot \frac{2\pi\alpha^2 \hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}. \quad (17.61)$$

Формулу можно применять и к другим двухчастичным реакциям партонов, если известны соответствующие дифференциальные сечения на партонном уровне.

## Образование пар струй

Наиболее общая двухпартонная реакция в КХД включает кварки, глюоны или то и другое. К сожалению, очень трудно различить адронные струи, вызванные глюонами, от тех, которые вызваны кварками. Еще труднее экспериментально определить, были ли начальные партоны в реакции жесткого рассеяния кварками или глюонами. Таким образом, предсказания КХД для процессов жесткого рассеяния чаще всего принимают форму предсказаний сечений реакций образования струй в адронных столкновениях, просуммированных по всем возможным реакциям между кварками, антикварками и глюонами. В любом случае, чтобы вывести эти предсказания, нужно изучить сечения основных процессов партон-партонного рассеяния.

Простые двухчастичные процессы рассеяния кварков, антикварков и глюонов являются элементарными процессами теории возмущений КХД в том же смысле, в котором реакции, изучавшиеся в гл. 5, были элементарными процессами теории возмущений КЭД. Это те основные реакции жестких столкновений адронов, которые появляются в КХД в главном порядке по  $\alpha_s$ . В оставшейся части этого раздела мы выпишем формулы для сечений различных возможных кварковых и глюонных subprocessов. Все эти сечения будут порядка  $\alpha_s^2$ . На практике значение  $\alpha_s$  следует вычислять при типичном для реакции переданном импульсе, например, в точке  $Q^2 = \hat{t}$ .

Простейший subprocess — рассеяние разных кварков, например,  $u + d \rightarrow u + d$ . С точностью  $\alpha_s^2$  этот процесс описывается фейнмановской диаграммой рис. 17.9. Этот процесс аналогичен рассеянию электрона на мюоне в КЭД, для которого мы выписали сечение в (17.22):

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^- \mu \rightarrow e^- \mu) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right]. \quad (17.62)$$

Чтобы преобразовать его к сечению рассеяния кварков в КХД, следует лишь заменить константу связи КЭД  $e^2$  на  $g^2$  и умножить на групповой множитель для  $SU(3)$ . Диаграмма КХД содержит множитель:

$$(t^a)_{i'i}(t^a)_{j'j},$$

где  $i, i'$  соответствуют начальным и конечным цветам  $u$ -кварка, а  $j, j'$  —  $d$ -кварка. Для вычисления сечения следует возвести этот множитель в квадрат, просуммировать по конечным и усреднить по начальным цветам. Это приводит к множителю

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{tr}[t^b t^a] \cdot \text{tr}[t^b t^a] = \frac{1}{9} [C(r)]^2 \delta^{ab} \delta^{ab} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{2}{9}, \quad (17.63)$$

где мы воспользовались (15.78), и  $C(r) = 1/2$  для фундаментального представления  $SU(3)$ . Таким образом, для  $ud$ -рассеяния,

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(ud \rightarrow ud) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right]. \quad (17.64)$$

Такая же формула применима для любых двух различных кварков, или, после кроссинга, для рассеяния кварка и антикварка разных сортов. Переход от  $t$  к  $s$ -каналу дает сечение аннигиляции  $q\bar{q}$  в разные типы кварков:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \rightarrow d\bar{d}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right]. \quad (17.65)$$

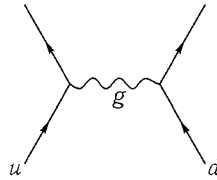


Рис. 17.9. Фейнмановская диаграмма, дающая вклад в процесс  $ud \rightarrow ud$ .

Рассеяние кварка и антикварка того же типа более сложно, поскольку теперь имеются две фейнмановские диаграммы рис. 17.10, которые интерферируют друг с другом. Аналогичный процесс в КЭД — это рассеяние Баба  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , для которого в задаче 5.2 была получена формула:

$$\frac{d\sigma}{dt}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[ \left(\frac{\hat{s}}{\hat{t}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{t}}{\hat{s}}\right)^2 + \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{t}}\right)^2 \right]. \quad (17.66)$$

Однако ее нельзя непосредственно преобразовать к КХД, поскольку разные слагаемые приобретают разные цветовые индексы.

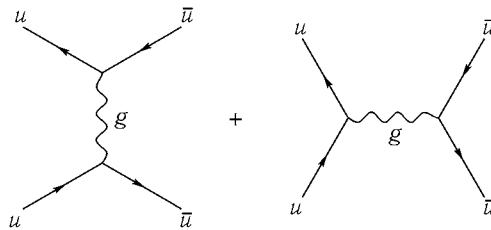


Рис. 17.10. Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в реакцию  $u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}$ .

Этот процесс наиболее просто анализировать, используя начальные и конечные состояния с определенной спиральностью. Для безмассовых фермионов спиральность сохраняется, так что в реакцию  $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-$  дает вклад только  $s$ -канальная диаграмма, в то время как в реакцию  $e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-$  дает вклад только  $t$ -канальные диаграммы. Соответствующие сечения равны:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left(\frac{\hat{t}}{\hat{s}}\right)^2, \\ \frac{d\sigma}{dt}(e_R^+e_R^- \rightarrow e_R^+e_R^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left(\frac{\hat{s}}{\hat{t}}\right)^2. \end{aligned} \quad (17.67)$$

Сечение для  $e_R^+e_L^- \rightarrow e_L^+e_L^-$  должно обращаться в нуль. В четвертый возможный процесс с участием  $e_R^+$  дают вклады и  $s$ , и  $t$ -канальные диаграммы. После явного вычисления этих вкладов находим:

$$\frac{d\sigma}{dt}(e_R^+e_L^- \rightarrow e_R^+e_L^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \hat{u}^2 \left(\frac{1}{\hat{t}} + \frac{1}{\hat{s}}\right)^2; \quad (17.68)$$

где перекрестное слагаемое в квадрате суммы отвечает интерференции между диаграммами. Инвариантность КЭД относительно преобразования четности означает, что

значения всех этих сечений не меняются при обращении всех спиральностей. Легко проверить, что усредненное по спину сечение в самом деле дается выражением (17.66).

Чтобы преобразовать (17.66) к сечению КХД, усредненному по цветам, можно приписать цветовой множитель (17.63) квадрату каждой отдельной диаграммы. Однако перекрестное слагаемое между двумя диаграммами на рис. 17.10 дает дополнительный цветовой множитель:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (t^a)_{i'i}(t^a)_{jj'} \cdot (t^b)_{j'i'}(t^b)_{ij} = \frac{1}{9} \text{tr}[t^a t^b t^a t^b]. \quad (17.69)$$

Чтобы его вычислить, можно воспользоваться формулой (16.79):

$$t^a t^b t^a t^b = \left(C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)\right)t^a t^a = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{4}{3} = -\frac{2}{9}.$$

Таким образом, цветовой множитель (17.69) равен  $-2/27$ .

Собирая вместе цветные множители и спиральные сечения, находим следующий результат для сечения рассеяния  $u\bar{u}$ :

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}} \right]. \quad (17.70)$$

Переходя от  $s$ - к  $u$ -каналу, находим соответствующее сечение для  $uu \rightarrow uu$ :

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(uu \rightarrow uu) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}^2 + \hat{s}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{s}^2}{\hat{u}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}} \right]. \quad (17.71)$$

Процесс  $\bar{u}u \rightarrow \bar{u}u$  имеет похожее сечение. Это завершает наш каталог сечений рассеяния кварков и антикварков.

Обратимся теперь к процессам с участием кварков и глюонов. Начнем с реакции  $q\bar{q} \rightarrow gg$ . Она является аналогом аннигиляции  $e^+e^-$  в  $\gamma\gamma$  в КЭД, которую мы обсуждали в разделе 5.5. Сечение этой реакции в КЭД равно:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} \right]. \quad (17.72)$$

Поскольку фотоны являются тождественными частицами, это выражение следует интегрировать только по половине телесного угла  $4\pi$ .

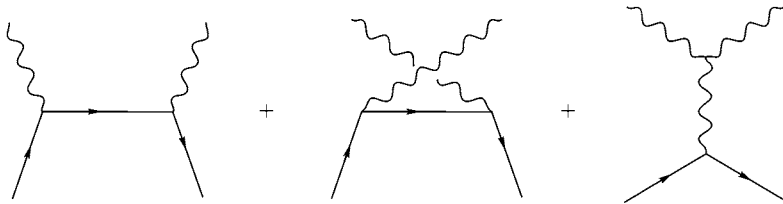


Рис. 17.11. Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в реакцию  $q\bar{q} \rightarrow gg$ .

В КХД эта реакция значительно сложнее. Как мы видели в разделе 16.1, в этот процесс дают вклад три фейнмановские диаграммы, изображенные на рис. 17.11. Эти

вклады следует просуммировать по всем поперечно-поляризованным состояниям глюонов. Если вычислять сумму по глюонным поляризациям при помощи замены

$$\sum_{\epsilon} \epsilon^{\mu} \epsilon^{*\nu} \rightarrow -g^{\mu\nu}, \quad (17.73)$$

то, как мы видели в разделе 16.3, надо включить также (отрицательное) сечение аннигиляции  $q\bar{q}$  в пару дух-антидух.

Нетрудно вычислить ведущий вклад в сечение  $q\bar{q} \rightarrow gg$  при стремлении  $\hat{t}$  или  $\hat{u} \rightarrow 0$ . В обоих случаях вклад дает только одна диаграмма с соответствующей кинематической сингулярностью. Цветовой множитель, связанный с любой из этих диаграмм, является квадратом выражения

$$(t^a)_{ij}(t^b)_{jk},$$

просуммированного по цветам глюонов  $a, b$  и усредненного по цветам  $i, k$  кварков  $q$  и  $\bar{q}$ . Это дает

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \text{tr}[t^a t^b t^b t^a] = \frac{1}{9} \cdot 3(C_2(r))^2 = \frac{16}{27}. \quad (17.74)$$

Таким образом, наиболее сингулярные слагаемые определяются результатом КЭД, в котором следует заменить  $\alpha$  на  $\alpha_s$ , умноженным на  $16/27$ . Полное вычисление сечения мы оставляем для задачи 17.3; ответ имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow gg) = \frac{32\pi\alpha_s^2}{27\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4} \left( \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \right]. \quad (17.75)$$

Сечения оставшихся кварк-глюонных процессов можно получить из него кроссингом. Результат для обратного процесса  $gg \rightarrow q\bar{q}$  содержит такой же квадрат матричного элемента, как и (17.75); единственное отличие состоит в том, что мы усредняем по глюонным, а не по кварковым цветам, что дает относительный множитель  $(3/8)^2$ . Таким образом,

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow q\bar{q}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{6\hat{s}^2} \left[ \frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{9}{4} \left( \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \right]. \quad (17.76)$$

Для реакции  $qg \rightarrow qg$  надо с помощью кроссинга перейти из  $s$  в  $t$ -канал и умножить все на  $3/8$ , поскольку в ней есть только одно глюонное усреднение. Это дает

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qg \rightarrow qg) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left[ -\frac{\hat{u}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{9}{4} \left( \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right) \right]. \quad (17.77)$$

Аналогично получается сечение для  $\bar{q}g \rightarrow \bar{q}g$ .

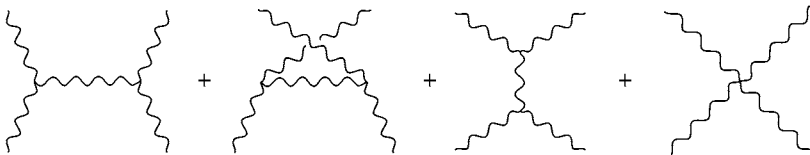


Рис. 17.12. Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в реакцию  $gg \rightarrow gg$ .

Последний элементарный процесс КХД — рассеяние глюона на глюоне. Он не имеет аналога в КЭД, и вычисление его сечения довольно утомительно. В ведущем порядке имеются четыре диаграммы, показанные на рис. 17.12. Мы обсуждаем этот процесс в задаче 17.3. Окончательный ответ для усредненного по спину и цвету сечения:

$$\frac{d\sigma}{dt}(gg \rightarrow gg) = \frac{9\pi\alpha_s^2}{2\hat{s}^2} \left[ 3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right]. \quad (17.78)$$

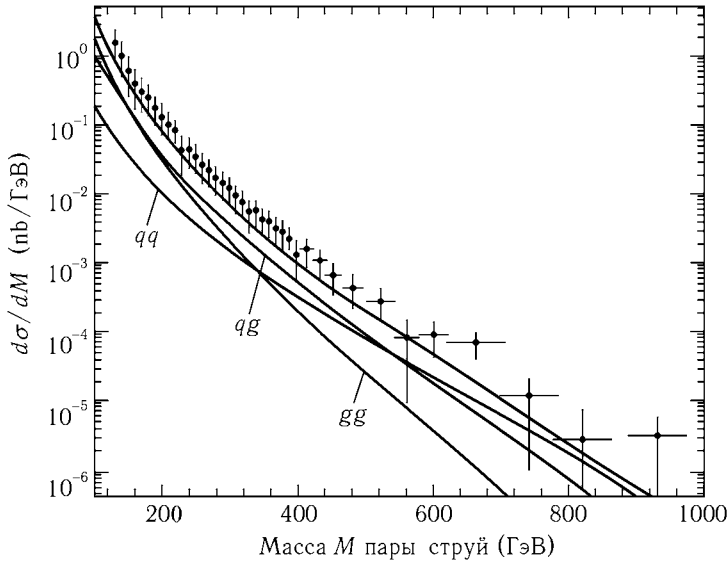


Рис. 17.13. Распределение по массе двух струй в столкновениях  $p\bar{p}$  при  $E_{\text{ц.п.}} = 1.8$  ТэВ, измеренное коллаборацией CDF, F. Abe, et. al., *Phys. Rev. D* **48**, 998 (1993). Измерения сравниваются с вычислением в ведущем порядке КХД, использующим структурные функции СТЕQ, изображенные на рис. 17.6. Три нижние кривые показывают распределение по инвариантной массе для трех компонентов теоретических расчетов: рассеяния кварка на кварке (и антикварке), рассеяния кварка на глюоне и рассеяния глюона на глюоне.

Различные партонные сечения, рассмотренные в этом разделе, можно скомбинировать с партонными функциями распределения, чтобы предсказать сечения образования струй в адрон-адронных столкновениях. В качестве примера на рис. 17.13 показано сравнение распределения по инвариантной массе ( $\hat{s}$ ), предсказанного для партон-партонного рассеяния, с измеренным в высокоэнергетических экспериментах по  $p\bar{p}$ -столкновениям распределением по массе двухструйных событий. Общая нормировка теоретических предсказаний определена с точностью до множителя порядка 2 из-за неопределенности в выборе  $Q^2$ , использованного для вычисления  $\alpha_s(Q^2)$  в партонных сечениях, и из-за аналогичных неопределенностей в глубоконеупругих сечениях. Эта неопределенность уменьшается до 30% при включении поправок порядка  $\alpha_s$ . Все же удивительно, что предсказания КХД в низшем порядке следуют наблюдаемому распределению сечения как функции массы двухструйных событий на интервале, в котором оно падает на шесть порядков. Таким образом, для сечения образования струй, как и для сечения жестких процессов с участием лептонов КХД действительно дает осмысленное описание поведения сильных взаимодействий при большой передаче импульса.

## 17.5. Эволюция партонов

Теперь, когда мы исследовали предсказания КХД в главном порядке для некоторых процессов сильного взаимодействия, мы должны изучить поправки к этим предсказаниям следующего порядка по  $\alpha_s$ . В разделе 17.2 мы видели, что поправки от отдельных диаграмм могут содержать массовые сингулярности, т.е. сингулярности, связанные с испусканием коллинеарных частиц, которые появляются в пределе нулевой массы. Для процесса аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны мы видели, что эти массовые сингулярности и инфракрасные расходимости из-за испускания мягких глюонов сокращаются в выражении для полного сечения. Можно показать, что это общее свойство процессов, в которых кварки и глюоны образуются при столкновении лептонов или фотонов. Однако, когда кварки или глюоны появляются в начальном состоянии в партонных subprocessах, поправки в общем случае будут содержать не сокращающиеся массовые сингулярности. В этом разделе мы продемонстрируем это явление и дадим его физическую интерпретацию. Мы покажем, что сингулярные слагаемые предсказывают нарушение бьеркеновского скейлинга за счет слагаемых, логарифмически зависящих от масштаба импульса. На самом деле они приводят к набору точных дифференциальных уравнений, определяющих импульсную зависимость партонных распределений. Основные явления, связанные с массовыми сингулярностями в КХД, уже присутствуют в физике излучения коллинеарных фотонов при больших энергиях в КЭД, так что наиболее удобно начать прямо с изучения этого случая. В этом разделе мы покажем, что излучение коллинеарных фотонов приводит к аналогу партонной функции распределения для электрона. Мы выведем дифференциальное уравнение, описывающее эту функцию распределения, впервые рассмотренную Грибовым и Липатовым. Наконец, мы обобщим это уравнение на случай КХД, следуя методу Альтарелли и Паризи\*.

В гл. 5 и 6 мы изучили некоторые примеры процессов КЭД, содержащих сингулярности в  $t$ - или  $u$ -каналах. В этих случаях мы обнаружили, что полное сечение в пределе больших энергий усиливалось множителем  $\ln(s/m^2)$ . Например, в (15.95) мы видели, что обменная диаграмма для комптоновского рассеяния в  $u$ -канале (рис. 17.14(a)) приводит к интегралу, который в пределе больших энергий принимает вид:

$$\int \frac{d \cos \theta}{(1 + \cos \theta)}.$$

Сингулярность при  $\cos \theta \rightarrow -1$  обрезается на массе электрона, приводя к логарифмическому фактору. Таким образом, испускание коллинеарного фотона приводит не к множителю  $\alpha$ , а скорее к  $\alpha \ln(s/m^2)$ . Множественное испускание коллинеарных фотонов, как на рис. 17.14(b), дает вклад порядка  $(\alpha \ln(s/m^2))^n$ . Чтобы улучшить точность теории возмущений, было бы полезно найти способ суммирования этих слагаемых во всех порядках по  $\alpha$ . Соответствующий множитель в КХД для испускания коллинеарных глюонов был бы равен

$$\alpha_s(Q^2) \ln \frac{Q^2}{\mu^2},$$

где  $\mu$  — масштаб импульсов, при котором становятся существенными непертурбативные эффекты в КХД. Сравнивая с (17.17), мы видим, что это произведение порядка единицы. Таким образом, в этом случае суммирование больших логарифмов существенно, если мы хотим делать любые количественные предсказания.

\*V. N. Gribov and L. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **15**, 438 (1972); G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126**, 298 (1977). Мы также настоятельно рекомендуем прочесть статьи: J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D9**, 697, 3391 (1974).

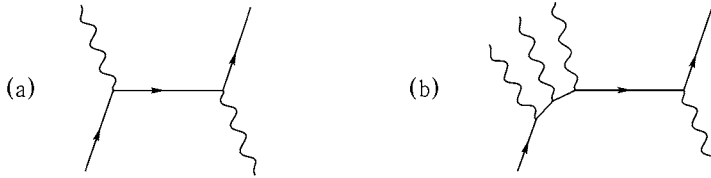


Рис. 17.14. Диаграммы с массовыми сингулярностями, связанными с испусканием коллинеарных фотонов: (а) ведущий порядок; (б) поправки.

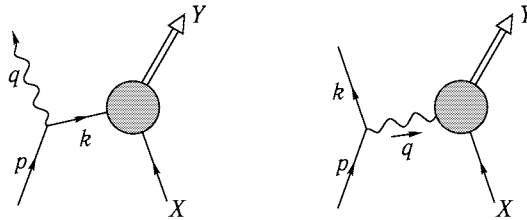


Рис. 17.15. Общая форма диаграмм с массовыми сингулярностями в КЭД.

В КЭД диаграммы с массовыми сингулярностями, связанными с испусканием одиночного коллинеарного фотона, имеют вид, показанный на рис. 17.15. В каждом случае кружок обозначает процесс рассеяния с большой передачей импульса. Массовая сингулярность появляется, когда знаменатель промежуточного пропагатора обращается в нуль, то есть когда промежуточное состояние находится практически на массовой оболочке. Таким образом, естественно рассмотреть первую диаграмму на рис. 17.15 как переход к реальному фотону и почти реальному электрону, сопровождающуюся взаимодействием этого электрона с остальными частицами. Вторая диаграмма должна иметь аналогичную интерпретацию с почти реальным фотоном в качестве промежуточного состояния.

Единственная тонкость возникает в определении поляризации промежуточной частицы. Для случая, когда в промежуточном состоянии имеется электрон, числитель пропагатора равен

$$k = \sum_s u^s(k)\bar{u}^s(k). \tag{17.79}$$

Тогда при переходе  $k^2 \rightarrow 0$  вершина испускания электрона и остальная часть амплитуды свертываются с поляризационными спинорами безмассового электрона на массовой оболочке. Для диаграммы с фотоном в качестве промежуточного состояния аналогичное утверждение сводилось бы к тому, что вершину испускания электрона и остальную часть амплитуды следует свернуть с физическими векторами поперечной поляризации промежуточного фотона. Поскольку числитель фотонного пропагатора равен  $g^{\mu\nu}$ , не очевидно, что фотонный пропагатор так упростится. Однако это так. Чтобы увидеть это, используем разложение  $g^{\mu\nu}$  по безмассовым векторам поляризации, которое дается формулой (16.20):

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon_+^\mu \varepsilon_-^{\nu*} + \varepsilon_-^\mu \varepsilon_+^{\nu*} - \sum_i \varepsilon_{Ti}^\mu \varepsilon_{Ti}^{\nu*}. \tag{17.80}$$

Здесь  $\varepsilon_{Ti}^\mu$  — поперечные векторы поляризации. Вектор поляризации вперед  $\varepsilon_+^\mu$  пропорционален импульсу фотона  $q^\mu$ . Когда мы свернем  $\varepsilon_+^\mu$  справа с амплитудой рассея-



ния КЭД, получим нуль в соответствии с тождеством Уорда. Свертка  $\varepsilon_+^{*\nu}$  с вершиной испускания электрона похожим образом даст нуль. Поэтому для вычисления слагаемого, сингулярного при стремлении импульса фотона  $q$  к массовой оболочке, можно сделать замену

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{+i}{q^2} \sum_i \varepsilon_{Ti}^\mu \varepsilon_{Ti}^{*\nu} \quad (17.81)$$

и вычислить амплитуды испускания и поглощения фотона с поперечным вектором поляризации.

### Матричный элемент для электронного расщепления

Заменяв числитель промежуточного пропагатора на сумму по векторам поляризации, мы отщепили вершину испускания фотона или электрона от остальной диаграммы. Теперь мы явно вычислим эту вершину между состояниями безмассовых частиц с физическими поляризациями. Кинематика показана на рис. 17.16. Две конечные частицы должны быть почти коллинеарны, с малым относительным поперечным импульсом. Можно выбрать импульс падающего электрона направленным вдоль оси  $\hat{3}$ , а выходящие импульсы лежащими в плоскости  $\hat{1}\hat{3}$ . Тогда три 4-импульса можно записать в виде:

$$\begin{aligned} p &= (p, 0, 0, p), \\ q &\approx (zp, p_\perp, 0, zp), \\ k &\approx ((1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p). \end{aligned} \quad (17.82)$$

Эти три вектора удовлетворяют соотношениям  $p^2 = q^2 = k^2 = 0$  с точностью до слагаемых порядка  $p_\perp^2$ .

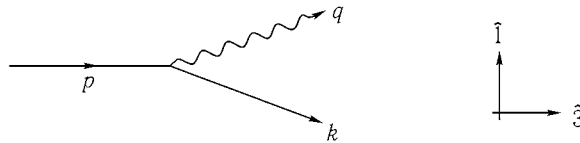


Рис. 17.16. Кинематика вершины для испускания коллинеарного электрона или фотона.

В процессе, в котором испускается реальный фотон,  $p^2$  и  $q^2$  в точности равны нулю, а  $k^2$  сдвигается от массовой оболочки на величину порядка  $p_\perp^2$ . Необходимо знать значение  $k^2$ , появляющееся в пропагаторе виртуального электрона. Поэтому давайте изменим (17.82), чтобы удовлетворить равенству  $q^2 = 0$  с точностью до слагаемых порядка  $p_\perp^4$ , переписав  $q$  и  $k$  как

$$\begin{aligned} q &= \left( zp, p_\perp, 0, zp - \frac{p_\perp^2}{2zp} \right), \\ k &= \left( (1-z)p, -p_\perp, 0, (1-z)p + \frac{p_\perp^2}{2zp} \right). \end{aligned} \quad (17.83)$$

После такой модификации

$$k^2 = -p_\perp^2 - 2(1-z)\frac{p_\perp^2}{2z} + \mathcal{O}(p_\perp^4).$$

Таким образом, если фотон реален, а электрон виртуален, имеем:

$$q^2 = 0, \quad k^2 = -\frac{p_{\perp}^2}{z}. \quad (17.84)$$

Обратно, в процессе с реальным электроном и виртуальным фотоном

$$k^2 = 0, \quad q^2 = -\frac{p_{\perp}^2}{(1-z)}. \quad (17.85)$$

Эти более точные выражения потребуются только в пропагаторе виртуальной частицы. Матричный элемент электрон-фотонной вершины начинается с слагаемых порядка  $p_{\perp}$ , так что замена (17.82) на (17.83) влияет на него незначительно, и он остается тем же самым (в низшем порядке) независимо от того, какая частица виртуальна.

Теперь вычислим матричный элемент вершины КЭД между безмассовыми состояниями определенной спиральности. Если начальный электрон левополяризован, конечный электрон из-за сохранения спиральности должен быть также левополяризован. Тогда вершина испускания фотона имеет вид:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_L(k)(-ie\gamma_{\mu})u_L(p)\varepsilon_T^{*\mu}(q), \quad (17.86)$$

где вектор поляризации фотона может быть и левым, и правым. Вспоминая соотношения:

$$\gamma_{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\mu} \\ \bar{\sigma}_{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad u_L(p) = \sqrt{2p^0} \begin{pmatrix} \xi(p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{для } m = 0),$$

можно записать более явно:

$$i\mathcal{M} = -ie\sqrt{2(1-z)p}\sqrt{2p}\xi^{\dagger}(k)\sigma^i\xi(p)\varepsilon_T^{*i}(q). \quad (17.87)$$

С точностью до  $p_{\perp}$ , левые спиноры даются выражениями:

$$\xi(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi(k) = \begin{pmatrix} p_{\perp}/2(1-z)p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17.88)$$

Векторы поляризации фотона равны

$$\varepsilon_L^{*i}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, -\frac{p_{\perp}}{zp}), \quad \varepsilon_R^{*i}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, -\frac{p_{\perp}}{zp}). \quad (17.89)$$

Заметим, что если свернуть эти векторы с матрицами Паули в (17.87), первые две компоненты вектора правой поляризации дадут  $(\sigma^1 - i\sigma^2) = 2\sigma^-$ , что сократится с  $\xi(p)$ . Единственное оставшееся слагаемое соответствует компоненте  $i = 3$ , и

$$i\mathcal{M}(e_L^- \rightarrow e_L^- \gamma_R) = ie\frac{\sqrt{2(1-z)}}{z}p_{\perp}. \quad (17.90)$$

В случае левополяризованного фотона имеется дополнительный вклад из-за первых двух компонент  $\varepsilon_L^*$ . Это приводит к выражению:

$$i\mathcal{M}(e_L^- \rightarrow e_L^- \gamma_L) = ie\frac{\sqrt{2(1-z)}}{z(1-z)}p_{\perp}. \quad (17.91)$$

Сохранение четности означает, что значения матричных элементов не меняются при одновременном обращении всех спиральностей. Это немедленно дает матричные элементы для случая, когда в начальном состоянии имеется  $e_R^-$ . Тогда квадрат модуля матричного элемента, усредненный по начальным спиральностям, равен

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{pols.}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right]. \quad (17.92)$$

Первое слагаемое в скобках возникает из-за фотона со спином, коллинеарным спину электрона; второе слагаемое возникает из-за фотона со спином, противоположным спину электрона.

### Приближение эквивалентных фотонов

Теперь у нас есть все составляющие, необходимые для вычисления сечений процессов, изображенных на рис. 17.15. Сначала рассмотрим процесс с виртуальным фотоном. Обозначим начальное состояние в правой части диаграммы через  $X$ , а конечное состояние — через  $Y$ . Пусть  $\mathcal{M}_{\gamma X}$  представляет матричный элемент рассеяния фотона из  $X$ . Для простоты мы будем предполагать, что  $X$  не поляризовано, так что сечение рассеяния не зависит от поляризации виртуального фотона. Тогда полная диаграмма дает следующее выражение для сечения:

$$\sigma = \frac{1}{(1+v_X)2p2E_X} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \int d\Pi_Y \left[ \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 \right] \left( \frac{1}{q^2} \right)^2 |\mathcal{M}_{\gamma X}|^2, \quad (17.93)$$

где  $v_X$  — скорость  $X$ , а  $\int d\Pi_Y$  — интеграл по фазовому пространству  $Y$ .

Интеграл имеет сингулярность, когда импульс  $k$  коллинеарен импульсу  $p$  падающего электрона. Чтобы изолировать эту сингулярность, заменим  $k^0$  и  $q^2$  в соответствии с (17.82) и (17.85) и перепишем интеграл по  $k$  как

$$d^3 k = dk^3 d^2 k_{\perp} = pdz \cdot \pi dp_{\perp}^2. \quad (17.94)$$

Тогда сечение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{pdz dp_{\perp}^2}{16\pi^2(1-z)p} \left[ \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 \right] \frac{(1-z)^2}{p_{\perp}^4} \frac{z}{(1+v_X)2zp2E_X} \int d\Pi_Y |\mathcal{M}_{\gamma X}|^2 = \\ &= \int \frac{dz dp_{\perp}^2}{16\pi^2(1-z)} \left[ \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 \right] \frac{z(1-z)^2}{p_{\perp}^4} \cdot \sigma(\gamma X \rightarrow Y). \end{aligned} \quad (17.95)$$

Наконец, вставляя усредненную по спину вершину испускания электрона (17.92), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{dz dp_{\perp}^2}{16\pi^2} \frac{z(1-z)}{p_{\perp}^4} \frac{2e^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] \cdot \sigma(\gamma X \rightarrow Y) = \\ &= \int_0^1 dz \int \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] \cdot \sigma(\gamma X \rightarrow Y). \end{aligned} \quad (17.96)$$

Интеграл по  $p_{\perp}^2$  берется от переданного импульса порядка  $s$  до массы электрона  $m^2$ , которая обрезает сингулярность снизу. Таким образом, окончательный результат:

$$\sigma(e^{-}X \rightarrow e^{-}Y) = \int_0^1 dz \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m^2} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] \cdot \sigma(\gamma X \rightarrow Y). \quad (17.97)$$

Сечение в правой части вычислено для реального, поперечно поляризованного фотона с импульсом  $zp$ . Множитель  $\ln(s/m^2)$  представляет собой массовую сингулярность. Эта формула выражает *приближение эквивалентных фотонов* Вайцеккера–Вильямса, с которой мы встречались ранее в задачах 5.5 и 6.2.

Формула (17.97) получает новый смысл, если совместить ее с предсказаниями КХД из двух предыдущих разделов. Эта формула КЭД имеет точно такой же вид, как соответствующее выражение в партонной модели с функцией распределения Вайцеккера–Вильямса

$$f_{\gamma}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m^2} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right], \quad (17.98)$$

играющей роль вероятности нахождения в начальном электро-фотоне с продольной частью  $z$ .

### Электронное распределение

Первая диаграмма на рис. 17.5 с испусканием фотона и виртуального электрона может быть рассмотрена таким же способом. Аналогом (17.93) будет

$$\sigma = \frac{1}{(1+v_X)2p_2E_X} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q^0} \int d\Pi_Y \left[ \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 \right] \left( \frac{1}{k^2} \right)^2 |\mathcal{M}_{e^{-}X}|^2.$$

Следуя шагам, приведшим к (17.97), находим:

$$\begin{aligned} \sigma(e^{-}X \rightarrow \gamma Y) &= \int \frac{dz dp_{\perp}^2}{16\pi^2 z} \left[ \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 \right] \frac{z^2}{p_{\perp}^4} \cdot (1-z) \sigma(e^{-}X \rightarrow Y) = \\ &= \int \frac{dz dp_{\perp}^2}{16\pi^2} \frac{z(1-z)}{p_{\perp}^4} \frac{2e^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] \cdot \sigma(e^{-}X \rightarrow Y) = \\ &= \int_0^1 dz \int \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] \cdot \sigma(e^{-}X \rightarrow Y), \end{aligned} \quad (17.99)$$

где промежуточный электрон несет продольную долю  $(1-z)$ .

Заманчиво выглядит возможность подставить  $x = (1-z)$  и интерпретировать множитель под интегралом в (17.99) как функцию распределения электронного партона внутри электрона. Это дало бы

$$f_e^{(1)}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m^2} \left[ \frac{1 + x^2}{1-x} \right]. \quad (17.100)$$

Однако такое выражение неадекватно. Наиболее очевидно то, что оно не учитывает процессы без излучения, в которых электрон остается электроном с полной энергией.

Это легко исправляется при рассмотрении (17.100) как поправки порядка  $\alpha$  к самой наивной оценке,

$$f_e^{(0)}(x) = \delta(1-x), \quad (17.101)$$

в которой мы рассматриваем электрон как содержащий только один партон с полной энергией. К сожалению, сумма (17.101) и (17.100) все еще не дает адекватного описания электронного распределения по двум причинам. Во-первых, (17.100) расходится в окрестности  $x = 1$ , и нужно знать способ обращения с этой сингулярностью. Во-вторых, в то время как (17.100) учитывает виртуальные электроны с продольной частью  $x$ , сдвинутой от  $x = 1$  из-за излучения, оно не учитывает соответствующую потерю электронов из-за дельта-функционного пика при  $x = 1$ .

Расходимость (17.100) при  $x = 1$  соответствует излучению мягких фотонов. Мы видели в разделе 6.5, что это излучение не влияет на скорость реакций в КЭД. В каждом порядке по  $\alpha$  можно убедиться, что положительные инфракрасно расходящиеся вклады в полное сечение из-за излучения мягких фотонов сбалансированы отрицательными вкладами с мягкими виртуальными фотонами. В данном примере отрицательный вклад должен уменьшать вклад процессов без испускания фотонов. Таким образом, с точностью до слагаемых порядка  $\alpha$ , партонное распределение для электронов должно иметь вид:

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m^2} \left( \frac{1+x^2}{(1-x)} - A\delta(1-x) \right). \quad (17.102)$$

Коэффициент  $A$  возникает из диаграмм с виртуальными фотонами, которые мы не вычисляли. Тем не менее, эффект от учета этих диаграмм легко понять: они вычитают из дельта-функции вероятность, которая сдвинулась к меньшим  $x$  из-за излучения, так что интеграл от всех слагаемых порядка  $\alpha$  равен нулю. Другой способ выразить это свойство состоит в том, что  $A$  определяется условием, что электрон содержит ровно один электронный партон:

$$\int_0^1 dx f_e(x) = 1. \quad (17.103)$$

(Это уравнение будет модифицировано ниже, когда мы учтем процессы рождения пар.)

Неясно, как проинтегрировать сингулярный знаменатель в (17.100), чтобы явно определить  $A$ . Принято определять распределение, которое можно интегрировать после вычитания дельта-функции из сингулярного члена. Определим распределение

$$\frac{1}{(1-x)_+}, \quad (17.104)$$

совпадающее с функцией  $1/(1-x)$  для всех значений  $x$ , меньших 1, и имеющее такую сингулярность при  $x = 1$ , причем интеграл от любой гладкой функции  $f(x)$  с этим распределением дает

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{(1-x)}. \quad (17.105)$$

Менее формально,

$$\frac{1}{(1-x)_+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(1-x)} \theta(1-x-\varepsilon) - \delta(1-x) \int_0^{1-\varepsilon} dx' \frac{1}{(1-x')} \right]. \quad (17.106)$$

Более формальное выражение (17.105) часто проще использовать на практике.

Используя это определение, можно отнести часть дельта-функции к сингулярному слагаемому в (17.102), заменив  $(1-x)$  на  $(1-x)_+$ . Тогда, чтобы нормировать (17.102), нам нужен интеграл

$$\int_0^1 dx \frac{1+x^2}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{x^2-1}{(1-x)} = -\frac{3}{2}.$$

Окончательное выражение для электронного распределения в первом порядке по  $\alpha$  имеет вид:

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m^2} \left[ \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right]. \quad (17.107)$$

Теперь это распределение хорошо нормировано, но все еще очень сингулярно вблизи  $x = 1$ . Следовательно, мы должны ожидать, что в этой области будут существенны поправки высших порядков к электронной функции распределения. Поэтому следует подумать о том, как рассматривать множественное испускание коллинеарных фотонов.

### Множественные расщепления

На самом деле нетрудно распространить анализ, который мы только что завершили, на случай испускания многих коллинеарных фотонов. Рассмотрим процесс, изображенный на рис. 17.17(a), в котором фотон 1 излучается с поперечным импульсом  $p_{1\perp}$ , а фотон 2 — с поперечным импульсом  $p_{2\perp}$ . Излучение фотона 2 может быть описано точно так же, как это сделано выше. Если  $p_{2\perp} \ll p_{1\perp}$ , первый виртуальный фотон очень близок к массовой оболочке по сравнению с  $p_{1\perp}^2$  и поэтому можно пренебречь его виртуальностью при вычислении амплитуды излучения фотона 2. Двойное излучение фотонов дает вклад порядка

$$\left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \int_{m^2}^s \frac{dp_{1\perp}^2}{p_{1\perp}^2} \int_{m^2}^{p_{1\perp}^2} \frac{dp_{2\perp}^2}{p_{2\perp}^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \ln^2 \frac{s}{m^2}.$$

В противоположном пределе,  $p_{2\perp} \gg p_{1\perp}$ , нет знаменателя порядка  $p_{1\perp}^2$ , и мы не получим двойного логарифма. Только в случае  $p_{2\perp} \ll p_{1\perp}$  поправки порядка  $\alpha^2$  могут конкурировать с поправками порядка  $\alpha$ .

Это рассуждение распространяется на случай излучения произвольного числа коллинеарных фотонов (рис. 17.17(b)). Область интегрирования по фотонному фазовому пространству, соответствующая упорядочиванию

$$p_{1\perp} \gg p_{2\perp} \gg p_{3\perp} \gg \dots \quad (17.108)$$

дает вклад, содержащий множитель

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^n \ln^n \frac{s}{m^2}. \quad (17.109)$$

Если поперечные импульсы фотонов упорядочены каким-нибудь другим способом, вклад от этой области в том же порядке по  $\alpha$  содержит по крайней мере на одну степень

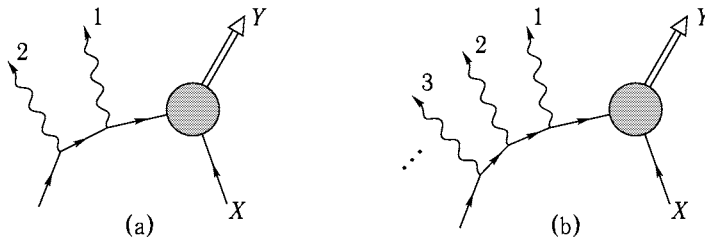


Рис. 17.17. Диаграммы старшего порядка с испусканием коллинеарных фотонов: (а) два коллинеарных фотона; (б) много коллинеарных фотонов.

большого логарифма меньше. Если условие (17.108) выполнено, отклонение импульсов виртуальных электронов от массовой оболочки увеличивается при переходе с внешнего края диаграммы в сторону жесткого столкновения. В этом случае об электронных импульсах говорят как о *строго упорядоченных*.

Этот набор выводов имеет интересную физическую интерпретацию. Поскольку промежуточные электроны становятся все более виртуальными при продвижении вглубь диаграммы, их естественно интерпретировать как компоненты физического электрона, когда эта частица анализируется на все меньших временных масштабах. О промежуточном электроне с  $k^2 \sim p_{\perp}^2$  можно думать как о составляющей электрона, которая становится видна, если волновая функция физического электрона исследуется с разрешением  $\Delta r \sim (p_{\perp})^{-1}$ . В этой картине в электроне, видимом при одном разрешении, при более тонком разрешении можно разглядеть больше виртуальных электронов и фотонов.

И с точки зрения вычисления фейнмановских диаграмм, и с точки зрения исследования электронной структуры удобно представить распад электрона на виртуальные электроны и фотоны как непрерывный процесс, являющийся функцией поперечного импульса электронных составляющих. Чтобы описать этот процесс математически, введем явную зависимость электронной и фотонной функций распределения от  $p_{\perp}$ . Определим функции  $f_{\gamma}(x, Q)$  и  $f_e(x, Q)$  как дающие вероятности нахождения в физическом электроне электрона или фотона с продольной долей  $x$ , с учетом излучения коллинеарных фотонов с поперечными импульсами  $p_{\perp} < Q$ . Если  $Q$  слегка возрастет до  $Q + \Delta Q$ , необходимо учесть возможность излучения фотона с  $Q < p_{\perp} < Q + \Delta Q$  составляющим электрона с  $f_e(x, Q)$ . Дифференциальная вероятность излучения электроном фотона, несущего долю  $z$  его энергии, равна

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z}. \quad (17.110)$$

Новое фотонное распределение тогда можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(x, Q + \Delta Q) &= f_{\gamma}(x, Q) + \\ &+ \int_0^1 dx' \int_0^1 dz \left[ \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Delta Q^2}{Q^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] f_e(x', p_{\perp}) \delta(x - zx') = \\ &= f_{\gamma}(x, Q) + \frac{\Delta Q}{Q} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ \frac{\alpha}{\pi} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] f_e\left(\frac{x}{z}, p_{\perp}\right). \end{aligned} \quad (17.111)$$

Переходя к непрерывной эволюции, находим, что функция  $f_\gamma(x, Q)$  определяется интегродифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{d \ln Q} f_\gamma(x, Q) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ \frac{\alpha}{\pi} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] f_e\left(\frac{x}{z}, Q\right). \quad (17.112)$$

Аналогично, распределение внутренних электронов в физическом электроде будет эволюционировать в зависимости от  $Q$ , отражая появление электронов с меньшими значениями  $x$  из-за излучения фотонов и уменьшение числа электронов с большими значениями  $x$ . Слагаемое в скобках в (17.107) правильно учитывает оба эффекта для излучения одного фотона. Таким образом, электронное распределение эволюционирует по закону:

$$\frac{d}{d \ln Q} f_e(x, Q) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[ \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right) \right] f_e\left(\frac{x}{z}, Q\right). \quad (17.113)$$

Интегрируя эти интегродифференциальные уравнения с подходящими начальными условиями, мы суммируем все логарифмически усиленные слагаемые вида (17.109). Начальные условия следует зафиксировать в точке, правильно воспроизводящей знаменатель логарифмов в (17.98) и (17.107). Таким образом, мы должны положить

$$f_e(x, Q) = \delta(1-x), \quad f_\gamma(x, Q) = 0, \quad (17.114)$$

при  $Q^2 \sim m^2$ .

Результирующие функции распределения можно использовать для вычисления сечений жесткого рассеяния электронов на произвольной мишени. Тогда (17.97) и (17.99) следует заменить на

$$\begin{aligned} \sigma(e^- X \rightarrow e^- + n\gamma + Y) &= \int_0^1 dx f_\gamma(x, Q) \sigma(\gamma X \rightarrow Y), \\ \sigma(e^- X \rightarrow n\gamma + Y) &= \int_0^1 dx f_e(x, Q) \sigma(e^- X \rightarrow Y), \end{aligned} \quad (17.115)$$

где сечения под интегралами вычислены для фотона или электрона, несущих долю  $x$  импульса начального электрона, функции  $f_\gamma(x, Q)$ ,  $f_e(x, Q)$  являются решениями (17.112) и (17.113), а в качестве импульса  $Q$  выбран характерный переданный импульс в субпроцессе  $\gamma X$  или  $e^- X$ .

### Расщепление фотона на пары

Эволюционные уравнения для  $f_\gamma(x)$  и  $f_e(x)$  нуждаются еще в одной модификации перед тем, как их можно будет рассматривать как окончательные. В том виде, как они сейчас записаны, эти уравнения описывают излучение фотонов электронами во всех порядках. Однако, они не учитывают другой процесс того же порядка по  $\alpha$ : расщепление фотона на электрон-позитронную пару. Мы должны включить этот процесс в эволюционные уравнения, поскольку, например, сечение процесса, изображенного на рис. 17.18, содержит такой же логарифмический множитель, как и у процесса на рис. 17.17(а).

Мы можем вычислить эффекты от распада фотона тем же способом, каким мы вычисляли эффекты от излучения фотонов. Основные кинематические соотношения



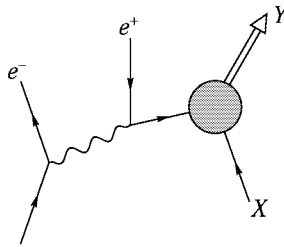


Рис. 17.18. Процесс, включающий образование пары  $e^+e^-$ , усиленное коллинеарной сингулярностью.

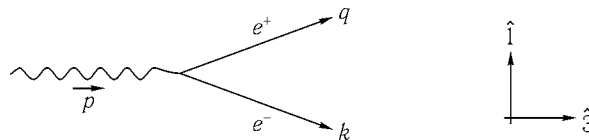


Рис. 17.19. Кинематика вершины перехода фотона в коллинеарную электрон-позитронную пару.

у этих процессов очень похожи (рис. 17.19). Единственное отличие состоит в том, что теперь фотон находится в начальном состоянии, в то время как в конечном состоянии имеется почти коллинеарная электрон-позитронная пара. Мы хотим найти аналог формулы (17.92) для этого процесса.

Рассмотрим случай, когда вылетающий электрон левополяризован. Тогда в силу сохранения спиральности вылетающий позитрон должен быть правополяризован и его волновая функция будет содержать левый спинор. Пусть импульс электрона равен  $k$ , как в (17.82), а импульс позитрона равен  $q$ . Тогда вершине соответствует матричный элемент:

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}_L(k)\gamma_\mu v_L(q)\varepsilon_T^\mu(p), \tag{17.116}$$

где вектор поляризации фотона может быть как левым, так и правым. Если подставить явные выражения для безмассовых спиноров, то

$$i\mathcal{M} = ie\sqrt{2(1-z)p}\sqrt{2zp}\xi^\dagger(k)\sigma^i\xi(q) \cdot \varepsilon_T^i(p),$$

где электронные и позитронные спиноры в первом порядке по  $p_\perp$  даются выражениями:

$$\xi(q) = \begin{pmatrix} -p_\perp/2zp \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi(k) = \begin{pmatrix} p_\perp/2(1-z)p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы поляризации фотона равны:

$$\varepsilon_L^i(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0), \quad \varepsilon_R^i(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0).$$

Умножая их на  $\sigma^i$ , получаем для матричных элементов с учетом поляризации:

$$i\mathcal{M}(\gamma_L \rightarrow e^-_L e^+_R) = -ie \frac{\sqrt{2z(1-z)}}{z} p_\perp,$$

и

$$i\mathcal{M}(\gamma_R \rightarrow e^-_L e^+_R) = +ie \frac{\sqrt{2z(1-z)}}{(1-z)} p_\perp.$$

Вновь можно утверждать, что матричные элементы не должны изменяться при обращении всех спиральностей. Поэтому для квадрата модуля матричного элемента, усредненного по поляризациям начального фотона, получаем:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{pols.}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^2 p_{\perp}^2}{z(1-z)} [z^2 + (1-z)^2], \quad (17.117)$$

где  $z$  — доля импульса, уносимая позитроном. Первое слагаемое в скобках возникает из-за процессов, в которых спин позитрона параллелен спине фотона, второе слагаемое — из-за процессов, в которых спин электрона параллелен спине фотона.

Выражение (17.117) описывает эволюцию составляющих фотона в электроны и позитроны. Вид эволюционных уравнений похож на (17.113), но с фотонной функцией распределения в правой части, и с заменой выражения в скобках на

$$(z^2 + (1-z)^2). \quad (17.118)$$

Когда рождается электрон-позитронная пара, фотон должен исчезнуть. Это требует наличия отрицательного слагаемого в эволюционном уравнении для фотонного распределения (17.112), который содержит дельта-функцию, умноженную на нормировку (17.118):

$$\int_0^1 dz (z^2 + (1-z)^2) = \frac{2}{3}. \quad (17.119)$$

### Эволюционные уравнения для КЭД

Включив эффекты рождения пар, мы найдем полные эволюционные уравнения для электронных, позитронных и фотонных распределений в КЭД. Эти уравнения, первоначально полученные Грибовым и Липатовым, суммируют ведущие логарифмы во всех порядках по  $\alpha$ . Эволюционные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q} f_{\gamma}(x, Q) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ P_{\gamma \leftarrow e}(z) \left[ f_e\left(\frac{x}{z}, Q\right) + f_{\bar{e}}\left(\frac{x}{z}, Q\right) \right] + P_{\gamma \leftarrow \gamma}(z) f_{\gamma}\left(\frac{x}{z}, Q\right) \right\}, \\ \frac{d}{d \ln Q} f_e(x, Q) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ P_{e \leftarrow e}(z) f_e\left(\frac{x}{z}, Q\right) + P_{e \leftarrow \gamma}(z) f_{\gamma}\left(\frac{x}{z}, Q\right) \right\}, \\ \frac{d}{d \ln Q} f_{\bar{e}}(x, Q) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ P_{\bar{e} \leftarrow e}(z) f_{\bar{e}}\left(\frac{x}{z}, Q\right) + P_{\bar{e} \leftarrow \gamma}(z) f_{\gamma}\left(\frac{x}{z}, Q\right) \right\}. \end{aligned} \quad (17.120)$$

Функции расщепления  $P_{i \leftarrow j}(z)$  даются выражениями:

$$\begin{aligned} P_{e \leftarrow e}(z) &= \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z), \\ P_{\gamma \leftarrow e}(z) &= \frac{1+(1-z)^2}{z}, \\ P_{e \leftarrow \gamma}(z) &= z^2 + (1-z)^2, \\ P_{\gamma \leftarrow \gamma}(z) &= -\frac{2}{3} \delta(1-z). \end{aligned} \quad (17.121)$$

Чтобы получить функции распределения для электрона, относящиеся к данному переданному импульсу  $Q$ , следует проинтегрировать эти уравнения с начальными условиями:

$$f_e(x, Q) = \delta(1 - x), \quad f_{\bar{e}}(x, Q) = 0, \quad f_\gamma(x, Q) = 0, \quad (17.122)$$

при  $Q = m$ . Те же уравнения при других начальных условиях дадут функции распределения позитрона и фотона. Решения этих уравнений используются, как в (17.115), для вычисления сечений процессов с участием электронов, позитронов и фотонов с большими переданными импульсами. Эволюционные уравнения (17.120) построены так, что они учитывают сохранение электронного числа и продольного импульса. Таким образом, основные правила сумм (17.36) и (17.39), которым удовлетворяют партонные распределения в адронах, также применимы к функциям распределения в КЭД. В частности, электронная функция распределения содержит одну электронную составляющую:

$$\int_0^1 dx [f_e(x, Q) - f_{\bar{e}}(x, Q)] = 1, \quad (17.123)$$

и подсчитывает полный импульс физического электрона:

$$\int_0^1 dx x [f_e(x, Q) + f_{\bar{e}}(x, Q) + f_\gamma(x, Q)] = 1. \quad (17.124)$$

Полезно проверить путем явных выражений с помощью (17.120), что эти интегралы не зависят от  $Q$ .

### Уравнения Альтарелли–Паризи

Если мы столкнулись с массовыми сингулярностями, связанными с излучением коллинеарных фотонов в КЭД, то мы также должны столкнуться с массовыми сингулярностями в КХД, связанными с излучением коллинеарных кварков и глюонов. Если вычислить поправки порядка  $\alpha_s$  к партонным сечениям в ведущем порядке, обсуждавшемся в разделах 17.3 и 17.1, считая кварки и глюоны безмассовыми, найдем, что эти поправки расходятся при интегрировании по коллинеарным конфигурациям. Таким образом, выражения партонной модели, по крайней мере, в их простейшей форме, теряют смысл уже при рассмотрении следующего порядка по  $\alpha_s$ .

Однако, если предположить, что сингулярности в КХД не сильнее, чем в КЭД, можно воспользоваться знаниями из предыдущего раздела, чтобы рассмотреть и эти сингулярные слагаемые. В КЭД было естественно включить большие поправки, связанные с массовыми сингулярностями, в партонные распределения, а не в сечения жестких рассеяний. С этой точки зрения сингулярные слагаемые входят в ядро эволюционного уравнения для партонных распределений как функций логарифма характерного импульса. Жесткие столкновения с передачей импульса  $Q$  позволяют видеть структуру электрона на расстояниях порядка  $Q^{-1}$ . Когда волновая функция электрона рассматривается на очень малых масштабах, она оказывается состоящей из основного электрона, несущего только часть полного продольного импульса, и большого числа конститuentных фотонов и электрон-позитронных пар. Любая из этих составляющих, несущая достаточно значительную долю полного импульса электрона, может инициировать жесткий процесс.

Точно такая же логика применима и к вычислению сечений в КХД. Вклады от областей коллинеарного излучения кварков и глюонов следует связывать с партонными функциями распределения, а не с сечениями жесткого рассеяния. Если сделать такое сопоставление, мы найдем, что партонные распределения больше не зависят от импульса  $Q$ , характеризующего процесс жесткого рассеяния, а логарифмически эволюционируют по  $Q$ . Например, основное уравнение (17.30) для глубоконеупругого рассеяния теперь примет вид:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(e^- p \rightarrow e^- X) = \left( \sum_f f_f(x, Q) Q_f^2 \right) \cdot \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4} [1 + (1-y)^2], \quad (17.125)$$

так что бьеркеновский скейлинг будет нарушен. Поскольку это нарушение происходит только в логарифмическом по  $Q^2$  масштабе, это будет малый эффект, и КХД все же будет предсказывать *приближенный* бьеркеновский скейлинг. Но нарушение бьеркеновского скейлинга неизбежно, поскольку КХД — квантовая теория поля со степенями свободы на всех масштабах импульсов. Если мы изучаем волновую функцию протона на все меньших расстояниях, мы возбуждаем степени свободы с большим импульсом и волновая функция содержит все большее число кварков, антикварков и глюонов.

Эволюция партонных распределений в КЭД, управляемая (17.120), характеризуется параметром  $\alpha/\pi$ , так что при изменении  $Q$  в 10 раз партонные распределения изменяются на  $\sim 1\%$ . В КХД соответствующим фактором, управляющим скоростью эволюции, является  $\alpha_s(Q)/\pi$ . Таким образом, когда  $Q$  очень мало, эволюция происходит быстро, и важны вклады старших порядков в теории возмущений. Окончательно, начальные условия для эволюции определяются видом протонной волновой функции на больших пространственных масштабах, который нельзя получить из фейнмановских диаграмм. С другой стороны, когда  $Q$  велико, на практике порядка 1 ГэВ, эволюция становится медленной и определяется первым слагаемым ряда теории возмущений. В этом случае теория возмущений КХД дает точное описание формы эволюции партонных распределений, и эти предсказания можно сравнивать с экспериментом.

Чтобы вывести эволюционные уравнения для партонных распределений, можно использовать те же методы и логику, что и в КЭД. Здесь имеется тонкость, поскольку приведение глюонного пропагатора к состояниям поперечной поляризации (17.81) в пределе  $q^2 \rightarrow 0$  нельзя доказать столь же просто, как в КЭД. Однако этот результат справедлив и в неабелевом случае\*. Если эта техническая трудность преодолена, кинематика коллинеарного излучения точно такая же, как в КЭД. Таким образом, мы находим эволюционные уравнения такого же типа, как в КЭД, в которых  $\alpha$  заменено на  $\alpha_s$ , вставлены подходящие цветовые множители и учтены эффекты от трехглюонной вершины.

Процессы коллинеарного излучения в КХД включают три вершины, изображенные на рис. 17.20. Среди них первые две имеют такую же лоренцеву структуру, как и изображенные на рис. 17.16 и 17.19. Единственное отличие, кроме величины константы связи, состоит в цветовых индексах. Мы будем обращаться с цветом так же, как обращались со спином в предыдущем анализе: усредним по начальным цветам и просуммируем по конечным. Тогда первая вершина на рис. 17.20, описывающая распад кварка на кварк и глюон, приобретет цветовой множитель

$$\frac{1}{3} \text{tr}[t^a t^a] = C_2(r) = \frac{4}{3}. \quad (17.126)$$

\* См., например, J. Collins and D. Soper, в: A. Mueller, *Quantum Chromodynamics* (World Scientific, Singapore, 1991).

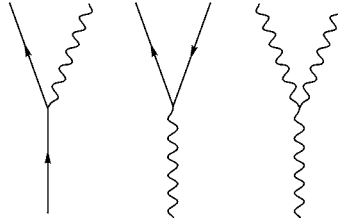


Рис. 17.20. Три вершины, дающие вклад в партонную эволюцию в КХД.

Вторая вершина на рис. 17.20, описывающая распад глюона на пару кварк-антикварк, приобретает множитель

$$\frac{1}{8} \text{tr}[t^a t^a] = \frac{1}{2}. \quad (17.127)$$

Третья вершина на рис. 17.20, описывающая распад глюона на два глюона, описывает новый эффект, появляющийся в неабелевом случае. Можно прямо вычислить вклад этой вершины в эволюционные уравнения, взяв ее матричные элементы между поперечными глюонными состояниями с определенной спиральностью. Это вычисление является предметом задачи 17.4.

Учитывая все эти эффекты, можно преобразовать эволюционные уравнения КЭД (17.120) в корректный набор эволюционных уравнений для партонных распределений в КХД. Они известны под названием *уравнений Альтарелли–Паризи* и описывают совместную эволюцию партонных распределений  $f_f(x, Q)$ ,  $f_{\bar{f}}(x, Q)$  для кварков и антикварков каждого аромата, которые можно рассматривать как безмассовые на масштабе  $Q$ , вместе с партонными распределениями глюонов  $f_g(x, Q)$ . В явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q} f_g(x, Q) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ P_{g \leftarrow q}(z) \sum_f [f_f(\frac{x}{z}, Q) + f_{\bar{f}}(\frac{x}{z}, Q)] + \right. \\ &\quad \left. + P_{g \leftarrow g}(z) f_g(\frac{x}{z}, Q) \right\}, \\ \frac{d}{d \ln Q} f_f(x, Q) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ P_{q \leftarrow q}(z) f_f(\frac{x}{z}, Q) + P_{q \leftarrow g}(z) f_g(\frac{x}{z}, Q) \right\}, \\ \frac{d}{d \ln Q} f_{\bar{f}}(x, Q) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ P_{q \leftarrow q}(z) f_{\bar{f}}(\frac{x}{z}, Q) + P_{q \leftarrow g}(z) f_g(\frac{x}{z}, Q) \right\}. \end{aligned} \quad (17.128)$$

Первые три функции расщепления можно взять из (17.121), умножив их на цветовые факторы, вычисленные в (17.126) и (17.127):

$$\begin{aligned} P_{q \leftarrow q}(z) &= \frac{4}{3} \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \\ P_{g \leftarrow q}(z) &= \frac{4}{3} \left[ \frac{1+(1-z)^2}{z} \right], \\ P_{q \leftarrow g}(z) &= \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]. \end{aligned} \quad (17.129)$$

Четвертая функция расщепления также требует вычислений из задачи 17.4: в результате

$$P_{g \leftarrow g}(z) = 6 \left[ \frac{(1-z)}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \left( \frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-z) \right]. \quad (17.130)$$

Последнее слагаемое в этом выражении, пропорциональное числу ароматов легких кварков  $n_f$ , связано с расщеплением глюона в  $q\bar{q}$ -пары. Уравнения Альтарелли–Паризи описывают эволюцию партонных распределений в КХД для любого адрона, или любой адронной составляющей, с точностью до поправок порядка  $\alpha_s$ , которые не усилены большими логарифмами.

Наш вывод уравнений Альтарелли–Паризи учитывает законы сохранения числа кварков и продольного импульса в КХД. Следовательно, уравнения должны быть совместными с правилами сумм (17.36) и (17.39). Как и в случае КЭД, полезно явно проверить, что эти интегралы не зависят от  $Q$ .

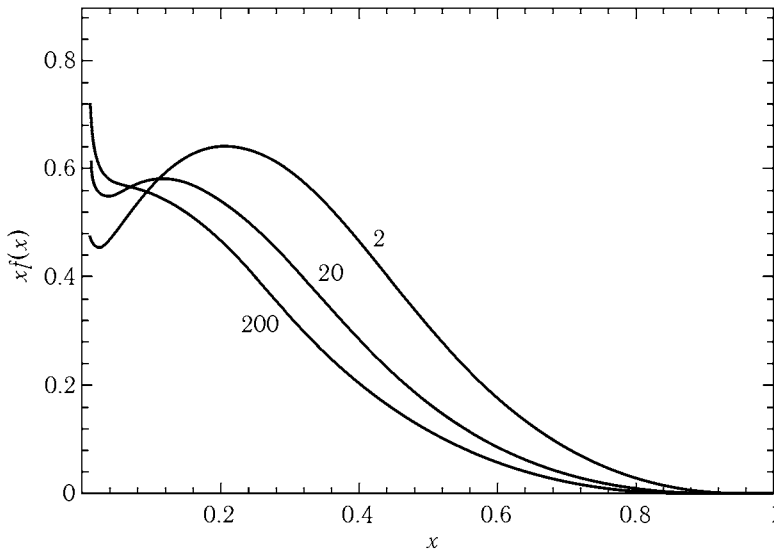


Рис. 17.21. Партонная функция распределения  $u$ -кварка  $x f_u(x, Q)$  при  $Q = 2, 20$ , и  $200$  ГэВ, показывающая эффекты партонной эволюции в соответствии с уравнениями Альтарелли–Паризи. Эти кривые взяты из обработки данных СТЕQ по глубоконеупругому рассеянию, показанных на рис. 17.6.

В КЭД эволюционные уравнения можно использовать для явного вычисления структурной функции электрона. В КХД это уже невозможно, поскольку *a priori* неизвестны начальные условия, необходимые для интегрирования уравнений и определяющиеся режимом сильной связи КХД. Однако начальные условия для протонной структуры можно определить экспериментально из измерений сечений глубоконеупругого рассеяния при заданном значении  $Q^2$ . Тогда можно сделать предсказания относительно структурных функций, а следовательно, и глубоконеупругих сечений при больших значениях  $Q^2$ . В этом анализе есть одна тонкость: глюонное распределение нельзя прямо измерить в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию, однако, оно входит в эволюционное уравнение для кваркового распределения. Поэтому некоторая информация о зависимости сечений глубоконеупругого рассеяния от  $Q^2$  позволяет определить глюонное распределение. Это распределение абсолютно нормировано правилом сумм (17.39)

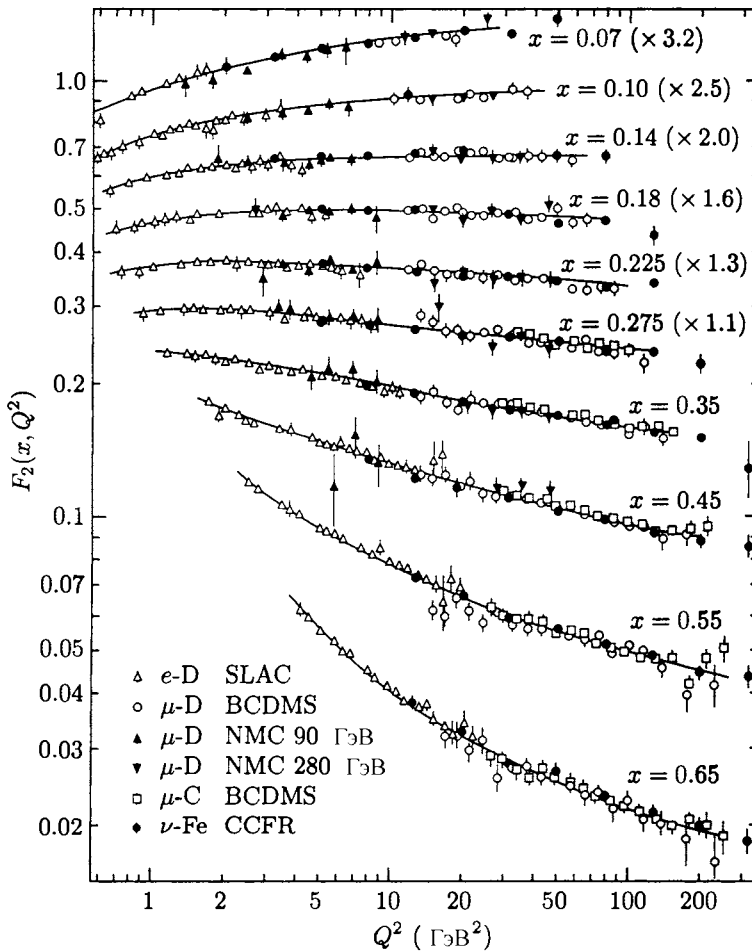


Рис. 17.22. Зависимость комбинаций кварковых функций распределения  $F_2 = \sum_f x Q_f^2 f_f(x, Q^2)$  от  $Q^2$ , измеренная в процессах глубоконеупругого рассеяния. Различные кривые показывают вариации  $F_2$  при фиксированных значениях  $x$ , и сравнение этих вариаций с моделью, полученной из уравнений Альтарелли – Паризи. Шесть верхних наборов данных были умножены на различные множители, чтобы различить их на графике. Данные были собраны M. Virchau и R. Voss для Particle Data Group, *Phys. Rev. D* **50**, 1173 (1994), Fig. 32.2. Там же приведен полный список ссылок на оригинальные эксперименты.

для импульса, так что эволюционные уравнения имеют предсказательную силу, даже если это распределение следует извлекать из данных эксперимента.

Уравнения Альтарелли – Паризи предсказывают характерный вид эволюции партонных функций распределения, изображенный на рис. 17.21. При больших  $x$  партоны стремятся излучать и переходить в состояния с меньшими  $x$ . Одновременно, как продукты этих излучений, образуются новые партоны с малыми значениями  $x$ . Таким образом, при увеличении  $Q^2$  партонные распределения спадают при больших  $x$  и гораздо сильнее растут при малых  $x$ . При исследовании волновой функции протона на все более мелких масштабах получается картина протона, состоящего из все большего числа составляющих, между которыми делится его полный импульс.

На рис. 17.22 показана эволюция комбинации функций распределения, измеренная в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию как функция  $Q^2$ . Мы видим характерное спадание функций распределения при больших  $x$  и рост при малых  $x$ . Данные сравниваются с моделью эволюции в соответствии с уравнениями Альтарелли–Паризи. Эта модель, по-видимому, хорошо описывает экспериментальные данные.

## 17.6. Измерения $\alpha_s$

Прежде чем завершить наш вводный обзор КХД, суммируем количественные подтверждения теории. Мы обсуждали точные тесты КЭД в разделе 6.3, сравнивая различные измерения константы связи  $\alpha$ ; самые лучшие из них дают согласие с теорией с точностью до восьми значащих цифр. Поскольку теория возмущений КХД работает только для процессов жесткого рассеяния, а неопределенности из-за мягких процессов трудно оценить, эта теория не была проверена с такой высокой точностью. Тем не менее, интересно сравнить лучшие оценки для  $\alpha_s$ , чтобы увидеть, как они согласуются.

Для сравнения значений  $\alpha_s$  необходимо задать их, используя общий набор соглашений. Во-первых, следует установить масштаб перенормировки. В качестве него удобно выбрать массу нейтрального бозона  $Z^0$   $m_Z = 91.19$  ГэВ. Во-вторых, надо фиксировать схему перенормировки, которая определяет константу связи на этом масштабе. Общепринято использовать в качестве стандарта голую константу связи после регуляризации по модифицированной схеме минимального вычитания (11.77). Полученная стандартная константа связи обозначается  $\alpha_{s\overline{MS}}(m_Z^2)$ .

Данные по измерению  $\alpha_s$  из различных типов экспериментов суммированы в таблице 17.1. В разделе 17.2 мы видели, что значение  $\alpha_s$  можно получать из измерения полного сечения аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны, или из отношения  $R$  числа наблюдаемых адронных и лептонных событий. Независимые измерения  $\alpha_s$  можно получить из доли трехструйных конечных состояний при аннигиляции  $e^+e^-$  или из распределения поперечного по отношению к оси струи импульса образовавшихся адронов. Большое число экспериментов такого типа собрано и усреднено под заголовком «Кривые событий». Похожее определение  $\alpha_s$  можно произвести из измерений спектра поперечного импульса  $W$ -бозонов, образующихся при аннигиляции пар кварк-антикварк на высокоэнергетических  $p\bar{p}$ -коллайдерах. Глюонные радиационные поправки к вершинам при глубоконеупругих рассеяниях нейтрино также можно использовать для извлечения  $\alpha_s$ . Степень нарушения бьеркеновского скейлинга в процессах глубоконеупругого рассеяния контролируется  $\alpha_s$ , так что этот эффект предоставляет еще один способ измерения  $\alpha_s$ . Распады легчайших  $b\bar{b}$  связанных состояний  $\Upsilon$  и  $c\bar{c}$  связанных состояний  $\psi$  управляются КХД и также дают возможность определения  $\alpha_s$ . Наконец, можно получить численно спектр связанных состояний  $c\bar{c}$  и  $b\bar{b}$ , задав константу связи КХД, и сравнение с экспериментом дает возможность определить  $\alpha_s$ .

Таблица показывает значения  $\alpha_s$ , извлеченные из каждого из этих экспериментов, выраженные в терминах значения  $\alpha_{s\overline{MS}}(m_Z^2)$ . Мы видим, что ряд экспериментов определяет  $\alpha_s$  с точностью 5%, и что различные определения согласуются друг с другом в таком приближении. На рис. 17.23 мы показали значения  $\alpha_s$ , представленные в таблице 17.1, до перевода к единой шкале, как функции характерного импульса  $Q$ , при котором они были получены. Это сравнение дает убедительное прямое подтверждение зависимости  $\alpha_s$  от масштаба импульса.

В начале этой главы мы выдвинули кандидата на роль фундаментальной теории сильных взаимодействий, используя лишь несколько простых принципов: существование кварков и идентификацию их квантовых чисел, а также идею о том, что теория взаимодействий кварков должна быть асимптотически свободной калибровочной тео-



Таблица 17.1. Значения  $\alpha_s(m_Z)$ , полученные из экспериментов.

Процессы:	$\alpha_s(m_Z)$	$Q$ (ГэВ)
Глубокоупругое рассеяние	0.118 (6)	1.7
$R$ в распаде $\tau$ -лептона	0.123 (4)	1.8
$\psi$ , $\Upsilon$ -спектроскопия	0.110 (6)	2.3
Поперечный импульс в рождении $W$	0.121 (24)	4.
Глубокоупругие рассеяния (эволюция)	0.112 (4)	5.
Кривые событий $e^+e^-$ -аннигиляции	0.121 (6)	5.8, 9.1
Скорость распада $\psi$ , $\Upsilon$	0.108 (10)	9.5
$R$ в $e^+e^-$ -аннигиляции (20–65 ГэВ)	0.124 (21)	35.
$R$ в распаде $Z^0$	0.124 (7)	91.2

Значения  $\alpha_s(m_Z)$ , расположенные в этой таблице, получены сравнением экспериментальных результатов с теоретическими выражениями из пертурбативной КХД, использующей минимальную схему вычитания. Значения  $\alpha_s$  были пересчитаны к  $Q = m_Z$  с использованием уравнений ренормгруппы.  $R$  обозначает отношение сечений или парциальные веса адронов по сравнению с лептонами. Числа в скобках — это стандартные ошибки в последних значащих цифрах. Колонка, отмеченная ‘ $Q$ ’, дает оценку значения  $Q$ , при котором проводился эксперимент. (Обычно эти измерения усреднялись в некотором интервале, и это усреднение принимается во внимание в выписанных значениях  $\alpha_s$ .) Эта таблица основана на результатах, собранных И. Хинчлифом (I. Hinchliffe) в статье *Phys. Rev. D* **50**, 1297 (1994). Эта статья также содержит полный набор ссылок и обсуждение источников неопределенности в определении  $\alpha_s$ .

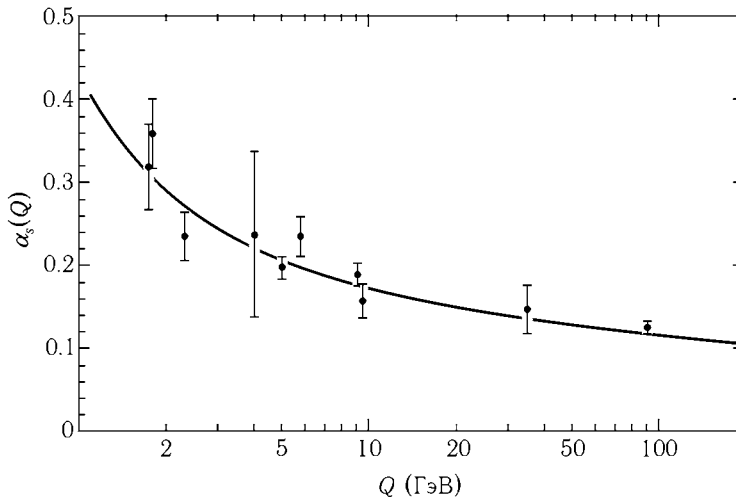


Рис. 17.23. Измерения  $\alpha_s$ , показанные на графике в зависимости от масштаба импульса  $Q$ , при котором проводился эксперимент. Эти графики были построены приведением значений  $\alpha_s(m_Z)$ , собранных в таблице 17.1, к масштабам импульсов  $Q$  из той же таблицы. Значения для событий  $e^+e^-$  разделены на две точки, соответствующие экспериментам на ускорителях TRISTAN и LEP. Эти значения сравниваются с теоретическими предсказаниями ренормгрупповой эволюции с начальными условиями  $\alpha_s(m_Z) = 0.117$ .

рий. Замечательно, что эти простые посылки привели нас к количественно правильно-му описанию сильных взаимодействий для широкого круга явлений в режиме жесткого рассеяния, где асимптотическая свобода может быть использована как инструмент для вычислений.

## Задачи

### 17.1. Двухпетлевые ренормгрупповые соотношения.

- (а) При учете старших порядков теории возмущений  $\beta$ -функция представляется в виде ряда:

$$\beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}g^3 - \frac{b_1}{(4\pi)^4}g^5 - \frac{b_2}{(4\pi)^6}g^7 + \dots$$

Проинтегрируйте уравнения ренормгруппы и покажите, что теперь бегущая константа связи равна:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln \ln(Q^2/\Lambda^2)}{(\ln(Q^2/\Lambda^2))^2} + \dots \right],$$

где опущенные слагаемые спадают как  $(\ln(Q^2/\Lambda^2))^{-2}$ .

- (б) Добавим к этой формуле ряд теории возмущений для сечения аннигиляции  $e^+e^-$ :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) = \sigma_0 \cdot \left( 3 \sum_f Q_f^2 \right) \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + a_2 \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \right].$$

Коэффициент  $a_2$  зависит от деталей условий перенормировки, определяющих  $\alpha_s$ . Покажите, что два главных слагаемых в асимптотике  $\sigma(s)$  при больших  $s$  зависят только от  $b_0$  и  $b_1$ , и не зависят от  $a_2$  и  $b_2$ . Таким образом, первые два коэффициента  $\beta$ -функции КХД не зависят от способа перенормировки.

**17.2. Прямая проверка значения спина глюонов.** В этой задаче мы сравним предсказания КХД с предсказаниями модели, в которой кварки взаимодействуют посредством скалярных бозонов. Пусть взаимодействие скалярного глюона с кварками описывается членом

$$\delta\mathcal{L} = gS\bar{q}q,$$

и пусть  $\alpha_g = g^2/4\pi$ .

- (а) Используя методы, описанные в разделах (b) и (c) заключительного проекта части I, вычислите сечение реакции  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}S$  в ведущем порядке теории возмущений. Сечение зависит от энергий  $q$ ,  $\bar{q}$ , и  $S$ , которые мы представим как доли  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  от энергии электронного пучка, как в (17.18). Покажите, что

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}S) = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \cdot \frac{\alpha_g}{4\pi} \frac{x_3^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}.$$

- (б) На практике очень трудно экспериментально отделить кварки от глюонов, поскольку в адронных струях рождаются оба типа частиц. Поэтому пусть  $x_a$  — наибольший из  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_b$  — средний, а  $x_c$  — наименьший. Просуммируйте по разным вероятностям и получите выражение для  $d^2\sigma/dx_a dx_b$  в КХД, используя (17.18), и в модели скалярных глюонов. Покажите, что эти модели можно различить по распределениям на плоскости  $x_a, x_b$ .

### 17.3. Рассеяние кварка на глюоне и глюона на глюоне.

(а) Вычислите дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{dt}(q\bar{q} \rightarrow gg)$$

аннигиляции кварк-антикварк в КХД в ведущем порядке по  $\alpha_s$ . Это проще всего сделать, вычислив амплитуды перехода между кварковыми и глюонными состояниями с определенной спиральностью. Считайте все массы равными нулю. Используйте явные векторы поляризации и спиноры, например,

$$\varepsilon^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)$$

для левого глюона, движущегося в направлении  $+\hat{z}$ . Следует рассматривать только поперечно поляризованные глюоны. Из-за сохранения спиральности вклад могут давать только начальные состояния  $q_L\bar{q}_R$  и  $q_R\bar{q}_L$ ; по четности эти два состояния дают одинаковое сечение. Поэтому необходимо вычислить только амплитуду следующих трех процессов:

$$\begin{aligned} q_L\bar{q}_R &\rightarrow g_R g_R, \\ q_L\bar{q}_R &\rightarrow g_R g_L, \\ q_L\bar{q}_R &\rightarrow g_L g_L. \end{aligned}$$

На самом деле, из-за CP-инвариантности первый и третий процессы имеют одинаковые сечения. После вычисления амплитуд, возведите их модули в квадрат и сложите их с учетом соответствующих цветовых множителей для получения сечений с различной спиральностью. Наконец, получите из них полное сечение, усредненное по начальным спинам и цветам.

(б) Вычислите дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{dt}(gg \rightarrow gg)$$

для рассеяния глюона на глюоне. Имеется 16 возможных спиральных комбинаций, но большинство из них связаны друг с другом в силу четности или кроссинг-симметрии. Все 16 можно построить из трех амплитуд для процессов

$$\begin{aligned} g_R g_R &\rightarrow g_R g_R, \\ g_R g_R &\rightarrow g_R g_L, \\ g_R g_R &\rightarrow g_L g_L. \end{aligned}$$

Покажите, что последние две из этих амплитуд обращаются в нуль. Первую можно существенно упростить при помощи тождества Якоби. После этого из шестнадцати сечений остается только три ненулевых. Используйте их для вычисления сечений, усредненных по спину и цвету.

**17.4. Глюонная функция расщепления.** Вычислите глюонную функцию расщепления (17.130) для уравнений Альтарелли–Паризи. Чтобы сделать это, сначала вычислите матричные элементы между состояниями с определенной спиральностью для трехглюонной вершины, изображенной на рис. 17.20. Используйте их для вывода функции распада в области  $x < 1$ . Затем фиксируйте сингулярность функции расщепления при  $x = 1$ , чтобы получить правильную нормировку.

**17.5. Фотообразование тяжелых кварков.** Рассмотрим процесс фотообразования пар тяжелых кварков:  $\gamma + p \rightarrow Q\bar{Q} + X$ , для тяжелого кварка с массой  $M$  и зарядом  $\mathcal{Q}$ . Если  $M$  достаточно велико, любая диаграмма, дающая вклад в этот процесс, должна содержать большую передачу импульса, поэтому должен быть применен пертурбативный анализ КХД. Эта идея работает на практике уже для образования пар  $c$ -кварков. Получите соответствующее сечение в главном порядке в КХД. Выберите партонные subprocessы, дающие главный вклад в эту реакцию, и напишите выражение для сечения в партонной модели. Вам понадобится вычислить сечения этих subprocessов, но их можно взять прямо из одного из результатов вычислений в КЭД из главы 5. Затем используйте этот результат, чтобы записать выражение для сечения рассеяния  $\gamma$  на протоне.

**17.6. Поведение партонных функций распределения при малых  $x$ .** Уравнения Альтарелли–Паризи можно решить аналитически при малых  $x$ , используя некоторые физически обоснованные приближения. Эта задача основана на работе Ральстона.\*

- (а) Покажите, что зависимость правой части уравнений Альтарелли–Паризи от  $Q^2$  можно выразить, переписав их как дифференциальные уравнения для величины

$$\xi = \ln \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right),$$

где  $\Lambda$  — это значение  $Q^2$ , при котором  $\alpha_s(Q^2)$ , вычисленное по  $\beta$ -функции в ведущем порядке, формально обращается в бесконечность.

- (б) Поскольку функции расщепления в глюоны имеют сингулярности типа  $z^{-1}$  при  $z \rightarrow 0$ , разумно предположить, что глюонная функция распределения растет приблизительно как  $x^{-1}$  при  $x \rightarrow 0$ . Результирующее распределение

$$dx f_g(x) \sim \frac{dx}{x}$$

приближенно не зависит от масштаба, так что его вид должен в грубом приближении сохраняться уравнениями Альтарелли–Паризи. Сделаем два предположения: (1) слагаемые, содержащие глюонные распределения, полностью доминируют в правых частях уравнений Альтарелли–Паризи; и (2) функция

$$\tilde{g}(x, Q^2) = x f_g(x, Q^2)$$

является медленно меняющейся функцией  $x$ . Используя эти приближения, покажите, что уравнения Альтарелли–Паризи для  $f_g(x)$  в пределе  $x \rightarrow 0$  можно преобразовать в следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial \xi} \tilde{g}(x, \xi) = \frac{12}{b_0} \tilde{g}(x, \xi),$$

где  $w = \ln(1/x)$  и  $b = (11 - \frac{2}{3}n_f)$ . Покажите, что если  $w\xi \gg 1$ , это уравнение имеет приближенное решение:

$$\tilde{g} = K(Q^2) \cdot \exp \left( \left[ \frac{48}{b_0} w(\xi - \xi_0) \right]^{1/2} \right),$$

где  $K(Q^2)$  определяется начальным условием.

\*J. P. Ralston, *Phys. Lett.* **172B**, 430 (1986).

- (с) Распределение кварков при очень малых  $x$  создается в основном расщеплением глюонов. Используя приближение из части (b), покажите, что для любого аромата кварков правая часть уравнения Альтарелли–Паризи для  $f_q(x)$  может быть приближенно проинтегрирована, что дает уравнение для  $\tilde{q}(x) = x f_q(x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{q}(x, \xi) = \frac{2}{3b_0} \tilde{g}(x, \xi).$$

Покажите, снова используя условие  $w\xi \gg 1$ , что это уравнение имеет решение:

$$\tilde{q} = \left( \frac{\xi - \xi_0}{27b_0 w} \right)^{1/2} K(Q^2) \cdot \exp\left( \left[ \frac{48}{b_0} w(\xi - \xi_0) \right]^{1/2} \right).$$

- (d) Ральстон предположил, что начальное условие

$$K(Q^2) = 50.36 (\exp(\xi - \xi_0) - 0.957) \cdot \exp\left[ -7.597(\xi - \xi_0)^{1/2} \right],$$

с  $Q_0^2 = 5 \text{ ГэВ}^2$ ,  $\Lambda = 0.2 \text{ ГэВ}$  и  $n_f = 5$  дает разумное приближение известных свойств партонных распределений, экстраполированных в область малых  $x$ . Используйте эту функцию и вышеприведенные результаты, чтобы обрисовать поведение кварковых и глюонных распределений при малых  $x$  и больших  $Q^2$ .

## ОПЕРАТОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЭФФЕКТИВНЫЕ ВЕРШИНЫ

Наш анализ КХД в гл. 17 был основан на принципе асимптотической свободы, согласно которому процессы сильного взаимодействия с большой передачей импульса могут рассматриваться в рамках теории возмущений по слабой константе связи. До сих пор, однако, мы мало использовали в КХД более мощные методы ренормализационной группы. В этой главе мы рассмотрим некоторые применения уравнения Каллана–Симанчика в КХД. Мы увидим, что асимптотически свободные теории имеют характерное скейлинговое поведение с поправками в форме аномальных степеней логарифмов характерных импульсов. Хотя эти поправки обычно меньше, чем аналогичные поправки в скалярных теориях поля, изученные в гл. 13, они, тем не менее, оказывают качественное влияние на сильные взаимодействия.

Начнем с рассмотрения скейлингового поведения массовых слагаемых в КХД, обратившись к формализму, использованному для описания массовых слагаемых в теории  $\phi^4$ . Однако другие приложения требуют более мощного метода *разложения операторного произведения*. В разделе 18.3 дается общее описание произведения операторов в квантовой теории поля и объясняется, какие ограничения накладывает на такие операторные произведения уравнение Каллана–Симанчика. В последних двух разделах эти методы применяются при описании новой точки зрения на глубоконеупругое рассеяние и другие жесткие процессы в КХД.

### 18.1. Перенормировка массы кварка

До сих пор мы всегда предполагали, что массы кварков достаточно малы, и в процессах при больших энергиях ими можно пренебречь. Это не всегда правильно даже для легких кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ; в случае более тяжелых  $c$ ,  $b$ ,  $t$  кварков их массы могут приводить к очень важным эффектам. Однако поскольку свободные кварки не существуют, нельзя однозначно определить массу кварка. В дальнейшем мы будем рассматривать массу кварка как параметр теории возмущений КХД, определенный перенормировочным условием на некотором масштабе перенормировки  $M$ .

Поскольку мы определяем массу кварка так же, как константу связи, с помощью перенормировочного условия, следует ожидать, что этот параметр будет изменяться в соответствии с ренормгрупповой эволюцией. Поэтому для разных процессов нужны разные значения параметра массы. Мы говорим что наш первоначальный рецепт приводит к *эффективной* массе кварка, которая зависит от масштаба импульса, при котором она вычисляется. В этом разделе мы получим ведущую зависимость такой эффективной массы от масштаба импульса.

Основы формализма для описания эффективных массовых слагаемых были изложены в разделе 12.5. Чтобы добавить массовое слагаемое в лагранжиан КХД, следует сначала определить оператор массы  $(\bar{q}q)$  с помощью перенормировочного условия на

масштабе  $M$ . Затем можно определить массу кварка, добавляя к лагранжиану слагаемое

$$\Delta\mathcal{L}_m = -m(\bar{q}q)_M. \quad (18.1)$$

Ниже будем предполагать, что масса кварка  $m$  достаточно мала, так что можно удерживать только старшие слагаемые по  $m$ . Будем также предполагать для простоты, что такое массовое слагаемое имеется только для одного кваркового аромата.

В пределе нулевой массы функции Грина оператора полей кварка  $(\bar{q}q)$

$$G^{(n,k)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k) = \langle q(x_1) \cdots q(x_n) \bar{q}(y_1) \cdots \bar{q}(y_n) \bar{q}q(z_1) \cdots \bar{q}q(z_k) \rangle, \quad (18.2)$$

удовлетворяют уравнению Каллана–Симанчика

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2n\gamma + k\gamma_{\bar{q}q} \right] G^{(n,k)}(\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_j\}, g, M) = 0, \quad (18.3)$$

где  $\gamma$  — аномальная размерность поля кварка,  $\gamma_{\bar{q}q}$  — аномальная размерность оператора  $\bar{q}q$ . Если включить в лагранжиан массовые слагаемые как в (18.1), функция Грина  $n$  полей кварков и  $n$  полей антикварков удовлетворяет уравнению:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2n\gamma + \gamma_{\bar{q}q} m \frac{\partial}{\partial m} \right] G^{(n)}(\{x_i\}, \{y_i\}, g, m, M) = 0. \quad (18.4)$$

Производная по  $m$  подсчитывает, сколько раз использован массовый оператор. В разделе 12.5 мы рассматривали  $m$  с размерностью массы как безразмерный параметр. В КХД, однако, удобно рассматривать размерный параметр  $m$  как константу связи. Решение уравнения Каллана–Симанчика будет тогда содержать бегущую массу  $\bar{m}(Q)$ , которая зависит от характерного импульса  $Q$  функции Грина. Этот параметр определяется как решение уравнения ренормгруппы, аналогичное (12.126). В этом случае уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{d \ln(Q/M)} \bar{m} = \gamma_{\bar{q}q}(\bar{g}) \cdot \bar{m}, \quad (18.5)$$

с начальным условием

$$\bar{m}(M) = m. \quad (18.6)$$

Величина  $\bar{m}(Q)$  является *эффективной массой*, которая должна использоваться для вычисления массовых поправок при рождении кварков или в процессах рассеяния с передачей импульса  $Q$ .

Чтобы получить  $\bar{m}(Q)$  явно, необходимо вычислить аномальную размерность массового оператора  $\gamma_{\bar{q}q}$ . Это может быть сделано так же, как в разделе 12.4. Мы явно определим нормировку оператора с помощью предписания, что вершинная функция  $(\bar{q}q)$  между перенормированными кварковыми полями должна удовлетворять условию

$$\text{Diagram} = 1 \quad (18.7)$$

при  $p^2 = q^2 = (p + q)^2 = -M^2$ . Для выполнения (18.7) потребуется вершинный контрчлен  $\delta_{\bar{q}q}$  со структурой операторной вставки. Тогда, так же как и в уравнении (12.112), аномальная размерность в однопетлевом порядке дается формулой:

$$\gamma_{\bar{q}q} = M \frac{\partial}{\partial M} (-\delta_{\bar{q}q} + \delta_2), \quad (18.8)$$

где  $\delta_2$  — контрчлен перенормировки поля кварка, определенный на рис. 16.8. Корреляционные функции калибровочно-инвариантного оператора ( $\bar{q}q$ ) калибровочно-инвариантны и поэтому разные слагаемые в уравнении Каллана–Симанчика для этой функции должны в сумме давать калибровочно-инвариантный ответ. Так как старший коэффициент  $\beta(g)$  не зависит от выбора калибровки и от других соглашений, из (18.3) следует что старший коэффициент  $\gamma_{\bar{q}q}$  также от них не зависит. Оба контрчлена  $\delta_2$  и  $\delta_{\bar{q}q}$  зависят от калибровки. Из этого рассуждения следует что зависимость от калибровки в (18.8) должна сократиться. В следующем расчете и в других вычислениях аномальных размерностей в этой главе мы будем работать в калибровке Фейнмана–т Хофта.

Мы уже вычисляли расходящуюся часть контрчлена  $\delta_2$  в калибровке Фейнмана–т Хофта в разделе 16.4. Вычисляя групповой коэффициент в (16.77) для КХД, находим

$$\delta_2 = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \quad (18.9)$$

Чтобы получить  $\delta_{\bar{q}q}$ , следует вычислить однопетлевую поправку к вершине (18.7) Она дается диаграммой

$$\begin{array}{c} \text{---} \swarrow \text{---} \\ \text{---} \searrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \downarrow q \\ \uparrow k \end{array} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig)^2 t^a \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + \not{q})}{(k+q)^2} \cdot 1 \cdot \frac{i\not{k}}{k^2} t^a \gamma_\mu \frac{-i}{(k-p)^2}. \quad (18.10)$$

В выражении для этой диаграммы множитель 1 отвечает вставке  $\bar{q}q$  оператора. В соответствующей диаграмме для перенормировки тока кварков  $j^\nu = \bar{q}\gamma^\nu q$  этот множитель должен быть заменен на  $\gamma^\nu$ . Так как нам нужна только расходящаяся часть (18.10), можно считать, что в подынтегральном выражении  $k$  велико. Тогда выражение для вклада этой диаграммы принимает вид:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \swarrow \text{---} \\ \text{---} \searrow \text{---} \\ \text{---} \end{array} &\sim \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig)^2 t^a \gamma^\mu \frac{i\not{k}}{k^2} \cdot 1 \cdot \frac{i\not{k}}{k^2} t^a \gamma_\mu \frac{-i}{k^2} \sim \\ &\sim -i \frac{4}{3} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d \cdot k^2}{(k^2)^3} \sim \\ &\sim \frac{4}{3} g^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}). \end{aligned} \quad (18.11)$$

Чтобы сохранить условие нормировки (18.7) мы должны добавить контрчлен

$$\delta_{\bar{q}q} = -4 \cdot \frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \quad (18.12)$$



Из выражений (18.8), (18.9) и (18.12) находим

$$\gamma_{qq} = -8 \frac{g^2}{(4\pi)^2}. \quad (18.13)$$

Как было отмечено в предыдущем разделе, аномальная размерность  $\gamma_j$  кваркового тока может быть найдена с помощью очень похожего вычисления. Это является хорошей проверкой нашего формализма, потому что, как мы показали перед уравнением (12.110), сохраняющийся ток однозначно нормируется своим интегралом, т.е. сохраняющимся зарядом, и поэтому должен иметь нулевую аномальную размерность. Если подставить  $\gamma^\nu$  вместо 1 в (18.10) и использовать для упрощения интеграла те же приближения, получим в числителе структуру дираковских матриц вида:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} \gamma_\mu &= \frac{1}{d} k^2 \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = \\ &= \frac{1}{4} (-2)^2 k^2 \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Тогда вместо (18.12) понадобится контрчлен

$$\delta_j = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \quad (18.15)$$

Объединяя этот результат с (18.9), получим

$$\gamma_j = 0, \quad (18.16)$$

в согласии с общими рассуждениями.

