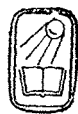


Я.А.СХОУТЕН·ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Я.А.СХОУТЕН

ТЕНЗОРНЫЙ  
АНАЛИЗ  
ДЛЯ ФИЗИКОВ





# TENSOR ANALYSIS FOR PHYSICISTS

by

J. A. SCHOUTEN

Professor of Mathematics at  
Amsterdam University

OXFORD  
AT THE CLARENDON PRESS  
1951

Я. А. СХОУТЕН

# ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ФИЗИКОВ

Перевод с английского  
и дополнение  
И. А. КУНИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1965

517.5  
С 92  
УДК 512.972

*Ян Арнольдус Схоутен*  
Тензорный анализ для физиков  
М., 1965 г., 456 стр. с илл.

Редактор *И. В. Кеппен*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *С. Н. Емельянова*

---

Слано в набор 20/IV 1965 г. Подписано к печати 24/IX 1965 г. Бумага 84×108/32.  
Физ. печ. л. 14,25. Условн. печ. л. 23,94. Уч.-изд. л. 21,09. Тираж 21 000 экз.  
Цена книги 1 р. 25 к. Заказ № 1460.

---

Издательство «Наука».  
Главная редакция физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров  
СССР по печати. Измайловский проспект, 29.

## СОДЕРЖАНИЕ

От переводчика . . . . .	9
Предисловие . . . . .	11
<b>I. Пространства, определяемые линейными группами . . .</b>	<b>13</b>
1. Группа $G_a$ . Аффинная геометрия . . . . .	13
2. Подгруппы $G_a$ . . . . .	16
3. Плоские подмногообразия в $E_n$ . . . . .	18
Упражнения . . . . .	22
<b>II. Геометрические объекты в <math>E_n</math> . . . . .</b>	<b>24</b>
1. Определения . . . . .	24
2. Скаляры и векторы . . . . .	25
3. Тензоры . . . . .	34
4. Алгебраические операции для величин . . . . .	36
5. Симметричные тензоры . . . . .	41
6. Поливекторы . . . . .	42
7. $n$ -векторы . . . . .	47
8. Плотности . . . . .	49
9. Величины валентности 2 и матрицы . . . . .	56
10. Канонические формы симметричного тензора валентности 2 . . . . .	58
11. Канонические формы бивектора . . . . .	60
12. Фундаментальный тензор . . . . .	61
13. Матричное исчисление в $E_n$ и $R_n$ . . . . .	65
14. Ортогональные нормальные формы симметричных тензоров валентности 2 и бивекторов . . . . .	68
Упражнения . . . . .	70

<b>III. Отождествление величин в <math>E_n</math> после введения под- групп <math>G_a</math> . . . . .</b>	<b>72</b>
1. Введение единичного объема (подгруппа $G_{eq}$ ) . . . . .	72
2. Введение фундаментального тензора (подгруппа $G_{or}$ ) . . . . .	73
3. Введение ориентации . . . . .	74
4. Совместные отождествления (подгруппа $G_{ro}$ ) . . . . .	75
5. Обычная векторная алгебра в $R_3$ . . . . .	86
Упражнения . . . . .	88
<b>IV. Геометрические объекты в <math>X_n</math> . . . . .</b>	<b>90</b>
1. $X_n$ . . . . .	90
2. Определение геометрических объектов в $X_n$ . . . . .	91
3. Инвариантные дифференциальные операторы. I. Grad, Div и Rot . . . . .	98
4. Инвариантные дифференциальные операторы. II. Теорема Стокса . . . . .	103
5. Инвариантные дифференциальные операторы. III. Произ- водная Ли . . . . .	112
6. Инвариантные дифференциальные операторы. IV. Произ- водные Лагранжа . . . . .	117
7. Неголономные системы координат в $X_n$ . . . . .	121
Упражнения . . . . .	122
<b>V. Геометрия многообразия с заданным параллельным пе- ренесением . . . . .</b>	<b>125</b>
1. Параллельное перенесение . . . . .	125
2. Геодезические . . . . .	130
3. Нормальные координаты . . . . .	132
4. $V_n$ . . . . .	134
5. Кривизна $V_n$ и $A_n$ . . . . .	139
6. Кривизна $V_2$ с положительно определенным фундамен- тальным тензором . . . . .	149
7. Неголономные системы координат . . . . .	150
8. Интегральные формулы в $V_n$ и $R_n$ . . . . .	151
Упражнения . . . . .	159
<b>Резюме по главам I—V . . . . .</b>	<b>160</b>
Принципы метода коренных букв и индексов . . . . .	160
Многообразия . . . . .	161
Плоские подпространства в $E_n$ . . . . .	162
Геометрические объекты . . . . .	163

Величины валентности 2 . . . . .	165
Специальные величины . . . . .	167
Инвариантные дифференциальные операторы в $X_n$ . . . . .	172
Неголопомные координаты . . . . .	175
Многообразия с заданным линейным перенесением . . . . .	175
Интегральные формулы в $V_n$ и $R_n$ . . . . .	179
<b>VI. Физические объекты и их размерности . . . . .</b>	<b>182</b>
1. Физические объекты . . . . .	182
2. Абсолютная размерность и построение геометрического образа . . . . .	188
Упражнения . . . . .	197
<b>VII. Приложения к теории упругости . . . . .</b>	<b>200</b>
1. Деформации . . . . .	200
2. Силы и напряжения . . . . .	201
3. Упругие константы . . . . .	204
4. Диэлектрические и пьезоэлектрические константы . . . . .	210
5. Кристаллические классы . . . . .	216
6. Пьезоэлектрический и пьезомагнитный эффекты . . . . .	238
7. Волны в однородной анизотропной среде . . . . .	243
8. Кварцевый резонатор . . . . .	256
Упражнения . . . . .	269
<b>VIII. Классическая динамика . . . . .</b>	<b>270</b>
1. Голономные системы . . . . .	270
2. Неголономные координаты и неголономные механиче- ские системы . . . . .	276
3. Приведение уравнений Лагранжа и Гамильтона к одно- родному виду . . . . .	280
4. Теория интегрирования . . . . .	286
5. Частные случаи первых интегралов . . . . .	293
Упражнения . . . . .	296
<b>IX. Теория относительности . . . . .</b>	<b>300</b>
1. Введение . . . . .	300
2. Уравнения электродинамики в инвариантной четырех- мерной форме . . . . .	301
3. Релятивистская кинематика . . . . .	302
4. Релятивистская динамика . . . . .	307



5. Гравитация . . . . .	317
6. Релятивистская гидродинамика . . . . .	320
Упражнения . . . . .	331
<b>X. Матричное исчисление Дирака . . . . .</b>	<b>333</b>
1. Введение . . . . .	333
2. Величины второго рода и гибридные величины . . . . .	334
3. Фундаментальный тензор. Пространство $U_n$ . . . . .	336
4. Матричное исчисление в $E_n$ и $U_n$ . . . . .	339
5. Линейные операторы . . . . .	341
6. Алгебра векторных множеств . . . . .	345
7. Кэт- и бра-векторы Дирака . . . . .	348
8. Физическая интерпретация . . . . .	355
9. Функции наблюдаемых . . . . .	358
10. Представления и матрицы . . . . .	360
11. Вероятности и ортогональные компоненты . . . . .	367
12. Обозначение с помощью функций . . . . .	369
Упражнения . . . . .	372
Дополнение. И. А. К у н и н, <b>Теория дислокаций</b> . . . . .	373
Литература . . . . .	444
Предметный указатель . . . . .	451
Основные обозначения . . . . .	456

## ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Книга написана выдающимся голландским геометром профессором Я. А. Схоутеном, много сделавшим для развития тензорного анализа. Как видно из заглавия, книга рассчитана в первую очередь на физиков и механиков, однако она будет полезна и для математиков, интересующихся приложениями тензорного анализа. За рубежом книга пользуется исключительной популярностью, о чем можно судить хотя бы по тому, что редкая работа, в которой используются методы тензорного анализа, обходится без ссылок на эту книгу.

Книгу можно разделить на две части. В первой части дается сжатое и в то же время исчерпывающее изложение теоретических основ, необходимых для приложения методов тензорного анализа. Важной отличительной чертой является последовательное проведение групповой точки зрения на тензоры, тензорные плотности и геометрические объекты. Из других особенностей отметим включение в теоретическую часть книги ряда интересных для приложений вопросов, которые обычно не находят отражения в курсах тензорного анализа. К ним, в частности, относятся: производные Ли и Лагранжа, теория неголомомных преобразований, различные формы теоремы Стокса на многообразии, в римановом и евклидовом пространствах и т. д. Завершается первая часть краткой сводкой основных определений и формул тензорного анализа, весьма удобной для справок.

Во второй, большей части книги рассматриваются приложения тензорного анализа к электродинамике, теории упругости, классической динамике, теории относительности и квантовой механике (матричное исчисление Дирака). Автор с большим искусством демонстрирует исключительную плодотворность методов тензорного анализа в этих областях физики. Со времени выхода книги в свет (1951 г.) методы тензорного анализа нашли широкое применение также в интенсивно развивающейся за последние годы теории дислокаций. В связи с этим по предложению издательства книга была дополнена соответствующим разделом.

Можно надеяться, что эта книга, наряду с известной книгой П. К. Рашевского «Риманова геометрия и тензорный анализ», станет основным пособием для физиков, механиков, математиков и вообще тех, кто желает серьезно познакомиться с тензорным анализом и его приложениями.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги положены лекции, которые читались до и во время войны в Дельфте и после войны в Амстердаме. В главах I и II излагается тензорная алгебра в  $E_n$  и  $R_n$ , а в главах IV и V — тензорный анализ в  $X_n$  и  $L_n$ . В главе III, относящейся к алгебре, рассматриваются отождествления величин в  $E_n$  после введения подгрупп аффинной группы. Эти пять глав содержат теорию тензорного исчисления в объеме, необходимом для физических приложений.

Непосредственно после пятой главы приводится сводка основных теоретических положений. Это сделано по просьбе физиков и должно оказать помощь экспериментаторам и всем тем, кто интересуется, главным образом, приложениями, которые рассматриваются в последующих главах. С помощью этой сводки можно избежать необходимости детального изучения предыдущих глав.

В следующих четырех главах мы приводим примеры приложений тензорного исчисления. Так как существует много тем, которые могли бы заполнить несколько книг подобных размеров, необходимо было сделать определенный отбор. Мы выбрали, конечно, только те приложения, которые интересны как сами по себе, так и в качестве хороших примеров полезности и преимуществ, которые дает применение тензорного исчисления. В главе VI, тесно связанной с главой III, мы показываем, что размерности физических величин зависят от выбора лежащей в основе группы. Со времени Фойгта, который ввел термин «тензор», некоторые виды тензорного исчисления всегда являлись наилучшим инструментом для исследования анизотропных сред. В главе VII с помощью современного тензорного аппарата рассматриваются некоторые как традиционные, так и современные задачи теории упругости и пьезоэлектричества. Далекое не всем

известно, что классическая механика может быть изложена весьма элегантным образом с помощью тензорного исчисления. В главе VIII мы приводим некоторые примеры, касающиеся неголономных систем и преобразований к однородному виду уравнений Лагранжа и Гамильтона. Теория относительности оказала сильнейшее влияние на развитие тензорного анализа от его первоначальной формы, данной Риччи, до используемой здесь наиболее современной формы. В главе IX мы рассматриваем сначала релятивистскую кинематику и динамику, а затем в последнем разделе даем набросок современного подхода к релятивистской гидродинамике. Ни одна из этих четырех глав не предназначалась служить небольшим учебником по соответствующему предмету, но мы надеялись избежать несвязного перечисления интересных фактов и пытались сделать каждую главу коротким, но систематическим введением в соответствующую область теоретической физики.

Матричное исчисление столь тесно связано с тензорным, что о нем нельзя не упомянуть в книге, подобной этой. В главе II мы даем в обычном плане краткий набросок связей между обеими дисциплинами. Однако, учитывая последние исследования Дирака по приложению матричного исчисления к квантовой механике, мы считаем необходимым привести в главе X изложение его замечательного метода.

В конце каждой главы дается ряд упражнений. Многие из них сформулированы в виде доказательств, чтобы ответ был заранее известен. Почти во всех остальных случаях приводятся необходимые литературные ссылки.

Представляется полезным помещенный в конце книги указатель.

Я должен выразить благодарность проф. Е. Т. Дэвису и администрации издательства «Кларендон Пресс», которые много сделали для улучшения моего английского языка, а также внесли ряд ценных предложений. Мое сотрудничество с «Кларендон Пресс» было весьма приятным, и я желаю выразить ему искреннюю благодарность.

# I. ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫМИ ГРУППАМИ <sup>1)</sup>

## 1. Группа $G_a$ . Аффинная геометрия

Мы будем рассматривать  $n$ -мерное пространство, отнесенное к координатам  $x^\kappa$ . Последние подвергаются преобразованиям вида <sup>2)</sup>

$$x^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} x^{\kappa} + a^{\kappa'}; \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det}(A_{\kappa}^{\kappa'}) \neq 0 \quad (1.1a)$$

с *постоянными* коэффициентами  $A_{\kappa}^{\kappa'}$ ,  $a^{\kappa'}$ . Множество этих преобразований образует *группу*, т. е.

1) результат двух выполненных последовательно преобразований из множества принадлежит этому же множеству;

2) для каждого преобразования из множества обратное преобразование принадлежит тому же множеству;

3) множество содержит тождественное преобразование. Эта группа называется *аффинной группой*  $G_a$ . Координаты называются *прямолинейными*.

Преобразование, обратное (1.1a),

$$x^{\kappa} = A_{\kappa'}^{\kappa} x^{\kappa'} + a^{\kappa} \quad (1.1b)$$

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Р. К. 1924. 1; 1954. 1; Веблен и Уайтхед 1932. 1; Н. М. 1935. 1; Лихнерович 1947. 1.

<sup>2)</sup> Индексы  $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$  (и иногда  $\omega$ ) всегда принимают значения  $1, \dots, n$  (курсив). Индексы  $\kappa', \lambda' \dots$  — значения  $1', \dots, n'$  (курсив).  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Def}$  обозначает: равно по определению.  $\text{Det}(\ )$  — определитель матрицы ( ).

Если в любом члене некоторый индекс встречается дважды: один раз как *верхний* и другой раз как *нижний*, то по этому индексу должно быть выполнено суммирование. Знак суммирования  $\sum$  при этом опускается (правило Эйнштейна).

содержит *постоянные* коэффициенты  $A_{\kappa'}^{\lambda'}$ ,  $a^{\kappa}$ , связанные с  $A_{\kappa}^{\lambda}$  и  $a^{\kappa'}$  соотношениями

$$A_{\kappa}^{\lambda'} A_{\lambda}^{\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{для } \kappa' = \lambda', \\ 0 & \text{для } \kappa' \neq \lambda', \end{cases} \quad A_{\kappa'}^{\lambda'} A_{\lambda}^{\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{для } \kappa = \lambda, \\ 0 & \text{для } \kappa \neq \lambda, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$A_{\kappa}^{\lambda'} a^{\kappa'} = -a^{\kappa}, \quad A_{\kappa'}^{\lambda'} a^{\kappa} = -a^{\kappa'}. \quad (1.3)$$

Для того чтобы найти  $A_{\lambda}^{\kappa'}$  для некоторых фиксированных значений  $\kappa$  и  $\lambda'$  (например,  $\kappa = 1$ ,  $\lambda' = 3'$ ), мы записываем матрицу <sup>1)</sup> из элементов  $A_{\lambda}^{\kappa'}$

$$\left\| \begin{array}{ccc} A_1^{1'} & \dots & A_1^{n'} \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^{1'} & \dots & A_n^{n'} \end{array} \right\| \quad (1.4)$$

и образуем *алгебраическое дополнение* элемента  $A_{\lambda}^{\kappa'}$ , вычеркивая из матрицы строку и столбец с индексами  $\kappa$  и  $\lambda'$  соответственно и умножая определитель полученной матрицы на  $(-1)^{\kappa+\lambda'}$ . Тогда  $A_{\lambda}^{\kappa'}$  равно этому алгебраическому дополнению, деленному на  $\Delta$ . Если расписать  $\text{Det}(A_{\lambda}^{\kappa'})$ , то это алгебраическое дополнение будет коэффициентом элемента  $A_{\lambda}^{\kappa'}$ . Следовательно,

$$A_{\lambda}^{\kappa'} = \Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial A_{\lambda}^{\kappa'}} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial A_{\lambda}^{\kappa'}}. \quad (1.5)$$

Каждая координатная система  $x^{\kappa'}$ , которая может быть получена из  $x^{\kappa}$  посредством некоторого преобразования, принадлежащего  $G_a$ , называется *допустимой координатной системой*, а пространство со всеми допустимыми координатными системами — *аффинным пространством*, или  $E_n$ . Теория всех инвариантных относительно  $G_a$  свойств фигур в  $E_n$  называется *аффинной геометрией*.

Во всех формулах мы встречаемся с *коренными буквами* подобно  $A$ ,  $x$ , *текущими индексами* подобно  $\kappa$ ,  $\kappa'$  и

<sup>1)</sup> Когда нам будут встречаться выражения с двумя индексами и соответствующие им матрицы, мы будем считать, что первый индекс обозначает номер строки, а второй — столбца. Если оба индекса расположены вертикально, один над другим, нижний индекс считается первым.

фиксированными индексами подобно  $1, \dots, n; 1', \dots, n'$ . Текущие индексы могут быть взяты также из другого алфавита, а фиксированные индексы могут быть взяты из строки 1, 2, 3 ... вместо  $1, 2, 3$ . Например, преобразование координат могло бы быть обозначено переходом от  $x^k; k = 1, \dots, n$  к  $x^h; h = 1, \dots, n$ . Следовательно, имеется различие между  $x^j$  и  $x^1$  такое же, как и между  $x^j$  и  $x^{j'}$ . При употреблении латинских текущих индексов мы обычно используем *прямой шрифт* для соответствующих фиксированных индексов. Любое множество фиксированных индексов всегда принадлежит одному и только одному множеству текущих индексов. Каждое множество текущих или фиксированных индексов принадлежит одной определенной системе координат, и эта система координат обозначается одним из ее текущих индексов в круглых скобках, например  $(k), (k'), (h), (h')$ . Точки и коренные буквы не изменяются при преобразовании *координат*. Изменение координат указывается новым множеством текущих и соответственно фиксированных индексов. Однако при *точечном* преобразовании координатная система и, следовательно, текущие и фиксированные индексы не изменяются, тогда как точки и коренные буквы изменяются, как в следующем примере:

$$y^x = p^x + P_{\lambda}^x x^{\lambda}, \quad (1.6)$$

который при постоянных  $p^x$  и  $P_{\lambda}^x$  представляет аффинное точечное преобразование <sup>1)</sup>.

Не всегда, однако, удобно использовать новую букву для указания изменения *корня*. Мы будем указывать изменение корня посредством:

- (1) изменения коренной буквы;
- (2) присоединения штриха или звездочки преимущественно *слева* от коренной буквы;
- (3) добавления индекса непосредственно *над* или *под* коренной буквой, так как место *вверху* и *внизу* справа

---

<sup>1)</sup> В этом заключается существо метода коренных букв и индексов, используемого в этой книге и многих других современных работах по дифференциальной геометрии и уравнениям в частных производных (метод впервые предложен автором в 1926 г. — *Прим. перев.*)



от коренной буквы обычно резервируется для текущих и фиксированных индексов;

- (4) использования несмещенных «выключенных» индексов, как это будет объяснено в дальнейшем.

## 2. Подгруппы $G_a$

Если мы используем вместо  $G_a$  какую-либо ее подгруппу, последняя порождает геометрию, являющуюся частным случаем аффинной. В дальнейшем в этой книге встречаются следующие случаи:

1. Группа  $G_{ho}$  всех *линейных однородных преобразований* с  $\Delta \neq 0$  (*центро-аффинная группа*). *Начало*, или *центр*,  $x^x = 0$  является инвариантом, а пространство называется *центро-аффинным  $E_n$* . Допустимыми системами координат являются допустимые системы  $E_n$  с общим началом.

2. Группа  $G_{eq}$  всех *равнообъемных линейных однородных преобразований*, т. е. преобразований с  $\Delta = \pm 1$  (*эквиаффинная группа*). Пространство называется *центро-аффинным  $E_n$  с заданным единичным объемом (эквиаффинным  $E_n$ )*. Допустимыми системами координат являются допустимые системы  $E_n$  с общим началом и одинаковым единичным объемом. В геометрии, порождаемой  $G_{eq}$ , объемы могут сравниваться.

3. Группа  $G_{sa}$  всех *специальных аффинных преобразований*, т. е. линейных однородных преобразований с  $\Delta = +1$  (*унимодулярная группа*). Пространство называется *ориентированным центро-аффинным  $E_n$  с заданным единичным объемом и заданной ориентацией (унимодулярным  $E_n$ )*. Допустимыми координатными системами являются допустимые системы  $E_n$  с общим началом, одинаковым единичным объемом и одной и той же *ориентацией* (в  $E_3$  только правые или только левые системы). *n-мерная ориентация* фиксируется посредством  $n$  направлений со стрелками, которые не содержатся ни в одном  $E_{n-1}$  и которые заданы в определенном порядке<sup>1)</sup>. Для  $n = 2$  мы

<sup>1)</sup> Вместо  $n$  направлений может быть взята часть кривой, не содержащаяся ни в каком  $E_{n-1}$  и снабженная стрелкой. Если  $\frac{1}{2}n(n+1)$  чётно (например, для  $n = 3$ ), стрелка может быть опущена.

называем ориентацию *направлением вращения* и для  $n = 1$  — *направлением*. Два таких множества направлений задают одну и ту же ориентацию, если они могут быть переведены одно в другое посредством аффинного точечного преобразования с положительным  $\Delta$ . Отсюда следует, что каждая координатная система в  $E_n$  фиксирует определенную ориентацию своими  $n$  осями, их положительными направлениями и порядком  $1, \dots, n$ . Эта ориентация изменяется при преобразовании координат тогда и только тогда, когда  $\Delta$  отрицательно.

4. Группа  $G_{or}$  всех *ортогональных однородных преобразований (группа вращений и отражений)*. Пространство <sup>1)</sup> называется  $R_n$ .  $\Delta = \pm 1$ . Допустимыми системами координат являются ортогональные системы с общим началом и одинаковым единичным объемом. В  $R_n$  существуют понятия длины и угла.

5. Группа  $G_{ro}$  всех *вращений (группа вращений)*;  $\Delta = +1$ . Пространство называется *ориентированным  $R_n$* . Допустимыми системами координат являются ортогональные системы с общим началом, одинаковым единичным объемом и одной и той же ориентацией.

Каждой группе принадлежит своя геометрия, т. е. теория всех тех свойств фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях данной группы.

Геометрия группы и геометрии ее подгрупп связаны следующим образом (принцип Ф. Клейна <sup>2)</sup>).

*Если  $G$  есть группа и  $G'$  — ее подгруппа, состоящая из всех преобразований из  $G$ , оставляющих инвариантным некоторое множество фигур  $A$ , то геометрия любой фигуры относительно  $G'$  тождественна с геометрией этой фигуры вместе с  $A$  относительно  $G$ .*

В предыдущих случаях мы можем всегда взять в качестве множества  $A$  множество всех допустимых систем координат или фигуру, из которой они могут быть получены, например начало, если мы переходим от  $G_a$  к  $G_{ho}$ , или единичную гиперсферу, если мы переходим от  $G_a$  к  $G_{or}$ .

<sup>1)</sup> Его называют также *евклидовым*. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> 1872. 1.

### 3. Плоские подмногообразия в $E_n$

В этом разделе мы дадим краткий обзор наиболее важных свойств плоских подмногообразий в  $E_n$ .

Рассмотрим систему  $n - p$  линейных уравнений

$$C_\lambda^x x^\lambda + C^x = 0 \quad (x = p + 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

с постоянными коэффициентами  $C_\lambda^x$ ,  $C^x$  и предположим, что матрица коэффициентов  $C_\lambda^x$

$$\begin{vmatrix} C_1^{p+1} & \dots & C_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^{p+1} & \dots & C_n^n \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

имеет наивысший возможный ранг <sup>1)</sup>  $n - p$ . Тогда уравнения (3.1) линейно независимы, и из них можно определить  $n - p$  переменных  $x^x$  в функции от остальных переменных. Эти последние  $p$  переменных могут быть, таким образом, использованы в качестве координат подмногообразия  $E_n$ , состоящего из всех точек, удовлетворяющих (3.1). Так как эти переменные подвергаются преобразованиям группы  $G_a$  при инвариантности остальных  $n - p$  переменных, то подмногообразие есть  $E_p$ . Мы назовем его *нуль-многообразием* уравнений (3.1), а (3.1) — *нуль-формой* пространства  $E_p$ . Таким образом, решение (3.1) может быть записано в форме

$$x^x = B_b^x \eta^b + B^x \quad (b = 1, \dots, p) \quad (3.3)$$

с постоянными коэффициентами  $B_b^x$ ,  $B^x$  и  $p$  произвольными параметрами  $\eta^b$ . Выражение (3.3) называется *параметрической формой*  $E_p$ . Подставляя (3.3) в (3.1), имеем

$$C_\lambda^x B_b^\lambda = 0; \quad C_\lambda^x B^\lambda + C^x = 0 \quad (b = 1, \dots, p; \quad x = p + 1, \dots, n). \quad (3.4)$$

Точечное преобразование вида

$$'x^x = x^x + c^x \quad (3.5)$$

<sup>1)</sup> Матрица имеет ранг  $r$ , если существует отличный от нуля минор  $r$ -го порядка, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

(в котором изменение коренной буквы указано штрихом *слева* от буквы  $x$ ) с постоянными  $c^x$  называется *трансляцией*. Если мы подвергнем (3.5) преобразованию (1.1) группы  $G_a$ , то получим

$${}^i x^{x'} = x^{x'} + A_{x'}^{x'} c^x. \quad (3.6)$$

Следовательно, трансляция в  $E_n$  инвариантна относительно допустимых преобразований координат. Два  $E_p$  в  $E_n$  называются *параллельными*, если они могут быть преобразованы друг в друга посредством трансляции. Говорят, что параллельные  $E_p$  имеют одинаковое  *$p$ -направление*. *1*-направление называется *направлением*. Это направление еще не обладает ориентацией. Только в том случае, если оно снабжено стрелкой, это понятие совпадает с направлением в общепринятом понимании. В центр-аффинном  $E_n$  для каждого  $E_p$  имеется одно и только одно параллельное  $E_p$ , проходящее через  $O$ . Его нуль-форма может быть получена из (3.1), если положить  $C^x = 0$ :

$$C_{\lambda}^x x^{\lambda} = 0 \quad (x = p + 1, \dots, n). \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь некоторые  $E_p$  и  $E_q$ , проходящие через  $O$  и заданные уравнениями

$$\begin{aligned} C_{\lambda}^x x^{\lambda} &= 0, \\ C_{\lambda}^y x^{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (x = p + 1, \dots, n; y = q + 1, \dots, n). \quad (3.8)$$

Если ранг комбинированной матрицы

$$\begin{array}{c} \leftarrow 2n - p - q \rightarrow \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{array} \parallel \begin{array}{cc} C_{\lambda}^x & C_{\lambda}^y \end{array} \parallel \end{array} \quad (3.9)$$

равен  $n - s$ , в системе (3.8) имеются как раз  $n - s$  линейно независимых уравнений, и, следовательно, они определяют некоторое  $E_s$ , *пересечение*  $E_p$  и  $E_q$ . Таким образом,  $E_p$  и  $E_q$ , проходящие через  $O$ , всегда пересекаются по  $E_s$ ;  $0 \leq s \leq p$ ,  $s \leq q$ ;  $s \geq p + q - n$ <sup>1)</sup>. Это легко может быть обобщено

<sup>1)</sup> Говорят, что  $E_p$  и  $E_q$  определяют  $E_r$ , если они содержатся в  $E_r$ , но не существует  $E_{r-1}$ , которое бы их содержало. Очевидно, что  $r = p + q - s \leq n$ . Следовательно,  $s \geq p + q - n$ . — *Прим. перев.*

на произвольные  $E_p$  и  $E_q$ , если мы будем рассматривать точки  $E_p$  «на бесконечности» как *несобственное*  $E_{p-1}$  (или  $E_{p-1}$  «на бесконечности»). Тогда два параллельных  $E_p$  пересекаются по несобственному  $E_{p-1}$ , и мы видим, что несобственное  $E_{p-1}$  можно рассматривать как  $p$ -направление.

Принимая это условие, мы можем сформулировать предложение:  $E_p$  и  $E_q$  в  $E_n$  или пересекаются по  $E_s$ ,  $p + q - n \leq s \leq p$ ;  $0 \leq s \leq q$ , или они вообще не имеют общих точек ( $s = -1$ ).  $E_2$  есть точка,  $E_1$  называется *прямой линией*,  $E_2$  — *плоскостью* и  $E_{n-1}$  — *гиперплоскостью*. Если  $u_\lambda x^\lambda = 0$  — уравнение гиперплоскости, проходящей через  $O$ , то  $u_\lambda$  называются (однородными) *координатами гиперплоскости*. Каждой допустимой координатной системе в  $E_n$  принадлежат  $n$   $E_1$ -координатных осей,  $\binom{n}{2}$   $E_2$ -координатных плоскостей, каждая из которых определяется двумя осями, и  $\binom{n}{p}$   $E_p$ -координатных  $E_p$ ,  $1 \leq p \leq n - 1$ . С их помощью можно легко показать, что любое  $E_p$  в  $E_n$  задается  $(p + 1)(n - p)$  числами. Если координатная система не является специальной,  $E_p$  пересекает каждое координатное  $E_{n-p}$  в одной и только в одной точке.  $E_p$  определяется единственным образом  $p + 1$  таких точек, а каждая из них может быть задана  $n - p$  числами. Таким же образом можно показать, что любое  $E_p$  в  $E_n$ , проходящее через заданное  $E_q$ ,  $q \leq p$ , может быть зафиксировано  $(p - q)(n - p)$  числами. Следовательно,  $E_p$  в центро-аффинном  $E_n$ , проходящее через начало, может быть зафиксировано  $p(n - p)$  числами.

Для заданных  $E_p$  и  $E_q$  можно рассмотреть плоское многообразие  $E_t$ , содержащее  $E_p$  и  $E_q$  и имеющее наименьшую размерность. Это  $E_t$  называется *объединением*  $E_p$  и  $E_q$ . С учетом несобственных многообразий может быть доказано следующее предложение.

*Объединение  $E_p$  и  $E_q$ , пересекающихся по  $E_s$ , есть  $E_t$ ,  $t = p + q - s$ .*

Ниже приведена таблица пересечений и объединений в общем случае для  $n = 4$ .

Пересечение				Объединение				(3.10)	
	$E_0$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_0$	$E_1$	$E_2$		$E_3$
$E_0$	×	×	×	×	$E_0$	$E_1$	$E_2$		$E_3$
$E_1$	×	×	×	$E_0$	$E_1$	×	×	$E_0$	
$E_2$	×	×	$E_0$	$E_1$	$E_2$	$E_0$	$E_1$	$E_2$	
$E_3$	×	$E_2$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_2$	$E_1$	$E_3$	

× = пересечение пусто

Таблица пересечений в  $E_4$  может быть проверена с помощью простого эксперимента. В  $E_3$  обычных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$  графиком движущейся точки является кривая — ее *мировая линия*. В случае равномерного движения мировая линия есть  $E_1$ . Равномерно движущаяся прямая линия описывает мировую двумерную плоскость, а равномерно движущаяся плоскость — мировое  $E_3$ . В качестве примера рассмотрим теперь два  $E_1$ , движущиеся равномерно. Так как они пересекаются в *один* момент, два мировых  $E_2$  пересекаются в *одной* точке. Таким же образом движущиеся равномерно  $E_1$  и  $E_2$  пересекаются в равномерно движущейся точке. Следовательно, мировое  $E_2$  и мировое  $E_3$  пересекаются по  $E_1$ <sup>1)</sup>.

Если в  $E_n$  задано  $p$ -направление, мы можем рассматривать все  $E_p$  с этим  $p$ -направлением как точки некоторого  $E_{n-p}$ . Этот процесс называется *редукцией  $E_n$  относительно заданного  $p$ -направления*. Если координаты выбраны таким образом, что параллельные  $E_p$  представлены уравнениями

$$x^{p+1} = \text{const}, \dots, x^n = \text{const}, \quad (3.11)$$

то  $x^{p+1}, \dots, x^n$  могут быть использованы в качестве координат в этом  $E_{n-p}$ .

Если в  $E_n$  задано  $E_p$ , а также  $(n-p)$ -направление, которое не имеет общего направления с  $E_p$ , каждая геоме-

---

<sup>1)</sup> Этот эксперимент может быть выполнен для аудитории с помощью двух тростей или трости и куска картона.

трическая фигура в  $E_n$  может быть подвергнута следующим операциям:

(а) *Пересечение с  $E_p$* : результирующая фигура состоит из общих точек первоначальной фигуры и  $E_p$ . Только  $E_p$  при этом использовано.

(б) *Редукция относительно  $(n - p)$ -направления*: все точки фигуры, которые лежат в одном и том же  $E_{n-p}$  с заданным  $(n - p)$ -направлением, тождественны. Результирующая фигура содержится в  $E_p$ , которое получается из  $E_n$  редукцией относительно  $(n - p)$ -направления. Только  $(n - p)$ -направление использовано.

(с) *Проекция на  $E_p$  в  $(n - p)$ -направлении*: через каждую точку фигуры проводится  $E_{n-p}$  с заданным  $(n - p)$ -направлением. Пересечение этого  $E_{n-p}$  с  $E_p$  есть проекция точки. Используются как  $E_p$ , так и  $(n - p)$ -направление.

В заданном  $E_p$  в  $E_n$  может быть фиксирована  $p$ -мерная ориентация. В этом случае говорят, что  $E_p$  имеет *внутреннюю ориентацию*. Если в некотором  $E_{n-p}$ , не имеющем общих направлений с  $E_p$ , фиксирована  $(n - p)$ -мерная ориентация, она определяет ориентацию в *каждом* таком же  $E'_{n-p}$  посредством проекции его на  $E_{n-p}$  в  $p$ -направлении, заданном  $E_p$ . В этом случае говорят, что  $E_p$  имеет *внешнюю ориентацию*. Например, для случая  $E_1$  в  $E_3$  стрелка в  $E_1$  и направление вращения *вокруг*  $E_1$  задают соответственно внутреннюю и внешнюю ориентации.

## УПРАЖНЕНИЯ

I. 1. Доказать, что точечное преобразование

$$y^x = A_{x'}^x \delta_{\lambda}^{x'} x^\lambda + a^x \quad (1a)$$

переводит каждую точку  $x^x$  в точку  $y^x$ , которая имеет те же компоненты относительно  $(x')$ , что и точка  $x^x$  относительно  $(x)$ .

I. 2. Если (3.8) суть уравнения в точечных координатах  $E_p$  и  $E_q$ , проходящих через  $O$ , то их параметрические уравнения в координатах гиперплоскости имеют вид

$$u_\lambda = C_{\lambda}^1 x^r, \quad u_\lambda = C_{\lambda}^2 y^q \quad (x = p + 1, \dots, n; \quad y = q + 1, \dots, n). \quad (2a)$$

Так как ранг (3.9) равен  $n - s$ , то  $n$  уравнений

$${}^1C_{\lambda^x}^x \xi_x - {}^2C_{\lambda^y}^y \theta_y = 0 \quad (x = p + 1, \dots, n; \quad y = q + 1, \dots, n) \quad (2\beta)$$

имеют  $n - p - q + s$  линейно независимых решений  $\xi_x, \theta_y$ , и объединением  $E_p$  и  $E_q$  является  $E_{p+q-s}$ .

1.3.  $E_p$  и  $E_q$ , проходящие через  $O$ , могут быть заданы параметрическими уравнениями

$$x^x = {}^1B_b^x \eta^b, \quad x^x = {}^2B_c^x \chi^c \quad (b = 1, \dots, p; \quad c = 1, \dots, q) \quad (3\alpha)$$

в точечных координатах и уравнениями

$${}^1B_b^x u_x = 0, \quad {}^2B_c^x u_x = 0 \quad (b = 1, \dots, p; \quad c = 1, \dots, q) \quad (3\beta)$$

в координатах гиперплоскости. Если  $E_s$  есть пересечение  $E_p$  и  $E_q$ , уравнения

$${}^1B_b^x \eta^b - {}^2B_c^x \chi^c = 0 \quad (b = 1, \dots, p; \quad c = 1, \dots, q) \quad (3\gamma)$$

имеют  $s$  линейно независимых решений  $\eta^b, \chi^c$  и ранг матрицы (ср. (3.9))

$$\begin{array}{c} \leftarrow n \rightarrow \\ \uparrow \\ p + q \\ \downarrow \end{array} \left\| \begin{array}{c} {}^1B_b^x \\ \\ {}^2B_c^x \end{array} \right\|$$

равен  $p + q - s$ .

1.4.  $E_p$  и  $E_q$  в  $E_n$ , которые не имеют общих направлений и каждое из которых имеет внутреннюю ориентацию, всегда определяют внутреннюю ориентацию в объединении  $E_{p+q}$  для четного  $pq$ . Для  $pq$  нечетного они определяют внутреннюю ориентацию в объединении только в случае, если они заданы в определенном порядке.

1.5.  $E_p$  и  $E_q$  в  $E_n$ , которые имеют общее  $E_s$  и каждое из которых имеет внутреннюю ориентацию, всегда определяют внутреннюю ориентацию в объединении  $E_{p+q-s}$  для каждого выбора внутренней ориентации в  $E_s$ , когда  $(p-s)(q-s)$  четно, а для  $(p-s)(q-s)$  нечетного — только в случае, когда они заданы в определенном порядке.



## II. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В $E_n$ <sup>1)</sup>

### 1. Определения

*Если имеется соответствие между упорядоченными множествами  $N$  чисел*

$$\Phi_\Lambda \quad (\Lambda = 1, \dots, N)$$

*и допустимыми системами координат  $(x)$  в  $E_n$  такое, что:*

*(1) каждой системе  $(x)$  соответствует одно и только одно множество  $\Phi_\Lambda$ ;*

*(2) множество  $\Phi_{\Lambda'}$ , соответствующее  $(x')$ , может быть выражено только через  $\Phi_\Lambda$ ,  $A_{x'}^{x'}$  и  $a^{x'}$ ,*

*тогда говорят, что  $\Phi_\Lambda$  являются компонентами геометрического объекта относительно  $(x)$  в  $E_n$ .*

Геометрические объекты в  $E_n$  классифицируются согласно законам преобразования их компонент. Если в приведенном выше условии (2) выражение для  $\Phi_{\Lambda'}$  линейно и однородно относительно  $\Phi_\Lambda$ , алгебраически однородно относительно  $A_{x'}^{x'}$  и не содержит  $a^{x'}$ , то  $\Phi_\Lambda$  являются компонентами *геометрической величины* в  $E_n$ .

Точка дает простой пример геометрического объекта, который не является величиной. Ее компонентами  $\Phi_\Lambda$  являются  $x^\Lambda$ , закон преобразования которых содержит  $a^{x'}$  (ср. I. 1.1a).

Кроме координатных и точечных преобразований мы можем рассматривать более общие *преобразования объек-*

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Р. К. 1924. 1; 1954. 1; Эйзенхарт 1926. 1; Леви-Чивита 1927. 2; Томас 1931. 1; Веблен и Уайтхед 1932. 1; Н. М. 1935. 1; Бриллюэн 1938. 1; Лихнерович 1947. 1; Брандт 1947. 2; Мичел 1947. 3.

*тов*, посредством которых каждый объект переводится в другой объект того же рода, т. е. с тем же законом преобразования. При этом координатная система и, следовательно, текущие и фиксированные индексы не изменяются, а коренные буквы изменяются.

В §§ 2—8 этой главы нам придется встречаться с многими примерами геометрических объектов.

## 2. Скаляры и векторы

(а) *Скаляры*. Скаляр имеет одну компоненту, инвариантную относительно (1.1.1).

(б) *Контравариантные векторы*. Контравариантный вектор имеет  $n$  компонент  $v^x$  с законом преобразования

$$v^{x'} = A_x^{x'} v^x. \quad (2.1)$$

Отсюда вытекает, что  $v^x$  преобразуется подобно разности двух радиусов-векторов и, следовательно,  $v^x$  может быть представлен системой из двух точек с ориентацией, фиксирующей порядок этих точек. Ориентация может быть задана стрелкой (не обязательно прямолинейной) или положительным и отрицательным знаками, или числами 1 и 2 и т. п. Система точек определена с точностью до трансляции. Компонентами относительно ( $x$ ) являются проекции на оси, измеряемые в единицах соответствующих осей. В центро-аффинном  $E_n$  контравариантный вектор может быть представлен точкой. Здесь радиус-вектор  $x^x$  является величиной, а именно контравариантным вектором. Следовательно, если заменить  $G_a$ , определяющую  $E_n$ , ее подгруппой  $G_{ho}$ , определяющей центро-аффинное  $E_n$ , то некоторые геометрические объекты, которые *различаются* законами преобразования относительно главной группы, могут иметь *одинаковый* закон преобразования относительно подгруппы.

Сложение контравариантных векторов проводится по правилу, известному в механике как «параллелограмм сил». Умножая  $v^x$  на скаляр  $p$ , мы получаем вектор  $pv^x$ , который в  $|p|$  раз больше  $v^x$  и имеет то же или противоположное направление в зависимости от того, является ли  $p$  положительным или отрицательным.

(с) *Ковариантные векторы.* Ковариантный вектор имеет  $n$  компонент  $\omega_\lambda$ , преобразующихся по закону

$$\omega_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} \omega_{\lambda}. \quad (2.2)$$

Чтобы дать геометрическую интерпретацию ковариантному вектору, рассмотрим две параллельные гиперплоскости с уравнениями

$$u_{\lambda} x^{\lambda} = 1, \quad v_{\lambda} x^{\lambda} = 1, \quad v_{\lambda} = \alpha u_{\lambda}. \quad (2.3)$$

При преобразовании (I. 1.1) эти уравнения переходят в

$$u_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda} x^{\lambda'} = 1 - u_{\lambda} a^{\lambda}, \quad v_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda} x^{\lambda'} = 1 - v_{\lambda} a^{\lambda}. \quad (2.4)$$

Следовательно, преобразование для  $u_{\lambda}$ ,  $v_{\lambda}$  и  $\alpha$  имеет вид

$$u_{\lambda'} = \frac{u_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda}}{1 - u_{\lambda} a^{\lambda}}, \quad v_{\lambda'} = \frac{v_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda}}{1 - v_{\lambda} a^{\lambda}}, \quad \alpha' = \alpha \frac{1 - u_{\lambda} a^{\lambda}}{1 - \alpha u_{\lambda} a^{\lambda}}. \quad (2.5)$$

Гиперплоскости пересекают ось  $x^1$  в точках  $1/u_1$  и  $1/\alpha u_1$ . Длина заключенного между ними отрезка в единицах этой оси равна  $1/\alpha u_1 - 1/u_1$ , а обратная ей величина равна

$$\frac{\alpha u_1 u_1}{u_1 - \alpha u_1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} u_1. \quad (2.6)$$

Обозначая ее через  $\omega_{\lambda}$ , имеем

$$\omega_{\lambda} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} u_{\lambda} \quad (2.7)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda'} &= \frac{\alpha'}{1 - \alpha'} u_{\lambda'} = \frac{\alpha(1 - u_{\lambda} a^{\lambda})}{1 - \alpha u_{\lambda} a^{\lambda} - \alpha(1 - u_{\lambda} a^{\lambda})} \frac{u_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda}}{1 - u_{\lambda} a^{\lambda}} = \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} u_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda} = \omega_{\lambda} A_{\lambda'}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Следовательно,  $\omega_{\lambda}$  может быть представлен системой двух параллельных гиперплоскостей с ориентацией, фиксирующей их порядок. Эта ориентация может быть задана стрелкой (предпочтительно не прямолинейной)<sup>1)</sup> или раскраской одной

---

<sup>1)</sup> Прямолинейная стрелка могла бы вызвать предположение, что задано некоторое направление.

из гиперплоскостей в белый, а другой в черный цвет и т. п. Система гиперплоскостей определена с точностью до трансляций. Компоненты относительно ( $x$ ) обратны по величине длине соответствующих отрезков на осях, измеренных в единицах этих осей. В центр-аффинном  $E_n$  ковариантный вектор может быть представлен одним  $E_{n-1}$ .

Из (2.5) мы видим, что гиперплоскость является геометрическим объектом в  $E_n$ , но не величиной, так как закон преобразования  $u_\lambda$  содержит

$$a^x = -A_{x'}^x a^{x'}$$

Сложение ковариантных векторов геометрически иллюстрируется рис. 1, на котором показано пересечение  $v_\lambda$ ,  $w_\lambda$  и  $v_\lambda + w_\lambda$  с некоторым  $E_2$ .

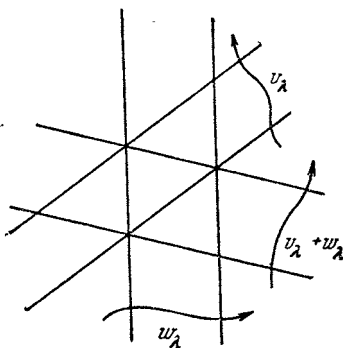


Рис. 1.

Умножая  $w_\lambda$  на действительный скаляр  $p$ , мы получаем другой ковариантный вектор  $pw_\lambda$ , который в  $|p|^{-1}$  раз «больше»  $w_\lambda$  и имеет то же или противоположное направление в зависимости от того, является ли  $p$  положительным или отрицательным.

$p$  линейно независимых контравариантных векторов определяют  $p$ -направление, а направления всех линейно зависящих от них контравариантных векторов содержатся в этом  $p$ -направлении. Такая совокупность  $\infty^p$  контравариантных векторов называется *контравариантной оболочкой*<sup>1)</sup>, а  $p$ -направление — ее *носителем*. В центр-аффинном  $E_n$  вместо  $p$ -направления в качестве носителя может быть использовано  $E_p$ , проходящее через начало.  $p$  называется *размерностью оболочки*. Контравариантная оболочка и ее носитель определяют друг друга единственным образом. Говорят, что они *натянуты* на  $p$  данных векторов (*порождаются*  $p$  данными векторами).

<sup>1)</sup> То есть линейным векторным пространством, порожденным данными векторами. — *Прим. перев.*

$p$  линейно независимых ковариантных векторов определяют  $(n-p)$ -направление, а  $(n-1)$ -направления всех линейно зависящих от них ковариантных векторов содержат это  $(n-p)$ -направление. Такая совокупность  $\infty^p$  ковариантных векторов называется *ковариантной оболочкой*, а  $(n-p)$ -направление — ее *носителем*. В центро-аффинном  $E_n$  вместо  $(n-p)$ -направления в качестве носителя может быть использовано  $E_{n-p}$ , проходящее через начало.  $p$  называется *размерностью оболочки*. Ковариантная оболочка и ее носитель определяют друг друга единственным образом. Говорят, что они *натянуты* на  $p$  данных векторов.

Каждой допустимой системе координат ( $\kappa$ ) в  $E_n$  принадлежат  $n$  контравариантных векторов  $e^\kappa$ ;  $\lambda = 1, \dots, n$  с компонентами

$$\begin{aligned} e^1_1 &= 1, & e^2_1 &= 0, & \dots, & e^n_1 &= 0, \\ e^1_2 &= 0, & e^2_2 &= 1, & \dots, & e^n_2 &= 0, \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ e^1_n &= 0, & e^2_n &= 0, & \dots, & e^n_n &= 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $e_\lambda$  — корень, а  $\kappa$  — текущий индекс. Аналогичным образом ( $\kappa$ ) принадлежат  $n$  ковариантных векторов  $e_\lambda^\kappa$ ;  $\kappa = 1, \dots, n$ . Они имеют компоненты

$$\begin{aligned} e^1_1 &= 1, & e^1_2 &= 0, & \dots, & e^1_n &= 0, \\ e^2_1 &= 0, & e^2_2 &= 1, & \dots, & e^2_n &= 0, \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ e^1_n &= 0, & e^2_n &= 0, & \dots, & e^n_n &= 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $e_\lambda^\kappa$  — корень, а  $\lambda$  — текущий индекс.  $e^\kappa$  и  $e_\lambda^\kappa$  называются *контравариантными* и *ковариантными базис-*

ными векторами координатной системы ( $\kappa$ ). Для каждого значения  $\mu$  вектор  $e^\mu$  имеет направление, содержа-

щееся в  $(n - 1)$ -направлении каждого вектора  $e_\lambda^v$  ( $v \neq \mu$ ), и ограничивается двумя  $E_{n-1}$ ,

определяемыми  $e_\lambda^\mu$ . На рис. 2

показаны векторы  $e_\lambda^\kappa$  и  $e_\lambda^\lambda$

для  $n = 3$ .

Если ввести другую систему ( $\kappa'$ ), компонентами  $e_\lambda^{\kappa'}$

и  $e_\lambda^\kappa$  относительно ( $\kappa'$ ) будут

$$\begin{aligned} e_\lambda^{\kappa'} &= A_{\lambda}^{\kappa'} e_\lambda^\kappa, \\ e_\lambda^\kappa &= A_{\lambda}^{\kappa} e_\lambda^{\kappa'}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Конечно, эти компоненты не будут теперь равны 1 или 0.

Отметим, что в преобразовании (2.11) полный корень состоит из буквы  $e$  и индек-

са непосредственно под (как  $e_\lambda$ ) или над (как  $e^\lambda$ ) буквой в

соответствии с условием (3), упомянутым в I, § 1. Такие индексы, образующие часть корня, называются *мертвыми*, а индексы, подвергаемые преобразованиям основной группы, — *живыми*.

Базисными векторами, принадлежащими ( $\kappa'$ ), являются

$e_{\lambda'}^{\kappa'}$ ,  $e_{\lambda'}^{\kappa}$ . Их компоненты относительно ( $\kappa'$ ) имеют значения

единица или нуль, а их компоненты  $e_{\lambda'}^{\kappa}$ ,  $e_{\lambda'}^{\kappa'}$  относительно ( $\kappa$ )

могут принимать любые другие значения.

Комбинация  $v^\lambda w_\lambda$  является инвариантом, так как

$$v^{\lambda'} w_{\lambda'} = v^\lambda A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\lambda'}^{\lambda} w_\lambda = v^\lambda w_\lambda. \quad (2.12)$$

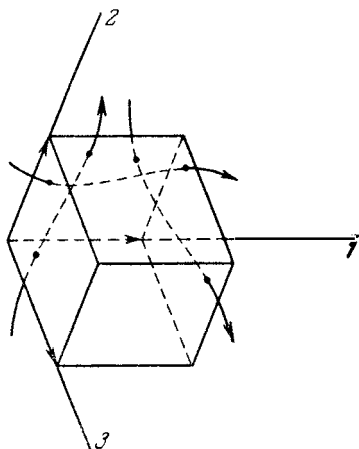


Рис. 2.

Этот инвариант равен нулю тогда и только тогда, когда направление  $v^x$  содержится в  $(n-1)$ -направлении  $\omega_\lambda$ , и равен 1, если  $v^x$  ограничен двумя  $E_{n-1}$ , определяемыми  $\omega_\lambda$ , и если ориентации  $v^x$  и  $\omega_\lambda$  согласуются. Мы называем  $v^\lambda \omega_\lambda$  *сверткой*  $v^x$  и  $\omega_\lambda$ .

Если заданы  $n$  линейно независимых контравариантных векторов  $v_i^x$  ( $i=1, \dots, n$ ) (здесь  $v_i$  — корень,  $i$  — мертвый индекс), то эти векторы определяют параллелепипед с точностью до трансляции.  $n$  пар, параллельных  $E_{n-1}$  этого параллелепипеда, имеющих ориентацию одного из векторов  $v_i^x$ , направление которого не содержится в их  $(n-1)$ -направлении, представляют  $n$  ковариантных векторов  $\omega_\lambda^h$  ( $h=1, \dots, n$ ), удовлетворяющих условиям <sup>1)</sup>

$$v_i^\mu \omega_\mu^h = \delta_i^h \quad \left( \delta_i^h = \begin{cases} 1 & \text{для } h=i, \\ 0 & \text{для } h \neq i \end{cases} \right). \quad (2.13)$$

Эти две системы  $v_i^x$  и  $\omega_\lambda^h$  называются *взаимными*. Следовательно, ко- и контравариантные базисные векторы, принадлежащие одной и той же системе координат, являются взаимными системами.

Ко- и контравариантные базисные векторы могут быть использованы для нахождения компонент заданного вектора или для построения вектора по его заданным компонентам. Возьмем, например, вектор  $v^x$  и образуем  $n$  скаляров:

$$v^x = v^\lambda e_\lambda^x. \quad (2.14)$$

---

<sup>1)</sup>  $\delta_i^h$  есть так называемый *символ Кронекера*. Его индексы являются мертвыми, и было бы более последовательно писать  $\delta_i^h$ .

Но мы предпочитаем, насколько это возможно, избегать башнеподобных конструкций, которые получаются, если одновременно использовать индексы непосредственно над и под центральной буквой.

Очевидно, эти  $n$  скаляров численно равны  $v^\lambda$ . Но относительно системы  $(\lambda')$  уравнение (2.14) принимает вид

$$v^\lambda = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^{\lambda}. \quad (2.15)$$

$v^\lambda$  преобразуются, тогда как  $v^{\lambda'}$  остаются инвариантными.

Это значит, что мы не имеем право писать  $v^\lambda = v^{\lambda'}$ , так как слева мы имеем вектор, а справа  $n$  скаляров. Поэтому мы пишем

$$v^\lambda \stackrel{*}{=} v^{\lambda'}. \quad (2.16)$$

Знак  $\stackrel{*}{=}$  будет использоваться всегда, когда мы хотим отразить тот факт, что уравнение справедливо относительно данной системы (или систем) координат, но не обязательно справедливо относительно всех других координатных систем.

В (2.14) мертвый индекс образован из живого. Эта операция встречается весьма часто, и мы будем называть ее *выключением индекса*. Когда индекс выключен, он уже принадлежит корню, и это обстоятельство должно быть указано или расположением индекса непосредственно над или под центральной буквой или заключением его в круглые скобки, чтобы показать, что координатные преобразования основной группы более к нему не относятся.

Наоборот, из  $n$  скаляров  $v^{\lambda'}$  можно построить вектор  $v^\lambda$ , используя базисные контравариантные векторы:

$$v^\lambda = v^{\lambda'} e_{\lambda'}^{\lambda}, \quad (2.17)$$

или относительно  $(\lambda')$

$$v^{\lambda'} = v^\lambda e_{\lambda}^{\lambda'}. \quad (2.18)$$

Эта операция является обратной операции выключения. В системе  $(\lambda)$  уравнения (2.14) и (2.17) численно означают одно и то же. Однако в связи с ограниченным смыслом знака равенства в (2.16) это не имеет места в любой другой системе  $(\lambda')$ . Эти два уравнения имеют, конечно, различный геометрический смысл. (2.14) позволяет определить



компоненты вектора с помощью ковариантных базисных векторов, а (2.17) позволяет построить вектор по его компонентам с помощью контравариантных базисных векторов.

Из-за численного совпадения  $v^{\kappa}$  и  $v_{\kappa}$ , учитывая (2.15) и (2.18), находим

$$\begin{aligned} e_{\lambda'}^{\kappa} &\stackrel{*}{=} e_{\lambda'}^{\kappa} \stackrel{*}{=} A_{\lambda'}^{\kappa}, \\ e_{\lambda}^{\kappa'} &\stackrel{*}{=} e_{\lambda}^{\kappa'} \stackrel{*}{=} A_{\lambda}^{\kappa'}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

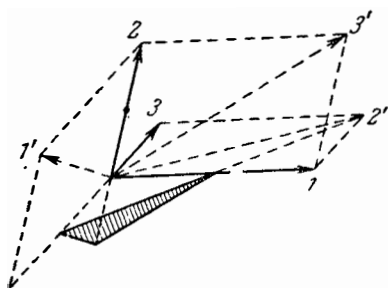


Рис. 3.

Отсюда получаем для преобразования базисных векторов при переходе от  $(\kappa)$  к  $(\kappa')$

$$\begin{aligned} e_{\lambda'}^{\kappa} &\stackrel{*}{=} A_{\lambda'}^{\lambda} e_{\lambda}^{\kappa}, \\ e_{\lambda}^{\kappa'} &\stackrel{*}{=} A_{\lambda}^{\kappa'} e_{\lambda}^{\kappa}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Приведем пример для  $n = 3$ . Предположим, что

$$\begin{aligned} e_{1'}^{\kappa} &= e_2^{\kappa} - 2e_3^{\kappa}, \\ e_{2'}^{\kappa} &= e_1^{\kappa} + e_3^{\kappa}, \\ e_{3'}^{\kappa} &= e_1^{\kappa} + e_2^{\kappa}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

как это показано на рис. 3. Тогда матрица  $A_{\lambda'}^{\kappa}$  имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda' \backslash \kappa & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1' & 0 & 1 & -2 \\ 2' & 1 & 0 & 1 \\ 3' & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (\text{Det}(A_{\lambda'}^{\kappa}) = -1). \quad (2.22)$$

С помощью алгебраической процедуры, описанной в I, § 1, находим матрицу  $A_{\lambda}^{x'}$ :

$$\begin{array}{c|ccc} \begin{array}{l} x' \\ \lambda \end{array} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad (2.23)$$

Отсюда следует

$$\begin{array}{l} e_{\lambda} = e_{\lambda}^1 - e_{\lambda}^2 - e_{\lambda}^3, \\ e_{\lambda} = 2e_{\lambda}^1 - 2e_{\lambda}^2 - e_{\lambda}^3, \\ e_{\lambda} = -e_{\lambda}^1 + 2e_{\lambda}^2 + e_{\lambda}^3. \end{array} \quad (2.24)$$

Теперь мы можем проверить это с помощью рис. 3. Например, уравнение плоскости, проходящей через конец  $e_{\lambda}^{x'}$  параллельно  $e_{\lambda}^x$  и  $e_{\lambda}^{x'}$ , имеет вид

$$2x^1 - 2x^2 - x^3 = 1. \quad (2.25)$$

Эта плоскость отделяет на осях отрезки  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-1$ .

Следовательно, компоненты  $e_{\lambda}^{x'}$  относительно  $(x)$  имеют значения 2,  $-2$ ,  $-1$ .

Из матриц (2.22) и (2.23) мы находим выражения старых базисных векторов через новые

$$\begin{array}{l} e_{\lambda}^x = e_{\lambda}^1 + 2e_{\lambda}^2 - e_{\lambda}^3, \\ e_{\lambda}^x = -e_{\lambda}^1 - 2e_{\lambda}^2 + 2e_{\lambda}^3, \\ e_{\lambda}^x = -e_{\lambda}^1 - e_{\lambda}^2 + e_{\lambda}^3 \end{array} \quad (2.26)$$

и

$$\begin{array}{l} e_{\lambda}^1 = e_{\lambda}^2 + e_{\lambda}^3, \\ e_{\lambda}^1 = e_{\lambda}^2 + e_{\lambda}^3, \\ e_{\lambda}^1 = -2e_{\lambda}^2 + e_{\lambda}^3. \end{array} \quad (2.27)$$

## 3. Тензоры

Геометрическая величина  $P^{x_1 \dots x_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ , имеющая  $p$  верхних индексов и  $q$  нижних индексов и преобразующаяся по закону 1) 2)

$$P^{x'_1 \dots x'_p}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q} = A^{x'_1 \dots x'_p}_{x_1 \dots x_p} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q} P^{x_1 \dots x_p}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}, \quad (3.1)$$

называется тензором *контравариантной валентности  $p$ , ковариантной валентности  $q$  и валентности  $p+q$* .

Если  $q=0$ , тензор называется *контравариантным*, если  $p=0$  — *ковариантным* и в общем случае — *смешанным*;  $p=0, q=0$  соответствует скаляру,  $p=1, q=0$  — контравариантному и  $p=0, q=1$  — ковариантному вектору. Расположение индексов существенно, и мы не имеем права записывать одну и ту же величину один раз как  $P^{\mu\lambda}$ , а другой раз как  $P_{\mu\lambda}$ .

Если тензор имеет более чем один индекс, существуют *промежуточные компоненты*, т. е. компоненты, принадлежащие двум или более различным координатным системам, например

$$P^{\lambda'}_{\lambda} = A^{\lambda'}_{\lambda} P^{\lambda}_{\lambda} = A^{\lambda'}_{\lambda} P^{\lambda'}_{\lambda'}. \quad (3.2)$$

Различные индексы некоторой величины могут принадлежать разным пространствам. В этом случае величина называется *связывающей величиной*.  $B^x_{\lambda}$  и  $C^x_{\lambda}$  в (I.3.3) и (I.3.1) являются примерами таких связывающих величин.

Смешанный тензор валентности 2 представляет линейное однородное преобразование контравариантных векторов

$${}'v^x = P^x_{\lambda} v^{\lambda}. \quad (3.3)$$

Если  $\text{Det}(P^x_{\lambda}) \neq 0$ , существует обратное преобразование

$$v^x = \bar{P}^x_{\lambda} {}'v^{\lambda}. \quad (3.4)$$

1)  $A^{x'_1 \dots x'_p}_{x_1 \dots x_p} A^{\lambda_1 \dots \lambda_q}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_q}$  обозначает здесь  $A^{x'_1}_{x_1} \dots A^{x'_p}_{x_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \dots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q}$ .

2) Как правило ко- и контравариантные индексы иногда не пишутся на одной вертикали, так как это могло бы легко привести к ошибкам.

$\bar{P}_{\lambda}^{\kappa}$  называется *обратным*  $P_{\lambda}^{\kappa}$  и может быть получен из последнего таким же способом, как  $A_{\lambda}^{\kappa}$  из  $A_{\lambda}^{\kappa'}$  в I, § 1. Например,  $\bar{P}_{\cdot 3}^{\cdot 2}$  равен алгебраическому дополнению элемента  $P_{\cdot 2}^{\cdot 3}$  матрицы  $P_{\lambda}^{\kappa}$ , деленному на  $\text{Det}(P_{\lambda}^{\kappa})$ .

Тензор, соответствующий тождественному преобразованию, называется *единичным тензором* и записывается как  $A_{\lambda}^{\kappa}$ :

$$v^{\kappa} = A_{\lambda}^{\kappa} v^{\lambda}. \quad (3.5)$$

Очевидно,

$$A_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} \delta_{\lambda}^{\kappa}, \quad A_{\mu}^{\mu} = n, \quad (3.6)$$

где должен быть использован символ  $\stackrel{*}{=}$ , так как слева стоит тензор, а справа — система  $n^2$  скаляров. Преобразуя  $v$  в (3.5), получаем

$$v^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa}, \quad (3.7)$$

где  $A_{\kappa}^{\kappa'}$  являются промежуточными компонентами единичного тензора. Это оправдывает использование одной и той же коренной буквы  $A$  в (I.1.1) и (II.3.5). Очевидно,

$$A_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} e_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} e_{\lambda}^{\kappa}, \quad A_{\lambda'}^{\kappa'} \stackrel{*}{=} e_{\lambda'}^{\kappa'} \stackrel{*}{=} e_{\lambda'}^{\kappa'}. \quad (3.8)$$

Так как эти уравнения означают, что  $n^2$  компонент тензора относительно некоторой координатной системы оказались равными компонентам  $n$  векторов относительно той же системы, символ  $\stackrel{*}{=}$  не может быть заменен знаком  $=$ .

Для определенных выше тензоров  $P_{\lambda}^{\kappa}$  и  $\bar{P}_{\lambda}^{\kappa}$  имеют место соотношения

$$P_{\mu}^{\kappa} \bar{P}_{\lambda}^{\mu} = A_{\lambda}^{\kappa}. \quad (3.9)$$

Таким же образом могут быть построены обратные тензоры для двухвалентных контра- и ковариантных тензоров, матрицы которых имеют ранг  $n$ , т. е.

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} \bar{Q}_{\mu\lambda} &= A_{\lambda}^{\nu}, \\ R_{\lambda\mu} \bar{R}^{\mu\kappa} &= A_{\lambda}^{\kappa}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

#### 4. Алгебраические операции для величин

*Сложение.* Определено только для тензоров одинаковой валентности:

$$R_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\kappa} = P_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\kappa} + Q_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\kappa}. \quad (4.1)$$

*Умножение.* Определено для любых тензоров. Валентности произведения равны сумме валентностей сомножителей:

$$S_{\mu\lambda\dots\tau}^{\cdot\cdot\rho\sigma} = P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho\sigma} Q^{\sigma\tau} R_{\tau}. \quad (4.2)$$

Умножение не является коммутативным, т. е.

$$S^{\kappa\lambda} = v^{\kappa} w^{\lambda} \neq w^{\kappa} v^{\lambda} = T^{\kappa\lambda}. \quad (4.3)$$

Здесь  $S^{\kappa\lambda}$  — произведение двух векторов. В общем случае тензор непредставим в виде произведения векторов, но всегда является суммой таких произведений:

$$P_{\cdot\cdot\mu}^{\kappa\lambda} = A_{\rho\sigma\mu}^{\kappa\lambda\tau} P_{\cdot\cdot\tau}^{\rho\sigma} = e_{\alpha}^{\kappa} e_{\beta}^{\lambda} e_{\mu}^{\gamma} \left( e_{\rho} e_{\sigma} e_{\gamma}^{\tau} P_{\cdot\cdot\tau}^{\rho\sigma} \right) = P_{\cdot\cdot(\gamma)}^{(\alpha)(\beta)} e_{\alpha}^{\kappa} e_{\beta}^{\lambda} e_{\mu}^{\gamma};$$

$$P_{\cdot\cdot(\gamma)}^{(\alpha)(\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\cdot\cdot\tau}^{\rho\sigma} e_{\rho}^{\alpha} e_{\sigma}^{\beta} e_{\gamma}^{\tau} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n). \quad (4.4)$$

Тензор

$$T_{\cdot\lambda}^{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} e_{\lambda'}^{\kappa} e_{\lambda}^{\lambda'} + \dots + e_{n'}^{\kappa} e_{\lambda}^{\lambda'} \quad (4.5)$$

преобразует контравариантные базисные векторы системы  $(\kappa)$  в контравариантные базисные векторы системы  $(\kappa')$ . Его промежуточные компоненты  $T_{\cdot\lambda}^{\kappa'}$  равны 0 или 1:

$$T_{\cdot\lambda}^{\kappa'} = \delta_{\lambda}^{\kappa'1}). \quad (4.6)$$

*Свертка.* Агрегат

$$R^{\kappa\rho} = P_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\kappa} Q^{\lambda\rho\mu} \quad (4.7)$$

является тензором и называется *сверткой*  $P_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\kappa}$  и  $Q^{\lambda\rho\mu}$  по  $\lambda$  и  $\mu$ . Свертки могут быть образованы различными способами, однако каждое суммирование должно выполняться

<sup>1)</sup>  $\delta_{\lambda}^{\kappa'}$  — обобщенный символ Кронекера.  $\delta_{\lambda}^{\kappa'} = 1$ , если  $\kappa'$  и  $\lambda$  принимают соответствующие значения из строк  $\lambda', \dots, n'$  и  $1, \dots, n$  и  $= 0$  во всех остальных случаях.

по нижнему и верхнему индексам. Например, выражение  $\sum_{\lambda} v_{\lambda} P_{\lambda}^{\times}$  не является инвариантом и, следовательно, не есть вектор.

Суммирование может также выполняться по индексам одного и того же тензора. Например:

$$Q^{\times} = P_{\lambda}^{\times\lambda}.$$

Мы будем эту операцию, как и предыдущую, называть сверткой по соответствующим индексам<sup>1)</sup>. Индексы, по которым происходит суммирование, называются немymi, остальные — свободными индексами.

*Образование изомера.* Изомер образуется при изменении порядка следования верхних или нижних индексов:

$$Q_{\dots\mu}^{\times\lambda\nu} = P_{\mu}^{\times\nu\lambda}. \quad (4.8)$$

*Симметрирование.* Операция симметрирования всегда производится над несколькими верхними или нижними индексами. Чтобы симметрировать по  $p$  индексам, мы образуем  $p!$  изомеров, располагая эти индексы всеми возможными способами, а затем берем сумму этих изомеров, деленную на  $p!$ . Симметрирование всегда обозначается парой круглых скобок ( ). Индексы, которые не участвуют в симметрировании, могут быть с обеих сторон выделены вертикальными черточками. Например:

$$P_{\lambda}^{(\times\rho | \mu | \sigma)} = \frac{1}{6} (P_{\lambda}^{\times\rho\mu\sigma} + P_{\lambda}^{\rho\sigma\mu\times} + P_{\lambda}^{\sigma\times\mu\rho} + P_{\lambda}^{\rho\times\mu\sigma} + P_{\lambda}^{\sigma\rho\mu\times} + P_{\lambda}^{\times\sigma\rho\mu}). \quad (4.9)$$

Если тензор инвариантен относительно симметрирования по некоторым  $p$  индексам, то он называется *симметричным* по этим индексам. Тогда он инвариантен относительно каждой перестановки этих индексов. Например:

$$P_{\lambda}^{\times\mu\sigma} = P_{\lambda}^{(\times\mu\sigma)} = P_{\lambda}^{\mu\sigma\times} = P_{\lambda}^{\sigma\mu\times} \text{ и т. д.} \quad (4.10)$$

<sup>1)</sup> В оригинале операции называются соответственно transvection и contraction. В отечественной литературе первую операцию иногда называют умножением с последующим свертыванием по соответствующим индексам. — *Прим. перев.*

*Альтернирование.* Операция альтернирования производится так же, как и симметрирование, но каждый из  $p!$  изомеров берется с положительным знаком при четной перестановке и с отрицательным знаком при нечетной. Альтернирование обозначается парой квадратных скобок [ ]. Индексы, к которым операция альтернирования не относится, могут быть выделены вертикальными черточками. Например:

$$P_{\lambda}^{[\kappa\rho \mid \mu \mid \sigma]} = \frac{1}{6} (P_{\lambda}^{\kappa\rho\mu\sigma} + P_{\lambda}^{\rho\sigma\mu\kappa} + P_{\lambda}^{\sigma\mu\rho\kappa} - P_{\lambda}^{\rho\mu\kappa\sigma} - P_{\lambda}^{\sigma\rho\mu\kappa} - P_{\lambda}^{\kappa\sigma\rho\mu}). \quad (4.11)$$

Альтернирование по более чем  $n$  индексам всегда дает нуль. Если тензор инвариантен относительно альтернирования по некоторым  $p$  индексам, то он называется *кососимметричным* или *альтернированным* по этим индексам. Следовательно, если два таких индекса поменять местами, то это приведет к изменению знака. Например:

$$P_{\lambda}^{\kappa\mu\sigma} = P_{\lambda}^{[\kappa\mu\sigma]} = -P_{\lambda}^{\mu\kappa\sigma} = +P_{\lambda}^{\mu\sigma\kappa} = -P_{\lambda}^{\kappa\sigma\mu}. \quad (4.12)$$

Все эти операции инвариантны относительно допустимых преобразований координат.

*Выключение индексов; ранг относительно определенных индексов.* Свертка тензора с базисными векторами приводит к выключению одного или нескольких индексов. Таким образом, мы можем из  $P_{\dots\mu\nu}^{\dots\lambda}$  получить, например, систему  $n^2$  тензоров валентности 2:

$$P_{\nu}^{\lambda} = P_{\dots\mu\nu}^{\dots\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} e_{\rho}^{\sigma} P_{\dots\mu\sigma}^{\dots\rho\lambda}. \quad (4.13)$$

Согласно § 2 выключенные индексы расположены здесь над или под центральной буквой или выделены на их собственных местах круглыми скобками. Последние более удобны при выключении большого числа индексов или когда выключаются одновременно верхние и нижние индексы.

Если в обеих частях уравнения выключаются одни и те же индексы, уравнение остается инвариантным. Однако, если в обеих частях уравнения выключаются различные индексы, необходимо ставить знак  $\stackrel{*}{=}$ . Например:

$$A_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} A_{\lambda}^{(\kappa)} = e_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} A_{(\lambda)}^{\kappa)} = \delta_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} A_{(\lambda)}^{\kappa)} + e_{\lambda}^{\kappa}. \quad (4.14)$$

*Ранг тензора относительно определенных индексов* есть число линейно независимых величин, которые получатся, если все *остальные* индексы выключить. При этом не обязательно, чтобы индексы все были верхними или нижними или принадлежали одной системе координат. *Ранг является инвариантом всех допустимых координатных преобразований.* Из определения немедленно следует, что ранг относительно некоторых индексов равен рангу относительно всех остальных индексов и что ранг относительно всех индексов равен 1. Действительно, предположим, что ранг тензора валентности  $s+t$  относительно  $s$  индексов равен  $r$ . Тогда этот тензор может быть записан в виде суммы  $r$  линейно независимых тензоров валентности  $s$ , каждый из которых умножен на тензор валентности  $t$ . Но отсюда следует, что ранг  $r'$  относительно  $t$  остальных индексов никогда не может быть больше чем  $r$ . То же рассуждение справедливо, если мы начнем с  $t$  индексов и ранга  $r'$ . Следовательно,  $r = r'$ .

*Тензор валентности 2 имеет только один нетривиальный ранг, равный рангу соответствующей матрицы.*

Пусть  $r$  есть ранг некоторого тензора относительно индекса  $\mu$ . Тогда, выключая все остальные индексы, мы получим в точности  $r$  линейно независимых ко- или контравариантных векторов. Оболочка этих векторов (ср. II, § 2) называется  $\mu$ -оболочкой тензора.

В качестве примера мы рассмотрим  $E_p$  и  $E_q$  ( $p+q=n$ ), проходящие через начало координат и не имеющие общих направлений. Мы хотим определить тензор  $B_\lambda^x$  ранга  $p$ , который имеет  $E_p$  в качестве носителя  $\mu$ -оболочки и  $E_q$  в качестве носителя  $\lambda$ -оболочки (ср. II, § 2) и который удовлетворяет условию

$$B_\mu^x B_\lambda^\mu = B_\lambda^x. \quad (4.15)$$

Пусть координатная система выбрана таким образом, что  $E_p$  порождается  $e_1^x, \dots, e_p^x$ , а  $E_q$  — остальными контравариантными базисными векторами. Тогда  $E_q$  порождается также  $e_\lambda^1, \dots, e_\lambda^p$ , а  $E_p$  — остальными ковариантными базисными векторами. Отсюда мы видим, что  $B_\lambda^x$  должен быть



представим в виде

$$B_\lambda^\alpha = w_{(\beta)}^{(\alpha)} e_\lambda e^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, p). \quad (4.16)$$

Матрица неизвестных коэффициентов  $w_{(\beta)}^{(\alpha)}$  не может иметь ранг меньше  $p$ , так как ранг  $B_\lambda^\alpha$  должен быть равен  $p$ . Из (4.15) получаем

$$w_{(\beta)}^{(\alpha)} w_{(\gamma)}^{(\beta)} = w_{(\gamma)}^{(\alpha)} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, p). \quad (4.17)$$

Но это возможно, если только  $w_{(\beta)}^{(\alpha)} = \delta_\beta^\alpha$ . Следовательно,

$$B_\lambda^\alpha = e_\lambda e^\alpha. \quad (4.18)$$

Аналогичным образом

$$C_\lambda^\alpha = e_\lambda e^\alpha \quad (\alpha = p + 1, \dots, n) \quad (4.19)$$

является единственным тензором, имеющим  $E_q$  носителем  $\kappa$ -оболочки,  $E_p$  — носителем  $\lambda$ -оболочки и удовлетворяющим условию

$$C_\mu^\alpha C_\lambda^\mu = C_\lambda^\alpha. \quad (4.20)$$

Из (4.18,19) следует, что

$$\begin{aligned} B_\lambda^\alpha + C_\lambda^\alpha &= A_\lambda^\alpha, & B_\mu^\mu &= p, & C_\mu^\mu &= n - p; \\ B_\mu^\alpha C_\lambda^\mu &= 0, & B_\lambda^\alpha C_\mu^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Тензоры  $B_\lambda^\alpha$  и  $C_\lambda^\alpha$  разлагают контравариантный вектор  $v^\alpha$  на две составляющие по  $E_p$  и по  $E_q$ , а ковариантный вектор  $w_\lambda$  — на две составляющие, проходящие через  $E_p$  и  $E_q$ :

$$\begin{aligned} v^\alpha &= B_\lambda^\alpha v^\lambda + C_\lambda^\alpha v^\lambda, \\ w_\lambda &= B_\lambda^\alpha w_\alpha + C_\lambda^\alpha w_\alpha. \end{aligned} \quad (4.22)$$

## 5. Симметричные тензоры

Ко- или контравариантный тензор, симметричный по *всем* индексам, называется *симметричным* тензором<sup>1)</sup>:

$$\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \omega_{(\lambda_1 \dots \lambda_p)}. \quad (5.1)$$

Среди  $n^p$  компонент симметричного тензора имеются в точности  $\binom{n+p-1}{p}$  независимых. В центро-аффинном  $E_n$  уравнение

$$\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_p} = 1 \quad (0) \quad (5.2)$$

представляет гиперповерхность (конус) *степени*  $p$ . Обратно, симметричный тензор  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  единственным образом определяется его гиперповерхностью и с точностью до скалярного множителя — его конусом. Аналогичным образом контравариантный симметричный тензор  $v^{x_1 \dots x_p}$  в центро-аффинном  $E_n$  связан с гиперповерхностью (конусом) *класса*  $p$ , определяемой уравнениями

$$v^{x_1 \dots x_p} u_{x_1} \dots u_{x_p} = 1 \quad (0) \quad (5.3)$$

в  $E_{n-1}$ -координатах  $u_{\lambda}$ . Если симметричный тензор может быть записан как смешанное произведение  $p$  векторов, конус вырождается в  $p$  гиперплоскостей или  $p$  прямых, проходящих через  $O$ .

Ранг симметричного тензора один и тот же относительно всех индексов. Носителем оболочки ковариантного симметричного тензора  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  ранга  $r$  является  $E_{n-r}$ , определяемое уравнениями

$$\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} x^{\lambda_p} = 0. \quad (5.4)$$

Гиперповерхность  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  есть цилиндр, состоящий из  $\infty^{r-1}$  параллельных  $E_{n-r}$ . Его конус состоит из  $\infty^{r-2}$   $E_{n-r+1}$ , которые все содержат  $E_{n-r}$ , определяемое (5.4).

---

<sup>1)</sup> Автор называет тензоры аффинорами, а термин тензор сохраняет только для симметричных аффиноров. Принятая здесь терминология является более употребительной. — *Прим. перев.*

## 6. Поливекторы

Ко- или контравариантный тензор валентности  $p$ , альтернированный по *всем* индексам, называется  *$p$ -вектором*<sup>1)</sup>

$$v^{x_1 \dots x_p} = v^{[x_1 \dots x_p]}. \quad (6.1)$$

$p$  должно быть  $\leq n$ . Среди  $n^p$  компонент  $p$ -вектора имеются в точности  $\binom{n}{p}$  независимых. Все компоненты  $p$ -вектора, имеющие два одинаковых индекса, равны нулю.  $n$ -вектор имеет только одну независимую компоненту, например  $v^1 \dots n$ . Однако, так как  $v^1 \dots n$  не является инвариантом,  $n$ -вектор не эквивалентен скаляру.

Если  $p$ -вектор может быть записан как альтернированное произведение  $p$  векторов

$$v^{x_1 \dots x_p} = p! v^{[x_1 \dots x_p]} = \begin{vmatrix} v^{x_1} & \dots & v^{x_p} \\ 1 & & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ v^{x_1} & \dots & v^{x_p} \\ p & & p \end{vmatrix}, \quad (6.2)$$

он называется *простым*, а каждый из сомножителей произведения — *делителем*  $v^{x_1 \dots x_p}$ .

Мы докажем, что вектор  $v^x$  является делителем  $v^{x_1 \dots x_p}$  тогда и только тогда, когда

$$v^{[x_1 \dots x_p v^x]} = 0. \quad (6.3)$$

Необходимость этого условия очевидна. Чтобы доказать достаточность, рассмотрим любой вектор  $w_\lambda$ , удовлетворяющий условию

$$w_\lambda v^\lambda = 1. \quad (6.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (p+1) v^{[x_1 \dots x_p v^x]} w_x = \\ &= v^{x_1 \dots x_p v^x} w_x - v^{x_1 \dots x_{p-1} v^x v^x w_x} - \dots \\ &\dots - v^{x_1 \dots x_p v^x} w_x = v^{x_1 \dots x_p} - p w_x v^{[x_2 \dots x_p v^x]}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

что и доказывает предложение.

<sup>1)</sup> А также *поливектором*, если не упоминается валентность. Некоторые авторы используют термин «*антисимметричный тензор*».

$p$ -вектор является простым в том и только том случае, если

$$v^{[\kappa_1 \dots \kappa_p v^{\lambda_1}]} \dots \lambda_p = 0. \quad (6.6)$$

Необходимость условия очевидна. Чтобы доказать достаточность, заметим, что мы всегда можем так изменить индексы, чтобы было  $v^1 \dots p \neq 0$ . Тогда из (6.6) следует, что  $p$  векторов  $v^{\kappa_2} \dots p$ ,  $v^{\kappa_3} \dots p$ , ...,  $v^1 \dots (p-1)\kappa$ , получаемые фиксированием всех индексов, кроме одного, являются все делителями  $v^{\kappa_1} \dots \kappa_p$ . Более того, эти векторы должны быть линейно независимыми, так как первая компонента первого вектора есть  $v^1 \dots p \neq 0$ , а первые компоненты всех остальных векторов равны нулю, и т. д. Следовательно,  $v^{\kappa_1} \dots \kappa_p$  имеет  $p$  линейно независимых делителей и потому простой.

Менее непосредственное необходимое и достаточное условие

$$v^{[\kappa_1 \dots \kappa_p v^{\lambda_1 \lambda_2}]} \dots \lambda_p = 0 \quad (6.7)$$

было доказано Вейцзенбоком<sup>1)</sup>. Джайвнс<sup>2)</sup> доказал теорему, высказанную еще Вейцзенбоком<sup>3)</sup>, что для нечетного  $s$

$$v^{[\kappa_1 \dots \kappa_p v^{\lambda_1} \dots \lambda_s]} \dots \lambda_p = 0 \quad (6.8)$$

в том и только том случае, когда

$$v^{[\kappa_1 \dots \kappa_p v^{\lambda_1} \dots \lambda_{s+1}]} \dots \lambda_p = 0 \quad (\text{ср. упр. II. 9}). \quad (6.9)$$

Рассмотрим теперь простой контравариантный бивектор  $v^{\kappa\lambda}$  в  $E_3$ :

$$v^{\kappa\lambda} = 2v^{[\kappa} v^{\lambda]}. \quad (6.10)$$

Здесь

$$|v^1 v^2 - v^2 v^1| \quad (6.11)$$

есть площадь проекции параллелограмма на векторах  $v^1$ ,  $v^2$  на  $12$ -плоскость, измеренная в единицах площади параллелограмма на базисных векторах  $e^1$ ,  $e^2$ . Знак  $v^1 v^2 - v^2 v^1$  положительный или отрицательный в зависимости от того,

<sup>1)</sup> 1908.1; 1923.3, p. 87.

<sup>2)</sup> 1937.1, p. 364.

<sup>3)</sup> 1923.3, p. 87.

совпадает ли направление вращения от вектора  $v^x$  к вектору  $v^x$  с направлением вращения от 1 к 2 в 12-плоскости или нет. Следовательно,  $v^{x_1}$  геометрически изображается

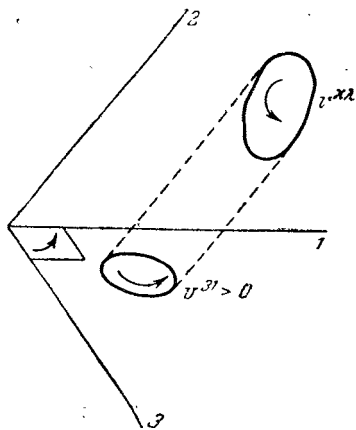


Рис. 4.

частью плоскости с определенной площадью (но произвольной формы) с *внутренней ориентацией*, причем фигура фиксирована с точностью до трансляции (рис. 4).

Геометрическая интерпретация простого контравариантного  $p$ -вектора  $v^{x_1 \dots x_p}$  в  $E_n$  может быть получена аналогичным образом. Берем произвольное  $E_p$ , имеющее  $p$ -направление  $v^{x_1 \dots x_p}$ , и в этом  $E_p$  выделяем  $p$ -мерную область, проекция которой в  $(n-p)$ -направлении

$e^{[x_{p+1} \dots x_n]}$  на  $E_p$  имеет

объем, в точности равный  $|v^1 \dots v^p|$ . При этом единичным является объем параллелепипеда<sup>1)</sup>, построенного на базисных векторах  $e^x, \dots, e^x$ . Если эта область имеет внутреннюю

ориентацию, согласующуюся с ориентацией  $e^x, \dots, e^x$ , взя-

тых в этой последовательности для  $v^1 \dots v^p > 0$  и в противоположной последовательности для  $v^1 \dots v^p < 0$ , мы получаем

геометрическое представление  $v^{x_1 \dots x_p}$ . Если  $v^1 \dots v^p = 0$ , можно взять любую другую неисчезающую компоненту

$v^{x_1 \dots x_p}$ . Очевидно, результат не зависит от выбора  $p$  базисных векторов. Фигура в целом фиксирована с точностью до трансляции. Мы видим, что каждый простой  $p$ -вектор определяет *внутреннюю* ориентацию соответствующего  $p$ -направления.

<sup>1)</sup> Мы используем в общем случае этот термин как аналог параллелепипеда для 3 измерений.

Для простого ковариантного бивектора  $\omega_{\lambda\kappa}$  в  $E_3$

$$\omega_{\lambda\kappa} = \omega_{\lambda^1 \lambda^2} \omega_{\kappa^1 \kappa^2} \quad (6.12)$$

выражение

$$\left| \begin{matrix} \omega_1^1 \omega_2^2 & \omega_2^1 \omega_1^2 \\ \omega_2^1 \omega_1^2 & \omega_1^1 \omega_2^2 \end{matrix} \right| \quad (6.13)$$

имеет величину, обратную площади пересечения цилиндра векторов  $\omega_{\lambda^1}$  и  $\omega_{\lambda^2}$  с  $12$ -плоскостью<sup>1)</sup>, измеренную в единицах площади параллелограмма на базисных векторах  $e^{\lambda^1}$ ,  $e^{\lambda^2}$ . Знак  $\omega_1^1 \omega_2^2 - \omega_2^1 \omega_1^2$  положителен, если ориентация трубки, фиксированная последовательностью  $\omega_{\lambda^1}$  и  $\omega_{\lambda^2}$ , соответствует ориентации  $12$ -плоскости. Следовательно,  $\omega_{\lambda\kappa}$  может быть геометрически интерпретирован как цилиндр с определенным направлением, определенной площадью сечения (но произвольной формы) и внешней ориентацией, причем фигура в целом фиксирована с точностью до трансляции (рис. 5).

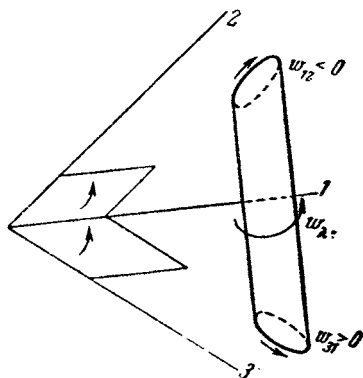


Рис. 5.

Аналогичным образом может быть получена геометрическая интерпретация простого ковариантного  $p$ -вектора  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  в  $E_n$ . Возьмем произвольный  $n$ -мерный цилиндр ( $n-1$ -мерная граница которого состоит из  $\infty^{p-1} E_{n-p}$ .

<sup>1)</sup> Ковариантный вектор  $\omega_{\lambda^1}$  в  $E_3$  может быть задан парой плоскостей. Два таких вектора  $\omega_{\lambda^1}$  и  $\omega_{\lambda^2}$ , пересекаясь, образуют цилиндр. Поперечное сечение последнего с координатной  $\mu\nu$ -плоскостью есть, очевидно, параллелограмм с площадью  $\left| \omega_{\mu^1} \omega_{\nu^2} - \omega_{\nu^1} \omega_{\mu^2} \right|^{-1}$ . При этом легко видеть, что в данном вопросе форма поперечного сечения безразлична. — Прим. перев.

имеющих  $(n - p)$ -направление, определяемое  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ . Его пересечение с  $E_p$ , порожденным  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}$ , имеет объем  $|\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}|^{-1}$ , измеренный в единицах параллелотопа, построенного на этих векторах. Если этот цилиндр имеет внешнюю ориентацию, согласованную с  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}$  для  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} > 0$  и противоположную для  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} < 0$ , мы получаем геометрическое представление  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ . Если  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = 0$ , можно выбрать другие  $p$  базисных векторов из  $e^{\lambda}$ . Очевидно, результат не зависит от выбора множества  $p$  базисных векторов. Фигура в целом фиксирована с точностью до трансляции. Мы видим, что каждый простой ковариантный  $p$ -вектор определяет внешнюю ориентацию своего  $(n - p)$ -направления.

Если  $p$ -вектор не простой, его можно представить в виде конечной суммы простых  $p$ -векторов, так как  $p$ -вектор всегда возможно записать в виде суммы простых векторов в координатных  $E_p$  или координатных  $E_{n-p}$  (ср. I, § 3) произвольной координатной системы. Мы называем это *разложением  $p$ -вектора на листы*. Наименьшее число листов, на которое может быть разложен данный  $p$ -вектор, является инвариантом  $p$ -вектора. Для  $2 < p < n - 2$  немного известно относительно этого инварианта. Но для  $p = 2$  и  $p = n - 2$  разложение на минимальное число листов может быть получено без труда.

Мы докажем это для  $n = 4$ . Пусть  $F^{\lambda\lambda}$  есть бивектор и

$$F^{[\lambda\lambda} F^{\mu]\nu} \neq 0. \quad (6.14)$$

Отсюда следует, что

$$F^{12} F^{34} + F^{23} F^{14} + F^{31} F^{24} \neq 0. \quad (6.15)$$

Тогда (ср. (6.7))

$$F^{[\lambda\lambda} F^{\mu\nu]} \neq 0. \quad (6.16)$$

Возьмем теперь произвольный *простой* бивектор  $F^{\lambda\lambda}$ , удовлетворяющий условию

$$F^{[\lambda\lambda} F^{\mu\nu]} \neq 0, \quad (6.17)$$

и попытаемся определить простой бивектор  $F_2^{\times\lambda}$ , такой, что

$$F^{\times\lambda} = \alpha F_1^{\times\lambda} + F_2^{\times\lambda}. \quad (6.18)$$

Так как  $F_2^{\times\lambda}$  должен быть простым, мы имеем необходимое и достаточное условие

$$F^{[12} F^{3\lambda]} - 2\alpha F_1^{[12} F^{3\lambda]} = 0, \quad (6.19)$$

из которого может быть единственным образом определено  $\alpha$ . Следовательно, если  $F_1^{\times\lambda}$  выбран,  $F_2^{\times\lambda}$  определяется однозначно. Таким же образом можно доказать, что каждый бивектор ранга  $2\rho$  может быть разложен на  $\rho$  и не меньше чем на  $\rho$  простых бивекторов. Разложение определяется неоднозначно. Разложение  $(n-2)$ -векторов может быть сведено к разложению бивекторов, как это будет показано в § 7.

Ранг  $p$ -вектора относительно каждого из индексов одинаков. Очевидно, только  $p$ -векторы ранга  $p$  являются простыми  $p$ -векторами.

## 7. $n$ -векторы

$n$ -вектор представляется объемом в  $E_n$ , снабженным  $n$ -мерной ориентацией. Его компонента  $v^1 \dots v^n$  ( $\omega_1 \dots \omega_n$ ) есть объем (взаимный объем), измеренный с помощью параллелоотопа из базисных векторов и взятый с положительным (отрицательным) знаком, если ориентация соответствует (противоположна)  $1, 2, \dots, n$ -ориентации. Отсюда следует, что два произвольных ко- (контра-)вариантных  $n$ -вектора отличаются только скалярным множителем.

Так как

$$\begin{aligned} v^{1'} \dots v^{n'} &= A_{1'}^{1'} \dots A_{n'}^{n'} v^{1'} \dots v^{n'} = \\ &= n! A_{[1'}^{1'} \dots A_{n']}^{n'} v^{1'} \dots v^{n'} = \Delta v^{1'} \dots v^{n'}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

компонента  $v^{1'} \dots v^{n'}$  не является скаляром. Аналогично мы можем доказать, что

$$\omega_{1'} \dots \omega_{n'} = \Delta^{-1} \omega_1 \dots \omega_n. \quad (7.2)$$



Каждой координатной системе для любого  $p \leq n$  принадлежат  $\binom{n}{p}$  контравариантных и  $\binom{n}{p}$  ковариантных  $p$ -векторов, например  $p! e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_p}$ .

Два  $n$ -вектора, принадлежащие  $(\kappa)$ , могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} E^{\lambda_1 \dots \lambda_n} &\stackrel{\text{def}}{=} n! e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}, \\ e_{\lambda_1 \dots \lambda_n} &\stackrel{\text{def}}{=} n! e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_n}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Очевидно,

$$E^{\lambda_1 \dots \lambda_n} = 1, \quad e_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = 1. \quad (7.4)$$

Оба  $n$ -вектора геометрически представляются параллелепипедом на базисных векторах с  $1, 2, \dots, n$ -ориентацией.

С помощью этих  $n$ -векторов может быть установлено взаимно однозначное соответствие между контравариантными  $p$ -векторами и ковариантными  $(n-p)$ -векторами. Если мы определим

$$\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(n-p)!} e_{\lambda_1 \dots \lambda_p \mu_{p+1} \dots \mu_n} \nu^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \quad (7.5)$$

то легко показать, что

$$\nu^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} = \frac{1}{p!} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} E^{\lambda_1 \dots \lambda_p \mu_{p+1} \dots \mu_n}. \quad (7.6)$$

Оба уравнения выражают тот факт, что

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \stackrel{*}{=} \nu^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \quad (7.7)$$

если  $\mu_1 \dots \mu_n$  есть четная перестановка  $1 \dots n$ . Но это соответствие не инвариантно, так как оно зависит от выбора системы  $(\kappa)$ . Если  $(\kappa)$  изменить,  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  может приобрести скалярный множитель. Это соответствие может быть использовано для доказательства того, что любой  $(n-2)$ -вектор всегда может быть разложен, и притом не больше чем на  $\frac{1}{2}n$  листов. Для того чтобы сделать это, мы должны разложить соответствующий бивектор.

8. Плотности<sup>1)</sup>

Как мы видели, разница между  $v^1 \dots^n$  и скаляром заключается в том, что закон преобразования для  $v^1 \dots^n$  содержит множитель  $\Delta$ . Мы определим *скалярную  $\Delta$ -плотность веса  $t$*  как величину с одной компонентой  $\tilde{p}$  и законом преобразования<sup>2)</sup>

$$\tilde{\omega}[\kappa'] = \Delta^{-t} \tilde{p}[\kappa] \quad \text{или} \quad \tilde{p}^{(\kappa')} = \Delta^{-t} \tilde{p}^{(\kappa)} \quad (8.1)$$

Тогда контравариантный  $n$ -вектор может рассматриваться как скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $-1$ , а ковариантный  $n$ -вектор — как скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ . Это не является новой геометрической концепцией, а лишь обозначением, позволяющим нам избавиться от группы индексов.

Так как  $n$ -вектор обладает ориентацией, каждая скалярная  $\Delta$ -плотность с нечетным положительным или отрицательным весом также имеет ориентацию. Это есть ориентация тех координатных систем, относительно которых компонента положительна.

Любой скаляр, симметричный тензор, поливектор или тензор может быть умножен на скалярную  $\Delta$ -плотность веса  $t$ . Тогда мы получим *скалярную или соответствующую тензорную  $\Delta$ -плотность веса  $t$* . Следовательно, тензорная  $\Delta$ -плотность веса  $t$ , контравариантной валентности  $p$  и ковариантной валентности  $q$  имеет  $\infty^{p+q}$  компонент  $\tilde{P}^{x_1 \dots x_p}_{x_1 \dots x_q}$  с законом преобразования

$$\tilde{P}^{x'_1 \dots x'_p}_{x'_1 \dots x'_q} = \Delta^{-t} A^{x_1 \dots x_p}_{x'_1 \dots x'_p} \tilde{P}^{x_1 \dots x_p}_{x_1 \dots x_q} A^{x_{p+1} \dots x_{p+q}}_{x'_{p+1} \dots x'_{p+q}} \quad (8.2)$$

Мы будем обычно использовать знак  $\sim$  над коренной буквой для обозначения этих плотностей.

Все, что было сказано относительно индексов, сложения, изомеров, умножения, свертки, симметрирования, альтернирования, ранга, оболочки и носителя переносится *mutatis*

<sup>1)</sup> Ср. также Схоутен 1938.2; Схоутен и Данциг 1940.1; Доргело и Схоутен 1946.1.

<sup>2)</sup> Так как скалярная плотность не имеет индексов, система координат должна быть указана другим способом.

mutandis<sup>1)</sup> на тензорные  $\Delta$ -плотности (а также на тензорные плотности, которые будут определены ниже). Сложение возможно лишь для величин, имеющих одинаковую валентность и одинаковый вес.

Уравнения

$$\tilde{E}^{I \dots n} = 1, \quad \tilde{e}_{I \dots n} = 1. \quad (8.3)$$

имеющие смысл относительно *каждой* системы координат, определяют две  $n$ -вектор- $\Delta$ -плотности с весами  $+I$  и  $-I$  соответственно. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{I' \dots n'} &= \Delta^{-I} A_{x_{I'} \dots x_{n'}}^{I' \dots n'} \tilde{E}^{x_{I'} \dots x_{n'}} = \\ &= n! \Delta^{-I} A_{[I}^{I' \dots n'} \dots n] \tilde{E}^{I' \dots n'} = \tilde{E}^{I' \dots n'} = 1. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Эти  $n$ -вектор- $\Delta$ -плотности не зависят от выбора системы координат. Они могут быть использованы для установления инвариантного взаимно однозначного соответствия между контра-(ко) вариантными  $p$ -векторами и ко-(контра)вариантному  $(n-p)$ -вектор- $\Delta$ -плотностями веса  $-I$  ( $+I$ ) с помощью формул:

$$\begin{aligned} (a) \quad \tilde{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{(-I)^{\alpha_p}}{(n-p)!} \tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p x_{p+1} \dots x_n} v^{x_{p+1} \dots x_n}, \\ (b) \quad v^{x_{p+1} \dots x_n} &= \frac{(-I)^{-\alpha_p}}{p!} \tilde{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{E}^{\lambda_1 \dots \lambda_p x_{p+1} \dots x_n}, \\ (c) \quad \tilde{w}^{x_{p+1} \dots x_n} &= \frac{(-I)^{\beta_p}}{p!} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \tilde{E}^{\lambda_1 \dots \lambda_p x_{p+1} \dots x_n}, \\ (d) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{(-I)^{-\beta_p}}{(n-p)!} \tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p x_{p+1} \dots x_n} \tilde{w}^{x_{p+1} \dots x_n} \end{aligned} \quad (8.5)$$

или с учетом значений компонент  $\tilde{E}^{x_1 \dots x_n}$ ,  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu_1 \dots \mu_p} &= (-I)^{\alpha_p} v^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\ \tilde{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} &= (-I)^{\beta_p} w_{\mu_1 \dots \mu_p}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где  $\mu_1 \dots \mu_n$  есть четная перестановка  $1, \dots, n$ . Коэффициенты  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  могут быть выбраны произвольно. Мы пока

<sup>1)</sup> mutatis mutandis (лат.) — с необходимыми изменениями. — *Прим. перев.*

отложим этот выбор с тем, чтобы в дальнейшем согласовать его с отождествлением величин, которое становится возможным после введения подгрупп аффинной группы  $G_a$ . Как мы увидим в гл. III, провести это отождествление согласованным образом возможно лишь в случае выбора подходящих значений для  $\alpha_p$  и  $\beta_p$ . Однако в случае, если не вводятся никакие подгруппы  $G_a$ , мы можем положить  $\alpha_p = \beta_p = 0$  для всех значений  $p$ .

(8.6) показывает, что компоненты контра-(ко)вариантного вектора могут также рассматриваться как компоненты ко-(контра)вариантной  $(n-p)$ -вектор- $\Delta$ -плотности веса  $-1$  ( $+1$ ). Следовательно, геометрические значения соответствующих величин совпадают. Имеется лишь разница в обозначении.  $\tilde{E}^{x_1 \dots x_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  соответствуют скаляру  $+1$ . Использование  $\Delta$ -плотностей представляет иногда определенное удобство. Например, если тривектор  $v^{\kappa\lambda\mu}$  в  $E_4$  записать в виде  $\tilde{v}_\lambda$ , формулы будут содержать меньше индексов.

Мы можем также непосредственно доказать, что  $v^{x_1 \dots x_p}$  преобразуются, как компоненты ковариантной  $(n-p)$ -вектор- $\Delta$ -плотности веса  $-1$ . Рассмотрим для примера  $v^{23}$ ,  $v^{31}$  и  $v^{12}$  в  $E_3$ . Мы знаем, что

$$v^{2'3'} = A_{\kappa}^{2'} A_{\lambda}^{3'} v^{\kappa\lambda} = (A_2^{2'} A_3^{3'} - A_3^{2'} A_2^{3'}) v^{23} + (A_3^{2'} A_1^{3'} - A_1^{2'} A_3^{3'}) v^{31} + (A_1^{2'} A_2^{3'} - A_2^{2'} A_1^{3'}) v^{12}. \quad (8.7)$$

Здесь  $A_2^{2'} A_3^{3'} - A_3^{2'} A_2^{3'}$  есть минор элемента  $A_1^{1'}$  в матрице  $A_{\lambda}^{\kappa'}$ . Следовательно,

$$A_{1'}^1 = \frac{A_2^{2'} A_3^{3'} - A_3^{2'} A_2^{3'}}{\Delta}. \quad (8.8)$$






Находя  $A_{1'}^2$  и  $A_{1'}^3$  аналогичным образом, мы получаем уравнение

$$v^{\xi'3'} = \Delta (A_{1'}^1 v^{23} + A_{1'}^2 v^{31} + A_{1'}^3 v^{12}), \quad (8.9)$$

которое и доказывает наше утверждение.

Таблица на стр. 52 дает сводку величин, с которыми нам приходилось встречаться в  $E_3$ .

Если в формулах преобразования для  $\Delta$ -плотностей мы заменим  $\Delta$  на  $|\Delta|$ , то получим плотности другого рода. Эти новые плотности называются *обычными плотностями* или

Фигура	Обычное обозначение	Другое обозначение	Вес	Соотношения (циклическая перестановка)	Число компонент	Ориентация
	$p$	$\tilde{p}_{\mu\lambda\kappa}$ $\tilde{p}^{\kappa\lambda\mu}$	$-1$ $+1$	$\tilde{p}_{123} = (-1)^{\alpha_3} p$ $\tilde{p}^{123} = (-1)^{\beta_0} p$	$1$	
	$v^\kappa$	$\tilde{v}_{\lambda\kappa}$	$-1$	$\tilde{v}_{23} = (-1)^{\alpha_2} v^1$	$3$ (проекция)	Внутренняя
	$w_\lambda$	$\tilde{w}^{\kappa\lambda}$	$+1$	$\tilde{w}^{23} = (-1)^{\beta_1} w_1$	$3 \left( \frac{1}{\text{сечение}} \right)$	Внешняя
	$f^{\kappa\lambda}$	$\tilde{f}_\lambda$	$-1$	$\tilde{f}_1 = (-1)^{\alpha_1} f^{23}$	$3$ (проекция)	Внутренняя
	$h_{\kappa\lambda}$	$\tilde{h}^\kappa$	$+1$	$\tilde{h}^1 = (-1)^{\beta_2} h_{23}$	$3 \left( \frac{1}{\text{сечение}} \right)$	Внешняя
	$p^{\kappa\lambda\mu}$ $q_{\mu\lambda\kappa}$	$\tilde{p}$ $\tilde{q}$	$-1$ $+1$	$\tilde{p} = (-1)^{\alpha_0} p^{123}$ $\tilde{q} = (-1)^{\beta_3} q_{123}$	$1$ (объем) $1 \left( \frac{1}{\text{объем}} \right)$	Внутренняя

(8.10)

сокращенно *плотностями*. Если используются преобразования координат только с положительным  $\Delta$ , то *разница между  $\Delta$ -плотностями и обычными плотностями исчезает*. Это другой пример отождествления величин после замены  $G_a$  ее подгруппой. Как правило, мы будем использовать для обозначения обычных плотностей знак  $\wedge$  над коренной буквой. Но имеются и исключения. Например, плот-

ность массы, т. е. масса параллелепипеда, построенного на базисных векторах, всегда обозначается греческой буквой.

Чтобы найти геометрическую интерпретацию контра- и ковариантных обычных  $p$ -вектор-плотностей веса  $+1$  и  $-1$  соответственно, мы образуем свертку ковариантной векторной  $\Delta$ -плотности веса  $+1$  и ковариантной обычной векторной плотности веса  $-1$ . Эта свертка имеет одну компоненту  ${}^*p$  с законом преобразования

$${}^*p [x'] = \frac{|\Delta|}{\Delta} {}^*p [x]. \quad (8.11)$$

Такая величина называется  $W$ -скаляром<sup>1)</sup>.  $W$ -скаляр изменяет свой знак, если координатная система преобразуется в систему с противоположной ориентацией. Произведение тензора с  $W$ -скаляром называется  $W$ -тензором<sup>2)</sup>. Возьмем, например, простой контравариантный  $p$ -вектор  $v^{x_1 \dots x_p}$ , представляющий часть некоторого  $E_p$  с *внутренней* ориентацией. Тогда эта внутренняя ориентация совместно с  $1, \dots, p$ -ориентацией координатной системы определяет единственным образом *внешнюю* ориентацию  $E_p$ . Эта вторая ориентация изменяется, если производится преобразование координат с отрицательным  $\Delta$ . Из  $v^{x_1 \dots x_p}$  и  $W$ -скаляра мы можем образовать новую величину

$$\begin{aligned} v^{x_1 \dots x_p} &\stackrel{\text{def}}{=} {}^*p v^{x_1 \dots x_p}; \\ {}^*p [x] &= 1, \end{aligned} \quad (8.12)$$

которая называется  $W$ - $p$ -вектором. Эта величина имеет те же компоненты, что и  $v^{x_1 \dots x_p}$ , относительно любой координатной системы, ориентация которой совпадает с  $(x)$ , и те же компоненты, что и  $-v^{x_1 \dots x_p}$  относительно всех остальных систем координат. Это означает, что введенная выше *внешняя* ориентация является инвариантом для всех преобразований координат. Следовательно,  ${}^*v^{x_1 \dots x_p}$  представляется той же частью  $E_p$ , что и  $v^{x_1 \dots x_p}$ , но с заменой

1) Физики иногда называют ее *псевдоскаляром*.

2) А также *псевдотензором*.

внутренней ориентации на внешнюю. Если мы начнем с ковариантного  $p$ -вектора (внешняя ориентация), мы получим таким же образом ковариантный  $W$ - $p$ -вектор с внутренней ориентацией. Все эти  $W$ -величины преобразуются, как

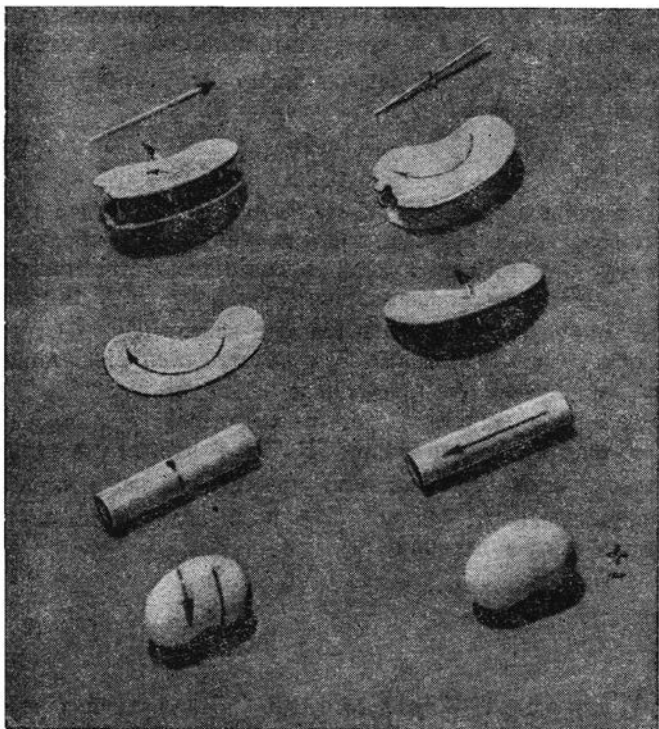


Рис. 6.

соответствующие обычные величины, но с дополнительным множителем  $|\Delta|/\Delta$ . Как правило, над коренной буквой  $W$ -величин ставится знак  $*$ .

С помощью величин  $\tilde{E}^{x_1 \dots x_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  можно установить взаимно однозначное соответствие между контра-(ко)-вариантными  $W$ - $p$ -векторами и ко-(контра)вариантными

обычными  $(n - p)$ -вектор-плотностями:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \widehat{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{(-1)^{\gamma_p}}{(n-p)!} \widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \widehat{v}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\
 (b) \quad \widehat{v}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} &= \frac{(-1)^{-\gamma_p}}{p!} \widehat{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \widetilde{E}^{\lambda_1 \dots \lambda_p \mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\
 (c) \quad \widehat{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} &= \frac{(-1)^{\delta_p}}{p!} \widehat{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \widetilde{E}^{\lambda_1 \dots \lambda_p \mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\
 (d) \quad \widehat{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \frac{(-1)^{-\delta_p}}{(n-p)!} \widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \widehat{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

или с учетом значений компонент  $\widetilde{E}^{\mu_1 \dots \mu_n}$  и  $\widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$

$$\begin{aligned}
 \widehat{v}_{\mu_1 \dots \mu_p} &= (-1)^{\gamma_p} \widehat{v}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\
 \widehat{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} &= (-1)^{\delta_p} \widehat{w}_{\mu_1 \dots \mu_p},
 \end{aligned} \tag{8.14}$$






где  $\mu_1 \dots \mu_n$  есть четная перестановка  $1 \dots n$ . Коэффициенты  $\gamma_p$  и  $\delta_p$  могут быть выбраны произвольно. Мы пока отложим этот выбор с тем, чтобы в дальнейшем согласовать его с отождествлением величин, которое становится возможным после введения подгрупп аффинной группы  $G_a$ . Этот вопрос будет обсуждаться в гл. III. Однако в случае, если никакие подгруппы  $G_a$  не вводятся, мы можем положить  $\gamma_p = \delta_p = 0$  для всех значений  $p$ .

(8.14) показывает, что компоненты контра-(ко)вариантного  $W$ - $p$ -вектора можно также рассматривать как компоненты ко-(контра)вариантной  $(n - p)$ -вектор-плотности веса  $-1$  ( $+1$ ). Следовательно, геометрические представления соответствующих величин не различаются. Имеется лишь разница в обозначении.

В таблице на стр. 56 дана сводка этих величин.

Обычная скалярная плотность не имеет ориентации. Этот тип плотности встречается в физике. Например, плотность массы есть обычная скалярная плотность веса  $+1$ . На рис. 6 приведены модели для величин, входящих в формулы (8.10) и (8.15).



Фигура	Другое обозначение	Обычное обозначение	Вес	Соотношения (цикл.)	Число компонент	Ориентация
	$p^*$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_{\mu\lambda\kappa} \\ \hat{p}^{\kappa\lambda\mu} \end{array} \right.$	$-1$	$\left. \begin{array}{l} \hat{p}_{123} = (-1)^{\gamma_3} p^* \\ \hat{p}^{123} = (-1)^{\delta_0} p^* \end{array} \right\}$	1	
	$\hat{v}^{\kappa}$	$\hat{v}_{\lambda\kappa}$	$-1$	$\hat{v}_{23} = (-1)^{\nu_2} v^*$	3 (проекция)	Внешняя
	$w^*$	$\hat{w}^{\kappa\lambda}$	$+1$	$\hat{w}^{23} = (-1)^{\delta_1} w^*$	$3 \left( \frac{I}{\text{сечение}} \right)$	Внутренняя
	$\hat{f}^{\kappa\lambda}$	$\hat{f}_{\lambda}$	$-1$	$\hat{f}_1 = (-1)^{\nu_1} f^{*23}$	3 (проекция)	Внешняя
	$\hat{h}^{\kappa\lambda}$	$\hat{h}^{\kappa}$	$+1$	$\hat{h}^1 = (-1)^{\delta_2} h^{*23}$	$3 \left( \frac{I}{\text{сечение}} \right)$	Внутренняя
	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}^{\kappa\lambda\mu} \\ \hat{q}_{\mu\lambda\kappa} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} \\ \hat{q} \end{array} \right.$	$-1$	$\left. \begin{array}{l} \hat{p} = (-1)^{\nu_0} p^{*123} \\ \hat{q} = (-1)^{\delta_3} q^{*123} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ (объем)} \\ 1 \left( \frac{I}{\text{объем}} \right) \end{array} \right\}$	Внешняя

(8.15)

## 9. Величины валентности 2 и матрицы

Легко показать, что

$$\text{Det}(P^{\kappa}_{\lambda}) = n! P^{[1}_{[1} \dots P^{n]}_{n]} = n! P^{[1}_{1} \dots P^{n]}_{n} = n! P^{[1}_{1} \dots P^{n]}_{n} \quad (9.1)$$

и что компоненты величины

$$s! P^{[\kappa_1}_{[\lambda_1} \dots P^{\kappa_s]}_{\lambda_s]} = s! P^{[\kappa_1}_{\lambda_1} \dots P^{\kappa_s]}_{\lambda_s} = s! P^{\kappa_1}_{\lambda_1} \dots P^{\kappa_s}_{\lambda_s} \quad (9.2)$$

являются  $s$ -строчными подопределителями матрицы  $P^{\kappa, \lambda}$ . Отсюда следует, что ранг  $P^{\kappa, \lambda}$  есть  $r$  тогда и только тогда, когда

$$P^{\kappa, \lambda}_{[\lambda_1 \dots \lambda_s]} \begin{cases} \neq 0 & \text{для } s \leq r, \\ = 0 & \text{для } s > r. \end{cases} \quad (9.3)$$

Это же имеет место *mutatis mutandis* для всех величин валентности 2 и их матриц.

Для бивектора  $v^{\kappa\lambda}$  можно показать, что

$$(2\rho)! v^{[\kappa_1 \lambda_1 \dots \kappa_{2\rho} \lambda_{2\rho}]} = \\ = \left( \frac{(2\rho)!}{2^\rho \cdot \rho!} \right)^2 v^{[\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{2\rho-1} \kappa_{2\rho}]} v^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2\rho-1} \lambda_{2\rho}]} \quad (9.4)$$

Отсюда следует, что для  $n = 2\rho$

$$\text{Det}(v^{\kappa\lambda}) = \left[ \frac{(2\rho)!}{2^\rho \cdot \rho!} v^{[12 \dots \rho^{n-1}, n]} \right]^2 \quad (9.5)$$

и что  $v^{\kappa\lambda}$  имеет ранг  $r$  (всегда четный) тогда и только тогда, когда

$$v^{[\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{2\rho-1} \kappa_{2\rho}]} \begin{cases} \neq 0 & \text{для } 2\rho = r \\ = 0 & \text{для } 2\rho > r. \end{cases} \quad (9.6)$$

Для каждого определенного выбора  $\kappa_1, \dots, \kappa_{2\rho}$  выражение

$$(2\rho)! 2^{-\rho} (\rho!)^{-1} v^{[\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{2\rho-1} \kappa_{2\rho}]} \quad (9.7)$$

является «пфаффовым агрегатом» порядка  $2\rho^2$ , а именно суммой всех существенно различных членов вида  $v^{v_1 v_2 \dots v_{2\rho-1} v_{2\rho}}$ , где  $v_1, \dots, v_{2\rho}$  — четная перестановка  $\kappa_1, \dots, \kappa_{2\rho}$ . Все члены, которые равны вследствие условия  $v^{\kappa\lambda} = -v^{\lambda\kappa}$ , не считаются существенно различными. Число всех существенно различных членов есть  $(2\rho)! 2^{-\rho} (\rho!)^{-1}$ , например для  $\rho=2$

$$v^{\kappa_1 \kappa_2} v^{\kappa_3 \kappa_4} + v^{\kappa_2 \kappa_3} v^{\kappa_1 \kappa_4} + v^{\kappa_3 \kappa_1} v^{\kappa_2 \kappa_4}. \quad (9.8)$$

<sup>1)</sup> В выражениях подобного рода альтернирование индексов  $\kappa$  и  $\lambda$  должно производиться раздельно.

<sup>2)</sup> Ср. Вебер 1900. I, p. 21.

Это же имеет место *mutatis mutandis* для всех альтернированных величин валентности 2.

Если мы имеем дело с произвольными величинами валентности 2, например  $p^{x\lambda}$ , может возникнуть вопрос, всегда ли возможно выбрать  $P^{x\lambda}$  таким образом, чтобы матрица  $P^x_{\rho} P^{\lambda}_{\sigma} p^{\rho\sigma}$  приняла простую форму. Полный ответ на этот вопрос дается в теории *элементарных делителей*<sup>1)</sup>. В двух следующих параграфах мы приведем результаты лишь для симметричных и альтернированных величин.

## 10. Канонические формы симметричного тензора валентности 2

Если в центро-аффинном  $E_3$  задан симметричный тензор  $h_{\lambda\kappa}$ , уравнение его поверхности (ср. II, § 2) имеет вид

$$h_{\lambda\kappa} x^{\lambda} x^{\kappa} = 1. \quad (10.1)$$

Если ранг  $h_{\lambda\kappa}$  равен 3, та же поверхность может быть представлена уравнением

$$h^{-1\kappa\lambda} u_{\kappa} u_{\lambda} = 1 \quad (10.2)$$

в координатах плоскости. Если теперь  $h_{\lambda\kappa}$  действителен, то, как хорошо известно из аналитической геометрии, всегда существует *действительное* преобразование, такое, что отличными от нуля координатами являются лишь

$$h_{1'1'} = \pm 1; \quad h_{2'2'} = \pm 1 \text{ или } 0; \quad h_{3'3'} = \pm 1 \text{ или } 0. \quad (10.3)$$

*Индекс*, т. е. число отрицательных знаков в (10.3), является инвариантом  $h_{\lambda\kappa}$ .

То же имеет место для  $n > 3$ . Если  $r$  есть ранг  $h_{\lambda\kappa}$  и если  $h_{\lambda\kappa}$  действителен, всегда существует такое *действительное* преобразование координат  $(x) \rightarrow (x')$ , что

<sup>1)</sup> См., например, Схоутен и Стройк 1935. 1; Гантмахер 1953. 1.

матрица  $h_{\lambda' \mu'}$  принимает форму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longleftarrow s \longrightarrow & & \longleftarrow r-s \longrightarrow & & \longleftarrow n-r \longrightarrow & & \\
 \left( \begin{array}{ccccccc}
 -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & -1 & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & & +1 & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\
 0 & \dots & \dots & \dots & +1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \cdot & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array} \right) . \quad (10.4)
 \end{array}$$

Это можно сформулировать иначе. Если  $h_{\lambda \mu}$  действителен, всегда можно найти такой действительный тензор  $P_{\lambda}^{\alpha}$ , что матрица  $P_{\lambda}^{\rho} P_{\mu}^{\sigma} h_{\rho \sigma}$  имеет форму (10.4). Последовательность знаков  $- \dots - + \dots +$  в (10.4) мы будем называть *сигнатурой*, а число  $s$  — *индексом*  $h_{\lambda \mu}$ .  $s$  является инвариантом действительных преобразований координат. Говорят, что сигнатура *четна*, если  $s$  четно, и *нечетна*, если  $s$  нечетно.

Если  $r = n$ , сигнатуры  $h_{\lambda \mu}$  и  $h^{\lambda \mu}$  совпадают. В этом случае  $h_{\lambda \mu}$  и  $h^{\lambda \mu}$  называются *положительно определенными*, если  $s = 0$ , *отрицательно определенными*, если  $s = n$ , и *неопределенными* во всех остальных случаях.

Сигнатура и индекс действительного контравариантного симметричного тензора валентности 2 определяются аналогичным образом.

### 11. Канонические формы бивектора

Любой бивектор  $f^{\lambda\lambda}$  в  $E_3$  всегда простой и, следовательно, его ранг равен 2. Если  $f^{\lambda\lambda}$  действителен и если

$$f^{\lambda\lambda} = 2v^{[\lambda} w^{\lambda]}, \quad (11.1)$$

мы можем таким образом выбрать действительную систему координат, что

$$\begin{matrix} e^x \\ \lambda' \end{matrix} = w^x, \quad \begin{matrix} e^x \\ \lambda' \end{matrix} = v^x. \quad (11.2)$$

Тогда матрица  $f^{\lambda'\lambda'}$  принимает вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (11.3)$$

Используя разложение действительного бивектора  $f^{\lambda\lambda}$  в  $E_n$ , имеющего ранг  $2\rho$ , на  $\rho$  действительных листов (ср. II, § 6), можно аналогичным образом показать, что всегда существует такая действительная система координат ( $\lambda'$ ), что матрица  $f^{\lambda'\lambda'}$  принимает вид

$$\begin{array}{c} \leftarrow 2\rho \rightarrow \quad \leftarrow n - 2\rho \rightarrow \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ & & & 0 & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \end{array} \quad (11.4)$$

Это можно сформулировать иначе. Если  $f^{\lambda\lambda}$  действителен, всегда существует такой действительный тензор  $P^x_{\lambda}$ , что матрица  $P^x_{\rho} P^{\lambda}_{\sigma} f^{\rho\sigma}$  имеет форму (11.4).

То же справедливо mutatis mutandis для ковариантных бивекторов.

## 12. Фундаментальный тензор

Введем в  $E_n$  действительный симметричный тензор  $g_{\lambda\kappa}$  ранга  $r$  с постоянными компонентами. Обозначим тензор, обратный  $g_{\lambda\kappa}$ , через  $g^{\lambda\kappa}$ :

$$g^{\lambda\rho} g_{\rho\lambda} = A_{\lambda}^{\lambda}; \quad (12.1)$$

$g_{\lambda\kappa}$  и  $g^{\lambda\kappa}$  называются соответственно *ковариантным* и *контравариантным фундаментальным тензором*.  $E_n$  с фундаментальным тензором называется  $R_n$ . Скаляр

$$g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa} \quad (12.2)$$

является инвариантом вектора  $v^{\kappa}$  в  $R_n$ . Инвариант

$$\left| \sqrt{g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}} \right| \quad (12.3)$$

называется *длиной* вектора  $v^{\kappa}$ <sup>1)</sup>. Если  $g_{\lambda\kappa}$  неопределенный и  $v^{\kappa}$  действителен,  $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa}$  может быть положительно, отрицательно или равно нулю. Вектор нулевой длины называется *изотропным* или *нулевым вектором*, а вектор длины  $1$  — *единичным вектором*. Изотропные векторы заполняют *нулевой конус*<sup>2)</sup>, определенный уравнением

$$g_{\lambda\kappa} x^{\lambda} x^{\kappa} = 0. \quad (12.4)$$

Нулевой конус действительный в том и только том случае, если  $g_{\lambda\kappa}$  неопределенный. В этом случае центр-аффинное  $R_n$  распадается на две части — *положительную область*, заполненную действительными векторами с  $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa} > 0$ , и *отрицательную область*, заполненную действительными векторами с  $g_{\lambda\kappa} v^{\lambda} v^{\kappa} < 0$ .

Гиперсфера

$$g_{\lambda\kappa} x^{\lambda} x^{\kappa} = \mp 1 \quad (12.5)$$

называется *единичной гиперсферой* в отрицательной и положительной областях соответственно.

<sup>1)</sup> В специальной теории относительности пространство — время рассматривается как  $R_4$  с сигнатурой — — — +.

<sup>2)</sup> В теории относительности — *световой конус*. — *Прим. перев.*

Два вектора  $u^\lambda$  и  $v^\lambda$ , удовлетворяющие условию

$$g_{\lambda\kappa} u^\lambda v^\kappa = 0, \quad (12.6)$$

называются *ортогональными*. Следовательно, изотропный вектор ортогонален самому себе, и только изотропные векторы обладают этим свойством.

Используя нормальную форму  $g_{\lambda\kappa}$  (ср. II, § 10), можно ввести такую систему координат  $x^h$  ( $h = 1 \dots n$ ), что исчезающие компоненты  $g_{ih}$ ,  $g^{hi}$  будут в ней иметь вид

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= -1, \dots, & g_{ss} &= -1, \\ g_{s+1, s+1} &= +1, \dots, & g_{nn} &= +1, \\ g^{11} &= -1, \dots, & g^{ss} &= -1, \\ g^{s+1, s+1} &= +1, \dots, & g^{nn} &= +1. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Подобная система координат называется *декартовой системой координат* в  $R_n$ . Для индексов декартовой системы координат мы всегда будем использовать латинские буквы и прямые цифры. Базисные векторы декартовой системы координат будут обозначаться через  $i^h$ ,  $i_i$ . Таким образом,  $i^h$  — взаимно ортогональные единичные векторы.

Аналогично тому, как это делается в обычном пространстве, мы определим угол между двумя векторами  $u^\lambda$  и  $v^\lambda$ , которые *оба* лежат в отрицательной области или *оба* — в положительной области, посредством соотношения

$$\cos \varphi = \frac{\mp g_{\lambda\kappa} u^\lambda v^\kappa}{\sqrt{(g_{\nu\rho} u^\nu u^\rho)(g_{\sigma\tau} v^\sigma v^\tau)}} \quad (\mp \text{ область}). \quad (12.8)$$

Фундаментальный тензор устанавливает взаимно однозначное соответствие между ко- и контравариантными векторами:

$$v^\lambda g_{\lambda\mu} = w_\mu, \quad w_\lambda g^{\lambda\mu} = v^\mu. \quad (12.9)$$

Отсюда следует, что  $v^\lambda$  и  $w_\lambda$  могут рассматриваться как два различных представления одной и той же величины. По-

следняя может быть равноценно интерпретирована геометрически или как отрезок со стрелкой, или как система двух параллельных гиперплоскостей. Во втором случае расстояние между двумя гиперплоскостями  $\omega_\lambda$  обратно по величине длине  $v^\lambda$ . В обоих случаях мы будем использовать одну и ту же *коренную букву* для этой величины. Например,

$$v^\lambda g_{\lambda\lambda} = v_\lambda, \quad v_\lambda g^{\lambda\lambda} = v^\lambda. \quad (12.10)$$

Эта операция называется *поднятием* и *опусканием* индексов. Уравнение

$$g_{\lambda\lambda} = g_{\lambda\rho} g_{\mu\sigma} g^{\rho\sigma} \quad (12.11)$$

оправдывает использование одной и той же коренной буквы для  $g_{\lambda\lambda}$  и  $g^{\lambda\lambda}$ . Используя эту операцию, мы можем для каждого тензора или тензорной плотности образовать компоненты различных типов. Например, для  $P_{\lambda\lambda}^{\nu}$  имеем

$$P_{\lambda}^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} P_{\lambda\lambda}^{\nu}, \quad P_{\lambda\lambda\mu} = P_{\lambda\lambda}^{\nu} g_{\nu\mu}. \quad (12.12)$$

Все эти компоненты имеют одну и ту же коренную букву.

Имеет место следующая связь между ко- и контравариантными базисными векторами, принадлежащими одной и той же ортогональной системе координат:

$$i^1 = -i^1, \dots, i^s = -i^s, \quad i^{s+1} = +i^{s+1}, \dots, i^n = +i^n \quad (12.13)$$

и соответственно между ортогональными компонентами вектора:

$$v^h = \begin{cases} -v_h & (h = 1, \dots, s) \\ +v^h & (h = s+1, \dots, n). \end{cases} \quad (12.14)$$

Длина вектора  $v^\lambda$  в ортогональных компонентах равна

$$\sqrt{-v^1 v^1 - \dots - v^s v^s + v^{s+1} v^{s+1} + \dots + v^n v^n}, \quad (12.15)$$

а уравнение нулевого конуса имеет вид

$$-x^1 x^1 - \dots - x^s x^s + x^{s+1} x^{s+1} + \dots + x^n x^n = 0. \quad (12.16)$$

В обычном пространстве мы используем сигнатуру +++ или ---. Последняя является более предпочтительной



в физических исследованиях, если имеется в виду релятивистская точка зрения.

Введение фундаментального тензора фиксирует единичный объем, т. е. объем параллелепипеда, построенного на  $n$  взаимно ортогональных единичных векторах.  $n$ -векторы

$$\begin{aligned} (a) \quad & I^{x_1 \dots x_n} \stackrel{\text{def}}{=} n! i^{[x_1 \dots x_n]}, \quad I^1 \dots n = +1, \\ & \quad \quad \quad (h) \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad n \quad \quad \quad (h) \\ (b) \quad & i_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} n! i_{[\lambda_1 \dots \lambda_n]}, \quad i_1 \dots n = +1 \\ & \quad \quad \quad (h) \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad n \quad \quad \quad (h) \end{aligned} \quad (12.17)$$

с объемом  $+1$  являются инвариантами ортогональных преобразований ортогональных систем координат при  $\Delta = +1$  и изменяют знак при  $\Delta = -1$ .  $n$ -вектору  $i_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  соответствует скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ :

$$i^{(h)} [h] = i_1 \dots n = +1. \quad (12.18)$$

$\Delta$ -плотность  $i^{(h)}$  веса  $-1$  соответствует  $I^{x_1 \dots x_n}$ . Следовательно, компонента  $i^{(h)}$  равна  $-1$  относительно всех ортогональных систем координат с той же ориентацией, что и  $(h)$  и равна  $-1$  относительно всех остальных ортогональных систем координат. Таким образом,  $g_{\lambda\kappa}^{(h)}$  фиксирует  $i^{(h)}$  только с точностью до множителя  $\pm 1$ , а это означает, что  $g_{\lambda\kappa}^{(h)}$  фиксирует только единичный объем, но не ориентацию.

Если  $\omega$  есть  $W$ -скаляр с компонентой  $+1$  относительно всех систем координат с той же ориентацией, что и  $(h)$ , и  $-1$  относительно всех остальных систем, то величина

$$\hat{i} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^* i^{(h)} \quad (12.19)$$

является обычной плотностью веса  $+1$  относительно всех ортогональных систем координат. Эта плотность тесно связана с  $g_{\lambda\kappa}$ . Действительно, если положить

$$\hat{g} [x] \stackrel{\text{def}}{=} |\text{Det}(g_{\lambda\kappa})| = n! |g_{[1]1} \dots g_{[n]n}|, \quad (12.20)$$

то мы будем иметь

$$\begin{aligned} \widehat{g}[\kappa'] &= n! |g_{[I' | I' \dots g_{n'] n'}|} = \\ &= n! |A_{I' \dots n'}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} g_{[\lambda_1 \kappa_1 \dots \lambda_n \kappa_n]}| = \\ &= (n!)^3 A_{I' \dots n'}^1 \dots A_{I' \dots n'}^1 |g_{[I | I \dots g_{n] n}]| = \Delta^{-2} \widehat{g}[\kappa]. \quad (12.21) \end{aligned}$$

Следовательно,  $\widehat{g}$  есть обычная скалярная плотность веса  $+3$  с компонентой  $+1$  относительно *любой* ортогональной системы, откуда

$$\widehat{i} = \left| \widehat{g}^{\frac{1}{2}} \right|. \quad (12.22)$$

(В дальнейшем, следуя общепринятому обозначению, мы будем вместо  $\widehat{g}$  писать просто  $g$ . — *Прим. перев.*)

### 13. Матричное исчисление в $E_n$ и $R_n$

Уравнения

$$P_{\rho}^{\kappa} Q_{\lambda}^{\rho} = R_{\lambda}^{\kappa} \quad (13.1)$$

могут быть также записаны в сокращенной форме

$$PQ = R, \quad (13.2)$$

где  $P$ ,  $Q$  и  $R$  можно рассматривать как символы тензоров в (13.1), не зависящие от выбора системы координат. Но мы можем смотреть на  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  так же, как на символы матриц компонент этих тензоров относительно произвольной, но фиксированной системы координат, например  $(\kappa)$ . Тогда (13.2) определяет *умножение матриц* при условии, что мы договорились об определенной связи между индексами и строками и столбцами. В дальнейшем мы всегда полагаем, что *левый* индекс обозначает *строки*, а *правый* — *столбцы* и что если нижний индекс стоит непосредственно под верхним, нижний должен рассматриваться как *левый*, а *верхний* — как *правый*. Тогда элемент  $\kappa$ -строки и  $\lambda$ -столбца произведения находится перемножением для всех значений  $\rho$  элемента  $\kappa$ -строки и  $\lambda$ -столбца левого множителя с элементом  $\rho$ -строки и  $\lambda$ -столбца правого множителя с последующим суммированием всех этих  $n$  произведений.

Умножение и сложение матриц являются составными частями *матричного исчисления*. Это исчисление можно расширить, записывая уравнения

$$'v^{\kappa} = P_{\lambda}^{\kappa} v^{\lambda}, \quad 'w_{\lambda} = w_{\kappa} P_{\lambda}^{\kappa}, \quad p = w_{\lambda} v^{\lambda} \quad (13.3)$$

в сокращенной форме

$$'v = Pv, \quad 'w = wP, \quad p = wv = vw \quad (13.4)$$

и рассматривая  $v$ ,  $'v$  как символы матриц с одним столбцом, а  $w$ ,  $'w$  — как символы матриц с одной строкой.

Тензорное исчисление величин валентности 2 и матричное исчисление не являются полностью эквивалентными. В тензорном исчислении с самого начала задана группа  $G_a$ , и мы интересуемся лишь свойствами и операциями, инвариантными относительно этой группы. Например, мы знаем относительно каждой величины, является ли она ковариантной, контравариантной, смешанной  ${}^{\kappa}_{\lambda}$  или смешанной  ${}_{\lambda}^{\kappa}$ , и умножения выполнены лишь в том случае, если можно произвести свертку одного верхнего и одного нижнего индексов. Точно так же свойства симметрии или антисимметрии имеют смысл лишь для ко- или контравариантных величин. С другой стороны, в матричном исчислении первоначально не задана никакая группа. Следовательно, матрица является более общей концепцией, и нет никакой необходимости рассматривать ее всегда как множество компонент некоторой ко- или контравариантной, или смешанной величины. Конечно, в любой момент можно ввести однородные линейные преобразования (ко- или контравариантные) строк и столбцов друг относительно друга или совершенно произвольным образом исследовать их инварианты. Но в матричном исчислении, как оно было развито Кэли и многими другими задолго до открытия тензорного исчисления, имеется много разделов теории и много приложений, в которых преобразование строк и столбцов вообще не рассматривается<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ср. W. Givens, Math. Rev. v. 9 (1948), p. 324 в его обзоре Душека 1947.6. Референт критикует многих авторов за тенденцию «рассматривать матрицы иначе, чем линейные преобразования одного множества переменных в другое ковариантное множество» и за подобную тенденцию «отмечать эффективность тензорных обозначений и алгебры в применении к большому числу переменных совершенно безотносительно наличия группы преобразований».

Вводя изомеры

$$\overset{\downarrow}{P}_\lambda^\times \stackrel{\text{def}}{=} P_{\lambda, \cdot}^\times, \quad \overset{\downarrow}{Q}_\lambda^\times \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\lambda, \cdot}^\times, \quad \overset{\downarrow}{R}_\lambda^\times \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda, \cdot}^\times, \quad (13.5)$$

соответствующие транспонированию матриц  $P$ ,  $Q$  и  $R$  в (13.2) и (13.4), мы получаем<sup>1)</sup>

$$\overset{\downarrow}{P} \overset{\downarrow}{P} = \overset{\downarrow}{R}, \quad \overset{\downarrow}{v} = \overset{\downarrow}{v} P, \quad \overset{\downarrow}{w} = \overset{\downarrow}{P} w. \quad (13.6)$$

При использовании этой системы обозначений мы всегда должны помнить, имеет ли символ, подобный  $P$ , контравариантный характер слева и ковариантный характер справа или наоборот, и обозначает ли символ, подобный  $v$ , ко- или контравариантный вектор. Например,  $vP$  и  $Pw$  не имеют смысла.

Дальнейшее расширение сокращенных обозначений можно получить, вводя символы для ко- и контравариантных величин валентности 2. Например, обозначая  $h_{\lambda\kappa}$  и  $f^{\lambda\kappa}$  через  $h$  и  $f$ , получим

$$\begin{aligned} hv & \text{ или } v\overset{\downarrow}{h} \text{ для } h_{\lambda\kappa} v^\kappa; \\ P\overset{\downarrow}{f}Q, Q\overset{\downarrow}{f}P & \text{ для } P_{\cdot\rho}^\times Q_{\cdot\sigma}^\lambda f^{\rho\sigma}, P_{\cdot\rho}^\lambda Q_{\cdot\sigma}^\times f^{\rho\sigma}; \\ hf, f\overset{\downarrow}{h} & \text{ для } h_{\lambda\rho} f^{\rho\kappa}, f^{\rho\kappa} h_{\lambda\rho} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (13.7)$$

Величины, обратные  $P$ ,  $h$  и  $f$ , которые существуют лишь в том случае, если их ранг равен  $n$ , мы обозначим через  $P^{-1}$ ,  $h^{-1}$  и  $f^{-1}$ . Тогда

$$PP^{-1} = P^{-1}P = A, \quad hh^{-1} = h^{-1}h = A, \quad ff^{-1} = f^{-1}f = A, \quad (13.8)$$

<sup>1)</sup> Многие авторы пишут  $P'$  или  $P^*$  вместо  $\overset{\downarrow}{P}$ . Штрих или звездочка справа неудобны, если мы хотим иногда возвращаться к обозначениям с индексами. Так что в этом случае было бы лучше писать  $\overset{\downarrow}{P}$  или  $\overset{\downarrow}{*}P$ . Но вертикальная черта непосредственно над центральной буквой имеет то преимущество, что если мы используем обозначение  $\overset{\downarrow}{P}$  для комплексно сопряженного  $P$ , две черты могут быть скомбинированы в обозначение  $\overset{\downarrow}{\ddagger}P$  для часто встречающегося сопряжения с транспонированием, для которого другие авторы должны вводить новые символы  $\overset{\downarrow}{\ddagger}P$  или  $P^{\ddagger}$ .

и из (13.1) находим

$$\begin{aligned} Qv &= P^{-1}Rv, \\ v &= Q^{-1}P^{-1}Rv, \\ R^{-1}PQv &= v. \end{aligned} \quad (13.9)$$

При использовании этого расширения мы должны всегда помнить о ковариантном и контравариантном характере всех несмешанных величин валентности 2.

Вся эта работа по запоминанию очень неудобна, и это делает символический метод менее автоматическим, чем система индексов. Но имеются два исключения. В  $R_n$  разница между ко- и контравариантными *величинами* исчезает и поэтому в матричном исчислении нет никаких операций, которые не были бы инвариантными относительно группы вращений и отражений  $G_{ор}$ . Если, сверх того, фундаментальный тензор положительно определенный и используются только декартовы системы координат, исчезает также разница между ко- и контравариантными компонентами. Здесь матричное исчисление действительно является идеальным методом во всех случаях, когда приходится иметь дело с величинами валентности 2 и требуется сокращенная символика.

Другим исключением, при котором может быть (еще более) рекомендовано матричное исчисление, является  $U_n$ , т. е.  $E_n$  с группой  $G_{ун}$  всех унитарных преобразований, особенно если (эрмитов) фундаментальный тензор положительно определенный, а координатные системы (унитарно) ортогональны <sup>1)</sup>.

#### 14. Ортогональные нормальные формы симметричных тензоров валентности 2 и бивекторов

Если задана величина  $T_{\lambda}^{\alpha}$ , мы можем попытаться найти вектор  $v^{\alpha}$ , удовлетворяющий уравнению

$$T_{\lambda}^{\alpha} v^{\lambda} = \sigma v^{\alpha}, \quad (14.1)$$

<sup>1)</sup> Ср. гл. X, в которой рассматривается матричное исчисление Дирака.

где  $\sigma$  есть подходящий скалярный множитель.  $\sigma$  является одним из корней уравнения

$$\text{Det}(T_{\cdot\lambda}^{\kappa} - \sigma A_{\lambda}^{\kappa}) = 0 \quad (14.2)$$

степени  $n$ . Уравнение

$$\omega_{\kappa} T_{\cdot\lambda}^{\kappa} = \sigma \omega_{\lambda} \quad (14.3)$$

приводит к тому же уравнению (14.2). Каждый корень (14.2) называется *собственным значением*  $T_{\cdot\lambda}^{\kappa}$ . Вектор  $v^{\kappa}(\omega_{\lambda})$ , удовлетворяющий (14.1 (3)) для этого значения  $\sigma$ , называется контравариантным (ковариантным) *собственным вектором*, принадлежащим данному собственному значению.

Здесь нас особенно интересует случай, когда фундаментальный тензор *определенный*, а  $T_{\mu\lambda}$  *действительный* и *симметричный*. В этом случае (14.2) можно записать в виде

$$\text{Det}(T_{\mu\lambda} - \sigma g_{\mu\lambda}) = 0 \quad (14.4)$$

и можно показать, что корни этого уравнения всегда действительны<sup>1)</sup>. Если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — два неравных корня этого уравнения и  $v_1^{\mu}$  и  $v_2^{\mu}$  — два решения (14.4) для  $\sigma = \sigma_1$  и  $\sigma = \sigma_2$ , то мы имеем

$$v_1^{\mu} T_{\mu\lambda} v_2^{\lambda} = \sigma_1 v_1^{\mu} g_{\mu\lambda} v_2^{\lambda} = \sigma_2 v_1^{\mu} g_{\mu\lambda} v_2^{\lambda}, \quad (14.5)$$

а это возможно лишь в том случае, если собственные векторы  $v_1^{\mu}$  и  $v_2^{\mu}$  взаимно ортогональны и

$$v_1^{\mu} T_{\mu\lambda} v_2^{\lambda} = 0. \quad (14.6)$$

Если  $\sigma$  есть  $m$ -кратный корень (14.4), то можно показать, что собственные векторы, принадлежащие  $\sigma$ , являются векторами определенного действительного  $R_m$ . В этом  $R_m$  мы можем всегда выбрать  $m$  взаимно ортогональных *действительных* собственных векторов. Поступая таким образом со

<sup>1)</sup> Мы опускаем доказательство, так как более общее предложение будет доказано в гл. X.

всеми корнями, мы получаем в конечном счете  $n$  различных взаимно ортогональных действительных векторов тензора  $T_{\mu\lambda}$ . Если единичные векторы этих собственных векторов обозначить через  $l^x$  ( $l = 1, \dots, n$ ) и если эти векторы выбраны в качестве базисных, мы имеем

$$T_{ji} = \sum_j l^{\mu} l^{\lambda} T_{\mu\lambda} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; j \neq i). \quad (14.7)$$

Отсюда

Теорема о главных осях симметричного тензора валентности 2.

*Если фундаментальный тензор определен и если  $T_{\mu\lambda}$  — действительный симметричный тензор, то всегда возможно найти такую действительную ортогональную систему координат ( $h$ ), что*

$$T_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; j \neq i). \quad (14.8)$$

Имеется соответствующая теорема для бивекторов:

Теорема о главных листах бивектора.

*Если фундаментальный тензор определен и если  $f_{\mu\lambda}$  — действительный бивектор ранга  $2\rho$ , то всегда возможно разложить  $f_{\mu\lambda}$  на  $\rho$  взаимно ортогональных действительных листов.*

Заметим, что ни теорема о главных осях, ни теорема о главных листах не имеют места, если фундаментальный тензор неопределенный. Причиной этого является то обстоятельство, что в этом случае действительный симметричный тензор или бивектор могут иметь сингулярное положение относительно нулевого конуса. Теорема, однако, остается справедливой для симметричных тензоров и бивекторов, которые не находятся в таком сингулярном положении.

## УПРАЖНЕНИЯ

II. 1. Если  $P^{x_1} \dots^{x_p} Q_{x_1 \dots x_q}$ ,  $q < p$ , есть тензор при любом выборе тензора  $Q_{x_1 \dots x_q}$ , то  $P^{x_1} \dots^{x_p}$  — тензор.

II. 2. Если  $v_{\lambda\kappa}$  — тензор и если уравнение

$$av_{\lambda\kappa} + bv_{\kappa\lambda} = 0$$

имеет место относительно координатной системы  $(x)$ , то оно справедливо также относительно любой другой координатной системы. Если  $v_{\lambda x} \neq 0$ , то или  $a = b$  или  $a = -b$ .

II. 3. Доказать, что

$$\begin{aligned} v_{\lambda}^{[x_1 \dots x_p]} &= v_{[\lambda_1 \dots \lambda_p]}^{[x_1 \dots x_p]} = v_{[\lambda_1 \dots \lambda_p]}^{x_1 \dots x_p}, \\ P_{\lambda_1}^{[x_1 \dots x_p]} \dots P_{\lambda_p}^{[x_1 \dots x_p]} &= P_{[\lambda_1 \dots \lambda_p]}^{[x_1 \dots x_p]} = P_{[\lambda_1 \dots \lambda_p]}^{x_1 \dots x_p}. \end{aligned}$$

II. 4. Доказать, что

$$\begin{aligned} E_{(x)}^{\tau_1 \dots \tau_m} \dots \tau_m^{x_{m+1}} \dots x_n^{(x)} e^{\tau_1 \dots \tau_m \lambda_{m+1} \dots \lambda_n} &= \\ &= m!(n-m)! A_{[\lambda_{m+1} \dots \lambda_n]}^{[x_{m+1} \dots x_n]} \end{aligned}$$

и что аналогичное соотношение справедливо для  $\tilde{E}^{x_1 \dots x_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ .

II. 5. Если  $p$  — ранг  $P_{\lambda}^x$ ,  $q$  — ранг  $Q_{\lambda}^x$  и  $r$  — ранг  $P_{\mu}^x Q_{\lambda}^x$ , то  $r \leq p$  и  $r \leq q$ . Если  $q = n$ , то  $r = p$ .

II. 6. Если  $i_1^x, i_2^x$  — единичные взаимно ортогональные векторы соответственно в отрицательной и положительной областях  $R_n$ , то  $i_1^x + i_2^x$  и  $i_1^x - i_2^x$  — изотропные векторы,

$$i_1^x \stackrel{\text{def}}{=} i_1^x \operatorname{ch} \varphi \pm i_2^x \operatorname{sh} \varphi$$

— единичный вектор в отрицательной области и

$$i_2^x \stackrel{\text{def}}{=} \pm i_1^x \operatorname{sh} \varphi + i_2^x \operatorname{ch} \varphi$$

— единичный вектор в положительной области, ортогональный  $i_1^x$ .

II. 7. Доказать, что если  $g_{\lambda\rho}^{PQ}$  и  $g_{\lambda\rho}^{QP}$  симметричны, то после опускания первого индекса  $PQ + QP$  симметричен, а  $PQ - QP$  антисимметричен.

II. 8. Ковариантный вектор  $v_{\lambda}$  имеет ту же ориентацию, что и контравариантный вектор  $v^x$ , или противоположную в зависимости от того, лежит ли  $v^x$  в положительной или отрицательной областях.

II. 9. Доказать, что  $v^{[x_1 x_2 x_3] \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = 0$  есть следствие  $v^{[x_1 x_2 x_3] \lambda_1 \lambda_2} v^{\lambda_3} = 0$ , выписав полностью

$$v^{[x_1 x_2 x_3] \lambda_1 \lambda_2} v^{\lambda_3} - v^{[x_1 x_2 x_3] \lambda_1 \lambda_3} v^{\lambda_2}$$



### III. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН В $E_n$ ПОСЛЕ ВВЕДЕНИЯ ПОДГРУПП $G_{\alpha}^1$ )

#### 1. Введение единичного объема (подгруппа $G_{\text{eq}}$ )

Единичный объем, представляемый обычно скалярной плотностью  $\hat{q}$  веса  $+1$ , устанавливает взаимно однозначное соответствие между контра-(ко)вариантными  $p$ -векторами ( $W$ - $p$ -векторами) и контра- (ко)вариантными  $p$ -вектор-плотностями ( $p$ -вектор- $\Delta$ -плотностями) веса  $+1$  и  $-1$  соответственно:

$$\begin{aligned} \hat{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \hat{q} v^{\lambda_1 \dots \lambda_p}, & \tilde{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \hat{q}^* v^{\lambda_1 \dots \lambda_p}, \\ \hat{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \hat{q}^{-1} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}, & \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \hat{q}^{-1} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^* \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(\hat{q}[\kappa] = \pm 1).$$

Например, для  $n=3$ :

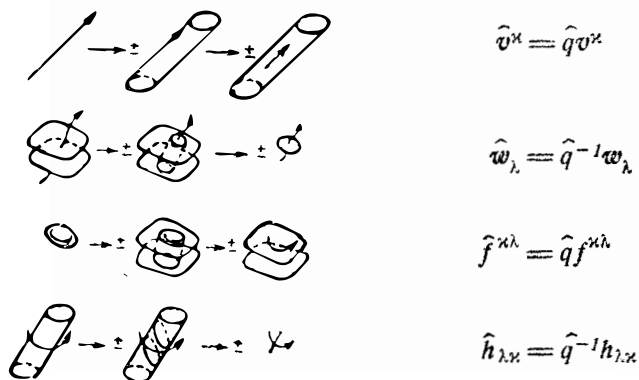


Рис. 7.

<sup>1)</sup> Ср. Р. К. 1924.1; 1954.1; Схоутен 1938.2; Схоутен и Данцинг 1940.1; Доргель и Схоутен, 1946.1.

Из (III. 1.1), (II. 8.6) и (II. 8.14) следует, что

$$\boxed{\gamma_p \equiv -\beta_p \pmod{2}, \quad \delta_p \equiv -\alpha_p \pmod{2}^1).} \quad (1.2)$$

Если единичный объем введен с помощью фундаментального тензора  $g_{\lambda\kappa}$ , мы имеем  $\hat{q} = \hat{i}$  и, следовательно, в ортогональных компонентах

$$\begin{aligned} \hat{v}^{h_1 \dots h_p} &\equiv v^{h_1 \dots h_p}, & \hat{v}^{h_1 \dots h_p} &\equiv v^{*h_1 \dots h_p}, \\ \hat{w}_{i_1 \dots i_p} &\equiv w_{i_1 \dots i_p}, & \hat{w}_{i_1 \dots i_p} &\equiv w_{i_1 \dots i_p}^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

( $h_1, \dots, h_p, i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n$ ).

## 2. Введение фундаментального тензора (подгруппа $G_{or}$ )

Фундаментальный тензор  $g_{\lambda\kappa}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между контра-(ко)вариантными и ко-(контра)вариантными  $p$ -векторами,  $W$ - $p$ -векторами,  $p$ -вектор-плотностями и  $p$ -вектор- $\Delta$ -плотностями

$$\begin{aligned} v^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_{p-1} \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}, \\ v^{*\lambda_1 \dots \lambda_p} &= g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_{p-1} \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^*, \\ \hat{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= g g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_{p-1} \lambda_p} \hat{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}, \\ \tilde{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= g g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_{p-1} \lambda_p} \tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \end{aligned} \quad (2.1)$$

или в ортогональных координатах ( $t_p$  — число отрицательных знаков среди первых  $p$  знаков сигнатуры)

$$\begin{aligned} v^1 \dots p &= (-1)^{t_p} w_1 \dots p, & v^{*1} \dots p &= (-1)^{t_p} w_1^* \dots p, \\ \hat{v}^1 \dots p &= (-1)^{t_p} \hat{w}_1 \dots p, & \tilde{v}^1 \dots p &= (-1)^{t_p} \tilde{w}_1 \dots p. \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup>  $a \equiv b \pmod{2}$  —  $a$  сравнимо с  $b$  по модулю 2 — означает, что  $a - b = 2m$ , где  $m$  — целое. — *Прим. перев.*

Из (III. 2.1) или (III. 2.2) и (II. 8.6), (II. 8.14), следует, что для нечетной/четной сигнатуры

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{n-p} - \beta_p &\equiv p(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} \pmod{2}, \\ \gamma_p - \delta_{n-p} &\equiv p(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} \pmod{2}. \end{aligned}} \quad (2.3)$$

Соотношения (1.2) также сохраняются в этом случае, так как фундаментальный тензор фиксирует единичный объем  $\hat{I}$ .

### 3. Введение ориентации

Ориентация, представляемая  $W$ -скаляром  $\overset{*}{\omega}$ , устанавливает взаимно однозначное соответствие между контра-(ко)вариантными  $p$ -векторами и контра-(ко)вариантными  $W$ - $p$ -векторами, а также между контра-(ко)вариантными  $p$ -вектор-плотностями веса  $+1$  ( $-1$ ) и контра-(ко)вариантными  $p$ -вектор- $\Delta$ -плотностями веса  $+1$  ( $-1$ )

$$\begin{aligned} \overset{*}{v}^{\lambda_1} \dots \lambda_p &= \overset{*}{\omega} v^{\lambda_1} \dots \lambda_p, \\ \tilde{v}^{\lambda_1} \dots \lambda_p &= \overset{*}{\omega} \hat{v}^{\lambda_1} \dots \lambda_p, \\ \overset{*}{\omega}_{\lambda_1} \dots \lambda_p &= \overset{*}{\omega} \omega_{\lambda_1} \dots \lambda_p, \\ \tilde{\omega}_{\lambda_1} \dots \lambda_p &= \overset{*}{\omega} \hat{\omega}_{\lambda_1} \dots \lambda_p \\ (\overset{*}{\omega} \overset{*}{\omega} &= +1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из (III. 3.1), (II. 8.6) и (II. 8.14) следует, что

$$\boxed{\gamma_p \equiv \alpha_p \pmod{2}, \quad \delta_p \equiv \beta_p \pmod{2}.} \quad (3.2)$$

4. Совместные отождествления (подгруппа  $G_{ro}$ )

Если все отождествления выполнены совместно, мы получаем следующую диаграмму:

$$(4.1)$$

и соответственно имеют место следующие двенадцать сравнений по mod 2:

$$\begin{array}{l}
 \gamma_p \equiv -\beta_p, \quad \alpha_p \equiv \gamma_p, \quad \alpha_{n-p} - \beta_p \equiv p(n-p) \left\{ \begin{array}{l} +I \\ +0 \\ +I \end{array} \right. \\
 (\gamma_{n-p} \equiv -\beta_{n-p}), \quad \alpha_{n-p} \equiv \gamma_{n-p}, \quad \alpha_p - \beta_{n-p} \equiv p(n-p) \left\{ \begin{array}{l} +I \\ +0 \\ +I \end{array} \right. \\
 \delta_p \equiv -\alpha_p, \quad (\beta_p \equiv \delta_p), \quad (\gamma_p - \delta_{n-p} \equiv p(n-p)) \left\{ \begin{array}{l} +I \\ +0 \\ +I \end{array} \right. \\
 \delta_{n-p} \equiv -\alpha_{n-p}, \quad (\beta_{n-p} \equiv \delta_{n-p}), \quad (\gamma_{n-p} - \delta_p \equiv p(n-p)) \left\{ \begin{array}{l} +I \\ +0 \\ +I \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$(4.2)$$

для восьми неизвестных  $\alpha_p, \alpha_{n-p}, \beta_p, \beta_{n-p}, \gamma_p, \gamma_{n-p}, \delta_p, \delta_{n-p}$  для нечетной (четной) сигнатуры. Семь из этих сравнений

независимы (остальные приведены в скобках). Выражая все неизвестные через  $\alpha_p$ , находим

$$\begin{aligned} \alpha_p &\equiv \alpha_p, & \beta_p &\equiv -\alpha_p, \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\alpha_p + p(n-p) \begin{cases} +I \\ +0 \end{cases} & \beta_{n-p} &\equiv \alpha_p + p(n-p) \begin{cases} +I \\ +0 \end{cases} \\ \gamma_p &\equiv \alpha_p, & \delta_p &\equiv -\alpha_p, \\ \gamma_{n-p} &\equiv -\alpha_p + p(n-p) \begin{cases} +I \\ +0 \end{cases} & \delta_{n-p} &\equiv -\alpha_p + p(n-p) \begin{cases} +I \\ +0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Имеются четыре случая:

(1)  $n$  нечетно,  $p(n-p) \equiv 0$ , нечетная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &\equiv -\beta_p \equiv \gamma_p \equiv -\delta_p, \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p} \equiv \gamma_{n-p} \equiv -\delta_{n-p} \equiv -\alpha_p + I. \end{aligned} \quad (4.4)$$

(2)  $n$  нечетно,  $p(n-p) \equiv 0$ , четная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &\equiv -\beta_p \equiv \gamma_p \equiv -\delta_p, \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p} \equiv \gamma_{n-p} \equiv -\delta_{n-p} = -\alpha_p. \end{aligned} \quad (4.5)$$

(3)  $n$  четно,  $p(n-p) \equiv p$ , нечетная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &\equiv -\beta_p \equiv \gamma_p \equiv -\delta_p, \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p} \equiv \gamma_{n-p} \equiv -\delta_{n-p} \equiv -\alpha_p + p + I. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4)  $n$  четно,  $p(n-p) \equiv p$ , четная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &\equiv -\beta_p \equiv \gamma_p \equiv -\delta_p, \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p} \equiv \gamma_{n-p} \equiv -\delta_{n-p} \equiv -\alpha_p + p. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для  $n$  нечетного  $p$  и  $n-p$  всегда не сравнимы по mod 2. Простейшими решениями являются:

(1)  $n$  нечетно,  $p(n-p) \equiv 0$ , нечетная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &\equiv -\beta_p \equiv \gamma_p \equiv -\delta_p = p, \\ \alpha_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p} \equiv \gamma_{n-p} \equiv -\delta_{n-p} = n-p. \end{aligned} \quad (4.8)$$

(2)  $n$  нечетно,  $p(n-p) \equiv 0$ , четная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= -\beta_p = \gamma_p = -\delta_p = 0, \\ \alpha_{n-p} &= -\beta_{n-p} = \gamma_{n-p} = -\delta_{n-p} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для  $n = 2v$  мы получаем  $2\alpha_v = \begin{matrix} v+I \\ v \end{matrix}$  для нечетной/четной сигнатуры, и отсюда мы видим, что коэффициенты

мнимые для  $p$  четного/нечетного. Простейшими решениями являются

(3)  $n$  четно,  $p(n-p) \equiv p$ , нечетная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = \frac{p(n-p)+1}{2}, \\ \beta_p &= \beta_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = -\frac{p(n-p)+1}{2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4)  $n$  четно,  $p(n-p) \equiv p$ , четная сигнатура:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = \frac{p(n-p)}{2}, \\ \beta_p &= \beta_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = -\frac{p(n-p)}{2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

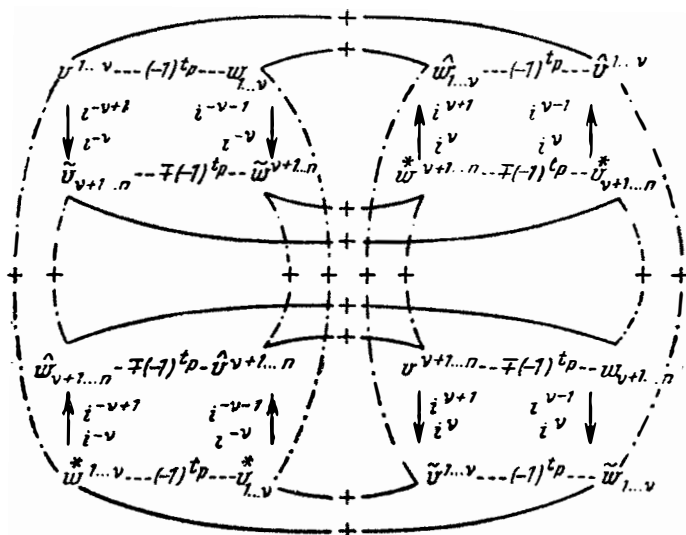
Дробные значения в (4.10) для четных  $p$  и в (4.11) для нечетных  $p$  иногда неудобны, так как они приводят к мнимым коэффициентам. Единственным способом избежать это является возвращение к подгруппе  $G_{0r}$ , т. е. выполнение отождествления величин, которые различаются только своей ориентацией (второй столбец в (4.2). Тогда отождествления, отмзненные  $-\cdot-\cdot$  в (4.1), отпадают. Вместо  $v^1 \dots p \equiv \pm \varpi^1 \dots p$  и т. д. мы теперь имеем  $v^1 \dots p \equiv \pm \varpi^1 \dots p$ , причем знак зависит от ориентации системы координат. Остающиеся шесть сравнений, следующие:

$$\begin{aligned} \gamma_p &\equiv -\beta_p, & \alpha_{n-p} - \beta_p &\equiv p \begin{cases} +1, \\ +0, \end{cases} \\ \gamma_{n-p} &\equiv -\beta_{n-p}, & & \\ \delta_p &\equiv -\alpha_p, & \alpha_p - \beta_{n-p} &\equiv p \begin{cases} +1, \\ +0, \end{cases} \\ \delta_{n-p} &\equiv -\alpha_{n-p}. & & \end{aligned} \quad (4.12)$$

Простейшими решениями являются

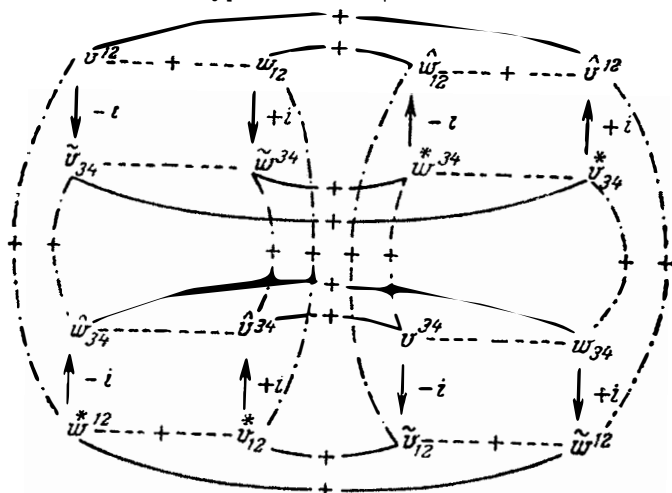
$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \\ \beta_p &= \beta_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = p. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Эти решения наиболее удобны для использования в теории относительности. Но решения (4.10), (4.11) полных сравнений (4.2) представляют интерес из-за их связи с теорией спиноров. Для  $p=v$ ,  $2v=n$  мы получаем из них следующую диаграмму для  $G_{ro}$ :



(4.14)

для нечетной/четной сигнатуры. Таким образом, мы имеем для  $n=4$  и сигнатуры  $---+---$



(4.15)

Для  $G_{or}$  отождествления, обозначенные  $— \cdot — \cdot$ , отпадают. Вместо  $+$  мы имеем  $\pm$  в зависимости от ориентации системы координат. Из (4.15) мы видим, что  $v^{23}, v^{31}, v^{12}, v^{14}, v^{24}, v^{34}$  преобразуются так же, как  $-iv^{14}, -iv^{24}, -iv^{34}, iv^{23}, iv^{31}, iv^{12}$ . Следовательно, шесть сумм (разностей)

$$\begin{aligned} (a) \quad & v^{23} \pm iv^{14}, \quad v^{31} \pm iv^{24}, \quad v^{12} \pm iv^{34}; \\ (b) \quad & v^{14} \mp iv^{23}, \quad v^{24} \mp iv^{31}, \quad v^{34} \mp iv^{12} \end{aligned} \quad (4.16)$$

преобразуются относительно  $G_{ro}$ , как компоненты  $v^{23}, v^{31}, v^{12}, v^{14}, v^{24}, v^{34}$ . Но компоненты (4.16b) отличаются от компонент (4.16a) лишь множителем  $i$ . Отсюда следует, что каждая совокупность *трех* сумм (разностей)

$$v^{23} \pm iv^{14}, \quad v^{31} \pm iv^{24}, \quad v^{12} \pm iv^{34} \quad (4.17)$$

образует геометрическую величину с тремя компонентами относительно группы  $G_{ro}$ . Мы называем эти величины *специальными бивекторами первого и второго рода*.

То же имеет место для  $n = 2v$ . В этом случае согласно (4.1) и (4.10, 11) мы имеем

$$v^{1 \dots v} = (-I)^{t_v} i \begin{cases} v^{2+l} \\ v^2 v^{v+1} \dots v \end{cases} \quad (4.18)$$

(для нечетной/четной сигнатуры).

Отсюда мы видим, что среди  $\binom{n}{v}$  сумм

$$v^{1 \dots v} + (-I)^{t_v} i \begin{cases} v^{2+l} \\ v^2 v^{v+1} \dots v \end{cases} \quad (4.19)$$

(для нечетной/четной сигнатуры)

имеется в точности  $\frac{1}{2} \binom{n}{v}$  линейно независимых, которые образуют геометрическую величину, а именно *специальный  $v$ -вектор первого рода* с  $\frac{1}{2} \binom{n}{v}$  компонентами относительно  $G_{ro}$ . То же справедливо для  $\binom{n}{v}$  разностей

$$v^{1 \dots v} - (-I)^{t_v} i \begin{cases} v^{2+l} \\ v^2 v^{v+1} \dots v \end{cases} \quad (4.20)$$

(для нечетной/четной сигнатуры)

Они образуют *специальный  $v$ -вектор второго рода*.



Каждый  $\nu$ -вектор может быть разложен одним и только одним способом на два специальных  $\nu$ -вектора различных родов.

При  $n = 2\nu + 1$  мы имеем  $4n + 2$  различных величины для  $G_3$ :

скаляр	контр. вектор ков. вектор	контр. бивектор ков. бивектор	...	контр. $\nu$ -вектор ков. $\nu$ -вектор
$W$ -скаляр	контр. $W$ -вектор ков. $W$ -вектор	контр. $W$ -бивектор ков. $W$ -бивектор	...	контр. $W$ - $\nu$ -вектор ков. $W$ - $\nu$ -вектор

Первая строка может быть также интерпретирована как  $\Delta$ -плотности, а вторая строка — как обычные плотности. Для  $G_{eq}$  (введение единичного объема) мы имеем только  $2n$  различных величин:

скаляр	контр. вектор	...	контр. $\nu$ -вектор
	ков. вектор	...	ков. $\nu$ -вектор

Для  $G_{of}$  (введение фундаментального тензора) мы имеем только  $2\nu + 2 = n + 1$  различных величин:

скаляр	вектор	...	$\nu$ -вектор
$W$ -скаляр	$W$ -вектор	...	$W$ - $\nu$ -вектор

Для  $G_{io}$  (введение фундаментального тензора и ориентации) мы имеем только  $\nu + 1$  различных величин:

скаляр	вектор	...	$\nu$ -вектор.
--------	--------	-----	----------------

В качестве примера мы рассмотрим векторы и бивекторы в  $E_3$ . Для сигнатуры  $\mp \mp \mp$ , используя значение (4.8), имеем (ср. (4.1))

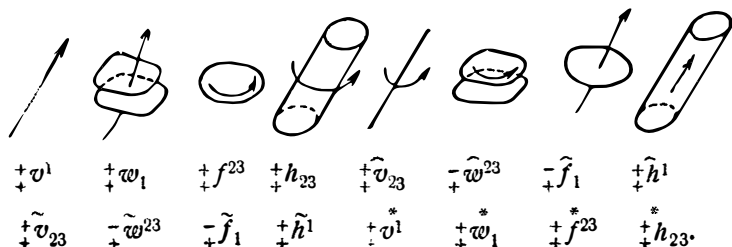
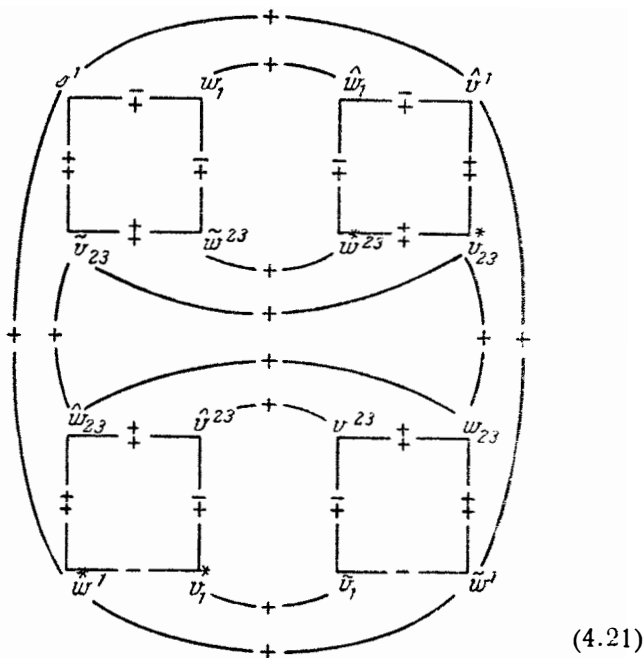


Рис. 8.

В соответствии с (4.1) мы имеем диаграмму (4.21), построенную для сигнатуры  $\mp \mp \mp$ .



После введения единичного объема  $\hat{q}$  (группа  $G_{eq}$ ) получаем

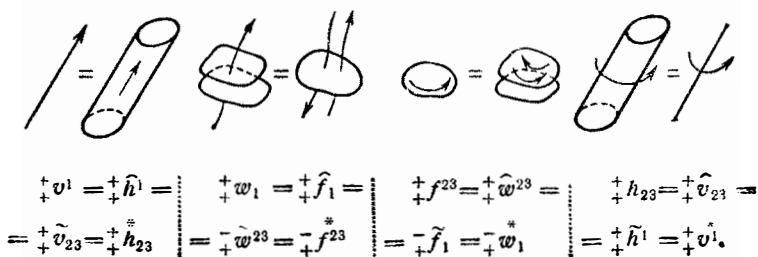
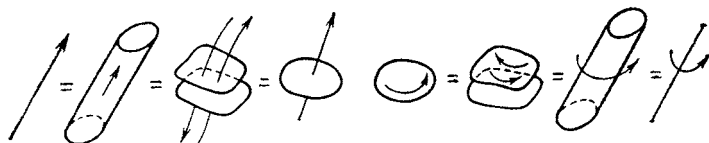


Рис. 9.

Каждая из этих четырех величин имеет четыре различных обозначения и два различных геометрических представления. В соответствии с их простейшим представлением они часто называются *полярным вектором*, *полярным бивектором*, *аксиальным бивектором* и *аксиальным вектором*.

После введения фундаментального тензора  $g_{\lambda\kappa}$  (группа  $G_{or}$ ) получаем

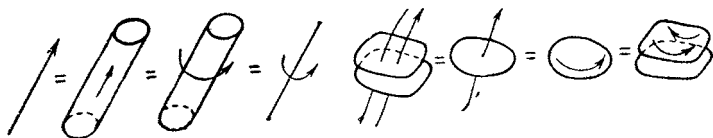


$$\begin{aligned} \begin{aligned} +v^1 &= +\hat{h}^1 = +w_1 = +\hat{f}_1 = \\ +\tilde{v}_{23} &= +\hat{h}_{23}^* = +\tilde{w}^{23} = +f^{*23} \end{aligned} &= \begin{aligned} +f^{23} &= +\hat{w}^{23} = +h_{23} = +\hat{v}_{23} = \\ -\tilde{f}_1 &= -w_1^* = +\tilde{h}^1 = +v^{*1}. \end{aligned} \end{aligned}$$

Рис. 10.

Мы имеем теперь две величины с восьмью различными обозначениями и четырьмя различными геометрическими представлениями для каждой. В соответствии с их простейшими представлениями они часто называются *полярным вектором* и *аксиальным вектором*.

Если вместо фундаментального тензора введены единичный объем и ориентация (группа  $G_{sa}$ ), мы имеем



$$\begin{aligned} \begin{aligned} +v^1 &= +\hat{h}^1 = +h_{23} = +\hat{v}_{23} = \\ +\tilde{v}_{23} &= +\hat{h}_{23}^* = +\hat{h}^1 = +v^1 \end{aligned} &= \begin{aligned} -w_1 &= +\tilde{f} = +f^{23} = +\hat{w}^{23} = \\ +\tilde{w}^{23} &= +f^{*23} = -\tilde{f}_1 = -w_1^*. \end{aligned} \end{aligned}$$

Рис. 11.

Мы имеем теперь две величины с восьмью различными обозначениями и четырьмя различными геометрическими представлениями для каждой. В соответствии с их простейшими

представлениями они часто называются *вектором* и *би-вектором*.

После введения фундаментального тензора и ориентации (группа  $G_{10}$ ) остается только одна величина — *вектор* — с шестнадцатью различными обозначениями и восьмью различными геометрическими представлениями

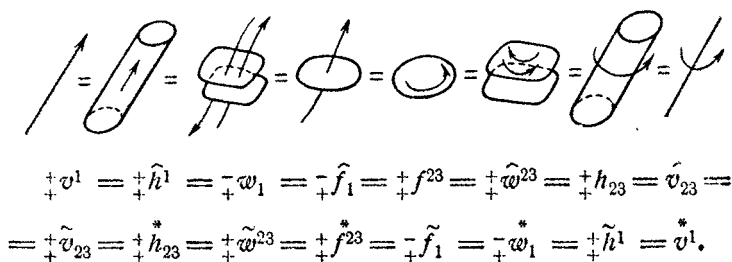


Рис. 12.

Конечно, термины полярный вектор, полярный бивектор и т. д. первоначально имели смысл лишь относительно группы преобразований, использованной при их определении. Но в том случае, когда используются только правые ортогональные системы координат, мы можем также употреблять эти термины, чтобы указать на специальное геометрическое представление, которое мы предпочитаем. В этом случае мы всегда используем одну и ту же букву, если нужно, со знаками  $\sim \wedge *$ :

$$\begin{aligned}
 v^h, \quad v_i, \quad v^{hi}, \quad v_{ih}, \quad \hat{v}^h, \quad \hat{v}_i, \quad \hat{v}^{hi}, \quad \hat{v}_{ih}, \\
 \tilde{v}_{ih}, \quad \tilde{v}^{hi}, \quad \tilde{v}_i, \quad \tilde{v}^h, \quad \hat{v}_{ih}, \quad \hat{v}^{hi}, \quad \hat{v}_i, \quad \hat{v}^h
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

( $h, i = 1, 2, 3$ ).

Это также удобно, если мы хотим в процессе исследования ввести более общую систему координат.

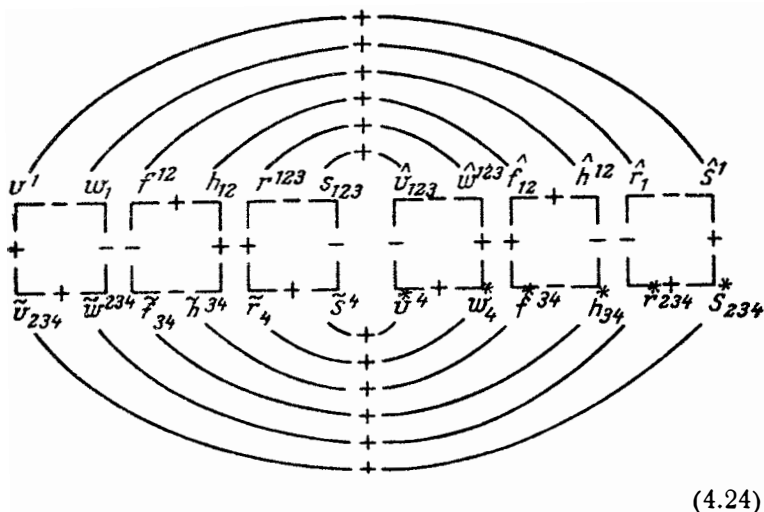
На рис. 13 (стр. 85) показаны различные типы отождествления в  $E_3$ .

В теории относительности мы имеем  $n=4$  и нечетную сигнатуру  $---+$ . После введения фундаментального

тензора мы получаем для  $G_{or}$  (ср. (4.13)):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 &= 1, \\ \alpha_2 = \delta_2 = 1, \quad \beta_2 = \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = \delta_3 &= 1 \end{aligned} \tag{4.23}$$

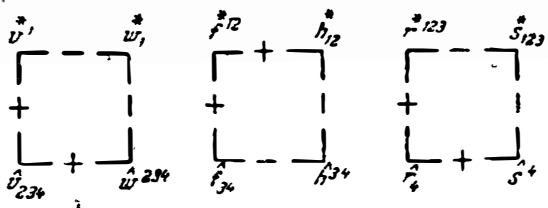
и имеем следующую диаграмму:



(4.24)

Выписывая отдельно правую часть этой диаграммы для  $U^1$ ,

$W_1$ ,  $f^{12}$ ,  $h_{12}$ ,  $r^{123}$  и  $S_{123}$ , получаем



(4.25)

Сравнивая это с левой частью (4.24), мы видим, что дальнейшие отождествления введением ориентации могут быть

получены только для векторов и тривекторов, но не для бивекторов.

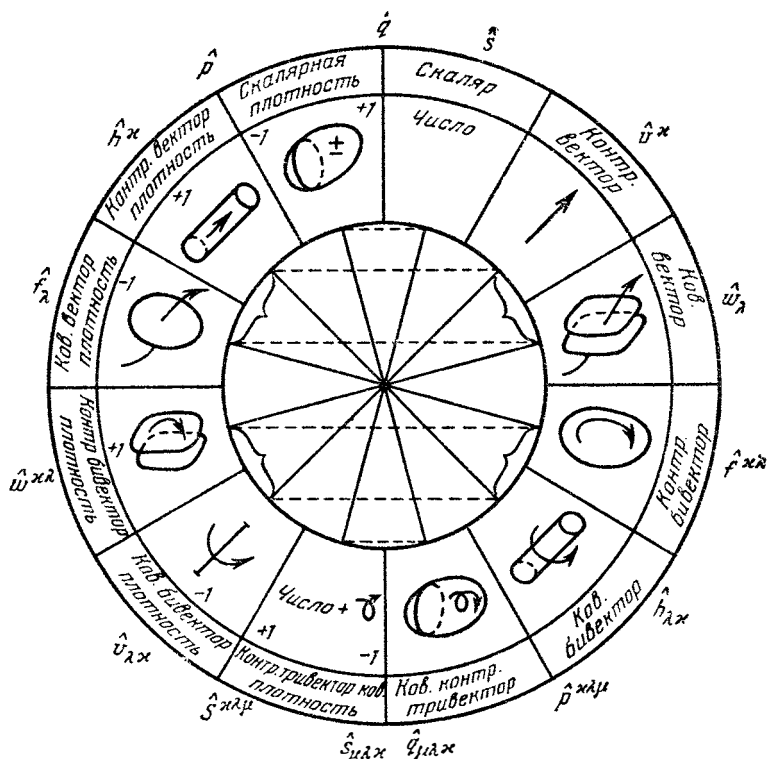


Рис. 13.

Следовательно, в  $R_4$  с сигнатурой  $---+$  мы имеем три различные величины для  $G_{0\sigma}$ :

(1) Векторы с четырьмя различными геометрическими представлениями и восемью различными типами компонент:

$$\begin{aligned} v^1 &= \tilde{v}_{234} = -v_1 = \tilde{v}^{234} = -\hat{v}_1 = \hat{v}^{234} = \hat{v}^1 = \hat{v}^{234}, \\ v^4 &= -\tilde{v}_{123} = v_4 = \tilde{v}^{123} = \hat{v}_4 = \hat{v}^{123} = \hat{v}^4 = -\hat{v}^{123} \end{aligned} \quad (4.26)$$

(циклир. 1, 2, 3).

(2) Бивекторы с четырьмя различными геометрическими представлениями и восьмью различными типами компонент:

$$\begin{aligned} f^{12} = -\tilde{f}_{34} = f_{12} = \tilde{f}^{34} = \hat{f}_{12} = \hat{f}^{34} = \hat{f}^{12} = -\hat{f}_{34}^* \\ f^{14} = -\tilde{f}_{23} = -f_{14} = -\tilde{f}^{23} = -\hat{f}_{14} = -\hat{f}^{23} = \hat{f}^{14} = -\hat{f}_{23}^* \end{aligned} \quad (4.27)$$

(циклир. 1, 2, 3).

(3) Тривекторы с четырьмя различными геометрическими представлениями и восьмью различными типами компонент:

$$\begin{aligned} \hat{r}^1 = \hat{r}_{234} = -r_1^* = \hat{r}^{234} = -\tilde{r}_1 = r^{234} = \tilde{r}^1 = r_{234} \\ \hat{r}^4 = -\hat{r}_{123} = r_4^* = \hat{r}^{123} = \tilde{r}_4 = r^{123} = \tilde{r}^4 = -r_{123} \end{aligned} \quad (4.28)$$

(циклир. 1, 2, 3).

Простейшими геометрическими представлениями являются изображенные на рис. 14.

Если введена ориентация, то тривектор также может быть представлен стрелкой, и мы имеем только две величины —

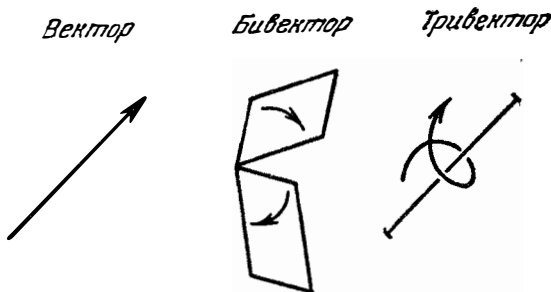


Рис. 14.

вектор и бивектор. Каждый бивектор может быть разложен на два специальных бивектора первого и второго рода.

## Б. Обычная векторная алгебра в $R_3$

В обычной векторной алгебре в  $R_3$  выполнены все возможные отождествления. Если мы оставим в стороне плотности и  $W$ -величины, то мы имеем только четыре различных

обозначения для компонент вектора

$$v^1 = \mp v_1 = v^{23} = v_{23}, \quad (5.1)$$

Используя их, мы можем вернуться к различным аффинным инвариантным формам скалярного произведения  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  и векторного произведения  $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$  двух векторов. Для скалярного произведения мы имеем  $\binom{5}{2}$  выражений

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_1 w^1 + v_2 w^2 + v_3 w^3 = v_i w^i = v_\lambda w^\lambda = \\ &= \mp v_{23} w^{23} \mp v_{31} w^{31} \mp v_{12} w^{12} = \mp \frac{1}{2} v_{ij} w^{ij} = \\ &= \mp \frac{1}{2} v_{\lambda\kappa} w^{\lambda\kappa} = \mp v^{23} w^1 \mp v^{31} w^2 \mp v^{12} w^3 = \\ &= \mp \frac{1}{2} l_{hij} v^{hi} w^j = \mp \frac{1}{2} l_{\kappa\lambda\mu} v^{\kappa\lambda} w^\mu = \\ &= v_{23} w_1 + v_{31} w_2 + v_{12} w_3 = \frac{1}{2} l^{hij} v_{hi} w_j = \frac{1}{2} l^{\kappa\lambda\mu} v_{\kappa\lambda} w_\mu = \\ &= \mp v^1 w^1 \mp v^2 w^2 \mp v^3 w^3 = g_{ih} v^i w^h = g_{\lambda\kappa} v^\lambda w^\kappa = \\ &= \mp v_1 w_1 \mp v_2 w_2 \mp v_3 w_3 = g^{hi} v_h w_i = g^{\kappa\lambda} v_\kappa w_\lambda = \\ &= \mp v^{23} w^{23} \mp v^{31} w^{31} \mp v^{12} w^{12} = \mp \frac{1}{2} g_{hij} g_{ik} v^{hi} w^{jk} = \\ &= \mp \frac{1}{2} g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} v^{\kappa\lambda} w^{\mu\nu} = \mp v_{23} w_{23} \mp v_{31} w_{31} \mp v_{12} w_{12} = \\ &= \mp \frac{1}{2} g^{hj} g^{ik} v_{hi} w_{jk} = \mp \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} v_{\kappa\lambda} w_{\mu\nu} = \\ &= \mp v_{23} w^1 \mp v_{31} w^2 \mp v_{12} w^3 = \frac{1}{2} l^{hij} g_{jk} v_{hi} w^k = \\ &= \frac{1}{2} l^{\kappa\lambda\mu} g_{\mu\nu} v_{\kappa\lambda} w^\nu = v^{23} w_1 + v^{31} w_2 + v^{12} w_3 = \\ &= \mp \frac{1}{2} l_{hij} g^{jk} v^{hi} w_k = \mp \frac{1}{2} l_{\kappa\lambda\mu} g^{\mu\nu} v^{\kappa\lambda} w_\nu, \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$l^{\kappa\lambda\mu} = 6 l_{\substack{1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3}}^{[\kappa\lambda\mu]}, \quad l_{\kappa\lambda\mu} = 6 l_{[\kappa\lambda\mu]}^{\substack{1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3}}, \quad l_{\kappa\lambda\mu} = \mp l_{\kappa\lambda\mu}$$

( $h, i, j, k = 1, 2, 3$ ).



Верхние знаки соответствуют сигнатуре — — —, нижние — сигнатуре + + +. Мы имеем сорок выражений для векторного произведения. Все они могут быть получены поднятием и опусканием индексов из следующих шести:

$$\begin{aligned}
 u^{23} &= v^2 w^3 - v^3 w^2, \\
 u^{23} &= v_{31} w^3 - v_{12} w^2 = -I^{23i} v_{ij} w^j, \\
 u^{23} &= v^{31} w^{12} - v^{12} w^{31} = \mp g_{ij} v^{12i} w^{31j}, \\
 u^1 &= -v^{31} w_3 + v^{12} w_2 = v^{1i} w_i, \\
 u^1 &= v_2 w_3 - v_3 w_2 = I^{1ij} v_i w_j, \\
 u^1 &= v^{31} w^{12} - v^{12} w^{31} = -\frac{I}{2} I_{ijk} v^{ij} w^{k1} \quad (i, j, k = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

или в произвольных (аффинных) координатах:

$$\begin{aligned}
 u^{\lambda\lambda} &= 2v^{[\lambda} w^{\lambda]}, \\
 u^{\lambda\lambda} &= -I^{\lambda\lambda\mu} v_{\mu\nu} w^\nu, \\
 u^{\lambda\lambda} &= \mp 2g_{\mu\nu} v^{[\lambda\mu} w^{\lambda]\nu}, \\
 u^\lambda &= v^{\lambda\lambda} w_\lambda, \\
 u^\lambda &= I^{\lambda\lambda\mu} v_\lambda w_\mu, \\
 u^\lambda &= -\frac{I}{2} I_{\mu\lambda\nu} v^{\mu\lambda} w^{\nu\lambda}.
 \end{aligned}$$

## УПРАЖНЕНИЯ

III. 1. Какой геометрический смысл имеют в  $E_3$  следующие уравнения:

$$(a) \begin{cases} \tilde{h}^{\lambda\lambda} \tilde{f}_\lambda = I, \\ \tilde{h}_{\lambda\lambda} \tilde{f}^{\lambda,\lambda} = \mp 2, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} h_{\lambda,\lambda} f^{\lambda,\lambda} = \mp 2, \\ \tilde{h}^{\lambda\lambda} \tilde{f}_\lambda = I. \end{cases} \tag{1a}$$

III. 2. Предположим, что контравариантный вектор задан в  $E_3$  стрелкой. Какие другие геометрические представления могут быть построены после введения:

- (1) единичного объема (однодополнительное представление),
- (2) фундаментального тензора (три других представления),
- (3) единичного объема и ориентации (три других представления),
- (4) фундаментального тензора и ориентации (семь других представлений)?

III. 3. В  $E_6$ , построенном на всех бивекторах в  $R_q$ , простые бивекторы заполняют квадратный конус. Какой вид имеет уравнение этого конуса, если в качестве координат в  $E_6$  использованы шесть выражений (4.16а)?

III. 4<sup>1)</sup>. Пусть  $v^{x_1} \dots x_p$  — простой  $p$ -вектор и  $'v_{\lambda_1} \dots \lambda_{n-p}$  — простой  $(n-p)$ -вектор, определяющие оба одно и то же  $p$ -направление в заданном  $E_p$ ; пусть  $w^{x_1} \dots x_q$  — простой  $q$ -вектор и  $'w_{\lambda_1} \dots \lambda_{n-q}$  — простой  $(n-q)$ -вектор, определяющие оба одно и то же  $q$ -направление в заданном  $E_q$ ; все эти величины определены с точностью до скалярного множителя.

Образует свертку

$$v^{x_1} \dots x_z \mu_{z+1} \dots \mu_p 'w_{\mu_{z+1} \dots \mu_p \lambda_{p+q-z+1} \dots \lambda_n}$$

для всех возможных значений  $z$ . Если  $s$  есть минимальное значение  $z$  (включая 0!), для которого эта свертка не равна 0,  $E_p$  и  $E_q$  пересекаются по  $E_s$  и

$$v^{x_1} \dots x_s \mu_{s+1} \dots \mu_p 'w_{\mu_{s+1} \dots \mu_p \lambda_{p+q-s+1} \dots \lambda_n}$$

есть произведение контравариантного  $s$ -вектора с  $s$ -направлением  $E_s$  и ковариантного  $(n-p-q+s)$ -вектора с  $(p+q-s)$ -направлением объединения  $E_p$  и  $E_q$ .

III. 5. Если

$$u^{x_1} \dots x_p = e \begin{matrix} [x_1 \dots x_p] \\ I \quad \quad \quad p \end{matrix}$$

и если  $v^{x_1} \dots x_q$  — простой  $q$ -вектор ( $p+q-n=r$ ), причем

$$v^1 \dots r^{(p+1)} \dots n \neq 0,$$

то  $E_p$  и  $E_q$ , определяемые соответственно  $u^{x_1} \dots x_p$  и  $v^{x_1} \dots x_q$ , пересекаются точно по  $E_r$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Джайвис 1937. 1, р. 360.

<sup>2)</sup> П. Ф. 1949, р. 27.

#### IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В $X_n^1$ )

##### 1. $X_n^2$ )

Мы будем рассматривать все совокупности  $n$  значений  $n$  переменных  $\xi^x$  ( $x = 1, \dots, n$ ) и называть каждую совокупность *точкой*. Вместо  $\xi^x$  можно ввести другое множество переменных  $\xi^{x'}$  ( $x' = 1', \dots, n'$ ) с помощью уравнений

$$\xi^{x'} = \xi^{x'}(\xi^x) \quad (1.1)$$

вместе с условиями, что функции  $\xi^{x'}$  аналитичны <sup>3)</sup> в некоторой области и что матрица с элементами

$$A_x^{x'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^{x'}}{\partial \xi^x} \quad (1.2)$$

имеет ранг  $n$  в этой области. Тогда существует обратное преобразование

$$\xi^x = \xi^x(\xi^{x'}) \quad (1.3)$$

в некоторой области и функции  $\xi^x$  аналитичны в этой области. Теперь многообразие всех рассматриваемых точек снабжено первоначальной координатной системой  $\xi^x$  и всеми координатными системами, которые могут быть получены

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Р. К. 1924. 1; 1954. 1; Эйзенхарт 1926. 1; Леви-Чивита 1927. 2; Веблен и Уайтхед 1932. 1; Н. М. 1935. 1; Бриллюэн 1938. 1; Лихнерович 1947. 1; Брандт 1947. 2; Мичел 1947. 3; П. Ф. 1949. 1; Схоутен 1951. 1; Рашевский 1953. 1.

<sup>2)</sup> Более подробное изложение см. П. Ф. гл. II, § 1, 2, 1949. 1.

<sup>3)</sup> Вместо этого можно было бы только предположить, что функции имеют непрерывные производные до определенного порядка.

из  $\xi^x$  указанным образом. Это многообразие называется  $X_n$  <sup>1)</sup>. Разница между  $X_n$  и  $E_n$  состоит в том, что в  $E_n$  допустимыми координатными системами являются только те, которые могут быть получены одна из другой линейными преобразованиями, тогда как в  $X_n$  допустимы все обратимые аналитические преобразования. Естественно, понятия прямой линии, плоскости и т. п. в  $X_n$  не существуют. Поэтому координаты в  $X_n$  называются *криволинейными*.

## 2. Определение геометрических объектов в $X_n$

Если в определенной точке  $\xi^x$  из  $X_n$  имеется соответствие между упорядоченными множествами  $N$  чисел  $\Phi_\Lambda$  ( $\Lambda = 1, \dots, N$ ) и допустимыми системами координат ( $x$ ) в окрестности  $\xi^x$ , такое, что

- (1) каждой ( $x$ ) соответствует одно и только одно множество  $\Phi_\Lambda$ ;
- (2) множество  $\Phi_{\Lambda'}$ , соответствующее ( $x'$ ), может быть выражено только через  $\Phi_\Lambda$  и значения

$$A_x^{x'}, \partial_\lambda A_x^{x'}, \partial_\mu \partial_\lambda A_x^{x'}, \dots \text{ в точке } \xi^x,$$

то говорят, что  $\Phi_\Lambda$  являются компонентами относительно ( $x$ ) геометрического объекта в точке  $\xi^x$ .

Геометрические объекты в  $X_n$  классифицируются в соответствии с законами преобразования их компонент. Если в условии (2) выражение для  $\Phi_{\Lambda'}$  линейно и однородно по  $\Phi_\Lambda$ , алгебраически однородно по  $A_x^{x'}$  и не содержит производных  $A_x^{x'}$ , то  $\Phi_\Lambda$  являются компонентами *геометрической величины* в  $\xi^x$ .

Если объект задан в каждой точке определенной области  $X_n$ , мы имеем *поле* объекта в этой области.

Точка  $\xi^x$  есть объект с законом преобразования

$$\xi^{x'} = \xi^{x'}(\xi^x), \quad \text{Det}(A_x^{x'}) \neq 0, \quad (2.1)$$

<sup>1)</sup> Определенное таким образом  $X_n$  называется *элементарным многообразием*. Относительно общего понятия *дифференцируемого многообразия* см., например, де Ра м 1955. 3. — *Прим. перев.*

но этот объект не величина, так как преобразование не является линейным и однородным относительно  $\xi^x$ .

Дифференцируя (2.1), получаем

$$d\xi^{x'} = A_x^{x'} d\xi^x. \quad (2.2)$$

Из этого уравнения мы видим, что компоненты линейного элемента  $d\xi^x$  всегда преобразуются линейно и однородно. Следовательно, преобразование  $(x) \rightarrow (x')$  в  $X_n$  индуцирует в каждой точке рассматриваемой области линейное однородное преобразование, а это значит, что каждой точке этой области принадлежит центр-аффинное  $E_n$ . Мы называем это  $E_n$  *локальным  $E_n$  точки  $\xi^x$*  и отождествляем центр с точкой  $\xi^x$ .  $X_n$  и локальное  $E_n$  не имеют других общих точек. Но в  $\xi^x$  направления в  $X_n$  находятся во взаимно однозначном соответствии с направлениями в локальном  $E_n$  точки  $\xi^x$ . Два локальных  $E_n$ , принадлежащие различным точкам  $X_n$ , полностью независимы. Отметим, в частности, что *они не имеют общих точек*. В случае, если  $X_n$  погружено в некоторое  $E_v$  ( $v > n$ ), удобно иногда отождествлять локальные  $E_n$  с  $E_n$ , касательными к  $X_n$  в  $E_v$ . Но при этом пересечения двух касательных  $E_n$  не должны рассматриваться. Часто локальное  $E_n$  отождествляется с «инфинитезимальной окрестностью»  $\xi^x$  в  $X_n$ . Это отождествление, хотя и не является корректным, может иметь иногда некоторое эвристическое значение. Конечно, рассмотрение общих точек «соседних инфинитезимальных окрестностей» недопустимо.