Если заменить гамма-функцию в (18.11) на явный множитель  $\ln(\Lambda^2/Q^2)$ , а затем вычесть расходимость с помощью контрчлена (18.12), получим, что вершинная диаграмма ведет себя следующим образом:

$$\text{Diagram} = \frac{4}{3} \cdot 4 \frac{g^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{M^2}{Q^2}. \quad (18.17)$$

Эта диаграмма дает усиление при малых внешних импульсах. Часть этого усиления связана с (калибровочно неинвариантной) перенормировкой кварковых полей; из соотношения (18.8) ясно, как извлечь часть этого логарифма, связанного с калибровочно-инвариантным ростом эффективной массы. Так, в порядке  $\alpha_s$ ,

$$\bar{m}(Q) = m \cdot \left( 1 + 8 \frac{g^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{M^2}{Q^2} \right). \quad (18.18)$$

Чтобы вычислить зависимость эффективной массы от импульса более точно, следует учесть еще два обстоятельства. Во-первых, величина  $(\alpha_s \ln(M^2/Q^2))$  может стать порядка 1, и в этом случае должны учитываться все главные логарифмические слагаемые вида  $(\alpha_s \ln(M^2/Q^2))^n$ . Вклады такого типа возникают во всех диаграмм на рис. 18.1. Во-вторых, константа связи  $\alpha_s$  сама является функцией импульса и дает дополнительное усиление вкладов от малых  $Q$ . Уравнение ренормализационной группы (18.5) правильным образом учитывает оба этих явления. В порядке  $g^2$  это уравнение

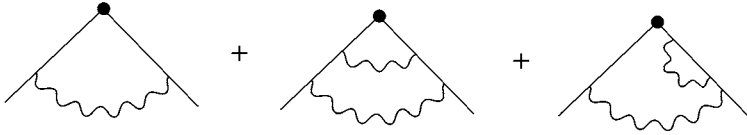


Рис. 18.1. Диаграммы, дающие ведущий логарифмический вклад в зависимость эффективной массы от импульса.

принимает явный вид:

$$\frac{d}{d \ln(Q/M)} \bar{m} = -8 \frac{\bar{g}^2}{(4\pi)^2} m = -2 \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \bar{m}. \quad (18.19)$$

Подставляя решение уравнения ренормгруппы для  $\bar{g}$  в виде (17.17), мы находим:

$$\frac{d}{d \ln(Q/M)} \bar{m} = -\frac{8}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \bar{m}, \quad (18.20)$$

где  $b_0$  — первый коэффициент  $\beta$ -функции КХД, а  $\Lambda$  теперь масштабный параметр КХД, определенный в (17.16). Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (18.6), имеет вид:

$$\bar{m}(Q^2) = \left( \frac{\ln(M^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \right)^{4/b_0} m. \quad (18.21)$$

Напомним, что в КХД  $b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ . Иначе (18.21) можно записать как

$$\bar{m}(Q^2) = \left( \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(M^2)} \right)^{4/b_0} m. \quad (18.22)$$

В качестве иллюстрации возьмем  $n_f = 4$  и  $\Lambda = 150$  МэВ; тогда эффективные массы легких кварков увеличатся примерно в 2 раза при изменении  $Q$  от 100 до 1 ГэВ.

Метод, который мы только что использовали для вычисления КХД-усиления оператора массы кварка, применим также для матричных элементов произвольного калибровочно-инвариантного оператора. В завершение этого раздела еще раз изложим полученные результаты в более общей форме.

Пусть  $\mathcal{O}(x)$  произвольный калибровочно-инвариантный оператор в КХД. Как и в случае массового слагаемого однопетлевые поправки к матричному элементу этого оператора могут содержать усиливающий или подавляющий множители, пропорциональные  $\alpha_s \ln(M^2/Q^2)$ , где  $Q$  — масштаб импульса КХД-процесса, обусловленного оператором  $\mathcal{O}(x)$ , а  $M$  — перенормировочная шкала, используемая для определения нормировки оператора. Часть этих однопетлевых поправок, связанных с нормировкой оператора, дается его аномальной размерностью  $\gamma_{\mathcal{O}}$ . Для оператора, содержащего  $n$  кварковых или антикварковых полей и  $k$  глюонных полей, имеем

$$\gamma_{\mathcal{O}} = M \frac{\partial}{\partial M} \left( -\delta_{\mathcal{O}} + \frac{n}{2} \delta_2 + \frac{k}{2} \delta_3 \right), \quad (18.23)$$

где  $\delta_{\mathcal{O}}$  — контрчлен, необходимый для сохранения условия нормировки оператора, а  $\delta_2$  и  $\delta_3$  — контрчлены перенормировки кварковых и глюонных полей, определенные на

рис. 16.8. Из (18.23) можно получить явное однопетлевое выражение для  $\gamma_\theta$  в виде:

$$\gamma_\theta = -a_\theta \frac{g^2}{(4\pi)^2}. \quad (18.24)$$

Используя этот результат, можно решить уравнение ренормгруппы для коэффициента при  $\mathcal{O}(x)$  и найти перенормировочный множитель КХД

$$\left( \frac{\ln(M^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \right)^{a_\theta/2b_0}, \quad (18.25)$$

где  $b_0$  — первый коэффициент  $\beta$ -функции КХД,

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f. \quad (18.26)$$

Перенормировочный множитель КХД (18.25) приводит к усилению при малых импульсах, если  $a_\theta > 0$ .

В оставшейся части этой главы мы приведем дальнейшие примеры этого усиления или подавления с помощью логарифмов КХД. Мы увидим что во многих случаях эти множители приводят к поразительным и нетривиальным физическим эффектам.

## 18.2. КХД перенормировка слабых взаимодействий

В следующем примере КХД-усиление возникает в теории слабого взаимодействия адронов. В разделе 17.3 был введен эффективный лагранжиан слабого взаимодействия кварков и лептонов. Сейчас для анализа потребуется несколько более детальное знание структуры слабых взаимодействий, поэтому начнем этот раздел с представления ряда фактов. Полная структура слабых взаимодействий кварков и лептонов будет последовательно обсуждаться в гл. 20.

Как обсуждалось в разделе 17.3, слабые взаимодействия кварков и лептонов описываются эффективным лагранжианом, возникающим в результате обмена виртуальным векторным бозоном  $W$ . В (17.31) приведена эффективная вершина взаимодействия кварков и лептонов:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2m_W^2} \bar{\ell}\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \nu \bar{u}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} d + \text{э.с.} \quad (18.27)$$

В этой главе мы, в основном, будем иметь дело с эффектами этого взаимодействия в области импульсов, много больших, чем 1 ГэВ. Поэтому пренебрежем массами кварков. Все фермионные поля, которые появляются в вершинах слабого взаимодействия, умножаются на левокиральный проектор  $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ . В оставшейся части этого раздела мы не будем выписывать этот проектор явно и перестанем обозначать его индексом  $L$ . Введем также константу Ферми как в (17.32). Тогда формула (18.27) может быть переписана в виде:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\ell}_L\gamma^\mu\nu_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu d_L) + \text{э.с.} \quad (18.28)$$

Аналогичная вершина описывает обмен  $W$  между парами кварков. Она имеет вид:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L\gamma_\mu d_L) + \text{э.с.} \quad (18.29)$$

В этой главе, однако, нам понадобится модифицированное, более точное выражение. Позже, при подробном анализе в гл. 20, мы увидим, что слабое взаимодействие переводит  $(u, c, t)$  кварки с зарядами  $+2/3$  в линейные комбинации  $(d, s, b)$  кварков с зарядами  $-1/3$ , которые могут быть получены с помощью унитарного вращения. Так, например,  $u$ -кварк связан с комбинацией

$$\cos \theta_c d + \sin \theta_c s, \quad (18.30)$$

с малой примесью  $b$ , которой мы в этом разделе будем пренебрегать.

Угол смешивания  $\theta_c$  называется *углом Кабиббо*. Из-за этого вращения кварковый эффективный лагранжиан слабого взаимодействия содержит несколько слагаемых, из которых для нас особенно важно следующее:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \cos \theta_c \sin \theta_c (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L). \quad (18.31)$$

За счет этого слагаемого  $s$ -кварки могут распадаться по каналу  $s \rightarrow u\bar{d}$ . Таким же образом преобразование (18.28) порождает эффективное взаимодействие

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sin \theta_c (\bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_L)(\bar{u}_L \gamma_\mu s_L), \quad (18.32)$$

которое приводит к распаду  $s \rightarrow u\bar{\nu}_\ell$ . Такие слабые процессы называют *нелептонными* и *полулептонными*, соответственно. Аналогичные выражения применимы к другим тяжелым кваркам.

Исходя из того, что (18.31) и (18.32) описывают слабое взаимодействие на фундаментальном уровне, мы сейчас обсудим изменение этого взаимодействия за счет логарифмов КХД. В предыдущем разделе мы видели, что КХД-поправки значительно увеличивают массу кварка в затравочном лагранжиане. Исследуем, получает ли само слабое взаимодействие аналогичное усиление.

Сначала рассмотрим оператор полулептонного взаимодействия (18.32). Слагаемое, билинейное по лептону, не модифицируется КХД, поэтому усиление этого оператора совпадает с усилением его кварковой компоненты

$$\bar{u}_L \gamma_\mu s_L. \quad (18.33)$$

Однако этот оператор является током и поэтому имеет  $\gamma = 0$ . На языке диаграмм логарифмическое усиление, возникающее из диаграммы рис. 18.2, сокращается с перенормировкой полей кварков, как мы уже видели при обсуждении токовых вершин в разделе 18.1. Левокиральный проектор  $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$  коммутирует со всеми остальными множителями в диаграмме и не влияет на окончательный результат. Это замечание применимо и к полулептонному слабому взаимодействию  $u$ - и  $d$ -кварков. Для этого случая оно означает, что нормировка сечения глубоконеупругого рассеяния нейтрино, данная в (17.35), не изменяется за счет КХД-логарифмов.

Однако в случае нелептонных слабых взаимодействий эффекты КХД не столь просты. Вычислим сначала диаграммы, которые дают ведущие поправки к перенормировке вершины слабого взаимодействия (18.31), а на следующем этапе получим ренормгрупповую интерпретацию этих результатов.

В порядке  $\alpha_s$  вершина нелептонного слабого взаимодействия получает поправки от диаграмм, показанных на рис. 18.3. Заметим что вклад первой диаграммы в точности равен перенормировке тока, найденной в полулептонном случае. Вторая диаграмма

дает аналогичную перенормировку второго кваркового тока. При вычислении  $\gamma$  эти два вклада сокращают вклады от перенормировок волновых функций четырех кварковых полей. Оставшиеся четыре диаграммы на рис. 18.3 — новые вклады, которые в принципе могут привести к большим перенормировочным множителям.

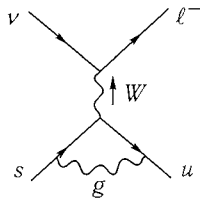


Рис. 18.2. КХД поправки к полулептонному слабому взаимодействию.

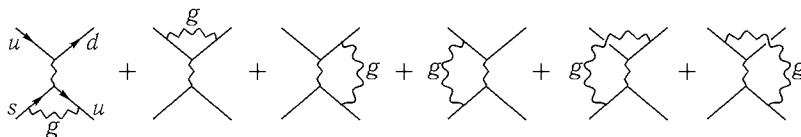


Рис. 18.3. КХД поправки к нелептонному слабому взаимодействию.

Вычислим вклад этих диаграмм, начиная с третьей диаграммы на рис. 18.3. Как и в разделе 18.1, нас интересует логарифмически расходящийся вклад, связанный с импульсами в петле  $k$ , много большими, чем внешние импульсы. Самый простой способ выделить эти вклады — вычислить каждую диаграмму в приближении нулевых внешних импульсов. При написании вкладов этих диаграмм мы будем опускать общий множитель

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \cos \theta_c \sin \theta_c. \tag{18.34}$$

Мы сохраним в формулах кварковые поля для обозначения внешних состояний так что наши окончательные выражения будут иметь вид перенормированных операторов.

С учетом этих обозначений третья диаграмма на рис. 18.3. дает вклад:

$$\text{Diagram} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig)^2 \frac{-i}{k^2} \left( \bar{d}_L \gamma^\nu t^a \frac{i \not{k}}{k^2} \gamma^\mu u_L \right) \left( \bar{u}_L \gamma_\nu t^a \frac{-i \not{k}}{k^2} \gamma_\mu s_L \right). \tag{18.35}$$

Используя симметрию интеграла по  $k$ , выделяем расходящуюся часть:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= ig^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2/d}{(k^2)^3} (\bar{d}_L \gamma^\nu t^a \gamma^\lambda \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\nu t^a \gamma_\lambda \gamma_\mu s_L) = \\ &= -\frac{g^2}{4} \frac{\Gamma(2-d)}{(4\pi)^2} (\bar{d}_L \gamma^\nu t^a \gamma^\lambda \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\nu t^a \gamma_\lambda \gamma_\mu s_L). \end{aligned} \tag{18.36}$$

Чтобы привести произведение кварковых полей к более привычной форме, применим преобразование Фирца, обсуждавшееся в конце раздела 3.4. Если цветные матрицы  $t^a$  отсутствуют, произведение кварковых полей в точности совпадет с произведением в (3.82), так что

$$(\bar{d}_L \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu s_L) = 16 \bar{d}_L \gamma^\nu u_L \bar{u}_L \gamma_\nu s_L. \tag{18.37}$$

Чтобы выяснить, как матрицы  $t^a$  переставляют цветовые квантовые числа кварковых полей, понадобится аналог тождества (3.77). Чтобы найти его, рассмотрим инвариант по цвету

$$(t^a)_{ij}(t^a)_{kl}. \quad (18.38)$$

Индексы  $i, k$  преобразуются по цветовому представлению  $\mathbb{3}$ ; индексы  $j, \ell$  преобразуются как  $\bar{\mathbb{3}}$ . Поэтому выражение (18.38) должно быть линейной комбинацией двух возможных способов свертки этих индексов

$$A\delta_{i\ell}\delta_{kj} + B\delta_{ij}\delta_{k\ell}. \quad (18.39)$$

Константы  $A$  и  $B$  могут быть найдены, если свернуть (18.38) и (18.39) с  $\delta_{ij}$  и с  $\delta_{jk}$  и подобрать  $A$  и  $B$  так, чтобы свертки (18.39) удовлетворяли равенствам:

$$\text{tr}[t^a](t^a)_{k\ell} = 0; \quad (t^a t^a)_{i\ell} = \frac{4}{3}\delta_{i\ell}. \quad (18.40)$$

Это дает тождество

$$(t^a)_{ij}(t^a)_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{i\ell}\delta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{k\ell}). \quad (18.41)$$

Аналогичное соотношение выполняется для генераторов  $SU(N)$  в фундаментальном представлении с заменой  $(1/3)$  на  $(1/N)$ .

Подставляя (18.41) в (18.36) мы находим, что первое слагаемое в тождестве генерирует новый четырехфермионный оператор

$$(\bar{d}_{Li}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu u_{Lj})(\bar{u}_{Lj}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu s_{Li}), \quad (18.42)$$

где  $i, j$  — цветовые индексы. Применяя преобразование Фирца в (18.37) и затем дополнительное преобразование (3.79), можно представить этот оператор в виде

$$16(\bar{d}_{Li}\gamma^\nu u_{Lj})(\bar{u}_{Lj}\gamma_\nu s_{Li}) = 16(\bar{u}_{Lj}\gamma^\nu u_{Lj})(\bar{d}_{Li}\gamma_\nu s_{Li}). \quad (18.43)$$

Знак минус в (3.79) сокращается со знаком минус от изменения порядка фермионных полей. В результате получается произведение кварковых токов, синглетных по цвету, однако поля в этих токах расставлены иначе по сравнению с первоначальным оператором. Окончательный результат вычисления этой диаграммы:

$$\text{Diagram} = -4g^2\Gamma\frac{(2-d)}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L\bar{d}_L\gamma_\mu s_L - \frac{1}{6}\bar{d}_L\gamma^\mu u_L\bar{u}_L\gamma_\mu s_L\right]. \quad (18.44)$$

Четвертая диаграмма на рис. 18.3 дает в точности такой же вклад.

Вычисление последних двух диаграмм на рис. 18.3 аналогично. Пятая диаграмма дает вклад:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (ig)^2 \frac{-i}{k^2} (\bar{d}_L\gamma^\nu t^a \frac{i\not{k}}{k^2} \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L\gamma_\mu t^a \frac{i\not{k}}{k^2} \gamma_\nu t^a s_L) = \\ &= -ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2/d}{(k^2)^3} (\bar{d}_L\gamma^\nu t^a \gamma^\lambda \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L\gamma_\mu t^a \gamma_\lambda \gamma_\nu s_L) = \\ &= +\frac{g^2}{4} \frac{\Gamma(2-d)}{(4\pi)^2} (\bar{d}_L\gamma^\nu t^a \gamma^\lambda \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L\gamma_\mu t^a \gamma_\lambda \gamma_\nu s_L). \end{aligned} \quad (18.45)$$

Четырехфермионный оператор может быть упрощен с помощью преобразования Фирца (3.79) следующим образом:

$$\begin{aligned} (\bar{d}_L \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu s_L) &= + (\bar{d}_L \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) = \\ &= + (-2)^2 (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L) = \\ &= 4 (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu s_L). \end{aligned} \quad (18.46)$$

Мы должны опять упростить произведение цветowych матриц при помощи тождества (18.41), и вновь первое слагаемое этого тождества потребует дополнительного преобразования Фирца. Окончательный результат:

$$\text{[Diagram]} = +g^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{2} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \bar{d}_L \gamma_\mu s_L - \frac{1}{6} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L \right]. \quad (18.47)$$

Последняя диаграмма на рис. 18.3 дает такой же вклад. Сумма вкладов от всех четырех диаграмм равна:

$$-3g^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} \left[ \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \bar{d}_L \gamma_\mu s_L - \frac{1}{3} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L \right]. \quad (18.48)$$

Выделение ультрафиолетово расходящихся частей диаграмм на рис. 18.3 является частью формального рецепта для вычисления  $\gamma$ -функции Каллана–Симанчика для вершины слабого взаимодействия. Однако в этом месте полезно сделать паузу и задать себе вопрос о физическом смысле этой расходимости. Диаграммы на рис. 18.3 не будут расходиться, если вычислить их в затравочной теории с  $W$ -бозонами. При написании слабого взаимодействия в виде эффективной локальной вершины мы приближенно заменили пропагатор  $W$ -бозона константой, предполагая, что переносимый импульс  $k$  много меньше  $m_W$ :

$$\frac{1}{k^2 - m_W^2} \rightarrow \frac{-1}{m_W^2}. \quad (18.49)$$

Использованное при вычислении поправок КХД приближение верно только в области интегрирования, где  $k^2 \ll m_W^2$ . Вне этой области следует использовать полный пропагатор  $W$ -бозона, что вносит дополнительный фактор  $k^2$  в знаменатель и делает интеграл сходящимся. Таким образом, при вычислении поправок ультрафиолетово расходящиеся слагаемые в диаграммах на рис. 18.3 должны быть заменены на логарифмы, обрезанные на  $m_W$ . Нижний предел логарифма определяется внешним импульсом. В распаде  $K$ -мезона — легчайшего адрона, содержащего  $s$ -кварк, — внешний импульс порядка  $m_K$ . Поэтому в поправке (18.48) следует сделать замену

$$g^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2} \rightarrow \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2}. \quad (18.50)$$

В такой интерпретации можно переписать (18.48) как поправку порядка,  $\alpha_s$  к вершине слабого взаимодействия в ведущем порядке. Учет этих поправок приводит к изменению масштаба и модификации вершины слабого взаимодействия:

$$\begin{aligned} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L &\rightarrow \\ &\rightarrow \left( 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \right) \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L - 3 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \frac{m_W^2}{m_K^2} \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \bar{d}_L \gamma_\mu s_L. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Заметим, что КХД поправки не только изменяют нормировку затравочного оператора, но и порождают новый оператор с другой структурой. Это вычисление явно иллюстрирует утверждение из раздела 12.4 о том, что диаграммы, меняющие нормировку локальных операторов, могут также смешивать разные операторы с одинаковой размерностью и квантовыми числами.

Поскольку величина логарифма в (18.50) порядка 10, величина ведущей поправки КХД будет порядка 1, и поэтому важны поправки высших порядков. Чтобы суммировать ведущие логарифмические поправки, опять воспользуемся ренормгрупповым анализом. Определим для ясности

$$\mathcal{O}^1 = \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L; \quad \mathcal{O}^2 = \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \bar{d}_L \gamma_\mu s_L. \quad (18.52)$$

Мы будем использовать индекс 0 для обозначения затравочных операторов и индекс  $M$  для обозначения операторов, удовлетворяющих условию нормировки на масштабе  $M$ . Из диаграмм рис. 18.3 мы нашли, что нормированный на масштабе  $M$  оператор, матричные элементы которого имеют кварковую структуру  $\mathcal{O}^1$ , дается формулой:

$$\mathcal{O}_M^1 = \mathcal{O}_0^1 + \delta^{11} \mathcal{O}_0^1 + \delta^{12} \mathcal{O}_0^2, \quad (18.53)$$

где  $\delta^{ij}$  — контрчлены:

$$\delta^{11} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right) (M^2)^{2-d/2}; \quad \delta^{12} = +3 \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right) (M^2)^{2-d/2}. \quad (18.54)$$

Выразим  $\mathcal{O}_M^2$  через затравочные операторы:

$$\mathcal{O}_M^2 = \mathcal{O}_0^2 + \delta^{21} \mathcal{O}_0^1 + \delta^{22} \mathcal{O}_0^2, \quad (18.55)$$

где

$$\delta^{21} = \delta^{12}, \quad \delta^{22} = \delta^{11}.$$

Тогда, так же как и в уравнении (12.109), эволюция  $\mathcal{O}^1$  и  $\mathcal{O}^2$  описывается в уравнении Каллана–Симанчика матрицей  $\gamma^{ij}$ , смешивающей два оператора. Разлагая это уравнение до первого порядка по  $g^2$ , получаем, что эта матрица в однопетлевом порядке дается формулой:

$$\gamma^{ij} = M \frac{\partial}{\partial M} [-\delta^{ij}]. \quad (18.56)$$

Таким образом, находим, что

$$\gamma = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (18.57)$$

действует в пространстве операторов  $\mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2$ .

Самый простой способ получения физических следствий эволюции, описываемой выражением (18.57), состоит в диагонализации этой матрицы и нахождении нового базиса операторов, в котором они эволюционируют без смешивания. Легко видеть, что для матрицы (18.57) собственными векторами будут:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{1/2} &= \frac{1}{2} [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L - \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \bar{d}_L \gamma_\mu s_L], \\ \mathcal{O}^{3/2} &= \frac{1}{2} [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \bar{d}_L \gamma_\mu s_L]. \end{aligned} \quad (18.58)$$



Верхние индексы этих операторов соответствуют их изоспиновым квантовым числам. Оператор  $\mathcal{O}^{1/2}$  антисимметричен относительно перестановки  $\bar{d}$  и  $\bar{u}$ , поэтому эти два поля с изоспином  $-1/2$  дают полный изоспин нуль, так что весь оператор имеет изоспин  $1/2$ . Этот оператор может генерировать распады  $K$ -мезона, меняющие изоспин на  $1/2$ , например,  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ , но не распады, меняющие изоспин на  $3/2$ , например,  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ . На опыте процессы первого типа идут почти в тысячу раз быстрее (так называемое правило  $\Delta I = 1/2$ ). Интересно, что жесткие КХД-поправки уже вносят различие между двумя этими операторами.

Зная собственные значения (18.57), мы получаем  $\gamma$ -функции Каллана–Симанчика для собственных операторов (18.58):

$$\gamma_{1/2} = -8 \frac{g^2}{(4\pi)^2}; \quad \gamma_{3/2} = +4 \frac{g^2}{(4\pi)^2}. \quad (18.59)$$

Согласно (18.24) и (18.25) отсюда следует, что жесткие КХД логарифмы приводят к усилению оператора  $\mathcal{O}^{1/2}$  и к подавлению оператора  $\mathcal{O}^{3/2}$ . Более явно можно переписать исходную вершину нелептонного слабого взаимодействия (18.31) в виде:

$$[\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L] \Big|_{m_W} = [\mathcal{O}^{1/2}] \Big|_{m_W} + [\mathcal{O}^{3/2}] \Big|_{m_W}. \quad (18.60)$$

Как и выше, нижний индекс относится к масштабу масс, на котором нормирован оператор. Теперь учтем КХД логарифмы, связанные с вычислением матричного элемента этого оператора при меньшем масштабе импульса  $m_K$ , с помощью замены операторов в правой части (18.60) на операторы, перенормированные в точке  $m_K$ , с масштабным фактором (18.25). Это дает

$$\begin{aligned} [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L] \Big|_{m_W} &= \left( \frac{\ln(m_W^2/\Lambda^2)}{\ln(m_K^2/\Lambda^2)} \right)^{4/b_0} [\mathcal{O}^{1/2}] \Big|_{m_K} + \\ &+ \left( \frac{\ln(m_W^2/\Lambda^2)}{\ln(m_K^2/\Lambda^2)} \right)^{-2/b_0} [\mathcal{O}^{3/2}] \Big|_{m_K}, \end{aligned} \quad (18.61)$$

где опять  $b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ . Из этого уравнения следует, что, в отличие от случая полуплептонных слабых взаимодействий, КХД логарифмы изменяют общую нормировку эффективного лагранжиана нелептонных слабых взаимодействий. Дополнительно меняется кварковая структура эффективного лагранжиана.

Количественно, взяв в качестве иллюстрации  $n_f = 4$  и  $\Lambda = 150$  МэВ, найдем, что

$$[\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \bar{u}_L \gamma_\mu s_L] \Big|_{m_W} = 2.1 [\mathcal{O}^{1/2}] \Big|_{m_K} + 0.7 [\mathcal{O}^{3/2}] \Big|_{m_K}. \quad (18.62)$$

Таким образом, логарифмические КХД-поправки от  $m_W$  до  $m_K$  дают усиление в 3 раза части эффективного взаимодействия с  $\Delta I = 1/2^*$ . Наблюдаемое на опыте правило  $\Delta I = 1/2$  в распадах  $K$  мезонов соответствует усиливающему множителю 20. Считается, что частично этот множитель возникает из отношения матричных элементов операторов  $\mathcal{O}_{m_K}^{1/2}$  и  $\mathcal{O}_{m_K}^{3/2}$  между физическими адронными состояниями, которые определяются мягкой непертурбативной динамикой КХД.

\*M. K. Gaillard and B. W. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 108 (1974); G. Altarelli and L. Maiani, *Phys. Lett.* **52B**, 351 (1974).

### 18.3. Операторное разложение

Один из способов интерпретации результатов предыдущего раздела заключается в утверждении, что исходное взаимодействие, являющееся произведением токов, удалось заменить на единственный локальный оператор. Мы затем вывели физические следствия исходного составного взаимодействия с помощью КХД перенормировки этого оператора. Процедура замены произведения операторов на один эффективный оператор бывает полезна во многих ситуациях, встречающихся в квантовой теории поля. Поэтому в этом разделе мы прервем изучение КХД и изложим общую схему такой процедуры.

Формализуем задачу, изложенную в предыдущем разделе, следующим образом. Рассмотрим процесс квантовой теории поля, в котором два оператора  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  разделены малым расстоянием  $x$ , а остальные операторы находятся гораздо дальше или вместе с внешними физическими состояниями. В предыдущем примере эти два оператора являются кварковыми токами, которые возникают в слабой вершине и разнесены на расстояние  $x$  порядка  $m_W^{-1}$ , равно радиусу действия пропагатора  $W$ -бозона. Внешние состояния, содержащие  $K$  и  $\bar{K}$  мезоны, могут быть описаны операторами рождения и уничтожения этих частиц. Амплитуда слабого распада  $K$ -мезона или любого другого процесса этого типа может быть извлечена из функции Грина

$$G_{12}(x; y_1, \dots, y_m) = \langle \mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0) \phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \rangle, \quad (18.63)$$

в пределе  $x \rightarrow 0$  и с  $y_i$ , фиксированными далеко от начала координат. Здесь и в последующем обсуждении будут рассматриваться хронологически упорядоченные произведения операторов, такие же, как при записи произведения полей в функциональном интеграле.

Произведение операторов  $\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0)$  в принципе может создать совершенно произвольное локальное возмущение вблизи точки 0. Однако любое такое возмущение может быть описано как эффект вставки локального оператора в точку 0.

Этот локальный оператор должен иметь квантовые числа глобальной симметрии, такие же, как у произведения  $\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2$ , в остальном он ничем не ограничен. Удобно записать этот оператор как линейную комбинацию операторов из стандартного базиса. Коэффициенты в этой линейной комбинации могут зависеть от  $x$ . Обычно произведения операторов в квантовой теории поля сингулярны, поэтому естественно, что некоторые коэффициенты могут быть сингулярными при  $x \rightarrow 0$ . Основываясь на этих наблюдениях, Вильсон предположил, что произведение операторов может быть вычислено с помощью замены произведения операторов в (18.63) на линейную комбинацию локальных операторов:

$$\mathcal{O}_1(x) \mathcal{O}_2(0) \rightarrow \sum_n C_{12}^n(x) \mathcal{O}_n(0), \quad (18.64)$$

где коэффициенты  $C_{12}^n(x)$  — с-числовые функции. Это *операторное разложение* (ОР) будет зависеть только от операторов  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  и от расстояния между ними и не будет зависеть от набора и положения других полей в функции Грина.

Разложение (18.64) означает что функции Грина (18.63) могут быть разложены при малых  $x$  следующим образом:

$$G_{12}(x; y_1, \dots, y_m) = \sum_n C_{12}^n(x) G_n(y_1, \dots, y_m), \quad (18.65)$$

где

$$G_n(y_1, \dots, y_m) = \langle \mathcal{O}_n(0) \phi(y_1) \cdots \phi(y_m) \rangle, \quad (18.66)$$

и всю зависимость от  $x$  теперь несут коэффициентные функции ОР. В примере предыдущего раздела окончательные выражения для амплитуд зависят довольно замысловатым образом от малой раздвижки двух операторов через зависимость коэффициентов в (18.61) от  $m_W$ . С точки зрения операторного разложения эта зависимость переносится коэффициентными функциями и определена при вычислении произвольных матричных элементов.

В разделах 18.1 и 18.2 мы использовали ренормгруппу для вычисления факторов усиления и подавления для матричных элементов операторов. Поэтому естественно ожидать, что коэффициенты операторного разложения также определяются с помощью ренормгруппы. Сейчас мы выведем это соотношение. Сначала перепишем разложение (18.64) более точно. Операторы, которые возникают в этом соотношении, должны быть определены на некотором масштабе  $M$ . Тогда операторное разложение примет вид:

$$[\mathcal{O}_1(x)]_M [\mathcal{O}_2(0)]_M = \sum_n C_{12}^n(x; M) [\mathcal{O}_n(0)]_M. \quad (18.67)$$

Заметим, что коэффициентные функции могут зависеть от  $M$ , так как они должны поглощать зависящие от  $M$  перенормировки оператора. Если мы используем левую часть (18.67) для вычисления (18.63), эта функция будет удовлетворять уравнению Каллана–Симанчика

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + m\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 \right] G_{12}(x; y_1, \dots, y_m; M) = 0. \quad (18.68)$$

Аналогично, для оператора  $\mathcal{O}_n$ , нормированного в точке  $M$ , функция Грина (18.66) удовлетворяет уравнению

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + m\gamma + \gamma_n \right] G_n(y_1, \dots, y_m; M) = 0. \quad (18.69)$$

Применяя (18.68) к правой стороне (18.65), находим, что эти условия совместны, только если коэффициенты ОР удовлетворяют уравнению Каллана–Симанчика

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_n \right] C_{12}^n(x; M) = 0. \quad (18.70)$$

Теперь стандартными методами решим это уравнение. Найдем, во-первых, размерности операторов. Если операторы  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_n$  имеют размерности  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_n$ , коэффициентная функция  $C_{12}^n(x)$  должна иметь размерность (масса) $^{d_1+d_2-d_n}$ . Таким образом,

$$C_{12}^n(x) = \left( \frac{1}{|x|} \right)^{d_1+d_2-d_n} \tilde{C}(xM), \quad (18.71)$$

где  $\tilde{C}(xM)$  — безразмерная функция. Она определяется из (18.70) с помощью метода из раздела 12.3. Таким образом,

$$C_{12}^n(x) = \left( \frac{1}{|x|} \right)^{d_1+d_2-d_n} c(\bar{g}(1/x)) \exp \left[ \int_{1/x}^M d \ln M' (\gamma_n - \gamma_1 - \gamma_2) \right], \quad (18.72)$$

где  $c(\bar{g})$  — безразмерная функция бегущей константы связи на масштабе  $1/x$ . В фиксированной точке ренормгруппы  $\gamma$ -функции примут определенное значение  $\gamma_{j*} = \gamma_j(g_*)$ . Тогда решение (18.72) может быть получено в виде:

$$C_{12}^n(x) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^{d_1+d_2-d_n} c(g_*) \exp\left[\ln(xM)(\gamma_{n*} - \gamma_{1*} - \gamma_{2*})\right]. \quad (18.73)$$

В этом случае

$$C_{12}^n(x) \sim \left(\frac{1}{|x|}\right)^{d_1^*+d_2^*-d_n^*}, \quad (18.74)$$

где

$$d_j^* = d_j + \gamma_j(g_*) \quad (18.75)$$

— истинная масштабная размерность оператора  $\mathcal{O}_j$  в фиксированной точке.

В случае асимптотически свободной теории зависимость от масштаба усложняется так же, как в разделе 18.1. В ведущем порядке теории возмущений три  $\gamma$ -функции принимают вид (18.24). Тогда решение (18.72) принимает вид:

$$C_{12}^n(x) \sim \left(\frac{1}{|x|}\right)^{d_1+d_2-d_n} \left(\frac{\ln(1/|x|^2\Lambda^2)}{\ln(M^2/\Lambda^2)}\right)^{(a_n-a_1-a_2)/2b_0}. \quad (18.76)$$

В примере раздела 18.2 затравочными операторами были токи с размерностью 3 и  $\gamma = 0$  при раздвижке  $m_W^{-1}$ , а одетые локальные операторы имели размерность 6. Таким образом, (18.76) действительно правильно воспроизводит зависимость (18.61) от  $m_W$ . Заметим, что ренормгрупповая зависимость менее сложна для произведения токов, имеющих фиксированную не зависящую от шкалы нормировку. Этот специальный случай часто возникает в приложениях операторного разложения.

Мы написали (18.70) без учета смешивания операторов. Однако, как мы уже видели, такое смешивание часто возникает в приложениях ОР. Чтобы учесть смешивание, нужно просто использовать в (18.70) матричнозначные  $\gamma$ -функции. Например, с учетом операторного смешивания уравнение Каллана–Симанчика для  $G_n$  изменится:

$$\left[\delta_{np}\left(M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + m\gamma\right) + \gamma_{np}\right]G_p(y_1, \dots, y_m; M) = 0. \quad (18.77)$$

С учетом этих изменений (18.70) примет вид:

$$\begin{aligned} \left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial g}\right]C_{12}^n(x; M) + \gamma_{1k}C_{k2}^n(x; M) + \\ + \gamma_{2k}C_{1k}^n(x; M) - \gamma_{kn}C_{12}^k(x; M) = 0. \end{aligned} \quad (18.78)$$

Заметим, что первые две  $\gamma$ -матрицы действуют на коэффициент ОР слева, а третья — справа. В случае произведения токов первые две  $\gamma$ -матрицы зануляются и (18.78) упрощается до выражения:

$$\left[M\frac{\partial}{\partial M} + \beta\frac{\partial}{\partial g}\right]C_{12}^n(x; M) - C_{12}^k(x; M)\gamma_{kn} = 0. \quad (18.79)$$

Это уравнение сыграет важную роль в разделе 18.5.

## 18.4. Операторный анализ $e^+e^-$ -аннигиляции

Нетрудно представить, что существует связь между матричными элементами токов на малых расстояниях и матричными элементами токов с передачей больших импульсов. Поэтому мы можем ожидать, что операторное разложение позволит с новой точки зрения взглянуть на теорию жестких процессов в КХД. В этом и следующем разделе мы применим операторное разложение к пертурбативному анализу КХД, проведенному в гл. 17. Начнем с обсуждения полного сечения  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны. После вывода (17.9) было показано, что это полное сечение можно вычислить по теории возмущений КХД с использованием значения  $\alpha_s$ , соответствующего масштабу полной энергии в системе центра масс. Однако этот вывод был чисто интуитивным и грешил многочисленными логическими пробелами. В данном разделе мы дадим более строгое обоснование этого результата.

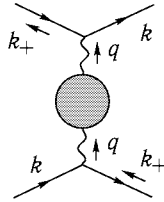


Рис. 18.4. Диаграммы, мнимая часть которых дает полное сечение для  $e^+e^- \rightarrow$  адроны.

Для того чтобы применить операторное разложение, мы должны написать полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны в виде матричного элемента произведения токов. Чтобы сделать это, используем оптическую теорему, связывающую полное сечение  $e^+e^-$  с амплитудой рассеяния вперед для процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ . Пренебрегая массой электрона, получаем из (7.49), что

$$\sigma(e^+e^-) = \frac{1}{2s} \text{Im } \mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-). \quad (18.80)$$

Для вычисления сечения  $e^+e^- \rightarrow$  адроны, учтем в вычислении мнимой части только вклады от адронных промежуточных состояний. В ведущем порядке по  $\alpha$ , но во всех порядках по сильному взаимодействию эти вклады возникают из диаграмм типа рис. 18.4 при взятии мнимой части адронных вкладов в поляризацию вакуума.

Диаграммам на рис. 18.4 соответствует выражение:

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k_+) \frac{-i}{s} (i\Pi_h^{\mu\nu}(q)) \frac{-i}{s} \bar{v}(k_+) \gamma_\nu u(k), \quad (18.81)$$

где  $s = q^2$  и  $\Pi_h^{\mu\nu}(q)$  — адронная часть поляризации вакуума. С помощью тождеств Уорда оно может быть записано в виде:

$$\Pi_h^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_h(q^2). \quad (18.82)$$

Слагаемые  $q^\mu q^\nu$  дают нуль при сворачивании с внешними электронными токами, так что выживает только слагаемое с  $g^{\mu\nu}$ . Чтобы вычислить спинорную часть, используем тот факт, что в амплитуде рассеяния вперед начальные и конечные импульсы и спины

одинаковы. Следовательно, после усреднения по начальным спинам

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} \bar{u}(k) \gamma^\mu v(k_+) \bar{v}(k_+) \gamma_\mu u(k) &= \frac{1}{4} \text{tr}[\not{k} \gamma^\mu \not{k}_+ \gamma_\mu] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot 4(k \cdot k_+) = \\ &= -s. \end{aligned} \quad (18.83)$$

Таким образом:

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{адроны}) = -\frac{4\pi\alpha}{s} \text{Im} \Pi_h(s). \quad (18.84)$$

Для проверки этого результата можно вернуться к однопетлевому значению  $\Pi$  в КЭД (7.91) или к мнимой части этого выражения в (7.92):

$$\text{Im} \Pi(s + i\varepsilon) = -\frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right). \quad (18.85)$$

Комбинируя (18.85) и (18.84), получим правильное в ведущем порядке сечение для рождения нового тяжелого лептона в  $e^+ e^-$ -аннигиляции:

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow L^+ L^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right). \quad (18.86)$$

Если умножить (18.86) на цветовой фактор 3 и просуммировать по кварковым ароматам с учетом квадратов их зарядов, получим предсказание для КХД в ведущем порядке.

Учитывая выражение (18.84) завершим доказательство желаемого соотношения замечанием, что адронная поляризация вакуума есть просто матричный элемент произведения токов. Пусть  $J^\mu$  — электромагнитный ток кварков:

$$J^\mu = \sum_f Q_f \bar{q}_f \gamma^\mu q_f. \quad (18.87)$$

Тогда

$$i\Pi_h^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J^\mu(x) J^\nu(0) \} | 0 \rangle. \quad (18.88)$$

В пределе, когда  $x$  стремится к 0, можно применить операторное разложение для произведения токов. Так как мы будем брать среднее по вакууму от произведения, нам потребуется только вклад лоренц- и калибровочно-инвариантных операторов. Поэтому

$$J_\mu(x) J_\nu(0) \sim C_{\mu\nu}^1(x) \cdot 1 + C_{\mu\nu}^{\bar{q}q}(x) \bar{q}q(0) + C_{\mu\nu}^{F^2}(x) (F_{\alpha\beta}^a)^2(0) + \dots \quad (18.89)$$

Заметим, что мы включили оператор 1 в правой части, а следующие возможные операторы в КХД имеют размерность 3 и 4 соответственно. Так как оператор  $\bar{q}q$  нарушает киральную симметрию, его коэффициентная функция должна явно содержать массу кварка. Таким образом, с помощью размерного анализа находим:

$$C_{\mu\nu}^1 \sim x^{-6}, \quad C_{\mu\nu}^{\bar{q}q} \sim m x^{-2}, \quad C_{\mu\nu}^{F^2} \sim x^{-2}, \quad (18.90)$$

и старшие слагаемые в этом ряду менее сингулярны при  $x \rightarrow 0$ .

Для вычисления  $\Pi_h^{\mu\nu}(q)$  потребуется фурье-преобразование произведения токов. Предполагая, что в этом преобразовании действительно доминируют вклады малых расстояний, можно вычислить его с помощью фурье-преобразования отдельных коэффициентов ОР. Так как эти токи сохраняются, отдельные слагаемые в ОР должны давать нуль при сворачивании с  $q^\mu$ . Таким образом, преобразованное ОР принимает вид:

$$\begin{aligned} -e^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} J^\mu(x) J^\nu(0) = \\ = -ie^2 (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) [c^1(q^2) \cdot 1 + c^{\bar{q}q}(q^2) \cdot m\bar{q}q + c^{F^2}(q^2) \cdot (F_{\alpha\beta}^a)^2 + \dots], \end{aligned} \quad (18.91)$$

где  $c^i$  — лоренц-инвариантные  $s$ -числовые функции  $q^2$ , и для удобства в начале второй строки введена  $i$ . Из анализа размерностей находим:

$$c^1 \sim (q^2)^0, \quad c^{\bar{q}q} \sim (q^2)^{-2}, \quad c^{F^2} \sim (q^2)^{-2}, \quad (18.92)$$

слагаемые высших порядков менее важны для больших  $q$ .

Коэффициенты ОР  $c^i(q^2)$  могут быть вычислены из фейнмановских диаграмм. Как показано на рис. 18.5, коэффициент при операторе 1 является суммой диаграмм со вставками токов и без других внешних концов. Ведущая диаграмма КХД является просто диаграммой поляризации вакуума, умноженной на цветовой фактор 3 и на сумму квадратов зарядов кварков. Учитывая эти множители вместе с (7.91), получаем:

$$c^1(q^2) = -\left(3 \sum_f Q_f^2\right) \cdot \frac{\alpha}{3\pi} \ln(-q^2). \quad (18.93)$$

Поправки к этому выражению — порядка  $\alpha_s(q^2)$ . Старшие коэффициенты извлекаются из диаграмм с большим числом внешних концов. Например, коэффициент при  $(F_{\alpha\beta}^a)^2$  определяется из диаграмм с двумя внешними глюонными линиями.

Предполагая, что фурье-преобразование произведения токов может быть вычислено из ОР в области больших времениподобных  $q^2$ , завершим вычисление сечения  $e^+e^- \rightarrow$  адроны, взяв среднее по вакууму от (18.91), выделив мнимую часть коэффициента и подставив результат в (18.84). В результате

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} [\text{Im } c^1(q^2) + \text{Im } c^{\bar{q}q}(q^2) \langle 0 | m\bar{q}q | 0 \rangle + \\ + \text{Im } c^{F^2}(q^2) \langle 0 | (F_{\alpha\beta}^a)^2 | 0 \rangle + \dots]. \end{aligned} \quad (18.94)$$

Первое слагаемое этого ряда — просто результат суммирования пертурбативных КХД диаграмм для полного сечения  $e^+e^-$ . Дополнительные слагаемые, дают поправки к этому выражению, зависящие от мягких адронных матричных элементов, но эти поправки явно подавлены при высоких энергиях множителем  $(q^2)^{-2}$ . (Между прочим, это разложение, столь же хорошо применимое и в отсутствии КХД взаимодействий, объясняет, почему (18.86) не содержит слагаемого порядка  $s^{-2}$  в разложении при больших  $s$ .) Если подставить выражение в старшем порядке (18.93) в (18.94), получим известный ответ:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \sum_f Q_f^2. \quad (18.95)$$

Наш результат (18.94) является обнадеживающим, однако логика, приведшая к нему, неверна. Для вычисления полного сечения  $e^+e^-$  следует вычислить  $\Pi_h(q^2)$  в области больших времениподобных импульсов, где в среднем по вакууму от произведения токов доминируют промежуточные состояния с высокой энергией, включая большое

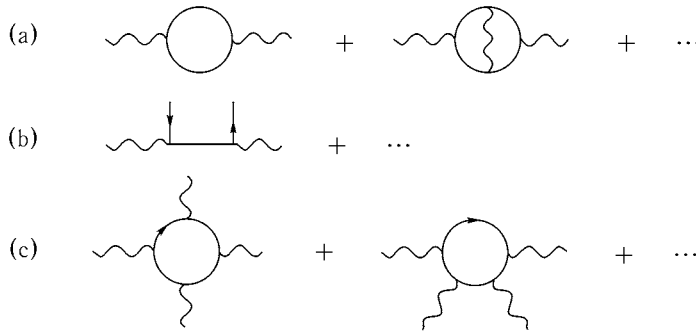


Рис. 18.5. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в коэффициенты операторного разложения произведения токов, для оператора 1 (a);  $\bar{q}q$  (b);  $(F_{\alpha\beta}^a)^2$  (c).

количество физических адронов. Поэтому нам нужно знать  $\Pi_h(q^2)$  в той области, где он не определяется возмущениями кварковых и глюонных полей на малых расстояниях. При вычислении произведения токов из разложения на малых расстояниях кинематика выбирается так, что промежуточные состояния, дающие вклад при вычислении произведения токов, находятся далеко вне массовой поверхности и поэтому не могут далеко распространяться от стремящихся друг к другу точек  $x$  и  $0$ . Это условие выполняется при больших *пространственноподобных* импульсах или, эквивалентно, при малой пространственной раздвижке. На первый взгляд кажется, однако, что вычисление в этой области бесполезно для расчета сечения  $e^+e^-$ .

К счастью, существует замечательный прием для того, чтобы связать значения квантовополевых амплитуд в двух сильно удаленных друг от друга кинематических областях. Этот прием, названный методом *дисперсионных соотношений*, использует общие аналитические свойства амплитуд. Так как (18.88) является фурье-преобразованием двухточечной корреляционной функции, то из анализа в разделе 7.1 следует, что  $\Pi_h(q^2)$  удовлетворяет спектральному представлению Челлена–Лемана. Поэтому  $\Pi_h(q^2)$  является аналитической функцией от  $q^2$  с разрезом вдоль положительной оси  $q^2$ , у которой нет других сингулярностей в комплексной плоскости  $q^2$ . Эта аналитическая структура показана на рис. 18.6. Скачок  $\Pi_h(q^2)$  на разрезе равен  $(2i)$ , умноженному на мнимую часть  $\Pi_h$ , и поэтому прямо связан с полным сечением  $e^+e^-$ -аннигиляции.

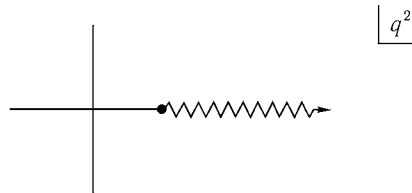


Рис. 18.6. Особенности  $\Pi_h(q^2)$  в комплексной  $q^2$  плоскости.

Учитывая эту дополнительную информацию о  $\Pi_h(q^2)$ , можно рассуждать следующим образом. Пусть  $q^2 = -Q_0^2$  — величина, находящаяся достаточно далеко от пространственноподобной области  $q$ , так что фурье-преобразование токов может быть вычислено из операторного разложения. Рассмотрим интеграл

$$I_n = -4\pi\alpha \oint \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2 + Q_0^2)^{n+1}} \Pi_h(q^2), \tag{18.96}$$



для  $n \geq 1$ , взятый по контуру, окружающему  $q^2 = -Q_0^2$ . При стягивании контура к полюсу находим

$$I_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d(q^2)^n} \Pi_h \Big|_{q^2 = -Q_0^2}, \quad (18.97)$$

что можно рассчитать, вычисляя  $\Pi_h$  из соотношения (18.91):

$$\Pi_h(q^2) = -e^2 [c^1(q^2) + c^{\bar{q}q}(q^2) \langle 0 | m \bar{q} q | 0 \rangle + c^{F^2}(q^2) \langle 0 | (F_{\alpha\beta}^a)^2 | 0 \rangle + \dots]. \quad (18.98)$$

С другой стороны, можно взять интеграл, деформируя контур к виду на рис. 18.7. Поскольку ни один из коэффициентов при  $q^2 \rightarrow \infty$  не растет быстрее, чем  $(q^2)^0$ , умноженное на логарифмы, то при  $n \geq 1$  контуром на бесконечности можно пренебречь. Часть контура вокруг разреза дает:

$$\begin{aligned} I_n &= -4\pi\alpha \int \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2 + Q_0^2)^n} \text{Disc } \Pi_h(q^2) = \\ &= -4\pi\alpha \int \frac{dq^2}{2\pi} \frac{1}{(q^2 + Q_0^2)^{n+1}} \frac{1}{i} 2i \text{Im } \Pi_h(q^2) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{s}{(s + Q_0^2)^{n+1}} \sigma(s). \end{aligned} \quad (18.99)$$

Это интеграл по полному сечению  $e^+e^- \rightarrow$  адроны. Приравняв (18.97) и (18.99), получим ряды интегральных соотношений между коэффициентами ОР, полученными в теории возмущений КХД и наблюдаемым сечением. Эти соотношения, которые были впервые получены Новиковым, Шифманом, Волошиным, Вайнштейном и Захаровым, известны как *правила сумм ИТЭФ\**. Вычисляя правила сумм в ведущем порядке КХД для  $c^1(q^2)$ , находим:

$$\int_0^\infty ds \frac{s}{(s + Q_0^2)^{n+1}} \sigma(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{n(Q_0^2)^n} \sum_f Q_f^2 + \mathcal{O}(\alpha_s(Q_0^2)) + \mathcal{O}((Q_0^2)^{-2}). \quad (18.100)$$

Это соотношение в ведущем порядке согласуется с сечением в низшем порядке в (18.95). Поправки возникают из высших порядков теории возмущений КХД с константой  $\alpha_s$ , взятой на масштабе  $Q_0^2$ , и из высших слагаемых операторного разложения.

Если поправочные слагаемые в (18.100) сходятся к нулю равномерно по  $n$ , можно обратить правила сумм и получить из них результат (18.94). Из-за того, что производные в (18.97) усиливают слагаемые с более сильной зависимостью от  $q^2$ , поправочные слагаемые в правилах сумм ИТЭФ становятся все более важными с ростом  $n$ . Поэтому наиболее существенные отклонения сечения от предсказанного пертурбативной КХД значения — это осцилляции около этого значения, которые усредняются в правилах сумм для небольших  $n$ . Сравнение теории и эксперимента показано на рис. 18.8. При больших  $s$  выражение (18.94) довольно точно. Однако при уменьшении  $s$  осцилляции растут. В конце концов они начинают доминировать в полном сечении, проявляясь как резонансы, отвечающие связанным состояниям кварка и антикварка.

\* Обзор теории этих правил сумм дан в V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin, and V. I. Zakharov. *Phys. Repts.* **41**, 1 (1978).

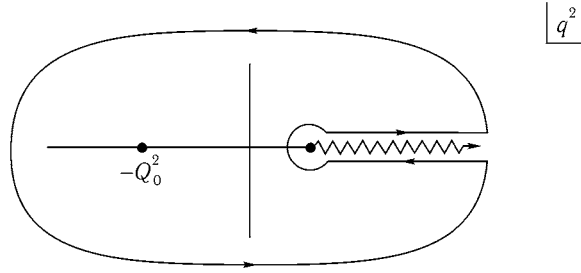


Рис. 18.7. Контур интегрирования, используемый при выводе правил сумм ИТЭФ для  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ .

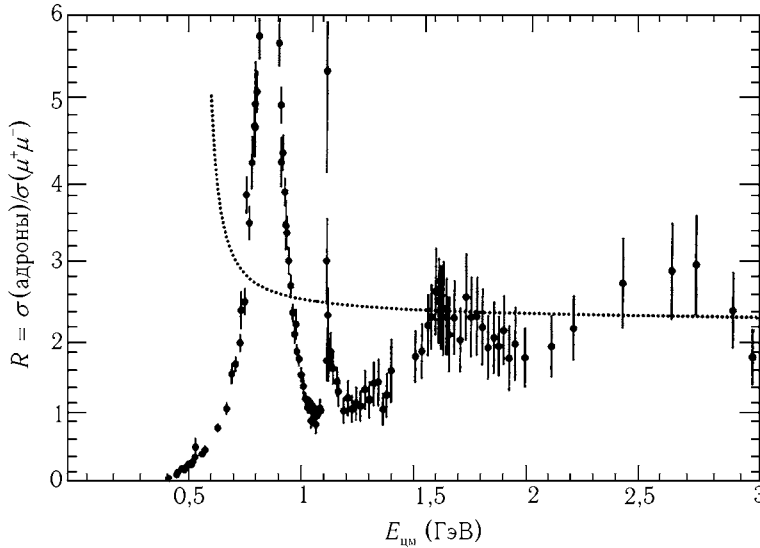


Рис. 18.8. Экспериментальные измерения полного сечения для реакции  $e^+e^- \rightarrow \text{адроны}$  при энергиях ниже 3 ГэВ вместе с предсказанием пертурбативной КХД. Данные взяты из компиляции М. Шварца, *Phys. Rev. D*53, 5268 (1996). Там же приведен полный набор ссылок на разнообразные результаты.

## 18.5. Операторный анализ глубоконеупругого рассеяния

Применим теперь операторное разложение к другому жесткому процессу КХД — глубоконеупругому рассеянию электронов. В гл. 17 мы показали, что предсказания КХД для глубоконеупругого рассеяния точны, но имеют сложную структуру. В первом приближении глубоконеупругое рассеяние описывается партонной моделью, в которой налетающий электрон рассеивается на кварках и антикварках, несущих доли полного импульса протона. Эти доли определяются партонными функциями распределения, связанными с волновой функцией протона и определяющимися мягкой динамикой КХД. Однако, как мы видели в разделе 17.5, эффекты теории возмущений в КХД приводят к изменению партонных распределений как функций переданного импульса  $Q^2$ . Мы покажем сейчас, что многие черты этой картины могут быть воспроизведены с помощью операторного разложения.

В предыдущем разделе мы в три шага вывели соотношения ОР для сечения  $e^+e^-$ -аннигиляции. Во-первых, мы использовали оптическую теорему, чтобы связать это сечение с матричным элементом произведения токов. Во-вторых, мы применили операторное разложение для произведения токов. К сожалению, это разложение может быть использовано только в нефизической кинематической области. Однако на третьем шаге мы использовали метод дисперсионных соотношений, чтобы связать этот нефизический результат с интегралом по искомому сечению. При обсуждении глубоконеупругого сечения сделаем те же три шага. Для получения окончательного результата нам потребуется сделать и четвертый шаг, включающий в себя КХД перенормировку оператора.

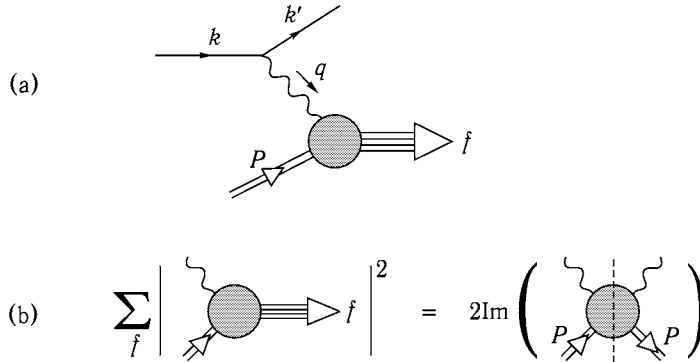


Рис. 18.9. Вычисление сечения глубоконеупругого рассеяния электрона: (а) общая структура амплитуд; (б) применение оптической теоремы.

### Кинематика глубоконеупругого рассеяния

Начнем с общего выражения для сечения глубоконеупругого рассеяния. Матричный элемент глубоконеупругого рассеяния электрона в конечное состояние  $f$  вычисляется согласно рис. 18.9 (а):

$$i\mathcal{M}(ep \rightarrow ef) = (-ie)\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k) \frac{-i}{q^2}(ie) \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle f | J^\mu(x) | P \rangle, \quad (18.101)$$

где  $J^\mu(x)$  — кварковый электромагнитный ток (18.87). Центральным в этом выражении является адронный матричный элемент тока между протоном и некоторым адронным состоянием с высокой энергией. Этот матричный элемент нужно возвести в квадрат и просуммировать по возможным конечным состояниям. Как показано на рис. 18.9 (б) оптическая теорема позволяет связать эту сумму с матричным элементом двух токов по протонным состояниям. Определим величину:

$$W^{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | T \{ J^\mu(x) J^\nu(0) \} | P \rangle, \quad (18.102)$$

усредненную по спину протона. Это выражение известно как *комптоновская амплитуда рассеяния вперед*, так как при вычислении при  $q^2 = 0$  и сворачивании с векторами физической поляризации оно дает амплитуду фотон-протонного рассеяния вперед:

$$i\mathcal{M}(\gamma p \rightarrow \gamma p) = (ie)^2 \varepsilon_\mu^*(q) \varepsilon_\nu(q) (-iW^{\mu\nu}(P, q)). \quad (18.103)$$

Однако в последующем обсуждении нам потребуется выражение (18.102) для произвольных пространственноподобных  $q$  и произвольных состояний поляризации. Оптическая теорема для комптоновского рассеяния на протоне имеет вид:

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(\gamma p \rightarrow \gamma p) = \sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(\gamma p \rightarrow f)|^2. \quad (18.104)$$

Согласно обобщению, данному в (7.49), этот результат распространяется на более общую ситуацию, когда поляризации начального и конечного фотона могут произвольно меняться. Переписывая (18.104) для  $W^{\mu\nu}$ , находим:

$$2 \operatorname{Im} W^{\mu\nu}(P, q) = \sum_f \int d\Pi_f \langle P | J^\mu(-q) | f \rangle \langle f | J^\nu(q) | P \rangle, \quad (18.105)$$

где  $J^\mu(q)$  — фурье-преобразование тока.

Мы теперь можем вычислить глубоконеупругое сечение через  $W^{\mu\nu}$ , используя (18.105) для записи квадрата последнего множителя. Это сечение должно быть усреднено по начальным и просуммировано по конечным спином электрона. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma(ep \rightarrow eX) &= \frac{1}{2s} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k'} e^4 \frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} [\bar{u}(k) \gamma_\mu u(k') \bar{u}(k') \gamma_\nu u(k)] \times \\ &\times \left(\frac{1}{Q^2}\right)^2 \cdot 2 \operatorname{Im} W^{\mu\nu}(P, q). \end{aligned} \quad (18.106)$$

Произведение электронных спиноров равно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} [\bar{u}(k) \gamma_\mu u(k') \bar{u}(k') \gamma_\nu u(k)] &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\not{k} \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu] = \\ &= 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k'). \end{aligned} \quad (18.107)$$

Удобно преобразовать интеграл по конечным импульсам электрона  $k'$  и углу рассеяния  $\theta$  к интегралу по безразмерным переменным  $x$  и  $y$ , введенным в разделе 17.3. Эти переменные выражаются через начальный и конечный импульсы электрона  $k$  и  $k'$  следующим образом:

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{2kk'(1 - \cos \theta)}{2m(k - k')}, \quad y = \frac{2P \cdot q}{2P \cdot k} = \frac{k - k'}{k}. \quad (18.108)$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(k', \cos \theta)} \right| = \frac{2k'}{2m(k - k')} = \frac{2k'}{ys}, \quad (18.109)$$

и поэтому

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k'} = \int \frac{2\pi dk' k' d \cos \theta}{(2\pi)^3 \cdot 2} = \int dx dy \frac{ys}{(4\pi)^2}. \quad (18.110)$$

Используя (18.107) и (18.110) для упрощения (18.106), находим

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(ep \rightarrow eX) = \frac{2\alpha^2 y}{(Q^2)^2} (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k') \text{Im} W^{\mu\nu}(P, q). \quad (18.111)$$

Чтобы продвинуться дальше, нам потребуются какие-то сведения о структуре  $W^{\mu\nu}$ . В предыдущем разделе мы использовали сохранение тока, чтобы записать матричный элемент токов через единственную скалярную функцию  $\Pi_h(q^2)$  как в (18.82). В случае комптоновской амплитуды рассеяния вперед из тождеств Уорда опять следует, что

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0, \quad (18.112)$$

но теперь существуют два тензора, построенные из  $P$  и  $q$  и удовлетворяющие этим ограничениям. Поэтому выражение для комптоновской амплитуды рассеяния вперед включает в себя два скалярных форм-фактора:

$$W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1 + \left(P^\mu - q^\mu \frac{P \cdot q}{q^2}\right) \left(P^\nu - q^\nu \frac{P \cdot q}{q^2}\right) W_2. \quad (18.113)$$

Скалярные функции  $W_1$ ,  $W_2$  зависят от двух инвариантов  $(P \cdot q)$   $q^2$ , или, альтернативно, от  $x$  и  $Q^2$ . Если подставить (18.113) в (18.111) и использовать тот факт, что сворачивание  $q^\mu$  с лептонным тензором дает нуль, то

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy}(ep \rightarrow eX) &= \frac{2\alpha^2 y}{(Q^2)^2} [2k \cdot P k' \cdot P \text{Im} W_2 + 2k \cdot k' \text{Im} W_1] = \\ &= \frac{\alpha^2 y}{Q^4} [s^2(1-y) \text{Im} W_2 + 2xys \text{Im} W_1]. \end{aligned} \quad (18.114)$$

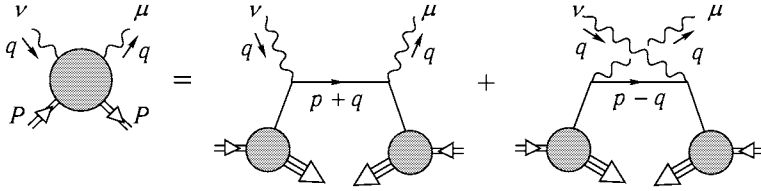
Выражение (18.114) имеет самый общий вид и не зависит от предположений относительно природы сильных взаимодействий. В тоже время это выражение довольно формально. Однако мы легко можем получить представление о связи этой формулы с предыдущим анализом, если вычислим  $W^{\mu\nu}$  в партонной модели и получим партонные выражения для  $W_1$  и  $W_2$ . В партонной модели протонный матричный элемент в (18.102) заменяется на сумму кварковых матричных элементов, взятых с весом, равным партонным функциям распределения. Таким образом,

$$W^{\mu\nu} \approx i \int d^4x e^{iq \cdot x} \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) \cdot \frac{1}{\xi} \langle q_f(p) | T \{ J^\mu(x) J^\nu(0) \} | q_f(p) \rangle \Big|_{p=\xi P}. \quad (18.115)$$

Множитель  $(1/\xi)$  перед матричным элементом дает правильную нормировку протонного состояния в терминах кварковых состояний. Появление этого множителя наиболее просто объяснить, заметив, что кинематический множитель  $(1/2s)$  в (18.106) и в других выражениях, включающих протон в начальном состоянии, под интегралом по  $\xi$  в партонной модели становится равным  $(1/2\xi s)$ .

Вычислим матричный элемент в (18.115), используя невзаимодействующие фермионы. Ему отвечают две диаграммы на рис. 18.10. Вклад первой диаграммы справа на рис. 18.10 равен

$$i \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) \frac{1}{\xi} Q_f^2 \bar{u}(p) \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + \not{q})}{(p+q)^2 + i\epsilon} \gamma^\nu u(p); \quad (18.116)$$

Рис. 18.10. Вычисление  $W^{\mu\nu}$  в партонной модели.

вторая диграмма дает такой же вклад, как и первая, с заменой  $q, \mu$  на  $(-q), \nu$ . Чтобы получить (18.116), усредним по спинам кварков. В результате

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{2} \text{tr}[\not{p}\gamma^\mu(\not{p} + \not{q})\gamma^\nu] \frac{-1}{2p \cdot q + q^2 + i\varepsilon} = \\ & = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) \frac{1}{\xi} \cdot 2(p^\mu(p+q)^\nu + p^\nu(p+q)^\mu - g^{\mu\nu}p \cdot (p+q)) \times \\ & \quad \times \frac{-1}{2\xi P \cdot q - Q^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (18.117)$$

Мнимая часть этого выражения, которая нам нужна для вычисления (18.114), возникает из последнего слагаемого в (18.117):

$$\text{Im}\left(\frac{-1}{2\xi P \cdot q - Q^2 + i\varepsilon}\right) = \pi\delta(2\xi P \cdot q - Q^2) = \frac{\pi}{ys}\delta(\xi - x). \quad (18.118)$$

Во второй диаграмме на рис. 18.10 два слагаемых в знаменателе имеют относительный знак  $+$ , поэтому у вклада этой диаграммы нет мнимой части в физической области глубоконеупругого рассеяния. Так мы находим, что в партонной модели:

$$\text{Im} W^{\mu\nu} = \sum Q_f^2 f_f(x) \frac{1}{x} \frac{\pi}{ys} (4x^2 P^\mu P^\nu + 2x(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu) - g^{\mu\nu} xys). \quad (18.119)$$

Добавляя и вычитая слагаемые, пропорциональные  $q^\mu q^\nu$ , можно показать, что это выражение имеет вид (18.113), где

$$\text{Im} W_1 = \pi \sum_f Q_f^2 f_f(x), \quad \text{Im} W_2 = \frac{4\pi}{ys} \sum_f Q_f^2 x f_f(x). \quad (18.120)$$

В партонной модели выражения для  $W_1$  и  $W_2$  удовлетворяют соотношению:

$$\text{Im} W_1 = \frac{ys}{4x} \text{Im} W_2. \quad (18.121)$$

Это другая форма соотношения Каллана–Гросса, так как подстановка (18.121) в (18.114) дает:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(ep \rightarrow eX) = \frac{\alpha^2 ys^2}{2Q^4} [1 + (1-y)^2] \text{Im} W_2, \quad (18.122)$$

где зависимость от  $y$ , как и в (17.125), характерна для свободных фермионов. Наконец, подставляя (18.120) для мнимой части  $W_2$ , мы в точности воспроизводим это выражение партонной модели:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(ep \rightarrow eX) = \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4} \left( \sum_f Q_f^2 x f_f(x) \right) [1 + (1-y)^2]. \quad (18.123)$$

Полученная формула будет отправной точкой для сравнения с более общими выражениями, которые мы выведем ниже.

### Операторное разложение

Так как комptonовская амплитуда рассеяния вперед является матричным элементом произведения токов, альтернативной стратегией для вычисления  $W^{\mu\nu}$  является разложение этого произведения в ряд по локальным операторам. Так же, как и в партонной модели, этот метод использует асимптотическую свободу. Однако в этом случае это предположение используется более непосредственно. Коэффициенты операторного разложения будут явно вычисляться на малых расстояниях порядка  $1/Q$ , поэтому мы можем рассчитать эти коэффициенты по теории возмущений с константой взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$ .

В предыдущем разделе мы вычисляли коэффициенты операторов, которые вносят вклад в вакуумное среднее от произведения токов, спаривая разными способами кварковые поля в произведении. Здесь мы должны отметить, что оператор 1 не дает вклада в амплитуду комptonовского рассеяния. Главный вклад дают операторы, рождающие и уничтожающие кварки в волновой функции протона.

Наиболее важные слагаемые в операторном произведении двух токов  $J^\mu$  возникают из произведения двух кварковых токов  $\bar{q}_f \gamma^\mu q_f$  с кварками одного аромата. Поэтому начнем с изучения ОР отдельных кварковых токов. В нулевом порядке по  $\alpha_s$  главные слагаемые операторного произведения кварковых токов имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{q}\gamma^\mu q(x) \bar{q}\gamma^\nu q(0) &= \\ &= \bar{q}(x)\gamma^\mu \overline{q(x)}\bar{q}(0)\gamma^\nu q(0) + \overline{q(x)\gamma^\mu q(x)}\bar{q}(0)\gamma^\nu q(0) + \dots, \end{aligned} \quad (18.124)$$

где свертки должны пониматься как фейнмановские пропагаторы кварковых полей. Слагаемые с явными свертками сингулярны при  $x \rightarrow 0$ ; оставшиеся слагаемые не сингулярны и поэтому менее важны в пределе малых расстояний. В операторном разложении токов с кварками разных ароматов нет соответствующих сингулярных слагаемых. Ниже мы приведем аргументы в пользу того, что этот вывод верен не только в ведущем порядке по  $\alpha_s$ .

Чтобы получить  $W^{\mu\nu}$ , следует сделать фурье-преобразование (18.124) как в (18.102). При этом мы будем помнить что пропагаторы несут не только импульс  $q$  от фурье-преобразования, но и произвольный импульс кварковых полей. Чтобы учесть этот факт, удобно представить

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \bar{q}(x)\gamma^\mu \overline{q(x)}\bar{q}(0)\gamma^\nu q(0) = \bar{q}\gamma^\mu \frac{i(i\not{\partial} + \not{q})}{(i\partial + q)^2} \gamma^\nu q(0), \quad (18.125)$$

где производные  $\partial$  действуют на кварковые поля справа. Аналогично, второе спаривание в (18.124) отвечает второй диаграмме на рис. 18.10. В пределе малых расстояний

импульс  $q$  должен быть больше любого внешнего импульса кварковых полей. Поэтому следует сделать разложение

$$\frac{1}{(i\partial + q)^2} = \frac{-1}{Q^2 - 2iq \cdot \partial + \partial^2} = \frac{-1}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2iq \cdot \partial - \partial^2}{Q^2} \right)^n. \quad (18.126)$$

Ниже мы покажем, что слагаемые с  $\partial^2$  в числителе не важны и могут быть опущены, Однако необходимо удержать все степени отношения  $(2iq \cdot \partial / Q^2)$ . Из-за  $Q^2$  в знаменателе это отношение формально подавлено в пределе малых расстояний. Однако в партонной модели

$$\frac{2iq \cdot \partial}{Q^2} \rightarrow \frac{2q \cdot \xi P}{Q^2} = 1, \quad (18.127)$$

поэтому оказывается, что все эти слагаемые должны быть одинаково важны. Сейчас мы увидим, как работает это условие.

Последним шагом в приведении операторного произведения (18.124) к удобной форме является упрощение произведения матриц Дирака. Из (18.113) мы знаем, что после усреднения по протонному спину  $W^{\mu\nu}$  будет симметричной при перестановке  $\mu$  и  $\nu$ . Поэтому допустимо симметризовать операторное разложение. Можно свести произведение трех дираковских матриц к одной, используя тождество:

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu) = g^{\mu\alpha} \gamma^\nu + \gamma^\mu g^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} \gamma^\alpha, \quad (18.128)$$

которое легко доказывается с помощью антикоммутиационных соотношений. Используя (18.126) и (18.128), можно переписать (18.125) как

$$-i\bar{q}(\gamma^\mu(i\partial^\nu) + \gamma^\nu(i\partial^\mu) - ig^{\mu\nu}\not{\partial} + \gamma^\mu q^\nu + \gamma^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}\not{q}) \frac{1}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2iq \cdot \partial}{Q^2} \right)^n q. \quad (18.129)$$

Можно устранить слагаемые  $(i\not{\partial})q$ , которые обращаются в нуль в ведущем порядке по  $\alpha_s$ , потому что кварковые поля удовлетворяют уравнению Дирака. При вычислении  $W_1$  и  $W_2$ , также можно опустить слагаемые, явно содержащие множители  $q^\mu$ , так как зависимость от них была выделена в общем виде в (18.113). В результате (18.125) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{iq \cdot x} \bar{q}(x) \gamma^\mu q(x) q(0) \gamma^\nu q(0) \\ &= -i\bar{q}(2\gamma^\mu(i\partial^\nu) - g^{\mu\nu}\not{q}) \frac{1}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2iq \cdot \partial}{Q^2} \right)^n q, \end{aligned} \quad (18.130)$$

симметризованный относительно  $\mu \leftrightarrow \nu$ .

Второе слагаемое в (18.124) отличается от первого перестановкой точек  $x$  и  $0$  и индексов  $\mu$  и  $\nu$ . Его фурье-преобразование дается формулой (18.130) с заменой  $q \rightarrow -q$ . Полное операторное произведение содержит поэтому только слагаемые, четные по  $q$ . Все оставшиеся вклады от сингулярных слагаемых операторного произведения содержат оператор

$$\bar{q} \gamma^{\mu_1} (i\partial^{\mu_2}) \cdots (i\partial^{\mu_k}) q, \quad (18.131)$$



с четным числом индексов, которые либо совпадают с индексами  $\mu$  или  $\nu$ , либо свернуты со степенями  $q$ . Чтобы написать соответствующие слагаемые операторного разложения, следует модифицировать этот оператор в двух отношениях. Во-первых, поскольку оператор в (18.131) имеет  $n$  векторных индексов, он содержит компоненты, которые преобразуются по разным неприводимым представлениям группы Лоренца. У каждой компоненты при перенормировке возникает изменение масштаба. Однако ниже мы увидим, что для анализа важна компонента (18.131) с наибольшим значением спина. Эта компонента получается полной симметризацией по индексам  $\mu_1, \dots, \mu_n$  и вычитанием затем слагаемых, пропорциональных  $g^{\mu_i \mu_j}$  так, что оператор становится бесследовым по всем парам индексов. Мы будем сохранять только эту компоненту в операторном разложении токов. Во-вторых, оператор (18.131) не имеет простого закона преобразования при калибровочных преобразованиях. Поскольку исходные токи  $J^\mu$  были инвариантны относительно цветowych калибровочных преобразований, операторное произведение двух токов должно быть суммой калибровочно-инвариантных операторов. Мы можем сделать (18.131) калибровочно-инвариантным, заменив каждый множитель  $(i\partial^\mu)$  на ковариантную производную  $(iD^\mu)$ . Эта замена добавляет только слагаемые, пропорциональные константе сильного взаимодействия  $g$ , и не оказывает влияния на вывод коэффициентов операторного разложения.

Принимая во внимание эти изменения, определим оператор спина с  $n$  кварками аромата  $f$  следующим образом

$$\mathcal{O}_f^{(n)\mu_1 \dots \mu_n} = \bar{q}_f \gamma^{\{\mu_1} (iD^{\mu_2}) \dots (iD^{\mu_n}) q_f - \text{следы}, \quad (18.132)$$

с симметризованными индексами и с соответствующими вычитаниями. Мы можем использовать эти операторы, чтобы написать окончательное выражение для наиболее сингулярной части операторного разложения двух токов  $J^\mu$ . Главные слагаемые этого операторного произведения появляются из (18.130) с соответствующей сверткой с  $q \leftrightarrow -q$ . Выделяя из этих выражений части, содержащие операторы с наивысшим спином (18.132), находим:

$$\begin{aligned} i \int d^4x e^{iq \cdot x} J^\mu(x) J^\nu(0) = \\ = \sum_f Q_f^2 \left[ 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2q^{\mu_1}) \dots (2q^{\mu_{n-2}})}{(Q^2)^{n-1}} \mathcal{O}_f^{(n)\mu\nu\mu_1 \dots \mu_{n-2}} - \right. \\ \left. - g^{\mu\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2q^{\mu_1}) \dots (2q^{\mu_n})}{(Q^2)^n} \mathcal{O}_f^{(n)\mu_1 \dots \mu_n} \right] + \dots, \quad (18.133) \end{aligned}$$

где суммирование ведется только по четным  $n$ .

Выражение (18.133) было получено в ведущем порядке по  $\alpha_s$ . Диаграммы Фейнмана высших порядков дадут поправки порядка  $\alpha_s(Q^2)$  к коэффициентным функциям. Эти поправки будут важны только при умножении на большие логарифмы. При выборе точки нормировки операторов  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  в правой стороны равенства на масштабе  $Q$  не возникает большого отношения импульсов, способного усилить КХД поправки к коэффициентным функциям. Большие логарифмические поправки могут все же появиться на последующих этапах при вычислении матричных элементов операторов  $\mathcal{O}_f^{(n)}$ .

Из разложения (18.133) можно непосредственно вычислить разложение  $W^{\mu\nu}$ , взяв среднее значение по протонному состоянию. Для проведения этого вычисления нам нужно знать матричные элементы операторов  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  по протонным состояниям. Заметим что эти матричные элементы не могут зависеть от направления импульса, так как

эта зависимость была выделена в коэффициентные функции. Это означает, что только импульс протона  $P^\mu$  может нести векторный индекс в матричном элементе. Мы можем, таким образом, написать усредненный по спинам матричный элемент в виде:

$$\langle P | \mathcal{O}_f^{(n)\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle = A_f^n \cdot 2P^{\mu_1} \dots P^{\mu_n} - \text{следы.} \quad (18.134)$$

Коэффициенты  $A_f^n$  безразмерны. Они не являются просто числами, т. к. зависят от точки нормировки операторов, но в следующих нескольких разделах мы будем рассматривать их как константы.

В случае  $n = 1$  операторы  $\mathcal{O}_f^{(1)}$  сводятся к токам кварковых ароматов  $\bar{q}\gamma^\mu q$ ; в этом случае нормировка операторов не зависит от масштаба и коэффициенты  $A_f^1$  действительно постоянны. Из общего анализа форм-факторов в разделе 6.2 мы знаем, что протонный матричный элемент сохраняющегося тока с данным ароматом при нулевом переданном импульсе равен

$$\langle P | \bar{q}_f \gamma^\mu q_f | P \rangle = \bar{u}(P) \gamma^\mu u(P) F_{f1}(0), \quad (18.135)$$

где  $F_{f1}(0)$  равно значению соответствующего сохраняющегося заряда в протоне. Для кварковых токов этот заряд есть просто число кварков (минус антикварков) аромата  $f$  в состоянии  $|P\rangle$ , которое мы назовем  $N_f$ . Усредняя (18.135) по спину протона, находим

$$\langle P | \bar{q}_f \gamma^\mu q_f | P \rangle = 2P^\mu \cdot N_f. \quad (18.136)$$

Таким образом, для  $n = 1$

$$A_f^1 = N_f = \begin{cases} 2 & f = u, \\ 1 & f = d. \end{cases} \quad (18.137)$$

Аналогично,  $\mathcal{O}_f^{(2)}$  является вкладом кварка с ароматом  $f$  в тензор энергии-импульса КХД:

$$(T^{\mu\nu})_f = \bar{q}_f \gamma^{\{\mu} (iD^{\nu\})} q_f. \quad (18.138)$$

Следовательно,  $A_f^2$  есть доля полной величины энергии-импульса протока, которая переносится кварком аромата  $f$ . При вычислении разложения для  $W^{\mu\nu}$  мы используем (18.133) и выражение (18.134) для матричных элементов и находим, что

$$W^{\mu\nu} = \sum_f Q_f^2 \left[ 8 \sum_n P^\mu P^\nu \frac{(2q \cdot P)^{n-2}}{(Q^2)^{n-1}} A_f^n - 2g^{\mu\nu} \sum_n \frac{(2q \cdot P)^n}{(Q^2)^n} A_f^n \right] + \dots, \quad (18.139)$$

где суммирование по  $n$  ведется по четным целым числам от 2 до бесконечности. Кроме поправок к ОР, опущенных в (18.133), мы также пренебрегли вкладами от слагаемых со следами в (18.134). Это вполне допустимо: в каждом из этих слагаемых два импульса протона  $P^\alpha P^\beta$  заменяются на  $g^{\alpha\beta} m_p^2$ , где  $m_p^2 = P^2$  - масса протона. При сворачивании индексов со степенями  $q$ , получаем слагаемые порядка

$$m_p^2 Q^2 \ll (2q \cdot P)^2. \quad (18.140)$$

Так как величина  $(Q^2/2P \cdot q) = x$  фиксирована в глубоко неупругом рассеянии при больших  $Q^2$ , вклад слагаемых со следами подавлен множителем  $m_p^2/Q^2$ , умноженным на степени  $x$ .

В общем случае оператор размерности  $d$  имеет коэффициент в операторном разложении токов с размерностью (масса) $^{6-d}$ ; при фурье-преобразовании ОР этот коэффициент будет включать подавляющий множитель

$$\left(\frac{1}{Q}\right)^{d-2}. \quad (18.141)$$

Однако, если оператор имеет спин  $s$ , матричный элемент оператора даст  $s$  множителей типа вектора  $P^\mu$ , так что в кинематической области глубоконеупругого рассеяния его вклад будет порядка

$$\left(\frac{2P \cdot q}{Q^2}\right)^s \left(\frac{1}{Q}\right)^{d-s-2}. \quad (18.142)$$

Таким образом, относительная величина вкладов от ОР в глубоко неупругое рассеяние контролируется не размерностью оператора, а *твистом*, определенным как

$$t = d - s. \quad (18.143)$$

При выделении главных слагаемых в операторном разложении токов мы последовательно удерживали вклад ведущего спина для каждой размерности или для каждой степени  $Q^{-1}$  в коэффициенте. Все операторы  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  имеют твист  $t = 2$ , что является наименьшим возможным значением для КХД-операторов, отличных от оператора 1.

В операторном произведении двух токов с разными ароматами, например,  $\bar{u}\gamma^\mu u$  и  $\bar{d}\gamma^\nu d$ , главные слагаемые в ОР имеют кварковую структуру  $(\bar{u}\Gamma u \bar{d}\Gamma d)$  и, следовательно, твист  $t \geq 4$ . Поэтому во всех порядках по  $\alpha_s$  перекрестные слагаемые в операторном разложении токов  $J^\mu$  подавлены по крайней мере фактором  $(1/Q^2)$  относительно главных по твисту слагаемых из (18.133). Если пренебречь этими подавленными слагаемыми, выражение для  $W^{\mu\nu}$  разделяется во всех порядках на сумму вкладов:

$$W^{\mu\nu} = \sum_f Q_f^2 W_f^{\mu\nu}, \quad (18.144)$$

где  $W_f^{\mu\nu}$  — матричный элемент двух кварковых токов данного аромата  $\bar{q}_f \gamma^\mu q_f$ .

Из (18.139) можно извлечь следующие выражения для  $W_1$  and  $W_2$ :

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_f Q_f^2 \sum_n 2 \frac{(2q \cdot P)^n}{(Q^2)^n} A_f^n, \\ W_2 &= \sum_f Q_f^2 \sum_n \frac{8}{Q^2} \frac{(2q \cdot P)^{n-2}}{(Q^2)^{n-2}} A_f^n, \end{aligned} \quad (18.145)$$

где суммирование по  $n$  в каждой строке ведется по четным целым числам от 2 до бесконечности. Как и (18.139), эти выражения явно раскладываются по аналогии с (18.144). Заслуживает внимания тот факт, что ряды (18.145) удовлетворяют соотношению Каллана–Гросса в форме (18.121) без дальнейшего привлечения партонной модели. Однако это соотношение получает поправку в порядке  $\alpha_s$  благодаря вкладам следующих порядков в операторное разложение.

Из-за того, что главные вклады в глубоконеупругие форм-факторы могут быть записаны как суммы по кварковым ароматам, заманчиво обратить логику уравнений (18.120) и использовать их для определения функций распределения партонных.

В частности, определим

$$xf^+_f(x, Q^2) = \frac{ys}{4\pi} \text{Im } W_{2f}(x, Q^2), \quad (18.146)$$

где  $W_{2f}$  — второй форм-фактор  $W_f^{\mu\nu}$ , определенный в (18.144), где мы пренебрегли слагаемыми, подавленными степенями  $Q^2$ . В партонной модели

$$f^+_f(x) = f_f(x) + f_{\bar{f}}(x). \quad (18.147)$$

Из (18.123) и из определения (18.146) известно что  $f^+_f(x)$  правильным образом входит в формулу для сечения глубоконеупругого рассеяния. Однако функции распределения партонов имеют другие важные свойства, включая условия нормировки (17.36) и (17.39) и эволюцию по  $Q^2$ , обсуждавшуюся в разделе 17.6. Мы должны теперь понять, можно ли получить эти свойства из (18.146), используя операторное разложение.

### Дисперсионный интеграл

Анализ операторного произведения привел к явным выражениям для  $W_1$  и  $W_2$  в виде рядов по обратным степеням  $Q^2$ . В последующем обсуждении сосредоточимся на анализе  $W_2$ . Мы должны исследовать связь между его разложением в ряд и наблюдаемым сечением глубоко неупругого рассеяния. Как и при обсуждении в разделе 18.4, ОР естественно происходит в нефизической кинематической области. Чтобы совершить операторное разложение, нужно рассматривать  $Q^2$  больше, чем любого другого кинематического инварианта. Однако, в физической области глубоко неупругого рассеяния  $2P \cdot q \geq Q^2$ . Нужна формула, которая свяжет эти две различные области.

Чтобы сформулировать эту задачу более точно, определим

$$\nu = 2P \cdot q = ys; \quad (18.148)$$

в системе отсчета, где протон покоится:  $\nu = 2m_p q^0$ . Форм-фактор  $W_2$  может рассматриваться как функция  $\nu$  и  $Q^2$ . Тогда при фиксированном  $Q^2$ , ОР дает разложение в ряд в окрестности точки  $\nu = 0$ , в то время как физической областью для глубоконеупругого рассеяния является  $\nu \geq Q^2$ . Поскольку эта область связана с физическим процессом рассеяния,  $W_2(\nu, Q^2)$  как аналитическая функция от  $\nu$  при фиксированном  $Q^2$  в этой области должна иметь разрез вдоль действительной оси  $\nu$ . Скачок на этом разрезе будет равен мнимой части  $W_2$ , умноженной на  $(2i)$ ; она появляется в (18.123) для сечения глубоконеупругого рассеяния. Так как выражение (18.102) симметрично относительно замены  $(q, \mu)$  и  $(-q, \nu)$ ,  $W_2$  должна удовлетворять условию:

$$W_2(-\nu, Q^2) = W_2(\nu, Q^2). \quad (18.149)$$

Поэтому  $W_2$  должна иметь разрез вдоль действительной оси от  $\nu = -Q^2$  до  $-\infty$ . Скачок на этом разрезе определяет сечение процесса в  $u$ -канале, в котором положительная энергия вносится вторым током и уносится первым. Так как  $q^2 = -Q^2 < 0$ , физический процесс в  $t$ -канале невозможен; поэтому  $W_2$  не имеет других особенностей в комплексной плоскости  $\nu$ . Аналитическая структура  $W_2(\nu, Q^2)$  показана на рис. 18.11.

Рассмотрим теперь контурный интеграл

$$I_n = \int \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{1}{\nu^{n-1}} W_2(\nu, Q^2) \quad (18.150)$$

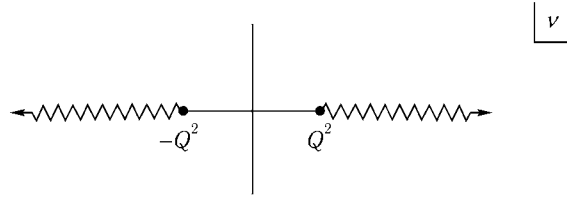


Рис. 18.11. Аналитические особенности  $W_2(\nu, Q^2)$  в комплексной  $\nu$  плоскости при фиксированных  $Q^2$ .

для четных  $n$ , взятый по малой окружности вокруг начала координат. Этот интеграл выделяет коэффициент при  $\nu^{n-2}$  из ряда для  $W_2$ . Формула ОР (18.145) дает главный вклад в этот коэффициент для больших  $Q^2$ :

$$I_n = \sum_f Q_f^2 \frac{8}{(Q^2)^{n-1}} A_f^n. \tag{18.151}$$

Из вычисления коэффициентных функций ОР следует, что поправки к этой формуле порядка  $\alpha_s(Q^2)$ .

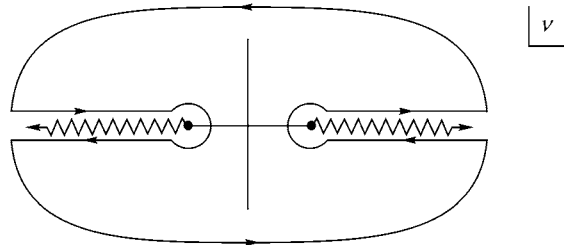


Рис. 18.12. Контур интегрирования, возникающий при выводе моментов правил сумм для  $W_2$ .

С другой стороны, мы также можем деформировать контур, как показано на рис. 18.12, и свести вычисление к интегралу по скачкам  $W_2$ . Из соотношений (18.149) два разреза дают одинаковые вклады. Таким образом,

$$I_n = 2 \int_{Q^2}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi i} \frac{1}{\nu^{n-1}} (2i) \text{Im } W_2(\nu, Q^2). \tag{18.152}$$

Перейдем теперь к новой переменной  $x = Q^2/\nu$ . Интеграл станет равным

$$I_n = \frac{8}{(Q^2)^{n-1}} \int_0^1 dx x^{n-2} \frac{\nu}{4\pi} \text{Im } W_2. \tag{18.153}$$

После того как мы приравняем (18.151) и (18.153) и, используя (18.146), свяжем  $\text{Im } W_2$  с партонными распределениями  $f^+_f(x)$ , полученное соотношение распадется на ряд правил сумм

$$\int_0^1 dx x^{n-1} f^+_f(x, Q^2) = A_f^n \tag{18.154}$$

для четных  $n$ . Эти соотношения известны как *правила сумм для моментов* глубоконеупругих форм-факторов. Они связывают моменты по  $x$  функций распределения партонов, определенных в (18.146), с протонными матричными элементами операторов твиста 2.

Поскольку  $W_2$  является симметричной функцией, правила сумм для моментов применимы только для четных  $n$ . Однако при глубоконеупругом рассеянии нейтрино возникает третий форм-фактор в  $W^{\mu\nu}$ , связанный с интерференцией векторного и аксиального токов слабого взаимодействия. В задаче 18.2 мы покажем, что этот форм-фактор может быть использован при выводе правил сумм для нечетных  $n$ :

$$\int_0^1 dx x^{n-1} f^-_f(x, Q^2) = A_f^n, \quad (18.155)$$

где  $A_f^n$  — коэффициент протонного матричного элемента (18.134) для нечетных  $n$ , а  $f^-_f(x)$  — форм-фактор, который в партонной модели сводится к

$$f^-_f(x) = f_f(x) - f_{\bar{f}}(x). \quad (18.156)$$

Комбинируя сведения с теми рассуждениями, которые были приведены после (18.136), можно увидеть, что определение функции распределения партонов из форм-факторов глубоконеупругого рассеяния имеет правильную нормировку. Используя (18.137), находим:

$$\int_0^1 dx f^-(x) = N_f, \quad (18.157)$$

т. е. полное число кварков с ароматом  $f$  в протоне. Аналогично, из (18.154) и (18.138) следует, что

$$\int_0^1 dx x f^+(x) = \langle x \rangle_f, \quad (18.158)$$

где  $\langle x \rangle_f$  есть доля полного 4-импульса протона, переносимая кварками и антикварками с ароматом  $f$ .

### Изменение масштаба операторов

Если коэффициенты  $A_f^n$  действительно являются константами, соотношения (18.154) и (18.155) должны быть согласованы с функциями распределения партонов, удовлетворяющими бьеркеновскому скейлингу. Однако, как мы заметили после формулы (18.134), эти факторы в действительности зависят от величины  $Q^2$ , т. к. она является точкой нормировки операторов в операторном разложении (18.133). Эта зависимость входит только через изменение масштаба операторов и содержит только логарифмы  $Q^2$ , поэтому она приводит лишь к слабому нарушению бьеркеновского скейлинга. Можно получить зависимость от  $Q^2$  функции распределения партонов, просуммировав ведущие логарифмические поправки к матричным элементам операторов с твистом 2.

Для вычисления этих поправок предположим (ошибочно, как мы увидим ниже), что операторы твиста 2 перенормируются без смешивания. Тогда ведущие логарифмические поправки к матричному элементу оператора  $O_f^{(n)}$  будут просуммированы в

результате замены операторов, нормированных в точке  $Q$ , на операторы, нормированные в точке  $\mu$  порядка 1ГэВ. Соотношение между этими двумя условиями нормировки имеет вид:

$$[\mathcal{O}_f^{(n)}]_Q = \left( \frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right)^{a_f^n/2b_0} [\mathcal{O}_f^{(n)}]_\mu, \quad (18.159)$$

где  $a_f^n$  — первый коэффициент  $\gamma$ -функции оператора  $\mathcal{O}_f^{(n)}$ . Тогда множители  $A_f^n$  будут зависеть от  $Q^2$  как

$$A_f^n(Q^2) = \left( \frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right)^{a_f^n/2b_0} A_f^n(\mu^2). \quad (18.160)$$

Это уравнение согласуется с масштабной зависимостью коэффициентов операторного произведения в (18.76) для частного случая операторного произведения токов, когда  $a_1 = a_2 = 0$ . Чтобы найти явный вид нормировочного фактора, нужно вычислить  $a_f^n$ .