Из определения геометрической величины в точке  $\xi^x$  мы видим, что ее можно рассматривать как геометрическую величину в локальном  $E_n$  точки  $\xi^x$  в соответствии с определением II, § 1. Следовательно, мы имеем векторы, бивекторы, плотности и т. д. в каждом локальном  $E_n$ , а значит, и векторные поля, бивекторные поля и т. д. в  $X_n$ . Две величины в двух разных  $E_n$  не могут рассматриваться как величины в одном и том же  $E_n$ . Их нельзя складывать, умножать или свертывать.

Если по каким-либо причинам координатные системы в  $X_n$  являются привилегированными и преобразующимися друг в друга для всех преобразований из  $G_a$ , то  $X_n$  можно рассматривать как  $E_n$ . В этом случае все величины в раз-

личных точках этого  $E_n$  можно складывать, умножать, сворачивать и т. д., по способу, изложенному в гл. II, но только при условии, что не используются никакие другие компоненты, кроме компонент относительно привилегированных систем.

Чтобы найти базисные векторы в каждой точке  $X_n$ , мы рассмотрим  $n$  скаляров  $\xi^{\kappa}$ , определяемых уравнениями

$$\xi^{\kappa} \stackrel{*}{=} \xi^{\kappa}. \quad (2.3)$$

Тогда дифференцированием мы получаем следующие величины:

(1) Контравариантные и ковариантные базисные векторы, принадлежащие ( $\kappa$ ):

$$e^{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \xi^{\kappa} / \partial \xi^{\lambda}, \quad e_{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \xi^{\kappa} / \partial \xi^{\lambda}. \quad (2.4)$$

Эти векторы имеют компоненты 1 и 0 относительно ( $\kappa$ ).

(2) Единичный тензор

$$A_{\lambda}^{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \xi^{\kappa} / \partial \xi^{\lambda}. \quad (2.5)$$

(3)  $n^2$  скаляров символа Кронекера

$$\delta_{\lambda}^{\kappa} = \partial \xi^{\kappa} / \partial \xi^{\lambda}. \quad (2.6)$$

Мы дадим теперь пример криволинейных координат в обыкновенном  $R_2$ . Уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}c^2 + \lambda} + \frac{y^2}{-\frac{1}{2}c^2 + \lambda} = 1 \quad (c \text{ — постоянная}) \quad (2.7)$$

представляет систему  $\infty^1$  эллипсов и гипербол с фокусами в точках  $x = \pm c$ ;  $y = 0$ . Для различных значений  $\lambda$  мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda &> \frac{1}{2}c^2 && \text{эллипс,} \\ \lambda &= \frac{1}{2}c^2, \quad y = 0 && \text{вырожденный эллипс или гипербола,} \\ -\frac{1}{2}c^2 &< \lambda < \frac{1}{2}c^2 && \text{гипербола,} \\ \lambda &= -\frac{1}{2}c^2, \quad x = 0 && \text{вырожденная гипербола,} \\ \lambda &< -\frac{1}{2}c^2 && \text{мнимая кривая.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.7) является квадратным уравнением относительно  $\lambda$ . Его корни

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \pm \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)^2}{4} - \frac{1}{2} c^2 \left( x^2 - y^2 - \frac{1}{2} c^2 \right)}, \quad (2.9)$$

и через них могут быть выражены  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\left( \lambda_1 + \frac{1}{2} c^2 \right) \left( \frac{1}{2} c^2 + \lambda_2 \right)}{c^2}, \\ y^2 &= \frac{\left( \lambda_1 - \frac{1}{2} c^2 \right) \left( \frac{1}{2} c^2 - \lambda_2 \right)}{c^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Мы введем теперь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в качестве новых координат в  $R_2$ . Тогда каждой *общей* паре значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принадлежат четыре точки, по одной в каждом квадранте. Точкам оси  $x$  соответствует  $\lambda_1 = \frac{1}{2} c^2$ , если они лежат между фокусами, и  $\lambda_2 = \frac{1}{2} c^2$ , если они принадлежат внешним сегментам. В фокусах  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} c^2$ . Точкам оси  $y$  соответствует  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} c^2$ .  $\lambda_1$  принимает значения от  $+\infty$  до  $+\frac{1}{2} c^2$ , а  $\lambda_2$  — от  $+\frac{1}{2} c^2$  до  $-\frac{1}{2} c^2$ . Параметрическими кривыми  $\lambda_1$  являются гиперболы

$$\begin{aligned} \lambda_2 = k = \text{const} \text{ или } \frac{x^2}{\frac{1}{2} c^2 + k} + \frac{y^2}{k - \frac{1}{2} c^2} = 1, \\ -\frac{1}{2} c^2 \leq k \leq +\frac{1}{2} c^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

а параметрическими кривыми  $\lambda_2$  являются эллипсы

$$\lambda_1 = l = \text{const} \text{ или } \frac{x^2}{\frac{1}{2} c^2 + l} + \frac{y^2}{l - \frac{1}{2} c^2} = 1, \quad l \geq \frac{1}{2} c^2. \quad (2.12)$$

Положительное направление на этих параметрических кривых показано на рис. 15. Знание этого направления

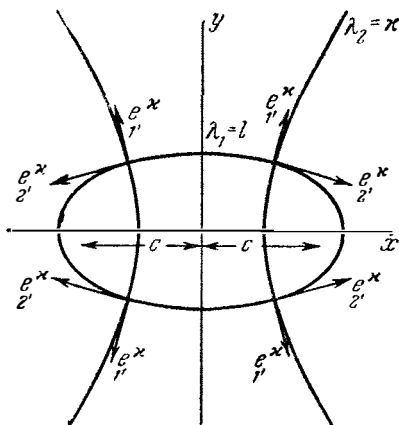


Рис. 15.

необходимо, чтобы правильно определить знак  $\partial x / \partial \lambda_i$  и т. д. в функциональной матрице, полученной из (2.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} &= \pm \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_2 + \frac{1}{2}c^2}{\lambda_1 + \frac{1}{2}c^2}}, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} &= \mp \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 + \frac{1}{2}c^2}{\lambda_2 + \frac{1}{2}c^2}}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} &= \pm \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}c^2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \frac{1}{2}c^2}}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} &= \mp \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}c^2}{\frac{1}{2}c^2 - \lambda_2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Здесь последовательность знаков соответствует нумерации квадрантов.

Из (2.13) мы получаем функциональный определитель

$$\Delta^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4c^2 xy}. \quad (2.14)$$

Обратно, из (2.9) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} &= 2x \frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}c^2}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} &= 2y \frac{\frac{1}{2}c^2 + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} &= 2x \frac{\frac{1}{2}c^2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} &= -2y \frac{\frac{1}{2}c^2 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

и, следовательно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{4c^2 xy}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (2.16)$$

что согласуется с (2.14).

Параметрические кривые  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  образуют во втором и четвертом квадрантах систему с той же ориентацией, что и  $x$ ,  $y$ , а в первом и третьем квадрантах — систему с противоположной ориентацией. Оси  $x$  и  $y$  являются особыми линиями. На оси  $y$   $\Delta = 0$ , а на оси  $x$   $\Delta = 0$  для  $x \neq \pm c$  и  $\Delta = 0/0$  для  $x = \pm c$ .

Если мы обозначим  $x = \xi^1$ ,  $y = \xi^2$ ,  $\lambda_1 = \xi^{1'}$ ,  $\lambda_2 = \xi^{2'}$ , то из (2.13,15) найдем для базисных векторов:

$$\begin{aligned} e_{1'}^1 &= e_{1'}^1 = A_{1'}^1 = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_2 + \frac{1}{2}c^2}{\lambda_1 + \frac{1}{2}c^2}}; \\ e_{2'}^1 &= e_{2'}^1 = A_{2'}^1 = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 + \frac{1}{2}c^2}{\lambda_2 + \frac{1}{2}c^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{1'}^2 = e_{1'}^2 = A_{1'}^2 &= \frac{+}{+} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}c^2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \frac{1}{2}c^2}}; \\
e_{2'}^2 = e_{2'}^2 = A_{2'}^2 &= \frac{-}{+} \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}c^2}{\frac{1}{2}c^2 - \lambda_2}}; \\
e_1^{1'} = e_1^{1'} = A_1^{1'} &= 2x \frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}c^2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\
e_1^{2'} = e_1^{2'} = A_1^{2'} &= 2y \frac{\frac{1}{2}c^2 + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\
e_2^{1'} = e_2^{1'} = A_2^{1'} &= 2x \frac{\frac{1}{2}c^2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\
e_2^{2'} = e_2^{2'} = A_2^{2'} &= -2y \frac{\frac{1}{2}c^2 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Из (2.17) мы можем легко заключить, что  $e_{1'}^x$  и  $e_{2'}^x$  взаимно ортогональны и что длины этих базисных векторов равны

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{e_1^{1'} e_1^{1'} + e_2^{1'} e_2^{1'}}{1' 1'}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2 - \frac{1}{2}c^4}}; \\
\sqrt{\frac{e_1^{2'} e_1^{2'} + e_2^{2'} e_2^{2'}}{2' 2'}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\frac{1}{2}c^4 - \lambda_2^2}}. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Точки, в которых прямоугольник из  $e_{1'}^x$  и  $e_{2'}^x$  превращается в квадрат, лежат на кривой 4 степени

$$(x^2 + y^2)^2 - c^2 \left( x^2 - y^2 - \frac{1}{2}c^2 \right) = \frac{1}{2}c^4. \quad (2.19)$$

проходящей через фокусы.

### 3. Инвариантные дифференциальные операторы. I. Grad, Div и Rot

Производные тензора или тензорной плотности валентности, отличной от нуля, не образуют геометрического объекта. Например,

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'} P_{\lambda'}^{\kappa'} &= A_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda \kappa'} P_{\lambda}^{\kappa} = \\ &= A_{\mu'}^{\mu \lambda \kappa'} \partial_{\mu} P_{\lambda}^{\kappa} + A_{\mu'}^{\mu \kappa'} P_{\lambda}^{\kappa} \partial_{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} + A_{\mu'}^{\mu \lambda} P_{\lambda}^{\kappa} \partial_{\mu} A_{\kappa'}^{\kappa} \quad ^1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Это связано с тем обстоятельством, что  $A_{\kappa'}^{\kappa}$  не являются, вообще говоря, постоянными. Только в  $E_n$   $A_{\kappa'}^{\kappa}$  постоянны и  $\partial_{\mu'} P_{\lambda}^{\kappa}$  есть тензор. Но в  $X_n$  имеются инвариантные дифференциальные операторы для скаляров,  $W$ -скаляров, ковариантных  $p$ -векторов и  $W$ - $p$ -векторов, контравариантных  $p$ -вектор-плотностей и  $p$ -вектор- $\Delta$ -плотностей веса  $+1$ .

Производные скаляра  $p$  или  $W$ -скаляра  $\overset{*}{p}$  являются соответственно компонентами ковариантного вектора или  $W$ -вектора

$$\partial_{\mu'} p = A_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu} p, \quad \partial_{\mu'} \overset{*}{p} = A_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu} \overset{*}{p}. \quad (3.2)$$

Этот вектор называется *внешним дифференциалом* <sup>2)</sup> или *градиентом*, и мы пишем для краткости

$$Dp = \text{Grad } p, \quad D\overset{*}{p} = \text{Grad } \overset{*}{p}. \quad (3.3)$$

Если  $(n-1)$ -направление поля  $\omega_{\lambda}$  в каждой точке касательно некоторому  $X_{n-1}$  системы  $\infty^1$   $X_{n-1}$ , определяемых уравнением  $q = \text{const}$ , то мы называем поле  $\omega_{\lambda}$  *интегрируемым* (в оригинале  $X_{n-1}$ -building. — Прим. перев.). В этом случае справедливо уравнение

$$\omega_{\lambda} = a \partial_{\lambda} q. \quad (3.4)$$

<sup>1)</sup>  $\partial_{\mu'} P_{\lambda}^{\kappa}$  вместе с  $P_{\lambda}^{\kappa}$  образуют геометрический объект, но не геометрическую величину.

<sup>2)</sup> Мы используем этот термин, чтобы иметь общее выражение для трех инвариантных дифференциальных операторов. [Здесь и в дальнейшем автор применяет термин natural derivative — естественная производная. Мы предпочли общепринятый в математической литературе термин «внешний дифференциал». — Прим. перев.]

Следовательно, любой градиентный вектор является интегрируемым, и каждый вектор, являющийся интегрируемым, есть произведение градиентного вектора на скаляр. Если  $\omega_\lambda = \partial_\lambda q$ , все  $X_{n-1}$  с уравнениями  $q = \text{const}$  называются *эквишкалярными  $X_{n-1}$  поля  $q$* . Рассмотрим два из этих  $X_{n-1}$

$$q = c, \quad q = c + d\varepsilon \quad (3.5)$$

и точку  $\xi^x$  на первом из них. В этой точке мы имеем

$$dq = \omega_\lambda d\xi^\lambda, \quad (3.6)$$

и уравнение

$$d\varepsilon = \omega_\lambda d\xi^\lambda \quad (3.7)$$

выражает тот факт, что  $\xi^x + d\xi^x$  лежит на втором  $X_{n-1}$ . Следовательно, вектор  $\omega_\lambda/d\varepsilon$  представляется двумя касательными  $E_{n-1}$  в точках  $\xi^x$  и  $\xi^x + d\xi^x$ . Пусть теперь  $k$  — произвольная постоянная. Рассмотрим эквишкалярные  $X_{n-1}$ :  $q = c$ ,  $q = c + k$ ,  $q = c + 2k$  и т. д. Тогда мы видим, что в любой точке поля на одном из этих  $X_{n-1}$  касательное  $E_{n-1}$  в этой точке и касательное  $E_{n-1}$  в соседней точке на следующем  $X_{n-1}$  дают совместно приближенное представление вектору  $\omega_\lambda/k$ , причем оно стремится к точному представлению, когда  $k \rightarrow 0$ . Следовательно, градиентное поле является не только интегрируемым, но в «инфинитезимальном масштабе» его двойные  $E_{n-1}$  склеиваются совместно и образуют двойные  $X_{n-1}$ , заполняющие все  $X_n$  без промежутков.

Альтернированные производные ковариантного  $q$ -вектора являются компонентами ковариантного  $(q+1)$ -вектора

$$\begin{aligned} \partial_{[\mu} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} &= A_{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q}^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q} \partial_{[\mu} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} + \\ &+ \partial_{[\mu} \left( A_{\lambda_1}^{\lambda_1} \dots A_{\lambda_q}^{\lambda_q} \right) \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q} = \\ &= A_{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q}^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q} \partial_{[\mu} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Это обусловлено тем, что

$$\partial_{[\mu} A_{\lambda_1}^{\lambda_1]} = \partial_{[\mu} \partial_{\lambda_1]} \xi^\lambda = 0. \quad (3.9)$$

$(q+1)$ -вектор  $(q+1) \partial_{[\mu} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}$  называется *внешним дифференциалом* или *вращением*  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ , и мы пишем для краткости

$$(q+1) D\omega = \text{Rot } \omega. \quad (3.10)$$

То же справедливо *mutatis mutandis* для ковариантного  $W$ - $q$ -вектора.

Из этих определений немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \text{Rot Grad } p &= 0, & \text{Rot Grad } p^* &= 0, \\ \text{Rot Rot } \omega &= 0, & \text{Rot Rot } \omega^* &= 0^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если  $\hat{\omega}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  — контравариантная  $p$ -вектор-плотность веса  $+1$ , то можно показать, что  $\partial_\mu \hat{\omega}^{\mu \lambda_2 \dots \lambda_p}$  есть контравариантная  $(p-1)$ -вектор-плотность веса  $+1$ . То же справедливо *mutatis mutandis* для контравариантной  $p$ -вектор- $\Delta$ -плотности веса  $+1$ . Чтобы доказать это, мы положим  $\partial_\rho = 0$  для всех значений  $p$  и  $q = n - p$  в (II. 8.13):

$$\omega^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{1}{q!} \tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p \lambda_1 \dots \lambda_q} \hat{\omega}^{\lambda_1 \dots \lambda_q}. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (p+1) \partial_{[\mu} \omega^*_{\lambda_1 \dots \lambda_p]} &= \frac{p+1}{q!} \tilde{e}_{[\lambda_1 \dots \lambda_p | \lambda_1 \dots \lambda_q]} \partial_{\mu]} \hat{\omega}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} = \\ &= \frac{1}{q!} \tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p \lambda_1 \dots \lambda_q} \partial_\mu \hat{\omega}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} - \\ &- \frac{1}{q!} \sum_s^{1 \dots p} \tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s-1} \mu \lambda_{s+1} \dots \lambda_p \lambda_1 \dots \lambda_q} \partial_{\lambda_s} \hat{\omega}^{\lambda_1 \dots \lambda_q}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

<sup>1)</sup> Ср. V, § 1, где  $\text{Rot } \omega$  записан через ковариантный оператор  $\nabla_\mu$ .

<sup>2)</sup> Обычно внешний дифференциал обозначается символом  $d$ , причем одним из его важных свойств является  $dd = 0$ . (3.11) выражает это свойство в другой форме записи. — *Прим. перев.*

и так как альтернирование по  $n + 1$  индексу исчезает тождественно

$$\begin{aligned}
 (p + 1) \partial_{[\mu}^* \widehat{\omega}^{\lambda_1 \dots \lambda_p]} &= \\
 &= \frac{1}{q!} \sum_s^{1 \dots p} \widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s-1} \mu \lambda_{s+1} \dots \lambda_p} \alpha_1 \dots \alpha_q \partial_{\lambda_s} \widehat{\omega}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} + \\
 &+ \frac{1}{q!} \sum_t^{1 \dots q} \widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p \alpha_1 \dots \alpha_{t-1} \mu \alpha_{t+1} \dots \alpha_q} \partial_{\alpha_t} \widehat{\omega}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} - \\
 &- \frac{1}{q!} \sum_s^{1 \dots p} \widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_{s-1} \mu \lambda_{s+1} \dots \lambda_p} \alpha_1 \dots \alpha_q \partial_{\lambda_s} \widehat{\omega}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \\
 &= \frac{1}{q!} \sum_t^{1 \dots q} \widetilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_p \alpha_1 \dots \alpha_{t-1} \mu \alpha_{t+1} \dots \alpha_q} \partial_{\alpha_t} \widehat{\omega}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \\
 &= (-1)^p \frac{1}{(q-1)!} \widetilde{e}_{\mu \lambda_1 \dots \lambda_p \alpha_2 \dots \alpha_q} \partial_{\alpha_1} \widehat{\omega}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что  $\partial_{\lambda} \widehat{\omega}^{\lambda \alpha_{p+2} \dots \alpha_n}$  является  $(q - 1)$ -вектор-плотностью веса  $+1$ , присоединенной к  $(-1)^p \text{Rot} \widehat{\omega}^2$ . Эта величина называется *внешним кодифференциалом* или *дивергенцией*  $\widehat{\omega}$ , и мы пишем для сокращения  $\text{Div} \widehat{\omega}^3$ . То же справедливо *mutatis mutandis* для  $p$ -вектор- $\Delta$ -плотностей веса  $+1$ . Из определений немедленно следует, что

$$\text{Div} \text{Div} \widehat{\omega} = 0, \quad \text{Div} \text{Div} \widetilde{\omega} = 0 \quad (3.15)$$

для  $q \geq 2$ .

Можно показать, что в  $X_n$  не существуют никакие другие инвариантные дифференциальные операторы, если не заданы какие-либо дополнительные поля.

<sup>1)</sup> Для  $\delta_p \neq 0$  мы имеем множитель  $(-1)^{p-\delta_p}$  вместо  $(-1)^p$  в (3.14).

<sup>2)</sup> Для  $\delta_p \neq 0$  мы имеем множитель  $(-1)^{p-\delta_p+\delta_{p+1}}$  вместо  $(-1)^p$ .

<sup>3)</sup> Ср. V, § 1, где  $\text{Rot} \widehat{\omega}$  и  $\text{Div} \widehat{\omega}$  записаны с ковариантным оператором  $\nabla_{\mu}$ .

Докажем непосредственно, что  $\partial_\mu \tilde{\omega}^\mu$  является скалярной  $\Delta$ -плотностью веса  $+1$ , если  $\tilde{\omega}^\mu$  есть вектор- $\Delta$ -плотность веса  $+1$ . Для  $\partial_\mu \tilde{\omega}^\mu$  имеем

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{\omega}^{\mu'} &= A_\mu^\lambda \partial_\lambda \Delta^{-1} A_{\mu'}^{\mu''} \tilde{\omega}^\mu = \\ &= \Delta^{-1} \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu + \tilde{\omega}^\mu \partial_\mu \Delta^{-1} + \tilde{\omega}^\mu \Delta^{-1} A_\mu^\lambda \partial_\lambda A_{\mu'}^{\mu''} = \\ &= \Delta^{-1} \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu + \tilde{\omega}^\mu (\partial_\mu \Delta^{-1} + \Delta^{-1} A_\mu^\lambda \partial_\lambda A_{\mu'}^{\mu''}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из определения  $A_{\mu'}^{\mu''}$  следует, что (ср. I.1.15)

$$A_{\mu'}^{\mu''} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial A_{\mu'}^{\mu''}} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial A_{\mu'}^{\mu''}} \quad (3.17)$$

или

$$\partial_\mu \Delta^{-1} = -\Delta^{-1} A_\mu^\lambda \partial_\lambda A_{\mu'}^{\mu''}. \quad (3.18)$$

Отсюда

$$\partial_\mu \tilde{\omega}^{\mu'} = \Delta^{-1} \partial_\mu \tilde{\omega}^\mu. \quad (3.19)$$

Оператор  $\operatorname{div}$  в обычном векторном анализе соответствует оператору  $\operatorname{Div}$ , если  $\vec{v}$  рассматривается как контравариантная векторная плоскость

$$\operatorname{div} \vec{v} = \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 + \partial_3 v^3 = \partial_h v^h \quad (h = 1, 2, 3), \quad (3.20)$$

и оператору  $\operatorname{Rot}$ , если  $\vec{v}$  рассматривается как ковариантный бивектор

$$\operatorname{div} \vec{v} = \partial_1 v_{23} + \partial_2 v_{31} + \partial_3 v_{12} = 3 \partial_{[1} v_{23]}. \quad (3.21)$$

Оператор  $\operatorname{rot}$  в обычном векторном анализе соответствует оператору  $\mp \operatorname{Rot}$ , если  $\vec{v}$  рассматривается как ковариантный вектор

$$\omega_{23} = \mp \partial_2 v_3 \pm \partial_3 v_2 = \mp 2 \partial_{[2} v_{3]}; \quad \text{цикл. } 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

и оператору  $-\operatorname{Div}$ , если  $\vec{v}$  рассматривается как контравариантная бивектор-плотность

$$\omega^1 = \partial_2 v^{12} - \partial_3 v^{31} = -\partial_h v^{h1} \quad (h = 1, 2, 3); \quad \text{цикл. } 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

## 4. Инвариантные дифференциальные операторы. II. Теорема Стокса

Рассмотрим в  $X_n$  односвязную область  $\tau_{q+1}$  некоторого  $X_{q+1}$ <sup>1)</sup> и ее границу  $\tau_q$  (которая сама является  $X_q$ ). Обозначим через  $df^{\lambda_1} \dots \lambda_q$   $q$ -мерный элемент  $X_q$  с *внутренней* ориентацией, фиксированной для всего  $X_q$ , и через  $df^{\lambda_1} \dots \lambda_{q+1}$  обозначим  $(q+1)$ -мерный элемент  $X_{q+1}$  с *внутренней* ориентацией, фиксированной для всего  $X_{q+1}$ . Пусть ориентации согласованы таким образом, что направление от некоторой точки  $\tau_{q+1}$  к границе совместно с ориентацией  $df^{\lambda_1} \dots \lambda_q$  дают ориентацию  $df^{\lambda_1} \dots \lambda_{q+1}$ . И пусть теперь  $v_{\lambda_1} \dots \lambda_q$  есть поле  $q$ -вектора в  $\tau_{q+1}$ . Тогда справедлива формула

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} v_{\lambda_1} \dots \lambda_q] df^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q} = \int_{\tau_q} v_{\lambda_1} \dots \lambda_q df^{\lambda_1 \dots \lambda_q}, \quad (4.1)$$

если выполнены следующие условия:

- (1)  $v_{\lambda_1} \dots \lambda_q$  непрерывно в  $\tau_{q+1}$  и на  $\tau_q$ ;
- (2) производные  $v_{\lambda_1} \dots \lambda_q$ , входящие в  $\partial_{[\mu} v_{\lambda_1} \dots \lambda_q]$ , существуют во всех точках  $\tau_{q+1}$ ;
- (3) эти производные непрерывны во всех точках  $\tau_{q+1}$  за исключением, быть может, точек конечного числа  $X_q$ .

Мы докажем это для случая, когда форма границы  $\tau_q$  удовлетворяет указанным ниже ограничениям.

Пусть координатная система выбрана таким образом, что уравнения для  $\tau_{q+1}$  имеют вид

$$\xi^{q+2} = 0, \dots, \xi^n = 0, \quad (4.2)$$

<sup>1)</sup> Односвязной областью  $X_{q+1}$  называется область в  $X_n$ , которая может быть отображена взаимно непрерывным точечным преобразованием в область, заданную соотношениями

$$\begin{array}{ll} 0 \leq \xi^1 \leq 1, & \xi^{q+2} = 0, \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 \leq \xi^{q+1} \leq 1, & \xi^n = 0 \end{array}$$

относительно некоторой допустимой системы координат.

<sup>2)</sup> См. также Р. К. 1924.1; П. Ф. 1949.1; У и т н и 1957.1.



и пусть форма  $\tau_q$  такая, что каждая из кривых в  $\tau_{q+1}$

$$\xi^2 = \text{const}, \dots, \xi^{q+1} = \text{const} \quad (4.3)$$

пересекает  $\tau_q$  по крайней мере в двух точках. Пусть внутренняя ориентация в  $\tau_{q+1}$  фиксирована  $e^x, \dots, e^x$ , взятыми в этом порядке. Тогда  $df^{x_1} \dots^{x_{q+1}}$  можно записать в виде

$$df^{x_1} \dots^{x_{q+1}} = (q+1)! d\xi_1^{x_1} \dots d\xi_{q+1}^{x_{q+1}}. \quad (4.4)$$

Если векторы  $d\xi_1^x, \dots, d\xi_{q+1}^x$  выбраны таким образом, что:

$$\begin{aligned} d\xi_1^1 &= d\xi_1^1, & d\xi_1^2 &= 0, & \dots, & d\xi_1^n &= 0, \\ d\xi_2^1 &= 0, & d\xi_2^2 &= d\xi_2^2, & d\xi_2^3 &= 0, & \dots, & d\xi_2^n &= 0, \\ & \vdots & & & & & & & \\ d\xi_{q+1}^1 &= 0, & \dots, & d\xi_{q+1}^q &= 0, & d\xi_{q+1}^{q+1} &= d\xi_{q+1}^{q+1}, \\ d\xi_{q+1}^{q+2} &= 0, & \dots, & d\xi_{q+1}^n &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

то мы имеем

$$df^{1 \dots q+1} = d\xi_1^1 \dots d\xi_{q+1}^{q+1}, \quad (4.6)$$

и все компоненты  $df^{x_1} \dots^{x_{q+1}}$ , которые имеют индекс  $q+2, \dots, n$ , исчезают. Выберем теперь одну из кривых (4.3), которая пересекает  $\tau_q$  в точках  $P_1$  и  $P_2$ :

$$\begin{aligned} P_1: & \xi^1 = \xi_1^1, \quad \xi^2 = \xi_0^2, \quad \dots, \quad \xi^{q+1} = \xi_0^{q+1}, \\ P_2: & \xi^1 = \xi_2^1, \quad \xi^2 = \xi_0^2, \quad \dots, \quad \xi^{q+1} = \xi_0^{q+1}, \quad \xi_2^1 > \xi_1^1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Точки  $\tau_{q+1}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \xi_1^1 \leq \xi^1 \leq \xi_2^1, & \quad \xi_0^a \leq \xi^a \leq \xi_0^a + d\xi_0^a \quad (a = 2, \dots, q+1), \\ \xi^b &= 0 \quad (b = q+2, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.8)$$

образуют  $(q+1)$ -мерную трубку в  $\tau_{q+1}$ , и эта трубка вырезает  $q$ -мерный элемент на  $\tau_q$  в каждой из точек  $P_1$  и  $P_2$ . Для наглядности на рис. 16 показан случай  $n=3$ ,  $q=2$ . В соответствии с нашими условиями мы фиксируем ориентацию на  $\tau_q$  в  $P_2$  посредством  $e^x, \dots, e^x$ , взя-

тых в этом порядке. Тогда ориентация в  $P_1$  противоположна ориентации, фиксируемой  $e^x, \dots, e^x$  в  $P_1$ . Таким образом, мы имеем для  $q$ -мерного элемента  $\tau_q$  в  $P_2$

$$d^2 f^2 \dots^{q+1} = d^2 \xi^2 \dots d^2 \xi^{q+1}, \quad (4.9)$$

и в  $P_1$

$$d^1 f^2 \dots^{q+1} = -d^2 \xi^2 \dots d^2 \xi^{q+1}. \quad (4.10)$$

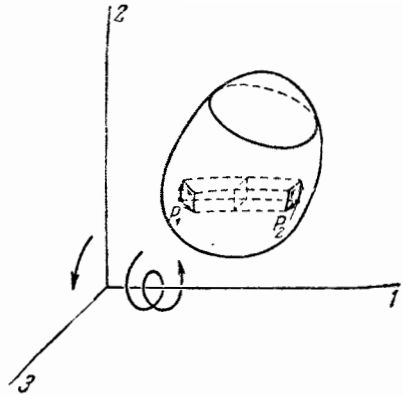


Рис. 16.

Рассмотрим теперь интеграл по  $\tau_{q+1}$

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_1 v_2 \dots^{q+1} d^1 f^1 \dots^{q+1} = \int_{\tau_{q+1}} \partial_1 v_2 \dots^{q+1} d^2 \xi^1 \dots d^2 \xi^{q+1}. \quad (4.11)$$

Часть этого интеграла по трубке есть

$$\begin{aligned} & (v_2 \dots^{q+1} - v_2 \dots^{q+1}) d^2 \xi^2 \dots d^2 \xi^{q+1} = \\ & = v_2 \dots^{q+1} d^2 f^2 \dots^{q+1} + v_2 \dots^{q+1} d^1 f^2 \dots^{q+1}, \quad (4.12) \end{aligned}$$

где  $v_2 \dots^{q+1}$  и  $v_2 \dots^{q+1}$  значения  $v_2 \dots^{q+1}$  соответственно в  $P_1$  и  $P_2$ . Отсюда

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_1 v_2 \dots^{q+1} d^1 f^1 \dots^{q+1} = \int_{\tau_q} v_2 \dots^{q+1} d^2 f^2 \dots^{q+1}. \quad (4.13)$$

Используя вместо (4.3) другое множество кривых, мы можем точно таким же образом получить уравнения с  $\partial_2, \dots, \partial_{q+1}$  вместо  $\partial_1$ . Складывая их и умножая на подходящий

множитель, мы получим (4.1). Теперь нам осталось только избавиться от условия пересечения, наложенного на форму  $\tau_q$ . Пусть возможно разбить  $\tau_{q+1}$  на конечное число таких  $\tau_{q+1}$ , что условие пересечения выполняется для границы  $\tau_q$  каждого из них. Тогда (4.1) справедливо для каждого  $\tau_{q+1}$ . Но при суммировании все интегралы по общим границам соседних  $\tau_{q+1}$  взаимно уничтожаются из-за противоположной ориентации границ. Это заканчивает доказательство для случая, когда  $\tau_{q+1}$  можно разбить на конечное число частей, каждая из которых удовлетворяет условию пересечения.

(4.1) является одной из форм обобщенной теоремы Стокса (носящей также имя Гаусса в Германии и Остроградского во Франции). Из нее можно получить много других форм. Прежде всего, вместо  $v_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ ,  $f^{\mu \lambda_1 \dots \lambda_q}$ ,  $f^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$  можно ввести  $\tilde{v}^{\kappa_1 \dots \kappa_p}$ ,  $\tilde{f}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}}$ ,  $\tilde{f}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  ( $p = n - q$ ). Тогда мы получим формулы<sup>1)</sup>

$$p \int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_q} d\tilde{f}^{\kappa_1 \dots \kappa_{p-1}}] = \int_{\tau_q} v_{[\lambda_1 \dots \lambda_q} d\tilde{f}^{\kappa_1 \dots \kappa_{p-1}\mu]}, \quad (4.14)$$

$$p \int_{\tau_{q+1}} \partial_{\mu} \tilde{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}\mu} d\tilde{f}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}} = \int_{\tau_q} \tilde{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} d\tilde{f}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{n-q}{q+1} \int_{\tau_{q+1}} \partial_{\mu} \tilde{v}^{[\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} | \mu]} d\tilde{f}^{\lambda_p \kappa_1 \dots \kappa_q] = \\ = \int_{\tau_{q+1}} \partial_{\mu} \tilde{v}^{[\lambda_1 \dots \lambda_p} d\tilde{f}^{|\mu| \kappa_1 \dots \kappa_q]} = \\ = \int_{\tau_q} \tilde{v}^{[\lambda_1 \dots \lambda_p} d\tilde{f}^{\kappa_1 \dots \kappa_q]}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

имеющие все один и тот же геометрический смысл.

Если элементы  $\tau_q$  и  $\tau_{q+1}$  имеют внешнюю ориентацию (этот случай встречается в физике наиболее часто) и если

<sup>1)</sup> Ср. Р. К. 1924.1, р. 97; Вейссенхоф 1937.2; Схоутен и Данциг 1940.1, р. 471. В последней работе знак  $\sim$  используется другим, менее эффективным образом.

эти ориентации выбраны таким образом, что ориентация  $\tau_{q+1}$  совместно с направлением от любой точки  $\tau_{q+1}$  к границе дают ориентацию  $\tau_q$ , то мы получаем следующие пять формул:

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} \hat{v}^*_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} df^{*\mu\lambda_1 \dots \lambda_q} = \int_{\tau_q} \hat{v}^*_{\lambda_1 \dots \lambda_q} df^{*\lambda_1 \dots \lambda_q}, \quad (4.17)$$

$$p \int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} \hat{v}^*_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} d\hat{f}_{x_1 \dots x_{p-1}} = \int_{\tau_q} \hat{v}^*_{[\lambda_1 \dots \lambda_q} d\hat{f}_{x_1 \dots x_{p-1}\mu]}, \quad (4.18)$$

$$p \int_{\tau_{q+1}} \partial_{\mu} \hat{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}\mu} d\hat{f}_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}} = \int_{\tau_q} \hat{v}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} d\hat{f}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{n-q}{q+1} \int_{\tau_{q+1}} \partial_{\mu} \hat{v}^{[\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}|\mu|} df^{*\lambda_p x_1 \dots x_q]} = \\ = \int_{\tau_{q+1}} \partial_{\mu} \hat{v}^{[\lambda_1 \dots \lambda_p} df^{*\mu|\lambda_1 \dots \lambda_q]} = \\ = \int_{\tau_q} \hat{v}^{[\lambda_1 \dots \lambda_p} df^{*\lambda_1 \dots \lambda_q]}, \quad (4.20) \end{aligned}$$

имеющие все один и тот же геометрический смысл<sup>1)</sup>. Если одна из этих десяти формул доказана, то остальные девять могут быть из нее получены.

В  $X_3$  мы имеем следующие случаи:

(1)  $q = 2$ .

(а) Интеграл от ковариантного бивектора по поверхности с внутренней ориентацией:

$$\boxed{\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} v_{\lambda\kappa]} df^{\mu\lambda\kappa} = \int_{\tau_2} v_{\lambda\kappa} df^{\lambda\kappa},} \quad (4.21)$$

$$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} v_{\lambda\kappa]} d\tilde{f} = \int_{\tau_2} v_{[\lambda\kappa} d\tilde{f}_{\mu]}, \quad (4.22)$$

<sup>1)</sup> Ср. Вейссенхоф 1937.2; Схоутен и Данциг 1940.1, р. 472.

$$\int_{\tau_3} \partial_\mu \tilde{v}^\mu d\tilde{f} = \int_{\tau_2} \tilde{v}^\mu d\tilde{f}_\mu, \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{3} \int_{\tau_3} \partial_\mu \tilde{v}^\mu df^{\nu\kappa\mu_2} = \int_{\tau_3} \partial_\mu \tilde{v}^{[\nu} df^{|\mu| \kappa\mu_2]} = \int_{\tau_2} \tilde{v}^{[\nu} d\tilde{f}^{\kappa\mu_2]}. \quad (4.24)$$

(b) Интеграл от контравариантной вектор-плотности веса  $+1$  по поверхности с внешней ориентацией:

$$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} \tilde{v}^*_{\lambda\kappa]} df^{*\mu\lambda\kappa} = \int_{\tau_2} \tilde{v}^*_{\lambda\kappa} d\tilde{f}^{*\lambda\kappa}, \quad (4.25)$$

$$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} \tilde{v}^*_{\lambda\kappa]} d\hat{f} = \int_{\tau_2} \tilde{v}^*_{[\lambda\kappa]} d\hat{f}_{\mu]}, \quad (4.26)$$

$$\boxed{\int_{\tau_3} \partial_\mu \hat{v}^\mu d\hat{f} = \int_{\tau_2} \hat{v}^\mu d\hat{f}_\mu,} \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{3} \int_{\tau_3} \partial_\mu \hat{v}^\mu df^{*\nu\kappa\mu_2} = \int_{\tau_3} \partial_\mu \hat{v}^{[\nu} d\tilde{f}^{*|\mu| \kappa\mu_2]} = \int_{\tau_2} \hat{v}^{[\nu} d\tilde{f}^{*\kappa\mu_2]}. \quad (4.28)$$

(2)  $q = 1$ .

(a) Интеграл от ковариантного вектора по кривой с внутренней ориентацией:

$$\boxed{\int_{\tau_2} \partial_{[\mu} v_{\lambda]} df^{\mu\lambda} = \int_{\tau_1} v_{\lambda} df^{\lambda},} \quad (4.29)$$

$$2 \int_{\tau_2} \partial_{[\mu} v_{\lambda]} d\tilde{f}_{\kappa]} = \int_{\tau_1} v_{[\lambda} d\tilde{f}_{\kappa|\mu]}, \quad (4.30)$$

$$2 \int_{\tau_2} \partial_\mu \tilde{v}^{\lambda\mu} d\tilde{f}_\lambda = \int_{\tau_1} \tilde{v}^{\lambda\mu} d\tilde{f}_{\lambda\mu}, \quad (4.31)$$

$$\int_{\tau_2} \partial_\mu \tilde{v}^{[\lambda|\mu|} df^{\nu\kappa]} = \int_{\tau_2} \partial_\mu \tilde{v}^{[\lambda\nu} df^{|\mu| \kappa]} = \int_{\tau_1} \tilde{v}^{[\lambda\nu} d\tilde{f}^{\kappa]}. \quad (4.32)$$

(b) Интеграл от контравариантной бивектор-плотности веса  $-1$  по кривой с внутренней ориентацией

$$\int_{\tau_2} \partial_{[\mu} \hat{v}_{\lambda]}^* df^{\mu\lambda} = \int_{\tau_1} \hat{v}_{\lambda}^* df^{\lambda}, \quad (4.33)$$

$$2 \int_{\tau_2} \partial_{[\mu} \hat{v}_{\lambda]}^* d\hat{f}_{\kappa} = \int_{\tau_1} \hat{v}_{[\lambda}^* d\hat{f}_{\kappa\mu]}, \quad (4.34)$$

$$\boxed{2 \int_{\tau_2} \partial_{\mu} \hat{v}^{\lambda\mu} d\hat{f}_{\lambda} = \int_{\tau_1} \hat{v}^{\lambda\mu} d\hat{f}_{\lambda\mu}}, \quad (4.35)$$

$$\int_{\tau_2} \partial_{\mu} \hat{v}^{[\lambda\mu]} d\hat{f}^{*\kappa]} = \int_{\tau_2} \partial_{\mu} \hat{v}^{[\lambda\nu} d\hat{f}^{*\mu]} = \int_{\tau_1} \hat{v}^{[\lambda\nu} d\hat{f}^{*\kappa]}. \quad (4.36)$$

Наиболее важными являются формулы (4.21), (4.27), (4.29) и (4.35). Интегралы, входящие в (4.27), могут быть интерпретированы в терминах гидродинамики. Пусть  $v^{\alpha}$  есть скорость движения жидкости, а  $\mu$  — ее массовая плотность, т. е. масса параллелепипеда на базисных векторах. Тогда  $\hat{v}^{\alpha} = \mu v^{\alpha}$  есть векторная плотность потока, а  $\hat{v}^{\mu} d\hat{f}_{\mu}$  — общая масса, протекающая через элемент  $d\hat{f}_{\mu}$  в единицу времени в направлении ориентации  $d\hat{f}_{\mu}$ . Если эта ориентация направлена вне  $\tau_2$ , интеграл  $\int_{\tau_2} \hat{v}^{\mu} d\hat{f}_{\mu}$  представляет собой общую массу, вытекающую через  $\tau_2$  в единицу времени. Уравнение неразрывности<sup>1)</sup>

$$\partial_{\lambda} \hat{v}^{\lambda} + \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (4.37)$$

выражает тот факт, что дивергенция плотности потока равна уменьшению массовой плотности в единицу времени. Следовательно,

$$\int_{\tau_3} \partial_{\lambda} \hat{v}^{\lambda} d\hat{f} = - \int_{\tau_3} \frac{d\mu}{dt} d\hat{f} \quad (4.38)$$

есть общая убыль массы в  $\tau_3$  за единицу времени. Очевидно,

<sup>1)</sup> В  $X_3$  не существует единицы объема, и два инфинитизимальных объема в разных точках нельзя сравнивать. Следовательно, в  $X_3$  бессмысленно говорить о «несжимаемой» жидкости.

эта убыль должна равняться общей массе, протекающей через  $\tau_2$  за единицу времени, т. е.  $\int_{\tau_2} \widehat{v}^\mu d\widehat{f}_\mu$ .

Если  $\partial_\mu \widehat{v}^\mu = 0$ , то общая масса в каждом  $\tau_3$  постоянна. Пусть  $k$  — малая константа. Тогда все пространство можно разбить на трубки с непроницаемыми стенками, такие, что через сечение каждой трубки в единицу времени протекает масса  $k$ . Трубка в точке  $\xi^x$  приближенно представляет векторную плотность  $\widehat{v}^x/k$ , и это приближение стремится к точному представлению, если  $k \rightarrow 0$ . Следовательно, уравнение  $\partial_x \widehat{v}^x = 0$  выражает тот факт, что трубки  $\widehat{v}^x$  в «инфинитезимальном масштабе» заполняют все  $X_3$  без промежутков.

Докажем, что  $\omega_\lambda$  всегда является градиентом, если  $\text{Rot } \omega = 0$ . Для этого выберем в рассматриваемой области фиксированную точку  $\xi_0^x$  и переменную точку  $\xi^x$ . Если эти точки связаны двумя различными кривыми  $s$  и  $s'$ , то согласно теореме Стокса имеем

$$\int_{\xi_0^x}^{\xi^x} \omega_\lambda d\xi^\lambda + \int_{\xi^x}^{\xi_0^x} \omega_\lambda d\xi^\lambda = \int_{\tau_2} \partial_{[\mu} \omega_{\lambda]} df^{\mu\lambda} = 0, \quad (4.39)$$

если только поверхность  $\tau_2$ , ограниченная  $s$  и  $s'$ , лежит целиком в области, где  $\text{Rot } \omega = 0$ . Отсюда

$$p = \int_{\xi_0^x}^{\xi^x} \omega_\lambda d\xi^\lambda = \int_{\xi_0^x}^{\xi^x} \omega_\lambda d\xi^\lambda \quad (4.40)$$

есть функция  $\xi^x$ , не зависящая от выбора  $s$ , и

$$\omega_\lambda = \partial_\lambda p. \quad (4.41)$$

Отправляясь от этой теоремы, можно доказать по индукции следующую более общую теорему.

**Теорема.** Если вращение ковариантного  $q$ -вектора ( $W$ - $q$ -вектора) исчезает в некоторой области  $X_n$ , то всегда существует область, в которой  $q$ -вектор ( $W$ - $q$ -вектор) может быть представлен как вращение некоторого  $(q-1)$ -вектора ( $W$ - $(q-1)$ -вектора).

Эта теорема, конечно, может быть выражена также в терминах контравариантных  $p$ -вектор-плотностей ( $p$ -вектор- $\Delta$ -плотностей) веса  $+1$ . Тогда мы получаем:

*Теорема. Если дивергенция контравариантной  $p$ -вектор-плотности ( $p$ -вектор- $\Delta$ -плотности) веса  $+1$  исчезает в некоторой области  $X_n$ , то всегда существует область, в которой  $p$ -вектор-плотность ( $p$ -вектор- $\Delta$ -плотность) может быть представлена как дивергенция некоторой контравариантной  $(p+1)$ -вектор-плотности ( $(p+1)$ -вектор- $\Delta$ -плотности) веса  $+1$  ( $p < n$ ).*

Все интегралы, встречавшиеся до сих пор в этом параграфе, были скалярами или  $n$ -вектор- $\Delta$ -плотностями. Это связано с тем, что в  $X_n$  они являются единственными величинами, которые можно складывать, если они принадлежат различным точкам. Но если мы ограничим себя более специальными преобразованиями координат, то возникают и другие формы теоремы Стокса. Например, если допустимыми являются только координатные преобразования с  $\Delta > 0$ , то  $W$ -скаляры можно складывать, и кроме (4.1) мы имеем формулу

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} \tilde{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}^* df^{\mu\lambda_1 \dots \lambda_q} = \int_{\tau_q} \tilde{v}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}^* df^{\lambda_1 \dots \lambda_q}. \quad (4.42)$$

Если допустимыми являются лишь преобразования из  $G_n$ , т. е. мы находимся в  $E_n$ , то можно складывать все величины с одинаковым законом преобразования, принадлежащие различным точкам. Таким образом, в  $E_n$  справедливы следующие формулы:

$$\int_{\tau_{q+1}} df^{\mu\lambda_1 \dots \lambda_q} \partial_{[\mu} \circ \Omega = \int_{\tau_q} df^{\lambda_1 \dots \lambda_q} \circ \Omega, \quad (4.43)$$

$$p \int_{\tau_{q+1}} d\tilde{f}_{[\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}} \partial_{\lambda_p]} \circ \Omega = \int_{\tau_q} d\tilde{f}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \circ \Omega, \quad (4.44)$$

$$\int_{\tau_{q+1}} df^{*\mu\lambda_1 \dots \lambda_q} \partial_{[\mu} \circ \Omega = \int_{\tau_q} df^{*\lambda_1 \dots \lambda_q} \circ \Omega, \quad (4.45)$$

$$p \int_{\tau_{q+1}} d\tilde{f}_{[\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}} \partial_{\lambda_p]} \circ \Omega = \int_{\tau_q} d\tilde{f}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \circ \Omega. \quad (4.46)$$



Здесь  $\Omega$  — символ с опущенными индексами, заменяющий любую величину, а  $\circ$  обозначает любую операцию, составленную из симметрирования, альтернирования или свертки и выполняемую над индексами  $\lambda_1 \dots \lambda_q$  или  $\lambda_1 \dots \lambda_p$  и индексами  $\Omega$ .

Например, если

$$\hat{v}_\lambda = \partial_\mu \hat{P}^{\mu\lambda}, \quad (4.47)$$

то мы имеем в  $E_3$

$$\int_{\tau_3} \hat{v}_\lambda df = \int_{\tau_2} \hat{P}^{\mu\lambda} df_\mu, \quad (4.48)$$

но это уравнение несправедливо в  $X_3$ .

### Б. Инвариантные дифференциальные операторы. III. Производная Ли<sup>1)</sup>

Пусть область  $R$ , принадлежащая  $X_n$ , подвергается точечному преобразованию

$$\eta^\lambda \doteq f^\lambda(\xi^\lambda). \quad (5.1)$$

Относительно функций  $f^\lambda$  предполагается, что они аналитичны в  $R$  с неисчезающим функциональным определителем

$$\left| \frac{\partial f^\lambda}{\partial \xi^\lambda} \right| \neq 0 \quad (5.2)$$

и выбраны таким образом, что определяют взаимно однозначное соответствие между точками  $R$  и точками другой области  $R'$ . Введем теперь другую систему координат  $(\eta')$ , такую, что каждая точка в  $R$  имеет такие же координаты относительно  $(\eta)$ , какие ее образ в  $R'$  имеет относительно  $(\eta')$ .

Пусть  $\xi^\lambda$  и  $\xi^{\lambda'}$  будут соответственно координатами точки из  $R'$  относительно  $(\eta)$  и  $(\eta')$ . При этом  $\xi^{\lambda'}$  должны равняться координатам прообраза из  $R$  относительно  $(\eta)$ . Следовательно, если

$$\xi^\lambda \doteq \varphi^\lambda(\eta^\lambda) \quad (5.3)$$

<sup>1)</sup> Ср. Слєбодзинский 1931.2; Схоутен и Кампен 1931.1; Н. М. 1935.1; П. Ф. 1949.1; Яно 1955.1.

есть обращение (5.1), то  $\xi^{x'}$  должны равняться  $\varphi^x(\xi^\lambda)$ , и, таким образом, преобразования  $(x)$  в  $(x')$  и обратно задаются уравнениями

$$\xi^{x'} = \delta_{\lambda}^{x'} \varphi^\lambda(\xi^\lambda), \quad \xi^x = f^x(\xi^{\lambda'}). \quad (5.4)$$

Эту операцию мы называем *увлечением* (dragging along) *координатной системы*  $(x)$  *точечным преобразованием* (5.1).

Пусть теперь в  $R$  задано некоторое поле, например  $P_{1 \dots \mu}^{x\lambda}$ . Мы образуем второе поле в  $R'$ , компоненты которого  $P_{2 \dots \mu}^{x'\lambda'}$  относительно  $(x')$  в любой точке  $R'$  равны компонентам  $P_{1 \dots \mu}^{x\lambda}$  первого поля в соответствующей точке  $R$ . Этот процесс мы называем *увлечением поля*  $P_{1 \dots \mu}^{x\lambda}$  *точечным преобразованием* (5.1), а  $P_{2 \dots \mu}^{x'\lambda'}$  мы называем *увлеченным полем*. Если  $R$  и  $R'$  имеют некоторую общую область, то поля  $P_1$  и  $P_2$  можно сравнивать. Если при этом  $P_1 = P_2$ , то поле  $P_1$  называется *инвариантом точечного преобразования* (5.1).

Рассмотрим систему  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\eta^x}{dt} = \psi^x(\eta^y) \quad (5.5)$$

с независимыми переменными  $\xi^x$  и  $t$ , неизвестными переменными  $\eta^x$  и начальными условиями

$$\eta^x = \xi^x \quad \text{для} \quad t = 0. \quad (5.6)$$

Функции  $\psi^x$  предполагаются аналитическими в рассматриваемой области. Если решение этих уравнений разложить в степенной ряд по  $t$ , то мы получим

$$\begin{aligned} \eta^x &= \xi^x + \psi^x(\xi^y) t + \dots, \\ \xi^x &= \eta^x - \psi^x(\eta^y) t + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эти уравнения описывают точечное преобразование. Соответствующая ему увлеченная система координат  $(x')$  задается

уравнениями (ср. (5.4))

$$\begin{aligned}\xi^x &= \delta_x^x \xi^{x'} + \psi^x(\xi^x)t + \dots, \\ \xi^{x'} &= \delta_x^{x'} \xi^x - \delta_x^{x'} \psi^x(\xi^x)t + \dots\end{aligned}\quad (5.8)$$

Полагая  $v^x \stackrel{\text{def}}{=} \psi^x(\xi^x)$ , находим с помощью дифференцирования

$$\begin{aligned}A_{x'}^x &\stackrel{*}{=} \delta_{\lambda'}^x (A_{\lambda}^x + t \partial_{\lambda} v^x + \dots), \\ A_{\lambda}^{x'} &\stackrel{*}{=} \delta_{\lambda}^{x'} (A_{\lambda}^x - t \partial_{\lambda} v^x + \dots).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Если мы теперь пренебрежем высшими степенями  $t$  и соответственно запишем  $dt$  вместо  $t$ , мы получим так называемое *«инфинитезимальное точечное преобразование  $v^x dt$ »*. Относительно однопараметрической группы преобразований (5.7) говорят, что она *порождена инфинитезимальным преобразованием  $v^x dt$* . Все точки  $X_n$  подвергаются *смещению  $v^x dt$* . Если координатная система или поле увлекаются *инфинитезимальным преобразованием  $v^x dt$* , мы называем этот процесс *увлечением по  $v^x dt$* . Увлеченная система ( $x'$ ) задается уравнениями

$$\begin{aligned}\xi^x &\stackrel{*}{=} \delta_x^x \xi^{x'} + v^x dt, \\ \xi^{x'} &\stackrel{*}{=} \delta_x^{x'} \xi^x - \delta_x^{x'} v^x dt.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Так как  $v^x$  задано, нас могут теперь интересовать компоненты относительно ( $x$ ) некоторого поля, например  $P_{\lambda}^x$ , увлеченного по  $v^x dt$ . Компоненты поля, увлеченного в  $\xi^x + v^x dt$ , относительно ( $x'$ ) равны компонентам  $P_{\lambda}^{x'}$  в  $\xi^{x'}$ . Отсюда компоненты этого поля в  $\xi^x + v^x dt$  относительно ( $x$ ) равны

$$\begin{aligned}A_{\lambda \sigma}^{\rho x} \delta_{\rho}^{\sigma} \delta_{\sigma}^{\rho} P_{\rho}^{\sigma} &\stackrel{*}{=} (A_{\lambda}^{\rho} - \partial_{\lambda} v^{\rho} dt) (A_{\sigma}^x + \partial_{\sigma} v^x dt) P_{\rho}^{\sigma} \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} P_{\lambda}^x - P_{\rho}^x \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P_{\lambda}^{\sigma} \partial_{\sigma} v^x dt.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Чтобы теперь получить компоненты поля, увлеченного в  $\xi^x$  относительно ( $x$ ), мы должны вычесть  $v^{\mu} \partial_{\mu} P_{\lambda}^x dt$ . Следовательно, эти компоненты равны

$$P_{\lambda}^x - v^{\mu} \partial_{\mu} P_{\lambda}^x dt - P_{\rho}^x \partial_{\lambda} v^{\rho} dt + P_{\lambda}^{\sigma} \partial_{\sigma} v^x dt. \quad (5.12)$$

Выражение

$$(v^\mu \partial_\mu P^\lambda_\lambda + P^\lambda_{\cdot\rho} \partial_\lambda v^\rho - P^\sigma_\lambda \partial_\sigma v^\lambda) dt \quad (5.13)$$

называется *дифференциалом Ли*  $P^\lambda_\lambda$  *относительно*  $v^\lambda dt$ . Отсюда, *если поле увлекается по*  $v^\lambda dt$ , *то приращение поля в фиксированной точке*  $\xi^\lambda$  *равно дифференциалу Ли в*  $\xi^\lambda$ , *взятому с обратным знаком.*

Выражение <sup>1)</sup>

$$D_L P^\lambda_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} v^\mu \partial_\mu P^\lambda_\lambda + P^\lambda_{\cdot\rho} \partial_\lambda v^\rho - P^\sigma_\lambda \partial_\sigma v^\lambda \quad (5.14)$$

называется *производной Ли*  $P^\lambda_\lambda$  *относительно*  $v^\lambda$ . Из ее определения ясно, что это тензор с той же валентностью, что и  $P^\lambda_\lambda$ . Это можно проверить непосредственным подсчетом закона преобразования. Для тензорного поля высшей валентности производная Ли строится аналогичным образом. Каждый верхний (нижний) индекс порождает член с отрицательным (положительным) знаком.

Очевидно, имеют место следующие правила:

(1) производная Ли суммы есть сумма производных Ли слагаемых;

(2) производная Ли свернутого объекта есть свертка производной Ли;

(3) справедливо правило Лейбница для производной Ли произведения и произведения со сверткой.

Производная Ли от  $v^\lambda$  относительно  $v^\lambda$  равна нулю. Производная Ли от  $A^\lambda_\lambda$  равна нулю для любого  $v^\lambda$ .

Имеем для скалярного поля

$$D_L s = v^\mu \partial_\mu s, \quad (5.15)$$

для векторного поля:

$$\begin{aligned} (a) \quad D_L u^\lambda &= v^\mu \partial_\mu u^\lambda - u^\mu \partial_\mu v^\lambda, \\ (b) \quad D_L \omega_\lambda &= v^\mu \partial_\mu \omega_\lambda + \omega_\mu \partial_\lambda v^\mu \end{aligned} \quad (5.16)$$

и для поля  $p$ -вектора:

$$\begin{aligned} (a) \quad D_L u^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= v^\mu \partial_\mu u^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - p u^{\mu [\lambda_2 \dots \lambda_p} \partial_\mu v^{\lambda_1]}, \\ (b) \quad D_L \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= v^\mu \partial_\mu \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p} + p \omega_{\mu [\lambda_2 \dots \lambda_p} \partial_{\lambda_1]} v^\mu. \end{aligned} \quad (5.17)$$

<sup>1)</sup> Ср. V, § 1, где производная Ли записана с ковариантным оператором  $\nabla_\mu$ .

Чтобы получить производную Ли скалярной плотности или  $\Delta$ -плотности веса  $t$ , мы используем (5.17b) для  $p = n$ :

$$\begin{aligned} D_L \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} &= v^\mu \partial_\mu \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + n \omega_{\mu [\lambda_2 \dots \lambda_n} \partial_{\lambda_1]} v^\mu = \\ &= v^\mu \partial_\mu \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \partial_\mu v^\mu = \partial_\mu v^\mu \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Но  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  можно рассматривать как компоненту скалярной  $\Delta$ -плотности веса  $+1$ . Следовательно, для скалярной  $\Delta$ -плотности веса  $+1$  мы имеем

$$D_L \tilde{q} = \partial_\mu \tilde{q} v^\mu = \text{Div}(\tilde{q} v). \quad (5.19)$$

Так как каждая скалярная плотность  $\hat{q}$  веса  $+1$  есть произведение  $\hat{\omega}$  (ср. III, § 3) на скалярную  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ , то

$$D_L \hat{q} = \partial_\mu \hat{q} v^\mu = \text{Div}(\hat{q} v). \quad (5.20)$$

Отсюда мы получаем для скалярной плотности  $\hat{s}$  веса  $t$

$$D_L \hat{s} = v^\mu \partial_\mu \hat{s} + t \hat{s} \partial_\mu v^\mu \quad (5.21)$$

и для тензорной плотности веса  $t$ , например  $\hat{P}^{\times\lambda}_{\dots\nu}$ ,

$$\begin{aligned} D_L \hat{P}^{\times\lambda}_{\dots\nu} &= v^\mu \partial_\mu \hat{P}^{\times\lambda}_{\dots\nu} + P^{\times\lambda}_{\dots\rho} \partial_\nu v^\rho - \\ &- \hat{P}^{\sigma\lambda}_{\dots\nu} \partial_\sigma v^\times - \hat{P}^{\times\sigma}_{\dots\nu} \partial_\sigma v^\lambda + t \hat{P}^{\times\lambda}_{\dots\nu} \partial_\mu v^\mu. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Аналогичные формулы справедливы для тензорных  $\Delta$ -плотностей. Можно легко проверить, что производная Ли от  $\hat{E}^{\times_1 \dots \times_n}$  и  $\hat{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  равны нулю.

Если производная Ли относительно  $v^\times$  некоторого поля исчезает во всех точках, то говорят, что это поле *абсолютно инвариантно относительно поля  $v^\times$* . Абсолютно инвариантное поле имеет следующие свойства:

(1) значение поля в любой фиксированной точке не изменяется, если поле увлекается любым точечным преобразованием из однопараметрической группы, порожденной  $v^\times dt$ ;

(2) компоненты поля в любой точке  $\xi^\times$  относительно  $(x)$  равны компонентам в точке  $\xi^\times + v^\times dt$  относительно координатной системы  $(x')$ , которая возникает из  $(x)$  увлечением по  $v^\times dt$ .

Очевидно, суммы, произведения и свертки абсолютно инвариантных полей являются абсолютными инвариантами.

Инвариантность поля относительно  $v^x$ , вообще говоря, не сохраняется, если  $v^x$  заменить на  $\sigma v^x$ . Это означает, что поле является инвариантом не для всех точечных преобразований, оставляющих линии тока поля  $v^x$  инвариантными, а только для тех, которые порождены  $v^x dt$ . Если производная Ли поля исчезает для *всех* значений  $\sigma$ , то поле называется *абсолютно инвариантным относительно линий тока  $v^x$* . Из (5.17, b) следует, что для ковариантного  $p$ -вектора  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  дополнительным условием этой инвариантности является

$$v^\mu \omega_{\mu \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0. \quad (5.23)$$

Это же справедливо для ковариантного  $W$ - $p$ -вектора. Аналогичным образом мы получаем дополнительное условие для  $p$ -вектор-плотности (или  $p$ -вектор- $\Delta$ -плотности) веса  $+1$ :

$$\widehat{\omega}^{[x_1 \dots x_p] v^{x_1}} = 0. \quad (5.24)$$

Отсюда мы видим, что скаляр или  $n$ -вектор-плотность веса  $+1$ , которые абсолютно инвариантны относительно  $v^x$ , всегда абсолютно инвариантны относительно линий тока  $v^x$ , и что ковариантный  $n$ -вектор, или скалярная плотность веса  $+1$ , никогда не могут иметь этой более сильной инвариантности<sup>1)</sup>.

## 6. Инвариантные дифференциальные операторы. IV. Производные Лагранжа

Пусть  $\Phi_\Lambda$  ( $\Lambda = 1, \dots, N$ ) есть множество функций координат  $\xi^x$ .  $\Phi_\Lambda$  могут быть скалярами или компонентами метрического объекта, например тензора  $P_{x\lambda}$ , или могут быть выбраны совершенно произвольно. Сначала мы не будем рассматривать закон преобразования  $\Phi_\Lambda$ , и поэтому  $\xi^x$  не будут преобразовываться. Опустим индекс  $\Lambda$  и обозначим через  $\Phi_\mu$ ,  $\Phi_{\mu\nu}$  и т. д. производные  $\Phi$  относительно  $\xi^x$ .

<sup>1)</sup> Ср. более подробное рассмотрение абсолютно и относительно инвариантных полей П. Ф. 1949. 1, р. 73.

Пусть  $\mathcal{L}$  есть функция  $\Phi$ ,  $\Phi_\mu$  и т. д. до некоторого конечного порядка. Тогда  $\mathcal{L}$  в некоторой области  $X_n$  является функцией  $\xi^x$ , но мы ничего не знаем относительно ее закона преобразования. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n \quad (6.1)$$

по некоторой произвольной области  $\tau_n$  из  $X_n$ , в которой  $\Phi$  аналитичны по  $\xi^x$ .

Обозначим через  $\overset{v}{d}\Phi$  вариацию поля  $\Phi$  и будем предполагать, что вариации всех  $\Phi$  и их производных, входящих в  $\mathcal{L}$ , исчезают на границе  $\tau_{n-1}$  области  $\tau$ . Тогда для вариации  $\mathcal{L}$  имеем

$$\overset{v}{d}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \overset{v}{d}\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \overset{v}{d}\Phi_\mu + \dots, \quad (6.2)$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} \overset{v}{d} \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n &= \\ &= \int_{\tau_n} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \overset{v}{d}\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \overset{v}{d}\Phi_\mu + \dots \right) d\xi^1 \dots d\xi^n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Интегрируя по частям и используя теорему Стокса (4.16) для  $p=1$ , получаем

$$\begin{aligned} \overset{v}{d} \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n &= \\ &= \int_{\tau_n} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \overset{v}{d}\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \partial_\mu \overset{v}{d}\Phi + \dots \right) d\xi^1 \dots d\xi^n = \\ &= \int_{\tau_n} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \dots \right) \overset{v}{d}\Phi d\xi^1 \dots d\xi^n. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Если ввести обозначение

$$[\mathcal{L}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \dots, \quad (6.5)$$

то (6.4) запишется в виде

$$\int_{\tau_n}^v \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = \int_{\tau_n}^v [\mathcal{L}] d\Phi d\xi^1 \dots d\xi^n. \quad (6.6)$$

Однако здесь имеется трудность. В (4.16)  $\hat{v}^x$  является векторной плотностью веса  $+1$ . Но мы ничего не знаем, например, о законе преобразования  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} d\Phi$ . Эта трудность снимается, если мы заметим, что (4.16) справедливо для любой координатной системы и, следовательно, для используемой здесь координатной системы  $(x)$ , причем мы договорились, что координаты не преобразуются. Таким образом, закон преобразования  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} d\Phi$  не имеет значения.

$[\mathcal{L}]$  называется *производной Лагранжа от  $\mathcal{L}$* . Если  $[\mathcal{L}] = 0$ , вариация (6.3) исчезает при любом выборе  $\tau_n$ , если только вариация  $\Phi$  удовлетворяет граничным условиям.

Уравнение  $[\mathcal{L}] = 0$  называется *уравнением Лагранжа*. Уравнения такого вида встречаются в классической динамике. В этом случае  $\xi^x$  сводятся к *одному* переменному  $t$  и эта переменная *не преобразуется*.

Предположим теперь, что  $\Phi$  есть тензор, например  $P_{\lambda\kappa}$ , и что  $\mathcal{L}$  есть скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ , зависящая от  $P_{\lambda\kappa}$ ,  $\partial_\mu P_{\lambda\kappa}$ , ... Тогда (6.1) есть скаляр, и построение лагранжевой производной инвариантно относительно всех координатных преобразований. Уравнение  $[\mathcal{L}] = 0$  теперь также инвариантно. Если  $\Phi$  имеет валентности  $p, q$ , то  $[\mathcal{L}]$  есть тензорная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$  с валентностями  $q, p$ . Если мы рассматриваем только координатные преобразования с  $\Delta > 0$ , то для  $\mathcal{L}$  может быть взята скалярная плотность веса  $+1$ , и  $[\mathcal{L}]$  есть тогда тензорная плотность веса  $+1$  с валентностями  $q, p$ .

Если  $\Phi$  — тензор и  $\mathcal{L}$  — скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ , то существует очень важное соотношение между  $\Phi$ ,  $[\mathcal{L}]$  и их первыми производными. Чтобы получить это соотноше-

ние, мы предположим, что вариация  $d\Phi$  порождается увлечением поля по  $v^x dt$ , где  $v^x$  — произвольное поле, такое, что  $v^x$ ,  $\partial_\mu v^x$ ,  $\partial_\mu \partial_\lambda v^x$ , ... равны нулю на  $\tau_{n-1}$ . Мы избежим



сложных формул, положив  $\Phi = P_{\lambda\kappa}$ . Нет никаких принципиальных трудностей для более высокой валентности. Итак, имеем (ср. (5.12))

$${}^v dP_{\lambda\kappa} = -v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu dt, \quad (6.7)$$

и увлеченное поле есть

$${}^v P_{\lambda\kappa} = P_{\lambda\kappa} - v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu dt. \quad (6.8)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \partial_v {}^v P_{\lambda\kappa} &= \partial_v P_{\lambda\kappa} - (\partial_v v^\mu) \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - v^\mu \partial_v \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - \\ &\quad - (\partial_v P_{\mu\kappa}) \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\mu\kappa} \partial_v \partial_\lambda v^\mu dt - \\ &\quad - (\partial_v P_{\lambda\mu}) \partial_\kappa v^\mu dt - P_{\lambda\mu} \partial_v \partial_\kappa v^\mu dt. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Отсюда мы видим, что  ${}^v dP_{\lambda\kappa}$  и  ${}^v \partial_v P_{\lambda\kappa}$  равны нулю на  $\tau_{n-1}$ . То же имеет место для высших производных  $P_{\lambda\kappa}$ , если только достаточно высокие производные  $v^\alpha$  исчезают на  $\tau_{n-1}$ .

Если подставить теперь (6.7) в (6.4), то, используя (6.5) и теорему Стокса, мы получаем

$$\begin{aligned} &{}^v \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = \\ &= - \int_{\tau_n} [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} (v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} + P_{\mu\kappa} \partial_\lambda v^\mu + P_{\lambda\mu} \partial_\kappa v^\mu) dt d\xi^1 \dots d\xi^n = \\ &= - \int_{\tau_n} \{ [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} (\partial_\mu P_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - \\ &\quad - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} \} v^\mu dt d\xi^1 \dots d\xi^n. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Но эта вариация должна равняться нулю, так как поле, увлеченное по  $v^\alpha dt$ , имеет в точности те же компоненты относительно  $(\kappa')$ , что и первоначальное поле относительно  $(\kappa)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} &[\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} (\partial_\mu P_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - \\ &\quad - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} = 0^1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

<sup>1)</sup> Ср. V, § 1, где это тождество записано с ковариантным оператором  $\nabla_\mu$ .

Как мы увидим позднее, это тождество имеет особое значение в теории относительности.

Если рассматривать только такие преобразования координат, для которых  $\Delta > 0$ , то  $\mathcal{L}$  можно трактовать как скалярную плотность веса  $+1$ . Тогда  $[\mathcal{L}]$  есть тензорная плотность.

## 7. Неголономные системы координат в $X_n$ <sup>1)</sup>

Отправляясь от любой допустимой системы координат, мы всегда получаем ковариантные базисные векторы  $e_\lambda^x$  с нулевым вращением. Однако часто бывает удобно вводить такие системы базисных векторов в каждом локальном  $E_n$ , которые не связаны с какой-либо допустимой системой координат, но которые имеют некоторые другие желательные свойства.

Если мы введем  $n$  произвольных контравариантных векторных полей  $e^x$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и взаимную систему (ср. II,

§ 2)  $e_\lambda^h$  ( $h = 1, \dots, n$ ):

$$e_\mu^h e_i^h = \delta_i^h, \quad e_\lambda^h e_h^x = A_\lambda^x \quad (h, i = 1, \dots, n), \quad (7.1)$$

то, вообще говоря,  $e_\lambda^h$  не являются градиентными векторами.

Мы называем такую систему базисных векторов *неголономной системой координат* в  $X_n$ , а компоненты некоторого объекта относительно этой системы *неголономными компонентами*. Если

$$A_\lambda^h \stackrel{\text{def}}{=} e_i^h e_\lambda^i, \quad A_i^x \stackrel{\text{def}}{=} e_h^x e_i^h \quad (h, i = 1, \dots, n), \quad (7.2)$$

то для неголономных компонент, например,  $P^{\lambda\mu}$ , мы имеем

$$P^{hi}{}_{..j} = A_{x\lambda j}^{hi\mu} P^{x\lambda}{}_{.. \mu} \quad (h, i, j = 1, \dots, n), \quad (7.3)$$

а для неголономных компонент  $d\xi^x$

$$(d\xi^x)^h = A_x^h d\xi^x \quad (h = 1, \dots, n). \quad (7.4)$$

<sup>1)</sup> Для литературных ссылок см. Н. М. 1935. 1, р. 94.

Мы не должны писать  $d\xi^h$ , так как, вообще говоря,  $A_\lambda^h d\xi^\lambda$  не является полным дифференциалом и, следовательно, не существует никаких переменных  $\xi^h$ .

При использовании неголономных координат мы должны ввести вместо  $\partial_\mu$  оператор

$$\partial_j \stackrel{\text{def}}{=} A_j^\mu \partial_\mu \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.5)$$

Тогда градиент скаляра  $p$  в неголономных компонентах можно записать в виде

$$\omega_i = \partial_i p \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7.6)$$

Но вращения вектора  $\omega_\lambda$  и  $2\partial_{[j}\omega_{i]}$  связаны более сложным образом

$$\begin{aligned} \partial_{[j}\omega_{i]} &= A_{[j}^\mu \partial_{|\mu|} A_{i]}^\lambda \omega_\lambda = A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{|\mu|} \omega_{\lambda]} + \\ &\quad + (A_{[j}^\mu \partial_{|\mu|} A_{i]}^\lambda) \omega_\lambda = A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{|\mu|} \omega_{\lambda]} - \Omega_{ji}^h \omega_h \end{aligned} \quad (7.7)$$

где

$$\Omega_{ji}^h \stackrel{\text{def}}{=} A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{|\mu|} A_\lambda^h \quad (h, i, j = 1, \dots, n). \quad (7.8)$$

Мы называем  $\Omega_{ji}^h$  объектом неголономности системы  $(h)$ . Компоненты  $\Omega_{ji}^h$  исчезают тогда и только тогда, когда все векторы  $e_\lambda$  являются градиентными векторами, т. е. система  $(h)$  голономная.

Аналогичным образом мы можем доказать, что для контравариантной векторной плотности веса  $-1$

$$\begin{aligned} \partial_j \hat{v}^j &= \Delta^{-1} \partial_\mu \hat{v}^\mu - 2\Omega_{ji}^i \hat{v}^j, \quad \Delta = \text{Det}(A_\lambda^h) \\ &\quad (i, j = 1, \dots, n)^1). \end{aligned} \quad (7.9)$$

## УПРАЖНЕНИЯ

IV. 1. Доказать, что в  $R_n$  в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega_{i_1 \dots i_p} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^j \partial_j \omega_{i_1 \dots i_p} &= \partial_{(p+1)}^j \partial_{[j} \omega_{i_1 \dots i_p]} + \\ + p \partial_{[i_1} \partial^j \omega_{|j| i_2 \dots i_p]} &\quad (i_1, \dots, i_p, j = 1, \dots, n; p \geq 1) \end{aligned} \quad (1a)$$

<sup>1)</sup> Очень простое доказательство (7.7) и (7.9) будет дано в V, § 7

или в сокращенной записи

$$\nabla^2 w = \text{Div Rot } w + \text{Rot Div } w; \quad p > 1. \quad (1\beta)$$

IV. 2. Если в  $X_n$  задано в параметрической форме некоторое  $X_m$

$$\xi^\alpha = f^\alpha(\eta^a) \quad (a = 1, \dots, m) \quad (2a)$$

с условием, что ранг связывающей величины

$$B_b^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial_b \xi^\alpha; \quad \partial_b = \partial/\partial \eta^b \quad (2\beta)$$

в рассматриваемой области равен  $m$ , и если в  $X_n$  задано векторное поле  $w_\lambda$ , то векторное поле в  $X_m$ , определяемое уравнением

$${}'w_b = B_b^\lambda w_\lambda, \quad (2\gamma)$$

называется пересечением поля  $w_\lambda$  с  $X_m$ . Доказать, что вращение поля  $w_b$  в  $X_m$  равно пересечению

$$2B_c^\mu B_b^\lambda \partial_{[\mu} w_{\lambda]} \quad (2\delta)$$

вращения  $w_\lambda$  с  $X_m$  <sup>1)</sup>.

IV. 3. Доказать, что

$$DD_L w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = D_L D w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}. \quad (3a)$$

IV. 4. Доказать, что если обозначить  $w_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ ,  $q \geq 1$  через  $w$ , а умножение вектора  $v^\alpha$  со сверткой по первому индексу выразить с помощью оператора  $T$ , то

$$TDw + DTw = D_L w^2. \quad (4a)$$

IV. 5. Доказать тождество (6.11) для  $P_{\lambda\kappa} = g_{\lambda\kappa}$ ;  $\mathcal{L} = g^{\frac{1}{2}}$ ;  $\Delta > 0$ . (Ср. V, § 5.)

IV. 6. Если компоненты тензорного поля, например  $P_{\cdot\cdot\mu}^{\alpha\lambda}$ , выражены как функции  $\xi^\alpha$  и компонент другого тензорного поля, например  $Q_{\nu\sigma}^{\rho}$ ,

$$P_{\cdot\cdot\mu}^{\alpha\lambda} = f_{\cdot\cdot\mu}^{\alpha\lambda}(\xi^\tau, Q_{\nu\sigma}^{\rho}), \quad (6a)$$

то мы имеем

$$dP_{\cdot\cdot\mu}^{\alpha\lambda} = (\partial_\omega P_{\cdot\cdot\mu}^{\alpha\lambda}) d\xi^\omega + \frac{\partial P_{\cdot\cdot\mu}^{\alpha\lambda}}{\partial Q_{\nu\sigma}^{\rho}} dQ_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (6\beta)$$

<sup>1)</sup> Ср. Н. М. 1935. 1; П. Ф. 1949. 1.

<sup>2)</sup> Ср. П. Ф. 1949. 1, p. 77.

где  $d_{\omega}$  обозначает частную производную относительно  $\xi^{\omega}$  ( $\omega = 1, \dots, n$ ) при постоянных  $Q_{\nu, \sigma}^{\rho}$ . Доказать, что

$$R_{\cdot \cdot \mu \cdot \rho}^{\times \lambda \cdot \nu \cdot \sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P^{\times \lambda}}{\partial Q_{\nu, \sigma}^{\rho}} \quad (6\gamma)$$

есть тензор.

IV. 7. Если  $\Phi_{\Lambda}$  есть тензор  $Q^{\times \lambda}$ , а  $\mathcal{L}$  — скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ , то тождество, указанное в IV, § 6, принимает вид

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}]_{\times \lambda} \partial_{\mu} Q^{\times \lambda} + [\mathcal{L}]_{\mu \lambda} \partial_{\times} Q^{\times \lambda} + [\mathcal{L}]_{\times \mu} \partial_{\lambda} Q^{\times \lambda} + \\ + Q^{\times \lambda} \partial_{\times} [\mathcal{L}]_{\mu \lambda} + Q^{\times \lambda} \partial_{\lambda} [\mathcal{L}]_{\times \mu} = 0. \end{aligned}$$

## V. ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ С ЗАДАННЫМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПЕРЕНЕСЕНИЕМ<sup>1)</sup>

### 1. Параллельное перенесение

Локальные  $E_n$  в различных точках  $X_n$  являются полностью независимыми. Поэтому величины в соседних локальных  $E_n$  до сих пор не находились в какой-либо связи. Однако возможно определить операцию переноса величин из локального  $E_n$  точки  $\xi^x$  в локальное  $E_n$  точки  $\xi^x + d\xi^x$ . Эта операция, определенная для всех точек рассматриваемой области и для всех направлений в этих точках, называется *параллельным перенесением*. Величина и перенесенная величина называются *(псевдо)параллельными*. В  $E_n$  перенесение задано *a priori* и является обычным параллельным перенесением. Но в  $X_n$  не существует никакого параллелизма в обычном смысле.

Если задано ковариантное векторное поле  $v^x$ , то значение поля в  $\xi^x + d\xi^x$  есть  $v^x + dv^x = v^x + d\xi^\mu \partial_\mu v^x$ . Обозначим через  $v^x + d^*v^x$  вектор, перенесенный в  $\xi^x + d\xi^x$ . Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} v^{x'} + d^*v^{x'} &= (A_{x'}^{x'} + dA_{x'}^{x'}) (v^x + d^*v^x) = \\ &= A_{x'}^{x'} v^x + A_{x'}^{x'} d^*v^x + v^x dA_{x'}^{x'}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Отсюда

$$d^*v^{x'} = A_{x'}^{x'} d^*v^x + v^x dA_{x'}^{x'}. \quad (1.2)$$

Но мы знаем, что

$$dv^{x'} = d(A_{x'}^{x'} v^x) = A_{x'}^{x'} dv^x + v^x dA_{x'}^{x'}, \quad (1.3)$$

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Леви-Чивита 1917.2; Схоутен 1918.1; Р. К. 1924.1; 1954.1; Эйзенхарт 1926.1, 1927.3; Леви-Чивита 1927.2; Н. М. 1935.1; Рашевский 1953.1.

и, следовательно,

$$dv^{x'} - \overset{*}{d}v^{x'} = A_{x'}^{x'} (dv^x - \overset{*}{d}v^x). \quad (1.4)$$

Отсюда мы видим, что, хотя ни  $dv^x$ , ни  $\overset{*}{d}v^x$  не преобразуются, как вектор, их разность

$$\delta v^x \stackrel{\text{def}}{=} dv^x - \overset{*}{d}v^x \quad (1.5)$$

есть вектор. Мы называем  $\delta v^x$  *ковариантным дифференциалом поля  $v^x$  относительно заданного перенесения*.

Если координатная система в том локальном  $E_n$  точки  $\xi^x$ , которое принадлежит  $(x)$ , переносится параллельно в  $\xi^x + d\xi^x$ , то  $\delta v^x$  является дифференциалом  $v^x$  относительно этой перенесенной системы координат. Это можно выразить иначе:  $\delta v^x$  *есть дифференциал поля с точки зрения наблюдателя, чья локальная система отсчета подвергается перенесению*.

Теперь можно было бы определить независимо друг от друга перенесения для различных типов величин, но это не было бы разумным. Поэтому, чтобы связать перенесения различных величин, мы введем некоторую систему аксиом. Перенесения, удовлетворяющие этим аксиомам, мы будем называть *линейными (аффинными) перенесениями*:

(1) если  $\Phi$  есть величина (индексы опущены), то  $\delta\Phi$  есть величина того же типа;

$$(2) \delta(\Phi + \Psi) = \delta\Phi + \delta\Psi;$$

$$(3) \delta(\Phi\Psi) = (\delta\Phi)\Psi + \Phi\delta\Psi \text{ (правило Лейбница);}$$

$$(4) \delta\Phi \text{ линейно и однородно относительно } d\xi^x;$$

$$(5) \text{ правило Лейбница справедливо для свертки;}$$

(6) ковариантный дифференциал скаляра совпадает с обычным дифференциалом.

$X_n$  с линейным перенесением общего вида обозначается через  $L_n^1$ ).

Из (1), (2) и (4) следует, что ковариантный дифференциал контравариантного вектора имеет вид

$$\delta v^x = dv^x + \Gamma_{\mu\lambda}^x v^\lambda d\xi^\mu = (\partial_\mu v^x + \Gamma_{\mu\lambda}^x v^\lambda) d\xi^\mu. \quad (1.6)$$

---

<sup>1)</sup>  $L_n$  называется *пространством аффинной связности*. — Прим. перев.

где  $n^3$  параметров  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  — произвольные функции  $\xi^{\kappa}$  <sup>1)</sup>. Если  $\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}$  — параметры относительно  $(\kappa')$ , то

$$\delta v^{\kappa'} = dv^{\kappa'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} v^{\lambda'} d\xi^{\mu'}. \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает, что

$$A_{\kappa'}^{\lambda'} dv^{\kappa} + A_{\lambda'}^{\mu'} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} v^{\lambda} d\xi^{\mu} = A_{\kappa'}^{\lambda'} dv^{\kappa} + v^{\kappa} dA_{\kappa'}^{\lambda'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} v^{\lambda'} d\xi^{\mu'} \quad (1.8)$$

для любого выбора  $v^{\kappa}$  и  $d\xi^{\kappa}$ . Следовательно,

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = A_{\lambda'}^{\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{\mu'\lambda'}^{\mu\lambda} \partial_{\mu} A_{\lambda'}^{\kappa'} = A_{\lambda'}^{\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + A_{\lambda'}^{\kappa'} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\lambda}, \quad (1.9)$$

и отсюда мы видим, что  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  образуют геометрический объект, который не является геометрической величиной, так как в формулу преобразования входят производные от  $A_{\lambda'}^{\kappa'}$ .

Если  $w_{\lambda}$  — ковариантный вектор, то согласно (5) и (6) мы имеем

$$\begin{aligned} d(v^{\lambda} w_{\lambda}) &= \delta(v^{\lambda} w_{\lambda}) = w_{\lambda} \delta v^{\lambda} + v^{\lambda} \delta w_{\lambda} = \\ &= w_{\lambda} dv^{\lambda} + w_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} v^{\nu} d\xi^{\mu} + v^{\lambda} \delta w_{\lambda} \end{aligned} \quad (1.10)$$

для любого выбора  $v^{\lambda}$ . Отсюда

$$\delta w_{\lambda} = dw_{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} w_{\kappa} d\xi^{\mu}. \quad (1.11)$$

Из (1.6), (1.11) и (2.3) имеем для тензора, например  $P_{\dots\nu}^{\dots\lambda}$ ,

$$\delta P_{\dots\nu}^{\dots\lambda} = dP_{\dots\nu}^{\dots\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} P_{\dots\nu}^{\dots\rho} d\xi^{\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} P_{\dots\rho}^{\dots\lambda} d\xi^{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} P_{\dots\sigma}^{\dots\lambda} d\xi^{\mu}. \quad (1.12)$$

Каждому верхнему (нижнему) индексу соответствует член с положительным (отрицательным) знаком.

Если положить  $\Gamma_{\mu}^{\text{def}} \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}$ , то согласно (1.9) и (1.15) получаем

$$\Gamma_{\mu'} = A_{\mu'}^{\mu} \Gamma_{\mu} - A_{\kappa'}^{\lambda} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\kappa'} = A_{\mu'}^{\mu} \Gamma_{\mu} - \partial_{\mu'} \ln \Delta \quad (1.13)$$

<sup>1)</sup>  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  называются *коэффициентами аффинной связности*. — *Прим. перев.*



Следовательно,  $\Gamma_\mu$  является геометрическим объектом, но не геометрической величиной.  $\Gamma_\mu$  играет важную роль при ковариантном дифференцировании плотностей. Если  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  — ковариантный  $n$ -вектор, то его ковариантный дифференциал равен

$$\begin{aligned} \delta \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} &= d\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - \Gamma_{\mu\lambda_1}^\nu \omega_{\nu\lambda_2 \dots \lambda_n} d\xi^\mu - \dots \\ &\dots - \Gamma_{\mu\lambda_n}^\nu \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}\nu} d\xi^\mu = \\ &= d\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - n\Gamma_{\mu[\lambda_1}^\nu \omega_{\lambda_2 \dots \lambda_{n-1}]\nu} d\xi^\mu, \quad (1.14) \end{aligned}$$

а это значит, что

$$d^* \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - n\Gamma_{\mu[\lambda_1}^\nu \omega_{\lambda_2 \dots \lambda_{n-1}]\nu} d\xi^\mu = \Gamma_\mu \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n} d\xi^\mu. \quad (1.15)$$

Но  $\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  можно рассматривать как компоненту  $\tilde{q}$  скалярной  $\Delta$ -плотности веса  $+1$ . Отсюда

$$\delta \tilde{q} = d\tilde{q} - \Gamma_\mu \tilde{q} d\xi^\mu. \quad (1.16)$$

Если допустимыми являются лишь преобразования с  $\Delta > 0$ , то  $\Delta$ -плотности и обычные плотности преобразуются одинаково. Так как перенесение не зависит от выбора координатной системы, мы имеем для обычной плотности

$$\delta \hat{q} = d\hat{q} - \Gamma_\mu \hat{q} d\xi^\mu. \quad (1.17)$$

Отсюда находим для ковариантного дифференциала тензорной плотности веса  $t$ , например  $\hat{P}^\times_{\lambda}$ ,

$$\delta \hat{P}^\times_{\lambda} = d\hat{P}^\times_{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \hat{P}^\nu_{\lambda} d\xi^\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \hat{P}^\times_{\nu} d\xi^\mu - t\hat{P}^\times_{\lambda} \Gamma_\mu d\xi^\mu. \quad (1.18)$$

При наличии других индексов каждому верхнему (нижнему) индексу соответствует член с положительным (отрицательным) знаком и, кроме того, имеется дополнительный член, содержащий  $t$  и  $\Gamma_\mu$ .

Аналогичная формула справедлива для тензорных  $\Delta$ -плотностей, и, следовательно, ковариантный дифференциал  $W$ -скаляра совпадает с обычным дифференциалом.

Каждый ковариантный дифференциал есть свертка  $d\xi^\mu$  с другой величиной. Последняя называется *ковариантной производной* и обозначается через  $\nabla_\mu$ :

$$\delta \Phi = d\xi^\mu \nabla_\mu \Phi. \quad (1.19)$$

(индексы у  $\Phi$  опущены). Например,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} v^{\alpha} &= \partial_{\mu} v^{\alpha} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} v^{\lambda}, \\ \nabla_{\mu} \omega_{\lambda} &= \partial_{\mu} \omega_{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \omega_{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Очевидно, ковариантные производные  $A_{\lambda}^{\alpha}$ ,  $\tilde{E}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  равны нулю.

Из (1.9) вытекает, что

$$\Gamma_{[\mu'\lambda']}^{\alpha} = A_{\mu'\lambda'\alpha}^{\mu\lambda} \Gamma_{[\mu\lambda]}^{\alpha}, \quad (1.21)$$

и значит,  $\Gamma_{[\mu\lambda]}^{\alpha}$  есть тензор. Мы пишем

$$S_{\mu\lambda}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{[\mu\lambda]}^{\alpha}. \quad (1.22)$$

Если  $S_{\mu\lambda}^{\alpha} = 0$ , перенесение называется *симметрическим*.  $X_n$  с симметрическим перенесением обозначается  $A_n^{(2)}$ . Если  $S_{\mu\lambda}^{\alpha}$  представимо в виде

$$S_{\mu\lambda}^{\alpha} = S_{[\mu\lambda]} A_{\lambda]}^{\alpha}, \quad (1.23)$$

перенесение называется *полусимметрическим*.

Если два линейных элемента  $d\xi^{\alpha}_1$  и  $d\xi^{\alpha}_2$ , взятые в одной точке, переносятся параллельно один вдоль другого, мы получаем пятиугольник. Замыкающим является вектор

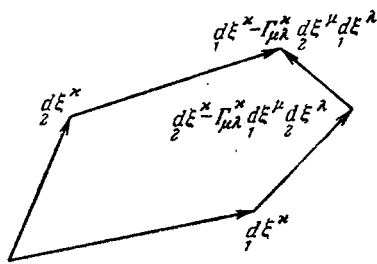


Рис. 17.

$$2d\xi^{\alpha}_1 d\xi^{\alpha}_2 S_{\mu\lambda}^{\alpha}. \quad (1.24)$$

Это означает, что инфинитезимальный параллелограмм существует только в  $A_n$ . Если перенесение в  $X_n$  полусимметрическое, замыкающим вектором является

$$2S_{\mu} d\xi^{\alpha}{}^{[\mu} d\xi^{\alpha]}. \quad (1.25)$$

1)  $S_{\mu\lambda}^{\alpha}$  называется *тензором кручения*. — Прим. перев.

2)  $A_n$  называется *пространством аффинной связности без кручения*. — Прим. перев.

Отсюда следует, что инфинитезимальный параллелограмм существует только в  $(n-1)$ -направлении вектора  $S_\lambda$ .

В  $A_n$  во всех инвариантных дифференциальных операторах, определенных в IV, § 3, символ  $\partial_\mu$  может быть заменен на  $\nabla_\mu$ . Это можно доказать, записывая соответствующие выражения с  $\nabla$ . Все члены с  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  исчезают, так как  $S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} = 0$ . Например, если  $\omega_\lambda$  — ковариантный вектор и  $\hat{v}^\kappa$  — контравариантная векторная плотность веса  $+1$ , мы имеем

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \nabla_{[\mu} \omega_{\lambda]} &= \partial_{[\mu} \omega_{\lambda]} - \Gamma_{[\mu\lambda]}^\kappa \omega_\kappa = \partial_{[\mu} \omega_{\lambda]}, \\ \text{(b)} \quad \nabla_\mu \hat{v}^\mu &= \partial_\mu \hat{v}^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \hat{v}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \hat{v}^\lambda = \partial_\mu \hat{v}^\mu. \end{aligned} \quad (1.26)$$

То же справедливо для производной Ли, определенной в IV, § 5, например

$$D_L \hat{P}_{\cdot\lambda}^\kappa = v^\mu \nabla_\mu \hat{P}_{\cdot\lambda}^\kappa + \hat{P}_{\cdot\rho}^\kappa \nabla_\lambda v^\rho - \hat{P}_{\cdot\lambda}^\sigma \nabla_\sigma v^\kappa + t \hat{P}_{\cdot\lambda}^\kappa \nabla_\mu v^\mu, \quad (1.27)$$

а также для тождеств типа (IV. 6.11), например

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} (\nabla_\mu P_{\lambda\kappa} - \nabla_\lambda P_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa P_{\lambda\mu}) - \\ - P_{\mu\kappa} \nabla_\lambda [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu} \nabla_\kappa [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} = 0. \end{aligned}$$

## 2. Геодезические

Пусть

$$\xi^\kappa = \xi^\kappa(z) \quad (2.1)$$

— параметрическое уравнение кривой в  $L_n$  с параметром  $z$ ;  $d\xi^\kappa/dz$  есть контравариантный вектор, касательный к кривой. Кривая в  $L_n$  называется *геодезической*, если она «максимально прямая», т. е. если касательный вектор остается касательным при параллельном перенесении вдоль кривой. Необходимым и достаточным условием этого является

$$\frac{\delta}{dz} \frac{d\xi^\kappa}{dz} = \alpha(z) \frac{d\xi^\kappa}{dz}, \quad (2.2)$$

где  $\alpha(z)$  — некоторая функция  $z$ . Если вместо  $z$  ввести другой параметр  $t = t(z)$ , то

$$\frac{\delta}{dz} \left( \frac{d\xi^\kappa}{dt} \frac{dt}{dz} \right) = \alpha \frac{d\xi^\kappa}{dt} \frac{dt}{dz}, \quad (2.3)$$

или

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \frac{\delta}{dt} \frac{d\xi^\alpha}{dt} + \frac{d^2t}{dz^2} \frac{d\xi^\alpha}{dt} = \alpha \frac{d\xi^\alpha}{dt} \frac{dt}{dz}, \quad (2.4)$$

или

$$\frac{\delta}{dt} \frac{d\xi^\alpha}{dt} = \frac{\alpha \frac{dt}{dz} - \frac{d^2t}{dz^2}}{\left(\frac{dt}{dz}\right)^2} \frac{d\xi^\alpha}{dt}. \quad (2.5)$$

Правая часть этого уравнения исчезает, если только  $t$  есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2t}{dz^2} - \alpha(z) \frac{dt}{dz} = 0. \quad (2.6)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$t = C_1 \int e^{\int \alpha(z) dz} dz + C_2. \quad (2.7)$$

Отсюда мы видим, что на каждой геодезической в  $L_n$  имеется такой параметр  $t$ , что уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{\delta}{dt} \frac{d\xi^\alpha}{dt} = \frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \frac{d\xi^\mu}{dt} \frac{d\xi^\lambda}{dt}. \quad (2.8)$$

Такой параметр называется *каноническим параметром* геодезической. Если  $t_0$  — канонический параметр геодезической, то любой другой канонический параметр на той же геодезической может быть записан в виде

$$t = C_1 t_0 + C_2, \quad (2.9)$$

где  $C_1 (\neq 0)$  и  $C_2$  — произвольные константы. Следовательно канонический параметр геодезической определяется с точностью до аффинного преобразования с *постоянными* коэффициентами. Изменение  $C_2$  смещает начало отсчета, а изменение  $C_1$  изменяет «аффинную меру» на геодезической. Отрезки геодезической в  $L_n$  не имеют «длины» в обычном смысле, но два различных отрезка *одной и той же* геодезической имеют определенное отношение, которое может быть найдено с помощью произвольного канонического параметра. Согласно (2.8) геодезические в  $L_n$  зависят только от  $\Gamma_{(\mu\lambda)}^\alpha$  и не зависят от  $S_{\mu\lambda}^\alpha$ .

### 3. Нормальные координаты <sup>1)</sup>

Мы докажем, что в  $A_n$  всегда существует такая координатная система  $(x')$ , что  $\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = 0$  в некоторой наперед заданной точке  $\xi_0^{\kappa}$ . Пусть

$$t_0^{\kappa} = f^{(\kappa)}(a_1, \dots, a_{n-1}) \quad (3.1)$$

— параметрическое представление  $\infty^{n-1}$  контравариантных векторов в локальном  $E_n$  точки  $\xi_0^{\kappa}$ , и пусть имеется одно и только одно такое представление в каждом направлении. На каждой геодезической, проходящей через  $\xi_0^{\kappa}$ , мы выберем канонический параметр  $z$ , такой, что  $z = 0$  в  $\xi^{\kappa}$  и

$$t_0^{\kappa} = \frac{d\xi^{\kappa}}{dz} \quad (3.2)$$

в  $\xi_0^{\kappa}$  на каждой геодезической. Тогда на каждой геодезической справедливо уравнение

$$\frac{d^2\xi^{\kappa}}{dz^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{d\xi^{\mu}}{dz} \frac{d\xi^{\lambda}}{dz} = 0, \quad (3.3)$$

и, дифференцируя это уравнение, мы получаем бесконечную последовательность уравнений, из которых могут быть определены значения всех производных  $\xi^{\kappa}$  по  $z$  при  $z = 0$ . После этого  $\xi^{\kappa}$  могут быть разложены в ряды

$$\begin{aligned} \xi^{\kappa} &= \xi_0^{\kappa} + \left(\frac{d\xi^{\kappa}}{dz}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\xi^{\kappa}}{dz^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots = \\ &= \xi_0^{\kappa} + t_0^{\kappa} z - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \left(\xi_0^{\nu}\right) t_0^{\mu} t_0^{\lambda} z^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

в которых для нашей цели интерес представляют только три первых члена.

Если мы теперь введем  $t_0^{\kappa} z$  в качестве новых координат  $\xi^h$

$$\xi^h \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\kappa}^h t_0^{\kappa} z \quad (h = 1, \dots, n), \quad (3.5)$$

<sup>1)</sup> Ср. Н. М. 1935.1.