Для вычисления  $\gamma$ -функций кварковых операторов твиста 2 мы должны вычислить контрчлены для перенормировки операторов. Они определяются из диаграмм на рис. 18.13. Достаточно вычислить эти диаграммы с внешним импульсом  $p$ , текущем по кварковой линии и нулевым внешним импульсом, входящим в оператор. При этих условиях матричный элемент оператора  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  равен:

$$\begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ p \end{array} = \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n}. \quad (18.161)$$

Здесь и далее мы будем считать, что матричные элементы  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  симметризованы по всем  $n$  индексам и из них уже вычтены все возможные следы. Теперь нужно вычислить диаграммы на рис. 18.13 и собрать все слагаемые, которые перенормируют эту структуру.

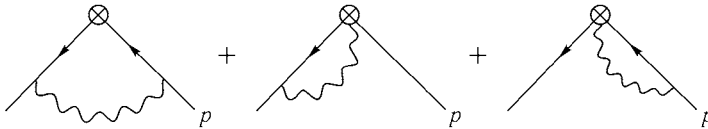


Рис. 18.13. Диаграммы, дающие вклад в аномальную размерность кварковых операторов твиста 2.

Вклад первой диаграммы на рис. 18.13 довольно легко вычислить:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \otimes \\ \diagup \quad \diagdown \\ k \end{array} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig)^2 \gamma^\lambda t^a \frac{i \not{k}}{k^2} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_n} \frac{i \not{k}}{k^2} \gamma^\lambda t^a \frac{-i}{(k-p)^2} = \\ &= -ig^2 C_2(r) \cdot (-2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2 (k-p)^2} \not{k} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_n} \not{k}. \end{aligned} \quad (18.162)$$

Перепишем знаменатели, используя равенство (6.40):

$$\frac{1}{(k^2)^2 (k-p)^2} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{(k^2 - \Delta)^3}; \quad (18.163)$$

Справа в знаменателе стоят  $\mathbf{k} = k - xp$  и  $\Delta = -x(1-x)p^2$ . Мы должны теперь совершить сдвиг в интеграле, сделать замену  $k = \mathbf{k} + xp$  в числителе и выделить слагаемое, пропорциональное  $(n-1)$  степени  $p$ . Если это слагаемое содержит множитель  $g^{\mu_i \mu_j}$ , его можно опустить, так как он дает вклад в коэффициент при операторе старшего твиста, и в любом случае выпадает при вычитании следов. Таким образом, нужно тщательно выбрать, какие два множителя  $k$  заменятся на  $\mathbf{k}$ , когда другие заменяются на  $(xp)$ . Следующие структуры, которые упрощены с использованием вращательной симметрии интеграла по  $\mathbf{k}$  не дают нужного вклада:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{\mu_i} \mathbf{k}^{\mu_j} &= \frac{1}{4} \mathbf{k}^2 g^{\mu_i \mu_j}, \\ \not{k} \gamma^{\mu_1} \mathbf{k}^{\mu_j} &\rightarrow \frac{1}{4} \mathbf{k}^2 \gamma^{\mu_j} \gamma^{\mu_1} = \frac{1}{4} \mathbf{k}^2 g^{\mu_1 \mu_j}. \end{aligned} \quad (18.164)$$

Во второй строке мы использовали симметрию относительно  $\mu_1 \leftrightarrow \mu_j$ . Единственная оставшаяся структура имеет вид:

$$\not{k} \gamma^{\mu_1} \not{k} \rightarrow \frac{1}{4} \mathbf{k}^2 \gamma^\nu \gamma^{\mu_1} \gamma_\nu = -\frac{1}{2} \mathbf{k}^2 \gamma^{\mu_1}. \quad (18.165)$$

Таким образом, (18.162) имеет значение:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= -i g^2 \frac{4}{3} \int_0^1 dx \cdot 2(1-x) \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{\mathbf{k}^2}{(\mathbf{k}^2 - \Delta)^3} \gamma^{\mu_1} (xp^{\mu_2}) \dots (xp^{\mu_n}) = \\ &= -i \frac{8}{3} g^2 \int_0^1 dx (1-x) x^{n-1} \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} = \\ &= \frac{4}{3} \frac{2}{n(n+1)} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n}. \end{aligned} \quad (18.166)$$

Не столь очевидно, что существуют дополнительные вклады в изменение масштаба операторов  $\mathcal{O}_f^{(n)}$ . Заметим, однако, что ковариантные производные в (18.132) явно содержат калибровочное поле

$$iD^{\mu_j} = i\partial^{\mu_j} - gA^{a\mu_j} t^a, \quad (18.167)$$

и эти производные могут быть свернуты с калибровочными вершинами на внешних линиях. Такие вклады возникнут во второй и третьей диаграммах рис. 18.13. Слагаемое, в которых два поля  $A^{a\mu}$  из (18.167) сворачиваются друг с другом, пропорционально  $G^{\mu_i \mu_j}$  и поэтому не дает вклад в перенормировку операторов со старшим твистом.

Вклады, которые мы только что описали, имеют вид суммы по  $j$  следующего интеграла:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig) \gamma_\lambda t^a \frac{i \not{k}}{k^2} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_{j-1}} \times \\ &\quad \times (-gt^a g^{\lambda \mu_j}) p^{\mu_{j+1}} \dots p^{\mu_n} \frac{-i}{(k-p)^2} = \\ &= ig^2 C_2(r) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 (k-p)^2} \gamma^{\mu_j} \not{k} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_{j-1}} p^{\mu_{j+1}} \dots p^{\mu_n}. \end{aligned} \quad (18.168)$$



Так как  $\mu_j$  и  $\mu_1$  входят симметрично, можно использовать (18.128), чтобы переписать

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu_j} \not{k} \gamma^{\mu_1} &\rightarrow k^{\mu_j} \gamma^{\mu_1} + \gamma^{\mu_j} k^{\mu_1} - g^{\mu_j \mu_1} \not{k} \rightarrow \\ &\rightarrow 2\gamma^{\mu_1} k^{\mu_j}, \end{aligned} \quad (18.169)$$

где во второй строке производится симметризация по индексам и вычитание следов. Теперь соберем знаменатели. Чтобы получить слагаемое с  $(n-1)$  множителями  $p$ , следует заменить каждый множитель  $k$  в числителе (18.168) на  $(xp)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= ig^2 \frac{4}{3} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} 2\gamma^{\mu_1} (xp^{\mu_2}) \dots (xp^{\mu_j}) p^{\mu_{j+1}} \dots p^{\mu_n} = \\ &= ig^2 \frac{8}{3} \int_0^1 dx x^{j-1} \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} = \\ &= -\frac{4}{3} \frac{2}{j} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n}. \end{aligned} \quad (18.170)$$

Этот вклад должен быть просуммирован по  $j$  от 2 до  $n$ . Третья диаграмма на рис. 18.13 вносит такой же вклад. Складывая перенормировочные множители от трех диаграмм на рис. 18.13, мы находим, что перенормировочный контрчлен для оператора  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  равен

$$\delta_f = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \left[ 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right] \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \quad (18.171)$$

Можно получить  $\gamma$ -функцию Каллана–Симанчика, подставляя этот результат и контрчлен перенормировки поля (18.9) в (18.23). Находим:

$$\gamma_f^n = \frac{8}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left[ 1 + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right]. \quad (18.172)$$

Заметим, что это выражение обращается в нуль при  $n = 1$ , поэтому не происходит изменения масштаба  $A_f^1$ , как это требуется (18.157). При  $n > 1$   $\gamma_f^n$  положительна, поэтому коэффициент  $a_f^n$  отрицателен. Это означает, что высшие моменты функций распределений кварков подавляются при больших  $Q^2$ .

### Смешивание операторов

Перенормировка КХД операторов  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  гораздо более сложна из-за того, что КХД содержит дополнительные операторы твиста 2, построенные из глюонных полей. Диаграммы на рис. 18.14 смешивают эти операторы с кварковыми операторами твиста 2.

Для четных  $n$  диаграммы на рис. 18.14 дают матричные элементы операторов  $\mathcal{O}_f^{(n)}$  по глюонным состояниям с импульсом  $p$ . Тензорная структура таких матричных элементов содержит слагаемое

$$g^{\alpha\beta} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n}, \quad (18.173)$$

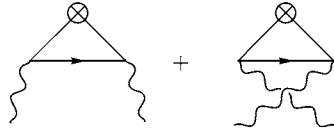


Рис. 18.14. Диаграммы, приводящие к смешиванию операторов твиста 2 и глюонных операторов.

где  $\alpha, \beta$  — индексы поляризации внешнего глюона. Эта структура возникает из оператора

$$\mathcal{O}_g^{(n)\mu_1 \dots \mu_n} = -\frac{1}{2} F^{\{\mu_1 \nu} (iD^{\mu_2}) \dots (iD^{\mu_{n-1}}) F^{\mu_n\}_{\nu}} - \text{следы}, \quad (18.174)$$

симметризованного по  $\mu_1, \dots, \mu_n$  с вычтенными следами. Такие операторы имеют размерность  $(n+2)$  и спин  $n$  и, таким образом, твист 2.

Глюонные операторы (18.174) существенны только для четных  $n$ . С учетом равенства

$$F^{\mu_1 \nu} (iD^{\mu_2}) \dots F^{\mu_n}_{\nu} = i\partial^{\mu_2} (F^{\mu_1 \nu} \dots F^{\mu_n}_{\nu}) - (iD^{\mu_2}) F^{\mu_1 \nu} \dots F^{\mu_n}_{\nu}, \quad (18.175)$$

мы можно перебрасывать ковариантные производные с одного  $F^{\mu\nu}$  на другой, так что

$$\mathcal{O}_g^{(n)} = (-1)^n \mathcal{O}_g^{(n)} + \partial^{\mu_1} (\mathcal{O}'). \quad (18.176)$$

Поэтому для нечетных  $n$  оператор  $\mathcal{O}_g^{(n)}$  является полной производной. Матричные элементы от полной производной пропорциональны входящему в этот оператор импульсу. Поскольку при вычислении протонных матричных элементов операторного разложения токов втекает нулевой импульс, для нечетных  $n$  операторы  $\mathcal{O}_g^{(n)}$  не дают вклада в сечение глубокоэластичного рассеяния.

Однако для четных  $n$  нужно учесть смешивание  $\mathcal{O}_g^{(n)}$  с  $\mathcal{O}_f^{(n)}$ . Вычисление диаграмм на рис. 18.14 совершенно аналогично другим вычислениям перенормировки операторов, проделанным в этой главе, поэтому мы оставляем детали вычисления для задачи 18.3. Мы нашли, что диаграммы на рис. 18.14 содержат структуру, пропорциональную (18.173) с коэффициентом

$$\frac{2(n^2 + n + 2)}{n(n+1)(n+2)} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}). \quad (18.177)$$

Из этого вычисления мы нашли, что перенормированный кварковый оператор твиста 2, нормированный на масштабе  $M$ , выражается через затравочные операторы как

$$[\mathcal{O}_f^{(n)}]_M = (1 + \delta_f) [\mathcal{O}_f^{(n)}]_0 + (\delta_g) [\mathcal{O}_g^{(n)}]_0, \quad (18.178)$$

где  $\delta_f$  дается (18.171) и

$$\delta_g = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{2(n^2 + n + 2)}{n(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}}. \quad (18.179)$$

Это уравнение дает два элемента матрицы аномальных размерностей операторов твиста 2.

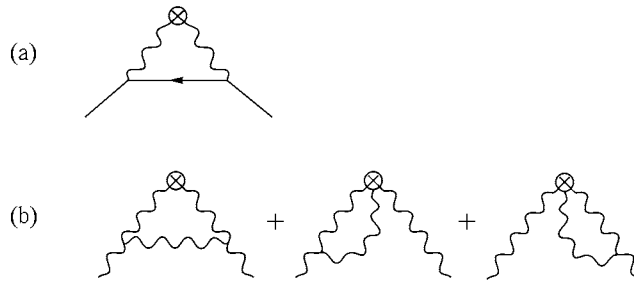


Рис. 18.15. Диаграммы, дающие вклад в перенормировку глюонных операторов твиста 2: (а) — вклады в кварк-глюонное смешивание; (б) — диагональные вклады в перенормировку глюонного оператора.

Оставшиеся элементы  $\gamma$ -матрицы для операторов твиста 2 даются диаграммами рис. 18.15. Диаграмма рис. 18.15(а) определяет смешивание  $\mathcal{O}_g^{(n)}$  и  $\mathcal{O}_f^{(n)}$ . Диаграммы рис. 18.15(б) вместе с контрчленом  $\delta_3$  перенормировки глюонного поля дают диагональные аномальные размерности. Контрчлен  $\delta_3$  явно приведен в калибровке Фейнмана–т Хофта в (16.74). Оставшиеся вычисления аномальной размерности обсуждаются в задаче 18.3. Для описания полной матрицы аномальных размерностей начнем с рассмотрения модели сильных взаимодействий с одним кварковым ароматом. В этом случае есть один оператор твист 2  $\mathcal{O}_f^{(n)}$ , который смешивается с  $\mathcal{O}_g^{(n)}$ . Эти два оператора смешиваются посредством матрицы  $2 \times 2$

$$\gamma^n = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \begin{pmatrix} a_{ff}^n & a_{fg}^n \\ a_{gf}^n & a_{gg}^n \end{pmatrix}, \quad (18.180)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ff}^n &= -\frac{8}{3} \left[ 1 + 4 \sum_2^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right], \\ a_{fg}^n &= 4 \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)}, \\ a_{gf}^n &= \frac{16}{3} \frac{n^2 + n + 2}{n(n^2 - 1)}, \\ a_{gg}^n &= -6 \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{9} n_f + 4 \sum_2^n \frac{1}{j} - \frac{4}{n(n-1)} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} \right]. \end{aligned} \quad (18.181)$$

Заметим, что эта матрица не симметрична. В последней строке  $n_f$  — число кварковых ароматов, в данном случае равное 1. Это слагаемое возникает из (16.74).

В реалистическом случае КХД содержит несколько кварковых ароматов:  $u$ ,  $d$ ,  $s$ , а также  $c$  и  $b$ , если импульсы достаточно велики, чтобы можно было пренебречь массами этих частиц. В этом случае матрица аномальных размерностей  $\gamma^n$  имеет размер  $(n_f + 1) \times (n_f + 1)$ . Минор, действующий на кварковые операторы, диагонален, причем все диагональные элементы равны  $a_{ff}^n$  из (18.181). Все кварк-глюонные и глюон-кварковые элементы равны  $a_{fg}^n$  и  $a_{gf}^n$ , соответственно, и не зависят от аромата. Глюонный диагональный элемент равен  $a_{gg}^n$  в (18.181) с реалистическим значением  $n_f$ . Это означает, что глюонный оператор смешивается только с одной линейной комбинацией

кварковых операторов

$$\sum_f \mathcal{O}_f^{(n)}; \quad (18.182)$$

ортогональные линейные комбинации просто перенормируются с показателем экспоненты, равным  $a_{ff}^n$  или (18.172).

Применим теперь этот анализ смешивания операторов к выводу правил сумм для моментов. Для нечетных  $n$  операторного смешивания нет, поэтому зависимость правой части (18.155) от  $Q^2$  правильно воспроизводится простым изменением масштаба (18.160).

Для четных  $n$  нужно учесть смешивание операторов. В правой стороне правил сумм (18.154) стоит протонный матричный элемент от оператора твиста 2, нормированного на масштабе  $Q$ . Запишем произвольную линейную комбинацию этих операторов

$$c_i^n [\mathcal{O}_i^{(n)}]_Q, \quad (18.183)$$

где индекс  $i$  пробегает по значениям  $g$  и по разным ароматам  $f$ . Чтобы изменить точку нормировки этого оператора на  $\mu$ , перепишем коэффициенты в базисе *левых* собственных векторов  $\gamma^n$  и применим масштаб каждого собственного вектора согласно (18.159). Можно формально переписать изменение масштаба через матрицу (18.159) как

$$c_i^n [\mathcal{O}_i^{(n)}]_Q = c_i^n \left\{ \left( \frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right)^{a^n/2b_0} \right\}_{ij} [\mathcal{O}_j^{(n)}]_\mu. \quad (18.184)$$

Это изменение масштаба, действуя вместе с  $c_i^n$ , слева умноженными на матрицу  $(a^n)$ , в точности соответствует требуемому уравнением рецепту (18.79).

Проделаем это явно для случая  $n = 2$ . Правая часть правил сумм для моментов (18.154) дается матричным элементом  $\mathcal{O}_f^{(2)}$ . Перепишем его в виде:

$$\mathcal{O}_f^{(2)} = (\mathcal{O}_f^{(2)} - \frac{1}{n_f} \sum_{f'} \mathcal{O}_{f'}^{(2)}) + \frac{1}{n_f} \sum_{f'} \mathcal{O}_{f'}^{(2)}. \quad (18.185)$$

Первое слагаемое просто изменяет масштаб; второе смешивается с глюонным оператором  $\mathcal{O}_g^{(2)}$ . Матрица аномальных размерностей при действии на  $(\sum_f \mathcal{O}_f, \mathcal{O}_g)$  для  $n = 2$  имеет коэффициенты

$$\begin{pmatrix} a_{ff}^2 & a_{fg}^2 n_f \\ a_{gf}^2 & a_{gg}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{64}{9} & \frac{4}{3} n_f \\ \frac{64}{9} & -\frac{4}{3} n_f \end{pmatrix}. \quad (18.186)$$

Первые собственные векторы этой матрицы и соответствующие собственные значения равны:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow a^2 = 0 \\ \left(\frac{16}{3}, -n_f\right) &\rightarrow a^2 = -\frac{4}{3} \left(\frac{16}{3} + n_f\right). \end{aligned} \quad (18.187)$$

Заметим, что первый собственный вектор соответствует линейной комбинации операторов  $c_i^2 \mathcal{O}_i^{(2)}$  с нулевой аномальной размерностью. Этот оператор является на самом деле полным тензором энергии-импульса КХД:

$$T^{\mu\nu} = \sum_f \mathcal{O}_f^{(2)\mu\nu} + \mathcal{O}_g^{(2)\mu\nu}, \quad (18.188)$$

который обязан иметь  $\gamma = 0$ . Если разложить второе слагаемое в (18.185) по компонентам (18.187), можно полностью вычислить перенормировку оператора полностью:

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_f^{(2)}]_Q &= \frac{1}{16/3 + n_f} T + \\ &+ \frac{1}{n_f(\frac{16}{3} + n_f)} \left( \frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right)^{-(\frac{16}{3} + n_f)/2b_0} \left[ \frac{16}{3} \sum_f \mathcal{O}_f^{(2)} - n_f \mathcal{O}_g^{(2)} \right]_\mu + \\ &+ \left( \frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right)^{-32/3b_0} \left[ \mathcal{O}_f^{(2)} - \frac{1}{n_f} \sum_{f'} \mathcal{O}_{f'}^{(2)} \right]_\mu, \end{aligned} \quad (18.189)$$

где  $T$  — тензор энергии-импульса (18.188). Правая часть правил сумм для моментов для  $n = 2$  дается коэффициентом в протонном матричном элементе этого оператора. Чтобы получить этот коэффициент, нужно определить глюонный аналог  $A_f^n$ , записав как и в (18.134):

$$\langle P | \mathcal{O}_g^{(n)\mu_1 \dots \mu_n} | P \rangle = A_g^n \cdot 2P^{\mu_1} \dots P^{\mu_n} - \text{следы}. \quad (18.190)$$

В частности, для случая  $n = 2$ :

$$\langle P | T^{\mu\nu} | P \rangle = 2P^\mu P^\nu; \quad (18.191)$$

поэтому из (18.188) следует

$$\sum_f A_f^2 + A_g^2 = 1. \quad (18.192)$$

Если заменить каждый оператор в (18.189) на соответствующий коэффициент  $A_i^2(\mu)$ , то в правой части  $n = 2$  правил сумм для моментов возникает выражение с явной зависимостью от  $Q^2$ .

Хотя выражение (18.189) довольно сложно, оно упрощается в пределе  $Q^2 \rightarrow \infty$ . При асимптотически больших значениях  $Q^2$  последние два слагаемых (18.189) стремятся к нулю, и в правой части (18.189) остается тензор энергии-импульса, умноженный на константу. Тогда, используя (18.191), можно полностью вычислить  $n = 2$  правила сумм для моментов:

$$\int_0^1 dx x f_f^+(x) \rightarrow \frac{1}{16/3 + n_f}. \quad (18.193)$$

В этом предельном случае каждый кварковый аромат несет одну и ту же фиксированную долю энергии-импульса протона. Как следует из (18.192), остаток переносят глюоны. Для иллюстрации в теории с  $n_f = 4$  каждый кварковый аромат несет  $3/28$  полного импульса протона, а глюоны несут оставшиеся  $4/7$ . На рис. 18.16 показано, насколько медленно реалистические партонные распределения достигают этих асимптотических значений.

### Связь с уравнениями Альтарелли–Паризи

Из только что проведенного анализа операторного смешивания следует, что предсказываемые моменты партонных распределений зависят от  $Q^2$ . Среди разных моментов, которые не включают смешивание операторов, только  $n = 1$  интегралы, дающие

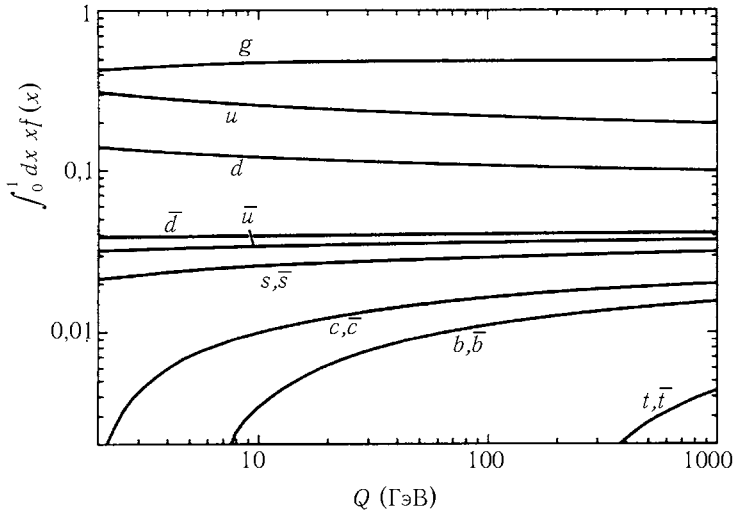


Рис. 18.16. Доли полной энергии и импульса протона, переносимые разными типами партонов, как функции  $Q$ , согласно анализу данных СТЕК по глубоконеупругому рассеянию, приведенных на рис. 17.6. Зависимость кривых от  $Q$  вычислена из уравнений эволюции КХД.

квантовые числа протона по аромату, являются константами как функции  $Q^2$ . Остальные убывают как степени  $\ln Q^2$ . Аналогично, одна линейная комбинация матричных элементов  $n = 2$  операторов твиста 2 не зависит от  $Q^2$ . Это условие отражено в правилах сумм (18.192). Чтобы записать это соотношение в более ясной форме, введем партонное распределение глюонов как гладкую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^1 dx x^{n-1} f_g(x, Q^2) = A_g^{(n)}(Q^2). \quad (18.194)$$

Тогда (18.192) становится правилом сумм для полного импульса для партонного распределения (17.39):

$$\int_0^1 dx x \left[ \sum_f f_f^+(x) + f_g(x) \right] = 1. \quad (18.195)$$

Нетрудно проверить, что для  $n > 2$  все собственные значения матрицы аномальных размерностей  $a_{ij}^n$  отрицательны. Поэтому все старшие моменты правил сумм уменьшаются с учетом законов сохранения импульса и аромата. Другими словами, анализ перенормировки операторов предсказывает, что партонные распределения смещаются к меньшим значениям  $x$  с ростом  $\ln Q^2$ . Приятно отметить, что к такому же заключению мы пришли в разделе 17.5, где вывели уравнения Альтарелли–Паризи для описания эволюции распределения партонов.

При качественном совпадении операторного анализа и подхода Альтарелли–Паризи, как сравнить их количественно? Чтобы сравнить их непосредственно, нужно узнать, какие предсказания для моментов партонных распределений следуют из уравнений Альтарелли–Паризи. Начнем с более простого случая  $f_f^-(x) = f_f(x) - f_{\bar{f}}(x)$ .

Чтобы найти уравнения Альтарелли–Паризи для этой величины, вычтем последнее уравнение из предыдущего в (17.128). Слагаемое с глюонным распределением со-

кращается, и мы получаем:

$$\frac{d}{d \ln Q^2} f_f^-(x) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{q \leftarrow q}(z) f_f^-\left(\frac{x}{z}\right). \quad (18.196)$$

Определим теперь

$$M_{fn}^- = \int_0^1 dx x^{n-1} f_f^-(x). \quad (18.197)$$

Эта величина удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d \ln Q^2} M_{fn}^- = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dx x^{n-1} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{q \leftarrow q}(z) f_f^-\left(\frac{x}{z}\right). \quad (18.198)$$

Изменим порядок интегрирования в правой стороне и сделаем замену переменных  $y = x/z$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^{n-1} \int_x^1 \frac{dz}{z} &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \int_0^z dx x^{n-1} = \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \int_0^1 dy y^{n-1} z^n = \\ &= \int_0^1 dz z^{n-1} \int_0^1 dy y^{n-1}. \end{aligned} \quad (18.199)$$

Тогда правая часть дифференциального уравнения легко факторизуется:

$$\frac{d}{d \ln Q^2} M_{fn}^- = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ \int_0^1 dz z^{n-1} P_{q \leftarrow q}(z) \right] \cdot \int_0^1 dy y^{n-1} f_f^-(y); \quad (18.200)$$

причем последний множитель опять равен  $M_{fn}^-$ . Коэффициент в этом соотношении равен  $n$ -у моменту функции расщепления  $P_{q \leftarrow q}(z)$ . Мы можем вычислить его с помощью явного вида этой функции, приведенной в (17.129):

$$\int_0^1 dz z^{n-1} P_{q \leftarrow q}(z) = \int_0^1 dz z^{n-1} \frac{4}{3} \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]. \quad (18.201)$$

Интеграл по распределению берется с использованием определения (17.105):

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z^{n-1} \frac{1}{(1-z)_+} &= \int_0^1 dz \frac{z^{n-1} - 1}{(1-z)} = \\ &= \int_0^1 dz (-1 - z - \dots - z^{n-2}) = \\ &= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}. \end{aligned} \quad (18.202)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z^{n-1} P_{q \leftarrow q}(z) &= -\frac{4}{3} \left[ \sum_1^{n-1} \frac{1}{j} + \sum_1^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{3}{2} \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \left[ 1 + 4 \sum_2^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right]. \end{aligned} \quad (18.203)$$

Отметим, что это просто  $a_f^2/4$ , этот коэффициент аномальной размерности приведен в (18.172) или в (18.181). Поэтому из уравнений Альтарелли–Паризи следует, что  $n$ -й момент  $f_f^-(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d \ln Q^2} M_{fn}^- = \frac{\alpha_s(Q^2)}{8\pi} a_f^n \cdot M_{fn}^-. \quad (18.204)$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, потребуется явная форма  $\alpha_s(Q^2)$ . Подставляя выражение (17.17), находим:

$$\frac{d}{d \ln Q^2} M_{fn}^- = \frac{a_f^n}{2b_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} M_{fn}^-. \quad (18.205)$$

Решением этого уравнения, выведенного из уравнений Альтарелли–Паризи, является в точности функция (18.160), которая была получена из операторного анализа правил сумм для моментов для  $f_f^-$ .

Нетрудно проверить, что этот вывод является более общим. Взяв  $n$ -й момент полных уравнений Альтарелли–Паризи (17.128), мы превращаем эти уравнения в набор обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов. Линейная комбинация кварковых распределений

$$\sum_f (f_f(x) + f_{\bar{f}}(x)) \quad (18.206)$$

смешивается с глюонным распределением и приводит к  $2 \times 2$  системе уравнений. Все ортогональные к этой линейной комбинации не связаны с глюонным распределением и имеют моменты, удовлетворяющие уравнениям (18.205). Для анализа связанных уравнений определим

$$M_n^+ = \int_0^1 dx x^{n-1} \sum_f (f_f(x) + f_{\bar{f}}(x)); \quad M_{gn} = \int_0^1 dx x^{n-1} f_g(x). \quad (18.207)$$

Тогда по аналогии с выводом (18.205) можно показать, что из уравнений Альтарелли–Паризи для этих моментов вытекает система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q^2} M_n^+ &= \frac{1}{2b_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} [a_{ff}^n M_n^+ + a_{fg}^n M_{gn}], \\ \frac{d}{d \ln Q^2} M_{gn} &= \frac{1}{2b_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} [n_f a_{gf}^n M_n^+ + a_{gg}^n M_{gn}], \end{aligned} \quad (18.208)$$

где коэффициенты  $a_{ij}^n$  пропорциональны  $n$  моментам функций расщепления, приведенным в (17.129) и (17.130). Во всех случаях эти коэффициенты в точности совпадают



с соответствующими коэффициентами в (18.181). Поэтому решение этих уравнений приводит к той же зависимости от  $Q^2$  для моментов партонных распределений, что и операторный анализ. Замечательно, что подход партонных функций расщепления, приведенный в гл. 17, и проведенный анализ множителей перенормировки операторов оказываются двумя сторонами одного явления. Обе системы уравнений выражают способ, которым составные части адронов в КХД проявляются шаг за шагом в жестких процессах при достаточно больших передаваемых импульсах. Наше понимание того, что кварк при исследовании на малых расстояниях распадается на набор кварков, антикварков и глюонов, означает, что мы вышли далеко за рамки простых понятий одночастичной релятивистской механики. Два дополняющих друг друга способа получения этого результата подчеркивают его фундаментальный характер в качестве предсказания квантовой теории поля. Особенно приятно, что, как мы видели в конце гл. 17.5, природа, по-видимому, принимает это предсказание, так что это следствие квантовой теории поля становится существенной частью понимания структуры адронов.

## Задачи

**18.1. Матричный элемент распада протона.** Некоторые современные теории содержат тяжелые частицы  $X$ , взаимодействие которых нарушает сохранение барионного числа. Проинтегрировав по этим частицам, можно получить эффективное взаимодействие, позволяющее протону распадаться на позитрон и фотон или пион. Это эффективное взаимодействие удобнее всего записать через поля кварков и электронов с определенной киральностью. Если  $u_L, d_L, u_R, e_R$  — двухкомпонентные спиноры, тогда это эффективное взаимодействие имеет вид:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{2}{m_X^2} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} e_{R\alpha} u_{R\beta} u_{Lb\gamma} d_{Lc\delta}.$$

Типичное значение массы  $X$ -бозона  $m_X = 10^{16}$  ГэВ.

- Оцените по порядку величины время жизни протона, если он может распадаться за счет этого взаимодействия.
- Покажите, что трехкварковый оператор в  $\Delta\mathcal{L}$  имеет аномальную размерность

$$\gamma = -4 \frac{g^2}{(4\pi)^2}.$$

Оцените увеличение ширины распада протона за счет главных КХД поправок.

**18.2. Несохранившая четность глубоконеупругий форм-фактор.** В этой задаче мы сначала обоснуем существование дополнительного глубоко неупругого форм-фактора, пропорционального *разности* кварковой и антикварковой функций распределения. Затем мы определим эти функции формально и изучим их свойства.

- Исследуйте рассеяние нейтрино на протоне, следуя методу, изложенному в начале раздела 18.5. Определите

$$J_+^\mu = \bar{u}\gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) d, \quad J_-^\mu = \bar{d}\gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) u.$$

Пусть величина

$$W^{\mu\nu(\nu)} = 2i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | T \{ J_-^\mu(x) J_+^\nu(0) \} | P \rangle$$

усреднена по спину протона. Покажите, что сечение глубоко неупругого рассеяния нейтрино может быть выражено через  $W^{\mu\nu(\nu)}$  формулой:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy}(\nu p \rightarrow \mu^- X) = \frac{G_F^2 y}{2\pi^2} \times \\ \times \text{Im}[(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i\varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} k'_\alpha k_\beta) W^{\mu\nu(\nu)}(P, q)].$$

- (b) Покажите, что все слагаемые в  $W^{\mu\nu(\nu)}$ , пропорциональные  $q^\mu$  или  $q^\nu$ , обращаются в нуль при сворачивании с тензором импульсов лептона в предыдущей формуле. Поэтому можно разложить  $W^{\mu\nu(\nu)}$  на три скалярных форм-фактора:

$$W^{\mu\nu(\nu)} = -g^{\mu\nu} W_1^{(\nu)} + P^\mu P^\nu W_2^{(\nu)} + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} P_\lambda q_\sigma W_3^{(\nu)} + \dots,$$

где остальные слагаемые не дают вклада в глубоконеупругое рассеяние. Получите формулу для глубоконеупругого рассеяния через мнимые части  $W_1^{(\nu)}$ ,  $W_2^{(\nu)}$  и  $W_3^{(\nu)}$ .

- (c) Вычислите форм-факторы в партонной модели и покажите, что

$$\text{Im} W_1^{(\nu)} = \pi(f_d(x) + f_{\bar{u}}(x)), \\ \text{Im} W_2^{(\nu)} = \frac{4\pi}{ys} x(f_d(x) + f_{\bar{u}}(x)), \\ \text{Im} W_3^{(\nu)} = \frac{2\pi}{ys} (f_d(x) - f_{\bar{u}}(x)).$$

Подставьте эти выражения в формулу, полученную в части (b), и покажите, что ответ воспроизводит первую строку уравнения (17.35).

- (d) Этот анализ приводит к следующему определению. Пусть для одного кваркового аромата

$$J_{fL}^\mu = \bar{f} \gamma^\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) f.$$

Определим

$$W_{fL}^{\mu\nu} = 2i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | T \{ J_{fL}^\mu(x) J_{fL}^\nu(0) \} | P \rangle.$$

Разложим этот тензор:

$$W_{fL}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} W_{1fL} + P^\mu P^\nu W_{2fL} + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} P_\lambda q_\sigma W_{3fL} + \dots,$$

где опущенные слагаемые пропорциональны  $q^\mu$  или  $q^\nu$ . Вычислите  $W_{iL}$  в партонной модели. Покажите, что величины  $W_{1fL}$  и  $W_{2fL}$  воспроизводят выражения для  $W_{1f}$  и  $W_{2f}$  из (18.120) и (18.144) и что  $W_{3fL}$  дается формулой:

$$\text{Im} W_{3fL} = \frac{2\pi}{ys} (f_f(x) - f_{\bar{f}}(x)).$$

- (e) Вычислите операторное произведение токов в выражении для  $W_{fL}^{\mu\nu}$  и выпишите в этом произведении слагаемые, содержащие операторы с твистом 2. Покажите что выражения для  $W_{1fL}$  и  $W_{2fL}$ , следующие из этого анализа, воспроизводят выражения для  $W_{1f}$  и  $W_{2f}$  из (18.144) и (18.145). Найдите соответствующее выражение для  $W_{3fL}$ .
- (f) Определим партонное распределение  $f_f^-$  соотношением

$$f_f^-(x, Q^2) = \frac{ys}{2\pi} \text{Im} W_{3fL}(x, Q^2).$$

Покажите, пользуясь этим определением, что функция распределения  $f_f^-$  удовлетворяет правилам сумм (18.155) для нечетных  $n$ .

### 18.3. Аномальные размерности глюонных операторов с твистом 2.

- (a) Вычислите расходящуюся часть диаграмм на рис. 18.14 и используйте диаграммы для вывода второй строки (18.181). Заметим, что этот результат выполняется только для четных  $n$ .
- (b) Вычислите расходящиеся части диаграмм на рис. 18.5 и используйте их для вывода третьей и четвертой строки (18.181).

**18.4. Глубоконеупругое рассеяние на фотоне.** Рассмотрим задачу глубоконеупругого рассеяния электрона на фотоне. Этот процесс может быть реально измерен при исследовании реакции  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + X$  в ситуации, когда позитрон летит вперед с испусканием коллинеарного фотона, который затем жестким образом взаимодействует с электроном. Исследуем этот процесс в ведущем порядке в КЭД и с учетом ведущих логарифмов в КХД. Чтобы получить структурные функции фотона, можно интегрировать уравнения ренормгруппы с начальным условием, что партонное распределение фотонов для фотона равно  $\delta(x-1)$  при  $Q^2 = (\frac{1}{2} \text{ ГэВ})^2$ . Возьмем  $\Lambda = 150 \text{ МэВ}$ . Примем для простоты, что есть четыре сорта кварков  $u, d, c$  и  $s$  с зарядами  $2/3, -1/3, 2/3, -1/3$ , соответственно, и что массами кварков всегда можно пренебречь.

- (a) Используйте уравнения Альтарелли–Паризи для вычисления партонных распределений кварков и антикварков в фотоне в ведущем порядке КЭД и в нулевом порядке КХД. Вычислите также вероятность, что фотон останется фотоном, как функцию  $Q^2$ .
- (b) Сформулируйте задачу о вычислении моментов  $W_2$  для фотона как задачу операторного смешивания. Вычислите соответствующую матрицу аномальных размерностей  $\gamma$ . Вы должны суметь получить эту матрицу из уже известных фактов без дополнительных вычислений фейнмановских диаграмм.
- (c) Вычислите моменты структурной функции фотона с  $n = 2$  как функции  $Q^2$ .
- (d) Опишите качественно эволюцию структурной функции фотона как функцию  $x$  и  $Q^2$ .

## АНОМАЛИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

На многих примерах мы убедились, что петлевые поправки могут сильно влиять на предсказания квантовой теории поля. Мы изучили ряд примеров, в которых за счет радиационных поправок изменялась относительная важность некоторых операторов и изменялась сама форма взаимодействий, которые они вызывают. Однако при определенных условиях радиационные поправки могут приводить к еще более сильному эффекту: они могут нарушить симметрии классических уравнений движения.

Наиболее важный эффект такого типа относится к киральным симметриям теорий с безмассовыми фермионами. В разделе 3.4 мы видели, что безмассовый лагранжиан Дирака обладает расширенной симметрией, связанной с сохранением числа левых и правых фермионов по отдельности. Эта симметрия генерируется аксиальным векторным током  $j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi$ . На классическом уровне

$$\partial_{\mu}j^{\mu 5} = 0 \quad (19.1)$$

для безмассовых фермионов. Это уравнение движения, как классическое полевое уравнение, верно не только в свободной фермионной теории, но также и в безмассовых КЭД и КХД. Однако в этой главе мы увидим, что в действительности картина не так проста. Мы покажем, что в калибровочных теориях сохранение аксиального векторного тока несовместимо с калибровочной инвариантностью и что радиационные поправки в этих теориях приводят к появлению ненулевого оператора в правой части уравнения (19.1). Это новое уравнение для аксиального тока приводит к ряду замечательных следствий, которые мы обсудим в разделах 19.3 и 19.4.

### 19.1. Аксиальный ток в двух измерениях

Нашей целью является анализ уравнения сохранения аксиального тока в безмассовой КХД. Но этот анализ содержит ряд технических трудностей, поэтому сначала мы изучим физику нарушения сохранения аксиального тока в такой модели, в которой вычисления относительно просты. Особенно простой модельной задачей является двумерная безмассовая КЭД.

Лагранжиан двумерной КЭД имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D})\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2, \quad (19.2)$$

$\mu, \nu = 0, 1$  и  $D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$ . Матрицы Дирака должны быть выбраны так, чтобы удовлетворять алгебре Дирака

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (19.3)$$

В двух измерениях эти соотношения могут быть представлены матрицами  $2 \times 2$ ; выберем

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.4)$$

Дираковские спиноры будут двухкомпонентными полями.

Произведение матриц Дирака, которое антикоммутирует с каждой  $\gamma^\mu$ , есть

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (19.5)$$

Тогда, как и в четырех измерениях, можно построить два тока

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi, \quad (19.6)$$

причем они оба сохраняются, если в лагранжиане нет массового слагаемого.

Для того чтобы сделать законы сохранения очевидными, обозначим компоненты фермионного поля  $\psi$  в этом спинорном базисе как

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (19.7)$$

Индекс означает собственное значение матрицы  $\gamma^5$ . Тогда, используя явные представления (19.4) и (19.7), можно переписать фермионную часть (19.2) как

$$\mathcal{L} = \psi_+^\dagger i(D_0 + D_1)\psi_+ + \psi_-^\dagger i(D_0 - D_1)\psi_-. \quad (19.8)$$

В свободной теории полевое уравнение для  $\psi_+$  имело бы вид:

$$i(\partial_0 + \partial_1)\psi_+ = 0; \quad (19.9)$$

Решениями этого уравнения являются волны, движущиеся со скоростью света направо в одномерном пространстве. Поэтому мы будем называть частицы, ассоциированные с полем  $\psi_+$ , *праводвижущимися* фермионами. Аналогично, кванты, ассоциированные с  $\psi_-$ , являются *леводвижущимися*. Это различие аналогично тому различию между правыми и левыми частицами, которое придает физический смысл матрице  $\gamma^5$  в четырех измерениях. Так как лагранжиан (19.8) не содержит слагаемых, перемешивающих лево- и праводвижущиеся поля, то очевидно, что токи этих полей сохраняются по отдельности. Поэтому

$$\partial_\mu \left( \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \psi \right) = 0, \quad \partial_\mu \left( \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1+\gamma^5}{2} \right) \psi \right) = 0. \quad (19.10)$$

Любопытным свойством двумерного пространства-времени является то, что векторный и аксиальный фермионные токи не являются независимыми. Пусть  $\varepsilon^{\mu\nu}$  — двумерный полностью антисимметричный символ с  $\varepsilon^{01} = +1$ . Тогда двумерные матрицы Дирака удовлетворяют тождеству

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\varepsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu. \quad (19.11)$$

Токи  $j^{\mu 5}$  и  $j^\mu$  удовлетворяют такому же соотношению. Поэтому можно изучать свойства аксиального тока, используя уже полученные результаты для векторного тока.

### Диаграммы поляризации вакуума

В разделе 7.5 с помощью размерной регуляризации была вычислена поляризация вакуума в КЭД в нужном порядке теории возмущений. В пределе нулевой массы мы нашли в (7.90), что

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{2e^2}{(4\pi)^{d/2}} \text{tr}[1] \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-d/2)}{(-x(1-x)q^2)^{2-d/2}}, \quad (19.12)$$

где  $\text{tr}[1] = 4$  по соглашению для следа матриц Дирака из (7.88). Если положить  $\text{tr}[1] = 2$  для согласия с (19.4) и  $d = 2$  в (19.12), получится конечный и хорошо определенный результат

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{2e^2}{4\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{q^2} = i\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) \frac{e^2}{\pi}. \quad (19.13)$$

Отметим, что это выражение имеет структуру массового члена фотона, т. е. фотон приобретает массу

$$m_\gamma^2 = \frac{e^2}{\pi}. \quad (19.14)$$

Швингер показал, что этот результат является точным и что фотон в двумерной КЭД является свободным массивным бозоном\*. В обсуждении после формулы (7.72) мы отмечали, что амплитуда вакуумной поляризации, совместная с тождеством Уорда, не может генерировать массу фотона, кроме случая, когда она содержит полюс при  $q^2 = 0$ . В двух измерениях такой полюс может возникнуть из-за инфракрасного поведения промежуточного состояния фермион-антифермион, и мы видим явно такое поведение в (19.13).

Имея явное выражение для поляризации вакуума, можно найти среднее значение тока, индуцированное фоновым электромагнитным полем. Эта величина определяется диаграммой рис. 19.1, которая дает:

$$\int d^2x e^{iq \cdot x} \langle j^\mu(x) \rangle = \frac{i}{e} (i\Pi^{\mu\nu}(q)) A_\nu(q) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) \cdot \frac{e}{\pi} A_\nu(q), \quad (19.15)$$

где  $A_\nu(q)$  — фурье-преобразование фонового поля. Эта величина явно удовлетворяет закону сохранения тока  $q_\mu \langle j^\mu(q) \rangle = 0$ .

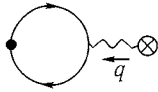


Рис. 19.1. Вычисление  $\langle j^\mu \rangle$  в фоновом электромагнитном поле.

Тождество (19.11) между векторным и аксиальным токами позволяет получить из (19.15) соответствующее среднее значение  $j^{\mu 5}$ . Мы находим:

$$\langle j^{\mu 5}(q) \rangle = -\varepsilon^{\mu\nu} \langle j_\nu(q) \rangle = \varepsilon^{\mu\nu} \frac{e}{\pi} \left( A_\nu(q) - \frac{q_\nu q^\lambda}{q^2} A_\lambda(q) \right). \quad (19.16)$$

\*J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128**, 2425 (1962).

Если бы аксиальный ток сохранялся, этот объект удовлетворял бы тождеству Уорда. Вместо этого получаем:

$$q_\mu \langle j^{\mu 5}(q) \rangle = \frac{e}{\pi} \varepsilon^{\mu\nu} q_\mu A_\nu(q). \quad (19.17)$$

Это — фурье-преобразование уравнения поля

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (19.18)$$

Очевидно, что аксиальный ток не сохраняется в присутствии электромагнитных полей из-за аномального поведения его диаграммы поляризации вакуума. Как это происходит? Формально фейнмановские диаграммы удовлетворяют тождеству Уорда как для векторного, так и для аксиального токов. Нарушение может происходить из-за регуляризации диаграммы поляризации вакуума. Из размерного анализа мы знаем, что эта диаграмма имеет вид:

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = ic^2 \left( A g^{\mu\nu} - B \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right). \quad (19.19)$$

Коэффициент  $B$  представляется конечным интегралом и в любом случае однозначно определяется низкоэнергетической структурой теории, так как является вычетом полюса  $q^2$ . Однако интеграл  $A$  логарифмически расходится, так что его величина зависит от способа регуляризации. Размерная регуляризация автоматически вычитает эту расходимость, давая  $A = B$ ; тогда тождество Уорда для векторного тока выполняется. Но тогда мы приходим прямо к (19.17). Альтернативно, можно было бы регуляризовать интеграл  $A$  так, чтобы  $A = 0$ . Действуя в этом случае так же, как в предыдущем разделе, получим  $q_\mu \langle j^{\mu 5}(q) \rangle = 0$ , но

$$q_\mu \langle j^\mu(q) \rangle = \frac{e}{\pi} q^\nu A_\nu(q). \quad (19.20)$$

Результат (19.17) неприятен, но результат (19.20) был бы полной катастрофой, так как ответ зависит от нефизических калибровочных степеней свободы векторного потенциала. Поэтому можно сделать вывод, что двумерную КЭД невозможно регуляризовать так, чтобы одновременно теория была калибровочно-инвариантна и сохранялся аксиальный ток. Как показано в (19.18), ценой сохранения калибровочной инвариантности является аномальное несохранение аксиального тока.

### Операторное уравнение для аксиального тока

Чтобы понять, что происходит с аксиальным током с другой точки зрения, рассмотрим операторное уравнение для дивергенции  $j^{\mu 5}$ . Варьируя лагранжиан (19.2), находим следующие уравнения движения для фермионных полей:

$$\not{\partial}\psi = -ie\not{A}\psi, \quad \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = ie\bar{\psi} \not{A}. \quad (19.21)$$

Формально используя эти уравнения движения, легко прийти к выводу, что  $\partial_\mu j^{\mu 5} = 0$ . Однако более аккуратный анализ этих манипуляций обнаруживает некоторые тонкости, которые меняют конечный вывод.

Аксиальный ток является составным оператором, построенным из фермионных полей. В предыдущей главе мы видели, что произведение локальных операторов часто

бывает сингулярным. Поэтому определим ток, помещая два фермионных поля в различные точки, разделенные расстоянием  $\varepsilon$ , а затем аккуратно переходя к пределу при устремлении полей друг к другу. В явном виде определяем:

$$j^{\mu 5} = \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2}) \gamma^\mu \gamma^5 \exp \left[ -ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz \cdot A(z) \right] \psi(x - \frac{\varepsilon}{2}) \right\}. \quad (19.22)$$

Заметим, что поскольку  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  помещены в разные точки, для того, чтобы оператор был локально калибровочно-инвариантен, нужно ввести вильсоновскую линию (15.53). Для обеспечения правильных трансформационных свойств  $j^{\mu 5}$  при лоренцовских преобразованиях предел  $\varepsilon \rightarrow 0$  должен быть взят симметрично:

$$\text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon^\mu}{\varepsilon^2} \right\} = 0, \quad \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu}{\varepsilon^2} \right\} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu}, \quad (19.23)$$

с  $d = 2$  в этом случае. Теперь вычислим дивергенцию аксиального тока, определенного как в (19.22):

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{\mu 5} = \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ (\partial_\mu \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2})) \gamma^\mu \gamma^5 \exp \left[ -ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz \cdot A(z) \right] \psi(x - \frac{\varepsilon}{2}) + \right. \\ \left. + \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2}) \gamma^\mu \gamma^5 \exp \left[ -ie \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} dz \cdot A(z) \right] (\partial_\mu \psi(x - \frac{\varepsilon}{2})) + \right. \\ \left. + \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2}) \gamma^\mu \gamma^5 [-ie \varepsilon^\nu \partial_\mu A_\nu(x)] \psi(x - \frac{\varepsilon}{2}) \right\}. \quad (19.24) \end{aligned}$$

Используя уравнения движения (19.21) и сохраняя слагаемые порядка  $\varepsilon$ , можно свести это выражение к виду:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{\mu 5} = \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2}) [ie \mathcal{A}(x + \frac{\varepsilon}{2}) - ie \mathcal{A}(x - \frac{\varepsilon}{2}) - \right. \\ \left. - ie \varepsilon^\nu \gamma^\mu \partial_\mu A_\nu(x)] \gamma^5 \psi(x - \frac{\varepsilon}{2}) \right\} = \\ = \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2}) [-ie \gamma^\mu \varepsilon^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \gamma^5 \psi(x - \frac{\varepsilon}{2}) \right\}. \quad (19.25) \end{aligned}$$

Кажется, что выражение (19.25) исчезает в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Но мы должны учесть, что произведение фермионных операторов является сингулярным. В двух измерениях свертка фермионных полей равна

$$\overline{\psi(y)\psi(z)} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-ik \cdot (y-z)} \frac{i \not{k}}{k^2} = -\not{\partial} \left( \frac{i}{4\pi} \ln(y-z)^2 \right) = \frac{-i}{2\pi} \frac{\gamma^\alpha (y-z)_\alpha}{(y-z)^2}. \quad (19.26)$$

Поэтому

$$\overline{\psi(x + \frac{\varepsilon}{2}) \Gamma \psi(x - \frac{\varepsilon}{2})} = \frac{-i}{2\pi} \text{tr} \left[ \frac{\gamma^\alpha \varepsilon_\alpha}{\varepsilon^2} \Gamma \right]. \quad (19.27)$$



Отметим, что результат (19.27) содержит дополнительный знак минус из-за перестановки фермионных операторов. Так как свертка фермионных полей сингулярна при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то слагаемые порядка  $\varepsilon$  в последней строке (19.25) могут дать конечный вклад. Беря свертку в соответствии с (19.27), находим

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{-i}{2\pi} \text{tr} \left[ \frac{\gamma^\alpha \varepsilon_\alpha}{\varepsilon^2} \gamma^\mu \gamma^5 \right] \cdot (-ie\varepsilon^\nu F_{\mu\nu}) \right\}. \quad (19.28)$$

В двух измерениях  $\text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^5] = 2\varepsilon^{\alpha\mu}$ . Поэтому

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{e}{2\pi} \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon^\nu}{\varepsilon^2} \right\} \varepsilon^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha}. \quad (19.29)$$

Теперь, в соответствии с (19.23), возьмем симметричный предел. Получается в точности аномальное уравнение несохранения тока (19.18). В этом выводе (19.18) появляется скорее как операторное соотношение, чем просто матричный элемент. Отметим, что как и в нашем первом выводе этого уравнения, предположение о локальной калибровочной инвариантности играет решающую роль. Если бы мы определили аксиальный ток, поменяв знак вильсоновской линии в (19.22), что нарушило бы локальную калибровочную инвариантность, мы обнаружили бы, что все вклады в правой части (19.29) сокращаются.

### Пример несохранения числа фермионов

В заключение рассмотрения двумерного аксиального тока покажем, что уравнение несохранения (19.18) имеет также глобальный смысл. В свободной фермионной теории интеграл, выражающий закон сохранения аксиального тока, дает:

$$\int d^2x \partial_\mu j^{\mu 5} = N_R - N_L = 0. \quad (19.30)$$

Это условие означает, что в любом возможном процессе не может изменяться разность числа праводвижущихся и леводвижущихся фермионов. Комбинируя это с законом сохранения векторного тока, можно показать, что число фермионов каждого типа сохраняется по отдельности. Из (19.8) можно заключить, что эти отдельные законы сохранения выполняются также в двумерной КЭД. Однако мы уже обнаружили, что в выводах об аксиальном токе нужна осторожность.

В двумерной КЭД уравнение сохранения для аксиального тока заменяется аномальным уравнением несохранения (19.18). Если бы в правой части этого уравнения стояла полная производная величины, достаточно быстро убывающей на бесконечности, интеграл от этой величины обращался бы в нуль, и мы по-прежнему имели бы глобальный закон сохранения. Действительно,  $\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  есть полная производная:

$$\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu} A_\nu). \quad (19.31)$$

Однако легко представить примеры, когда интеграл от этой величины не исчезает, например, мир с постоянным фоновым электрическим полем. В таком мире закон сохранения (19.30) должен нарушаться. Но как это может происходить?

Для анализа этой проблемы рассмотрим задачу о фермионах в одном пространственном измерении, находящихся в фоновом поле  $A^1$ , которое постоянно в пространстве и медленно меняется во времени. Предположим, что система имеет конечную длину  $L$  с периодическими граничными условиями. Отметим, что постоянное поле  $A^1$  не может

быть устранено калибровочным преобразованием, удовлетворяющим периодическим граничным условиям. Один из способов увидеть это — заметить, что в такой системе вильсоновская линия, образующая благодаря периодическим граничным условиям калибровочно-инвариантную замкнутую петлю, имеет ненулевое значение:

$$\exp\left[-ie \int_0^L dx A_1(x)\right]. \quad (19.32)$$

Следуя выводу трехмерного гамильтониана (3.84), находим гамильтониан этой одномерной системы:

$$H = \int dx \psi^\dagger (-i\alpha^1 D_1) \psi, \quad (19.33)$$

где  $\alpha^1 = \gamma^0 \gamma^1 = \gamma^5$ . В компонентах (19.7),

$$H = \int dx \left\{ -i\psi_+^\dagger (\partial_1 - ieA^1) \psi_+ + i\psi_-^\dagger (\partial_1 - ieA^1) \psi_- \right\}. \quad (19.34)$$

Для постоянного поля  $A^1$  этот гамильтониан легко диагонализировать. Собственными состояниями ковариантных производных являются волновые функции, удовлетворяющие периодическим граничным условиям:

$$e^{ik_n x}, \quad \text{с } k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = -\infty, \dots, \infty. \quad (19.35)$$

Тогда энергии одночастичных собственных состояний  $H$  равны

$$\begin{aligned} \psi_+ : \quad E_n &= +(k_n - eA^1), \\ \psi_- : \quad E_n &= -(k_n - eA^1). \end{aligned} \quad (19.36)$$

Каждый тип фермионов имеет бесконечную систему растущих эквидистантных уровней. Для нахождения основного состояния  $H$  заполним уровни с отрицательной энергией и будем интерпретировать дырки в этих заполненных состояниях как античастицы.

Теперь адиабатически изменим величину  $A^1$ . Фермионные уровни энергии медленно сдвинутся в соответствии с условиями (19.36). Если  $A^1$  изменяется на конечную величину

$$\Delta A^1 = \frac{2\pi}{eL}, \quad (19.37)$$

которая возвращает вильсоновской линии (19.32) ее начальное значение, спектр  $H$  возвращается к исходному. В этом процессе каждый уровень  $\psi_+$  сдвигается на соседнюю позицию вниз, а каждый уровень  $\psi_-$  — на соседнюю позицию вверх (рис. 19.2). Числа заполнения уровней во время этого адиабатического процесса должны сохраняться. Таким образом один праводвижущийся фермион исчезает, а один леводвижущийся — появляется. В то же время

$$\int d^2x \left( \frac{e}{\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \int dt dx \frac{e}{\pi} \partial_0 A_1 = \frac{e}{\pi} L (-\Delta A^1) = -2, \quad (19.38)$$

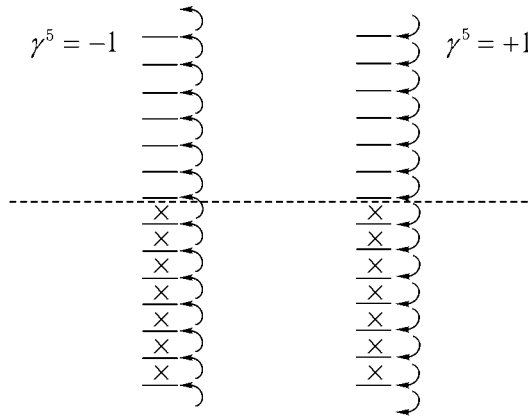


Рис. 19.2. Изменение вакуумного состояния гамильтониана  $H$  одномерной КЭД вследствие адиабатического изменения фонового поля  $A^1$ .

где в последней строке мы подставили (19.37). Итак, удовлетворяется интегральная форма аномального уравнения несохранения (19.18):

$$N_R - N_L = \int d^2x \left( \frac{e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right). \quad (19.39)$$

Даже в этом простом примере видно, что при анализе кирального закона сохранения невозможно избежать вопроса об ультрафиолетовой регуляризации. Праводвижущиеся фермионы исчезают, а леводвижущиеся — появляются из глубин фермионного спектра  $E \rightarrow -\infty$ . При вычислении изменений фермионных чисел по отдельности мы предположили, что вакуум не может изменить заряд, содержащийся в нем при больших отрицательных энергиях. Это предположение калибровочно-инвариантно, но оно приводит к несохранению аксиального векторного тока.

## 19.2. Аксиальный ток в четырех измерениях

Все выводы, полученные выше для двумерного аксиального тока, имеют аналоги в четырех измерениях. Из формулы (3.40) следует, что в случае безмассовых фермионов четырехмерное уравнение Дирака расщепляется на отдельные уравнения для левых и правых фермионов. Для того чтобы учесть взаимодействие с калибровочным полем, заменим производные ковариантными производными. На первый взгляд это не влияет на явное разделение двух киральных компонент. Поэтому кажется очевидным, что векторный и аксиальный токи должны остаться сохраняющимися. Однако после только что проведенного в двумерном случае анализа эти законы сохранения нельзя принимать без проверки. Проведем более аккуратный анализ закона сохранения аксиального тока в четырех измерениях.

### Операторное уравнение для аксиального тока

Начнем со случая безмассовой четырехмерной КЭД. Из трех различных подходов, приведенных в предыдущем разделе при рассмотрении закона сохранения двумерного аксиального тока, наиболее просто обобщается операторный подход. Фермионные уравнения поля (19.21) имеют тот же вид и в четырехмерном случае. Можно опять принять калибровочно-инвариантное определение аксиального тока (19.22). Когда вычисляется

дивергенция этого тока, все манипуляции, приводящие к уравнению (19.25), остаются корректными.

Теперь мы должны вычислить сингулярные слагаемые в операторном произведении двух фермионных полей в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Как и в двумерном случае, главное слагаемое дается сверткой двух операторов, использующей свободный пропагатор. Этот вклад равен:

$$\overline{\psi(y)\psi}(z) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (y-z)} \frac{i \not{k}}{k^2} = -\not{\partial} \left( \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(y-z)^2} \right) = \frac{-i \gamma^\alpha (y-z)_\alpha}{2\pi^2 (y-z)^4}. \quad (19.40)$$

Он очень сингулярен при  $(y-z) \rightarrow 0$ , но равен нулю после взятия следа с  $\gamma^\mu \gamma^5$ . Для получения ненулевого результата следует рассмотреть слагаемые более высокого порядка в разложении произведения операторов.

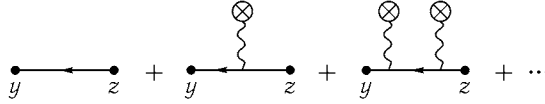


Рис. 19.3. Разложение  $\psi(y)\bar{\psi}(z)$  в присутствии фонового калибровочного поля.

В ненулевом фоновом калибровочном поле свертка фермионных полей дается рядом диаграмм, изображенных на рис. 19.3. Мы вычислили ведущее слагаемое в этом ряде (19.40). Высшие слагаемые дают менее сингулярные вклады при  $(y-z) \rightarrow 0$ . Второе слагаемое в ряде дается выражением:

$$\text{Diagram} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(k+p) \cdot y} e^{ik \cdot z} \frac{i(\not{k} + \not{p})}{(k+p)^2} (-ieA(p)) \frac{i \not{k}}{k^2}. \quad (19.41)$$

Этот вклад приводит к выражению

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^\mu \gamma^5 \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle &= \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot \varepsilon} e^{-ip \cdot x} \text{tr} \left[ (-\gamma^\mu \gamma^5) \frac{i(\not{k} + \not{p})}{(k+p)^2} (-ieA(p)) \frac{i \not{k}}{k^2} \right] = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot \varepsilon} e^{-ip \cdot x} \frac{4e\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} (k+p)_\alpha A_\beta(p) k_\gamma}{k^2 (k+p)^2}. \end{aligned} \quad (19.42)$$

Для вычисления предела  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно разложить подынтегральное выражение при больших  $k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^\mu \gamma^5 \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle &\sim \\ &\sim 4e\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} p_\alpha A_\beta(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot \varepsilon} \frac{k_\gamma}{k^4} = \\ &= 4e\varepsilon^{\alpha\beta\mu\gamma} (\partial_\alpha A_\beta(x)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon^\gamma} \left( \frac{i}{16\pi^2} \ln \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = \\ &= 2e\varepsilon^{\alpha\beta\mu\gamma} F_{\alpha\beta}(x) \left( \frac{-i \varepsilon_\gamma}{8\pi^2 \varepsilon^2} \right). \end{aligned} \quad (19.43)$$

Подставляя это выражение в (19.25), находим

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \text{symm} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{e}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\gamma} F_{\alpha\beta} \left( \frac{-i\varepsilon_\gamma}{\varepsilon^2} \right) (-ie\varepsilon^\nu F_{\mu\nu}) \right\}. \quad (19.44)$$

Теперь возьмем симметричный предел  $\varepsilon \rightarrow 0$  в четырех измерениях. Получаем:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}. \quad (19.45)$$

Это уравнение, демонстрирующее аномальное несохранение четырехмерного аксиального тока, известно как аномалия Адлера–Белла–Джэкива. Адлер и Бардин доказали, что это операторное соотношение в действительности правильно во всех порядках теории возмущений КЭД и все радиационные поправки к нему равны нулю\*.

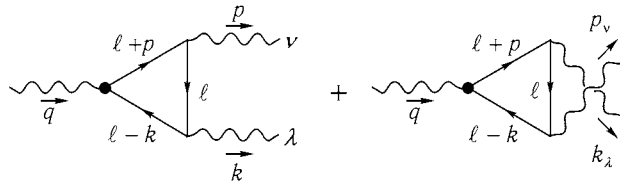


Рис. 19.4. Диаграммы, дающие вклад в двухфотонный матричный элемент дивергенции аксиального тока.

### Треугольные диаграммы

Мы можем подтвердить соотношение Адлера–Белла–Джэкива проверкой по стандартной теории возмущений, что дивергенция аксиального тока имеет ненулевой матричный элемент для рождения двух фотонов. Для этого нужно проанализировать матричный элемент:

$$\int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle p, k | j^{\mu 5}(x) | 0 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-q) \varepsilon_\nu^*(p) \varepsilon_\lambda^*(k) \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(p, k). \quad (19.46)$$

Диаграммы, дающие главный вклад в  $\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}$ , показаны на рис. 19.4. Первая диаграмма дает вклад

$$= (-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \gamma^5 \frac{i(\not{\ell} - \not{k})}{(\ell - k)^2} \gamma^\lambda \frac{i\not{\ell}}{\ell^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{\ell} + \not{p})}{(\ell + p)^2} \right], \quad (19.47)$$

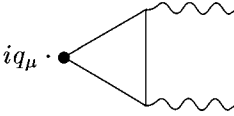
вторая диаграмма дает идентичный вклад с переставленными  $(p, \nu)$  и  $(k, \lambda)$ .

Легко дать формальное доказательство того, что матричный элемент дивергенции аксиального тока в этом порядке равен нулю. Взятие дивергенции аксиального тока в (19.46) эквивалентно умножению этой величины на  $iq_\mu$ . Преобразуем правую часть (19.47) так же, как это делалось при доказательстве тождества Уорда. Заменим

$$q_\mu \gamma^\mu \gamma^5 = (\not{q} + \not{p} - \not{q} + \not{k}) \gamma^5 = (\not{q} + \not{p}) \gamma^5 + \gamma^5 (\not{q} - \not{k}). \quad (19.48)$$

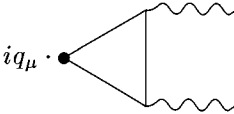
\*S. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969); S. Adler, in Deser, et. al. (1970).

Каждый импульсный множитель, комбинируя с сопряженным ему числителем, сокращает соответствующий знаменатель. Это приводит (19.47) к виду



$$= e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^5 \frac{(\not{\ell} - \not{k})}{(\ell - k)^2} \gamma^\lambda \frac{\not{\ell}}{\ell^2} \gamma^\nu + \gamma^5 \gamma^\lambda \frac{\not{\ell}}{\ell^2} \gamma^\nu \frac{(\not{\ell} + \not{p})}{(\ell + p)^2} \right]. \quad (19.49)$$

Теперь во втором члене протащим  $\gamma^\nu$  через  $\gamma^5$  и сделаем сдвиг в интеграле от первого слагаемого, заменив  $\ell \rightarrow (\ell + k)$ :



$$= e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^5 \frac{\not{\ell}}{\ell^2} \gamma^\lambda \frac{(\not{\ell} + \not{k})}{(\ell + k)^2} \gamma^\nu - \gamma^5 \frac{\not{\ell}}{\ell^2} \gamma^\nu \frac{(\not{\ell} + \not{p})}{(\ell + p)^2} \gamma^\lambda \right]. \quad (19.50)$$

Это выражение явно антисимметрично относительно перестановки  $(p, \nu)$  и  $(k, \lambda)$ , поэтому вклад второй диаграммы рис. 19.4 в точности сокращает (19.47). Однако поскольку этот вывод использует сдвиг переменной интегрирования, следует проверить, разрешен ли такой сдвиг процедурой регуляризации. Из (19.47) видно, что интеграл, который следует подвергнуть сдвигу, расходуется. Если диаграмма регуляризована простым обрезанием по импульсу или даже по Паули–Вилларсу, оказывается, что сдвиг приводит к появлению конечного слагаемого. В гл. 7 при обсуждении диаграммы вакуумной поляризации в КЭД рассматривалась похожая задача. Мы обошли эту проблему, используя метод размерной регуляризации. Размерная регуляризация диаграмм рис. 19.4 автоматически обеспечивала выполнение тождеств Уорда для вершин, описывающих испускание фотонов:

$$p_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = k_\lambda \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (19.51)$$

Но при анализе аксиального тока даже в схеме размерной регуляризации возникает дополнительная сложность, связанная с тем, что  $\gamma^5$  является существенно четырехмерным объектом. В своей первой статье по размерной регуляризации\* 'т Хофт и Вельтман предложили использовать в  $d$  измерениях следующее определение:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (19.52)$$

В силу этого определения  $\gamma^5$  антикоммутирует с  $\gamma^\mu$  для  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , но коммутирует с  $\gamma^\mu$  для других значений  $\mu$ .

При вычислении (19.47) все внешние индексы и импульсы  $p, k, q$  принадлежат четырем физическим измерениям, но петлевой импульс  $\ell$  имеет компоненты во всех измерениях. Запишем

$$\ell = \ell_{\parallel} + \ell_{\perp}, \quad (19.53)$$

где первое слагаемое имеет ненулевые компоненты в размерностях 0, 1, 2, 3, а второе — ненулевые компоненты в остальных  $d - 4$  измерениях. Так как  $\gamma^5$  в этих дополнительных измерениях коммутирует с  $\gamma^\mu$ , тождество (19.48) превращается в

$$q_\mu \gamma^\mu \gamma^5 = (\not{\ell} + \not{k}) \gamma^5 + \gamma^5 (\not{\ell} - \not{p}) - 2\gamma^5 \not{\ell}_{\perp}. \quad (19.54)$$

\*G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* B44, 189 (1972).

Первые два слагаемых сокращаются в соответствии с приведенными выше рассуждениями, сдвиг в (19.50) оправдан размерной регуляризацией. Однако третье слагаемое в (19.54) дает дополнительный вклад:

$$i q_\mu \cdot \text{Diagram} = e^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ -2\gamma^5 \not{\ell}_\perp \frac{(\not{\ell} - \not{k})}{(\ell - k)^2} \gamma^\lambda \frac{\not{\ell}}{\ell^2} \gamma^\nu \frac{(\not{\ell} + \not{p})}{(\ell + p)^2} \right]. \quad (19.55)$$

Для вычисления этого вклада скомбинируем стандартным способом знаменатели и сдвинем переменную интегрирования  $\ell \rightarrow \ell + P$ , где  $P = xk - yp$ . При разложении числителя, чтобы получить ненулевой след с  $\gamma^5$ , нужно удержать только по одному множителю  $\gamma^\nu$ ,  $\gamma^\lambda$ ,  $\not{p}$  и  $\not{k}$ . Остаются один множитель  $\not{\ell}_\perp$  и  $\not{\ell}$ , которые для того, чтобы дать ненулевой интеграл, должны вычисляться с компонентами в дополнительных размерностях. Множители  $\not{\ell}_\perp$  антикоммутируют с другими матрицами Дирака задачи и поэтому могут быть сдвинуты на соседние позиции. Остается вычислить интеграл

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\not{\ell}_\perp \not{\ell}_\perp}{(\ell^2 - \Delta)^3}, \quad (19.56)$$

где  $\Delta$  — функция от  $k$ ,  $p$  и фейнмановских параметров. Используя

$$(\not{\ell}_\perp)^2 = \ell_\perp^2 \rightarrow \frac{(d-4)}{d} \ell^2 \quad (19.57)$$

при симметричном интегрировании, можно вычислить (19.56):

$$\frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(d-4)}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)\Delta^{2-d/2}} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{-i}{2(4\pi)^2}. \quad (19.58)$$

Отметим поведение, при котором логарифмически расходящийся интеграл содержит множитель  $(d-4)$  в знаменателе, позволяя формально пропорциональному  $(d-4)$  аномальному слагаемому дать конечный вклад. Оставшиеся при вычислении (19.55) алгебраические преобразования просты. Слагаемые, содержащие сдвиг импульса на  $P$ , сокращаются, и мы получаем:

$$i q_\mu \cdot \text{Diagram} = e^2 \left( \frac{-i}{2(4\pi)^2} \right) \text{tr} [2\gamma^5 (-\not{k}) \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\nu] = \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\lambda\beta\nu} k_\alpha p_\beta. \quad (19.59)$$

Это выражение симметрично относительно перестановки  $(p, \nu)$  с  $(k, \lambda)$ , поэтому вторая диаграмма рис. 19.4 дает такой же вклад. В результате

$$\begin{aligned} \langle p, k | \partial_\mu j^{\mu 5}(0) | 0 \rangle &= -\frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} (-ip_\alpha) \varepsilon_\nu^*(p) (-ik_\beta) \varepsilon_\lambda^*(k) = \\ &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \langle p, k | \varepsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} F_{\alpha\nu} F_{\beta\lambda}(0) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (19.60)$$

как и следовало ожидать из выражения для аномалии Адлера–Белла–Джэкива.

### Киральное преобразование функционального интеграла

Третий способ понять аномалии Адлера–Белла–Джэкива основан на анализе закона сохранения аксиального тока в функциональном интеграле по фермионным полям. В разделе 9.6 мы использовали функциональный интеграл для получения уравнений сохранения тока и тождеств Уорда, связанных с симметриями лагранжиана. Поучительно увидеть, как нарушается это рассуждение, если оно применяется к киральной симметрии безмассовых фермионов. Сначала рассмотрим стандартный вывод тождеств Уорда для аксиального тока, следуя методу раздела 9.6. Исходя из выражения для фермионного функционального интеграла

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ i \int d^4x \bar{\psi} (i\not{D}) \psi \right], \quad (19.61)$$

сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma^5)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(1 + i\alpha(x)\gamma^5). \end{aligned} \quad (19.62)$$

Так как глобальный киральный поворот с постоянной величиной  $\alpha$  является симметрией лагранжиана, только новые члены в лагранжиане, которые появляются при (19.62), содержат производные от  $\alpha$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{\psi}'(i\not{D})\psi' &= \int d^4x [\bar{\psi}(i\not{D})\psi - \partial_\mu \alpha(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi] = \\ &= \int d^4x [\bar{\psi}(i\not{D})\psi + \alpha(x) \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi)]. \end{aligned} \quad (19.63)$$

Варируя лагранжиан по  $\alpha(x)$ , получаем классическое уравнение сохранения для аксиального тока. Проводя манипуляции, аналогичные сделанным в (9.102), с функциональными выражениями для корреляционных функций, можно вывести соответствующие тождества Уорда.

В изложенном только что выводе мы предположили, что функциональная мера не меняется при замене переменных  $\psi'(x)$  на  $\psi$ . Это кажется правильным, потому что соотношение между  $\psi'$  и  $\psi$  в (19.62) выглядит как унитарное преобразование. Но этот пункт нуждается в более точном анализе\*. Сначала нужно аккуратно определить функциональную меру. Для этого разложим фермионное поле по базису собственных состояний  $\not{D}$ . Определим правые и левые собственные векторы  $\not{D}$

$$(i\not{D})\phi_m = \lambda_m \phi_m, \quad \hat{\phi}_m(i\not{D}) = -iD_\mu \hat{\phi}_m \gamma^\mu = \lambda_m \hat{\phi}_m. \quad (19.64)$$

Для нулевого фонового поля  $A_\mu$  эти собственные состояния являются дираковскими волновыми функциями с определенным импульсом. Собственные значения удовлетворяют условию:

$$\lambda_m^2 = k^2 = (k^0)^2 - (\mathbf{k})^2. \quad (19.65)$$

Для фиксированного поля  $A_\mu$  они также являются асимптотической формой собственных значений при больших  $k$ . Эти собственные функции образуют базис, по которому

\*К. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979); *Phys. Rev.* **D21**, 2848 (1980). Несколько раньше этот вывод аномалии был открыт С. Н. Вергелесом и применен А. А. Мигдалом, который со ссылкой на С. Н. Вергелеса использовал его в своей работе *Phys. Lett.* **81B**, 27 (1979). — *Прим. ред. перев.*



можно разложить  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\psi(x) = \sum_m a_m \phi_m(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \hat{a}_m \hat{\phi}_m(x), \quad (19.66)$$

где  $a_m, \hat{a}_m$  — антикоммутирующие коэффициенты, на которые умножаются с-числовые собственные функции (19.64). Функциональная мера на  $\psi, \bar{\psi}$  может быть тогда определена как

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_m da_m d\hat{a}_m \quad (19.67)$$

(аналогично — функциональная мера на  $\psi', \bar{\psi}'$ ).

Если  $\psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma^5)\psi(x)$ , коэффициенты разложения  $\psi$  и  $\psi'$  связаны следующим инфинитезимальным линейным преобразованием  $(1 + C)$ :

$$a'_m = \sum_n \int d^4x \phi_m^\dagger(x) (1 + i\alpha(x)\gamma^5) \phi_n(x) a_n = \sum_n (\delta_{mn} + C_{mn}) a_n. \quad (19.68)$$

Тогда

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \mathcal{J}^{-2} \cdot \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (19.69)$$

где  $\mathcal{J}$  — детерминант якобиана преобразования  $(1 + C)$ . Обратный оператор к  $\mathcal{J}$  появляется в (19.69) как результат правила (9.63) или (9.69) для фермионного интегрирования. Для вычисления  $\mathcal{J}$  запишем:

$$\mathcal{J} = \det(1 + C) = \exp[\text{tr} \ln(1 + C)] = \exp\left[\sum_n C_{nn} + \dots\right], \quad (19.70)$$

где можно игнорировать члены высших порядков в последней строке, т.к.  $C$  бесконечно мала. Поэтому

$$\ln \mathcal{J} = i \int d^4x \alpha(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 \phi_n(x). \quad (19.71)$$

Коэффициент при  $\alpha(x)$  выглядит как  $\text{tr}[\gamma^5] = 0$ . Но мы должны регуляризовать сумму по собственным состояниям  $n$  калибровочно-инвариантным способом. Естественный выбор таков:

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 \phi_n(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 \phi_n(x) e^{\lambda_n^2/M^2}. \quad (19.72)$$

Как указывает (19.65), при больших импульсах после поворота Вика знак  $\lambda_n^2$  будет отрицательным. Поэтому знак в экспоненте сходящегося множителя задан правильно. Выражение (19.72) можно записать в операторной форме:

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 \phi_n(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma^5 e^{(i\not{D})^2/M^2} \phi_n(x) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \langle x | \text{tr} [\gamma^5 e^{(i\not{D})^2/M^2}] | x \rangle, \end{aligned} \quad (19.73)$$

где во второй строке идет суммирование по дираковским индексам. Для вычисления (19.73) перепишем  $(i\not{D})^2$  в соответствии с (16.107). В новых обозначениях это уравнение имеет вид:

$$(i\not{D})^2 = -D^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (19.74)$$

с  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Так как берется предел  $M \rightarrow \infty$ , можно ограничиться рассмотрением асимптотической части спектра, где импульс  $k$  велик и можно разложить по степеням калибровочного поля. Для получения ненулевого следа с  $\gamma^5$  нужно получить четыре матрицы Дирака из экспоненты. Главное слагаемое дается разложением экспоненты до порядка  $(\sigma \cdot F)^2$ , и игнорированием фонового поля  $A_\mu$  во всех остальных слагаемых. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \langle x | \text{tr} [\gamma^5 e^{(-\not{\partial}^2 + (e/2)\sigma \cdot F)/M^2}] | x \rangle = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left[ \gamma^5 \frac{1}{2!} \left( \frac{e}{2M^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right)^2 \right] \langle x | e^{-\not{\partial}^2/M^2} | x \rangle. \end{aligned} \quad (19.75)$$

Матричный элемент в (19.75) может быть вычислен с помощью виковского поворота:

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-\not{\partial}^2/M^2} | x \rangle = \lim_{x \rightarrow y} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} e^{k^2/M^2} = \\ = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{-k_E^2/M^2} = i \frac{M^4}{16\pi^2}. \end{aligned} \quad (19.76)$$

Тогда (19.75) сводится к

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-ie^2}{8 \cdot 16\pi^2} M^4 \text{tr} \left[ \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \frac{1}{(M^2)^2} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}(x) \right] = \\ = -\frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (19.77)$$

Поэтому

$$\mathcal{J} = \exp \left[ -i \int d^4 x \alpha(x) \left( \frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}(x) \right) \right]. \quad (19.78)$$

В результате находим, что после замены переменных (19.62) функциональный интеграл (19.61) имеет вид:

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ i \int d^4 x \left( \bar{\psi}(i\not{D})\psi + \alpha(x) \left\{ \partial_\mu j^{\mu 5} + \frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \right\} \right) \right]. \quad (19.79)$$

Варьируя экспоненту по  $\alpha(x)$ , приходим в точности к уравнению аномалии Адлера–Белла–Джэкива.

Этот вывод аксиальной аномалии особенно интересен потому, что он легко обобщается на любые четные размерности. Функциональный вывод всегда выделяет в правой стороне уравнения для аномалии псевдоскалярный оператор, построенный из калибровочного поля и имеющий ту же размерность  $d$ , что и дивергенция тока. В двух измерениях этот вывод приводит сразу к (19.18). Пока  $d$  четно, всегда можно построить

антикоммутирующую со всеми матрицами Дирака матрицу  $\gamma^5$ , беря их произведение. Тогда функциональный вывод непосредственно приводит к результату:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = (-1)^{n+1} \frac{2e^n}{n!(4\pi)^n} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}} F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}}, \quad (19.80)$$

где  $n = d/2$ .

В конце предыдущего раздела было показано, что аксиальная аномалия в двумерной системе с макроскопическим электрическим полем приводит к глобальному несохранению фермионных зарядов. Аналогично, четырехмерное уравнение аномалии ведет к глобальному несохранению числа левых и правых фермионов в фоновых полях, в которых правая часть (19.45) не равна нулю. Таковыми являются полевые конфигурации с параллельными электрическими и магнитными полями. В задаче 19.1 рассматривается простой подобный пример для четырехмерных безмассовых фермионов и показывается, что числа фермионов не сохраняются по причине, аналогичной той, которую мы обсуждали в конце раздела 19.1 в связи с аномалией Адлера–Белла–Джэкива.

### 19.3. Голдстоуновские бозоны и киральные симметрии в КХД

Аномалия Адлера–Белла–Джэкива имеет ряд важных приложений в КХД. Для их описания сначала нужно детально рассмотреть киральные симметрии в КХД. При рассмотрении будут учитываться только самые легкие кварки  $u$  и  $d$ . Во многих исследованиях низкоэнергетической структуры сильных взаимодействий  $s$ -кварк также рассматривают как легкий. Это приводит к результатам, естественно обобщающим те, которые будут найдены ниже.

Фермионная часть лагранжиана КХД имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{u}i\not{D}u + \bar{d}i\not{D}d - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d. \quad (19.81)$$

Если  $u$ - и  $d$ -кварки очень легкие, два последних слагаемых малы, и ими можно пренебречь. Рассмотрим следствия такого приближения. Если пренебречь массами  $u$ - и  $d$ -кварков, лагранжиан (19.81) будет, конечно, обладать изоспиновой симметрией, т. е. симметрией относительно унитарных преобразований  $SU(2)$ , смешивающих поля  $u$  и  $d$ . Однако, так как классический лагранжиан безмассовых фермионов не содержит взаимодействия между левыми и правыми кварками, этот лагранжиан на самом деле симметричен относительно отдельных унитарных преобразований

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \rightarrow U_R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R. \quad (19.82)$$

Удобно разделить  $U(1)$ - и  $SU(2)$ -части этих преобразований. Тогда группа симметрии классического, безмассового лагранжиана КХД равна  $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$ . Пусть  $Q$  обозначает кварковый дублет с киральными компонентами

$$Q_L = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad Q_R = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (19.83)$$

Тогда можно записать токи, связанные с этими симметриями, в виде:

$$\begin{aligned} j_L^\mu &= \bar{Q}_L \gamma^\mu Q_L, & j_R^\mu &= \bar{Q}_R \gamma^\mu Q_R, \\ j_L^{\mu a} &= \bar{Q}_L \gamma^\mu \tau^a Q_L, & j_R^{\mu a} &= \bar{Q}_R \gamma^\mu \tau^a Q_R, \end{aligned} \quad (19.84)$$

где  $\tau^a = \sigma^a/2$  — генераторы  $SU(2)$ . Суммы левых и правых токов дают, соответственно, токи барионного числа и изоспина:

$$j^\mu = \bar{Q}\gamma^\mu Q, \quad j^{\mu a} = \bar{Q}\gamma^\mu \tau^a Q. \quad (19.85)$$

Соответствующие симметрии — это преобразования (19.82) с  $U_L = U_R$ . Разности токов (19.84) дают соответствующие аксиальные токи  $j^{\mu 5}$ ,  $j^{\mu 5a}$ :

$$j^{\mu 5} = \bar{Q}\gamma^\mu \gamma^5 Q, \quad j^{\mu 5a} = \bar{Q}\gamma^\mu \gamma^5 \tau^a Q. \quad (19.86)$$

Далее, при рассмотрении выводов, касающихся сильных взаимодействий, предположим, что классические законы сохранения для этих токов не нарушаются аномалиями. Мы покажем ниже, что это допущение правильно для изотриплетных токов  $j^{\mu 5a}$ , но не для  $j^{\mu 5}$ .

Векторные преобразования  $SU(2) \times U(1)$  представляют явные симметрии сильных взаимодействий, и соответствующие токи приводят к известным законам сохранения. Что можно сказать об ортогональных, аксиальных, преобразованиях? Они не соответствуют никаким очевидным симметриям сильных взаимодействий. В 1960 г. Намбу и Йона-Лазинио высказали гипотезу, что аксиальные преобразования являются точными спонтанно нарушенными симметриями сильных взаимодействий\*. Эта идея привела к правильному и удивительно детальному описанию свойств сильных взаимодействий при низких энергиях.

### Спонтанное нарушение киральной симметрии

Прежде чем описывать следствия спонтанного нарушения симметрии, спросим себя, почему можно ожидать, что киральные симметрии сначала должны спонтанно нарушаться. В теории сверхпроводимости слабое электрон-электронное притяжение приводит к появлению в основном состоянии металла конденсата электронных пар. В КХД кварки и антикварки обладают сильным притягивающим взаимодействием и, если эти кварки безмассовые, энергия образования дополнительной кварк-антикварковой пары мала. Поэтому можно ожидать, что вакуум КХД будет содержать конденсат кварк-антикварковых пар. Эти фермионные пары должны иметь нулевые полные импульс и момент импульса. Поэтому, как показывает рис. 19.5, при спаривании левых кварков с античастицами правых кварков пары должны иметь ненулевой киральный заряд. Вакуумное состояние с конденсатом кварковых пар характеризуется ненулевым вакуумным средним скалярного оператора:

$$\langle 0 | \bar{Q}Q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{Q}_L Q_R + \bar{Q}_R Q_L | 0 \rangle \neq 0, \quad (19.87)$$

который преобразуется по закону (19.82) с  $U_L \neq U_R$ . Такое ненулевое среднее значение означает, что вакуум смешивает две кварковые спиральности. Это позволяет  $u$ - и  $d$ -кваркам при движении через вакуум приобретать эффективные массы. Внутри кварк-антикварковых связанных состояний  $u$ - и  $d$ -кварки будут двигаться так, как будто они имеют конечную эффективную массу, даже если они имели нулевую массу в исходном лагранжиане КХД.

Вакуумное среднее (19.87) сигнализирует о спонтанном нарушении полной группы симметрии (19.82) до подгруппы векторных симметрий с  $U_L = U_R$ . Поэтому имеются четыре спонтанно нарушенные непрерывные симметрии, связанные с четырьмя аксиальными токами. В конце раздела 11.1 была доказана теорема Голдстоуна, утверждающая, что в квантовой теории поля каждая спонтанно нарушенная непрерывная

\*Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).

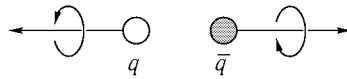


Рис. 19.5. Кварк-антикварковая пара с полными нулевыми импульсом и моментом импульса.

симметрия приводит к возникновению безмассовой частицы с квантовыми числами, отвечающими локальному преобразованию симметрии. Это означает, что в КХД с безмассовыми  $u$ - и  $d$ -кварками должны существовать четыре частицы со спином нуль и с квантовыми числами, соответствующими четырем аксиальным токам.

Реальные сильные взаимодействия не содержат никаких безмассовых частиц, но содержат изоспиновый триплет относительно легких мезонов — пионов. Эти частицы имеют отрицательную внутреннюю четность (как и должно быть, если они являются связанными состояниями кварка-антикварка). Поэтому они могут быть рождены аксиальными изоспиновыми токами. Матричный элемент  $j^{\mu 5a}$  между вакуумом и пионом на массовой поверхности можно параметризовать следующим образом

$$\langle 0 | j^{\mu 5a}(x) | \pi^b(p) \rangle = -i p^\mu f_\pi \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}, \quad (19.88)$$

где  $a, b$  — изоспиновые индексы, а  $f_\pi$  — константа с размерностью (масса)<sup>1</sup>. В задаче 19.2 показано, что значение  $f_\pi$  может быть определено из вероятности распада  $\pi^+$ , индуцированного слабым взаимодействием; оно равно  $f_\pi = 93$  МэВ. По этой причине  $f_\pi$  часто называют *константой пионного распада*. Если свернуть (19.88) с  $p_\mu$  и использовать сохранение аксиальных токов, то получится, что импульс пиона на массовой поверхности должен удовлетворять условию  $p^2 = 0$ , т. е. пион должен быть безмассовым, как и требуется теоремой Голдстоуна.

Если теперь восстановить в (19.81) кварковые массовые слагаемые, то аксиальные токи уже не будут точно сохраняться. Теперь уравнение движения кваркового поля имеет вид:

$$i \not{D} Q = \mathbf{m} Q, \quad -i D_\mu \bar{Q} \gamma^\mu = \bar{Q} \mathbf{m}, \quad (19.89)$$

где

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \quad (19.90)$$

есть матрица кварковых масс. Тогда можно найти, что

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = i \bar{Q} \{ \mathbf{m}, \tau^a \} Q. \quad (19.91)$$

Используя это уравнение вместе с (19.88), находим:

$$\langle 0 | \partial_\mu j^{\mu 5a}(0) | \pi^b(p) \rangle = -p^2 f_\pi \delta^{ab} = \langle 0 | i \bar{Q} \{ \mathbf{m}, \tau^a \} \gamma^5 Q | \pi^b(p) \rangle. \quad (19.92)$$

Последнее выражение есть инвариантная величина, умноженная на

$$\text{tr} [\{ \mathbf{m}, \tau^a \} \tau^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} (m_u + m_d). \quad (19.93)$$

Поэтому кварковые массовые слагаемые приводят к значениям пионных масс

$$m_\pi^2 = (m_u + m_d) \frac{M^2}{f_\pi}. \quad (19.94)$$

Оценки массового параметра  $M$  дали значение порядка 400 МэВ. Для того чтобы получить наблюдаемую массу пиона 140 МэВ, нужно, чтобы  $(m_u + m_d) \sim 10$  МэВ. Это соответствует малому возмущению сильных взаимодействий.

Приведенные рассуждения имеют интересное применение, касающееся природы изоспиновой симметрии сильных взаимодействий.

В пределе нулевой массы  $u$ - и  $d$ -кварков в лагранжиане, эти кварки приобретают в вакууме со спонтанно нарушенной киральной симметрией большие, равные эффективные массы. Пока массы  $m_u$  и  $m_d$  в лагранжиане малы по сравнению с эффективной массой,  $u$ - и  $d$ -кварки будут вести себя внутри адронов как приближенно вырожденные. Поэтому изоспиновая симметрия сильных взаимодействий может и не иметь ничего общего с фундаментальной симметрией, связывающей  $u$  и  $d$ ; эта симметрия следует при произвольном соотношении между  $m_u$  и  $m_d$ , если только оба параметра много меньше 300 МэВ. Аналогично, приближенная  $SU(3)$  симметрия сильных взаимодействий имеет место, если фундаментальная масса  $s$ -кварка также много меньше массового масштаба сильного взаимодействия. Наилучшие имеющиеся оценки отношения масс  $m_u : m_d : m_s$  равны 1 : 2 : 40, так что фундаментальный лагранжиан сильных взаимодействий не содержит никакого намека на симметрию кварковых масс по аромату\*.

Рассмотрение пионов как голдстоуновских бозонов нарушенной киральной симметрии имеет много применений к адронным матричным элементам. Приведем только один пример. Ниже рассматривается предел точной киральной симметрии и пренебрегается малыми поправками, вызванными массами  $u$  и  $d$ .

Величина, которая входит в теорию  $\beta$ -распада нейтронов и ядер, — матричный элемент аксиального изоспинового тока в ядре, может быть записан через форм-факторы в виде:

$$\langle N | j^{\mu 5a}(q) | N \rangle = \bar{u} \left[ \gamma^\mu \gamma^5 F_1^5(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2^5(q^2) + q^\mu \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u. \quad (19.95)$$

Кинематика вершины показана на рис. 19.6. Отметим, что по сравнению с векторным случаем имеется еще один возможный форм-фактор (6.33). Значение  $F_1^5$  при  $q^2 = 0$  не ограничено никаким значением явно сохраняющегося заряда. Обычно просто пишут:

$$F_1^5(0) = g_A. \quad (19.96)$$

Покажем, что значение этой величины может быть вычислено.

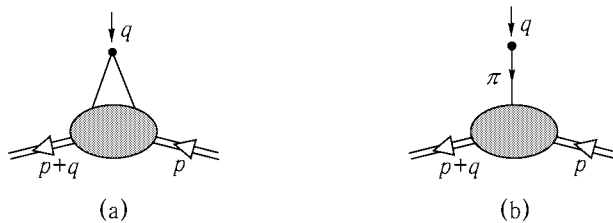


Рис. 19.6. Матричный элемент аксиального изоспинового тока в ядре: (а) кинематика амплитуды; (б) вклад, дающий полюс при  $q^2$ .

Если пренебречь массами кварков, аксиальный ток в (19.95) сохраняется, поэтому

\* Определение фундаментальных кварковых масс см. в обзоре J. Gasser and H. Leutwyler, *Phys. Repts.* 8, 77 (1982).

форм-факторы удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned}
 0 &= \bar{u}(p') \left[ \not{q} \gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u(p) = \\
 &= \bar{u}(p') \left[ (\not{p}' - \not{p}) \gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u(p) = \\
 &= \bar{u}(p') \left[ 2m_N \gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u(p).
 \end{aligned} \tag{19.97}$$

В результате находим:

$$g_A = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{q^2}{2m_N} F_3^5(q^2). \tag{19.98}$$

Из этого уравнения вытекает, что  $g_A = 0$ , кроме случая, когда  $F_3^5$  содержит полюс при  $q^2$ . Такой полюс означал бы существование физической безмассовой частицы. К счастью, одна такая имеется — это безмассовый пион. Действительно, процесс, в котором ток излучает пион, поглощаемый затем ядром, приводит к полюсу  $F_3^5(q^2)$ , как показано на рис. 19.6(b).

Теперь вычислим это полюсное слагаемое и используем его для определения  $g_A$ . Считается, что низкоэнергетическое пион-нуклонное взаимодействие описывается лагранжианом

$$\Delta \mathcal{L} = i g_{\pi NN} \bar{N} \pi^a \overline{N} \gamma^5 \sigma^a N. \tag{19.99}$$

Амплитуда рождения пиона током  $j^{\mu 5a}$  дается (19.88). Тогда вклад рис. 19.6(b) в токовую вершину равен:

$$-g_{\pi NN} \bar{u}(2\tau^a \gamma^5) u \cdot \frac{i}{q^2} \cdot (i q^\mu f_\pi). \tag{19.100}$$

Поэтому

$$F_3^5(q^2) = \frac{1}{q^2} \cdot 2 f_\pi g_{\pi NN}. \tag{19.101}$$

Мы видим, что  $g_A$  дается комбинацией  $f_\pi$ , массы нуклона и пион-нуклонной константой взаимодействия:

$$g_A = \frac{f_\pi}{m_N} g_{\pi NN}. \tag{19.102}$$

Это удивительное тождество, называемое *соотношением Голдбергера – Треймана*, удовлетворяется экспериментально с точностью 5%. отождествление пиона с голдстоуновским бозоном спонтанно нарушенной киральной симметрии ведет к многочисленным другим предсказаниям для матричных элементов тока и пионных амплитуд рассеяния. В частности, ведущие слагаемые пион-пионных и пион-нуклонных амплитуд рассеяния при низких энергиях могут быть выражены через  $f_\pi$  по аналогии с только что приведенными вычислениями\*.

\* Детальные следствия спонтанно нарушенной киральной симметрии весьма ясно изложены в Georgi (1984).

### Аномалии киральных токов

До этого места мы обсуждали киральные симметрии КХД на основе классических уравнений сохранения токов. Теперь следует спросить, как влияет на эти уравнения аномалия Адлера–Белла–Джэкива и к каким следствиям это приводит.

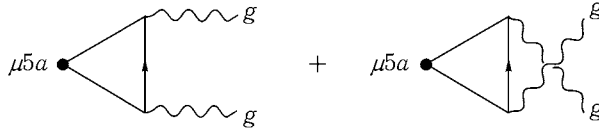


Рис. 19.7. Диаграммы, описывающие аксиальную аномалию кирального тока в КХД.

Сначала изучим модификацию киральных законов сохранения за счет взаимодействия кварковых токов с глюонными полями КХД. Рассуждения предыдущего раздела столь же хорошо применимы и в случае безмассовых фермионов, взаимодействующих с неабелевым калибровочным полем. Поэтому можно ожидать, что аксиальный ток получит аномальный вклад из диаграмм, изображенных на рис. 19.7. Уравнение аномалии должно совпадать с результатом для абелевой симметрии, дополненным соответствующим теоретико-групповым множителем. К тому же, так как аксиальный ток калибровочно-инвариантен, аномалия тоже должна быть калибровочно-инвариантной. Это означает, что она должна содержать полную неабелеву напряженность поля, включая ее нелинейные слагаемые. Эти слагаемые в действительности уже были учтены в функциональном выводе аномалии, данном в конце раздела 19.2.

Для аксиальных токов в КХД, выписанных в (19.86), теоретико-групповые факторы для аномалии Адлера–Белла–Джэкива могут быть найдены из диаграмм рис. 19.7. Для аксиальных изоспиновых токов

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^d \cdot \text{tr}[\tau^a t^c t^d], \quad (19.103)$$

где  $F_{\mu\nu}^c$  — напряженность глюонного поля,  $\tau^a$  — изоспиновая матрица,  $t^c$  — цветная матрица и след берется по цветам и ароматам. В этом случае имеем

$$\text{tr}[\tau^a t^c t^d] = \text{tr}[\tau^a] \text{tr}[t^c t^d] = 0, \quad (19.104)$$

так как след одной матрицы  $\tau^a$  равен нулю. Следовательно, аномалия Адлера–Белла–Джэкива не влияет на сохранение аксиальных изоспиновых токов в КХД. Но в случае изоспин-синглетного аксиального тока матрица  $\tau^a$  заменяется единичной матрицей по ароматам и тогда

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{g^2 n_f}{32\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c, \quad (19.105)$$

где  $n_f$  — число ароматов. В рассматриваемой модели  $n_f = 2$ . Итак, изоспин-синглетный аксиальный ток в КХД в действительности не сохраняется. Дивергенция этого тока равна глюонному оператору с нетривиальными матричными элементами между адронными состояниями. Остаются некоторые тонкие вопросы, относящиеся к эффектам этого оператора. В частности, можно показать, как мы видели в (19.31) для двумерной аксиальной аномалии, что правая часть (19.105) представляет полную дивергенцию. Тем не менее, опять в согласии с нашим опытом в двух измерениях, имеются физически приемлемые полевые конфигурации, на которых четырехмерный



интеграл от этого слагаемого принимает ненулевое значение. Эта тема будет рассмотрена ниже, в конце раздела 22.3. В любом случае (19.105) означает, что КХД не имеет ни изосинглетной аксиальной симметрии, ни ассоциированного голдстоуновского бозона. Это уравнение объясняет, почему сильные взаимодействия не содержат легкого изосинглетного псевдоскалярного мезона с массой, сравнимой с массой пиона.

Хотя аксиальные изоспиновые токи не имеют аксиальной аномалии из-за КХД взаимодействий, они имеют аномалию, связанную с взаимодействием кварков с электромагнетизмом. Опять обращаясь к диаграммам рис. 19.7, видим, что электромагнитная аномалия аксиальных изоспиновых токов:

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \cdot \text{tr}[\tau^a Q^2], \quad (19.106)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — напряженность электромагнитного поля,  $Q$  — матрица электрических зарядов кварков,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (19.107)$$

а след опять берется по ароматам и цветам. Так как матрицы в следе не зависят от цвета, сумма по цветам дает просто множитель 3. След по ароматам не равен нулю только для  $a = 3$ ; в этом случае электромагнитная аномалия равна

$$\partial_\mu j^{\mu 53} = -\frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}. \quad (19.108)$$

Так как ток  $j^{\mu 53}$  уничтожает  $\pi^0$ -мезон, формула (19.108) означает, что аксиальная аномалия дает вклад в матричный элемент распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ . Теперь покажем, что в действительности она дает главный вклад в эту амплитуду. Опять проводим рассуждения в пределе безмассовых  $u$ - и  $d$ -кварков, так что теория кирально симметрична с точностью до эффектов аномалии. Рассмотрим матричный элемент аксиального тока между вакуумом и двухфотонным состоянием:

$$\langle p, k | j^{\mu 53}(q) | 0 \rangle = \varepsilon_\nu^* \varepsilon_\lambda^* \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(p, k). \quad (19.109)$$

Это тот же матричный элемент (19.46), который изучался по теории возмущений КЭД в разделе 19.2. Но теперь будем изучать общие свойства этого матричного элемента, раскладывая его на форм-факторы. В общем случае амплитуда может быть разложена по всем возможным тензорным структурам с применением ограничений, которые следуют из симметрии относительно перестановки  $(p, \nu)$  и  $(k, \lambda)$  и тождеств Уорда КЭД (19.51). Это оставляет три возможные структуры:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = & q^\mu \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta \mathcal{M}_1 + (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k^\lambda - \varepsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} p^\nu) k_\alpha p_\beta \mathcal{M}_2 + \\ & + [(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p^\lambda - \varepsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} k^\nu) k_\alpha p_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (p - k)_\sigma p \cdot k] \mathcal{M}_3. \end{aligned} \quad (19.110)$$

Второе слагаемое удовлетворяет (19.51) в силу условия на массовой поверхности  $p^2 = k^2 = 0$ . Теперь для взятия дивергенции аксиального тока свернем (19.110) с  $(iq_\mu)$ . Тогда

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = iq^2 \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta \mathcal{M}_1 - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} q_\mu (p - k)_\sigma p \cdot k \mathcal{M}_3; \quad (19.111)$$

а другие слагаемые автоматически равны нулю. Это выражение можно упростить, используя  $q = p + k$ ,  $q^2 = 2p \cdot k$ ,

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = iq^2 \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_3). \quad (19.112)$$

Вся величина пропорциональна  $q^2$  и очевидно исчезает в пределе  $q^2 \rightarrow 0$ . Это противоречит предсказанию аксиальной аномалии. Беря матричный элемент правой части (19.108), находим

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta. \quad (19.113)$$

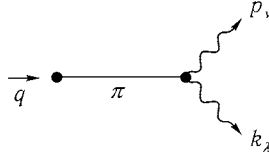


Рис. 19.8. Вклад, приводящий к полюсу в форм-факторе аксиального тока  $\mathcal{M}_1$ .

Противоречие может быть разрешено, если один из форм-факторов, появляющихся в (19.112), содержит полюс по  $q^2$ . Такой полюс может возникнуть из-за процесса, изображенного на рис. 19.8, в котором ток создает  $\pi^0$ -мезон, который затем распадается на два фотона. Амплитуда рождения мезона током дается (19.88). Параметризуем амплитуду пионного распада как

$$i\mathcal{M}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = iA \varepsilon_\nu^* \varepsilon_\lambda^* \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta, \quad (19.114)$$

где  $A$  — константа, которую нужно определить. Тогда вклад процесса на рис. 19.8 в амплитуду  $\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}$ , определенный в (19.109), равен

$$(iq^\mu f_\pi) \frac{i}{q^2} (iA \varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta). \quad (19.115)$$

Это вклад в форм-фактор  $\mathcal{M}_1$ ,

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-i}{q^2} f_\pi \cdot A, \quad (19.116)$$

плюс слагаемые, регулярные при  $q^2 = 0$ . Теперь, приравнявая (19.112) и (19.113), выражаем  $A$  через коэффициент аномалии:

$$A = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{1}{f_\pi}. \quad (19.117)$$

Из матричного элемента распада (19.114) легко найти вероятность распада  $\pi^0$ . Заметим, что хотя мы находим матричный элемент распада в пределе безмассового  $\pi^0$ , мы должны учесть физически правильную кинематику, которая зависит от массы  $\pi^0$ . Учитывая фактор  $1/2$  в фазовом пространстве тождественных частиц, находим

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) &= \frac{1}{2m_\pi} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \sum_{\text{pols.}} |\mathcal{M}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)|^2 = \\ &= \frac{1}{32\pi m_\pi} \cdot A^2 \cdot 2(p \cdot k)^2 = A^2 \cdot \frac{m_\pi^3}{64\pi}. \end{aligned} \quad (19.118)$$

Таким образом, окончательно

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{\alpha^2}{64\pi^3} \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2}. \quad (19.119)$$

Это соотношение, позволяющее непосредственно измерить коэффициент аномалии Адлера–Белла–Джэкива, выполняется экспериментально с точностью до нескольких процентов.

## 19.4. Киральные аномалии и киральные калибровочные теории

До этого места взаимодействие калибровочных полей с фермионами вводилось инвариантным по отношению к преобразованию четности способом — заменой производных в уравнении Дирака на ковариантные производные. Этот способ связывает калибровочное поле с векторным током фермионов. Но он дает только часть возможных способов взаимодействия фермионов с калибровочным полем. В этом разделе мы построим более общие, несимметричные по отношению к инверсии, взаимодействия и обсудим их связь с аксиальной аномалией.

Сосредоточимся главным образом на теориях безмассовых фермионов. Если лагранжиан не содержит фермионных массовых слагаемых, то в нем нет слагаемых, смешивающих два спиральных состояния дираковских фермионов. Поэтому в теории, содержащей безмассовые дираковские фермионы  $\psi_i$ , кинетическую энергию можно записать в спиральном базисе (3.40)

$$\mathcal{L} = \psi_{Li}^\dagger i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi_{Li} + \psi_{Ri}^\dagger i\sigma \cdot \partial \psi_{Ri}. \quad (19.120)$$

Нетрудно связать эту систему с калибровочным полем, беря левые поля  $\psi_{Li}$  в одном представлении калибровочной группы  $G$ , а правые поля — в другом представлении. Например, можно взять левые поля в представлении  $r$  группы  $G$ , а правые — инвариантными относительно  $G$ . Это дает:

$$\mathcal{L} = \psi_{Li}^\dagger i\bar{\sigma} \cdot D \psi_{Li} + \psi_{Ri}^\dagger i\sigma \cdot \partial \psi_{Ri}, \quad (19.121)$$

с  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t_r^a$ . В более привычных обозначениях (19.121) становится

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - igA_\mu^a t_r^a \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \right) \psi. \quad (19.122)$$

Легко проверить, что классический лагранжиан (19.122) инвариантен относительно локального калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \left( 1 + i\alpha^a t^a \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \right) \psi, \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c, \end{aligned} \quad (19.123)$$

которое обобщает (15.46). Так как правые поля свободны, их можно просто убрать и написать калибровочно-инвариантный лагранжиан только для левых фермионов.

Идея калибровочных полей, взаимодействующих только с левыми фермионами, играет центральную роль в построении теории слабых взаимодействий. Взаимодействие  $W$  бозонов с кварками и лептонами, описанное в (17.31), может быть получено

отождествлением левых компонент кварков и лептонов с дублетом  $SU(2)$  калибровочной симметрии

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad L_L = \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L, \quad (19.124)$$

и отождествлением  $W$  бозонов с калибровочными полями, связанными с этой  $SU(2)$  группой. В этой картине именно ограничение симметрии на левые поля приводит к спиральной структуре эффективного лагранжиана слабых взаимодействий. Мы обсудим полную модель слабых взаимодействий, использующую эту идею, в следующей главе.

Для выяснения общих свойств кирально связанных фермионов полезно переписать их лагранжиан, совершив одно дополнительное преобразование. После (3.38) мы отметили, что величина  $\sigma^2 \psi_R^*$  преобразуется при преобразованиях Лоренца как левое поле. Поэтому полезно переписать правые компоненты в (19.120) как новые левые фермионы, определяя

$$\psi'_{Li} = \sigma^2 \psi_{Ri}^*, \quad \psi'^{\dagger}_{Li} = \psi_{Ri}^T \sigma^2. \quad (19.125)$$

Это преобразование переобозначает правые фермионы как антифермионы и называет их левые античастицы новыми типами левых фермионов. Используя (3.38), можно переписать лагранжиан для правых фермионов в виде

$$\int d^4x \psi'^{\dagger}_{Ri} i\sigma \cdot \partial \psi_{Ri} = \int d^4x \psi'^{\dagger}_{Li} i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi'_{Li}. \quad (19.126)$$

Знак минус, возникающий из-за перестановки фермионов, компенсирует знак минус, появляющийся после интегрирования по частям. Отметим, что если фермионы взаимодействуют с калибровочными полями в представлении  $r$ , это преобразование изменяет ковариантную производную следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi'^{\dagger}_R i\sigma \cdot (\partial - igA^a t_r^a) \psi_R &= \psi'^{\dagger}_L i\bar{\sigma} \cdot (\partial + igA^a (t_r^a)^T) \psi'_L = \\ &= \psi'^{\dagger}_L i\bar{\sigma} \cdot (\partial - igA^a t_{\bar{r}}^a) \psi'_L. \end{aligned} \quad (19.127)$$

Поэтому новые поля  $\psi'_L$  принадлежат представлению, сопряженному  $r$ , для которого матрицы представления даются (15.82). В этих обозначениях КХД безмассовых фермионов с  $n_f$  ароматами переписывается как  $SU(3)$  калибровочная теория, описывающая взаимодействие калибровочных полей и  $n_f$  безмассовых фермионов  $\mathbb{3}$ - и  $n_f$  безмассовых фермионов в  $\bar{\mathbb{3}}$ -представлениях группы  $SU(3)$ . Наиболее общая калибровочная теория безмассовых фермионов просто помещает левые фермионы в произвольное, приводимое представление  $R$  калибровочной группы  $G$ . Мы только что показали, что переобозначение системы дираковских фермионов приводит к представлению  $R = r \oplus \bar{r}$ , *вещественному* в описанном после (15.82) смысле. Обратное, если  $R$  — не вещественное представление, тогда теория не может быть переписана в терминах дираковских фермионов и является киральной.

Переписывание (19.125) преобразует массовое слагаемое в лагранжиане КХД следующим образом:

$$m \bar{\psi}_i \psi_i = m (\psi'^{\dagger}_R \psi_L + \text{э.с.}) = -m (\psi'^T_{Li} \sigma^2 \psi_{Li} + \text{э.с.}). \quad (19.128)$$

Оно имеет вид массового слагаемого майорановского типа, которое обсуждалось в задаче 3.4. Наиболее общее массовое слагаемое, которое может быть построено только из левых фермионных полей, есть

$$\Delta \mathcal{L}_M = M_{ij} \psi'^T_{Li} \sigma^2 \psi_{Lj} + \text{э.с.} \quad (19.129)$$

Матрица  $M_{ij}$  симметрична при замене  $i \leftrightarrow j$ , т.к. минус из-за антисимметрии  $\sigma^2$  компенсируется минусом из-за перестановки фермионов. Это массовое слагаемое калибровочно-инвариантно, если  $M_{ij}$  инвариантна относительно  $G$ . Например, массовое слагаемое в (19.128) связывает 3 и  $\bar{3}$  индексы в  $SU(3)$  синглет. В общем, калибровочно-инвариантное массовое слагаемое существует, если представление, содержащее фермионы, является *строго вещественным* в смысле, описанном после формулы (15.82). В существенно киральной теории нет калибровочно инвариантного массового слагаемого. В следующей главе мы покажем, что в калибровочной теории слабых взаимодействий массовые слагаемые для кварков и лептонов запрещены калибровочной инвариантностью. Решение этой проблемы будет изложено в разделе 20.2.

На классическом уровне нет ограничений на представление  $R$  левых фермионов. Но на уровне однопетлевых поправок многие возможные варианты становятся несогласованными из-за аксиальной аномалии. Вычислим в калибровочной теории левых безмассовых фермионов диаграммы рис. 19.9, на которых внешние поля являются неабелевыми калибровочными бозонами, а отмеченная вершина представляет ток, соответствующий калибровочной симметрии:

$$j^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) t^a \psi. \tag{19.130}$$

Вершины калибровочных бозонов содержат также множители  $(1 - \gamma^5)/2$ . Три проектора могут быть переставлены и объединены в один множитель. Тогда, если регуляризовать эту диаграмму как в разделе 19.2, то слагаемое, содержащее  $\gamma^5$ , имеет аксиальную аномалию, приводящую к соотношению:

$$\langle p, \nu, b; k, \lambda, c | \partial_\mu j^{\mu a} | 0 \rangle = \frac{g^2}{8\pi^2} \varepsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} p_\alpha k_\beta \cdot \mathcal{A}^{abc}, \tag{19.131}$$

где  $\mathcal{A}^{abc}$  — след генераторов группы в представлении  $R$ :

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{tr} [t^a \{t^b, t^c\}]. \tag{19.132}$$

Из этого уравнения следует, что кроме случая, когда  $\mathcal{A}^{abc}$  равно нулю, ток  $j^{\mu a}$  не сохраняется. Множитель (19.132) полностью симметричен по  $(a, b, c)$ , поэтому это условие не зависит от того, какой ток рассматривается как внешний оператор. Как было описано в разделах 19.1 и 19.2, можно изменить регуляризацию диаграммы так, чтобы внешний ток сохранялся, но только ценой нарушения сохранения одного из других токов на диаграмме.

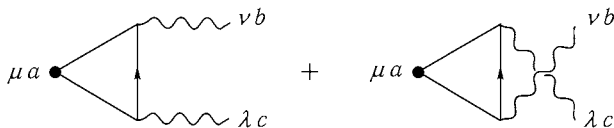


Рис. 19.9. Диаграммы, дающие вклад в аномалию тока калибровочной симметрии в киральной калибровочной теории.

Так как все построение теории с локальной калибровочной инвариантностью основано на существовании точной глобальной симметрии, нарушение сохранения  $j^{\mu a}$  нарушает и структуру теории. Например треугольные диаграммы рис. 19.9 будут теперь генерировать расходящуюся бозонную массу и будут расстраивать тонкие соотношения между трех- и четырехточечными вершинами, обсуждавшиеся в гл. 16. Эти

соотношения, следующие из тождества Уорда, были необходимы для обеспечения сокращения нефизических состояний и для унитарности  $S$ -матрицы. Единственный способ избежать этих проблем — потребовать выполнения  $\mathcal{A}^{abc} = 0$  как фундаментального условия самосогласования для киральных калибровочных теорий\*. Калибровочные теории, удовлетворяющие этому условию, называются *свободными от аномалий*.

В качестве примера применения этого условия рассмотрим прототип калибровочной теории слабых взаимодействий, представленный в (19.124). Если два калибровочных бозона на рис. 19.9 являются  $SU(2)$  калибровочными бозонами, а ток  $j^{\mu a}$  есть  $SU(2)$  калибровочный ток, то можно вычислить (19.132) подстановкой  $t^a = \tau^a = \sigma^a/2$  и использованием соотношения  $\{\sigma^b, \sigma^c\} = 2\delta^{bc}$ . Это дает:

$$\mathcal{A}^{abc} = \frac{1}{8} \text{tr}[\sigma^a \cdot 2\delta^{bc}] = 0, \quad (19.133)$$

так что условие согласованности выполняется. Если фермионы в (19.124) взаимодействуют также с электромагнитным полем, имеется дополнительное условие согласованности, которое можно найти, беря ток из рис. 19.9 в качестве электромагнитного. В этом случае множитель  $\mathcal{A}^{abc}$  равен

$$\text{tr}[Q\{\tau^b, \tau^c\}], \quad (19.134)$$

где  $Q$  — матрица электрических зарядов. Если упростить выражение, как в (19.133), след (19.134) становится равным

$$\frac{1}{2} \text{tr}[Q]\delta^{bc}. \quad (19.135)$$

Этот множитель пропорционален сумме фермионных электрических зарядов, которая не равна нулю ни для кварков, ни для лептонов. Но если просуммировать по одному кварковому и одному лептонному дублету с учетом цветового множителя 3, получим

$$\text{tr}[Q] = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + (0 - 1) = 0. \quad (19.136)$$

Примечательно, что калибровочная теория слабых взаимодействий, описываемая (19.124), может быть последовательно объединена с КЭД только, если теория содержит одинаковое число кварковых и лептонных дублетов.

Завершим этот раздел выводом более общего условия того, что киральная калибровочная теория является свободной от аномалий. Сначала найдем некоторые основные свойства аномального множителя  $\mathcal{A}^{abc}$ , а затем применим их к киральным калибровочным теориям с простыми калибровочными группами.

Если фермионное представление  $R$  вещественно, то  $R$  эквивалентно сопряженному представлению  $\bar{R}$ . Поэтому, как мы отметили после (15.82),  $t_R^a$  связано унитарным преобразованием с  $t_R^a = -(t_R^a)^T$ . Так как (19.132) инвариантно при унитарных преобразованиях  $t^a$ , можно заменить  $t_R^a$  на  $t_R^a$ . Тогда

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{tr}[(-t^a)^T \{(-t^b)^T, (-t^c)^T\}] = -\text{tr}[\{t^c, t^b\}t^a] = -\mathcal{A}^{abc}. \quad (19.137)$$

Следовательно, если  $R$  вещественно, калибровочная теория автоматически является свободной от аномалий. В частности, свободна от аномалий любая калибровочная теория дираковских фермионов. В более общей ситуации вычисление множителя  $\mathcal{A}^{abc}$  можно упростить, заметив, что это инвариант калибровочной группы  $G$ , полностью

\*D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6**, 477 (1972).

симметричный по всем трем индексам в присоединенном представлении. Для некоторых возможных групп соответствующий инвариант может не существовать, в этих случаях  $\mathcal{A}^{abc}$  должно равняться нулю. Например, в  $SU(2)$  присоединенное представление имеет спин 1. Симметричное произведение двух мультиплетов со спином 1 дает спин 0 плюс спин 2, и не содержит компоненту со спином 1. Следовательно, не существует симметричной тензорной связи двух индексов спина 1, дающих спин 1. Поэтому множитель (19.132) должен равняться нулю в любой  $SU(2)$  калибровочной теории. Мы видели, что это имеет место в конкретном примере (19.133).

В  $SU(n)$  группах,  $n \geq 3$ , имеется единственный симметричный инвариант требуемого типа  $d^{abc}$ . Он появляется в антикоммутаторе матриц фундаментального представления:

$$\{t_n^a, t_n^b\} = \frac{1}{n} \delta^{ab} + d^{abc} t_n^c. \quad (19.138)$$

Единственность этого инварианта означает, что в  $SU(n)$ -калибровочной теории любой след вида (19.132) пропорционален  $d^{abc}$ . Для каждого представления  $r$  можно определить *аномальный коэффициент*  $A(r)$

$$\text{tr}[t_r^a \{t_r^b, t_r^c\}] = \frac{1}{2} A(r) d^{abc}. \quad (19.139)$$

Для фундаментального представления из (19.138) можно увидеть, что  $A(n) = 1$ . Тогда из выкладки (19.137) следует, что

$$A(\bar{r}) = -A(r). \quad (19.140)$$

Для высших представлений аномальные коэффициенты могут быть найдены с помощью метода, аналогичного использованному в разделе 15.4 для вычисления  $C_2(r)$ . Например, в задаче 19.3 показано, что если  $a$  и  $s$  — представления  $SU(n)$ , соответствующие антисимметричным и симметричным тензорам второго ранга, то

$$A(a) = n - 4, \quad A(s) = n + 4. \quad (19.141)$$

$SU(n)$  калибровочная теория свободна от аномалий, если аномальные коэффициенты различных неприводимых компонент фермионного мультиплетта  $R$  в сумме дают нуль. Например,  $SU(n)$ -калибровочная теория левых фермионов с

$$R = a + (n - 4)\bar{n} \quad (19.142)$$

является свободной от аномалий.

Из различных простых групп Ли, перечисленных после (15.72), только  $SU(n)$ ,  $SO(4n + 2)$  и  $E_6$  имеют комплексные представления. Из них только  $SU(n)$  и  $SO(6)$ , алгебра Ли которой совпадает с алгеброй Ли  $SU(4)$ , имеют симметричный инвариант нужного для построения аномалии типа. Калибровочные теории, основанные на группах  $SO(4n + 2)$ ,  $n \geq 2$  и  $E_6$ , автоматически являются свободными от аномалий. Группы  $SO(10)$  и  $E_6$  предлагались как кандидаты для калибровочной симметрии *Великого Объединения* в физике частиц, которая будет рассматриваться в разделе 22.2.

Имеется еще одно ограничение на состав представлений киральной калибровочной теории, следующее из рассмотрения взаимодействия с гравитацией. Можно показать, что диаграммы рис. 19.9 дают вклад в аномалию, если вычисляются с калибровочным током  $j^{\mu a}$  и внешним гравитационным полем. Теоретико-групповой множитель в этом случае равен

$$\text{tr}[t_R^a]. \quad (19.143)$$

Если калибровочная группа является неабелевой, этот множитель автоматически обращается в нуль. Но если калибровочная группа содержит  $U(1)$  множители, теория не может согласованно взаимодействовать с гравитацией, кроме случая, когда каждый из генераторов  $U(1)$  является бесследовым\*. После построения последовательной киральной калибровочной теории появляется дополнительная проблема нахождения согласованного метода вычислений в этой теории. В векторноподобной калибровочной теории можно определить ультрафиолетово расходящиеся диаграммы с помощью размерной регуляризации. Это гарантирует, что расходящиеся диаграммы будут регуляризованы так, чтобы выполнялись тождества Уорда локальной калибровочной инвариантности. Для обобщения размерной регуляризации на киральные калибровочные теории нужно определить размерное продолжение  $\gamma^5$  по размерности. Использованное для определения кирального тока в разделе 19.2 определение 'т Хофта–Вельтмана не подходит, потому что оно не обеспечивает сохранение калибровочных токов. Полезный альтернативный подход состоит в формальном определении  $\gamma^5$  как объекта, который антикоммутирует со всеми  $\gamma^\mu$ . Этот подход дает однозначные калибровочно-инвариантные результаты для амплитуд, которые не пропорциональны  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ , по крайней мере до двухпетлевого уровня. В разделе 21.3 этот подход будет использован для вычисления петлевых диаграмм в теории слабых взаимодействий. Как последнее средство, всегда можно проводить вычисления с калибровочно неинвариантной регуляризацией и добавлять в теорию калибровочно неинвариантные контрчлены так, чтобы оставались справедливыми тождества Уорда калибровочной теории.

## 19.5. Аномальное нарушение масштабной инвариантности

Существует еще один важный пример симметрии, которая сохраняется на классическом уровне и нарушается квантовыми поправками. Это классическая масштабная инвариантность безмассовой теории поля с безразмерной константой связи. В гл. 12 мы видели, что квантовая теория поля без классических размерных параметров все же зависит от массового масштаба из-за регуляризации ультрафиолетовых расходимостей или, эквивалентно, через зависимость констант взаимодействий от масштаба. Мы уже видели, как следует анализировать такую индуцированную зависимость от масштаба перенормировки с помощью уравнения Каллана–Симанчика. В этом разделе мы покажем, как описать нарушение классической масштабной инвариантности квантовыми поправками в виде аномалии сохранения тока.

В этой книге мы избегали детального анализа тензора энергии-импульса квантовой теории поля. В разделе 2.2 для демонстрации того, что инвариантность квантовой теории поля при пространственно-временных трансляциях вызывает существование сохраняющегося тензора  $T^{\mu\nu}$ , была использована теорема Нетер. В разделе 9.6 был дан альтернативный вывод этого результата, использующий формализм функционального интегрирования. Но для обоснования теории масштабной инвариантности нужны более детальные свойства тензора энергии-импульса. Сейчас мы просто перечислим эти свойства, указывая, где они были получены†.

Тензор  $T^{\mu\nu}$ , определенный выражениями (2.17) и (9.99), называется *каноническим тензором энергии-импульса*. Выражения, определяющие этот тензор, не требуют, чтобы  $T^{\mu\nu}$  был симметричным. В действительности, этот тензор не обязан быть симметричным и, в рамках калибровочной теории, калибровочно-инвариантным. Но  $T^{\mu\nu}$  всег-

\*L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269 (1984).

†Свойства, представленные в трех следующих разделах, были выведены в статье С. G. Callan, S. Coleman, and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **59**, 42 (1970).



да можно преобразовать в симметричный и калибровочно-инвариантный тензор  $\Theta^{\mu\nu}$ :

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}, \quad (19.144)$$

где тензор  $\Sigma^{\mu\nu\lambda}$  антисимметричен относительно перестановки  $\mu$  и  $\lambda$ . Форма добавленного слагаемого обеспечивает сохранение  $\Theta^{\mu\nu}$ , если сохраняется  $T^{\mu\nu}$ , и неизменность полного 4-вектора энергии-импульса:

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x \Theta^{0\nu}. \quad (19.145)$$

Масштабная инвариантность скалярной теории поля может быть определена как преобразование переменных

$$\phi(x) \rightarrow e^{-D\sigma} \phi(xe^{-\sigma}), \quad (19.146)$$

с канонической размерностью поля  $D = 1$ . В теориях фермионов и калибровочных полей масштабное преобразование определяется аналогично. Если это преобразование является симметрией классического лагранжиана, как это имело бы место при отсутствии размерных констант, то в теории будет существовать сохраняющийся ток  $D^\mu$ , называемый *током дилатации*. Ток дилатации просто связан с симметричным тензором энергии-импульса  $\Theta^{\mu\nu}$ :  $D^\mu = \Theta^{\mu\nu} x_\nu$ , так что

$$\partial_\mu D^\mu = \Theta^\mu{}_\mu. \quad (19.147)$$

Вывод этих результатов из теоремы Нетер не так прост. Существует более простой вывод, который однако использует формализм, выходящий за рамки этой книги. Если рассматриваемая квантовая теория поля взаимодействует с гравитацией, то тензор энергии-импульса может быть отождествлен с источником гравитационного поля. Этот тензор может быть получен вариацией лагранжиана  $\mathcal{L}_m$  полей материи по пространственно-временной метрике  $g_{\mu\nu}(x)$ . Такая конструкция дает явно симметричный и калибровочно-инвариантный тензор, который совпадает с  $\Theta^{\mu\nu}$ :

$$\Theta^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \int d^4x \mathcal{L}_m. \quad (19.148)$$

Масштабное преобразование может быть представлено как изменение пространственно-временной метрики:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu}(x). \quad (19.149)$$

Комбинируя (19.148) и (19.149), мы видим, что изменение лагранжиана, вызванное этим преобразованием, есть просто след от  $\Theta^{\mu\nu}$ . Это, по теореме Нетер, должно равняться дивергенции соответствующего тока, давая опять (19.147).

В КЭД нетрудно угадать вид симметричного тензора энергии-импульса:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (F_{\lambda\sigma})^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi} i (\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu) \psi - g^{\mu\nu} \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi. \quad (19.150)$$

Это калибровочно-инвариантный симметричный тензор, приводящий к известному выражению для полной энергии:

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \psi^\dagger (-i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m) \psi \right\}. \quad (19.151)$$

Для дальнейших ссылок заметим, что эти результаты верны на классическом уровне в пространстве-времени любой размерности  $d$ . В четырех измерениях след слагаемых, содержащих калибровочные поля, автоматически сокращается. Используя уравнение Дирака, которое верно как операторное уравнение движения, находим, что след  $\Theta^{\mu\nu}$  равен:

$$\Theta^{\mu}_{\mu} = m\bar{\psi}\psi \quad (19.152)$$

и действительно обращается в нуль на классическом уровне, если  $m = 0$ .

При учете квантовых поправок масштабное преобразование не является симметрией теории, т.к. та же теория, отнесенная к большему масштабу, содержит другое значение перенормированной константы взаимодействия. Сдвиг перенормированной константы равен

$$g \rightarrow g + \sigma\beta(g), \quad (19.153)$$

а соответствующее изменение в лагранжиане есть

$$\sigma\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \mathcal{L}. \quad (19.154)$$

Поэтому, когда учитываются квантовые поправки, уравнение для тока дилатации в классической масштабно-инвариантной теории должно иметь вид:

$$\partial_{\mu} D^{\mu} = \Theta^{\mu}_{\mu} = \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \mathcal{L}. \quad (19.155)$$

В безмассовой КЭД эту формулу можно записать в более полезном виде, переопределяя калибровочные поля так, чтобы устранить константу взаимодействия  $e$  из ковариантной производной:  $eA^{\mu} \rightarrow A^{\mu}$ . Тогда  $e$  появляется только в слагаемом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} (F_{\lambda\sigma})^2 + \dots, \quad (19.156)$$

и (19.155) принимает вид

$$\Theta^{\mu}_{\mu} = \frac{\beta(e)}{2e^3} (F_{\lambda\sigma})^2. \quad (19.157)$$

Это соотношение, утверждающее, что след симметричного тензора энергии-импульса принимает ненулевое значение в результате квантовых поправок, известно как *аномалия следа*.

Мы можем проверить уравнение аномалии следа (19.157) прямо по теории возмущений. Вычислим явно след  $\Theta^{\mu\nu}$  в однопетлевом приближении. Формализм, которым мы будем пользоваться, очень похож на формализм фонового поля, с помощью которого в разделе 16.6 была вычислена  $\beta$ -функция. Как и там, проинтегрируем по флуктуирующим частям квантовых полей в присутствии фонового поля с ненулевым  $F_{\mu\nu}$ . Уравнение (19.157) подсказывает, что это интегрирование приведет к выражению:

$$\langle \Theta^{\mu}_{\mu} \rangle = C \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_{\mu}(-k) (k^2 g^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu}) A_{\nu}(k), \quad (19.158)$$

где  $A_{\mu}$  — фоновое поле, а константа  $C$  равна  $\beta(e)/e^3$ .

Так как мы будем использовать размерную регуляризацию, следует начать с выписывания следа  $\Theta^{\mu\nu}$  в  $d$  измерениях:

$$\Theta^\mu{}_\mu = -\frac{4-d}{4}(F_{\lambda\sigma})^2 + (1-d)\bar{\psi}i\not{D}\psi. \quad (19.159)$$

Однопетлевой матричный элемент этой величины, пропорциональный второй степени фонового поля, возникает из трех диаграмм, изображенных на рис. 19.10. Так как второе слагаемое справа в (19.159) обращается в нуль в силу уравнения движения для  $\psi(x)$ , можно ожидать, что это слагаемое не дает вклада в след. Действительно, легко проверить, что первые две диаграммы рис. 19.10 сокращаются: они имеют одинаковую структуру, т. к. первая имеет лишний пропагатор и лишний множитель  $\not{\psi}$  из операторного матричного элемента, и обратный общий знак.

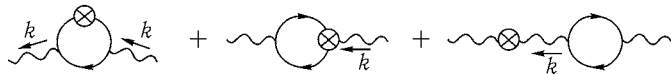


Рис. 19.10. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в аномалию следа  $\Theta^{\mu\nu}$ .

Первое слагаемое слева в (19.159) неожиданно, т. к. оно, очевидно, равно нулю в четырех измерениях. Однако фермионная петлевая диаграмма расходится, и это приводит в схеме размерной регуляризации к множителю  $1/(2-d/2)$ . В результате эта диаграмма дает ненулевой вклад в операторный матричный элемент. В безмассовой КЭД вклад фермионной петли равен

$$\text{Diagram} = -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \frac{4}{3(4\pi)^2} (\Gamma(2-\frac{d}{2}) + \text{конечные члены}). \quad (19.160)$$

Тогда полное выражение для третьей диаграммы на рис. 19.10 есть

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(-k) \left(-2\frac{4-d}{4}\right) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \frac{-i}{k^2} \left(-ik^2 \frac{4}{3(4\pi)^2} \frac{1}{2-d/2}\right) A_\nu(k). \quad (19.161)$$

Оно имеет вид (19.158) с

$$C = \frac{1}{12\pi^2}, \quad (19.162)$$

что действительно равно первому коэффициенту  $\beta$ -функции безмассовой КЭД.

Эти рассуждения обобщаются на КХД и другие калибровочные теории. В неабелевой калибровочной теории  $\Theta^{\mu\nu}$  дается очевидным обобщением (19.150) с заменой абелевого тензора напряженности  $F_{\mu\nu}$  неабелевым выражением  $F_{\mu\nu}^a$ . След  $\Theta^{\mu\nu}$  опять дается выражением

$$\Theta^\mu{}_\mu = -\frac{4-d}{4}(F_{\lambda\sigma}^a)^2 \quad (19.163)$$

плюс слагаемые, исчезающие в силу уравнений движения. В фоновой калибровке однопетлевые диаграммы с вставленным в петлю оператором  $\Theta^\mu{}_\mu$  сокращаются как и выше. В разделе 16.6 мы видели, что двухточечные функции в этой калибровке суммируются в выражение

$$\text{Diagram} = -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left[\frac{-b_0}{(4\pi)^2}\right] (\Gamma(2-\frac{d}{2}) + \text{конечные члены}), \quad (19.164)$$

где  $\beta(g) = -b_0 g^3 / (4\pi)^2$ . Следуя логике предыдущего раздела, опять получаем результат (19.158), где  $C$  равно первому коэффициенту  $\beta$ -функции.

Как и в случае аксиальной аномалии, аномалия следа может быть найдена разными способами. Для каждого возможного метода регуляризации квантовой теории поля существует свой вывод аномалии следа, который эксплуатирует возможную патологию этой конкретной регуляризации. Например при использовании метода Паули–Вилларса с тяжелыми фермионами для сокращения расходимостей фермионной петли в КЭД тяжелые фермионы  $\Psi$  дают вклад  $M\bar{\Psi}\Psi$  в след  $\Theta^{\mu\nu}$ . Петлевая диаграмма с этим вставленным слагаемым имеет конечный предел при  $M \rightarrow \infty$ , который в точности воспроизводит аномалию следа. Это вычисление рассмотрено в задаче 19.4.

Как и в случае аксиальной аномалии, каждый вывод аномалии с разными конкретными регуляризациями кажется искусственным, как если бы в теории поля существовала некая проблема, для понимания которой мы недостаточно умны. В конце концов можно сделать вывод, что квантовая теория поля пытается что-то сообщить нам. Аномальные симметрии классической теории не могут быть просто продолжены до симметрий квантовой теории. Вместо этого аномальные законы сохранения требуют существенных и качественных изменений в теории при переходе от классического уровня к квантовому.

## Задачи

### 19.1. Несохранение числа фермионов в параллельных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ .

- (а) Покажите, что уравнение аномалии Адлера–Белла–Джэкива приводит к следующему закону сохранения для полных фермионных чисел: если  $N_R$  и  $N_L$  — соответственно числа правых и левых безмассовых фермионов, то

$$\Delta N_R - \Delta N_L = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int d^4x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Для решения задачи возьмите фоновое поле в виде  $A^\mu = (0, 0, Bx^1, A)$ , с постоянным  $B$  и  $A$ , постоянной в пространстве и адиабатически меняющейся только во времени.

- (б) Покажите, что гамильтониан безмассовых фермионов, записанный в компонентах (8.36), имеет вид

$$H = \int d^3x \left[ \psi_R^\dagger (-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \psi_R - \psi_L^\dagger (-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \psi_L \right],$$

с  $D^i = \nabla^i - ieA^i$ . Рассмотрите в гамильтониане слагаемое, содержащее только правые фермионы. Для диагонализации этого слагаемого нужно решить уравнение на собственные значения  $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}\psi_R = E\psi_R$ .

- (с) Собственные векторы  $\psi_R$  могут быть записаны в виде:

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \phi_1(x^1) \\ \phi_2(x^1) \end{pmatrix} e^{i(k_2 x^2 + k_3 x^3)}.$$

Функции  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , которые зависят только от  $x^1$ , удовлетворяют связанной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Покажите, что когда одна из этих функций обращается в нуль, другие подчиняются уравнению гармонического осциллятора. Используйте это наблюдение для нахождения одночастичного спектра гамильтониана. Отметим, что собственные значения не зависят от  $k_2$ .

- (d) Если система фермионов помещена в ящик со сторонами длиной  $L$  и периодическими граничными условиями, импульсы  $k_2$  и  $k_3$  квантуются:

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}.$$

Обращаясь к уравнению гармонического осциллятора из части (c), покажите, что условие нахождения центра осциллятора внутри ящика имеет вид:

$$k_2 < eBL.$$

Комбинируя эти два условия, видим, что каждый уровень из части (c) является вырожденным с кратностью

$$\frac{eL^2 B}{2\pi}.$$

- (e) Теперь рассмотрите влияние адиабатического изменения фонового  $A$  на величину (19.37). Покажите, что вакуум теряет правые фермионы. Повторяя этот анализ для спектра, видим, что вакуум приобретает такое же число левых фермионов. Покажите, что эти числа согласуются с глобальным законом несохранения, данным в части (a).

## 19.2. Слабый распад пиона.

- (a) В эффективном лагранжиане полулептонных слабых взаимодействий (18.28) адронной частью оператора является левый ток, содержащий  $u$ - и  $d$ -кварки. Покажите, что этот ток следующим образом связан с током кварков из раздела 19.3:

$$\bar{u}_L \gamma^\mu d_L = \frac{1}{2} (j^{\mu 1} + i j^{\mu 2} - j^{\mu 5 1} - i j^{\mu 5 2}),$$

где 1, 2 — изоспиновые индексы. Используя эту связь и соотношение (19.88), покажите, что амплитуда распада  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu$  дается выражением

$$i\mathcal{M} = G_F f_\pi \bar{u}(q) \not{p} (1 - \gamma^5) v(k),$$

где  $p, k, q$  — импульсы  $\pi^+, \ell^+, \nu$ .

- (b) Вычислите вероятность распада пиона. Покажите, что она обращается в нуль в пределе нулевой массы лептона и что отношение вероятностей распада пиона на мюон и электрон дается выражением

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \frac{(1 - m_e^2/m_\pi^2)^2}{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)^2} = 10^{-4}.$$

Зная измеренное время жизни пиона,  $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8}$  с и массы пиона и мюона  $m_\pi = 140$  МэВ,  $m_\mu = 106$  МэВ, определите величину  $f_\pi$ .

- (a) Рассмотрим произведение представлений  $r_1 \times r_2$  группы  $SU(n)$ , которое раскладывается на неприводимые представления как в (15.98). Используя явную форму генераторов из (15.99), покажите, что аномальные коэффициенты удовлетворяют условию

$$d_1 A(r_2) + d_2 A(r_1) = \sum_i A(r_i).$$

- (b) Из задачи 15.5 следует, что симметричный и антисимметричный тензоры образуют неприводимые представления  $SU(n)$ , которые обозначим  $s$  и  $a$ , соответственно. В  $SU(3)$  представление  $a$  трехмерно. Покажите, что оно эквивалентно  $\bar{3}$ . Вычислите коэффициенты аномалии для  $a$  и  $s$ , используя тождество из части (a).
- (c) Так как  $SU(n)$  имеет единственный симметричный тензор третьего ранга  $d^{abc}$ , который не равен нулю и в  $SU(3)$  подгруппе, то можно вычислить аномальный коэффициент в  $SU(n)$ , ограничиваясь тремя генераторами этой подгруппы. Раскладывая представления группы  $SU(n)$  по представлениям  $SU(3)$ , вычислите аномальные коэффициенты для  $a$  и  $s$  в  $SU(n)$  и получите (19.141). Найдите аномальный коэффициент  $j$ -индексного полностью антисимметричного тензорного представления группы  $SU(n)$ . Почему он исчезает при  $2j = n$ ?

#### 19.4. Пределы большой фермионной массы

- (a) Обычно аномалия Адлера–Белла–Джэкива и аномалия следа выводятся с использованием размерной регуляризации. В качестве альтернативы можно вывести эти результаты, используя регуляризацию Паули–Вилларса. В этом подходе фермионный петлевой интеграл регуляризуется вычитанием такой же петлевой диаграммы фермионов  $\Psi$  с большой массой  $M$ . Параметр  $M$  играет роль обрезания и должен быть устремлен к бесконечности в конце вычисления. Аномалии возникают потому, что некоторые куски диаграмм, вычисленные для тяжелых фермионов, не исчезают в пределе  $M \rightarrow \infty$ . Эти нетривиальные пределы  $M \rightarrow \infty$  интересны сами по себе и могут иметь физические приложения (например, в части (c) Заключительного проекта для части III).
- (b) Покажите, что уравнение аномалии Адлера–Белла–Джэкива эквивалентно следующему пределу большой массы фермионного матричного элемента между вакуумом и двухфотонным состоянием:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \langle p, k | 2iM \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi | 0 \rangle \right\} = -\frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\alpha\nu\beta\lambda} p_\alpha \varepsilon_\nu^*(p) k_\beta \varepsilon_\lambda^*(k).$$

- (c) Покажите, что аномалия следа в однопетлевом приближении эквивалентна следующему пределу большой массы:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \langle p, k | M \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle \right\} = +\frac{e^2}{6\pi^2} [p \cdot k \varepsilon^*(p) \cdot \varepsilon^*(k) - p \cdot \varepsilon^*(k) k \cdot \varepsilon^*(p)].$$

- (d) Покажите, что матричный элемент в части (a) является ультрафиолетово конечным до взятия предела  $M \rightarrow \infty$ . Вычислите матричный элемент явно в однопетлевом приближении и проверьте предел, приведенный в части (a).
- (e) Матричный элемент в части (b) имеет потенциальную ультрафиолетовую расходимость. Покажите, однако, что коэффициент в  $(p \cdot \varepsilon^*(k) k \cdot \varepsilon^*(p))$  ультрафиолетово конечен и что остальная часть выражения определяется калибровочной инвариантностью. Вычислите полный матричный элемент, используя размерную регуляризацию как калибровочно-инвариантную, и подтвердите результат, приведенный в части (b).

## КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ СО СПОНТАННЫМ НАРУШЕНИЕМ СИММЕТРИИ

До сих пор мы рассматривали три различных способа реализации симметрии в квантовой теории поля. В простейшем случае имеется явная глобальная симметрия, приводящая к объединению частиц в мультиплеты и накладывающая ограничения на их взаимодействия. Другая возможность — наличие спонтанно нарушенной глобальной симметрии. В этом случае, как было показано в гл. 11\*, соответствующие токи симметрии по-прежнему сохраняются и на взаимодействия в теории накладываются аналогичные ограничения, но вакуумное состояние не обладает симметрией и частицы не образуют очевидных мультиплетов. Вместо этого в теории появляются безмассовые частицы (голдстоуновские бозоны), по одной на каждый из генераторов спонтанно нарушенной симметрии. Третья возможность — наличие локальной, или калибровочной, симметрии. Как мы видели в гл. 15, такая симметрия требует для каждого из генераторов симметрии существования своего безмассового векторного поля, причем на взаимодействие между такими полями накладываются сильные ограничения.

Естественно теперь рассмотреть четвертую возможность: что произойдет, если мы построим теорию, в которой имеются и спонтанное нарушение симметрии, и локальная калибровочная инвариантность? В этой и следующей главах мы увидим, что такая комбинация приводит к возможности создания новых моделей квантовой теории поля. Мы обнаружим, что спонтанное нарушение симметрии придает массу калибровочным векторным бозонам. Симметрия накладывает ограничения на взаимодействия таких бозонов, приводящие к наблюдаемым последствиям.

В физике элементарных частиц главным применением теории со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией является общепринятая на данный момент модель слабых взаимодействий. Эта модель, предложенная Глэшоу, Вайнбергом и Саламом, обсуждается в разделе 20.2. Мы увидим, что она позволяет сделать ряд очень точных и подтверждаемых на опыте предсказаний. Кроме того, в ней слабые и электромагнитные взаимодействия замечательным образом объединены в единую калибровочную теорию.

### 20.1. Механизм Хиггса

В этом разделе мы приведем несколько простых примеров калибровочных теорий со спонтанным нарушением симметрии. Начав с абелевой калибровочной теории, мы затем перейдем к неабелеву случаю.

---

\*Для понимания данной главы необходимо знание материала раздела 11.1; другие разделы гл. 11 необязательны.

### Пример с абелевой симметрией

В качестве первого примера рассмотрим комплексное скалярное поле, взаимодействующее с самим собой, а также с электромагнитным полем:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \quad (20.1)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ . Этот лагранжиан инвариантен относительно локального  $U(1)$ -преобразования:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (20.2)$$

Если выбрать входящий в  $\mathcal{L}$  потенциал в виде

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2, \quad (20.3)$$

с  $\mu^2 > 0$ , у поля  $\phi$  появится ненулевое вакуумное среднее и глобальная  $U(1)$ -симметрия будет спонтанно нарушена. Минимум потенциала будет достигаться при

$$\langle\phi\rangle = \phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}, \quad (20.4)$$

и при любом другом значении, полученном из (20.4) посредством преобразований вида (20.2).

Разложим лагранжиан (20.1) вблизи вакуумного состояния (20.4). Представим комплексное поле  $\phi(x)$  в виде

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)). \quad (20.5)$$

Тогда для потенциала (20.3) получим:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\lambda}\mu^4 + \frac{1}{2} \cdot 2\mu^2\phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi_i^3), \quad (20.6)$$

т. е. поле  $\phi_1$  приобретает массу  $m = \sqrt{2}\mu$ , а  $\phi_2$  оказывается безмассовым голдстоуновским бозоном. До сих пор нам не встретилось ничего нового по сравнению с разделом 11.1.

Выясним теперь, как преобразуется кинетическая энергия поля  $\phi$ . После подстановки разложения (20.5) и отбрасывания членов третьей и четвертой степеней по полям  $A_\mu$ ,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  получим:

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}e\phi_0 \cdot A_\mu\partial^\mu\phi_2 + e^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu + \dots, \quad (20.7)$$

Последнее явно выписанное в (20.7) слагаемое представляет собой массовое слагаемое фотона:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu. \quad (20.8)$$

Масса

$$m_A^2 = 2e^2\phi_0^2 \quad (20.9)$$





Механизм появления массы у калибровочного бозона в результате спонтанного нарушения симметрии был исследован и обобщен на неабелев случай Хиггсом, Кибблом, Гуральником, Хагеном, Браутом и Энглертом; обычно он называется *механизмом Хиггса*. Однако, еще до этого подобный эффект был использован в теории сверхпроводимости. В главе 8 мы построили теорию Ландау фазовых переходов второго рода. Для описания сверхпроводника Ландау и Гинзбург ввели в теорию взаимодействие с внешним электромагнитным полем; они получили в точности лагранжиан (20.1). Поскольку калибровочное поле в полученной модели массивно, внешние электромагнитные поля проникают в сверхпроводник только на глубину  $m_A^{-1}$ . Это объясняет *эффект Мейснера* — наблюдаемое на эксперименте выталкивание макроскопических магнитных полей из сверхпроводника.

Роль голдстоуновского бозона в механизме Хиггса неочевидна и на данном этапе представляется загадочной. Вначале мы видели, что наличие голдстоуновского бозона совершенно необходимо для появления массы у калибровочного бозона; впоследствии оказалось, что голдстоуновский бозон может быть формально исключен из теории. Все же можно сказать, что он исключен не полностью. Действительно, безмассовый векторный бозон имеет только две физические поляризации — в гл. 16 мы видели, что состояние с продольной поляризацией появляется в формализме только для сокращения других нефизических вкладов. Однако у массивного векторного бозона должны быть три физических поляризации: в своей системе покоя он является объектом со спином 1, для которого нет различия между продольной и поперечной поляризациями. Можно сказать, что калибровочный бозон получает лишнюю степень свободы в результате *поедания* голдстоуновского бозона. В разделах 21.1 и 21.2 мы проясним эту картину, рассматривая квантование и выбор калибровки в теориях со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией.

### Общий анализ механизма Хиггса

Механизм Хиггса непосредственно распространяется на случай неабелевой калибровочной симметрии. Несложно вывести общее соотношение, в соответствии с которым наличие ненулевых вакуумных средних у набора скалярных полей приводит к появлению масс у калибровочных бозонов. Получим эту формулу и попробуем применить ее к ряду примеров.

Рассмотрим лагранжиан  $\mathcal{L}$ , зависящий от набора скалярных полей  $\phi_i$ . Предположим, что  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно группы симметрии  $G$ , представленной преобразованиями:

$$\phi_i \rightarrow (1 + i\alpha^a t^a)_{ij} \phi_j. \quad (20.13)$$

Поля  $\phi_i$  удобно считать действительными; каждое комплексное поле, например, представим как пару действительных. Тогда матрицы  $t^a$  представления группы  $G$  должны быть чисто мнимыми, и, поскольку они эрмитовы, антисимметричными. Запишем

$$t_{ij}^a = iT_{ij}^a, \quad (20.14)$$

где  $T^a$  действительны и антисимметричны.

Если рассматривать группу  $G$  как локальную калибровочную группу симметрии, то ковариантная производная поля  $\phi_i$  равна:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a t^a) \phi = (\partial_\mu + gA_\mu^a T^a) \phi.$$

Тогда кинетическое слагаемое для поля  $\phi_i$  равно:

$$\frac{1}{2}(D_\mu \phi_i)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 + gA_\mu^a (\partial_\mu \phi_i T_{ij}^a \phi_j) + \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu} (T^a \phi)_i (T^b \phi)_i. \quad (20.15)$$



### Примеры с неабелевой симметрией

Займемся теперь приложением развитого формализма к конкретным неабелевым калибровочным теориям. Рассмотрим сначала модель с калибровочным полем  $SU(2)$ , взаимодействующим со скалярным полем  $\phi$ , которое преобразуется по спинорному представлению  $SU(2)$ . Ковариантная производная поля  $\phi$  равна

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a) \phi, \quad (20.22)$$

где  $\tau^a = \sigma^a/2$ . Кинетическая энергия скалярного поля дается квадратом этого выражения.

Пусть вакуумное среднее поля  $\phi$  отлично от нуля. При помощи соответствующего калибровочного преобразования представим его в виде

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (20.23)$$

Массы калибровочных бозонов определяются слагаемым

$$|D_\mu \phi|^2 = \frac{1}{2} g^2 \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \tau^a \tau^b \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} A_\mu^a A^{b\mu} + \dots. \quad (20.24)$$

Матричное произведение может быть симметризовано по отношению к  $a$  и  $b$ ; учитывая, что  $\{\tau^a, \tau^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ , получаем

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{g^2 v^2}{8} A_\mu^a A^{a\mu}. \quad (20.25)$$

Все три калибровочных бозона приобретают массу

$$m_A = \frac{gv}{2}. \quad (20.26)$$

Таким образом, ни один из генераторов  $SU(2)$  не оставляет вакуум (20.23) инвариантным.

Что произойдет, если мы рассмотрим поле  $\phi$ , преобразующееся по векторному представлению  $SU(2)$ ? Если  $\phi$  — вещественнозначный вектор, его ковариантная производная равна

$$(D_\mu \phi)_a = \partial_\mu \phi_a + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c. \quad (20.27)$$

Как и ранее, кинетическая энергия поля  $\phi$  дается квадратом этого выражения, и при наличии у  $\phi$  ненулевого вакуумного среднего массы калибровочных бозонов будут определяться слагаемым:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 = \frac{g^2}{2} (\varepsilon_{abc} A_\mu^b (\phi_0)_c)^2 + \dots. \quad (20.28)$$

При помощи калибровочного преобразования можно добиться произвольного направления вектора  $\phi_0$  в пространстве внутренней симметрии. Выберем его параллельным оси 3, как показано на рисунке 20.1:

$$\langle \phi_c \rangle = (\phi_0)_c = V \delta_{c3}. \quad (20.29)$$

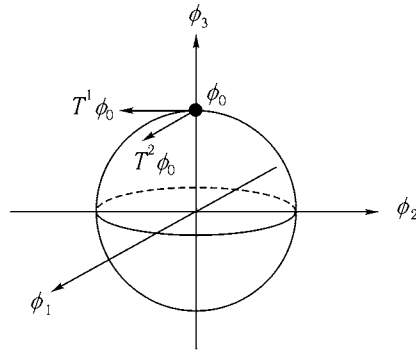


Рис. 20.1. Конфигурационное пространство скалярного поля, преобразующегося по векторному представлению  $SU(2)$ . Если симметрия  $SU(2)$  спонтанно нарушена, множество состояний, в которых может находиться вакуум, представляет собой сферическую поверхность. Пусть вакуумное среднее  $\phi_0$  направлено вдоль оси 3, тогда оно является инвариантом относительно генератора  $T^3$ , а под действием  $T^1$  и  $T^2$  направление его меняется так, как показано на рисунке.

Подставляя (20.29) в (20.28), находим

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} V^2 (\varepsilon_{ab3} A_\mu^b)^2 = \frac{g^2}{2} V^2 ((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2). \tag{20.30}$$

Калибровочные бозоны, соответствующие генераторам 1 и 2, приобретают массы

$$m_1 = m_2 = gV, \tag{20.31}$$

в то время как бозон, соответствующий третьему генератору, остается безмассовым. Причину этого легко понять, взглянув еще раз на рисунок 20.1. Вакуумное среднее  $\phi_c$  нарушает вращательную симметрию относительно осей 1 и 2, но не относительно оси 3. В согласии с общим случаем, калибровочные бозоны, соответствующие ненарушенной симметрии, остаются безмассовыми.

Любопытно, что в данной модели существуют одновременно и массивные, и безмассовые калибровочные бозоны, причем различие между ними появляется в результате спонтанного нарушения симметрии. отождествив массивные бозоны с  $W$ -бозонами, а безмассовый — с фотоном, можно попытаться использовать такую модель для одновременного описания слабых и электромагнитных явлений. Джорджи и Глэшоу выдвинули ее как реального кандидата на роль теории слабых взаимодействий\*. Природа, однако, предпочла другую модель, которую мы рассмотрим в следующем разделе.

Рассмотрим теперь более сложный пример. Пусть калибровочная теория с группой симметрии  $SU(3)$  содержит скалярное поле в присоединенном представлении. Ковариантная производная принимает вид

$$D_\mu \phi_a = \partial_\mu \phi_a + g f_{abc} A_\mu^b \phi_c, \tag{20.32}$$

так что массы калибровочных бозонов даются формулой

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} (f_{abc} A_\mu^b \phi_c)^2. \tag{20.33}$$

\*H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1494 (1972).

Введем обозначение

$$\Phi = \phi_c t^c, \quad (20.34)$$

где бесследовые эрмитовы матрицы  $t^c$  — генераторы группы  $SU(3)$ . Вспомнив определение структурных констант (15.68), перепишем массовый член в (20.33) в виде

$$\Delta\mathcal{L} = -g^2 \text{tr} [[t^a, \Phi][t^b, \Phi]] A_\mu^a A^{b\mu}. \quad (20.35)$$

Пусть теперь  $\Phi$  приобретает вакуумное среднее

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0. \quad (20.36)$$

Так как  $\Phi_0$  — эрмитова матрица с нулевым следом, она может быть диагонализирована. В общем случае ее собственными значениями могут быть три произвольные действительные числа с нулевой суммой. Однако при явной минимизации потенциальной энергии, часто обнаруживается, что вакуумные средние сохраняют некоторые симметрии потенциала. Рассмотрим два таких примера.

Пусть  $\Phi_0$  имеет вид:

$$\Phi_0 = |\phi| \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}. \quad (20.37)$$

Эта матрица коммутирует с четырьмя генераторами группы  $SU(3)$

$$t^a = \begin{pmatrix} \tau^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}. \quad (20.38)$$

Следовательно, вакуумное среднее (20.37) разрушает  $SU(3)$ -симметрию до симметрии  $SU(2) \times U(1)$  и оставляет четыре калибровочных бозона, соответствующих генераторам (20.38), безмассовыми. Остальные четыре генератора  $SU(3)$  имеют вид

$$\begin{aligned} t^4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t^5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ t^6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & t^7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20.39)$$

и соответствующие калибровочные бозоны приобретают массы

$$m^2 = (3g|\phi|)^2, \quad (20.40)$$

как это легко проверить прямой подстановкой этих матриц в (20.35).

Другой возможной ориентацией  $\Phi_0$  является

$$\Phi_0 = |\phi| \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad (20.41)$$

В этом случае с  $\Phi_0$  коммутируют только  $t^3$  и  $t^8$ , и исходная  $SU(3)$ -симметрия нарушается до  $U(1) \times U(1)$ . Подстановка (20.41) в (20.35) позволяет найти массы калибровочных бозонов, соответствующих остальным генераторам группы  $SU(3)$ :

$$t^1, t^2: m^2 = (2g|\phi|)^2, \quad t^4, t^5, t^6, t^7: m^2 = (g|\phi|)^2. \quad (20.42)$$

В случае более сложных калибровочных групп появляется много различных схем нарушения симметрии, приводящих к более сложным массовым матрицам. Один из таких примеров мы рассмотрим в задаче 20.1.

### Формальное описание механизма Хиггса

До сих пор наш анализ механизма Хиггса базировался на исследовании явного вида лагранжианов скалярных полей, взаимодействующих с калибровочными полями. Скалярные теории поля дают простейшие примеры систем со спонтанным нарушением симметрии, и прямые вычисления, которые они позволяют проделать, полезны для выявления задействованных механизмов. Но возможны и другие типы нарушения симметрии. Например, в теории сверхпроводимости абелева калибровочная инвариантность электромагнетизма пропадает из-за спаривания электронов металла, находящихся в основном состоянии. В разделе 19.3 мы показали, что в приближении малых масс кварков КХД обладает глобальной симметрией, спонтанно нарушенной конденсацией кварк-антикварковых пар. В этих случаях спонтанное нарушение симметрии возникает в результате сильных взаимодействий, и описание его выходит за рамки теории возмущений. Наша ближайшая задача — выяснить, приводят ли подобные более общие механизмы спонтанного нарушения симметрии к возникновению масс у векторных бозонов, и если да, то как можно вычислить эти массы.

Для этого нам нужно обобщить некоторые использованные ранее идеи. Сначала мы в общем виде обсудим соотношения между калибровочными бозонами, голдстоуновскими бозонами и токами глобальных симметрий. Затем воспользуемся полученными результатами для нахождения массовой матрицы калибровочных бозонов без использования явного вида лагранжиана.

Рассмотрим сначала произвольную квантовую теорию поля  $\mathcal{L}_0$  с глобальной симметрией  $G$ . В разделе 9.6 мы получили соответствующие  $G$ -симметрии нетеровские токи, находя вариацию лагранжиана относительно локального калибровочного преобразования с инфинитезимальным параметром  $\alpha^a(x)$ . Преобразование с постоянными  $\alpha^a$  должно оставлять лагранжиан неизменным. Более общая вариация  $\mathcal{L}_0$  должна иметь вид:

$$\delta\mathcal{L}_0 = -(\partial_\mu\alpha^a)J^{\mu a}, \quad (20.43)$$

где набор векторных операторов  $J^{\mu a}$  построен из полей, входящих в  $\mathcal{L}_0$ . В соответствии с вариационным принципом

$$\partial_\mu J^{\mu a} = 0. \quad (20.44)$$

Можно отождествить  $J^{\mu a}$  с нетеровскими токами, соответствующими глобальной калибровочной симметрии  $G$ .

Пусть теперь эта глобально симметричная теория взаимодействует с неабелевыми калибровочными полями, превращающими глобальную симметрию в локальную. В первом порядке по  $g$  новый лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + gA_\mu^a J^{\mu a} + \mathcal{O}(A^2). \quad (20.45)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что преобразование (20.43) за счет калибровочного преобразования  $A_\mu^a$  компенсирует в главном порядке по  $g$  вариацию лагранжиана (15.46). Возникающие при этом слагаемые высшего порядка в калибровочном преобразовании можно в общем случае компенсировать слагаемыми с  $A^2$  и высшими степенями  $A$  в лагранжиане. Следовательно, матричные элементы, содержащие только одно калибровочное поле, могут быть вычислены с использованием свойств нетеровских токов исходной глобально симметричной теории. Заметим, в частности, что законы сохранения (20.44) для этих токов обеспечивают выполнение тождеств Уорда для матричных элементов.

Если глобальная симметрия теории  $\mathcal{L}_0$  спонтанно нарушена, в ней возникают голдстоуновские бозоны, находящиеся в определенной связи с нетеровскими токами. Длинноволновые голдстоуновские бозоны представляют собой инфинитезимальные преобразования симметрии вакуума  $Q^a |0\rangle$ , где  $Q^a$  есть глобальный заряд, связанный с  $J^{\mu a}$ . Таким образом, операторы  $J^{\mu a}$  имеют правильные квантовые числа, позволяющие им рожать голдстоуновские бозоны из вакуума. Обозначим состояние, содержащее голдстоуновский бозон, как  $|\pi_k\rangle$ . В общем случае существует ток  $J^{\mu a}$ , способный рожать или уничтожать такой бозон. Запишем соответствующий матричный элемент в виде

$$\langle 0 | J^{\mu a}(x) | \pi_k(p) \rangle = -i p^\mu F_k^a e^{-ip \cdot x}, \quad (20.46)$$

где  $p^\mu$  — лежащий на массовой поверхности импульс бозона, а  $F_k^a$  — матрица. Для индексов  $a$ , соответствующих генераторам ненарушенной симметрии, элементы  $F_k^a$  равны нулю. Ненулевые матричные элементы  $F_k^a$  связывают токи спонтанно нарушенных симметрий с соответствующими голдстоуновскими бозонами. Из условия сохранения токов  $J^{\mu a}$  имеем

$$0 = \partial_\mu \langle 0 | J^{\mu a}(x) | \pi_k(p) \rangle = -p^2 F_k^a e^{-ip \cdot x}, \quad (20.47)$$

откуда следует, что для бозонов с ненулевыми матричными элементами (20.46) на массовой поверхности выполняется равенство  $p^2 = 0$ , т.е. эти бозоны безмассовые. Мы получили еще одно доказательство теоремы Голдстоуна\*.

Поскольку скалярные теории поля, ранее рассмотренные в этом разделе, представляют собой частные случаи разобранный выше схемы, в них должны существовать аналоги соотношения (20.46). Сравнивая (20.15) и (20.45), видим, что в скалярной теории поля

$$J^{\mu a} = \partial_\mu \phi_i T_{ij}^a \phi_j, \quad (20.48)$$

что действительно есть нетеровский ток, соответствующий глобальной калибровочной симметрии. Подставляя вакуумное среднее (20.16), находим:

$$J^{\mu a} = \partial_\mu \phi_i (T^a \phi_0)_i, \quad (20.49)$$

что приводит к следующему набору матричных элементов:

$$\langle 0 | J^{\mu a}(x) | \phi_i(p) \rangle = -i p^\mu (T^a \phi_0)_i e^{-ip \cdot x}. \quad (20.50)$$

Следовательно, для механизма Хиггса в скалярной теории поля со слабым взаимодействием имеет место тождество

$$F_i^a = T_{ij}^a \phi_{0j} \quad (20.51)$$

\* Подобное рассуждение встречалось ранее при анализе уравнения (19.88).



Строго говоря, индекс  $i$  здесь нумерует все компоненты скалярного поля  $\phi$ . Но выше (см. (20.19)) мы видели, что правая часть (20.51) отлична от нуля только для тех компонент  $\phi_i$ , которые являются голдстоуновскими бозонами, и только для тех генераторов симметрии  $a$ , которые оказываются спонтанно нарушенными. Следовательно, ненулевые компоненты (20.51) в точности соответствуют (20.46).

В качестве конкретного примера того, как величины  $T^a \phi_0$  связывают генераторы нарушенной симметрии с голдстоуновскими бозонами, рассмотрим спонтанное нарушение  $SU(2)$ -симметрии скалярным полем в векторном представлении (см. (20.29) и рис. 20.1). Как видно из рисунка, вращения вокруг оси 1 смещают вектор вакуумного среднего в направлении оси 2, вращения вокруг оси 2 смещают его в направлении оси 1, а вращения относительно оси 3 оставляют его инвариантным. Поэтому калибровочные генераторы  $T^1$  и  $T^2$  соответствуют спонтанно нарушенной симметрии, а компоненты скалярного поля  $\phi^1$  и  $\phi^2$  оказываются голдстоуновскими бозонами. Это находится в согласии с результатами явного вычисления элементов  $(T^a \phi_0)_i$ . Используя  $(T^a)_{bc} = \varepsilon^{bac}$ , находим:

$$(T^a \phi_0)_b = \varepsilon_{bac} \langle \phi^c \rangle = V \varepsilon^{ba3}. \quad (20.52)$$

Подставляя этот результат в формулу (20.50), убеждаемся, что соответствующие каждой из спонтанно нарушенных симметрий токи рождают и уничтожают свои собственные голдстоуновские бозоны.

Теперь можно использовать развитый формализм для исследования механизма Хиггса в самом общем виде. Рассмотрим исходную теорию  $\mathcal{L}_0$ , в которую добавим взаимодействие с калибровочными бозонами, описываемые симметрией группы  $G$ . Чтобы проследить за тем, как работает механизм Хиггса, вычислим амплитуду поляризации вакуума. Из тождеств Уорда следует, что эта амплитуда поперечна, поэтому она с необходимостью имеет вид:

$$a \text{ --- } \textcircled{\text{---}} \text{ --- } b = i \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \cdot (m_{ab}^2 + \mathcal{O}(k^2)). \quad (20.53)$$

Хотя несингулярные слагаемые в (20.53) в общем случае найти нелегко, можно без труда выписать сингулярное слагаемое, отвечающее вкладу промежуточного голдстоуновского бозона. Из (20.45) и (20.46) видим, что амплитуда превращения калибровочного бозона в голдстоуновский равна

$$\text{---} \xrightarrow{k} \bullet \text{---} \mu = -g k^\mu F_j^a. \quad (20.54)$$

В этом случае полюсный вклад в амплитуду поляризации вакуума равен

$$\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} = (g k^\mu F_j^a) \frac{i}{k^2} (-g k^\nu F_j^b). \quad (20.55)$$

Сравнивая (20.55) с (20.21), находим

$$m_{ab}^2 = g^2 F_j^a F_j^b. \quad (20.56)$$

В случае нарушения симметрии скалярным полем это есть просто полученная ранее формула (20.18). Но равенство (20.56) справедливо в любой теории со спонтанным нарушением симметрии вне зависимости от того, следует ли нарушение симметрии очевидным образом из явного вида лагранжиана или возникает в результате сильных взаимодействий (либо других непертурбативных эффектов). Общий вывод состоит в том, что любой калибровочный бозон, взаимодействующий с током спонтанно нарушенной симметрии, всегда становится массивным.

## 20.2. Теория слабых взаимодействий Глэшоу–Вайнберга–Салама

Теперь мы готовы изложить теорию со спонтанным нарушением калибровочной симметрии, успешно описывающую слабые взаимодействия. Она была предложена Глэшоу, Вайнбергом и Саламом и по первым буквам фамилий авторов называется теорией ГВС. Как и вторая из рассмотренных в предыдущем разделе  $SU(2)$ -моделей, эта теория дает объединенное описание слабых и электромагнитных взаимодействий, причем безмассовый фотон соответствует определенной комбинации генераторов ненарушенной симметрии.

Начнем опять с теории, обладающей калибровочной  $SU(2)$ -симметрией. Чтобы спонтанно нарушить эту симметрию, введем скалярное поле в спинорном представлении  $SU(2)$ , как в (20.22). Но мы знаем, что в такой теории нет безмассовых калибровочных бозонов. Введем поэтому дополнительную калибровочную  $U(1)$ -симметрию. Положим заряд скалярного поля относительно этой симметрии равным  $+1/2$ , так что полное калибровочное преобразование  $\phi$  имеет вид:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\beta/2} \phi. \quad (20.57)$$

(здесь  $\tau^a = \sigma^a/2$ ). Если поле  $\phi$  имеет вакуумное среднее вида

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (20.58)$$

то калибровочное преобразование с параметрами

$$\alpha^1 = \alpha^2 = 0, \quad \alpha^3 = \beta \quad (20.59)$$

оставляет  $\langle \phi \rangle$  инвариантным. Поэтому в теории появляется безмассовый калибровочный бозон, соответствующий данной комбинации генераторов. Остальные три калибровочных бозона получают массу за счет механизма Хиггса.

### Массы калибровочных бозонов

Спектр масс легко получить при помощи развитых в предыдущем разделе методов. Ковариантная производная  $\phi$  равна

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - i\frac{1}{2}g' B_\mu) \phi, \quad (20.60)$$

где  $A_\mu^a$  и  $B_\mu$  — калибровочные бозоны  $SU(2)$  и  $U(1)$ , соответственно. Поскольку эти две группы коммутируют друг с другом как подгруппы полной калибровочной группы, они могут иметь разные константы взаимодействия, которые мы обозначим как  $g$  и  $g'$ .

Чтобы найти массы калибровочных бозонов, нужно вычислить квадрат (20.60) при  $\phi$ , равном вакуумному среднему (20.58). Нужные нам слагаемые равны:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} (0 \ v) \left( gA_\mu^a \tau^a + \frac{1}{2} g' B_\mu \right) \left( gA^{b\mu} \tau^b + \frac{1}{2} g' B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (20.61)$$

Явное вычисление произведения матриц с учетом  $\tau^a = \sigma^a/2$  дает:

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} [g^2 (A_\mu^1)^2 + g^2 (A_\mu^2)^2 + (-gA_\mu^3 + g' B_\mu)^2]. \quad (20.62)$$

Три массивных векторных бозона мы обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{\mu}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\mu}^1 \mp iA_{\mu}^2) & \text{с массой} & \quad m_W = g\frac{v}{2}; \\ Z_{\mu}^0 &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_{\mu}^3 - g'B_{\mu}) & \text{с массой} & \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}\frac{v}{2}. \end{aligned} \quad (20.63)$$

Четвертое векторное поле, ортогональное  $Z_{\mu}^0$ , остается безмассовым:

$$A_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_{\mu}^3 + gB_{\mu}) \quad \text{с массой} \quad m_A = 0. \quad (20.64)$$

Мы отождествим его с векторным потенциалом электромагнитного поля.

Удобно использовать далее в формулах именно эти поля, являющиеся собственными состояниями матрицы масс. Рассмотрим, например, взаимодействие векторных полей с фермионами. Ковариантная производная фермионного поля, принадлежащего произвольному представлению  $SU(2)$  и имеющего заряд  $Y$  относительно  $U(1)$ , равна

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}^a T^a - ig'Y B_{\mu}. \quad (20.65)$$

Через введенные поля с данными массами эта производная выражается как

$$\begin{aligned} D_{\mu} &= \partial_{\mu} - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_{\mu}^{+}T^{+} + W_{\mu}^{-}T^{-}) - i\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}Z_{\mu}(g^2T^3 - g'^2Y) - \\ &\quad - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}A_{\mu}(T^3 + Y), \end{aligned} \quad (20.66)$$

где  $T^{\pm} = (T^1 \pm iT^2)$ . Нормировка выбрана так, чтобы в спинорном представлении  $SU(2)$

$$T^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2) = \sigma^{\pm}. \quad (20.67)$$

Последнее слагаемое в (20.66) явно указывает на то, что безмассовый калибровочный бозон  $A_{\mu}$  соответствует именно генератору  $(T^3 + Y)$ , порождающему калибровочное преобразование (20.59).

Чтобы придать (20.66) более удобный вид, отождествим константу электромагнитного взаимодействия с зарядом электрона  $e$ ,

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (20.68)$$

и введем квантовое число электрического заряда

$$Q = T^3 + Y. \quad (20.69)$$

Такие подстановки (с  $Q = -1$  для электрона) придают взаимодействию с электромагнитным полем обычный вид.

С целью дальнейшего упрощения (20.66) определим угол слабого смешивания  $\theta_w$  как угол поворота при замене базиса  $(A^3, B)$  на  $(Z^0, A)$ :

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (20.70)$$

Тогда после преобразований константы связи  $Z^0$ :

$$g^2 T^3 - g'^2 Y = (g^2 + g'^2) T^3 - g'^2 Q$$

можно будет переписать ковариантную производную (20.66) в виде:

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-) - i \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) - i e A_\mu Q, \quad (20.71)$$

где

$$g = \frac{e}{\sin \theta_w}. \quad (20.72)$$

Мы видим, что константы взаимодействия всех слабых бозонов выражаются через два параметра — хорошо измеренный заряд электрона  $e$  и новый параметр  $\theta_w$ . Константы, связанные с обменом бозонами  $W$  и  $Z$ , зависят и от масс этих частиц. Однако эти массы не независимы, поскольку из (20.63) следует, что

$$m_W = m_Z \cos \theta_w. \quad (20.73)$$

Все эффекты от обмена  $W$  и  $Z$ , по крайней мере на древесном уровне, могут быть описаны тремя основными параметрами  $e$ ,  $\theta_w$  и  $m_W$ .

### Взаимодействие с фермионами

Если заданы квантовые числа фермионных полей, то взаимодействие полей  $W$  и  $Z^0$  с фермионами однозначно определяется ковариантной производной (20.71). Для определения этих квантовых чисел необходимо принять во внимание тот отмеченный в разделе 17.3 факт, что  $W$ -бозон взаимодействует только с левополяризованными кварками и лептонами.

На уровне классического лагранжиана не представляет никакого труда построить теорию, в которой левые и правые компоненты фермионного поля по-разному взаимодействуют с калибровочными бозонами\*. Еще в разделе 3.2 мы видели, что для дираковских фермионов кинетическая энергия представляется в виде суммы двух слагаемых, соответствующих лево- и правополяризованным полям:

$$\bar{\psi} i \not{\partial} \psi = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R. \quad (20.74)$$

В случае, когда  $\psi$  является калибровочным полем, можно считать, что  $\psi_L$  и  $\psi_R$  преобразуются по разным представлениям калибровочной группы. Тогда правая часть (20.74) содержит две разные ковариантные производные, а это означает, что имеются два отличных друг от друга взаимодействия.

В случае теории ГВС можно использовать этот подход, чтобы ограничить взаимодействия  $W$ -бозонов только левополяризованными компонентами кварков и лептонов. Пусть левым фермионам соответствуют дублеты, а правым — синглеты, преобразующиеся по некоторому представлению группы  $SU(2)$ . Если определить значение  $T^3$  для

\* В разделе 19.4 мы показали, что после учета квантовых поправок могут возникнуть проблемы. Ниже мы убедимся, что в той модели, которую мы строим, никаких проблем не возникает.

всех фермионных полей, то  $Y$  непосредственно находится из (20.69). Отсюда следует, что значения  $Y$  для поляризованных по-разному кварков и лептонов различны. Для правых полей  $T^3 = 0$ , следовательно, приписывая  $Y$  значение электрического заряда, мы воспроизводим обычные электрические заряды частиц. Например, для правополяризованного  $u$ -кварка имеем  $Y = +2/3$ , для  $e_R^-$   $Y = -1$ . Для левополяризованных полей

$$E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (20.75)$$

получаются правильные значения электрического заряда, если положить  $Y = -1/2$  и  $Y = +1/6$ , соответственно, и учесть равенство  $T^3 = \pm 1/2$ . Поскольку левые и правые фермионы суть разные представления фундаментальной калибровочной группы, часто удобно рассматривать их как различные частицы, взаимодействие которых характеризуется массами фермионов.

Построение фермионных массовых слагаемых представляет серьезную проблему, так как все возможные слагаемые такого рода запрещены глобальными калибровочными инвариантностями. Например, в случае электрона мы не можем положить

$$\Delta \mathcal{L} = -m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L), \quad (20.76)$$

поскольку поля  $e_L$  и  $e_R$  преобразуются по разным представлениям  $SU(2)$  и обладают различными  $U(1)$ -зарядами. На протяжении нескольких следующих страниц мы будем пренебрегать этими проблемами и считать фермионы безмассовыми. Этого достаточно для анализа структуры слабых взаимодействий при высоких энергиях. В конце раздела мы вернемся к проблеме написания массовых слагаемых лептонов и кварков в теории ГВС. Решение этой проблемы подтвердит идею о том, что левые и правые фермионные поля являются независимыми сущностями на фундаментальном уровне, а некоторый дополнительный процесс смешивает их, образуя массивные фермионы.

Если пренебречь массами фермионов, лагранжиан, описывающий слабые взаимодействия кварков и лептонов, получается непосредственной подстановкой значений зарядов. Кинетическая энергия  $e$ ,  $\nu$ ,  $u$  и  $d$  равна:

$$\mathcal{L} = \bar{E}_L (i\not{D}) E_L + \bar{e}_R (i\not{D}) e_R + \bar{Q}_L (i\not{D}) Q_L + \bar{u}_R (i\not{D}) u_R + \bar{d}_R (i\not{D}) d_R. \quad (20.77)$$

Все ковариантные производные даются выражением (20.65), причем  $T^a$  и  $Y$  вычисляются в том представлении, к которому относится соответствующий фермион. Например,

$$\bar{Q}_L (i\not{D}) Q_L = \bar{Q}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - i\frac{1}{6}g' B_\mu) Q_L. \quad (20.78)$$

Правополяризованное нейтрино не обладает ни  $SU(2)$ -, ни  $U(1)$ -зарядами, поэтому в равенстве (20.77) мы просто опустили это поле.

Для получения физических следствий взаимодействия фермионов с векторными бозонами, перепишем (20.77), используя собственные состояния векторных бозонов с данными массами, а также вид ковариантных производных, даваемый выражением (20.71). Равенство (20.77) тогда принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{E}_L (i\not{\partial}) E_L + \bar{e}_R (i\not{\partial}) e_R + \bar{Q}_L (i\not{\partial}) Q_L + \bar{u}_R (i\not{\partial}) u_R + \bar{d}_R (i\not{\partial}) d_R + \\ & + g(W_\mu^+ J_W^{\mu+} + W_\mu^- J_W^{\mu-} + Z_\mu^0 J_Z^\mu) + eA_\mu J_{EM}^\mu, \end{aligned} \quad (20.79)$$

где

$$\begin{aligned}
 J_W^{\mu+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L); \\
 J_W^{\mu-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L); \\
 J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_w} \left[ \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left( \frac{1}{2} \right) \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu \left( \sin^2 \theta_w \right) e_R + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{u}_L \gamma^\mu \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu \left( -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_R + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{d}_L \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left( \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_R \right]; \\
 J_{EM}^\mu &= \bar{e} \gamma^\mu (-1) e + \bar{u} \gamma^\mu \left( +\frac{2}{3} \right) u + \bar{d} \gamma^\mu \left( -\frac{1}{3} \right) d.
 \end{aligned} \tag{20.80}$$

Здесь мы использовали (20.67), чтобы упростить выражение для  $W$ -бозонных токов. Заметим, что ток  $J_{EM}^\mu$ , соответствующий фотону, действительно совпадает с обычным электромагнитным током.

### Сокращение аномалий

Как мы только что показали, не представляет никакого труда построить лагранжиан, описывающий взаимодействие калибровочных бозонов теории ГВС с фермионами в киральном представлении. Однако с такими киральными взаимодействиями в действительности связана одна проблема, возникающая при вычислении однопетлевых поправок. В разделе 19.2 мы видели, что аксиальный ток, сохраняющийся на уровне классических уравнений движения, может обладать ненулевой дивергенцией для однопетлевых диаграмм, связывающих этот ток с парой калибровочных бозонов. Фейнмановская диаграмма, дающая этот аномальный вклад, представляет треугольную диаграмму с аксиальным и двумя калибровочными токами в вершинах. В калибровочной теории, в которой калибровочные бозоны взаимодействуют с киральным током, опасные треугольные диаграммы возникают при нахождении однопетлевых поправок к вершине с тремя такими бозонами. Аномальные слагаемые нарушают тождество Уорда для амплитуды. Поэтому, как было показано в разделе 19.4, теории, в которых калибровочные бозоны взаимодействуют с киральными токами, могут быть калибровочно-инвариантными только при условии, что аномальные слагаемые каким-то образом сокращаются. К счастью, мы показали, что аномальные слагаемые можно привести к виду, при котором они исчезают при суммировании по всем типам фермионов, которые могут давать вклад в эти диаграммы\*.

Эксперимент показывает, что токи слабых взаимодействий — левые. Поэтому в рамках теории ГВС мы вынуждены выбрать киральное калибровочное взаимодействие. Сначала необходимо удостовериться, что аномальные слагаемые в треугольной диаграмме, как и требовалось, сокращаются. Мы увидим, что это действительно так, однако такое сокращение осуществляется посредством тонкой и довольно загадочной игры квантовых чисел кварков и лептонов.

Аномальное слагаемое в треугольной диаграмме с тремя калибровочными бозонами  $A_\mu^a$ ,  $A_\nu^b$  и  $A_\lambda^c$  пропорционально групповому инварианту

$$\text{tr}[\gamma^5 t^a \{t^b, t^c\}], \tag{20.81}$$

\*Если вы не читали гл. 19, но можете представить, что фермионная треугольная диаграмма содержит слагаемое, нарушающее калибровочную симметрию, то вы в состоянии проследить за изложенными ниже рассуждениями.

где след берется по всем фермионам. Появление антикоммутатора объясняется тем, что в двух треугольных диаграммах, по которым производится суммирование, фермионы двигаются в противоположных направлениях. Множитель  $\gamma^5$  указывает на тот факт, что аномалия связана с киральными токами; он равен  $-1$  для левополяризованных и  $+1$  для правополяризованных фермионов. В теориях типа КЭД и КХД, в которых калибровочные бозоны одинаково взаимодействуют и с правыми, и с левыми фермионами, аномалии сокращаются автоматически. Этот «бухгалтерский» подход есть частный случай более общего подхода, изложенного в разделе 19.4.

При вычислении аномалий в теории ГВС проще всего работать в базисе, образованном векторами состояния калибровочных бозонов группы  $SU(2) \times U(1)$  до того, как они перемешаются, образовав собственные состояния фотона и  $Z^0$  с фиксированной массой. Достаточно вычислить треугольные диаграммы для безмассовых фермионов, так как правые и левые фермионы обладают разными квантовыми числами. Однако мы должны учитывать аномальные вклады, даваемые не только диаграммами с тремя калибровочными бозонами  $SU(2) \times U(1)$ , но и диаграммами, в которые наряду с калибровочными бозонами слабого взаимодействия входят цветные  $SU(3)$  калибровочные бозоны КХД. Если рассмотреть влияние гравитационных эффектов в калибровочной теории слабых взаимодействий, то видно, что и в этом случае возможна аномальная диаграмма с одним слабым калибровочным бозоном и двумя гравитонами. Можно опустить диаграммы, в которых все взаимодействия обладают лево-правой симметрией; таковы, например, аномалия с тремя  $SU(3)$  бозонами и аномалия с одним бозоном  $SU(3)$  и двумя гравитонами. Полный набор диаграмм, дающих аномальный вклад, показан на рис. 20.2. Если должны выполняться тождества Уорда для калибровочной теории  $SU(2) \times U(1)$ , то все возможные аномалии должны сокращаться.

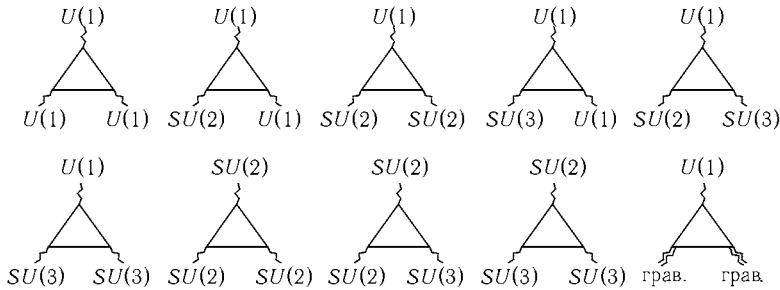


Рис. 20.2. Возможные типы калибровочных аномалий в теории слабых взаимодействий. Чтобы теория Глэшоу – Вайнберга – Салама была последовательной, все эти аномалии должны равняться нулю.

Тот факт, что аномальные слагаемые в случае трех калибровочных бозонов  $SU(2)$  всегда сокращаются, есть особое свойство калибровочной теории  $SU(2)$ . Оно следует из соотношения для сигма-матриц Паули  $\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}$ , из которого вытекает, что след (20.81) равен нулю. Аномалии, содержащие один  $SU(3)$  или один  $SU(2)$ -бозон, пропорциональны

$$\text{tr}[t^a] = 0 \quad \text{или} \quad \text{tr}[\tau^a] = 0. \tag{20.82}$$

Остальные нетривиальные аномалии — это те, которые содержат один  $U(1)$ - и два  $SU(2)$ - или  $SU(3)$ -бозона, либо три  $U(1)$ -бозона и гравитационная аномалия с одним калибровочным бозоном  $U(1)$ .

Аномалия с одним  $U(1)$ - и двумя  $SU(3)$ -бозонами пропорциональна теоретико-групповому множителю

$$\text{tr}[t^a t^b Y] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \cdot \sum_q Y_q, \quad (20.83)$$

где суммирование ведется по всем левым и правым кваркам, причем левые кварки входят в сумму с дополнительным множителем  $(-1)$ . Подставляя приведенные выше заряды кварков  $u_L$ ,  $d_L$ ,  $u_R$  и  $d_R$ , находим:

$$\sum_q Y_q = -2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0. \quad (20.84)$$

Аналогично, аномалия с одним  $U(1)$ - и двумя  $SU(2)$ -бозонами пропорциональна выражению

$$\text{tr}[\tau^a \tau^b Y] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \sum_{fL} Y_{fL}, \quad (20.85)$$

где суммирование ведется по левополяризованным фермионам  $E_L$  и  $Q_L$ . Поэтому

$$\sum_{fL} Y_{fL} = -\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad (20.86)$$

множитель 3 учитывает наличие цвета у кварков. Аномалия с тремя калибровочными  $U(1)$ -бозонами пропорциональна сумме по всем левым и правым лептонам и кваркам:

$$\text{tr}[Y^3] = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^3 - 3\left[2\left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right] = 0. \quad (20.87)$$

Наконец, гравитационная аномалия с одним калибровочным  $U(1)$ -бозоном пропорциональна

$$\text{tr}[Y] = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) - 3\left[2\left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 0. \quad (20.88)$$

Теория Глэшоу–Вайнбега–Салама является, таким образом, киральной калибровочной теорией, которая полностью свободна от аксиальных аномалий. Однако для сокращения аномалий требуется, чтобы лептоны и кварки образовывали полные мультиплеты со структурой  $(E_L, e_R, Q_L, u_R, d_R)$ . Этот набор полей часто называют *поколением* кварков и лептонов. Самосогласованность теории требует, чтобы в природе кварки и лептоны возникали в одинаковых количествах, образуя таким образом последовательные поколения.