то получим

$$\xi^h = \delta_x^h \left[ (\xi^x - \xi^x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma}^x (\xi^x) (\xi^\rho - \xi^\rho_0) (\xi^\sigma - \xi^\sigma_0) + \dots \right] \\ (h = 1, \dots, n). \quad (3.6)$$

Дифференцируя, находим

$$A_\lambda^h = \delta_\lambda^h + \delta_x^h \Gamma_{\rho\lambda}^x (\xi^v) (\xi^\rho - \xi^\rho_0) + \dots, \\ \partial_\mu A_\lambda^h = \delta_x^h \Gamma_{\mu\lambda}^x (\xi^v) + \dots \quad (h = 1, \dots, n). \quad (3.7)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} A_\lambda^h &= \delta_\lambda^h, \\ \partial_\mu A_\lambda^h &= \delta_\lambda^h \Gamma_{\mu\lambda}^x (\xi^v) \end{aligned} \right\} \text{ для } \xi^x = \xi^x_0 \quad (h = 1, \dots, n). \quad (3.8)$$

Из (1.9) и (3.8) теперь следует, что

$$\Gamma_{ji}^h = A_{xji}^{h\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^x - A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_\mu A_\lambda^h = \delta_{xji}^{h\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^x - \delta_{jix}^{\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^x = 0 \\ (h, i, j = 1, \dots, n). \quad (3.9)$$

Построенные координаты называются *нормальными координатами* в точке  $\xi^x_0$  в  $A_n^1$ ). Они зависят только от выбора  $\xi^x_0$ ,  $\infty^{n-1}$  векторов  $t^x_0$  в  $\xi^x_0$  и  $(x)$ . Если  $\xi^x_0$  и  $t^x_0$  оставить неизменными, а  $(x)$  преобразовать в произвольную новую систему  $(x')$ , то мы получим новые нормальные координаты  $\xi^{h'}$ :

$$\xi^{h'} = \delta_{x'}^{h'} t^{x'} z = \delta_{x'}^{h'} A_{x'}^{x'} (\xi^v) t^x z = \delta_{x'}^{h'x} A_{x'}^{x'} (\xi^v) \xi^h. \quad (3.10)$$

Это уравнение показывает, что нормальные координаты подвергаются линейным однородным преобразованиям с постоянными коэффициентами. Следовательно, если  $\xi^x_0$  и  $t^x_0$  фиксированы, нормальные координаты определяются с точностью до линейных однородных преобразований.

<sup>1)</sup> Впервые нормальные координаты были введены Вебленом 1922.1. Для литературных ссылок ср. Н. М. 1935.1.

Возможно также определить нормальные координаты таким образом, что  $\Gamma_{ji}^h$  исчезают в каждой точке заданной кривой и в особых случаях во всех точках заданных  $X_m^1$ ) в  $A_n$ .

Нормальные координаты очень удобны, так как при их использовании часто оказывается возможным избежать длинных вычислений.

#### 4. $V_n$

Если в  $X_n$  задан *действительный* симметричный тензор  $g_{\lambda\kappa}$  ранга  $n$ , то  $X_n$  обозначается через  $V_n^2$ ), а  $g_{\lambda\kappa}$  называется его фундаментальным тензором<sup>3)</sup>. Каждое локальное  $E_n$  в  $V_n$  содержит фундаментальный тензор и, следовательно, есть  $R_n$ . С помощью  $g_{\lambda\kappa}$  и обратного ему  $g^{\kappa\lambda}$  в  $V_n$  можно поднимать и опускать индексы аналогично тому, как это было сделано в  $R_n$ .

Выражение

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \left| \sqrt{g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa} \right| \quad (4.1)$$

называется *длиной* вектора  $v^\kappa$ . Если  $v = 0$ ,  $v^\kappa$  называется *изотропным вектором*, а его направление — *изотропным направлением*. Изотропные векторы могут быть действительными лишь в случае неопределенного  $g_{\lambda\kappa}$ .

Мы пишем  $ds$  для обозначения длины линейного элемента, определенного выражением

$$ds^2 = \left| g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa \right|. \quad (4.2)$$

Если  $ds = 0$  в каждой точке кривой, последняя называется *изотропной кривой* в  $V_n$ .

В  $V_n$  каждый отрезок кривой имеет длину  $\int ds$ . Наиболее важное свойство  $V_n$  состоит в том, что его фундаменталь-

1) Н. М. 1935.1.

2)  $V_n$  называется *римановым пространством*. — Прим. перев.

3) В  $V_n$  возможно ввести ортогональные криволинейные координаты во всех направлениях для  $n \leq 3$ . Для  $n > 3$  они возможны тогда и только тогда, когда существует такой скаляр  $\sigma$ , что  $V_n$  с фундаментальным тензором  $\sigma g_{\lambda\kappa}$  есть  $R_n$ . Ср. Схоутен 1921.5, 1927.4; Р. К. 1924.1; Эйзенхарт 1926.1; Н. М. II 1938.3.

ный тензор определяет единственным образом *симметрическое перенесение*, которое оставляет инвариантной длину вектора. Оно удовлетворяет поэтому уравнению

$$\nabla_{\mu} g_{\lambda\kappa} = 0. \quad (4.3)$$

Если это уравнение распisać, мы получим

$$\partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} - g_{\rho\kappa} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} - g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} = 0. \quad (4.4)$$

Переставляя индексы, получим эквивалентные уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} g_{\kappa\mu} - g_{\rho\mu} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\rho} - g_{\kappa\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} &= 0, \\ -\partial_{\kappa} g_{\mu\lambda} + g_{\rho\lambda} \Gamma_{\kappa\mu}^{\rho} + g_{\mu\sigma} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Складывая и учитывая, что  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}$ , находим

$$\partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} + \partial_{\lambda} g_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa} g_{\mu\lambda} = 2g_{\rho\kappa} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}. \quad (4.6)$$

или

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda}). \quad (4.7)$$

$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}$  называется *символом Кристоффеля* в честь его первооткрывателя. Первоначально он записывался в виде  $\left\{ \begin{matrix} \mu\lambda \\ \kappa \end{matrix} \right\}$ , но это не согласуется с современной практикой расположения индексов.

Из (4.7) получаем

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\lambda\rho}. \quad (4.8)$$

Теперь из определения  $g^{\kappa\lambda}$  следует, что (ср. (I. 1.5))

$$g^{\kappa\lambda} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\kappa\lambda}}. \quad (4.9)$$

Отсюда

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \ln g, \quad (4.10)$$

и, следовательно,

$$\nabla_{\mu} g = \partial_{\mu} g - 2g \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = 0. \quad (4.11)$$



Эта формула может быть использована для записи ковариантной производной контравариантного  $p$ -вектора  $\nabla_{\mu} v^{\mu x_2 \dots x_p}$  в форме, содержащей только  $\partial_{\mu}$  и не содержащей параметры  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ :

$$\nabla_{\mu} v^{\mu x_2 \dots x_p} = g^{-\frac{1}{2}} \nabla_{\mu} g^{\frac{1}{2}} v^{\mu x_2 \dots x_p} = g^{-\frac{1}{2}} \partial_{\mu} g^{\frac{1}{2}} v^{\mu x_2 \dots x_p} \quad (4.12)$$

(ср. (1.26)).

Геодезические в  $V_n$  являются не только прямыми кривыми, но и кратчайшими (или наиболее длинными) кривыми между двумя их точками. Чтобы доказать это, рассмотрим кривую  $s$ , соединяющую две точки  $\xi_0^{\kappa}$  и  $\xi_1^{\kappa}$ , касательные которой нигде не имеют изотропных направлений. Наряду с  $s$  мы рассмотрим все кривые, которые могут быть получены из  $s$  инфинитезимальным точечным преобразованием  $v^{\kappa} dt$ , где  $v^{\kappa}$  — произвольное векторное поле, определенное во всех точках окрестности  $s$ . Мы хотим установить соотношение между длиной  $s$  и длиной одной из этих соседних кривых  $s'$  между точками  $\xi_0^{\kappa} + v_0^{\kappa} dt$  и  $\xi_1^{\kappa} + v_1^{\kappa} dt$ , где  $v_0^{\kappa}$  и  $v_1^{\kappa}$  значения  $v^{\kappa}$  в  $\xi_0^{\kappa}$  и  $\xi_1^{\kappa}$ . Для этого нужно определить длину линейного элемента  $s'$  в некоторой точке  $\xi^{\kappa} + v^{\kappa} dt$ . В этой точке мы должны для фундаментального тензора принять значение  $g_{\lambda\kappa} + v^{\mu} \partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} dt$ , что в значительной мере осложняет вычисления. Однако это можно сделать более изящным способом.

Если  $\xi^{\kappa} \rightarrow \eta^{\kappa}(\xi^{\nu})$  есть любое точечное преобразование в  $V_n$  и если кривая  $s$  и поле  $g_{\lambda\kappa}$  оба увлекаются этим преобразованием, то длина увлеченной кривой, измеренная с помощью увлеченного фундаментального тензора, очевидно, равна длине исходной кривой. Это связано с тем, что координаты точек увлеченной кривой  $s$  и компоненты увлеченного фундаментального тензора относительно увлеченной координатной системы  $(x')$  равны исходным координатам и компонентам относительно  $(x)$ . Рассмотрим теперь точечное преобразование  $\xi^{\kappa} \rightarrow \xi^{\kappa} - v^{\kappa} dt$ . Если  $s'$  и  $g_{\lambda\kappa}$  увлекаются этим преобразованием, то они превращаются соответственно в  $s'$  и  $g_{\lambda\kappa} - D_L g_{\lambda\kappa} dt$ . Следовательно, вместо измерения  $s'$

с помощью  $g_{\lambda\kappa} + v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} dt$  мы можем измерить  $s$  с помощью

$$\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} - D_L g_{\lambda\kappa} dt = \\ = g_{\lambda\kappa} + v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} dt + g_{\rho\kappa} \partial_\lambda v^\rho dt + g_{\lambda\rho} \partial_\kappa v^\rho dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким образом, если  $\tau$  — произвольный параметр на  $s$ , вариация длины линейного элемента  $d\xi^x$  кривой  $s$  равна

$$\begin{aligned} d^v ds &= d^v \left( g_{\lambda\kappa} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \frac{d\xi^\kappa}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \left( g_{\lambda\kappa} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \frac{d\xi^\kappa}{d\tau} \right)^{-\frac{1}{2}} D_L g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} d\tau dt = \\ &= \frac{1}{2} (v^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu} \partial_\mu v^\sigma + g_{\mu\sigma} \partial_\nu v^\sigma) \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} ds dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} v^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\sigma\nu} \partial_\mu v^\sigma + g_{\mu\sigma} \partial_\nu v^\sigma = \\ = v^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + v^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + v^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} + g_{\sigma\nu} \partial_\mu v^\sigma + g_{\mu\sigma} \partial_\nu v^\sigma = \\ = g_{\sigma\nu} \nabla_\mu v^\sigma + g_{\mu\sigma} \nabla_\nu v^\sigma = 2\nabla_{(\mu} v_{\nu)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отсюда

$$d^v ds = (\nabla_\mu v_\nu) \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} ds dt = \frac{\delta v_\nu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} ds dt. \quad (4.16)$$

Это дает для вариации длины  $s$  между  $\xi_0^x$  и  $\xi_I^x$

$$d^v \int_0^{\xi_I^x} ds = dt \int_0^{\xi_I^x} \frac{d\xi^\lambda}{ds} \delta v_\lambda. \quad (4.17)$$

Из этой формулы находим интегрированием по частям

$$\begin{aligned} v \int_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}} ds = dt \left[ \left( v_{\lambda} \frac{d\xi^{\lambda}}{ds} \right)_{\xi^{\lambda} = \xi^{\lambda}} - \left( v_{\lambda} \frac{d\xi^{\lambda}}{ds} \right)_{\xi^{\lambda} = \xi^{\lambda}} \right] - \\ - dt \int_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}} v_{\lambda} \delta \frac{d\xi^{\lambda}}{dt}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Если теперь  $v^{\lambda}$  равно нулю в  $\xi^{\lambda}$  и  $\xi^{\lambda}$ , то первый член в правой части исчезает и мы получаем

$$v \int_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}} ds = - dt \int_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}} v_{\lambda} \delta \frac{d\xi^{\lambda}}{ds}, \quad (4.19)$$

а это доказывает, что вариация равна нулю для любого выбора  $v^{\lambda}$  тогда и только тогда, когда

$$\delta \frac{d\xi^{\lambda}}{ds} = 0, \quad (4.20)$$

т. е.  $s$  является геодезической. Следовательно, геодезическая, соединяющая две точки, есть кривая экстремальной длины, а  $s$  — канонический параметр.

Если геодезическая  $s$  в одной из своих точек имеет линейный элемент нулевой длины, то можно показать, что  $s$  — изотропная кривая. Пусть  $s^{\lambda}$  есть вектор, касательный к  $s$  и удовлетворяющий условию

$$\delta s^{\lambda} = 0. \quad (4.21)$$

Тогда длина  $s^{\lambda}$  в рассматриваемой точке равна нулю. Но длина вектора не изменяется при параллельном переносе, и, следовательно,  $s^{\lambda}$  имеет нулевую длину в каждой точке кривой  $s$ . Однако обратное несправедливо. Кривая с нулевой длиной не обязана быть геодезической.

5. Кривизна  $V_n$  и  $A_n$ 

Рассмотрим сферу единичного радиуса в обычном пространстве. Ее линейный элемент в сферических координатах

$$ds^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2. \quad (5.1)$$

Следовательно, если положить  $\xi^1 = \varphi$ ,  $\xi^2 = \theta$ , то компонентами фундаментального тензора будут:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \sin^2 \theta, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= 1, \\ g^{11} &= \sin^{-2} \theta, & g^{12} &= 0, & g^{22} &= 1; \end{aligned} \quad (5.2)$$

и для  $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$  находим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отсюда получаем для ковариантных производных:

$$\begin{aligned} \delta v^1 &= dv^1 + v^1 \operatorname{ctg} \theta d\theta + v^2 \operatorname{ctg} \theta d\varphi, \\ \delta v^2 &= dv^2 - v^1 \sin \theta \cos \theta d\varphi; \\ \delta \omega_1 &= v^1 \omega_1 - \omega_1 \operatorname{ctg} \theta d\theta + \omega_2 \sin \theta \cos \theta d\varphi, \\ \delta \omega_2 &= d\omega_2 - \omega_1 \operatorname{ctg} \theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия для параллельного перенесения  $v^\alpha$  и  $\omega_\lambda$  имеют вид:

$$\begin{aligned} dv^1 &= -v^1 \operatorname{ctg} \theta d\theta - v^2 \operatorname{ctg} \theta d\varphi, \\ dv^2 &= v^1 \sin \theta \cos \theta d\varphi; \\ d\omega_1 &= \omega_1 \operatorname{ctg} \theta d\theta - \omega_2 \sin \theta \cos \theta d\varphi, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \operatorname{ctg} \theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

На меридиане  $d\varphi = 0$ , и параллельное перенесение принимает вид:

$$\begin{aligned} (a) \quad dv^1 &= -v^1 \operatorname{ctg} \theta d\theta, & (c) \quad d\omega_1 &= \omega_1 \operatorname{ctg} \theta d\theta, \\ (b) \quad dv^2 &= 0; & (d) \quad d\omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Но  $v^1$  и  $v^2$  являются соответственно компонентами в направлении параллели и меридиана, и из (5.6а) следует, что меридиана является геодезической.

На параллели  $d\theta = 0$ , и параллельное перенесение принимает вид:

$$\begin{aligned} (a) \quad dv^1 &= -v^2 \operatorname{ctg} \theta d\varphi, & (c) \quad d\omega_1 &= -\omega_2 \sin \theta \cos \theta d\varphi, \\ (b) \quad dv^2 &= v^1 \sin \theta \cos \theta d\varphi; & (d) \quad d\omega_2 &= \omega_1 \operatorname{ctg} \theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отсюда мы видим, что параллель является геодезической только для  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Если в точке  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \theta_0$  задан вектор  $v^\alpha$ , касательный к параллели  $\theta = \theta_0$ , то в этой точке  $v^2 = 0$ . Длина этого

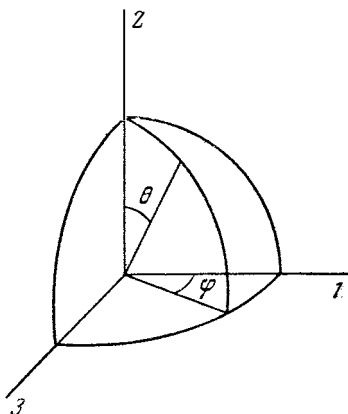


Рис. 18.

вектора равна  $v^1 \sin \theta_0$ . Если теперь параллельно перенести вектор на  $d\varphi$  вдоль параллели, то компоненты перенесенного вектора в  $d\varphi$ ,  $\theta_0$  будут равны  $v^1$ ,  $v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\varphi$ . Длина вектора  $\theta$ ,  $v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\varphi$ , перпендикулярного параллели, равна  $v^1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\varphi$ . Следовательно, угол между перенесенным вектором и параллелью равен  $\cos \theta_0 d\varphi$ . При параллельном перенесении все векторы поворачиваются на один и тот же угол, и значит, каждый вектор в точке параллели  $\theta = \theta_0$  при перенесении

вдоль параллели на  $d\varphi$  поворачивается относительно параллели на угол  $\cos \theta_0 d\varphi$ . Если вектор переносится вдоль всей параллели до возвращения в исходную точку, то общий угол равен  $2\pi \cos \theta_0$ . Отсюда следует, что угол между первоначальным и конечным положениями равен  $2\pi(1 - \cos \theta_0)$ . Но это есть в точности площадь сферического сегмента, ограниченного параллелью. Можно показать, что это справедливо также для любой замкнутой кривой на единичной сфере.

Если вектор переносится параллельно вдоль замкнутой кривой на плоскости, то угол между первоначальным и конечным положениями всегда равен нулю. Следовательно,

геометрия на сфере отлична от геометрии на плоскости. Мы увидим, что это имеет некоторое отношение к «кривизне» поверхности.

Если мы построим конус, касательный к параллели  $\theta = \theta_0$  на сфере, то этот конус можно развернуть на плоскость. Значит, геометрия конуса та же, что и плоскости. Дуга окружности радиуса  $\text{tg } \theta_0$ , имеющая длину  $2\pi \sin \theta_0$  (рис. 19), соответствует параллели

$\theta = \theta_0$ . Следовательно, если параллельно перенести вдоль дуги на плоскости вектор, касательный в одном из ее концов, к другому концу, то угол между перенесенным вектором и дугой будет равен  $2\pi \cos \theta_0$ .

Это доказывает, что параллельное перенесение на сфере вдоль параллели эквивалентно параллельному перенесению на конусе, касательном к сфере по этой параллели.

Если задана произвольная кривая на произвольной поверхности, то плоскости, касательные в точках этой кривой, огибают развертывающуюся поверхность. На этой развертывающейся поверхности мы имеем обычную плоскую геометрию, и можно показать, что параллельное перенесение вдоль кривой на первоначальной поверхности эквивалентно параллельному перенесению на развертывающейся поверхности вдоль той же кривой. Это свойство можно использовать для построения параллельного перенесения на произвольной поверхности. На рис. 20 и 21 показано параллельное перенесение на сфере, гиперболическом параболоиде и поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Чтобы исследовать поведение вектора в  $A_n$  при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой, мы рассмотрим инфинитезимальный параллелограмм в точке  $A$ . Пусть вектор  $v^\alpha$  в  $A$  переносится параллельно сначала от  $A$  через  $B$  к  $D$ , а затем от  $A$  через  $C$  к  $D$ . Значение перенесенного вектора в  $B$  есть

$$v^\alpha - d_{\xi}^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} v^\lambda. \quad (5.8)$$

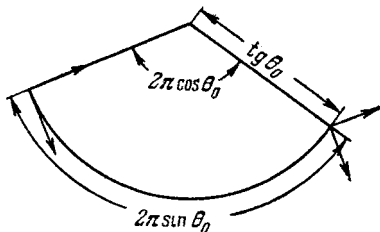


Рис. 19.

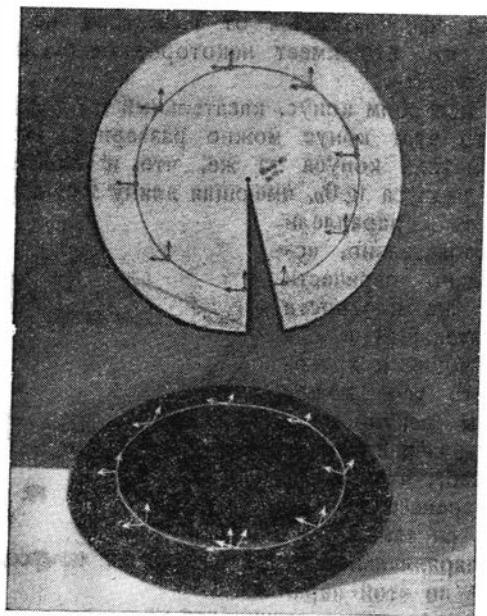


Рис. 20.



Рис. 21.

Теперь этот вектор должен быть перенесен из  $B$  в  $D$ . Но в  $B$  значения коэффициентов связности равны не  $\Gamma_{\mu\lambda}^x$ , а

$$\Gamma_{\mu\lambda}^x + d_{\xi^v}^{\xi^v} \partial_v \Gamma_{\mu\lambda}^x. \quad (5.9)$$

Следовательно, вектор, перенесенный в  $D$  через  $B$ , имеет компоненты

$$\begin{aligned} v^x - d_{\xi^v}^{\xi^v} \Gamma_{\mu\lambda}^x - \\ - (d_{\xi^v}^{\xi^v} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} d_{\xi^{\mu}}^{\xi^{\mu}} d_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}}) (\Gamma_{\rho\sigma}^x + d_{\xi^v}^{\xi^v} \partial_v \Gamma_{\rho\sigma}^x) (v^{\sigma} - d_{\xi^{\tau}}^{\xi^{\tau}} \Gamma_{\tau\omega}^{\sigma} v^{\omega}) = \\ = v^x - d_{\xi^{\mu}}^{\xi^{\mu}} \Gamma_{\mu\lambda}^x v^{\lambda} - d_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}} \Gamma_{\mu\lambda}^x v^{\lambda} + \\ + d_{\xi^v}^{\xi^v} d_{\xi^{\mu}}^{\xi^{\mu}} (\Gamma_{\nu\rho}^x \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} - \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^x + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^x) v^{\lambda}, \quad (5.10) \end{aligned}$$

если пренебречь величинами третьего порядка малости. Для вектора, перенесенного в  $D$  через  $C$ , мы находим аналогичное выражение, в котором  $d_{\xi^{\mu}}^{\xi^{\mu}}$  и  $d_{\xi^{\lambda}}^{\xi^{\lambda}}$  меняются местами.

Отсюда разность между двумя перенесенными в  $D$  векторами равна

$$\begin{aligned} d_{\xi^v}^{\xi^v} d_{\xi^{\mu}}^{\xi^{\mu}} [2\partial_{[v} \Gamma_{\mu]\lambda}^x + \\ + 2\Gamma_{[v|\rho]i}^x \Gamma_{\mu]i\lambda}^{\rho}] v^{\lambda}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Это выражение должно быть вектором, так как оно имеет значение, не зависящее от выбора системы координат, а именно равно разности двух перенесенных векторов. Это значит, что выражение в квадратных скобках в (5.11) есть тензор. Этот тензор

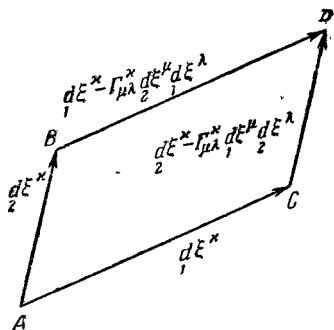


Рис. 22.

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\dots x \text{ def}} = 2\partial_{[v} \Gamma_{\mu]\lambda}^x + 2\Gamma_{[v|\rho]i}^x \Gamma_{\mu]i\lambda}^{\rho} \quad (5.12)$$



называется *тензором кривизны* в  $A_n$ .  $A_n$  есть  $E_n$  тогда и только тогда, когда  $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$  исчезает в каждой точке <sup>1)</sup>.

$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$  возникает также при двукратном ковариантном дифференцировании с последующим альтернированием индексов дифференцирования

$$\begin{aligned}\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}\vartheta^\lambda &= \partial_{[\nu}(\nabla_{\mu]}\vartheta^\lambda) - \Gamma_{[\nu\mu]}^\rho\nabla_\rho\vartheta^\lambda + \Gamma_{[\nu|\lambda]}^\alpha\nabla_{\mu]}\vartheta^\lambda = \\ &= \partial_{[\nu}\partial_{\mu]}\vartheta^\lambda + \partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]}^\alpha\vartheta^\lambda + \Gamma_{[\nu|\lambda]}^\alpha\partial_{\mu]}\vartheta^\lambda + \Gamma_{[\nu|\lambda]}^\alpha\Gamma_{\mu]}^\beta\vartheta^\rho = \\ &= \left[\partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]}^\alpha\vartheta^\lambda + \Gamma_{[\nu|\rho]}^\alpha\Gamma_{\mu]}^\beta\vartheta^\rho\right]\vartheta^\lambda = \frac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}\vartheta^\lambda.\end{aligned}\quad (5.13)$$

Аналогичным образом мы находим

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}\omega_\lambda = -\frac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}\omega_\lambda, \quad (5.14)$$

и для тензора общей структуры, например  $P_{\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$ :

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}P_{\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{2}R_{\nu\mu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}P_{\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}P_{\sigma\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{2}R_{\nu\mu\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}P_{\lambda\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}. \quad (5.15)$$

Каждому верхнему (нижнему) индексу соответствует член с положительным (отрицательным) знаком.

Для скалярной плотности  $\hat{q}$  веса  $+1$  имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}\hat{q} &= \partial_{[\mu}\nabla_{\nu]}\hat{q} - \Gamma_{[\mu\nu]}\hat{q} = \\ &= \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\hat{q} - \partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]}\hat{q} - \Gamma_{[\mu\nu]}\hat{q} + \Gamma_{[\mu\nu]}\hat{q} = \\ &= -(\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]})\hat{q} = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}\hat{q},\end{aligned}\quad (5.16)$$

и соответственно для общей тензорной плотности веса  $+1$ , например  $\hat{P}_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$ :

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}\hat{P}_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{2}R_{\nu\mu\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}\hat{P}_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}\hat{P}_{\rho}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} - \frac{1}{2}tR_{\nu\mu\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}\hat{P}_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}. \quad (5.17)$$

Каждому верхнему (нижнему) индексу соответствует член с положительным (отрицательным) знаком и имеется дополнительный член, содержащий  $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}$  и множитель  $t$ .

<sup>1)</sup> Более точно,  $A_n$  в этом случае является *локально аффинным*, но в целом, вообще говоря, может не совпадать с  $E_n$ . Простейший пример — цилиндр. — *Прим. перев.*

Тензор кривизны удовлетворяет некоторым тождествам.  
*Первое тождество*

$$\boxed{R_{(\nu\mu)\lambda}{}^{\kappa} = 0} \quad (5.18)$$

следует из определения. *Второе тождество*

$$\boxed{R_{[\nu\mu\lambda]}{}^{\kappa} = 0} \quad (5.19)$$

точно следует из (5.12).

В  $V_n$  мы обозначаем тензор кривизны через  $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ .  
Для  $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$  мы имеем *третье тождество*

$$\boxed{K_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0.} \quad (5.20)$$

Действительно,

$$0 = \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} g_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2} K_{\omega\mu\lambda}{}^{\rho} g_{\rho\kappa} - \frac{1}{2} K_{\omega\mu\kappa}{}^{\rho} g_{\lambda\rho} = -K_{\omega\mu(\lambda\kappa)}. \quad (5.21)$$

Из второго и третьего тождеств следует *четвертое тождество*

$$\boxed{K_{\nu\mu\lambda\kappa} = K_{\lambda\kappa\nu\mu}.} \quad (5.22)$$

Из третьего тождества мы видим, что  $K_{\nu\mu\sigma}{}^{\sigma} = 0$ . Следовательно, перенесение для скалярных плотностей в  $V_n$  интегрируемо. Действительно, существует поле  $g$ , для которого ковариантная производная равна нулю.

Тензор кривизны  $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$  в  $V_n$  антисимметричен по  $\nu\mu$  и  $\lambda\kappa$  и симметричен относительно пар  $\nu\mu$  и  $\lambda\kappa$ . Следовательно, эта величина играет ту же роль для бивекторов, которую симметричный тензор играет для векторов. Его можно назвать *симметричным бивектор-тензором*. Бивектор общего строения имеет  $\frac{1}{2}n(n-1)$  независимых компонент, и, следовательно, симметричный бивектор-тензор в общем случае имеет

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \left[ \frac{1}{2} n(n-1) + 1 \right] = \frac{1}{8} (n^2 - n)(n^2 - n + 2)$$

независимых компонент. Но мы использовали только первое, третье и четвертое тождества. Легко показать, что в совокупности с этими тождествами второе тождество эквивалентно условию

$$K_{[\nu\mu\lambda\kappa]} = 0, \quad (5.23)$$

что дает в точности  $\binom{n}{4}$  уравнений. Отсюда число независимых компонент  $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$  равно

$$\frac{1}{8}(n^2 - n)(n^2 - n + 2) - \binom{n}{4} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \quad (5.24)$$

Для  $n = 2, 3$  и  $4$  это число равно соответственно  $1, 6$  и  $20$ .

Существует другое тождество, содержащее первые производные  $R_{\nu\mu;\lambda}^{\kappa}$ :

$$\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\kappa} = 0. \quad (5.25)$$

Оно называется *тождеством Бианки*, хотя было еще ранее найдено Риччи <sup>1)</sup>.

Чтобы доказать это тождество для некоторой точки  $\xi^{\kappa}$ , мы выберем в качестве  $(x)$  систему нормальных координат, принадлежащих этой точке (ср. V, § 3). Нам известно, что в этом случае  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  равны нулю и  $\xi^{\kappa}$  и, следовательно,

$$\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\kappa} \stackrel{*}{=} \partial_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\kappa} = 2\partial_{[\omega} (\partial_{\nu} \Gamma_{\mu]\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu|\rho}^{\kappa} \Gamma_{\mu]\lambda}^{\rho}) = 0. \quad (5.26)$$

Из  $R_{\nu\mu;\lambda}^{\kappa}$  сверткой по  $\nu\lambda$  мы получаем *тензор Риччи*

$$R_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\nu\mu;\lambda}^{\nu}. \quad (5.27)$$

В  $V_n$  он является симметричным тензором и обозначается через  $K_{\mu\lambda}$ :

$$K_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\nu\mu;\lambda}^{\nu}. \quad (5.28)$$

Из  $K_{\mu\lambda}$  можно получить скаляр

$$K \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\lambda} K_{\mu\lambda}. \quad (5.29)$$

<sup>1)</sup> Ср. для литературных ссылок Р. К. 1924. 1; 1954. 1. Согласно О к а й а 1925. 1 это тождество первоначально было найдено Ф о с с о м 1860. 1.

$\frac{1}{n(n-1)}K$  называется *скалярной кривизной*  $V_n$ . Для сферы единичного радиуса  $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$  имеет только одну независимую компоненту (ср. (5.3))

$$\begin{aligned} K_{1212} &= 2g_{2\kappa}(\partial_{1\sigma}\Gamma_{21\sigma}^\kappa + \Gamma_{1\sigma 1\sigma}^\kappa \Gamma_{21}^0) = \\ &= g_{22}(-\partial_2\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2\Gamma_{11}^1) = \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\operatorname{ctg}\theta = -\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Отсюда

$$K_{11} = \sin^2\theta, \quad K_{12} = 0, \quad K_{22} = 1, \quad (5.31)$$

и

$$\frac{1}{2}K = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}K_{\mu\lambda} = 1. \quad (5.32)$$

Следовательно, скалярная кривизна единичной сферы равна 1, как это и должно быть.

Из тождества Бианки (5.25) сверткой по  $\omega\lambda$  получаем

$$\nabla_\omega R_{\nu\mu\lambda}^{\omega} + \nabla_\nu R_{\mu\omega\lambda}^{\omega} + \nabla_\mu R_{\omega\nu\lambda}^{\omega} = 0 \quad (5.33)$$

или

$$\boxed{\nabla_\omega R_{\nu\mu\lambda}^{\omega} + 2\nabla_{[\mu} R_{\nu]\lambda} = 0.} \quad (5.34)$$

В  $V_n$  это тождество может быть свернуто с  $g_{\mu\lambda}$  и это дает

$$2\nabla_\mu K_{\nu}^{\mu} - \nabla_\nu K = 0. \quad (5.35)$$

Отсюда, если мы введем симметричный тензор

$$G_{\lambda\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}Kg_{\lambda\kappa}, \quad (5.36)$$

то тождество (5.35) принимает вид

$$\boxed{\nabla_\mu G_{\lambda}^{\mu} = 0.} \quad (5.37)$$

Тензор  $G_{\lambda\kappa}$ , или скорее тензорная плотность,

$$\widehat{G}_{\lambda\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g} G_{\lambda\kappa} \quad (5.38)$$

играет очень важную роль в теории относительности. Это связано с тем, что  $\widehat{G}^{\lambda\kappa}$  является производной Лагранжа от

—  $\sqrt{g} K$  как функции  $g_{\lambda\kappa}$ ,  $\partial_\mu g_{\lambda\kappa}$  и  $\partial_\omega \partial_\mu g_{\lambda\kappa}$  (ср. IV, § 6):

$$[\sqrt{g} K]^{\kappa\lambda} = -\tilde{G}^{\kappa\lambda}. \quad (5.39)$$

Прямое доказательство (5.39) достаточно длинное. Однако Палатини дал очень короткое и изящное доказательство, используя нормальные координаты ( $\kappa$ ), принадлежащие фиксированной точке  $\xi^{\kappa}$ <sup>1)</sup>. Тогда, как мы знаем,  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  исчезают в  $\xi^{\kappa}$ , а следовательно, и  $\partial_\mu g_{\lambda\kappa}$ , но производные от  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  не исчезают в этой точке. Если  $\overset{v}{d}g_{\lambda\kappa}$  — вариация  $g_{\lambda\kappa}$ , то вариация  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  не равна нулю в  $\xi^{\kappa}$ , так как нормальная система перестает быть таковой для нового перенесения. Но  $\overset{v}{d}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  являются разностями параметров двух различных перенесений и, следовательно, являются *компонентами тензора*. Теперь мы имеем

$$K = 2g^{\mu\lambda} (\partial_{[\kappa} \Gamma_{\mu] \lambda}^{\kappa} + \Gamma_{[\kappa | \rho |}^{\kappa} \Gamma_{\mu] \lambda}^{\rho}). \quad (5.40)$$

Отсюда в  $\xi^{\kappa}$

$$\begin{aligned} \overset{v}{d}(\sqrt{g} K) &\stackrel{*}{=} 2 \sqrt{g} (\overset{v}{d}g^{\mu\lambda}) \partial_{[\kappa} \Gamma_{\mu] \lambda}^{\kappa} + 2 \sqrt{g} g^{\mu\lambda} \partial_{[\kappa} \overset{v}{d}\Gamma_{\mu] \lambda}^{\kappa} + \\ &+ K \overset{v}{d}\sqrt{g} \stackrel{*}{=} \sqrt{g} K_{\mu\lambda} \overset{v}{d}g^{\mu\lambda} + \sqrt{g} \partial_\kappa g^{\mu\lambda} \overset{v}{d}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - \\ &- \sqrt{g} \partial_\mu g^{\mu\lambda} \overset{v}{d}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} + \frac{1}{2} K \sqrt{g} \overset{v}{d}\ln g \stackrel{*}{=} \sqrt{g} K_{\mu\lambda} \overset{v}{d}g^{\mu\lambda} + \\ &+ \sqrt{g} \partial_\mu (g^{\nu\lambda} \overset{v}{d}\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} - g^{\mu\lambda} \overset{v}{d}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu}) - \frac{1}{2} \sqrt{g} K g_{\mu\lambda} \overset{v}{d}g^{\mu\lambda} \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \sqrt{g} G_{\mu\lambda} \overset{v}{d}g^{\mu\lambda} + \nabla_\mu \sqrt{g} (g^{\nu\lambda} \overset{v}{d}\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} - g^{\mu\lambda} \overset{v}{d}\Gamma_{\nu\lambda}^{\nu}), \quad (5.41) \end{aligned}$$

где знак \* может быть в конце опущен, так как уравнение имеет теперь инвариантную форму.

Если теперь  $\tau_n$  является областью  $V_n$ , на границе которой вариации  $g_{\lambda\kappa}$ ,  $\partial_\mu g_{\lambda\kappa}$  и  $\partial_\nu \partial_\mu g_{\lambda\kappa}$  исчезают, то  $\overset{v}{d}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$  также должны исчезнуть, и, следовательно, используя теорему

<sup>1)</sup> Ср. Н. М. 1935. 1. Там же приведены литературные ссылки.

Стокса для последнего члена (5.41), мы получаем

$$d \int_{\tau_n} \sqrt{g} K d\xi^1 \dots d\xi^n = - \int_{\tau_n} \sqrt{g} G^{\lambda\kappa} d g_{\lambda\kappa} d\xi^1 \dots d\xi^n, \quad (5.42)$$

что и доказывает (5.39). Тогда и только тогда, когда исчезает  $G_{\lambda\kappa}$ , исчезает вариация интеграла от  $\sqrt{g} K$  по  $\tau_n$  для любой вариации  $g_{\lambda\kappa}$ , удовлетворяющей граничным условиям.

Тождество (IV. 6.11) теперь принимает вид

$$\hat{G}^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\lambda\mu}) - g_{\mu\kappa} \partial_\lambda \hat{G}^{\lambda\kappa} - g_{\lambda\mu} \partial_\kappa \hat{G}^{\lambda\kappa} = 0 \quad (5.43)$$

или

$$\nabla_\lambda \hat{G}^{\lambda\kappa} = \partial_\lambda \hat{G}^{\lambda\kappa} + \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \hat{G}^{\lambda\mu} = 0 \quad (5.44)$$

в согласии с (5.37).

## 6. Кривизна $V_2$ с положительно определенным фундаментальным тензором

В  $E_2$  два бивектора могут отличаться только скалярным множителем. Следовательно, в  $V_2$  тензор кривизны  $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$  может отличаться лишь скалярным множителем от  $g_{[\nu|\lambda} g_{\mu]|\kappa]}$ . Из (5.28) и (5.29) немедленно следует, что множителем является  $-K$ :

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -K g_{[\nu|\lambda} g_{\mu]|\kappa]}, \quad K_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} K g_{\mu\lambda}, \quad G_{\mu\lambda} = 0. \quad (6.1)$$

Если  $I^{\kappa\lambda}$  — бивектор единичной площадки и  $I^{\kappa\lambda} d\sigma$  — бивектор элемента  $V_2$  с площадью  $d\sigma$ , то вектор  $v^\kappa$  после параллельного перенесения вдоль границы  $I^{\kappa\lambda} d\sigma$  изменяется на величину

$$dv^\kappa = I^{\nu\mu} K_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} v^\lambda d\sigma. \quad (6.2)$$

Беря ортогональные локальные координаты и полагая  $v^1 = 1$ ,  $v^2 = 0$  в начальном положении, мы имеем  $I^{12} = -I^{21} = 1$  и  $K_{1212} = -\frac{1}{2} K$ , и, следовательно,

$$dv^1 = 0, \quad dv^2 = \frac{1}{2} K d\sigma. \quad (6.3)$$

Таким образом, вектор поворачивается на угол  $\frac{1}{2} K d\sigma$ .

Если  $\nu^\alpha$  переносится параллельно вдоль границы области  $\tau_2$ , то угол между начальным и конечным положениями  $\nu^\alpha$  равен  $\int \frac{1}{2} K d\sigma$ , т. е. интегралу от скалярной кривизны по  $\tau_2$ . Из рис. 20 и 21 мы видим, что перенесение по часовой стрелке дает поворот по часовой стрелке на поверхности с положительной кривизной и против часовой стрелки, если кривизна отрицательна.

## 7. Неголономные системы координат <sup>1)</sup>

Уравнения (1.9) остаются справедливыми для неголономной системы координат  $(h)$  (ср. IV, § 7):

$$\Gamma_{ji}^h = A_{\alpha ji}^{h\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_\mu A_\lambda^h \quad (h, i, j = 1, \dots, n). \quad (7.1)$$

Отсюда следует, что вместо (1.22) мы имеем (ср. IV.7.8)

$$\Gamma_{[ji]}^h = S_{ji}^{\cdot h} - \Omega_{ji}^{\cdot h} \quad (h, i, j = 1, \dots, n). \quad (7.2)$$

Следовательно, в  $A_n$

$$\Gamma_{[ji]}^h = -\Omega_{ji}^{\cdot h} \quad (h, i, j = 1, \dots, n) \quad (7.3)$$

и (ср. (1.26))

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla_{[j} w_{i]} &= \partial_{[j} w_{i]} + \Omega_{ji}^{\cdot h} w_h, \\ (b) \quad \nabla_j \tilde{v}^j &= \partial_j \tilde{v}^j + 2\Omega_{ji}^{\cdot i} \tilde{v}^j \end{aligned} \quad (7.4)$$

$(h, i, j = 1, \dots, n).$

Из этих уравнений немедленно следуют уравнения (IV.7.7) и (IV.7.9).

Согласно (7.2) мы имеем в  $V_n$  вместо (4.7)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ji}^h &= \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} - \Omega_{ji}^{\cdot h} + g_{jl} g^{hk} \Omega_{ik}^{\cdot l} + g_{il} g^{hk} \Omega_{jk}^{\cdot l}, \\ \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ji}) \\ &(h, i, j, k, l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (7.5)$$

<sup>1)</sup> Ср. Н. М. 1935. I; Р. К. 1954. I. Там же приведены ссылки на литературу.

Если неголономная система в каждой точке образуется  $n$  взаимно ортогональными векторами  $i^h, i^h_l; h, l = 1, \dots, n$ ,

то  $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} = 0$  и

$$\Gamma_{ji}^h = -\Omega_{ji}^{\cdot h} + g_{jl}g^{hk}\Omega_{ik}^{\cdot l} + g_{ll}g^{hk}\Omega_{jk}^{\cdot l} \\ (h, i, j, k, l = 1, \dots, n). \quad (7.6)$$

Из (7.5) следует, что в  $V_n$  (ср. (4.10, 11))

$$\Gamma_{ji}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ ji \end{smallmatrix} \right\} - \Omega_{ji}^{\cdot l} + g_{jl}g^{ik}\Omega_{ik}^{\cdot l} + \Omega_{ji}^{\cdot i} = \\ = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ ji \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \partial_j \ln g \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n), \quad (7.7)$$

т. е. (4.10) справедливо также для неголономных систем координат.

В  $A_n$  из (5.12) мы получаем следующее выражение для тензора кривизны в неголономных координатах:

$$R_{kji}^h = 2\partial_{[k}\Gamma_{j]l}^h + 2\Gamma_{[k|l}^i\Gamma_{j]l}^h + 2\Omega_{kj}^l\Gamma_{li}^h \\ (h, l, j, k, i = 1, \dots, n). \quad (7.8)$$

Конечно, все уравнения, которые содержат только величины и знак  $\nabla$ , инвариантны относительно преобразований в неголономных координатах. Но уравнения, содержащие  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$  или  $\partial_{\mu}$ , вообще говоря, не являются инвариантными. Часто удобно использовать знак  $\stackrel{h}{=}$  вместо  $=$  в уравнениях, которые справедливы только в голономных координатах.

## 8. Интегральные формулы в $V_n$ и $R_n$ <sup>1)</sup>

Применим (IV.4.15) для  $p = l$  в  $V_n$  (ср. V, § 1)

$$\int_{\tau_{n-1}} \hat{v}^{\mu} d\hat{f}_{\mu} = \int_{\tau_n} \nabla_{\mu} \hat{v}^{\mu} d\hat{f} \quad (8.1)$$

к специальному случаю, когда  $\hat{v}^{\mu}$  имеет вид

$$\hat{v}^{\mu} = \varphi \sqrt{g} \nabla^{\mu} \psi, \quad \nabla^{\mu} \psi \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\lambda} \nabla_{\lambda} \psi. \quad (8.2)$$

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Кронекер 1894.1; Бурхардт и Мейер 1900.2; Вильсон 1913.1; де Рам 1956.1.



Тогда мы получим *первое тождество Грина* в  $V_n$

$$\int_{\tau_{n-1}} V \bar{g} \varphi \nabla^\mu \psi d\hat{f}_\mu = \int_{\tau_n} V \bar{g} (\nabla_\mu \varphi) \nabla^\mu \psi d\hat{f} + \int_{\tau_n} V \bar{g} \varphi \nabla_\mu \nabla^\mu \psi d\hat{f}. \quad (8.3)$$

Меняя местами  $\varphi$  и  $\psi$  и вычитая, получаем *второе тождество Грина* в  $V_n$

$$\int_{\tau_{n-1}} V \bar{g} (\varphi \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \varphi) d\hat{f}_\mu = \int_{\tau_n} V \bar{g} (\varphi \nabla_\mu \nabla^\mu \psi - \psi \nabla_\mu \nabla^\mu \varphi) d\hat{f}. \quad (8.4)$$

При этом, конечно,  $\varphi$  и  $\psi$  должны быть выбраны таким образом, чтобы  $\varphi \nabla^\mu \psi$  и  $\psi \nabla^\mu \varphi$  удовлетворяли условиям гл. IV, § 4.

Рассмотрим теперь  $R_n$  с положительно определенным фундаментальным тензором и введем декартовы координаты  $x^h$  ( $h = 1, \dots, n$ ). Если  $n > 2$ , мы выберем  $\psi$  в виде

$$\psi = \frac{1}{n-2} a^{-n+2}, \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ih}(x^i - 'x^i)(x^h - 'x^h)} \quad (8.5)$$

$(h, i = 1, \dots, n),$

где  $'x^h$  — переменная точка. Тогда  $\psi$  есть функция от  $x^h$  и  $'x^h$  и

$$\begin{aligned} \partial_i \psi &= -' \partial_i \psi = -a^{-n} a_i, \quad ' \partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial / \partial 'x^i, \\ a_i &\stackrel{\text{def}}{=} x_i - 'x_i = a \partial_i a, \\ \nabla^2 \psi &\stackrel{\text{def}}{=} g^{hi} \partial_h \partial_i \psi = 0^1). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Отсюда, если  $\tau_n$  не содержит точку  $'x^h$ , мы получаем из (8.4)

$$\int_{\tau_{n-1}} \varphi a^{-n} a^i d\hat{f}_i + \frac{1}{n-2} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} \partial^i \varphi d\hat{f}_i = \int_{\tau_n} a^{-n+2} \nabla^2 \varphi d\hat{f}. \quad (8.7)$$

<sup>1)</sup> При  $x^i \neq 'x^i$ . — Прим. перев.

Если, однако,  $\tau_n$  содержит точку  $'x^h$ , то непосредственное интегрирование в правой части (8.7) не может быть выполнено, так как  $a^{-n+2} \rightarrow \infty$  при  $x^h \rightarrow 'x^h$ . Поэтому мы рассмотрим этот интеграл как предел интеграла по области  $\tau_n - \varepsilon$ , заключенной между  $\tau_{n-1}$  и гиперсферой  $\varepsilon$  малого радиуса  $R$ , которая содержит точку  $'x^h$ . Тогда левая часть (8.7) есть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\tau_{n-1}} (\varphi a^{-n} a^i + \frac{1}{n-2} a^{-n+2} \partial^i \varphi) d\hat{f}_i - \int_{\varepsilon} (\varphi R^{-n+1} n^i + \frac{1}{n-2} R^{-n+2} \partial^i \varphi) d\hat{f}_i \right\} \\ (i = 1, \dots, n), \quad (8.8)$$

где  $n^i$  — единичный вектор и  $d\hat{f}_i = n_i d\tau_{n-1}$ . Имеем

$$\int_{\varepsilon} n^i d\hat{f}_i = \omega R^{n-1} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8.9)$$

Здесь

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2} n}{\left(\frac{1}{2}n\right)!} & \text{для } n \text{ четного,} \\ \frac{1}{2^{(n+1)}} \frac{1}{\pi^{(n-1)/2}} & \text{для } n \text{ нечетного } ^1) \end{cases} \quad (8.10)$$

есть  $(n-1)$ -мерная площадь гиперсферы  $\varepsilon$ . Последний член во втором интеграле в (8.8) исчезает при  $R \rightarrow 0$ . Отсюда

$$\omega \varphi = - \frac{1}{n-2} \int_{\tau_n} a^{-n+2} \nabla^2 \varphi d\hat{f} + \\ + \frac{1}{n-2} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} \partial^i \varphi d\hat{f}_i + \int_{\tau_{n-1}} a^{-n} \varphi a^i d\hat{f}_i. \quad (8.11)$$

В интегралах в правой части равенства переменными являются  $x^h$ , а  $\varphi$  рассматривается как функция  $x^h$ , тогда как в левой части  $\varphi$  есть функция  $'x^h$ . (8.11) является *теоремой*

<sup>1)</sup> См. Кронекер 1894.1.

Грина для  $R_n$  с положительно определенным фундаментальным тензором.

Если в (8.11) в качестве  $\tau_n$  мы возьмем гиперсферу  $a = \rho$ , то может оказаться, что два последних интеграла исчезают, когда  $\rho \rightarrow \infty$ . В этом случае (8.11) принимает вид

$$\omega\varphi = - \frac{1}{n-2} \int_{\infty} a^{-n+2} \nabla^2 \varphi d\hat{f}, \quad (8.12)$$

или

$$\varphi = \text{Pot } \nabla^2 \varphi, \quad (8.13)$$

где Pot — интегральный оператор, определяемый выражением

$$\text{Pot} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{1}{(n-2)\omega} \int_{\infty} \dots a^{-n+2} d\hat{f}. \quad (8.14)$$

Функция  $\varphi$ , удовлетворяющая (8.12), называется *потенциальной функцией*. Достаточными условиями являются<sup>1)</sup>:

- (1)  $\varphi$  и ее первые и вторые производные всюду ограничены;
- (2) среднее значение  $\varphi$  на сфере радиуса  $\rho$  стремится к нулю при  $\rho \rightarrow \infty$ ;
- (3)

$$\lim_{\rightarrow \infty} \int_{\tau_n} \rho^{-n+2} \nabla^2 \varphi d\hat{f} = 0. \quad (8.15)$$

Функция всегда будет потенциальной, если выполнено первое условие и если функция равна нулю вне некоторой конечной сферы.

Функция  $f(x^h)$  называется *гармонической* в некоторой области, если в этой области ее первые и вторые производные ограничены и непрерывны, за исключением конечного числа гиперповерхностей, где допускаются конечные разрывы, и если  $\nabla^2 f = 0$ . Если мы положим в (8.4)  $\psi = 1$ , то для каждой  $\varphi$ , гармонической в  $\tau_n$ ,

$$\int_{\tau_{n-1}} \partial^i \varphi d\hat{f}_i = 0. \quad (8.16)$$

<sup>1)</sup> Ср. Кронекер 1894.1.

Если теперь в качестве  $\tau_{n-1}$  мы возьмем гиперсферу  $a = \rho$ , то из (8.11) и (8.16) следует, что

$$\int_n \omega \varphi = \int_{\tau_{n-1}} \rho^{-n+1} \varphi n^i d\hat{f}_i \quad (8.17)$$

или

$$\int_n \omega \varphi^{n-1} \varphi = \int_{\tau_{n-1}} \varphi n^i d\hat{f}_i. \quad (8.18)$$

Из этого уравнения следует, что значение  $\varphi$  в  $'x^h$  равно среднему значению  $\varphi$  на любой сфере с центром в  $'x^h$ , если только  $\varphi$  — гармоническая во всех точках внутри сферы и на ее границе.

$\varphi$  во внутренней точке  $\tau_n$  может быть выражена с помощью (8.11) через значения  $\nabla^2 \varphi$  в  $\tau_n$  и значения  $\varphi$  и  $n^i \partial_i \varphi$  на  $\tau_{n-1}$ . Но, очевидно, мы задали здесь слишком много. Если мы положим в (8.3)  $\psi = \varphi$ , то получим для  $R_n$

$$\int_{\tau_{n-1}} \varphi n^\mu \partial_\mu \varphi d\tau_{n-1} = \int_{\tau_n} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) d\hat{f} + \int_{\tau_n} \varphi \nabla^2 \varphi \hat{a} \hat{f}. \quad (8.19)$$

Отсюда, если  $\nabla^2 \varphi = 0$  в  $\tau_n$  и если либо  $\varphi$ , либо  $n^\mu \partial_\mu \varphi$  исчезают на  $\tau_{n-1}$ , то первый интеграл в правой части должен исчезнуть, а так как  $g_{\lambda\kappa}$  — положительно определенный, то это возможно лишь при условии, что  $\varphi$  постоянна в  $\tau_n$ .

Пусть теперь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — два таких поля, что  $\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2$  в  $\tau_n$  и или  $\varphi_1 = \varphi_2$  на  $\tau_{n-1}$  или  $n^\mu \partial_\mu \varphi_1 = n^\mu \partial_\mu \varphi_2$  на  $\tau_{n-1}$ . Тогда из предыдущего следует, что  $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const}$  в  $\tau_n$ . Отметим, что это справедливо не только в  $R_n$ , но также и в  $V_n$ , если только  $g_{\lambda\kappa}$  — положительно определенный.

В качестве примера в  $R_3$  мы рассмотрим поток тепла в изотропной среде. Если  $T$  — температура, то  $\partial^i T$  пропорционален векторной плотности теплового потока, а  $\nabla^2 T$  пропорционален подводу тепла в единице объема и за единицу времени. Далее, хорошо известно, что в установившемся режиме задание  $T$  на  $\tau_2$  и  $\nabla^2 T$  в  $\tau_3$  определяет  $T$  в  $\tau_3$ , а задание  $n^i \partial_i T$  на  $\tau_2$  и  $\nabla^2 T$  в  $\tau_3$  определяет  $T$  в  $\tau_3$  с точностью

до константы. Эти два случая известны как *первая* и *вторая граничные задачи*. Встречается также *третья граничная задача*, когда на  $\tau_2$  задано  $hn^i \partial_i T + T$ , а в  $\tau_1 - \nabla^2 T$ , причём  $h$  — известная положительная константа.

Первую граничную задачу в  $R_n$  можно решить, полагая, что  $\psi$  в (8.4) гармоническая в  $\tau_n$  и принимает значение  $\frac{1}{n-2} a^{-n+2}$  на  $\tau_{n-1}$ . Тогда (8.4) запишется в виде

$$\int_{\tau_{n-1}} (\varphi \partial^i \psi - \frac{1}{n-2} a^{-n+2} \partial^i \varphi) d\hat{f}_i + \int_{\tau_n} \psi \nabla^2 \varphi d\hat{f} = 0. \quad (8.20)$$

Из этого уравнения и из (8.11) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_n \varphi = & \int_{\tau_n} \left( \psi - \frac{1}{n-2} a^{-n+2} \right) \nabla^2 \varphi d\hat{f} + \\ & + \int_{\tau_{n-1}} \varphi \partial^i \left( \psi - \frac{1}{n-2} a^{-n+2} \right) d\hat{f}_i, \quad (8.21) \end{aligned}$$

т. е.  $\varphi$  в  $x^h$  выражается через  $\nabla^2 \varphi$  и  $\psi$  в  $\tau_n$  и  $\varphi$  и  $n^i \partial_i \varphi$  на  $\tau_{n-1}$ . Разность  $\psi - \frac{1}{n-2} a^{-n+2}$  называется *функцией Грина*. Таким образом, первая граничная задача сводится к построению функции Грина. Функции Грина могут быть также построены для других граничных задач подобного типа.

Если применить (8.11) ко всем ортогональным компонентам любой величины  $P^{h_1 \dots h_p}_{i_1 \dots i_q}$ , то мы получим (индексы  $P$  опущены)

$$\begin{aligned} \omega_n P = & - \frac{1}{n-2} \int_{\tau_n} a^{-n+2} \nabla^2 P d\hat{f} + \\ & + \frac{1}{n-2} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} \partial^i P d\hat{f}_i + \int_{\tau_{n-1}} a^{-n} P a^i d\hat{f}. \quad (8.22) \end{aligned}$$

Если в качестве  $P$  мы возьмем  $p$ -вектор  $\omega_{i_1 \dots i_p}$ ,  $p \geq 1$ , то согласно (упр. IV, 1) найдем (индексы  $i_1 \dots i_p$  опущены)

$$\begin{aligned} \omega \omega = & -\frac{1}{n-2} \int_{\tau_n} a^{-n+2} (\text{Div Rot} + \text{Rot Div}) \omega d\hat{f} + \\ & + \frac{1}{n-2} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} \partial^i \omega d\hat{f}_i + \int_{\tau_{n-1}} a^{-n} \omega a^i d\hat{f}_i. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Если компоненты  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  — потенциальные функции<sup>1)</sup>, то (8.23) принимает вид (ср. (8.13))

$$\omega = \text{Pot Div Rot } \omega + \text{Pot Rot Div } \omega. \quad (8.24)$$

Если  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  и их первые производные всюду конечны и если  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  равны нулю во всех точках вне некоторой конечной сферы, то можно доказать, что кроме (8.24) справедливо тождество

$$\omega = \text{Div Pot Rot } \omega + \text{Rot Pot Div } \omega. \quad (8.25)$$

Эти условия достаточны, но не являются необходимыми. Мы используем (8.25) для вывода интегрального представления поля  $\omega_{i_1 \dots i_p}$ , которое удовлетворяет только условию конечности его первых производных в  $\tau_n$  и на  $\tau_{n-1}$ . Отбрасывая часть поля вне  $\tau_{n-1}$ , мы получаем поле, разрывное на  $\tau_{n-1}$ . Но непрерывность может быть восстановлена введением малого слоя толщиной  $h$  по  $\tau_{n-1}$ , в котором поле изменяется непрерывно от внутреннего значения до нуля. Пусть  $x^1 = 0$  есть точка  $\tau_{n-1}$ ,  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  — значение поля в этой точке и  $i^1$  выбрано совпадающим с направлением внешней нормали к  $\tau_{n-1}$ . Тогда значение поля на оси  $x^1$  между  $x^1 = 0$  и  $x^1 = h$  равно

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega_{i_1 \dots i_p} \Big|_0 - \frac{x^1}{h} \omega_{i_1 \dots i_p} \Big|_0, \quad (8.26)$$

причем поле исчезает для  $x^1 > h$ . Если теперь  $h$  достаточно мало, то изменением  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  в направлениях, ортогональных  $i^1$ ,

<sup>1)</sup> И  $\tau_n \rightarrow \infty$ . — Прим. перев.

можно пренебречь, и, следовательно,  $\text{Div } \omega$  и  $\text{Rot } \omega$  имеют на оси  $x^1$  значения

$$(a) \quad \partial^{i_1} \omega_{i_1 \dots i_p} = -\frac{1}{h} i_1^{i_1} \omega_{i_1 \dots i_p}, \quad (8.27)$$

$$(b) \quad (p+1) \partial_{[i_0} \omega_{i_1 \dots i_p]} = -\frac{1}{h} (p+1) i_1^{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p}.$$

Для  $d\hat{f}$ -слоя мы должны теперь принять выражение  $d\hat{f} = hn^i df_i$ . Отсюда, применяя (8.25) к полю со слоем и переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , мы получаем тождество

$$\begin{aligned} -(n-2) \omega_{i_1 \dots i_p} &= \text{Div} \int_{\tau_n} a^{-n+2} \text{Rot } \omega df + \\ + \text{Rot} \int_{\tau_n} a^{-n+2} \text{Div } \omega df - \partial^{i_0} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} (p+1) \omega_{[i_1 \dots i_p} df_{i_0]} - \\ - p \partial_{[i_1} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} \omega_{j | i_2 \dots i_p]} df^j, \quad (8.28) \end{aligned}$$

выражающее значение  $\omega$  в  $x^k$  через значения  $\text{Div } \omega$  и  $\text{Rot } \omega$  в  $\tau_n$  и  $\omega_{[i_1 \dots i_p} n_{i_0]}$  и  $n^j \omega_{j i_2 \dots i_p}$  на  $\tau_{n-1}$ .

Тождество (8.11), которое было выведено здесь с помощью тождеств Грина, могло бы быть получено так же, как (8.28). Тогда мы в качестве исходного должны были бы взять уравнение (8.12), которое должно быть сначала доказано, но только для полей с конечными значениями самого поля и его первых и вторых производных, исчезающих вне некоторой конечной сферы. После отбрасывания поля вне  $\tau_{n-1}$  конечность первых производных могла бы быть восстановлена введением одного слоя, а конечность вторых производных — введением двух других слоев внутри и вне первого слоя (так называемый двойной слой). После этого можно было бы применить (8.12). Тогда второй член в правой части (8.11) порождается первым слоем. Действительно, он имеет тот же вид, что и поправочные члены в (8.28). Третий член в правой части связан с двойным слоем.

## УПРАЖНЕНИЯ

V. 1. Доказать, что в  $V_n$

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla^\mu \nabla_\mu w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \\ &= \nabla^\mu (p+1) \nabla_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p]} + p \partial_{[\lambda_1} \nabla^\mu w_{|\mu| \lambda_2 \dots \lambda_p]} + \\ &+ K_{[\lambda_1}{}^\kappa w_{|\kappa| \lambda_2 \dots \lambda_p]} + \frac{1}{2} (p-1) K_{[\lambda_1 \lambda_2}{}^{\mu\kappa} w_{|\mu\kappa| \lambda_3 \dots \lambda_p]} \end{aligned} \quad (1a)$$

для  $p > 1$  и что последний член в правой части исчезает для  $p = 1$ .

V. 2. Для каждого векторного поля  $w_\lambda$  в  $V_n$  с исчезающим  $G_{\lambda\kappa}$  имеет место

$$\nabla^2 w = \text{Div Rot } w + \text{Grad Div } w. \quad (2a)$$

V. 3.  $G_{\lambda\kappa}$  исчезает для  $n = 2$ .

V. 4. Перенесение Вейля определяется соотношениями

$$\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = -Q_\mu g_{\lambda\kappa}, \quad S_{\mu\lambda}{}^\kappa = 0. \quad (4a)$$

Доказать, что

$$\Gamma_{\mu\kappa}{}^\kappa = \frac{1}{2} \partial_\mu g + \frac{1}{2} n Q_\mu. \quad (4\beta)$$

V. 5. Доказать, что для перенесения Вейля

$$' \nabla_\mu ' g_{\lambda\kappa} = - ' Q_\mu ' g_{\lambda\kappa} \quad (5a)$$

если

$$' g_{\lambda\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma g_{\lambda\kappa}, \quad ' Q_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} Q_\lambda - \partial_\lambda \ln \sigma. \quad (5\beta)$$

V. 6. Если  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  и  $' \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  являются коэффициентами двух линейных связностей, то разность  $' \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  есть тензор.

V. 7. Если  $V_n$  подвергается конформному преобразованию, т. е.  $g_{\lambda\kappa}$  заменяется  $\sigma g_{\lambda\kappa}$ , то  $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$  преобразуется следующим образом:

$$' K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa + g_{[\nu|\lambda} s_{\mu] \rho} g^{\rho\kappa}, \quad (7a)$$

где

$$s_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \nabla_\mu s_\lambda - s_\mu s_\lambda + \frac{1}{2} s_\rho s^\rho g_{\mu\lambda} \quad (7\beta)$$

$$s_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \ln \sigma.$$

V. 8. Доказать, что для неголономной координатной системы ( $h$ )

$$\partial_{[j} \partial_{i]} p = - \Omega_{ji}^h \partial_h p, \quad (8a)$$

$$d \left( \frac{d\xi^i}{d\xi^j} \right)^h = \Omega_{ji}^h \left( \frac{d\xi^j}{d\xi^i} \right)^i \left( \frac{d\xi^i}{d\xi^j} \right)^l. \quad (8\beta)$$



## РЕЗЮМЕ ПО ГЛАВАМ I—V

### Принципы метода коренных букв и индексов

Каждой координатной системе принадлежит множество *текущих* индексов и соответствующее множество *фиксированных* индексов. Эти текущие и фиксированные индексы используются только для данной системы координат. Каждый геометрический объект имеет свою *коренную букву*. При преобразовании координат текущие и фиксированные индексы изменяются, но коренная буква остается неизменной. Если преобразуется объект, то коренная буква изменяется, но текущие и фиксированные индексы остаются теми же. Мы условились использовать курсивные фиксированные индексы для греческих текущих индексов, например  $\kappa, \lambda = 1, \dots, n$ , и прямые фиксированные индексы для латинских текущих индексов, например  $h, i = 1, \dots, n$ .

В этой книге мы всегда используем

$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$  и иногда  $\omega = 1, \dots, n$ ,

$\kappa', \lambda', \mu', \nu', \rho', \sigma', \tau'$  и иногда  $\omega' = 1', \dots, n'$ ,

для криволинейных координат в  $X_n$  и  $E_n$  и прямолинейных координат в  $R_n$ ,

$h, i, j, k, l = 1, \dots, n$ ,

$h', i', j', k', l' = 1', \dots, n'$

для неголомомных координат в  $X_n$  и декартовых координат в  $R_n$ .

Другими текущими индексами могут, например, быть  $a, b, c, d, e; x, y, z, u, v; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon; \xi, \eta, \zeta, \theta$  и т. д. При переходе от одного множества текущих индексов к дру-

гому следует для каждого из них выбирать специальное множество фиксированных индексов.

Для коренных букв мы предпочитаем: латинские буквы для скаляров и тензоров; то же со знаками  $\sim \wedge *$  над буквой для  $\Delta$ -плотностей, плотностей и  $W$ -скаляров;  $\xi$  для координат в  $X_n$ ,  $x$  для прямолинейных координат в  $E_n$ .

Но мы не придерживаемся строго этих правил. В физике часто существуют другие соображения, влияющие на выбор коренных букв.

Координатная система обозначается одним из ее текущих индексов в круглых скобках, например  $(x)$ .

Компоненты величины с индексами, принадлежащими различным системам координат, называются *промежуточными* (II, § 3). Величины с индексами, принадлежащими различным пространствам, называются *связывающими величинами* (II, § 3).

## Многообразия

$X_n$  есть  $n$ -мерное многообразие с координатами  $\xi^x$  и обратимыми преобразованиями

$$\xi^{x'} = \xi^{x'}(\xi^x) \quad (\text{IV. 1.1})$$

с функциями, аналитическими в рассматриваемой области или имеющими в этой области определенное количество непрерывных производных. Координаты называются *криволинейными*. Каждой системе координат в  $X_n$  принадлежат  $n$  множеств  $\infty^{n-1}$  координатных  $X_1$  (кривых),  $\binom{n}{2}$  множеств  $\infty^{n-2}$  координатных  $X_2$  (поверхностей), ... и  $n$  множеств  $\infty^1$  координатных  $X_{n-1}$  (гиперповерхностей).

$E_n$  есть  $X_n$ , в котором некоторые системы координат являются привилегированными. Они преобразуются друг в друга с помощью обратимых преобразований линейной группы  $G_a$

$$x^{x'} = A_x^{x'} x^x + a^{x'}, \quad A_x^{x'} \text{ и } a^{x'} \text{ — константы.} \quad (\text{I. 1.1a, b})$$

Эти координаты называются *прямолинейными*. Однако могут быть также использованы криволинейные координаты. Каждой системе прямолинейных координат в  $E_n$  принадлежат  $n$

множеств  $\infty^{n-1}$  координатных  $E_1$  (прямых линий),  $\binom{n}{2}$  множеств  $\infty^{n-2}$  координатных  $E_2$  (плоскостей), ... и  $n$  множеств  $\infty^1$  координатных  $E_{n-1}$  (гиперплоскостей).

*Центро-аффинное*  $E_n$  есть  $E_n$  с фиксированным началом координат. Его группой является  $G_{no}$  всех обратимых линейных однородных преобразований

$$x^{x'} = A_{x'}^{x''} x^{x''}, \quad A_{x'}^{x''} — \text{константы.}$$

$V_n$  есть  $X_n$  с действительным фундаментальным тензором  $g_{\lambda\kappa}$ ,  $\text{Det}(g_{\lambda\kappa}) \neq 0$ . В  $V_n$  мы рассматриваем только *действительные* преобразования координат.

В  $V_n$  всегда существуют ортогональные криволинейные координаты для  $n \leq 3$ , а в особых случаях также и для  $n > 3$  (V, § 4).

$R_n$  есть  $E_n$  с действительным фундаментальным тензором с постоянными компонентами относительно прямолинейных координат. В  $R_n$  существуют *ортогональные* прямолинейные системы координат. Они называются *декартовыми*. Однако могут также использоваться общие прямолинейные и криволинейные системы координат.

Ориентированное  $E_n$  есть  $E_n$  с фиксированной ориентацией. Каждая система координат фиксирует ориентацию порядком координат.

В связи с линейным законом преобразования  $d\xi^{x'}$

$$d\xi^{x'} = A_{x'}^{x''} d\xi^{x''}, \quad A_{x'}^{x''} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{x''} \xi^{x'}, \quad \partial_{x'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^{x'}} \quad (\text{IV. 2.2})$$

каждой точке  $X_n$  принадлежит *центро-аффинное*  $E_n$ , *локальное*  $E_n$  этой точки. В  $V_n$  локальным  $E_n$  является *центро-евклидово*  $R_n$ .

### Плоские подпространства в $E_n$ (I, § 3)

$n - p$  независимых линейных уравнений в прямолинейных координатах определяют *собственное*  $E_p$ , если они имеют конечные решения, и *несобственное*  $E_p$  (или  $E_p$  на бесконечности) в противном случае. Несобственное  $E_p$  называется также  $(p + 1)$ -*направлением*.

$E_p$  и  $E_q$  в  $E_n$  или пересекаются по  $E_s$  или они не имеют никаких общих  $E_0$  ( $s = -1$ ).  $E_s$  называется *пересечением*  $E_p$  и  $E_q$ . *Объединение*  $E_p$  и  $E_q$  есть  $E_t$  наименьшей размерности, содержащее  $E_p$  и  $E_q$ . Имеет место следующая связь между  $p$ ,  $q$ ,  $s$  и  $t$ :

$$-1 \leq s \leq p, \quad p + q - n \leq s \leq q, \quad t = p + q - s.$$

Если в  $E_n$  заданы собственное  $E_p$  и  $(n - p)$ -направление, не имеющее общих направлений с  $E_p$ , то возможны следующие процессы:

- (1) пересечение фигуры с  $E_p$ ;
- (2) редукция фигуры относительно  $(n - p)$ -направления;
- (3) проекция фигуры на  $E_p$  в  $(n - p)$ -направлении.

$E_p$  в  $E_n$  может иметь *внутреннюю* ориентацию, т. е.  $p$ -мерную ориентацию в  $E_p$ , или *внешнюю* ориентацию, т. е.  $(n - p)$ -мерную ориентацию *вокруг*  $E_p$ .

Число параметров, необходимых для фиксирования

$E_p$ в $E_n$	$(p + 1)(n - p)$
$E_p$ , проходящее через данное $E_q$ в $E_n$	$(p - q)(n - p)$
$E_p$ , проходящее через $O$ в центро-аффинном $E_n$	$p(n - p)$ .

Говорят, что  $p$  линейно независимых контравариантных (ковариантных) векторов *порождают* контравариантную (ковариантную) *оболочку*, которая состоит из всех линейно зависимых от них векторов (говорят также, что оболочка *натянута* на  $p$  векторов). Они фиксируют  $p$ -направление ( $(n - p)$ -направление), называемое носителем оболочки. Говорят, что носитель *порождается* этими  $p$ -векторами.  $p$  называется *размерностью* оболочки.

## Геометрические объекты

*Геометрические объекты* различаются законами преобразования их компонент при координатных преобразованиях. Если новые компоненты линейно однородны относительно старых компонент, алгебраически однородны по  $A_\lambda^{x'}$  и не зависят от производных  $A_\lambda^{x'}$ , то объект называется *геометрической величиной* (II, § I; IV, § 2). Величина

в точке  $X_n$  всегда может рассматриваться как величина в локальном  $E_n$  этой точки (IV, § 2).

Закон преобразования тензора валентности  $p + q$ , контравариантной валентности  $p$  и ковариантной валентности  $q$ :

$$P^{x'_1 \dots x'_p}_{\dots \lambda'_1 \dots \lambda'_q} = A^{x'_1 \dots x'_p \lambda_1 \dots \lambda_q}_{x_1 \dots x_p \lambda'_1 \dots \lambda'_q} P^{x_1 \dots x_p}_{\dots \lambda_1 \dots \lambda_q}. \quad (\text{II. 3.1})$$

Тензор есть *скаляр*, если его валентность равна 0, и *вектор*, если его валентность равна 1, *контравариантный* (*ковариантный*), если он имеет только верхние (нижние) индексы, и *смешанный* во всех остальных случаях.

*Тензорная  $\Delta$ -плотность* (*плотность*) веса  $t$  содержит в законе преобразования дополнительный множитель  $\Delta^{-t}$  ( $|\Delta|^{-t}$ ) (II, § 8).

*W-тензор* содержит в законе преобразования дополнительный множитель  $\Delta/|\Delta|$  (II, § 8).

Кроме редких случаев, верхний и нижний индексы никогда не пишутся на одной вертикальной линии.

*Алгебраические операции для величин* (II, § 8)

*Сложение*  $P^{\kappa}_{\lambda\mu} + Q^{\kappa}_{\mu\lambda} = R^{\kappa}_{\mu\lambda}.$

*Умножение*  $P^{\kappa\lambda}_{\dots\mu} Q^{\nu}_{\rho\sigma} = R^{\kappa\lambda\nu}_{\dots\mu\rho\sigma}.$

*Свертка*  $P^{\kappa\lambda}_{\dots\mu} Q^{\mu}_{\rho\kappa} = R^{\lambda}_{\rho}.$

*Образование изомера*  $P^{\kappa\lambda}_{\dots\mu} = Q^{\lambda\kappa}_{\mu}.$

*Симметрирование*

$$P_{(\kappa\lambda\mu)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3!} (P_{\kappa\lambda\mu} + P_{\lambda\mu\kappa} + P_{\mu\kappa\lambda} + P_{\kappa\mu\lambda} + P_{\lambda\kappa\mu} + P_{\mu\lambda\kappa}).$$

*Тензор, симметричный по всем индексам*

$$P_{\kappa\lambda\mu} = P_{(\kappa\lambda\mu)}.$$

*Альтернирование*

$$P_{[\kappa\lambda\mu]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3!} (P_{\kappa\lambda\mu} + P_{\lambda\mu\kappa} + P_{\mu\kappa\lambda} - P_{\kappa\mu\lambda} - P_{\lambda\kappa\mu} - P_{\mu\lambda\kappa}).$$

*Поливектор* альтернирован по всем индексам

$$P_{\kappa\lambda\mu} = P_{[\kappa\lambda\mu]}.$$

*Симметризованное произведение*  $p$  векторов

$$v^{x_1} \cdots v^{x_p} = v^{(x_1 \dots x_p)}.$$

*Альтернированное (внешнее) произведение*  $p$  векторов

$$v^{x_1} \cdots v^{x_p} = v^{[x_1 \dots x_p]}.$$

Поливектор называется *простым*, если он представим в виде альтернированного произведения векторов. Необходимые и достаточные условия этого

$$v^{[x_1 \dots x_p v^{\lambda_1}]} \cdots v^{\lambda_p} = 0, \quad (\text{II. 6.6})$$

а также

$$v^{[x_1 \dots x_p v^{\lambda_1 \lambda_2}]} \cdots v^{\lambda_p} = 0. \quad (\text{II. 6.7})$$

*Выключение* индекса сверткой с базисным вектором

$$P_{\mu}^{(\kappa)\lambda} = P^{(\kappa)\lambda}_{\mu} = e_{\rho}^{\kappa} P_{\rho\mu}^{\lambda}.$$

Текущие индексы, которые не преобразуются при координатных преобразованиях, называются *мертвыми*. Они пишутся непосредственно над или под центральной буквой или выделяются на своем месте круглыми скобками. Мертвые индексы принадлежат коренной букве. Остальные индексы, называемые *живыми*, всегда пишутся справа от центральной буквы.

Если выключить все индексы тензора, кроме, например, индекса  $\kappa$ , и если среди получившихся векторов имеются в точности  $r$  линейно независимых, то  $r$  называется  $\kappa$ -*рангом* этого тензора. Векторы порождают  $\kappa$ -оболочку. Если  $\kappa$  — верхний (нижний) индекс, то *носителем*  $\kappa$ -оболочки является  $E_r (E_{n-r})$ .

## Величины валентности 2 (II, §§ 9—12)

Каждой величине валентности 2 всегда соответствует матрица. Мы уславливаемся, что первый индекс обозначает строки, а второй — столбцы и что если два индекса расположены вертикально один над другим, нижний индекс считается первым. Матрица имеет *ранг*  $r$ , если она содержит ненулевые миноры с  $r$  строками и не содержит ненулевые

миноры с  $r + 1$  строками. Ранг тензора валентности 2 равен рангу его матрицы. Ранг  $P_{\lambda}^{\kappa}$  равен  $r$  тогда и только тогда, когда

$$s! P_{[\lambda_1 \dots \lambda_s]}^{[\kappa_1 \dots \kappa_s]} \begin{cases} \neq 0 & \text{для } s = r, \\ = 0 & \text{для } s > r. \end{cases} \quad (\text{II. 9.3})$$

Компоненты величины, стоящей слева, являются  $s$ -строчными алгебраическими дополнениями матрицы  $P_{\lambda}^{\kappa}$ , и мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Det}(P_{\lambda}^{\kappa}) &= n! P_{[1 \dots n]}^{[1 \dots n]} = \\ &= n! P_{.1}^{[1]} \dots P_{.n}^{[n]} = n! P_{.1}^{[1]} \dots P_{.n}^{[n]}. \end{aligned} \quad (\text{II. 9.1})$$

Бивектор, например,  $v^{\kappa\lambda}$  имеет ранг  $r$  (всегда четный) тогда и только тогда, когда

$$v^{[\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{2p}]} \begin{cases} \neq 0 & \text{для } 2p = r, \\ = 0 & \text{для } 2p > r, \end{cases} \quad (\text{II. 9.6})$$

и для  $r = n$  мы имеем

$$\text{Det}(v^{\kappa\lambda}) = \left( \frac{n!}{2^{\frac{1}{2}n} \left(\frac{1}{2}n\right)!} v^{[12 \dots n]} \right)^2. \quad (\text{II. 9.5})$$

Если ранг равен  $n$ , существует обратная величина. Величина, обратная, например,  $P_{\lambda}^{\kappa}$  обозначается  $\bar{P}_{\lambda}^{\kappa}$ . Для каждого значения  $\kappa$  и  $\lambda$  элемент  $\bar{P}_{\lambda}^{\kappa}$  равен алгебраическому дополнению элемента  $P_{\lambda}^{\kappa}$ , деленному на  $\text{Det}(P_{\lambda}^{\kappa})$  (II, § 3). То же справедливо *mutatis mutandis* для всех величин валентности 2 и их матриц.

Если  $r$  — ранг действительного симметричного тензора валентности 2, то всегда существует действительная система координат, относительно которой матрица принимает каноническую форму, состоящую из  $s$  элементов  $-1$  и  $r - s$  элементов  $+1$  на главной диагонали, тогда как все остальные элементы равны нулю. Сигнатура — — — ... + + + ... называется четной (нечетной), если индекс  $s$  четный (нечетный). Сигнатура и индекс являются инвариантами действительных преобразований координат (II, § 10).

Если  $r$  — ранг действительного бивектора, то всегда существует действительная система координат, относи-

тельно которой матрица принимает каноническую форму с  $\frac{1}{2}r$  матрицами  $\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$  на главной диагонали и остальными элементами, равными нулю (II, § 10).

Если

$$T_{\lambda}^{\kappa} v^{\lambda} = \sigma v^{\kappa}, \quad (\text{II. 14.1})$$

то  $v^{\kappa}$  называется *собственным вектором*  $T_{\lambda}^{\kappa}$ , а  $\sigma$  — *собственным значением*. Собственные значения являются корнями уравнения

$$\text{Det}(T_{\lambda}^{\kappa} - \sigma A_{\lambda}^{\kappa}) = 0 \quad (\text{II. 14.2})$$

или

$$\text{Det}(T_{\mu\lambda} - \sigma g_{\mu\lambda}) = 0, \quad (\text{II. 14.4})$$

если имеется фундаментальный тензор. Если  $g_{\lambda\kappa}$  — *определенный* и  $T_{\lambda\kappa}$  — *действительный и симметричный*, то собственные значения всегда действительны. В этом случае всегда существует действительная декартова система координат ( $h$ ) такая, что (*теорема о главных осях*)

$$T_{ji} = 0 \quad (j \neq i; \quad i, j = 1, \dots, n). \quad (\text{II. 14.7})$$

Если  $f_{\mu\lambda}$  — *действительный* бивектор ранга  $r$  и  $g_{\lambda\kappa}$  — *определенный*, то всегда возможно разложить  $f_{\mu\lambda}$  на  $\frac{1}{2}r$  взаимно ортогональных действительных листов (*теорема о главных листах*) (II, § 14).

## Специальные величины

$A_{\lambda}^{\kappa}$ ,  $\tilde{E}^{\kappa_1 \dots \kappa_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  существуют в  $X_n$  *априори* (II, § 8)

$$\begin{aligned} A_{\lambda}^{\kappa} &\stackrel{*}{=} \delta_{\lambda}^{\kappa}, \\ \tilde{E}^{1 \dots n} &= +I, \quad \tilde{e}_{1 \dots n} = +I. \end{aligned} \quad (\text{II. 8.3})$$

$\tilde{E}^{\kappa_1 \dots \kappa_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  устанавливают взаимно однозначные соответствия между альтернированными величинами, которые



выражаются в простейшем случае уравнениями

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{\mu_1 \dots \mu_p} &= (-1)^{\alpha_p} v^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\ \tilde{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} &= (-1)^{\beta_p} w_{\mu_1 \dots \mu_p}, \\ \hat{v}_{\mu_1 \dots \mu_p} &= (-1)^{\gamma_p} v^{\mu_{p+1} \dots \mu_n}, \\ \hat{w}^{\mu_{p+1} \dots \mu_n} &= (-1)^{\delta_p} w_{\mu_1 \dots \mu_p}.\end{aligned}\quad (\text{II. 8.6,14})$$

Здесь  $\mu_1 \dots \mu_n$  — четная перестановка  $1 \dots n$ , а показатели  $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p$  могут быть положены равными нулю, если мы не намерены вводить подгруппы  $G_a$  и отождествлять величины инвариантным образом.

Наиболее часто используются следующие подгруппы  $G_a$  и принадлежащие им величины (I, § 2; III, §§ 1—4):

$G_{\text{но}}$ (центро-аффинная):	начало $x^\kappa = 0$ ;
$G_{\text{eq}}$ (эквиаффинная, $\Delta = \pm 1$ ):	начало; единичный объем (плотность) $\hat{q}$ ; $\hat{q}[\kappa] = \pm 1$ ;
$G_{\text{sa}}$ (унимодулярная, $\Delta = \pm 1$ ):	начало; $\hat{q}$ и ориентация ( $W$ -скаляр) $\hat{\omega}$ ; $\hat{\omega}[\kappa] = \pm 1$ ; $E^{\kappa_1 \dots \kappa_n}, e_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ ; $(\kappa)$
$G_{\text{or}}$ (вращения и отражения, $\Delta = \pm 1$ ):	начало; фундаментальный тензор $g_{\lambda\kappa}$ ; $g$ ; $\hat{i}$ ;
$G_{\text{ro}}$ (вращения, $\Delta = \pm 1$ ):	начало; $g_{\lambda\kappa}$ ; ориентация $\hat{\omega}$ ; $g$ ; $\hat{i}$ ; $I^{\kappa_1 \dots \kappa_n}, l_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ .

С помощью этих инвариантов величины, различные относительно  $G_a$ , могут быть отождествлены. Для  $n = 2v + 1$  из  $4n + 2$  различных величин

скаляр	контр. вектор	контр. $n$ -вектор
	ков. вектор	ков. $n$ -вектор
$W$ -скаляр	контр. $W$ -вектор	контр. $W$ - $n$ -вектор
	ков. $W$ -вектор	ков. $W$ - $n$ -вектор

остаются для  $G_{eq}$  в точности  $2n$  величин (каждая с двумя различными геометрическими представлениями):

скаляр	контр. вектор	контр. $\nu$ -вектор	
	ков. вектор	ков. $\nu$ -вектор,	...

$n + 1$  величин для  $G_{or}$  (каждая с четырьмя различными геометрическими представлениями):

скаляр	вектор	$\nu$ -вектор	
$W$ -скаляр	$W$ -вектор	$W$ - $\nu$ -вектор	...

и  $\nu + 1$  величин для  $G_{ro}$  (каждая с восемью различными геометрическими представлениями):

скаляр    вектор ...  $\nu$ -вектор.

Для  $n = 2\nu$ , если мы хотим избежать мнимых величин, отождествление возможно лишь до  $G_{or}$  включительно. Таким образом, для  $n = 4$  мы имеем:

Группа  $G_a$ :

скаляр	контр. вектор	контр. 4-вектор	
	ков. вектор	ков. 4-вектор	...
$W$ -скаляр	контр. $W$ -вектор	контр. $W$ -4-вектор	
	ков. $W$ -вектор	ков. $W$ -4-вектор	...

Группа  $G_{eq}$  (каждая величина с двумя различными геометрическими представлениями):

скаляр	{	контр. вектор ... контр. 4-вектор
$W$ -скаляр		ков. вектор ... ков. 4-вектор

Группа  $G_{or}$  (каждая величина с четырьмя различными геометрическими представлениями):

скаляр	{	вектор ... 4-вектор
$W$ -скаляр		

Для  $n = 3$  для группы  $G_{ro}$  мы имеем только скаляры и векторы. Это является точкой зрения обычного векторного анализа. В теории упругости (гл. VII) лучше всего не выходить за рамки  $G_{or}$ . Тогда мы имеем скаляры,  $W$ -скаляры (псевдоскаляры), векторы и  $W$ -векторы (псевдовекторы).

Фундаментальный тензор  $g_{\lambda\kappa}$  (II, § 12):  
Декартовы компоненты:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -1, \dots, g_{ss} = -1, \\ g_{s+1\ s+1} &= +1, \dots, g_{nn} = +1; \\ g^{11} &= -1, \dots, g^{ss} = -1, \\ g^{s+1\ s+1} &= +1, \dots, g^{nn} = +1. \end{aligned} \quad (\text{II. 12.7})$$

Длина вектора  $v^\kappa$ :

$$|\sqrt{g_{\lambda\kappa} v^\lambda v^\kappa}| = |\sqrt{-v^1 v^1 - \dots + v^n v^n}|. \quad (\text{II. 12.3,15})$$

Изотропный вектор = вектор нулевой длины.  
Нулевой конус в  $R_n$ :

$$g_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa = 0, \quad -x^1 x^1 - \dots + x^n x^n = 0. \quad (\text{II. 12.4,16})$$

$\pm$  области:

$$g_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa \geq 0.$$

Единичная гиперсфера:

$$g_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa = \pm 1, \quad -x^1 x^1 - \dots + x^n x^n = \pm 1.$$

Угол между двумя векторами в одной области:

$$\cos \varphi = \frac{\mp g_{\lambda\kappa} u^\lambda v^\kappa}{|\sqrt{(g_{\nu\rho} u^\nu u^\rho)(g_{\sigma\tau} v^\sigma v^\tau)}|} \quad \text{в } \mp \text{ области.} \quad (\text{II. 12.8})$$

Ко- и контравариантные ортогональные компоненты:

$$v^h = \begin{cases} -v_h & (h = 1, \dots, s), \\ +v_h & (h = s+1, \dots, n). \end{cases} \quad (\text{II. 12.14})$$

Величины, определяемые  $g_{\lambda\kappa}$ :

$$g[\kappa] = |\text{Det}(g_{\lambda\kappa})|, \quad \hat{i} = |\sqrt{\bar{g}}|, \quad (\text{II. 12.20,22})$$

и если ориентация задана координатной системой ( $h$ ),

$$\begin{aligned} f^{x_1 \dots x_n} &= n! \begin{bmatrix} i^{x_1} & \dots & i^{x_n} \\ 1 & & n \\ \dots & & \dots \\ n & & 1 \end{bmatrix}, \\ i_{\lambda_1 \dots \lambda_n} &= n! \begin{bmatrix} i_{\lambda_1} & \dots & i_{\lambda_n} \\ 1 & & n \\ \dots & & \dots \\ n & & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II. 12.17})$$

*Матричное исчисление* — независимая дисциплина, которую не обязательно связывать с ковариантными, контравариантными или смешанными величинами валентности 2. Но если мы применяем матричное исчисление к этим величинам в  $E_n$ , то нужно различать матрицы этих трех видов величин. Если используются только смешанные тензоры и векторы, то мы имеем следующую переводную таблицу (ср. II, § 13):

$$\begin{aligned} PQ &= R, & P^x_{\mu} Q^{\mu}_{\lambda} &= R^x_{\lambda}, \\ 'v &= Pv, & 'v^x &= P^x_{\lambda} v^{\lambda}, \\ 'w &= wP, & 'w_{\lambda} &= w_{\mu} P^{\mu}_{\lambda}, \\ \overset{\downarrow}{P}, & & \overset{\downarrow}{P}^x_{\lambda} &= P^x_{\lambda}, \\ \overset{\downarrow}{Q} \overset{\downarrow}{P} &= \overset{\downarrow}{R}, & \overset{\downarrow}{Q}^{\mu}_{\lambda} \overset{\downarrow}{P}^{\lambda}_{\mu} &= \overset{\downarrow}{R}^{\lambda}_{\lambda}. \end{aligned}$$

Это исчисление весьма эффективно в  $R_n$  с положительно определенным фундаментальным тензором, так как там исчезает разница между ко- и контравариантными ортогональными компонентами. Однако если приходится иметь дело с ко- или контравариантными тензорами валентности 2 в  $E_n$ , то мы дополнительно имеем следующую переводную таблицу (ср. II, § 13):

$$\begin{aligned} f, \overset{\downarrow}{f}, & & f^{\lambda\lambda}, \overset{\downarrow}{f}^{\lambda\lambda} &= f^{\lambda\lambda}, \\ h, \overset{\downarrow}{h}, & & h_{\lambda\lambda}, \overset{\downarrow}{h}_{\lambda\lambda} &= h_{\lambda\lambda}, \\ hv &= v\overset{\downarrow}{h}, & h_{\lambda\lambda} v^{\lambda} &= v^{\lambda} \overset{\downarrow}{h}_{\lambda\lambda}, \\ wf &= \overset{\downarrow}{f}w, & w_{\lambda} f^{\lambda\lambda} &= \overset{\downarrow}{f}^{\lambda\lambda} w_{\lambda}. \end{aligned}$$

При использовании этого исчисления необходимо особо отмечать ко- или контравариантный характер всех величин.

## Инвариантные дифференциальные операторы в $X_n$

### 1. Внешние дифференциалы (IV, § 3):

$$\begin{array}{ll}
 Dp = \text{Grad } p: & \partial_i p, \\
 D\overset{*}{p} = \text{Grad } \overset{*}{p}: & \partial_i \overset{*}{p}, \\
 (q+1)D\omega = \text{Rot } \omega: & (q+1)\partial_{[\mu} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}, \\
 (q+1)D\overset{*}{\omega} = \text{Rot } \overset{*}{\omega}: & (q+1)\partial_{[\mu} \overset{*}{\omega}_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}, \\
 \text{Div } \hat{v}: & \partial_\mu \hat{v}^{\mu\kappa_2 \dots \kappa_p} \\
 \text{Div } \tilde{v}: & \partial_\mu \tilde{v}^{\mu\kappa_2 \dots \kappa_p} \left. \vphantom{\partial_\mu \tilde{v}^{\mu\kappa_2 \dots \kappa_p}} \right\} \text{вес} + 1. \\
 \text{Rot Grad } p = 0; & \text{Rot Grad } \overset{*}{p} = 0, \\
 \text{Rot Rot } \omega = 0; & \text{Rot Rot } \overset{*}{\omega} = 0, \\
 \text{Div Div } \hat{v} = 0; & \text{Div Div } \tilde{v} = 0.
 \end{array}$$

Оператор  $\text{div}$  в выражении  $\text{div } \vec{v}$  в обычном векторном анализе соответствует оператору  $\text{Div}(\text{Rot})$ , если  $\vec{v}$  рассматривается как контравариантная векторная плотность (ковариантный бивектор). Оператор  $\text{rot}$  в выражении  $\text{rot } \vec{v}$  в обычном векторном анализе соответствует для нечетной (четной) сигнатуры оператору  $\mp \text{Rot}(-\text{Div})$ , если  $\vec{v}$  рассматривается как ковариантный вектор (контравариантная бивектор-плотность).

Если вращение ковариантного  $q$ -вектора ( $W$ - $q$ -вектора) исчезает в некоторой области  $X_n$ , то существует всегда область, в которой  $q$ -вектор ( $W$ - $q$ -вектор) для  $q=1$  представим в виде градиента скаляра ( $W$ -скаляра), а для  $q>1$  — в виде вращения ковариантного  $(q-1)$ -вектора ( $W$ - $(q-1)$ -вектора). Эта теорема может быть также сформулирована в терминах контравариантных поливектор-плотностей ( $\Delta$ -плотностей) веса  $+1$  (IV, § 4).

### 2. Теорема Стокса (IV, § 4):

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} df^{\mu\lambda_1 \dots \lambda_q} = \int_{\tau_q} v_{\lambda_1 \dots \lambda_q} df^{\lambda_1 \dots \lambda_q}. \quad (\text{IV. 4.1})$$

Имеются 9 других форм этой теоремы. В  $X_3$  наиболее важными формулами этого рода являются

$$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} v_{\lambda\kappa]} df^{\mu\lambda\kappa} = \int_{\tau_2} v_{\lambda\kappa} df^{\lambda\kappa}, \quad (\text{IV. 4.21})$$

$$\int_{\tau_3} \partial_{\mu} \hat{v}^{\mu} d\hat{f} = \int_{\tau_2} \hat{v}^{\mu} d\hat{f}_{\mu}. \quad (\text{IV. 4.27})$$

$$\int_{\tau_2} \partial_{[\mu} v_{\lambda]} df^{\mu\lambda} = \int_{\tau_1} v_{\lambda} df^{\lambda}, \quad (\text{IV. 4.29})$$

$$2 \int_{\tau_2} \partial_{\mu} \hat{v}^{\lambda\mu} d\hat{f}_{\lambda} = \int_{\tau_1} \hat{v}^{\lambda\mu} d\hat{f}_{\lambda\mu}, \quad (\text{IV. 4.35})$$

каждая из которых допускает также запись в четырех других формах.

3. Производная Ли относительно поля  $v^{\kappa}$  (IV, § 5):

$$D_L \hat{P}^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} = v^{\mu} \partial_{\mu} \hat{P}^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} + \hat{P}^{\kappa\lambda}_{\dots\rho} \partial_{\nu} v^{\rho} - \\ - \hat{P}^{\sigma\lambda}_{\dots\nu} \partial_{\sigma} v^{\kappa} - \hat{P}^{\kappa\sigma}_{\dots\nu} \partial_{\sigma} v^{\lambda} - t \hat{P}^{\kappa\lambda}_{\dots\nu} \partial_{\mu} v^{\mu}. \quad (\text{IV. 5.22})$$

Производные Ли  $v^{\kappa}$ ,  $A^{\kappa}_{\lambda}$ ,  $\hat{E}^{\kappa_1} \dots \kappa_n$  и  $\hat{e}_{\lambda_1} \dots \lambda_n$  равны нулю. Если поле увлекается по  $v^{\kappa} dt$ , приращение поля в фиксированной точке  $\xi^{\kappa}$  равно минус дифференциалу Ли в этой точке.

Поле называется *абсолютно инвариантным* относительно поля  $v^{\kappa}$ , если его производная Ли относительно  $v^{\kappa}$  исчезает. Его значение не изменяется, если оно увлекается любым из точечных преобразований группы, порожденной инфинитезимальным точечным преобразованием  $v^{\kappa} dt$ . Компоненты такого поля в  $\xi^{\kappa}$  относительно  $(\kappa)$  равны компонентам поля относительно  $(\kappa')$ , увлеченного по  $v^{\kappa} dt$  в  $\xi^{\kappa} + v^{\kappa} dt$ , если  $(\kappa')$  получается из  $(\kappa)$  увлечением по  $v^{\kappa} dt$ .

Поле, абсолютно инвариантное относительно  $\sigma v^{\kappa}$  для любого скалярного поля  $\sigma$ , называется *абсолютно инвариантным относительно линий тока  $v^{\kappa}$* . Оно инвариантно для всех точечных преобразований, оставляющих линии тока  $v^{\kappa}$  инвариантными. Дополнительное условие этой более сильной инвариантности для ковариантного  $p$ -вектора  $w_{\lambda_1} \dots \lambda_p$  или

$p$ -вектор-плотности веса  $+1$ :

$$v^\mu \omega_{\mu\lambda_2 \dots \lambda_p} = 0, \quad (\text{IV. 5.23})$$

$$\hat{\omega}^{[\kappa_1 \dots \kappa_p \sigma^\kappa]} = 0. \quad (\text{IV. 5.24})$$

#### 4. Производная Лагранжа (IV, § 6)

Если  $\Phi_\Lambda$  ( $\Lambda = 1, \dots, N$ ) —  $N$  функций  $\xi^x$  и если  $\mathcal{L}$  — функция  $\Phi_\Lambda$  и их производных  $\Phi_\mu = \partial_\mu \Phi$ ,  $\Phi_{\nu\mu} = \partial_\nu \partial_\mu \Phi$ , ... по  $\xi^x$  до некоторого порядка (индексы  $\Lambda$  опущены), то выражение

$$[\mathcal{L}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\nu\mu}} - \dots \quad (\text{IV. 6.5})$$

называется производной Лагранжа от  $\mathcal{L}$ . Если  $\Phi$  подвергаются вариации  $\overset{v}{d}\Phi$ , такой, что вариации  $\Phi$  и всех их производных, входящих в  $\mathcal{L}$ , исчезают на границе  $\tau_n$ , то для этой производной справедливо следующее уравнение:

$$\overset{v}{d} \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = \int_{\tau_n} [\mathcal{L}] \overset{v}{d}\Phi d\xi^1 \dots d\xi^n. \quad (\text{IV. 6.6})$$

Если  $\Phi_\Lambda$  — тензор валентностей  $p, q$  и если  $\mathcal{L}$  — скалярная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$ , то  $[\mathcal{L}]$  есть тензорная  $\Delta$ -плотность веса  $+1$  валентностей  $q, p$ .