### Экспериментальные следствия теории ГВС

Теперь, когда у нас есть фундаментальная теория, описывающая взаимодействие  $W$ - и  $Z$ -бозонов с фермионами, мы можем получить из нее ряд следствий, относящихся к наблюдаемым процессам, в которых участвуют слабые бозоны. Такой анализ должен воспроизводить эффективный лагранжиан, описывающий слабые взаимодействия, использованный в гл. 17 и 18, а также предсказывать дополнительные наблюдаемые эффекты, связанные с обменом слабым бозоном. За недостатком места мы ограничимся тем, что выведем самые основные соотношения, опустив систематический



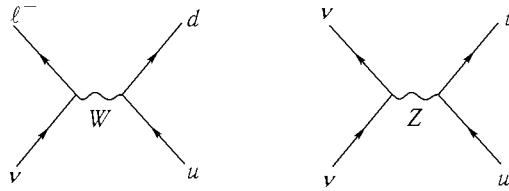


Рис. 20.3. Некоторые процессы с обменом виртуальными  $W$ - и  $Z$ -бозонами

обзор феноменологии слабых взаимодействий. Тем не менее, мы призываем читателя изучить экспериментальные обоснования теории слабых взаимодействий, ибо они содержат множество прекрасных иллюстраций принципов квантовой теории поля\*.

При энергиях, малых по сравнению с массами векторных бозонов, взаимодействия слабых бозонов проявляются, главным образом, в процессах, содержащих обмен виртуальным слабым бозоном. Процессы такого типа показаны на рис. 20.3. Мы выведем правила Фейнмана для массивных калибровочных бозонов в гл. 21, а пока разумно предположить, что пропагаторы  $W$ - and  $Z$ -бозонов даются выражениями

$$\begin{aligned} \langle W^{\mu+}(p)W^{\nu-}(-p) \rangle &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2}, \\ \langle Z^\mu(p)Z^\nu(-p) \rangle &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 - m_Z^2}. \end{aligned} \tag{20.89}$$

В разделе 21.1 мы увидим, что эти пропагаторы приводят к правильным выражениям для диаграмм с обменом  $W$ - или  $Z$ -бозоном с точностью до слагаемых порядка  $(m_f/m_W)$ , где  $m_f$  — масса фермиона.

Рассмотрим сначала диаграмму с обменом  $W$ -бозоном, изображенную на рис. 20.3, в пределе, когда энергии малы по сравнению с массой  $W$ . В этом случае мы можем пренебречь слагаемым  $p^2$  в знаменателе пропагатора  $W$ -бозона (20.89). Беря константу взаимодействия  $W$ -бозона из (20.79), находим, что диаграмма может быть описана эффективным лагранжианом

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_W &= \frac{g^2}{m_W^2} J_W^{\mu-} J^+_{\mu W} = \\ &= \frac{g^2}{2m_W^2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L). \end{aligned} \tag{20.90}$$

Коэффициент часто записывают, вводя *постоянную Ферми*:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \tag{20.91}$$

Различные слагаемые в эффективном лагранжиане суть выражения, которые мы уже выписывали (см. (17.31), (18.28), и (18.29)). Поскольку эти взаимодействия лептонов и кварков осуществляются посредством обмена электрически заряженным векторным бозоном, все они носят название взаимодействий *заряженных токов*. Оказывается, что эффективный лагранжиан (20.90) позволяет весьма успешно описать феноменологию

\*Экспериментальные достижения теории слабых взаимодействий описаны в книге Commins, Bucksbaum (1983).

слабых взаимодействий, обусловленных заряженными токами. Мы использовали этот лагранжиан для описания рассеяния нейтрино высоких энергий, но его можно с таким же успехом применить и к ядерному  $\beta$ -распаду, распаду мюона и множеству других процессов.

Аналогично можно выписать эффективный лагранжиан, возникающий в результате обмена виртуальным  $Z^0$ -бозоном:

$$\Delta\mathcal{L}_Z = \frac{g^2}{2m_Z^2} J_Z^\mu J_{\mu Z} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left( \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) f \right)^2, \quad (20.92)$$

где суммирование ведется по всем лево- и правополяризованным ароматам, а также использовано соотношение (20.73), чтобы упростить множитель перед скобкой. Мы говорим, что эффективный лагранжиан (20.92) описывает процессы с *нейтральными токами*. Заметим, что если определить калибровочные токи  $SU(2)$  выражением

$$J^{\mu a} = \sum_f \bar{f} \gamma^\mu T^a f, \quad (20.93)$$

то сумме эффективных лагранжианов, описывающих обмен  $W$ - и  $Z$ -бозонами, можно придать простой вид:

$$\Delta\mathcal{L}_W + \Delta\mathcal{L}_Z = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left[ (J^{\mu 1})^2 + (J^{\mu 2})^2 + (J^{\mu 3} - \sin^2 \theta_w J_{EM}^\mu)^2 \right]. \quad (20.94)$$

Это выражение в пределе  $g' \rightarrow 0$  или  $\sin^2 \theta_w \rightarrow 0$  очевидным образом инвариантно относительно ненарушенной глобальной симметрии  $SU(2)$ . Мы обсудим это наблюдение ниже, в конце этого раздела.

Эффективный лагранжиан (20.92), описывающий нейтральные токи, содержит слагаемые, отвечающие взаимодействию всех кварков и лептонов. Такие слагаемые нарушают четность. Этим слабые взаимодействия отличаются от сильных и электромагнитных. Например, из (20.92) следует существование глубоко неупругого рассеяния нейтрино, обусловленного нейтральными токами. В таких событиях нейтрино высоких энергий рассеивается на нуклоне, но не переходит в конечном состоянии в мюон или электрон. Этот процесс рассмотрен в задаче 20.4. Аналогично, взаимодействие нейтральных токов приводит к нарушению четности при глубоконеупругом рассеянии электронов. Это взаимодействие также приводит к существованию нарушающего четность электрон-нуклонного взаимодействия, которое смешивает атомные энергетические уровни, и, аналогично, нарушающего четность нуклон-нуклонного взаимодействия. В рамках теории ГВС вероятности этих разнообразных процессов выражаются через постоянную Ферми и еще один параметр,  $\sin^2 \theta_w$ . Следовательно, теорию ГВС можно проверить, наблюдая каждое из перечисленных явлений и задаваясь вопросом, можно ли описать все эти процессы одним-единственным значением этого параметра.

Дальнейшая проверка теории ГВС возможна при более высоких энергиях. Описание процесса  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$  существенно изменяется, поскольку теория содержит новую диаграмму с обменом  $Z^0$ -бозоном в  $s$ -канале, интерферирующую с обычной диаграммой с обменом фотоном, как показано на рисунке 20.4. Нетрудно рассчитать результат такой интерференции, используя методы раздела 5.2, поэтому мы предлагаем читателю самому провести этот анализ (см. задачу 20.3).

Как только энергия в системе центра масс достигает  $m_Z$ , бозон  $Z^0$  проявляется непосредственно в виде резонанса в сечении аннигиляции  $e^+e^-$ . Аналогично, и  $W$ , и  $Z$

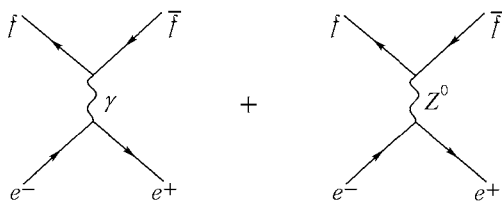


Рис. 20.4. Диаграммы, дающие вклад в амплитуду процесса  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$  в теории Глэшоу – Вайнберга – Салама.

можно наблюдать в виде резонансов при аннигиляции кварка и антикварка, рассматриваемой как партонный субпроцесс при протон-антипротонном рассеянии. Положения этих резонансов можно предсказать, используя  $G_F$ ,  $\sin^2 \theta_w$ , и значения  $e$ ,  $\alpha$ , вычисленные из (20.72) и (20.91). Имеем:

$$m_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_w}, \quad m_Z^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w}. \quad (20.95)$$

На рисунке 20.5 приведена детальная форма резонанса  $Z^0$ . Для сравнения показаны экспериментальные данные и теоретическая кривая, причем положение резонанса на последней подобрано так, чтобы получилось наилучшее совпадение с экспериментом. Высота и ширина резонанса предсказываются теорией ГВС. При более высоких энергиях имеет место уширение резонанса за счет процессов, в которых перед аннигиляцией электрон и позитрон излучают параллельные фотоны; эта поправка обсуждалась в задаче 5.5.

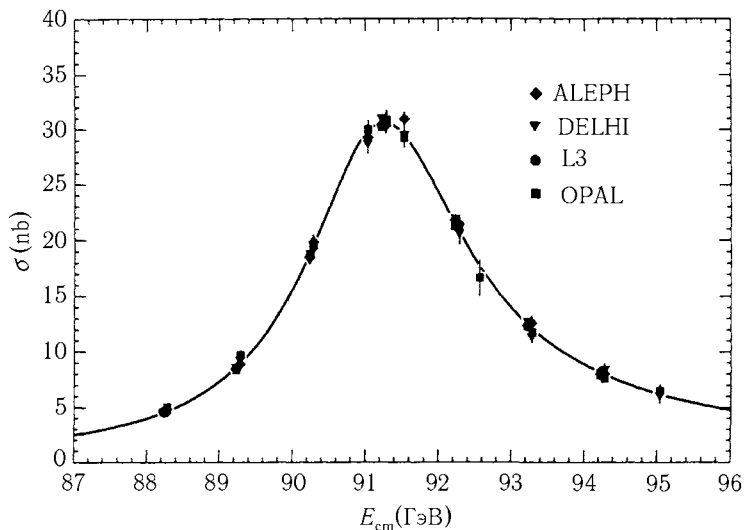


Рис. 20.5. Полное сечение аннигиляции  $e^+e^-$  с образованием адронов для  $E_{\text{ци}}$ , близких к массе  $Z^0$ -бозона, измеренное в экспериментах ALEPH, DELPHI, L3, OPAL и обработанное Particle Data Group (см. *Phys. Rev.* **D50**, (1994), Fig. 32.14). Ссылки на оригинальные статьи приводятся здесь же. Сплошная кривая на рисунке — предсказание теории ГВС.

Так как лево- и правополяризованные фермионы входят в лагранжиан теории GWS как разные частицы с совершенно разными квантовыми числами, взаимодействуют

они с  $Z^0$  также по разному. Одно из проявлений этого — наличие *поляризационной асимметрии*, то есть ненулевой суммарной поляризации фермионов, образующихся при распаде  $Z^0 \rightarrow f\bar{f}$ , или же асимметрии в обратном процессе образования  $Z^0$ . Эту асимметрию можно непосредственно вычислить из выражения для тока  $Z^0$  (20.80):

$$\begin{aligned} A_{LR}^f &= \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow f_L\bar{f}_R) - \Gamma(Z^0 \rightarrow f_R\bar{f}_L)}{\Gamma(Z^0 \rightarrow f_L\bar{f}_R) + \Gamma(Z^0 \rightarrow f_R\bar{f}_L)} = \\ &= \frac{(\frac{1}{2} - |Q_f| \sin^2 \theta_w)^2 - (Q_f \sin^2 \theta_w)^2}{(\frac{1}{2} - |Q_f| \sin^2 \theta_w)^2 + (Q_f \sin^2 \theta_w)^2}. \end{aligned} \quad (20.96)$$

При  $\sin^2 \theta_w = 0.23$  это выражение дает 15%-ую асимметрию для заряженных лептонов и 95% асимметрию для  $d$ -,  $s$ - и  $b$ -кварков. Для лептонов асимметрию можно проверить экспериментально, измеряя либо поляризацию  $\tau$ -лептонов в точке  $Z^0$ -резонанса, либо отношение сечений образования резонанса в случае левых и правых электронов. Для кварков асимметрию можно косвенно определить из асимметрии их образования «вперед-назад» в точке резонанса, как это объяснено в задаче 20.3.

Поскольку слабые нейтральные токи проявляются в большом количестве разных явлений, теория слабых взаимодействий ГВС может быть подвергнута точной проверке. В таблице 20.1 приведены значения  $\sin^2 \theta_w$ , полученные из анализа разнообразных эффектов и асимметрий, обусловленных слабыми нейтральными токами. Во всех случаях, для достижения требуемого уровня точности необходимо учитывать однопетлевые радиационные поправки. С этими радиационными поправками связан ряд тонкостей. Во-первых, необходимо принять определенное соглашение о перенормировке, определяющее  $\sin^2 \theta_w$ , и затем последовательно использовать его во всех дальнейших вычислениях. В таблице приведены результаты для двух различных выборов этого соглашения. В обоих случаях значения наблюдаемых величин, характеризующих слабые взаимодействия, считаются функциями  $\alpha$ ,  $G_F$  и еще одного независимого параметра. В первом столбце этим параметром является отношение масс  $m_W/m_Z$ , при помощи которого, используя выражение (20.73) в древесном приближении определено перенормированное значение  $\sin^2 \theta_w$ :

$$s_W^2 \equiv 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}. \quad (20.97)$$

Во втором столбце в качестве третьего параметра выступает  $\sin^2 \theta_w$ , вычисленный с использованием констант слабых взаимодействий, определенных схемой минимального вычитания (11.77). Различия между двумя определениями  $\sin^2 \theta_w$  проявляются на уровне однопетлевых поправок и могут представлять интерес с физической точки зрения. Этот вопрос обсуждается в разделе 21.3.

Вторая тонкость заключается в том, что однопетлевые поправки к процессам, обусловленным слабыми нейтральными токами, зависят от массы  $t$ -кварка, которая была определена совсем недавно и до сих пор известна с очень маленькой точностью. Зависимость от массы  $t$ -кварка относительно сильна (по причинам, которые мы будем обсуждать в разделе 21.3). Однопетлевые поправки также слабо зависят от свойств частиц, ответственных за спонтанное нарушение симметрии.

Из таблицы 20.1 видно, что наблюдалось множество явлений, обусловленных слабыми нейтральными токами, причем значения всех величин можно объяснить единственным согласованным значением  $\sin^2 \theta_w$ . Такое замечательное согласие теории

Таблица 20.1. Значения  $\sin^2 \theta_w$ , полученные в экспериментах по слабым взаимодействиям.

Наблюдаемые величина или процесс	$s_W^2$	$\sin^2 \theta_{w \overline{MS}}$
$m_Z$	0.2247 (21)	0.2320 (6)
$m_W$	0.2264 (25)	0.2338 (22)
$\Gamma_Z$	0.2250 (18)	0.2322 (6)
Лептонная f-b асимметрия в $Z^0$	0.2243 (17)	0.2315 (11)
Асимметрия при распаде $Z^0$ в любые пары	0.2245 (17)	0.2317 (8)
$A_{LR}^e$ в $Z^0$	0.2221 (17)	0.2292 (10)
Глубоко неупругое рассеяние нейтрино	0.2260 (48)	0.233 (5)
Упругое рассеяние нейтрино на протоне	0.205 (31)	0.212 (32)
Упругое рассеяние нейтрино на электроне	0.224 (9)	0.231 (9)
Нарушение четности атома	0.216 (8)	0.223 (8)
Нарушение четности при неупругом рассеянии $e^-$	0.216 (17)	0.223 (18)

Значения, приведенные здесь, получены фиксированием экспериментальных данных, осуществленных подбором значений  $s_W^2$  или  $\sin^2 \theta_{w \overline{MS}}$ , причем параметры  $\alpha$  и  $G_F$  считались известными. Числа в скобках — стандартные ошибки в последнем знаке. Значения  $s_W^2$  и  $\sin^2 \theta_{w \overline{MS}}$ , найденные на эксперименте, зависят от масс  $t$ -кварка и хиггсовского бозона. Эти массы полагаются равными 169 ГэВ и 300 ГэВ соответственно. Приведенные значения ошибок учитывают неопределенность в массе  $t$ -кварка, равную 17 ГэВ, и тот факт, что масса Хиггса не известна точно, а лежит в интервале энергий от 60 ГэВ до 1000 ГэВ. Различия в относительных ошибках в двух столбцах отражает важность этой теоретической неопределенности. Некоторые наблюдаемые величины слабо зависят от  $\alpha_s$ ; эти значения полагаются равными  $\alpha_s(m_Z) = 0.120 \pm .007$ . Таблица взята из статьи P. Langacker and J. Erler в Particle Data Group, *Phys. Rev. D* **50**, 1304 (1994). Эта статья содержит полный набор ссылок, а также обсуждение источников неопределенностей.

и эксперимента дает уверенность в том, что теория Глэшоу–Вайнберга–Салама действительно является правильным описанием слабых и электромагнитных взаимодействий.

### Массовые слагаемые фермионов

Теперь вернемся к проблеме написания массовых слагаемых кварков и лептонов. Напомним, что в лагранжиан нельзя ввести обычные массовые слагаемые, поскольку левые и правые компоненты фермионных полей имеют различные калибровочные квантовые числа, и поэтому простые массовые слагаемые нарушают калибровочную инвариантность. Чтобы кварки и лептоны приобрели массу, необходимо снова привлечь механизм спонтанного нарушения симметрии.

В начале этого раздела мы предположили, что скалярное поле  $\phi$  приобретает ненулевое вакуумное среднее (20.58) для того, чтобы  $W$ - и  $Z$ -бозоны стали массивными. Чтобы получилась правильная картина калибровочных масс бозонов, это скалярное поле должно быть спинором, преобразующимся по некоторому представлению группы  $SU(2)$ , и иметь заряд  $Y = 1/2$ . С учетом этих квантовых чисел можно написать калибровочно-инвариантное взаимодействие, связывающее  $e_L$ ,  $e_R$ ,  $\phi$ , следующим образом:

$$\Delta \mathcal{L}_e = -\lambda_e \overline{E}_L \cdot \phi e_R + \text{з.с.} \quad (20.98)$$

Здесь подразумевается суммирование по  $SU(2)$ -индексам дублетов  $E_L$  и  $\phi$ ; заметим также, что сумма зарядов  $Y$  различных полей равна нулю. Параметр  $\lambda_e$  — новая безразмерная константа взаимодействия. Если мы заменим  $\phi$  в этом выражении его вакуумным средним (20.58), то получим:

$$\Delta\mathcal{L}_e = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v \bar{e}_L e_R + \text{э.с.} + \dots \quad (20.99)$$

Это массовое слагаемое электрона. Величина массы определяется вакуумным средним  $\phi$ , умноженным на новую безразмерную константу:

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v. \quad (20.100)$$

Поскольку масса электрона пропорциональна  $v$ , можно было бы ожидать, что массы электрона и  $W$ -бозона — величины одного порядка. Фактически, однако, эксперимент дает  $m_e/m_W \sim 6 \times 10^{-6}$ . Поскольку  $\lambda_e$  — перенормируемая константа, ее следует рассматривать как внешний параметр теории. Таким образом, модель ГВС позволяет электрону быть очень легким, однако не может объяснить, почему электрон так легок по сравнению с  $W$ -бозоном.

Аналогично можно записать массовые слагаемые для кварковых полей. Заметим, что в следующем выражении оба слагаемых являются инвариантами группы  $SU(2)$  и обладают нулевым суммарным значением  $Y$ :

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\lambda_d \bar{Q}_L \cdot \phi d_R - \lambda_u \epsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \phi_b^\dagger u_R + \text{э.с.} \quad (20.101)$$

Подставляя вакуумное среднее поля  $\phi$  (20.58), приводим эти слагаемые к виду

$$\Delta\mathcal{L}_q = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v \bar{d}_L d_R - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v \bar{u}_L u_R + \text{э.с.} + \dots, \quad (20.102)$$

т. е. к обычным массовым слагаемым для  $d$ - и  $u$ -кварков. Таким образом, теория ГВС приводит к соотношениям:

$$m_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v, \quad m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v. \quad (20.103)$$

Как и в случае с электроном, теория параметризуется, но не объясняет малость экспериментальных значений масс  $d$  и  $u$ -кварков.

Когда в теорию включаются новые поколения кварков, могут возникать дополнительные слагаемые, отвечающие взаимодействиям, смешивающим поколения. В качестве альтернативы можно диагонализировать взаимодействие Хиггса, выбирая новый базис кварковых полей. В разделе 20.3 мы покажем, что это всегда возможно. Однако такое упрощение взаимодействия Хиггса приводит к усложнению калибровочного взаимодействия. Пусть

$$u_L^i = (u_L, c_L, t_L), \quad d_L^i = (d_L, s_L, b_L) \quad (20.104)$$

обозначают  $u$ - и  $d$ -типы кварков в их первоначальном базисе, и пусть  $u_L^i$  и  $d_L^i$  обозначают кварки в базисе, диагонализующем хиггсовское взаимодействие между ними. Последний базис является физическим, поскольку в нем диагонализуется массовая матрица. Два базиса связаны унитарными преобразованиями:

$$u_L^i = U_u^{ij} u_L^j, \quad d_L^i = U_d^{ij} d_L^j. \quad (20.105)$$

В этом новом базисе ток, отвечающий  $W$ -бозону, имеет вид

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (U_u^\dagger U_d)_{ij} d_L^j. \quad (20.106)$$

Это выражение принято записывать в виде

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu V_{ij} d_L^j, \quad (20.107)$$

где  $V_{ij}$  — унитарная матрица, называемая матрицей Кабиббо–Кобаяши–Маскава (ККМ). Недиагональные слагаемые в  $V_{ij}$  делают возможными переходы между поколениями кварков, обусловленные слабыми взаимодействиями. Например, ограничиваясь для простоты двумя поколениями и записывая

$$V_{1j} d_L^j = \cos \theta_c d_L' + \sin \theta_c s_L', \quad (20.108)$$

получаем слагаемое, пропорциональное  $\sin \theta_c$ , которое делает возможным слабый распад  $s$ -кварка с образованием  $u$ -кварка. Мы использовали такую структуру в разделе 18.2 при обсуждении эффективного лагранжиана, описывающего распад  $K$ -мезона. Более подробно мы обсудим смешивание ароматов и свойства симметрии матрицы ККМ в разделе 20.3.

Интересно отметить, что описанная структура не содержит слагаемых, придающих массу нейтрино. Если бы мы захотели обобщить (20.98) так, чтобы у нейтрино появилась масса, нам пришлось бы ввести новое фермионное поле  $\nu_R$ , обладающее полностью нулевым зарядом относительно группы  $SU(2) \times U(1)$ . В этом случае мы могли бы написать взаимодействие Хиггса в виде:

$$\Delta \mathcal{L}_\nu = -\lambda_\nu \varepsilon^{ab} \bar{E}_{La} \phi_b^\dagger \nu_R + \text{э.с.}, \quad (20.109)$$

что привело бы к появлению у  $\nu_e$  ненулевой массы, по-видимому, сравнимой по величине с массой электрона. Но мы знаем из опыта, что массы всех нейтрино чрезвычайно малы; масса  $\nu_e$ , как известно, меньше 10 эВ. Необычайная малость массы нейтрино естественным образом объясняется, если не существует состояния  $\nu_R$ . В разделе 20.3 мы покажем, что такое предположение приводит также к отсутствию переходов между лептонами разных поколений; этот результат также находится в согласии с очень сильными экспериментальными ограничениями.

### Хиггсовский бозон

Обсуждение проблемы генерации масс фермионов показало, что скалярное поле, приводящее к спонтанному нарушению калибровочной симметрии, является важной составной частью структуры теории Глэшоу – Вайнберга – Салама. Поэтому следует выяснить, нет ли более явных проявлений этого обстоятельства.

Чтобы исследовать этот вопрос, будем работать в *унитарной калибровке*, аналогичной той, что была использована для абелевой модели (см. (20.12)). Параметризуем поле  $\phi$  следующим образом:

$$\phi(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (20.110)$$

Двухкомпонентный спинор в правой части равенства имеет произвольную вещественнозначную нижнюю компоненту, равную сумме вакуумного среднего  $\phi$  и флуктуирующего вещественнозначного поля  $h(x)$  с  $\langle h(x) \rangle = 0$ . На этот спинор действует общее

калибровочное преобразование  $U(x)$  из группы  $SU(2)$ . В результате получаем наиболее общий комплекснозначный двухкомпонентный спинор. Мы можем осуществить калибровочное преобразование, чтобы устранить  $U(x)$  из лагранжиана. Тогда  $\phi$  сводится к полю с одной физической степенью свободы.

Перенормируемый лагранжиан, приводящий к ненулевому вакуумному среднему  $\phi$ , дается выражением

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (20.111)$$

Минимум потенциальной энергии достигается при

$$v = \left( \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}. \quad (20.112)$$

В унитарной калибровке потенциальная энергия в (20.111) приобретает вид

$$\mathcal{L}_V = -\mu^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 = -\frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_h h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4. \quad (20.113)$$

Квантом поля  $h(x)$  является скалярная частица с массой

$$m_h = \sqrt{2} \mu^2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v. \quad (20.114)$$

Эта частица известна как *хиггсовский бозон*. Как и у фермионов, в теории ГВС хиггсовский бозон имеет массу, величина которой зависит от вакуумного среднего  $v$ , но точное значение определяется дополнительной неизвестной перенормируемой константой взаимодействия.

Разложение кинетического слагаемого в (20.111) в унитарной калибровке приводит к массовому слагаемому калибровочного бозона (20.62) и дополнительным слагаемым, содержащим поле хиггсовского бозона. В явном виде:

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \left[ m_W^2 W^{\mu+} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right] \cdot \left( 1 + \frac{h}{v} \right)^2, \quad (20.115)$$

где  $m_W$  и  $m_Z$  даются выражениями (20.63).

Наконец, наличие массовых слагаемых фермионов в (20.98) и (20.101) приводит к непосредственному взаимодействию хиггсовского бозона с фермионами. Вычисляя эти слагаемые в унитарной калибровке, находим, что для любого аромата кварков или лептонов взаимодействие хиггсовского бозона описывается выражением

$$\mathcal{L}_f = -m_f \bar{f} f \left( 1 + \frac{h}{v} \right). \quad (20.116)$$

Слагаемые, описывающие взаимодействие хиггсовского бозона в (20.113), (20.115) и (20.116), приводят к правилам Фейнмана, показанным на рисунке 20.6.

Вообще говоря, взаимодействие хиггсовского бозона с другими частицами в теории слабых взаимодействий пропорционально массам этих частиц. Поэтому частицы, которые легче всего создать в лабораторных условиях, очень слабо взаимодействуют с хиггсовским бозоном, что делает его трудным для изучения объектом. Так или иначе, хиггсовский бозон пока не обнаружен. К моменту написания этих строк в результате поисков описанного хиггсовского бозона было показано, что величина  $m_h$  должна быть больше 60 ГэВ. Если, однако, константа самодействия  $\lambda$  велика, масса хиггсовского бозона может достигать величины 1000 ГэВ. Таким образом, обширная динамическая область остается неисследованной.

Феноменологические свойства хиггсовского бозона подробно рассмотрены в заключении к части III.



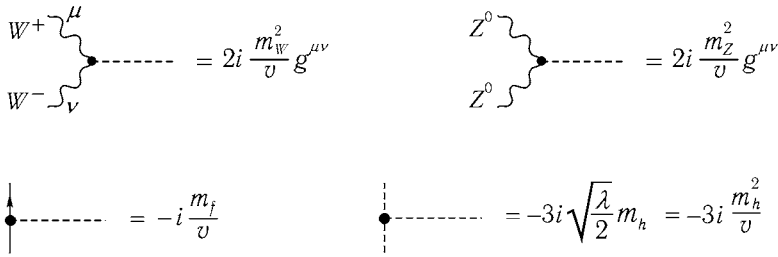


Рис. 20.6. Правила Фейнмана для взаимодействия хиггсовского бозона с векторными бозонами, с фермионами и с самой собой.

### Хиггсовский сектор?

Поскольку нет никаких экспериментальных свидетельств существования обычного хиггсовского бозона, содержащегося в модели ГВС, стоит задаться вопросом, не могут ли  $W$ - и  $Z$ -бозоны приобретать массу более сложным способом. Существуют два аспекта этой проблемы.

Во-первых, несомненно ли то, что  $W$  и  $Z$  являются калибровочными бозонами спонтанно нарушенной симметрии  $SU(2) \times U(1)$ ? Поводом для развития такой идеи служит универсальность констант связи различных кварков и лептонов. Эта универсальность проявляется в том, что одно и то же значение постоянной Ферми описывает все слабые процессы, обусловленные заряженными токами. Кроме того, область явлений, обусловленных слабыми нейтральными токами, можно описать при помощи одной общей для всех процессов константы взаимодействия и одного фиксированного значения  $\sin^2 \theta_w$ . В гл. 16 мы видели, что принцип локальной калибровочной инвариантности приводит к существованию универсальных, не зависящих от аромата констант взаимодействия. Известно, что никакой другой принцип не объясняет этого поразительного факта. Таким образом, имеется убедительное доказательство того, что фундаментальная теория слабых взаимодействий является спонтанно нарушенной калибровочной теорией.

Тем не менее, вполне вероятно, что механизм спонтанного нарушения симметрии  $SU(2) \times U(1)$  сложнее, чем рассмотренная нами выше простая модель одного скалярного поля (см. (20.111)). В принципе, нарушение  $SU(2) \times U(1)$  могло бы быть следствием динамики нового набора более сложных частиц и взаимодействий, который мы будем называть *сектором Хиггса*. Эксперимент дает только три свойства нового сектора: во-первых, он должен генерировать ненулевые массы кварков и лептонов. Во-вторых, он должен генерировать массы  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Третье свойство, самое нетривиальное, следует из соотношения (20.73) для масс слабых бозонов, полученное в теории ГВС:

$$m_W = m_Z \cos \theta_w. \tag{20.117}$$

Это соотношение проверено на эксперименте с точностью, лучшей, чем 1%, то есть до уровня однопетлевых радиационных поправок. Какой бы сложный механизм спонтанного нарушения  $SU(2) \times U(1)$  мы не использовали, он должен естественным образом приводить к этому соотношению.

Чтобы понять смысл соотношения (20.117), необходимо проанализировать массовую матрицу калибровочных бозонов, не предполагая, что  $SU(2) \times U(1)$  нарушена наличием ненулевого вакуумного среднего у скалярного поля. На самом деле, массовую матрицу калибровочных бозонов можно вычислить при значительно менее сильных ограничениях, используя аргументы, приведенные в самом конце раздела 20.1. Там

мы построили массовую матрицу калибровочных бозонов при помощи матричных элементов для калибровочных токов, способных рождать или уничтожать голдстоуновские бозоны. Теперь мы покажем, что соотношение (20.117) справедливо для широкого класса моделей, описывающих нарушение  $SU(2) \times U(1)$  и для которых эти матричные элементы обладают определенными простыми свойствами.

Любая теория слабых взаимодействий, описывающая нарушение симметрии должна содержать некоторый набор полей, ответственных за спонтанное нарушение  $SU(2) \times U(1)$ . Этот сектор теории следует рассматривать как теорию поля с глобальной симметрией  $SU(2) \times U(1)$ , переходящей в локальную симметрию благодаря взаимодействию с калибровочными бозонами. В теории с глобальной симметрией последняя спонтанно нарушается до  $U(1)$ . Поскольку три непрерывные симметрии спонтанно нарушены, этот сектор должен приводить к появлению трех голдстоуновских бозонов, которые, в конце-концов, поглощаются  $W^{+-}$ ,  $W^-$  и  $Z^0$ -бозонами. Назовем эти три бозона  $\pi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Пусть  $J^{\mu a}$  есть токи  $SU(2)$  симметрии для нового сектора, и пусть  $J^{\mu Y}$  есть ток  $U(1)$ . Матрица масс калибровочных бозонов будет тогда состоять из матричных элементов (20.46), которые в этом случае имеют вид

$$\langle 0 | J^{\mu A} | \pi_b(p) \rangle = -i p^\mu F^A_b, \quad (20.118)$$

где  $A = 1, 2, 3, Y$  и  $b = 1, 2, 3$ . Используя (20.55), мы находим, что вклад калибровочного бозона в амплитуду поляризации вакуума содержит полюс

$$-\frac{i}{k^2} (g_A F^A_c) (g_B F^B_c), \quad (20.119)$$

где по  $c$  подразумевается суммирование,  $g_A = g$  для  $A = 1, 2, 3$  и  $g_A = g'$  для  $A = Y$ . Тогда можно отождествить массовую матрицу калибровочных бозонов с

$$m_{AB}^2 = g_A g_B F^A_c F^B_c. \quad (20.120)$$

Чтобы воспроизвести известный вид массовой матрицы слабых калибровочных бозонов, следует наложить ограничения на  $F^A_b$ . Во-первых, фотон должен оставаться безмассовым. Это будет так, если линейная комбинация зарядов (20.69) аннигилирует вакуум. На языке матричных элементов (20.69) необходимо потребовать, чтобы соответствующая линейная комбинация токов не могла возбудить голдстоуновский бозон:

$$\langle 0 | (J^{\mu 3} + J^{\mu Y}) | \pi^a(p) \rangle = 0. \quad (20.121)$$

Мы также можем получить соотношение (20.117), используя следующее дополнительное предположение: сектор нарушения симметрии обладает глобальной симметрией  $SU(2)$ , относительно которой три голдстоуновских бозона и три калибровочных тока  $SU(2)$  преобразуются как триплеты, и это остается справедливым в том случае, когда калибровочная симметрия  $SU(2)$  спонтанно нарушается. Глобальная симметрия  $SU(2)$  предполагает, что если  $A = a = 1, 2, 3$  в (20.118), то

$$\langle 0 | J^{\mu a} | \pi^b(p) \rangle = -i F p^\mu \delta^{ab}, \quad (20.122)$$

где  $F$  — параметр с размерностью массы. Комбинируя (20.122) с (20.121), мы получим

$$\langle 0 | J^{\mu Y} | \pi^3(p) \rangle = +i F p^\mu. \quad (20.123)$$

Подставляя это выражение для  $F^A_b$  в (20.120), находим массовую матрицу калибровочных бозонов

$$m^2 = F^2 \begin{pmatrix} g^2 & & & \\ & g^2 & & \\ & & g^2 & -gg' \\ & & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}, \quad (20.124)$$

где матрица действует на калибровочный бозон  $(A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, B_\mu)$ . Собственные векторы этой матрицы равны в точности (20.63) и (20.64). Чтобы найти собственные значения, необходимо определить

$$v = 2F. \quad (20.125)$$

Мы показали, что соотношение между массами  $W$ - и  $Z$ -бозонов в теории ГВС не является специфичным для ситуации, в которой калибровочная симметрия нарушается одним скалярным полем. Это соотношение следует из значительно более общего предположения о ненарушенности глобальной симметрии  $SU(2)$  сектора Хиггса. Такая симметрия часто называется *конспиративной  $SU(2)$  симметрией\**. Мы уже видели, что она является глобальной  $SU(2)$ -симметрией эффективного лагранжиана слабых взаимодействий (20.94).

В случае одного скалярного поля сохраняющая симметрия возникает следующим образом. Если мы запишем поле  $\phi$  через его четыре вещественные компоненты, лагранжиан (20.111) (если пренебречь калибровочными взаимодействиями) обладает глобальной симметрией  $O(4)$ . Отличное от нуля вакуумное среднее поля  $\phi$  нарушает эту симметрию до  $O(3)$ , т.е. до  $SU(2)$ .

Тем не менее, имеется множество квантовых теорий поля, которые спонтанно нарушают  $SU(2)$ , в то время как другая глобальная  $SU(2)$  остается ненарушенной. Один довольно сложный пример — КХД с двумя безмассовыми ароматами, если отождествить откалиброванную симметрию  $SU(2)$  с симметрией, образуемой  $U_L$  в (19.82), и отождествить сохраняющую  $SU(2)$  с векторной изоспиновой симметрией. Теория хорошо знакомых сильных взаимодействий с массовым масштабом, достаточно большим, чтобы  $F = 125$  ГэВ, должна была быть идеальной моделью для сектора Хиггса. (К сожалению, в этой модели нелегко образовать массы кварков и лептонов.)

Вопрос о природе сектора Хиггса и явный механизм нарушения  $SU(2) \times U(1)$  составляет, вероятно, наиболее актуальную открытую проблему в теории элементарных частиц. Мы еще обсудим этот вопрос в Эпilogue.

### 20.3. Симметрии теории кварков и лептонов

Объединяя теорию сильных взаимодействий, описанную в гл. 17, и теорию слабых и электромагнитных взаимодействий, изложенную в предыдущем разделе, получаем полное описание взаимодействий элементарных частиц. Интересно было бы исследовать симметрии этой теории, а также задаться вопросом, какие фундаментальные симметрии могли бы лежать в основе описания природы.

При выводе (15.17) мы видели, что возможный вид лагранжиана калибровочной теории сильно ограничен условиями перенормируемости и калибровочной инвариантности. В этом разделе мы построим перенормируемый лагранжиан наиболее общего вида, согласованный с калибровочными симметриями сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . После этого можно будет спросить,

\*P. Sikivie, L. Susskind, M. Voloshin, V. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B173**, 189 (1980).

какие еще глобальные симметрии нужно ввести в теорию, чтобы получить глобальные симметрии, наблюдаемые в природе.

На первом этапе пренебрежем скалярным полем Хиггса и массовыми слагаемыми кварков, лептонов и калибровочных бозонов. Тогда лагранжиан теории кварков и лептонов полностью определяется условиями калибровочной инвариантности и перенормируемости. Имеем

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{4} \sum_i (F_{i\mu\nu}^a)^2 + \sum_J \bar{\psi}_J (i\not{D}) \psi_J, \quad (20.126)$$

где индекс  $i$  принимает три значения, соответствующие трем множителям калибровочной группы, а индекс  $J$  нумерует различные мультиплеты киральных фермионов.

В принципе, можно было бы прибавить к (20.126) следующие псевдоскалярные калибровочные операторы:

$$\Delta\mathcal{L}_\theta = \sum_i \frac{\theta_i g_i^2}{64\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{i\mu\nu}^a F_{i\lambda\sigma}^a. \quad (20.127)$$

Очевидно, что эти слагаемые меняют знак при преобразованиях  $P$  и  $T$ . Но в конце раздела 19.2 мы видели, что слагаемые такого вида могут возникать или исчезать при замене переменных в эффективном действии. Например, замена переменных в правополяризованном электронном поле

$$e_R \rightarrow e^{i\alpha} e_R \quad (20.128)$$

приводит, согласно (19.78) и (19.79), к поправкам в лагранжиане, содержащим  $P$ - и  $T$ -нечетные комбинации напряженностей калибровочных  $U(1)$ -полей:

$$\Delta\mathcal{L} = \alpha \cdot \frac{g^{\prime 2}}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}. \quad (20.129)$$

Коэффициент (20.129) отличается от соответствующего коэффициента в (19.79), поскольку мы преобразуем только правополяризованную киральную компоненту электронного поля. Если бы мы преобразовывали другое фермионное поле с гиперзарядом  $Y$ , получилась бы похожая добавка с коэффициентом, пропорциональным  $Y^2$ . Если бы это новое поле взаимодействовало с калибровочными полями  $SU(2)$  или  $SU(3)$ , получились бы также слагаемые, пропорциональные напряженностям этих полей. Следовательно, можно исключить в (20.127) слагаемое, содержащее напряженности поля  $U(1)$ , путем замены переменных (20.128) с  $\alpha = -\frac{1}{2}\theta_1$ . Осуществляя подходящие киральные вращения трех фермионных мультиплетов, скажем,  $e_R$ ,  $E_L$  и  $Q_L$ , можно также исключить все три слагаемые из (20.127). Замена переменных (20.128), приводящая к вращению правополяризованного электронного поля, несимметрична относительно преобразования четности, и, фактически, изменяет само определение этого оператора. Делая такую замену переменных, мы выбираем новые координаты, в которых свойства всей теории относительно преобразований  $P$  и  $T$  становятся максимально простыми.

Исследуем свойства лагранжиана (20.126) относительно преобразований  $P$ ,  $C$  и  $T$ . Взаимодействие калибровочных бозонов КХД инвариантно относительно каждой из этих симметрий в отдельности. Однако взаимодействие калибровочных бозонов  $SU(2)$  максимально нарушает  $P$  и  $C$ . Напомним (см. раздел 3.6), что  $P$  превращает левополяризованный электрон в правополяризованный электрон, а  $C$  превращает левополяризованный электрон в левополяризованный позитрон. Каждый из этих операторов

превращает частицу, взаимодействующую с калибровочными бозонами  $SU(2)$ , в частицу, которая с ним и не взаимодействует. Однако комбинация этих двух операторов меняет местами левополяризованные частицы и правополяризованные античастицы. Поэтому (20.126) симметричен относительно комбинации преобразований  $CP$ . Этот лагранжиан также инвариантен относительно обращения времени.

Таким образом, мы видим, что дискретные симметрии  $C$ ,  $P$  с одной стороны и  $CP$ ,  $T$  с другой входят в калибровочные теории поля на разных основаниях. Любая киральная теория поля будет естественным образом нарушать  $C$  и  $P$ . На данном этапе нашего анализа представляется загадочным, почему  $C$  и  $P$  являются приближенными симметриями природы. С другой стороны, любая теория, содержащая калибровочные бозоны и безмассовые фермионы инвариантна относительно  $CP$  и  $T$ . Из опыта известно, что в природе имеется некоторое взаимодействие, нарушающее  $CP$ , поскольку правила отбора для  $CP$  слабо нарушаются при распадах  $K^0$ -мезона. Чтобы найти источник этого нарушения, следует ввести в основной калибровочный лагранжиан (20.126) дополнительные слагаемые.

Прежде всего, следует добавить динамические слагаемые, которые привели бы к спонтанному нарушению  $SU(2) \times U(1)$ . Начнем с рассмотрения простейшей модели с одним хиггсовским скалярным полем  $\phi$ . Наиболее общий перенормируемый лагранжиан для  $\phi$  имеет вид:

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu \phi|^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (20.130)$$

Из эрмитовости  $\mathcal{L}_\phi$  следует, что параметры  $\mu^2$  и  $\lambda$  вещественны. Поэтому этот лагранжиан инвариантен относительно  $P$ ,  $C$  и  $T$ . Как было подчеркнуто в конце предыдущего раздела, он также автоматически удовлетворяет сохраняющей симметрии  $SU(2)$ , необходимой для того, чтобы выполнялось массовое соотношение (20.117).

Наконец, следует ввести в лагранжиан слагаемые, отвечающие взаимодействию поля Хиггса с кварками и лептонами. В этом случае перенормируемость и калибровочная инвариантность накладывают очень слабые ограничения, так что существует множество разрешенных взаимодействий. Сначала проанализируем взаимодействие поля  $\phi$  с полями кварков, а затем обобщим наше рассуждение на лептоны.

При рассмотрении взаимодействия поля Хиггса с кварками следует вспомнить, что существуют три поколения кварков и лептонов. Поэтому имеются три дублета левополяризованных кварков:

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L = \left( \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \right). \quad (20.131)$$

Существует шесть правополяризованных кварков, три с  $Y = \frac{2}{3}$  и три с  $Y = -\frac{1}{3}$ :

$$u_R^i = (u_R, c_R, t_R), \quad d_R^i = (d_R, s_R, b_R). \quad (20.132)$$

Когда мы рассматриваем взаимодействие калибровочных полей с этими кварками, обычные производные необходимо заменить на ковариантные. Это автоматически приводит к тому, что все кварки одинаково взаимодействуют с точки зрения КХД, и, кроме того, все кварки одного типа одинаково взаимодействуют слабым образом. Перемешивание различных кварковых ароматов запрещено. Однако наличие взаимодействия поля Хиггса с кварками не следует из калибровочного принципа, и поэтому нет необходимости учитывать какое-либо из этих ограничений. Если мы не требуем сохранения кварковых ароматов, постулируя тем самым новую дискретную симметрию теории, взаимодействие Хиггса будет, вообще говоря, перемешивать разные ароматы.

Если на теорию не наложены какие-либо дополнительные симметрии, наиболее общее перенормируемое калибровочно-инвариантное взаимодействие, обладающее структурой (20.101), имеет вид:

$$\mathcal{L}_m = -\lambda_d^{ij} \bar{Q}_L^i \cdot \phi d_R^j - \lambda_u^{ij} \varepsilon^{ab} \bar{Q}_{La}^i \phi_b^\dagger u_R^j + \text{з.с.}, \quad (20.133)$$

где  $\lambda_d^{ij}$  и  $\lambda_u^{ij}$  — произвольные, необязательно симметричные или эрмитовые, комплексзначные матрицы. Операция  $CP$  заменяет операторы, входящие в (20.133), на эрмитово сопряженные им (и наоборот) без изменения коэффициентов. Таким образом,  $CP$  эквивалентно замене:

$$\lambda_d^{ij} \rightarrow (\lambda_d^{ij})^*, \quad \lambda_u^{ij} \rightarrow (\lambda_u^{ij})^*. \quad (20.134)$$

Если бы матрицы  $\lambda^{ij}$  были вещественны, то  $CP$  было бы симметрией (20.133). Однако не существует никакого общего принципа, приводящего к такой вещественности. Отсюда следует, что в отсутствие дополнительных накладываемых симметрией ограничений (20.133) максимально нарушает все дискретные и сохраняющие аромат симметрии.

Однако точно так же, как удалось устранить нарушающие  $T$  слагаемые (20.127), осуществляя киральное вращение, можно упростить вид (20.133), совершая соответствующие киральные преобразования. Чтобы найти искомые преобразования, диагонализуем эрмитовы матрицы, полученные возведением в квадрат  $\lambda_d$  и  $\lambda_u$ . Введем унитарные матрицы  $U_u$  и  $W_u$ :

$$\lambda_u \lambda_u^\dagger = U_u D_u^2 U_u^\dagger, \quad \lambda_u^\dagger \lambda_u = W_u D_u^2 W_u^\dagger, \quad (20.135)$$

где  $D_u^2$  — диагональная матрица с положительными собственными значениями. Тогда

$$\lambda_u = U_u D_u W_u^\dagger, \quad (20.136)$$

где  $D_u$  — диагональная матрица, диагональные элементы которой получаются извлечением квадратного корня из собственных значений (20.135). Аналогично можно определить унитарные матрицы  $U_d$  и  $W_d$  и представить  $\lambda_d$  в виде:

$$\lambda_d = U_d D_d W_d^\dagger. \quad (20.137)$$

Сделаем теперь замену переменных

$$u_R^i \rightarrow W_u^{ij} u_R^j, \quad d_R^i \rightarrow W_d^{ij} d_R^j. \quad (20.138)$$

Тогда унитарные матрицы  $W_u$  и  $W_d$  выпадают из взаимодействия Хиггса (20.133). Поскольку  $u_R^i$  и  $d_R^i$  взаимодействуют с калибровочными полями одинаково,  $W_u$  и  $W_d$  коммутируют с соответствующими ковариантными производными. Поэтому после замены (20.138) получим:

$$\sum_i (\bar{u}_R^i(i\not{D})u_R^i + \bar{d}_R^i(i\not{D})d_R^i) \rightarrow \sum_i (\bar{u}_R^i(i\not{D})u_R^i + \bar{d}_R^i(i\not{D})d_R^i), \quad (20.139)$$

так что  $W_u$  и  $W_d$  выпадают из теории.

Аналогичное преобразование левополяризованных полей также приводит к заметному упрощению. Сделаем замену переменных

$$u_L^i \rightarrow U_u^{ij} u_L^j, \quad d_L^i \rightarrow U_d^{ij} d_L^j. \quad (20.140)$$

В результате такого преобразования  $U_u, U_d$  выпадают из слагаемых в (20.133), содержащих нижнюю компоненту хиггсовского поля. В унитарной калибровке только эти слагаемые отличны от нуля. Перемножая диагональные элементы матриц  $D_u$  и  $D_d$  с вакуумным средним хиггсовского поля, можно связать их с массами кварков:

$$m_u^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_u^{ii} v, \quad m_d^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_d^{ii} v. \quad (20.141)$$

В результате замены (20.133) сводится к

$$\mathcal{L}_m = -m_d^i \bar{d}_L^i d_R^i \left(1 + \frac{h}{v}\right) - m_u^i \bar{u}_L^i u_R^i \left(1 + \frac{h}{v}\right) + \text{э.с.} \quad (20.142)$$

Это обычный вид массовых слагаемых кварков и взаимодействий хиггсовского бозона. Следовательно, преобразования (20.138) и (20.140) переводят кварковые поля к базису из собственных состояний с данной массой. В этом базисе взаимодействия массовых слагаемых и хиггсовского бозона диагональны и сохраняют  $P, C$  и  $T$ .

Поскольку с точки зрения КХД, левые  $u$ - и  $d$ -кварки взаимодействуют одинаковым образом, матрицы  $U_u$  и  $U_d$  коммутируют со слагаемыми, в ковариантных производных, отвечающими за взаимодействия КХД. Но  $u_L$  и  $d_L$  смешиваются слабыми взаимодействиями, и поэтому необходимо более аккуратно исследовать влияние замены (20.140) на взаимодействия  $SU(2) \times U(1)$ . Легче всего это сделать, обращаясь к лагранжиану (20.79). Матрицы  $U_u$  и  $U_d$  выпадают из чисто кинетических слагаемых в (20.79). Они также выпадают из электромагнитного тока  $J_{EM}^\mu$ ; например,

$$\bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i \rightarrow \bar{u}_L^i U_u^{\dagger ij} \gamma^\mu U_u^{jk} u_L^k = \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i. \quad (20.143)$$

Точно так же  $U_u$  и  $U_d$  выпадают из  $Z^0$ -бозонного тока.

Однако из выражения для тока, взаимодействующего с полем  $W$ -бозона, находим:

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (U_u^\dagger U_d)^{ij} d_L^j. \quad (20.144)$$

Таким образом, изменяющие заряд слабые взаимодействия связывают три кварка  $u_L^i$  с унитарным вращением кваркового триплета  $d_L^i$ , причем это вращение дается унитарной матрицей

$$V = U_u^\dagger U_d. \quad (20.145)$$

Матрица  $V$  известна как матрица смешивания *Кабиббо–Кобаяши–Маскавы* (ККМ).

Элементы матрицы  $V$  могут быть комплексными, однако можно устранить фазы в  $V$ , осуществляя фазовые вращения различных кварковых полей. Перед тем как анализировать случай трех поколений, полезно рассмотреть случай двух поколений  $u, d, c$  и  $s$ . В этом случае  $V$  является унитарной матрицей  $2 \times 2$ . Такая матрица характеризуется 4 параметрами. Можно записать ее в самом общем виде:

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c e^{i\alpha} & \sin \theta_c e^{i\beta} \\ -\sin \theta_c e^{i(\alpha+\gamma)} & \cos \theta_c e^{i(\beta+\gamma)} \end{pmatrix}. \quad (20.146)$$

Один параметр в  $V$  — угол вращения, а другие три — фазы. Можно устранить эти фазы, делая замену переменных кварковых полей:

$$q_L^i \rightarrow \exp[i\alpha^i]q_L^i. \quad (20.147)$$

Такое глобальное фазовое вращение не изменяет ни одного из слагаемых в лагранжиане, кроме слабого заряженного тока (20.144). Фазовое вращение, одинаковое для всех четырех кварковых ароматов, выпадает из (20.144). Однако три других возможных фазовых преобразования — как раз то, что необходимо, чтобы устранить  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Если выбрать фазы кварковых полей подобным образом,  $V$  примет вид:

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (20.148)$$

Тогда кварковые слагаемые в слабом заряженном токе можно переписать следующим образом:

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta_c \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \sin \theta_c \bar{u}_L \gamma^\mu s_L - \sin \theta_c \bar{c}_L \gamma^\mu d_L + \cos \theta_c \bar{c}_L \gamma^\mu s_L). \quad (20.149)$$

Мы уже видели (см. (18.31) и (18.32)), что именно таким способом  $s$ -кварк входит в лагранжиан слабых взаимодействий. Угол  $\theta_c$  — это угол Кабиббо, определенный в (18.30).

Те же самые утверждения могут быть сделаны и в теории с тремя генераторами. В этом случае  $V$  — произвольная унитарная матрица  $3 \times 3$ . Такая матрица обладает 9 параметрами. Из них три параметра — это углы, осуществляющие параметризацию вращения  $O(3)$ . Остальные 6 параметров — это фазы. Мы можем избавиться от них, осуществляя фазовые вращения кварковых полей, как в (20.147). Однако, при этом можно избавиться только от пяти из этих фаз, поскольку общая фаза неустранима. Конечный вид  $V$  содержит одну фазу и 3 угла, один из которых — угол Кабиббо. После всех преобразований, которые мы сделали, эта фаза, приводящая к определенным взаимодействиям  $W^+$  с кварками, остается единственным нарушающим  $CP$  параметром.

Мы начали наше обсуждение с лагранжиана, описывающего взаимодействия кварков и хиггсовского бозона и нарушающего, по-видимому, все возможные цветовые симметрии и все дискретные пространственно-временные симметрии. Но после замены переменных удалось значительно упростить вид этого лагранжиана. Если удержать только слагаемые, содержащие безмассовые калибровочные бозоны, фотон и глюоны, массовые слагаемые и, кроме того, слагаемые, описывающие взаимодействия (см. (20.142)), мы увидим, что этот набор сохраняет  $P$ ,  $C$ ,  $T$  и все цветовые симметрии. Такое замечательное упрощение оказывается возможным, потому что ненарушенная калибровочная симметрия природы — калибровочная симметрия КХД и КЭД — не является киральной и может быть представлена как действующая на дираковские фермионы. Поскольку мы пренебрегли только эффектами, обусловленными массивными  $W$ - и  $Z$ -бозонами, эта часть рассуждений уже гарантирует, что в природе с высокой точностью имеют место три различные дискретные симметрии и законы сохранения всех кварковых ароматов. Заметим, что мы не предполагали наличия никаких фундаментальных глобальных симметрий, а опирались только на значения калибровочных квантовых чисел в калибровочной теории  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Если ввести в теорию  $Z$ -бозон и слабый нейтральный ток, получим модель, нарушающую  $P$  и  $C$  в процессах с обменом  $Z$ , но сохраняющую при этом  $CP$ . Кроме того, в такой теории выполняются законы сохранения всех ароматов. Мы описывали эту ситуацию, утверждая, что отсутствуют изменяющие аромат слабые нейтральные токи. Экспериментальное доказательство этого утверждения весьма впечатляет. Наилучшие опытные данные получены при изучении нейтрального  $K^0$ -мезона, который



представляет из себя связанное состояние  $s\bar{d}$  и поэтому мог бы распадаться посредством обмена  $Z^0$ , если бы последний взаимодействовал с током, меняющим аромат. На практике распад  $K^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$  сильно подавлен. Он проявляется только на уровне однопетлевой поправки, показанной на рисунке 20.7(a). Аналогично, взаимное превращение  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ , которое могло бы происходить непосредственно, если бы  $Z^0$  менял аромат, сильно подавлено и проявляется только на уровне вклада, показанного на рисунке 20.7(b).

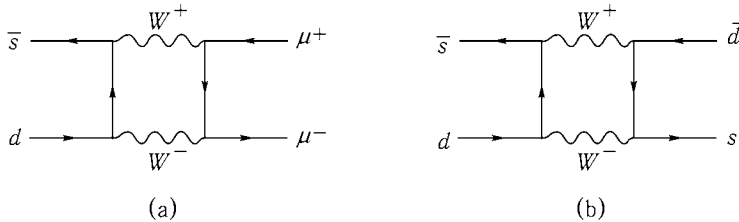


Рис. 20.7. Диаграммы высших порядков, по-видимому, дающих основной вклад в амплитуды процессов с изменением аромата, обусловленных слабыми нейтральными токами: (a)  $K^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ ; (b)  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ .

С другой стороны,  $W$ -бозон взаимодействует с токами, способными изменить аромат кварка, в представлении, в котором параметрами являются угол Кабиббо и другие углы, входящие в матрицу ККМ. Поэтому тяжелые кварковые ароматы распадаются за счет процессов с обменом  $W$ -бозоном. Поскольку  $W$  взаимодействует с током, состоящим только из левых кварков, он и обуславливает взаимодействие, максимально нарушающее  $P$  и  $C$ . Это нарушение дискретной симметрии не проявляется в обычных экспериментах из-за малости амплитуды указанного процесса. Тем не менее, нарушение  $P$  и  $C$  — замечательная качественная особенность слабых распадов.

Поскольку взаимодействие  $W$  с кварками содержит неустранимую фазу, оно, в принципе, может нарушать  $CP$ . Однако, мы видели, что в теории, описывающей только два поколения, от этой фазы можно избавиться. Это означает, что наличие фазы у матрицы ККМ имеет физические последствия только в процессах, в которых принимают участие все три поколения. Обычно это означает, что фаза ККМ вносит вклад только в петлевые поправки для слабых взаимодействий или в сложные исключительные процессы распада. Поэтому теория  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  может объяснить нарушение  $CP$ , а также то, почему это явление гораздо слабее, чем сами слабые взаимодействия. Интересно отметить, что Кобаяши и Маскава с самого начала предположили существование третьего поколения, чтобы нарушение  $CP$  стало возможным\*.

С другой стороны, в настоящее время нет сколько-нибудь убедительного доказательства того, что нарушение  $CP$  действительно обусловлено фазой матрицы ККМ. Все аргументы, использованные нами в этом разделе, основывались на простейшей модели хиггсовского сектора, содержащей только одно скалярное поле. В общих моделях хиггсовского сектора может содержаться более сложный набор взаимодействий кварков с хиггсовским бозоном, чем (20.142), и некоторые из них могут нарушать  $CP$ . Кроме того, в самом хиггсовском секторе могут возникнуть слагаемые, приводящие к нарушению  $CP$ . Происхождение наблюдающегося на эксперименте нарушения  $CP$  по-прежнему является открытой проблемой, нуждающейся и в теоретических, и в экспериментальных исследованиях.

\*М. Kobayaski и Т. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).

Перед тем, как оставить эту тему, следует обсудить еще один аспект проблемы, по-прежнему остающийся загадочным. Чтобы окончательно упростить лагранжиан калибровочной теории кварков, нам необходимо сделать киральную замену переменных в функциональном интеграле. Мы видели в разделе 19.2 и в начале этого раздела, что такая замена приводит к появлению новых слагаемых, нарушающих  $P$  и  $T$  (см. (20.127)). Используя тот факт, что эти слагаемые являются полными производными, можно показать, что слагаемые, содержащие напряженности полей  $SU(2)$  и  $U(1)$ , не приводят к каким-либо наблюдаемым эффектам. Тем не менее, из-за слагаемого, содержащего напряженности полей КХД, у нейтрона может появиться электрический дипольный момент, что равносильно нарушению  $T$ . Поиски этого эффекта проводились, и с большой точностью было показано, что он отсутствует. Поэтому в лагранжиане не может возникнуть комбинация напряженностей полей КХД, нарушающая  $P$  и  $T$ . С другой стороны, если исходные матрицы взаимодействия хиггсовского бозона с  $u$ - и  $d$ -кварками имеют самый общий вид, кажется, что этого нельзя избежать. Описанный парадокс известен как *сильная CP-проблема*. Чтобы разрешить его, необходимо либо наложить ограничения на матрицы взаимодействия хиггсовских бозонов, противоречащие духу рассуждений, которые мы только что изложили, либо ввести в хиггсовский спектр некоторую дополнительную структуру\*.

Наконец, обсудим общий вид и возможное упрощение взаимодействий хиггсовского бозона с лептонами. Когда в предыдущем разделе мы выписали лагранжиан Глэшоу – Вайнберга – Салама, мы заметили, что не существует калибровочных полей, взаимодействующих с правополяризованным нейтрино. Поэтому мы выкинули эту частицу из теории. Нам могли бы понадобиться правополяризованные компоненты нейтрино, чтобы построить массовые слагаемые нейтрино, но в настоящее время нет никаких свидетельств того, что масса нейтрино отлична от нуля. Поэтому до конца этого раздела мы будем предполагать, что правополяризованных нейтрино не существует, и делать все выводы, исходя из этого предположения†.

Обобщая (20.133), мы можем выписать взаимодействие хиггсовского бозона с тремя поколениями лептонов самого общего вида. Поскольку правополяризованных нейтрино не существует, единственно возможный лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}_m = -\lambda_\ell^{ij} \bar{E}_L^i \cdot \phi e_R^j + \text{э.с.} \quad (20.150)$$

Для его диагонализации представляем  $\lambda_\ell$  в виде

$$\lambda_\ell = U_\ell D_\ell W_\ell^\dagger \quad (20.151)$$

и исключаем матрицы  $U_\ell$  и  $W_\ell$ , делая замену переменных:

$$e_L^i \rightarrow U_\ell^{ij} e_L^j, \quad \nu_L^i \rightarrow U_\ell^{ij} \nu_L^j, \quad e_R^i \rightarrow W_\ell^{ij} e_R^j. \quad (20.152)$$

Поскольку мы теперь делаем одно и то же преобразование над двумя компонентами слабого дублета  $E_L^i$ , такая замена коммутирует с  $SU(2)$ -взаимодействиями, входящими в ковариантную производную. Поэтому унитарные матрицы  $U_\ell$  и  $W_\ell$  полностью выпадают из теории. В результате приходим к теории, в точности сохраняющей  $CP$ ,

\* Сильная  $CP$ -проблема, ее предполагаемые решения и их неожиданные применения приведены в обзоре R. D. Peccei in *CP Violation*, C. Jarlskog, ed. (World Scientific, 1989).

† В теориях, обобщающих модель  $SU(2) \times U(1)$ , нейтрино может обладать майорановскими массовыми слагаемыми, которые, естественно, очень малы. Эти теории также накладывают ограничения на смешивание лептонных ароматов, описанные в следующем абзаце. В качестве введения см. P. Ramond, в *Perspectives in the Standard Model*, R. K. Ellis, C. T. Hill, and J. D. Lykken, eds. (World Scientific, 1992).

а также лептонное число каждого поколения. Последний результат проверен на эксперименте с очень большой точностью. Например, нет никаких свидетельств в пользу существования процессов распада мюона  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$  и  $\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+$ , изменяющих поколения; известно, что отношения вероятностей этих процессов меньше  $10^{-10}$ .

Таким образом, мы видим, что калибровочная теория кварков и лептонов  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  отлично объясняет симметрию и законы сохранения, наблюдающиеся в мире элементарных частиц. Она предсказывает, какие симметрии природы должны быть точными, а какие приближенными. В случае приближенных симметрий она позволяет вычислить степень нарушения этих симметрий. Самое замечательное (за исключением спорной сильной  $CP$  проблемы) — это то, что ни одно из этих предсказаний не зависит от каких-либо глобальных дискретных или цветных симметрий, лежащих в основе фундаментальных уравнений. Глобальные симметрии, которые мы наблюдаем в природе, следуют только из калибровочной инвариантности и конкретного представления, выбранного при построении калибровочной теории.

## Задачи

**20.1. Спонтанное нарушение  $SU(5)$ .** Рассмотрим калибровочную теорию скалярного поля в присоединенном представлении калибровочной группы  $SU(5)$ . Пусть вид потенциальной энергии этого скалярного поля таков, что оно обладает ненулевым вакуумным средним. Это вакуумное среднее можно выбрать двумя способами:

$$\langle \Phi \rangle = A \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \langle \Phi \rangle = B \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix}.$$

В каждом из этих случаев найдите спектр калибровочных бозонов и ненарушенную группу симметрии.

**20.2. Моды распада  $W$ - и  $Z$ -бозонов.**

- (а) Вычислите парциальные ширины распадов  $W$ -бозона на пары кварков и лептонов. Считайте, что масса  $t$ -кварка  $m_t$  больше, чем  $m_W$ ; массами остальных кварков можно пренебречь. Значения ширин в случае распадов на кварки можно уточнить, используя поправки КХД. Покажите, что с точностью до членов порядка  $\alpha_s$  эти поправки даются выражением (17.9). Используя  $\sin^2 \theta_w = 0.23$ , найдите численное значение полной ширины распада  $W^+$ .
- (б) Вычислите парциальные ширины распада  $Z$ -бозона на пары кварков и лептонов, сделав те же предположения о кварках, что и в части (а). Определите полную ширину распада  $Z$ -бозона и относительные ширины адронных каналов, каналов с заряженными лептонами и невидимыми  $\nu \bar{\nu}$ .

**20.3. Аннигиляция  $e^+ e^- \rightarrow$  адроны с интерференцией фотон- $Z^0$ -бозон.**

- (а) Рассмотрите левые компоненты фермионов  $f$  с электрическим зарядом  $Q_f$  и слабым изоспином  $I_L^3$ . Массой  $f$  можно пренебречь. Вычислите дифференциальное сечение процесса  $e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}$  в стандартной электрослабой модели. Учтите влияние распада  $Z^0$ , используя формулу Брейта–Вигнера (см. (7.60)). Постройте график зависимости полного сечения от энергии в системе центра масс для случая, когда  $f$  совпадает с  $u$ ,  $d$ ,  $\mu$  (график должен включать точку  $Z^0$ -резонанса).

- (b) Определим асимметрию «вперед-назад» для процесса  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$  следующим образом

$$A_{FB}^f = \frac{(\int_0^1 - \int_{-1}^0) d \cos \theta (d\sigma/d \cos \theta)}{(\int_0^1 + \int_{-1}^0) d \cos \theta (d\sigma/d \cos \theta)}.$$

Найдите указанную анизотропию как функцию энергии в системе центра масс.

- (c) Покажите, что в точке  $Z^0$ -резонанса асимметрия «вперед-назад» дается выражением:

$$A_{FB}^f = \frac{3}{4} A_{LR}^e A_{LR}^f.$$

- (d) Покажите, что сечение в точке  $Z^0$ -резонанса дается выражением

$$\sigma_{\text{peak}} = \frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^+e^-)\Gamma(Z^0 \rightarrow f\bar{f})}{\Gamma_Z^2},$$

где  $\Gamma_Z$  — полная ширина распада  $Z^0$ -бозона. Заметьте, что на полную ширину распада  $Z^0$  и на высоту пика резонанса влияет наличие дополнительных невидимых каналов распада. Вычислите, как изменятся  $\Gamma_Z$  и  $\sigma_{\text{peak}}$ , если существует гипотетический четвертый вид нейтрино, и сравните эти изменения с сечениями, показанными на рис. 20.5.

#### 20.4. Глубокоупругое рассеяние.

- (a) В (17.35) мы выписали формулы для глубокоупругого рассеяния нейтрино и антинейтрино с обменом  $W^\pm$ -бозоном. Нейтрино и антинейтрино могут также рассеиваться, обмениваясь  $Z^0$ . Подобный процесс, приводящий к адронным струям и ненаблюдаемым лептонам, называется реакцией с участием *нейтральных токов*. Вычислите  $d\sigma/dxdy$  для глубокоупругого рассеяния нейтрино и антинейтрино на протонах с участием нейтральных токов, принимая во внимание выражение для сечения рассеяния на  $u$ - и  $d$ -кварках и антикварках.
- (b) Далее рассмотрим глубокоупругое рассеяние на ядрах  $A$  с одинаковыми количествами протонов и нейтронов. Для такой мишени  $f_u(x) = f_d(x)$ , и аналогично для антикварков. Покажите, что формулы, полученные в части (a), в этом случае упрощаются. В частности, пусть  $R^\nu$  и  $R^{\bar{\nu}}$  определяются выражениями:

$$R^\nu = \frac{d\sigma/dxdy(\nu A \rightarrow \nu X)}{d\sigma/dxdy(\nu A \rightarrow \mu^- X)}, \quad R^{\bar{\nu}} = \frac{d\sigma/dxdy(\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} X)}{d\sigma/dxdy(\bar{\nu} A \rightarrow \mu^+ X)}.$$

Покажите, что  $R^\nu$  и  $R^{\bar{\nu}}$  даются следующими простыми формулами:

$$R^\nu = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{5}{9} \sin^4 \theta_w (1 + r),$$

$$R^{\bar{\nu}} = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{5}{9} \sin^4 \theta_w (1 + \frac{1}{r}),$$

где

$$r = \frac{d\sigma/dxdy(\bar{\nu} A \rightarrow \mu^+ X)}{d\sigma/dxdy(\nu A \rightarrow \mu^- X)}.$$

Эти формулы остаются справедливыми, если переопределить  $R^\nu$  и  $R^{\bar{\nu}}$  как отношения сечений для нейтральных и заряженных токов, проинтегрированные по всем  $x$  и  $y$ , наблюдавшимся в данном эксперименте.

- (с) Положим  $r$  равным некоторому значению этой величины, наблюдавшемуся на эксперименте — скажем,  $r = 0.4$  — и проварьируем  $\sin^2 \theta_w$ . Тогда соотношения из части (b) порождают кривую в плоскости  $(R^\nu, R^{\bar{\nu}})$ , известную как *нос Вайнберга*. Нарисуйте эту кривую. Наблюдаемые значения  $R^\nu, R^{\bar{\nu}}$  расположены в непосредственной близости от точки кривой, соответствующей  $\sin^2 \theta_w = 0.23$ .

### 20.5. Модель с двумя полями Хиггса.

- (a) Рассмотрим модель с двумя скалярными полями  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , преобразующимися как  $SU(2)$ -дублеты с  $Y = 1/2$ . Предположим, что оба поля обладают параллельными вакуумными средними вида (20.23) с величинами  $v_1, v_2$ . Покажите, что если сделать замену

$$v^2 \rightarrow (v_1^2 + v_2^2).$$

то эти вакуумные средние приводят к массовой матрице калибровочных бозонов, найденной в разделе 20.2.

- (b) Общий вид потенциальной энергии для модели с двумя хиггсовскими дублетами довольно сложен. Однако, если наложить дискретную симметрию  $\phi_1 \rightarrow -\phi_1, \phi_2 \rightarrow \phi_2$ , то он принимает вид

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\mu_1^2 \phi_1^\dagger \phi_1 - \mu_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2 + \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \\ + \lambda_3 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) + \lambda_4 (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \lambda_5 ((\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + \text{э.с.}).$$

Найдите условия, которые нужно наложить на параметры  $\mu_i$  и  $\lambda_i$ , чтобы конфигурация вакуумных средних, описанная в части (a), давала строгий локальный минимум этого потенциала.

- (с) В унитарной калибровке одна линейная комбинация высших степеней  $\phi_1$  и  $\phi_2$  обнуляется, а вторая образует физическое поле. Покажите, что физическое заряженное поле Хиггса имеет вид:

$$\phi^+ = \sin \beta \phi_1^+ - \cos \beta \phi_2^+,$$

где  $\beta$  определяется соотношением

$$\text{tg } \beta = \frac{v_2}{v_1}.$$

- (d) Предположим, что два поля Хиггса взаимодействуют с кварками посредством набора фундаментальных взаимодействий

$$\mathcal{L}_m = -\lambda_d^{ij} \bar{Q}_L^i \cdot \phi_1 d_R^j - \lambda_u^{ij} \bar{Q}_{La}^i \phi_{2b}^\dagger u_R^j + \text{э.с.}$$

Найдите лагранжиан взаимодействия физического заряженного хиггсовского бозона из части (с) с собственными состояниями кваркового оператора масс. Это взаимодействие зависит только от значений масс кварков,  $\text{tg } \beta$  и от элементов матрицы ККМ.

## КВАНТОВАНИЕ СПОНТАННО НАРУШЕННЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

В гл. 20 было показано, что в результате спонтанного нарушения калибровочной симметрии калибровочные бозоны приобретают массу. Это явление позволяет построить реалистическую теорию слабых взаимодействий. Однако до сих пор мы рассматривали спонтанно нарушенные калибровочные теории только в упрощенном виде. Для выделения физических степеней свободы мы использовали унитарную калибровку. Но, вообще-то, не совсем ясно, как работает в этой калибровке теория возмущений или как выполняется условие унитарной калибровки при вычислении фейнмановских диаграмм. Было также показано, что голдстоуновские бозоны, которые поглощаются массивными калибровочными бозонами, играют важную роль в обсуждении этих теорий, т. к. квантовать теории нужно в такой калибровке, которая не устраняет эти частицы с самого начала.

В этой главе указанные проблемы будут рассмотрены с помощью фиксированной калибровки с использованием метода Фаддеева–Попова. Мы определим класс калибровок, называемый  $R_\xi$ -калибровками, почти все из которых содержат голдстоуновские бозоны исходного спонтанного нарушения симметрии. Эти частицы в рамках используемого формализма сокращают эффекты от других нефизических частиц, обеспечивая унитарность теории. Эти сокращения являются более изощренной версией сокращений между калибровочными и духовыми степенями свободы, чем таковые в гл. 16. В разделе 21.2 мы увидим, что теория не забывает, что она содержит голдстоуновские бозоны и что, при некоторых обстоятельствах, свойства голдстоуновских бозонов в теории без калибровочных взаимодействий могут быть перенесены в теорию с массивными калибровочными бозонами.

И, наконец, определив теорию возмущений и выяснив роль голдстоуновских бозонов в спонтанно нарушенных калибровочных теориях, мы вычислим петлевые вклады, представляющие интерес для теории слабых взаимодействий. Здесь мы увидим применение идей гл. 11 о том, что теория со спонтанно нарушенной симметрией может быть ренормирована контрчленами симметричного лагранжиана. В разделе 21.3 мы покажем на нескольких примерах, что этот результат в той же мере применим и к калибровочным теориям, что придает предсказательную силу калибровочной теории слабых взаимодействий.

### 21.1. $R_\xi$ калибровки

При обсуждении низкоэнергетического эффективного лагранжиана слабых взаимодействий в (20.89) было предложено следующее выражение для пропагатора массивного калибровочного бозона:

$$\langle A^\mu(p)A^\nu(-p) \rangle \stackrel{?}{=} \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 - m^2}. \quad (21.1)$$

Это выражение является естественным первым вариантом, обобщающим калибровку Фейнмана–’т Хофта. Однако оно неудовлетворительно со многих точек зрения.

Наиболее важный из его недостатков относится к представлению поляризованных состояний калибровочного бозона. Пропагатор (21.1) содержит четыре компоненты, соответствующие поперечным, продольной и времениподобной поляризациям. В гл. 5 и 16 было показано, что нефизические продольная и времениподобная компоненты при вычислениях сокращаются. Для массивного калибровочного бозона продольно поляризованное состояние соответствует реальной физической частице и не должно сокращаться. Выражение (21.1) не учитывает этого изменения.

### Абелев пример

Для понимания этой и других формальных проблем, возникающих в калибровочных теориях со спонтанно нарушенной симметрией, нужно провести аккуратное квантование этих теорий по методу Фаддеева–Попова. Для начала проквантуем спонтанно нарушенную абелеву калибровочную теорию, введенную в выражении (20.1):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \quad (21.2)$$

с  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ . Здесь  $\phi(x)$  — комплексное скалярное поле. Более удобно будет анализировать модель, записывая  $\phi$  в терминах его вещественных компонент,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2). \quad (21.3)$$

Тогда инфинитезимальное преобразование локальной симметрии имеет вид

$$\delta\phi^1 = -\alpha(x)\phi^2, \quad \delta\phi^2 = \alpha(x)\phi^1, \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (21.4)$$

Допустим, что  $V(\phi)$  таково, что скалярное поле принимает следующее вакуумное среднее значение:  $\langle\phi^1\rangle = v$ . Тогда нужно ввести новые, сдвинутые, переменные:

$$\phi^1(x) = v + h(x); \quad \phi^2 = \varphi. \quad (21.5)$$

Поле  $\phi^2$  или  $\varphi$  является голдстоуновским бозоном. Лагранжиан (21.2) теперь принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu h - eA_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi + eA_\mu(v+h))^2 - V(\phi). \quad (21.6)$$

Этот лагранжиан еще инвариантен относительно точной локальной симметрии

$$\delta h = -\alpha(x)\varphi, \quad \delta\varphi = \alpha(x)(v+h), \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (21.7)$$

Поэтому, для того, чтобы определить функциональный интеграл по переменным  $(h, \varphi, A_\mu)$ , нужно зафиксировать калибровку методом Фаддеева–Попова.

Исходя из выражения для функционального интеграла

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}h\mathcal{D}\varphi e^{i\int\mathcal{L}[A,h,\varphi]}, \quad (21.8)$$

можно ввести условие, фиксирующее калибровку, как в разделе 9.4. Повторяя шаги, ведущие от (9.50) к (9.54), находим:

$$Z = C \cdot \int \mathcal{D}A \mathcal{D}h \mathcal{D}\varphi e^{i \int \mathcal{L}[A, h, \varphi]} \delta(G(A, h, \varphi)) \det\left(\frac{\delta G}{\delta \alpha}\right), \quad (21.9)$$

где  $C$  — постоянная, пропорциональная объему калибровочной группы, а  $G(A, h, \varphi)$  — условие, фиксирующее калибровку. Альтернативно можно ввести фиксирующее калибровку условие в виде  $\delta(G(x) - \omega(x))$  и проинтегрировать по  $\omega(x)$  с гауссовым весом, как при получении (9.56). Это дает выражение

$$Z = C' \cdot \int \mathcal{D}A \mathcal{D}h \mathcal{D}\varphi \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}[A, h, \varphi] - \frac{1}{2}(G)^2\right)\right] \det\left(\frac{\delta G}{\delta \alpha}\right). \quad (21.10)$$

В общем, калибровочно-фиксирующая функция  $G$  произвольна, но для того, чтобы упростить формализм, ее можно выбрать в удобной форме.

Особенно удобным является следующий выбор

$$G = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\partial_\mu A^\mu - \xi ev\varphi). \quad (21.11)$$

При образовании  $G^2$  член, квадратичный по  $A_\mu$ , даст такой же зависящий от калибровки вклад в действие калибровочной теории, как и при получении выражений (9.58) и (16.29). К тому же перекрестное между  $A_\mu$  и  $\varphi$  слагаемое устроено так, что оно сокращает квадратичное слагаемое вида  $\partial_\mu \varphi A^\mu$ , происходящее из третьего слагаемого (21.6). При таком выборе квадратичные слагаемые лагранжиана с фиксированной калибровкой  $(\mathcal{L} - \frac{1}{2}G^2)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2}A_\mu \left(-g^{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu - (ev)^2 g^{\mu\nu}\right) A_\nu + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\xi}{2}(ev)^2 \varphi^2. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Массовое слагаемое поля  $h$  появляется из разложения  $V(\phi)$ , как в (20.6). Массовое слагаемое калибровочного поля появляется из-за механизма Хиггса, т.е. из третьего члена (21.6). Отметим, что этот формализм придает также массу голдстоуновскому бозону  $\varphi$

$$m_\varphi^2 = \xi(ev)^2 = \xi m_A^2. \quad (21.13)$$

Тот факт, что эта масса зависит от калибровки, означает, что голдстоуновский бозон является фиктивным полем, которое не может рождаться ни в каких физических процессах.

Для завершения процедуры квантования методом Фаддеева–Попова нужно найти лагранжиан духов. Этот лагранжиан зависит от калибровочных вариаций  $G$ , которые могут быть вычислены подстановкой (21.7) в (21.11). В результате получаем

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(-\frac{1}{e} \partial^2 - \xi ev(v + h)\right). \quad (21.14)$$

Детерминант этого оператора может быть учтен добавлением набора духов Фаддеева–Попова с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c} \left[-\partial^2 - \xi m_A^2 \left(1 + \frac{h}{v}\right)\right] c, \quad (21.15)$$



где  $m_A = ev$  как и в (21.13). Так как это абелева калибровочная теория, то духовое поле не взаимодействует непосредственно с калибровочным полем. Но оно взаимодействует с физическим полем Хиггса и поэтому не может быть полностью проигнорировано, как в КЭД.

Из квадратичных слагаемых в лагранжианах полей  $A_\mu$ ,  $h$ ,  $\varphi$ , и духов можно легко найти пропагаторы этих полей. Все четыре пропагатора приведены на рис. 21.1. Осложнение возникает только в случае калибровочного поля. Член в (21.12), содержащий  $A_\mu$ , содержит оператор, фурье-образ которого равен

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu - m_A^2 g^{\mu\nu} &= \\ &= \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)(k^2 - m_A^2) + \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\frac{1}{\xi}(k^2 - \xi m_A^2). \end{aligned} \quad (21.16)$$

Пропагатор поля  $A_\mu$  дается соответствующей обратной матрицей:

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(k)A^\nu(-k) \rangle &= \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \frac{-i\xi}{k^2 - \xi m_A^2} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) = \\ &= \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_A^2}(1 - \xi)\right). \end{aligned} \quad (21.17)$$

Отметим, что поперечные компоненты поля  $A$  и компонента  $h$  хиггсовского поля приобретают массы  $m_A$  и  $m_h$ , найденные в разделе 20.1. Нефизические компоненты поля  $A$ , голдстоуновские бозоны, и духи приобретают одну и ту же, зависящую от калибровки массу  $\sqrt{\xi}m_A$ .

$$\begin{aligned} A_\mu : \mu \text{---} \overset{\curvearrowright}{\text{---}} \overset{\curvearrowleft}{\text{---}} \nu &= \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_A^2}\right)(1 - \xi), \\ h : \text{---} \overset{\leftarrow}{\text{---}} &= \frac{i}{k^2 - m_h^2}, \\ \varphi : \text{---} \overset{\leftarrow}{\text{---}} &= \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2}, \\ c : \text{---} \overset{\leftarrow}{\text{---}} &= \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2}. \end{aligned}$$

Рис. 21.1. Пропагаторы калибровочного поля, полей Хиггса и духов в абелевой модели со спонтанно нарушенной симметрией.

### $\xi$ -Зависимость в теории возмущений

Так как параметр  $\xi$  был введен только для фиксации калибровки, можно ожидать, что он должен сократиться при вычислении средних значений калибровочно-инвариантных операторов и элементов  $S$ -матрицы. Такое сокращение может быть доказано во всех порядках теории возмущений с использованием БРСТ симметрии лагранжиана с фиксированной калибровкой\*. Но здесь мы ограничимся только иллюстрацией сокращения  $\xi$ -зависимости на простом примере.

\*См., например, Taylor (1976).

Рассмотрим киральное взаимодействие фермиона в рамках спонтанно нарушенной калибровочной теории:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_L(i\not{D})\psi_L + \bar{\psi}_R(i\not{\partial})\psi_R - \lambda_f(\bar{\psi}_L\phi\psi_R + \bar{\psi}_R\phi^*\psi_L), \quad (21.18)$$

с  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ , как и раньше. Это упрощенная абелева версия взаимодействия фермионов в калибровочной теории слабых взаимодействий. Из-за спонтанного нарушения симметрии фермион  $\psi$  получает массу

$$m_f = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (21.19)$$

(Эта теория содержит аксиальную аномалию, которая делает петлевые вычисления несогласованными, но мы будем анализировать ее только на уровне древесных диаграмм.)

Диаграммы, дающие главный вклад в фермион-фермионное рассеяние в этой теории, изображены на рис. 21.2. Отметим, что они содержат вклад от обмена нефизической частицей  $\varphi$ , т. к. эта частица появляется в фейнмановских правилах. Духи не появляются в этом процессе на древесном уровне. Т. к. пропагатор нефизической частицы Хиггса  $h$  не зависит от  $\xi$ , сокращение  $\xi$ -зависимости должно произойти между поперечными и продольными компонентами поля  $A_\mu$  и голдстоуновским бозоном  $\varphi$ .

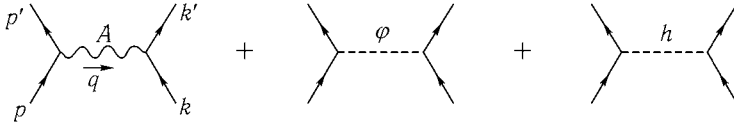


Рис. 21.2. Диаграммы, дающие вклад в фермион-фермионное рассеяние в главном порядке в абелевой модели со спонтанным нарушением симметрии.

Диаграмма, содержащая обмен голдстоуновским бозоном, дает вклад

$$i\mathcal{M}_\varphi = \left(\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}}\right)^2 \bar{u}(p')\gamma^5 u(p) \frac{i}{q^2 - \xi m_A^2} \bar{u}(k')\gamma^5 u(k). \quad (21.20)$$

$\xi$ -зависимость этого выражения должна сократиться с такой же зависимостью в диаграмме, содержащей обмен калибровочным бозоном:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_A &= (-ie)^2 \bar{u}(p')\gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) u(p) \times \\ &\times \frac{-i}{q^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \xi m_A^2} (1-\xi)\right) \bar{u}(k')\gamma_\nu \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) u(k). \end{aligned} \quad (21.21)$$

$\xi$ -зависимость этого слагаемого выглядит довольно сложной. Но его можно упростить, переписав пропагатор калибровочного бозона в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{-i}{q^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} + q^\mu q^\nu \left[\frac{1}{m_A^2} - \frac{1}{q^2 - \xi m_A^2} (1-\xi)\right]\right) = \\ = \frac{-i}{q^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\right) + \frac{-i}{q^2 - \xi m_A^2} \left(\frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}\right). \end{aligned} \quad (21.22)$$

Первое слагаемое в (21.22) не зависит от  $\xi$ . Второе слагаемое в (21.21) может быть упрощено с использованием тождества

$$\begin{aligned} q^\mu \bar{u}(p') \gamma_\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(p) &= \frac{1}{2} \bar{u}(p') [(\not{p} - \not{p}') - (\not{p} - \not{p}') \gamma^5] u(p) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}(p') [\not{p}' \gamma^5 + \gamma^5 \not{p}] u(p) = \\ &= m_f \bar{u}(p') \gamma^5 u(p), \end{aligned} \quad (21.23)$$

и аналогичного тождества для другой фермионной линии. После этих преобразований и подстановки явных значений  $m_f = \lambda_f v / \sqrt{2}$  и  $m_A = ev$  амплитуда обмена калибровочным бозоном (21.21) принимает вид

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_A &= (-ie)^2 \bar{u}(p') \gamma_\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(p) \frac{i}{q^2 - m_A^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} \right) \bar{u}(k') \gamma_\nu \times \\ &\times \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(k) + \left( \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{u}(p') \gamma^5 u(p) \frac{-i}{q^2 - \xi m_A^2} \bar{u}(k') \gamma^5 u(k). \end{aligned} \quad (21.24)$$

Второе слагаемое в (21.24) в точности сокращает диаграмму обмена голдстоуновским бозоном (21.20). Остающиеся в амплитуде фермион-фермионного рассеяния слагаемые не зависят от  $\xi$ .

Этот пример заслуживает двух дополнительных комментариев. Во-первых, везде в этой книге мы уже привыкли к тому, что умножение импульса калибровочного бозона на соответствующую вершину дает нуль или контактные члены. Но в спонтанно нарушенных калибровочных теориях обычно получается другой результат. В них фермионный ток  $\bar{\psi} \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi$  не сохраняется, причем это несохранение пропорционально фермионной массе. Это позволяет преобразовать (21.23) так, чтобы оно приводило к слагаемым, пропорциональным вакуумному среднему от бозонного хиггсовского поля, которое взаимодействует с вкладами голдстоуновского бозона. Этот пункт и его физическое применение будут рассмотрены позднее, в разделе 21.2.

Второе замечание касается конечной формы калибровочно-инвариантной суммы обменных диаграмм калибровочного и голдстоуновского бозонов. Они в точности дают результат, который получился бы, если пренебречь голдстоуновским бозоном и вычислять обмен калибровочным бозоном, используя в качестве пропагатора первое слагаемое в (21.22):

$$\langle A_\mu(q) A_\nu(-q) \rangle = \frac{-i}{q^2 - m_A^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} \right). \quad (21.25)$$

Тензорная структура представляет сумму по поляризациям калибровочного бозона. Для определения векторов, по которым идет суммирование, заметим, что, если векторный бозон находится на массовой поверхности и мы перейдем в его собственную систему отсчета, эта структура в точности становится проектором на три чисто пространственных направления. Это соответствует трем поляризационным состояниям массивной векторной частицы на массовой поверхности. В произвольной системе отсчета, но при  $q^\mu$  на массовой поверхности, тензор в (21.25) остается проектором на физические поляризационные состояния:

$$\sum_{\varepsilon^\mu, q_\mu=0} \varepsilon^\mu \varepsilon^{\nu*} = - \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} \right). \quad (21.26)$$

Таким образом показано, что при сокращении  $\xi$ -зависящих частей пропагатора калибровочного бозона вклад диаграммы голдстоуновского бозона сокращает вклад нефизической, времениподобной, поляризации калибровочного бозона, оставляя только три необходимые физические поляризации.

Разработанные правила теории возмущений имеют различный характер для разных значений  $\xi$ . Таким образом, полезным обстоятельством является то, что в случае спонтанно нарушенной симметрии, выбирая разные значения калибровочного параметра, можно найти различные специальные упрощения. В лоренцевской калибровке  $\xi = 0$ , голдстоуновский бозон является безмассовым и имеет то же взаимодействие, что и в некалибровочной модели нарушения симметрии, тогда как пропагатор калибровочного бозона является чисто поперечным:

$$\begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \\ \text{---} \\ \leftarrow \\ k \\ \text{---} \\ \nu \end{array} = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right); \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow \\ k \\ \text{---} \end{array} = \frac{i}{k^2}. \quad (21.27)$$

Эта калибровка особенно полезна при анализе моделей нарушения симметрии. В ней оба пропагатора имеют полюса при  $k^2 = 0$ . Но, как мы знаем, соответствующие физические частицы не существуют, т.к. эти полюса уходят из  $k^2 = 0$  при изменении  $\xi$ , тогда как  $S$ -матрица должна быть  $\xi$ -независящей.

При  $\xi = 1$  воспроизводится простая форма пропагатора калибровочного бозона, полученная в (21.1). Но этот выбор пропагатора будет противоречив, если не будет учтен обмен голдстоуновским бозоном, которому приписана масса  $m_A$ :

$$\begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \\ \text{---} \\ \leftarrow \\ k \\ \text{---} \\ \nu \end{array} = \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 - m_A^2}; \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow \\ k \\ \text{---} \end{array} = \frac{i}{k^2 - m_A^2}. \quad (21.28)$$

Эта калибровка, называемая калибровкой Фейнмана – ‘т Хофта, является наиболее удобной для общих вычислений в высших порядках.

Для любого конечного значения  $\xi$ , пропагаторы калибровочного и голдстоуновского бозонов убывают как  $1/k^2$  и поэтому подходят под общий анализ подсчета степеней раздела 10.1. Отсюда следует, что в любой такой калибровке теория возмущений будет перенормируемой в том смысле, что все расходимости будут устранены конечным набором контрчленов. Более того, анализ раздела 11.6 говорит, что единственные необходимые контрчлены — это те, которые симметричны относительно исходной глобальной симметрии теории. Но нужно наложить еще одно условие в нашу ренормализационную процедуру: нужно потребовать чтобы контрчлены сохраняли локальную калибровочную инвариантность и, в частности, сохраняли свойство независимости от  $\xi$  матричных элементов калибровочно-инвариантных операторов и  $S$ -матричных элементов. Этот результат был доказан во всех порядках теории возмущений ‘т Хофтом и Вельтманом и Ли и Зин-Жюстэнэом\*. Таким образом, в калибровке, определяемой любым конечным значением  $\xi$ , в принципе, можно вычислить все физические величины в любом порядке. Поэтому калибровки, определяемые возможными значениями  $\xi$ , известны как калибровки *ренормируемости* или  $R_\xi$ -калибровки.

Переходя в  $R_\xi$ -калибровке к пределу  $\xi \rightarrow \infty$ , получаем калибровку со многими упрощенными свойствами. В этом пределе нефизические степени свободы, имеющие массы пропорциональные  $\sqrt{\xi}$ , исчезают из теории. Пропагаторы калибровочного и голдстоуновского бозонов становятся равными

$$\begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \\ \text{---} \\ \leftarrow \\ k \\ \text{---} \\ \nu \end{array} = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_A^2} \right); \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow \\ k \\ \text{---} \end{array} = 0. \quad (21.29)$$

\*G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972), B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137, 3155 (1972), **D7**, 1049 (1973).

Пропагатор калибровочного бозона содержит в точности три пространственноподобных поляризованных состояния. В этой калибровке сингулярности фейнмановских диаграмм соответствуют распространению только физических промежуточных состояний. Поэтому унитарность  $S$ -матрицы следует из правил Каткоского, как в глобально симметричных теориях, рассмотренных в разделе 7.3, без необходимости заботиться о сокращении нефизических состояний<sup>†</sup>. Следовательно, предел  $\xi \rightarrow \infty$   $R_\xi$ -калибровок дает квантово-механическую реализацию *унитарной* (или  $U$ ) калибровки, введенной в (20.12).

Доказать перенормируемость сразу в  $U$ -калибровке непросто. В этой калибровке пропагатор калибровочного бозона убывает на больших  $k$  медленнее чем  $1/k^2$ . Это сигнализирует о сложностях при вычислении петлевых диаграмм. В действительности отдельные петлевые диаграммы обычно расходятся как  $\ln \xi$  или сильнее при  $\xi \rightarrow \infty$ . Но калибровочная инвариантность  $S$ -матрицы требует сокращения этих расходимостей в сумме всех диаграмм, вносящих вклады в данный процесс, поэтому эта сумма должна иметь гладкий предел при  $\xi \rightarrow \infty$ . В принципе, нет трудности в том, что одна калибровка была использована при доказательстве перенормируемости спонтанно нарушенных калибровочных теорий, а другая — для доказательства их унитарности. В действительности этот метод естественным образом использовал основные симметрии теории.

### Неабелев анализ

Теперь, после изучения  $R_\xi$ -калибровок в абелевой калибровочной теории, перейдем к обобщению на неабелев случай. Это обобщение можно проводить в общем виде, поэтому рассмотрим калибровочную теорию Янга–Миллса с калибровочной группой  $G$ , спонтанно нарушенной ненулевым вакуумным средним скалярного поля.

Классический анализ этой теории проведем, следуя (20.13). Как и в том случае, всего удобнее записать скалярные поля в виде мультиплетов вещественных полей  $\phi_i$ . Тогда калибровочное преобразование  $\phi_i$  имеет вид

$$\delta\phi_i = -\alpha^a(x)T_{ij}^a\phi_j, \quad (21.30)$$

где  $T_{ij}^a$  принадлежат вещественному антисимметричному матричному представлению  $G$ . Аналогично, преобразование калибровочных полей имеет вид

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a - f^{abc}\alpha^b A_\mu^c = \frac{1}{g}(D_\mu\alpha)^a. \quad (21.31)$$

(Если калибровочная группа не проста, константа  $g$  может быть разной для разных  $a$ .) Лагранжиан, инвариантный относительно этих калибровочных преобразований, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 - V(\phi), \quad (21.32)$$

где

$$D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + gA_\mu^a T_{ij}^a\phi_j. \quad (21.33)$$

Предположим, что минимум потенциала  $V(\phi)$  расположен в точке, где некоторые компоненты  $\phi$  имеют ненулевые вакуумные средние значения. Определим, как в (20.16),

$$\langle\phi_i\rangle = (\phi_0)_i. \quad (21.34)$$

<sup>†</sup> На более строгом языке раздела 16.4 это означает, что важнейшее тождество (16.54), необходимое для унитарности  $S$ -матрицы, становится очевидным.

Разложим  $\phi_i$  вблизи этого значения:

$$\phi_i(x) = \phi_{0i} + \chi_i(x). \quad (21.35)$$

Удобно разделить пространство значений  $\chi_i$  на два подпространства. Векторы  $T^a \phi_0$  соответствуют различным преобразованным значениям вакуумного среднего поля  $\phi$ . Флуктуации поля вдоль этих направлений являются голдстоуновскими бозонами. Пусть  $\{n_i\}$  — ортонормальный базис для этого подпространства; тогда единичные векторы  $n_i$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с голдстоуновскими бозонами. Флуктуации поля, ортогональные ко всем векторам  $T^a \phi_0$ , соответствуют (массивным) физическим скалярным полям спонтанно нарушенной калибровочной теории.

В последующем рассмотрении векторы  $T^a \phi_0$  будут играть важную роль. Поэтому напомним обозначение для этих векторов, введенное в (20.51):

$$F^a_i = T^a_{ij} \phi_{0j}. \quad (21.36)$$

Матрица  $F^a_i$  в общем случае не является квадратной; ее строки соответствуют калибровочным генераторам, а столбцы — компонентам поля  $\phi$ . Но многие ее элементы равны нулю. Ненулевые элементы связывают калибровочные генераторы, отвечающие спонтанно нарушенной симметрии, и голдстоуновские бозоны. В (20.56) было показано, что массы калибровочных бозонов, возникшие за счет механизма Хиггса, могут быть записаны в следующем виде:

$$m^2_{ab} = g^2 F^a_j F^b_j. \quad (21.37)$$

В качестве конкретного примера матрицы  $F^a_j$  найдем ее вид в электрослабой теории ГВС. Следуя соглашениям, введенным в (20.14), нужно переписать поле Хиггса модели ГВС в терминах четырех скалярных вещественных полей. Удобной параметризацией является

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\phi^1 - i\phi^2) \\ v + (h + i\phi^3) \end{pmatrix}. \quad (21.38)$$

Здесь поля  $\phi^i$  — голдстоуновские бозоны, а  $h$  — массивный бозон Хиггса. Вакуумное состояние — это просто

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Матрицы в вещественном представлении имеют вид

$$T^a = -i\tau^a = -i\frac{\sigma^a}{2}, \quad T^Y = -iY = -i\frac{1}{2}.$$

Простое вычисление показывает, что, например,  $T^1 \phi_0$  равно  $v/2$ , умноженному на единичный вектор в направлении  $\phi^1$ . Подставляя оставшиеся компоненты  $F^a_i$  с  $a = 1, 2, 3, Y$  и  $i = 1, 2, 3$ , находим

$$gF^a_i = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -g' \end{pmatrix}. \quad (21.39)$$

Компоненты  $F^a_i$  вдоль направления физического поля Хиггса можно не выписывать, т. к. все векторы  $T^a \phi_0$  ортогональны этому направлению.

Если сделать замену переменных, подставив (21.35) в (21.32), то для квадратичной части лагранжиана получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2}A_\mu^a(-g^{\mu\nu}\partial^2 + \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu^a + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \\ & + g\partial^\mu\chi_i A_\mu^a F^a{}_i + \frac{1}{2}(m_A^2)^{ab}A_\mu^a A^{\mu b} - \frac{1}{2}M_{ij}\chi_i\chi_j, \end{aligned} \quad (21.40)$$

где  $(m_A^2)^{ab}$  — матрица масс калибровочных бозонов (21.37), а

$$M_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\phi_i\partial\phi_j}V(\phi)\Big|_{\phi_0}. \quad (21.41)$$

В (11.13) было доказано, что

$$n_i M_{ij} = 0 \quad (21.42)$$

для всех возможных направлений  $n_i$  в подпространстве, натянутом на  $T^a\phi_0$ , следовательно, голдстоуновские бозоны являются безмассовыми.

Для изучения квантовой теории исходим из выражения для функционального интеграла

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\chi e^{i\int \mathcal{L}[A,\chi]}. \quad (21.43)$$

Используя для фиксации калибровки метод Фаддеева–Попова, перепишем этот интеграл по аналогии с (21.10) в виде

$$Z = C' \cdot \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\chi \exp\left[i\int d^4x (\mathcal{L}[A,\chi] - \frac{1}{2}(G)^2)\right] \det\left(\frac{\delta G}{\delta\alpha}\right), \quad (21.44)$$

для произвольной фиксирующей калибровку функции  $G(A,\chi)$ .  $R_\xi$ -калибровки отвечают следующему выбору:

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(\partial_\mu A^{a\mu} - \xi g F^a{}_i \chi_i). \quad (21.45)$$

Отметим, что  $G$  содержит только те компоненты  $\chi$ , которые находятся в подпространстве голдстоуновских бозонов.

Слагаемое, фиксирующее калибровку, добавляет в лагранжиан следующий набор квадратичных членов:

$$\left(-\frac{1}{2}G^2\right)_2 = \frac{1}{2}A_\mu^a\left(\frac{1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu^a + g\partial_\mu A^{a\mu}F^a{}_i\chi_i - \frac{1}{2}\xi g^2[F^a{}_i\chi_i]^2. \quad (21.46)$$

Слагаемое, смешивающее  $A_\mu^a$  и  $\chi_i$ , сокращается благодаря (21.40) и (21.46). Окончательный квадратичный лагранжиан для калибровочных и голдстоуновских бозонных полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2}A_\mu^a\left(\left[-g^{\mu\nu}\partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\delta^{ab} - g^2 F^a{}_i F^b{}_i\right)A_\nu^b + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}\xi g^2 F^a{}_i F^a{}_j \chi_i \chi_j. \end{aligned} \quad (21.47)$$





Массовая матрица калибровочных бозонов в теории ГВС равна

$$g^2 F F^T = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix},$$

в согласии с (20.124) (множитель  $g$  слева следует интерпретировать как  $g'$  для четвертой компоненты  $F$ ). Диагонализация этой матрицы дает известные соотношения (20.62). Таким образом, четыре пропагатора калибровочных бозонов в базе собственных векторов массовой матрицы отделяются и дают

$$\mu \text{---}\overleftarrow{k}\text{---}\nu = \frac{-i}{k^2 - m^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m^2} (1 - \xi) \right], \quad (21.54)$$

где  $m^2$  равно  $m_W^2$ ,  $m_Z^2$  или нуль для фотона. Отметим, что для фотона это выражение в точности воспроизводит (9.58).

Массовая матрица голдстоуновских бозонов в теории ГВС равна

$$g^2 F^T F = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 + g'^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, эти поля имеют следующий пропагатор

$$\text{---}\overleftarrow{k}\text{---} = \frac{i}{k^2 - \xi m^2}, \quad (21.55)$$

с  $m^2 = m_W^2$  для  $\phi^1$  и  $\phi^2$  (бозонов, поглощенных  $W^\pm$ ) и  $m^2 = m_Z^2$  для  $\phi^3$  (бозона, поглощенного  $Z$ ). Поле  $h(x)$ , которое является физическим хиггсовским полем, распространяется независимо, с массой, определяемой потенциалом Хиггса (без множителя  $\xi$  в пропагаторе).

Наконец, имеются четыре духовых поля. Согласно (21.53) они имеют следующий пропагатор

$$\text{---}\overleftarrow{k}\text{---} = \frac{i}{k^2 - \xi m^2}, \quad (21.56)$$

с теми же значениями  $m^2$ , что и четыре калибровочных бозона.

Выписать правила Фейнмана для вершин взаимодействия этих частиц затруднительно из-за большого числа возможных комбинаций. Но довольно просто получить эти правила разложением лагранжиана слабого взаимодействия и почленным выделением вершин. Несколько таких примеров будут приведены в следующем разделе\*.

## 21.2. Теорема эквивалентности голдстоуновских бозонов

Из результатов предыдущего раздела мы узнали, что пертурбативные вычисления в  $R_\xi$ -калибровках содержат сложные сокращения между нефизическими частицами.

\* Все правила Фейнмана для слабовзаимодействующей калибровочной теории приведены в Приложении В книги Cheng и Li (1984).

Но иногда эти нефизические частицы могут оставить свои следы на физических наблюдаемых. В этом разделе мы увидим, что в пределе высоких энергий нефизический голдстоуновский бозон, поглощенный массивным калибровочным бозоном, контролирует амплитуду излучения или поглощения калибровочного бозона в продольном поляризованном состоянии.

Когда вводился хиггсовский механизм генерации масс векторных бозонов, было подчеркнуто, что в нем имеется некоторое сохранение числа степеней свободы. Безмассовый калибровочный бозон, имеющий две поперечные поляризации, образует со скалярным голдстоуновским бозоном массивную векторную частицу, имеющую три поляризованных состояния. Для покоящейся массивной векторной частицы все три поляризованных состояния полностью эквивалентны, но для релятивистски движущейся частицы имеется четкое различие между поперечными и продольными направлениями поляризации. Это приводит к тому, что быстро движущийся, продольно поляризованный массивный калибровочный бозон может проявляться как голдстоуновский бозон. Усиленная версия этой идеи изображена на рис. 21.3. Амплитуда излучения или поглощения продольно поляризованного калибровочного бозона становится равной при больших энергиях амплитуде излучения или поглощения голдстоуновского бозона. Замечательно, что это утверждение является правильным вследствие исходной локальной калибровочной инвариантности. Эта *теорема эквивалентности голдстоуновского бозона* была впервые доказана в работе\*.

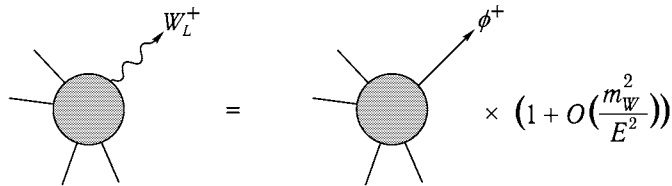


Рис. 21.3. Теорема эквивалентности голдстоуновского бозона. При высоких энергиях амплитуда излучения или поглощения продольно поляризованного массивного калибровочного бозона становится равной амплитуде излучения или поглощения голдстоуновского бозона.

### Формальные аспекты эквивалентности голдстоуновского бозона

Доказательство теоремы эквивалентности голдстоуновского бозона основано на тождествах Уорда спонтанно нарушенной калибровочной теории. Для того чтобы дать полное доказательство теоремы, понадобилось бы найти и детально проанализировать эти тождества. Но для понимания идеи доказательства достаточно рассмотреть частный случай теоремы: процесс рассеяния, в котором излучается или поглощается один массивный векторный бозон. Анализ этого частного случая требует только относительно простого тождества Уорда, которому удовлетворяет оператор тока между состояниями на массовой поверхности<sup>†</sup>.

Для обсуждения свойств продольных векторных бозонов нам понадобятся некоторые простые кинематические соотношения. Покоящийся векторный бозон имеет им-

\*J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev.* **D10**, 1145 (1974); C. E. Vayonakis, *Lett. Nuov. Cim.* **17**, 383 (1976). Проясняющее обсуждение теоремы эквивалентности см. в B. W. Lee, C. Quigg, and H. Thacker, *Phys. Rev.* **D16**, 1519 (1977).

<sup>†</sup>Для строгого доказательства теоремы эквивалентности, учитывающей процессы множественного поглощения и излучения массивных векторных бозонов, см. M. S. Chanowitz and M. K. Gaillard, *Nucl. Phys.* **B261**, 379 (1985).

пульс  $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$  и вектор поляризации, являющийся линейной комбинацией трех единичных ортогональных векторов

$$(0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1). \quad (21.57)$$

Если придать частице движение вдоль оси  $\hat{3}$ , ее импульс станет равным  $k^\mu = (E_k, 0, 0, k)$ . Три возможных вектора поляризации являются теперь тремя единичными векторами, удовлетворяющими соотношениям

$$\varepsilon^\mu k_\mu = 0, \quad \varepsilon^2 = -1. \quad (21.58)$$

Два из них есть первые два вектора в (21.57); они определяют поперечные поляризации. Третий вектор, удовлетворяющий (21.58), является продольным вектором поляризации

$$\varepsilon_L^\mu(k) = \left( \frac{k^\mu}{m}, 0, 0, \frac{E_k}{m} \right), \quad (21.59)$$

который получается с помощью бусиа из третьего вектора (21.57). Важным и в некотором смысле неожиданным свойством вектора (21.59) является его растущая параллельность вектору  $k^\mu$  при увеличении  $k$ . Действительно, при  $k \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_L^\mu(k) = \frac{k^\mu}{m} + \mathcal{O}(m/E_k). \quad (21.60)$$

Так как компоненты  $k^\mu$  растут как  $k$ , это утверждение согласуется с требованием того, что  $\varepsilon_L \cdot k = 0$  при  $k \cdot k = m^2$ .

Учитывая эту кинематику, рассмотрим тождество Уорда для матричного элемента калибровочного тока между состояниями на массовой поверхности. Проще всего работать в лоренцевской калибровке ( $\xi = 0$ ), где фиксирующий калибровку член (21.45) не содержит голдстоуновских бозонных полей. Тогда тождество можно записать в виде:

$$0 = k^\mu \left( \text{diagram with } k \text{ and } \Gamma^\mu(k) \right) = k^\mu \left( \text{diagram with } \text{ОЧН} \text{ and } \Gamma^\mu(k) \right) + k^\mu \left( \text{diagram with } \phi \text{ and } \Gamma^\mu(k) \right) \quad (21.61)$$

В последнем выражении матричный элемент записан в виде суммы двух слагаемых. Во-первых, ток может взаимодействовать прямо с одночастично неприводимой вершинной функцией  $\Gamma^\mu(k)$ . Это дает класс диаграмм, дающих вклад в рассеяние калибровочного бозона на внешних состояниях. Но в спонтанно нарушенной калибровочной теории существует дополнительное слагаемое, которое не является одночастично неприводимым и описывает рождение током голдстоуновского бозона. Именно эта частица взаимодействует затем с внешними состояниями через ОЧН вершину  $\Gamma(k)$ .

Перепишем соотношение, связывающее калибровочный ток и состояние голдстоуновского бозона в том же виде, как и в (20.46),

$$\langle 0 | J^\mu | \pi(k) \rangle = -iFk^\mu. \quad (21.62)$$

Тогда рассуждения, приводящие к (20.56), говорят, что масса калибровочного бозона

$$m = gF, \quad (21.63)$$

где  $g$  — константа взаимодействия калибровочного бозона.



Так как  $\Gamma^\mu(k)$  — одночастично-неприводимая вершина, то опять, используя (21.60), можно заменить  $(k^\mu/m)$  для высокоэнергетических калибровочных бозонов продольным вектором поляризации  $\varepsilon_L^\mu(k)$ . Тогда (21.69) совпадает с квадратом (21.67).

С помощью этих формальных аргументов можно увидеть, по крайней мере, на древесном уровне, что в процессах с излучением одного калибровочного бозона теорема эквивалентности должна выполняться. Но увидеть более наглядно, как работает теорема эквивалентности, можно при вычислении представляющих интерес физических процессов. Проиллюстрируем это на двух примерах.

### Распад топ-кварка

Первым примером будет слабый распад топ-кварка. Этот кварк с зарядом  $+2/3$  достаточно тяжел для того, чтобы распадаться на  $W^+$  по схеме  $t \rightarrow W^+ + b$ . Диаграмма этого процесса дается простой калибровочной вершиной, изображенной на рис. 21.4.

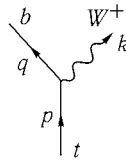


Рис. 21.4. Распад  $t$ -кварка на  $W^+ + b$ .

Сначала попробуем угадать величину времени жизни топ-кварка. Квадрат матричного элемента содержит фактор  $g^2$ , умноженный на некоторое выражение размерности массы. Так как ширина была бы больше, если бы топ-кварк был тяжелее, то первым приближением может быть

$$\Gamma \sim \frac{g^2}{4\pi} m_t. \quad (21.70)$$

Точное выражение оказывается больше на множитель  $(m_t/m_W)^2$ .

Амплитуду этого распада можно получить из (20.80):

$$i\mathcal{M} = \frac{ig}{\sqrt{2}} \bar{u}(q)\gamma^\mu \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) u(p)\varepsilon_\mu^*(k). \quad (21.71)$$

(Здесь существенный множитель ККМ положен равным 1.) Эту амплитуду теперь нужно подставить в выражение для вероятности распада топ-кварка. Для простоты в этом вычислении будем игнорировать массу  $b$ -кварка.

Возводя амплитуду (21.71) в квадрат по стандартной методике и затем усредняя по начальным и суммируя по конечным спиновым состояниям, находим

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{2} [q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} q \cdot p] \sum_{\text{поляризации}} \varepsilon_\mu^*(k)\varepsilon_\nu(k). \quad (21.72)$$

Суммирование по поляризациям физического калибровочного бозона можно произвести явно, подставляя выражение (21.26) для суммы по поляризациям. Это дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{2} [q^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} q \cdot p] \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2} \right] = \\ &= \frac{g^2}{2} \left[ q \cdot p + 2 \frac{(k \cdot q)(k \cdot p)}{m_W^2} \right]. \end{aligned} \quad (21.73)$$

При  $m_b = 0$

$$2q \cdot p = 2q \cdot k = m_t^2 - m_W^2, \quad 2k \cdot p = m_t^2 + m_W^2. \quad (21.74)$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{4} \frac{m_t^4}{m_W^2} \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right) \left(1 + 2 \frac{m_W^2}{m_t^2}\right). \quad (21.75)$$

После умножения на фазовый объем находим

$$\Gamma = \frac{g^2}{64\pi} \frac{m_t^3}{m_W^2} \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right)^2 \left(1 + 2 \frac{m_W^2}{m_t^2}\right). \quad (21.76)$$

Это больше, чем наша начальная оценка (21.70), на множитель  $(m_t/m_W)^2$ .

Нетрудно найти причину этого усиления, используя теорему эквивалентности голдстоуновского бозона. В калибровочной теории слабых взаимодействий топ-кварк получает свою массу из-за взаимодействий в хиггсовском секторе. Связь между константой взаимодействия топ-кварка с хиггсовским бозоном  $\lambda_t$  и массой топ-кварка выписана в (20.103). Топ-кварк может быть тяжелее, только если  $\lambda_t$  велика. Но тогда амплитуда распада топ-кварка на голдстоуновский бозон будет усилена по сравнению с (21.70) на множитель

$$\frac{\lambda_t^2}{g^2} = \frac{m_t^2}{2m_W^2}, \quad (21.77)$$

который совпадает с найденным в (21.76).

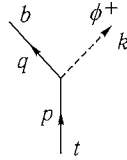


Рис. 21.5. Распад  $t$ -кварка на голдстоуновский бозон и  $b$ -кварк.

Для того чтобы провести сравнение более аккуратно, найдем выражение для вероятности распада топ-кварка на продольно поляризованный  $W^+$ -бозон, следующее из теоремы эквивалентности. Как следует из (20.101), в лагранжиане слабого взаимодействия член, связывающий  $t$  и  $b$  с полем Хиггса, равен

$$\Delta\mathcal{L} = -\lambda_t \varepsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \phi_b^\dagger t_R + \text{з. с.} \quad (21.78)$$

Разложим поле Хиггса как в (21.38) и определим поля

$$\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 \pm i\phi^2). \quad (21.79)$$

Эти поля соответствуют заряженным голдстоуновским бозонам, поглощенным полями  $W^\pm$ . Включение голдстоуновского бозона в теорию добавляет процесс  $t \rightarrow \phi^+ + b$ , показанный на рис. 21.5. Этот процесс индуцирован следующим членом лагранжиана:

$$\Delta\mathcal{L} = \lambda_t \bar{b}_L \phi^+ t_R, \quad (21.80)$$

который приводит к амплитуде распада

$$i\mathcal{M} = i\lambda_t \bar{u}(q) \left( \frac{1+\gamma^5}{2} \right) u(p). \quad (21.81)$$

Из этого выражения легко находим, что

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \lambda_t^2 q \cdot p. \quad (21.82)$$

Если игнорировать массу голдстоуновского бозона или, эквивалентно, рассмотреть предел  $m_t \gg m_W$ , то для скорости распада топ-кварка получаем

$$\Gamma = \frac{\lambda_t^2}{32\pi} m_t = \frac{g^2}{64\pi} \frac{m_t^3}{m_W^2}, \quad (21.83)$$

в согласии с главным членом (21.76) в этом пределе. Эти результаты означают, что увеличивается только вероятность рождения продольно поляризованного  $W^+$ ; это легко проверяется прямой подстановкой векторов поляризации в (21.72).

При получении (21.76) мы суммировали по физическим поляризационным состояниям излученного  $W^+$ ; можно сказать, что было использовано предписание  $U$ -калибровки суммировать по поляризациям. Равным образом можно было использовать предписание калибровки Фейнмана–'т Хофта, заменяя

$$\sum_i \varepsilon_\mu^*(k) \varepsilon_\nu(k) \rightarrow -g_{\mu\nu} \quad (21.84)$$

и добавляя вклад диаграммы излучения голдстоуновского бозона, в которой он рассматривается как массивная частица с массой  $m_W$ . При этих условиях из матричного элемента калибровочного бозона имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{2} (2q \cdot p) = \frac{g^2}{2} (m_t^2 - m_W^2). \quad (21.85)$$

Диаграмма эмиссии голдстоуновского бозона дает

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}|^2 = \lambda_t^2 q \cdot p = \frac{g^2}{4} \frac{m_t^2}{m_W^2} (m_t^2 - m_W^2). \quad (21.86)$$

Сумма этих вкладов воспроизводит (21.75) и, следовательно, дает тот же результат (21.76) для полной скорости распада. В калибровке Фейнмана–'т Хофта увеличение скорости распада топ-кварка, вызванное большой константой взаимодействия топ-кварка с хиггсовским сектором, проявляется в явном добавлении вкладов испускания голдстоуновского бозона в полную вероятность рождения  $W^+$ .

$e^+ e^- \rightarrow W^+ W^-$

Второй пример является более сложным, но зато он содержит и более интересную физику. Это реакция  $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^-$ . В этой реакции теорема эквивалентности не приводит к увеличению сечения рассеяния, а скорее управляет сокращением фейнмановских диаграмм. Мы увидим, что это сокращение является существенным для внутренней самосогласованности теории.

В задаче 9.1 было вычислено сечение  $e^+ e^-$ -аннигиляции в пару заряженных скалярных частиц, как на рис. 21.6(a), и был получен следующий результат

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} (e^+ e^- \rightarrow \phi^+ \phi^-) = \frac{\pi\alpha^2}{4s}, \quad (21.87)$$

справедливый при энергиях, много больших массы скалярной частицы. Как и в случае  $e^+e^-$ -аннигиляции в пары фермионов, это сечение рассеяния при больших энергиях убывает как  $1/s$ . Можно показать, что такое поведение определяется унитарностью: так как электрон и позитрон аннигилируют через точечную вершину, аннигиляция происходит только в одной парциальной волне. Унитарность накладывает ограничение на амплитуду этой парциальной волны, требующее, чтобы  $\mathcal{M}$  была ограничена постоянной, и, следовательно, чтобы сечение  $\sigma$  было ограничено при высоких энергиях значением  $1/s$ .\*

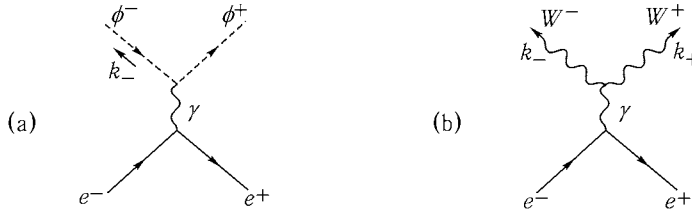


Рис. 21.6. Электрон-позитронная аннигиляция через виртуальный фотон (а) в заряженные скалярные бозоны, (б) в  $W$ -бозоны.

Те же аргументы, основанные на условии унитарности, применимы к  $e^+e^-$ -аннигиляции в векторные бозоны. Но здесь менее очевидно, что фейнмановские диаграммы дают сечение, согласованное с унитарностью. Рассмотрим вклад рис. 21.6(b). Можно было бы ожидать, что квадрат этой диаграммы должен содержать вклад в сечение в виде скалярного вклада (21.87), умноженного на скалярное произведение поляризационных векторов

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^+e^- \rightarrow W^+W^-) \sim \frac{\pi\alpha^2}{4s} \cdot |\varepsilon(k_+) \cdot \varepsilon(k_-)|^2, \quad (21.88)$$

где  $k_+$  и  $k_-$  — импульсы уходящих  $W$ -бозонов. Для поперечно поляризованных  $W$ -бозонов это выражение ведет себя хорошо, но для продольно поляризованных  $W$  возникает проблема. Используя приближение (21.60) для векторов продольной поляризации, находим

$$\varepsilon(k_+) \cdot \varepsilon(k_-) \rightarrow \frac{k_+ \cdot k_-}{m_W^2} \rightarrow \frac{s}{4m_W^2} \quad (21.89)$$

при  $s \gg m_W^2$ . Это дает сечение, растущее значительно быстрее, чем разрешает унитарность. В принципе, можно было бы надеяться, что учет вкладов высших порядков теории возмущений приведет к правильному поведению сечения, но это было бы наиболее нежелательным решением. Из него следовало бы, что теория  $W$ -бозонов становится сильновзаимодействующей при таких энергиях, когда

$$\frac{s}{4m_W^2} \sim \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^{-1}, \quad (21.90)$$

что соответствует энергиям в системе центра масс порядка 1000 ГэВ. Но если теория  $W$ -бозонов является сильновзаимодействующей на малых расстояниях, то тогда трудно понять, почему она должна стать простой слабозаимодействующей теорией на больших расстояниях, что наблюдается на опыте.

К счастью, имеется другое возможное решение этой проблемы. В калибровочной теории слабого взаимодействия есть три диаграммы Фейнмана, которые дают

\* Парциальный анализ релятивистских столкновений обсуждается в Perkins (1987), Глава 4.



вклад в амплитуду процесса  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  на древесном уровне; они изображены на рис. 21.7. Каждая диаграмма в отдельности приводит к сечению, которое растет как (21.88). Однако есть возможность, что плохо ведущие себя члены могут взаимно сократиться, давая более подходящее высоко-энергетическое поведение. Если бы такое замечательное сокращение происходило, то это делало бы теорию  $W$ -бозонов согласованной слабо взаимодействующей вплоть до очень высоких энергий.

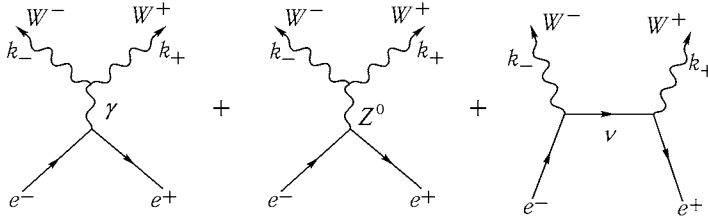


Рис. 21.7. Диаграммы, дающие вклад в  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  в калибровочной теории слабого взаимодействия.

Хотя такое сокращение, на первый взгляд, кажется невероятным, в действительности оно следует из теоремы эквивалентности голдстоуновского бозона. Теорема утверждает, что при высоких энергиях сечение рождения продольных  $W$ -бозонов должно равняться сечению рождения соответствующих скалярных голдстоуновских бозонов. Но известно, что скалярное сечение ведет себя как  $1/s$ , как отмечено в (21.87). Поэтому сечение калибровочного бозона каким-то образом тоже должно приводиться к такому результату. Сейчас мы продемонстрируем это. Мы увидим, что требуемое сокращение происходит благодаря тождествам Уорда калибровочной теории.

Для вычислений понадобятся правила Фейнмана для вершин, изображенных на рис. 21.8. Правила для констант взаимодействия электронов с  $W$ ,  $Z$  и  $\gamma$  получаются прямо из (20.80). Относительная величина этих констант определяется  $SU(2) \times U(1)$  квантовыми числами левых и правых компонент электрона. Так же легко определяются константы взаимодействия голдстоуновских бозонов с  $Z$  и  $\gamma$ . Так как бозон  $\phi^+$  имеет электрический заряд 1, то фотонная константа взаимодействия совпадает с найденной в задаче 9.1. Константа взаимодействия  $Z$  определяется дополнительной информацией, что  $\phi^+$  имеет  $I^3 = +1/2$ . Все эти выражения изображены на рис. 21.8.

Трехчастичные вершины взаимодействия калибровочных бозонов, изображенные на рис. 21.7, возникают из кубических членов в действии калибровочных полей. Так как  $U(1)$  напряженность линейна по калибровочным полям, то они могут происходить только из кинетического слагаемого  $SU(2)$  калибровочного поля. Для идентификации необходимых специальных частей нужно переписать это кубическое слагаемое в базисе массовых собственных состояний, определяемом (20.63) и (20.64). Это может быть сделано следующим образом:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)g\epsilon^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c} = \\
 &= -g(\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1)A^{\mu 2}A^{\nu 3} + g(\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2)A^{\mu 1}A^{\nu 3} - \\
 &\quad - g(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)A^{\mu 1}A^{\nu 2} = \\
 &= ig[(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)W^{\mu-}A^{\nu 3} - (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)W^{\mu+}A^{\nu 3} + \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)(W^{\mu+}W^{\nu-} - W^{\mu-}W^{\nu+})].
 \end{aligned}
 \tag{21.91}$$

The figure shows six Feynman diagrams arranged in a 3x2 grid. Each diagram shows an incoming electron line (left) and an outgoing scalar line (right) connected by a wavy boson line. The diagrams are labeled as follows:

- Top-left: Electron  $e_L^-$  and scalar  $\phi^+$  with a photon  $\gamma$  exchange. Rule:  $= -ie\gamma^\mu$ .
- Top-right: Electron  $e_L^-$  and scalar  $\phi^+$  with a  $Z^0$  exchange. Rule:  $= \frac{ie\gamma^\mu}{\cos\theta_w \sin\theta_w} \left(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_w\right)$ .
- Middle-left: Electron  $e_R^-$  and scalar  $\phi^+$  with a photon  $\gamma$  exchange. Rule:  $= -ie\gamma^\mu$ .
- Middle-right: Electron  $e_R^-$  and scalar  $\phi^+$  with a  $Z^0$  exchange. Rule:  $= \frac{ie\gamma^\mu}{\cos\theta_w \sin\theta_w} (\sin^2\theta_w)$ .
- Bottom-left: Electron  $e_L^-$  and scalar  $\phi^+$  with a photon  $\gamma$  exchange, where the scalar has momentum  $p$  and  $p'$ . Rule:  $= ie(p+p')^\mu$ .
- Bottom-right: Electron  $e_L^-$  and scalar  $\phi^+$  with a  $Z^0$  exchange, where the scalar has momentum  $p$  and  $p'$ . Rule:  $= \frac{ie(p+p')^\mu}{\cos\theta_w \sin\theta_w} \left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_w\right)$ .

Рис. 21.8. Правила Фейнмана калибровочной теории слабого взаимодействия для констант взаимодействия электронов и скаляров с фотонами и  $Z$ -бозонами.

Наконец, подставляя  $A_\mu^3 = \cos\theta_w Z_\mu + \sin\theta_w A_\mu$  и  $g = e/\sin\theta_w$ , находим правила Фейнмана, приведенные на рис. 21.9.

The figure shows two Feynman diagrams for three-point vertices. Each diagram shows two incoming vector boson lines (left) and one outgoing scalar line (right). The diagrams are labeled as follows:

- Top:  $W^-$  and  $W^+$  with a photon  $\gamma$  exchange. Rule:  $= ie[g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\nu\lambda}(-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu}(q + k_+)^\nu]$ .
- Bottom:  $W^-$  and  $W^+$  with a  $Z^0$  exchange. Rule:  $= ie \cos\theta_w [g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\nu\lambda}(-q - k_-)^\mu] g^{\lambda\mu}(q + k_+)^\nu]$ .

Рис. 21.9. Правила Фейнмана калибровочной теории слабого взаимодействия для  $WW\gamma$  и  $WWZ$  вершин.

Перед изучением амплитуды для  $e^+e^-$ -аннигиляции в пару векторных бозонов сначала рассмотрим амплитуду рождения пары заряженных скаляров. Теорема эквивалентности предсказывает, что амплитуда рождения двух продольных  $W$ -бозонов должна стремиться при высоких энергиях к этой амплитуде. Собирая вершины из рис. 21.8, находим амплитуду аннигиляции электронов любой спиральности в скаляры через виртуальные фотоны

$$i\mathcal{M}(e e \rightarrow \gamma^* \rightarrow \phi^+ \phi^-) = ie^2 \bar{v} \gamma_\mu u \frac{1}{q^2} (k_+ - k_-)^\mu, \quad (21.92)$$

где  $k_+$ ,  $k_-$  — импульсы скаляров и  $q = k_+ + k_-$ . Соответствующая амплитуда для аннигиляции через виртуальный  $Z^0$  зависит от спиральностей  $e^+e^-$ . Прибавляя эти вклады к предыдущему выражению, находим

$$i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \phi^+ \phi^-) = ie^2 \bar{v}_L \gamma_\mu u_L \times \left[ \frac{1}{q^2} + \frac{(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_w)^2}{(\sin^2\theta_w \cos^2\theta_w)(q^2 - m_Z^2)} \right] (k_+ - k_-)^\mu, \quad (21.93)$$

$$i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \phi^+ \phi^-) = ie^2 \bar{v}_R \gamma_\mu u_R \left[ \frac{1}{q^2} - \frac{(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_w)}{\cos^2\theta_w} \frac{1}{q^2 - m_Z^2} \right] (k_+ - k_-)^\mu.$$

Заметим, что в пределе высоких энергий амплитуда аннигиляции правых электронов переходит в

$$i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \phi^+ \phi^-) \rightarrow i \frac{e^2}{2 \cos^2 \theta_w} \bar{v}_R \gamma_\mu u_R \frac{1}{q^2} (k_+ - k_-)^\mu, \quad (21.94)$$

которая совпадает с амплитудой взаимодействия  $e_R^-$  с  $Y = -1$  с  $\phi^+$  с  $Y = 1/2$  через  $U(1)$  калибровочный бозон  $B_\mu$  с константой взаимодействия  $g' = e/\cos \theta_w$ . Это выражение отражает тот факт, что  $e_R^-$  не взаимодействует напрямую с  $SU(2)$  калибровочными бозонами. Аналогично, амплитуда для левых электронов стремится в пределе высоких энергий к

$$i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \phi^+ \phi^-) \rightarrow ie^2 \left[ \frac{1}{4 \cos^2 \theta_w} + \frac{1}{4 \sin^2 \theta_w} \right] \bar{v}_L \gamma_\mu u_L \frac{1}{q^2} (k_+ - k_-)^\mu. \quad (21.95)$$

Это выражение имеет структуру когерентной суммы амплитуд обмена  $B_\mu$  и  $A_\mu^3$ . Такая структура показывает, что симметрия калибровочной спонтанно нарушенной теории восстанавливается в пределе высоких энергий точно таким же образом, как и в гл. 11.

Теперь сравним эти результаты с прямым вычислением амплитуды рождения  $W^+ W^-$  в калибровочной теории слабого взаимодействия. Начнем со случая, когда вначале имеются  $e_R^-$ . Так как взаимодействие электрона с  $W^-$  является чисто левым, третья диаграмма рис. 21.7 в этом случае исчезает, и вычисление становится немножко проще. Первые две диаграммы рис. 21.7 имеют одинаковую структуру и их сумма равна

$$i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow W^+ W^-) = \bar{v}_R \gamma_\lambda u_R \left[ (-ie) \frac{-i}{q^2} (ie) + \frac{ie \sin \theta_w}{\cos \theta_w} \frac{-i}{q^2 - m_Z^2} \frac{ie \cos \theta_w}{\sin \theta_w} \right] \times \\ \times [g^{\mu\nu} (k_- - k_+)^\lambda + g^{\lambda\nu} (-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu} (k_+ + q)^\nu] \varepsilon_\mu^*(k_+) \varepsilon_\nu^*(k_-). \quad (21.96)$$

Это выражение справедливо в любой  $R_\xi$ -калибровке, потому что, если пренебречь массой электрона,

$$q^\lambda \bar{v}_R \gamma_\lambda u_R = 0. \quad (21.97)$$

Во второй строке (21.96) содержится упоминавшееся выше увеличение для продольных  $W$ -бозонов. Если аппроксимировать продольные векторы поляризации формулой (21.60) и опустить слагаемые, не растущие при  $s \rightarrow \infty$ , то эта строка дает

$$[g^{\mu\nu} (k_- - k_+)^\lambda + g^{\lambda\nu} (-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu} (k_+ + q)^\nu] \frac{k_{+\mu}}{m_W} \frac{k_{-\nu}}{m_W} = \\ = \frac{1}{m_W^2} [k_+ \cdot k_- (k_- - k_+)^\lambda - 2k_- \cdot k_+ k_-^\lambda + 2k_+ \cdot k_- k_+^\lambda] + \mathcal{O}(1) \cdot (k_- - k_+)^\lambda = \\ = \frac{s}{2m_W^2} (k_+ - k_-)^\lambda + \dots \quad (21.98)$$

С другой стороны, выражение в скобках в первой строке в (21.96) почти полностью сокращается до

$$-ie^2 \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - m_Z^2} \right) = +ie^2 \frac{m_Z^2}{q^2 (q^2 - m_Z^2)}.$$

Используя оба этих упрощения, получаем

$$i\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow W_L^+ W_L^-) = \bar{v}_R \gamma_\lambda u_R \left[ (ie^2) \frac{m_Z^2}{s^2} \right] \frac{s}{2m_W^2} (k_+ - k_-)^\lambda. \quad (21.99)$$

Подставляя соотношение  $m_W = m_Z \cos \theta_w$ , видим, что эта амплитуда идентична (21.94), как и требуется теоремой эквивалентности.

Для амплитуды с начальными  $e_L^-$  вычисление немного сложнее. Теперь все три диаграммы рис. 21.7 дают вклад и, так как последняя диаграмма имеет другую кинематическую структуру, не очень ясно, как диаграммы складываются. Далее мы продемонстрируем сокращение ведущих членов, нарушающих унитарность, и покажем, как члены следующего порядка по  $m_W^2/s$  собираются в правильную структуру. Но мы не будем учитывать точно все эти меньшие члены. Полное вычисление этих диаграмм является предметом задачи 21.2.

В случае начальных  $e_L^-$  первые две диаграммы рис. 21.7 дают следующее выражение:

$$= \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L \left[ (-ie) \frac{-i}{q^2} (ie) + \frac{ie(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w)}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \frac{-i}{q^2 - m_Z^2} \frac{ie \cos \theta_w}{\sin \theta_w} \right] \times \quad (21.100)$$

$$\times [g^{\mu\nu} (k_- - k_+)^\lambda + g^{\lambda\nu} (-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu} (k_+ + q)^\nu] \times$$

$$\times \varepsilon_\mu^*(k_+) \varepsilon_\nu^*(k_-),$$

которое отличается от (21.96) только константой взаимодействия электрона с виртуальным  $Z^0$ . Для продольных  $W$ -бозонов это выражение можно упростить, как это сделано в (21.96):

$$= \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L (ie^2) \left[ \frac{m_Z^2}{s(s-m_Z^2)} - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_w} \frac{1}{s-m_Z^2} \right] \times \quad (21.101)$$

$$\times \frac{s}{2m_W^2} (k_+ - k_-)^\lambda.$$

Второй член в скобках является потенциально опасным и должен быть сокращен диаграммой с  $t$ -канальным обменом нейтрино. Эта диаграмма дается выражением

$$= \left( \frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}_L \gamma^\mu \frac{i(\not{\ell} - \not{k}_-)}{(\ell - k_-)^2} \gamma^\nu u_L(\ell) \varepsilon_\mu^*(k_+) \varepsilon_\nu^*(k_-), \quad (21.102)$$


где  $\ell$  — импульс начального электрона. Аппроксимируя продольные векторы поляризации как раньше, получаем:

$$= -i \frac{g^2}{2} \bar{v}_L \frac{\not{k}_+}{m_W} \frac{(\not{\ell} - \not{k}_-)}{(\ell - k_-)^2} \frac{\not{k}_-}{m_W} u_L(\ell). \quad (21.103)$$

Теперь преобразуем это выражение как при доказательстве тождества Уорда. Используя то, что  $u_L(\ell)$  удовлетворяет уравнению Дирака,

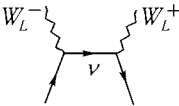
$$(\not{\ell} - \not{k}_-) \not{k}_- u_L(\ell) = -(\not{\ell} - \not{k}_-)^2 u_L(\ell) = -(\ell - k_-)^2 u_L(\ell), \quad (21.104)$$

выражение (21.103) можно свести к



$$= i \frac{g^2}{2} \bar{v}_L \frac{\not{k}_+}{m_W^2} u_L(\ell). \quad (21.105)$$

Наконец, используя (21.97), можно переписать это выражение в виде



$$= ie^2 \frac{1}{2 \sin^2 \theta_w} \frac{1}{2m_W^2} \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L(\ell) (k_+ - k_-)^\lambda. \quad (21.106)$$

Это слагаемое сокращает опасное высокоэнергетическое поведение (21.101). Но для того, чтобы увидеть, что сумма диаграмм имеет правильный предел при высоких энергиях, использованные приближения не совсем адекватны. В частности, поправка к соотношению (21.60) для векторов поляризации имеет порядок  $m_W^2/s$  и должна тоже учитываться. Когда все поправки порядка  $m_W^2/s$  учтены, то оказывается, что сумма  $s$ -канальных диаграмм (21.101) не изменяется, тогда как выражение для нейтринной обменной диаграммы (21.106) умножается на  $(1 + 2m_W^2/s)$ . Тогда сумма всех трех диаграмм дает

$$i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow W_L^+ W_L^-) = ie^2 \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L(k_+ - k_-)^\lambda \frac{1}{s} \times \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \theta_w} - \frac{1}{4 \cos^2 \theta_w \sin^2 \theta_w} + \frac{1}{2 \sin^2 \theta_w} \right]. \quad (21.107)$$

Среднее слагаемое в скобках сокращает половину каждого из двух других слагаемых, давая выражение, которое в точности совпадает с (21.95).

Вычисления задачи 21.2 дают для полной амплитуды аннигиляции:

$$i\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow W_L^+ W_L^-) = ie^2 \bar{v}_L \gamma_\lambda u_L(k_+ - k_-)^\lambda \frac{1}{s} \times \left[ \frac{1}{2 \sin^2 \theta_w} \left\{ -\frac{s}{s - m_Z^2} \left( \frac{m_Z^2}{2m_W^2} + 1 \right) + \frac{2}{\beta^2} - \frac{8m_W^2}{s\beta^2(1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta)} \right\} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} \left( \frac{\frac{1}{2}s + m_W^2}{s - m_Z^2} \right) \right], \quad (21.108)$$

где  $\beta = (1 - 4m_W^2/s)^{1/2}$  — скорость  $W$ -бозона. Кстати, высокоэнергетический предел этого выражения воспроизводит (21.107). Соответствующие вклады в дифференциальное сечение рассеяния  $e_L^- e_R^+ \rightarrow W^+ W^-$  и другие возможные спиральные состояния изображены на рис. 21.10.

Эти сокращения между диаграммами рис. 21.7 происходят благодаря тождествам Уорда калибровочной теории. Это означает, что они происходят только потому, что теория имеет исходную локальную калибровочную инвариантность. В начале нашего

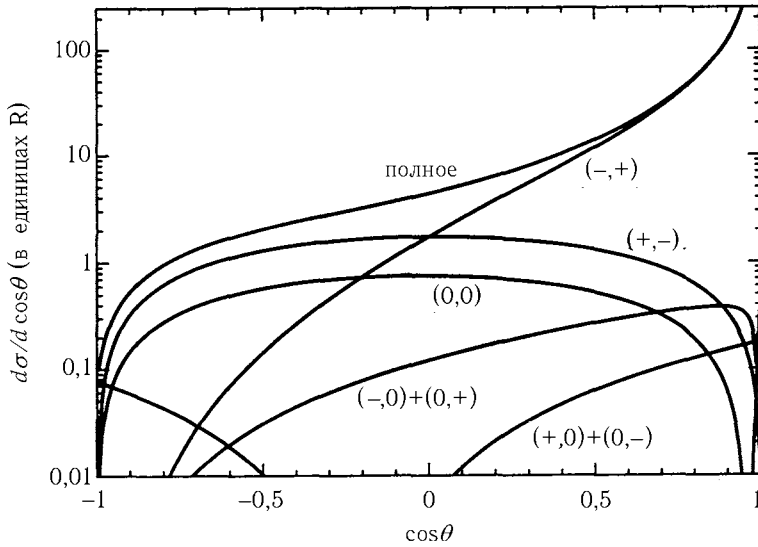


Рис. 21.10. Дифференциальное сечение рассеяния для  $e_L^- e_R^+ \rightarrow W^+ W^-$ , в единицах  $R$  (уравнение (5.15)), при  $E_{\text{ц.п.}} = 1000$  ГэВ. Различные кривые показывают вклады в полное сечение от состояний с различной спиральностью  $W^-$  и  $W^+$ ; они обозначены  $(h_-, h_+)$ , где каждая спиральность принимает значение  $(+, -, 0)$ . Вклады состояний  $(+, +)$  и  $(-, -)$  настолько малы, что невидимы. Отметим, что оба  $W_L^-$  и  $W_L^+$  сечения, обозначенные как  $(0, 0)$  и  $(+, -)$ , становятся пропорциональными  $\sin^2 \theta$  при очень больших энергиях.

обсуждения, мы говорили, что эти сокращения необходимы для того, чтобы теория самосогласованным образом оставалась слабо взаимодействующей до произвольно больших энергий. В разделе 20.1 было показано, что можно генерировать массы векторных бозонов спонтанным нарушением локальной калибровочной инвариантности. Теперь мы показали обратное: единственные теории массивных векторных бозонов, которые имеют правильное поведение при высоких энергиях, это те, которые возникают из спонтанно нарушенных калибровочных теорий\*.

### 21.3. Однопетлевые поправки к калибровочной теории слабого взаимодействия

Конечной темой нашего изучения спонтанно нарушенных калибровочных теорий является вычисление однопетлевых поправок в калибровочной теории слабого взаимодействия. Как обсуждалось в разделе 20.2, древесные диаграммы дают большое число тонких предсказаний для констант взаимодействия  $Z^0$  и для сечений рассеяния реакций с нейтральными токами. Вообще, эти предсказания модифицируются эффектами однопетлевых диаграмм. В этом разделе мы изучим некоторые примеры таких однопетлевых поправок.

Как во всякой ренормируемой теории поля однопетлевые диаграммы электрослабой калибровочной теории имеют ультрафиолетовые расходимости. Эти расходимости могут быть поглощены в соответствующие изменения параметров теории. Эти изменения определяют набор контрчленов, которые, благодаря перенормируемости, обеспе-

\*Это утверждение подробно доказано в статье Cornwall, Levin and Tiktopoulos, которая цитировалась в начале этого раздела.

чивают конечность всех однопетлевых диаграмм теории. Те амплитуды, которые явно не перестраиваются при этих перенормировках, становятся предсказаниями теории.

В гл. 11 мы видели, что эта общая процедура дает особенно богатую информацию в случае теории со спонтанным нарушением симметрии. В таких теориях амплитуды частиц, принадлежащих одному мультиплету исходной симметрии, изменяются определенным образом. Но контрчлены теории должны подчиняться соотношениям симметрии. Поэтому, подгонка амплитуды для одной частицы ведет к определенным предсказаниям для других частиц, которые не связаны какой-либо явной симметрией.

### Теоретическая ориентация и одна специальная задача

В конце раздела 11.6 был предложен полезный подход к нахождению предсказаний в ренормируемых теориях со спонтанным нарушением симметрии. Было определено *естественное соотношение нулевого порядка*, которое, будучи соотношением между наблюдаемыми величинами теории, должно выполняться для всех значений параметров лагранжиана. Так как контрчлены качественно изменяют величину исходных параметров без добавления новых членов, то естественное соотношение нулевого порядка не должно корректироваться этими контрчленами. Следовательно, если теория перенормируемая, однопетлевые поправки к этому соотношению будут конечны и являются определенными проявлениями квантовой структуры теории поля. Хотя эта идея первоначально обсуждалась для теорий со спонтанно нарушенной глобальной симметрией, она применима также к теориям со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией. В этом разделе мы применим эту идею для нахождения конечных однопетлевых поправок к соотношениям калибровочной теории слабого взаимодействия.

Легко найти естественные соотношения нулевого порядка в электрослабой теории. Предсказания в главном порядке, приведенные в разделе 20.2, содержат относительно малое число свободных параметров. Многие из этих предсказаний сделаны для энергий, при которых массами кварков и лептонов можно пренебречь; тогда они зависят только от констант взаимодействия  $g$  и  $g'$  и вакуумного среднего  $v$ , которое устанавливает масштаб спонтанного нарушения симметрии. Остальные ингредиенты теории слабого взаимодействия выражаются через эти параметры; например,

$$\begin{aligned} m_W &= g \frac{v}{2}, & m_Z &= \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{v}{2}, \\ e &= \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, & G_F &= \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{1}{2v^2}. \end{aligned} \quad (21.109)$$

Даже в этом наборе величин имеется четыре соотношения, зависящие от трех исходных параметров, поэтому имеется одно соотношение между наблюдаемыми величинами, которое не зависит от параметров лагранжиана.

Так как многие предсказания калибровочной теории слабого взаимодействия определяются параметром  $\sin^2 \theta_w$ , то полезно определить  $\sin^2 \theta_w$  через наблюдаемые, а затем использовать это определение как базис для построения естественных соотношений. В нашем обсуждении точных проверок электрослабой теории в разделе 20.2 было использовано определение

$$s_W^2 \equiv 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \quad (21.110)$$

как стандарт для сравнения различных экспериментов. Но так как три наиболее точно измеренные наблюдаемые в слабом взаимодействии — это  $\alpha$ ,  $G_F$  и  $m_Z$ , то полезно

вести другое физическое определение  $\sin^2 \theta_w$ , основанное на этих трех величинах. Определим  $\theta_0$  так, что

$$\sin 2\theta_0 \equiv \left( \frac{4\pi\alpha_*}{\sqrt{2}G_F m_Z^2} \right)^{1/2}, \quad (21.111)$$

где  $\alpha_*$  — бегущая константа взаимодействия КЭД, вычисленная на масштабе  $Q^2 = m_Z^2$ . Ренормализационная группа утверждает, что это значение электрического заряда входит в точные электрослабые предсказания, и это наблюдение подтверждается суммированием диаграмм радиационных поправок, содержащих легкие кварки и лептоны. Лучшие известные значения величин в (21.111) дают

$$s_0^2 \equiv \sin^2 \theta_0 = 0.2307 \pm 0.0005. \quad (21.112)$$

Следовательно, эта величина обеспечивает очень высокий стандарт точности.

Если уравнение (21.111) взято для определения точного значения  $\sin^2 \theta_w$ , то уравнения раздела 20.2, которые связывают  $\sin^2 \theta_w$  с другими наблюдаемыми, становятся естественными соотношениями нулевого порядка. Например, древесные уравнения

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2 \theta_w, \quad A_{LR}^e = \frac{\left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w\right)^2 - (\sin^2 \theta_w)^2}{\left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w\right)^2 + (\sin^2 \theta_w)^2} \quad (21.113)$$

являются естественными соотношениями, связывающими четыре наблюдаемых слабых взаимодействий. Поправки к этим соотношениям будут хорошо определенными предсказаниями теории.

В принципе, теперь можно вычислить все однопетлевые диаграммы, которые дают поправки к параметрам  $m_W$ ,  $m_Z$ ,  $G_F$ ,  $\alpha$  и  $A_{LR}^e$ . Но это очень сложное занятие, требующее развитого технического аппарата\*. В этом разделе мы сфокусируемся на радиационных поправках одного простого происхождения, которые могут быть рассмотрены независимо. Кроме вопроса об аномалиях, электрослабая теория не ограничивает число поколений кварков или лептонов. Поэтому имеет смысл найти однопетлевые поправки, связанные с одним кварковым или лептонным дублетом. Для определенности рассмотрим эффекты дублета  $(t, b)$ -кварков.

Фокусируясь на радиационных поправках, связанных с тяжелыми кварками, мы существенно упрощаем стоящую перед нами вычислительную задачу. Различные наблюдаемые калибровочной теории слабых взаимодействий извлекаются из измерений амплитуд рассеяния с участием легких фермионов, лептонов или кварков, в начальном и конечном состояниях. Например,  $G_F$  находится из скорости низкоэнергетических процессов слабого взаимодействия, в качестве которых обычно выбирается скорость распада мюона:  $\mu \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ . Для любого такого процесса имеются однопетлевые поправки разного вида, как это показано на рис. 21.11. В дополнение к поправкам к пропагатору векторного бозона имеются вершинные поправки, ящичные диаграммы и диаграммы с излучением реальных фотонов. В общем, вклады различных классов диаграмм не являются калибровочно-инвариантными, наоборот, калибровочная инвариантность появляется в результате сокращения между классами диаграмм, изображенных на рис. 21.11(b), (c) и (d). Но, так как тяжелые кварки не взаимодействуют

\* Детальное теоретическое обсуждение однопетлевых поправок к электрослабой теории можно найти в W. Hollik, *Fortscr. d. Physik* **38**, 165 (1990).



прямо с легкими лептонами, дублет  $(t, b)$  дает вклад только в одну диаграмму, изображенную на рис. 21.11(f), которая должна быть калибровочно-инвариантной сама по себе. Такой же вывод применим к  $(t, b)$  поправке в другие лептонные слабозаимодействующие процессы. Если проигнорировать ККМ углы, которые смешивают  $t$  и  $b$  с другими сортами, этот вывод распространяется также на все слабозаимодействующие процессы с участием легких кварков.

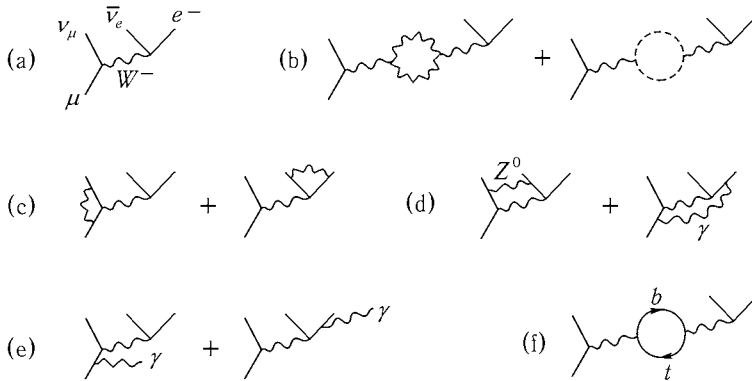


Рис. 21.11. Примеры радиационных поправок к  $\mu$ -распаду в калибровочной теории слабого взаимодействия: (a) диаграмма низшего порядка; (b) поправки к пропагатору; (c) вершинные диаграммы; (d) ящичные диаграммы; (e) поправки с реальными фотонами; (f) вклад  $(t, b)$  дублета.

Аналогичная ситуация имеет место с другими частицами, например с частицами из сектора Хиггса. Константа взаимодействия частиц из сектора Хиггса с легкими кварками или лептонами пропорциональна массе фермиона, которой часто можно пренебречь. Поэтому наиболее важными вкладами частиц из сектора Хиггса являются поправки к пропагатору. Случай, когда спонтанное нарушение симметрии производится одним скалярным полем  $\phi$ , наиболее прост для анализа. Он проведен в задаче 21.4. Петлевые поправки от частиц, которые не взаимодействуют напрямую с внешними фермионами, часто называются *косвенными*, потому что они входят в низкоэнергетические слабые взаимодействия только неявно.

**Влияние поправок от тяжелых кварков**

Наша задача — нахождение поправок к соотношениям (21.113), связанных с  $(t, b)$ -дублетом. Эти два соотношения зависят от пяти наблюдаемых величин —  $m_Z, m_W, A_{LR}^e, \alpha$  и  $G_F$  — с двумя последними параметрами, входящими через  $\theta_w$  и уравнение (21.111). Мы выразим эти пять величин как функции затравочных параметров  $g, g'$  и  $v$  с поправками, пропорциональными комбинациям  $t$  и  $b$  вакуумных поляризационных диаграмм. Члены нулевого порядка сокращаются при вычислении поправок к соотношениям (21.113).

Нужные петлевые амплитуды изображены на рис. 21.12. Введем для удобства вычислений однородные обозначения для вакуумных поляризационных амплитуд. Обозначим вакуумную поляризационную амплитуду, содержащую калибровочные бозоны  $I$  и  $J$ , как

$$\overset{\mu}{I} \text{---} \text{loop} \text{---} \overset{\nu}{J} = i\Pi_{IJ}^{\mu\nu}(q), \tag{21.114}$$

где  $I$  и  $J$  могут быть  $\gamma$ ,  $W$  или  $Z$ . Для массивных калибровочных бозонов вакуумные поляризационные амплитуды не обязаны быть поперечными и  $\Pi_{IJ}^{\mu\nu}(q)$  не обязано зануляться при  $q^2 = 0$ . Поэтому мы изменим обозначение по сравнению с КЭД и напомним разложение  $\Pi_{IJ}^{\mu\nu}(q)$  по тензорным структурам в следующем виде

$$\Pi_{IJ}^{\mu\nu}(q) = \Pi_{IJ}(q^2)g^{\mu\nu} - \Delta(q^2)q^\mu q^\nu. \quad (21.115)$$

Во всех последующих примерах факторы  $q^\mu$  будут сворачиваться с токами легких лептонов, давая нуль как в уравнении (21.97). Следовательно, форм-фактор  $\Delta(q^2)$  выпадет из наших вычислений. Предыдущий результат о занулении  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  при  $q^2 = 0$  в КЭД в новом формализме проявляется как набор ограничений

$$\Pi_{\gamma\gamma}(0) = \Pi_{\gamma Z}(0) = 0. \quad (21.116)$$

Для других амплитуд знаки выбраны так, чтобы положительное значение  $\Pi_{IJ}(m^2)$  давало положительный сдвиг массы калибровочного бозона. Определим также

$$\Pi'_{\gamma\gamma}(0) = \left. \frac{d\Pi_{\gamma\gamma}}{dq^2} \right|_{q^2=0}; \quad (21.117)$$

это величина, которая была названа  $\Pi(0)$  в (7.73).

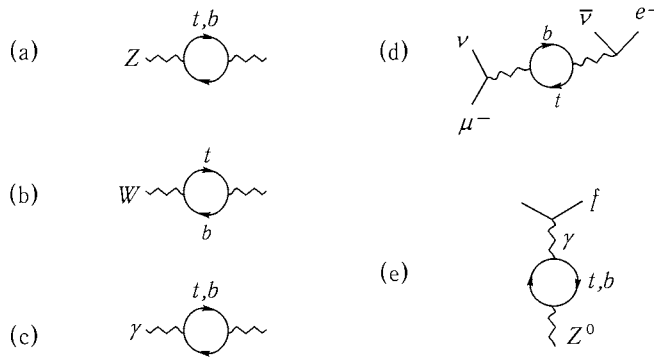


Рис. 21.12. Однопетлевые поправки от  $t$  и  $b$  кварков в наблюдаемые величины теории слабых взаимодействий: (a)  $m_Z$ ; (b)  $m_W$ ; (c)  $\alpha$ ; (d)  $G_F$ ; (e)  $A_{LR}^e$ .

Теперь используем эти обозначения для записи петлевых поправок к каждой из пяти наблюдаемых. Первые две диаграммы на рис. 21.12 — это просто массовые поправки, поэтому

$$m_Z^2 = (g^2 + g'^2) \frac{v^2}{4} + \Pi_{ZZ}(m_Z^2), \quad (21.118)$$

$$m_W^2 = g^2 \frac{v^2}{4} + \Pi_{WW}(m_W^2).$$

Отметим, что обе амплитуды поляризации вакуума вычислены в полюсах соответствующих пропагаторов. Для вычисления сдвига  $\alpha$ , вызванного однопетлевыми поправками, рассмотрим влияние рис. 21.12(с) на низкоэнергетический кулоновский потенциал. Значения пропагатора в главном приближении и однопетлевой поправки, складываясь,

дают множители

$$-\frac{ie^2}{q^2} \left(1 + i\Pi_{\gamma\gamma}(q^2) \cdot \frac{-i}{q^2}\right). \quad (21.119)$$

Здесь  $e^2$  выражается через затравочные переменные, как и в (21.109). Поэтому наблюдаемое значение  $\alpha$  в пределе  $q^2 \rightarrow 0$  модифицируется в соответствии с соотношением

$$4\pi\alpha = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} (1 + \Pi'_{\gamma\gamma}(0)). \quad (21.120)$$

Аналогично, диаграммы рис. 21.12(d) дают модифицированную величину константы слабого 4-фермионного процесса, ведущего к  $\mu$ -распаду. Сумма ведущей и однопетлевой диаграмм дает

$$\frac{g^2}{q^2 - m_W^2} \left(1 + i\Pi_{WW}(q^2) \frac{-i}{q^2 - m_W^2}\right). \quad (21.121)$$

Тогда эффективная константа в вершине слабого взаимодействия при  $q^2 = 0$  сдвигается на величину

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2} \left(1 - \frac{\Pi_{WW}(0)}{m_W^2}\right). \quad (21.122)$$

Отметим, что в приближении, сохраняющем только косвенные поправки, константа каждой низкоэнергетической амплитуды слабого взаимодействия изменяется на один и тот же фактор.

Наконец, асимметрия поляризации  $A_{LR}^e$  корректируется  $(t, b)$ -петлевой диаграммой в соответствии с рис. 21.12(e). Аналогичная диаграмма с промежуточным  $Z^0$  дает  $Z^0$ -пропагатор и не влияет на форму вершины. В нулевом порядке константа взаимодействия  $Z^0$  с любым левым или правым легким фермионом дается, согласно (20.71), выражением

$$\sqrt{g^2 + g'^2} \left(T^3 - \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} Q\right). \quad (21.123)$$

Коэффициент перед  $Q$  — это затравочное значение  $\sin^2 \theta_w$ . Петлевая диаграмма рис. 21.12(e) добавляет к этому следующий вклад:

$$i\Pi_{Z\gamma}(q^2) \frac{-i}{q^2} \cdot (ieQ). \quad (21.124)$$

Для обсуждения асимметрий в точке  $Z^0$ -резонанса положим  $q^2 = m_Z^2$ . Член (21.124) складывается с частью (21.123), пропорциональной  $Q$ , поэтому он сдвигает затравочное значение  $\sin^2 \theta_w$ . Если учесть эту поправку, то константа взаимодействия  $Z^0$  принимает следующий вид:

$$\sqrt{g^2 + g'^2} (T^3 - s_*^2 Q), \quad (21.125)$$

где

$$s_*^2 = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} - \frac{e}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{\Pi_{\gamma Z}(m_Z^2)}{m_Z^2}. \quad (21.126)$$

Асимметрии в точке  $Z^0$ -резонанса, которые обсуждались в разделе 20.2, вычислялись как отношения этих констант. Следовательно, для того, чтобы учесть фоновые радиационные поправки к  $A_{LR}^f$  от всех легких фермионов сорта  $f$ , нужно подставить в формулу (20.96)  $s_*^2$  вместо нулевого порядка  $\sin^2 \theta_w$ .

Таким образом, можно сказать, что  $s_*^2$  дает дополнительный способ определения  $\sin^2 \theta_w$  из наблюдаемых величин по сравнению с определениями  $s_W^2$  и  $s_0^2$ , данными соответственно в (21.110) и в (21.111). Строго говоря, значение  $\sin^2 \theta_w$ , определяемое асимметриями в точке  $Z^0$ , зависит от квантовых чисел кварков или лептонов через вершинные поправки, которые не были учтены в проведенном анализе. Но эти, зависящие от сорта, поправки малы и могут быть систематически выделены для того, чтобы определить универсальное  $s_*^2$ , которое определяет асимметрии слабых взаимодействий всех фермионных сортов\*.

Все три определения  $\sin^2 \theta_w$  совпадают в нулевом порядке, но получают разные радиационные поправки. Если учесть только косвенные поправки, легко получить компактные формулы для этих трех величин. Из (21.126) имеем

$$s_*^2 = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} - \sin \theta_w \cos \theta_w \frac{\Pi_{\gamma Z}}{m_Z^2}. \quad (21.127)$$

В множителе перед однопетлевой поправкой можно пренебречь различием между затравочным и перенормированным значениями  $\sin^2 \theta_w$ . Аналогичное выражение можно получить для  $s_W^2$ , беря отношение двух формул в (21.118):

$$s_W^2 = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} - \frac{1}{m_Z^2} \left( \Pi_{WW}(m_W^2) - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \Pi_{ZZ}(m_Z^2) \right). \quad (21.128)$$

Наконец, можно оценить косвенные поправки к величине  $\sin^2 \theta_0$ , определенной выражением (21.111). Кратчайший способ это сделать — выписать значение  $\delta\theta_0$  для разности между точным и затравочным значением  $\theta_0$ , а затем разложить (21.111):

$$2 \cos 2\theta_0 \delta\theta_0 = \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \left[ \frac{\delta\alpha}{\alpha} - \frac{\delta G_F}{G_F} - \frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} \right]. \quad (21.129)$$

Сдвиги  $\alpha$ ,  $G_F$  и  $m_Z^2$  можно найти из (21.120), (21.122) и (21.118). Тогда можно восстановить

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} + 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \delta\theta_0. \quad (21.130)$$

Собирая все слагаемые и вычисляя коэффициенты перед диаграммами поляризации вакуума в нулевом порядке, получаем

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_0 = & \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} + \\ & + \frac{\sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w}{\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w} \left[ \Pi'_{\gamma\gamma}(0) + \frac{1}{m_W^2} \Pi_{WW}(0) - \frac{1}{m_Z^2} \Pi_{ZZ}(m_Z^2) \right]. \end{aligned} \quad (21.131)$$

\*Это хорошо объяснено в работе D. Kennedy and B. W. Lynn, *Nucl. Phys.* **B322**, 1 (1989).

Нетрудно установить, что каждое из уравнений (21.127), (21.128) и (21.131) содержит ультрафиолетовые расходимости. Однако если калибровочная теория слабого взаимодействия перенормируема, эти расходимости должны сокращаться при вычислении поправок к любому естественному соотношению нулевого порядка. В нашем случае перенормируемость означает, что различные определения  $\sin^2 \theta_w$  должны отличаться только конечными выражениями.

Сейчас мы уже почти готовы к явной проверке этого предсказания. Структуру ультрафиолетовых расходимостей в наших соотношениях для различных величин  $\sin^2 \theta_w$  можно упростить, переобозначая вакуумные поляризационные амплитуды таким образом, чтобы сделать более явными те квантовые числа, с которыми взаимодействуют калибровочные бозоны. Из уравнения (20.71) следует, что  $Z$ -бозон взаимодействует с комбинацией  $SU(2)$  и электромагнитных квантовых чисел ( $T^3 - \sin^2 \theta_w Q$ ). Аналогично,  $W$ -бозоны взаимодействуют с  $T^\pm$  или, эквивалентно, с  $T^1, T^2$ . Удобно разбить вакуумные поляризационные амплитуды на члены, которые зависят от этих специальных квантовых чисел. Мы также выделим константы взаимодействия, указанные в (20.71). Итак, заменяем

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma\gamma} &= e^2 \Pi_{QQ}, \\ \Pi_{\gamma Z} &= \left( \frac{e^2}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \right) [\Pi_{3Q} - \sin^2 \theta_w \Pi_{QQ}], \\ \Pi_{ZZ} &= \left( \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \right)^2 [\Pi_{33} - 2 \sin^2 \theta_w \Pi_{3Q} + \sin^4 \theta_w \Pi_{QQ}], \\ \Pi_{WW} &= \left( \frac{e}{\sin \theta_w} \right)^2 \Pi_{11}, \end{aligned} \quad (21.132)$$

где  $Q$  означает электрический заряд, а 1, 2, 3 означают компоненты группы слабых взаимодействий  $SU(2)$ .

Амплитуда поляризации вакуума всегда может рассматриваться как среднее от двух токов. С этой точки зрения, величины в правой стороне (21.132) — средние значения токов с определенными квантовыми числами. Например,  $\Pi_{33}$  — среднее двух  $SU(2)$  токов  $J^{\mu 3}$ . При действии на стандартные фермионы  $J_a^\mu$  ведет себя как левый ток, а  $J_Q^\mu$  — как векторный ток.

Ультрафиолетовые расходимости в корреляторе токов в (21.132) имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{33} &\sim (A + Bq^2) \ln \Lambda^2, \\ \Pi_{11} &\sim (A + Bq^2) \ln \Lambda^2, \\ \Pi_{3Q} &\sim (Bq^2) \ln \Lambda^2, \\ \Pi_{QQ} &\sim (Cq^2) \ln \Lambda^2. \end{aligned} \quad (21.133)$$

Это будет показано позднее в этом разделе. Но эту структуру можно понять из следующих качественных аргументов. Так как симметрия теории должна восстанавливаться при больших импульсах, амплитуды  $\Pi_{33}$  и  $\Pi_{11}$ , которые отличаются только их ориентацией в изотопическом пространстве, должны иметь одинаковые ультрафиолетовые расходимости. Расходимость в наклоне  $\Pi_{3Q}$  должна быть связана с расходимостью в наклоне  $\Pi_{33}$  потому, что  $Q = T^3 + Y$  и  $\Pi_{3Y}$  асимптотически незначительно, так как  $\text{tr}[T^3 Y] = 0$ . Мы уже отмечали в уравнении (21.116), что  $\Pi_{3Q}$  и  $\Pi_{QQ}$  исчезают при  $q^2 = 0$ ; следовательно, они не имеют независимых от  $q^2$  расходимостей.

Теперь перепишем два естественных соотношения нулевого порядка в (21.113) в таком виде, что к ним можно применить (21.133). Для этого возьмем разности выраже-

ний (21.127), (21.128) и (21.131) и получим:

$$s_*^2 - \sin^2 \theta_0 = \frac{\sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w}{\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w} \left\{ \frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2} - \frac{\Pi_{WW}(0)}{m_W^2} - \Pi'_{\gamma\gamma}(0) - \frac{\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w}{\sin \theta_w \cos \theta_w} \frac{\Pi_{\gamma Z}(m_Z^2)}{m_Z^2} \right\}, \quad (21.134)$$

$$s_W^2 - s_*^2 = -\frac{\Pi_{WW}(m_W^2)}{m_Z^2} + \frac{m_W^2}{m_Z^2} \frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2} + \sin \theta_w \cos \theta_w \frac{\Pi_{\gamma Z}(m_Z^2)}{m_Z^2}.$$

Подставляя (21.132) и используя соотношение  $m_W = m_Z \cos \theta_w$  в коэффициентах уже однопетлевых членов, находим после некоторых алгебраических вычислений

$$s_*^2 - \sin^2 \theta_0 = \frac{e^2}{(\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w) m_Z^2} \left\{ [\Pi_{33}(m_Z^2) - \Pi_{11}(0) - \Pi_{3Q}(m_Z^2)] + \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w [\Pi_{QQ}(m_Z^2) - m_Z^2 \Pi'_{QQ}(0)] \right\}, \quad (21.135)$$

$$s_W^2 - s_*^2 = \frac{e^2}{\sin^2 \theta_w m_Z^2} [\Pi_{33}(m_Z^2) - \Pi_{11}(m_W^2) - \sin^2 \theta_w \Pi_{3Q}(m_Z^2)].$$

Заметим, что если ультрафиолетовые расходимости вакуумных поляризационных интегралов имеют структуру (21.133), тогда расходящаяся часть каждого выражения в скобках в (21.135) исчезает и слабое взаимодействие дает определенные, конечные предсказания для разностей  $s_*^2$ ,  $s_W^2$  и  $\sin^2 \theta_0$ .

### Вычисление амплитуд поляризации вакуума

Структуру расходимостей (21.133) можно установить явным вычислением вакуумных поляризационных диаграмм для  $t$  и  $b$  кварков. Но вместо того, чтобы вычислять их по отдельности, удобнее вычислить раз и навсегда наиболее общие фермионные амплитуды поляризации вакуума, получая амплитуды, нужные для предыдущего раздела, как их частные случаи.

Рассмотрим две амплитуды поляризации вакуума, изображенные на рис. 12.13. Эти диаграммы построены из двух фермионных пропагаторов с разными массами  $m_1$  и  $m_2$ , связанных левым и правым токами. Обозначим вакуумную амплитуду с двумя левыми токами  $\Pi_{LL}^{\mu\nu}(q)$ , а амплитуду с одним левым и одним правым токами —  $\Pi_{LR}^{\mu\nu}(q)$ . Так как поляризации вакуума зависят только от импульса и двух векторных индексов, они не могут содержать инвариант с  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Поэтому амплитуды с другими комбинациями токов связаны с рассмотренными соотношениями:

$$\Pi_{RR}^{\mu\nu}(q) = \Pi_{LL}^{\mu\nu}(q), \quad \Pi_{RL}^{\mu\nu}(q) = \Pi_{LR}^{\mu\nu}(q). \quad (21.136)$$

К тому же нет никаких трудностей в регуляризации этих диаграмм методом размерной регуляризации с антикоммутирующей  $\gamma^5$ , эти правила приведены в конце раздела 19.4. Поляризация вакуума векторного тока получается как

$$\Pi_{VL}^{\mu\nu}(q) = \Pi_{LL}^{\mu\nu}(q) + \Pi_{RL}^{\mu\nu}(q). \quad (21.137)$$

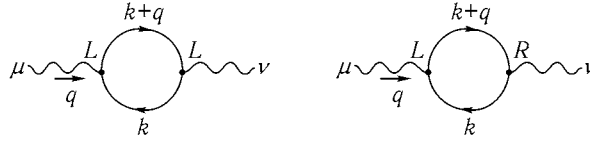


Рис. 21.13. Элементарные амплитуды поляризации вакуума фермионных токов.

Поляризация вакуума только левых токов дается выражением

$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\
 &\times \text{tr} \left[ (i\gamma^\mu) \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \frac{i(\not{k} + m_1)}{k^2 - m_1^2} (i\gamma^\nu) \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \frac{i(\not{k} + \not{q} + m_2)}{(k+q)^2 - m_2^2} \right] = \\
 &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{k} + \not{q}) \left( \frac{1+\gamma^5}{2} \right) \right] \frac{1}{(k^2 - m_1^2)((k+q)^2 - m_2^2)}.
 \end{aligned} \quad (21.138)$$

Множитель  $(-1)$  появляется вследствие того, что петля фермионная. Так как нет возможной тензорной структуры, антисимметричной по  $\mu$  и  $\nu$ , то теперь можно опустить член с  $\gamma^5$ . Дальнейшее вычисление происходит как в разделе 7.5. Преобразуем знаменатели, используя тождество

$$\frac{1}{(k^2 - m_1^2)((k+q)^2 - m_2^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (21.139)$$

где

$$\ell = k + xq, \quad \Delta = xm_2^2 + (1-x)m_1^2 - x(1-x)q^2. \quad (21.140)$$

Затем, интегрируя с размерной регуляризацией и следуя действиям, ведущим к (7.90), находим

$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= - \frac{4i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} [g^{\mu\nu} (x(1-x)q^2 - \\
 &- \frac{1}{2}(xm_2^2 + (1-x)m_1^2)) - x(1-x)q^\mu q^\nu].
 \end{aligned} \quad (21.141)$$

Отметим, что  $\Pi_{LL}^{\mu\nu}$  и ее первая производная по  $q^2$  логарифмически расходятся.

Амплитуда поляризации вакуума  $\Pi_{LR}^{\mu\nu}$  может быть получена аналогично. Из правил Фейнмана следует, что

$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} &= (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\
 &\times \text{tr} \left[ (i\gamma^\mu) \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \frac{i(\not{k} + m_1)}{k^2 - m_1^2} (i\gamma^\nu) \left( \frac{1+\gamma^5}{2} \right) \frac{i(\not{k} + \not{q} + m_2)}{(k+q)^2 - m_2^2} \right] = \\
 &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu m_1 \gamma^\nu m_2 \left( \frac{1+\gamma^5}{2} \right) \right] \frac{1}{(k^2 - m_1^2)((k+q)^2 - m_2^2)}.
 \end{aligned} \quad (21.142)$$

Отсюда, производя те же манипуляции, что и в предыдущем разделе, получаем

$$\text{Diagram} = -\frac{2i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} [g^{\mu\nu} m_1 m_2]. \quad (21.143)$$

Для проверки можно, используя (21.141), (21.143) и (21.136) и полагая  $m_1 = m_2 = m$ , восстановить поляризацию вакуума векторных токов в КЭД. Получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{VV}^{\mu\nu}(q) &= e^2 [\Pi_{LL}^{\mu\nu} + \Pi_{LR}^{\mu\nu} + \Pi_{RL}^{\mu\nu} + \Pi_{RR}^{\mu\nu}] = \\ &= \frac{-8ie^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} [x(1-x)q^2 g^{\mu\nu} - x(1-x)q^\mu q^\nu], \end{aligned} \quad (21.144)$$

где теперь  $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ . Это в точности совпадает с результатом из раздела 7.5.

Как было показано раньше в (21.115), только члены поляризационной амплитуды, пропорциональные  $g^{\mu\nu}$ , войдут в выражения для радиационных поправок за счет слабого взаимодействия. Поэтому вычисление базовых амплитуд поляризации вакуума можно завершить воспроизведением результатов для этого ведущего форм-фактора:

$$\begin{aligned} \Pi_{LL}(q^2) = \Pi_{RR}(q^2) &= -\frac{4}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} [x(1-x)q^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(xm_2^2 + (1-x)m_1^2)]; \quad (21.145) \\ \Pi_{LR}(q^2) = \Pi_{RL}(q^2) &= -\frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} [m_1 m_2]. \end{aligned}$$

Из этих членов можно собрать любую нужную поляризацию вакуума  $t$  и  $b$  кварков в калибровочной теории слабых взаимодействий. Для того, чтобы сделать использование этих выражений более легким, разложим величины (21.145) в пределе  $d \rightarrow 4$ . Если положить  $\varepsilon = 4 - d$ , приведенное выше подынтегральное выражение упрощается:

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \rightarrow \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln \Delta \right]. \quad (21.146)$$

Пусть

$$E = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(M^2), \quad (21.147)$$



где  $M$  — произвольный масштаб вычитания. Удобно определить

$$\begin{aligned} b_0(12X) &\equiv b_0(m_1^2, m_2^2, q_X^2) = \int_0^1 dx \ln(\Delta(m_1^2, m_2^2, q_X^2)/M^2), \\ b_1(12X) &\equiv b_1(m_1^2, m_2^2, q_X^2) = \int_0^1 dx x \ln(\Delta(m_1^2, m_2^2, q_X^2)/M^2), \\ b_2(12X) &\equiv b_2(m_1^2, m_2^2, q_X^2) = \int_0^1 dx x(1-x) \ln(\Delta(m_1^2, m_2^2, q_X^2)/M^2). \end{aligned} \quad (21.148)$$

Сокращенные обозначения будут полезны ниже. В (21.148)  $X$  означает масштаб импульса; нам понадобятся  $q_X = 0, m_W, m_Z$ . Отметим, что для равных масс

$$b_1(11X) = \frac{1}{2}b_0(11X). \quad (21.149)$$

С этими обозначениями

$$\begin{aligned} \Pi_{LL}(q_X^2) &= -\frac{4}{(4\pi)^2} \left[ \left( \frac{1}{6}q_X^2 - \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2) \right) E - q_X^2 b_2(12X) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(m_2^2 b_1(12X) + m_1^2 b_1(21X)) \right] \end{aligned} \quad (21.150)$$

и

$$\Pi_{LR}(q_X^2) = -\frac{2}{(4\pi)^2} [m_1 m_2 E - m_1 m_2 b_0(12X)]. \quad (21.151)$$

Теперь можно выразить все амплитуды поляризации вакуума, входящие в (21.135), через расходимости, пропорциональные  $E$ , и конечные части, пропорциональные  $b_i$ . Простейшим является среднее значение электромагнитных токов, которое в этих обозначениях дается следующей формулой

$$\begin{aligned} \Pi_{QQ}(q_X^2) &= -3 \cdot \frac{8}{(4\pi)^2} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{6}q_X^2 E - q_X^2 b_2(ttX) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{3} \right)^2 \left( \frac{1}{6}q_X^2 E - q_X^2 b_2(bbX) \right) \right]. \end{aligned} \quad (21.152)$$

Множитель 3 возникает из следа по цветам. Как и ожидалось из КЭД, (21.152) содержит расходимость только в члене, пропорциональном  $q_X^2$ . Расходящиеся части других амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{33}(q_X^2) &= -\frac{12}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6}q_X^2 - \frac{1}{4}(m_t^2 + m_b^2) \right] E + \dots, \\ \Pi_{11}(q_X^2) &= -\frac{12}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6}q_X^2 - \frac{1}{4}(m_t^2 + m_b^2) \right] E + \dots, \\ \Pi_{3Q}(q_X^2) &= -\frac{12}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6}q_X^2 \right] E + \dots. \end{aligned} \quad (21.153)$$

Обратим внимание, что эти расходимости удовлетворяют свойствам, перечисленным в (21.133), и поэтому предсказания калибровочной теории слабых взаимодействий, данные в (21.135), свободны от ультрафиолетовых расходимостей.

Эффекты  $m_t$ 

Используя введенные обозначения, можно записать конечные части соотношений (21.135) в компактной форме. Первое соотношение принимает вид

$$\begin{aligned}
 s_*^2 - \sin^2 \theta_0 = & \frac{3\alpha}{\pi(\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w)} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)b_2(ttZ) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)b_2(bbZ) - \right. \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{m_t^2}{m_Z^2} [b_1(ttZ) - b_1(bt0)] + \frac{m_b^2}{m_Z^2} [b_1(bbZ) - b_1(tb0)]\right) + \\
 & + 2 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w \left(\frac{4}{9} [b_2(ttZ) - b_2(tt0) - m_Z^2 b_2'(tt0)] + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{9} [b_2(bbZ) - b_2(bb0) - m_Z^2 b_2'(bb0)]\right) \right\}. \quad (21.154)
 \end{aligned}$$

Аналогично, второе соотношение становится равным

$$\begin{aligned}
 s_W^2 - s_*^2 = & \frac{3\alpha}{\pi \sin^2 \theta_w} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w\right)b_2(ttZ) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sin^2 \theta_w\right)b_2(bbZ) - \right. \\
 & - \frac{1}{4} \cos^2 \theta_w b_2(tbW) - \\
 & \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{m_t^2}{m_Z^2} [b_1(ttZ) - b_1(btW)] + \frac{m_b^2}{m_Z^2} [b_1(bbZ) - b_1(tbW)]\right) \right\}. \quad (21.155)
 \end{aligned}$$

Хотя сейчас уже можно вывести полные выражения для соотношений (21.154) и (21.155), мы ограничимся здесь нахождением наиболее важного члена в пределе, когда масса  $t$ -кварка становится большой. Отметим, что в каждом из этих выражений имеются члены с коэффициентами, пропорциональными  $m_t^2/m_Z^2$ . Их происхождение наиболее легко понять из простой комбинации амплитуд поляризации вакуума

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11}(0) - \Pi_{33}(0) = & \frac{12}{(4\pi)^2} \frac{1}{4} \left[ m_t^2 (b_1(tt0) - b_1(bt0)) + m_b^2 (b_1(bb0) - b_1(tb0)) \right] = \\
 = & \frac{3}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ x m_t^2 \ln \frac{m_t^2}{M^2} + (1-x) m_b^2 \ln \frac{m_b^2}{M^2} - \right. \\
 & \left. - (x m_t^2 + (1-x) m_b^2) \ln \frac{x m_t^2 + (1-x) m_b^2}{M^2} \right\} = \quad (21.156) \\
 = & -\frac{3}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ x m_t^2 \ln \frac{x m_t^2 + (1-x) m_b^2}{m_t^2} + \mathcal{O}(m_b^2) \right\} = \\
 = & \frac{3}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{4} m_t^2 + \mathcal{O}(m_b^2)
 \end{aligned}$$

для  $m_t \gg m_b$ . Если  $m_t$  также много больше, чем  $m_Z$ , тогда можно найти вклад, пропорциональный  $m_t^2/m_Z^2$ , в каждом соотношении (21.154), (21.155), заменяя аргумент  $q_X^2 = m_Z^2$  на  $q_X^2 = 0$ , используя (21.156) и игнорируя все другие вклады. Детальный анализ (21.154) и (21.155) может показать, что эта процедура определяет все ведущие

слагаемые в  $m_t$ . В результате

$$s_*^2 - \sin^2 \theta_0 = -\frac{3\alpha}{16\pi(\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w)} \frac{m_t^2}{m_Z^2} + \dots, \tag{21.157}$$

$$s_W^2 - s_*^2 = -\frac{3\alpha}{16\pi \sin^2 \theta_w} \frac{m_t^2}{m_Z^2} + \dots,$$

где опущенные слагаемые имеют порядок  $\alpha$  без какого-либо усиления.

Усиливающий фактор  $m_t^2/m_Z^2$  в точности совпадает с тем, который был найден при изучении распада топ-кварка в разделе 21.2. Это отражает тот факт, что некоторые электрослабые константы взаимодействия топ-кварка эффективно пропорциональны  $\lambda_t$ , константе взаимодействия топ-кварка с сектором Хиггса, а не просто константе слабого взаимодействия  $g$ .

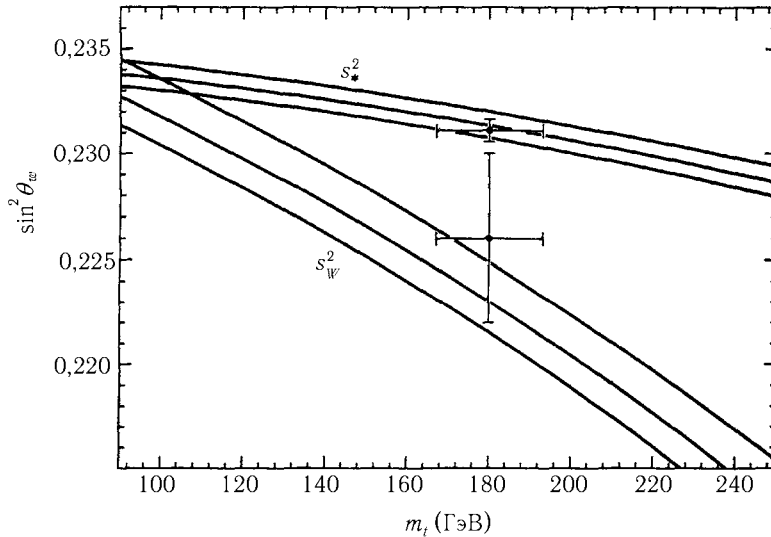


Рис. 21.14. Зависимость  $s_*^2$  и  $s_W^2$  от массы топ-кварка при фиксированных  $\alpha$ ,  $G_F$ ,  $m_Z$ . Три кривые в каждой группе соответствуют трем различным значениям массы хиггсовского бозона: 100, 300, 1000 ГэВ снизу вверх. Кривые сравниваются со значениями  $s_*^2$  и  $s_W^2$ , взятыми из статьи Langacker and Etler, цитированной в табл. 20.1, и CDF/D0 значением массы топ-кварка, приведенной в (21.159).

Результат численных оценок формул для  $s_*^2$  и  $s_W^2$  показан на рис. 21.14. Чтобы сравнить результаты этого раздела с экспериментом, мы включили, в дополнение к эффекту топ-кварка,  $m_t$ -независящие однопетлевые поправки от петель, содержащих  $W$  и  $Z$  бозоны и легкие кварки и лептоны. На рисунке сравниваются предсказания для значения  $s_*^2$ , полученные из измерения  $Z^0$ -поляризации и асимметрий вперед-назад, и значения  $s_W^2$ , полученного из измерения массы  $W$ -бозона.

Согласно рисунку, калибровочная теория слабых взаимодействий для согласия с экспериментом требует существования радиационной поправки к массе топ-кварка (или аналогичной радиационной поправки от какой-либо другой тяжелой частицы). Масса топ-кварка предсказывается равной приблизительно 170 ГэВ. Недавний анализ

всех данных о слабых взаимодействиях нейтральных токов дал следующее значение\*

$$m_t = 169 \pm 24 \text{ ГэВ.} \quad (21.158)$$

Как раз перед завершением этой книги, эксперименты CDF и D0 в лаборатории им. Ферми засвидетельствовали наблюдение рождения пар топ-кварков в протон-антипротонном рассеянии. Из кинематических подгонок к событиям, которые считаются происходящими с участием топ-кварков, эти эксперименты дают†

$$m_t = 180 \pm 13 \text{ ГэВ.} \quad (21.159)$$

Обнаружение топ-кварка как раз в той области, которая предсказывается точными электрослабыми измерениями, является весьма примечательным фактом. Можно только сделать вывод, что в области слабых взаимодействий, так же как и в областях электромагнитных, сильных и скалярных взаимодействий, которые были изучены ранее, флуктуации, предсказанные квантовой теорией поля, проявляются в явлениях природы.

## Задачи

**21.1. Вклады слабых взаимодействий в мюонный ( $g - 2$ )-фактор.** Модель слабых взаимодействий ГВС ведет к двум новым вкладам в аномальные магнитные моменты лептонов. Так как эти вклады пропорциональны  $G_F m_l^2$ , они являются очень малыми для электрона, но для мюона они, возможно, могут быть наблюдаемы. Оба вклада больше, чем вклад хиггсовского бозона, рассмотренный в задаче 6.3.

- (a) Рассмотрим сначала вклад в электромагнитную вершинную функцию мюона, связанный с петлевой диаграммой  $W$ -нейтрино. В  $R_\xi$ -калибровке эта диаграмма сопровождается диаграммами, в которых  $W$ -пропагаторы заменяются на пропагаторы голдстоуновских бозонов. Найти сумму этих диаграмм в калибровке Фейнмана – т Хофта и показать, что в пределе  $m_W \gg m_\mu$  они дают следующий вклад в магнитный момент мюона:

$$a_\mu(\nu) = \frac{G_F m_\mu^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \cdot \frac{10}{3}.$$

- (b) Повторить вычисления части (a) в общей  $R_\xi$ -калибровке. Показать явно, что результат части (a) не зависит от  $\xi$ .
- (c) Другой новый вклад дает петлевая диаграмма  $Z$ -мюона и соответствующая диаграмма с заменой  $Z$  на голдстоуновский бозон. Показать, что эти диаграммы дают вклад

$$a_\mu(Z) = -\frac{G_F m_\mu^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \cdot \left( \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w - \frac{16}{3} \sin^4 \theta_w \right).$$

\*P. Langacker and J. Erler, в *Обзор свойств частиц*, *Phys. Rev.* **D50**, 1304 (1994).

†F. Abe, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2626 (1995); S. Abachi, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2632 (1995).

### 21.2. Полный анализ $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ .

- (а) Используя векторы поляризации, найти амплитуды перехода  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  из начального состояния с левым и правым электронами в состояния с определенной спиральностью  $W^+$  и  $W^-$ . Проверить, что в случаях, когда оба  $W$ -бозона имеют продольную поляризацию, уравнение (21.99) дает правильный высокоэнергетический предел для правых электронов, а также проверить полное выражение для левых электронов. Показать, что в случаях, когда один  $W$  продольно поляризован, а второй поперечно поляризован, каждая диаграмма дает вклад в амплитуды, растущий как  $\sqrt{s}$ , но что полные амплитуды убывают как  $1/\sqrt{s}$ .
- (б) Показать, что вклады в  $e_L^- e_R^+ \rightarrow W^- W^+$ , найденные в части (а), воспроизводят рис. 21.10 и что дифференциальное сечение рассеяния  $e_R^- e_L^+ \rightarrow W^- W^+$  примерно в 30 раз меньше. Сколько качественных свойств рисунка Вы можете объяснить физически?

**21.3. Сечение рассеяния для  $d\bar{u} \rightarrow W^- \gamma$ .** Найти амплитуды  $d\bar{u} \rightarrow W^- \gamma$  для разных возможных случаев начальной и конечной спиральностей. Игнорируйте массы кварков. В этом приближении не равна нулю только амплитуда аннигиляции  $d_L \bar{u}_R$ . Покажите, что амплитуды рассеяния для всех комбинаций конечных спиральностей обращаются в ноль при  $\cos \theta = -1/3$ , где  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра масс. Найти дифференциальное сечение рассеяния как функцию  $\cos \theta$ .