В этом случае существует связь между  $\Phi_\Lambda$ ,  $[\mathcal{L}]$  и их первыми производными. Если  $\Phi_\Lambda$  есть тензор  $P_{\lambda\kappa}$ , то это тождество имеет вид

$$[\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} (\partial_\mu P_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - \\ - P_{\mu\kappa} \partial_\lambda [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu} \partial_\kappa [\mathcal{L}]^{\lambda\kappa} = 0. \quad (\text{IV. 6.11})$$

Если поле  $\Phi_\Lambda$  подвергается вариации  $\overset{v}{d}\Phi_\Lambda$ , такой, что вариации  $\Phi_\Lambda$  и всех их производных, входящих в  $\mathcal{L}$ , исчезают на границе  $\tau_{n-1}$  области  $\tau_n$  из  $X_n$ , и если  $[\mathcal{L}] = 0$  в этой области, то мы имеем

$$\overset{v}{d} \int_{\tau_n} \mathcal{L} d\xi^1 \dots d\xi^n = 0.$$

### Неголономные координаты (IV, § 7)

Если в каждом локальном  $E_n$  в некоторой области  $X_n^h$  введено произвольное множество базисных векторов  $e_i^\alpha, e_\lambda^h$

( $h, l = 1, \dots, n$ ) и если  $\partial_{[\mu} e_{\lambda]}$  не исчезает для всех значений  $h$ , то не существует в данной области обычной системы координат с этими базисными векторами. В этом случае система всех этих базисных векторов называется *неголономной* системой координат ( $h$ ) в рассматриваемой области. Необходимым и достаточным условием является отличие от нуля компонент *объекта неголономности*  $\Omega$  относительно ( $h$ ):

$$\begin{aligned} \Omega_{ji}^{\cdot h} &= A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{[\mu} A_{\lambda]}^h, \\ A_\lambda^h &\stackrel{\text{def}}{=} e_\lambda^i e^i, \quad A_i^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e_i^h e^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{IV. 7.8})$$

Вместо  $d\xi^h$  мы должны теперь писать

$$(d\xi^h)^{\text{def}} = A_\alpha^h d\xi^\alpha, \quad (\text{IV. 7.4})$$

так как переменные  $\xi^h$  не существуют.

Уравнения в неголономных координатах почти всегда содержат поправочные члены с  $\Omega_{ij}^h$ , например:

$$A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{[\mu} \omega_{\lambda]} = \partial_{[j} \omega_{i]} + \Omega_{ji}^h \omega_h, \quad \partial_j \stackrel{\text{def}}{=} A_j^\mu \partial_\mu, \quad (\text{IV. 7.7})$$

$$\Delta^{-1} \partial_\mu \hat{v}^\mu = \partial_j \hat{v}^j + 2\Omega_{ji}^i \hat{v}^j, \quad \Delta = \text{Det}(A_\lambda^h); \text{ вес } +1 \quad (\text{IV. 7.9})$$

### Многообразия с заданным линейным перенесением (гл. V)

*Линейное перенесение*, или *параллелизм*, в  $X_n$  задается геометрическим объектом  $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$  с законом преобразования

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\alpha'} &= A_{\mu'\lambda'}^{\alpha'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - A_{\mu'\lambda'}^{\mu\lambda} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^{\alpha'} = \\ &= A_{\mu'\lambda'}^{\alpha'\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + A_{\lambda'}^{\alpha'} \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{V. 1.9})$$

$\Gamma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$  является геометрическим объектом с законом преобразования

$$\Gamma_{\mu'} = A_{\mu'}^\mu \Gamma_\mu - A_{\lambda'}^\lambda \partial_{\mu'} A_{\lambda'}^\lambda = A_{\mu'}^\mu \Gamma_\mu - \partial_{\mu'} \ln \Delta. \quad (\text{V. 1.13})$$



Ковариантная производная и ковариантный дифференциал некоторой величины, например  $\hat{P}^x_{\lambda}$ , веса  $t$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \hat{P}^x_{\lambda} &= \partial_{\mu} \hat{P}^x_{\lambda} + \Gamma^x_{\mu\nu} \hat{P}^{\nu}_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} \hat{P}^x_{\nu} - t \hat{P}^x_{\lambda} \Gamma_{\mu}, \\ \delta \hat{P}^x_{\lambda} &= d \hat{P}^x_{\lambda} + \Gamma^x_{\mu\nu} \hat{F}^{\nu}_{\lambda} d \xi^{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} \hat{P}^x_{\nu} d \xi^{\mu} - t \hat{P}^x_{\lambda} \Gamma_{\mu} d \xi^{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{V.1.18})$$

Каждому верхнему (нижнему) индексу соответствует член с положительным (отрицательным) знаком и имеется дополнительный член, содержащий  $\Gamma_{\mu}$  и множитель  $t$ .

Если величина переносится таким образом, что ее ковариантный дифференциал исчезает, перенесение называется *параллельным*.  $X_n$  с линейным перенесением называется  $L_n$ . Если тензор

$$S_{\mu\lambda}^x \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^x_{[\mu\lambda]} \quad (\text{V.1.22})$$

равен нулю, то перенесение называется *симметричным* и  $X_n$  называется  $A_n$ . В  $A_n$  возможны инфинитезимальные параллелограммы во всех 2-направлениях.

Внешняя производная и производная Ли могут быть записаны в  $A_n$  с  $\nabla_{\mu}$  вместо  $\partial_{\mu}$ , например:

$$\nabla_{\mu} \rho = \partial_{\mu} \rho, \quad (\text{V.1.26a})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{[\mu} \omega_{\lambda]} &= \partial_{[\mu} \omega_{\lambda]}, \\ \nabla_{\mu} \hat{v}^{\mu} &= \partial_{\mu} \hat{v}^{\mu} \quad (\text{вес } +1), \end{aligned} \quad (\text{V.1.26b})$$

$$D_L \hat{P}^x_{\lambda} = v^{\mu} \nabla_{\mu} \hat{P}^x_{\lambda} + \hat{P}^x_{\rho} \nabla_{\lambda} v^{\rho} - \hat{P}^{\sigma}_{\lambda} \nabla_{\sigma} v^x + t \hat{P}^x_{\lambda} \nabla_{\mu} v^{\mu}. \quad (\text{V.1.27})$$

Кривая в  $L_n$  есть *геодезическая*, если ее касательный вектор остается касательным при параллельном перенесении. На каждой геодезической существует *канонический параметр*  $t$ , определенный с точностью до аффинного преобразования с постоянными коэффициентами, такой, что уравнение геодезической принимает вид

$$\frac{\delta}{dt} \frac{d \xi^x}{dt} = \frac{d^2 \xi^x}{dt^2} + \Gamma^x_{\mu\lambda} \frac{d \xi^{\mu}}{dt} \frac{d \xi^{\lambda}}{dt} = 0. \quad (\text{V.2.8})$$

В  $A_n$  координаты могут быть выбраны таким образом, что  $\Gamma^x_{\mu\lambda}$  исчезают в некоторой заданной точке  $\xi^x$ . Такие координаты называются *нормальными координатами* в точке  $\xi^x$ . Нормальные координаты могут быть также определены на

заданной кривой и в особых случаях на заданных  $X_m$  в  $A_n$  (V, § 3).

$V_n$  является  $A_n$ , так как уравнение  $\nabla_{\mu} g_{\lambda\kappa} = 0$  фиксирует симметричное перенесение

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda}). \quad (\text{V. 4.7})$$

$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}$  называется *символом Кристоффеля*. Для этого перенесения справедливы следующие уравнения:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \ln g, \quad (\text{V. 4.8.10})$$

$$\nabla_{\mu} g = 0. \quad (\text{V. 4.11})$$

Геодезические в  $V_n$  являются не только прямыми кривыми, но и кратчайшими (или наиболее длинными). Длина  $s$  является каноническим параметром, и, следовательно, уравнение геодезической имеет вид

$$\delta \frac{d\xi^{\kappa}}{ds} = 0. \quad (\text{V. 4.20})$$

*Тензор кривизны в  $A_n$ :*

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} 2\partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\kappa} + 2\Gamma_{[\nu|\rho]}^{\kappa}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\rho}. \quad (\text{V. 5.12})$$

Имеют место следующие тождества:

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]} v^{\kappa} = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} v^{\lambda}, \quad (\text{V. 5.13})$$

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}\omega_{\lambda} = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}\omega_{\kappa}, \quad (\text{V. 5.14})$$

$$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}\hat{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} = \frac{1}{2} R_{\nu\mu\rho}^{\cdot\cdot\kappa}\hat{P}^{\rho}_{\cdot\lambda} - \frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}\hat{P}^{\kappa}_{\cdot\rho} - \frac{1}{2} t R_{\nu\mu\rho}^{\cdot\cdot\rho}\hat{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}. \quad (\text{V. 5.17})$$

Каждому верхнему (нижнему) индексу соответствует член с положительным (отрицательным) знаком и имеется дополнительный член, содержащий  $R_{\mu\lambda\rho}^{\cdot\cdot\rho}$  и множитель  $t$ .

В  $V_n$  мы пишем  $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$  вместо  $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ .  $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$  имеет  $\frac{1}{12} n^2(n^2 - 1)$  независимых компонент. Тождества для тензора кривизны:

$$I. \quad R_{(\nu\mu)\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = 0. \quad (\text{V. 5.18})$$

$$\text{II. } R_{[\nu\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 0 \quad \text{эквивалентно в } V_n, \quad K_{[\nu\mu\lambda\kappa]} = 0. \quad (\text{V. 5.19, 23})$$

$$\text{III. } K_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0. \quad (\text{V. 5.20})$$

$$\text{IV. } K_{\nu\mu\lambda\kappa} = K_{\lambda\kappa\nu\mu}. \quad (\text{V. 5.22})$$

Тождество Бианки:

$$\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 0. \quad (\text{V. 5.25})$$

Если

$$R_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\kappa\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}, \quad K_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\kappa\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}, \\ G_{\mu\lambda} = K_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} K g_{\mu\lambda}, \quad K = g^{\mu\lambda} K_{\mu\lambda},$$

то имеют место следующие соотношения:

$$\nabla_{\omega} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\omega} + 2\nabla_{[\mu} R_{\nu]}^{\cdot\omega} = 0, \quad (\text{V. 5.34})$$

$$\nabla_{\mu} G_{\lambda}^{\mu} = 0. \quad (\text{V. 5.37})$$

Тензорная плотность веса  $+1$

$$\hat{G}^{\kappa\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g} G^{\kappa\lambda}$$

является производной Лагранжа от  $-\sqrt{g} K$ , рассматриваемой как функция от  $g_{\lambda\kappa}$  и их первых и вторых производных

$$-[\sqrt{g} K]^{\kappa\lambda} = \hat{G}^{\kappa\lambda}. \quad (\text{V. 5.39})$$

Для неголономных координат ( $h$ ) в  $L_n$  мы имеем

$$\Gamma_{ji}^h = A_{\kappa ji}^{h\mu\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{ji}^{\mu\lambda} \partial_{\mu} A_{\lambda}^h, \quad (\text{V. 7.1})$$

$$\Gamma_{[ji]}^h = S_{ji}^h - \Omega_{ji}^h, \quad (\text{V. 7.2})$$

и в  $A_n$

$$\Gamma_{[ji]}^h = -\Omega_{ji}^h, \quad (\text{V. 7.3})$$

$$\nabla_{[j} \omega_{i]} = \partial_{[j} \omega_{i]} + \Omega_{ji}^h \omega_h, \quad (\text{V. 7.4a})$$

$$\nabla_j \hat{v}^j = \partial_j \hat{v}^j + 2\Omega_{ji}^l \hat{v}^j, \quad (\text{V. 7.4b})$$

$$R_{kji}^h = 2\partial_{[k} \Gamma_{j]}^h{}_{i]} + 2\Gamma_{[k|l}^h \Gamma_{j]}^l{}_{i]} + 2\Omega_{kj}^l \Gamma_{li}^h. \quad (\text{V. 7.8})$$

В  $V_n$  мы имеем

$$\Gamma_{ji}^h = \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} - \Omega_{ji}^{\dots h} + g_{jl} g^{hk} \Omega_{ik}^{\dots l} + g_{il} g^{hk} \Omega_{jk}^{\dots l}, \quad (\text{V. 7.5})$$

$$\Gamma_{ji}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ ji \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \partial_j \ln g, \quad (\text{V. 7.7})$$

а в специальном случае, когда неголономная система состоит в каждой точке из взаимно ортогональных единичных векторов

$$\begin{aligned} \Gamma_{ji}^h &= -\Omega_{ji}^{\dots h} + g_{jl} g^{hk} \Omega_{ik}^{\dots l} + g_{il} g^{hk} \Omega_{jk}^{\dots l}, \\ \Gamma_{ji}^i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V. 7.6})$$

### Интегральные формулы в $V_n$ и $R_n$ (V, § 8)

*Первое тождество Грина для  $V_n$*

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{n-1}} \sqrt{g} \varphi \nabla^\mu \psi d\hat{f}_\mu &= \\ &= \int_{\tau_n} \sqrt{g} (\nabla_\mu \varphi) (\nabla^\mu \psi) d\hat{f} + \int_{\tau_n} \sqrt{g} \varphi \nabla_\mu \nabla^\mu \psi d\hat{f}. \end{aligned} \quad (\text{V. 8.3})$$

*Второе тождество Грина для  $V_n$*

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{n-1}} \sqrt{g} (\varphi \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \varphi) d\hat{f}_\mu &= \\ &= \int_{\tau_n} \sqrt{g} (\varphi \nabla_\mu \nabla^\mu \psi - \psi \nabla_\mu \nabla^\mu \varphi) d\hat{f}. \end{aligned} \quad (\text{V. 8.4})$$

В  $R_n$  с положительно определенным фундаментальным тензором мы имеем

$$\begin{aligned} \omega_n \varphi &= -\frac{1}{n-2} \int_{\tau_n} a^{-n+2} \nabla^2 \varphi d\hat{f} + \\ &+ \frac{1}{n-2} \int_{\tau_{n-1}} a^{-n+2} \partial^l \varphi d\hat{f}_l + \int_{\tau_{n-1}} a^{-n} \varphi a^l d\hat{f}_l. \end{aligned} \quad (\text{V. 8.11})$$

В правой части  $\varphi$  рассматривается как функция  $x^h$ , с левой стороны — как функция  $'x^h$ ;  $a$  — длина вектора  $a^h = x^h - 'x^h$ ;

$\omega$  —  $(n-1)$ -мерная площадь сферы радиуса  $R$ , разделенная на  $R^{n-1}$  (V. 8.10).

$\varphi$  есть *потенциальная функция*, если (условия только достаточные):

(1)  $\varphi$  и ее первые и вторые производные всюду конечны;

(2) среднее значение  $\varphi$  на сфере радиуса  $\rho$  стремится к нулю, когда  $\rho \rightarrow \infty$ ;

$$(3) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\tau_n} \rho^{-n+2} \nabla^2 \varphi d\hat{f} = 0. \quad (\text{V. 8.15})$$

Условия (2) и (3) всегда удовлетворяются, если справедливо (1) и если функция равна нулю вне некоторой конечной сферы. Для потенциальной функции мы имеем

$$\varphi = \text{Pot } \nabla^2 \varphi, \quad (\text{V. 8.13})$$

где Pot — интегральный оператор

$$\text{Pot} \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\infty}^{\dots} a^{-n+2} d\hat{f}. \quad (\text{V. 8.14})$$

Для *гармонической* функции  $\varphi$ , т. е. функции с конечными первыми и вторыми производными, удовлетворяющими некоторым условиям непрерывности и  $\nabla^2 \varphi = 0$ , мы имеем соотношение

$$\omega_n \rho^{n-1} \varphi = \int_{\tau_{n-1}} \varphi n^i d\hat{f}_i, \quad (\text{V. 8.18})$$

показывающее, что значение  $\varphi$  в  $'x^h$  равно ее среднему значению на любой сфере с центром в  $'x^h$  и радиусом  $\rho$ .

Решение первой *граничной задачи* дается уравнением

$$\begin{aligned} \omega_n \varphi = \int_{\tau_n} \left( \psi - \frac{1}{n-2} a^{-n+2} \right) \nabla^2 \varphi d\hat{f} + \\ + \int_{\tau_{n-1}} \varphi \partial^i \left( \psi - \frac{1}{n-2} a^{-n+2} \right) d\hat{f}_i. \end{aligned} \quad (\text{V. 8.21})$$

выражающим значение  $\varphi$  в  $x^h$  через интегралы от  $\nabla^2\varphi$  и  $\psi$  по  $\tau_n$  и от  $n^i\partial_i\psi$  по  $\tau_{n-1}$ . Функция Грина  $\psi = \frac{1}{n-2} a^{-n+2}$  является функцией, гармонической в  $\tau_n$  и принимающей нулевые значения на  $\tau_{n-1}$ .

Если компоненты  $p$ -вектора  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  — потенциальные функции, мы имеем

$$\omega = \text{Pot Div Rot } \omega + \text{Pot Rot Div } \omega. \quad (\text{V. 8.24})$$

Если  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  и его первые производные всюду конечны и если  $\omega_{i_1 \dots i_p}$  равен нулю вне некоторой конечной сферы, то справедливо также равенство

$$\omega = \text{Div Pot Rot } \omega + \text{Rot Pot Div } \omega. \quad (\text{V. 8.25})$$

## VI. ФИЗИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ И ИХ РАЗМЕРНОСТИ<sup>1)</sup>

### 1. Физические объекты

Встречающиеся в физике величины, такие, как скаляры, векторы, плотности и т. д., без сомнения не являются тождественными величинам, введенным в гл. II. Например, хотя скорость может быть представлена стрелкой, неверно было бы утверждать, что это просто контравариантный вектор. Чтобы начертить вектор, соответствующий скорости, необходимо ввести единицу времени, и, если эта единица изменяется, то изменяется также изображение скорости. Отсюда мы видим, что величины в физике имеют свойство, которым не обладают геометрические величины. Их компоненты изменяются не только при преобразованиях координат, но также при преобразованиях некоторых единиц.

В отношении этих единиц мы отметим, что всегда имеются некоторые *основные единицы*, а все остальные единицы, *производные единицы*, могут быть из них получены. Выбор основных единиц произволен; иногда выбирают три основные единицы, а иногда четыре, пять или шесть. В целях иллюстрации мы используем в этой главе четыре основные единицы массы, длины, времени и электрического заряда ( $M$ ,  $L$ ,  $T$  и  $Q$ ). Результаты легко переносятся на любой другой выбор основных единиц.

По предположению, основные единицы подвергаются преобразованиям вида

$$M' = m^{-1}M, \quad L' = l^{-1}L, \quad T' = t^{-1}T, \quad Q' = q^{-1}Q. \quad (1.1)$$

---

<sup>1)</sup> С. Доргело и Схоутен 1946. 1. Там же даны литературные ссылки.

где  $m$ ,  $l$ ,  $t$  и  $q$  — произвольные константы. Все системы, которые могут быть получены этим путем из одной первоначально заданной системы, мы будем называть *допустимыми системами основных единиц*.

Мы определим теперь физические объекты в  $V_n$  ( $n=3$ ,  $V_3=R_3$  в обычном пространстве и  $n=4$  в пространстве общей теории относительности) следующим образом (ср. II, § 1 и IV, § 2)

Если в определенной точке  $\xi^x$  из  $V_n$  имеется соответствие между упорядоченными множествами  $N$  чисел  $\Phi_\Lambda$  ( $\Lambda=1, \dots, N$ ), с одной стороны, и допустимыми системами координат  $(x)$  в окрестности  $\xi^x$  и допустимыми системами основных единиц  $M, L, T, Q$ , с другой стороны, такое, что:

- (1) каждой  $(x)$  и каждой допустимой системе основных единиц соответствует одно и только одно множество  $\Phi_\Lambda$ ;
- (2) множество  $\Phi_{\Lambda'}$ , соответствующее  $(x')$ ,  $M', L', T', Q'$ , может быть выражено только через  $\Phi_\Lambda$ , значения  $A_x^{x'}$ ,  $d_\lambda A_x^{x'}$ ,  $d_\mu d_\lambda A_x^{x'}$ , ... в  $\xi^x$  и  $m, l, t$  и  $q$ ;
- (3) в этих выражениях  $m, l, t$  и  $q$  встречаются только в форме множителя  $m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta$ , одинакового для всех  $\Phi_{\Lambda'}$ <sup>1)</sup>,

то говорят, что  $\Phi_\Lambda$  являются компонентами физического объекта относительно  $(x)$ ,  $M, L, T, Q$  в точке  $\xi^x$ .

Если  $\Phi_\Lambda$  линейны и однородны по  $\Phi_\Lambda$ , алгебраически однородны по  $A_x^{x'}$  и не содержат производных от  $A_x^{x'}$ , то  $\Phi_\Lambda$  являются компонентами физической величины в  $\xi^x$ .

Если физический объект определен в каждой точке некоторой области  $V_n$ , то мы имеем поле физического объекта в этой области.

Множество компонент может образовывать физический объект относительно некоторых преобразований координат и не образовывать его относительно других преобразований координат. Например, три компонента электрического поля

<sup>1)</sup> Случай, когда множители различны для различных компонент (например, скорость в полярных координатах) всегда может быть сведен к указанному здесь.



образуют физическую величину относительно ортогональных преобразований по  $x, y, z$ . Но для образования физической величины относительно преобразований Лоренца по  $x, y, z, t$  эти три компоненты должны рассматриваться совместно с тремя компонентами магнитного поля.

Если  $p, q$  и  $r$  являются компонентами физического объекта, то, например,  $\ln p, q^2$  и  $\cos r$  также являются компонентами физического объекта, хотя они и преобразуются совершенно другим образом. Эта свобода в выборе компонент побуждает нас выбирать их так, чтобы закон преобразования был возможно более простым.

Если  $M, L, T$  и  $Q$  фиксированы, остаются только преобразования координат, а это означает, что при каждом определенном выборе  $M, L, T$  и  $Q$  каждому физическому объекту соответствует один и только один геометрический объект (ср. IV, § 2). Этот объект приобретает (т. е. приобретают все его компоненты) множитель  $m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta$ , если вводится другое множество допустимых основных единиц. Мы называем этот геометрический объект *геометрическим образом* физического объекта, а символ  $m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta$  *размерностью*<sup>1)</sup> *геометрического образа*, а также *абсолютной размерностью физического объекта*. Размерность всегда записывается в виде  $[m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta]$ .

Абсолютная размерность определена относительно множества всех преобразований (IV. 1.1) или относительно группы  $G_a$ , если мы работаем с прямолинейными координатами в  $E_n$ . Эта размерность *не является* размерностью, с которой обычно имсют дело в физике. Рассмотрим, например, скорость в  $R_3$ . Ее геометрический образ есть отрезок прямой линии, описываемый равномерно движущейся точкой за единицу времени и снабженный стрелкой в направлении движения. Если  $T$  изменяется, то этот контравариантный вектор приобретает множитель  $t^{-1}$ . Следовательно, абсолютная размерность скорости есть  $[t^{-1}]$ . Однако компоненты  $v^h$  относительно декартовой системы координат ( $h$ ) в  $R_3$ , основанной на единице длины  $L$ , при изменении основных единиц

---

<sup>1)</sup> Это понятие не имеет ничего общего с размерностью пространства, введенной в гл. I.

приобретают множитель  $lt^{-1}$ . Это приводит нас к определению:

*Если компоненты физического объекта относительно локальной декартовой системы координат, основанной на единице длины, приобретают при изменении основных единиц множитель  $t^{\alpha}l^{\beta}t^{\gamma}q^{\delta}$ , то мы называем  $[t^{\alpha}l^{\beta}t^{\gamma}q^{\delta}]$  относительной размерностью, или кратко размерностью, физического объекта<sup>1)</sup>.*

Это та размерность, которая обычно используется в физике. Очевидно, разница между абсолютной и относительной размерностью обусловлена тем, что общая система координат не связана никоим образом с единицей длины, а локальная декартова система координат изменяется при введении другой единицы длины. Следовательно, соотношение между относительной размерностью и абсолютной размерностью физического объекта зависит только от закона преобразования компонент при преобразованиях координат. Действительно, преобразование общих компонент величины в ортогональные компоненты и обратно выполняется сверткой с  $A_{\lambda}^h \stackrel{h}{=} i_{\lambda}$  и  $A_i^x \stackrel{*}{=} i_i^x$  ( $h, i = 1, \dots, n$ ). При изменении

единицы длины единичные векторы  $i_i^x$  и  $i_{\lambda}^h$  приобретают множители  $l^{-1}$  и  $l$  соответственно. Отсюда относительная размерность приобретает множитель  $l^{-1}$  для каждого  $A_i^x$  и множитель  $l$  для каждого  $A_{\lambda}^h$ , входящих в формулы преобразования общих компонент в ортогональные компоненты. Таким образом, чтобы получить относительную размерность величины из абсолютной, мы должны приписать множитель  $l$  для каждого контравариантного индекса, множитель  $l^{-1}$  для каждого ковариантного индекса и множитель  $l^{-nt}$  для веса  $t$ .

Это приводит к таблице (1.2) для величин в  $R_3$ , введенных в II, § 8.

<sup>1)</sup> Если, например, вектор скорости в  $R_3$  фиксируется двумя углами и его длиной, то две компоненты имеют размерность  $[l]$ , а третья  $[LT^{-1}]$ . Но для обычно встречающихся физических объектов всегда возможно найти компоненты, которые все имеют одинаковую размерность. Во всем последующем мы будем использовать только такие компоненты.

Абсолютная и относительная размерности в  $R_3$ 

	Абсолютная	Относительная		Абсолютная	Относительная
$s, s^*$	[D]	[D]	$\hat{s}_{\mu\lambda\kappa}, \tilde{s}_{\mu\lambda\kappa}$	[D]	[D]
$v^\kappa, v^{\kappa*}$		[Dl]	$\hat{s}^{\kappa\lambda\mu}, \tilde{s}^{\kappa\lambda\mu}$		[D]
$w_\lambda, w_\lambda^*$		[Dl <sup>-1</sup> ]	$\hat{v}_{\lambda\kappa}, \tilde{v}_{\lambda\kappa}$		[Dl]
$f^{\kappa\lambda}, f^{\kappa\lambda*}$		[Dl <sup>2</sup> ]	$\hat{w}^{\kappa\lambda}, \tilde{w}^{\kappa\lambda}$		[Dl <sup>-1</sup> ]
$h_{\lambda\kappa}, h_{\lambda\kappa}^*$		[Dl <sup>-2</sup> ]	$\hat{f}_\lambda, \tilde{f}_\lambda$		[Dl <sup>2</sup> ]
$p^{\kappa\lambda\mu}, p^{\kappa\lambda\mu*}$		[Dl <sup>3</sup> ]	$\hat{h}^\kappa, \tilde{h}^\kappa$		[Dl <sup>-2</sup> ]
$q_{\mu\lambda\kappa}, q_{\mu\lambda\kappa}^*$		[Dl <sup>-3</sup> ]	$\hat{p}, \tilde{p}$		[Dl <sup>3</sup> ]
			$\hat{q}, \tilde{q}$	[Dl <sup>-3</sup> ]	

В  $V_n$  линейный элемент  $d\xi^\kappa$  имеет абсолютную размерность [l]. Отсюда  $g_{\lambda\kappa}$  и  $g^{\kappa\lambda}$  имеют абсолютную размерность [l<sup>2</sup>] и [l<sup>-2</sup>] соответственно. Это согласуется с тем, что относительные размерности  $g_{ih}$  и  $g^{hi}$  (которые принимают только значения +1, -1 или 0) равны [1]. Дифференцирование по  $\xi^\kappa$  не изменяет абсолютной размерности. Следовательно, абсолютная размерность  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  равна [1], и абсолютная размерность ковариантной производной некоторой величины, например  $\nabla_\mu P_{\lambda}^\kappa$ , такая же, как и абсолютная размерность  $P_{\lambda}^\kappa$ .

Из (V. 5.12), (V. 5.28), (V. 5.29) и (V. 5.36) мы видим, что абсолютная размерность  $K_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ ,  $K_{\mu\lambda}$  и  $G_{\mu\lambda}$  равна [1]. Но абсолютная размерность скалярной кривизны  $\frac{1}{n(n-1)}K$  равна [l<sup>-2</sup>] ввиду (V. 5.29), а относительная размерность имеет то же значение.

Если  $\mathcal{L}$  — скалярная плотность веса +1 и абсолютной размерности [d<sub>1</sub>] и  $\Phi$  тензор (индексы опущены) абсолютной размерности [d<sub>2</sub>], то из (IV. 6.6) мы видим, что абсолютная размерность производной Лагранжа равна [d<sub>1</sub>/d<sub>2</sub>]. Например,

мы имеем следующие размерности для  $\sqrt{g}K$  и ее производной Лагранжа (ср. (V. 5.38)):

	Абсолютная	Относительная	
$\sqrt{g}K$	$[l^{n-2}]$	$[l^{-2}]$	(1.3)
$\hat{G}_{\lambda\kappa} = \sqrt{g}G_{\lambda\kappa}$	$[l^n]$	$[l^{-2}]$	
$G^{\lambda\kappa} = [\sqrt{g}K]^{\lambda\kappa}$	$[l^{n-4}] = [l^{n-2}/l^2]$	$[l^{-2}]$	
$g_{\lambda\kappa}$	$[l^2]$	$[1]$	

Действительно, согласно (II. 12.20)  $\sqrt{g}$  имеет абсолютную размерность  $[l^{2n}]$  и относительную размерность  $[1]$ , так как компонента  $\sqrt{g}$  относительно ортогональной системы координат всегда равна  $+1$ .

Из IV, § 5 мы видим, что абсолютные размерности величины и ее производной Ли совпадают. Относительные размерности также равны, так как величина и ее производная Ли имеют одинаковый закон преобразования.

Ниже мы приводим некоторые примеры размерностей механических величин  $R_3$ .

	Абсолютная	Относительная
Скорость	$v^x : [t^{-1}]$ $v_\lambda : [l^2 t^{-1}]$	$v^h$ $v_i$ } : $[lt^{-1}]$
Сила	$K^x : [mt^{-2}]$ $K_\lambda : [ml^2 t^{-2}]$	$K^h$ $K_i$ } : $[mlt^{-2}]$
Количество движения	$V^x = mv^x : [mt^{-1}]$	$V^h : [mlt^{-1}]$
Момент силы	$D^{\lambda\kappa} = 2r^{[\lambda} K^{\kappa]} : [mt^{-2}]$	$D^{hi}, D^h : [ml^2 t^{-2}]$
Энергия	$P : [ml^2 t^{-2}]$	$P : [ml^2 t^{-2}]$
Плотность массы	$\mu [k] : [m]$	$\mu [h] : [mt^{-3}]$
Плотность потока массы	$\hat{v}^x = \mu v^x : [mt^{-1}]$	$\hat{v}^h : [ml^{-2} t^{-1}]$

(1.4)

## 2. Абсолютная размерность и построение геометрического образа

Абсолютные размерности в некотором смысле проще, чем относительные, так как последние содержат множители, которые возникают только из-за того, что сама ортогональная система координат зависит от выбора единицы длины. Но имеется еще и другая причина, которая делает их полезными. Абсолютная размерность это размерность геометрического образа и, следовательно, она всегда содержит как раз те основные единицы, которые необходимы для построения этого образа. С другой стороны, относительная размерность содержит именно те основные единицы, которые необходимы для определения ортогональных компонент. Мы дадим несколько примеров.

(1) Пусть  $v^\alpha$  — скорость жидкости и  $\mu$  — ее плотность.  $\mu$  — есть скалярная плотность веса  $+1$ . Ее общая компонента  $\mu[\kappa]$  представляет массу базисного параллелепипеда (параллелепипед на базисных векторах  $e^\lambda$ ), а ее ортогональная компонента  $\mu[h]$  — массу единицы объема. Таким образом, ее абсолютная размерность равна  $[m]$ , а относительная размерность равна  $[ml^{-3}]$ . Контравариантная векторная плотность  $\hat{v}^\alpha = \mu v^\alpha$  есть плотность потока жидкости. Ее геометрическим образом является цилиндр с внутренней ориентацией. Если в любой точке  $\hat{q}$  обозначает массу жидкости, поступившей извне в базисный параллелепипед за единицу времени, то уравнение неразрывности для наиболее общего случая

$$\partial_\mu \hat{v}^\mu + \partial_{\mu}[\kappa] = \hat{q}[\kappa] \quad (\text{абс. размерность } [mt^{-1}]) \quad (2.1)$$

выражает тот факт, что дивергенция плотности потока равна сумме двух составляющих: уменьшению плотности массы за единицу времени и массы, поступившей в базисный параллелепипед за единицу времени. В ортогональных координатах уравнение имеет вид

$$\nabla_j \hat{v}^j + \partial_{\mu} [h] = \hat{q}[h] \quad (\text{отн. размерность } [ml^{-3}t^{-1}]). \quad (2.2)$$

Геометрическим образом  $\hat{v}^\alpha$  является цилиндр, через который протекает в точности единица массы за единицу времени. Геометрическим образом  $\mu$  является объем, содержа-

ший единицу массы. Геометрическим образом  $\hat{q}$  является объем, в который поступает единица массы за единицу времени. Следовательно, геометрические образы  $\hat{\sigma}^x$  и  $\hat{q}$  могут быть построены с помощью основных единиц  $M$  и  $T$ . Только единица  $M$  необходима для геометрического образа  $\mu$ .

(2) Уравнения Максвелла в обычном векторном анализе записываются в виде<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, \\
 (b) \quad & \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\
 (c) \quad & \dot{\vec{D}} - \nabla \times \vec{H} = -\rho \vec{u}, \\
 (d) \quad & \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \\
 (e) \quad & \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \\
 (f) \quad & \vec{B} = \mu \vec{H},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля,  $\vec{D}$  — электрическая индукция,  $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\vec{B}$  — магнитная индукция,  $\rho$  — плотность электрического заряда,  $\vec{u}$  — скорость движения зарядов,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная ( $\epsilon = \epsilon_0$  в вакууме),  $\mu$  — магнитная проницаемость ( $\mu = \mu_0$  в вакууме). Если эти уравнения записать в ортогональных компонентах, то мы получим

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + c \partial_4 B^1 = 0, \quad \partial_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \\
 (b) \quad & \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0, \quad c \stackrel{\text{def}}{=} \text{скорость света}, \\
 (c) \quad & c \partial_4 D^1 - \partial_2 H^3 + \partial_3 H^2 = -\rho u^1, \\
 (d) \quad & \partial_1 D^1 + \partial_2 D^2 + \partial_3 D^3 = \rho, \\
 (e) \quad & D^1 = \epsilon E^1, \\
 (f) \quad & B^1 = \mu H^1,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

(циклир. по 1, 2, 3).

<sup>1)</sup> Эту форму уравнения имеют в электростатических и электромагнитных единицах и в системе единиц Джорджи, если эти системы рационализированы (Ф. Доргело и Схоутен 1946.1). Мы используем здесь сигнатуру  $---$  в пространстве, соответствующую сигнатуре  $---+$  в пространстве — времени.

В уравнениях (2.3) и (2.4)  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  являются «векторами» в смысле гл. III, § 4, после введения фундаментального тензора и ориентации (ср. (III. 4.21) и рис. 12).

Теперь мы попытаемся привести уравнения (2.4) к форме, инвариантной относительно аффинных преобразований. В нашем распоряжении имеются только следующие аффинные инвариантные производные: градиент скаляра или  $\mathcal{W}$ -скаляра, вращение ковариантного  $q$ -вектора или  $\mathcal{W}$ - $q$ -вектора и дивергенция контравариантной  $p$ -вектор-плотности или  $\mathcal{W}$ - $p$ -вектор-плотности веса  $+1$ . Следовательно, мы видим из (2.4 а), что  $\vec{E}$  может быть только ковариантным вектором или  $\mathcal{W}$ -вектором, а  $\vec{B}$  — только ковариантным бивектором или  $\mathcal{W}$ -бивектором. Но так как электрическое поле имеет ориентацию вдоль силовых линий, а на вокруг них, то  $\vec{E}$  должен быть ковариантным вектором, а  $\vec{B}$  — ковариантным бивектором. Это согласуется с (2.4 б). Из (2.4 д) мы видим, что  $\vec{D}$  должен быть обычной контравариантной векторной плоскостью или  $\Delta$ -вектор-плотностью веса  $+1$ , а  $\rho$  — обычной скалярной плотностью или скалярной  $\Delta$ -плотностью веса  $+1$ . Но так как электрический заряд не имеет ориентации<sup>1)</sup>,  $\vec{D}$  должен быть обычной векторной плотностью, а  $\rho$  — обычной скалярной плотностью. Таким образом, из (2.4 с) следует, что  $\vec{H}$  является обычной бивектор-плотностью веса  $+1$ .

Установив это, мы приходим к следующей форме уравнений (2.4)<sup>2)</sup> (ср. гл. III, рис. 8):

$$\begin{aligned}
 \text{(а)} \quad & -\partial_2 E_3 + \partial_3 E_2 + c\partial_4 B_{23} = 0, \\
 \text{(б)} \quad & \partial_1 B_{23} + \partial_2 B_{31} + \partial_3 B_{12} = 0, \\
 \text{(с)} \quad & c\partial_4 \mathcal{D}^1 - \partial_2 \mathcal{H}^{12} + \partial_3 \mathcal{H}^{23} = -\rho u^1, \\
 \text{(д)} \quad & \partial_1 \mathcal{D}^1 + \partial_2 \mathcal{D}^2 + \partial_3 \mathcal{D}^3 = \rho, \\
 \text{(е)} \quad & \mathcal{D}^1 = -\varepsilon E^1, \\
 \text{(ф)} \quad & B_{23} = \mu \mathcal{H}^{23}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

(циклир. по 1, 2, 3)

<sup>1)</sup> Вращающийся электрон также не имеет ориентации!

<sup>2)</sup> Для упрощения записи здесь и далее мы пишем  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{H}$  вместо  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ . — Прим. перев.

или

$$\begin{aligned}
(a) \quad & -\frac{2}{c} \partial_{[c} E_{b]} + \partial_4 B_{cb} = 0, \\
(b) \quad & \partial_{[c} B_{b a]} = 0, \\
(c) \quad & \partial_4 \mathcal{D}^a + \frac{1}{c} \partial_b \mathcal{H}^{ba} = -\frac{\rho}{c} u^a, \\
(d) \quad & \partial_c \mathcal{D}^c = \rho, \\
(e) \quad & \mathcal{D}^a = -\varepsilon \sqrt{g} g^{ab} E_b, \\
(f) \quad & B_{cb} = \frac{\mu}{\sqrt{g}} g_{ca} g_{bd} \mathcal{H}^{ad} \\
& (a, b, c, d = 1, 2, 3),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

которая содержит только аффинно-инвариантные операторы, и, очевидно, это единственно возможное представление. Так как уравнения (2.6) имеют аффинно-инвариантную форму, они могут быть записаны в общих координатах:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & -\frac{2}{c} \partial_{[\gamma} E_{\beta]} + \partial_4 B_{\gamma\beta} = 0, \\
(b) \quad & \partial_{[\gamma} B_{\beta a]} = 0, \\
(c) \quad & \partial_4 \mathcal{D}^\alpha + \frac{1}{c} \partial_\beta \mathcal{H}^{\beta\alpha} = -\frac{\rho}{c} u^\alpha, \\
(d) \quad & \partial_\gamma \mathcal{D}^\gamma = \rho, \\
(e) \quad & \mathcal{D}^\alpha = -\sqrt{g} g^{\alpha\beta} E_\beta, \\
(f) \quad & B_{\gamma\beta} = \frac{\mu}{\sqrt{g}} g_{\gamma\alpha} g_{\beta\delta} \mathcal{H}^{\alpha\delta} \\
& (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Если среда не изотропна, вместо уравнений (2.7 e, f) мы получаем уравнения в виде

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \mathcal{D}^\alpha = \varepsilon^{*\beta} E_\beta, \\
(b) \quad & B_{\gamma\beta} = \mu_{\gamma\beta\alpha\delta} \mathcal{H}^{\alpha\delta},
\end{aligned} \tag{2.8}$$



где  $\epsilon^{\alpha\beta}$  и  $\mu_{\gamma\delta\alpha\beta}$  — тензорные плотности веса  $+1$  и  $-1$  соответственно, являющиеся электромагнитными характеристиками среды.

Геометрическими образами  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  являются

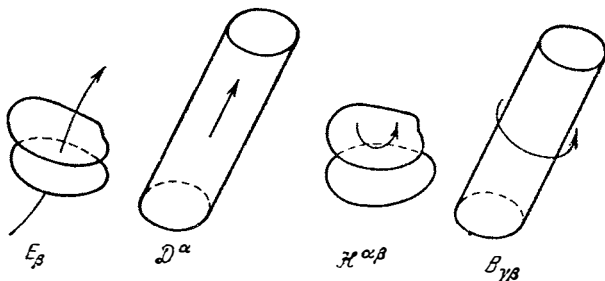


Рис. 23.

Из этих рисунков также очевидно, что связи между  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  и между  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  могут быть установлены лишь с помощью фундаментального тензора, так как они требуют понятия «перпендикулярности».

Чтобы найти размерности  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ , мы воспользуемся тем обстоятельством, что  $e\vec{E}$  есть сила, действующая на заряд  $e$ . Но относительная размерность силы равна  $[mlt^{-2}]$ , и, следовательно, относительная размерность  $\vec{E}$  равна  $[mlt^{-2}q^{-1}]$ . Отсюда ковариантный вектор  $E_3$  имеет абсолютную размерность  $[ml^2t^{-2}q^{-1}]$  или  $[ht^{-1}q^{-1}]$ , если через  $[h]$  обозначить размерность (абсолютную или относительную) кванта. Из (2.7а) следует, что  $B_{\nu 3}$  имеет абсолютную размерность  $[hq^{-1}]$  и относительную размерность  $[ht^{-2}q^{-1}] = [mt^{-1}q^{-1}]$ . Абсолютная размерность  $\rho$  равна  $[q]$ . Отсюда согласно (2.7 с)  $\mathcal{D}^\alpha$  имеет абсолютную размерность  $[q]$  и  $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$  — абсолютную размерность  $[t^{-1}q]$ .

На стр. 193 приведена таблица (2.9) размерностей.

Чтобы доказать, что для построения геометрического образа  $E_3$  с абсолютной размерностью  $[ht^{-1}q^{-1}]$  необходимы лишь единицы кванта, времени и электрического заряда,

	Абсолютная	Относительная
Электрический заряд	$Q [q]$	$Q [q]$
Электрическая плотность	$\rho [q]$	$\rho [ql^{-3}]$
Напряженность электрического поля	$E_{\beta} [ht^{-1}q^{-1}]$	$E_b [ht^{-1}t^{-1}q^{-1}] = [mlt^{-2}q^{-1}]$
Диэлектрическое смещение	$\mathcal{D}^{\alpha} [q]$	$\mathcal{D}^a [l^{-2}q]$
Напряженность магнитного поля	$\mathcal{H}^{\alpha\beta} [t^{-1}q]$	$\mathcal{H}^{ab} [l^{-1}t^{-1}q]$
Магнитная индукция	$B_{\gamma\beta} [hq^{-1}]$	$B_{cb} [hl^{-2}q^{-1}] = [mt^{-1}q^{-1}]$
Магнитный поток	$\Phi [hq^{-1}]$	$\Phi [hq^{-1}] = [ml^2t^{-1}q^{-1}]$
Диэлектрическая постоянная	$\varepsilon [h^{-1}l^{-1}tq^2]$	$\varepsilon [h^{-1}l^{-1}tq^2] = [m^{-1}l^{-3}t^2q^2]$
Магнитная проницаемость	$\mu [hl^{-1}tq^{-2}]$	$\mu [hl^{-1}tq^{-2}] = [mlq^{-2}]$
Тензорная плотность диэлектрической проницаемости	$\varepsilon^{\alpha\beta} [h^{-1}tq^2]$	$\varepsilon^{ab} [h^{-1}l^{-1}tq^2] = [m^{-1}l^{-3}t^2q^2]$
Тензорная плотность магнитной проницаемости	$\mu_{\delta\gamma\beta\alpha} [htq^{-2}]$	$\mu_{dcba} [hl^{-1}tq^{-2}] = [mlq^{-2}]$
Квант	$[h]$	$[h] = [ml^2t^{-1}]$

рассмотрим электрон (с зарядом  $e$ ), покоящийся в  $O$  в поле  $E_{\beta}$  в газе с частотой излучения  $\nu$  (размерность  $[t^{-1}]$ ). Излучение начинается всюду, где энергия электрона равна  $h\nu$ . Если приложено медленно меняющееся магнитное поле, то оно не изменяет энергии электрона, так как соответствующая сила перпендикулярна скорости. Изменяется только путь электрона. Следовательно, геометрическим местом точек, в которых возникает излучение, является в точности вторая плоскость ковариантного вектора  $\frac{e}{h\nu} E_{\beta}$ , если первая плоскость проходит через  $O$ . Это означает, что само излучение изображает в пространстве ковариантный вектор  $\frac{e}{h\nu} E_{\beta}$ . Из этого вектора может быть получен  $E_{\beta}$ , если известны единицы кванта, времени и заряда.

Так как абсолютная размерность  $B_{\nu\beta}$  равна  $[hq^{-1}]$ , нам необходимы в этом случае только единицы кванта и электрического заряда. На движущийся в магнитном поле электрон действует сила

$$\vec{K} = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.10)$$

перпендикулярная вектору  $\vec{v}$ . Если  $R$  — кривизна траектории, то эта сила равна  $m\nu^2/R$ . Это означает, что электрон описывает спираль с осью в направлении  $\vec{B}$ .

Пусть ось спирали совпадает с осью  $y$ ,  $\rho$  — радиус соответствующего цилиндра,  $\varphi$  — угол между

ду  $\vec{v}$  и плоскостью  $xz$  и  $M$  — центр кривизны некоторой точки кривой, лежащей на оси  $z$ . Тогда хорошо известно, что

$$R = \frac{\rho}{\cos^2 \varphi}. \quad (2.11)$$

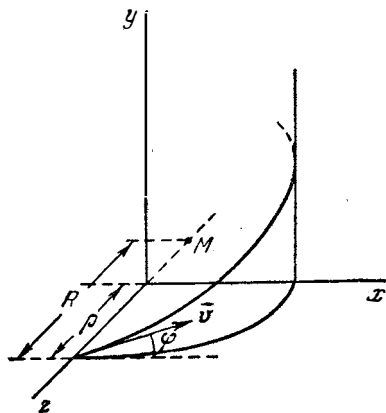


Рис. 24.

Из (2.10) следует, что

$$e v B \cos \varphi = \frac{m v^2}{R} = \frac{m v^2 \cos^2 \varphi}{\rho}. \quad (2.12)$$

Отсюда момент количества движения относительно оси  $y$  равен

$$m r v \cos \varphi = e B \rho^2 = \frac{1}{\pi} e B O, \quad O \stackrel{\text{def}}{=} \pi \rho^2. \quad (2.13)$$

Согласно квантовой теории этот момент количества движения должен быть равен произведению  $\psi$  на  $h/2\pi$ , где  $\psi$  — соответствующее квантовое число. Отсюда

$$2eBO = \psi h, \quad (2.14)$$

а это означает, что цилиндр представляет ковариантный вектор  $\frac{2e}{\psi h} B_{y\beta}$ . Таким образом, движущийся электрон изображает в пространстве бивектор  $B_{y\beta}$  с точностью до множителя, который может быть подсчитан, если известны квантовое число движения, единица кванта и заряд.

Если обозначить через  $[r]$  размерность сопротивления  $[hq^{-2}]$ , то абсолютная размерность  $B_{y\beta}$  может быть записана в виде  $[rq]$ , откуда следует, что бивектор  $B_{y\beta}$  может быть построен, если известны единицы сопротивления и заряда. Предположим, что мы имеем плоскую катушку, связанную с баллистическим гальванометром. Ориентация, указывающая положительный отсчет по гальванометру, превращает эту катушку в контравариантный бивектор  $f^{\alpha\beta}$ . Скаляр

$$\frac{1}{2} f^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \frac{\text{площадь катушки}}{\text{площадь сечения } B_{\alpha\beta} \text{ плоскостью катушки}} \quad (2.15)$$

является магнитным потоком через катушку. Этот поток положителен, если ориентация  $f^{\alpha\beta}$  совпадает с ориентацией  $B_{\alpha\beta}$ , и отрицателен в противоположном случае. Если  $R$  — сопротивление катушки,  $N$  — число витков и  $I$  — ток в катушке, то мы имеем

$$\frac{R}{N} \int I dt = \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}, \quad (2.16)$$

если катушка внезапно удалена из поля. Поэтому площадь сечения  $V_{\alpha\beta}$  плоскостью катушки равна

$$\frac{N}{R} \frac{\text{площадь катушки}}{\int I dt}.$$

Таким образом, этот метод позволяет нам построить сечение цилиндра  $V_{\alpha\beta}$  любой плоскостью. Действительно, для *этого требуются только единицы сопротивления и электрического заряда.*

$\vec{H}$  и  $\vec{D}$  являются величинами, используемыми для вычислений, и они не могут быть измерены непосредственно, так как на движущийся заряд действуют только силы, зависящие от  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Следовательно,  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  всегда должны определяться с помощью некоторых непосредственно измеряемых величин, таких, как масса, длина, время, заряд,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  с последующим подсчетом  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  по результатам этих измерений. *Несмотря на это, для построения геометрических образов  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  требуются только единицы, входящие в их абсолютные размерности.*

Для построения векторной плотности  $\mathcal{D}^\alpha$  (абсолютной размерности  $[q]$ ) в точке электрического поля конденсатора произвольной формы необходимо лишь измерить заряд  $\Psi$  конденсатора с помощью баллистического гальванометра. Силовые линии могут быть тогда определены расчетным путем, для чего требуется знание только *формы* конденсатора, но не его абсолютных размеров.

Следовательно, никакой единицы длины не требуется. Если при этом малая трубка соответствует заряду  $\Delta\Psi$ , то ее малый отрезок представляет векторную плотность  $\frac{1}{\Delta\Psi} \mathcal{D}^\alpha$  и с тем лучшей точностью, чем меньше  $\Delta\Psi$ . Конечно, для определения *ортогональных* компонент  $\vec{D}$  единица длины также необходима, что согласуется с относительной размерностью  $\vec{D} [l^{-2}q]$ .

Аналогично этому для построения геометрического образа поля  $\vec{H}^{ab}$  заданного тока требуется только единица электрического тока (размерность  $[t^{-1}q]$ ), что согласуется с абсолютной размерностью  $[t^{-1}q]$  поля  $\vec{H}$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

VI. 1. Обычно температуре приписывается размерность  $[I]$ . Но так как температуру можно определить как «тепло на одну частицу», для размерности температуры возможно также выбрать значение  $[ml^2t^{-2}]$ . Проверьте приведенные ниже формулы для размерности величин из VII, §§ 1—3. Через  $[\theta]$  обозначена размерность температуры. Мертвые индексы опущены.

	Абсолютная	Относительная
$u^x$	$[I]$	$[I]$
$u_\lambda$	$[I^2]$	$[I]$
$u_{\mu\lambda}$	$[I^2]$	$[I]$
$\hat{f}_\lambda ds$	$[I]$	$[I^2]$
$p^x ds$	$[mlt^{-2}]$	$[mlt^{-2}]$
$\hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$	$[mlt^{-2}]$	$[ml^{-1}t^{-2}]$
$\hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda}$	$[ml^2t^{-2}]$	$[ml^{-1}t^{-2}]$
$d\tau$	$[I]$	$[I^3]$
$\hat{\epsilon}^{\kappa\lambda\mu\nu}$	$[ml^{-2}t^{-2}]$	$[ml^{-1}t^{-2}]$
$\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}$	$[m^{-1}l^2t^2]$	$[m^{-1}l^2t^2]$
$T, \theta$	$[\theta]$	$[\theta]$
$\hat{S}, \eta$	$[ml^2t^{-2}\theta^{-1}]$	$[ml^{-1}t^{-2}\theta^{-1}]$
$\hat{Q}$	$[ml^2t^{-2}]$	$[ml^{-1}t^{-2}]$
$\rho$	$[m]$	$[ml^{-3}]$
$C$	$[l^2t^{-2}\theta^{-1}]$	$[l^2t^{-2}\theta^{-1}]$
$\gamma^{\kappa\lambda}$	$[I^{-2}]$	$[I]$
$\alpha_{\mu\lambda}$	$[I^2\theta^{-1}]$	$[\theta^{-1}]$

VI.2. Проверьте следующие формулы размерностей для величин из VII, § 4 (мертвые индексы опущены):

	Абсолютная	Относительная
$h^{\lambda}_{\cdot\cdot\mu}$	$[mt^{-2}q^{-1}]$	$[mlt^{-2}q^{-1}]$
$\beta_{\lambda\mu}$	$[ml^2t^{-2}q^{-2}]$	$[ml^3t^{-2}q^{-2}]$
$\hat{q}_\lambda$	$[q^{-1}]$	$[l^2q^{-1}]$
$d^{\lambda}_{\lambda l t}$	$[m^{-1}t^2q]$	$[m^{-1}l^{-1}t^2q]$
$\varepsilon^{\lambda\lambda}$	$[m^{-1}l^{-2}t^2q^2]$	$[m^{-1}l^{-3}t^2q^2]$
$\hat{p}^\alpha$	$[q\theta^{-1}]$	$[l^{-2}q\theta^{-1}]$
$\hat{e}^{\alpha\lambda\mu}$	$[l^{-2}q]$	$[l^{-2}q]$
$\hat{g}_{\mu\lambda\kappa}$	$[l^2q^{-1}]$	$[l^2q^{-1}]$

VI.3. Проверьте следующие формулы размерностей для величин из гл. IX.

Величины в трех измерениях:

	Абсолютная	Относительная
$s^\alpha$	$[t^{-1}]$	$[lt^{-1}]$
$\rho$	$[q]$	$[l^{-3}q]$
$\mu$	$[m]$	$[ml^{-3}]$
$\hat{s}^\alpha$	$[l^{-1}q]$	$[l^{-3}q]$
$\hat{f}_\beta d\sigma$	$[l]$	$[l^2]$
$E d\sigma$	$[ml^2t^{-3}]$	$[ml^2t^{-3}]$
$p^\alpha d\sigma$	$[mt^{-2}]$	$[mlt^{-2}]$
$\mathfrak{E}_\alpha$	$[ml^2t^{-3}]$	$[mt^{-3}]$
$\mathcal{J}^{\alpha\beta}$	$[mt^{-2}]$	$[ml^{-1}t^{-2}]$
$\mathcal{M}^\alpha$	$[mt^{-1}]$	$[ml^{-2}t^{-1}]$
$\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_\sigma, \hat{p}$	$[ml^2t^{-2}]$	$[ml^2t^{-2}]$
$\hat{Q}^\alpha$	$[ml^2t^{-3}]$	$[mt^{-3}]$

( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ )

Величины в четырех измерениях:

	Абсолютная	Относительная
$F_{\lambda\kappa}$	$[ml^2t^{-1}q^{-1}] = [hq^{-1}]$	$[mt^{-1}q^{-1}]$
$\mathcal{F}^{\kappa\lambda}$	$[q]$	$[t^{-2}q]$
$\widehat{S}^{\kappa}$	$[q]$	$[t^{-3}q]$
$\rho_0$	$[lq]$	$[t^{-3}q]$
$\overset{4}{K}_\lambda$	$[ml^2t^{-2}]$	$[mlt^{-2}]$
$\underset{l}{v}^{\kappa}, \underset{l}{s}^{\kappa}$	$[t^{-1}]$	$[l]$
$\widehat{k}_\lambda$	$[ml^3t^{-2}]$	$[mlt^{-2}t^{-2}]$
$\widehat{k}^{\kappa}$	$[mlt^{-2}]$	$[mlt^{-2}t^{-2}]$
$\mu_0$	$[ml]$	$[mlt^{-3}]$
$\underset{m}{\mathcal{F}}^{\kappa\lambda}, \underset{e}{\mathcal{F}}^{\kappa\lambda}$	$[mlt^{-2}]$	$[ml^{-1}t^{-2}]$
$k$	$[m^{-1}l]$	$[m^{-1}l]$
	$[m^{-1}l^3t^{-2}]$	$[m^{-1}l^3t^{-2}]$
$\mathcal{E}_\lambda d\omega$	$[t^{-1}l]$	$[l^2t]$
$M^{\kappa} d\omega$	$[mt^{-1}]$	$[mlt^{-1}]$



## VII. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ УПРУГОСТИ <sup>1)</sup>

### 1. Деформации

Рассмотрим материальную среду, занимающую некоторую область обычного пространства, отнесенного к декартовым координатам  $x^h$  ( $h = 1, 2, 3$ ) и криволинейным или общим прямолинейным координатам  $\xi^x$  ( $x = 1, 2, 3$ ). Пусть частицы среды подвергаются малому смещению  $u^x$ , и пусть  $v^x$  — инфинитезимальный вектор в точке  $\xi$ , фиксированной в среде. Тогда, если  $(x')$  — система координат, полученная из  $(x)$  увлечением по инфинитезимальному вектору  $u^x$ , то координаты  $\xi^{x'}$  смещенной точки  $\xi^x$  и компоненты  $v^{x'}$  смещенного вектора  $v^x$  имеют в смещенной точке координаты, совпадающие по величине с  $\xi^x$  и  $v^x$  соответственно. Мы знаем, что (ср. (IV. 5.9))

$$A_{x'}^x = \delta_{x'}^x (A_x^x + \partial_\lambda w^x), \quad (1.1)$$

и, следовательно, смещенный вектор  $v^x$  имеет в  $\xi^x + u^x$  компоненты

$$v^x + v^\lambda \partial_\lambda u^x \quad (1.2)$$

относительно  $(x)$ .

Если вектор  $v^x$  в  $\xi^x$  смещается параллельно <sup>2)</sup> в  $\xi^x + u^x$ , то компоненты смещенного вектора равны (ср. V, § 1):

$$v^x - \Gamma_{\mu\lambda}^x v^\lambda u^\mu. \quad (1.3)$$

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Фойгт 1898.1; Тедоне 1907.1; Бриллюэн 1938.1; Ляв 1944.1; Кэди 1946.2; Крутков 1949.1; Мэзон 1950.1; Ландау и Лифшиц 1954.1; Лурье 1955.1; Снеддон и Берри 1958.1; Седов 1962.1.

<sup>2)</sup> Так как мы работаем в  $R_3$ , параллельное смещение имеет обычный смысл.

Отсюда вариация вектора  $v^x$  с точки зрения наблюдателя, координатная система которого переносится параллельно, равна

$${}^v d v^x = v^\lambda \partial_\lambda u^x + \Gamma_{\mu\lambda}^x u^\mu v^\lambda = v^\mu \nabla_\mu u^x. \quad (1.4)$$

Эту вариацию можно разложить на две составляющие

$${}^v d v^x = v^\mu g^{x\lambda} \nabla_{[\mu} u_{\lambda]} + v^\mu g^{x\lambda} \nabla_{(\mu} u_{\lambda)}. \quad (1.5)$$

Первая составляющая представляет вращение, бивектором которого является  $\nabla_{[\mu} u_{\lambda]}$ . Если вторая составляющая равна нулю, то инфинитезимальная частица материи в  $\xi^x$  подвергается только трансляции на вектор  $u^x$  и вращению без деформации. Вторая составляющая представляет чистую деформацию без вращения. Поэтому мы называем

$$u_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \mp \nabla_{(\mu} u_{\lambda)} \quad \text{или} \quad u_{ji} = \mp \partial_{(j} u_{i)} \quad (j, i = 1, 2, 3)^1) \quad (1.6)$$

*тензором деформаций* для сигнатуры  $\mp \mp \mp$ <sup>2)</sup>. Каждый симметричный тензор может быть разложен на *шаровую часть*, или для краткости скаляр, и *девиатор*

$$u_{\mu\lambda} = \frac{1}{3} u_{\cdot\nu} g_{\mu\lambda} + \left( u_{\mu\lambda} - \frac{1}{3} u_{\cdot\nu} g_{\mu\lambda} \right). \quad (1.7)$$

Скаляр  $u_{\cdot\nu}$  называется *следом* или *линейным инвариантом* тензора  $u_{\mu\lambda}$ . Для тензора деформаций след равен дивергенции  $\nabla_{\mu} u^{\mu}$  или  $\partial_j u^j$ . След девиатора равен нулю. Если при деформации этот скаляр равен нулю, то это означает, что объем инфинитезимальной частицы не изменяется.

## 2. Силы и напряжения

Каждый двумерный элемент, или грань, с внешней ориентацией в  $R_3$  является ковариантной векторной плотностью веса  $-1$ , которую мы можем обозначить  $\hat{f}_\lambda ds$ . Здесь  $ds$  — площадь, а  $\hat{f}_\lambda$  представляет грань единичной площади.

<sup>1)</sup> Компоненты  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  часто обозначаются  $x_x$ ,  $\frac{1}{2} x_y = \frac{1}{2} y_x$ .

<sup>2)</sup> В этой главе, начиная с § 2 и дальше, мы используем сигнатуру  $+++$ .

Мы будем различать *внешнюю* и *внутреннюю* стороны элемента, считая, что стрелка ориентации направлена изнутри наружу. Тогда при деформации среда с наружной стороны  $\hat{f}_\lambda ds$  воздействует с некоторой силой на среду с внутренней стороны. Обозначим эту силу через  $p^\alpha ds$ , где  $p^\alpha$  — сила на единицу площади.

Если  $\hat{f}_\lambda ds$ , ... и  $\hat{f}_\lambda ds$  — внешние грани инфинитезимального тетраэдра, то мы имеем тождество

$$\hat{f}_\lambda ds = -\hat{f}_\lambda ds - \hat{f}_\lambda ds - \hat{f}_\lambda ds. \quad (2.1)$$

Если  $p^\alpha ds$ , ... и  $p^\alpha ds$  силы, с которыми среда действует извне на эти грани, то сумма этих сил равна произведению массы тетраэдра на ускорение его центра тяжести. Но так как эта масса третьего порядка малости относительно дифференциалов  $d\xi^\alpha$ , тогда как силы имеют второй порядок, то мы имеем

$$p^\alpha ds = -p^\alpha ds - p^\alpha ds - p^\alpha ds. \quad (2.2)$$

Отсюда в силу линейной независимости  $\hat{f}_\lambda$ ,  $\hat{f}_\lambda$  и  $\hat{f}_\lambda$  имеется одна и только одна тензорная плотность  $\hat{\sigma}^{\alpha\lambda}$  веса  $+1$ , которая удовлетворяет уравнениям<sup>1)</sup>

$$p^\alpha = \hat{\sigma}^{\alpha\lambda} \hat{f}_\lambda, \quad p^\alpha = \hat{\sigma}^{\alpha\lambda} \hat{f}_\lambda \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

Пусть теперь  $s$  — замкнутая поверхность, ограничивающая область среды  $\tau$ ,  $x^h$  — радиус-вектор точки в декартовых координатах,  $\hat{f}_i ds$  — элемент  $s$ ,  $\rho$  — массовая плотность,  $p^h ds$  — сила, действующая извне на  $\hat{f}_i ds$ , и  $\hat{k}^h d\tau$  — равнодействующая внешних сил, действующих на среду в объеме элемента  $d\tau$ . Тогда главный вектор сил, действующих на

<sup>1)</sup> Компоненты  $\hat{\sigma}^{11}$ ,  $\hat{\sigma}^{12}$  часто обозначаются через  $\pm X_x$ ,  $\pm X_y$  или  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ . Употребляются и многие другие обозначения.

среди внутри  $s$ , равен <sup>1)</sup>

$$K^h \stackrel{*}{=} \int_s p^h ds + \int_\tau \widehat{k}^h d\tau = \int_s \widehat{\sigma}^{hl} \widehat{f}_l ds + \int_\tau \widehat{k}^h d\tau. \quad (2.4)$$

Применяя теорему Стокса, находим

$$K^h \stackrel{*}{=} \int_\tau (\partial_i \widehat{\sigma}^{hi} + \widehat{k}^h) d\tau. \quad (2.5)$$

Эта сила должна равняться результирующей всех первых производных по времени от количества движения всех частиц внутри  $s$ . Отсюда

$$K^h \stackrel{*}{=} \int_\tau \rho \dot{x}^h d\tau. \quad (2.6)$$

Так как (2.5) и (2.6) справедливы при любом выборе  $\tau$ , мы получаем

$$\rho \dot{x}^h \stackrel{*}{=} \partial_i \widehat{\sigma}^{hi} + \widehat{k}^h \stackrel{*}{=} \nabla_i \widehat{\sigma}^{hi} + \widehat{k}^h. \quad (2.7)$$

Но это уравнение имеет инвариантную форму, и, следовательно, может быть записано в общих координатах

$$\rho \dot{x}^\alpha \stackrel{*}{=} \nabla_\mu \widehat{\sigma}^{\alpha\mu} + \widehat{k}^\alpha. \quad (2.8)$$

Главный момент всех сил относительно начала координат равен

$$\begin{aligned} M^{hl} &\stackrel{*}{=} 2 \int_s x^{lh} p^{il} ds + 2 \int_\tau x^{lh} \widehat{k}^{il} d\tau \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} 2 \int_s x^{lh} \widehat{\sigma}^{il} \widehat{f}_j ds + 2 \int_\tau x^{lh} \widehat{k}^{il} d\tau \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} 2 \int_\tau (\partial_j x^{lh} \widehat{\sigma}^{il} \widehat{f}_j + x^{lh} \widehat{k}^{il}) d\tau \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} 2 \int_\tau (\widehat{\sigma}^{l[hi]} + x^{lh} \partial_j \widehat{\sigma}^{il} \widehat{f}_j + x^{lh} \widehat{k}^{il}) d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

---

<sup>1)</sup> Эти уравнения справедливы лишь в прямолинейных координатах. В криволинейных координатах они несправедливы, так как, вообще говоря, невозможно складывать векторы в различных точках. Поэтому мы используем знак  $\stackrel{*}{=}$  (ср. II, § 2).

Этот момент должен равняться результирующей всех первых производных по времени от момента количества движения всех частиц внутри  $\sigma$ :

$$M^{hi} \stackrel{*}{=} 2 \int_{\tau} \rho x^{[h} \dot{x}^{i]} d\tau. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10), учитывая (2.7), находим соотношение

$$\int_{\tau} \hat{\sigma}^{[ih]} d\tau \stackrel{*}{=} 0, \quad (2.11)$$

справедливое при любом выборе  $\tau$ . Отсюда

$$\hat{\sigma}^{[k\lambda]} = 0 \quad (2.12)$$

во всех точках. Следовательно,  $\hat{\sigma}^{k\lambda}$  — симметричная тензорная плотность веса  $+1$ .  $\hat{\sigma}^{k\lambda}$  называется тензорной плотностью напряжений, а

$$\sigma^{k\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Vg} \hat{\sigma}^{k\lambda} \quad (2.13)$$

— тензором напряжений. При использовании декартовых координат разница между тензорами и тензорными плотностями исчезает.

Выражение

$$\partial_i \hat{\sigma}^{hi} \stackrel{*}{=} \nabla_i \hat{\sigma}^{hi} = \nabla_i \hat{\sigma}^{ih} \quad (2.14)$$

является силой, приходящейся на единицу объема и порождаемой внутренними силами. В общих координатах  $\nabla_{\mu} \hat{\sigma}^{\mu\kappa}$  есть сила, приходящаяся на базисный параллелепипед и порождаемая внутренними силами. Она является векторной плотностью веса  $+1$ .

### 3. Упругие константы <sup>1)</sup>

Рассмотрим кусок материальной среды, который подвергается инфинитезимальной деформации  $du^{\kappa}$ , и предположим, что тепловые процессы отсутствуют. Тогда энергия всех

<sup>1)</sup> Ср. Фойгт 1898.1; Тедоне 1907.1; Ляв 1944.1; Мэзон 1947.4.

действующих сил должна равняться приращению упругой потенциальной энергии. Согласно (2.3) это приращение энергии равно<sup>1)</sup>

$$\int_s p^{\mu} du_{\mu} ds + \int_{\tau} \hat{k}^{\mu} du_{\mu} d\tau = \int_s \hat{\sigma}^{\mu\lambda} \hat{f}_{\mu} du_{\lambda} ds + \int_{\tau} \hat{k}^{\mu} du_{\mu} d\tau. \quad (3.1)$$

Отсюда, используя теорему Стокса и соотношения (1.6) и (2.8), находим выражение

$$\int_{\tau} [(\nabla_{\mu} \hat{\sigma}^{\mu\lambda}) du_{\lambda} d\tau + \hat{\sigma}^{\mu\lambda} d\nabla_{\mu} u_{\lambda} + \hat{k}^{\mu} du_{\mu}] d\tau = \int_{\tau} \hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda} d\tau \quad (3.2)$$

для приращения энергии. Это доказывает, что  $\hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda}$  есть приращение потенциальной энергии в базисном параллелепипеде, а  $\hat{\sigma}^{ij} du_{ij}$  — то же в единице объема.

При наличии тепловых процессов приращение общей энергии в базисном параллелепипеде равно

$$d\mathcal{E} = \hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda} + T d\hat{S} = \hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda} + d\hat{Q}, \quad (3.3)$$

где  $T$  — температура,  $\hat{S}$  — энтропия базисного параллелепипеда и  $d\hat{Q} = T d\hat{S}$  — приращение тепловой энергии в базисном параллелепипеде.

Мы предполагаем теперь что:

- (1) среда является однородным кристаллом;
- (2) начальные  $\hat{\sigma}^{\mu\lambda} = 0$ ,  $u_{\mu\lambda} = 0$ ,  $T = T_0$ ,  $\hat{S} = \hat{S}_0$ ;
- (3) рассматривается состояние, характеризуемое  $\hat{\sigma}^{\mu\lambda}$ ,  $u_{\mu\lambda}$ ,  $T = T_0 + \theta$ ,  $\hat{S} = \hat{S}_0 + \eta$ , где  $\hat{\sigma}^{\mu\lambda}$ ,  $u_{\mu\lambda}$ ,  $\theta$  и  $\eta$  (плотность) малы;
- (4)  $\hat{\sigma}^{\mu\lambda}$  и  $\theta$  единственным образом определяются  $u_{\mu\lambda}$  и  $\eta$  и наоборот;

<sup>1)</sup> Так как подинтегральные выражения — скаляры, это уравнение может быть записано в общих координатах.

- (5) процесс обратим и *используются только прямолинейные координаты* (или аффинные, или декартовы), и, следовательно,

$$d\mathcal{E} = \hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda} + T_0 d\eta$$

является полным дифференциалом.

Так как мы используем только прямолинейные координаты, то уравнения в этом и следующем параграфах справедливы лишь для подобных координат. Исключениями являются уравнения, которые имеют инвариантную форму и отмечены звездочкой.

Если  $\hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$  и  $\theta$  выражены через  $u_{\mu\lambda}$  и  $\eta$ , то мы имеем:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad d\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial u_{\mu\nu}} du_{\mu\nu} + \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \eta} d\eta, \\ \text{(b)} \quad d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial u_{\mu\nu}} du_{\mu\nu} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Член  $\frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta$  в (3.4b) представляет изменение температуры при постоянных деформациях. Отсюда, если через  $C_{(u)}$  (плотность) обозначить теплоемкость единицы массы при постоянных деформациях, то

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta = \frac{d\hat{Q}}{\rho C_{(u)}}, \tag{3.5}$$

и это выражение при постоянной  $C_{(u)}$  является полным дифференциалом.

В качестве первого приближения мы можем теперь предположить, что  $\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} / \partial u_{\mu\nu}$ ,  $\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} / \partial \eta$  и  $\partial \theta / \partial u_{\mu\nu}$  в (3.4) постоянны (закон Гука) и что  $C_{(u)}$  — константа (напоминаем, что рассматриваются только прямолинейные координаты). В этом приближении  $d\mathcal{E}$  полный дифференциал тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial u_{\mu\nu}} &= \frac{\partial \hat{\sigma}^{\mu\nu}}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_{\kappa\lambda}} &= \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если эти условия выполнены и если мы обозначим:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial u_{\mu\nu}} = \frac{\partial \hat{\sigma}^{\mu\nu}}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \\ (b) \quad \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \eta} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \theta}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

то уравнения (3.4) запишутся в форме:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= \hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} \Delta \hat{Q}, \\ (b) \quad \theta &= -T_0 \gamma_{(u)}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} + \frac{1}{\rho C_{(u)}} \Delta \hat{Q}. \end{aligned} \quad (3.8^*)$$

справедливой для малых деформаций  $u_{\mu\nu}$  и малого теплового потока.

Относительно прямолинейных координат  $\hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  являются *адиабатическими упругими константами*, а  $-\gamma_{(u)}^{\kappa\lambda}$  являются напряжениями на единицу тепла, которые необходимы для предотвращения деформации.

Если выразить  $u_{\mu\lambda}$  и  $\eta$  через  $\hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$  и  $\theta$ , то мы получим:

$$\begin{aligned} (a) \quad du_{\mu\nu} &= \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} d\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \theta} d\theta, \\ (b) \quad d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} d\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выражение  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} d\theta$  в (3.9b) представляет изменение энтропии при постоянных напряжениях. Обозначая через  $C^{(\sigma)}$  теплоемкость единицы массы при постоянных напряжениях, имеем

$$T_0 \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \rho C^{(\sigma)}, \quad (3.10)$$

и выражение

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} d\theta = \frac{d\theta}{T_0} \rho C^{(\sigma)} \quad (3.11)$$

является полным дифференциалом, если  $C^{(\sigma)}$  — константа.

В качестве первого приближения мы предположим теперь, что  $\partial u_{\mu\nu} / \partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$ ,  $\partial u_{\mu\nu} / \partial \theta$ ,  $\partial \eta / \partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$  и  $C^{(\sigma)}$  — константы. В этом



приближении  $d\theta$  полный дифференциал тогда и только тогда, когда

$$u_{\mu\lambda} d\hat{\sigma}^{\mu\lambda} + \eta d\theta \quad (3.12)$$

есть полный дифференциал, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} &= \frac{\partial u_{\kappa\lambda}}{\partial \hat{\sigma}^{\mu\nu}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} &= \frac{\partial u_{\kappa\lambda}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда, если мы обозначим:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} = \frac{\partial u_{\kappa\lambda}}{\partial \hat{\sigma}^{\mu\nu}}, \\ (b) \quad \alpha_{\mu\lambda}^{(\sigma)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_{\mu\lambda}}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta}{\partial \hat{\sigma}^{\mu\lambda}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

то уравнения (3.9) запишутся в форме:

$$\begin{aligned} (a) \quad u_{\mu\nu} &= \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)} \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} \theta, \\ (b) \quad \Delta \hat{Q} &= T \rho \alpha_{\kappa\lambda}^{(\sigma)} \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \rho C^{(\sigma)} \theta, \end{aligned} \quad (3.15^*)$$

справедливой для малых деформаций и малых изменений температуры. Относительно прямолинейных координат  $\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)}$  являются *изотермическими упругими константами*, а  $\alpha_{\mu\lambda}^{(\sigma)}$  являются температурными коэффициентами деформаций без напряжений.

Из (3.7а) и (3.14а) мы видим, что  $\hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  и  $\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)}$  не только симметричны по первой и второй парам индексов, но также инвариантны относительно перестановки этих пар индексов. Отсюда эти величины, если отвлечься от того обстоятельства, что они являются плотностями, играют ту же роль для симметричных тензоров валентности 2, которую последние играют для векторов, и, следовательно, имеют  $\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$  независимых компонент.

Чтобы найти соотношения между  $\hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ ,  $\gamma_{(u)}^{\kappa\lambda}$ ,  $C_{(u)}$  и  $\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)}$ ,  $\alpha_{\mu\lambda}^{(\sigma)}$ ,  $C^{(\sigma)}$ , мы введем величину, обратную  $\hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ , с помощью

уравнения

$$\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\eta)} \hat{c}^{\mu\nu\rho\sigma} = A_{(\kappa}^{\rho} A_{\lambda)}^{\sigma}. \quad (3.16^*)$$

Тогда (3.8а) запишется в виде

$$u_{\mu\nu} = \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\eta)} \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\eta)} \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} \Delta \hat{Q}. \quad (3.17^*)$$

Исключая из (3.15\*)  $\theta$ , получаем

$$u_{\mu\nu} = \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)} \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} - \frac{T_0}{\rho C^{(\sigma)}} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} \alpha_{\kappa\lambda}^{(\sigma)} \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \frac{I}{\rho C^{(\sigma)}} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} \Delta \hat{Q}. \quad (3.18^*)$$

Из последних двух уравнений следует, что:

$$(a) \quad \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\eta)} = \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)} - \frac{T_0}{\rho C^{(\sigma)}} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} \alpha_{\kappa\lambda}^{(\sigma)}, \quad (3.19^*)$$

$$(b) \quad \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} = \rho C^{(\sigma)} \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\eta)} \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda}.$$

Аналогичным образом, записывая (3.15\*а) в виде

$$\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} = \hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - \hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} \theta \quad (3.20^*)$$

с помощью величины  $\hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ , обратной  $\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\theta)}$ , и исключая  $\Delta \hat{Q}$  из (3.8\*), находим

$$\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} = \hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - \rho C_{(u)} T_0 \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} \gamma_{(u)}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} - \rho C_{(u)} \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} \theta. \quad (3.21^*)$$

Из последних двух уравнений следует, что:

$$(a) \quad \hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} = \hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} - \rho C_{(u)} T_0 \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} \gamma_{(u)}^{\mu\nu}, \quad (3.22^*)$$

$$(b) \quad \rho C_{(u)} \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} = \hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)}.$$

Из (3.19\*b) находим

$$\rho C^{(\sigma)} \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} = \hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)}. \quad (3.23^*)$$

Отсюда

$$\rho (C^{(\sigma)} - C_{(u)}) \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} = \rho C_{(u)} T_0 \gamma_{(u)}^{\kappa\lambda} \gamma_{(u)}^{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)}, \quad (3.24^*)$$

или, используя (3.22\*b),

$$C^{(\sigma)} - C_{(u)} = C_{(u)} T_0 \gamma_{(u)}^{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)} = \frac{I}{\rho} T_0 \hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu} \alpha_{\kappa\lambda}^{(\sigma)} \alpha_{\mu\nu}^{(\sigma)}. \quad (3.25^*)$$

Разность между  $\hat{b}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  и  $\hat{b}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  очень мала. Например, для  $\alpha$ -кварца

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(\sigma)} = \alpha_{22}^{(\sigma)} &= 14,3 \cdot 10^{-6}, & \alpha_{33}^{(\sigma)} &= 7,8 \cdot 10^{-6} (1^\circ\text{K}), \\ \alpha_{23}^{(\sigma)} = \alpha_{31}^{(\sigma)} = \alpha_{12}^{(\sigma)} &= 0, & & (3.26) \\ \rho &= 2,650 \text{ кг/м}^3, & C^{(\sigma)} &= 7,35 \cdot 10^5 \text{ дж/кг}. \end{aligned}$$

Согласно (3.19\*а) отсюда следует, что различаться могут только компоненты  $\hat{b}_{1111} = \hat{b}_{2222}$ ,  $\hat{b}_{1122}$ ,  $\hat{b}_{1133} = \hat{b}_{2233}$  и  $\hat{b}_{3333}$ . Для значений  $\hat{b}_{hij\kappa}^{(\eta)}$ , данных Мэзоном<sup>1)</sup> (в  $\text{м}^2/\text{ньютон}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{b}_{1111}^{(\eta)} &= 127,9 \cdot 10^{-13}, & \hat{b}_{1122}^{(\eta)} &= -15,35 \cdot 10^{-13}, \\ \hat{b}_{1133}^{(\eta)} &= -11,0 \cdot 10^{-13}, & \hat{b}_{3333}^{(\eta)} &= 95,6 \cdot 10^{-13}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

находим

$$\begin{aligned} \hat{b}_{1111}^{(\theta)} &= 128,2 \cdot 10^{-13}, & \hat{b}_{1122}^{(\theta)} &= -15,04 \cdot 10^{-13}, \\ \hat{b}_{1133}^{(\theta)} &= -10,83 \cdot 10^{-13}, & \hat{b}_{3333}^{(\theta)} &= 95,7 \cdot 10^{-13}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

По-видимому, разница меньше погрешности эксперимента.

#### 4. Диэлектрические и пьезоэлектрические константы<sup>2)</sup>

Теперь мы предположим, что имеются также электрическое поле  $E_\lambda$  и электрическая индукция  $\mathcal{D}^\kappa$ , принимающие малые значения в течение процесса и равные нулю в начальном состоянии. Мы предположим также, что  $\hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$ ,  $\theta$  и  $E_\lambda$  однозначно определяются  $u_{\mu\lambda}$ ,  $\eta$  и  $\mathcal{D}^\kappa$  и наоборот и что процессы обратимы. Разницей между  $\hat{c}_{(\theta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  и  $\hat{c}_{(\eta)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  будем пренебрегать.

Приращение полной энергии на базисный параллелепипед записывается теперь в виде

$$d\mathcal{E} = \hat{\sigma}^{\mu\lambda} du_{\mu\lambda} + E_\lambda d\mathcal{D}^\lambda + T d\eta. \quad (4.1)$$

<sup>1)</sup> 1947. 4.

<sup>2)</sup> Ср. Фойгт 1898. 1; Кэди 1945. 2; Мэзон 1947. 4; 1950. 1.

Если  $\hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$ ,  $\theta$  и  $E_\lambda$  выразить через  $u_{\mu\nu}$ ,  $\eta$  и  $\mathcal{D}^\mu$ , мы получим

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial u_{\mu\nu}} du_{\mu\nu} + \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \mathcal{D}^\mu} d\mathcal{D}^\mu + \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \eta} d\eta, \\ dE_\lambda &= \frac{\partial E_\lambda}{\partial u_{\mu\nu}} du_{\mu\nu} + \frac{\partial E_\lambda}{\partial \mathcal{D}^\mu} d\mathcal{D}^\mu + \frac{\partial E_\lambda}{\partial \eta} d\eta, \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial u_{\mu\nu}} du_{\mu\nu} + \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{D}^\mu} d\mathcal{D}^\mu + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В качестве первого приближения мы можем предположить, что все производные, входящие в (4.2), кроме  $\partial\theta/\partial\eta$ , являются константами и что теплоемкость  $C_{(u, \mathcal{D})}$  единицы массы при постоянных деформациях и электрической индукции также константа. (Напоминаем, что мы используем только прямолинейные координаты.) Тогда

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{\rho C_{(u, \mathcal{D})}} d\hat{Q} \quad (4.3)$$

есть полный дифференциал.  $d\mathcal{E}$  является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial u_{\mu\nu}} &= \frac{\partial \hat{\sigma}^{\mu\nu}}{\partial u_{\kappa\lambda}}, & (b) \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \mathcal{D}^\mu} &= \frac{\partial E_\mu}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \\ (c) \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_{\kappa\lambda}}, & (d) \quad \frac{\partial E_\lambda}{\partial \mathcal{D}^\mu} &= \frac{\partial E_\mu}{\partial \mathcal{D}^\lambda}, \\ (e) \quad \frac{\partial E_\lambda}{\partial \eta} &= \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{D}^\lambda}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial u_{\mu\nu}} = \frac{\partial \hat{\sigma}^{\mu\nu}}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \\ (b) \quad h_{(\eta)\mu}^{\kappa\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \mathcal{D}^\mu} = -\frac{\partial E_\mu}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \\ (c) \quad \gamma_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}}{\partial \eta} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \theta}{\partial u_{\kappa\lambda}}, \\ (d) \quad \beta_{\lambda\mu}^{(u, \eta)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E_\lambda}{\partial \mathcal{D}^\mu} = \frac{\partial E_\mu}{\partial \mathcal{D}^\lambda}, \\ (e) \quad \hat{q}_\lambda^{(u)} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{T_0} \frac{\partial E_\lambda}{\partial \eta} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{D}^\lambda} \end{aligned} \quad (4.5)$$

и предполагая выполненными условия (4.4), запишем уравнения (4.2) в форме:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= \hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - h_{(\eta)\mu}^{\kappa\lambda} \mathcal{D}^\mu - \gamma_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda} \Delta \hat{Q}, \\
 (b) \quad E_\lambda &= -h_{(\eta)\lambda\mu}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} + \beta_{\lambda\mu}^{(u, \eta)} \mathcal{D}^\mu - \hat{q}_\lambda^{(u)} \Delta \hat{Q}, \\
 (c) \quad \theta &= -T_o \gamma_{(\mathcal{D})}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} - T_o \hat{q}_\mu^{(u)} \mathcal{D}^\mu + \frac{I}{\rho C_{(u, \mathcal{D})}} \Delta \hat{Q},
 \end{aligned} \tag{4.6*}$$

которая справедлива для малых деформаций, слабых электрических полей и малых тепловых потоков. Относительно прямолинейных координат  $\hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  — упругие константы при постоянной электрической индукции,  $h_{(\eta)\mu}^{\kappa\lambda}$  — адиабатические пьезоэлектрические константы,  $\gamma_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda}$  — термоупругие константы при постоянной электрической индукции,  $\hat{q}_\lambda^{(u)}$  — пирозлектрические константы при постоянных деформациях и  $\beta_{\lambda\mu}^{(u, \eta)}$  — адиабатические диэлектрические константы при постоянных деформациях.

Если  $u_{\mu\lambda}$ ,  $\eta$  и  $\mathcal{D}^\kappa$  выражены через  $\hat{\sigma}^{\kappa\lambda}$ ,  $\theta$  и  $E_\lambda$ , то мы имеем:

$$\begin{aligned}
 du_{\mu\nu} &= \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} d\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial E_\lambda} dE_\lambda + \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \theta} d\theta, \\
 d\mathcal{D}^\kappa &= \frac{\partial \mathcal{D}^\kappa}{\partial \hat{\sigma}^{\nu\lambda}} d\hat{\sigma}^{\nu\lambda} + \frac{\partial \mathcal{D}^\kappa}{\partial E_\lambda} dE_\lambda + \frac{\partial \mathcal{D}^\kappa}{\partial \theta} d\theta, \\
 d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial \hat{\sigma}^{\kappa\lambda}} d\hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \frac{\partial \eta}{\partial E_\lambda} dE_\lambda + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} d\theta.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

В качестве первого приближения мы предположим, что все производные, входящие в (4.7), кроме  $\partial\eta/\partial\theta$ , являются константами и что теплоемкость  $C^{(\sigma, E)}$  при постоянных напряжениях и электрическом поле также является константой, определяемой соотношением

$$T_o \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \rho C^{(\sigma, E)}. \tag{4.8}$$

Тогда выражение

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} d\theta = \frac{d\theta}{T_o} \rho C^{(\sigma, E)} \tag{4.9}$$

есть полный дифференциал.  $d\mathcal{E}$  будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда

$$-u_{\mu\lambda} \widehat{d\sigma}^{\mu\lambda} + \mathcal{D}^\lambda dE_\lambda + \eta d\theta \quad (4.10)$$

— полный дифференциал. В свою очередь для этого необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda}} &= \frac{\partial u_{\kappa\lambda}}{\partial \widehat{\sigma}^{\mu\nu}}, & (b) \quad \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial E_\lambda} &= \frac{\partial \mathcal{D}^\lambda}{\partial \widehat{\sigma}^{\mu\nu}}, \\ (c) \quad \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{\sigma}^{\mu\nu}}, & (d) \quad \frac{\partial \mathcal{D}^\lambda}{\partial E_\mu} &= \frac{\partial \mathcal{D}^\mu}{\partial E_\lambda}, \\ (e) \quad \frac{\partial \mathcal{D}^\lambda}{\partial \theta} &= \frac{\partial \eta}{\partial E_\lambda}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Если эти условия выполнены и если мы обозначим:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda}} = \frac{\partial u_{\kappa\lambda}}{\partial \widehat{\sigma}^{\mu\nu}}, \\ d_{\mu\nu}^{(\theta)\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial E_\lambda} = \frac{\partial \mathcal{D}^\lambda}{\partial \widehat{\sigma}^{\mu\nu}}, \\ \alpha_{\mu\nu}^{(E)} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{\sigma}^{\mu\nu}}, \\ \varepsilon_{(\sigma, \theta)}^{\kappa\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{D}^\kappa}{\partial E_\lambda} = \frac{\partial \mathcal{D}^\lambda}{\partial E_\kappa}, \\ \widehat{p}_{(\sigma)}^\kappa &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{D}^\kappa}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta}{\partial E_\kappa}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

то уравнения (4.7) принимают форму:

$$\begin{aligned} (a) \quad u_{\mu\nu} &= \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)} \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda} + d_{\mu\nu}^{(\theta)\lambda} E_\lambda + \alpha_{\mu\nu}^{(E)} \theta, \\ (b) \quad \mathcal{D}^\kappa &= d_{\nu\lambda}^{(\theta)\kappa} \widehat{\sigma}^{\nu\lambda} + \varepsilon_{(\sigma, \theta)}^{\kappa\lambda} E_\lambda + \widehat{p}_{(\sigma)}^\kappa \theta, \\ (c) \quad \Delta \widehat{Q} &= T_\sigma \alpha_{\kappa\lambda}^{(E)} \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda} T_\sigma \widehat{p}_{(\sigma)}^\lambda E_\lambda + \rho C^{(\sigma, E)} \theta, \end{aligned} \quad (4.13^*)$$

которая справедлива для малых деформаций, слабых электрических полей и малых изменений температуры. Относительно прямолинейных координат  $\widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)}$  — упругие константы

при постоянном электрическом поле,  $d_{\mu\nu}^{(\theta)\lambda}$  — изотермические пьезоэлектрические константы,  $\alpha_{\mu\nu}^{(E)}$  — термоупругие константы при постоянном электрическом поле,  $\varepsilon_{(\sigma, \theta)}^{\times\lambda}$  — изотермические диэлектрические константы при постоянных напряжениях и  $\beta_{(\sigma)}^{\times}$  — пироэлектрические константы при постоянных напряжениях.

В вопросах, связанных с колебаниями в кристаллах, мы можем предположить, что между соседними элементами не имеется теплообмена. Тогда уравнения (4.6\*) принимают вид:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{\sigma}^{\times\lambda} &= \hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\times\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - h_{\dots\mu}^{\times\lambda} \mathcal{D}^\mu, \\ (b) \quad E_\lambda &= -h_{\dots\lambda}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} + \beta_{\lambda\mu}^{(u)} \mathcal{D}^\mu, \\ (c) \quad \theta &= -T_{\rho} \gamma_{(\mathcal{D})}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} - T \hat{\rho}_{\mu}^{(u)} \mathcal{D}^\mu, \end{aligned} \quad (4.14^*)$$

где индекс  $\eta$  опущен, так как мы рассматриваем только адиабатические процессы. В (4.13\*с) мы имеем  $\Delta\hat{Q} = 0$ , и, следовательно, из этого уравнения можно найти  $\theta$  и подставить в (4.13\*а, б). Это приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} (a) \quad u_{\mu\nu} &= \hat{b}_{\times\lambda\mu\nu}^{(E)} \hat{\sigma}^{\times\lambda} + d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} E_\lambda, \\ (b) \quad \mathcal{D}^\times &= d_{\nu\lambda}^{\cdot\times} \hat{\sigma}^{\nu\lambda} + \varepsilon_{(\sigma)}^{\times\lambda} E_\lambda, \end{aligned} \quad (4.15^*)$$

в которых  $\hat{b}_{\times\lambda\mu\nu}^{(E)}$ ,  $d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}$  и  $\varepsilon_{(\sigma)}^{\times\lambda}$  мало отличаются от  $\hat{b}_{\times\lambda\mu\nu}^{(E)}$ ,  $d_{\mu\nu}^{(\theta)\lambda}$  и  $\varepsilon_{(\sigma, \theta)}^{\times\lambda}$  в (4.13\*). Таким образом, для описания колебаний в кристаллах должны использоваться уравнения (4.14\*а, б) и (4.15\*), в которые не входят  $\theta$  и  $\eta$ .

Чтобы найти соотношение между коэффициентами в (4.14\*) и (4.15\*), мы введем величину  $\varepsilon_{(u)}^{\times\lambda}$ , обратную  $\beta_{\lambda\times}^{(u)}$ , и  $\beta_{\lambda\times}^{(\sigma)}$ , обратную  $\varepsilon_{(\sigma)}^{\times\lambda}$ . Тогда (4.14\*б) и (4.15\*б) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{D}^\times &= \varepsilon_{(u)}^{\times\lambda} E_\lambda + \varepsilon_{(u)}^{\times\lambda} h_{\dots\lambda}^{\mu\nu} u_{\mu\nu}, \\ (b) \quad E_\lambda &= \beta_{\lambda\times}^{(\sigma)} \mathcal{D}^\times - \beta_{\lambda\times}^{(\sigma)} d_{\nu\mu}^{\cdot\times} \hat{\sigma}^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подставляя эти выражения в (4.14\*а) и (4.15\*а), находим

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= (\widehat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu} - h_{\cdot\rho}^{\kappa\lambda} \varepsilon_{(u)}^{\sigma} h_{\cdot\sigma}^{\mu\nu}) u_{\mu\nu} - h_{\cdot\rho}^{\kappa\lambda} e_{(u)}^{\rho\mu} E_{\mu}, \\ u_{\mu\nu} &= (\widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)} - d_{\mu\nu}^{\cdot\rho} \beta_{\rho\sigma}^{(\sigma)} d_{\kappa\lambda}^{\cdot\sigma}) \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda} + d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} \mathcal{D}^{\kappa}.\end{aligned}\quad (4.17^*)$$

Вводя теперь величины  $\widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})}$ , обратную  $\widehat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ , и  $\widehat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\mu\nu}$ , обратную  $\widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)}$ , мы получаем из (4.14\*а) и (4.15\*а)

$$\begin{aligned}u_{\mu\nu} &= \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})} \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})} h_{\cdot\rho}^{\kappa\lambda} \mathcal{D}^{\rho}, \\ \widehat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= \widehat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - \widehat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\mu\nu} d_{\mu\nu}^{\cdot\rho} E_{\rho},\end{aligned}\quad (4.18^*)$$

и из (4.17\*) и (4.18\*) следует, что:

$$\begin{aligned}(a) \quad \widehat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \widehat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu} - h_{\cdot\rho}^{\kappa\lambda} e_{(u)}^{\rho\sigma} h_{\cdot\sigma}^{\mu\nu} = \\ &= \widehat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu} - \widehat{e}^{\rho\kappa\lambda} h_{\cdot\rho}^{\mu\nu}, \\ (b) \quad \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})} &= \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)} - d_{\mu\nu}^{\cdot\rho} \beta_{\rho\sigma}^{(\sigma)} d_{\kappa\lambda}^{\cdot\sigma} = \\ &= \widehat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)} - \widehat{g}_{\rho\mu\nu} d_{\kappa\lambda}^{\cdot\rho}, \\ (c) \quad \widehat{e}^{\mu\kappa\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} e_{(u)}^{\rho\mu} h_{\cdot\rho}^{\kappa\lambda} = d_{\rho\nu}^{\cdot\mu} \widehat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\rho\nu}, \\ (d) \quad \widehat{g}_{\kappa\lambda\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} = h_{\cdot\kappa}^{\rho\lambda} \widehat{c}_{\rho\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})}.\end{aligned}\quad (4.19^*)$$

Подставляя (4.14\*а) и (4.15\*а) в (4.16\*), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\kappa} &= (\varepsilon_{(u)}^{\kappa\lambda} + \varepsilon_{(u)}^{\kappa\rho} h_{\cdot\rho}^{\mu\nu} d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}) E_{\lambda} + \varepsilon_{(u)}^{\kappa\lambda} h_{\cdot\lambda}^{\mu\nu} \widehat{b}_{\rho\sigma\mu\nu}^{(E)} \widehat{\sigma}^{\rho\sigma}, \\ E_{\lambda} &= (\beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} + \beta_{\lambda\rho}^{(\sigma)} d_{\nu\mu}^{\cdot\rho} h_{\cdot\kappa}^{\nu\mu}) \mathcal{D}^{\kappa} - \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} d_{\nu\mu}^{\cdot\kappa} \widehat{c}_{(\mathcal{D})}^{\nu\mu\rho\sigma} u_{\rho\sigma}\end{aligned}\quad (4.20^*)$$

и при учете (4.14\*б) и (4.15\*б) это дает

$$\begin{aligned}\varepsilon_{(\sigma)}^{\kappa\lambda} &= \varepsilon_{(u)}^{\kappa\lambda} + \varepsilon_{(u)}^{\kappa\rho} h_{\cdot\rho}^{\mu\nu} d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} = \varepsilon_{(u)}^{\kappa\lambda} + \widehat{e}^{\kappa\mu\nu} d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}, \\ \beta_{\lambda\kappa}^{(u)} &= \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} + \beta_{\lambda\rho}^{(\sigma)} d_{\nu\mu}^{\cdot\rho} h_{\cdot\kappa}^{\nu\mu} = \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} + \widehat{g}_{\lambda\nu\mu} h_{\cdot\kappa}^{\nu\mu}.\end{aligned}\quad (4.21^*)$$



В сокращенных обозначениях (4.19\* с, d) уравнения (4.16\*) и (4.18\*) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \mathcal{D}^{\kappa} &= \varepsilon_{(u)}^{\kappa\lambda} E_{\lambda} + \hat{e}^{\kappa\mu\nu} u_{\mu\nu}, \\
 \text{(b)} \quad E_{\lambda} &= \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} \mathcal{D}^{\kappa} - \hat{g}_{\lambda\mu\nu} \hat{\sigma}^{\mu\nu}, \\
 \text{(c)} \quad u_{\mu\nu} &= \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})} \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} + \hat{g}_{\kappa\mu\nu} \mathcal{D}^{\kappa}, \\
 \text{(d)} \quad \hat{\sigma}^{\kappa\lambda} &= \hat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\mu\nu} u_{\mu\nu} - \hat{e}^{\mu\kappa\lambda} E_{\mu}.
 \end{aligned} \tag{4.22*}$$

Это именно та форма, в которой они обычно используются.

Приведем сводку результатов:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \hat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\mu\nu} &= \hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu} - \hat{e}^{\rho\kappa\lambda} h_{\cdot\rho}^{\cdot\mu\nu}, \\
 \text{(b)} \quad \hat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\rho\sigma} \hat{b}_{\rho\sigma\mu\nu}^{(E)} &= A_{(\mu}^{\kappa} A_{\nu)}^{\lambda}, \\
 \text{(c)} \quad \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})} &= \hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)} - \hat{g}_{\rho\mu\nu} d_{\kappa\lambda}^{\cdot\rho}, \\
 \text{(d)} \quad \hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\rho\sigma} \hat{b}_{\rho\sigma\mu\nu}^{(\mathcal{D})} &= A_{(\mu}^{\kappa} A_{\nu)}^{\lambda}, \\
 \text{(e)} \quad \hat{e}^{\mu\kappa\lambda} &= h_{\cdot\rho}^{\cdot\kappa\lambda} e_{(u)}^{\rho\mu} = \\
 \text{(f)} \quad &= \hat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\rho\nu} d_{\rho\nu}^{\cdot\mu}, \\
 \text{(g)} \quad \hat{g}_{\kappa\mu\nu} &= d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda} \beta_{\kappa\lambda}^{(\sigma)} = \\
 \text{(h)} \quad &= \hat{b}_{\rho\lambda\mu\nu}^{(\mathcal{D})} h_{\cdot\kappa}^{\rho\lambda}, \\
 \text{(i)} \quad \varepsilon_{(\sigma)}^{\kappa\lambda} &= \varepsilon_{(u)}^{\kappa\lambda} + \hat{e}^{\kappa\mu\nu} d_{\mu\nu}^{\cdot\lambda}, \\
 \text{(j)} \quad \varepsilon_{(\sigma)}^{\kappa\mu} \beta_{\mu\lambda}^{(\sigma)} &= A_{\lambda}^{\kappa}, \\
 \text{(k)} \quad \beta_{\lambda\kappa}^{(u)} &= \beta_{\lambda\kappa}^{(\sigma)} + \hat{g}_{\lambda\nu\mu} h_{\cdot\kappa}^{\nu\mu}, \\
 \text{(l)} \quad \varepsilon_{(u)}^{\kappa\mu} \beta_{\mu\lambda}^{(u)} &= A_{\lambda}^{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{4.23*}$$

## 5. Кристаллические классы<sup>1)</sup>

Главным свойством кристалла является его инвариантность относительно конечного числа ортогональных точечных преобразований. Эти преобразования образуют конечную

<sup>1)</sup> Ср. Фойгт 1898.1; Тедоне 1907.1; Ляв 1944.1; Кэди 1946.2.

группу, группу кристалла. В качестве примера конечной группы мы рассмотрим группу всех ортогональных преобразований в плоскости  $xy$ , которые оставляют инвариантным квадрат  $ABCD$ . Обозначим  $z_4$  вращение на  $90^\circ$  от  $x$  к  $y$ ,  $z_2$  вращение на  $180^\circ$  и  $I$  — тождественное преобразование. Прежде всего мы имеем преобразования  $z_4$ ,  $z_4^2 = z_2$ ,  $z_4^3 = z_4^{-1}$ ,  $z_4^4 = I$ . Все эти преобразования имеют  $\Delta = +1$ . Отражения  $E_x$  относительно оси  $y$  и  $E_y$  относительно оси  $x$  имеют  $\Delta = -1$ , и

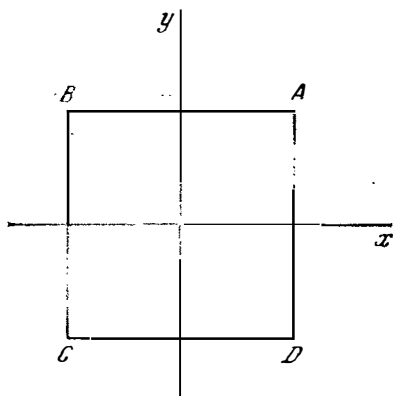


Рис. 25

то же справедливо для отражений  $F_A$  относительно диагонали  $BD$  и  $F_B$  относительно диагонали  $AC$ . Приведем таблицу умножения

	$I$	$z_4$	$z_4^2$	$z_4^3$	$E_x$	$E_y$	$F_A$	$F_B$
$I$	$I$	$z_4$	$z_4^2$	$z_4^3$	$E_x$	$E_y$	$F_A$	$F_B$
$z_4$	$z_4$	$z_4^2$	$z_4^3$	$I$	$F_B$	$F_A$	$E_x$	$E_y$
$z_4^2$	$z_4^2$	$z_4^3$	$I$	$z_4$	$E_y$	$E_x$	$F_B$	$F_A$
$z_4^3$	$z_4^3$	$I$	$z_4$	$z_4^2$	$F_A$	$F_B$	$E_y$	$E_x$
$E_x$	$E_x$	$F_A$	$E_y$	$F_B$	$I$	$z_4^2$	$z_4$	$z_4^3$
$E_y$	$E_y$	$F_B$	$E_x$	$F_A$	$z_4^2$	$I$	$z_4^3$	$z_4$
$F_A$	$F_A$	$E_y$	$F_B$	$E_x$	$z_4^3$	$z_4$	$I$	$z_4^2$
$F_B$	$F_B$	$E_x$	$F_A$	$E_y$	$z_4$	$z_4^3$	$z_4^2$	$I$

(5.1)

Эта таблица легко выводится из следующей схемы:

$$\begin{array}{cccc}
 I: & x & y & z \\
 & x & y & z \\
 E_x: & -x & y & z \\
 E_y: & x & -y & z \\
 F_A: & x & y & -z \\
 F_B: & x & y & z
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 z_4: & x & y & z \\
 & y & -x & z \\
 z_4^2: & -x & -y & z \\
 & -x & -y & z \\
 z_4^3: & x & y & -z \\
 & -y & x & z
 \end{array}
 \quad (5.2)$$

Мы видим из таблицы, что восемь преобразований образуют группу и что каждое преобразование группы может быть получено, например, из  $z_4$  и  $E_x$ , или  $z_4$  и  $F_A$ , или  $E_x$  и  $F_A$ . Поэтому мы называем  $z_4$  и  $E_x$  *системой образующих группы преобразований*. Это не единственная система образующих.  $z_4$  и  $F_A$  или  $E_x$  и  $F_B$  также являются системами образующих.

Было найдено, что для исследования кристаллов в пространстве достаточно рассматривать следующие двадцать одно преобразование:

$$I: x, y, z \rightarrow x, y, z; \quad \text{тождественное преобразование.} \\ \Delta = +1.$$

$$\left. \begin{array}{l}
 x_2: x, y, z \rightarrow x, -y, -z \\
 x_3: x, y, z \rightarrow x, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, \\
 \qquad \qquad \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}z \\
 x_4: x, y, z \rightarrow x, z, -y \\
 x_6: x, y, z \rightarrow x, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, \\
 \qquad \qquad \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z
 \end{array} \right\} \text{циклир.; вращения около} \\ \text{осей } x, y \text{ и } z \text{ на } 180^\circ, \\ 120^\circ, 90^\circ \text{ и } 60^\circ. \Delta = +1.$$

$$S: x, y, z \rightarrow y, z, x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{циклическая перестановка осей.} \\ \Delta = +1. \end{array} \right.$$

$$S^2: x, y, z \rightarrow z, x, y \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = +1. \end{array} \right.$$

$$C: x, y, z \rightarrow -x, -y, -z; \quad \text{отражение от начала. } \Delta = -1.$$

$$E_x: x, y, z \rightarrow -x, y, z \quad \text{циклир.; отражения от плоскостей} \\ \text{yz, zx и xy. } \Delta = -1.$$

$$S_x = E_x x_4 = C x_4^{-1}: x, y, z \rightarrow -x, z, -y \quad \text{циклир.; вращения} \\ \text{вокруг осей } x, y \text{ и } z \text{ на } 90^\circ \text{ с последующим отражением} \\ \text{от плоскости, перпендикулярной оси. } \Delta = -1. \quad (5.3)$$

С помощью этих преобразований было показано, что существуют ровно 32 различные группы и 32 соответствующих им кристаллических класса. Ниже приводится таблица всех классов с их группами, заданными системами образующих<sup>1)</sup>.

Нумерация классов дана по Фойгту, Кэди (в скобках) и Шенфлису. Имеются семь систем, четыре из которых содержат две подсистемы. Для любого свойства, определяемого центральной симметрией, преобразование  $T$  эквивалентно  $CT$ . Следовательно, система образующих для таких свойств значительно проще. Кристаллические системы разбиваются при этом на подсистемы. Класс называется *энантиоморфным*, если он может содержать кристаллы, переводимые друг в друга отражением без вращения. Необходимым и достаточным условием является отсутствие в системе образующих преобразований с  $\Delta = -1$ . Энантиоморфными классами являются: 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 22, 25, 29 и 32.

*Принцип Неймана* связывает кристаллические классы с их возможными физическими свойствами. Согласно этому принципу симметрия, характеризующая внешний вид кристалла, т. е. система образующих его группы, определяет также симметрию всех его физических свойств. Таким образом, физическая величина, не обладающая центральной симметрией, например вектор, никогда не может принадлежать одиннадцати классам, группы которых содержат  $C$ : 1, 3, 6, 9, 12, 14, 17, 21, 24, 28, 31. Но  $W$ -вектор, обладающий центральной симметрией, может принадлежать этим классам, если нет других обстоятельств, препятствующих этому.

Чтобы исследовать, могут ли некоторые величины принадлежать различным классам, мы должны проверить инвариантность этих величин относительно соответствующих преобразований (5.3). Например, вектор  $v_1, v_2, v_3$  преобразуется  $E_x$  в  $-v_1, v_2, v_3$ . Следовательно, только вектор  $0, v_2, v_3$  инвариантен относительно  $E_x$ . Но  $W$ -вектор  $v_1^*, v_2^*, v_3^*$  преобразуется в  $v_1^*, -v_2^*, -v_3^*$ , откуда инвариантный  $W$ -вектор имеет вид  $v_1^*, 0, 0$ .

---

<sup>1)</sup> Преобразования в скобках принадлежат группе, но включение их в систему образующих не является обязательным, так как  $z_4 = x_4 y_4 x_4^{-1}$ ;  $S_z = S_y^{-2} S_x^{-2} S_y^{-1} S_x S_y$ ;  $z_2 = x_2 y_2$ .

Система		Система образующих	Система образующих относительно центрально симметричных свойств	Энантиоморфная	Пирозлектрическая	Пиромангнитная	Пьезоэлектрическая	Пьезомангнитная
Триклинная	{ 1. (2) $C_i$ 2. (1) $C_1$	$C$ Не преобразуется	Не преобразуется	×	×	×	×	×
Моноклинная	{ 3. (5) $C_{2h}$ 4. (4) $C_{1h}$ 5. (3) $C_2$	$C, z_2 \equiv C, E_z \equiv z_2, E_z$ $E_z$ $z_2$	$z_2$	×	×	×	×	×
Ромбическая	{ 6. (8) $D_{2h}$ 7. (6) $D_2$ 8. (7) $C_{2v}$	$C, z_2, x_2 \equiv C, z_2, E_x$ $z_2, x_2, (y_2)$ $z_2, E_x$	$z_2, x_2, (y_2)$	×	×		×	×
Тригональная I	{ 9. (20) $D_{3d}$ 10. (18) $D_3$ 11. (19) $C_{3v}$	$C, z_3, x_2$ $z_3, x_2$ $z_3, E_x$	$z_3, x_2$	×	×		×	×

Тригональная II	$\left\{ \begin{array}{l} 12. (17) C_{3i} \\ 13. (16) C_3 \end{array} \right.$	$C, z_3$	$\left. \begin{array}{l} z_3 \\ z_3 \end{array} \right\}$	$z_3$	×	×	×	×	×
		$z_3$							
Тетрагональная I	$\left\{ \begin{array}{l} 14. (15) D_{4h} \\ 15. (12) D_4 \\ 16. (14) C_{4v} \\ 19. (11) D_{2d} \end{array} \right.$	$C, z_4, x_2 \equiv C, z_4, E_x$	$\left. \begin{array}{l} z_4, x_2 \\ z_4, E_x \\ S_2, x_2 \end{array} \right\}$	$z_4, x_2$	×	×	×	×	×
		$z_4, x_2$							
		$z_4, E_x$							
		$S_2, x_2$							
Тетрагональная II	$\left\{ \begin{array}{l} 17. (13) C_{4h} \\ 18. (10) C_4 \\ 20. (9) S_4 \end{array} \right.$	$C, z_4$	$\left. \begin{array}{l} z_4 \\ z_4 \\ S_2 \end{array} \right\}$	$z_4$	×	×	×	×	×
		$z_4$							
		$S_2$							
Гексагональная I	$\left\{ \begin{array}{l} 21. (27) D_{6h} \\ 22. (24) C_{6v} \\ 23. (26) D_6 \\ 26. (22) D_{3h} \end{array} \right.$	$C, z_6, x_2$	$\left. \begin{array}{l} z_6, x_2 \\ z_6, E_x \\ z_3, x_2, E_z \end{array} \right\}$	$z_6, x_2$	×	×	×	×	×
		$z_6, x_2$							
		$z_6, E_x$							
		$z_3, x_2, E_z$							

Система	Система образующих	Система образующих относительно центрально симметричных свойств	Энантиоморфная	Пироэлектрическая	Пирромагнитная	Пьезоэлектрическая	Пьезомагнитная				
Гексагональная II	24. (25) $C_{6h}$	$C, z_6$	}	}	}	}	}				
	25. (23) $C_6$	$z_6$						×	×	×	×
	27. (21) $C_{3h}$	$z_3, E_z$						×	×	×	×
Кубическая I	28. (32) $O_h$	$C, x_4, y_4, (z_4)$	}	}	}	}	}				
	29. (29) $O$	$x_4, y_4, (z_4)$						×	×	×	×
	30. (31) $T_d$	$S_x, S_y, (S_z)$								×	
Кубическая II	31. (30) $T_h$	$C, x_2, y_2, (z_2), S$	}	}	}	}	}				
	32. (28) $T$	$x_2, y_2, (z_2), S$						×		×	×

(5.4)

Тензор валентности 2 может быть разложен на симметричный тензор и бивектор. Первый в свою очередь может быть разложен на скаляр и девиатор, а бивектор для группы вращений и отражений эквивалентен  $W$ -вектору. Таким образом, разложение имеет вид

$$\text{скаляр} + W\text{-вектор} + \text{девиатор} \quad (9 = 1 + 3 + 5), \quad (5.5)$$

и все эти составляющие являются центрально-симметричными. Для  $W$ -тензора валентности 2 мы получаем

$$W\text{-скаляр} + \text{вектор} + W\text{-девиатор}, \quad (5.6)$$

и ни одна из этих составляющих не является центрально-симметричной.

Тензор  $P^{hij}$  валентности 3 содержит тривектор  $P^{[hij]}$ , который эквивалентен  $W$ -скаляру, и симметричный тензор  $P^{(hij)}$  (10 компонент). Из последнего можно образовать вектор  $P^h = P^{(hij)}g_{ij}$ , и  $P^{(hij)}$  можно разложить на две составляющие

$$P^{(hij)} = \frac{3}{5}P^{(h}g^{ij)} + \left[ P^{(hij)} - \frac{3}{5}P^{(h}g^{ij)} \right]. \quad (5.7)$$

Первая имеет три компоненты (вектора  $P^h$ ), а вторая является симметричным тензором без векторной составляющей, имеет семь компонент и называется *септором*. Если из  $P^{hij}$  вычесть его скалярную, векторную и септорную составляющие, то останется величина  $R^{hij}$ , которая имеет  $27 - 1 - 3 - 7 = 16$  компонент и удовлетворяет условию

$$R^{hij} + R^{jih} + R^{jhi} = 0. \quad (5.8)$$

Отсюда

$$R^{hij} = \frac{2}{3}(R^{[hi]j} + R^{[hj]i}) + \frac{2}{3}(R^{h[ij]} + R^{i[hj]}), \quad (5.9)$$

и это уравнение означает, что  $R^{hij}$  может быть разложен на две составляющие, каждая из которых зависит только от  $R^{[hi]j}$  или  $R^{h[ij]}$ . Но так как бивектор эквивалентен  $W$ -вектору,  $R^{[hi]j}$  эквивалентен  $W$ -тензору валентности 2 с равной нулю скалярной составляющей. Это значит, что  $R^{hij}$  может быть разложен на две векторные и две  $W$ -девиаторные составляющие. Таким образом, окончательное



разложение  $\rho_{hij}$  имеет вид

$$W\text{-скаляр} + 3 \text{ вектора} + 2 \text{ } W\text{-девиатора} + \\ + \text{септор} \quad (27 = 1 + 9 + 10 + 7), \quad (5.10)$$

и все эти составляющие не являются центрально-симметричными. Все остальные разложения могут быть найдены аналогичным образом.

Ниже приводятся таблицы разложений<sup>1) 2)</sup>

Тензор с валентностью	Компоненты	Скаляр	Вектор	Девиатор	Септор	Нонор
1 не ц.-с.	3		1			
2 ц.-с.	9	1	1W	1		
3 не ц.-с.	27	1W	3	2W	1	
4 ц.-с.	81	3	6W	6	3W	1

(5.11)

W-тензор с валентностью	Компоненты	Скаляр	Вектор	Девиатор	Септор	Нонор
1 ц.-с.	3		1W			
2 не ц.-с.	9	1W	1	1W		
3 ц.-с.	27	1	3W	2	1W	
4 не ц.-с.	81	3W	6	6W	3	1W

(5.12)

<sup>1)</sup> Нонор есть тензор валентности 4 с девятью компонентами не содержащий скалярной, векторной, девиаторной и септорной составляющих. Термины девиатор, септор и нонор введены автором в 1914 г., причем последние два — из-за отсутствия лучших выражений.

<sup>2)</sup>  $\tilde{m}^{\mu\nu}$  в пьезомагнитном эффекте соответствует  $\hat{e}^{\mu\nu}$  в пьезоэлектрическом эффекте.

Симметричный тензор с валентностью	Компоненты	Скаляр	Вектор	Девiator	Септор	Нонор
1 не ц.-с.	3		1			
2 ц.-с.	6	1		1		
3 не ц.-с.	10		1		1	
4 ц.-с.	15	1		1		1

(5.13)

Симметричный W-тензор с валентностью	Компоненты	Скаляр	Вектор	Девiator	Септор	Нонор
1 ц.-с.	3		1W			
2 не ц.-с.	6	1W		1W		
3 ц.-с.	10		1W		1W	
4 не ц.-с.	15	1W		1W		1W

(5.14)

	Компоненты	Скаляр	Вектор	Девiator	Септор	Нонор
$\hat{e}^{kl\mu\nu}$ ц.-с.	21	2		2		1
$\hat{e}^{k\mu\nu} = \hat{e}^{k\nu\mu}$ не ц.-с.	18		2	1W	1	
$\tilde{m}^{k\mu\nu} = \tilde{m}^{k\nu\mu}$ ц.-с.	18		2W	1	1W	

(5.15)

Все составляющие центрально-симметричной величины являются центрально-симметричными. Все составляющие величины, не обладающей центральной симметрией, также ее не имеют<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Общая теория разложения величин развита в Р. К. 1924.1. Более современный подход для ортогональной группы можно найти у Литтлвуда 1945.1.

Преобразование	Не центрально-симметричный							Центрально-симметричный										
	W-скаляр	Вектор	Симметричный W-тензор					W-вектор	Симметричный тензор									
$x_2$	*	$v_1$	$0$	$0$	*	*	*	*	$v_1$	$0$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{33}$	$p_{23}$	$0$	$0$	
$y_2$	S	$0$	$v_2$	$0$	*	*	*	$0$	$0$	$v_2$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{23}$	$0$	$p_{31}$	$0$	
$z_2$	S	$0$	$0$	$v_3$	*	*	*	$0$	$0$	$v_3$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{33}$	$0$	$0$	$p_{12}$	
$x_3, x_4, x_6$	S	$v_1$	$0$	$0$	*	*	*	$0$	$0$	$0$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{22}$	$0$	$0$	$0$	
$y_3, y_4, y_6$	S	$0$	$v_2$	$0$	*	*	*	$0$	$0$	$0$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{11}$	$0$	$0$	$0$	
$z_3, z_4, z_6$	S	$0$	$0$	$v_3$	*	*	*	$0$	$0$	$0$	$0$	$p_{11}$	$p_{11}$	$p_{33}$	$0$	$0$	$0$	
$S$	S	$v_1$	$v_1$	$v_1$	*	*	*	*	$v_1$	$v_1$	$v_1$	$p_{11}$	$p_{11}$	$p_{11}$	$p_{23}$	$p_{23}$	$p_{23}$	
$C$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	*	*	*	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{33}$	$p_{23}$	$p_{31}$	$p_{12}$	
$E_x=Cx_2$	$0$	$0$	$v_2$	$v_3$	$0$	$0$	$0$	$0$	*	*	$p_{31}$	$p_{12}$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{33}$	$p_{23}$	$0$	$0$
$E_y=Cy_2$	$0$	$v_1$	$0$	$v_3$	$0$	$0$	$0$	*	*	$p_{23}$	$0$	$p_{12}$	$0$	$v_2$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{33}$
$E_z=Cz_2$	$0$	$v_1$	$v_2$	$0$	$0$	$0$	$0$	*	*	$p_{23}$	$p_{31}$	$0$	$0$	$v_3$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{33}$
$S_x=Cx_4^{-1}=E_x x_4$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	*	*	*	$v_1$	$0$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{22}$	$0$	$0$	$0$	
$S_y=Cy_4^{-1}=E_y y_4$	$0$	$0$	$0$	$0$	*	$0$	$0$	*	$v_1$	$0$	$0$	$p_{11}$	$p_{22}$	$p_{11}$	$0$	$0$	$0$	
$S_z=Cz_4^{-1}=E_z z_4$	$0$	$0$	$0$	$0$	*	$0$	$0$	$0$	$v_1$	$0$	$0$	$p_{11}$	$-p_{11}$	$0$	$0$	$0$	$p_{12}$	

(5.16)

На стр. 226 приведена таблица  $W$ -скаляров, векторов и  $W$ -векторов, симметричных тензоров и  $W$ -тензоров валентности 2, инвариантных относительно преобразований (5.3).

С помощью этой таблицы мы находим следующие величины, которые существуют в 32 различных классах (см. стр. 228 — 230).

Аналогичным образом могут быть построены таблицы для величин других типов.

Если в кристалле существует связь между двумя физическими величинами, например температурой и электрическим или магнитным полем, электрическим полем и деформацией или напряжением и деформацией, то мы называем это *эффектом*. Если связь между величинами линейна, то говорят о *линейном эффекте*. Количественно эффект задается некоторой величиной, например, в упомянутых случаях (используя группу  $G_{от}$  и отождествляя плотности и неплотности) вектор,  $W$ -вектор, тензор валентности 3 и тензор валентности 4 соответственно. Ниже приводится таблица некоторых линейных эффектов [(тензор) — обозначает симметричный тензор].

Эффект	Связанные величины	Величина, связывающая их
Пироэлектрический	Скаляр, вектор	Вектор
Пироманитный	Скаляр, $W$ -вектор	$W$ -вектор
Термоупругий	Скаляр, (тензор) вал. 2	(Тензор) вал. 2
Диэлектрический	Вектор, вектор	(Тензор) вал. 2
Магнитный	$W$ -вектор, $W$ -вектор	(Тензор) вал. 2
Пьезоэлектрический	Вектор, (тензор) вал. 2	Тензор вал. 3, симметр. по 2 инд.
Пьезомагнитный	$W$ -вектор, (тензор) вал. 2	$W$ -тензор вал. 3, симметр. по 2 инд.
Упругий	(Тензор), (тензор) вал. 2	(Тензор)-(тензор) вал. 4

Во всех этих случаях эффект может существовать лишь в определенном кристаллическом классе, а именно в том, в котором соответствующая связывающая величина инвариантна

Класс	Не центрально-симметричный				Центрально-симметричный		
	Система образующих	W-скаляр	Вектор	Симметричный W-тензор	Система образующих	W-вектор	Симметричный тензор
1. (2)	$C$	—	—	—	—	$v_1^* \ v_2^* \ v_3^*$	$P_{11} \ P_{22} \ P_{33} \ P_{23} \ P_{31} \ P_{12}$
2. (1)	—	$s^*$	$v_1 \ v_2 \ v_3$	$p_{11}^* \ p_{22}^* \ p_{33}^* \ p_{23}^* \ p_{31}^* \ p_{12}^*$			
3. (5)	$C, z_2$	—	—	—			
4. (4)	$E_x$	0	$v_1 \ v_2 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ p_{23}^* \ p_{31}^* \ 0$	$z_2$	$0 \ 0 \ v_3^*$	$P_{11} \ P_{22} \ P_{33} \ 0 \ 0 \ P_{12}$
5. (3)	$z_2$	$s^*$	$0 \ 0 \ v_3$	$p_{11}^* \ p_{22}^* \ p_{33}^* \ 0 \ 0 \ p_{12}^*$			
6. (8)	$C, z_2, x_2$	—	—	—	$z_2, x_2$	$0 \ 0 \ 0$	$P_{11} \ P_{22} \ P_{33} \ 0 \ 0 \ 0$
7. (6)	$z_2, x_2$	$s^*$	$0 \ 0 \ 0$	$p_{11}^* \ p_{22}^* \ p_{33}^* \ 0 \ 0 \ 0$			
8. (7)	$z_2, E_x$	0	$0 \ 0 \ v_3$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ p_{12}^*$			
9. (20)	$C, z_3, x_2$	—	—	—	$z_3, x_2$	$0 \ 0 \ 0$	$P_{11} \ P_{22} \ P_{33} \ 0 \ 0 \ 0$
10. (18)	$z_3, x_2$	$s^*$	$0 \ 0 \ 0$	$p_{11}^* \ p_{11}^* \ p_{33}^* \ 0 \ 0 \ 0$			
11. (19)	$z_3, E_x$	0	$0 \ 0 \ v_3$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$			

12. (17)	$C, z_3$	—	—	—	}	$z_3$	0 0 0	$p_{11} p_{11} p_{33} 0 0 0$
13. (16)	$z_3$	$\overset{*}{s}$	0 0 $v_3$	$\overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{33} 0 0 0$				
14. (15)	$C, z_4, x_2$	—	—	—	}	$z_4, x_2$	0 0 0	$p_{11} p_{11} p_{33} 0 0 0$
15. (12)	$z_4, x_2$	$\overset{*}{s}$	0 0 0	$\overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{33} 0 0 0$				
16. (14)	$z_4, E_x$	0	0 0 $v_3$	0 0 0 0 0 0				
19. (17)	$S_z, x_2$	0	0 0 0	$\overset{*}{p}_{11} -\overset{*}{p}_{11} 0 0 0 0$				
17. (13)	$C, z_4$	—	—	—	}	$z_4$	0 0 $\overset{*}{v}_3$	$p_{11} p_{11} p_{33} 0 0 0$
18. (10)	$z_4$	$\overset{*}{s}$	0 0 $v_3$	$\overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{33} 0 0 0$				
20. (9)	$S_z$	0	0 0 0	$\overset{*}{p}_{11} -\overset{*}{p}_{11} 0 0 0 \overset{*}{p}_{12}$				
21. (27)	$C, z_6, x_2$	—	—	—	}	$z_6, x_2$	0 0 0	$p_{11} p_{11} p_{33} 0 0 0$
22. (24)	$z_6, x_2$	$\overset{*}{s}$	0 0 0	$\overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{11} \overset{*}{p}_{33} 0 0 0$				
23. (26)	$z_6, E_x$	0	0 0 $v_3$	0 0 0 0 0 0				
26. (22)	$z_3, x_2, E_z$	0	0 0 0	0 0 0 0 0 0				

Класс	Не центрально-симметричный				Центрально-симметричный		
	Система образующих	W-скаляр	Вектор	Симметричный W-тензор	Система образующих	W-вектор	Симметричный тензор
24. (25)	$C, z_6$	—	—	—	} $z_6$	} $0\ 0\ 0$	} $p_{11}\ p_{11}\ p_{33}\ 0\ 0\ 0$
25. (23)	$z_6$	$s^*$	$0\ 0\ v_3$	$p_{11}^*\ p_{11}^*\ p_{33}^*\ 0\ 0\ 0$			
27. (21)	$z_3, E_z$	$0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$			
28. (32)	$C, x_4, y_4, (z_4)$	—	—	—	} $x_4, y_4, (z_4)$	} $0\ 0\ 0$	} $p_{11}\ p_{11}\ p_{11}\ 0\ 0\ 0$
29. (29)	$x_4, y_4, (z_4)$	$s^*$	$0\ 0\ 0$	$p_{11}^*\ p_{11}^*\ p_{11}^*\ 0\ 0\ 0$			
30. (31)	$S_x, S_y, (S_z)$	$0$	$0\ 0\ 0$	$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$			
31. (30)	$C, x_2, y_2, (z_2), S$	—	—	—	} $x_2, y_2, (z_2), S$	} $0\ 0\ 0$	} $p_{11}\ p_{11}\ p_{11}\ 0\ 0\ 0$
32. (28)	$x_2, y_2, (z_2), S$	$s^*$	$0\ 0\ 0$	$p_{11}^*\ p_{11}^*\ p_{11}^*\ 0\ 0\ 0$			

(5.18)

относительно группы этого класса. В частности, из таблицы (5.18) следует, что пирозлектрический эффект существует лишь в 10 классах: 2, 4, 5, 8, 11, 13, 16, 18, 23, 25, а пиромагнитный эффект только в 5 подсистемах, состоящих из 13 классов: 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 17, 18, 20, 24, 25, 27. Диэлектрический и магнитный эффекты существуют во всех классах.

Для упругого эффекта связывающими величинами в адиабатических процессах являются  $\hat{c}_{(\mathcal{D})}^{\kappa\lambda\mu\nu}$  и  $\hat{b}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(E)}$  (ср. (4.14\*), (4.15\*)), зависимость между которыми приведена в (4.23\* а—д). Используя группу  $G_{\text{ог}}$  и отождествляя плотности и неплотности, мы записываем их в виде  $c^{hijk}$  и  $b_{hijk}$ , опуская индексы  $\mathcal{D}$  и  $E$ . Аналогично мы пишем  $\sigma^{hi}$  и  $u_{ji}$  для напряжений и деформаций. Далее, представляется не очень удобным использование в этой работе четырех индексов. Поэтому обычно вводятся сокращенные обозначения. Комбинации индексов 11, 22; 33, 23, 31, 12 в  $\sigma^{hi}$  и  $c^{hijk}$  заменяются на 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тогда  $\sigma^{hi}$  и  $c^{hijk}$  можно записать в виде

$$\sigma^A (A, B = 1, \dots, 6), \quad (5.19)$$

$$c^{AB} = c^{BA}; \quad 11 = 1; \quad 23 = 4; \quad \text{цикл. } 1, 2, 3 \text{ и } 4, 5, 6.$$

$\sigma^A$  не является вектором, а  $c^{AB}$  не является тензором валентности 2, так как их компоненты преобразуются более сложным образом, что легко получить из законов преобразования  $\sigma^{hi}$  и  $c^{hijk}$ . Аналогично могут быть введены сокращенные обозначения для  $u_{ji}$  и  $b_{hijk}$ . Однако мы должны сделать это таким образом, чтобы  $\sigma^A u_A$  имело то же значение, что и  $\sigma^{hi} u_{hi}$ , а  $\sigma^A b_{AB}$  — то же, что и  $\sigma^{hi} b_{hijk}$ . Эти условия выполняются, если мы положим

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11}, \\ u_4 &= 2u_{23}, \\ b_{1111} &= b_{11}, \quad b_{2233} = b_{23}, \\ 2b_{1123} &= b_{14}, \quad 2b_{1131} = b_{15}, \quad 2b_{1112} = b_{16}, \\ 4b_{2323} &= b_{44}, \quad 4b_{2331} = b_{45}, \quad 4b_{2312} = b_{46}, \\ &\text{цикл. } 1, 2, 3 \text{ и } 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (5.20)$$



Действительно, тогда мы имеем

$$\begin{aligned}\sigma^{ij}u_{ij} &= \sigma^{11}u_{11} + 2\sigma^{23}u_{23} + \text{цикл. 1, 2, 3} = \\ &= \sigma^1u_1 + \sigma^4u_4 + \text{цикл. 1, 2, 3; 4, 5, 6} \\ &\quad (i, j = 1, 2, 3).\end{aligned}\quad (5.21)$$

Закон преобразования индексов для  $u_{ij}$  и  $b_{hijk}$  тот же, что и для  $\sigma^{ki}$  и  $c^{hijk}$ , за исключением того, что в каждой комбинации 23, 31, 12 должен быть добавлен множитель 2. Это представляется несколько искусственным, и вообще относительно сложный закон преобразования  $\sigma^A$ ,  $c^{AB}$ ,  $u_B$  и  $b_{BA}$  вызывает неудобства. (Никогда не пользуйтесь этими преобразованиями, а всегда возвращайтесь обратно к преобразованиям с двумя и четырьмя индексами!). Однако сокращенные обозначения имеют свои преимущества, и мы должны платить за это.

Чтобы найти допустимые тензоры валентности 4 в 32 классах, мы выпишем тензоры, инвариантные относительно преобразований  $z_2, z_3, z_4, z_6, x_2, x_4, y_2, y_4, S$ , которые составляют систему образующих относительно свойств с центральной симметрией<sup>1)</sup>.

$$\begin{array}{l} z_2: c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ 0 \ 0 \quad c_{16} \\ \quad \quad c_{22} \ c_{23} \ 0 \ 0 \quad c_{26} \\ \quad \quad \quad c_{33} \ 0 \ 0 \quad c_{26} \\ \quad \quad \quad \quad c_{44} \ c_{45} \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad c_{55} \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad c_{66} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{array} \quad \begin{array}{l} z_3: c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \quad c_{14} \ -c_{25} \ 0 \\ \quad \quad c_{11} \ c_{13} \ -c_{14} \quad c_{25} \ 0 \\ \quad \quad \quad c_{33} \ 0 \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad c_{44} \ 0 \ c_{25} \\ \quad \quad \quad \quad \quad c_{44} \ c_{14} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z_4: c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ 0 \ 0 \quad c_{16} \\ \quad \quad c_{11} \ c_{13} \ 0 \ 0 \quad -c_{16} \\ \quad \quad \quad c_{33} \ 0 \ 0 \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad c_{44} \ 0 \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad c_{44} \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad c_{66} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{array} \quad \begin{array}{l} z_6: c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \quad \quad c_{11} \ c_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \quad \quad \quad c_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad c_{44} \quad 0 \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad c_{44} \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad c_{44} \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{array}$$

<sup>1)</sup> В силу положительной определенности фундаментального тензора безразлично, записываем ли мы индексы как верхние или как нижние. В таблицах мы предпочли нижние индексы, так как они встречаются в других публикациях.

$$\begin{array}{cccccc}
 x_2: c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\
 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\
 & & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{55} & c_{56} \\
 & & & & & c_{36}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 x_4: c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\
 & & c_{22} & -c_{24} & 0 & 0 \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{55} & 0 \\
 & & & & & c_{55}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 y_2: c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\
 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\
 & & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\
 & & & c_{44} & 0 & c_{46} \\
 & & & & c_{55} & 0 \\
 & & & & & c_{66}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 y_4: c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\
 & c_{22} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 & & c_{11} & 0 & -c_{15} & 0 \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{55} & 0 \\
 & & & & & c_{44}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 S: c_{11} & c_{12} & c_{12} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
 & c_{11} & c_{12} & c_{16} & c_{14} & c_{15} \\
 & & c_{11} & c_{15} & c_{16} & c_{14} \\
 & & & c_{44} & c_{45} & c_{45} \\
 & & & & c_{44} & c_{45} \\
 & & & & & c_{44}
 \end{array}$$

(5.22)

Из этих таблиц получаем для одиннадцати подсистем<sup>1)</sup>

	Полная таблица					21 константа
Триклинная, 1, 2						
Моноклинные, 3, 4, 5; $z_2$ :	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	0	0	$c_{16}$
		$c_{22}$	$c_{23}$	0	0	$c_{26}$
			$c_{33}$	0	0	$c_{36}$
				$c_{44}$	$c_{45}$	0
					$c_{55}$	0
						$c_{66}$
						13 констант

<sup>1)</sup> В первой и во второй системах число констант можно было бы уменьшить соответственно с 21 до 18 и с 13 до 12. В остальных системах подобное уменьшение невозможно.

Ромбическая, 6, 7, 8;  $z_2, x_2$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & \\
 & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & c_{33} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 & \\
 & & & & c_{55} & 0 & \\
 & & & & & c_{66} & \\
 & & & & & & 9 \text{ констант}
 \end{array}$$

Тригональная I, 9, 10, 11;  $z_3, x_2$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & \\
 & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 & \\
 & & c_{33} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 & \\
 & & & & c_{44} & c_{14} & \\
 & & & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & \\
 & & & & & & 6 \text{ констант}
 \end{array}$$

Тригональная II, 12, 13;  $z_3$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 & \\
 & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 & \\
 & & c_{33} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & c_{44} & 0 & c_{25} & \\
 & & & & c_{44} & c_{14} & \\
 & & & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & \\
 & & & & & & 7 \text{ констант}
 \end{array}$$

Тетрагональная I,

14, 15, 16, 19;  $z_4, x_2$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & \\
 & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & c_{33} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 & \\
 & & & & c_{44} & 0 & \\
 & & & & & c_{66} & \\
 & & & & & & 6 \text{ констант}
 \end{array}$$

Тетрагональная, II, 17, 18, 20;  $z_4$ :  $c_{11}$   $c_{12}$   $c_{13}$   $0$   $0$   $c_{16}$   
 $c_{11}$   $c_{13}$   $0$   $0$   $-c_{16}$   
 $c_{33}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{44}$   $0$   $0$   
 $c_{44}$   $0$   
 $c_{66}$   
 7 констант

Гексагональная I, 21, 22, 23, 26;  $z_6$ ,  $x_2$  и

Гексагональная II, 24, 25, 27;  $z_6$ :  $c_{11}$   $c_{12}$   $c_{13}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{11}$   $c_{13}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{33}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{44}$   $0$   $0$   
 $c_{44}$   $0$   
 $\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$   
 5 констант

Кубическая I, 28, 29, 30;  $x_4$ ,  $y_4$ , ( $z_4$ ) и

Кубическая II, 31, 32;  $x_2$ ,  $y_2$ , ( $z_2$ ),  $S$ :  $c_{11}$   $c_{12}$   $c_{12}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{11}$   $c_{12}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{11}$   $0$   $0$   $0$   
 $c_{44}$   $0$   $0$   
 $c_{44}$   $0$   
 $c_{44}$   
 3 константы

Изотропная среда; группа  $G_{or}$ :  $c_{11}$   $c_{12}$   $c_{12}$   $0$   $0$   $0$

$$c^{\lambda\mu\nu} = \lambda g^{\lambda\lambda} g^{\mu\nu} + 2\mu g^{(\lambda|\mu|} g^{\lambda)\nu} \quad c_{11} \quad c_{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\lambda = c_{12} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{константы} \\ \text{Ламе} \end{array} \quad c_{11} \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\mu = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{константы} \\ \text{Ламе} \end{array} \quad \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \quad 0 \quad 0$$

$$\lambda + 2\mu = c_{11} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{константы} \\ \text{Ламе} \end{array} \quad \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

2 константы

$$(5.23)$$

Эти таблицы справедливы для триклинной системы и изотропного случая для всех декартовых систем координат, выбранных нижеследующим образом относительно кристаллографических осей:

моноклинная: ось  $z$  совпадает с кристаллографической осью, перпендикулярной остальным осям, а ось  $x$  — с одной из этих осей;

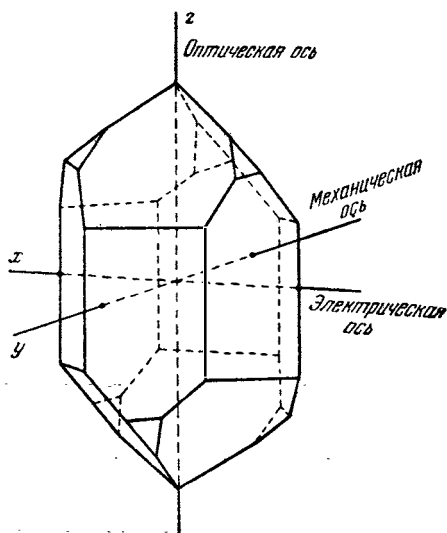


Рис. 26<sup>1)</sup>.

ромбическая: оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  являются кристаллографическими осями;

тригональная: ось  $z$  имеет трехкратную симметрию, ось  $x$  совпадает с одной из остальных осей;

гексагональная: ось  $z$  имеет шестикратную симметрию, ось  $x$  совпадает с одной из остальных осей;

кубическая: оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  являются кристаллографическими осями.

<sup>1)</sup> Рисунок взят из работы Лэка, Вилларда и Фэра 1934.2, р. 753.

В качестве примера мы рассмотрим  $\alpha$ -кварц (класс 10). Оси для случая правой ориентации показаны на рис. 26. Согласно Фойгту, Мэзону и Кэди  $c^{AB}$  и  $b_{AB}$  имеют следующие значения в единицах Джорджи:

	Фойгт	Мэзон	Кэди	
$c_{11} = c_{22}$	85,46	86,05	87,(5)	} $\times 10^9$ ньютон/м <sup>2</sup>
$c_{33}$	105,62	107,1	107,(7)	
$c_{44} = c_{55}$	57,12	58,65	57,(3)	
$c_{12}$	7,25	5,05	7,6 (2)	
$c_{13} = c_{23}$	14,35	10,45	15,(1)	
$c_{14} = -c_{24} = c_{56}$	16,82	18,25	17,(2)	
$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$	39,10	40,5	39,(9)	

	Мэзон	Кэди	
$b_{11} = b_{22}$	1,279	1,26 (9)	} $\times 10^{-11}$ м <sup>2</sup> /ньютон
$b_{33}$	0,956	0,97 (1)	
$b_{44} = b_{55}$	1,978	2,00 (5)	
$b_{12}$	-0,1535	-0,16 (9)	
$b_{13} = b_{23}$	-0,110	-0,15 (4)	
$b_{14} = -b_{24} = \frac{1}{2}b_{56}$	-0,446	-0,43 (1)	
$b_{66} = 2(b_{11} - b_{22})$	2,865	2,8 (8)	

## 6. Пьезоэлектрический и пьезомагнитный эффекты

Пьезоэлектрический эффект описывается формулами (ср. (4.15\*), (4.22\*), (4.23\*)):

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \mathcal{D}^{\kappa} &= \hat{e}^{\kappa\mu\nu} u_{\mu\nu}, \\
 (b) \quad \mathcal{D}^{\kappa} &= d_{\nu\lambda}^{\kappa} \hat{\sigma}^{\nu\lambda} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a) \\ (b) \end{aligned}} \right\} \text{ (нулевое поле),} \\
 (c) \quad \hat{\sigma}^{\mu\lambda} &= -\hat{e}^{\mu\kappa\lambda} E_{\mu} \quad \text{(нулевые деформации),} \\
 (d) \quad u_{\mu\nu} &= d_{\mu\nu}^{\lambda} E_{\lambda} \quad \text{(нулевые напряжения),} \\
 (e) \quad \hat{e}^{\mu\kappa\lambda} &= \hat{c}_{(E)}^{\kappa\lambda\rho\nu} d_{\rho\nu}^{\cdot\mu}.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Используя ортогональные системы координат и отождествляя плотности с обычными тензорами, мы получаем

$$\begin{aligned}
 (a) \quad D^h &= e^{hij} u_{ij} \\
 (b) \quad D^h &= d_{ij}^h \sigma^{ij} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a) \\ (b) \end{aligned}} \right\} \text{ (нулевое поле),} \\
 (c) \quad \sigma^{ij} &= -e^{hij} E_h \quad \text{(нулевые деформации),} \\
 (d) \quad u_{ij} &= d_{ij}^h E_h \quad \text{(нулевые напряжения),} \\
 (e) \quad e^{hli} &= c^{hijk} d_{jk}^l \quad (h, i, j, k, l = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$e^{hij}$  — тензор, симметричный по последним двум индексам. Следовательно, он имеет 18 независимых компонент. Как мы уже видели в § 5, он может быть разложен на два вектора ( $2 \times 3$ ), один  $W$ -девиатор (5) и один септор (7). Так как  $e^{hij}$  не является центрально-симметричным, в нашем распоряжении имеется только 21 класс: 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 18, 20, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30 и 32. В этих классах векторные составляющие существуют только в 10 классах: 2, 4, 5, 8, 11, 13, 16, 18, 23 и 25, а  $W$ -девиатор — только в 13 классах: 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 19, 18, 20, 22 и 25 (ср. (5.18)). Так как мы имеем здесь только таблицу допустимых тензоров до второй валентности и не имеем таблицы для тензоров валентности 3, то мы можем лишь утверждать, что пьезоэлектричество встречается в некоторых из 16 классов: 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23 и 25. Пять классов: 26, 27, 29, 30 и 32 должны быть еще исследованы.

Для пьезомагнитного эффекта мы имеем уравнения, аналогичные (6.2), содержащие вместо электрических величин магнитные. Вместо  $e^{hij}$  в них входит  $W$ -тензор  $m^{*hij}$ , симметричный по последним двум индексам. Эта величина является центрально-симметричной и может быть разложена на два  $W$ -вектора ( $2 \times 3$ ), один девиатор (5) и один  $W$ -септор (7). Так как существует центральная симметрия, мы должны рассмотреть только подсистемы. Во всех системах, кроме кубической, существуют или девиатор или  $W$ -векторы (ср. (5.18)). Следовательно, все эти системы являются пьезомагнитными, и нам остается исследовать лишь кубическую систему.

Мы используем сокращенные обозначения для  $e^{hij}$ ,  $m^{*hij}$  и  $d_{ij}^h$

$$\left. \begin{aligned} e^{h1} &= e^{h11}, & e^{h4} &= e^{h23} \\ m^{*h1} &= m^{*h11}, & m^{*h4} &= m^{*h23} \\ d_1^h &= d_{ii}^h, & d_4^h &= 2d_{23}^h \end{aligned} \right\} \text{циклир. 1, 2, 3; 4, 5, 6. (6.3)}$$

Чтобы найти возможные формы  $e^{hij}$  и  $m^{*hij}$  во всех классах, мы выпишем значения  $e^{hij}$ , инвариантные для преобразований, входящих в (5.4):

$$\begin{array}{l} z_2: \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{14} \quad e_{15} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{24} \quad e_{25} \quad 0 \\ e_{31} \quad e_{32} \quad e_{33} \quad 0 \quad 0 \quad e_{36} \end{array} \quad \begin{array}{l} z_3: \\ e_{11} \quad -e_{11} \quad 0 \quad e_{14} \quad e_{15} \quad -e_{22} \\ -e_{22} \quad e_{22} \quad 0 \quad e_{15} \quad -e_{14} \quad -e_{11} \\ e_{31} \quad e_{31} \quad e_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z_4 \text{ и } z_6: \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{14} \quad e_{15} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{15} \quad -e_{14} \quad 0 \\ e_{31} \quad e_{31} \quad e_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_2: \\ e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{25} \quad e_{36} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{35} \quad e_{36} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_4: \\ e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{25} \quad e_{26} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{26} \quad -e_{25} \end{array} \quad \begin{array}{l} S: \\ e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{15} \quad e_{16} \\ e_{13} \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{16} \quad e_{14} \quad e_{15} \\ e_{12} \quad e_{13} \quad e_{11} \quad e_{15} \quad e_{16} \quad e_{14} \end{array}$$



$E_x:$ 

0	0	0	0	$e_{15}$	$e_{16}$
$e_{21}$	$e_{22}$	$e_{23}$	$e_{24}$	0	0
$e_{31}$	$e_{32}$	$e_{33}$	$e_{34}$	0	0

 $E_z:$ 

$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	0	0	$e_{16}$
$e_{21}$	$e_{22}$	$e_{23}$	0	0	$e_{26}$
0	0	0	$e_{34}$	$e_{35}$	0

 $S_x:$ 

0	$e_{12}$	$-e_{12}$	$e_{14}$	0	0
0	0	0	0	$e_{25}$	$e_{26}$
0	0	0	0	$-e_{26}$	$e_{25}$

 $S_z:$ 

0	0	0	$e_{14}$	$e_{15}$	0
0	0	0	$-e_{15}$	$e_{14}$	0
$e_{31}$	$-e_{31}$	0	0	0	$e_{36}$

(6.4)

Из этих таблиц мы получаем для остающихся 21 классов:

2. (1): Полная таблица

4. (4);  $E_z:$ 

$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	0	0	$e_{16}$
$e_{21}$	$e_{22}$	$e_{23}$	0	0	$e_{26}$
0	0	0	$e_{34}$	$e_{35}$	0

5. (3);  $z_2:$ 

0	0	0	$e_{14}$	$e_{15}$	0
0	0	0	$e_{24}$	$e_{25}$	0
$e_{31}$	$e_{32}$	$e_{33}$	0	0	$e_{36}$

7. (6);  $z_2, x_2:$ 

0	0	0	$e_{14}$	0	0
0	0	0	0	$e_{25}$	0
0	0	0	0	0	$e_{36}$

8. (7);  $z_2, E_x:$ 

0	0	0	0	$e_{15}$	0
0	0	0	$e_{24}$	0	0
$e_{31}$	$e_{32}$	$e_{33}$	0	0	0

10. (18);  $z_3, x_2:$ 

$e_{11}$	$-e_{11}$	0	$e_{14}$	0	0
0	0	0	0	$-e_{14}$	$-e_{11}$
0	0	0	0	0	0

11. (19);  $z_3, E_x:$ 

0	0	0	0	$e_{15}$	$-e_{22}$
$-e_{22}$	$e_{22}$	0	$e_{15}$	0	0
$e_{31}$	$e_{31}$	$e_{33}$	0	0	0

13. (16);  $z_3:$ 

$e_{11}$	$-e_{11}$	0	$e_{14}$	$e_{15}$	$-e_{22}$
$-e_{22}$	$e_{22}$	0	$e_{15}$	$-e_{14}$	$-e_{11}$
$e_{31}$	$e_{31}$	$e_{33}$	0	0	0

15. (12);  $z_4, x_2$  }  
22. (24);  $z_6, x_2$  }

0	0	0	$e_{14}$	0	0
0	0	0	0	$-e_{14}$	0
0	0	0	0	0	0

16. (14); $z_4, E_x$ } 23. (26); $z_6, E_x$ }	18. (10); $z_4$ } 25. (23); $z_6$ }
0 0 0 0 $e_{15}$ 0	0 0 0 $e_{14}$ $e_{15}$ 0
0 0 0 $e_{15}$ 0 0	0 0 0 $e_{15} - e_{14}$ 0
$e_{31}$ $e_{31}$ $e_{33}$ 0 0 0	$e_{31}$ $e_{31}$ $e_{33}$ 0 0 0
19. (11); $S_z, x_2$ :	20. (9); $S_z$ :
0 0 0 $e_{14}$ 0 0	0 0 0 $e_{14}$ $e_{15}$ 0
0 0 0 0 $e_{14}$ 0	0 0 0 $-e_{15}$ $e_{14}$ 0
0 0 0 0 0 $e_{36}$	$e_{31} - e_{31}$ 0 0 0 $e_{36}$
26. (22); $z_3, x_2, E_z$ :	27. (21); $z_3, E_z$ :
$e_{11} - e_{11}$ 0 0 0 0	$e_{11} - e_{11}$ 0 0 0 $-e_{22}$
0 0 0 0 0 $-e_{11}$	$-e_{22}$ $e_{22}$ 0 0 0 $-e_{11}$
0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0
29. (29); $x_4, y_4, (z_4)$ : все нули	30. (31) $S_x, S_y, (S_z)$ } 32. (28) $x_2, y_2, (z_2), S$ }
	0 0 0 $e_{14}$ 0 0
	0 0 0 0 $e_{14}$ 0
	0 0 0 0 0 $e_{14}$

(6.5)

В классах 26, 27, 30 и 32  $e^{hij}$  является септором.

Относительно всех преобразований с  $\Delta = +1$  пьезомагнитная величина  $m_{iB}^*$  ведет себя так же, как  $e_{iB}$ . В силу центральной симметрии  $m_{iB}^*$  только эти преобразования имеют значения, и, значит, имеем следующие возможности для  $m_{iB}^*$ :

Триклинная, 1, 2:

Моноклинная, 3, 4; 5;  $z_2$ :

Полная таблица

0	0	0	$m_{14}^*$	$m_{15}^*$	0
0	0	0	$m_{24}^*$	$m_{25}^*$	0
$m_{31}^*$	$m_{32}^*$	$m_{33}^*$	0	0	$m_{36}^*$

Ромбическая, 6, 7, 8;  $z_2, x_2$ :

0	0	0	$m_{14}^*$	0	0
0	0	0	0	$m_{25}^*$	0
0	0	0	0	0	$m_{36}^*$

Тригональная I, 9, 10, 11;  $z_3, x_2$ :

$$\begin{array}{cccccc} *m_{11} & - *m_{11} & 0 & *m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - *m_{14} & - *m_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Тригональная II, 12, 13;  $z_3$ :

$$\begin{array}{cccccc} *m_{11} & - *m_{11} & 0 & *m_{14} & *m_{15} & - *m_{22} \\ - *m_{22} & *m_{22} & 0 & *m_{15} & - *m_{14} & - *m_{11} \\ *m_{31} & *m_{31} & *m_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Тетрагональная I, 14, 15, 16, 19;  $z_4, x_2$  }  
 Гексагональная I, 21, 22, 23, 26;  $z_5, x_2$  }:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & *m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - *m_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Тетрагональная II, 17, 18, 20;  $z_4$  }  
 Гексагональная II, 24, 25, 27;  $z_5$  }:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & *m_{14} & *m_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & *m_{15} & - *m_{14} & 0 \\ *m_{31} & *m_{31} & *m_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Кубическая I, 28, 29; 30;  $x_4, y_4, (z_4)$ : все нули

Кубическая II, 31, 32;  $x_2, y_2, (z_2), S_2$ :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & *m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & *m_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *m_{14} \end{array} \quad (6.6)$$

$*m^{hij}$  является  $W$ -септором в классах 31 и 32.

В качестве примера пьезоэлектрических констант мы рассмотрим  $\alpha$ -кварц (класс 10). Согласно Кэди значения  $e_{iB}$  и  $d_{iB}$

в электростатических единицах CGS и единицах Джорджи равны:

$$\left. \begin{aligned} e_{11} = -e_{12} = -e_{26} &= 4,77 \cdot 10^4 \\ e_{14} = -e_{25} &= 1,23 \cdot 10^4 \end{aligned} \right\} \frac{\text{дина}}{10^{-8} \text{ с} \cdot \text{вольт} \cdot \text{см}} =$$

$$\left. \begin{aligned} &= 4,77 \cdot 10^9 / \text{с} \\ &= 1,23 \cdot 10^9 / \text{с} \end{aligned} \right\} \frac{\text{ньютон}}{\text{вольт} \cdot \text{м}},$$

$$\left. \begin{aligned} d_{11} = -d_{12} = -d_{26} &= 6,9 \cdot 10^{-8} \\ d_{14} = -d_{25} &= 2,0 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \right\} \frac{\text{см}}{10^{-8} \text{ с} \cdot \text{вольт}} =$$

$$\left. \begin{aligned} &= 6,9 \cdot 10^{-2} / \text{с} \\ &= 2,0 \cdot 10^{-2} / \text{с} \end{aligned} \right\} \frac{\text{м}}{\text{вольт}}.$$

## 7. Волны в однородной анизотропной среде<sup>1)</sup>

Мы воспользуемся декартовыми координатами для вывода волнового уравнения в кристаллах. В этой форме теория обязана своим происхождением Кристоффелю. Общее уравнение движения в анизотропной среде в ортогональных координатах имеет вид (ср. (2.7))

$$\rho [h] \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = \partial_j \hat{\sigma}^{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3), \quad (7.1)$$

где  $u^k$  — вектор смещения.

Для плоской волны точки с одинаковым смещением в любой фиксированный момент времени лежат в параллельных плоскостях. Если обозначить расстояние такой плоскости от начала через  $s$ , а единичный вектор, перпендикулярный плоскостям и направленный в сторону возрастания  $s$ , — через  $n^h$ , то мы получим

$$\partial_j \hat{\sigma}^{jk} = n_j \frac{\partial \hat{\sigma}^{jk}}{\partial s}, \quad (7.2)$$

и отсюда

$$\rho \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = n_j \frac{\partial \hat{\sigma}^{jk}}{\partial s}. \quad (7.3)$$

<sup>1)</sup> Ср. Кристоффель 1877.1; Фойгт 1898.1; Бриллюэн 1938.1; Ляв 1944.1; Кэди 1946.2.

Учитывая, что процесс адиабатический, и используя (1.6) и (4.22\*d), мы находим

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} &= n_j \frac{\partial}{\partial s} (c^{hijk} u_{hi} - e^{ijk} E_i) = \\ &= n_j n_h c^{hijk} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2} - e^{ijk} \partial_j E_i. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь опущен индекс  $(\eta)$  и записаны  $c^{hijk}$ ,  $e^{ijk}$  вместо  $\hat{c}^{hijk}$ ,  $\hat{e}^{ijk}$ , как было в §§ 5 и 6. Если кристаллическая пластина используется в качестве резонатора для контроля частоты, то поле  $E_i$  зависит только от времени и в каждый данный момент постоянно в пространстве. Отсюда

$$\rho \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = n_j n_h c^{hijk} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2}. \quad (7.5)$$

Таким образом, если положить  $u^h = u p^h$ , где  $p^h$  — единичный вектор в направлении  $u^h$ , мы получим уравнение

$$\boxed{\rho c^2 p^k = n_h n_j c^{hijk} p_i} \quad (7.6)$$

для  $p^h$  и линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad (7.7)$$

для  $u$ . В этих уравнениях  $c^2$  является одним из трех собственных значений симметричного тензора

$$\frac{1}{\rho} n_h n_j c^{hijk}.$$

Общее монохроматическое решение (7.7) частоты  $\nu$  имеет вид

$$\begin{aligned} u &= u_1 e^{2\pi i (\nu t - s/\lambda)} + u_2 e^{-2\pi i (\nu t - s/\lambda)} + \\ &+ u_3 e^{2\pi i (\nu t + s/\lambda)} + u_4 e^{-2\pi i (\nu t + s/\lambda)}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $\lambda = c/\nu$  — длина волны, а  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  и  $u_4$  — константы интегрирования. Отсюда видно, что  $c$  есть скорость рас-

пространения волны в направлении  $n^h$ . Первые два члена описывают волновое движение в сторону возрастания  $s$ , а последние два — в противоположном направлении.

Если все три собственные значения различны, то каждому из них принадлежит свой единичный вектор  $p^h$  и эти векторы взаимно ортогональны.

Рассмотрим теперь возможность свободных колебаний в пластине, которая вырезана из кристалла и ограничена двумя параллельными плоскостями  $s=0$  и  $s=a$ , перпендикулярными  $n^h$ . Предположим, что пластина имеет бесконечную площадь и что все частицы, находящиеся на равных расстояниях от плоскости  $s=0$ , движутся одинаково. Граничные плоскости свободны от напряжений, и следовательно, согласно (6.2d)

$$u_{ij} = \frac{\partial u}{\partial s} n_{(j} p_{i)} = d_{ij}^{\cdot h} E_h. \quad (7.9)$$

Но для свободных колебаний  $E_i = 0$ , откуда  $\partial u / \partial s = 0$  для  $s=0$  и  $s=a$ . Вводя эти граничные условия в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{2\pi i}{\lambda} \left( -u e^{2\pi i (vt - s/\lambda)} + u e^{-2\pi i (vt - s/\lambda)} + \right. \\ \left. + u e^{2\pi i (vt + s/\lambda)} - u e^{-2\pi i (vt + s/\lambda)} \right), \quad (7.10)$$

мы получаем

$$0 = (-u + u) e^{2\pi i vt} + (u - u) e^{-2\pi i vt}, \\ 0 = e^{2\pi i vt} (-u e^{-2\pi i a/\lambda} + u e^{2\pi i a/\lambda}) + \\ + e^{-2\pi i vt} (u e^{2\pi i a/\lambda} - u e^{-2\pi i a/\lambda}), \quad (7.11)$$

или

$$u = u, \quad u = u, \\ \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0. \quad (7.12)$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2}{n} a, \quad v = \frac{nc}{2a}, \quad (7.13)$$

где  $n$  — целое число, и решение принимает вид

$$u = 2(u e^{2\pi i vt} + u e^{-2\pi i vt}) \cos \pi \frac{n}{a} s, \quad (7.14)$$

или в другой форме

$$u = \left( C_1 \cos \pi \frac{nc}{a} t + C_2 \sin \pi \frac{nc}{a} t \right) \cos \pi \frac{n}{a} s, \quad (7.15)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — константы интегрирования. Из (7.9) мы видим, что возбуждение этого свободного колебания слабым пульсирующим полем  $E_i$ , направленным по  $n^h$ , возможно тогда и только тогда, когда

$$n_h d_{ij}^h n^j p^i \neq 0 \quad (7.16)$$

и частота  $E_i$  равна  $nc/2a$ . Конечно, на практике выражение (7.16) должно иметь достаточно большое значение, так как в наших теоретических рассуждениях мы пренебрегли всеми видами сопротивления и потерями энергии.

Для произвольных волн при  $\partial_j E_i = 0$  мы получаем из (7.1), (1.6) и (4.22 \* d)

$$\rho \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} = c^{hijk} \partial_i \partial_j u_k. \quad (7.17)$$

Это линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Мы воспользуемся методом, развитым Лоренцом<sup>1)</sup> для волновой функции, удовлетворяющей произвольному линейному дифференциальному уравнению в частных производных произвольного порядка, и запишем решение в виде

$$u^h = U^h e^{2\pi i \chi}, \quad U^h \stackrel{\text{def}}{=} |u^h|. \quad (7.18)$$

Множитель  $e^{2\pi i \chi}$  выражает волновой характер решения. Его частные производные равны

$$\begin{aligned} \partial_t e^{2\pi i \chi} &= 2\pi i \chi_t e^{2\pi i \chi}, & \chi_t &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_t \chi, \\ \partial_j e^{2\pi i \chi} &= 2\pi i \chi_j e^{2\pi i \chi}, & \chi_j &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_j \chi. \end{aligned} \quad (7.19)$$

*Волновые поверхности*, т. е. поверхности одинаковой фазы, в любой фиксированный момент времени задаются уравнением

$$\chi = \text{const}. \quad (7.20)$$

<sup>1)</sup> Ср. Фоккер 1939. 1,2.

$\chi^h$  есть вектор, перпендикулярный волновой поверхности, длина которого обратна длине волны, т. е. расстоянию между двумя последовательными волновыми поверхностями с одинаковой фазой. Отсюда

$$\chi^h = \frac{n^h}{\lambda}, \quad (7.21)$$

где  $n^h$  — единичный вектор, соответствующий  $\chi^h$ . При движении волновой поверхности фаза в некоторой фиксированной точке имеет то же значение, что и при  $t=0$ , если  $\chi$  изменяется на 1. Следовательно,  $\chi_t$  есть частота волны  $\nu$ .

Дифференцируя (7.18), получаем:

$$\begin{aligned} \partial_i u^h &= (\partial_i U^h + 2\pi i U^h \chi_t) e^{2\pi i \chi}, \\ \partial_i^2 u^h &= (\partial_i^2 U^h - 4\pi^2 U^h \chi_t^2 + 4\pi i \chi_t \partial_i U^h + 2\pi i U^h \partial_i^2 \chi) e^{2\pi i \chi}, \\ \partial_j u_k &= (\partial_j U_k + 2\pi i U_k \chi_j) e^{2\pi i \chi}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j u_k &= (\partial_i \partial_j U_k - 4\pi^2 U_k \chi_i \chi_j + 4\pi i \chi_{(i} \partial_{j)} U_k + \\ &\quad + 2\pi i U_k \chi_{ij}) e^{2\pi i \chi}, \\ \chi_{ij} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_i \partial_j \chi, \end{aligned}$$

что дает после подстановки в (7.17):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \rho \partial_i^2 U^h - 4\pi \rho U^h \chi_t^2 &= c^{hijk} (\partial_i \partial_j U_k - 4\pi^2 U_k \chi_i \chi_j), \\ \text{(b)} \quad 2\rho \chi_t \partial_i U^h + \rho U^h \partial_i^2 \chi &= c^{hijk} (2\chi_{(i} \partial_{j)} U_k + U_k \chi_{ij}). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Мы предположим теперь, что амплитуда  $U^h$ , частота  $\nu$ , длина волны  $\lambda$  и направление  $n^h$  слабо изменяются в пространстве и во времени для смещений порядка  $\lambda$  и временных интервалов порядка  $1/\nu$ . Математически это можно выразить неравенствами:

$$\begin{aligned} \partial_i U^h &\ll U^h \chi_i, & \partial_i \partial_i U^h &\ll \chi_i \chi_i U^h, \\ \partial_t U^h &\ll U^h \chi_t, & \partial_i \partial_j \chi &\ll \chi_i \chi_j, \\ \partial_i \partial_j U^h &\ll \chi_i \chi_j U^h, & \partial_i \partial_i \chi &\ll \chi_i \chi_i, \\ \partial_i^2 U^h &\ll \chi_i^2 U^h, & \partial_i^2 \chi &\ll \chi_i \chi_i. \end{aligned} \quad (7.24)$$



Если эти неравенства выполнены, (7.23а) принимает простую форму:

$$\rho c^2 p^h = c^{hijk} n_i n_j p_k. \quad (7.25)$$

Здесь  $p^h$  — единичный вектор в направлении  $u^h$  и  $c = \lambda v$ . Это уравнение устанавливает соотношение между направлением смещения и нормалью к волновой поверхности. Оно совпадает с соотношением (7.6) для плоских волн.

Рассмотрим теперь вопрос о переносе энергии волной. Сумма кинетической и упругой энергии в объеме  $\tau$  равна

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \dot{u}_i \dot{u}^i d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} c^{ijkl} (\partial_j u_i) (\partial_l u_k) d\tau. \quad (7.26)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_{\tau} \rho \dot{u}_i \ddot{u}^i d\tau + \int_{\tau} c^{ijkl} (\partial_j \dot{u}_i) (\partial_l u_k) d\tau = \\ &= \int_{\tau} [\rho \dot{u}_i \ddot{u}^i - c^{ijkl} \dot{u}_i (\partial_j \partial_l u_k) + c^{ijkl} \partial_j (\dot{u}_i \partial_l u_k)] d\tau. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Первые два члена взаимно уничтожаются в силу (7.17), и, следовательно, используя теорему Стокса, мы получаем

$$\dot{W} = \int_s c^{ijkl} \dot{u}_i (\partial_l u_k) f_j ds, \quad (7.28)$$

где  $f^h$  — нормаль к границе  $s$ . Отсюда находим векторную плотность потока энергии

$$\mathcal{E}^j = c^{ijkl} \dot{u}_i \partial_l u_k. \quad (7.29)$$

Записывая волну в действительной форме

$$u^h = A p^h \cos 2\pi\chi = A^h \cos 2\pi\chi. \quad (7.30)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \partial_l u_i &= (\partial_l A_i) \cos 2\pi\chi - 2\pi A_i v \sin 2\pi\chi, \\ \partial_l u_k &= (\partial_l A_k) \cos 2\pi\chi - \frac{2\pi}{\lambda} A_k n_l \sin 2\pi\chi. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Учитывая (7.24), мы можем пренебречь первыми членами в правой части уравнений. Тогда

$$\mathcal{E}^j = 4\pi^2 \frac{v}{\lambda} A^2 c^{ijkl} p_i p_k n_l \sin^2 2\pi\chi. \quad (7.32)$$

В том же приближении из (7.26) и (7.31) следует выражение для полной энергии в единице объема

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= 2\pi^2 \rho v^2 A^2 \sin^2 2\pi\chi + \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \rho c^2 A^2 \sin^2 2\pi\chi = \\ &= 4\pi^2 \rho v^2 A^2 \sin^2 2\pi\chi. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Отсюда скорость потока энергии равна

$$v_e^h = \mathcal{E}^h / \mathcal{W} = \frac{1}{\rho c} c^{hijk} p_i n_j p_k. \quad (7.34)$$

Свертывая с  $n_h$ , находим

$$n_h v_e^h = c.$$

Следовательно, проекция  $v_e^h$  на  $n^h$  равна скорости волны  $cn^h$ .

Для плоской волны в направлении увеличения  $s$   $\chi = s/\lambda + vt$ .

Отсюда средние значения  $\mathcal{E}^j$  и  $\mathcal{W}$  за время от  $t = 0$  до  $t = v^{-1}$  равны

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}^j &= v 4\pi^2 \frac{v}{\lambda} A^2 c^{ijkl} p_i p_k n_l \int_0^{1/v} \sin^2 2\pi \left( \frac{s}{\lambda} + vt \right) dt = \\ &= 2\pi^2 \frac{v}{\lambda} A^2 c^{ijkl} p_i p_k n_l, \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\bar{\mathcal{W}} = 2\pi^2 \rho v^2 A^2.$$

Интересно подсчитать  $\mathcal{E}^j$  и  $\mathcal{W}$  для случая свободных колебаний пластины, перпендикулярной  $n^h$ . Из (7.15), полагая для удобства  $C_2 = 0$ , имеем

$$u^h = C p^h \cos n\pi \frac{s}{a} \cos n\pi \frac{ct}{a} = C p^h \cos 2\pi \frac{s}{\lambda} \cos 2\pi vt, \quad (7.36)$$

и, следовательно,

$$\partial_i u^h = -2\pi v C p^h \cos 2\pi \frac{s}{\lambda} \sin 2\pi vt, \quad (7.37)$$

$$\partial_j u^h = -\frac{2\pi}{\lambda} C p^h n_j \sin 2\pi \frac{s}{\lambda} \cos 2\pi vt. \quad (7.38)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^j &= \frac{\pi^2 \nu}{\lambda} c^{ijkl} p_i p_k n_l C^2 \sin 4\pi \frac{s}{\lambda} \sin 4\pi \nu t, \\ \mathcal{W} &= \pi^2 \nu^2 \rho C^2 \left( 1 - \cos 4\pi \frac{s}{\lambda} \cos 4\pi \nu t \right).\end{aligned}\quad (7.39)$$

Среднее значение  $\mathcal{E}^j$  в этом случае равно нулю, так как стоячая волна получается наложением двух бегущих волн одинаковой амплитуды и противоположных направлений. Но среднее значение  $\mathcal{W}$  равно  $\pi^2 \nu^2 \rho C^2$ .

Мы называем плотность

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} c^{ijkl} p_i n_j p_k n_l \quad (7.40)$$

*энергетической функцией*, соответствующей двум произвольным направлениям  $n^h$  и  $p^h$ . Из (7.25) мы видим, что эта функция принимает экстремальное значение для вариаций  $p^h$  при постоянном  $n^h$ . Направление  $p^h$ , принадлежащее такому экстремальному значению, является одним из возможных направлений вектора смещения для волновой поверхности, перпендикулярной  $n^h$ , а скорость волны, соответствующей этому смещению, равна  $\sqrt{\mathcal{E}/\rho}$ .

Мы потребуем теперь, чтобы  $\mathcal{E}$  имела экстремальные значения для независимых вариаций  $n^h$  и  $p^h$ . Так как эти векторы единичные, то  $n^h dn_h = 0$ ,  $p^h dp_h = 0$ , и, уравнения в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned}d\mathcal{E} &= 2c^{ijkl} dp_i n_j p_k n_l + 2c^{ijkl} p_i dn_j p_k n_l = 0, \\ n_h dn^h &= 0, \quad p_h dp^h = 0.\end{aligned}\quad (7.41)$$

Эти уравнения эквивалентны уравнению

$$\begin{aligned}d\mathcal{E} &= 2(c^{ijkl} n_j p_k n_l - c^{hijkl} p_h n_j p_k n_l p^i) dp_i + \\ &+ 2(c^{ijkl} p_i p_k n_l - c^{ihkl} p_i n_h p_k p_l n^j) dn_j = 0\end{aligned}\quad (7.42)$$

без дополнительных условий. Следовательно,  $\mathcal{E}$  тогда и только тогда имеет экстремум, когда удовлетворяются два уравнения:

$\begin{aligned}(a) \quad \mathcal{E} p^i &= c^{ijkl} n_j p_k n_l, \\ (b) \quad \mathcal{E} n^j &= c^{ijkl} p_i p_k n_l.\end{aligned}$	(7.43)
--	--------

Первое уравнение совпадает с (7.25), и, следовательно,  $p^h$  является одним из направлений вектора смещения волновой поверхности с нормалью  $n^h$ , а  $\mathcal{E} = \rho c^2$ . Сопоставляя второе уравнение с (7.32), приходим к выводу, что поток энергии нормален к волновой поверхности.

Если направления  $n^h$  и  $p^h$  оба удовлетворяют (7.43), мы называем их *сопряжениями*. Если имеются два сопряженных направления и одно из них ортогонально волновой поверхности, то оно совпадает с направлением потока энергии, а второе — с направлением вектора смещения, и наоборот. Для свободных колебаний с направлениями  $n^h$  и  $p^h$   $\mathcal{E}$  имеет экстремальное значение, равное  $\rho c^2$ .

Если  $n^h = p^h$ , направление  $n^h$  называется *самосопряженным*. Необходимым и достаточным условием этого является

$$c^{ijkl}n_i n_j n_k = \rho c^2 n^l. \quad (7.44)$$

Если в (7.44) подставить  $n^h = \alpha \frac{h}{1} + \beta \frac{h}{2} + \gamma \frac{h}{3}$ , то мы получим три уравнения третьей степени относительно  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и с коэффициентами (в сокращенных обозначениях)

$\alpha^3:$	$c_{11}$	$c_{16}$	$c_{15}$	
$\beta^3:$	$c_{26}$	$c_{22}$	$c_{24}$	
$\gamma^3:$	$c_{35}$	$c_{34}$	$c_{33}$	
$\alpha^2\beta:$	$3c_{16}$	$c_{12} + 2c_{66}$	$c_{14} + 2c_{56}$	
$\beta^2\gamma:$	$c_{25} + 2c_{64}$	$3c_{24}$	$c_{23} + 2c_{44}$	
$\gamma^2\alpha:$	$c_{31} + 2c_{55}$	$c_{36} + 2c_{45}$	$3c_{35}$	
$\alpha\beta^2:$	$c_{12} + 2c_{66}$	$3c_{26}$	$c_{25} + 2c_{64}$	(7.45)
$\beta\gamma^2:$	$c_{36} + 2c_{45}$	$c_{23} + 2c_{44}$	$3c_{34}$	
$\gamma\alpha^2:$	$3c_{15}$	$c_{14} + 2c_{56}$	$c_{31} + 2c_{55}$	
$\alpha\beta\gamma:$	$4c_{56} + 2c_{14}$	$4c_{64} + 2c_{25}$	$4c_{45} + 2c_{36}$	
$\alpha:$	$-\rho c^2$	$0$	$0$	
$\beta:$	$0$	$-\rho c^2$	$0$	
$\gamma:$	$0$	$0$	$-\rho c^2$	

и одно уравнение  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Так как для четырех неизвестных имеются четыре уравнения, то, вообще говоря,

решение существует. Необходимые и достаточные условия того, что все решения четвертого уравнения удовлетворяют остальным уравнениям:

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{23} + 2c_{44} = c_{31} + 2c_{55} = c_{12} + 2c_{66}, \\ c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = 0, \\ c_{25} + 2c_{64} = 0, \quad c_{36} + 2c_{45} = 0, \quad c_{14} + 2c_{56} = 0. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Отсюда таблица констант должна иметь вид

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{11} - 2c_{66} & c_{11} - 2c_{55} & -2c_{56} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{11} - 2c_{44} & 0 & -2c_{64} & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & -2c_{45} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{array} \quad (7.47)$$

Если  $c_{45} = c_{56} = c_{64} = 0$ , то среда принадлежит к ромбической системе и называется *средой Грина* <sup>1)</sup>. В среде Грина для каждой формы волновой поверхности один из возможных векторов смещения нормален к поверхности, а два других лежат в касательной плоскости. Для продольных волн  $\rho c^2 = c_{11}$ . Для двух поперечных волн значениями  $\rho c^2$  являются два других решения уравнения (ср. (7.6))

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 c_{11} + \beta^2 c_{66} + \gamma^2 c_{55} - \rho c^2 & (c_{11} - c_{66}) \alpha \beta & (c_{11} - c_{55}) \alpha \gamma \\ (c_{11} - c_{66}) \beta \alpha & \alpha^2 c_{66} + \beta^2 c_{11} + \gamma^2 c_{44} - \rho c^2 & (c_{11} - c_{44}) \beta \gamma \\ (c_{11} - c_{55}) \gamma \alpha & (c_{11} - c_{44}) \gamma \beta & \alpha^2 c_{55} + \beta^2 c_{44} + \gamma^2 c_{11} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.48)$$

С помощью элементарных преобразований этого определителя легко показать, что они являются решениями уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{66} + \gamma^2 (-c_{66} + c_{44}) - \rho c^2 & (c_{55} - c_{44}) \alpha \gamma \\ (c_{66} - c_{44}) \beta \gamma & c_{55} + \beta^2 (-c_{55} + c_{44}) - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.49)$$

или в другой форме

$$\frac{\alpha^2}{c_{44} - \rho c^2} = \frac{\beta^2}{c_{55} - \rho c^2} = \frac{\gamma^2}{c_{66} - \rho c^2}. \quad (7.50)$$

<sup>1)</sup> Ср. Тедоне 1907.1.

Это хорошо известные уравнения Френеля. Таким образом, в среде Грина поперечные волны удовлетворяют уравнениям Френеля. Изотропная среда является частным случаем среды Грина при  $c_{44} = c_{55} = c_{66}$  (ср. (5.22)). Отсюда в изотропной среде для всех продольных волн  $\rho c^2 = c_{11}$  и для всех поперечных волн  $\rho c^2 = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ .

В кристалле тригональной системы 1, например  $\alpha$ -кварце (10) или турмалине (11), уравнения (7.45) принимают форму (ср. (5.22)):

$$\begin{aligned} c_{11}\alpha + (c_{31} + 2c_{44} - c_{11})\alpha\gamma^2 + 6c_{14}\alpha\beta\gamma &= \rho c^2\alpha; \\ c_{11}\beta + (c_{31} + 2c_{44} - c_{11})\beta\gamma^2 + 3c_{14}\gamma(\alpha^2 - \beta^2) &= \rho c^2\beta; \\ -c_{14}\beta^3 + (c_{33} - c_{31} - 2c_{44})\gamma^3 + 3c_{14}\alpha^2\beta + (c_{31} + 2c_{44})\gamma &= \rho c^2\gamma; \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \end{aligned} \quad (7.51)$$

откуда мы видим, что ось  $x$  самосопряженная с  $\rho c^2 = c_{11}$  и ось  $z$  самосопряженная с  $\rho c^2 = c_{33}$ <sup>1)</sup>. Имеются также другие решения.

В кристалле кубической системы уравнения принимают форму (ср. (5.22)):

$$\begin{aligned} (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})\alpha^3 &= (\rho c^2 - c_{12} - 2c_{44})\alpha, \\ (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})\beta^3 &= (\rho c^2 - c_{12} - 2c_{44})\beta, \\ (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})\gamma^3 &= (\rho c^2 - c_{12} - 2c_{44})\gamma \end{aligned} \quad (7.52)$$

с решениями:

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \rho c^2 = c_{11} \\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \gamma = 0, \quad \rho c^2 = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12} + 2c_{44}) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha = 1, \\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \end{aligned}} \right\} \text{циклир.} \\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \rho c^2 = \frac{1}{3}(c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}). \end{aligned} \quad (7.53)$$

<sup>1)</sup> Ср. Кога 1933.2.

Условия самосопряженности осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  или сопряженности осей  $y - x$ ,  $z - x$  и  $x - y$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x: c_{15} &= c_{16} = 0, \\
 y: c_{26} &= c_{24} = 0, \\
 z: c_{34} &= c_{35} = 0, \\
 y, z: c_{42} &= c_{43} = c_{45} = c_{46} = 0, \\
 z, x: c_{53} &= c_{51} = c_{56} = c_{54} = 0, \\
 x, y: c_{61} &= c_{62} = c_{64} = c_{65} = 0.
 \end{aligned} \tag{7.54}$$

Из таблиц (5.22) мы видим, что существуют следующие случаи сопряжения:

	Самосопряженная	Сопряженная	
Триклинная, 1, 2 . . . . .	—	—	
Моноклинная, 3, 4, 5 . . . . .	$z$	—	
Ромбическая, 6, 7, 8 . . . . .	$x, y, z$	$y, z; z, x; x, y$	
Тригональная I, 9, 10, 11 . . . . .	$x, z$	$z, x$	
Тригональная II, 12, 13 . . . . .	$z$	—	(7.55)
Тетрагональная I, 14, 15, 16, 19	$x, y, z$	$y, z; z, x; x, y$	
Тетрагональная II, 17, 18, 20 . . . . .	$z$	$y, z; z, x$	
Гексагональная, 21—27 . . . . .	$x, y, z$	$y, z; z, x; x, y$	
Кубическая, 28—32 . . . . .	$x, y, z$	$y, z; z, x; x, y$	

Для произвольной однородной анизотропной среды мы полагаем

$$N^{ik} = \frac{1}{\rho} c^{hijk} n_h n_j.$$

Тогда каждому направлению  $n^h$  принадлежат значения  $c^2$ , удовлетворяющие уравнению

$$\begin{vmatrix}
 N_{11} - c^2 & N_{12} & N_{13} \\
 N_{21} & N_{22} - c^2 & N_{23} \\
 N_{31} & N_{32} & N_{33} - c^2
 \end{vmatrix} = 0; \quad N_{ij} = N_{ji}. \tag{7.56}$$

Это уравнение всегда имеет три положительных решения. Если все решения различны, то каждому принадлежит одно значение  $p^h$ . Если имеются два равных решения, то им принадлежит пучок возможных значений  $p^h$ , которые все орто-

гональны  $p^h$  третьего решения. Наконец, если все решения совпадают, то  $N_{ij}$  равен  $g_{ij}$  с точностью до скалярного множителя и  $p^h$  может иметь любое направление. Плоская волна, ортогональная  $n^h$  и имеющая скорость  $c$ , проходит расстояние от начала координат до точек  $cn^h$  или  $-cn^h$  за единицу времени. Точки  $cn^h$  и  $-cn^h$  заполняют *поверхность скоростей*, которая состоит из трех листов. Параметрическое уравнение координат точек поверхности скоростей имеет вид

$$x^h = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho} c^{lij k} n_i p_l n_j p_k} n^h, \quad (7.57)$$

где  $p_i$  — один из возможных единичных векторов смещения, принадлежащих  $n_h$ . Ковариантный вектор, перпендикулярный  $n^h$ , первая плоскость которого проходит через начало, а вторая — через точку  $cn^h$ , записывается в виде

$$w_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{1}{\rho} c^{lij k} n_i p_l n_j p_k}} n_h. \quad (7.58)$$

Отсюда (7.58) является параметрическим уравнением (в координатах плоскости) поверхности, огибаемой этими плоскостями. Она называется *волновой поверхностью, принадлежащей началу координат*, и состоит также из трех листов.

Чтобы найти параметрическое уравнение волновой поверхности в координатах точек, мы введем в рассмотрение радиус-вектор  $r^h$  точек этой поверхности, в которых касательная плоскость перпендикулярна  $n^h$ . Эти точки являются пересечением плоскости  $n^h/c$  и ее «соседних» касательных плоскостей. Отсюда

$$\frac{1}{c} r^h n_h = 1, \quad r^h d \left( \frac{1}{c} n_h \right) = 0, \quad n^h dn_h = 0, \quad (7.59)$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{c^2} r^i n_i \left( \frac{\partial c}{\partial u_h} + \frac{\partial c}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial n_h} \right) + \frac{1}{c} r^h = \lambda n^h, \quad (7.60)$$

где  $\lambda$  — подходящий скалярный множитель. Но мы знаем, что  $c$  является экстремалью для вариаций  $p^h$  при постоянных  $n^h$ ,



откуда  $\partial c / \partial p_j = 0$  и

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n_h} + \frac{1}{c} r^h &= \\ &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2c} \cdot \frac{2}{\rho} c^{hijk} p_i n_j p_k + \frac{1}{c} r^h = \lambda n^h. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Свертка с  $n_h$  дает

$$\lambda = 0, \quad (7.62)$$

и, следовательно (ср. (7.34)),

$$r^h = \frac{\partial c}{\partial n_h} = \frac{1}{\rho c} c^{hijk} p_i n_j p_k = v^h. \quad (7.63)$$

Таким образом,  $r^h$  совпадает с вектором скорости потока энергии. Это объясняет, почему проекция  $v^h$  на  $n^h$  является вектором волновой скорости  $cn^h$ .

Сформулируем результаты следующим образом.

*Поверхность скоростей является геометрическим местом концов вектора волновой скорости, а волновая поверхность, принадлежащая началу, является геометрическим местом концов вектора скорости потока энергии.*

В среде Грина лист волновой поверхности, принадлежащий продольным волнам, совпадает с одним из листов поверхности скоростей. В изотропной среде две поверхности совпадают, и мы имеем две сферы, одну для продольных, а другую для поперечных волн.

## 8. Кварцевый резонатор<sup>1)</sup>

Для стабилизации частоты в электрической цепи обычно используются кристаллы. Пластины  $\alpha$ -кварца (тригональная система, класс 10) часто связываются с цепью таким образом, что электрическое поле перпендикулярно пластине. Пластина, перпендикулярная оси  $x$ , называется  $x$ -сечением и т. д. Из таблицы (6.5) мы видим, что отличными от нуля константами являются лишь  $d_{11}^1$ ,  $d_{22}^1 = -d_{11}^1$ ,  $d_{23}^1$ ,  $d_{31}^2 = -d_{23}^1$  и  $d_{12}^2 = -d_{11}^1$ . Поэтому пьезоэлектрический эффект

<sup>1)</sup> Ср. Кэди 1946.2; Мэзон 1947.4; 1950.1

описывается уравнениями (ср. (6.1d)):

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= d_{11}^{-1} E_1 = d_{11} E_1, \\
 u_{22} &= -d_{11}^{-1} E_1 = -d_{11} E_1, \\
 u_{33} &= 0, \\
 u_{23} &= d_{23}^{-1} E_1 = \frac{1}{2} d_{14} E_1, \\
 u_{31} &= -d_{23}^{-1} E_2 = -\frac{1}{2} d_{14} E_2, \\
 u_{12} &= -d_{11}^{-1} E_2 = -d_{11} E_2.
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Таким образом, поле, параллельное оси  $z$ , не может вызвать пьезоэлектрического эффекта, поле в направлении  $x$  порождает деформации  $u_{11}$ ,  $u_{22}$  и  $u_{23}$ , а поле в направлении  $y$  — деформации  $u_{31}$  и  $u_{12}$ .

Для  $x$ -сечения уравнение для  $p^h$  имеет вид

$$c^{111k} p_i = \rho c^2 p^k, \tag{8.2}$$

где  $\rho c^2$  — одно из решений уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} - \rho c^2 & c_{56} \\ 0 & c_{56} & c_{55} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.3}$$

Первым решением является  $\rho c^2 = c_{11}$ , принадлежащее  $p^h = \begin{matrix} i^h \\ x1 \\ 1 \end{matrix}$ .  
Единичные векторы

$$\begin{aligned}
 p^h &= \begin{matrix} i^h \\ x2 \\ 2 \end{matrix} \cos \theta_j - \begin{matrix} i^h \\ x3 \\ 3 \end{matrix} \sin \theta_j, \\
 p^h &= \begin{matrix} i^h \\ x3 \\ 2 \end{matrix} \sin \theta_j + \begin{matrix} i^h \\ x3 \\ 3 \end{matrix} \cos \theta_j
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

принадлежат другим решениям  $\rho c^2 = c_{x2}$  и  $\rho c^2 = c_{x3}$  (рис. 27).

Из (8.3) и (8.4) следует, что

$$\operatorname{tg} 2\theta_j = \frac{2c_{56}}{c_{55} - c_{66}}, \tag{8.5}$$

откуда согласно (5.23)

$$\theta_0 = \begin{cases} 30^\circ 55' & (\text{Фойгт}), \\ 31^\circ 33' & (\text{Кэди}), \\ 31^\circ 30' & (\text{Мэзон}). \end{cases} \quad (8.6)$$

Уравнение для  $y$ -сечения

$$\begin{vmatrix} c_{66} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} - \rho c^2 & c_{24} \\ 0 & c_{24} & c_{44} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0; \quad c_{22} = c_{11}; \quad c_{24} = -c_{14} \quad (8.7)$$

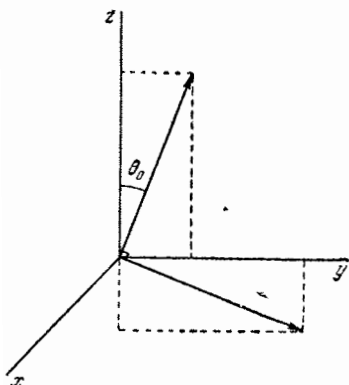


Рис. 27.

имеет решения  $\rho c^2 = c_{66}$ ,  $\rho c^2 = c_{22}$ ,  $\rho c^2 = c_{44}$ . Соответствующие единичные векторы:

$$\begin{aligned} p_{y1}^h &= \frac{i^h}{1}, \\ p_{y2}^h &= \frac{i^h}{2} \cos \varphi - \frac{i^h}{3} \sin \varphi, & \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{2c_{24}}{c_{44} - c_{22}}, \\ p_{y3}^h &= \frac{i^h}{2} \sin \varphi - \frac{i^h}{3} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Уравнение для  $z$ -сечения

$$\begin{vmatrix} c_{55} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0; \quad c_{55} = c_{44}, \quad (8.9)$$

имеет решения  $\rho c^2_{z1} = \rho c^2_{z2} = c_{44}$ ,  $\rho c^2_{z3} = c_{33}$ . Соответствующие единичные векторы:

$$\left. \begin{aligned} p^h_{z1} &= i^h \cos \psi - i^h \sin \psi, \\ p^h_{z2} &= i^h \sin \psi + i^h \cos \psi \\ p^h_{z3} &= i^h, \end{aligned} \right\} \psi \text{ произвольно,} \quad (8.10)$$

Волны, принадлежащие этим направлениям  $p^h$  (периодические функции  $f(t)$ , вообще говоря, различны):

*x-сечение*

$$\begin{aligned} u^h_{x1} &= i^h \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot f(t), \\ u^h_{x2} &= (i^h \cos \theta - i^h \sin \theta) \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot f(t), \\ u^h_{x3} &= (i^h \sin \theta + i^h \cos \theta) \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot f(t), \end{aligned}$$

*y-сечение*

$$\begin{aligned} u^h_{y1} &= i^h \cos \frac{n\pi}{a} y \cdot f(t), \\ u^h_{y2} &= (i^h \cos \varphi - i^h \sin \varphi) \cos \frac{n\pi}{a} y \cdot f(t), \\ u^h_{y3} &= (i^h \sin \varphi + i^h \cos \varphi) \cos \frac{n\pi}{a} y \cdot f(t), \end{aligned}$$

*z-сечение*

$$\begin{aligned} u^h_{z1} &= (i^h \cos \psi - i^h \sin \psi) \cos \frac{n\pi}{a} z \cdot f(t) \\ u^h_{z2} &= (i^h \sin \psi + i^h \cos \psi) \cos \frac{n\pi}{a} z \cdot f(t) \\ u^h_{z3} &= i^h \cos \frac{n\pi}{a} z \cdot f(t) \end{aligned} \quad (h = 1, 2, 3).$$

(8.11)

Наконец, дифференцируя (8.11) по  $x$ ,  $y$  и  $z$ , мы находим, что с этими волнами связаны лишь следующие компоненты  $u_{ij}$ :

	<i>x</i> -сечение	<i>y</i> -сечение	<i>z</i> -сечение	
1-я волна	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{31}, u_{33}$	
2-я волна	$u_{12}, u_{31}$	$u_{22}, u_{23}$	$u_{31}, u_{33}$	(8.12)
3-я волна	$u_{12}, u_{31}$	$u_{22}, u_{23}$	$u_{33}$	

Из (8.1) мы видим, что для  $x$ -сечения только первая волна может генерировать пьезоэлектричество. Для наименьшей гармоники требуется поле частоты  $\frac{1}{2a} c$ . То же имеет место для  $y$ -сечения. Для направления потока энергии имеем:

$x$ -сечение:  $i_1^h$  для всех волн.

$y$ -сечение: 1-я волна:  $c_{66} i_2^h + c_{56} i_3^h$ .

2-я волна:  $(c_{22} \cos^2 \varphi + c_{44} \sin^2 \varphi - 2c_{24} \sin \varphi \cos \varphi) i_2^h +$   
 $+ [c_{24} \cos^2 \varphi - (c_{44} + c_{33}) \sin \varphi \cos \varphi] i_3^h$ ,

3-я волна:  $(c_{22} \sin^2 \varphi + c_{44} \cos^2 \varphi + 2c_{24} \sin \varphi \cos \varphi) i_2^h +$   
 $+ [c_{24} \sin^2 \varphi + (c_{44} + c_{33}) \sin \varphi \cos \varphi] i_3^h$ .

$z$ -сечение: 1-я волна:  $-(c_{56} + c_{14}) \sin \psi \cos \psi i_1^h +$   
 $+ (c_{56} \cos^2 \psi + c_{24} \sin^2 \psi) i_2^h - (c_{55} \cos^2 \psi + c_{44} \sin^2 \psi) i_3^h =$   
 $= -c_{14} i_1^h \sin 2\psi + c_{14} i_2^h \cos 2\psi + c_{44} i_3^h$ ,

2-я волна:  $(c_{56} + c_{14}) \sin \psi \cos \psi i_1^h +$   
 $+ (c_{56} \sin^2 \psi + c_{24} \cos^2 \psi) i_2^h + (c_{55} \sin^2 \psi + c_{44} \cos^2 \psi) i_3^h =$   
 $= c_{14} i_1^h \sin 2\psi - c_{14} i_2^h \cos 2\psi + c_{44} i_3^h$ ,

3-я волна:  $i_3^h$ .

(8.13)

Так как поток энергии для  $x$ -сечения всегда перпендикулярен пластине, *каждый из векторов  $p_{x2}^h$  и  $p_{x3}^h$  является сопряженным  $i^h$* . Для  $u$ -сечения поток энергии всегда лежит в плоскости  $uz$ , а для  $z$ -сечения он перпендикулярен пластине для третьей волны.