### 21.4. Зависимость радиационных поправок от массы бозона Хиггса.

- (а) Рассмотрим вклады в слабые взаимодействия радиационных поправок, связанных с физическим хиггсовским бозоном  $h^0$  модели ГВС. Константы взаимодействия  $h^0$  обсуждались в конце раздела 20.2. Покажите, что если игнорировать члены, пропорциональные массам легких фермионов, то хиггсовский бозон дает вклад в однопетлевые поправки к процессам, рассмотренным в разделе 21.3, только через амплитуды поляризации вакуума. Отсюда следует, что вклады в амплитуды поляризации вакуума, которые зависят от массы хиггсовского бозона, являются калибровочно-инвариантными.
- (б) Нарисуйте вакуумные поляризационные диаграммы в калибровке Фейнмана–'т Хофта, содержащие хиггсовские бозоны, и найдите зависимость различных вакуумных поляризационных амплитуд от массы хиггсовского бозона  $m_h$ .
- (с) Покажите, что при  $m_h \gg m_W$  естественные соотношения, обсуждавшиеся в разделе 21.3, приобретают поправки

$$s_*^2 - s_0^2 = \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_w - \sin^2 \theta_w} \frac{(1 + 9 \sin^2 \theta_w)}{48\pi} \ln \frac{m_h^2}{m_W^2},$$

$$s_W^2 - s_*^2 = \alpha \frac{5}{24\pi} \ln \frac{m_h^2}{m_W^2}.$$

Влияние зависимости от  $m_h$  изображено на рис. 21.14 и включается как теоретическая неопределенность в предсказание (21.158). Более точные эксперименты могут позволить найти  $m_h$  из ее влияния на электрослабые радиационные поправки.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ПРОЕКТ

# РАСПАД ХИГГСОВСКОГО БОЗОНА

В конце раздела 20.2 мы обсудили тайну возникновения спонтанного нарушения симметрии в слабых взаимодействиях. Простейшим объяснением здесь является то, что калибровочная  $SU(2) \times U(1)$  симметрия слабых взаимодействий нарушается средним по вакууму двухкомпонентного скалярного поля  $\phi$ . Однако, поскольку у нас нет почти никаких экспериментальных данных о механизме нарушения симметрии, можно предположить возможность существования и других объяснений.

В конечном счете эту проблему следует решать посредством экспериментального наблюдения частиц, связанных с нарушением симметрии. Для проведения исчерпывающего эксперимента необходимо определить ожидаемые для этих частиц свойства. В разделе 20.2 мы видели, что если симметрия и в самом деле нарушена единичным скалярным полем  $\phi$ , то сектор нарушения симметрии дает лишь одну новую частицу — скаляр  $h^0$ , называемый хиггсовским бозоном или хиггсом. Масса  $m_h$  частицы  $h^0$  неизвестна, однако ее связи с известными фермионами и бозонами полностью определены массами этих частиц и постоянными связи слабого взаимодействия. Следовательно, можно с некоторой точностью вычислить амплитуды для образования и распада частицы  $h^0$ . Более сложные модели нарушения  $SU(2) \times U(1)$  симметрии, как правило, содержат по крайней мере одну частицу, некоторые свойства которой совпадают с соответствующими свойствами  $h^0$ . Значит, такое рассмотрение может послужить хорошей отправной точкой для более общего анализа результатов экспериментальных испытаний этих моделей.

В настоящем заключительном проекте вам предстоит вычислить амплитуды для распада хиггсовского бозона  $h^0$  на пары кварков, лептонов и калибровочных бозонов. Эти вычисления превосходно иллюстрируют работу теории возмущений в случае небелевых калибровочных полей. Распад хиггсовского бозона на кварки и глюоны затрагивает некоторые аспекты КХД. Таким образом, в данном упражнении мы вспомним все важнейшие методы части III. За исключением вопроса, поднятого в конце раздела (а), наша задача опирается только на материал разделов третьей части, не отмеченных звездочкой. Важную роль играет материал гл. 20. Материал гл. 21 присутствует только в разделах (b) и (f) данного анализа, остальные же разделы никак на него не опираются (не считая окончательного резюме в разделе (h)). Если вы уже изучили раздел 19.5, вам будет легче понять результаты, полученные в разделах (c) и (f), однако решить задачу можно и без этого.

Рассмотрим теперь минимальную форму электрослабой теории Глэшоу–Вайнберга–Салама с одним скалярным полем Хиггса  $\phi$ . Физический хиггсовский бозон  $h^0$  был рассмотрен в рамках этой теории в разделе 20.2, там же были перечислены связи этой частицы с кварками, лептонами и калибровочными бозонами. Сейчас вы можете использовать эти сведения для вычисления амплитуд для различных возможных случаев распада бозона  $h^0$  в зависимости от его массы  $m_h$ . Вы обнаружите, что распад

хиггсовского бозона весьма сложным образом зависит от его массы, причем в различных интервалах значений массы преобладают разные режимы распада. Зависимости различных значений вероятности распада от  $m_h$  служат иллюстрацией ко многим аспектам физики калибровочных теорий, которые мы обсуждали в части III.

Работая над этим упражнением, следует рассматривать  $m_h$  как свободный параметр. Другие параметры теории слабого взаимодействия имеют следующие значения:  $m_b = 5$  ГэВ,  $m_t = 175$  ГэВ,  $m_W = 80$  ГэВ,  $m_Z = 91$  ГэВ,  $\sin^2 \theta_w = 0,23$ ,  $\alpha_s(m_Z) = 0,12$ .

- (а) Вычислим прежде всего вероятность распада  $h^0 \rightarrow f\bar{f}$ , где  $f$  — кварк или лептон стандартной модели. После совершенно тривиального вычисления у вас должна получиться формула

$$\Gamma(h^0 \rightarrow f\bar{f}) = \left( \frac{\alpha m_h}{8 \sin^2 \theta_w} \right) \cdot \frac{m_f^2}{m_W^2} \left( 1 - \frac{4m_f^2}{m_h^2} \right)^{3/2} \cdot N_c(f),$$

где  $N_c(f) = 1$  для лептонов и 3 для кварков. Если вы уже изучили гл. 18 и если фермион  $f$  — кварк, то этот результат можно улучшить, вычислив ведущие логарифмические КХД поправки для случая  $m_h \gg m_q$ . Помните, что масса кварка  $m_q$  определяется на кварковом пороге  $M^2 \sim m_q^2$ .

- (б) Если  $m_h > 2m_W$ , то хиггсовский бозон может распасться на  $W^+W^-$ , если он еще самую малость тяжелее, то в результате распада мы также получим  $Z^0Z^0$ . Вычислите значения ширины распада для этих окончательных состояний. Результат можно проверить следующим образом: при  $m_h \gg m_W$  преобладающий вклад в распад вносит возникновение продольно поляризованных  $W$ - и  $Z$ -бозонов, причем этот вклад можно оценить следующим образом:

$$\Gamma(h^0 \rightarrow W^+W^-) \approx \Gamma(h^0 \rightarrow \phi^+\phi^-), \quad \Gamma(h^0 \rightarrow Z^0Z^0) \approx \Gamma(h^0 \rightarrow \phi^3\phi^3),$$

где  $\phi^\pm, \phi^3$  — голдстоуновские бозоны из хиггсовского сектора, а величины, стоящие в правых частях этих уравнений, вычисляются с помощью *некалибровочной* теории Хиггса. Объясните, почему это так, и подтвердите данное утверждение явным образом.

- (с) Третий важный режим распада хиггса — это его распад на два глюона. Амплитуда такого распада порождается диаграммами, содержащими кварковые петли. Рассчитайте эти диаграммы, используя размерную регуляризацию. Диаграммы должны быть конечными, однако они все-таки вносят определенный незначительный вклад, который, по всей видимости, зависит от регуляризатора. Проверьте правильность вычисления амплитуды, для чего убедитесь в том, что она калибровочно-инвариантна. Затем возведите амплитуду в квадрат и вычислите вероятность распада. У вас должно получиться следующее выражение:

$$\Gamma(h^0 \rightarrow 2g) = \left( \frac{\alpha m_h}{8 \sin^2 \theta_w} \right) \cdot \frac{m_h^2}{m_W^2} \cdot \frac{\alpha_s^2}{9\pi^2} \cdot \left| \sum_q I\left(\frac{m_h^2}{m_q^2}\right) \right|^2,$$

где сумма берется по всем видам кварков, а  $I(m_h^2/m_q^2)$  — форм-фактор, причем  $I(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , и  $I(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Это означает, что главный вклад в вероятность распада вносят очень тяжелые кварки. На данном этапе нет необходимости выражать функцию  $I(x)$  в явном виде; можно пока оставить ее в виде фейнмановского параметрического интеграла.

- (d) Из существования процесса  $h^0 \rightarrow 2g$  следует, что имеет место и обратный процесс  $g + g \rightarrow h^0$ , который представляет собой механизм рождения хиггсовских бозонов в протон-протонных столкновениях. Используя партонную модель, выведите соотношение между парциальной шириной  $\Gamma(h^0 \rightarrow 2g)$  и полным сечением при  $pp \rightarrow h^0 + X$ . Вычислите это сечение численно для хиггса с энергией 30 ГэВ при  $pp$ -столкновениях с энергией в с.ц.м. 1–40 ТэВ. (1 ТэВ =  $10^3$  ГэВ.) В рамках данной задачи можно пренебречь  $Q^2$ -зависимостью распределения глюонов и принять (хотя, вообще говоря, такое приближение нельзя назвать хорошим):

$$f_g(x) = 8 \cdot \frac{1}{x}(1-x)^7.$$

Можно также принять  $I(m_h^2/m_t^2) = 1$ , точность такого приближения составит примерно 10%.

- (e) Последним из режимов распада, которые вы должны рассмотреть, является  $h^0 \rightarrow 2\gamma$ . Вычислите сначала вклад от диаграмм с петлями, содержащих кварки и лептоны. Покажите, что искомое соотношение можно легко выразить через форм-фактор  $I(m_h^2/m_t^2)$ , который вы получили в разделе (c).
- (f) Теперь вычислите вклад, вносимый в амплитуду такого распада диаграммой с петлями, содержащей  $W$ -бозоны; кроме того, для получения калибровочно-инвариантного результата следует добавить сюда и другие диаграммы. Проще всего работать в калибровке Фейнмана–‘т Хофта. Прибавьте полученный вклад к вкладам очень тяжелых кварков и лептонов, каждый из которых имеет заряд  $Q_f$ . В пределе  $m_h \ll m_W$  ваш результат должен сводиться к следующему выражению:

$$\Gamma(h^0 \rightarrow 2\gamma) = \left( \frac{\alpha m_h}{8 \sin^2 \theta_w} \right) \cdot \frac{m_h^2}{m_W^2} \cdot \frac{\alpha^2}{18\pi^2} \cdot \left| \sum_f Q_f^2 N_c(f) - \frac{21}{4} \right|^2.$$

- (g) Здесь следует подробно разобрать поведение форм-фактора  $I(x)$ , определенного в разделе (c). Сведите полученное вами в разделе (c) выражение к однократному интегралу и вычислите этот интеграл. Постройте график функции  $I(m_h^2/m_t^2)$  в интервале  $50 \text{ ГэВ} < m_h < 500 \text{ ГэВ}$  и вычислите ширину распада  $\Gamma(h^0 \rightarrow 2g)$  в этом интервале (в кэВ). В разделе (f) вы определили дополнительный форм-фактор; вычислите и эту функцию аналогичным образом.
- (h) Наконец, соберите все части мозаики вместе и найдите долю хиггсовских бозонов  $h^0$  с массой от 50 до 500 ГэВ, распадающихся по каждому из перечисленных основных сценариев  $b\bar{b}$ ,  $t\bar{t}$ ,  $gg$ ,  $W^+W^-$ ,  $Z^0Z^0$ .



# ЭПИЛОГ



## ПЕРЕДОВЫЕ РУБЕЖЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этом учебнике мы рассмотрели наиболее важные идеи квантовой теории поля. Используя основные понятия, которые возникли из слияния принципа относительности, квантовой механики и теории поля, мы построили сложную структуру, включающую такие замечательные элементы, как перенормировка константы взаимодействия и неабелевы калибровочные поля. Во многих случаях мы видели, что странные и абстрактные элементы этой структуры действительно имеют отношение к наблюдаемым явлениям и даже приводят к объяснению неожиданных сторон поведения элементарных частиц.

В ходе изложения мы пришли к полной теории сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. Каждый элемент этой теории был описан как некоторая квантовая теория поля, и оказалось, что эти квантовые теории поля имеют очень похожую структуру как калибровочные теории, включающие фермионы. На различных этапах нашего обсуждения мы отмечали, что эти теории прошли строгие количественные экспериментальные проверки. У нас не было возможности описать широкое разнообразие экспериментов, на которых основана наша вера в эти теории, но сегодня почти все физики, занимающиеся частицами, рассматривают калибровочную теорию на основе  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  как окончательную. Фактически, большинство этих людей сокращенно ссылаются на данную теорию как на «стандартную модель».

Хотя наилучшие экспериментальные подтверждения стандартной модели были получены в течение последних пяти лет, идеи, лежащие в ее основе, значительно старше. Большинство теоретических достижений, описанных в этой книге, были совершены в 70-е гг. и на целое поколение удалены от передовых рубежей физики. Это отнюдь не означает, что квантовая теория поля несущественна для этих рубежей, или даже больше, что она потеряла свое значение после многих лет исследования, как это произошло с квантовой механикой и электродинамикой. Напротив, теория элементарных частиц — подобно другим областям физики, которые зависят от квантовых флуктуаций в континууме — все еще содержит в себе глубокие тайны, и квантовая теория поля остается основным инструментом исследования этих вопросов.

В заключительной главе мы рассмотрим ситуацию на сегодняшний день и обсудим значение квантовой теории поля для современных вопросов физики фундаментальных взаимодействий. Мы обсудим, каковы, с нашей точки зрения, наиболее значительные нерешенные проблемы физики элементарных частиц и опишем, как квантовая теория поля может быть использована для разрешения этих проблем. Многие из этих подходов включают в себя такие аспекты квантовой теории поля, которые находятся вне рамок данной книги. Они включают в себя как использование квантовой теории поля в непертурбативном режиме, так и специальные свойства теорий с высшими спинами и локальной симметрией. В этих областях наше обсуждение будет главным образом качественным, но мы приведем ссылки, которые позволят погрузиться в каждую из таких областей.

Очевидно, что обсуждение в этой заключительной главе выражает наши личные мнения и ни в коем случае не представляет единое мнение экспертов по квантовой теории поля. Кроме того, любое собрание «современных проблем» в быстро развивающейся области исследования должно быстро устаревать. Фактически, мы надеемся, что читатели этой книги очень быстро сделают эту главу устаревшей, разрешив те проблемы, которые мы выдвигаем сейчас на первый план.

## 22.1. Сильные взаимодействия

Парадоксальный аспект нашего обсуждения сильных взаимодействий состоит в том, что все наши конкретные результаты были получены в предположении, что эти взаимодействия слабы. Мы доказали, что при большом переданном импульсе такое предположение действительно справедливо в силу свойства асимптотической свободы. Однако не очень хорошо, что мы обошли достаточно очевидные вопросы относительно сильновзаимодействующих частиц, например, вопросы об их массах и низкоэнергетических взаимодействиях, таинственно исключив их из нашего анализа.

Для того чтобы работать с КХД в области, где сильные взаимодействия действительно сильны, мы должны ответить на три вопроса. Во-первых, как описывать силы, которые связывают кварки вместе в адроны? Во-вторых, что является подходящим описанием системы кварк-антикварк и систем с тремя кварками, связанных этими силами? И, наконец, как вычислить амплитуды рассеяния и матричные элементы токов, используя эти связанные состояния?

В данный момент не существует какого-либо способа вывести полные силы между кварками из лагранжиана КХД. Явные вычисления могут быть проделаны только в пределах слабой и сильной связи. В пределе слабой связи результатом является кулоновский потенциал с асимптотически свободной константой взаимодействия. С другой стороны, в пределе сильной связи получается линейный потенциал с удержанием цвета, как мы это описали, но не получили в конце раздела 17.1. Вывод этого результата достаточно необычен и приводит к новому набору математических методов.

До сих пор в этой книге мы не обсуждали приближения сильной связи в квантовой теории поля. Для этого имеется простая причина: в квантовой теории поля, где константа связи  $g^2$  является очень большой, элементарные частицы или их связанные состояния обычно приобретают массы, растущие как  $g^2$ . При  $g^2 \rightarrow \infty$  эти массы становятся сравнимыми с параметром обрезания  $\Lambda$ , и теория поля перестает быть локально непрерывной.

Вильсон предложил радикальный способ решения этой проблемы — замену пространства-времени решеткой дискретно расположенных точек. Такую решетку легче всего представить в евклидовом пространстве-времени, и мы можем использовать функциональный интеграл по полям на решетке для приближенного вычисления евклидовых функций Грина. Такая теория может иметь хорошо определенный предел сильной связи и во многом подобна решеточным моделям магнитных систем.

На самом деле можно понять такую конструкцию квантовой теории поля, используя понятия гл. 13. Решеточная теория с флуктуирующими спиновыми переменными в каждом узле решетки описывается на больших масштабах квантовой теорией скалярных полей с симметрией, соответствующей спиновым переменным. Как правило, предел сильной связи квантовой теории поля соответствует высокотемпературному пределу для магнетика, в котором корреляционная длина намного меньше постоянной решетки. Уменьшение константы связи соответствует понижению температуры. В конечном счете, константа связи приближается к фиксированной точке ренормгруппы, что позволяет использовать эту неподвижную точку для определения такого предела

решеточного функционального интеграла, в котором постоянная решетки стремится к нулю.

Чтобы построить решеточную модель сильных взаимодействий, необходимо найти такой набор переменных на дискретной решетке, который соответствует на больших масштабах неабелевым калибровочным полям. Вильсон предложил использовать в качестве фундаментальных переменных для такой теории элементы линий, идущих от одной вершины решетки  $v_1$  к соседней вершине  $v_2$ ,

$$U(v_2, v_1) = P \exp \left[ ig \int dx^\mu A_\mu^a t^a \right]. \quad (22.1)$$

Чтобы сконструировать решеточную калибровочную теорию с калибровочной группой  $G$ , нужно проинтегрировать по преобразованиям конечной группы  $U$  для каждой связи решетки. Используя произведение таких матриц  $U$  по замкнутому контуру, можно сконструировать калибровочно-инвариантные переменные, как это делалось в разделе 15.3. Соответствующий лагранжиан может быть получен в виде суммы калибровочно-инвариантных произведений матриц  $U$  по элементарным замкнутым контурам решетки\*.

Определяющим свойством высокотемпературной фазы в спиновых системах является экспоненциальное затухание корреляций:

$$\langle \vec{s}(0) \cdot \vec{s}(\mathbf{x}) \rangle \sim \exp[-|\mathbf{x}|/\xi] \quad (22.2)$$

при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Аналогичное свойство калибровочно-инвариантной корреляционной функции матриц  $U$  по замкнутому контуру  $P$  записывается как

$$\left\langle \prod_P U \right\rangle \sim \exp[-A/\xi^2], \quad (22.3)$$

где  $A$  — поверхность, натянутая на контур. Такое поведение на самом деле явно видно при применении решеточной калибровочной теории Вильсона к случаю сильной связи. Пара источников цвета, разделенных интервалом  $R$  в течение евклидова времени  $T$ , представлена большим прямоугольным контуром шириной  $R$  и длиной  $T$ . Для такого контура можно сравнивать результат (22.3) с выражением для энергии возбужденного состояния в евклидовом времени

$$\langle \exp[-H_E T] \rangle \sim \exp[-RT/\xi^2]. \quad (22.4)$$

В результате мы видим, что статические источники калибровочного заряда в пределе сильной связи при достаточно больших  $R$  притягиваются друг к другу с потенциальной энергией

$$V(R) \sim R/\xi^2. \quad (22.5)$$

Аналогично, когда в решеточную калибровочную теорию вводятся динамические кварки и их свойства изучаются в пределе сильной связи, конфигурации, учитывающие пространственно разделенные источники цвета, подавлены в евклидовом функциональном интеграле множителями вида (22.3). Таким образом, предел сильной связи предсказывает постоянное удержание кварков в синглетных по цвету связанных состояниях.

\*Эта конструкция была введена К. Вильсоном, *Phys. Rev.* **D10**, 2445 (1974), и в педагогических целях описана М. Кройцем, *Кварки, глюоны и решетки* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).

Аргументы, которые мы только что привели, одинаково хорошо применимы к калибровочным теориям, основанным как на абелевых, так и неабелевых группах симметрии. Но неабелевы калибровочные теории имеют важное дополнительное свойство асимптотической свободы. Это означает, что теория со слабой связью на малых расстояниях переходит в теорию с сильной связью на больших расстояниях. Если проинтегрировать по мелкомасштабным степеням свободы, как было описано в разделе 12.1, и если  $\beta$ -функция не обращается в нуль и не имеется какого-либо другого препятствия для ренормгруппового потока, мы должны в итоге достичь некоторой эффективной теории, для которой приближение сильной связи является хорошей аппроксимацией. Так, в частном случае неабелевых калибровочных теорий асимптотическая свобода позволяет связать мелкомасштабную картину, основанную на свободных кварках и глюонах с крупномасштабной картиной, основанной на удержании цвета.

Было бы чудесно, если бы картина сильной связи, которую мы описали, привела бы к математическим уравнениям в непрерывном пространстве-времени, описывающим движение удерживаемых кварков и антикварков. Многие авторы пытались написать такие уравнения, исходя из представления о том, что подавление корреляционной функции для петли Вильсона (22.3) экспонентой от площади возникает из-за некоторой физической поверхности, которая натянута на петлю. Для большой прямоугольной петли, связанной с источниками цвета, эта поверхность может физически интерпретироваться как совокупность линий цветного электрического потока, которые идут от одного источника к другому (как на рис. 17.1) и заматают поверхность в евклидовом времени. В некоторый момент евклидова времени эта поверхность может быть представлена как абстрактное одномерное возбуждение, часто называемое *струной*. К сожалению, квантовые свойства таких идеальных струн оказываются очень сложными, так как каждый малый элемент струны должен рассматриваться как независимая квантовая степень свободы. Единственные системы струнных уравнений, которые фактически были решены, имеют причудливые свойства, включая нежелательные безмассовые частицы. До сих пор никто не смог достичь успеха в написании уравнений для струны, удерживающей кварки, которые были бы полезны для количественных вычислений связанных состояний для кварков\*.

Однако решеточная регуляризация неабелевой калибровочной теории подсказывает и другой подход к количественным вычислениям в теории с сильным взаимодействием. Аппроксимируя КХД как решеточную калибровочную теорию с ненулевой постоянной решетки и конечным объемом пространства-времени, мы сводим вычисление функционального интеграла к конечному числу интегрирований по ограниченному пространству-времени, т. е. к интегралу по группе матриц  $SU(3)$  для каждой из конечного числа связей на решетке. К примеру, решетка размером  $20^4$  позволяет рассматривать постоянную решетки размером меньше, чем размер адрона, в то время как полный размер решетки намного больше, чем радиус адрона. В этом случае корреляционные функции могут быть найдены численно методом Монте-Карло. Поскольку функциональный интеграл с конечной постоянной решетки связан с функциональным интегралом с нулевой постоянной решетки интегрированием по мелкомасштабным степеням свободы, решеточное приближение может быть систематически улучшено за счет пертурбативного учета мелкомасштабных эффектов с использованием асимптотической свободы для оправдания анализа в пределе слабой связи<sup>†</sup>.

Этот численный метод теперь стал основным теоретическим инструментом для количественных вычислений в физике адронов. В настоящее время он позволяет вы-

\*Один из подходов к удержанию цвета в картине петель Вильсона и струн см. в работе: Migdal A. A., *Phys. Repts.* **102**, 199 (1983).

<sup>†</sup>Для введения в численную решеточную калибровочную теорию, см. *From Actions to Answers*, T. DeGrand and D. Toussaint, eds. (World Scientific, Singapore, 1990).

числить массы низколежащих мезонов и барионов с точностью 10–20%, а также позволяет вычислять матричные элементы слабого взаимодействия адронов с точностью 25%. Очевидно, что по мере того, как растет мощность компьютеров, этот численный метод будет достигать все более высокой точности.

В конечном счете, было бы интересно спросить, являются ли эти непертурбативные численные расчеты согласованными с нашим точным знанием пертурбативной области КХД. Во время написания этой книги было сделано первое такое сравнение: мы привели в таблице 17.1 значение  $\alpha_s$  из данных по  $\psi$  и  $\Upsilon$  спектроскопии. В этих вычислениях экспериментально определенные массы  $\bar{c}c$  и  $\bar{b}b$  связанных состояний сравниваются со значениями, полученными численно с помощью решеточной регуляризации. Сравнение этих значений позволяет установить требуемую голую константу связи решеточной теории, которая может быть преобразована в значение  $\alpha_s(m_Z)$  в обозначениях таблицы. Результирующая оценка для  $\alpha_s(m_Z)$  достаточно хорошо согласуется с чисто пертурбативными вычислениями.

Каково будущее непертурбативных вычислений в физике адронов? С одной стороны, мы ожидаем увидеть дальнейшее развитие численных решеточных методов. Сейчас только начали пытаться решать с помощью этих методов проблемы адрон-адронного рассеяния и вычисления элементов многочастичных матричных элементов, и сегодня это направление кажется важным для будущего. Кроме того, эти методы должны в конечном счете привести к прикладному пониманию адронов на уровне процентов или лучше. С другой стороны, мы также надеемся увидеть количественный непрерывный подход к структуре адрона, в котором динамические кварки взаимодействуют с некоторым подходящим типом струнных степеней свободы.

## 22.2. Великое объединение и его парадоксы

Если оставить в стороне наши вопросы относительно низкоэнергетического непертурбативного поведения КХД,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -калибровочные теории дают по-видимому, полное описание взаимодействий элементарных частицы при тех энергиях, которые можно получить экспериментально. Но что же происходит вне области достигнутых энергий? Потребуется ли при этом модификация теории или она будет справедлива при намного более высоких энергиях?

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -калибровочная теория содержит три независимых калибровочных константы взаимодействия, и наблюдаемые значения этих констант больше для больших компонент калибровочной группы. Такое поведение можно объяснить, выдвинув смелую гипотезу относительно поведения калибровочных констант связи при очень высоких энергиях. Если на некоторых очень больших масштабах энергии эти три константы связи равны, значения констант связи для  $SU(3)$  и  $SU(2)$  будут увеличиваться при малых импульсах в силу асимптотически свободных уравнений ренормгруппы, в то время как значение константы связи для  $U(1)$  будет уменьшаться, что приведет к наблюдаемому поведению констант связи при низких энергиях. Еще более смелая гипотеза состояла бы в том, что три калибровочных симметрии являются подгруппами одной большей группы симметрии, которая спонтанно нарушена при очень высоких энергиях. Самый простой выбор для большей группы симметрии — это  $SU(5)$ . В такой теории константы связи для  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  связаны с основной константой связи для  $SU(5)$  на масштабах нарушения  $SU(5)$ -симметрии:

$$g_5 = g_3 = g = \sqrt{\frac{5}{3}} g'. \quad (22.6)$$

Идея, состоящая в том, что калибровочная группа  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  вложена в бóльшую простую группу, известна как *Великое объединение*; частный выбор  $SU(5)$  как группы объединения принадлежит Джорджи и Глэшоу\*. Наблюдаемые кварки и лептоны могут быть получены, если аккуратно использовать свободное от аномалий киральное представление группы  $SU(5)$ ; такое вложение ведет к естественному объяснению дробных зарядов кварков†.

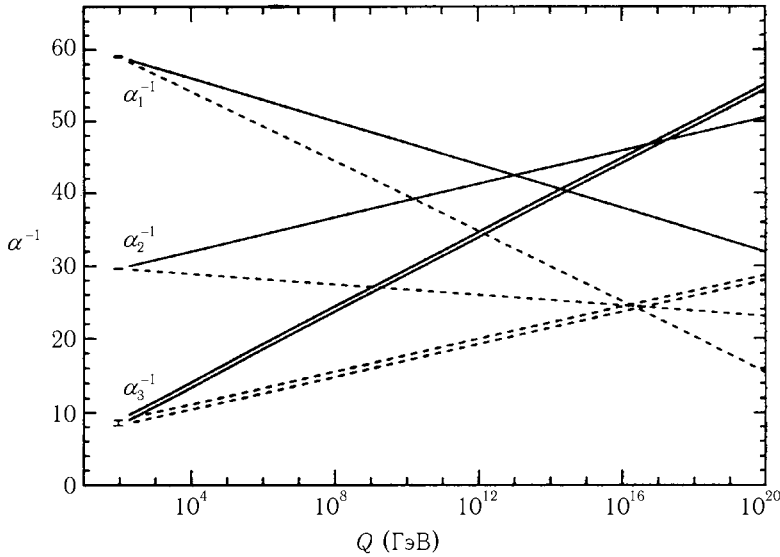


Рис. 22.1. Экстраполяция констант связи  $g_3$ ,  $g$  и  $\sqrt{5/3}g'$  по энергии для калибровочной модели с группой  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Сплошные линии получены с помощью  $\beta$ -функций, соответствующих известному набору элементарных частиц; пунктирные линии получены с помощью  $\beta$ -функций, соответствующих суперсимметричному мультиплету частиц.

В этих рамках можно экстраполировать значения трех констант связи по энергетической шкале от значения  $m_Z$  и выше. Результат этой экстраполяции показан сплошными линиями на рис. 22.1. Константы связи сближаются при очень высоких энергиях, хотя фактически не сливаются. Пунктирные линии на рисунке показывают эволюцию констант с измененным набором уравнений ренормгруппы, как это объяснялось в разделе 22.4; при таком выборе три константы связи сливаются точно в пределах современной точности измерений. В любом случае эволюция констант связи происходит по логарифмической шкале энергии, так что Великое объединение не может быть достигнуто без предположения об огромном значении — порядка  $10^{16}$  ГэВ — масштаба нарушения симметрии.

Идея Великого объединения при таких чудовищных энергиях поднимает много трудных вопросов, но предлагает также замечательную возможность. Имеется другой огромный энергетический масштаб в квантовой теории поля, масштаб, при котором гравитационное притяжение элементарных частиц становится сравнимым с сильным, слабым и электромагнитным взаимодействиям. По соглашению определим *планковский масштаб* как энергию, при которой гравитационное взаимодействие частиц становит-

\* Н. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 438 (1974). Выдающиеся достоинства этой статьи делают необходимым обязательное ее прочтение каждым студентом.

† Педагогическое введение в теорию Великого объединения, см. Ross (1984).



ся порядка 1:

$$m_{\text{Планк}} = (G_N/\hbar c)^{-1/2} \sim 10^{19} \text{ ГэВ}. \quad (22.7)$$

Однако уже при энергиях порядка  $10^{18}$  ГэВ гравитационное притяжение частиц сравнимо с калибровочными силами, возникающими благодаря обмену векторными бозонами теории Великого объединения. Хотя этот масштаб все еще несколько больше, чем тот, на котором сливаются константы связи стандартной модели, не очень разумно надеяться, что великое объединение так или иначе связано с объединением гравитации с другими силами физики элементарных частиц.

С другой стороны, появление такого большого масштаба в физике ведет к ряду концептуальных проблем. Первой из этих проблем, немедленно появляющейся из-за такого расширения стандартной модели, является масса хиггсовского бозона. При обсуждении в конце раздела 20.2, мы пришли к несколько неоднозначному заключению относительно природы хиггсовских бозонов. Для калибровочной теории слабых взаимодействий необходим некоторый новый сектор, который вызывает спонтанное нарушение симметрии  $SU(2) \times U(1)$ . Это нарушение может привести к отличному от нуля вакуумному среднему скалярного поля или к более сложной динамике нового сектора частиц. В данный момент мы не знаем, какая гипотеза предпочтительней.

Если симметрия  $SU(2) \times U(1)$  нарушена вакуумным средним элементарного скалярного поля, то это поле должно быть частью Великого объединения. Это ведет к серьезной концептуальной проблеме. Для того чтобы получить нужную величину вакуумного среднего, необходимую для генерации наблюдаемых масс  $W$ - и  $Z$ -бозонов, хиггсовское скалярное поле должно приобрести отрицательное массовое слагаемое величины

$$-\mu^2 \sim -(100 \text{ ГэВ})^2. \quad (22.8)$$

К сожалению, (масса)<sup>2</sup> скалярного поля дополнительно перенормируется. В теории с масштабом обрезания  $\Lambda$  величина  $\mu^2$  может быть намного меньше, чем  $\Lambda^2$  только тогда, когда исходная масса скалярного поля имеет порядок  $-\Lambda^2$ , и это значение сокращается до величины  $-\mu^2$  за счет радиационных поправок. Если мы предполагаем, что истинная теория Природы содержит очень большие масштабы великого объединения, мы должны принять всерьез идею о том, что подходящее значение для  $\Lambda$  составляет  $10^{16}$  ГэВ или больше. Все это, по-видимому, требует драматических и даже причудливых сокращений в перенормированном значении  $\mu^2$ .

Подобная ситуация встречалась нам в теории фазовых переходов. При нулевой температуре среднее значение спина ферромагнетика обычно порядка основных атомных параметров. По мере повышения температуры или изменения некоторых других переменных в системе намагниченность уменьшается. Наконец, точно подстраивая температуру, можно достичь ситуации, когда система приближается к критической точке. В непосредственной близости этой точки среднее значение спинового поля намного меньше, чем значение, предсказанное по атомным параметрам, и система приближенно описывается безмассовой теорией непрерывного скалярного поля.

В статистической механике эта картина легкого скалярного поля имеет смысл, потому что имеется экспериментатор, точно настраивающий шкалу. В теории слабых взаимодействий не существует какого-либо очевидного механизма точной настройки, которая придает величине (масса)<sup>2</sup> хиггсовских бозонов значение, на 28 порядков ниже, чем величина ее естественного значения. Таким образом, возникает загадка, почему масса хиггсовского бозона так мала по сравнению с масштабом Великого объединения. Физики, занимающиеся частицами, называют этот вопрос *проблемой калибровочной иерархии*.

Как можно естественным образом выбрать массовый член хиггсовского поля, что оно было намного меньше, чем основной масштаб масс фундаментальных взаимодействий? Одна из возможных стратегий могла бы состоять в организации такой симметрии фундаментального лагранжиана, которая запрещает хиггсовским бозонам иметь массу, а затем очень слабо нарушается. Оказывается, что такую идею очень трудно осуществить. Чтобы построить теорию такого типа, нужно создать теорию скалярного поля, в которой аддитивные радиационные поправки к массе хиггсовского бозона должны сокращаться в любом обозримом порядке теории возмущений. Но массивое слагаемое хиггсовского поля очень просто по форме:

$$\Delta\mathcal{L} = \mu^2|\phi|^2. \quad (22.9)$$

Поэтому трудно представить какой-либо принцип, который не позволял бы такому слагаемому возникать за счет радиационных поправок. Имеется только одно предложение о симметрии с подобным свойством, но оно требует введения глубокого принципа, названного *суперсимметрией*, который влечет за собой принципиальные изменения фундаментальной физики. В частности, этот принцип требует существования большого количества новых элементарных частиц, некоторые из которых должны иметь массы ниже 1000 ГэВ, что находится в пределах возможностей следующего поколения ускорителей. Мы далее обсудим эту возможность в разделе 22.4.

В данном обсуждении проблема массы хиггсовской частицы возникла из гипотезы, что хиггсовский бозон является элементарной частицей. Альтернативная точка зрения, уже упомянутая в конце раздела 20.2, состоит в том, что хиггсовский бозон является составным состоянием, определяемым новым набором взаимодействий. Эта идея также ведет к экспериментально наблюдаемым следствиям, поскольку масштаб масс новых взаимодействий должен быть очень близок к масштабу масс слабых взаимодействий. В простейших теориях такого типа нарушение симметрии хиггсовского сектора моделировалось на основе динамического нарушения киральной симметрии сильных взаимодействий, обсуждавшейся в разделе 19.3. Новые сильные взаимодействия, необходимые в соответствии с новой теорией, приводят к спектру новых частиц с массами порядка 1000 ГэВ.\* Таким образом, две противоречивых гипотезы относительно природы сектора, нарушающего  $SU(2) \times U(1)$  симметрию, приводят к новым явлениям, которые могут быть наблюдаемы на будущих, а, возможно, даже на современных ускорителях.

Эти две различных теории, описывающие сектор Хиггса, дают совершенно разные ответы не только на вопрос о том, почему симметрия слабого взаимодействия с группой  $SU(2) \times U(1)$  должна быть спонтанно нарушена, но и на вопрос о происхождении масс кварков и лептонов. В модели, в которой поле Хиггса является фундаментальным, массы кварков и лептонов получаются из перенормированных констант связи фермионов с полем Хиггса. Эти константы связи, возможно, являются частью Великого объединения и должны предсказываться только такими теориями, которые используют явную ссылку на масштаб Великого объединения. В принципе, знание этих констант связи могло бы дать ключ к пониманию многих тонких моментов великого объединения. Даже если поле Хиггса является составным, мы не можем обойти тот факт, что генерация масс кварков и лептонов требует нарушения  $SU(2) \times U(1)$  симметрии. Таким образом, эти массовые слагаемые должны появиться в результате взаимодействия кварков и лептонов с сектором Хиггса. В этой категории моделей взаимодействия, приводящие к массам кварков и лептонов, должны возникать при энергиях, определяющих масштаб

\*Свойства этих моделей хиггсовского сектора, известных специалистам как модель *техницвета*, разобраны в обзорах: R. Kaul, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 449 (1983); K. D. Lane, *The Building Blocks of Creation*, ed by C. Raby. (World Scientific, 1993).

сильного взаимодействия в секторе Хиггса и могут быть, в конечном счете, наблюдаемы экспериментально.

С любой точки зрения загадочным является то обстоятельство, что спектр кварков и лептонов охватывает 5 порядков величины, от электрона с массой в 0.5 МэВ, к  $t$ -кварку с массой в 175 ГэВ. Непонятна также причина, которая приводит к способу смешивания кварков, закодированной в ККМ-матрице и величине  $CP$ -нарушения. Даже при детальном подтверждении стандартной модели, эти вопросы кажутся сегодня очень далекими от разрешения.

Огромный масштаб масс Великого объединения может привести к появлению еще одной физической величины, связанной с еще бóльшим парадоксом, чем масса хиггсовского бозона. При квантовании поля в разделе 2.3 мы обнаружили, что плотность энергии вакуума в свободной теории скалярного поля получает бесконечный положительный вклад из-за энергий основного состояния различных мод колебаний. При масштабе обрезания  $\Lambda$  энергия основного состояния примерно равна

$$\langle 0 | H | 0 \rangle \sim \Lambda^4. \quad (22.10)$$

В многих других местах мы обнаружили аналогичные большие вклады в вакуумную энергию. Заполнение моря Дирака при квантовании свободной фермионной теории приводит к отрицательному вкладу в вакуумную энергию с аналогичной ультрафиолетовой расходимостью. Спонтанное нарушение симметрии дает конечный, но все же достаточно большой сдвиг плотности энергии вакуума

$$\Delta \langle 0 | H | 0 \rangle \sim -cv^4, \quad (22.11)$$

с безразмерной константой  $c$  и средним вакуумным значением поля  $v$ . Как ожидается, спонтанное нарушение симметрии  $SU(2) \times U(1)$  слабого взаимодействия и киральной симметрии сильного взаимодействия сдвигает вакуумную плотность энергии аналогичным образом.

В экспериментах с элементарными частицами этот сдвиг вакуумной энергии ненаблюдаем. Суть в том, что экспериментально измеряемая масса частицы определяется разностью энергий между вакуумным и некоторым возбужденным состояниями  $H$ , поэтому при вычислении этой разности абсолютное значение энергии вакуума сокращается. Однако существует способ, с помощью которого потенциально возможно наблюдение абсолютной энергии вакуума благодаря связи вакуумной энергии и гравитации. Согласно Эйнштейну, тензор энергии-импульса материи  $\Theta^{\mu\nu}$  является источником гравитационного поля. Вакуумная плотность энергии  $\langle 0 | H | 0 \rangle = \lambda$  дает вклад в этот источник в виде:

$$\Theta^{\mu\nu} = N(\Theta^{\mu\nu}) + \lambda g^{\mu\nu}, \quad (22.12)$$

где первое слагаемое справа определяется с вычитанием так, чтобы он имел нулевое вакуумное среднее. Слагаемое с вакуумной энергией имеет вид космологической постоянной Эйнштейна и таким образом в принципе влияет на расширение Вселенной.

Фактически данные по измерениям космологического расширения исключают большое значение космологической постоянной. Современное ограничение таково:

$$\lambda < 10^{-29} \text{ г/см}^3 \sim (10^{-11} \text{ ГэВ})^4. \quad (22.13)$$

В настоящий момент не существует какого-либо понимания того, почему  $\lambda$  настолько меньше вакуумных энергетических сдвигов, порождаемых в известных фазовых

переходах в физике элементарных частиц, и настолько меньше энергии основного состояния поля. Несоответствие значений  $\lambda$ , полученных из экспериментальных ограничений (22.13) и наивных оценок, составляет 120 порядков! Решение этой проблемы может прийти из многих источников. Возможно, что формализм квантовой теории гравитационного поля потребует, чтобы энергия вакуума вычиталась из тензора энергии-импульса, который входит в эйнштейновские уравнения гравитации. Возможно существует новый физический механизм, непосредственно связанный с физикой элементарных частиц или теорией гравитации, который обращает в нуль полную энергию вакуума. Возможно и то, что общий масштаб энергии-импульса является полностью неоднозначным и устанавливается космологическим граничным условием. В данный момент все эти возможности достаточно гипотетичны. Все, что мы знаем наверняка, так это то, что объединение квантовой теории поля и гравитации не может быть выполнено непосредственно, что существует какой-то важный принцип, пока ускользающий от нашего понимания\*.

### 22.3. Точные решения в квантовой теории поля

От идеи Великого объединения с ее большими обещаниями и тайнами обратимся к изучению модельных квантовых теорий поля, которые настолько просты, что могут быть решены точно. На протяжении всей книги мы отмечали внутреннюю сложность квантовой теории поля и значение теории возмущений как замены точных знаний. Но имеется ряд квантовых моделей, для которых точные решения известны. В этом разделе мы опишем некоторых из них и сделаем обзор достижений, которые были получены при изучении таких решений.

При поиске точных решений для моделей квантовой теории поля не имеет смысла ограничиваться четырехмерным пространством-временем. Фактически уже рассматривались примеры двумерных теорий с подобной сложностью перенормировки и поведения на малых расстояниях. В то же время эти теории сформулированы в одномерном пространстве, и их степени свободы могут быть рассматриваемы как связи в одномерной цепочке. Это позволяет сделать ряд сильных упрощений.

При обсуждении аксиальной аномалии в двух измерениях в разделе 19.1 было показано, что фотон в двумерной безмассовой КЭД становится массивным бозоном. Более детальный анализ этой теории показывает, что такой бозон является не взаимодействующей частицей. Теория первоначально формулируется в терминах фермионов, взаимодействующих через кулоновские силы. Однако есть способ точно переписать теорию как теорию скалярного поля, создающего и уничтожающего фермион-антифермионные пары. Образно говоря, частица и античастица, перемещающиеся вдоль светового конуса в одномерном пространстве, не разделяются и поэтому образуют одну бозонную степень свободы. В широком классе моделей так переписанные бозонные теории являются теориями свободного поля. Замечательной моделью такого типа является *модель Тирринга* в двух измерениях с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{g}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (22.14)$$

В этой модели замена фермионного поля на бозонное приводит к свободной теории поля. Используя эту теорию поля, можно явно вычислить билинейные корреляционные функции фермионов и непосредственно показать, что эти операторы имеют аномальные

\*Проблема космологической постоянной и ряд ее неудачных решений рассмотрены в обзоре: S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).

размерности. На языке ренормгруппы модель содержит линию неподвижных точек, параметризованных константой связи  $g$ .\*

Более общий класс двумерных моделей может быть решен с помощью рассмотрения их в гамильтоновой картине как одномерной цепочки связанных полевых операторов. Прототипом этого метода является задача статистической физики магнетизма — одномерная цепочка связанных спинов. Рассмотрим длинную цепочку  $N$  дискретных узлов, в каждом из которых находится система спина  $1/2$ . Матрицы Паули  $\sigma_i$  действуют в двумерном гильбертовом пространстве в узле  $i$ . Гамильтониан спиновой цепочки имеет вид

$$H = \sum_i (-J \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}). \quad (22.15)$$

Поскольку

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} = 2(\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+) + \sigma_i^3 \sigma_{i+1}^3, \quad (22.16)$$

этот гамильтониан сохраняет число спинов, направленных вверх. Состояние, когда все спины направлены вниз, является собственным состоянием гамильтониана, так же, как и состояния с одним спином вверх с заданным импульсом. В 1934 г. Бете изучал задачу с двумя спинами вверх и вычислил для них  $S$ -матрицу. Он обнаружил удивительный факт, что, перемножая  $S$ -матрицы для двухспиновой задачи, можно было находить точные собственные состояния гамильтониана при любом числе направленных вверх спинов. Рассматривая  $N/2$  перевернутых спинов, Бете нашел основное состояние системы. Эта подход, известный теперь как *анзатц Бете*, использовался для решения широкого ряда одномерных задач в физике конденсированного состояния и квантовой теории поля. Например, этот подход был использован Эндрю и Ловенштейном для решения модели Гросса–Неве, описанной в задаче 11.3, и демонстрирующей, что спектр модели имеет свойства, ожидаемые как следствия асимптотической свободы†.

Даже если не всегда удастся решить модель при всех значениях ее параметров, иногда удастся получить точную информацию относительно поведения двумерных моделей в случае, когда они содержат безмассовые поля. Известно, что решение ряда классических двумерных дифференциальных уравнений в частных производных может быть получено с помощью методов теории функций комплексных переменных. Например, двумерное уравнение Лапласа  $\nabla^2 \phi = 0$  инвариантно относительно конформных отображений  $z \rightarrow w(z)$ , где  $z = x + iy$ . Двумерные квантово-полевые теории с безмассовыми частицами часто имеют такую конформную симметрию на классическом уровне, хотя в общем это приводит к наличию аномалий. Однако в специальных системах отсчета аномалии обращаются в нуль, и квантовая теория становится инвариантной относительно конформных отображений. Эти теории обычно содержат операторы с аномальными размерностями, показывающими, что каждая такая теория является новой, нетривиальной неподвижной точкой ренормгруппы. Конформная симметрия теории может быть использована для вычисления этих аномальных размерностей.

Как пример этого класса теорий, рассмотрим двумерную нелинейную сигма-модель, в которой фундаментальное поле является не единичным вектором, как это

\* Для введения в эти модели см. обзор S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975), *Ann. Phys.* **101**, 239 (1976).

† Для введения в Бете-анзатц и его обобщения см. обзор: N. Andrei, K. Furuya, and J. H. Lowenstein, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 331 (1983), L. D. Faddeev, in *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics*, J. B. Zuber and R. Stora, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1984) и Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике* (М.: Мир, 1985).

обсуждалось в разделе 13.3, а унитарной матрицей из группы Ли  $G$ . Лангранжиан этой теории имеет вид

$$L = \frac{1}{4g^2} \int d^2x \operatorname{tr}[\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U]. \quad (22.17)$$

Подобно теории из раздела 13.3, эта модель асимптотически свободна. Однако Виттен показал, что добавляя к такому лагранжиану специальное возмущение довольно сложной формы, впервые записанное Вессом и Зумино, можно найти неподвижную точку ренормгруппы с явной глобальной  $G \times G$  симметрией. Эта теория конформно инвариантна, и все операторные корреляционные функции могут быть вычислены с использованием конформной симметрии\*.

Одним из результатов непертурбативного исследования квантовой теории поля стало понимание того, что полевые теории могут содержать состояния частиц, которые не являются простой комбинацией квантов первоначальных полей. В пределе слабой связи в квантовой теории поля такие новые состояния могут появляться как новые решения классических уравнений поля. Рассмотрим, например,  $\phi^4$  теорию в двух измерениях в фазе с нарушенной симметрией. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi - \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0. \quad (22.18)$$

Рассматривая это уравнение как классическое дифференциальное уравнение в частных производных, можно найти независящее от времени решение

$$\phi(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \frac{x\mu}{\sqrt{2}}. \quad (22.19)$$

Это решение — полевая конфигурация, которая начинается в одной яме потенциала при  $x = -\infty$  и переходит к другой яме при  $x \rightarrow +\infty$ . Оно имеет энергию порядка  $\mu/\lambda$ , отличающейся множителем  $1/\lambda$  от массы кванта поля  $\phi$ . Так как первоначальное уравнение (22.18) было лоренц-ковариантно, бусты этого решения должны также быть решениями классического дифференциального уравнения в частных производных. Естественно предположить, что в квантовой теории поля  $\phi^4$ , эти решения образуют новый набор массивных частиц. Такие решения и соответствующие им частицы часто называют *солитонами*, заимствуя этот несколько более специализированный термин из литературы по двумерным уравнениям в частных производных†.

Теперь известно много примеров частиц, которые связаны таким образом с классическими решениями квантовой теории поля. В теории со спонтанно нарушенной симметрией их появление часто связано с топологией множества вакуумных состояний; теория  $\phi^4$ , обсуждавшаяся выше, дает простой пример такой связи. Эти примеры не ограничены двумя измерениями, и могут наблюдаться в теориях, которые являются потенциально реалистичными. Такие решения могут иметь волшебные свойства. Один интересный пример обнаружен в калибровочной теории с  $SU(2)$ -симметрией с хиггсовским скалярным полем в векторном представлении, а именно — модель Джорджи–Глэшоу, рассматривавшаяся в разделе 20.1. ‘Т Хофт и Поляков показали, что эта теория имеет классическое решение, для которого поле Хиггса  $\phi_a$  имеет вид

$$\phi_a(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}|)x_a. \quad (22.20)$$

\* Для введения в конформно-инвариантные двумерные квантово-полевые теории см. P. Ginsparg, in *Fields, Strings, Critical Phenomena*, E. Brezin and J. Zinn-Justin, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1989).

† Для введения в использование решений классических уравнений поля для анализа задач теории поля см. S. Coleman (1985), Chaps. 6 and 7, and R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982).

Они показали, что, если интерпретировать калибровочную теорию как единую модель слабых и электромагнитных взаимодействий, это решение является магнитным монополюс! Кроме того, частицы, которые появляются как тяжелые классические состояния в пределе слабой связи, по мере возрастания константы связи могут иметь более глубокое отношение к динамике теории. Например, в теориях типа двумерной КЭД или модели Тирринга, в которых фермионы могут быть заменены бозонами, предел слабой связи получается добавлением к теории большой фермионной массы. Тогда первоначальные фермионы восстанавливаются из бозонного представления теории как классические решения, очень похожие на приведенные в (22.19).

В некоторых теориях можно найти классические решения евклидовых уравнений поля. Эти решения, названные *инстантонами*, локализованы как в евклидовом времени, так и в пространстве. В результате они интерпретируются как квантовые процессы, которые изменяют эффективный гамильтониан квантовой теории поля. Наиболее известный пример инстантона обнаружен в четырехмерных неабелевых калибровочных теориях. ‘Т Хофт показал, что эта полевая конфигурация приводит к квантовому процессу, который нарушает закон сохранения  $U(1)$  аксиального тока в КХД. Мы уже объясняли в разделе 19.3, что такое нарушение сохранения тока — именно то, что необходимо для объяснения спектра легких мезонов в КХД.

По-видимому, для более глубокого анализа классических решений уравнений поля и установления взаимосвязей между многими точно или частично решаемыми двумерными теориями поля еще многое должно быть изучено, особенно относительно поведения калибровочных теорий в пределе сильной связи.

## 22.4. Суперсимметрия

Среди всех свойств, которыми могла бы обладать квантовая теория поля, чтобы быть более красивой или более математически понятной, имеется одна высшая симметрия с чрезвычайно далеко идущими последствиями. Это симметрия, связывающая между собой фермионы и бозоны, известна (без преувеличения) как *суперсимметрия*. В этом разделе мы опишем некоторые чисто математические следствия суперсимметрии, и затем обсудим вопрос о том, могут ли истинные уравнения полей быть суперсимметричными.

Генератор суперсимметрии — это оператор, который коммутирует с гамильтонианом и превращает бозонные состояния в фермионные. Такой оператор должен иметь полужелый спин, в простейшем случае — спин  $1/2$ . Пусть  $Q_\alpha$  с  $\alpha = 1, 2$  — левые спинорные компоненты этого оператора. Эрмитово сопряженный оператор  $Q_\beta^\dagger$  является правым спинором. Антиккоммутатор  $\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\}$  образует  $2 \times 2$  матрицу с положительными диагональными элементами, которые, следовательно, не обращаются в нуль. Эта матрица коммутирует с  $H$ , но нетривиально изменяется относительно преобразований Лоренца. Лоренц-ковариантное выражение для этого антикоммутатора имеет вид

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P^\mu, \quad (22.21)$$

где  $P^\mu$  — сохраняющаяся векторная величина. Количество таких сохраняющихся величин строго ограничено; теорема Коулмена и Мандулы утверждает, что если квантовая теория поля в более чем двух измерениях имеет вторую сохраняющуюся векторную величину дополнительно к 4-вектору энергии-импульса, то  $S$ -матрица равна 1 и всякое рассеяние запрещено. Таким образом, единственный возможный выбор для  $P^\mu$  в уравнении (22.21) — это полный вектор энергии-импульса. Теорема Коулмена–Мандулы исключает также возможность любых законов сохранения величин с более высоким спином. Это отмечает возможность того, что генератор суперсимметрии имеет спин  $3/2$ ,

или выше. Наиболее общая возможность — это множество операторов со спином  $1/2$  с антикоммутирующими соотношениями

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^{j\dagger}\} = 2\delta^{ij}\sigma_{\alpha\beta}^\mu P^\mu, \quad (22.22)$$

с  $i, j = 1, \dots, N$ . В дальнейшем изложении будем в основном рассматривать только самый простейший случай  $N = 1$ .\*

Алгебра (22.22) сохраняющихся величин приводит к глубоким теоретическим следствиям. Так как правая сторона (22.22) — это величина полного вектора энергии-импульса, она включает в себя каждое поле в теории. Чтобы воспроизводить эту алгебру, левая сторона также должна учитывать каждое поле. Представления этой алгебры соединяют каждое бозонное состояние с фермионным состоянием той же самой энергии и наоборот. Если суперсимметрия является точной симметрией квантовой теории поля, она должна проявляться в каждом секторе теории. В реалистической модели даже поле тяготения должно иметь фермионного партнера. Это означает, что уравнения гравитации Эйнштейна должны быть обобщены до нового набора геометрических уравнений, включающих фермионное поле спина  $3/2$ .

Нетрудно понять первые следствия, которые получатся, если сделать квантовую теорию поля суперсимметричной. Для каждого (комплексного) скалярного поля необходимо ввести киральное фермионное поле. Самодействия бозонных полей связаны со взаимодействиями этих полей с фермионами; например, возможный лагранжиан взаимодействия с константой связи  $\lambda$  имеет вид

$$\Delta\mathcal{L} = -\lambda^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}\lambda\psi^T\sigma^2\psi. \quad (22.23)$$

В задаче 3.5 записан несколько более общий суперсимметричный лагранжиан. Аналогично, для каждого калибровочного поля можно ввести киральный фермион в присоединенном представлении калибровочной группы. Этот фермион, называемый *гейджино* (*gaugino*), осуществляет взаимодействия скалярных полей с их фермионными партнерами, сила которого определяется калибровочной константой связи  $g$ .

Особая связь между бозонными и фермионными взаимодействиями ведет к большим упрощениям в перенормировке суперсимметричных теорий. Некоторые из этих упрощений нетрудно предвосхитить. Поскольку суперсимметрия требует, чтобы каждая скалярная частица имела фермионного партнера той же самой массы, перенормировка массы этих частиц должны быть одинаковой. Но мы видели, что фермионная масса перенормируется мультипликативно и расходится только логарифмически, в то время как массовое слагаемое скалярного поля перенормируется аддитивно и поэтому может расходиться квадратично. Из наличия суперсимметрии должно вытекать, что квадратичные расходимости массовых слагаемых скалярного поля автоматически обращаются в нуль. Фактически эти сокращения должны происходить в каждом порядке теории возмущений, при этом петлевые диаграммы для бозонов должны сокращаться с диаграммами для виртуальных фермионов. Чтобы увидеть другое упрощение, требуемое суперсимметрией, вычислим среднее по вакууму от антикоммутирующих соотношений (22.21). Вакуумное состояние имеет нулевой импульс:  $P^i|0\rangle = 0$ . Если это состояние суперсимметрично, то  $Q_\alpha|0\rangle = Q_\beta^\dagger|0\rangle = 0$ . Тогда из уравнения (22.21) следует

$$\langle 0|H|0\rangle = 0. \quad (22.24)$$

\*Превосходное введение в формализм суперсимметрии см. Ю. Весс и Д. Баггер, *Суперсимметрия и супергравитация* (М.: Мир, 1985).



Мы уже отмечали, что бозонные поля дают положительный вклад в вакуумную энергию из-за энергии нулевой моды, а фермионные поля дают отрицательные вклады. Теперь, в суперсимметричной модели, мы видим, что эти вклады в точности сокращаются не только в ведущем, но и во всех порядках теории возмущений.

Более глубокое исследование суперсимметричных теорий приводит к дополнительным и весьма неожиданным сокращениям в теории перенормировок. Например, можно показать, что константы связи в скалярно-фермионных самодействиях типа  $\lambda$  в (22.23) перенормируются только за счет перенормировки напряженности поля. Таким образом, относительная величина двух различных скалярных взаимодействий остается неизменной. Если определенный тип перенормируемого взаимодействия отсутствует, он не может быть, в отличие от обычной теории поля, порожден перенормировкой. Простейшая суперсимметрия не ограничивает перенормировку калибровочных констант связи, но более высокие суперсимметрии могут приводить к глубоким эффектам. Так,  $N = 2$  суперсимметричные модели имеют нулевую  $\beta$ -функцию, если слагаемое ведущего порядка сделано равным нулю. В суперсимметричных моделях с  $N = 4$  эта сокращение происходит автоматически и  $\beta(g) = 0$  точно. Эти модели дают примеры четырехмерных квантовых полевых теорий без ультрафиолетовых расходимостей\*.

Таким образом, суперсимметрия приводит к замечательным, даже волшебным свойствам квантовой теории поля. Но возможно ли, чтобы истинные уравнения природы могли обладать такой высокой степенью симметрии? Поскольку мы убеждены, что не существует никакого заряженного бозона с такой же массой, как у электрона, мы понимаем, что суперсимметрия не может быть точной симметрией природы. Но есть искушение предположить, что это могла бы быть спонтанно нарушенная симметрия основных уравнений.

Фактически, эта догадка имеет плодотворные следствия для теорий Великого объединения, которые мы обсуждали в разделе 22.2. Проблема массы хиггсовского бозона, которую мы обсуждали в этом разделе, имеет изящное решение в моделях суперсимметрии. В суперсимметричной версии стандартной модели поле Хиггса является одним из большого количества скалярных полей с различными квантовыми числами, определяемыми группой  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Для всех этих скалярных полей массовые слагаемые получают только логарифмическую мультипликативную перенормировку. Если бы суперсимметрия была нарушена так, что между фермионными кварками и лептонами и их скалярными партнерами будет различие по массе в несколько сотен ГэВ, то также должен был бы существовать хиггсовский бозон с правильной (массой)<sup>2</sup>. Имеются серьезные основания, которые следуют из более детальных свойств теории, почему это должно быть именно хиггсовское поле, а не какое-либо другое скалярное поле, которое получает свое значение как вакуумное среднее<sup>†</sup>.

Если этот набор идей правилен, то скалярные партнеры кварков и лептонов должны быть достаточно легко обнаружены экспериментально в ближайшем будущем. В этом случае такие скалярные частицы и фермионные партнеры калибровочных бозонов влияли бы на перенормировку констант связи между достигнутыми энергиями и масштабом великого объединения. Это могло бы потенциально нарушить перспективы великого объединения, но, вместо этого, улучшает их: пунктирные линии рис. 22.1 с более впечатляющим слиянием трех констант взаимодействия были получены с помощью замены обычной  $\beta$ -функции на суперсимметричную.

\* Суперсимметричные модели с обращаемой в нуль  $\beta$ -функцией рассмотрена и в P. West, in *Shelter Island II*, R. Jackiw, N. N. Khuri, S. Weinberg, and E. Witten, eds. (MIT Press, Cambridge, 1985).

<sup>†</sup> Суперсимметричные модели кварков и лептонов и их наблюдаемые следствия рассмотрены в обзоре Н. Р. Nilles, *Phys. Repts.* **110**, 1 (1984), и в обзоре Н. Е. Haber and G. L. Kane, *Phys. Repts.* **117**, 75 (1985).

Последняя из задач, обсуждавшихся в разделе 22.2, также облегчается при введении суперсимметрии. В теории Великого объединения с нарушенной суперсимметрией те масштабы импульсов, которые намного больше, чем разница масс суперсимметричных партнеров, не дают никакого вклада в вакуумную энергию. Тогда естественная величина космологической константы в этих теориях  $\lambda \sim (100 \text{ ГэВ})^4$ . Это уменьшает несоответствие космологической постоянной до различия в 50 порядков по величине, хотя этого и недостаточно.

Если бы суперсимметричные партнеры частиц стандартной модели были бы обнаружены на опыте в ближайшее время, это открыло бы волнующие перспективы. В любом случае мы ожидаем, что эксперименты следующего поколения позволят сделать определенный выбор между этой гипотезой природы хиггсовского сектора и другими возможностями, приведенными в разделе 22.2. Так или иначе, мы сделаем еще один шаг к пониманию истинных фундаментальных уравнений.

## 22.5. К окончательной теории природы

Что же представляют из себя эти фундаментальные уравнения? Используют они квантовую теорию поля, или некоторый совершенно другой организующий принцип? Любой ответ на этот вопрос будет полностью спекулятивным. Однако существуют некоторые принципы и один пример, которые могут руководить в поиске.

Уделяя основное внимание в этой книге фундаментальным взаимодействиям физики элементарных частиц, мы почти совершенно не рассматривали гравитацию. Частично это было сделано потому, что квантовая теория гравитации не имеет каких-либо известных наблюдаемых следствий. Но верно и то, что квантовая теория гравитации до сих пор еще плохо сформулирована и неопределенна. Если рассматривать гравитацию как теорию поля с малой константой связи на языке фейнмановских диаграмм, нетрудно обнаружить, что расходимости этих диаграмм приводят к неперенормируемости теории. Это не удивительно, поскольку гравитация является теорией с константой взаимодействия, имеющей размерность обратной массы и масштабом масс  $m_{\text{Планк}}$ , определяемым (22.7). Следуя нашей общей философии перенормировок, вся сложность этой теории должна быть сконцентрирована на масштабе  $m_{\text{Планк}}$ .

На масштабах, где квантовые флуктуации гравитационного поля становятся важными, мы должны ожидать глубоких изменений в физике. Если эти изменения описываются в рамках квантовой теории поля, то они будут проявляться как флуктуации геометрии пространства-времени и топологии. Но кажется довольно вероятным, что квантовая теория поля будет фактически нарушаться на этом масштабе, при этом непрерывное пространство-время может замениться на новую дискретную или нелокальную геометрию.

Одной возможной частной моделью поведения пространства-времени на очень малых масштабах является *теория струн*, динамика абстрактных одномерных протяженных объектов. В разделе 22.1 уже упоминалось, что такие объекты, по-видимому, естественным образом возникают при попытках описания невылетания кварков в КХД, но детальные свойства этих объектов делают их неподходящими для феноменологии сильных взаимодействий. Среди разочаровывающих свойств этих систем — появление безмассовых состояний струны со спином два, и условие, что размерность пространства-времени должна быть увеличена, чтобы спектр теории не содержал много безмассовых состояний со спином единица. В 1974 г. Шерк и Шварц выдвинули важную гипотезу, что теория струн дает корректное математическое описание совсем другой проблемы, а именно — объединения взаимодействий элементарных частиц с гравитацией. Они интерпретировали квант со спином 2 как гравитон, а кванты со спином 1 как кван-

ты калибровочных бозонов калибровочной теории\*. Десятилетием позже Грин и Шварц обосновали эту догадку, показав, что в частном случае теория струн может быть интерпретирована как теория Великого объединения в десятимерном пространстве-времени, при этом будут автоматически выполнены все гравитационные и калибровочные тождества Уорда и автоматически сокращены аномалии. С тех пор было найдено много других решений уравнений связи теории струн, некоторые из которых соответствуют объединенным моделям калибровочных взаимодействий и гравитации в четырех измерениях. Эти модели могут естественно включать суперсимметрию и при этом условии приводить к конечному ультрафиолетовому поведению для всех амплитуд рассеяния, включая гравитоны<sup>†</sup>.

Струнные теории решают проблемы ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля, отвергая идею о том, что элементарные частицы — точечные объекты с контактным взаимодействием. Скорее наоборот, кварки, лептоны, калибровочные бозоны и гравитоны в струнной теории являются протяженными контурами струнных возбуждений, которые взаимодействуют нелокально. Так как частицы не могут быть точно локализованы, само пространство-время имеет нелокальный характер. В некотором смысле, при струнном описании гравитации интервалы, намного меньшие, чем планковская длина  $1/m_{\text{Планк}}$ , не существуют. Пока что не совсем ясно, как интуитивно понять ту геометрию, которую требует теория. Эта математическая проблема в настоящее время активно исследуется.

Если действительно истинная фундаментальная геометрия природы является нелокальной, дискретной, или разрывной каким-либо другим образом, то великая программа построения теории фундаментальных взаимодействий, которую мы сформулировали в этой книге, должна быть изменена существенным образом. Наиболее элементарные уравнения природы будут не калибровочно-инвариантными квантовыми теориями поля, а теориями, построенными из совершенно отличных элементов. Даже принципы конструирования моделей будут отличаться от тех, которые основаны на калибровочной и лоренцевской инвариантности, которые мы обсуждали здесь.

С другой стороны, квантовая теория поля все еще будет играть существенную роль в интерпретации этой структуры. Все процессы, которые мы наблюдаем, даже процессы с элементарными частицами при самых высоких энергиях, доступных в настоящее время, происходят на интервалах на 15 порядков больших, чем размеры струн или других флуктуирующих структур, которые появляются в фундаментальных уравнениях. Соотношение между экспериментальными наблюдениями и этими фундаментальными структурами очень похоже на соотношение между макроскопическими наблюдениями и лежащей в основе атомной структурой вещества. При изучении вещества мы используем классическое, ньютоновское описание атомов, чтобы перекинуть мост через этот промежуток и связать свойства газов, жидкостей и твердых тел с основными атомными свойствами. Можно сказать, что квантовая теория атомов позволяет получить набор эффективных ньютоновских уравнений, которые являются чрезвычайно мощными в макроскопической области. Такое ньютоновское описание, особенно в теории газов, может быть использовано как способ убедиться в реальности существования атомов и изучить их свойств.

Точно так же, какова бы ни была природа физики на планковских масштабах, она приводит к некоторой эффективной непрерывной квантовой теории поля. Эта квантовая теория поля могла бы быть точным приближением к фундаментальной физике уже

\*J. Scherk и J. H. Шварц, *Nucl. Phys.* **B81**, 118 (1974).

<sup>†</sup>Техническое введение в теорию струн и ее использование в построении объединенных моделей дается в книге M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory*, 2 vols. (Cambridge University Press, 1987).

в масштабах 100 планковских длин, что соответствует импульсам  $10^{17}$  ГэВ. Отсюда — к масштабу слабых взаимодействий, и далее — до длины волны света, и еще далее — до размеров Вселенной, квантовая теория поля может рассматриваться как основная структура для уравнений физики. Распознавая симметрии того особого набора уравнений поля, которыми обеспечила нас Природа, мы можем научиться вычислять все детали физических процессов во всей этой огромной области. И, отыскав источник этих симметрий, мы, возможно, сумеем увидеть следующий уровень и разгадать истинную структуру пространства-времени.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

# ССЫЛОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ

В этом приложении собраны вместе некоторые формулы, которые обычно используются при расчете фейнмановских диаграмм.

### А.1. Правила Фейнмана

Далее во всех теориях понимается, что импульс сохраняется в каждой вершине и что по неопределенным петлевым импульсам проведено интегрирование:  $\int D^4p/(2\pi)^4$ . Фермионные петли (включая петли для духов) получают дополнительный множитель  $(-1)$ , как объяснено на стр. 131. Наконец, каждая диаграмма может потенциально иметь множитель, обусловленный симметрией, как объяснено на стр. 107.

**Теория  $\phi^4$ :**  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$

$$\text{Скалярный пропагатор: } \begin{array}{c} \longleftarrow \\ p \end{array} = \frac{I}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Вершина для } \phi^4: \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = -i\lambda \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Внешний скаляр: } \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} = 1 \quad (\text{A.3})$$

(Вершины контрчленов для петлевых вычислений даны на стр. 318.)

**Квантовая электродинамика:**  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$

$$\text{Дираковский пропагатор: } \begin{array}{c} \longleftarrow \\ p \end{array} = \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Фотонный пропагатор: } \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \longleftarrow p \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.5})$$

(Фейнмановская калибровка; см. стр. 292 для обобщенной калибровки Лоренца)

$$\text{Вершина для КЭД: } \begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \longleftarrow \quad \longrightarrow \end{array} = iQe\gamma^\mu \quad (\text{A.6})$$

( $Q = -1$  для электрона)

Внешние фермионы:

$$\begin{aligned} \text{Начальный} & \quad \text{---} \leftarrow p = u^s(p) \quad (\text{начальный}) \\ \text{Конечный} & \quad p \text{---} = \bar{u}^s(p) \quad (\text{конечный}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Внешние антифермионы:

$$\begin{aligned} \text{Начальный} & \quad \text{---} \leftarrow p = \bar{v}^s(p) \quad (\text{начальный}) \\ \text{Конечный} & \quad p \text{---} = v^s(p) \quad (\text{конечный}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Внешние фотоны:

$$\begin{aligned} \text{Начальный} & \quad \text{---} \leftarrow p = \varepsilon_\mu(p) \quad (\text{начальный}) \\ \text{Конечный} & \quad p \text{---} = \varepsilon_\mu^*(p) \quad (\text{конечный}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

(Вершины контрчленов для петлевых вычислений даны на стр. 325)

### Неабелева калибровочная теория:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + gA_\mu^a \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi - \\ & - gf^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)^{\mu b \nu c} - \frac{1}{4}g^2(f^{eab}A_\mu^a A_\nu^b)(f^{ecd\mu\nu c d}) \end{aligned}$$

Пропагаторы фермионов и калибровочных бозонов — те же самые, как и в КЭД, только умножаются на единичную матрицу в пространстве калибровочной группы. Точно так же поляризация внешних частиц рассматривается аналогично КЭД, но каждой внешней частице соответствует ориентация в групповом пространстве.

Фермионная вершина:

$$\begin{array}{c} a, \mu \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = ig\gamma^\mu t^a \quad (\text{A.10})$$

3-х бозонная вершина:

$$\begin{array}{c} a, \mu \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ b, \nu \quad c, \rho \end{array} \quad \begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ q \end{array} = gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \quad (\text{A.11})$$

4-х бозонная вершина:

$$\begin{array}{c} a, \mu \quad b, \nu \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ c, \rho \quad d, \sigma \end{array} = -ig^2 [f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \quad (\text{A.12})$$

Вершина для духов:

$$\begin{array}{c} b, \mu \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ a \quad c \end{array} = -gf^{abc}p^\mu \quad (\text{A.13})$$

Пропагатор для духов:

$$a \cdots \leftarrow p \cdots b = \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (\text{A.14})$$

(Вершины контрчленов для петлевых вычислений даны на стр. 502 и 505)

**Другие теории.** Фейнмановские правила для других теорий могут быть найдены на следующих страницах:

Теория Юкавы	стр. 128
Скалярная КЭД	стр. 306
Линейная $\sigma$ -модель	стр. 341
Электрослабая теория	стр. 672, 697, 705

## А.2. Поляризация внешних частиц

Спиноры  $u^s(p)$  и  $v^s(p)$  удовлетворяют уравнениям Дирака вида

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{p} - m)u^s(p) = \bar{u}^s(p)(\not{p} - m) = \\ &= (\not{p} + m)v^s(p) = \bar{v}^s(p)(\not{p} + m), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

где  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ . Матрицы Дирака удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

Мы используем киральный базис

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

где

$$\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}). \quad (\text{A.18})$$

В этом базисе нормированные спиноры Дирака могут быть записаны как

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — двухкомпонентные спиноры, нормированные на единицу. В высокоэнергетическом пределе эти выражения упрощаются до

$$u(p) \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi^s \\ \frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \xi^s \end{pmatrix}, \quad v(p) \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \hat{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta^s \\ -\frac{1}{2}(1 + \hat{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \eta^s \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Используя стандартный базис для матриц Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

мы имеем, например,  $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  для спина вверх в направлении  $z$  и  $\xi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  для спина вниз в направлении  $z$ . Для антифермионов физический спин противоположен таковому для спиноров:  $\eta^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  соответствует спину *вниз* в направлении  $z$  и т. д.

При вычислении неполяризованных поперечных сечений можно ввести сумму по поляризациям

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (\text{A.22})$$

Для поляризованных поперечных сечений можно или прибегнуть к явным формулам (A.19) или вставить проекционные матрицы

$$\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right), \quad \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right), \quad (\text{A.23})$$

которые проектируют на правые и левые спиноры, соответственно. Для антифермионов спиральность спинора снова противоположна физической спиральности частицы.

Многие другие тождества, включающие в себя спиноры Дирака и матрицы, могут быть найдены в главе 3.

Векторы поляризации для фотонов и других калибровочных бозонов традиционно нормированы на единицу. Для безмассовых бозонов поляризация должна быть поперечной:

$$\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \text{где } \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Если  $\mathbf{p}$  находится в направлении  $+z$ , то векторы поляризации имеют вид

$$\varepsilon^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \varepsilon^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (\text{A.25})$$

— для правой и левой спиральностей соответственно.

При вычислении неполяризованных поперечных сечений, включающих фотоны, можно заменять выражение

$$\sum_{\text{поляризациям}} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \longrightarrow -g_{\mu\nu} \quad (\text{A.26})$$

с помощью тождества Уорда. В случае безмассовых неабелевых калибровочных бозонов нужно также просуммировать по испускаемым духам, как это обсуждается в разделе 16.3. В массивном случае нужно, кроме того, учесть испускание голдстоуновских бозонов, что обсуждается в разделе 21.1.

### А.3. Алгебра числителей

Операция взятия следа  $\gamma$  матриц может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\ \text{tr}(\text{любого нечетного числа } \gamma\text{-матриц}) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ \text{tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Другое тождество позволяет обратить порядок  $\gamma$  матриц под знаком следа:

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = \text{tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (\text{A.28})$$



Свертка  $\gamma$  матриц друг с другом упрощается до:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu\end{aligned}\tag{A.29}$$

(Эти тождества используются только для случая четырех измерений; см. следующий раздел.) Свертка символа  $\varepsilon$  также может быть упрощена:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24 \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu_\nu \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho)\end{aligned}\tag{A.30}$$

При некоторых вычислениях иногда бывает полезно перегруппировать произведения фермионных билинейных комбинаций с помощью *тождеств Фирца*. Пусть  $u_1, \dots, u_4$  — спиноры Дирака, и пусть  $u_{iL} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u_i$  — левосторонняя проекция. Тогда наиболее важная формула Фирца перестановки имеет вид

$$(\bar{u}_{1L}\gamma^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\gamma_\mu u_{4L}) = -(\bar{u}_{1L}\gamma^\mu u_{4L})(\bar{u}_{3L}\gamma_\mu u_{2L}).\tag{A.31}$$

Дополнительные формулы могут быть получены с помощью следующих тождеств для  $2 \times 2$  блоков матриц Дирака:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}; \quad (\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}.\tag{A.32}$$

В неабелевых калибровочных теориях фейнмановские правила включают в себя матрицы калибровочной группы  $t^a$ , которые образуют представление  $r$  алгебры Ли  $G$ . Символ  $G$  обозначает также присоединенное представление алгебры. Матрицы  $t^a$  удовлетворяют условиям

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c,\tag{A.33}$$

где структурные константы  $f^{abc}$  являются полностью антисимметричными. Инварианты  $C(r)$  и  $C_2(r)$  представления  $r$  определены соотношениями

$$\text{tr}[t^a t^b] = C(r)\delta^{ab}, \quad t^a t^a = C_2(r) \cdot \mathbf{1}.\tag{A.34}$$

Они связаны друг с другом как

$$C(r) = \frac{d(r)}{d(G)}C_2(r),\tag{A.35}$$

где  $d(r)$  — размерность представления. Вычисление следов и сверток  $t^a$  могут быть вычислены с помощью вышеупомянутых тождеств и их следствий:

$$\begin{aligned}t^a t^b t^a &= [C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)]t^b, \\ f^{acd} f^{bcd} &= C_2(G)\delta^{ab}, \\ f^{abc} t^b t^c &= \frac{1}{2}iC_2(G)t^a.\end{aligned}\tag{A.36}$$

Для групп  $SU(N)$  фундаментальное представление обозначается как  $N$ , и мы имеем

$$C(N) = \frac{1}{2}, \quad C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C(G) = C_2(G) = N. \quad (\text{A.37})$$

Очень полезным также является следующее соотношение, которому удовлетворяют матрицы фундаментального представления  $SU(N)$ :

$$(t^a)_{ij}(t^a)_{k\ell} = \frac{1}{2} \left( \delta_{i\ell} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{k\ell} \right). \quad (\text{A.38})$$

#### А.4. Интегралы по петлям и размерная регуляризация

Чтобы скомбинировать знаменатели пропагаторов, введем интегралы по фейнмановским параметрам:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n]^n}. \quad (\text{A.39})$$

Для случая только двух сомножителей в знаменателе эта формула приводит к

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (\text{A.40})$$

Более общая формула, в которой  $A_i$  может иметь произвольную степень, дана в уравнении (6.42).

После введения фейнмановских параметров заключенная в скобки величина в знаменателе будет квадратичной функцией переменных интегрирования  $p_i^\mu$ . Поэтому выделяем полный квадрат и сдвигаем переменные интегрирования так, чтобы поглотить член, линейный по  $p_i^\mu$ . Для однопетлевого интеграла имеется единственное интегрирование по импульсу  $p^\mu$ , который сдвинут к значению  $\ell^\mu$ . После этого сдвига знаменатель принимает вид  $(\ell^2 - \Delta)^n$ . При этом слагаемые в числителе с нечетными степенями  $\ell$  обращаются в нуль при интегрировании в симметричных пределах. Симметрия также позволяет использовать замену

$$\ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.41})$$

$$\ell^\mu \ell^\nu \ell^\rho \ell^\sigma \rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (\ell^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{A.42})$$

(Здесь  $d$  является пространственно-временной размерностью.) Для вычисления интеграла удобнее всего использовать виковский поворот к евклидову пространству, выполняющая замену

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \ell^2 = -\ell_E^2. \quad (\text{A.43})$$

Альтернативный подход состоит в использовании следующей таблицы  $d$ -мерных интегралов в пространстве Минковского:

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}}, \quad (\text{A.44})$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}, \quad (\text{A.45})$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}, \quad (\text{A.46})$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{(\ell^2)^2}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2}, \quad (\text{A.47})$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu \ell^\rho \ell^\sigma}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \times \quad (\text{A.48})$$

$$\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}).$$

При сходимости интеграла можно положить  $d = 4$  с самого начала. Если интеграл расходится, то поведение вблизи  $d = 4$  можно выделить с помощью разложения

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = 1 - (2 - \frac{d}{2}) \ln \Delta + \dots \quad (\text{A.49})$$

Для этого часто бывает необходимо разложение  $\Gamma(x)$  вблизи ее полюсов:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x) \quad (\text{A.50})$$

вблизи  $x = 0$ , и

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{x+n} - \gamma + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right) \quad (\text{A.51})$$

вблизи  $x = -n$ . Здесь  $\gamma$  является константой Эйлера–Маскерони,  $\gamma \approx 0.5772$ . При вычислениях также часто появляется следующая комбинация членов:

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right), \quad (\text{A.52})$$

где  $\varepsilon = 4 - d$ .

Отметим, что  $\Delta$  является положительной, если она является комбинацией масс и *пространственноподобных* инвариантов импульсов. Если  $\Delta$  содержит времениподобные импульсы, то она может стать отрицательной. Тогда эти интегралы приобретают

мнимые части, которые приводят к разрывам  $S$ -матричных элементов в комплексной плоскости. Для вычисления  $S$ -матрицы в физической области необходимо выбрать правильный лист функции в соответствии с предписанием

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}} \rightarrow \left(\frac{1}{\Delta - i\varepsilon}\right)^{n-\frac{d}{2}}, \quad (\text{A.53})$$

где  $-i\varepsilon$  (не путайте с  $\varepsilon$  в предыдущем разделе!) определяют малую отрицательную мнимую часть.

Вычисление следов в уравнении (A.27), которые не включают в себя  $\gamma^5$ , не зависит от размерности. Однако, поскольку

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = d \quad (\text{A.54})$$

в  $d$  измерениях, тождества для сверток (A.29) изменяются:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= d \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(d-2)\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - (4-d)\gamma^\nu \gamma^\rho \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4-d)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

## A.5. Сечения рассеяния и вероятности распада

Поскольку квадрат матричного элемента процесса рассеивания известен, дифференциальное сечение рассеяния дается выражением

$$\begin{aligned} D\sigma &= \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \times \\ &\times |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum P_f). \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Дифференциальная вероятность распада нестабильной частицы для данного конечного состояния выражается как

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \rightarrow p_f)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} - \sum p_f). \quad (\text{A.57})$$

В частном случае двухчастичного конечного состояния, лоренц-инвариантное фазовое пространство принимает простой вид

$$\left( \prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i - \sum p_f) = \int \frac{D\Omega_{\text{CM}}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left( \frac{2|\mathbf{p}|}{E_{\text{CM}}} \right), \quad (\text{A.58})$$

где  $|\mathbf{p}|$  — величина 3-импульса каждой частицы в системе центра масс.

### А.6. Физические константы и переводные множители

Точно известные физические константы:

$$\begin{aligned}
 c &= 2.998 \times 10^{10} \text{ см/с,} \\
 \hbar &= 6.582 \times 10^{-22} \text{ МэВ с,} \\
 e &= -1.602 \times 10^{-19} \text{ Кл,} \\
 \alpha &= \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.04} = 0.00730, \\
 \frac{G_F}{(\hbar c)^3} &= 1.166 \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}.
 \end{aligned}$$

Значения констант взаимодействия для сильного и слабого взаимодействий зависят от соглашений, используемых для их определения, как объяснено в разделах 17.6 и 21.3. Для расчетов, однако, можно использовать следующие значения:

$$\begin{aligned}
 \alpha_s(10 \text{ ГэВ}) &= 0.18 \\
 \alpha_s(m_Z) &= 0.12 \\
 \sin^2 \theta_w &= 0.23
 \end{aligned}$$

Массы частиц (умноженные на  $c^2$ ):

$$\begin{array}{lll}
 e : 0.5110 \text{ МэВ} & p : 938.3 \text{ МэВ} & W^\pm : 80.2 \text{ ГэВ} \\
 \mu : 105.6 \text{ МэВ} & n : 939.6 \text{ МэВ} & Z^0 : 91.19 \text{ ГэВ} \\
 \tau : 1777 \text{ МэВ} & \pi^\pm : 139.6 \text{ МэВ} & \pi^0 : 135.0 \text{ МэВ}
 \end{array}$$

Полезные комбинации:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Боровский радиус:} & a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5.292 \times 10^{-9} \text{ см} \\
 \text{Комптоновская длина волны электрона:} & \lambda = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.862 \times 10^{-11} \text{ см} \\
 \text{классический радиус электрона:} & r_e = \frac{\alpha \hbar}{m_e c} = 2.818 \times 10^{-13} \text{ см} \\
 \text{Томсоновское сечение рассеяния:} & \sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 0.6652 \text{ барн} \\
 \text{сечение рассеяния в случае аннигиляции:} & 1 \text{ R} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{см}}^2} = \frac{86.8 \text{ нбарн}}{(E_{\text{см}} \text{ в ГэВ})^2}
 \end{array}$$

Переводные множители:

$$\begin{aligned}
 (1 \text{ ГэВ})/c^2 &= 1.783 \times 10^{-24} \text{ г} \\
 (1 \text{ ГэВ})^{-1}(\hbar c) &= 0.1973 \times 10^{-13} \text{ см} = 0.1973 \text{ фм;} \\
 (1 \text{ ГэВ})^{-2}(\hbar c)^2 &= 0.3894 \times 10^{-27} \text{ см}^2 = 0.3894 \text{ мбарн} \\
 1 \text{ барн} &= 10^{-24} \text{ см}^2 \\
 (1 \text{ в/м})(e\hbar c) &= 1.973 \times 10^{-25} \text{ ГэВ}^2 \\
 (1 \text{ тл})(e\hbar c^2) &= 5.916 \times 10^{-17} \text{ ГэВ}^2
 \end{aligned}$$

Полные и современные таблицы фундаментальных констант и свойств элементарных частиц можно найти в *Review of Particle Properties*, которые опубликованы в недавних выпусках *Physical Review D* или *Physics Letters B*. Наиболее современный обзор на момент написания издан в *Physical Review D* **50**, 1173 (1994).

## БИБЛИОГРАФИЯ

### Математические основы и ссылки

- Cahn, Robert N., *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Написана физиком для физиков.
- Carrier, George F., Krook, Max, and Pearson, Carl E., *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, New York, 1966. Превосходное практическое введение в методы комплексных переменных и контурного интегрирования.
- Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products* (trans. and ed. by Alan Jeffrey), Academic Press, Orlando, Florida, 1980. [Имеется оригинал: Градштейн М. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. — М.: Наука, 1971.]

### Физические основы

- Baym, Gordon, *Lectures on Quantum Mechanics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1969. Краткое неформальное изложение, особенно богато нетривиальными приложениями.
- Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, McGraw-Hill, New York, 1980. Включает отдельные главы по механике непрерывных сред и полезные приложения с материалом математического характера.
- Feynman, Richard P., *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1985. [Имеется перевод: Фейнман Р. *КЭД: странная теория света и вещества*. — М.: Наука, 1988.] Запись четырех лекций, прочитанных для широкой аудитории, в которых представлен фейнмановский подход к квантовой механике, включая фейнмановские диаграммы. Настоятельно рекомендуется.
- Feynman, Richard P. and Hibbs, A. R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965. [Имеется перевод: Фейнман Р., Хиббс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. — М.: Мир, 1968.] Введение, посвященное использованию континуальных интегралов в нерелятивистской квантовой механике.
- Goldstein, Herbert, *Classical Mechanics* (second edition), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980. [Имеется перевод: Голдстейн Г. *Классическая механика*. — М.: Наука, 1975.] В главе 12 введена классическая релятивистская теория поля.
- Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics* (second edition), Wiley, New York, 1975. [Имеется перевод: Джексон Дж. Д. *Классическая электродинамика*.]
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields* (fourth revised English edition, trans. Morton Hamermesh), Pergamon, Oxford, 1975. [Оригинал: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. — М.: Наука, 1988.] Содержит сжатое изложение электромагнитной теории с лагранжевой точки зрения.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Statistical Physics* (third edition, Part 1, trans. J. B. Sykes and M. J. Kearsley), Pergamon Press, 1980. [Оригинал: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика, часть 1*. — М.: Наука, 1976.] Полезный, краткий учебник

- по статистической механике, содержит оригинальное педагогическое изложение теории фазовых переходов Ландау.
- Reichl, L. E., *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin, 1980. Полный учебник статистической механики.
- Schiff, Leonard I., *Quantum Mechanics* (third edition), McGraw-Hill, New York, 1968. [Имеется перевод: Шифф Л. *Квантовая механика*. — М.: ИЛ, 1957.]
- Shankar, Ramamurti, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum, New York, 1980. Очень ясное изложение основ теории.
- Taylor, Edwin F. and Wheeler, John Archibald, *Spacetime Physics* (second edition), Freeman, New York, 1992. [Имеется перевод: Тейлор Э. Ф., Уилер Дж. А. *Физика пространства-времени*. — М.: Мир, 1971.] Элементарное, но очень полезное введение в специальную теорию относительности.
- Taylor, John R., *Scattering Theory*, Robert E. Krieger, Malabar, Florida, 1983 (reprint of original edition published by Wiley, New York, 1972). [Имеется перевод: Тейлор Дж. Р. *Теория рассеяния*. — М.: Мир, 1975.] Очень ясное изложение теории рассеяния для нерелятивистской квантовой механики.

### Релятивистская квантовая механика и теория поля

- Bailin, D. and Love, A., *Introduction to Gauge Field Theory* (revised edition), Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993. Изложение теории полностью основано на континуальном интеграле.
- Balian, Roger and Zinn-Justin, Jean (eds.), *Methods in Field Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1976. Proceedings of the 1975 Les Houches Summer School in Theoretical Physics. Включает в себя лекции по функциональным методам, перенормировкам и калибровочным теориям.
- Berestetskii, V. B., Lifshitz, E. M., and Pitaevskii, L. P., *Quantum Electrodynamics* (second edition, trans. J. B. Sykes and J. S. Bell), Pergamon, Oxford, 1982. [Оригинал: Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., и Питаевский Л. П. *Квантовая электродинамика*. — М.: Наука, 1980.] Превосходная книга по приложениям КЭД.
- Vjorken, James D. and Drell, Sidney D., *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964. [Имеется перевод: Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. *Релятивистская квантовая механика*. — М.: Наука, 1978.] Изложение фейнмановских диаграмм на интуитивных аргументах, без использования понятия поля.
- Vjorken, James D. and Drell, Sidney D., *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965. [Имеется перевод: Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. *Релятивистские квантовые поля*. — М.: Наука, 1978.] Переизложение метода фейнмановских диаграмм с полевой точки зрения на основе канонического квантования.
- Brown, Lowell S., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, New York, 1992. Тщательное рассмотрение основ квантовой теории поля и ее приложение к процессам рассеяния.
- Coleman, Sidney, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. Неформальные лекции по ряду разделов, включающих в себя калибровочные теории и симметрии, прочитаны между 1966 и 1979 гг.
- Collins, John, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. [Имеется перевод: Коллинз Дж. *Перенормировка*. — М.: Мир, 1988.] Тщательное изложение технического аппарата, необходимого для доказательств перенормируемости по всем порядкам, операторного разложения и теорем факторизации.
- Deser, Stanley, Grisaru, Marc, and Pendleton, Hugh, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, MIT Press, Cambridge, 1970, vol. 1. Четыре чрезвычайно полезных лекции, прочитанных на летней школе.

- Gross, Franz, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, 1993. Включает ряд разделов по «продвинутой квантовой механике», и вводную главу по связанным состояниям.
- Itzykson, Claude and Zuber, Jean-Bernard, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980. [Имеется перевод: Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. *Квантовая теория поля*, Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.] Всесторонний учебник.
- Jauch, J. M. and Rohrlich, F., *The Theory of Photons and Electrons* (second edition), Springer-Verlag, Berlin, 1976. Авторитетная монография по КЭД.
- Kaku, Michio, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, 1993. Содержит краткие вводные главы по ряду продвинутых разделов.
- Kinoshita, T., ed., *Quantum Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, 1990. Собрание обзорных статей по точным проверкам КЭД.
- Mandl, F. and Shaw, G., *Quantum Field Theory* (revised edition), Wiley, New York, 1993. Самая простая книга по теории поля; рассмотрены КЭД и электрослабая теория на основе канонического квантования.
- Ramond, Pierre, *Field Theory: A Modern Primer* (second edition), Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989. [Имеется перевод: Рамон П. *Теория поля: современный вводный курс*. — М.: Мир, 1984.] Содержит прекрасное изложение группы Лоренца, континуальных интегралов, теорию  $\phi^4$  и квантование калибровочных теорий.
- Ryder, Lewis H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. [Имеется перевод: Райдер Л. *Квантовая теория поля*. — М.: Мир, 1987.] Кратко рассмотрены формальные аспекты предмета.
- Sakurai, J. J., *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1967. Изложение фейнмановских диаграмм без использования понятия поля.
- Schweber, Silvan S., *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, Princeton University Press, Princeton, 1994. Превосходная история предмета приблизительно до 1950.
- Schwinger, Julian (ed.), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover, New York, 1958. Перепечатки важных статей, написанных между 1927 и 1953.
- Sterman, George, *Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Вводный учебник со специальным акцентом на основах пертурбативной КХД.

### Физика элементарных частиц

- Aitchison, Ian J. R. and Hey, Anthony J. G., *Gauge Theories in Particle Physics* (second edition), Adam Hilger, Bristol, 1989. Элементарное введение в калибровочные теории, основное внимание уделено трехуровневым процессам.
- Barger, Vernon and Phillips, Roger J. N., *Collider Physics*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1987. В основном обсуждается применение КХД к феноменологии коллайдеров высокой энергии.
- Cahn, Robert N. and Goldhaber, Gerson, *The Experimental Foundations of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Перепечатка многих оригинальных статей, дополненных вводными обзорами, дополнительными ссылками и упражнениями. Настоятельно рекомендуется.
- Cheng, Ta-Pei and Li, Ling-Fong, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, New York, 1984. [Имеется перевод: Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*. — М.: Мир, 1987.] Продвинутая, авторитетная монография.