До сих пор мы предполагали, что пластины имеют бесконечную площадь. Однако практически пластины должны быть ограничены. Рассмотрим, например, прямоугольное  $u$ -сечение с боковыми гранями, параллельными осям  $x$  и  $z$  (рис. 28). Если бы мы попытались возбудить первую волну полем  $E_i$ , параллельным оси  $u$ , то ясно, что нам не удалось бы это выполнить в точности, так как в первой волне имеется деформация  $u_{12}$  вдоль всей пластины. Но если пластина полностью свободна, то на боковых гранях  $u_{12}$  должны равняться нулю. В действительности пластина никогда не является полностью свободной. Так, в окружающем воздухе могут возбуждаться звуковые волны или, если пластина закреплена, звуковые волны будут возбуждаться в материале опоры. Это означает, что всегда имеется возможность для возникновения напряжений  $\hat{\sigma}^{hi}$  на боковых гранях. Нам известно, что

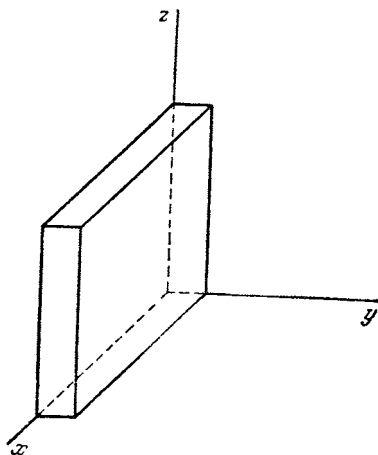


Рис. 28.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^{31} &= c_{55}u_{31} + c_{56}u_{12}, \\ \hat{\sigma}^{12} &= c_{56}u_{31} + c_{66}u_{12},\end{aligned}\tag{8.14}$$

так как  $c_{51}$ ,  $c_{52}$ ,  $c_{53}$ ,  $c_{54}$ ,  $c_{61}$ ,  $c_{62}$ ,  $c_{63}$  и  $c_{64}$  исчезают, и, следовательно,  $u_{12}$  индуцирует деформацию  $u_{31}$  на боковых гранях. Этот эффект называется *механической связью  $u_{12}$  и  $u_{13}$*  и обуславливается отличной от нуля константой  $c_{56}$ . Этим

оправдывается название *константы связи* для констант, не принадлежащих главной диагонали. Теперь весь процесс значительно усложняется и может быть точно описан лишь с помощью достаточно трудного интегрирования с учетом всех граничных условий. Но так как пластина тонкая, легко видеть и без интегрирования, что решением должно быть колебание, главной составляющей которого является первая волна, а роль дополнительных волн, вызванных граничными возмущениями, сводится к удовлетворению граничных условий на боковых гранях для  $u_{31}$  и  $u_{12}$ . Наиболее важные из этих дополнительных волн также можно определить без интегрирования. Пластина является  $u$ -сечением, но ее возможно рассматривать и как достаточно толстое  $x$ -сечение или  $z$ -сечение. Следовательно, в  $x$ -сечении  $u_{12}$  и  $u_{31}$  могут возбудить вторую и третью волны. Их главные частоты из-за толщины пластины слишком малы для возбуждения полем с частотой  $\frac{1}{2a} c$ , но некоторые очень высокие гармоники могут оказаться достаточно близкими к этой частоте для возбуждения. Это весьма вероятно, так как высокие гармоники низкочастотного колебания очень близки друг к другу. То же можно сказать, если рассматривать пластину как очень толстое  $z$ -сечение. Здесь уже  $u_{12}$  не дает эффекта, но индуцированная деформация  $u_{31}$  будет возбуждать некоторые высшие гармоники в плоскости  $xu$ . Эти паразитные высшие гармоники причиняют много беспокойства. Если пластина должна использоваться в качестве резонатора, желательно иметь одну резонансную частоту без помех. Но так как возможны паразитные волны, могут существовать несколько близких резонансных частот. Это делает резонатор непригодным для практического использования, так как он может в процессе работы перескакивать с одной частоты на другую. Имеется много способов уменьшения влияния паразитных волн, например вращение пластины в собственной плоскости, соответствующий выбор длины и ширины, скругление граней, правильное закрепление и т. д. Все эти методы должны обрабатываться экспериментально, так как процессы слишком сложны для точного математического описания. Но имеется один источник помех, который можно исследовать методами математики, и им является константа связи  $c_{56}$ .

Лэк, Виллард и Фэр<sup>1)</sup> дали два примера очень плохой частотной характеристики у-сечения, обусловленной паразитными волнами. Они предложили использовать пластину, которую можно получить из у-сечения вращением его вокруг оси  $x$  на угол  $\theta$  от  $z$  к  $y$ , и доказали, что для новой системы  $x'y'z'$ , полученной вращением, константа  $c_{2'5'}$  исчезает, если  $\theta = 30^\circ 55'$  или  $-59^\circ 5'$  (используя значения Фойгта). Но это дает в точности направления  $p_{x1}^h$  и  $p_{x2}^h$ . Далее, как указал ван-Дил<sup>2)</sup>, это не является случайным, так как из (8.3,4) немедленно следует, что  $p_{x1}^h$  и  $p_{x2}^h$  главные оси эллипса

$$c_{66}y^2 + 2c_{56}yz + c_{55}z^2 = 1, \quad (8.15)$$

и что член с  $y'z'$  исчезает, если эти главные оси приняты за  $y'$  и  $z'$ . Для этих новых осей таблица констант принимает форму

$$\begin{array}{cccccc} c_{1'1'} & c_{1'2'} & c_{1'3'} & c_{1'4'} & 0 & 0 \\ & c_{2'2'} & c_{2'3'} & c_{2'4'} & 0 & 0 \\ & & c_{3'3'} & c_{3'4'} & 0 & 0 \\ & & & c_{4'4'} & 0 & 0 \\ & & & & c_{5'5'} & 0 \\ & & & & & c_{6'6'} \end{array} \quad (8.16)$$

причем константы  $c_{1'5'}$ ,  $c_{1'6'}$ ,  $c_{2'5'}$ ,  $c_{3'5'}$ ,  $c_{3'6'}$ ,  $c_{4'5'}$ ,  $c_{4'6'}$  (но не  $c_{3'4'}$ !) остаются равными нулю. Конечно, равенства, существующие между  $c_{AB}$   $\alpha$ -кварца, не остаются справедливыми для  $c_{A'B'}$ . Используя эту систему координат, мы получаем следующие уравнения для  $\rho c^2$ :

1) 1934. 2.

2) 1936. 1.



$x'$ -сечение (=  $x$ -сечению)

$$\begin{vmatrix} c_{1'1'} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{6'6'} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3'3'} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

 $y'$ -сечение

$$\begin{vmatrix} c_{6'6'} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{2'2'} - \rho c^2 & c_{2'4'} \\ 0 & c_{2'4'} & c_{4'4'} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (8.17)$$

 $z'$ -сечение

$$\begin{vmatrix} c_{5'5'} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{4'4'} - \rho c^2 & c_{3'4'} \\ 0 & c_{3'4'} & c_{3'3'} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Направлениями  $u^h$  являются

(8.18)

	$x'$ -сечение	$y'$ -сечение	$z'$ -сечение
1-я волна	$i^h_{1'}$	$i^h_{1'}$	$i^h_{1'}$
2-я волна	$i^h_{2'}$	$i^h_{2'} \cos \varphi' - i^h_{3'} \sin \varphi'$	$i^h_{2'} \cos \psi' - i^h_{3'} \sin \psi'$
3-я волна	$i^h_{2'}$	$i^h_{2'} \sin \varphi' + i^h_{3'} \cos \varphi'$	$i^h_{2'} \sin \psi' + i^h_{3'} \cos \psi'$
		$\operatorname{tg} 2\varphi' = \frac{2c_{2'4'}}{c_{4'4'} - c_{2'2'}}$	$\operatorname{tg} 2\psi' = \frac{2c_{3'4'}}{c_{2'2'} - c_{4'4'}}$

 $(h = 1, 2, 3)$

причем имеют место следующие деформации:

	$x'$ -сечение ( $=x$ -сечение)	$y'$ -сечение	$z'$ -сечение
1-я волна	$u_{1'1'}$	$u_{1'2'}$	$u_{3'1'}$
2-я волна	$u_{1'2'}$	$u_{2'2'}$ $u_{2'3'}$	$u_{2'3'}$ $u_{3'3'}$
3-я волна	$u_{1'3'}$	$u_{2'2'}$ $u_{2'3'}$	$u_{2'3'}$ $u_{3'3'}$

(8.19)

Для  $x$ -сечения поток энергии направлен перпендикулярно пластине для всех волн. То же справедливо для первой волны в  $y'$ -сечении и  $z'$ -сечении. Для остальных волн в  $y'$ -сечении или  $z'$ -сечении поток энергии лежит в плоскости  $y'z'$ .

$y'$ -сечение называется  $AC$ -сечением, а  $z'$ -сечение —  $BC$ -сечением. Для  $AC$ -сечения важен только  $d_{1'2'2'}$ :

$$\begin{aligned}
 d_{1'2'2'} &= d_{12}^2 \cos^2 \theta_\theta - d_{13}^2 \cos \theta_\theta \sin \theta_\theta = \\
 &= -d_{11} \cos^2 \theta_\theta + d_{14} \cos \theta_\theta \sin \theta_\theta = \\
 &= \begin{cases} -5,96; & \theta_\theta = 30^\circ 55' \text{ (Фойгт)}, \\ -5,92; & \theta_\theta = 31^\circ 30' \text{ (Мэзон)}. \end{cases} \quad (8.20)
 \end{aligned}$$

Для  $BC$ -сечения важен только  $d_{1'3'3'}$ :

$$\begin{aligned}
 d_{1'3'3'} &= d_{12}^2 \sin^2 \theta_\theta + d_{13}^2 \sin \theta_\theta \cos \theta_\theta = \\
 &= -d_{11} \sin^2 \theta_\theta - d_{14} \sin \theta_\theta \cos \theta_\theta = \\
 &= \begin{cases} +0,700; & \theta_\theta = 30^\circ 55' \text{ (Фойгт)}, \\ +0,703; & \theta_\theta = 31^\circ 30' \text{ (Мэзон)}. \end{cases} \quad (8.21)
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $AC$ -сечение более предпочтительно с точки зрения эффективности.

Упругие константы являются функциями температуры, откуда следует, что и частота резонатора есть функция температуры. На эту функцию сильно влияют паразитные волны. При низких частотах эти волны использовались для

достижения малого температурного коэффициента в ограниченной области температур. Однако этот способ обладал тем недостатком, что паразитные волны вызывали разрывы в кривых зависимости частоты от температуры и частоты от толщины пластины. «На практике пластины подгоняются таким образом, что в частотно-температурной характеристике не имеется разрывов в предполагаемой рабочей области, но при высоких частотах трудно избежать этих разрывов в широкой области температур»<sup>1)</sup>. В результате требуется тщательное регулирование температуры. Пластины с  $x$ -сечением имеют много констант связи и пользуются дурной славой из-за плохих частотных характеристик<sup>2)</sup>.

Лэк, Виллард и Фэр<sup>1)</sup> обнаружили, что температурный коэффициент  $c_{6'6'}$  равен нулю для  $\theta = 35^\circ 15'$  при  $45^\circ \text{C}$  и для  $\theta = -49^\circ$  при  $25^\circ \text{C}$ . Эти сечения называются соответственно  $AT$ -сечением и  $BT$ -сечением. Они настолько близки к  $AC$ -сечению и  $BC$ -сечению, что разделяют преимущества последних, хотя  $c_{5'6'}$  и не исчезает полностью.

Пост<sup>3)</sup> разрешил вопрос, являются ли условия для осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  при  $\theta = 30^\circ 55'$  и  $c_{5'6'} = 0$  связанными со случайными свойствами  $\alpha$ -кварца. В кристалле  $\alpha$ -кварца класса (10) ось  $x'$  самосопряженная и сопряженная осям  $y'$  и  $z'$ . Для произвольных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в любом кристалле условия самосопряженности оси  $x$  имеют вид

$$c_{16} = 0, \quad c_{15} = 0. \quad (8.22)$$

Дополнительными условиями сопряженности оси  $x$  осям  $y$  и  $z$  являются

$$c_{56} = 0, \quad c_{26} = 0, \quad c_{46} = 0, \quad c_{45} = 0, \quad c_{35} = 0. \quad (8.23)$$

Отсюда таблица констант относительно выбранной системы координат, которая не обязательно совпадает с

<sup>1)</sup> Лэк, Виллард и Фэр, 1934. 2.

<sup>2)</sup> Ср. Кэди 1946. 2, где приведены очень плохие частотные кривые, опубликованные Бедманном в 1937 г.

<sup>3)</sup> 1948. 1.

кристаллографическими осями, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\
 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 \\
 & & c_{33} & c_{34} & 0 & c_{36} \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{55} & 0 \\
 & & & & & c_{66}
 \end{array} \quad (8.24)$$

Для  $y$ -сечения с боковыми гранями, параллельными осям  $x$  и  $z$ , существует волна с  $p^h = i^h$  и  $\rho c^2 = c_{66}$ , причем с этой волной ассоциируется только деформация  $u_{12}$ . Но  $u_{12}$  механически связана с  $u_{33}$ , а эта последняя может вызвать паразитную волну в пластине (рассматриваемой как  $z$ -сечение). Аналогичным образом в  $z$ -сечении  $u_{13}$  механически связана с  $u_{22}$ , и последняя вызывает паразитную волну в пластине (рассматриваемой как  $y$ -сечение). Исчезновение  $c_{25}$  и  $c_{36}$  является особым свойством  $\alpha$ -кварца.

Пост рассматривает также более специальный случай, когда все три оси являются самосопряженными и взаимно сопряженными. Дополнительными условиями являются

$$c_{24} = 0, \quad c_{34} = 0, \quad (8.25)$$

и таблица констант принимает вид

$$\begin{array}{cccccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\
 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\
 & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\
 & & & c_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{55} & 0 \\
 & & & & & c_{66}
 \end{array} \quad (8.26)$$

Мы имеем теперь следующую таблицу направлений смещений, деформаций и значений  $\rho c^2$ :

х-сечение	у-сечение	z-сечение
$p^h = i^h, u_{11}, c_{11}$ 1	$p^h = i^h, u_{21}, c_{66}$ 1	$p^h = i^h, u_{31}, c_{66}$ 1
$p^h = i^h, u_{12}, c_{66}$ 2	$p^h = i^h, u_{22}, c_{22}$ 2	$p^h = i^h, u_{32}, c_{44}$ 2
$p^h = i^h, u_{13}, c_{55}$ 3	$p^h = i^h, u_{23}, c_{44}$ 3	$p^h = i^h, u_{33}, c_{33}$ 3

(8.27)

с механическими связями  $u_{23}$  и  $u_{11}$ ,  $u_{31}$  и  $u_{22}$ ,  $u_{12}$  и  $u_{33}$ . Полный поток энергии перпендикулярен пластине. Случай, когда  $c_{14}$ ,  $c_{25}$  и  $c_{36}$  исчезают, представляется очень важным. Это имеет место для кристаллографических осей в ромбической системе (7, 8), в тетрагональной системе I (15, 16, 19), в гексагональной системе (22, 23, 25, 26, 27) и в кубической системе (30, 32)<sup>1)</sup>. Далее, для возбуждения одной из поперечных волн необходимы  $u_{23}$ ,  $u_{31}$  или  $u_{12}$ , а это значит, что одна из констант

$$d_{15}, d_{16}, d_{24}, d_{26}, d_{34}, d_{35} \quad (8.28)$$

должна быть отличной от нуля. Это исключает классы 7, 15, 19, 22, 30 и 32. Для возбуждения продольных волн необходимы  $u_{11}$ ,  $u_{22}$  или  $u_{33}$  и, следовательно, одна из констант

$$d_{11}, d_{22}, d_{33}. \quad (8.29)$$

Это исключает те же классы. Таким образом, для пластин, параллельных двум кристаллографическим осям, остаются только ромбический класс 8, тетрагональный класс 16, гексагональные классы 23 и 25 с  $d_{15}$ ,  $d_{24}$  и  $d_{33}$  и гексагональные классы 26 с  $d_{11}$  и  $d_{26}$  и 27 с  $d_{11}$ ,  $d_{16}$ ,  $d_{22}$  и  $d_{26}$ . Первые четыре класса представляются превосходными для продольных волн в z-сечении, так как они не имеют каких-либо эффектов связи. При этом возможно, что в одном из этих или других классов существует полная сопряженность трех осей, не являющихся кристаллографическими. Но мы должны помнить, что для практического использования в качестве резонатора существенны также многие другие свой-

<sup>1)</sup> Мы упоминаем только пьезоэлектрические классы.

ства, кроме возможности возбуждения и отсутствия эффектов связи. Например, важное значение имеют малый температурный коэффициент, механическая прочность, химическая стойкость материала, возможность обнаружения или изготовления чистых кристаллов нужных размеров и т. д. Создание резонатора является технической проблемой, которая не может быть решена одними теоретическими исследованиями. Они должны быть дополнены большой исследовательской работой в лаборатории.

### УПРАЖНЕНИЯ

VII. 1. Доказать, что

$$E_x x_4 = C x_4^{-1},$$

и дать наглядное представление преобразованию  $S_x$ .

VII. 2. Доказать тождества в примечании на стр. 219.

## VIII. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА<sup>1)</sup>

### 1. Голономные системы

Рассмотрим множество частиц с массами  $m_i$ , декартовыми координатами  $x_i, y_i, z_i$  и действующие на них силы  $X_i, Y_i, Z_i$ . При этом будем предполагать, что  $x_i, y_i, z_i$  могут быть выражены через  $n$  переменных  $q^\alpha$ , координаты системы, и время  $t$ . Тогда возможны два случая:

(а) *Склерономная* система:  $x_i, y_i, z_i$  зависят только от  $q^\alpha$

$$x_i = x_i(q^\alpha); \quad \text{цикл. } x, y, z. \quad (1.1)$$

Пример: точка, движущаяся по фиксированной поверхности;  $n = 2$ .

(б) *Реономная* система:  $x_i, y_i, z_i$  зависят от  $q^\alpha$  и  $t$

$$x_i = x_i(q^\alpha, t); \quad \text{цикл. } x, y, z. \quad (1.2)$$

Пример: точка, движущаяся по поверхности, которая преобразуется во времени по заданному закону;  $n = 2$ . В склерономном случае кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} g_{\lambda\kappa}(q^\nu) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\kappa, \quad (1.3)$$

а в реономном случае

$$T = \frac{1}{2} a_{\lambda\kappa}(q^\nu, t) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\kappa + b_\lambda(q^\nu, t) \dot{q}^\lambda + c(q^\nu, t). \quad (1.4)$$

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Уиттекер 1917. 1; Биркгоф 1927. 1; Пранге 1934.1; Синг 1926. 2; 1936. 2 (имеется обширная библиография); 1960. 1; Голдстейн 1957. 1; Ландау и Лифшиц 1958. 1; Лурье 1961. 3.

В обоих случаях легко вывести уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} = X_\lambda, \quad (1.5)$$

где

$$X_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (X_i \partial_{\lambda i} x + Y_i \partial_{\lambda i} y + Z_i \partial_{\lambda i} z) \quad (1.6)$$

называются компонентами «обобщенной силы».

Перемещение  $dx_i$ ,  $dy_i$ ,  $dz_i$  называется *виртуальным*<sup>1)</sup> если оно удовлетворяет условиям движения системы, т. е. существуют такие значения  $dq^\lambda$  и  $dt$ , которые, будучи подставлены в (1.1) или (1.2), дают в точности  $dx_i$ ,  $dy_i$ ,  $dz_i$ .

Тогда

$$X_\lambda dq^\lambda = \sum_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \quad (1.7)$$

представляет работу, производимую силами  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ , если все частицы подвергаются виртуальному перемещению за нулевое время. Таким образом,  $X_\lambda$  зависит только от тех сил, которые действительно производят работу на перемещении этого типа. Все остальные силы, как, например, молекулярные силы между частицами твердого тела или реакции фиксированной или движущейся гладкой поверхности, в эту зависимость не входят.

Для *склерономной* системы мы имеем (ср. V, § 4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} &= g_{\lambda\mu} \ddot{q}^\mu + \dot{q}^\mu (\partial_\mu g_{\lambda\kappa}) \dot{q}^\kappa - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\kappa}) \dot{q}^\mu \dot{q}^\kappa = \\ &= g_{\lambda\mu} \frac{d\dot{q}^\mu + \Gamma_{\rho\mu}^\kappa \dot{q}^\rho dq^\mu}{dt} = g_{\lambda\mu} \frac{\delta \dot{q}^\mu}{dt}; \quad \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

откуда

$$\frac{\delta \dot{q}^\lambda}{dt} = X^\lambda. \quad (1.9)$$

Это уравнение означает, что для  $X^\lambda = 0$  траекториями свободного движения являются геодезические в  $X_n(q^\lambda)$  с фун-

<sup>1)</sup> По поводу этого термина см. также Лурье 1961. 3, стр. 27. — *Прим. перев.*



даментальным тензором  $g_{\lambda\kappa}$  и что  $t$  является каноническим параметром на этих геодезических.

Мы знаем, что

$$s = \int ds = \int | \sqrt{g_{\lambda\kappa} dq^\lambda dq^\kappa} | \quad (1.10)$$

имеет экстремальное значение на геодезической (ср. V, § 4). Но мы знаем также, что и

$$\int T dt = \frac{1}{2} \int ds \frac{ds}{dt} \quad (1.11)$$

принимает экстремальное значение. Как разрешить это противоречие? Ответ заключается в том, что при вариации  $\int T dt$  варьируется только  $g_{\lambda\kappa}$ , но  $t$  остается постоянным (ср. IV, § 6). Это значит, что вариация производится таким образом, что соответствующие точки на соседних траекториях достигаются за одинаковое время. Тогда и  $s$  и  $t$  являются каноническими параметрами на геодезической, откуда согласно (V. 2.9)  $ds/dt$  является константой для каждой геодезической. Следовательно,

$$\begin{aligned} \overset{v}{d} \int ds \frac{ds}{dt} &= \overset{v}{d} \int \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} dt = 2 \int \frac{ds}{dt} \overset{v}{d} \frac{ds}{dt} dt = \\ &= 2 \frac{ds}{dt} \int \overset{v}{d} ds = 2 \frac{ds}{dt} \overset{v}{d} \int ds, \end{aligned} \quad (1.12)$$

а это доказывает, что  $\int T dt$  имеет экстремальное значение, если его имеет  $\int ds$ , и наоборот.

Если траектория обладает тем свойством, что любая другая траектория, достаточно близкая к первой в  $R(q_0^\alpha)$ , всегда остается к ней близкой, то она называется *устойчивой*. Чтобы найти необходимые и достаточные условия устойчивости в склерономном случае, мы запишем уравнение траектории в виде

$$\frac{d\dot{q}^\kappa}{dt} + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \dot{q}^\mu \dot{q}^\lambda = X^\kappa \quad (1.13)$$

и рассмотрим перемещение  $v^\alpha d\varepsilon$ , преобразующее траекторию в соседнюю. Для этого мы используем ту же технику, что и в V, § 4. Пусть преобразованная кривая увлекается по  $-v^\alpha d\varepsilon$  вместе с полями  $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$  и  $X^\alpha$ . Тогда  $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$  и  $X^\alpha$  преобразуются в  $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - D_L \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha d\varepsilon$  и  $X^\alpha - D_L X^\alpha d\varepsilon$ . Из (IV. 5.16) и (V. 1.27) имеем

$$D_L X^\alpha = v^\mu \nabla_\mu X^\alpha - X^\mu \nabla_\mu v^\alpha, \quad (1.14)$$

и нетрудно показать, что <sup>1)</sup>

$$D_L \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\lambda v^\alpha + v^\sigma K_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot}. \quad (1.15)$$

Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{q}^\alpha}{dt} + [\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - (\nabla_\mu \nabla_\lambda v^\alpha + v^\sigma K_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot}) d\varepsilon] \dot{q}^\mu \dot{q}^\lambda = \\ = X^\alpha - (v^\mu \nabla_\mu X^\alpha - X^\mu \nabla_\mu v^\alpha) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из (1.13) и (1.16) следует, что

$$(\nabla_\mu \nabla_\lambda v^\alpha + v^\sigma K_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot}) \dot{q}^\mu \dot{q}^\lambda = v^\mu \nabla_\mu X^\alpha - X^\mu \nabla_\mu v^\alpha \quad (1.17)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu \nabla_\mu \dot{q}^\lambda \nabla_\lambda v^\alpha + v^\sigma K_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot} \dot{q}^\mu \dot{q}^\lambda = \\ = v^\mu \nabla_\mu X^\alpha + \dot{q}^\mu (\nabla_\mu \dot{q}^\lambda) \nabla_\lambda v^\alpha - X^\mu \nabla_\mu v^\alpha. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отсюда согласно (1.13)

$$\frac{\delta}{dt} \frac{\delta}{dt} v^\alpha + v^\sigma \dot{q}^\mu \dot{q}^\lambda K_{\sigma\mu\lambda}^{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot} = v^\mu \nabla_\mu X^\alpha. \quad (1.19)$$

Это дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять  $v^\alpha$  вдоль траектории. Если это уравнение имеет решения, остающиеся малыми для всех  $t$ , то траектория стабильна.

Совершенно независимо от какой-либо механической проблемы возникает вопрос, можно ли найти конечное перемещение  $v^\alpha d\varepsilon$ , которое преобразует заданную геодезическую в  $V_n$  в другую геодезическую. Если  $s$  используется в качестве параметра первой геодезической, то  $ds$

<sup>1)</sup> Ср. Н. М. 1935. 1.

преобразуется на второй геодезической в (ср. V. 4.16)

$$ds' = \left( 1 + \frac{dq^\mu}{ds} \frac{\delta}{ds} v_\mu d\varepsilon \right) ds \quad (1.20)$$

с увлечением по  $-v^\times d\varepsilon$ . Так же как и выше, но принимая во внимание это новое значение  $ds'$ , можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{ds} \frac{\delta}{ds} v^\times + v^\sigma K_{\sigma\mu\lambda}^{\dots \times} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\lambda}{ds} - \frac{d\lambda}{ds} \frac{dq^\times}{ds} = 0; \\ \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq^\lambda}{ds} \frac{\delta}{ds} v_\lambda. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В этом уравнении последний член в левой части обращается в нуль, если  $v^\times$  всегда перпендикулярен геодезической, так как в этом случае

$$\lambda = \frac{dq^\mu}{ds} \frac{\delta}{ds} v_\mu = \frac{\delta}{ds} \left( \frac{dq^\mu}{ds} v_\mu \right) - v_\mu \frac{\delta}{ds} \frac{dq^\mu}{ds} = 0 - 0 = 0 \quad (1.22)$$

(1.21) есть известное уравнение Леви-Чивита для «геодезического расстояния» (*l'écart géodésique*), обобщающее уравнение Гаусса, которое справедливо только для  $n=2$ . Для  $n=2$  единичный вектор  $n^\times$ , перпендикулярный геодезической, переносится вдоль нее параллельно. Отсюда  $\delta n^\times = 0$ .

Таким образом, если положить  $v^\times = vn^\times$  и  $i^\times = \frac{dq^\times}{ds}$ , то мы получим

$$\frac{d^2 v}{ds^2} = -vn^\nu i^\mu i^\lambda n^\times K_{\nu\mu\lambda} = vKn^\nu i^\mu i^\lambda n^\times g_{[\nu [\lambda g_{\mu] \times]} = -\frac{K}{2} v \quad (1.23)$$

для поверхностей в обычном пространстве (сигнатура  $+++$ ). Это уравнение Гаусса, из которого немедленно следует, что на поверхностях с постоянной положительной кривизной заданная геодезическая имеет соседнюю геодезическую, но что для постоянной отрицательной кривизны это не так.

Уравнение *реономной* системы (1.4) может быть записано в виде

$$T = \frac{1}{2} g_{\varphi\psi} \dot{q}^\varphi \dot{q}^\psi \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (1.24)$$

где

$$q^0 \stackrel{\text{def}}{=} t, \quad g_{\kappa\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} a_{\kappa\lambda}, \quad g_{0\lambda} = g_{\lambda 0} \stackrel{\text{def}}{=} b_\lambda, \quad g_{00} \stackrel{\text{def}}{=} 2c. \quad (1.25)$$

В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} - X_\lambda &= \\ &= g_{\lambda\varphi} \ddot{q}^\varphi + \dot{q}^\psi (\partial_\psi g_{\lambda\varphi}) \dot{q}^\varphi - \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\varphi\psi}) \dot{q}^\varphi \dot{q}^\psi - X_\lambda = \quad (1.26) \\ &= g_{\lambda\kappa} \ddot{q}^\kappa + \frac{1}{2} (\partial_\psi g_{\lambda\varphi} + \partial_\varphi g_{\lambda\psi} - \partial_\lambda g_{\varphi\psi}) \dot{q}^\varphi \dot{q}^\psi - X_\lambda \dot{q}^0 \dot{q}^0 = 0. \end{aligned}$$

Если теперь обозначить через  $g^{\kappa\lambda}$  обращение  $g_{\lambda\kappa}$  и положить

$$\begin{aligned} \Gamma_{\chi\psi}^0 &\stackrel{\text{def}}{=} 0, \\ \Gamma_{\chi\psi}^\kappa &= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\lambda g_{\lambda\psi} + \partial_\psi g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\psi\lambda}) - \delta_\chi^0 \delta_\psi^0 X^\kappa, \quad (1.27) \end{aligned}$$

то последние  $n$  уравнений системы

$$\frac{\delta \dot{q}^\varphi}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\dot{q}^\varphi}{dt} + \Gamma_{\chi\psi}^\varphi \dot{q}^\chi \dot{q}^\psi = 0^1) \quad (1.28)$$

эквивалентны (1.26), а первое уравнение есть тождество. Следовательно, мы построили симметричную связность в  $X_{n+1}(q^\kappa, t)$  (*пространство событий*)<sup>2)</sup>, зависящую от  $a_{\lambda\kappa}$ ,  $b_\kappa$ ,  $c$  и  $X_\lambda$ , которая преобразует  $X_{n+1}$  в  $A_{n+1}$ . Геодезические этого  $A_{n+1}$ , на которых  $q^0$  является каноническим параметром, называются *мировыми линиями* системы в пространстве событий<sup>3)</sup>. Если  $A_{n+1}$  редуцировано относительно кривых с уравнениями  $q^\kappa = \text{const}$ , т. е. если мы рассматриваем каждую из этих кривых как точку в некотором  $X_n$  (ср. I, § 3), то мы получим  $X_n(q^\kappa)$ , а мировые

1) Вудгейлер 1932. 2. Ср. для других связностей Синг 1936. 2.

2) В оригинале — film-space. — *Прим. перев.*

3) Отсюда видно, что приведенный метод описания механической системы в действительности не является ковариантным, так как координата  $q^0$  имеет выделенный характер. Ковариантная формулировка законов механики возможна лишь в теории относительности (см. по этому поводу также упр. VIII, 3 настоящей главы). — *Прим. перев.*

линии превращаются в траектории. Если  $X_\lambda$  фиксированы, имеются  $\infty^{2n}$  мировых линий, но если

$$q^x = f^x(t), \quad q^0 = t \quad (1.29)$$

является мировой линией, тогда согласно (1.28)

$$q^x = f^x(t), \quad q^0 = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const} \quad (1.30)$$

— также мировая линия, принадлежащая той же траектории. Это согласуется с числом траекторий ( $\infty^{2(n-1)}$ ).

## 2. Неголономные координаты и неголономные механические системы<sup>1)</sup>

Пусть задана голономная механическая система. Неголономные координаты в  $X_{n+1}(q^x, q^0 = t)$  могут быть введены с помощью формул

$$\begin{aligned} (dq)^p &= A_\varphi^p dq^\varphi = A_x^p dq^x + A_0^p dq^0, \\ dq^\varphi &= A_p^\varphi (dq)^p = A_h^\varphi (dq)^h + A_0^\varphi (dq)^0; \\ \text{Det}(A_\varphi^p) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$(p = 0, 1, \dots, n; \quad h = 1, \dots, n; \quad \varphi = 0, 1, \dots, n). \quad (2.1)$$

Удобно сделать это так, чтобы  $(dq)^0 = dq^0$ , т. е.

$$\begin{aligned} A_x^0 &= 0, & A_0^0 &= 1, \\ A_h^0 &= 0, & A_0^0 &= 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда  $q^0$  остается голономной, так что мы можем писать  $(dq)^0 = dq^0 = dq^0$ , и формулы преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} (dq)^h &= A_x^h dq^x + A_0^h dt, \\ dq^x &= A_h^x (dq)^h + A_0^x dt; \quad \text{Det}(A_x^h) \neq 0 \\ &(h = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

<sup>1)</sup> Уиттекер 1917. 1; Врансеану 1926. 3; Горак 1928. 1; Пранге 1934. 1; Н. М. 1935. 1; Синг 1936. 2. В последней имеется перечень других работ Горака и Врансеану.

Объект неголономности (ср. IV, § 7)

$$\Omega_{rq}^p = A_{rq}^{\chi\psi} \partial_{[\chi} A_{\psi]}^p$$

$$(p, q, r = 0, 1, \dots, n; \psi, \chi = 0, 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

удовлетворяет условиям

$$\Omega_{rq}^0 = 0 \quad (q, r = 0, 1, \dots, n). \quad (2.5)$$

Если мы запишем

$$v^p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(dq)^p}{dt} = A_{\varphi}^p \dot{q}^\varphi = A_{\varphi}^p \dot{q}^\varphi + A_0^p;$$

$$v^0 = 1 \quad (p = 0, 1, \dots, n; \varphi = 0, 1, \dots, n), \quad (2.6)$$

то  $v^p$  являются неголономными компонентами вектора обобщенной скорости, зависящими от  $\dot{q}^\alpha$  и  $1$  таким же образом, как  $(dq)^p$  зависят от  $dq^\alpha$  и  $dt$ .  $T$  является функцией  $q^\alpha$ ,  $t$ ,  $\dot{q}^\alpha$ , и, следовательно, может рассматриваться как функция  $q^\alpha$ ,  $t$ ,  $v^h$ :

$$T^*(q^\alpha, t, v^\mu) = T(q^\alpha, t, \dot{q}^\alpha). \quad (2.7)$$

Тогда левая часть (1.5) принимает форму

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial v^i} A_\lambda^i \right) - \frac{\partial T^*}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial q^\lambda} = \\ &= A_\lambda^i \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v^i} - A_\lambda^i \frac{\partial T^*}{(\partial q)^i} + \\ &+ \frac{\partial T^*}{\partial v^i} (\partial_i A_\lambda^i + \dot{q}^\mu \partial_\mu A_\lambda^i - \dot{q}^\mu \partial_\lambda A_\mu^i - \partial_\lambda A_0^i), \quad (2.8) \\ \frac{\partial T^*}{(\partial q)^i} &\stackrel{\text{def}}{=} A_\lambda^i \frac{\partial T^*}{\partial q^\lambda}; \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Если это выражение свернуть с  $A_j^\lambda$ , обратным  $A_\lambda^i$ , то мы получим уравнение <sup>1)</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v^j} - \frac{\partial T^*}{(\partial q)^j} + 2v^h \frac{\partial T^*}{\partial v^i} \Omega_{hj}^i + 2 \frac{\partial T^*}{\partial v^i} \Omega_{0j}^i = X_j$$

$$(h, i, j = 1, \dots, n), \quad (2.9)$$

и все исчезающие компоненты  $\Omega_{rq}^p$  входят в это уравнение.

<sup>1)</sup> Гамель 1904.1.

В частном случае, когда  $A_\lambda^i$  и  $A_j^\lambda$  не зависят от  $t$  и когда  $A_0^h = 0$ ,  $A_0^x = 0$ :

$$\begin{aligned} (dq)^h &= A_x^h dq^x, \\ dq^x &= A_h^x (dq)^h \quad (h = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

все  $\Omega_{0j}^i$  исчезают, и (2.9) принимает простой вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v^j} - \frac{\partial T^*}{(\partial q)^j} + 2v^h \frac{\partial T^*}{\partial v^l} \Omega_{hj}^i = X_j \\ (h, i, j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.11)$$

С помощью неголономных координат весьма удобно описывать *неголономные* механические системы. Если координаты  $q^x$  должны удовлетворять некоторым кинематическим условиям (связям), которые выражаются  $n - m$  обыкновенными независимыми уравнениями, связывающими  $q^x$  и  $t$ , то  $n - m$   $q^x$  могут быть исключены, и останется система с  $m$  степенями свободы. Если система была склерономной, то новая система может оказаться реономной, но без каких-либо дополнительных трудностей. Однако возникает совершенно другая ситуация, если кинематические связи могут быть заданы только с помощью  $n - m$  линейно независимых линейных соотношений между дифференциалами  $dq^x$  и  $dt$

$$C_x^x dq^x + C_0^x dt = 0 \quad (x = m + 1, \dots, n) \quad (2.12)$$

с коэффициентами  $C_x^x$  и  $C_0^x$ , зависящими от  $q^x$  и  $t$ . В этом случае мы говорим о *реономной неголономной* системе. Ей можно дать следующую геометрическую интерпретацию: в каждой точке  $X_{n+1}(q^x, t)$  фиксировано  $E_{m+1}$ , и направление любой мировой линии в каждой ее точке принадлежит локальному  $E_{m+1}$ . В качестве примера упомянем случай сферы, катящейся без скольжения по поверхности, движение которой задано ( $n = 5$ ,  $m = 3$ ).

Если исходная система склерономная и если связи таковы, что  $C_x^x$  не зависят от  $t$  и  $C_0^x = 0$ , то мы имеем *склерономную неголономную* систему. В этом случае в каждой точке  $X_n(q^x)$  фиксировано  $E_m$ , и направление любой траектории должно в каждой ее точке принадлежать локаль-

ному  $E_m$ . В качестве примера упомянем случай сферы, катящейся без скольжения по фиксированной поверхности ( $n = 5$ ,  $m = 3$ ).

С помощью неголономных координат можно весьма изящным способом освободиться от излишних уравнений. Чтобы сделать это, перенумеруем координаты  $q^x$  таким образом, чтобы  $dq^1, \dots, dq^m$  были линейно независимыми относительно  $n - m$  соотношений (2.12)<sup>1)</sup>. Тогда неголономная система координат определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} q^0 &\stackrel{\text{def}}{=} t \quad (dq)^0 = dq^0 = dt, \\ q^a &\stackrel{\text{def}}{=} \delta_\alpha^a q^\alpha, \quad (dq)^a = dq^a = \delta_\alpha^a dq^\alpha, \\ (dq)^x &\stackrel{\text{def}}{=} C_x^x dq^x + C_0^x dt \\ (a = 1, \dots, m; \alpha = 1, \dots, m; x = m + 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.13)$$

откуда мы видим, что  $(dq)^\varphi$  ( $\varphi = 0, 1, \dots, n$ ) линейно независимы. Координаты  $q^0, q^a; a = 1, \dots, m$  остаются голономными, так как они численно равны  $q^0 = t, q^a$  ( $a = 1, \dots, m$ ). Компоненты  $v^\varphi$  обобщенной скорости

$$\begin{aligned} v^0 &= 1, \quad v^a = \delta_\alpha^a \dot{q}^\alpha, \quad v^x = C_x^x \dot{q}^x + C_0^x \\ (a = 1, \dots, m; x = m + 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.14)$$

принадлежат неголономной системе координат, а для  $\Omega_{x\varphi}^\varphi$  мы имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{ji}^0 &= 0, & \Omega_{j0}^0 &= 0, \\ \Omega_{ji}^a &= 0, & \Omega_{j0}^a &= 0 \\ (a = 1, \dots, m; i, j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Условия (2.12) принимают форму

$$(dq)^x = 0 \quad (x = m + 1, \dots, n). \quad (2.16)$$

Так как система должна удовлетворять этим условиям, необходимо кроме  $X_i$  ввести дополнительную обобщенную силу  $X'_i$  (часто называемую *подвижной связью*), которая не должна производить работу на перемещениях,

<sup>1)</sup> Ясно, что  $dt$  всегда линейно независим относительно них.



удовлетворяющих (2.16). Отсюда

$$X'_a = 0 \quad (a = 1, \dots, m). \quad (2.17)$$

Уравнения (2.9) теперь записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v^j} - \frac{\partial T^*}{(\partial q)^j} + 2v^h \frac{\partial T^*}{\partial v^i} \Omega_{hj}^i + 2 \frac{\partial T^*}{\partial v^i} \Omega_{0j}^i = X_j + X'_j \\ (h, i, j = 1, \dots, n). \quad (2.18)$$

Согласно (2.15), (2.16) и условию  $v^x = 0$  первые  $m$  уравнений в (2.18) принимают вид <sup>1)</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial v^b} - \frac{\partial T^*}{(\partial q)^b} + 2v^c \frac{\partial T^*}{\partial v^x} \Omega_{cb}^x + 2 \frac{\partial T^*}{\partial v^x} \Omega_{0b}^x = X_b \\ (b, c = 1, \dots, m; \quad x = m+1, \dots, n). \quad (2.19)$$

В этих уравнениях после первого дифференцирования мы должны положить  $v^a = \delta_a^a \dot{q}^a$  и  $v^x = 0$ . Тогда получатся точно  $m$  дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $q^x$ . Из этих  $m$  уравнений и  $n - m$  дифференциальных уравнений первого порядка (2.12) мы должны определить  $q^x$  в функции от  $t$ .

Остальные  $n - m$  уравнений (2.18) не являются необходимыми для процесса интегрирования. То, что они автоматически отпадают, является главным достоинством описанного выше метода. При желании, однако, их можно использовать после интегрирования, если нас интересуют компоненты  $X'_x$  подвижной связи.

### 3. Приведение уравнений Лагранжа и Гамильтона к однородному виду <sup>2)</sup>

В случае потенциальных сил  $X_i, Y_i, Z_i$  существует такая функция  $V$  от  $q^x$  и  $t$ , что

$$X_\lambda = -\partial_\lambda V. \quad (3.1)$$

<sup>1)</sup> Гамель 1904.1.

<sup>2)</sup> Ср. Дирак 1933.4; ван Данциг 1934.5.

Более сложным является случай, когда  $V$  зависит от  $q^\lambda$ ,  $\dot{q}^\lambda$  и  $\dot{q}^\lambda$ , а  $X_\lambda$  представим в виде

$$X_\lambda = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial V}{\partial q^\lambda}. \quad (3.2)$$

В обоих случаях мы можем ввести функцию Лагранжа  $L$ , определяемую выражением

$$L \stackrel{\text{def}}{=} T - V. \quad (3.3)$$

Тогда уравнения движения принимают форму

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} = 0,} \quad (3.4)$$

известную как *уравнение Лагранжа* системы.

Величина

$$p_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} \quad (3.5)$$

называется (*обобщенным*) *импульсом*, соответствующим координате  $q^\lambda$ . Мы всегда предполагаем, что  $\dot{q}^\lambda$  могут быть определены из (3.5) как функции  $p_\lambda$ ,  $q^\lambda$  и  $t$ . *Функция Гамильтона*

$$H \stackrel{\text{def}}{=} p_\lambda \dot{q}^\lambda - L \quad (3.6)$$

может рассматриваться как функция  $p_\lambda$ ,  $q^\lambda$  и  $t$ .

Итак, согласно (3.4,5) мы имеем

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q^\lambda} dq^\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda} d\dot{q}^\lambda + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \dot{p}_\lambda dq^\lambda + p_\lambda d\dot{q}^\lambda + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и, следовательно,

$$dH = \dot{q}^\lambda dp_\lambda + p_\lambda d\dot{q}^\lambda - \dot{p}_\lambda dq^\lambda - p_\lambda d\dot{q}^\lambda - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.8)$$

Но, с другой стороны, мы также имеем

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} dp_\lambda + \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} dq^\lambda + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (3.9)$$

откуда:

$$\begin{array}{l}
 \text{(a) } \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = \dot{q}^\lambda, \quad \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = -\dot{p}_\lambda, \\
 \text{(b) } \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}, \\
 \text{(c) } \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.
 \end{array} \tag{3.10}$$

$2n$  дифференциальных уравнений первого порядка (3.10а) относительно  $p_\lambda$ ,  $q^\lambda$  эквивалентны  $n$  уравнениям Лагранжа второго порядка и называются *уравнениями Гамильтона* данной системы. (3.10б) является следствием (3.10а). Отметим, что функция  $H$  никогда не может быть однородной первой степени относительно  $p_i$ , так как в этом случае

$$L = p_\lambda \dot{q}^\lambda - p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = 0.$$

Уравнения Лагранжа (3.4) являются частным случаем более общих уравнений Лагранжа гл. IV, § 6. Здесь одна переменная  $t$  играет роль  $\xi^x$  в IV, § 6, и  $q^x$  должны рассматриваться как *скаляры* в  $t$ -пространстве, так как они не преобразуются при преобразовании  $t$ . До сих пор  $t$  вообще не подвергалось преобразованию. Но если преобразовать  $t$  аналогично  $\xi^x$  в IV, § 6, т. е. ввести новую переменную  $\tau$ , зависящую только от  $t$ ,

$$\tau = \tau(t), \quad t = t(\tau), \tag{3.11}$$

то, как мы знаем,  $L$  приобретает множитель  $\Delta^{-1}$ , где  $\Delta = = d\tau/dt$ . Обозначая преобразованное  $L$  через  $\mathcal{L}$ , имеем

$$\mathcal{L} = L\dot{t}, \quad \dot{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dt}{d\tau}. \tag{3.12}$$

$\mathcal{L}$  является функцией  $q^x$ ,  $t$ ,  $\dot{q}^x$  и  $\dot{t}$ , где  $\circ$  обозначает дифференцирование по  $\tau$ . Так как

$$\mathcal{L} = \dot{t}L(q^x, \dot{q}^x \dot{t}^{-1}, t), \tag{3.13}$$

эта функция однородна первой степени по  $\dot{q}^x$ ,  $\dot{t}$ . Как мы видели в IV, § 6, уравнение Лагранжа инвариантно

относительно преобразования  $t \rightarrow \tau$ ,  $L \rightarrow \mathcal{L}$ , откуда

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\lambda} = 0. \quad (3.14)$$

Это можно доказать и непосредственно<sup>1)</sup>. Если уравнение Лагранжа относительно  $L$ ,  $t$  записать в виде

$$d \frac{\partial L dt}{\partial dq^\lambda} - \frac{\partial L dt}{\partial q^\lambda} = 0, \quad (3.15)$$

то из условия  $L dt = \mathcal{L} d\tau$  следует, что

$$d \frac{\partial \mathcal{L} d\tau}{\partial dq^\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L} d\tau}{\partial q^\lambda} = 0, \quad (3.16)$$

а это эквивалентно (3.14). Отметим, что инвариантность уравнений (3.4) и (3.14) относительно преобразований  $q^\lambda$  при фиксированном  $t$  не имеет ничего общего с инвариантностью в смысле IV, § 6.

Мы докажем теперь, что кроме (3.14) справедливо также другое уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (3.17)$$

Если обозначить

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} -H = L - p_\lambda \dot{q}^\lambda, \quad q^0 \stackrel{\text{def}}{=} t, \quad (3.18)$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{L} d\tau = L dt = p_\lambda dq^\lambda + p_0 dq^0 = p_\varphi dq^\varphi \\ (\varphi = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.19)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L} = p_\varphi \dot{q}^\varphi \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n). \quad (3.20)$$

Мы уже видели, что  $\mathcal{L}$  однородна первой степени по  $\dot{q}^\varphi$ . Но это не следует из (3.20), так как в этом уравнении  $\mathcal{L}$  не выражена через  $q^\varphi$  и  $\dot{q}^\varphi$ . Из (3.20) можно только заключить, что  $p_\varphi$ , будучи выражены через  $q^\varphi$  и  $\dot{q}^\varphi$ , должны быть

<sup>1)</sup> Ср. ван Данциг 1934.5.

однородны первой степени по  $\dot{q}^\varphi$ . Но из (3.13), дифференцируя, тотчас получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\varphi} = p_\varphi \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n), \quad (3.21)$$

откуда согласно (3.10 б, с) и (3.13) находим для  $\varphi = 0$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^0} = \frac{dp_0}{d\tau} = -\frac{dH}{d\tau} = -\dot{t} \frac{dH}{dt} = \dot{t} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (3.22)$$

Объединяя (3.14) и (3.17), мы получаем *однородные уравнения Лагранжа*

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\varphi} = 0} \quad (3.23)$$

$$(\varphi = 0, 1, \dots, n).$$

Эти уравнения инвариантны относительно преобразований  $n+1$  координат  $q^0, q^1, \dots, q^n$  и параметра  $\tau$ . При преобразованиях  $\tau$   $\mathcal{L}$  преобразуется как скалярная плотность веса  $+1$  в одномерном  $\tau$ -пространстве.

Чтобы привести к однородному виду уравнения Гамильтона, мы введем функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p_\varphi \dot{q}^\varphi - \mathcal{L} = \dot{t} (p_\lambda \dot{q}^\lambda + p_0 - L) = \\ &= \dot{t} [p_0 + H(p_\lambda, q^\lambda, t)] \quad (3.24) \\ &(\varphi = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Тогда вместо функции Гамильтона  $H$  (которая теперь обозначена —  $p_0$ ) мы получаем *соотношение Гамильтона*

$$\mathcal{H}(p_\psi, q^\psi) = 0 \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n). \quad (3.25)$$

Действительно,  $\mathcal{H}$  можно рассматривать как функцию  $p_\psi$  и  $q^\psi$ , так как согласно (3.21)  $\dot{q}^\varphi$  выражается через  $p_\psi$  и  $q^\psi$ .

Дифференцируя (3.24) и принимая во внимание (3.25), мы приходим к *однородным уравнениям Гамильтона*:

$$\boxed{\text{(a) } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \overset{\circ}{q}^\varphi, \quad \text{(b) } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\psi} = -\overset{\circ}{p}_\psi.} \quad (3.26)$$

$$(\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n).$$

Отметим, что  $\mathcal{H}$  никогда не может быть однородной по  $p_\varphi$ , так как тогда согласно (3.25)  $\mathcal{L}$  должна обратиться в нуль:

$$\mathcal{L} = -\mathcal{H} + p_\varphi \overset{\circ}{q}^\varphi = -\mathcal{H} + p_\varphi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = 0 + 0 = 0. \quad (3.27)$$

$\mathcal{H}$  не является единственной функцией, удовлетворяющей (3.25) и (3.26). Вместо  $\mathcal{H}$  может быть взята любая  $F(\mathcal{H})$ , если только из условия  $\mathcal{H} = 0$  следует  $F(\mathcal{H}) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial \mathcal{H}} = 1$ .

$q^\varphi$  — произвольные координаты в пространстве событий. Если задана мировая линия, проходящая через точку  $q^\varphi$ , то мы знаем в этой точке  $\overset{\circ}{q}^\varphi$  и, следовательно, также  $\mathcal{L} d\tau = = p_\varphi dq^\varphi$  и ковариантный вектор  $p_\psi$ . Это значит, что каждой точке мировой линии принадлежит не только направление, но также ковариантный вектор и его  $n$ -направление. Обратно, если в каждой точке пространства событий задано  $n$ -направление, т. е. определен ковариантный вектор  $\rho p_\psi$  с точностью до произвольного скалярного множителя  $\rho$ , то этот множитель может быть найден с помощью (3.25), и каждому значению  $\rho$  принадлежит проходящая через точку мировая линия. Точка с заданным в ней  $n$ -направлением называется *элементом*. Следовательно, мировая линия есть последовательность элементов и она определяется точкой и направлением в ней, но не одним из своих элементов, так как каждому из них может принадлежать конечное число мировых линий. Если задан элемент и выбрано одно из возможных значений  $\rho$ , то из первого уравнения Гамильтона (3.10a) находится  $\overset{\circ}{q}^\lambda$ , т. е. направление мировой линии. Тогда второе уравнение Гамильтона (3.10b) дает значение  $p_\lambda$  в «следующей» точке мировой линии. Таким образом, уравнения Гамильтона описывают процесс, с помощью которого может

быть аппроксимирована шаг за шагом мировая линия, если выбран достаточно малый шаг.

Через каждую точку пространства событий проходит  $\infty^n$  мировых линий. Следовательно, всего их  $\infty^{2n}$ , и решение задачи должно зависеть от  $2n$  параметров, например значений  $q^*$  и  $\dot{q}^*$  при  $t=0$ . В неоднородной постановке решение дает  $q^*$  как функцию  $t$  и  $2n$  параметров. Но, используя однородный метод, мы получаем  $n$  уравнений относительно  $q^\varphi$  и  $2n$  параметров, и из них могут быть найдены  $n$   $q^\varphi$  как функции одного оставшегося  $q^\varphi$  и параметров.

#### 4. Теория интегрирования<sup>1)</sup>

Если  $q_0^\varphi$  и  $q^\varphi$  — две точки пространства событий, то имеется всегда конечное число проходящих через них мировых линий. На каждой из них интеграл

$$R(q_0^\varphi, q^\varphi) = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathcal{L} d\tau \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

принимает экстремальное значение в соответствии с результатами IV, § 6.  $R$  является функцией двух точек и может быть названа *частным эйконалом* (special eiconal function).

Рассмотрим вариацию  $\overset{v}{d}q^\varphi$  мировой линии между  $q_0^\varphi$  и  $q^\varphi$ . Тогда из (3.21,23) имеем

$$\begin{aligned} \overset{v}{d}R &= \overset{v}{d} \int_{\tau_0}^{\tau} \mathcal{L} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\varphi} \overset{v}{d}q^\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\varphi} \overset{v}{d}\dot{q}^\varphi \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left[ \left( \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\varphi} \right) \overset{v}{d}q^\varphi + p_\varphi \overset{v}{d}\dot{q}^\varphi \right] d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \overset{v}{p}_\varphi \overset{v}{d}q^\varphi + p_\varphi \overset{v}{d}\dot{q}^\varphi \right) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} d(p_\varphi \overset{v}{d}q^\varphi) = \\ &= (p_\varphi)_\tau \overset{v}{d}q^\varphi - (p_\varphi)_{\tau_0} \overset{v}{d}q_0^\varphi \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.2) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Ср. Уиттекер 1917.1.

откуда мы еще раз видим, что  $\overset{0}{R}$  принимает экстремальное значение. С другой стороны, мы имеем

$$\overset{v}{d}R = \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial q^\varphi} \overset{v}{d}q^\varphi + \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial \overset{v}{q}^\varphi} \overset{v}{d}\overset{v}{q}^\varphi \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.3)$$

Отсюда

$$(a) \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial q^\varphi} = p_\varphi, \quad (b) \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial \overset{v}{q}^\varphi} = -p_\varphi \quad (4.4)$$

$$(\varphi = 0, 1, \dots, n).$$

Если теперь  $\overset{0}{q}^\varphi$  фиксировано, то  $\overset{0}{R}$  есть функция только  $q^\varphi$ , и, следовательно, мы получаем из соотношения Гамильтона (3.25)

$$\mathcal{E} \left( \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial q^\psi}, q^\varphi \right) = 0 \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.5)$$

Уравнение

$$\mathcal{E} \left( \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial q^\psi}, q^\varphi \right) = 0 \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.6)$$

где  $R$  обозначает неизвестную функцию  $q^\varphi$ , называется *уравнением Гамильтона — Якоби* в пространстве событий. *Общее решение* такого уравнения зависит от произвольных функций. *Частное решение* является одним из решений, содержащихся в общем решении.  $\overset{0}{R}$  не является ни общим, ни частным решением; это решение, зависящее от  $n+1$  параметров  $\overset{0}{q}^\varphi$  (*полное решение*). Но мы докажем, что можно получить *любое* решение (4.6), если известно  $\overset{0}{R}$ .

Пусть  $R(q^\varphi)$  — частное решение (4.6) и  $\overset{0}{q}^\varphi$  — точка, выбранная на  $X_n$ , определяемом в пространстве событий уравнением

$$R(q^\varphi) = c \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.7)$$

Тогда  $\partial_\psi R$  имеет  $n$ -направление, касательное к этому  $X_n$ . Вследствие соотношения (4.6)  $\partial_\psi R$  в  $\overset{0}{q}^\varphi$  является возможным значением  $p_\psi$ . Мировая линия, принадлежащая этому



значению и проходящая через  $q_0^\Psi$ , имеет уравнение

$$q^\chi = \frac{\partial \mathcal{E}(\partial_\Psi R, q^\Psi)}{\partial (\partial_\Psi R)} \quad (\Psi, \chi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.8)$$

Перемещая  $q_0^\Psi$  по  $X_n$ , мы получаем этим способом конгруэнцию  $\infty^n$  мировых линий, проходящих через каждую, достаточно близкую к  $X_n$  точку пространства событий. Из (4.8) и (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \partial_\chi R &= \dot{q}^\omega \partial_\omega \partial_\chi R = \frac{\partial \mathcal{E}(\partial_\Psi R, q^\Psi)}{\partial (\partial_\omega R)} \partial_\omega \partial_\chi R = \\ &= - \frac{\partial \mathcal{E}(\partial_\Psi R, q^\Psi)}{\partial q^\chi} \quad (\Psi, \chi, \omega = 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Таким образом,  $\partial_\chi R$  удовлетворяет вдоль мировой линии второму уравнению Гамильтона, а это значит, что соотношение  $p_\Psi = \partial_\Psi R$  справедливо не только в  $q_0^\Psi$ , но также и в любой точке мировой линии. Следовательно, мы имеем

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q^\Psi} dq^\Psi = p_\Psi dq^\Psi = \mathcal{L} d\tau \quad (4.10)$$

вдоль этой линии, откуда

$$R(q^\Psi, q^\Psi) = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathcal{L} dt = R(q^\Psi) - R(q_0^\Psi). \quad (4.11)$$

Это доказывает, что  $R(q^\Psi)$  известна с точностью до константы, если задано  $X_n$  (4.7) и если известен частный эйконал. Тогда можно построить каждое решение (4.6), выбирая  $X_n$ , строя мировые линии, принадлежащие всем элементам  $X_n$ , и, наконец, присоединяя к каждой точке  $q^\chi$ , лежащей на мировой линии, которая проходит через  $q_0^\chi$ , значение

$R(q^\Psi, q^\Psi)$  плюс произвольная константа.

Общее решение (4.6) является функцией точки и  $X_n$ , т. е. оно принимает определенное значение для каждой комбинации  $X_n$  и точки пространства событий. Это решение может быть названо *общим эйконалом*. Если  $X_n$  вырождается в точку, то оно вырождается в частный эйконал.

Таким образом, общий эйконал содержит частный, но необходимо интегрирование, если мы хотим получить общий из частного.

Если, отправляясь от  $X_n$  (4.7), построить мировые линии, то элементы этих мировых линий в каждой из их точек касательны к одному из  $X_n$  с уравнением (4.7), но при произвольном  $s$ . Это доказывает предложение:

*Если мы выберем произвольную конгруэнцию  $\infty^n$  последовательностей из  $\infty^{2n}$  последовательностей элементов в пространстве событий и если существует одно  $X_n$ , касательное  $E_n$  которого в каждой точке совпадает с элементом одной из этих последовательностей, то все  $\infty^{n+1}$  элементов этих  $\infty^n$  последовательностей образуют множество  $\infty^1 X_n$ .*

Если мы знаем частный эйконал, задача может быть решена без интегрирования. Два из  $2n + 2$  параметров  $p_\Phi$  и  $q^\Phi$  могут быть исключены из уравнений (4.4b) и (3.25) для  $p_\Phi = p_\Phi$ ,  $q^\Phi = q^\Phi$ . Тогда мы получим  $n$  уравнений относительно  $q^\Phi$  и  $2n$  параметров, из которых могут быть определены  $n$   $q^\Phi$  как функции оставшейся  $q^\Phi$  и параметров. Однако найти  $\overset{0}{R}$  достаточно трудно, так как  $\mathcal{L} d\tau$  не является полным дифференциалом и интегрирование в (4.1) не может быть выполнено.

Для нашей цели знание  $\overset{0}{R}$  не является необходимым. Нам нужно только решение  $R$  уравнения (4.6) при условии, что это решение содержит  $n$  параметров  $c_\lambda$ . Если  $c_\lambda$  принимают все возможные значения, то уравнение  $R = \text{const}$  представляет в пространстве событий для каждого множества этих значений  $\infty^1 X_n$ , которым принадлежит одна конгруэнция  $\infty^n$  мировых линий. В конце концов мы получаем таким образом все  $\infty^{2n}$  мировых линий. Чтобы получить решение задачи, мы докажем, что  $\partial R / \partial c_\lambda$  постоянны. Прежде всего мы имеем из (3.26a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} &= \frac{\partial^2 R}{\partial q^\Phi \partial c_\lambda} \overset{0}{q}^\Phi = \frac{\partial^2 R}{\partial q^\Phi \partial c_\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\Phi} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\Phi} \frac{\partial p_\Phi}{\partial c_\lambda} \quad (\Phi = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $p_\psi$  должны рассматриваться как функции  $q^\varphi$  и  $c_\lambda$ . Далее,  $\mathcal{H} = 0$  для каждой точки  $q^\varphi$  и каждого возможного значения  $p_\psi$  в этой точке. Отсюда

$$\mathcal{H}'(q^\varphi, c_\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}[p_\psi(q^\varphi, c_\lambda), q^\varphi] = 0 \quad (4.13)$$

для любого выбора  $c_\lambda$ , и

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial c_\lambda} = 0. \quad (4.14)$$

Следовательно, если мы положим

$$\frac{\partial R(q^\varphi, c_\mu)}{\partial c_\lambda} = b^\lambda (= \text{const}) \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.15)$$

то получим  $n$  уравнений относительно  $q^\varphi$  и  $2n$  параметров  $b^\lambda$ ,  $c_\lambda$ , из которых могут быть определены  $n$   $q^\varphi$  как функции оставшейся  $q^\varphi$  и параметров. Это решает задачу.

Если  $\mathcal{L} d\tau = p_\varphi dq^\varphi$  — полный дифференциал, то для нахождения  $R$  можно использовать только уравнение (4.10). *Первый интеграл* уравнений (3.23) или (3.26) есть соотношение между  $p_\psi$  и  $q^\varphi$

$$F(p_\psi, q^\varphi) = c (\text{const}) \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.16)$$

которое удовлетворяется всеми решениями (3.23) или (3.26). Если известны  $n$  независимых первых интегралов, из которых могут быть определены  $p_\psi$  (принимая во внимание (3.25)) как функции  $q^\varphi$  и  $n$  констант интегрирования  $c_\lambda$ , мы получаем уравнения вида

$$p_\psi = f_\psi(q^\varphi, c_\lambda) \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.17)$$

и эти уравнения представляют  $n + 1$  первых интегралов частного вида. Из (3.25) следует, что один из этих интегралов зависит от остальных. Если  $p_\psi$  из (4.17) подставить в (4.10), то мы получим

$$dR = f_\psi(q^\varphi, c_\lambda) dq^\psi \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.18)$$

Это выражение является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда

$$\partial_{[\chi} f_{\psi]} = 0 \quad (\chi, \psi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.19)$$

При этом можно показать, что

$$\partial_{[\rho} f_{\lambda]} = 0 \quad (4.20)$$

является следствием

$$\partial_{[\mu} f_{\lambda]} = 0. \quad (4.21)$$

Действительно, из (3.26) и (4.17) мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\chi}}{\partial q^{\omega}} \overset{\circ}{q}^{\omega} &= \overset{\circ}{f}_{\chi} = - \frac{\partial \mathcal{E} (f_{\psi}, q^{\psi})}{\partial q^{\chi}} = \frac{\partial \mathcal{E} (f_{\psi}, q^{\psi})}{\partial f_{\psi}} \frac{\partial f_{\psi}}{\partial q^{\chi}} = \\ &= \overset{\circ}{q}^{\psi} \frac{\partial f_{\psi}}{\partial q^{\chi}} \quad (\varphi, \psi, \chi, \omega = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.22)$$

или

$$\overset{\circ}{q}^{\chi} \partial_{[\chi} f_{\chi]} + \overset{\circ}{q}^{\rho} \partial_{[\rho} f_{\chi]} = 0 \quad (\chi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.23)$$

что и доказывает предложение.

Если мы запишем

$$\Phi_{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} p_{\psi} - f_{\psi}(q^{\psi}, c_{\lambda}) = 0 \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.24)$$

то уравнения (4.19) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} [\varphi_{\chi}, \Phi_{\psi}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varphi_{\chi}}{\partial p_{\varphi}} \frac{\partial \Phi_{\psi}}{\partial q^{\psi}} - \frac{\partial \varphi_{\chi}}{\partial q^{\psi}} \frac{\partial \Phi_{\psi}}{\partial p_{\varphi}} &= 0 \\ (\varphi, \psi, \chi = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.25)$$

и так же, как и выше, можно показать, например, что  $[\Phi_{\rho}, \Phi_{\psi}] = 0$  является следствием остальных уравнений, которые не содержат  $\varphi_{\rho}$ .

$[\varphi_{\chi}, \Phi_{\psi}]$  называется *скобкой Пуассона* двух функций  $\varphi_{\chi}$  и  $\Phi_{\psi}$ . Говорят, что две функции находятся в *инволюции*, если их скобка Пуассона исчезает. Если система уравнений  $\Phi_{\psi} = 0$  эквивалентна другой системе  $\psi_{\psi} = 0$  и если  $\varphi_{\psi}$  находятся в инволюции, то можно легко показать, что и  $\psi_{\psi}$  также находятся в инволюции. Относительно уравнений  $\Phi_{\psi} = 0$  также говорят, что они находятся в инволюции.

Условие интегрируемости выражений (4.18) может быть теперь сформулировано в более удобной форме.

*Чтобы  $dR$  было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы в первых интегралах с  $n$  константами интегрирования*

$$F_{\lambda}(p_{\psi}, q^{\psi}) = c_{\lambda} \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n) \quad (4.26)$$

были в инволюции, а это будет тогда и только тогда когда функции  $F_\lambda$  находятся в инволюции.

Если это условие выполнено, то функция  $R(q^\varphi, c_\lambda)$  может быть определена с помощью одной квадратуры.

Приведенный здесь метод интегрирования является приложением следующих теорем из теории уравнений в частных производных.

Если система уравнений первого порядка с  $n + 1$  независимыми переменными и одной неизвестной функцией

$$F_\chi \left( \frac{\partial R}{\partial q^\psi}, q^\varphi \right) = c_\chi = \text{const} \quad (\varphi, \psi, \chi = 0, 1, \dots, n) \quad (4.27)$$

удовлетворяет условию, что функции  $F_\chi$  находятся в инволюции, и если  $p_\psi$  найдены из вспомогательных уравнений

$$F_\chi(p_\psi, q^\varphi) = c_\chi \quad (\varphi, \psi, \chi = 0, 1, \dots, n) \quad (4.28)$$

как функции  $q^\varphi$  и  $c_\chi$  и подставлены в дифференциальную форму  $p_\psi dq^\psi$ , то она является полным дифференциалом и

$$R = \int p_\psi dq^\psi \quad (\psi = 0, 1, \dots, n) \quad (4.29)$$

есть решение (4.27), зависящее от  $n + 1$  констант  $c_\chi$ .

Действительно, в случае классической механики мы имеем уравнение (4.6)

$$\mathcal{H} \left( \frac{\partial R}{\partial q^\psi}, q^\varphi \right) = 0 \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.30)$$

а также в наиболее благоприятном случае  $n$  первых интегралов

$$F_\lambda(p_\psi, q^\varphi) = c_\lambda \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n), \quad (4.31)$$

из которых мы видим, что  $F_\lambda$  находятся в инволюции. Следовательно, необходимо только доказать, что  $F_\lambda$  находятся в инволюции с  $\mathcal{H}(p_\psi, q^\varphi)$ . Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} \frac{\partial F_\lambda}{\partial q^\varphi} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\varphi} \frac{\partial F_\lambda}{\partial p_\varphi} &= \overset{\circ}{q}^\varphi \frac{\partial F_\lambda}{\partial q^\varphi} + \overset{\circ}{p}^\varphi \frac{\partial F_\lambda}{\partial p^\varphi} = \\ &= \frac{dF_\lambda}{d\tau} = \frac{dc_\lambda}{d\tau} = 0 \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Но теперь виден также путь получения решения (4.30), которое зависит от  $n$  констант интегрирования, если первые

интегралы неизвестны. Прежде всего мы должны найти решение вспомогательного уравнения

$$[\mathcal{H}(p_\psi, q^\psi), F(p_\psi, q^\psi)] = 0 \quad (\psi = 0, 1, \dots, n). \quad (4.33)$$

Тогда, если выбрано некоторое решение  $F_1$ , то может быть получено решение системы

$$[\mathcal{H}, F] = 0, \quad [F_1, F] = 0. \quad (4.34)$$

и т. д. После  $n$  шагов мы приходим к системе в инволюции

$$\mathcal{H} = 0, \quad F_\lambda = c_\lambda, \quad (4.35)$$

и из этой системы решение (4.30), зависящее от  $c_\lambda$ , может быть найдено с помощью квадратур. Если заранее известны  $m$  первых интегралов в инволюции, то первые  $m$  шагов могут быть опущены. Возможен также случай, когда для одной из систем известно более чем одно решение. Это может привести к существенным упрощениям. Полная теория разработана С. Ли<sup>1)</sup>.

## 5. Частные случаи первых интегралов<sup>2)</sup>

Может случиться, что функция  $\mathcal{L}$  не зависит от одной из координат, например  $q^n$  (но может, однако, содержать  $\dot{q}^n$ ). Тогда согласно (3.24)  $\mathcal{H}$  также не зависит от  $q^n$ . В этом случае из однородных уравнений Лагранжа мы находим

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^n} = \overset{\circ}{p}_n = 0, \quad (5.1)$$

что следует также из второй группы однородных уравнений Гамильтона

$$\overset{\circ}{p}_n = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^n} = 0. \quad (5.2)$$

Отсюда мы имеем первый интеграл

$$p_n = c_n, \quad (5.3)$$

<sup>1)</sup> Подробное изложение и литературные ссылки см. в книге Схоутен и Кулк 1949.1.

<sup>2)</sup> Ср. Уиттекер 1917.1.

и если его подставить в остальные уравнения Гамильтона, то мы получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}'(p_i, q^h)}{\partial p_k} = \dot{q}^k, \quad \frac{\partial \mathcal{H}'(p_i, q^h)}{\partial q^k} = -\dot{p}_k, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{H}'(p_i, q^h) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}(p_i, c_n, q^k)$$

$$(h, i, k = 0, 1, \dots, n-1)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{H}(p_i, c_n, q^k)}{\partial c_n} = \dot{q}^n \quad (l, k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5.5)$$

(5.4) являются уравнениями Гамильтона в  $X_n$ , которое возникает в результате редуцирования пространства событий относительно конгруэнции координатных кривых  $q^n$ , т. е. если мы рассматриваем эти кривые как точки  $X_n$ , игнорируя координату  $q^n$  (ср. I, § 3). Это объясняет, почему в динамике координата, не входящая в  $\mathcal{L}$  (хотя ее производная может входить в  $\mathcal{L}$ ), часто называется «игнорируемой».

Уравнения (5.4) являются однородными уравнениями Гамильтона некоторой динамической задачи в этом  $X_n$ , а соответствующие уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q^k} = 0,$$

$$\mathcal{L}' \stackrel{\text{def}}{=} p_i \dot{q}^i - \mathcal{H}' = \mathcal{L}(q^h, \dot{q}^h, \dot{q}^n) - c_n \dot{q}^n \quad (5.6)$$

$$(h, i, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где  $\dot{q}^n$  выражены как функции  $q^h, \dot{q}^h$  и  $c_n$  с помощью (5.5) и (3.21).

Для каждого значения  $c_n$  мы имеем теперь в точности  $\infty^{2(n-1)}$  мировых линий в  $X_n$ , откуда всего их  $\infty^{2n-1}$ . Если

$$q^\varphi = f^\varphi(\tau) \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n) \quad (5.7)$$

— одна из этих мировых линий в  $X_{n+1}$ , то уравнения

$$q^h = f^h(\tau) \quad (h = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5.8)$$

описывают мировую линию в  $X_n$ , и из (5.5) следует, что уравнения

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad q^h &= f^h(\tau) & (h = 0, 1, \dots, n-1), \\ \text{(b)} \quad q^n &= f^n(\tau) + c, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где  $c$  — произвольная константа, представляют другую мировую линию в  $X_{n+1}$ . Следовательно, каждой мировой линии в  $X_n$  принадлежат  $\infty^1$  мировых линий в  $X_{n+1}$ , что согласуется с общим количеством  $\infty^{2n}$  мировых линий в  $X_{n+1}$ . Сверх того, мы видим, что две мировые линии в  $X_{n+1}$ , принадлежащие одной мировой линии в  $X_n$ , при пересечении с параметрическими кривыми  $q^n$  отсекают сегменты равной «длины» в единицах  $q^n$  (рис. 29).

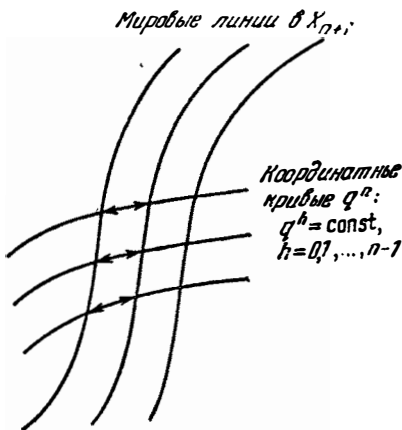


Рис. 29.

Процесс интегрирования упрощается теперь редукцией от  $n+1$  к  $n$ . Если мировые линии в  $X_n$  известны, то мировые линии в  $X_{n+1}$  могут быть найдены посредством квадратуры. Для этого  $p_i$  должны быть выражены через  $q^k$  и  $\dot{q}^k$  с помощью уравнения

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \tag{5.10}$$

После подстановки этих значений и значений  $q^h$  из (5.9a) в (5.5) мы получаем уравнение вида

$$\dot{q}^n = F(\tau), \tag{5.11}$$

из которого  $q^n$  может быть найдено квадратурой.

Если имеется большее число игнорируемых координат, например  $q^1, \dots, q^m$ , то задача сводится к задаче в  $X_{n-m+1}$ .



Преобразование  $\mathcal{L}$  в  $\mathcal{L}'$  называется преобразованием Рауса — Гельмгольца.

Может случиться, что  $q^0 = t$  является игнорируемой координатой. Тогда мы можем также вернуться к неоднородной

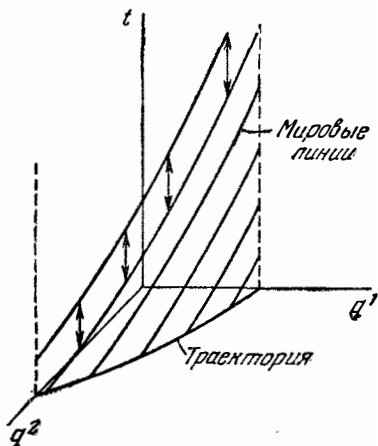


Рис. 30.

*Моперлюи* (установлено Эйлером и Лагранжем), или *принцип наименьшего действия*. Действительно,  $p_\lambda dq^\lambda$  имеет размерность  $[m^2 t^{-1}]$ , совпадающую с размерностью действия (кванта). Каждой траектории теперь принадлежат  $\infty^1$  мировых линий, которые преобразуются друг в друга трансляцией в  $t$ -направлении.

## УПРАЖНЕНИЯ

VIII.1. Положение однородной сферы задано координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  центра и эйлеровыми углами  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , как показано на рис. 31. Пусть  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — компоненты угловой скорости относительно осей, проходящих через центр параллельно осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Доказать, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_2 &= -\dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta, \\ \omega_3 &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1a)$$

трактовке, причем  $\tau = t$  и  $\mathcal{L} = L$  будут зависеть только от  $q^x$  и  $\dot{q}^x$ . Из (3.10b, c) следует, что  $dH/dt = 0$ , т. е.  $H = \text{const}$ . Так как

$$L dt = -H dt + p_\lambda dq^\lambda, \quad (5.12)$$

вариационное уравнение траекторий принимает теперь вид

$$\delta \int L dt = \delta \int p_\lambda dq^\lambda = 0. \quad (5.13)$$

Это уравнение известно как *вариационное уравнение*

Положим теперь  $q^1 = x$ ,  $q^2 = y$ ,  $q^3 = z$ ,  $q^4 = \varphi$ ,  $q^5 = \theta$ ,  $q^6 = \psi$  и введем неголономную систему ( $h$ ) ( $h = 1, \dots, 6$ ):

$$q^1 = x, \quad q^2 = y, \quad q^3 = z, \quad \dot{q}^4 = \omega_1, \quad \dot{q}^5 = \omega_2, \quad \dot{q}^6 = \omega_3. \quad (1\beta)$$

Доказать, что единственными неисчезающими компонентами  $\Omega_{ji}^h$  являются

$$\Omega_{56}^4 = \Omega_{64}^5 = \Omega_{45}^6 = -\frac{1}{2}, \quad (1\gamma)$$

и выписать уравнения Лагранжа для неголономной системы <sup>1)</sup>.

VIII.2. Если мы наложим на сферу из упр. 1 условие, что она движется по плоскости  $y = -R$  без скольжения, то имеются три уравнения:

$$y = 0, \quad \dot{x} + \omega_3 R = 0, \quad (2\alpha)$$

$$\dot{z} - \omega_1 R = 0.$$

Голономными координатами являются

$$q^1 = x, \quad q^2 = z, \quad q^3 = \varphi,$$

$$q^4 = \theta, \quad q^5 = \psi. \quad (2\beta)$$

Введем неголономную систему  $q^h$  ( $h = 1, \dots, 5$ )

$$q^1 = x, \quad q^2 = z, \quad q^3 = \varphi,$$

$$\dot{q}^4 = \dot{x} + \omega_3 R, \quad \dot{q}^5 = \dot{z} - \omega_1 R \quad (2\gamma)$$

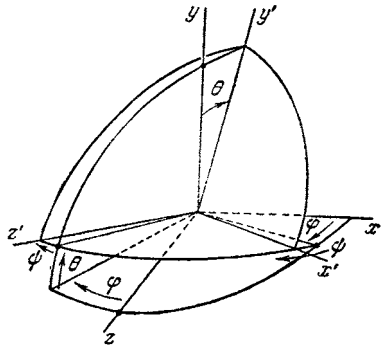


Рис. 31.

и докажем, что отличны от нуля лишь следующие компоненты  $\Omega_{ji}^h$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^4 &= -\frac{\cos \theta \cos \varphi}{R \sin \theta} & \Omega_{23}^4 &= -\frac{1}{2} \\ \Omega_{15}^4 &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{R \sin \theta} & \Omega_{24}^4 &= -\frac{\cos \theta \cos \varphi}{R \sin \theta} \\ \Omega_{35}^4 &= -\frac{1}{2} & \Omega_{45}^4 &= -\frac{\cos \theta \cos \varphi}{R \sin \theta} \\ \Omega_{12}^5 &= -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{R \sin \theta} & \Omega_{24}^5 &= -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{R \sin \theta} \\ \Omega_{13}^5 &= \frac{1}{2} & \Omega_{34}^5 &= \frac{1}{2} \\ \Omega_{15}^5 &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{R \sin \theta} & \Omega_{45}^5 &= -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{R \sin \theta}. \end{aligned} \quad (2\delta)$$

Выписать уравнения Лагранжа для неголономной системы <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Ср. Уиттекер 1917. 1. p.44.

<sup>2)</sup> Ср. более трудные упражнения Уиттекер 1917.1, p. 214.

VIII.3. Уравнения классической электродинамики (ср. VI, § 2)

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \quad (3\alpha)$$

или

$$m\ddot{\vec{x}} = -eE_1 - e\dot{y}B_{21} - e\dot{z}B_{31}, \text{ циклир. } 1, 2, 3; \quad (3\beta)$$

могут быть выведены из функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} (\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z}) + e\varphi_4, \quad (3\gamma)$$

если положить

$$E_1 = \partial_4 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_4, \quad \partial_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$B_{23} = \frac{1}{c} (\partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2); \text{ циклир. } 1, 2, 3 \quad (3\delta)$$

(ср. обозначения с  $F_{41}$  и  $F_{23}$  в IX, § 2). Соответствующая функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_1 - \frac{e}{c} \varphi_1 \right)^2 + \text{циклир.} - e\varphi_4. \quad (3\epsilon)$$

Приводя к однородной форме согласно VIII, § 3 и полагая

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}, \quad (3\zeta)$$

находим выражение для однородной функции Лагранжа (о обозначает дифференцирование по  $\tau$ )

$$\mathcal{L} = L\dot{t} = \frac{1}{2} \frac{m}{\dot{t}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} (\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} + \varphi_4 c\dot{t}). \quad (3\eta)$$

С релятивистской точки зрения (ср. IX, § 4) форма (3η) неудовлетворительна, так как первый член в правой части равенства не обладает четырехмерной инвариантностью. Но это совершенно естественно, так как мы отправлялись от классической механики и рассматривали  $m$  как константу, а не как  $m_0\dot{t}$ , т. е. как функцию скорости. Отсюда ясно, что невозможно получить релятивистскую форму  $\mathcal{L}$  только с помощью формального процесса приведения к однородной форме, описанного в VIII, § 3.

Доказать, что четырехмерная форма  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = -Qm\dot{c}^2 + \frac{e}{c} (\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} + \varphi_4 c\dot{t}), \quad (3\theta)$$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} (= I) \quad (3\iota)$$

дает правильное уравнение и что четвертое из этих уравнений выражает закон сохранения энергии (ср. IX, 4.19b). Из этого  $\mathcal{L}$  мы получаем

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c} \Phi_1; \text{ цикл. } 1, 2, 3,$$

$$p_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = mc + \frac{e}{c} \Phi_4. \quad (3\kappa)$$

Вывести соотношение Гамильтона

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + p_1\dot{x} + p_2\dot{y} + p_3\dot{z} + p_4\dot{t} = 0 \quad (3\lambda)$$

и дополнительно доказать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} Q m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 c^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_0 c^2 - \frac{1}{2 m_0} \left[ -\left(p_1 - \frac{e}{c} \Phi_1\right)^2 - \text{цикл.} + \left(p_4 - \frac{e}{c} \Phi_4\right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

также является возможной формой соотношения Гамильтона.

VIII. 4. Если  $\overset{\circ}{q}^\Phi$  рассматривать как функции  $q^\Psi$ , то  $p_\lambda$  также являются функциями  $q^\Psi$ . Положив теперь

$$\bar{\partial}_\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^\Psi} + \frac{\partial \overset{\circ}{q}^\chi}{\partial q^\Psi} \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{q}^\chi} \quad (\varphi, \psi, \chi = 0, 1, \dots, n), \quad (4\alpha)$$

доказать, что уравнения Лагранжа (3.23) эквивалентны уравнениям

$$2q^\Psi \bar{\partial}_{[\Psi} p_{\Phi]} = 0 \quad (\varphi, \psi = 0, 1, \dots, n) \quad (4\beta)$$

или

$$D_L p_\Phi = 0 \quad (\varphi = 0, 1, \dots, n), \quad (4\gamma)$$

где  $D_L$  — символ производной Ли относительно поля  $\overset{\circ}{q}^\Psi / \mathcal{L}^1$ . Если  $\overset{\circ}{q}^\Phi$  — неизвестные функции  $q^\Psi$ , то (4γ) представляет систему  $n$  независимых дифференциальных уравнений для  $n$  отношений  $\overset{\circ}{q}^\Phi$ .

<sup>1)</sup> Ср. ван Данциг 1934.5, р. 645.

## IX. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ<sup>1)</sup>

### 1. Введение

Тензорное исчисление не могло бы существовать в современной форме, если бы не было теории относительности. Связь между этими двумя ветвями математики и физики настолько обширна, что ее описание могло бы заполнить толстый учебник. Поэтому мы должны сделать выбор. После необходимых предварительных сведений мы даем в последнем параграфе краткое введение в релятивистскую термогидродинамику, так как этот предмет требует определенных навыков в тензорном формализме. Изложение целиком основано на работе ван Данцига. Хотя аффинно-инвариантная форма уравнений электродинамики не была неизвестной предшествующим авторам<sup>2)</sup>, ван Данциг впервые опубликовал в серии работ непротиворечивую теорию относительности, которая не зависит от метрической геометрии. Последние публикации этой серии были посвящены термогидродинамике. Здесь не представляется возможным дать обзор всей теории в целом. Поэтому мы ограничили себя феноменологической точкой зрения и упростили исходные предпосылки теории таким образом, чтобы оказалось возможным элементарное введение. Недостатком этого метода является то, что от первоначальной идеи ван Данцига о независимости метрической геометрии ничего не осталось и большая часть его результатов вообще не упоминается. Однако мы надеемся,

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Эйнштейн 1916.1; Лауэ 1920.1; Паули 1921.1; Эддингтон 1923.1; Фоккер 1929.1; ван Данциг 1934.3, 4, 5, 6; Мак-Витти 1956.1; Синг 1956.2; 1960.1, 3; Уилер 1960.2; Сб. «Новейшие проблемы гравитации 1961.5; Петров 1961.1; Фок 1961.2; Ландау и Лифшиц 1962.1.

<sup>2)</sup> Ср., например, Вейль 1921.2, р. 118.

что наш последний параграф, возможно, написанный слишком в краткой форме, побудит многих читателей ознакомиться с очень интересными, хотя и достаточно трудными, оригинальными работами ван Данцига, Синга и других авторов<sup>1)</sup>.

## 2. Уравнения электродинамики в инвариантной четырехмерной форме<sup>2)</sup>

Чтобы получить четырехмерную форму уравнений электродинамики (VI.2.5а — f) в вакууме в декартовых координатах, мы прежде всего введем следующее изменение в обозначениях:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & x^4 \stackrel{\text{def}}{=} ct, \\
 (b) \quad & F_{b4} = -F_{4b} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{c} E_b, \quad F_{cb} \stackrel{\text{def}}{=} B_{cb}, \\
 (c) \quad & \mathcal{F}^{4a} = -\mathcal{F}^{a4} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}^a, \quad \mathcal{F}^{ab} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \mathcal{H}^{ab}, \quad (2.1) \\
 (d) \quad & \hat{s}^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho}{c} u^a, \quad \hat{s}^4 \stackrel{\text{def}}{=} \rho \quad (a, b, c = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

Тогда мы получим:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23} = 0, \\
 (b) \quad & \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0, \\
 (c) \quad & \partial_4 \mathcal{F}^{41} + \partial_2 \mathcal{F}^{21} + \partial_3 \mathcal{F}^{31} = -\hat{s}^1, \\
 (d) \quad & \partial_1 \mathcal{F}^{14} + \partial_2 \mathcal{F}^{24} + \partial_3 \mathcal{F}^{34} = -\hat{s}^4, \\
 (e) \quad & \mathcal{F}^{41} = -\varepsilon_0 c F_{41}, \\
 (f) \quad & \mathcal{F}^{23} = \frac{1}{\mu_0 c} F_{23}; \\
 & \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}; \quad \text{циклер. } 1, 2, 3.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup> Ср. для библиографии ван Данциг 1940.2; Синг 1960.1, 3.

<sup>2)</sup> В этой главе мы используем  $h, i, j, k, l = 1, \dots, 4$  для декартовых координат и  $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau = 1, 2, 3, 4$  для общих прямолинейных или криволинейных координат в пространстве-времени. В пространстве мы используем  $a, b, c, d = 1, \dots, 3$  для декартовых координат и  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$  для общих прямолинейных или криволинейных координат.

Рассмотрим пространство  $E_4$  с координатами  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ,  $x^4 = ct$  и введем в нем фундаментальный тензор  $g_{ih}$  ( $i, h = 1, \dots, 4$ ) с пространственными компонентами  $g_{ab}$  ( $a, b = 1, 2, 3$ ):

$$g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1, \quad g_{33} = -1, \quad g_{44} = +1. \quad (2.3)$$

Тогда (2.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \partial_{[j} F_{ih]} = 0, \\ (b) \quad & \partial_j \mathcal{F}^{jh} = -\hat{s}^h, \\ (c) \quad & \mu_0 c \mathcal{F}^{hl} = \sqrt{g} g^{hj} g^{lk} F_{jk}, \quad g \stackrel{\text{def}}{=} |\text{Det}(g_{\lambda\kappa})|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эти уравнения имеют четырехмерную инвариантную форму, если  $F_{ih}$  рассматривать как ковариантный бивектор в  $R_4$ ,  $\mathcal{F}^{jh}$  — как контравариантную бивектор-плотность и  $\hat{s}^h$  — как контравариантную векторную плотность, обе веса  $+1$ . Следовательно, они могут быть записаны в общих прямолинейных или криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \partial_{[\mu} F_{\lambda\kappa]} = 0, \\ (b) \quad & \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\kappa} = -\hat{s}^\kappa, \\ (c) \quad & \mu_0 c \mathcal{F}^{\kappa\lambda} = \sqrt{g} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$F_{\mu\lambda}$  образован из  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ,  $\mathcal{F}^{\kappa\lambda}$  — из  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  и  $\hat{s}^\kappa$  — из  $\rho$  и  $\vec{u}$ .

### 3. Релятивистская кинематика

Уравнения (2.4) инвариантны относительно всех ортогональных преобразований  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $ct$  в  $R_4$ . Такое преобразование оставляет инвариантным нулевой конус

$$-x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2 = 0. \quad (3.1)$$

Если две полости этого конуса не меняются местами, то оно называется *преобразованием Лоренца*. Преобразование Лоренца оставляет инвариантной связь между прошедшим и будущим. Можно показать, что каждое преобразование Лоренца может быть получено обычным вращением или вращением с отражением в пространстве с последующим так называемым *специальным преобразованием Лоренца*, т. е.

преобразованием вида:

$$\begin{aligned}
 x' &= x \operatorname{ch} \varphi - ct \operatorname{sh} \varphi, & x &= x' \operatorname{ch} \varphi + ct' \operatorname{sh} \varphi, \\
 y' &= y, & y &= y', \\
 z' &= z, & z &= z', \\
 ct' &= -x \operatorname{sh} \varphi + ct \operatorname{ch} \varphi, & ct &= x' \operatorname{sh} \varphi + ct' \operatorname{ch} \varphi, \\
 & & \operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Первое преобразование не представляет интереса, так как мы хорошо знаем, что имеем право переходить от одной покоящейся в пространстве ортогональной системы координат

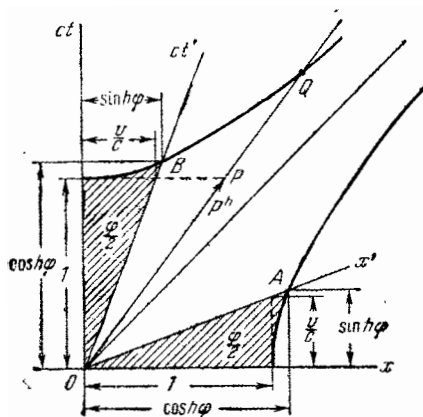


Рис. 32.

к другой, также покоящейся. Таким образом, мы должны рассмотреть только специальное преобразование Лоренца (3.2).

Из рис. 32 мы видим, что точка, находящаяся в покое относительно новой системы координат,  $x' = 0$ , имеет скорость  $v = c \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}$  относительно исходной системы координат. Отсюда

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{c}. \tag{3.3}$$

Из взаимности формул (3.2) следует, что точка, находящаяся в покое относительно первоначальной системы координат,



$x = 0$ , имеет скорость  $-c \frac{\text{sh } \varphi}{\text{ch } \varphi}$  относительно новой системы координат. Но в этой новой системе единицами длины и  $c \times$  времени являются отрезки  $OA$  и  $OB$ , отсекаемые двумя единичными гиперболами. Геометрия на  $(x, ct)$ -плоскости является не обычной, а *геометрией Минковского* с фундаментальным тензором  $g_{11} = -1$ ,  $g_{44} = +1$ . Линейный элемент в этой геометрии равен

$$c ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = c dt \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.4)$$

Преобразования (3.2) могут быть теперь записаны в форме:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x &= \frac{x'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ t' &= -\frac{x\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}, & t &= \frac{x'\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Длина и время измеряются масштабной линейкой и часами. Так как уравнения электродинамики инвариантны относительно преобразований Лоренца, то эталон длины и часы, основанные только на принципах электродинамики, будут показывать  $x$  и  $t$ , если они покоятся в исходной системе, и  $x'$  и  $t'$ , если они покоятся в новой системе. Отсюда, если мы производим измерения электромагнитным методом,  $x'$  и  $t'$  являются не только вспомогательными переменными, но и действительной длиной и действительным временем. Рассмотрим теперь под этим углом зрения точку, движущуюся со скоростью  $u$  относительно исходной системы. Эта точка описывает прямую мировую линию  $OP$  (рис. 32) и в момент времени 1 для  $(x, t)$ -наблюдателя находится в  $P$  с координатами относительно  $(x, t)$   $p^1 = u/c$ ,  $p^4 = 1$ . Координаты  $P$  относительно  $(x', t')$  равны

$$\begin{aligned} p^{1'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} p^1 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} p^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{u}{c} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p^{4'} &= -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} p^1 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} p^4 = \\ &= -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{u}{c} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда для  $(x', t')$ -наблюдателя (использующего электромагнитные измерительные инструменты) движущаяся точка имеет скорость

$$u' = c \frac{u/c - \beta}{-\beta(u/c) + 1} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}. \quad (3.7)$$

Это и есть релятивистский закон сложения скоростей. Если  $uv \ll c^2$ , то относительная скорость в координатах  $(x', t')$  стремится к классическому значению  $u - v$ . Но если  $u = c$ , то мы находим  $u' = c$ , а это значит, что свет имеет одинаковую скорость относительно обоих наблюдателей (опыт Майкельсона — Морлея).

Скорость  $v^a$  является трехмерным вектором, но если  $v < c$ , последний однозначно определяется четырехмерным единичным вектором его мировой линии  $v = \frac{dx^a}{c ds}$  с компонентами

$$v^1 = \frac{v^1}{c \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \dots, \quad v^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.8)$$

Этот вектор называется *вектором четырехмерной скорости*.

Если стержень длины  $l$  находится в покое относительно  $(x, t)$ , мировые линии его концов отсекают отрезок  $OB$  на оси  $x'$  (рис. 33). Но так как единица длины на оси  $x'$  равна  $OA'$ , то с точки зрения  $(x', t')$ -наблюдателя длина стержня равна  $\frac{l}{\text{ch } \varphi} = \sqrt{1 - \beta^2} l$ . Аналогичным образом, если стержень длины  $l$  покоится относительно  $(x', t')$ , то отсекаемый на оси  $x$  отрезок равен  $OB'$ , и, следовательно, длина с точки зрения  $(x, t)$ -наблюдателя равна

$$\frac{OB'}{OA} = \frac{\text{ch } \varphi - \text{sh } \varphi (\text{sh } \varphi / \text{ch } \varphi)}{1} = \frac{1}{\text{ch } \varphi} = \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.9)$$

Отсюда следует, что параллелепипед, образованный плоскостями  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ ,  $z = 0$ ,  $z = c$  и находящийся в покое относительно  $(x, t)$ , виден  $(x', t')$ -наблюдателем как параллелепипед с размерами  $a \sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $b$ ,  $c$  и объемом  $abc \sqrt{1 - \beta^2}$ . Если этот параллелепипед заполнен

электрическим зарядом с плотностью  $\rho$  для  $(x, t)$ -наблюдателя, то плотность для  $(x', t')$ -наблюдателя равна  $\rho/\sqrt{1-\beta^2}$ . Следовательно, заряд, имеющий в некоторой точке плотность  $\rho_0$  (собственную плотность) относительно наблюдателя, движущегося с той же скоростью, будет иметь в этой точке плотность

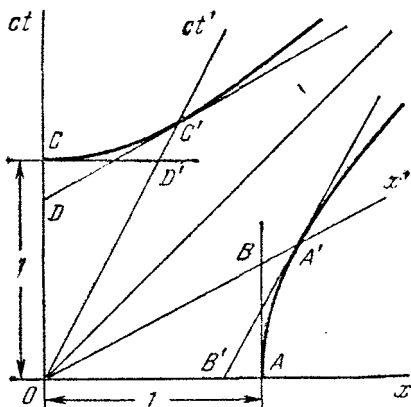


Рис. 33.

относительно наблюдателя, имеющего скорость  $v$  по отношению к заряду. Пусть  $(x, t)$ -наблюдатель расположил вдоль оси  $x$  цепочку (электромагнитных) часов, находящихся в покое с его точки зрения и показывающих нулевое время. Пусть  $(x', t')$ -наблюдатель сделал то же вдоль оси  $x'$ . Тогда  $(x, t)$ -часы будут показывать на линии  $CD$  время  $l/c$ , а  $(x', t')$ -часы будут показывать то же время на линии  $C'D'$  (рис. 33). Если теперь  $(x, t)$ -наблюдатель видит как  $(x', t')$ -часы, мировая линия которых проходит через  $O$ , так и свои собственные  $(x, t)$ -часы, то он не обнаружит никакой разницы в  $O$ , так как и те и другие часы будут показывать в этой точке нулевое время. Но в точке  $D$  одни из  $(x, t)$ -часов показывают время  $l/c$ , а  $(x', t')$ -часы показывают время

$$\frac{1}{c} \frac{OD}{OC'} = \frac{1}{c} \frac{l}{\text{ch } \varphi} = \frac{1}{c} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Аналогично  $(x', t')$ -наблюдатель, глядя на  $(x, t)$ -часы, мировая линия которых проходит через  $O$ , и на свои собственные  $(x', t')$ -часы, не обнаружит разницы в  $O$ , но в  $D'$   $(x, t)$ -часы покажут

$$\frac{1}{c} \frac{OD'}{OC} = \frac{1}{c} \sqrt{1-\beta^2},$$

а  $(x', t')$ -часы покажут  $l/c$ . Таким образом, оба наблюдателя

обнаружат, что часы другого наблюдателя идут слишком медленно в отношении  $\sqrt{1 - \beta^2}$ .

Однако в описанных опытах с электромагнитными эталоном и часами пока еще нет никакой теории относительности. Утверждение, что уравнения электродинамики в вакууме инвариантны относительно преобразований Лоренца, не является теорией. Оно выражает только хорошо проверенный физический факт, который был открыт Лоренцом задолго до опубликования Эйнштейном его постулатов специальной теории относительности. Но с точки зрения Лоренца  $x'$  и  $t'$  были искусственными вспомогательными переменными, а не действительным расстоянием или действительным временем. Предполагалось, что механические эталоны длины и часы удовлетворяют законам классической механики, а классическая механика инвариантна не относительно преобразований Лоренца, а относительно галилеевой группы, состоящей из вращений покоящейся системы координат и трансляций без ускорения. Согласно классической механике эталоны длины и часы будут отличать одну действительную длину и одно действительное время от всех искусственных расстояний и времен, эквивалентных для электромагнитных явлений. Таким образом, имеются две возможности. Или существуют два различных типа физических явлений: одни, инвариантные относительно группы Лоренца, а другие — относительно галилеевой группы, и не существует общей инвариантности, или же все явления инвариантны относительно группы Лоренца, и классическая механика лишь приближенно справедлива для скоростей, малых по сравнению со скоростью света  $c$ . Именно это последнее предположение является постулатом Эйнштейна в специальной теории относительности. С тех пор эксперименты во всех областях физики сделали этот постулат одним из наиболее обоснованных законов физики.