- Commins, Eugene D. and Bucksbaum, Philip H., *Weak Interactions of Leptons and Quarks*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Полный обзор теории и эксперимента.
- Field, Richard D., *Applications of Perturbative QCD*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1989. Полезное описание методов, необходимых для вычислений в КХД вне ведущего порядка теории возмущений.
- Georgi, Howard, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Продвинутое, полезное рассмотрение отдельных разделов.
- Griffiths, David, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, New York, 1987. Хороший обзор аспирантского уровня.
- Halzen, Francis and Martin, Alan D., *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Wiley, New York, 1984. [Имеется перевод: Хелзен Ф., Мартин А. *Кварки и лептоны*. — М.: Мир, 1987.] Полностью основано на использовании фейнмановских диаграмм, изложение сконцентрировано на калибровочных теориях.
- Perkins, Donald H., *Introduction to High Energy Physics* (third edition), Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1987. Хорошее введение в феноменологию со сравнительно небольшим акцентом на фейнмановские диаграммы и калибровочные теории.
- Quigg, Chris, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1983. Очень хороший обзор калибровочных теорий и их экспериментальных проверок.
- Ross, Graham G., *Grand Unified Theories*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Ясное введение в калибровочные теории, унифицирующих взаимодействия физики частиц.
- Taylor, J. C., *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. [Имеется перевод: Тейлор Дж. *Калибровочные теории слабых взаимодействий*. — М.: Мир, 1978.] Краткое изложение стандартной модели и связанных теоретических вопросов.

### Физика конденсированного состояния

- Abrikosov, A. A., Gorkov, L. P., and Dzyaloshinskii, I. E., *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics* (second edition), Pergamon, Oxford, 1965. [Оригинал: Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. *Методы квантовой теории поля в статистической физике*. — М.: Физматгиз, 1962.] Классическое, но очень краткое изложение применения фейнмановских диаграмм к проблемам конденсированного состояния.
- Anderson, P. W., *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984. Неформальный обзор концепции нарушения симметрии и перенормировок в приложении к системам конденсированного состояния.
- Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, 1971. Непосредственное введение по использованию фейнмановских диаграмм в ядерной физике и физике конденсированного состояния.
- Ma, Shang-Keng, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin/Cummings, 1976. [Имеется перевод: Ма Ш. *Современная теория критических явлений*. — М.: Мир, 1980.] Введение в методы группы перенормировок в теории критических явлений.
- Mattuck, Richard D., *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, McGraw-Hill, New York, 1967. [Имеется перевод: Маттук Р. Д. *Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел*. — М.: Мир, 1969.] Ясное и простое введение в фейнмановские диаграммы в физике твердого тела.

- Parisi, Giorgio, *Statistical Field Theory*, Benjamin/Cummings, 1988. Далеко идущие приложения идей квантовой теории поля к проблемам статистической механики.
- Stanley, H. Eugene, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford, 1971. [Имеется перевод: Стенли Г. *Введение в теорию фазовых переходов и критических явлений.*]
- Zinn-Justin, Jean, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (third edition), Oxford University Press, Oxford, 1996. Рассмотрено применение теории перенормировок к исследованию критических явлений.

### Поправки к этой книге

Список опечаток и исправлений для этой книги представлен в Интернет по URL – адресу «<http://www.slac.stanford.edu/~mpeskin/qft.html>», или может быть получен от авторов. Мы будем благодарны, если Вы сообщите дополнительные ошибки, обнаруженные в книге, или пошлете другие комментарии по электронному адресу [mpeskin@slac.stanford.edu](mailto:mpeskin@slac.stanford.edu) или [dschroeder@cc.weber.edu](mailto:dschroeder@cc.weber.edu).

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- $A_{LR}^f$  (поляризационная асимметрия при  $Z^0$ ), 666–668, 683, 712–715, 722–723
- $\alpha$  (критический показатель), 420, 425–426
- $\alpha$  (постоянная тонкой структуры), 20, 135, 756
- измерение, 198
- радиационные поправки, 250–255, 326, 404, 714–716
- $\alpha^i$  (матрицы Дирака), 68
- $\alpha_*$  ( $\alpha(m_Z)$ ), 711
- $\alpha_s$ , 258–260, 521, 542, 668
- бегущая, 522–524, 561–562
- измерение, 560–562
- Адрон-адронные столкновения, 533–542, 734
- Адроны, 451, 517–518, 523, 731
- Аксиальный векторный ток, 66–67, 612–626, 661–663
- в КХД, 627–635, 742
- Аксиальный изоспин-синглетный ток, 632–633
- Аксион, 212, 681
- Алгебра Дирака, *см.*  $\gamma^\mu$
- Ли полупростая, 472
- — простая, 472
- Лоренца, 55
- Алгебры Ли, 54, 471–480, *см. также* Соотношения теории групп, Группы
- — классификация, 472
- Амплитуда в квантовой механике, 272
- двухточечная, 96, 217, *см. также*  $M^2(p)$ ,  $\Sigma(p)$ ,  $\Pi^{\mu\nu}(q)$
- — аналитическая структура, 215–224
- — скейлинговое поведение, 399–401
- — одноточечная в КЭД, 310–311, 334
- — в линейной сигма-модели, 343, 348–349
- распространения, 31, 44, 51
- рассеяния ( $\mathcal{M}$ ), 24, 116, *см. также* Аналитические свойства амплитуды,  $S$ -матрица
- — вблизи резонанса, 113
- — рассеяния вперед, 231–233
- Аналитические свойства амплитуд, 215–237, 250–251, 583–585, 596, 755
- Аналитическое продолжение в евклидово пространство, 288
- Аналогии со статистической механикой, 263–272, 287–289, 351, 354, 378, 419–421, 737
- Аннигиляция, *см.*  $e^+e^-$  аннигиляция, Сечение рассеяния
- пар, *см.*  $e^+e^-$  аннигиляция, Сечение рассеяния
- фермионов-антифермионов, *см.*  $e^+e^-$  аннигиляция, Сечение рассеяния
- Аномалия Адлера–Белла–Джакива, 621–626, 631–635, 644, 646, 661–663
- — операторное уравнение, 621
- аксиального вектора в  $d$  измерениях, 626
- — в двух измерениях, 612–618
- — в четырех измерениях, 621–626, 631–635, 644, 646, 661–663
- следа, 642–644, 646
- Аномальные размерности, 407, 426, 578–580, *см. также*  $\gamma$
- Аномальный магнитный момент, 191, 212
- мюон, 198, 724
- электрона, 197–198
- Антикварки, *см.* Кварки, Функции распределения партонов
- Антикоммутационные соотношения Дирака, 56, 72
- Антифермионы, 74, 76, 751
- Антиферромагнетики, 428–429
- Античастицы, 23, 31, 46
- Антиэкранирование, 514–515
- Аромат (кварков), 148, 257, 517
- Асимметрия вперед-назад, 667–668
- Асимптотическая свобода, 405–407, 481, *см. также*  $\alpha_s$ ,  $\beta$
- в КХД, 149, 456–457, 522–525, 590, 731, 733
- в калибровочных теориях, 504–515
- в модели Гросса–Неве, 418
- в нелинейной сигма-модели, 436–439
- ее цена, 515
- интуитивные объяснения, 438, 513–515
- Асимптотическое поведение амплитуд, 263, 331, 334–335, 399, 401
- Асимметрии при  $Z$  резонансе, *см.*  $A_{LR}^f$
- Атомные энергетические уровни, влияние КЭД, 198, 251

- влияние слабого взаимодействия, 665, 668
- $B(\alpha, \beta)$  (Бета-функция), 249
- $\beta$  (критический показатель), 271, 420, 425–426
- $\beta$  (функция Каллана-Симанчика), 392–398, 400, 404–408, 642–643, *см. также* Асимптотическая свобода
- в  $d$  измерениях, 415, 428
- в суперсимметричных моделях, 736, 744–745
- для линейной сигма-модели, 427
- для модели Гросса-Неве, 418
- для неабелевых калибровочных теорий, 504, 516
- для нелинейной сигма-модели, 435, 442
- для скалярной КЭД, 448
- для теории  $\phi^4$ , 394
- для теории Юкавы, 418
- зависимость от условий, 407–408
- знак, 404–406
- нули, 405, *см. также* Фиксированная точка
- Бактерия, 399–400, 413–414
- Барионы, 451, 517–518
- Барн (единица измерения сечения рассеяния), 757
- Бегущая константа связи, 253–255, 386–387, 400–402, 404–408, *см. также* Асимптотическая свобода,  $\beta$ , Фиксированная точка
- в КХД ( $\alpha_s$ ), 522–524, 560–563
- в КЭД ( $\alpha$ ), 253–255, 404
- в нелинейной сигма-модели, 436–439
- в теории  $\phi^4$ , 402
- Бесконечности, *см.* Инфракрасные расходимости, Ультрафиолетовые расходимости
- Беспорядок, 438–439
- Бета-латунь, 428–429
- Бета-распад, 630, 665
- Бете-анзатц, 740
- Билинейность поля Дирака, 65–68, 86
- Бинарные жидкости, 428–429
- Бинарные сплавы, 264–265, 269, 417
- Бифуркация в критической точке, 266
- Благодарности, 16
- Блох Ф., 201
- Боголюбов Н. Н., 328–329
- Бозон векторный, 180–181, 709–710, *см. также* Калибровочное поле, Механизм Хигса, Фотон,  $W$ ,  $Z$
- Борновское приближение, 131
- Боровский радиус, 756
- Бусты, 56–57, 86–87
- Бухгалтерия, альтернативные методы, 318
- Быстрота, 62, 535
- продольная, 81
- Бьеркен Дж. Д., 453
- $V(x)$  (матрица преобразования калибровки), 462
- $W$ -бозон, 408–409, 451, 529–530, 653, 658, *см. также*  $e^+e^-$ -аннигиляция
- в поправках КХД, 574
- масса, 666, 668, 714, 716, 722, 723, 756
- образование в адронных столкновениях, 560–561, 666
- распад, 683
- $W_1, W_2$  (форм-факторы глубоконеупругого рассеяния), 589–596, 609–610
- $W_3$  (форм-фактор глубоконеупругого рассеяния), 609–610
- Вайнберг С., 201, 657
- Вакуум (основное состояние), 38–39, 96, 100, 355–356, 368
- Вакуумная функция в КЭД, 310
- Вакуумное среднее, 337–339, 351, 358, *см. также* Поле Хигса
- Вектор Пойнтинга, 50
- 4-векторы, 18
- Вектор, построенный из поля Дирака, 66
- Векторный потенциал, 20, 459
- Векторный ток, *см.* Ток
- Векторы с поперечной поляризацией, 134, 167, 751
- Великое объединение, 639, 735–739, 747
- его масштаб, 735–736, 745
- Вельтман, М. Дж. Г., 247, 622
- Вероятность распада частицы, 113, 118–119, 137, 159, 237, 755
- рассеяния, 116
- Вершина, *см.* Правила Фейнмана
- трех калибровочных бозонов, 482
- Взаимодействие с ЭМ полем, 92
- с производными, 94, 306, 382
- Взаимодействия в Природе, 93, 451
- между векторными полями, 465, 467
- неперенормируемые, 314–315, 382, 414, 461
- фермионов в теории ГВС, 660–661
- Виковский поворот, 194–195, 287–288, 377, 754
- Вилчек Ф., 456, 504
- Вильсон К., 263, 377, 506, 518, 578
- Вильсоновская линия, 467–470, 480, 615–617, 732
- петля, 468, 470, 479, 618, 732–733
- Влияние взаимодействия на одночастичные состояния, 120
- Вложенные расходимости, 326–329
- Внешние линии, 24, 27, *см. также* Правила Фейнмана
- Водород, *см.* Атомные уровни энергии
- Водородный мазер, 198
- Волновая функция Шредингера, 19, 157
- — граничного состояния, 156–161
- Волновые пакеты, 114–115, 226–228
- релятивистские уравнения, 31, 52

- Восприимчивость магнитная, 420, 425–426  
 Вращение локальной фазы, *см.* Калибровочное преобразование  
 Время жизни, *см.* Вероятность распада  
 Вторичное квантование, 36  
 Выпуклость эффективного потенциала, 355–356  
 Вычитание *Ad hoc*, 196, 223–224, 231  
 — УФ расходимостей, 196  
 — минимальное, *см.*  $\overline{MS}$   
 Вязкость, 263  
  
 $G_2$  (исключительная алгебра Ли), 473  
 $G_F$  (константа Ферми), 529, 664, 712–715, 756  
 $\Gamma(x)$  (Гамма-функция), 249, 754  
 $\Gamma[\phi_{cl}]$  (эффективное действие), 353–354  
 $\gamma$  (константа Эйлера–Машерони), 249, 363  
 $\gamma$  (критический показатель), 420, 426  
 $\gamma$  (функция Каллана–Симанчика), 392–398, 407  
 — в КЭД, 397  
 — в теории  $\phi^4$ , 394, 444  
 — для  $\phi^2$ , 412, 464  
 — для  $\bar{q}q$ , 567  
 — для линейной сигма-модели, 427  
 — для нелептонных слабых взаимодействий, 576  
 — для нелинейной сигма-модели, 435, 442  
 — для оператора распада протона, 608  
 — для операторов, 408–415, 570, 577–580  
 — для операторов твиста 2, 598, 602  
 — для токов, 412, 568  
 — матрица, 410, 575–576, 580  
 $\gamma^5$  (матрица киральности), 66, *см. также* Аномалия аксиального вектора  
 — в  $d$  измерениях, 622, 626, 639–640, 718  
 — включая следы, 143, 752  
 $\gamma^\mu$  (матрицы Дирака), 27, 56–57, 750, *см. также* Тожество Фирца  
 — в  $d$  измерениях, 250  
 — в двух измерениях, 612  
 — след, 141–144, 752  
 — тождества свертки, 144, 752  
 — — в  $d$  измерениях, 250, 755  
 $g$  ( $g$ -множитель Ланде), 191, *см. также* Аномальный магнитный момент  
 Гамильтониан, 33, 36, *см. также* Аналогии со статистической механикой  
 — Дирака, 68, 73  
 — отказ от него, 279  
 Гармонический осциллятор, 37, 307  
 Гауссов интеграл, бесконечномерный, 275, 281, 295–296, *см. также* Функциональное интегрирование  
 Гейджино, 744  
 Гелий, сверхтекучесть, 264, 417  
 Гелл-Манн М., 517  
 Генераторы алгебры Ли, 54, 466, 471, *см. также* Алгебра Ли  
 — — для преобразований Лоренца, 86–87  
 — вращений для фермионов, 57, 75–76, 86–87  
 — симметрий, *см.* Алгебры Ли  
 Геометрическая прогрессия для собственно-энергетических диаграмм, 222, 229  
 Геометрия и топология пространства-времени, 384, 746–748  
 Геометрия, дискретная или нелокальная, 746–748  
 Гидродинамически-бактериологическая аналогия, 399–400  
 Гиперболоид в 4-импульсном пространстве, 41  
 — в пространстве энергии-импульса, 215–216  
 Глобальные свойства групп Ли, 472  
 Глобальный смысл несохранения аксиального тока, 617–619  
 Глэшоу С., 657  
 Глюоны, 137, 257, 453, 457, 518, *см.* Сечение рассеяния, Партоновая функция распределения, Операторы твиста 2  
 — их спин, 563  
 — суммы по поляризациям, 540  
 Голдстоуновский бозон, 264, 340–341, 433, 438, 631, 647–657, 674, 686, 695–696, *см. также* Механизм Хиггса  
 Гравитационная аномалия, 639, 662–663  
 Гравитация, 79, 384, 641, 736–739, 743–748  
 Гравитон, 136, 746–747  
 Граничные условия запаздывающие, 184  
 Граничные условия Фейнмана, 108  
 Греческие индексы, 18  
 Гринберг О., 517  
 Громоздкие произведения билинейных комбинаций, 68  
 Громоздкие фазы и перекрывающиеся множители, 119–120, 280  
 Гросс Д. Дж., 456, 504  
 Группа Лоренца, 26, 54, 86–87  
 — абелева, 463, 472  
 — вращений, 54–56, 87  
 — — в  $N$  измерениях, *см.*  $O(N)$   
 — некомпактная, 57  
 Группы классические, 472  
 — непрерывные, 54, 462, 471  
  
 $D$  (степень расходимости), 309  
 $D_F$ , *см.* Пропагатор Фейнмана  
 $\mathcal{D}$  (мера функционального интеграла), 272  
 D0-эксперимент, 723  
 Давление, 287  
 Дайсон Ф., 96  
 Двойной логарифм, *см.* Двупетлевые диаграммы  
 — — Судакова, 188, 200, 201, 205–206, 389  
 Двойственность частица-волна, 43

- Двумерная КЭД, 612–619  
 Двухкомпонентный магнит, 418  
 — спинор, 83  
 Двухуровневая система в статистической механике, 307  
 Действие, 32, 273  
 $\delta$  (критический показатель), 420, 425–426  
 $\delta$ -функция, 19–20  
 — в функциях расщепления партонов, 548–549  
 — функциональная, 290  
 $\delta_Z$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_1$ , и т. д., см. Контрчлены  
 $\Delta^{++}$ -барион, 517  
 Джакив Р., 357  
 Диаграмма-кактус, 105  
 Диаграммы ОЧН (одночастичные неприводимые), 222, 229, 244, 320, 323, 366–368, 390, см. также Уравнение Каллана–Симанчика, Эффективное действие  
 — ампутированные, 120, 124, 182, 229–230, 323  
 — вакуумных пузырей, 108–110, 124  
 — двупетлевые, 327–335  
 — — двойной логарифм в них, 308, 334  
 — — и связь с ренормализационной группой, 562–563  
 — многопетлевые, 326–335  
 — асимптотическое поведение, 331, 334–335  
 — несвязные, 108, см. также Диаграммы связные, Экспоненцирование  
 — однопетлевые, вычисление в КЭД, 192–197, 219–221, 246–250, 323–325  
 — — в линейной сигма-модели, 344–350  
 — — в неабелевой калибровочной теории, 495–506  
 — — в теории  $\phi^4$ , 318–322  
 — связные, 120, 122–124  
 — треугольные, 621–623, 637, 661–663, см. также Аномалия Адлера–Белла–Джакива  
 — фейнмановские, 23, 24, 215, см. также Правила Фейнмана, Теория возмущений  
 — — для амплитуды рассеяния, 120–125  
 — — для вычисления  $V_{\text{eff}}$ , 361  
 — — для вычисления функциональных определителей, 298–299  
 — — для корреляционных функций, 103–111  
 — — общая процедура вычисления, 147  
 — — оптическая теорема для них, 233–236  
 — — применение к  $S$ -матрице, 230  
 Диаграммы-головастики, 359  
 — в КЭД, 310–311, 334  
 — в линейной сигма-модели, 343  
 — в неабелевой калибровочной теории, 496  
 Дирак П. А. М., 56  
 Диэлектрическое свойство вакуума, 253, 513  
 Длина волны де Бройля, 115, 273  
 — — комптоновская, 18, 132, 289, 756  
 — корреляционная, 269–270, 289, 416, 419–420, 732  
 Доля продольная, 454, 526  
 — энергии-импульса, см. Партоновая функция распределения  
 Домены в ферромагнетиках, 264  
 Дробные заряды, 517, 735  
 Дуализм корпускулярно-волновой, 43  
 Духи, 489–495, см. также BRST-симметрия, Метод Фаддеева–Попова, Правила Фейнмана  
 — в абелевой модели Хиггса, 688  
 — в неабелевой теории Хиггса, 696  
 — интерпретация, 490–491  
 Дырки и античастицы, 76, 618  
  
 $E[J]$  (вакуумная энергия), 352–354  
 $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  (Алгебры Ли), 473, 639  
 $e^+e^-$  аннигиляция в  $W^+W^-$ , 703–709, 724  
 — в адроны, 148–150, 257–260, 451, 519–525, 580–585, 666–667, 683–684  
 — в мюоны или  $\tau$ -лептоны, 23, 141–161, 178  
 — в скалярные частицы, 306, 703–706  
 $\epsilon$  ( $4-d$ ), 249, 363, 428  
 $\epsilon$ -разложение, 416, 428  
 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , 19  
 — тождества свертки, 143, 752  
 $\eta$  (критический показатель), 270–271, 420, 422, 426, 444  
 $e$  (заряд электрона), 20  
 — в теории ГВС, 659  
 Единая электрослабая модель Джорджи и Глэшоу, 653  
 Единица  $R$  (сечение рассеяния аннигиляции), 149, 756  
 Единицы Хевисайда–Лоренца, 20  
 Единицы измерений, 18, 20  
 Естественность, см. Тонкая настройка, Естественные соотношения нулевого порядка  
 Естественные соотношения нулевого порядка, 371, 373–374, 710, 725  
 — в теории ГВС, 711–717  
  
 $J(x)$  (слагаемое-источник в  $\mathcal{L}$ ), 285  
 $J/\psi$  частица, 150, 160, 560–561  
 Жидкие кристаллы, 354  
 Жидкость, 263, 417, 419  
  
 $Z$  (перенормировка напряженности поля), 217  
 $Z[J]$  (порождающий функционал), 285–287, 296, 352, 354, 377  
 $Z^0$ -бозон, 180, 451, 560, 658, 666–667, см. также  $A_{LR}^f$   
 — масса, 560, 666, 668, 714–716

- распад, 561, 666, 668, 683
- $Z_1$  (перенормировка вершины в КЭД), 231, 323, 325–326
- связь с  $Z_2$ , 243
- $Z_2, Z_3$ , *см.* Перенормировка напряженности поля
- $Z_0$ , 409–410
- Зависимость от пути функции сравнения, 467–470
- Закон Гаусса для неабелевой калибровочной теории, 514
- Законы скейлинга, в критических явлениях, 419
- сохранения, 34–35, 51, 300, 302–304, *см. также* Угловой момент, Аксиальный векторный ток, Ток, Тензор энергии-импульса
- — для векторного тока Дирака, 67, 167, 243, 305
- Замечательный прием, 583
- Зарядовое сопряжение, *см.*  $C$
- Звуковые волны, 263–264
- Зернистость пространства-времени, 384
- Знак массового сдвига, *см.*  $M(p), \Sigma(p), \Pi^{\mu\nu}(q)$
- минус для фермионов, 126, 129–130
- $i\epsilon$  в функциональных интегралах, 282
- 4-импульс, 18, 215–216
- Избыточность при функциональном интегрировании калибровочных полей, 290
- Измерение, 45
- Изоспин, 137, 462, 517, 576, 627, 629, 675
- Изотриплетные токи, 627
- Изотропные магнетики, 417
- Импульс канонический, 33
- пространственноподобный, 389–390
- Инвариантность относительно преобразований Лоренца, 52, 190, 215
- — нарушение с помощью фиксированной калибровки, 516
- — уравнения Дирака, 58
- Инвариантный матричный элемент ( $\mathcal{M}$ ), *см.*  $S$ -матрица, Амплитуда рассеяния
- Инстантоны, 742
- Интеграл по путям, 272–278, *см. также* Функциональный интеграл
- Интегралы в  $d$  измерениях, 248–249, 754
- по антикоммутирующим числам, 294–296
- по петлям, их вычисление, 192–196, 753–755
- Интерполяция  $V_{\text{eff}}$ , 355–356
- Интерпретация полевых операторов, 41, 43
- Инфинитезимальный групповой элемент, 471
- Инфракрасно устойчивая фиксированная точка, 407, 415
- Инфракрасные расходимости, 71, 182, 188, 196, 258–260, 521, 524, 543
- — интерпретация, 201–206
- — регуляризация, 196, 205, 220, 349
- — собственной энергии электрона, 220
- — электронной вершинной функции, 199–201
- Йона-Лазинио Г., 627
- Исследование парциальных волн, 703
- История квантовой теории поля, 14
- Источник, *см.* Источник классический
- внешний, *см.* Источник классический
- классический, 49–50, 136–137, 285–287, 352–354
- Источники поляризованных фотонов, 174
- КХД (Квантовая хромодинамика), 148–149, 257–258, 517–610, 635–636, *см. также*  $\alpha_s$ , Партоновая модель, Кварки, Сильные взаимодействия
- использование теории возмущений, 522–525
- киральные симметрии, 626–635
- режим сильной связи, 518–519, 731–734
- экспериментальные проверки, 560–562
- элементарные процессы, 537–541
- КЭД (Квантовая электродинамика), 23, 92, 297, 458–462, *см. также*  $\alpha$ , Сечение рассеяния, Электромагнитное поле, Калибровочная инвариантность, Фотон
- в  $d$  измерениях, 313–314
- в двух измерениях, 612–619, 739
- область применения, 23
- перенормировка, 311–313, 322–326, 334
- радиационные поправки, 182–212, 219–224, 243–256
- скалярная, 306
- точные эксперименты, 197–198
- эволюционные уравнения, 554–555
- элементарные процессы, 141–181
- $K$ -мезон, 257, 577, 680
- $Q^2$  (передача импульса при глубоконеупругом рассеянии), 454, 526
- Кажущаяся степень расходимости, 309–316
- Калибровка  $R_\xi$ , 686–696
- Арновитта–Фиклера, 516
- Йенни, 292
- Ландау, 292, 448, 502
- Лоренца, 93, 133, 184, 290, 691, 698
- обобщенная, 291, 488
- Фейнмана, 292, 397, *см. также* Калибровка Фейнмана–‘т Хофта
- Фейнмана–‘т Хофта, 488, 508, 602, 686, 691–692, 699, 702–703
- кулоновская, 93, 513
- Калибровочная зависимость, 397, 499, 567
- инвариантность, 92–93, 243, 290, 458–470, 506, 647–727

- —  $S$ -матрицы, 293
- — и сохранение аксиального тока, 612, 618
- Калибровочная теория со слабым взаимодействием, *см.* Теория ГВС
- Калибровочно-ковариантная производная, *см.* Ковариантная производная
- Калибровочное преобразование, 92, 458–467
- Каллан С., 392, 399
- Каналы, 165
- Картан Е., 472
- Квадратичная расходимость в собственной энергии, 391, 499
- Квадратные скобки (обозначение), 272
- Квантование, *см. также* Функциональное квантование
  - поля Дирака, 68–78
  - поля Клейна–Гордона, 36–41
- Квантовая гравитация, 384
  - механика, 19, 272–278
  - статистическая механика, 306–308
  - теория поля, 11
  - — необходимость в ней, 31
  - — область действия, 746–748
  - хромодинамика, *см.* КХД
  - электродинамика, *см.* КЭД
- Квантовая механика нерелятивистская, 272–278
- Квантовый эффект Холла, 198
- Кварк-глюонное рассеяние, 541–542
- Кварк-кварковый потенциал, 731, 733
- Кварки, 137, 148–149, 451, 453, 517–519, 529
  - количество в протоне, 597
  - масса, 566–569, 629–630
  - образование при  $e^+e^-$ -аннигиляции, 148–149
  - слабые взаимодействия, 408–409
- Кварконий, 160
  - распад, 560–561
  - спектр, 560–561, 734
- Киллинг В., 472
- Кинематика, 116
  - $e^+e^-$  аннигиляции, 145
  - адрон-адронных столкновений, 535–537
  - глубоконеупругого рассеяния, 453–454
  - коллинеарного испускания частиц, 545–546
  - комптоновского рассеяния, 169–171
  - массивных векторных бозонов, 698
- Киральные представление  $\gamma^\mu$ , 57
- Киральные калибровочные теории, 635–640
- Классическая траектория, 272
- Классические нетривиальные решения, 741–742
- Классический радиус электрона, 756
- Классический электромагнетизм, 50, 223, *см. также* Тормозное излучение
- Ковариантная производная, 92, 459, 461, 463–464, 466, 475
  - — в теории ГВС, 660
- Колеман С., 399
- Коллаборация STEQ, 533, 542, 557, 604
- Коллинеарное излучение  $e^+e^-$ -пар, 552–554
  - глюонов, 521, 524–525, 543–544, 555–556
  - фотонов, 180–181, 186–188, 209–212, 543–555, 666–667
- Комбинация знаменателей, *см.* Фейнмановские параметры
- Коммутатор ковариантных производных, 461, 464
  - полевых операторов, 45
- Коммутационные соотношения для полей, 36–37, 68, *см. также* Алгебры Ли
- Комплексное сопряжение билинейных спиноров, 141
- Комптоновская амплитуда вперед, 587–590
- Конденсат  $q\bar{q}$  пар, 628
- Конечные квантовые теории поля, 405
- Конспиративная  $SU(2)$  симметрия, 675
- Константа Ферми, *см.*  $G_F$ 
  - связи Юкавы, 93
  - — голая, 246, 250, 256, 325–326, 392, 405
- Константы связи, 92–94, *см. также*  $\alpha$ ,  $\alpha_s$ ,  $\sin^2 \theta_w$ 
  - — в теории ГВС, 658–660, 669–672
  - — голые или перенормированные, 245–246, 250, 256, 325–326, 392, 405
  - — равенство (в калибровочных теориях), 483–485
  - — размерности, 94, 315
  - — экстраполяция на масштабы теории Великого объединения, 735–736, 745
  - — эффективные или масштабозависимые, 246, 253–255, *см. также* Бегущая константа связи
  - физические, 756–757
- Контактные члены, 301–306
- Контрчлены, 316–318, *см. также*  $\beta$ ,  $\gamma$ 
  - в КЭД, 323–325
  - в линейной сигма-модели, 342–343
  - в неабелевой калибровочной теории, 500–506, 516
  - в теории  $\phi^4$ , 316–321, 390–391
  - в теории ГВС, 710
  - в теории Юкавы, 321–322, 391
  - для  $J(x)$ , 357
  - для вычисления эффективного действия, 357–358
  - для локальных операторов, 409–412
  - ограниченные симметрией, 342–350, 368–370, 692
  - отношение к  $\beta$  и  $\gamma$ , 393–397
- Координаты центра масс, 156



- Корреляции дальнедействующие, 378, 421, *см. также* Корреляционная длина
- Корреляционные функции, 96, *см. также* Асимптотическое поведение амплитуд
- аналитическая структура, 215–231
- голые или перенормированные, 392
- дираковского поля, 125, 296
- для некалибровочно-инвариантных операторов, 291–293
- определенные на масштабе  $M$ , 390
- ряд теории возмущений для них, 100
- связь с  $S$ -матрицей, 229–230
- скейлинг, 388
- спинового поля, 269–270, 288, 373, 378, 419–421
- фейнмановские правила для них, 107–108
- функциональное вычисление, 279–280, 296
- Коэффициенты Клебша–Гордана, 26, 153
- Кривые событий, 560–561
- Критическая точка жидкость–газ, 428–429
- Критические показатели, 269–271, 415–430, 440, 444
- — измерение, 417, 428–430
- — определения, 420
- — соотношения между ними, 426
- Кроссинг-симметрия, 163, 175, 231
- $L$  индекс, 571
- $\Lambda$  (масштаб КХД), 523
- $\Lambda$  (ультрафиолетовое обрезание), 94, 195
- $\lambda$  (константа связи), 92
- $\lambda$  (космологическая константа), 738
- $\lambda_*$  (фиксированная точка), 406
- $\lambda_e$  (константа связи электрона-хиггса), 669
- L3 эксперимент, 667
- Лабораторная система отсчета, 169
- Лагранжиан, 32, 52, *см. также* Эффективный лагранжиан
- Дирака, 59
- Клейна–Гордона, 33
- Маквелла, 53
- Фаддеева–Попова, 489, 491
- Янга–Миллса, 465, 481
- более общая калибровочная инвариантность, 461, 465, 675–677
- в КЭД, 92, 459
- в скалярной КЭД, 94
- в теории  $\phi^4$ , 92
- в теории Юкавы, 93
- для линейной сигма-модели, 338–339
- для неабелевой калибровочной теории, 465, 467
- для нелинейной сигма-модели, 433
- для теорий ГВС, 661, 671–672, 675–679
- фундаментальное значение, 279, 444, 746–748
- эффективный, 379–385
- — для обмена  $W$ , 529, 571
- Лазер, поляризация, 174
- Ламбовский сдвиг, 198, 251
- Ланде  $g$ -множитель, *см.* Аномальный магнитный момент
- Леводвижущие фермионы, 612
- Левые спиноры, 60
- частицы, 25, 63
- Леманн Э., 224
- Лемма Шура, 66
- Лептоны, 451, 681–682
- Ли Б., 337
- Линейная сигма-модель, 137–138, 338–350, 359–364, 370–371, 373–374, *см. также* Правила Фейнмана
- Логарифмическое возрастание в КХД, 569, 577, 608
- — в комптоновском рассеянии, 171
- — в поправках в  $V_{\text{eff}}$ , 363–364, 430–432
- — от массовых сингулярностей, 543–544, 547
- — от многопетлевых диаграмм, 331, 402, 522
- — при тормозном излучении, 188, 200–201, 205–206
- Локальная симметрия, *см.* Калибровочная инвариантность
- Локальность ультрафиолетовой расходимости, 370
- Локальные законы сохранения, 35
- Лоренц-инвариантный интеграл по 3-импульсам, 40
- $M$  (масштаб перенормировки), 363, 389–390, 392–398
- $M^2(p)$  (скалярная собственная энергия), 229, 236–237, 320–321
- в линейной сигма-модели, 349–350
- двупетлевой вклад, 335
- условие на знаки, 229
- $\mathcal{M}$  (амплитуда рассеяния), 116
- $\overline{MS}$  (модифицированное минимальное вычитание), 363, 375, 448, 560
- $\overline{m}(Q)$  (параметр бегущей массы), 566–569
- $m_Z$  (масса  $Z$ -бозона), 560
- Магнетики, 263–271, 288, 337, 351–354, 388, 419, 428–429, 732, 737, 740, *см. также* Аналогии со статистической механикой
- при  $d > 4$ , 386
- симметрия, 417–418
- Магнитная восприимчивость, 263, 420, 425–426
- Магнитный момент, *см.* Аномальный магнитный момент
- монополь, 742
- Мандельштамовские переменные, 164–166, 169, 177, 453
- на партонном уровне, 527
- Масса бегущая, 566–570
- голая, 217

- зависящая от калибровки, 688
- фермионная, 678
- в теории ГВС, 661, 669–671
- фотона, 95, 613, 647–648
- вызванная плохой регуляризацией, 247
- как инфракрасный регуляризатор, 196
- эффективная, 385, 566–569, 628–629
- Масса (массы), *см. также* Механизм Хиггса
- $W$ - и  $Z$ -бозонов, 658, 660, 666, 668, 694, 714
- $\pi$ -мезона, 629
- $\sigma$ -,  $\pi$ -полей, 337–341, 343, 350
- $t$ -кварка, 723
- адронов, 731, 734
- векторного поля, 95, 448, 460–461, 710
- голая и физическая, 217
- кварков, 566–569, 629–630
- нейтрино, 670–671, 681
- нестабильной частицы, 237
- нефизических частиц, 687–688
- нуклонов, 631
- получение из эффективного действия, 368
- связь с корреляционной длиной, 270
- таблица значений, 756
- фотона в двух измерениях, 613, 739
- фундаментальных фермионов, 669–671, 678, 738
- хиггсовского бозона, 672
- Массивный векторный бозон, 180–181
- калибровочный бозон, 647–727, *см. также*  $W$ -бозон,  $Z$ -бозон
- пропагатор для него, 688
- Массовая матрица в калибровочной теории с нарушенной симметрией, 650, 657
- в скалярной теории поля, 340–341
- Массовая оболочка, 50
- Массовый оператор, 384, 388, 411–416, 421
- член Майорана, 88, 636, 681–682
- член калибровочного бозона, *см.* Механизм Хиггса
- Масштаб Планка, 736, 746–748
- атомный, 263–264, 269, 378, 384
- импульса, для вычисления  $\alpha_s$ , 523, 525, 537, 542
- массы, произвольный, *см.* Масштаб перенормировочный
- перенормировочный, 363, 389–398, 419, 522, 560, 566, 640
- Масштабная инвариантность, аномальное нарушение, 640–644
- классическое описание, 640–641
- Масштабозависимый параметр, *см.* Бегущая константа связи
- Масштабы на коротких расстояниях, влияние в теории, 377–388
- Матрица ККМ (Кабиббо–Кобаяши–Маскава), 670, 678, 685, 738
- фаза, 679–681
- Матрицы Дирака, *см.*  $\gamma^\mu$
- Матричный элемент, *см.* Амплитуда рассеяния
- Мезон векторный, 158–161
- Мезоны, 517–520
- Мера функционального интеграла, 272–275, 277–278, 281
- киральное преобразование, 623–626
- Метастабильное вакуумное состояние, 355–356
- Метод Монте–Карло, 734
- Фаддеева–Попова, 290–293, 487–490, 506–507, 686–688, 695, *см. также* Духи
- стационарной фазы, 31
- характеристик, 399
- Метрический тензор, 18
- Механизм Хиггса, 448, 647–657, 697, 700, *см. также* Калибровочная инвариантность, Нефизические степени свободы
- и поляризация вакуума, 648, 655–657
- масса калибровочного бозона, 650, 657
- Минимум эффективного потенциала, 363–364
- Мифология, 15
- Мнимая часть амплитуды рассеяния, 231–237, 251, *см. также* Аналитические свойства амплитуд
- Многokrатное испускание фотонов, 201–205, 550–552
- Множитель  $4\pi$ , 20
- аномальный, 638–639, 645–646
- Модель Гросса–Неве, 374–375, 418, 740
- Джорджи–Глэшоу, 653, 742
- Колемана–Вайнберга, 447–448
- Тирринга, 739–740, 742
- Хиггса абелевая, 647–649, 686–693
- квантовых теорий поля, 739–742
- партонная, 453–457, 518, 526–527, 564, 589–590, 609
- стандартная, 731, *см. также* Теория ГВС, КХД
- Модельная система с двумя состояниями, 72
- Мультиплеты лептонов и кварков, 663
- Мюон, 23, 141, 326, 451, *см. также* Anomalous magnetic moment
- Мюон-протонное рассеяние, 526
- Мюоний, сверхтонкое расщепление, 198
- Мюонное нейтрино, 529
- Мягкие фотоны, 182
- множественные, 201–205
- $N$  (число спиновых компонент), 417
- $\nu$  (кинематическая переменная при глуконном неупругом рассеянии), 596

- $\nu$  (критический показатель), 416–417, 419–420, 422, 426, 428, 440, 443  
 Наблюдатель кварков, 526  
 Намагниченность, 266, 351–354, 419, 420, 425, 737  
 Намбу *Y.*, 517, 627  
 Нарушение в высокоэнергетическом поведении, 710  
 — дискретной и ароматной симметрий, 677  
 — калибровочной инвариантности, 616, 637  
 Неабелева группа, 463  
 — калибровочная симметрия, *см.* Калибровочная инвариантность  
 Неабелевы калибровочные теории, 95, 456–457, 462–467, 481–519, 649–657, 693–696  
 Невидимый распад  $Z$ -бозона, 683–684  
 Нейман *Y.*, 517  
 Нейтральные токи, изменяющие аромат, 680  
 Нейтрино, 451, 529–531, 661, 684, *см. также* Глубоконеупругое рассеяние  
 — количество, 684  
 — масса, 670–671, 681  
 — правополяризованное, 661, 671, 681  
 Нейтрон, 517, 532, 630  
 — комптоновская длина волны, 198  
 — электрический дипольный момент, 681  
 Нелептонный распад, 571  
 Нелинейная сигма-модель, 433–445, 741, *см. также* Асимптотическая свобода, Правила Фейнмана  
 Нелинейные члены в лагранжиане, 92  
 Неопределенность в выборе масштаба импульса, 523, 542  
 Непертурбативная КХД, 577, 731–734  
 Непертурбативные методы, 387, 731–734, 739–742  
 Непрерывные группы симметрий, *см.* Непрерывные группы  
 Нерелятивистские связанные состояния, 156  
 Нерелятивистское разложение спиноров, 190  
 Нерешенные проблемы, 731–748  
 Несобственное преобразование Лоренца, 79  
 Несохранение барионного числа, 608  
 — числа фермионов, 617–619, 644–645  
 Несокращающий четность глубоконеупругий форм-фактор, 608–610  
 Нефизические степени свободы, 134, 481, 483–487, 491, 494, 692, 696  
 — сокращение, 167–168, 293, 485, 494, 689–690  
 Низкоэнергетическое взаимодействие адронов, 731  
 Нордсик *A.*, 201  
 Норма, *см.* Отрицательная норма  
 — отрицательная, 93, 134, 168, 458, *см. также* BRST-симметрия, Нефизические степени свободы  
 — положительная, 134  
 Нормальный порядок, 101, 126  
 Нормировка состояний, 39, 157  
 — спиноров, 61–64  
 — функций распределения, 532–533  
 Нос Вайнберга, 684  
 Нуклеон, 93, 630–631  
 $O(2)$ , 373, 418  
 $O(3)$ , 462, 472  
 $O(4)$ , 137, 675  
 $O(N)$ , 89, 338, 340, 433, 473  
 $O(N)$ -симметрическая теория  $\phi^4$ , *см.* Линеинная сигма-модель  
 $\Omega$  (вакуум теории с взаимодействием), 96, 100  
 $\omega$  (критический показатель), 444  
 Обмен векторных частиц, 135  
 — скалярных частиц, 131–133  
 — тензорных частиц, 136  
 Обобщенные константы связи, 413–415, 421  
 Обозначения, 18–20  
 Образование кварков и лептонов, 663, 670–671, 676  
 — лептонных пар при столкновениях адронов, 534–537  
 — продольных  $W$ , 706  
 Обратное комптоновское рассеяние, 174  
 Обратный пропагатор, 366, 368  
 Обращение времени, *см.*  $T$   
 Обрезание импульса, *см.* Обрезание  
 — импульса как регуляризация, 255, 377–378, 436–439, 622  
 — ультрафиолетовое, 94, 263–265, 377–388, 391, 442–443, 737–738  
 Объединение фундаментальных взаимодействий, 337, 473, 735–739  
 — с гравитацией, 736, 739, 746  
 Объединенная теория электрослабых взаимодействий, *см.* Теория ГВС  
 Объем, преобразование при бустах, 40  
 Одновременные коммутационные соотношения, 37  
 Однозначные предсказания, 371  
 Одночастичные волновые уравнения, 31, 52  
 — состояния Дирака, 74  
 — состояния, воздействие взаимодействия, 120  
 ОРЕ, *см.* Операторное разложение  
 Оператор Казимира, *см.*  $C_2(r)$   
 — антилинейный, 82  
 — антиунитарный, 82  
 — импульса, 19, 36, 43, 73  
 — нильпотентный, 493

- эволюции во времени, 98, 114, 272, 274–278
- Операторное разложение, 577–610, *см. также* Уравнение Каллана–Симанчика
- Операторные изменения масштаба, 409–412, *см. также*  $\gamma$
- Операторы аннигиляции, 43, 73, 133
  - лестничные, 43, 73, 133
  - маргинальные, 384, 389, 430, 433
  - несущественные, 384, 389, 422, 430, 461
  - повышающие и понижающие, 473
  - полевые, 37
  - интерпретация, 41, 43
  - понижающие, 473
  - псевдоскалярные, 675
  - рождения и уничтожения, 43, 73, 133
  - существенные, 384, 389, 422
- Операторы, существенные и несущественные, 384, 389
- Определение квантовой теории поля, 279
  - теории на масштабе  $M$ , 390
  - физических параметров, 317
- Определитель, *см.* Определитель Фейнмана
  - функциональный, 283, 290, 298–299, 307, 357–361, 375, 487–489, 491, 508–512
  - из гауссова интеграла, 296
  - методы вычисления, 298, 360
- Оптическая теорема, 231–237, 255, 486–487, 490, 581, 586–587, *см. также* Аналитические свойства амплитуд
- Орбитальный угловой момент, 75–76
- Ортогональная группа, *см.*  $O(N)$
- Ортогональность спиноров, 64
- Осцилляции в полном сечении рассеяния, 585
- Относительность, 18
- Отрицательные степени свободы, 491, 494
- Отрицательный квадрат массы, 337
- Оценка расходящихся частей диаграмм, 502
- $P$  (четность), 80–82, 86, 90–91, 189, 334–335, 461, 675–682
  - в калибровочных теориях, 635
  - нарушение при слабых взаимодействиях, 79, 665, 668
- $\Pi(q^2)$  (КЭД вакуумная амплитуда поляризации), 182, 244–254, 323–324
  - вклад скаляров, 306
- $\Pi^{\mu\nu}(q)$  (собственная энергия калибровочного бозона), 243–254, 313, 496–499
  - в двумерной КЭД, 613–615
  - в механизме Хиггса, 648, 650–651, 657
  - в теории ГВС, 674, 713–722
  - выбор знака, 714
- $\Pi_h$  (адронная вакуумная поляризация), 581–584
- $\pi$ -мезон, 93, 132, 138, 257, 452, 628–635
  - как голдстоуновский бозон, 628–630
  - распад  $\pi^+$ , 645
  - распад  $\pi^0$ , 633–635
  - связь с нуклонами, 631
- $\pi^k$  (поле голдстоуновского бозона), 655, 674
- $\pi^k$  (поле сигма-модели), 339
- $\Pi$  символ, символическое использование, 115, 274
- $\psi$ -частицы, 560–561
- Парадигма взаимодействий, 92–93
  - реакций, 141
- Параметр порядка, 266, 270
- Параметры Фейнмана, 192, 332, 753
- Парасюк О., 328–329
- Партонная функция распределения, 454–455, 526, 532–533, 556–560, 585–586, 595–597, *см. также* Уравнения Альтарелли–Паризи
  - для нейтронов, 532
  - для протонов, 532–533
  - для фотонов, 610
  - при малых  $x$ , 564–565
  - примесь антикварков, 531–533, 556
  - примесь глюонов, 532–533, 556, 727
  - эволюция, 543–560, 605–608
- Паули В., 73
- Переводные множители, 756–757
- Передача энергии в водороде, 198
- Перемасштабируемость, *см.* Перенормировка напряженности поля,  $\gamma$ ,  $Z$
- Перенормировка, 215–224, 243–254, 309–335
  - вне ведущих порядков, 326–335
  - и спонтанно нарушенная симметрия, 337, 341–350, 368–372
  - локальных операторов, 408–412
  - массы, 222–223, 229, 320–324, 380, 390–391, 411–416, *см. также*  $M^2(p)$ ,  $\Sigma(p)$ ,  $\Pi^{\mu\nu}(q)$
  - в классической электродинамике, 223
  - в суперсимметричных моделях, 744
  - напряженности поля, 215–231, 390–392, 398, 401–402, *см. также* Контрчлены
  - в теории  $\phi^4$ , 320–321, 335
  - для локальных операторов ( $Z_\phi$ ), 409–412
  - для неабелевой калибровочной теории, 504–506
  - для скаляра Юкавы, 322
  - для фотонов ( $Z_3$ ), 245
  - для электронов ( $Z_2$ ), 219, 222–223, 322–326
- Перенормируемость, 14, 93–94, 263, 314–316, 389
  - доказательство, 398–399
  - неабелевых калибровочных теорий, 495, 692

- Перенормируемые калибровки, 692  
 Перенос импульса, в адронных столкновениях, 452  
 Переход жидкость-газ, 264, 269–271  
 Периодические граничные условия, 617–618, 645  
 Петлевые диаграммы, 30, 384, *см. также* Однопетлевые диаграммы  
 Петли фермионные, 130  
 Пион, *см.  $\pi$ -мезон*  
 Плоские волны, 19  
 Плотность импульса, 33  
 — лагранжиана, 32  
 — спиновая, 268, 373  
 Площадь единичной  $d$ -мерной сферы, 248  
 Поведение КХД на больших расстояниях, 519, 731–734  
 Подгонка параметров, 264  
 Подсчет, *см. Цвет, Свертки, Тожественные частицы*  
 Подход Вильсона к перенормировке, 377, 388  
 Поедание голдстоуновского бозона, 649, 697  
 Позитроний правила отбора, 91  
 — скорость аннигиляции, 178–179, 198  
 — энергетические уровни, 198  
 Показатель поправки к скейлингу, 444  
 Поле Дирака, 58–90, *см. также* Правила Фейнмана  
 — билинейность, 65–68  
 — квантование, 73  
 — Хиггса, 688  
 — в модели с двумя дублетами, 684–685  
 — в суперсимметричной модели, 745  
 — ожидаемое вакуумное значение, 658, 675  
 — аксиальное, 89, 491  
 — внешнее, 189, 287, 298  
 — фейнмановское правило для него, 139  
 — калибровочное, 93, 290, 458–467, *см. также* Калибровочная инвариантность, Фотон,  $\Pi^{\mu\nu}(q)$   
 — классическое (формализм эффективного потенциала), 353–354, *см. также* Фоновое поле, Эффективное действие  
 — комплексное скалярное, 35, 46, 50–51, 90–91, 306  
 — магнитное, 184, 266, 287, 288, 351–354  
 — спина-3/2, 743  
 — спиновое, 288, 378, 419  
 — электромагнитное, 92–93  
 — квантование, 93, 133, 134, 289–293  
 — теории ГВС, 658–659  
 Политцер Г. Д., 456, 504  
 Полное сечение рассеяния, для тождественных частиц, 119  
 Полуужирный шрифт, 18  
 Полюс при  $d = 2$ , 250, 498–499  
 Полюса при размерной регуляризации, 249  
 Полюса у двумерной функции, 218–219  
 Поляков А. М., 436, 506  
 Поляризация асимметрия, *см.  $A_{LR}^f$*   
 Поляризация вакуума, *см.  $\Pi(q^2)$ ,  $\Pi^{\mu\nu}(q)$ ,  $\Pi_h$*   
 — вперед, 486  
 — времениподобная, 168, 458, 686, 691, 695, 699  
 — направленная назад, 486  
 — продольная, 168, 458, *см. также* Механизм Хиггса, Теорема эквивалентности голдстоуновского бозона  
 — массивного калибровочного бозона, 649, 686, 696  
 — фермионов, 23, 150  
 — суммирование, 64–65, 544, 751  
 — фотонов и векторных бозонов, 133, 153–154, 486, 701–702, *см. также* Продольная поляризация, Времениподобная поляризация, Нефизические степени свободы  
 — промежуточных состояний глюонов, 556  
 — промежуточных состояний фотонов, 545  
 — суммирование, для глюонов, 540  
 — суммирование, для массивных векторных бозонов, 258, 701–702  
 — суммирование, для фотонов, 166–167  
 Поляризованный лазер, 174  
 Поперечный импульс, для продуктов  $pp$  столкновений, 452  
 Поправки к вершинам, 182, 188–201, 502–503  
 — к внешним линиям, 124, 182, 196  
 — косвенные, 713  
 — неуниверсальные, 444  
 — однопетлевые в теории ГВС, 710–723  
 — для рассеяния электронов, 215  
 Порог, 146–147, 154, *см. также* Аналитические свойства амплитуд  
 — обнаружения фотонов, 200–201, 205–206  
 Пороги, влияние на ренормгруппу, 524  
 Постоянная космологическая, 738–739, 745  
 — распада пиона, *см.  $f_\pi$*   
 — тонкой структуры, *см.  $\alpha$*   
 Построение Максвелла, 355–356  
 Потенциал Кулона, 135, 251–253  
 — Юкавы, 131–133  
 — Юлинга, 253  
 — для спонтанного нарушения симметрии, 337–339  
 — кулоновский, 20, 135, 184, 479, 514, 731  
 — радиационные поправки, 251–253, 403, 714  
 — с двумя ямами, 268, 338

- электромагнитный, *см.* Потенциал кулоновский
- эффективный, 354–356, 361, 369, 375, 422–424
- в  $O(N)$  теории  $\phi^4$ , 362–364, 430–432
- для модели Колемана–Вайнберга, 447–448
- Поток константы связи, 400
- лагранжиана, 384
- ренормализационной группы, 384–388, 398, 402, 444
- Правила  $\Delta I = 1/2$ , 576–577
- Каткоского, 234–236, 490
- Фейнмана, 24, 27, 107–108, 124–125, 749–750, *см. также* Фейнмановские граничные условия
- в КЭД, 133, 297, 323, 749
- в абелевой модели Хиггса, 688–689
- в импульсном пространстве, 108, 125, *см.* Правила Фейнмана
- в калибровочной теории с нарушенной симметрией, 696
- в координатном пространстве, 107, 124
- в линейной сигма-модели, 342–343
- в неабелевой калибровочной теории, 481–483, 489–490, 501, 749–750
- в нелинейной сигма-модели, 433–434
- в скалярной КЭД, 306
- в скалярной неабелевой калибровочной теории, 516
- в теории  $\phi^4$ , 107–108, 124–125, 317, 749
- в теории ГВС, 672, 696, 705–706
- в теории Юкавы, 128
- для амплитуды рассеяния, 124–125
- для взаимодействия с внешним полем, 139, 298
- для контрчленов, 317, 323, 501
- для корреляционных функций, 107–108
- множители симметрии, 106, 128
- функциональная производная, 280–284
- разрезания, *см.* Правила Каткоского
- суммирования для  $e^+e^- \rightarrow$  адроны, 584–585
- для глубокоупругого фактора, 596, 603–604
- для партонной функции распределения, 532–533, 557
- для функций распределения в КЭД, 555
- суммирования для функций распределения, 532–533
- суммирования импульса, 596, 603–604
- для партонного распределения, 533, 605
- Правила отбора для позитрония, 91
- Правило суммирования ИТЕР, 584–585
- Правый ток, 67
- Предел больших  $N$ , 441–443, 445
- Предел  $q^2 \rightarrow \infty$ , 604
- Представление Вейля, 57
- Гейзенберга, 37, 42, 279
- Гейзенберга и Шредингера, 37, 279
- Дирака, 56–57
- — — приводимость, 57–66
- — — приводимость, 66
- Шредингера, 37, 42, 279
- взаимодействия, 25, 97–100
- действительное, 474
- неприводимое, 474, 477–478
- приводимое, 59, 474
- псевдовещественное, 475
- сопряженное, 474, 475, 477–478
- фундаментальное, 475, 477
- Представления алгебр Ли, 473–478
- $SU(3)$ , 518
- группа Лоренца, 55–57
- группа вращений, 54, 87
- Преобразование Лежандра, 352–353, 357
- Фурье, 19–20
- Преобразования Лоренца, 52–63
- поля Дирака, 58, 74
- Фирца, 67–68, 90, 177, 573–574, 752
- активные, 52–53
- неортохронные, 79
- ортохронные, 79
- Приближение эквивалентных фотонов, 209–212, 547
- Прием симметричного интегрирования, 250, 754
- Принцип наименьшего действия, 32
- суперпозиции в квантовой механике, 107, 272
- Прицельный параметр, 115
- Причинность, 31–32, 44–46, 70
- Проблема калибровочной иерархии, 737
- Продольная быстрота, 536
- Проекция на состояния с поперечной поляризацией, 244
- на спиральное состояния, 151, 751
- Произведение спиноров, 87–88, 177–178, 181
- Произведения представлений группы, 477–478
- Пропагатор, 105, *см. также* Правила Фейнмана
- Дирака, 77–78, 296, 481
- Клейна–Гордона, 46–48
- Фейнмана, 48, 78, 216, 283–284, 288, 296
- в представлении взаимодействия, 98, *см. также* Оператор эволюции времени
- в фоновом поле, 480
- духов, 489–490
- массивного калибровочного бозона, 688, 696

- неабелева калибровочного поля, 481, 488
- нефизических бозонов, 689, 696
- фотона, 133–134, 289, 292
- Простой гармонический осциллятор, 37, 307
- Пространственно изменяемое фоновое поле, 370–371
- Пространственновременная формулировка теории возмущений, 96
- Пространство евклидово, 288, 377–378, 419, 754
  - 4-импульс в нем, 195
  - лагранжианов, 384
- Противоречие в векторных теориях поля, 95, 483–486, 709–710
- Протон, 198, 452, 462, 517, 534, 556, 586, *см. также* Партоновая модель, Партоновая функция распределения
  - распад, 608
  - форм-фактор, 191, 206–209
- Процесс Дрелла–Янга, 534–537
- Процессы в древесном приближении, 182
- Псевдоскаляр, 66, 81, 86
- Псевовектор, 66, 81, 86
- Пучок частиц, 111–112, 159
  
- R* (отношение адронного сечения рассеяния к лептонному), 150, 560–561, 586, *см. также*  $e^+e^-$ -аннигиляция
- Равенство констант связи, 489, 504
- Радиационные поправки, 27, 182, 254, *см. также* КЭД, КХД, Теория ГВС
- Радикальность, 95
- Радиус силы Юкавы, 132
- Разложение представлений группы, 477–478
- Размерность пространства, влияние в скалярной теории поля, 443–444
  - пространства-времени, влияние в скалярной теории поля, 443–444
- Размерный анализ перенормируемости, 94, 315, 384
- Разрез сингулярностей, 218–219, 231, *см. также* Аналитические свойства амплитуд
- Разрез, соответствующий многочастичным состояниям, *см.* Аналитические свойства амплитуд
- Разрешение адронной структуры, 556, 608
  - электронной структуры, 551
- Разрывность, *см.* Аналитические свойства амплитуд
- Ралстон Дж., 564–565
- Рамсей Н., 198
- Распад мюона, 665, 682
  - радиационные поправки, 712–713, 715
  - полулептонный, 571
- Распределение Пуассона, 137, 206
  - инвариантов масс для образования струй, 541–542
- Распределения, 19–20
  - $1/(1-x)_+$ , 549
- Рассеяние, *см.* Сечение рассеяния, *S*-матрица
  - Баба ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ), 28, 160–161, 165, 177, 178, 236, 251, 254
  - Мёллера ( $e^-e^-$ -рассеяние), 165
  - Резерфорда, 139–140, 163
  - глубоконеупругое, 452–457, 518, 526–533, 558–559, 585–608
  - на фотоне, 610
  - нейтрального тока, 665, 668, 684
  - нейтрино, 529–531, 560–561, 572, 596–597, 665, 668
  - комптоновское ( $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ ), 29, 166–174, 587
  - кулоновское, 139–140, 163, 176–177
- Расходимости, *см.* Инфракрасные расходимости, Ультрафиолетовые расходимости
  - перекрывающиеся, 326–329
- Расходимость локальная, 328
  - нелокальная, 328, 333–334
- Расходящиеся поддиаграммы, 309, 326
- Расширенная суперсимметрия, 405, 744–745
- Расщепление Функций, *см.* Уравнения Альтарелли–Паризи
- Реакции между кварками, 537–542, 563
- Регуляризация, 195–196, *см. также* Обрезание, Размерная регуляризация, Регуляризация Паули–Вилларса, Инфракрасные расходимости
  - Паули–Вилларса, 195, 221, 247, 255, 622, 644, 646
  - влияние симметрий и законов сохранения, 247–248, 255, 614–615, 622, 637, 640, 644
  - размерная, 247–250, 255, 324, 391, 498, 622, 639, 642, 718, 754–755
- Режим сильной связи, 387, 518–519, 523
  - слабой связи, 519
- Резонансы, 113, 159, 237, *см. также* Формула Брейта–Вигнера
  - при  $e^+e^-$ -аннигиляции, 159, 585
- Релятивистская инвариантность, 23, 52
- Релятивистская квантовая механика, 31
- Релятивистские волновые уравнения, 31
- Релятивистско-инвариантное фазовое пространство, 117
- Ренормализационная группа, 384–388, 404–408, 412–415
  - в КХД, 522–525, 566–580
  - и критические показатели, 421–426
- Ренормгрупповое улучшение теории возмущений, 432, 448, 523
- Решение в виде плоских волн для уравнения Дирака, 61–64

- Решеточная калибровочная теория, 518–519, 731–734
- Решеточная статистическая механическая модель, 428–430
- Римские индексы, 18
- Рождение пар, 31
- $C$  (зарядовое сопряжение), 79, 85–86, 90–91, 144, 311, 675–682
- $C(r)$  (инвариант представления алгебры Ли), 474, 476–478, 480, 753
- $C_2(r)$  (квадратичный оператор Казимира), 476–478, 480, 753
- $S$ -волна, 155
- $S$ -матрица, 114–125, *см. также* Аналитические свойства амплитуд, Унитарность
- в перенормированной теории возмущений, 316
- выражение через фейнмановские диаграммы, 124, 230, 316
- калибровочная инвариантность, 292–293
- связь с корреляционными функциями, 229–230
- связь с сечением рассеяния, 117–118
- $SO(10)$ , 639
- $SO(4)$ , 137
- $SO(N)$ , 473, *см. также*  $O(N)$
- $SU(2)$ , 51, 462, 472, 478, *см. также* Isospin
- $SU(2)$  калибровочная теория, 470, 514–515
- спонтанное нарушение, 651–653, 656–657
- $SU(2) \times SU(2)$ , 137
- $SU(2) \times U(1)$ -теория, *см.* Теория ГВС
- $SU(3)$ , 478
- $SU(3)$  нарушенная калибровочная теория, 653–654
- $SU(3)$  симметрия аромата, 517, 629–630
- $SU(3)$  симметрия цвета, 517, 518
- $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -теория, 731
- $SU(5)$ , 683, 735
- $SU(N)$ , 472–473, 478, 480, 645–646
- групповые тождества, 753
- $Sp(N)$ , 473
- $\Sigma(p)$  (фермионная собственная энергия), 219–224, 311–312, 323–324
- в неабелевой калибровочной теории, 501–502
- выбор знака, 222
- $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{u}$  (партоны мандельштамовские переменные), 453, 527
- $\sigma$  (поле в линейной сигма-модели), 339
- $\sigma$  (сечение рассеяния), 112
- $\sigma$ -матрицы, *см.* Паули сигма-матрицы
- $\sigma^\mu$ ,  $\bar{\sigma}^\mu$  (компоненты  $\gamma^\mu$ ), 60
- $\sin^2 \theta_w$ , 659, 661, 756, *см. также* Теория ГВС
- измерение, 667–669
- определение, 667–668, 711–712
- $s$  (мандельштамовская переменная), 164
- $s$ -канал, 165
- $s$ -кварк, его распад, 572–577
- $s(x)$  (локальная плотность спина), 268
- $s_w^2$  (определение  $\sin^2 \theta_w$ ), 715–723, 725
- $s_0^2$  (определение  $\sin^2 \theta_w$ ), 711
- $s_W^2$  (определение  $\sin^2 \theta_w$ ), 668, 711–723, 725
- Салам А., 657
- Свертки, 102, 126, 128
- в функциональном формализме, 284
- для внешних состояний, 121, 127
- подсчет эквивалентных, 105–106
- Сверхпроводимость, 448, 628, 649, 654
- Сверхтекучесть, 264, 269, 417, 428–429
- Сверхтонкое расщепление, 198
- Световой конус, 31
- Светоподобные состояния поляризации, 486
- Свободная теория поля, 36–46, 386, 436
- энергия, 351–354, *см. также* Свободная энергия Гиббса
- Гельмгольца, 351–354
- Гиббса, 266–268, 288, 351–354, 422, 424–425
- Гиббса, уравнение Каллана – Симанчика для него, 424
- Ландау – Гинзбурга, 448
- Связный коррелятор, 365
- Связь, 459, 463
- минимальная, 92, 451
- Сдвиг переменных интегрирования, 242, 294, 622
- Сечение рассеяния, 23, 111–118, 237, 755
- Баба, 177
- Комптона, 170
- Резерфорда, 140
- Томсона, 170, 756
- в линейной сигма-модели, 138
- глубоконеупругого, 529
- глубоконеупругого  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ , 531
- дифференциальное, *см.* Сечение рассеяния
- для партон-партоновых реакций, 537
- кулоновского рассеяния, 140, 162, 176
- образования связанного состояния, 159
- отношение к  $S$ -матрице, 117–118
- процесса Дрелла – Янга, 536, 537
- реакции  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ , 175
- реакции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , 145, 152, 756
- реакции  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}qg$ , 259, 524
- реакции  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ , 709, 724
- реакции  $e^+e^- \rightarrow$  адроны, 149, 260, 523
- реакции  $d\bar{u} \rightarrow W^-\gamma$ , 724
- упругого  $ep$ , 206



- элементарных процессов КХД, 538–541
- Сигма-матрицы Паули, 19, 51, 751
- Сигма-модель, *см.* Линейная сигма-модель, Нелинейная сигма-модель
- Силы в Природе, их симметрии, 79, 675–682
- отталкивающие, 135–136
- притягивающие, 132–135
- Сильная *CP*-проблема, 681–682
- Сильно взаимодействующие частицы, 148–150
- Сильно связанные *W*-бозоны, 704
- Сильные взаимодействия, 79, 137, 148–149, 257–258, 337, 451–457, 517–565, 626–635, *см. также*  $\alpha_s$ , КХД
- Симанчик К., 224, 392
- $\text{symm lim}$ , 615
- Симметрии, 34, 279, 300–306, 368, 748, *см. также* *C*, *P*, *T*, Калибровочная инвариантность, Теорема Нётер, Алгебры Ли, Спонтанное нарушение симметрии
- более фундаментальный, чем лагранжиан, 248, 444
- при наличии расходимостей, 247–248, 337, 341–350, 368–372, 612–644
- Симметричные множители, *см.* Правила Фейнмана
- Симметричный ток, *см.* Ток, Теорема Нётер
- Симметрия БРСТ (Бекки–Руе–Стора–Тютин), 491–495, 688
- асимптотическая, 418
- дискретная, 337, *см. также* *C*, *P*, *T*
- киральная, 67, 312, *см. также* Аксиальный векторный ток, Аксиальная векторная аномалия
- в функциональном формализме, 623–626
- нарушение, 628–630, 675, 738
- по аромату, 629–630
- Симплектические преобразования, 473
- Сингулярности массы, 525, 543–544, 547, 555–556
- Сингулярности фейнмановских диаграмм, 171–174, 215, 389, *см. также* Аналитические свойства амплитуд
- в КХД, 524–525, 543–544
- Система центра масс, 23, *см. также* Кинематика
- Скалярная КЭД, 94, 306
- теория поля, 314–315, 377–388, 412–446, *см. также* Теория  $\phi^4$
- Скалярная неабелева калибровочная теория, 516
- Скалярное поле, вещественное, 32–50
- комплексное, 50–51
- элементарное, 388
- Скалярный глюон (гипотетический), 563
- Скейлинг, *см.* Скейлинг Бьеркена
- Бьеркена, 455–457, 528, 597
- нарушение, 457, 517, 532, 543, 556, 560–561, 597
- двухточечной функции, аномальный, 407
- Скейлинговое поведение в магнетиках, 416–417
- Скорость звука, 263
- Скрытая симметрия, 337
- Слабое взаимодействие с нейтральными токами, 665–668, 684
- Слабые взаимодействия, 451, 657–675, *см. также* Теория ГВС
- КХД усиление, 571–577
- заряженного тока, 665
- при малых энергиях, 408–409, 529–530, 571–572, 664–665
- След матриц Дирака, 141–144, 752
- Смешивание ароматов кварков, 571, 670–671, 677
- операторов, 410, 575–577, 580, 600, *см. также*  $\gamma$
- Смешивание ароматов, 670–671
- Собственная энергия, *см.*  $M^2(p)$ ,  $\Sigma(p)$ ,  $\Pi^{\mu\nu}(q)$
- фермионов, *см.*  $\Sigma(p)$
- Собственная энергия фотона, *см.*  $\Pi^{\mu\nu}(q)$
- Собственное преобразование Лоренца, 79
- События три джета, 259
- Соглашение суммирования, 18
- Сокращение длины, 40
- лоренцовское, 40
- Сокращение аномалий, 661–663, 747
- Сокращения, *см.* Нефизические степени свободы
- Солитоны, 354, 741–742
- Соотношение Голдбергера–Треймана, 631
- Каллана–Гросса, 528, 589, 595
- полноты для состояний, 40, 215
- Соотношения дисперсионные, 583–585, 595–596
- полноты для спинов, 64–65
- теории групп, 471–478, 752–753
- использование при вычислениях диаграмм, 497, 502–503, 538, 541
- Составные части протона, *см.* Партоновая модель
- Состояние основное, 37–39, 96, 100, *см. также* Вакуум
- Состояния асимптотические, 114–116, 119–120, 225–228, 293
- классификация по BRST оператору, 493–494
- конечные, *см.* Асимптотические состояния
- начальные, *см.* Асимптотические состояния
- связанные, 91, 149–150, 156–161, 216
- амплитуда рождения, 157–158
- Сохранение заряда, 35, *см. также* Константы связи, Ток

- для частицы Дирака, 77
- импульса в диаграммах, 122
- лептонного числа, 682
- спиральности, 151, 173
- CP*-инвариантность, 79–80, 563, 676–681, 738
- Спектр адронов, 517–518
  - гармонического осциллятора, 37
  - теории Клейна–Гордона, 39
- Спектральное представление Леманна, 217
  - Челлена–Лемана, 217, 583, *см. также* Аналитические свойства амплитуд
  - двухточечной функции, 217, 583
- Спектроскопия  $\psi$ ,  $\Upsilon$ , 560–561, 734
- Спин, 23, 54–56
  - в магнитных системах, 263–264
  - глюонов, 563
  - и статистика, 68–73, 489, 517–518
  - сохранение, 155
  - частицы Дирака, 75–76
- Спиновая корреляционная функция, 269–270, 288, 421
- Спиновая цепочка, 740
- Спиновые кластеры, 264, 265
- Спиновые суммы для фермионов, 64–65
- Спинор  $SU(2)$ , 24, 61, 462, 477
  - перевернутый, 83
  - теории Дирака, 57–65
  - высокоэнергетический предел, 62–63, 153
  - двухкомпонентный (Вейля), 59–60, 83
  - для антифермионов, 76
  - нерелятивистский предел, 190
- Спиноры Вейля, 59
  - Дирака, 57, 750
  - правые, 60
- Спиральность, 63
  - зависимость при образовании  $\mu^+\mu^-$ , 150–154
  - проекционные операторы, 151
- Сплавы бинарные, 264–265, 269, 417
- CP<sup>N</sup>*-модель, 444–446
- Спонтанное нарушение, *см. также* Голдстоуновский бозон, Теория ГВС, Механизм Хиггса
  - и вакуумная энергия, 738
  - киральной симметрии, 627–631
  - непертурбативные механизмы, 655–657
  - симметрии, 138, 337–350, 355, 368–372, 433, 438, 447–448, 451, 647–727, 735, 741–742
  - суперсимметрии, 745
- СРТ*-инвариантность, 79, 86, 91
- Статистика Бозе–Эйнштейна, 39
  - Ферми–Дирака, 72, 130, 307, 517–518
  - и спин, 39, 68–73
- Статистическая механика, 266–271, 419–430, 740–741, *см. также* Аналогии со статистической механикой, Критические показатели
  - квантовая, 306–308
- Степени свободы с большим импульсом, 377–388
- Степенные законы, *см.* Аномальные размерности, Критические показатели
- Степень расходимости, *см.* *D*
- Стрелки, в диаграммах, 24, 128–129
- Строгий порядок, 550–551
- Строго вещественное представление, 475
- Струи адронов, 149, 259, 453, 524–525
  - в столкновениях адронов, 537–542
- Структура электрона, 551
- Структурные константы, *см.*  $f^{abc}$ 
  - функции, *см.* Партоновые функции распределения
  - функции фотона, 610
- Струны, при описании сильных взаимодействий, 733–734
- Ступенчатая функция Хевисайда, 19
- Сумма по путям, 272
  - статистическая, 287, 306–308, 351, 354
- Суммирование логарифмов, 431–432, 544, 552–554, 597, *см. также* Экспоненцирование, Массовые сингулярности
  - по поляризациям, *см.* Поляризация
  - по поляризациям фотона, 166–167
- Суперпотенциал, 90
- Суперперенормируемые взаимодействия, 314–315, 384
- Суперсимметрия, 89, 738, 743–747
  - расширенная, 405, 744–745
- Сфера в  $d$  измерениях, 195, 248
- ТВО, *см.* Великое объединение
- $T$  (обращение времени), 79, 82–84, 86, 90–91, 461, 675–682
- $T$ -матрица, 116, 120–123, 232
- $T^a$  (матрица представления группы на вещественных векторах), 650
- $T_C$  (критическая температура), 266–271
- $\tau$ -лептон, 146–147, 451
  - распад, 561
- $\theta$ -функция (ступенчатая функция), 19
- $\theta_0$  (угол слабого смешивания), 711
- $\theta_c$  (угол Кабиббо), 670
- $\theta_w$  (угол слабого смешивания), 659, *см. также* Теория ГВС,  $\sin^2 \theta_w$
- $t$  (мандельштамовская переменная), 164
- $t$ -канал, 165
- $t$ -кварк, 517, 700
  - предсказание массы, 723
  - радиационные поправки от него, 668, 721–723
  - распад, 700–703
- $t^a$  (матрицы представления группы), 466, 474
  - тождества для них, 752–753
- Таблицы  $C$ ,  $P$ ,  $T$  преобразования, 86

- аналогии между магнитной системой и теорией поля, 354
- значения критических показателей, 429
- измерения  $\alpha$ , 198
- —  $\alpha_s$ , 561
- —  $\sin^2 \theta_w$ , 668
- интегралы в  $d$  измерениях, 754
- притягивающих/отталкивающих сил, 136
- Твист, 594
- Температура, 264–271, 351, 420, 425–426, 439
- Тензор, 53
  - поля, *см.*  $F_{\mu\nu}$
  - электромагнитного поля, 50, 92, 460–461, 468
  - энергии-импульса, 36, 304, 410, 640–643, 738–739
  - в КХД, 593, 604, 643
  - для электромагнитного поля, 50, 641–643
  - симметричность, 604
  - энергии-напряжения, *см.* Тензор энергии-импульса
- Тензорные обозначения, 18–19
- Тензоры, построенные из поля Дирака, 65–68
- Теорема БПХЦ (Боголюбов–Парасюк–Хепп–Циммерман), 329, 369, 370
  - Вика, 101–103, 121, 125, 126, 284, 296
  - Голдстоуна, 340–341, 350, 372, 628–629, 656
  - Колемана–Мандула, 743
  - Мермина–Вагнера, 438–439
  - Нётер, 34, 75, 302–304, 641, *см. также* Ток, Симметрия
  - Стокса, 468
  - Фарри, 311
  - эквивалентности голдстоуновских бозонов, 696–710
- Теории Янга–Миллса, *см.* Неабелевы калибровочные теории
  - двумерных моделей, 374–375, 387, 433, 739–742
  - конформно-инвариантные, 740–741
  - свободные от аномалий, 637–639, 735
  - свободные от расходимостей, 314, 745
- Теория  $\phi^4$ , 92, 96–111, 120–125, 284, 316–321, 419, *см. также* Линейная сигма-модель
  - двухчастичное рассеяние, 120–123
  - однопетлевая структура, 318–321
  - перенормировка массы, 391
  - предел  $m_\sigma \rightarrow \infty$ , 433
  - расходимости, 316
  - ренормгрупповой анализ, 377–388
  - спонтанное нарушение, 337
  - существование, 386
  - фейнмановские правила для нее, 107–108, 124–125, 317, 749
  - Глэшоу–Вайнберга–Салама, *см.* Теория ГВС
  - Юкавы, 93, 126–133, 255, 321–322
  - —  $\beta$ -функции, 418
  - — контрчлены для нее, 390–391
  - — перенормировки, 334–335
  - — правила Фейнмана, 128
  - возмущений, 24, 92, 96
  - — в квантовой механике, 24–25
  - — в фоновом поле, 506–508, 643
  - — для корреляционных функций, 100
  - — зависящая от времени, 96
  - — перенормированная, 316–318, 322, 392, *см. также* Контрчлены
  - — перенормированная, для КЭД, 322–326
  - — перенормированная, для неабелевых калибровочных теорий, 501, 504–506
  - — перенормированная, для теории  $\phi^4$ , 316–322
  - — справедливость, 384, 387–388, 402, 405, 523, 525
  - дырок Дирака, 76, 618–619, 738
  - поля классическая, 32–36, 263, 640–641
  - слабых взаимодействий ГВС (Глэшоу–Вайнберг–Салам), 451, 635, 647, 657–675, 694, 696, 700–726, *см. также*  $W$ ,  $Z$ , Хиггсовский бозон, Масса фермионная, Массовый член калибровочного бозона
    - симметрия, 79, 675–682
    - упрощенная версия, 689
    - экспериментальная проверка, 663–669, 722–723
    - синювых волн, 373
    - струн, 746–747
    - фазовых переходов Ландау, 266–269, 288, 416, 419, 426, 429
  - электрослабая, *см.* Теория ГВС
- Тепловые флуктуации, 264
- Термодинамика ранней вселенной, 447
- Тильда (обозначение), 20
- Тождества для перестановок, *см.* Преобразование Фирца
- Тожественные частицы, 39, 119
- Тожество Бьянки, 476
  - Гордона, 87, 190, 194
  - Уорда, 167–168, 190, 194, 238, 242, 244–250, 255, 309, 325, 458, 481, 581, 589, *см.* BRST-симметрия, Нефизические степени свободы
    - в неабелевых калибровочных теориях, 483–486, 496, 637, 655, 661–662, 697
    - в теории ГВС, 705
    - в теории струн, 747
    - нарушение при плохом регуляторе, 247, 614
    - прием доказательства, 239
  - Уорда–Такахаши, 238–243, 292
  - для произвольной симметрии, 305

- и соотношение между контрчленами, 243, 305–306, 325
- Якоби, 471–472, 475, 564
- обмена, *см.* Преобразование Фирца
- Ток, *см.* Аксиальный ток, Законы сохранения, Теорема Нётер, Тождество Уорда
- дилатации, 641
- левых частиц, 67
- электромагнитный, 35, 66–67, 661
- Ток, для вращений, 75
- для поля Дирака, 66–67
- классической точечной частицы, 183
- нормировка, 410
- скалярного поля зарядов, 35
- сохранение, 35, 243
- фермионов в неабелевой калибровочной теории, 467, 506
- фермионов в теории ГВС, 661
- электромагнитный, 20
- Токи барионного числа, 627
- Томонага С., 96
- Топология вакуумных состояний, 742
- Тормозное излучение, 29, 182–188, 206, 548–552
- классическая теория, 183–187
- Точка критическая, 264, 266–271, 378, 388, 416, 419, 439, 443, 737
- Точная настройка, 388, 737
- Точно решаемые теории поля, 95, 387, 739–742
- для больших  $N$ , 441–443, 445
- Траектория в пространстве лагранжианов, 384
- Трансляции, 35
- $\text{tr}$  (след матрицы), 298
- $\text{Tr}$  (след оператора), 298
- Трехточечная функция, *см.* Корреляционные функции
- Трехфотонная амплитуда в КЭД, 311
- Три-векторы, 18
- Трубка калибровочного поля, 519
- Туннелирование, 355–356
- Тяжелые кварки как составные части протона, 529, 604
- радиационные поправки, 646, 712–723
- фотообразование, 564
  
- $U$ -калибровка, 648, 671, 678, 685, 692, 702
- $U(1)$ , 472
- $U(1)$ -заряд, в теории ГВС, 659–661
- $U(1)$ -калибровочная теория, 458–462, 647–649, 686–688
- $U(1)$ -множитель и гравитационная аномалия, 639
- $U(1)$ -симметрия, нарушение, 373
- $U(y, x)$  (компаратор), 458–460, 463
- $Y$  ( $U(1)$ -заряд), 659–661
- $Y$  (быстрота), 535
- $Y$ -частица, 150, 160, 560–561
- $u$  (мандельштамовская переменная), 164
- $u$ -канал, 165
- $u$  (кинематическая переменная при глуконепругом рассеянии), 528, 531
- $u$  (продольная быстрота), 536
- Угловой момент, 25–26, 54–55, 75, 153, 155
- Угол Кабиббо, 571, 670, 679, *см. также* СКМ-матрица
- слабого смешивания, *см.*  $\sin^2 \theta_w$
- Удельная теплоемкость, 420, 425
- Ультрафиолетово-устойчивая фиксированная точка, 407, 439
- Ультрафиолетовые расходимости, 11, 30, 94, 377
- в  $V_{\text{eff}}$ , 361
- в КЭД, 182, 195–196, 222–223, 247, 250, 311–313
- в линейной сигма-модели, 342–343
- в поддиаграммах, 309
- в скалярной теории поля, 314–315
- в теории  $\phi^4$ , 316
- в теории ГВС, 710, 716
- в энергии нулевых колебаний, 38
- влияние симметрий, 337, 341–350, 368–372
- воздействие сдвига переменных интегрирования, 242
- классификация, 309
- локальные vs. нелокальные, 328, 333–334, 370
- перекрывание, 327
- происхождение, 263
- Универсальность в критических явлениях, 265, 269, 417, 426, 428, 444
- классы, 270–271
- константы связи, 506, 673
- Унитарная калибровка, *см.*  $U$ -калибровка
- Унитарность  $S$ -матрицы, 232, 293, 494–495, 637, 699, *см. также* BRST-симметрия
- в нарушенной калибровочной теории, 686, 692
- предел  $\mathcal{M}$ , 703–704
- преобразований Лоренца, 74
- Унитарные преобразования, 472–473
- Упорядочение Вейля, 277
- Упорядоченное во времени произведение, 48, 78, 99, 125, 301
- Упорядочивание вдоль пути, 469, 480
- Уравнение Дирака, 23, 31, 52, 56–60, 750, *см. также*  $\gamma^\mu$
- решение, 61–64
- Каллана–Симанчика, 392–395, 399–403, 431, 442
- для коэффициентов операторного произведения, 578–579
- для одночастичных функций Грина, 423
- для сечения рассеяния аннигиляции, 522–523

- для электромагнитного потенциала, 403
- для эффективного действия, 424
- решение, 399–403
- с локальными операторами, 410, 413–414, 578–579
- Клейна–Гордона, 31, 34, 42, *см. также* Правила Фейнмана, Скалярное поле
- комплексное, 35, 90–91
- лоренцевская инвариантность, 52
- Лагранжа, 33
- Майорана, 88
- Шредингера, 98, 157, 161, 275, 479–480
- движения, 33, 42
- для калибровочного поля, 476
- для функций Грина, 300–306
- движения Гейзенберга, 42
- Уравнения Альтарелли–Паризи, 15, 557–560, 564–565, 605–608, 610
- начальные условия, 555, 558
- функции расщепления для КХД, 557
- функции расщепления для КЭД, 555
- Вейля, 60
- Грибова–Липатова, 15, 554–555, *см. также* Уравнения Альтарелли–Паризи
- Максвелла, 20, 23, 50, 53, 92–93, 183, 451, 476
- Швингера–Дайсона, 302–306
- Эйлера–Лагранжа, 33, 302
- ренормализационной группы, 400, 404–406, 735, *см. также* Уравнения Каллана–Симанчика, Бегущая константа связи
- эволюции, *см.* Уравнения Альтарелли–Паризи
- Усиление, *см.* Логарифмическое усиление
- Ускоренный путь, 13
- Условия начальные, *см.* Уравнения Альтарелли–Паризи
- перенормировки, 317, 500, 505
- $\overline{MS}$ , 363, 375, 448, 560
- для КЭД, 323
- для линейной сигма-модели, 343
- для теории  $\phi^4$ , 317, 320, 390
- для теории ГВС, 667–668, 710–713
- при пространственноподобных  $p$ , 389–392
- Усреднение по коротковолновым флуктуациям, 438–439
- $F_k^a$ , *см. также* Алгебра Ли
- для  $SU(3)$ , 478
- $F_k^a$  (матрица, связывающая токи для годстоуновских бозонов), 655–657, 674, 693–696
- $F_1(q^2)$  (форм-фактор), 190, 197, 231, 258, 325
- инфракрасная расходимость, 199–200
- $F_2(q^2)$  (форм-фактор), 190–197
- $F_4$  (исключительная алгебра Ли), 473
- $F_{\mu\nu}$  (тензор поля) неабелевый, 464–465, 470
- электромагнитный, 50, 92, 460–461, 468
- $\phi^6$  взаимодействие, 381
- $\phi_{cl}$  (классическое поле), 353–354, 357
- $f^+(x)$  (функция распределения), 595
- $f^-(x)$  (функция распределения), 597
- $f^{abc}$  (структурные константы), 466, 471, 474–475, 753
- $f_\gamma(x)$  (функция распределения фотонов в электроде), 547, 551
- $f_\pi$  (постоянная распада пиона), 629–635, 645
- $f_e(x)$  (функция распределения электронного партона в электроде), 548–549, 551
- $f_f(x)$  (функция распределения), 454, 526
- Фаза,  $CP$ -нарушение, 679–681
- Фазовая диаграмма для ферромагнетиков, 267
- инвариантность, локальная, 458
- Фазовое пространство, 117, 146
- двух тел, 755
- трех тел, 258–259
- Фазовые переходы, 265–271, 739, *см. также* Критические показатели, Критическая точка
- Фазовый переход второго рода, 265–271
- первого рода, 266–267
- смещения, 447
- поворот, 92, 472
- Фейнман Р. П., 96, 272, 453
- Фейнмановские граничные условия, 48, 108, 283–284
- Фермион-фермионное рассеяние в калибровочной теории с нарушенной симметрией, 689–691
- нерелятивистское, 131–133, 135–136
- Фермионные петли, 130, 749
- Фермионы Майорана, 88–89
- киральные, 264, 635–719
- праводвижущиеся, 612
- Фермионы и антифермионы, 74
- фейнмановские правила для них, 125–130
- Ферромагнетики, *см.* Магнетики
- Физика конденсированных сред, 13, 263–271, 740
- Физические параметры в квантовой теории поля, 317
- Физический заряд и масса, 217, 245, 263, 323, 403
- Физический полюс в двухточечной функции, 390
- Фиксированная точка, *см. также* Ренормгруппа, Бегущая константа связи
- Вильсона–Фишера, 387, 415, 419, 420, 424, 427–428, 433, 439–440, 444

- влияние на разложение операторного произведения, 579
  - и критические показатели, 422
  - ренормгруппы, 384–387, 404, 406, 739, 741
  - свободного поля, 384–385, 389, 419, 420
  - Фиктивные тяжелые фотоны, *см.* Регуляризация Паули–Вилларса
  - Флуктуации, 289, 377, *см. также* Корреляционная длина
  - Фоновое калибровочное поле, 298–299, 506–512, 613–626, 642–643, *см. также* Классический источник, Эффективное действие
  - Форм-фактор для аксиального тока, 630–631
    - для глубоко неупругого рассеяния, 589, 608–609
    - для тока в КЭД, 188–191, 206–209, 230
  - Форм-фактор Судакова, 205–206
  - Формула Брейта–Вигнера, 113, 237, 683
    - Клейна–Нишины, 170
    - Комптона, 169–170
    - Мотта, 176–177, 209
    - Розенблюта, 206–209
    - редукции ЛСЦ (Леманна–Симанчика–Циммерманна), 224–231
  - Фотон, 25, 92–93, 658–659, *см. также* Тормозное излучение, Комптоновское рассеяние, Электромагнитное поле, Правила Фейнмана,  $\Pi(q^2)$
  - Фотон-фотонное рассеяние, 212, 313, 334
  - Фотообразование тяжелых кварков, 564
  - Фундаментальные константы, 756–757
  - Функции Бесселя, 51
    - Грина голые, 392
    - голые, в теории возмущений, 316, 318, 342, 397–398
    - Каллана–Симанчика, *см.*  $\beta$ ,  $\gamma$
  - Функционал, 272
    - производящий, 364–368
    - для ОЧН корреляционных функций, 368
    - связанных корреляционных функций, 365
    - функций Грина, 285–287, 296
    - энергии, 352–354, 357, 358, 364–365
  - Функциональная дельта-функция, 290
    - производная, 272, 284–285
  - Функциональное квантование калибровочных полей, 289–293, 487–490, 687–688, 695–696
    - скалярных полей, 278–287
    - спинорных полей, 293–297
  - Функциональный интеграл, 272–308, 377–383, 436, 479, 487–489, 507
    - квантование импульса, 378–382
    - киральное преобразование для него, 623–626
    - методы вычисления, 280–284, 294–296, 357–359
    - решеточное определение, 732–734
  - Функция Грина взаимодействующих полей, 96, 388–402
    - запаздывающая, 47, 49, 77–78
    - уравнения Дирака, 77–78
    - уравнения Клейна–Гордона, 47–49, 479
    - фейнмановская, 48, 78
    - распределения, *см.* Партоновая функция распределения
      - Вайцзакера–Вильямса, 181, 212, 547
      - фотонов, 547, 551
      - с фиксированной калибровкой, 290–291, 687, 695, *см. также* Метод Фаддеева–Попова
      - спектральной плотности, 217
      - сравнения, 458–460, 463, *см. также* Вильсоновская линия
  - Функция Грина, *см. также* Корреляционные функции
- $\hbar$ , как единица действия, 273
- $\xi$  (калибровочный параметр), 291–292, 481, 488, 499, 687
  - зависимость от результата, 292, 499, 688–693, 724
- $\xi$  (корреляционная длина), 269
- $\xi$  (продольная часть партона), 454, 526
- $\xi$  (спинор), 61, 83, 750–751
- $x$  (кинематическая переменная при глубоко неупругом рассеянии), 454–455, 527
- Хан М., 517
- Хеш К., 328–329
- Хиггсовский бозон, 212, 671–673, 694, 696
  - взаимодействие с фермионами, 676
  - влияние на радиационные поправки, 668, 723, 725
  - его природа, 736–738
  - масса, 672
  - образование при столкновениях адронов, 727
  - распад, 726–727
  - сектор, 673–675, 681, 712, 738, 746
  - симметрии, 676
- ‘т Хофт Г., 247, 456, 504, 622
- ‘т Хофта–Вельтмана определение  $\gamma^5$ , 639
- Цвейг Г., 517
- Цвет (кварков), 148–149, 517–519, *см. также* Соотношения теории групп
  - конфайнмент, 518–519, 731, 733
  - множитель 3, 149, 257, 519–520, 534, 556, 633, 721
- Цена асимптотической свободы, 515
- Циммерман В., 224, 329
- Частица правополяризованная, 25, 63

- Частицы безмассовые, 138, 264–265, 339–341, 372, *см. также* Голдстоуновский бозон
- виртуальные, 24, 124, 377–388, 456
  - $e^+e^-$ -пары, 244, 253
  - почти реальные, 163, 209–212, 544
  - как возбуждения полей, 39
  - на поверхности, 50
  - неустойчивые, 236–237, *см. также* Вероятность распада
- Частота отрицательная, 64
- положительная, 61, 64
- Частота, положительная/отрицательная, 43, 61, 64
- Четность отрицательная, 82
- Четыре разновидности нейтрино, 684
- Четырехбозонная вершина, 482
- Четырехточечная функция, *см.* Корреляционные функции, Асимптотическое поведение амплитуд
- Четырехфотонная амплитуда в КЭД, 313, 334
- Числа Грассманна, 88, 293–296, 492
- антикоммутирующие, 88, 293–296, 492
- Численные вычисления спектров, 560–561
- Численные решеточные вычисления, 734
- Чувствительность детектора, 200–201, 205–206
- Чудо, 342–343
- Швингер Дж., 96, 192, 197, 468, 613
- Ширина  $Z$ -резонанса, *см.*  $Z$  бозон
- Ширина резонанса, 237, *см. также* Формула Брейта–Вигнера
- э.с. (эрмитово сопряжение), 19
- Эволюция параметров, *см.* Бегущая константа связи, уравнение Каллана–Симанчика
- партонного распределения, 543–560, 605–617
- Экзотические распределения для аномальных магнитных моментов, 212
- Экранирование, 253, 436, 513
- Эксперимент ALEPH, 667
- CDF, 542, 723
  - CDHS, 531
  - DELCO, 147
  - DELPHI, 667
  - HRS, 176, 254
  - OPAL, 667
  - SLAC-MIT, 452, 455
  - с двумя щелями, 272–273
- Экспериментальные проверки квантовой теории поля, *см.* Критические показатели, КЭД, КХД, теория ГВС
- Эксперименты по рассеянию, 111–112
- Экспоненцирование, 136, 205
- несвязных диаграмм, 108–110, 124, 382
- Электрический дипольный момент нейтрона, 681
- Электромагнитизм, 20, 50, 79, 451, *см. также* КЭД
- Электромагнитный потенциал, 20
- Электрон, 23, 134, *см. также* Сечение рассеяния,  $e^+e^-$  аннигиляция,  $\Sigma(p)$
- структура, 544–555
- Энергия бесконечность, 38
- в ЭМ поле, 184
  - вакуума, 38, 110, 310, 738–739, 744–745
  - нулевых колебаний, 38, 738
  - отрицательная, 31, 43, 70, 618, 738
  - отрицательность, 43, 70
- Эффект Джозефсона, 198
- Мейснера, 649
- Эффективная константа связи, *см.* Бегущая константа связи
- теория поля, 263, 748
- Эффективное действие, 351–375, 422–423, 506, 508–509, 675
- вычисление, 357–364
  - как порождающий функционал, 364–368
  - уравнения Каллана–Симанчика для него, 423
- Явление интерференции в конденсированной среде, 198
- Ядерная сила, 132

Майкл Е. Пескин, Дэниел В. Шрёдер

## ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

*Дизайнер М. В. Ботя  
Технический редактор А. В. Ширококов  
Корректор М. А. Ложкина*

Подписано к печати 29.09.01. Формат  $70 \times 100^{1/16}$ .  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 63,5. Уч. изд. л. 64,12.  
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.  
Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»  
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ № 084 от 03.04.00.  
<http://rcd.ru> E-mail: [borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ФГУП «Техническая книга».