#### 4. Релятивистская динамика

Если мы принимаем этот постулат, то нам необходима другая динамика, отличная от классической динамики и содержащая ее как предельный случай при  $v/c \rightarrow 0$ . Исходным пунктом должны, конечно, быть уравнения электродинамики

$$\vec{K} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.1)$$

где  $e$  — заряд,  $\vec{v}$  — скорость заряда и  $\vec{K}$  — сила, с которой поле действует на заряд. Если мы введем обозначения (2.1в) в уравнения в компонентах

$$K^1 = eE^1 + e(v^2B^3 - v^3B^2); \text{ циклир. } 1, 2, 3, \quad (4.2)$$

то мы получим соотношения

$$K^1 = -ecF_{14} - e(v^2F_{12} - v^3F_{31}); \text{ циклир. } 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

которые должны быть составными частями четырехмерного инвариантного соотношения. Ясно, что в этом инвариантном соотношении вместо  $v^a$  должен появиться  $v^h$ . Исключая  $v^a$  с помощью (3.8), находим

$$K_1 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = ecv^2 F_{21} + ecv^3 F_{31} + ecv^4 F_{41}; \text{ циклир. } 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Если мы теперь введем  $K_4$ , положив

$$K_4 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = ecv^1 F_{14} + ecv^2 F_{24} + ecv^3 F_{34}, \quad (4.5)$$

то мы получим инвариантное уравнение

$$K_i = ecv^h F_{hi} \quad (h, i = 1, \dots, 4), \quad (4.6)$$

где  $K_i$  — четырехмерный вектор с компонентами

$$\begin{aligned} K_b &= K_b \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ K_4 &= ecv^a F_{a4} = -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} K_a v^a = \\ &= \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \sum_a K_a v^a \quad (a, b = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\sum_a K_a v^a$  представляет энергию, отданную полями  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  и приобретенную зарядом  $e$  в единицу времени. Следовательно,

сами по себе эта энергия, умноженная на  $1/c$ , и сила  $K_b$  не являются компонентами четырехмерного вектора, но они становятся таковыми лишь после умножения их на  $1/\sqrt{1-\beta^2}$ .

Так как (4.6) имеет инвариантную форму, оно может быть записано в общих прямолинейных или криволинейных координатах

$$K_\lambda = \frac{1}{I} e c v^\alpha F_{\alpha\lambda}. \quad (4.8)$$

Предположим теперь, что мы имеем не один заряд, а распределение зарядов с плотностью  $\rho$  для наблюдателя, относительно которого заряд имеет скорость  $v$ . Сила  $\hat{k}^a$ , действующая на базисный параллелепипед, является векторной плотностью веса  $+1$  и удовлетворяет уравнениям

$$\hat{k}_1 = -\rho c F_{14} - \rho(v^2 F_{12} - v^3 F_{31}); \quad \text{цикл. } 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

или согласно (3.8) и (3.10)

$$\hat{k}_1 = \rho_0 c v^h F_{hi}; \quad \text{цикл. } 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

Теперь мы должны ввести четвертую компоненту

$$\hat{k}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \rho_0 c v^a F_{a4} = -\frac{1}{c} \hat{k}_a v^a = \frac{1}{c} \sum \hat{k}^a v^a, \quad (4.11)$$

чтобы получить инвариантные уравнения

$$\hat{k}_i = \rho_0 c v^j F_{ji}, \quad (4.12)$$

или в общих прямолинейных или криволинейных координатах

$$\hat{k}_\lambda = \rho_0 c v^\alpha F_{\alpha\lambda}. \quad (4.12a)$$

$\hat{k}_\lambda$  — четырехмерная векторная плотность веса  $+1$ , а  $c\hat{k}_4$  — энергия, отданная полем зарядам в единице объема и за единицу времени. Отсюда, в отличие от трехмерной силы  $K_b$ , трехмерная плотность силы  $\hat{k}_b$  является компонентой четырехмерной величины.  $\rho_0$  является четырехмерной скалярной плотностью веса  $+1$ . Это также следует из (2.1d), если мы запишем это уравнение в инвариантной форме

$$\hat{s}^h = \rho_0 u^h, \quad (4.13)$$

или в общих прямолинейных или криволинейных координатах

$$\widehat{s}^x = \rho_0 u^x, \quad (4.14)$$

где  $u^x$  — четырехмерный вектор скорости заряда.

Мы теперь в состоянии получить релятивистское уравнение, которое должно заменить уравнение

$$K^a = m \frac{d^2 x^a}{dt^2} \quad (4.15)$$

классической механики. Вместо  $K^a$  это уравнение должно содержать  $K^h$ , а  $dt$  должно быть заменено инвариантным дифференциалом. Единственным инвариантным дифференциалом теперь является  $ds$ . Далее, новое уравнение должно сводиться к (4.15) при  $\beta = 0$ , т. е. для частицы, находящейся в покое относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Рассмотрим четырехмерное инвариантное уравнение

$$K^h = m_0 \frac{d^2 x^h}{ds^2}, \quad (4.16)$$

где  $m_0$  — подходящий множитель, который должен быть связан определенным образом с массой. Это уравнение распадается на

$$\begin{aligned} K^a &= K^a \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{dx^a}{dt \sqrt{1-\beta^2}}, \\ K^4 &= -\frac{1}{c \sqrt{1-\beta^2}} K_a \frac{dx^a}{dt} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Первое уравнение совпадает с (4.15), если  $\beta = 0$  и  $m_0 = m$ , а второе уравнение при этом обращается в тождество  $0 = 0$ . Если мы теперь положим

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.18)$$

то (4.17) может быть записано в форме:

$$\begin{aligned} (a) \quad K^a &= \frac{d}{dt} m \frac{dx^a}{dt}, \\ (b) \quad \sum K^a \frac{dx^a}{dt} &= \frac{d}{dt} m c^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так как эти уравнения справедливы для систем координат, которые покоятся относительно движущейся частицы, то в силу их четырехмерной инвариантности они также должны быть справедливы для всех систем координат с постоянными скоростями. Это доказывает, что (4.19) являются искомыми уравнениями релятивистской механики.  $m_0$  есть *масса покоя*, или *собственная масса*, т. е. масса относительно наблюдателя, движущегося с той же скоростью, а  $m$  уже не является константой и зависит от массы покоя и скорости относительно наблюдателя. Как и в классической механике, сила есть первая производная по времени от вектора количества движения  $m\mathbf{v}^a$ , но мы не можем теперь выносить  $m$  за знак  $d/dt$ . Второе уравнение представляется несколько неожиданным. В левой части равенства стоит работа, производимая приложенной силой, но в правой части стоит не  $\frac{1}{2}mv^2$ , как в классической механике, а  $mc^2$ . Если  $v \ll c$ , то

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots, \quad (4.20)$$

а это согласуется с классической формулой с точностью до слагаемого  $m_0 c^2$ . Отсюда мы видим, что в массе  $m_0$  всегда заключена энергия  $m_0 c^2$ . В наше время атомной бомбы это широко известно, но в период создания теории относительности это было очень важным открытием. Из факта, что  $m \rightarrow \infty$  при  $v \rightarrow c$ , немедленно следует, что никакая масса не может двигаться со скоростью света относительно любого наблюдателя.

Четырехмерный вектор  $m_0 \frac{dx^h}{ds}$  называется *вектором энергии-импульса*. Его ортогональные компоненты

$$\begin{aligned} m_0 \frac{dx^a}{ds} &= m_0 c \frac{v^a}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = m v^a = \text{импульс}, \\ m_0 \frac{dx^4}{ds} &= m_0 c \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c = \frac{\text{энергия}}{c}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Отсюда

$$\text{импульс} = m v^a = \frac{1}{c^2} m c^2 v^a = \frac{1}{c^2} \times (\text{поток энергии}).$$



Если материя распределена непрерывно и  $\hat{k}^a$  есть сила на базисный параллелепипед и если  $\mu$  — плотность массы, а  $d\tau$  — элемент объема, оба для наблюдателя, относительно которого масса в  $d\tau$  имеет скорость  $v^a$ , то согласно (4.19) мы имеем:

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{k}^a d\tau &= \frac{d}{dt} \mu v^a d\tau, \\ (b) \quad \sum_a \hat{k}^a v^a d\tau &= \frac{d}{dt} \mu c^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Если теперь  $\mu_0$  — плотность массы и  $\tau_0$  — объем, оба относительно наблюдателя, движущегося с той же скоростью, то мы имеем:

$$\begin{aligned} d\tau &= d\tau_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \mu_0 d\tau_0 &= \mu d\tau \sqrt{1 - \beta^2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

и, следовательно,

$$\mu_0 = \mu (1 - \beta^2). \quad (4.24)$$

Это преобразование отличается от преобразования плотности заряда (3.10), так как в случае плотности массы имеются две различные причины для изменения, во-первых, изменение массы и, во-вторых, изменение объема. Вводя  $\mu_0$  и  $ds$  в (4.22), получаем

$$\begin{aligned} \hat{k}^a &= \mu_0 \frac{d}{ds} \frac{dx^a}{ds}, \\ \hat{k}^4 &= \frac{1}{c} \sum \hat{k}^a v^a = \mu_0 \frac{d}{ds} \frac{dx^4}{ds}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

или

$$\hat{k}^h = \mu_0 \frac{d}{ds} \frac{dx^h}{ds}. \quad (4.26)$$

Это уравнение может быть записано в другой форме, если мы введем симметричную тензорную плотность

$$\mathcal{P}^hi = \mu_0 \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^i}{ds}. \quad (4.27)$$

Ее дивергенция равна

$$\begin{aligned}\nabla_i \mathcal{P}^{hi} &= \partial_i \mathcal{P}^{hi} = \mu_0 \frac{dx^i}{ds} \partial_i \frac{dx^h}{ds} + \frac{dx^h}{ds} \partial_i \mu_0 \frac{dx^i}{ds} = \\ &= \hat{k}^h + \frac{dx^h}{ds} \partial_i \mu_0 \frac{dx^i}{ds}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Можно теперь показать, что второй член в правой части (4.28) исчезает. Число частиц в элементе объема пропорционально  $\mu_0 d\tau$ , откуда для наблюдателя, движущегося с той же скоростью,  $\mu_0$  представляет не только плотность массы, но также и *плотность материи*. Но для покоящегося наблюдателя  $d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$ , и, следовательно для него плотность материи  $\mu_* \stackrel{\text{def}}{=} \mu_0 / \sqrt{1 - \beta^2} = \mu \sqrt{1 - \beta^2}$  отлична от плотности массы  $\mu$ . Так как материя не исчезает, уравнение неразрывности должно иметь место именно для этой плотности материи. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}0 &= \partial_a \mu_* v^a + \partial_t \mu_* = \partial_a \mu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{dx^a}{dt} + \partial_t \mu_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \\ &= \partial_a \mu_0 \frac{dx^a}{ds} + \partial_4 \mu_0 \frac{dx^4}{ds} = \partial_i \mu_0 \frac{\partial x^i}{ds}, \quad (4.29) \\ \partial_i &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}$$

и это доказывает, что действительно

$$\hat{k}^h = \partial_i \mathcal{P}^{hi} = \nabla_i \mathcal{P}^{hi}.\quad (4.30)$$

Так как это уравнение имеет инвариантную форму, оно может быть записано в общих прямолинейных или криволинейных координатах

$$\hat{k}^\kappa = \nabla_\lambda \mathcal{P}^{\kappa\lambda}.\quad (4.31)$$

$\mathcal{P}^{\kappa\lambda}$  называется *тензорной плотностью энергии-импульса материального континуума*. Ее ортогональные

компоненты:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \mathcal{P}_m^{ab} &= \mu_0 \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} = \mu v^a v^b, \\
 (b) \quad \mathcal{P}_m^{4a} &= \mathcal{P}_m^{a4} = \mu_0 \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^a}{ds} = c \mu v^a = \\
 &= c \times (\text{импульс в единице объема}) = \\
 &= \frac{I}{c} \mu c^2 v^a = \frac{I}{c} \times (\text{поток энергии}), \quad (4.32) \\
 (c) \quad \mathcal{P}_m^{44} &= \mu_0 \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds} = \mu c^2 = \\
 &= \text{энергия в единице объема.}
 \end{aligned}$$

Из (4.32b) мы видим, что в релятивистской механике не только движущаяся масса, но и движущаяся энергия имеет импульс.

В электромагнитном поле согласно (2.4a) мы имеем

$$F^{jh} \partial_i F_{jh} = -F^{jh} \partial_j F_{hi} - F^{jh} \partial_h F_{ij} = -2F^{jh} \partial_j F_{hi}. \quad (4.33)$$

Отсюда, так как  $\hat{k}^h$  есть сила, действующая на заряд в базисном параллелепипеде, мы находим согласно (2.4, 4.12, 13)

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_i &= c \hat{s}^h F_{hi} = -c (\partial_j \mathcal{F}^{jh}) F_{hi} = \\
 &= -c^2 \epsilon_0 \sqrt{g} (\partial_j F^{jh}) F_{hi} = \\
 &= -\partial_j c^2 \epsilon_0 \sqrt{g} F^{jh} F_{hi} + c^2 \epsilon_0 \sqrt{g} F^{jh} \partial_j F_{hi} = \\
 &= -\partial_j \left( c^2 \epsilon_0 \sqrt{g} F^{jh} F_{hi} + \frac{1}{4} c^2 \epsilon_0 \sqrt{g} A_i^j F^{kh} F_{kh} \right) = \\
 &= -\partial_j c \left( \mathcal{F}^{jh} F_{hi} + \frac{1}{4} A_i^j \mathcal{F}^{kh} F_{kh} \right) = \\
 &= -\partial_j \mathcal{P}_e^j{}_i = -\nabla_j \mathcal{P}_e^j{}_i. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

или в общих прямолинейных или криволинейных координатах

$$\hat{k}_\lambda = -\nabla_\mu \mathcal{P}_e^{\mu}{}_\lambda, \quad (4.35)$$

где

$$\mathcal{P}_e^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} c \left( \mathcal{F}^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} g^{\nu\kappa} + \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda} g^{\mu\kappa} \right) \quad (4.36)$$

называется *тензорной плотностью энергии-импульса* электромагнитного поля. Ее ортогональные компоненты

(ср. (2.1b, c) ):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_e^{11} &= -c\mathcal{F}^{12}F_{21} - c\mathcal{F}^{13}F_{31} - c\mathcal{F}^{14}F_{41} - \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{12}F_{12} - \\
 &\quad - \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{23}F_{23} - \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{31}F_{31} - \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{14}F_{14} - \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{24}F_{24} - \\
 &\quad - \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{34}F_{34} = \frac{1}{2}(-H^1B^1 + H^2B^2 + H^3B^3) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}(-D^1E^1 + D^2E^2 + D^3E^3), \\
 \mathcal{P}_e^{23} &= \mathcal{P}_e^{32} = -c\mathcal{F}^{21}F_{13} - c\mathcal{F}^{24}F_{43} = -H^3B^2 - D^2E^3 = \\
 &= -\frac{1}{c^2}B^3B^2 - \varepsilon_0E^2E^3, \\
 \mathcal{P}_e^{14} &= -c\mathcal{F}^{12}F_{24} - c\mathcal{F}^{13}F_{34} = -\frac{1}{c}H^3E^2 + \frac{1}{c}H^2E^3 = \\
 &= \frac{1}{c^2} (B^2E^3 - B^3E^2), \\
 \mathcal{P}_e^{41} &= -c\mathcal{F}^{42}F_{21} - c\mathcal{F}^{43}F_{31} = -cD^2B^3 + cD^3B^2 = \\
 &= c\varepsilon_0(B^2E^3 - B^3E^2) = \mathcal{P}_e^{14}, \\
 \mathcal{P}_e^{44} &= c\mathcal{F}^{41}F_{14} + c\mathcal{F}^{42}F_{24} + c\mathcal{F}^{43}F_{34} + \\
 &\quad + \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{12}F_{12} + \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{23}F_{23} + \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{31}F_{31} + \\
 &\quad + \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{14}F_{14} + \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{24}F_{24} + \frac{1}{2}c\mathcal{F}^{34}F_{34} = \\
 &= \frac{1}{2}(D^1E^1 + D^2E^2 + D^3E^3) + \frac{1}{2}(B^1H^1 + B^2H^2 + B^3H^3).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$c\mathcal{P}_e^{14}$  есть вектор Умова — Пойтинга, а  $\mathcal{P}_e^{44}$  — энергия поля в единице объема. Четвертая компонента векторной плотности

$$\hat{k}^h = -\partial_i \mathcal{P}_e^{ih} \quad (h, i = 1, 2, 3, 4), \tag{4.38}$$

умноженная на  $-c$ , равна

$$\partial_b c\mathcal{P}_e^{b4} + \partial_e \mathcal{P}_e^{44} = -c\hat{k}^4, \tag{4.39}$$

а это уравнение имеет форму уравнения неразрывности для жидкости (ср. (VI.2.2))

$$\partial_b \hat{v}^b + \partial_t \mu = \hat{q}, \quad (4.40)$$

где  $\hat{v}^b$  — вектор потока плотности,  $\mu$  — плотность и  $\hat{q}$  — масса, поступающая извне в единицу объема за единицу времени. Далее, как мы видели,  $-c\hat{f}^4$  есть энергия, полученная полем в единице объема и за единицу времени, а  $\mathcal{P}^{44}$  — плотность энергии. Отсюда  $c\mathcal{P}^{b4}$  есть векторная плотность потока энергии. Обращаясь теперь к одной из оставшихся компонент

$$\partial_b \mathcal{P}^{b1} + \partial_t \frac{1}{c} \mathcal{P}^{41} = -\hat{k}^1, \quad (4.41)$$

мы видим, что это уравнение имеет ту же форму. Сила всегда есть первая производная по времени от импульса, и, следовательно,  $-\hat{k}^1$  представляет  $x$ -компоненту импульса, приобретенного полем в единице объема и за единицу времени. Соответственно  $\frac{1}{c} \mathcal{P}^{41} = \frac{1}{c} \mathcal{P}^{14}$  есть  $x$ -компонента импульса поля в единице объема, а  $\mathcal{P}^{b1}$  есть векторная плотность потока  $x$ -компоненты импульса. Отсюда также следует, что

$$\text{импульс} = \frac{1}{c^2} \times (\text{поток энергии}).$$

Из (4.30) и (4.38) следует, что для материального континуума

$$\nabla_i (\mathcal{P}_m^{hi} + \mathcal{P}_e^{hi}) = 0, \quad (4.42)$$

т. е. дивергенция общей тензорной плотности энергии-импульса материи и поля исчезает. Это уравнение выражает **закон сохранения импульса и энергии** в специальном случае непрерывного распределения материи. Действительно, согласно (4.30) и (4.38) импульс и энергия, отданные материей, приобретаются полем, и наоборот.

(4.42) может быть записано в инвариантной форме

$$\nabla_{\mu} \mathcal{P}^{\mu\kappa} = 0, \quad (4.43)$$

где  $\mathcal{P}^{\mu\kappa}$  — полная тензорная плотность энергии-импульса материи и электромагнитного поля. (4.43) справедливо в общих прямолинейных или криволинейных координатах. Это уравнение является мостом к общей теории относительности.

## 5. Гравитация

В классической механике гравитационные силы, действующие на точку массы  $I$ , могут быть получены из потенциала  $\Phi$  (ср. VIII. 3.1)

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = g^{ab} \partial_b \Phi, \quad (5.1)$$

и этот потенциал удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \Phi \stackrel{\text{def}}{=} -g^{cb} \partial_c \partial_b \Phi = 4\pi\gamma\mu, \quad (5.2)$$

где  $\mu$  — плотность массы, а

$$\gamma = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ г}^{-1} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-2} \quad (5.3)$$

— ньютоновская гравитационная константа. Основная идея общей теории относительности состоит в том, что пространство-время есть не  $R_4$ , а  $V_4$  и что масса, на которую действуют только гравитационные силы, всегда движется таким образом, что ее мировая линия является геодезической в  $V_4$ . Так как гравитационные силы зависят от распределения материи, это возможно лишь в том случае, если фундаментальный тензор  $g_{\lambda\kappa}$  в  $V_4$  целиком зависит от этого распределения.

Чтобы проверить, сможем ли мы получить уравнение (5.1) классической динамики при малых гравитационных силах и малых скоростях, мы предположим, что для некоторой системы координат  $(x)$   $g_{\lambda\kappa}$  имеют значения, мало отличающиеся от  $I$  и  $0$ :

$$g_{\lambda\kappa} \stackrel{0}{=} g_{\lambda\kappa}^* + \varepsilon_{\lambda\kappa}, \quad g_{\lambda\kappa}^* \stackrel{0}{=} \delta_{\lambda\kappa}^*, \quad \varepsilon_{\lambda\kappa} \ll 1. \quad (5.4)$$

Мы предположим также, что скорости масс малы по сравнению с  $c$  и что  $\partial_\nu \varepsilon_{\lambda\kappa}$  малы по сравнению с  $\partial_\nu \varepsilon_{\lambda\kappa}$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ). Тогда, пренебрегая членами высшего порядка малости, мы имеем

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} g_0^{\kappa\rho} (\partial_\mu \varepsilon_{\rho\lambda} + \partial_\lambda \varepsilon_{\rho\mu} - \partial_\rho \varepsilon_{\mu\lambda}) \quad (5.5)$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\lambda}{ds} &\stackrel{*}{=} \Gamma_{44}^{\kappa} \frac{d\xi^4}{ds} \frac{d\xi^4}{ds} = c^2 \Gamma_{44}^{\kappa} = \\ &= -\frac{1}{2} c^2 g_0^{\kappa\nu} \partial_\nu g_{44} \quad (\nu = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя эти значения в уравнения геодезических

$$\frac{d^2 \xi^\kappa}{ds^2} = -\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} \frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{d\xi^\mu}{ds}, \quad (5.7)$$

находим ( $\xi^4 = ct$ )

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 g^{\alpha\beta} \partial_\beta g_{44} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (5.8)$$

Но это уравнение действительно имеет форму (5.1) с  $\frac{1}{2} c^2 g_{44}$  в качестве потенциала.

Мы должны теперь найти связь между  $g_{\lambda\kappa}$  и распределением масс, которая заменит уравнение (5.2) классической механики. Так как масса есть форма энергии и так как энергия и импульс являются компонентами тензорной плотности энергии-импульса  $\mathcal{P}^{\lambda\kappa}$ , то эта тензорная плотность с обращаемой в нуль дивергенцией должна заменить в уравнениях плотность массы  $\mu$ . Таким образом, мы должны искать тензорную плотность веса  $+1$  с исчезающей дивергенцией, которая зависит от  $g_{\lambda\kappa}$  и его производных до второго порядка включительно. Согласно (V. 5.44) простейшей тензорной плотностью с этими свойствами является

$$\hat{G}^{\lambda\kappa} + \alpha \sqrt{g} g^{\lambda\kappa}, \quad (5.9)$$

где  $\alpha$  — произвольная константа. Если  $\hat{G}^{\lambda\kappa}$  равна с точностью до постоянного множителя  $\sqrt{g} g^{\lambda\kappa}$ , то  $V_n$  называется *пространством Эйнштейна*. Можно показать, что в таком пространстве скалярная кривизна постоянна. Константа  $\alpha$

в (5.9) имеет значение только в исследованиях, связанных со свойствами пространства-времени  $V_4$  в целом<sup>1)</sup>. Это показывает, что она очень мала и может быть положена равной нулю, если мы рассматриваем только движение тел нашей солнечной системы. Тогда мы получим уравнение

$$\hat{G}^{\lambda\lambda} = \frac{k}{c^2} \mathcal{P}^{\lambda\lambda}, \quad (5.10)$$

где  $k$  — новая гравитационная постоянная.

Чтобы определить эту постоянную, мы предположим, что  $\mathcal{P}^{\lambda\lambda}$  заданы уравнением (4.27). Далее, мы вернемся к слу-

чаю (5.4), когда  $g_{\lambda\kappa}$  мало отличается от  $g_{\lambda\kappa}^0$  и мы имеем дело с малыми скоростями и малыми производными от  $\varepsilon_{\lambda\kappa}$  в временном направлении. Тогда можно пренебречь всеми компонентами  $\mathcal{P}^{\lambda\kappa}$  по сравнению с  $\mathcal{P}^{44} = \mu c^2$ . Из (5.10) и (V. 5.36) следует, что

$$K_{\mu\lambda} = \frac{k}{c^2} \left( P_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} P g_{\mu\lambda} \right), \quad P \stackrel{\text{def}}{=} P_{\lambda\kappa} g^{\lambda\kappa}, \quad (5.11)$$

откуда

$$K_{44} = \frac{k}{c^2} \left( P_{44} - \frac{1}{2} P g_{44} \right) = \frac{1}{2} \frac{k}{c^2} P_{44} = \frac{1}{2} k \mu. \quad (5.12)$$

Но, с другой стороны, согласно (V. 5.28) мы имеем

$$\begin{aligned} K_{44} &= 2\partial_{[\alpha} \Gamma_{4]4}^{\alpha} + 2\Gamma_{[\alpha|\rho]4}^{\alpha} \Gamma_{4]4}^{\rho} = \partial_{\alpha} \Gamma_{44}^{\alpha} = \partial_{\gamma} \Gamma_{44}^{\gamma} = \\ &= -\frac{1}{2} g^{\gamma\beta} \partial_{\gamma} \partial_{\beta} g_{44} = \frac{1}{2} \Delta g_{44} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Отсюда

$$\Delta \frac{1}{2} c^2 g_{44} = \frac{1}{2} k c^2 \mu, \quad (5.14)$$

и согласно (5.2)

$$k = \frac{8\pi\gamma}{c^2} = \frac{8\pi}{c^2} 6,7 \cdot 10^{-8} = 1,87 \cdot 10^{-27} \text{ э}^{-1} \text{ см}. \quad (5.15)$$

<sup>1)</sup> О роли этой константы в космологических проблемах см., например, Мак-Витти, 1956.1; Новейшие проблемы гравитации 1961.5, стр. 38. — *Прим. перев.*



Интегрируя (5.10), возможно найти линейный элемент пространства-времени в окрестности мировой линии центральной массы, например, Солнца. Так как на других мировых линиях материи нет,  $G_{\lambda\mu}$  и  $K_{\lambda\mu}$  исчезают во всех точках этой мировой линии. Следовательно, пространство-время является не общим  $V_4$ , а  $V_4$  с исчезающим тензором Риччи (ср. V, § 5).

Так как пространство-время в окрестности мировой линии Солнца неевклидово, возникают малые отклонения в движении планет и распространении лучей света. В той мере, в какой эти отклонения могут быть измерены, они хорошо согласуются с астрономическими наблюдениями.

## 6. Релятивистская гидродинамика<sup>1)</sup>

Рассмотрим материю, состоящую из частиц одинаковых размеров и массы, и будем пренебрегать эффектами радиации. Пусть  $d\tau$  есть часть пространства, а  $d\sigma$  — элемент ее граничной поверхности. Предполагаем, что  $d\tau$  мала, но содержит большое число частиц. Если в некоторый момент это число равно  $N^{d\tau}$  и если  $N^{d\tau} = \hat{R} d\tau$ , то с макроскопической точки зрения  $\hat{R}$  можно рассматривать как *плотность частиц* материи. Если известна скорость  $v^\alpha$  каждой частицы, то мы можем подсчитать среднюю скорость  $\dot{u}^\alpha$  частиц в  $d\tau$ <sup>2)</sup>. Тогда  $\hat{R}\dot{u}^\alpha$  есть *средняя плотность потока частиц*. Мы пишем  $\mathcal{E} d\tau$  для полной энергии, кинетической и потенциальной, всех частиц в  $d\tau$ . Предполагается, что потенциальная энергия зависит только от координат частиц в пространстве и не зависит от их скоростей.  $\mathcal{E}$  есть *средняя энергия в базисном параллелепипеде*. Аналогично мы пишем  $\mathcal{M}^\alpha d\tau$  для полного импульса всех частиц в  $d\tau$ . Тогда  $\mathcal{M}^\alpha$  есть *средний импульс в базисном параллеле-*

<sup>1)</sup> Ср. также Синг 1934.7; 1937.3; 1956.2; ван-Данциг 1934.3, 4, 5, 6; 1939.5; 1940.2.

<sup>2)</sup> Мы пишем здесь  $\dot{u}^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}$ , чтобы сохранить то же обозначение, что и в гл. VII. Тогда  $u^\alpha$  можно рассматривать как малое перемещение.

*нипеди.* Очевидно,  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{M}^\alpha$  являются скалярной плотностью и векторной плотностью, обе веса  $+1$ .

Рассмотрим теперь инфинитезимальный тетраэдр, находящийся в покое с гранями  $\hat{f}_\beta d\sigma$ ,  $\hat{f}_\beta^1 d\sigma$ ,  $\hat{f}_\beta^2 d\sigma$  и  $\hat{f}_\beta^3 d\sigma$ , ориентированными изнутри наружу. Тогда мы имеем тождество (ср. (VII. 2.1))

$$-\hat{f}_\beta d\sigma = \hat{f}_\beta^1 d\sigma + \hat{f}_\beta^2 d\sigma + \hat{f}_\beta^3 d\sigma \quad (\beta = 1, 2, 3). \quad (6.1)$$

Если обозначить через  $E d\sigma$ ,  $E^1 d\sigma$ ,  $E^2 d\sigma$ ,  $E^3 d\sigma$  и  $p^\alpha d\sigma$ ,  $p^\alpha^1 d\sigma$ ,  $p^\alpha^2 d\sigma$ ,  $p^\alpha^3 d\sigma$  поступающие извне через границу энергию и импульс, то изменениями энергии и импульса в  $d\tau$  можно пренебречь, так как они имеют третий порядок малости относительно дифференциалов координат. Тогда из закона сохранения энергии и импульса следует, что (ср. (VII. 2.2))

$$\begin{aligned} -E d\sigma &= E^1 d\sigma + E^2 d\sigma + E^3 d\sigma, \\ -p^\alpha d\sigma &= p^\alpha^1 d\sigma + p^\alpha^2 d\sigma + p^\alpha^3 d\sigma \quad (\alpha = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6.2)$$

для *любого* выбора границы. Следовательно (ср. (VII. 2.3)), существует векторная плотность  $\mathcal{E}^\alpha$  такая, что

$$E = -\mathcal{E}^\alpha \hat{f}_\alpha, \quad (6.3)$$

и существует тензорная плотность  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  такая, что

$$p^\alpha = \mathcal{J}^{\alpha\beta} \hat{f}_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (6.4)$$

$\mathcal{E}^\alpha$  есть средняя плотность потока энергии. Она равна сумме энергия  $\times$  скорость всех частиц в малом объеме, отнесенной к единице объема, и, следовательно, не равна произведению  $\mathcal{E}^\alpha u^\alpha$  двух средних значений. —  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  есть средняя плотность потока импульса. Она не равна произведению  $\mathcal{M}^{\alpha\beta} u^\beta$  двух средних значений.  $p^\alpha d\sigma$  есть сила, с которой внешняя материя действует через  $\hat{f}_\beta d\sigma$  на материю, находящуюся внутри. Здесь имеется существенная разница со случаем непрерыв-

ного распределения материи. Если материя распределена непрерывно, мы можем перейти к пределу при  $d\tau \rightarrow 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{u}^\alpha &\rightarrow v^\alpha, & \mathcal{E} &\rightarrow \mu c^2, & \mathcal{E}^\alpha &\rightarrow \mu c^2 v^\alpha = \mathcal{E} v^\alpha, \\ \mathcal{M}^\alpha &\rightarrow \mu v^\alpha, & \mathcal{J}^{\alpha\beta} &\rightarrow \mu v^\alpha v^\beta = \mathcal{M}^\alpha v^\beta \end{aligned}$$

(ср. § 2). Однако в нашем случае  $d\tau$  всегда должно иметь ограниченный снизу размер и содержать достаточно большое количество частиц.

До сих пор мы рассматривали границу, находящуюся в покое. Рассмотрим теперь границу, точки которой имеют скорость  $w^\alpha$ , зависящую, вообще говоря, от  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Поток энергии и импульса за единицу времени через движущийся элемент  $\hat{f}_\beta d\sigma$  в направлении, противоположном его ориентации, равен

$$\begin{aligned} p^\alpha d\sigma &= (\mathcal{J}^{\alpha\beta} + \mathcal{M}^\alpha w^\beta) \hat{f}_\beta d\sigma, \\ E d\sigma &= (-\mathcal{E}^\beta + \mathcal{E} w^\beta) \hat{f}_\beta d\sigma \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Как и ранее,  $p^\alpha d\sigma$  есть сила, с которой материя, находящаяся с внешней стороны  $\hat{f}_\beta d\sigma$ , действует на материю, находящуюся с внутренней стороны  $\hat{f}_\beta d\sigma$ . Вместо симметричного тензора напряжений  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  мы получили тензор напряжений  $\mathcal{J}^{\alpha\beta} + \mathcal{M}^\alpha w^\beta$ , который, вообще говоря, не является симметричным.

Чтобы записать (6.5) в четырехмерной инвариантной форме, введем в пространстве-времени ортогональные координаты. Напомним, что  $p^\alpha d\sigma dt$  есть импульс, а  $\frac{1}{c} E d\sigma dt$  — энергия, деленная на  $c$ , и, следовательно, эти величины могут рассматриваться как компоненты вектора энергии-импульса. Ковариантная векторная плотность  $\hat{f}_b d\sigma$ , являющаяся частью плоскости с внешней ориентацией, описывает в пространстве-времени за время  $dt$  часть  $R_3$  и индуцирует в нем внешнюю ориентацию. Таким образом, описываемая фигура является четырехмерной ковариантной векторной плотностью  $\mathcal{B}_i d\omega$  в  $R_4$ . Далее,  $\hat{f}_b d\sigma$  есть пересечение  $\mathcal{B}_i d\omega$  с пространством, откуда

$$\mathcal{B}_b d\omega = \hat{f}_b d\sigma dt \quad (b = 1, 2, 3). \quad (6.6)$$

Так как направление четырехмерного вектора скорости  $\omega^h$  лежит в  $\mathcal{R}_i d\omega$ , мы имеем

$$\frac{\omega^a}{c} \mathcal{R}_a d\omega + \mathcal{R}_4 d\omega = \frac{\omega^a}{c} \hat{f}_a d\sigma dt + \mathcal{R}_4 d\omega = 0, \quad (6.7)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{R}_4 d\omega = -\frac{\omega^a}{c} \hat{f}_a d\sigma dt \quad (a = 1, 2, 3). \quad (6.8)$$

Мы использовали здесь обозначение гл. VII для элемента поверхности  $\hat{f}_b d\sigma$ , где  $d\sigma$  — площадь, измеряемая в  $\mathcal{M}^2$ . Но в теории относительности длина стержня или площадь в  $\mathcal{R}_2$  неодинаковы для наблюдателей с различными скоростями. Отсюда, для того чтобы  $\hat{f}_b$  и  $\mathcal{R}_i$  имели определенный смысл, необходимо соглашение относительно способа измерения  $d\sigma$  и  $d\omega$ . Мы принимаем, что  $d\sigma$  есть собственная площадь, т. е. площадь, измеренная наблюдателем, находящимся в покое относительно поверхностного элемента, а  $d\omega$  измеряется наблюдателем, мировая линия которого лежит в  $\mathcal{R}_4$ . Длина мировой линии, описываемая некоторой точкой, принадлежащей  $\hat{f}_b d\sigma$ , за время  $dt$ , равна

$$ds = dt \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (6.9)$$

Это есть время, измеряемое наблюдателем, находящимся в покое относительно элемента поверхности. Оно называется собственным временем, и мы имеем

$$d\omega = d\sigma ds = d\sigma dt \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (6.10)$$

Можно избежать затруднений, если всегда использовать только выражения  $\hat{f}_b d\sigma$  и  $\mathcal{R}_i d\omega$  и не употреблять никогда отдельно  $\hat{f}_b$  и  $\mathcal{R}_i$ . Тогда не требуется никакого соглашения, но смысл будут иметь лишь полные выражения  $\hat{f}_b d\sigma$  и  $\mathcal{R}_i d\omega$ , а  $\hat{f}_b$ ,  $\mathcal{R}_i d\sigma$  или  $d\omega$  в отдельности вообще не имеют смысла. Ван Данциг следует этому правилу и отмечает то обстоятельство, что смысл имеют только  $\hat{f}_b d\sigma$  и  $\mathcal{R}_i d\omega$ , записывая их в виде  $\hat{f}_b^{d\sigma}$  и  $\mathcal{R}_i^{d\omega}$ . Это обозначение, конечно, является очень удобным, так как во многих случаях способ

измерения  $d\sigma$  и  $d\omega$  не имеет значения, но мы не будем его использовать, так как мы хотим иметь в этой главе те же обозначения, что и в других.

Вводя значения (6.6,8) в (6.5), мы получаем в декартовых координатах

$$\begin{aligned} p^a d\sigma dt &= \mathcal{J}^{ab} \mathcal{F}_b d\omega - c\mathcal{M}^a \mathcal{F}_4 d\omega, \\ \frac{1}{c} E d\sigma dt &= -\frac{1}{c} \mathcal{E}^b \mathcal{F}_b d\omega - \mathcal{E} \mathcal{F}_4 d\omega \end{aligned} \quad (6.11)$$

( $a, b = 1, 2, 3$ ).

Если мы теперь положим:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{ab} &\stackrel{\text{def}}{=} -\mathcal{J}^{ab}, & M^a d\omega &\stackrel{\text{def}}{=} p^a d\sigma dt, \\ \mathcal{P}^{a4} &\stackrel{\text{def}}{=} c\mathcal{M}^a, & M^4 d\omega &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} E d\sigma dt, \\ \mathcal{P}^{4b} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \mathcal{E}^b, \\ \mathcal{P}^{44} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (a, b = 1, 2, 3), \quad (6.12)$$

то уравнения (6.11) принимают форму

$$M^h d\omega = -\mathcal{P}^{hi} \mathcal{F}_i d\omega \quad (h, i = 1, \dots, 4). \quad (6.13)$$

Здесь  $M^h d\omega$  — вектор энергии-импульса, ортогональные компоненты которого представляют импульс и энергию, протекающие через  $\hat{f}_b d\sigma$  извне внутрь за время  $dt$ .

Чтобы определить тепловой поток проводимости через элемент поверхности, мы положим  $\omega^b = \dot{u}^b$ . Тогда полное количество материи, протекающей через  $\hat{f}_b d\sigma$ , равно нулю, и перенос тепла осуществляется только за счет *проводимости*, а не за счет *конвекции*. Энергия, проходящая за время  $dt$  через  $\hat{f}_b d\sigma$  в направлении, противоположном его ориентации, равна

$$(-\mathcal{E}^b + \mathcal{E} \dot{u}^b) \hat{f}_b d\sigma dt. \quad (6.14)$$

Но часть этой энергии есть работа, производимая силой  $p^a d\sigma$  за время  $dt$ . Эта часть равна

$$-p^a \dot{u}_b d\sigma dt = (-\mathcal{J}^{ab} \dot{u}_a - \mathcal{M}^a \dot{u}_a \dot{u}^b) \hat{f}_b d\sigma dt. \quad (6.15)$$

Остающаяся часть

$$\begin{aligned} & (-\mathcal{E}^b + \mathcal{E}\dot{u}^b + \mathcal{J}^{ab}\dot{u}_a + \mathcal{M}^a\dot{u}_a\dot{u}^b) \hat{f}_b d\sigma dt = \\ & = \left( -c\mathcal{P}^{Ab} + \mathcal{P}^{44}\dot{u}^b - \mathcal{P}^{ab}\dot{u}_a + \frac{1}{c}\mathcal{P}^{a4}\dot{u}_a\dot{u}^b \right) \hat{f}_b d\sigma dt \quad (6.16) \end{aligned}$$

является потоком тепла за время  $dt$  за счет проводимости через  $\hat{f}_b d\sigma$  в направлении, противоположном его ориентации. Отсюда векторная плотность потока тепла есть

$$\hat{Q}^a = c\mathcal{P}^{4a} - \mathcal{P}^{44}\dot{u}^a + \mathcal{P}^{ba}\dot{u}_b - \frac{1}{c}\mathcal{P}^{b4}\dot{u}_b\dot{u}^a. \quad (6.17)$$

Чтобы получить дальнейшие выводы из (6.17), мы вернемся назад к уравнениям (6.5), которые могут быть теперь записаны в виде

$$\begin{aligned} p^a d\sigma &= - \left( \mathcal{P}^{ab} - \frac{1}{c}\mathcal{P}^{a4}w^b \right) \hat{f}_b d\sigma, \\ \frac{1}{c}E d\sigma &= - \left( \mathcal{P}^{Ab} - \frac{1}{c}\mathcal{P}^{44}w^b \right) \hat{f}_b d\sigma. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Согласно теореме Стокса мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} p^a d\sigma &= - \int_{\tau} \left( \partial_b \mathcal{P}^{ab} - \frac{1}{c}\partial_b \mathcal{P}^{a4}w^b \right) d\tau, \\ \frac{1}{c} \int_{\sigma} E d\sigma &= - \int_{\tau} \left( \partial_b \mathcal{P}^{4b} - \frac{1}{c}\partial_b \mathcal{P}^{44}w^b \right) d\tau. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Интегралы в левых частях представляют деленное на  $c$  приращение в  $\tau$  импульса и энергии за единицу времени

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} p^a d\sigma &= \frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathcal{M}^a d\tau = \int_{\tau} \left( \frac{d}{dt} \mathcal{M}^a \right) d\tau + \int_{\tau} \mathcal{M}^a \frac{d}{dt} d\tau, \\ \frac{1}{c} \int_{\sigma} E d\sigma &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathcal{E} d\tau = \frac{1}{c} \int_{\tau} \left( \frac{d}{dt} \mathcal{E} \right) d\tau + \frac{1}{c} \int_{\tau} \mathcal{E} \frac{d}{dt} d\tau, \end{aligned} \quad (6.20)$$

причем

$$\frac{d}{dt} d\tau = \partial_b w^b d\tau. \quad (6.21)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} p^a d\sigma &= \int_{\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{M}^a}{\partial t} + w^b \partial_b \mathcal{M}^a + \mathcal{M}^a \partial_b w^b \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left( \partial_4 \mathcal{P}^{a4} + \frac{1}{c} \partial_b \mathcal{P}^{a4} w^b \right) d\tau, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{\sigma} \mathcal{E} d\sigma &= \frac{1}{c} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + w^b \partial_b \mathcal{E} + \mathcal{E} \partial_b w^b \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left( \partial_4 \mathcal{P}^{44} + \partial_b \mathcal{P}^{44} w^b \right) d\tau \quad (a, b = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Сравнивая (6.19) и (6.22), мы видим, что

$$\begin{aligned} \partial_b \mathcal{P}^{ab} + \partial_4 \mathcal{P}^{a4} &= 0, \\ \partial_b \mathcal{P}^{4b} + \partial_4 \mathcal{P}^{44} &= 0 \quad (a, b = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (6.23)$$

или

$$\partial_i \mathcal{P}^{hi} = 0 \quad (h, i = 1, \dots, 4). \quad (6.24)$$

Если имеются внешние воздействия (например, электромагнитного поля), то вместо (6.20) мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} p^a d\sigma + \int_{\tau} \hat{k}^a d\tau &= \frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathcal{M}^a d\tau, \\ \frac{1}{c} \int_{\sigma} E d\sigma + \int_{\tau} \hat{k}^4 d\tau &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathcal{E} d\tau, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где  $\hat{k}^a$  представляет приращение импульса, а  $c\hat{k}^4$  — приращение энергии в единице объема за единицу времени, обусловленные внешними причинами. Тогда вместо (6.24) мы имеем

$$\hat{k}^h = \partial_i \mathcal{P}^{hi}, \quad (6.26)$$

а это есть уравнение (4.30), которое было выведено ранее для специального случая непрерывного распределения материи.

В (6.22) появляется дифференцирование, которое очень часто встречается в исследованиях подобного типа. Удобно ввести для него специальный символ. Если  $f$  — функция  $x$ ,

у, z и t, то мы пишем

$$\begin{aligned}\frac{\bar{d}f}{dt} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + w^b \partial_b f + f \partial_b w^b = \\ &= \frac{df}{dt} + f \partial_b w^b = \frac{\partial f}{\partial t} + \partial_b f w^b.\end{aligned}\quad (6.27)$$

Тогда мы всегда имеем

$$\frac{d}{dt} (f d\tau) = \frac{\bar{d}f}{dt} d\tau. \quad (6.28)$$

Полагая также  $w^a$  равным  $\dot{u}^a$ , т. е. выбирая границу  $\sigma$  таким образом, что полное количество материи, проходящее через каждый ее элемент, равно нулю, мы получаем, что единственной энергией, проходящей через границу, является тепло, и общее количество тепла, проходящее через  $\sigma$  извне, равно (ср. (6.23))

$$\begin{aligned}- \int_{\sigma} \hat{Q}^b \hat{f}_b d\sigma &= - \int_{\tau} \partial_b \hat{Q}^b d\tau = \\ &= - \int_{\tau} \left( c \partial_b \mathcal{P}^{4b} - \partial_b \mathcal{P}^{44} \dot{u}^b + \partial_b \mathcal{P}^{ab} \dot{u}_a - \frac{1}{c} \partial_b \mathcal{P}^{a4} \dot{u}_a \dot{u}^b \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left[ \partial_t \mathcal{P}^{44} + \partial_b \mathcal{P}^{44} \dot{u}^b + \frac{1}{c} (\partial_t \mathcal{P}^{a4}) \dot{u}_a - \mathcal{P}^{ab} \partial_b \dot{u}_a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} (\partial_b \mathcal{P}^{a4}) \dot{u}_a \dot{u}^b + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{a4} (\partial_b \dot{u}_a) \dot{u}^b + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{a4} \dot{u}_a \partial_b \dot{u}^b \right] d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left( \frac{\bar{d}\mathcal{P}^{44}}{dt} + \frac{1}{c} \frac{\bar{d}\mathcal{P}^{a4}}{dt} \dot{u}_a - \mathcal{P}^{ab} \partial_b \dot{u}_a + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{a4} \dot{u}^b \partial_b \dot{u}_a \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\mathcal{P}^{44} d\tau) + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\mathcal{P}^{a4} d\tau) \dot{u}_a + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\mathcal{P}^{ab} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{a4} \dot{u}^b \right) (\partial_b \dot{u}_a) d\tau \right] = \\ &= \int_{\tau} \left[ \frac{d}{dt} (\mathcal{E} d\tau) + \dot{u}_a \frac{d}{dt} (\mathcal{M}^a d\tau) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{J}^{ab} + \mathcal{M}^a \dot{u}^b) (\partial_b \dot{u}_a) d\tau \right] \quad (a, b = 1, 2, 3).\end{aligned}\quad (6.29)$$



Отсюда, если  $\hat{Q}$  есть тепло в единице объема, этот интеграл должен быть равен

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \hat{Q} d\tau = \int_{\tau} \frac{d}{dt} (\hat{Q} d\tau). \quad (6.30)$$

Из (6.29) и (6.30) следует, что

$$d(\hat{Q} d\tau) = d(\mathcal{E} d\tau) + \dot{u}_a d(\mathcal{M}^a d\tau) + \\ + (\mathcal{J}^{ab} + \mathcal{M}^a \dot{u}^b) (\partial_b du_a) d\tau \quad (6.31)$$

или

$$d(\mathcal{E} d\tau) = -\dot{u}_a d(\mathcal{M}^a d\tau) + \\ + (\mathcal{J}^{ab} + \mathcal{M}^a \dot{u}^b) (-\partial_b du_a) d\tau + d(\hat{Q} d\tau) \quad (6.32)$$

для малого смещения  $u^a$ . Это уравнение гласит, что приращение полной энергии в  $d\tau$  равно сумме приращения кинетической энергии материи в  $d\tau$ , движущейся как целое с импульсом  $\mathcal{M}^a d\tau$ , приращения потенциальной упругой энергии и приращения тепла, обусловленного тепловым потоком извне. Если  $\dot{u}^b = 0$ , мы получаем выражение

$$-\mathcal{J}^{ab} (\partial_b du_a) d\tau = \mathcal{J}^{ab} du_{ab} d\tau \quad (6.33)$$

для приращения упругой энергии в согласии с (VII. 1.6) (верхний знак) и (VII. 3.2):

$\hat{Q}^b \hat{f}_b d\sigma dt$  есть тепло, протекающее через  $\hat{f}_b d\sigma$  за время  $dt$ . Чтобы получить формулу преобразования для количества тепла, мы будем исходить из (6.17) и воспользуемся уравнениями (6.6, 8):

$$d\hat{Q} = \hat{Q}^b \hat{f}_b d\sigma dt = c\mathcal{P}^{4b} \mathcal{B}_b d\omega + c\mathcal{P}^{44} \mathcal{B}_4 d\omega + \\ + \mathcal{P}^{ab} \dot{u}_a \mathcal{B}_b d\omega + \mathcal{P}^{a4} \dot{u}_a \mathcal{B}_4 d\omega = \\ = c\mathcal{P}^{4i} \mathcal{B}_i d\omega + \mathcal{P}^{ai} \dot{u}_a \mathcal{B}_i d\omega = \\ = c \sqrt{1 - \beta^2} (\mathcal{P}^{4i} u_i + \mathcal{P}^{ai} u_a) \mathcal{B}_i d\omega \quad (a, b = 1, 2, 3), \quad (6.34)$$

где  $u_i^h$  — четырехмерная скорость, соответствующая  $\dot{u}_a$ , и

$$\beta^2 c^2 = -\dot{u}^a \dot{u}_a.$$

Отсюда

$$\frac{dQ}{\sqrt{1-\beta^2}} = c \mathcal{F}^{hi} u_h \mathcal{F}_i d\omega \quad (h, i = 1, \dots, 4). \quad (6.35)$$

Правая часть этого равенства скаляр. Следовательно,

$$dQ = dQ_0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad (6.36)$$

где  $dQ_0$  — количество тепла с точки зрения наблюдателя, движущегося со скоростью  $\dot{u}^a$ . Так как  $d\tau = d\tau_0 \sqrt{1-\beta^2}$ , то отсюда следует, что количество тепла в единице объема является инвариантом.

Температура есть тепло, отнесенное к одной частице и умноженное на скалярный множитель, зависящий от выбора температурной шкалы. Но для всех наблюдателей среднее количество частиц в  $\tau$  одинаково, и это доказывает, что законы преобразования  $dQ$  и  $T$  также одинаковы, т. е.

$$T = T_0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (6.37)$$

Отсюда немедленно следует, что энтропия  $S$ , определяемая выражением

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dQ_0}{T_0} = dS, \quad (6.38)$$

является инвариантом и что энтропия в единице объема  $\hat{S}$  преобразуется следующим образом:

$$\hat{S}_0 = \hat{S} \sqrt{1-\beta^2}. \quad (6.39)$$

Так как  $ds = dt \sqrt{1-\beta^2}$ , произведение  $T_0 ds = T dt$  есть инвариант, и выражение

$$T^h = \frac{1}{kT_0} \frac{dx^h}{ds} = \frac{1}{kT} \frac{dx^h}{dt} \quad (h = 1, \dots, 4) \quad (6.40)$$

( $k$  — постоянная Больцмана) является четырехмерным вектором, *вектором температуры*.

Жидкость называется *идеальной*, если  $p^a d\sigma$  всегда перпендикулярна  $\hat{f}_b d\sigma$ , а это будет тогда и только тогда, когда (ср. (6.5, 18))

$$-\mathcal{F}^{ab} + \frac{1}{c} \mathcal{F}^{a1} \dot{u}^b = \hat{p} g^{ab}, \quad (6.41)$$

где  $\hat{p}$  — подходящая скалярная плотность. Тогда

$$p^a d\sigma = \hat{p} \hat{f}^a d\sigma. \quad (6.42)$$

Если теперь  $\hat{f}_b d\sigma$  перпендикулярен оси  $x$  и имеет ориентацию такую, что  $\hat{f}^1$  отрицательна, то сила направлена внутрь. Тогда  $\hat{p}$  есть давление.

Если определение идеальной жидкости не должно зависеть от выбора системы координат, то (6.41) и уравнение для потока тепла, которое следует из (6.17) и (6.41)

$$\hat{Q}^a = c \mathcal{P}^{4a} - \mathcal{P}^{44} \dot{u}^a - \hat{p} \dot{u}^a, \quad (6.43)$$

должны быть инвариантными. Уравнения главных направлений  $\mathcal{P}^{hi}$  имеют вид

$$\mathcal{P}^{hi} r_i - \lambda g^{hi} r_i = 0 \quad (h, i = 1, \dots, 4), \quad (6.44)$$

а собственные значения являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} \hat{p} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{14} \dot{u}^1 + \lambda & \frac{1}{c} \mathcal{P}^{14} \dot{u}^2 & \frac{1}{c} \mathcal{P}^{14} \dot{u}^3 & \mathcal{P}^{14} \\ \frac{1}{c} \mathcal{P}^{24} \dot{u}^1 & \hat{p} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{24} \dot{u}^2 + \lambda & \frac{1}{c} \mathcal{P}^{24} \dot{u}^3 & \mathcal{P}^{24} \\ \frac{1}{c} \mathcal{P}^{34} \dot{u}^1 & \frac{1}{c} \mathcal{P}^{34} \dot{u}^2 & \hat{p} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{34} \dot{u}^3 + \lambda & \mathcal{P}^{34} \\ -\frac{1}{c} \hat{Q}^1 + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{44} \dot{u}^1 - & -\frac{1}{c} \hat{Q}^2 + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{44} \dot{u}^2 - & -\frac{1}{c} \hat{Q}^3 + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{44} \dot{u}^3 - & \mathcal{P}^{44} - \lambda \\ -\frac{1}{c} \hat{p} \dot{u}^1 & -\frac{1}{c} \hat{p} \dot{u}^2 & -\frac{1}{c} \hat{p} \dot{u}^3 & \end{vmatrix} = 0 \quad (6.45)$$

или после элементарных преобразований

$$\begin{vmatrix} \hat{p} + \lambda & 0 & 0 & \mathcal{P}^{14} \\ 0 & \hat{p} + \lambda & 0 & \mathcal{P}^{24} \\ 0 & 0 & \hat{p} + \lambda & \mathcal{P}^{34} \\ -\frac{1}{c} \hat{Q}^1 & -\frac{1}{c} \hat{Q}^2 & -\frac{1}{c} \hat{Q}^3 & \mathcal{P}^{44} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{a4} \dot{u}_a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.46)$$

или

$$(\hat{p} + \lambda)^2 \left\{ (\hat{p} + \lambda) \left( \mathcal{P}^{44} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{a4} \dot{u}_a - \lambda \right) \right\} + \frac{1}{c} \mathcal{P}^{b4} \hat{Q}_b = 0 \quad (a, b = 1, 2, 3). \quad (6.47)$$

Так как это уравнение инвариантно, каждому корню соответствует направление в пространстве-времени. Эти направления должны иметь физическое значение. В настоящем случае единственным инвариантным направлением в пространстве-времени является направление вектора  $u^h$ . Это

означает, во-первых, что первые три корня должны быть равны, а соответствующее  $R_3$  должно быть перпендикулярно к  $u^h$ , и, во-вторых, что направление, соответствующее четвертому корню, должно быть направлением  $u^h$ . Отсюда

$\hat{Q}^a = 0$  и  $\mathcal{F}^{hi}$  имеет форму

$$\mathcal{F}^{hi} = \pi u^h u^i - \hat{p} g^{hi}. \quad (6.48)$$

Из (6.48), (6.41) и (6.43) следует, что

$$c \mathcal{F}^{Aa} - \mathcal{F}^{Aa} \dot{u}^a - \hat{p} \dot{u}^a = 0 \quad (6.49)$$

и

$$\pi = (1 - \beta^2) (\mathcal{E} + \hat{p}). \quad (6.50)$$

Следовательно, если  $\mathcal{E}_0$  есть средняя энергия в базисном параллелепипеде для наблюдателя, движущегося с той же скоростью, то мы имеем

$$\pi = \mathcal{E}_0 + \hat{p} \quad (6.51)$$

и

$$\mathcal{F}^{hi} = (\mathcal{E}_0 + \hat{p}) u^h u^i - \hat{p} g^{hi}. \quad (6.52)$$

Жидкость, для которой  $\hat{Q}^a = 0$ , ван Данциг называет *совершенно идеальной*. Следовательно, релятивистская идеальная жидкость, как было показано ван Данцигом<sup>1)</sup>, всегда является совершенно идеальной.

## УПРАЖНЕНИЯ

IX.1. Если пространство Эйнштейна  $V_n$ ,  $n > 3$ , может быть конформно преобразовано в  $R_n$  (ср. упр. V.7), то оно является пространством постоянной кривизны, т. е. его тензор кривизны

<sup>1)</sup> 1939.3, p. 688.

имеет вид

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -\frac{2}{n(n-1)} K g_{[\nu[\lambda g_{\mu]\kappa]}^1). \quad (1a)$$

Из (1a) следует, что  $K$  — константа.

IX. 2.  $V_{\mathcal{F}}$ , которое не может быть конформно преобразовано в  $R_4$  (ср. упр. V. 7), может быть конформно отображено по крайней мере на одно пространство Эйнштейна, и отображение единственно с точностью до изменения масштаба<sup>2)</sup>. Физически это означает, что линейный элемент пустой части пространства-времени известен, если заданы мировые линии световых лучей<sup>3)</sup>.

IX. 3. В однородной среде, движущейся с постоянной скоростью  $v^a$  относительно прямолинейной системы координат, справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\lambda\kappa} - \varepsilon c F_{\lambda\kappa}) v^{\kappa} &= 0, \\ \left( \mathcal{F}^{[\kappa\lambda} - \frac{1}{\mu c} F^{[\kappa\lambda]} \right) v^{;\mu]} &= 0^4). \end{aligned}$$

IX. 4. Если  $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g} F_{\kappa\lambda} F_{\mu\nu} g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu}$  ( $\kappa, \lambda, \mu, \nu = 1, \dots, 4$ ) рассматривать как функцию  $g_{\lambda\kappa}$ , то

$$[\mathcal{L}]^{\kappa\lambda} = \mathcal{L}^{\kappa\lambda}.$$

Доказать.

<sup>1)</sup> Схоутен и Стройк 1921.3.

<sup>2)</sup> Бринкман 1923.2.

<sup>3)</sup> Ср. Каснер 1921.4; 1922.2.

<sup>4)</sup> Паули 1921.1, p. 658.

## Х. МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДИРАКА<sup>1)</sup>

### 1. Введение

Приложение матричного исчисления к квантовой механике вызывает большие трудности в нахождении эффективной системы обозначений величин, так как каждое обозначение должно содержать большое количество информации. Наша главная цель в этой главе состоит в том, чтобы ясно показать большие достоинства метода Дирака. Поэтому в §§ 2 и 3 мы излагаем тензорное исчисление в  $U_n$ , а в §§ 4 и 5 — матричное исчисление в  $U_n$ , основанные на классических методах, описанных в II, § 3. После рассмотрения алгебры общих векторных множеств оказывается возможным показать, что скобочный формализм Дирака есть как раз то, что необходимо для целей обозначений. Но для того чтобы найти наиболее удовлетворительную систему обозначений, необходимо рассмотреть физическую интерпретацию и выяснить, какие типы величин действительно встречаются. Оказывается, что мы должны иметь дело с состояниями и с наблюдаемыми, и для того чтобы иметь возможность представить каждую величину совокупностью чисел, необходимо отправляться от полного множества коммутирующих наблюдаемых и строить множество общих собственных состояний. Все эти собственные состояния могут быть обозначены собственными значениями, которым они принадлежат, и каждому состоянию или наблюдаемой соответствует «представление», т. е. множество чисел, аналогичных ортогональным компонентам в  $U_n$ . Возникает символика, во многом аналогичная матричному исчислению в  $U_n$ . Сверх этого,

---

<sup>1)</sup> Общие ссылки: Иордан 1936.4; Крамерс 1937.4; Дирак 1947.5.

ортогональные компоненты тесно связаны с вероятностями обнаружения определенных результатов, если наблюдаемая измеряется в определенном состоянии.

Когда задано полное множество коммутирующих наблюдаемых, можно определить функции этих наблюдаемых, которые сами являются наблюдаемыми. Используя эту новую концепцию, можно с помощью такой функции однозначно фиксировать каждое состояние, и, как следствие, эти функции могут применяться в качестве обозначений. После введения некоторых сокращений этот второй метод немедленно приводит к уравнениям, известным как волновые уравнения.

## 2. Величины второго рода и гибридные величины<sup>1)</sup>

Если группа  $G_a$  пространства  $E_n$  (ср. I, § 1) содержит не только действительные, но и комплексные преобразования, то кроме  $x^{\bar{x}}$  мы имеем также комплексно сопряженные

$$\overline{x^{\bar{x}}} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\bar{x}} \quad (2.1)$$

с законом преобразования

$$\overline{x^{\bar{x}'}} = \overline{A_{\bar{x}}^{\bar{x}'}} \overline{x^{\bar{x}}}, \quad \overline{A_{\bar{x}}^{\bar{x}'}} = \overline{A_{\bar{x}}^{\bar{x}'}}. \quad (2.2)$$

Используя эти преобразования, мы можем определить векторы, тензоры и т. д. *второго рода*, например

$$\begin{aligned} \overline{v^{\bar{x}'}} &= \overline{A_{\bar{x}}^{\bar{x}'}} \overline{v^{\bar{x}}}, \\ \overline{\omega_{\bar{\lambda}'}} &= \overline{A_{\bar{\lambda}'}^{\bar{\lambda}}} \overline{\omega_{\bar{\lambda}}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Так как комплексно сопряженные от компонент любой обычной величины (например,  $P_{\bar{\lambda}}^{\bar{x}}$ ) являются компонентами величины второго рода<sup>2)</sup>, то мы не ввели что-то действительно новое, а только подчеркнули тот факт, что эти сопряженные величины преобразуются по другому закону. Но возникает нечто действительно новое, если мы будем

<sup>1)</sup> Ср. Н. М. 1935.1, р. 8.

<sup>2)</sup> Обозначаемые  $\overline{P_{\bar{\lambda}}^{\bar{x}}}$ .

рассматривать величины с индексами обоих родов, например  $Q_{\lambda}^{\bar{\kappa}}$  с законом преобразования

$$Q_{\lambda}^{\bar{\kappa}'} = \bar{A}_{\kappa}^{\bar{\kappa}'} A_{\lambda'}^{\lambda} Q_{\lambda}^{\bar{\kappa}}. \quad (2.4)$$

Такие величины мы называем *гибридными величинами*. Комплексно сопряженные компоненты гибридной величины  $Q_{\lambda}^{\bar{\kappa}}$  являются компонентами другой гибридной величины  $\bar{Q}_{\bar{\lambda}}^{\kappa}$ , называемой *комплексно сопряженной* относительно первой величины.

Ко- или контравариантная гибридная величина валентности  $> 2$ , например  $P^{\bar{\kappa}\lambda\bar{\mu}}$ , не может подвергаться операциям симметрирования или альтернирования, так как  $P^{\bar{\kappa}\lambda\bar{\mu}}$  не определены. Но если валентность равна 2, существуют аналоги симметричного тензора и бивектора. Мы называем величину  $P^{\bar{\kappa}\lambda}$ , которая удовлетворяет условию

$$P^{\bar{\kappa}\lambda} = \bar{P}^{\lambda\bar{\kappa}}, \quad (2.5)$$

*эрмитовой (симметричной) или эрмитовым тензором*. Аналогично можно определить *эрмитов бивектор*  $Q^{\bar{\kappa}\lambda}$  соотношением

$$Q^{\bar{\kappa}\lambda} = -\bar{Q}^{\lambda\bar{\kappa}}. \quad (2.6)$$

Но так как  $iQ^{\bar{\kappa}\lambda}$  эрмитово симметричен, достаточно рассматривать только симметричный случай.

Для ко- или контравариантных эрмитовых тензоров имеют место нижеследующие теоремы, аналогичные теоремам для обычных тензоров валентности 2 (ср. II, § 10).

Если  $r$  — ранг  $P_{\bar{\kappa}\lambda} = \bar{P}_{\lambda\bar{\kappa}}$ , координатная система  $(\kappa)$  всегда может быть выбрана таким образом, что

$$P_{\bar{\kappa}\lambda} = \begin{cases} -1, & \kappa = \lambda \leq s, \\ +1, & s < \kappa = \lambda \leq r, \\ 0, & r < \kappa = \lambda \text{ и } \kappa \neq \lambda, \end{cases} \quad (2.7)$$



или

$$P_{\bar{\kappa}\lambda} = -e_{\bar{\kappa}}^1 e_{\lambda}^1 - \dots - e_{\bar{\kappa}}^s e_{\lambda}^s + e_{\bar{\kappa}}^{s+1} e_{\lambda}^{s+1} + \dots + e_{\bar{\kappa}}^r e_{\lambda}^r. \quad (2.8)$$

Другая форма этой же теоремы:

Если  $r$  — ранг  $P_{\bar{\kappa}\lambda} = \bar{P}_{\lambda\bar{\kappa}}$ , всегда существует преобразовании  $T_{\lambda}^{\kappa}$ , такое, что компоненты  $\bar{T}_{\bar{\kappa}}^{\bar{\rho}} T_{\lambda}^{\sigma} P_{\bar{\rho}\sigma}$  относительно  $(\kappa)$  удовлетворяют условиям вида (2.7).

$s$  является инвариантом  $P_{\bar{\kappa}\lambda}$  и называется *индексом*. Говорят, что  $P_{\bar{\kappa}\lambda}$  — *положительно определенный*, если  $s=0$ , *отрицательно определенный*, если  $s=n$ , и *неопределенный*, если  $0 < s < n$ . Последовательность  $--- \dots + + +$  в (2.8) называется *сигнатурой*  $P_{\bar{\kappa}\lambda}$ . Сигнатура *четна*, если четно  $s$ , и *нечетна*, если  $s$  нечетно.

Если  $r=n$ , то существует обратный тензор  $P^{\bar{\kappa}\lambda} = \bar{P}^{\lambda\bar{\kappa}}$ . Он имеет тот же индекс и ту же сигнатуру, что и  $P_{\bar{\kappa}\lambda}$ , как это видно из формулы

$$P^{\bar{\kappa}\lambda} = -e^{\bar{\kappa}} e^{\bar{\lambda}} - \dots - e^{\bar{\kappa}} e^{\bar{\lambda}} + e^{\bar{\kappa}} e^{\bar{\lambda}} + \dots + e^{\bar{\kappa}} e^{\bar{\lambda}}.$$

В центро-аффинном  $E_n$  эрмитов тензор представляется одной из фигур

$$P_{\bar{\kappa}\lambda} \bar{x}^{\bar{\kappa}} x^{\lambda} = \pm 1,$$

которые могут рассматриваться как гиперповерхности в  $E_{2n}$ . В последнем  $2n$  *независимыми* координатами могут быть, например, действительные и мнимые части  $x^{\kappa 1}$ .

### 3. Фундаментальный тензор. Пространство $U_n$

Если в  $E_n$  задан эрмитов тензор  $a_{\bar{\lambda}\kappa} = \bar{a}_{\kappa\bar{\lambda}}$  ранга  $n$ , то  $E_n$  называется  $U_n$ , а  $a_{\bar{\lambda}\kappa}$  — его фундаментальным тензором. Согласно § 2 имеется, по крайней мере, одна координатная

1) Ср. Н. М., стр. 64.

система  $(h)$  ( $h = 1, \dots, n$ ) с базисными векторами  $i_i^h, \bar{i}_\lambda^h$  такая, что

$$a_{\lambda\kappa}^{\bar{h}} = -\frac{\bar{1}}{i_\lambda i_\kappa} - \dots - \frac{\bar{s}}{i_\lambda i_\kappa} + \frac{\bar{s+1}}{i_\lambda i_\kappa} + \dots + \frac{\bar{n}}{i_\lambda i_\kappa}. \quad (3.1)$$

Обратный ему тензор обозначим  $a^{\times\bar{\lambda}}$  (ср. II, § 12).

Фундаментальный тензор устанавливает взаимно однозначное соответствие между ко- (контра)вариантными векторами первого рода и контра- (ко)вариантными векторами второго рода

$$v_\lambda^{\text{def}} a_{\lambda\kappa}^{\bar{h}} v^\kappa, \quad \bar{w}_\lambda^{\text{def}} \bar{w}^{\times\kappa} a_{\lambda\kappa}^{\bar{h}}. \quad (3.2)$$

Так же как и в  $R_n$ , соответствующим величинам приписывается одинаковая коренная буква. Таким образом,  $v^\times$  и  $v_\lambda^{\bar{h}}$  аналогично  $\bar{w}_\lambda$  и  $\bar{w}^\times$  являются двумя различными множествами компонент одной и той же величины. Но в отличие от  $R_n$ , в  $U_n$  сохраняются два различных типа векторов. Их нельзя различить, называя векторами первого и второго рода, или с помощью прилагательных ко- и контравариантный. Поэтому, предвосхищая здесь § 7, мы дадим им следующие названия, предложенные Дираком для значительно более общего случая<sup>1)</sup>:

кэт = контравариантный вектор первого рода = ковариантный вектор второго рода:  $v^\times, v_\lambda^{\bar{h}}$ ;

бра = ковариантный вектор первого рода = контравариантный вектор второго рода:  $\bar{w}_\lambda, \bar{w}^\times$ ,

и отметим, что комплексно сопряженным бра является кэт и наоборот. Удобно записывать коренную букву кэт без черты, а бра — с чертой. Тогда либо *коренная буква* и *верхний* индекс одновременно имеют черту, либо одновременно ее не имеют. При поднимании или опускании индексов у  $A_\lambda^\times$  возникает неопределенность, которую можно избежать, если писать  $A_{\lambda}^{\times}$  (что неудобно), или принимая правило, по

<sup>1)</sup> 1947. 5, р. 18 и далее.

которому верхний индекс является первым, а нижний вторым. Тогда

$$A_{\bar{x}\lambda} = a_{\bar{x}\lambda}, \quad A^{x\bar{\lambda}} = a^{x\bar{\lambda}}. \quad (3.3)$$

После введения  $a_{\bar{x}\lambda}$  каждой паре кэт  $u^x$ ,  $v^x$  или каждой паре бра  $\bar{u}_\lambda$ ,  $\bar{v}_\lambda$  соответствуют число и его комплексно сопряженное, так что мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}_\lambda v^\lambda &= \bar{u}^x a_{\bar{x}\lambda} v^\lambda = v^\lambda \bar{a}_{\lambda\bar{x}} \bar{u}^x = v^\lambda \bar{u}^x, \\ u_\lambda \bar{v}^{\bar{\lambda}} &= u^x a_{\bar{x}\lambda} \bar{v}^{\bar{\lambda}} = \bar{v}^{\bar{\lambda}} \bar{a}_{\lambda\bar{x}} u^x = \bar{v}^{\bar{\lambda}} u^x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\bar{u}_\lambda v^\lambda$  называется *скалярным произведением  $u^x$  и  $v^x$* , взятых в этом порядке. При перемене порядка произведение заменяется комплексно сопряженным. Это произведение зависит линейно от второго сомножителя и антилинейно (т. е. с комплексно сопряженными коэффициентами) от первого сомножителя. Скалярное произведение вектора на себя называется его *нормой*. Норма всегда действительна.

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, говорят, что они *унитарно ортогональны* или просто *ортогональны*, если это не может вызвать недоразумений. Вектор с нулевой нормой ортогонален самому себе и называется (*унитарно*) *изотропным вектором*. Все изотропные векторы заполняют (*унитарный*) *нулевой конус* с уравнением

$$\bar{x}^{\bar{\lambda}} a_{\bar{x}\lambda} x^x = 0. \quad (3.5)$$

Если  $0 < s < n$ , то существуют как векторы, имеющие положительную норму, так и векторы с отрицательной нормой, так же как и в  $R_n$ . Но если индекс равен 0 или  $n$ , то нулевой конус не существует. Как и в  $R_n$ ,  $E_m$  в  $U_n$  является  $U_m$  тогда и только тогда, когда оно не находится в особом положении относительно нулевого конуса.

Вектор называется *единичным вектором* (*единичный кэт, единичный бра*), если его норма равна  $+1$  или  $-1$ . Он остается единичным при умножении на скаляр вида  $e^{i\varphi}$  (*фазовый множитель*). Очевидно, базисные векторы  $i^x$

в (3.1) являются единичными кэт, а  $i_\lambda^h$  — единичными бра. Они образуют (унитарно) ортогональную систему. Ортогональные системы переводятся друг в друга всеми унитарными преобразованиями, т. е. преобразованиями, оставляющими инвариантным  $a_{\bar{\lambda}\kappa}$ .  $U_{\cdot\lambda}^{\kappa}$  является унитарным преобразованием тогда и только тогда, когда

$$U_{\cdot\rho}^{\kappa} \bar{U}_{\bar{\sigma}}^{\lambda} a^{\rho\bar{\sigma}} = a^{\kappa\bar{\lambda}}, \quad (3.6)$$

или в другой форме

$$\bar{U}^{\bar{\lambda}\kappa} = \bar{U}^{\lambda\bar{\kappa}}. \quad (3.7)$$

Геометрия в  $U_n$  базируется на унитарной группе  $\mathcal{O}_{\text{ун}}$ , состоящей из всех унитарных преобразований.

Если фундаментальный тензор  $a_{\bar{\lambda}\kappa}$  определенный ( $s = 0$  или  $s = n$ ), то имеет место следующая теорема для эрмитовых тензоров в  $U_n$  (ср. II, § 14).

Теорема о главных осях эрмитового тензора.

*Если эрмитов фундаментальный тензор определен и если  $T_{\bar{\mu}\lambda}$  — эрмитов тензор, то всегда можно найти унитарно ортогональную систему ( $h$ ), такую, что*

$$T_{\bar{j}i} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; j \neq i). \quad (3.8)$$

Если фундаментальный тензор не является определенным, то теорема о главных осях справедлива лишь для тех тензоров, которые не находятся в особом положении относительно нулевого конуса (3.5).

#### 4. Матричное исчисление в $E_n$ и $U_n$

Можно построить матричное исчисление с сокращенными обозначениями в  $E_n$  (ср. II, § 13) таким образом, что оно будет включать не только величины первого, но также и второго рода и гибридные величины. Однако, так как имеются четыре типа векторов и шестнадцать типов величин валентности 2, такую систему обозначений не приходится рассматривать всерьез. Но в  $U_n$  мы имеем только два типа векторов, кэт и бра, и четыре различных типа величин валентности 2, которые могут отличаться своей структурой:

кэт-кэт ( $f^{x\lambda}$ ), кэт-бра ( $P_{\lambda}^{x}$ ), бра-кэт ( $Q_{\lambda}^{x}$ ) и бра-бра ( $h_{\lambda\mu}$ ). Кроме того, комплексно сопряженным кэт является бра, и это уменьшает до трех число величин, необходимых для целей символики. Каждый вектор имеет два типа компонент, а каждая величина валентности 2 — четыре, например  $f^{x\lambda}$ ,  $f_{\bar{\lambda}}^x$ ,  $f_{\bar{x}}^{\lambda}$ ,  $f_{\bar{x}\bar{\lambda}}$ . Но если фундаментальный тензор *положительно определенный* и если используются только унитарно ортогональные системы координат, то все эти компоненты численно равны.

Как и в II, § 13, мы используем знак | для обозначения изомера. Окажется удобным использовать его также для скаляров и векторов, хотя изомер скаляра или вектора, конечно, совпадает с самой величиной. Посредством — мы обозначаем операцию образования комплексно сопряженной величины, т. е. величины с комплексно сопряженными компонентами. Новый знак + может символически обозначать комбинацию этих двух (всегда коммутирующих) операций.

Скалярное произведение бра  $\bar{u}$  и кэт  $v$  записывается в виде  $\bar{u}v$  или  $v\bar{u}$ . Таким образом,

$$\bar{u}v = v\bar{u} = \bar{u}_{\lambda}v^{\lambda} = \bar{u}^{\bar{x}}v_{\bar{x}}, \quad (4.1)$$

но если мы хотим рассматривать это произведение как скалярное произведение двух кэт  $u$ ,  $v$  или двух бра  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , мы используем для обозначения умножения точку:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \bar{u}v = v\bar{u} = \overline{vu} = \overline{v \cdot u}, \\ \bar{u} \cdot \bar{v} &= u\bar{v} = \bar{v}u = \overline{vu} = \overline{v \cdot \bar{u}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Записывая произведения без знака, мы должны следить за тем, чтобы каждый кэт-(бра-)множитель справа стоял после бра- (кэт-) множителя слева. Следовательно, необходимо помнить о характере всех рассматриваемых величин. Начинаящий для облегчения запоминания может сначала употреблять различные совокупности коренных букв для величин разных типов, например  $p, q, r, s, t$  для скаляров,  $a, b, c, u, v, w$  для векторов, заглавные буквы для величин типа бра-кэт или кэт-бра и  $f, g, h, k, l$  для величин типа кэт-кэт или бра-бра. Однако после приобретения некоторого

навыка<sup>1)</sup> приходится обходиться без этих приемов, так как в физике остается мало произвола для выбора буквенных обозначений. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем в матричном исчислении Дирака имеются и другие способы облегчения запоминания,

Мы имеем следующие правила употребления знаков | — и + в произведениях:

| применяется к каждому сомножителю с изменением их порядка, например:

$$\begin{aligned}(Pv)^{|} &= v^{|}P^{|} = vP = Pv, \\ (PQ)^{|} &= Q^{|}P^{|}, \\ (\bar{u}Pv)^{|} &= v^{|}P^{|}\bar{u}^{|} = vP\bar{u} = \bar{u}Pv;\end{aligned}\tag{4.3}$$

— применяется к каждому сомножителю без изменения их порядка;

+ применяется к каждому сомножителю с изменением их порядка, например:

$$\begin{aligned}(\bar{u}PQv)^{+} &= v^{++}Q^{++}P^{++}\bar{u}^{++} = \bar{v}^{++}Q^{++}P^{++}\bar{u}^{++}, \\ (hu)^{+} &= u^{++}h^{++} = \bar{u}^{++}h^{++} = \bar{h}\bar{u}, \\ (h\bar{f}\bar{u})^{+} &= u^{++}f^{++}h^{++} = u^{++}f^{++}\bar{h}^{++} = \bar{h}f\bar{u}, \\ (P\bar{h}fu)^{+} &= u^{++}f^{++}h^{++}P^{++} = \bar{u}^{++}f^{++}h^{++}\bar{P}^{++} = \bar{P}\bar{h}\bar{f}\bar{u}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Простота этих правил для | и + обусловлена, конечно, нашим соглашением относительно применения | к скалярам и векторам.

## 5. Линейные операторы

Имеется два рода линейных операторов: кэт-бра операторы  $T_{\lambda}^{\mu}$  и их комплексно сопряженные бра-кэт операторы  $\bar{T}_{\bar{\lambda}}^{\bar{\mu}}$ . Собственные значения и собственные векторы (кэт и

<sup>1)</sup> Обычно физики приобретают этот навык значительно быстрее, чем чистые математики, возможно, потому, что они стремятся к скорейшему получению физических результатов и не интересуются формальными сторонами этого исчисления.

бра) определяются так же, как и в II, § 14. Но здесь нас особенно интересует случай, когда эрмитов фундаментальный тензор положительно определенный, а оператор *эрмитов*, т. е.  $T_{\mu\lambda}^-$  является эрмитовым тензором (ср. (2.5)):

$$T = \overset{+}{T}. \quad (5.1)$$

В этом случае собственные значения являются корнями уравнения

$$\text{Det}(T_{\mu\lambda}^- - \sigma a_{\mu\lambda}) = 0. \quad (5.2)$$

Если  $\sigma$  — собственное значение, то существует кэт  $v^{\alpha}$  такой, что

$$T v = \sigma v. \quad (5.3)$$

Применяя оператор  $\dagger$ , получаем

$$\overset{++}{v} T = \bar{v} T = \bar{\sigma} \bar{v}, \quad (5.4)$$

откуда

$$\bar{v} T v = \bar{\sigma} \bar{v} v = \bar{\sigma} \bar{v} v, \quad (5.5)$$

а это возможно лишь в случае, если  $\sigma = \bar{\sigma}$ . Следовательно, все собственные значения эрмитового оператора *действительны*.

Если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — два *разных* собственных значения и  $v_1$  и  $v_2$  — соответствующие собственные кэт, то мы имеем

$$\bar{v}_2 T v_1 = \sigma_2 \bar{v}_2 v_1 = \sigma_1 \bar{v}_2 v_1, \quad (5.6)$$

а это возможно лишь тогда, когда  $v_1$  и  $v_2$  *унитарно ортогональны*.

Согласно теореме о главных осях существует унитарно ортогональная система ( $h$ ), такая, что

$$T_{\bar{\lambda}\kappa}^* = T_{\bar{i}h} \bar{i}^h i_{\lambda}^{\kappa} = T_{\bar{1}1} \bar{1}^1 i_{\lambda}^{\kappa} + \dots + T_{\bar{n}n} \bar{n}^n i_{\lambda}^{\kappa}, \quad (5.7)$$

откуда мы видим, что все компоненты  $T_{\bar{1}1}, \dots, T_{\bar{n}n}$  являются

собственными значениями. Они не обязательно должны быть различными и некоторые из них могут равняться нулю. Если  $P_{\bar{1}\bar{1}}$  принадлежит совокупности  $z$  равных собственных значений, например

$$P_{\bar{1}\bar{1}} = \dots = P_{z\bar{z}}, \quad (5.8)$$

то векторы  $i_1^x, \dots, i_z^x$  порождают  $E_z$ , каждый вектор которого является собственным вектором, принадлежащим  $P_{\bar{1}\bar{1}}$ . Так как  $i_1^x, \dots, i_z^x$  образуют унитарно ортогональную систему, это  $E_z$  является  $U_z$ . Аналогичным образом может быть найдена совокупность плоских подпространств  $U_{z_1}, U_{z_2}, \dots, \dots$  ( $z_1 + z_2 + \dots = n$ ), ортогональных друг другу, и каждое из которых принадлежит одному определенному собственному значению. Наоборот, если собственному значению соответствует  $z$ -мерное подпространство, то этому значению принадлежат в точности  $z$  линейно независимых собственных кэт (бра).

Пусть  $P$  и  $Q$ —два эрмитовых оператора. Нас интересует, будет ли также эрмитовым их произведение. Из

$$PQ = (PQ)^+ = Q^+ P^+ = QP \quad (5.9)$$

мы видим, что необходимое и достаточное условие этого состоит в том, что  $P$  и  $Q$  коммутируют.

Для коммутирующих операторов имеет место следующая теорема.

*Эрмитовы операторы  $P, Q, \dots$  коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют по крайней мере одно общее множество  $n$  линейно независимых собственных кэт (бра).*

Доказательство<sup>1)</sup>.

Мы дадим здесь доказательство для двух коммутирующих операторов. Обобщение очевидно. Пусть  $P$  и  $Q$  коммутируют, и пусть  $v$ —собственный кэт  $Q$ , принадлежащий собственному значению  $\mu$ . Тогда  $v$  может быть разложен по

<sup>1)</sup> Ср. Дирак 1947. 5. р. 49.



собственным кэт  $P$ . Пусть это разложение имеет вид

$$v = \underset{11}{\alpha v} + \dots + \underset{zz}{\alpha v}, \quad (5.10)$$

где  $\underset{1}{v}, \dots, \underset{z}{v}$  — собственные кэт  $P$ , принадлежащие собственным значениям  $\underset{1}{\lambda}, \dots, \underset{z}{\lambda}$  оператора  $P$ . Не уменьшая общности, мы можем теперь предположить, что *все эти собственные значения различны*. Тогда мы имеем

$$(Q - \mu) (\underset{11}{\alpha v} + \dots + \underset{zz}{\alpha v}) = 0, \quad (5.11)$$

и для любого выбора  $a$  ( $a = 1, \dots, z$ )

$$P(Q - \mu) \underset{1}{\alpha v} = (Q - \mu) \underset{1}{P \alpha v} = \underset{1}{\lambda} (Q - \mu) \underset{1}{\alpha v}. \quad (5.12)$$

Отсюда мы видим, что все  $z$  кэт  $(Q - \mu) \underset{1}{\alpha v}$  являются собственными кэт  $P$ . Но тогда (5.11) выражает тот факт, что сумма  $z$  собственных кэт  $P$ , принадлежащих  $z$  различным собственным значениям, равна нулю. А это возможно лишь в том случае, когда каждый из этих собственных кэт равен нулю, откуда

$$Qv = \underset{a}{\mu v}, \quad (5.13)$$

а это означает, что каждый  $\underset{a}{v}$  ( $a = 1, \dots, z$ ) является общим собственным кэт  $P$  и  $Q$ . Мы доказали сейчас, что каждый собственный кэт  $Q$  может быть выражен линейно через совместные собственные кэт  $P$  и  $Q$ . Поэтому, так как  $Q$  имеет  $n$  линейно независимых собственных кэт, должны существовать  $n$  линейно независимых общих собственных кэт  $P$  и  $Q$ . Из (5.7) немедленно следует, что  $P$  и  $Q$  коммутируют, если они имеют  $n$  линейно независимых общих собственных кэт.

Множество  $n$  линейно независимых общих собственных кэт (бра) коммутирующих эрмитовых операторов  $P, Q, \dots$  называется *полным множеством*, принадлежащим этим операторам. Каждый кэт (бра) полного множества принадлежит одной определенной комбинации собственных значений  $P, Q, \dots$ . Наоборот, каждой комбинации собственных зна-

чений  $P, Q, \dots$  принадлежит по крайней мере один кэт (бра) полного множества. Как мы увидим в дальнейшем, это важно для обозначения кэт (бра) полного множества.

Любой оператор  $P$  преобразуется в  $TPT^{-1}$  любым другим (не обязательно эрмитовым) оператором  $T$ . Если  $P$  — эрмитов, нас может интересовать, будет ли также эрмитовым преобразованный оператор при любом выборе  $P$ . Из

$$TPT^{-1} = (TPT^{-1})^+ = \overset{+}{T}^{-1} \overset{+}{P} \overset{+}{T} = \overset{+}{T}^{-1} \overset{+}{P} \overset{+}{T} \quad (5.14)$$

следует, что

$$\overset{+}{T}TP = P\overset{+}{T}T. \quad (5.15)$$

Отсюда  $\overset{+}{T}T$  коммутирует с каждым эрмитовым оператором и, следовательно, с любым оператором. Но это возможно лишь в том случае, если  $\overset{+}{T}T$  равен с точностью до скалярного множителя тождественному оператору. Этот множитель должен быть действительным, так как

$$\overset{+}{T}T = (\overset{+}{T}T)^+. \quad (5.16)$$

Отсюда необходимое и достаточное условие заключается в том, что  $T$  — унитарное преобразование ( $T = \overset{+}{T}^{-1}$ , ср. (3.7)) с точностью до скалярного множителя.

## 6. Алгебра векторных множеств

Рассмотрим множество элементов  $A, B, \dots$ , для которых определены три операции: сложение, вычитание и умножение на комплексное число. Предположим, что операции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ (A + B) + C &= A + (B + C), \\ B &= C - A, \quad \text{если } A + B = C, \\ (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A, \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B, \\ \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A, \\ 1 \cdot A &= A. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — комплексные числа. Такое множество может быть названо *векторным*<sup>1)</sup>, так как множество всех контравариантных векторов в  $E_n$  удовлетворяет этим условиям. Но все тензоры в  $E_n$  с одинаковой валентностью и одинаковым расположением индексов также образуют векторное множество. Во всех этих специальных множествах все элементы могут быть линейно выражены через конечное число элементов этих множеств. Однако мы не будем делать этого предположения относительно рассматриваемых здесь множеств более общего типа.

Пусть  $a, b, \dots$  — другое векторное множество. Тогда мы можем рассмотреть линейное соответствие между двумя множествами, такое, что каждому элементу  $A$  соответствует один и только один элемент  $a$ :

$$a = F(A), \quad (6.2)$$

и при любом выборе элементов  $A$  и  $B$

$$F(A+B) = F(A) + F(B), \quad F(\alpha A) = \alpha F(A). \quad (6.3)$$

Такое соответствие может быть названо *линейным преобразованием типа  $A \rightarrow a$* . Пусть  $G(A)$  — другое линейное преобразование типа  $A \rightarrow a$ . Тогда мы можем определить преобразование  $\alpha F + \beta G$  того же типа с помощью уравнения

$$(\alpha F + \beta G)(A) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha F(A) + \beta G(A), \quad (6.4)$$

откуда следует, что все такие линейные преобразования образуют новое векторное множество. Следовательно,

*Если заданы два векторных множества  $A$  и  $a$ , то все линейные преобразования типа  $A \rightarrow a$  образуют другое векторное множество, и это справедливо также для всех линейных преобразований типа  $a \rightarrow A$ .*

В виде примера мы возьмем все симметричные тензоры  $h^{\kappa\lambda}$  в  $E_n$  в качестве множества  $A$  и все векторы  $\omega_\lambda$  в качестве множества  $a$ . Тогда преобразованием типа  $A \rightarrow a$  соответствуют тензоры  $P_{\kappa\lambda\mu}$ , симметричные по  $\kappa\lambda$ , а преобразованиям типа  $a \rightarrow A$  — тензоры  $Q^{\kappa\lambda\mu}$ , симметричные по  $\kappa\lambda$ .

Очевидно, комплексные числа сами образуют векторное множество.

---

<sup>1)</sup> В оригинале vector-like — вектороподобные. Обычно такое множество называется линейным пространством. — Прим. перев.

Если для некоторого соответствия

$$a = 'F(A) \quad (6.5)$$

вместо (6.3) справедливы соотношения

$$'F(A+B) = 'F(A) + 'F(B), \quad 'F(\alpha A) = \bar{\alpha}'F(A), \quad (6.6)$$

то это соответствие называется *антилинейным преобразованием типа  $A \rightarrow a$* . Если  $\alpha'F + \beta'G$  определяется уравнением

$$(\alpha'F + \beta'G)(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\alpha}'F(A) + \bar{\beta}'G(A) = 'F(\alpha A) + 'G(\beta A), \quad (6.7)$$

то антилинейные преобразования образуют другое векторное множество.

В частном случае комплексных чисел антилинейное преобразование задано *априори*, а именно  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ . Пусть теперь  $a, b, \dots$  — произвольное векторное множество и  $\alpha, \beta, \dots$  — множество комплексных чисел. Рассмотрим одновременно линейные и антилинейные преобразования типа  $\alpha \rightarrow a$ . Каждое из этих преобразований может быть определено заданием преобразования единицы. Пусть  $T_1, T_2$  и  $'T_1, 'T_2$  — преобразования, для которых

$$\begin{aligned} T_1: 1 \rightarrow a_1, \quad \alpha \rightarrow \alpha a_1; \quad 'T_1: 1 \rightarrow a_1, \quad \alpha \rightarrow \bar{\alpha} a_1, \\ T_2: 1 \rightarrow a_2, \quad \alpha \rightarrow \alpha a_2; \quad 'T_2: 1 \rightarrow a_2, \quad \alpha \rightarrow \bar{\alpha} a_2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда мы имеем для преобразований  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  и  $\bar{\lambda}_1 'T_1 + \bar{\lambda}_2 'T_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные числа

$$\begin{aligned} \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2: 1 \rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \\ \alpha \rightarrow \lambda_1 \alpha a_1 + \lambda_2 \alpha a_2 = \alpha (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2); \\ \bar{\lambda}_1 'T_1 + \bar{\lambda}_2 'T_2: 1 \rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \\ \alpha \rightarrow \lambda_1 \bar{\alpha} a_1 + \lambda_2 \bar{\alpha} a_2 = \bar{\alpha} (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Следовательно, существует линейное взаимно однозначное соответствие между множеством  $a, b, \dots$  и множеством  $T_1, T_2, \dots$ . Действительно,  $T_1$  и  $T_2$  могут быть отождествлены с  $a_1$  и  $a_2$  и т. д. Но между множеством  $a, b, \dots$  и множеством  $'T_1, 'T_2$  существует взаимно однозначное антилинейное соответствие. Мы пишем  $\bar{a}$  для преобразования

$\alpha \rightarrow \bar{a}a$  и называем  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  сопряженными  $a$ ,  $b$ , ... и наоборот. Термин комплексно сопряженный вводил бы в заблуждение, так как  $a$  и  $\bar{a}$  не могут складываться, и, следовательно,  $a$  не может быть разложено на действительную и мнимую части<sup>1)</sup>. Легко проверить, что  $\bar{\lambda}\bar{a} + \bar{\mu}\bar{b}$  и  $\lambda a + \mu b$  являются сопряженными друг другу.

Подобным же образом, отправляясь от заданного векторного множества, можно построить целую систему векторных множеств. Если первое множество является множеством всех контравариантных векторов в  $E_n$ , мы находим не только все ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры первого рода, но и те же величины второго рода и все гибридные величины. В общем случае процесс совершенно аналогичен данному, но является менее специализированным, так как теперь мы не предполагаем, что в любом множестве все элементы могут быть выражены линейно через конечное число из них.

## 7. Кэт- и бра-векторы Дирака<sup>2)</sup>

Следуя Дираку, мы будем отправляться от некоторого заданного векторного множества и будем называть его элементы *кэт-векторами*, или просто *кэт*. Эти кэт являются пока аналогами не кэт из  $U_n$  в § 3, а контра- (ко)вариантных векторов в  $E_n$ . Векторы в  $E_n$  могут быть обозначены их компонентами, например  $v^*$ . Но это обозначение тесно связано с возможностью их линейного представления через конечное число базисных векторов. Так как мы больше не сохраняем это предположение, мы должны искать другой метод обозначения для кэт. Это не является, однако, простым делом в связи с тем, что, как мы увидим позднее, обозначение должно содержать определенное количество информации. Таким образом, обозначение одной коренной буквой, как в матричном исчислении в § 4, не является более удовлетворительным. Следовательно, единственный выход заключается в том, чтобы сопоставить кэт символ

<sup>1)</sup> По этой же причине Дирак использует выражение «мнимо сопряженный» вместо «комплексно сопряженный» в аналогичном случае (1947. 5).

<sup>2)</sup> Ср. Дирак 1947. 5.

в виде ящика, в который может быть заложена вся информация. Но это как раз то, что делает Дирак. Для кэт он записывает ящик в виде  $| \rangle$  с обозначением внутри, состоящим из такого количества букв и цифр, которое необходимо для представления всей информации. Согласно § 6 из кэт и комплексных чисел может быть построено новое векторное множество. Элементы этого множества называются *бра-векторами* или просто *бра* и обозначаются ящиком в форме  $\langle |$  с обозначением внутри. Они пока соответствуют не бра из  $U_n$  в § 3, а ко- (контра)вариантным векторам в  $E_n$ . Согласно § 6 каждому бра  $\langle A|$  и кэт  $|B\rangle$  принадлежит одно и только одно комплексное число, которое называется *скалярным произведением*  $\langle A|$  и  $|B\rangle$  и обозначается *бра-кэт символом*  $\langle A|B\rangle^1$ . Это снимает покрывало тайны с названий бра и кэт и приятным образом показывает, что в математике еще сохранилось некоторое чувство юмора!

Во многих случаях необходимы некоторые ограничения. Если мы, например, возьмем функции переменной  $x$  на некотором отрезке в качестве кэт, то бра являются так называемые *функции интервала (области)*, т. е. некоторый тип аддитивных функций множества<sup>2</sup>). Наилучшим обозначением для них является  $F^X$ , где  $X$  — интервал. Задание такой функции означает, что каждому интервалу  $X$  соответствует число  $F^X$ , причем, если  $X$  и  $Y$  не имеют общих точек и если  $X + Y$  есть интервал, состоящий из всех точек, принадлежащих или  $X$  или  $Y$ , то всегда  $F^{X+Y} = F^X + F^Y$ . Произведение бра  $F^X$  и кэт  $f(x)$  является тогда интегралом

$$\int F^{dx} f(x), \quad (7.1)$$

взятым по некоторому выбранному определенным образом интервалу. Следовательно, необходимое ограничение заключается в том, что рассматриваться будут лишь такие функции точки и интервала, для которых существуют эти интегралы.

<sup>1</sup>) bracket — скобка. Иногда в русской литературе вместо «кэт» и «бра» употребляются соответственно термины «вектор» и «со-вектор». — *Прим. перев.*

<sup>2</sup>) Ср. ван Дандиг 1936. 3.

Каждая интегрируемая функция  $f(x)$  может рассматриваться как функция интервала, так как для каждого интервала, где  $f(x)$  интегрируема, ей соответствует  $\int f(x) dx$ , взятый по этому интервалу. Но не каждой функции интервала соответствует некоторая функция  $x$ . В качестве примера мы упомянем функцию интервала  $\delta(x - a)$ , определяемую соотношением

$$\int \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1, & \text{если интервал содержит } x = a, \\ 0 & \text{„ „ не содержит } x = a. \end{cases} \quad (7.2)$$

Эта функция может быть аппроксимирована некоторой функцией, принимающей очень большие положительные значения в окрестности  $x = a$  и значения, близкие к нулю во всех остальных точках. Но не существует никакой функции  $x$ , которая могла бы точно заменить  $\delta(x - a)$ <sup>1)</sup>. Функция интервала  $\delta(x - a)$  удовлетворяет некоторым элементарным соотношениям, например:

- (a)  $\delta(-x) = \delta(x),$
- (b)  $x\delta(x) = 0,$
- (c)  $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \quad (a > 0),$
- (d)  $\int \delta(a - x) dx \delta(x - b) = \delta(a - b), \quad (7.3)$
- (e)  $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a),$
- (f)  $\int f(x)\delta(x - a) dx = f(a),$

которые могут быть доказаны<sup>2)</sup>. Ван Данциг<sup>3)</sup> вводит

<sup>1)</sup> С современной точки зрения  $\delta$ -функция является простейшим (и наиболее важным для приложений) представителем обобщенных функций. Ср. Гельфанд и Шиллов 1959. I. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Ср. Дирак 1947. 5.

<sup>3)</sup> 1936. 3. Эта точка зрения является более общей, так как его функции точки определены на общем сепарабельном топологическом пространстве. Тогда  $F^X$  являются абсолютно аддитивными функциями множества, которые сопоставляют действительное или комплексное число каждому борелевому подмножеству.

функцию точки-интервала, определяемую соотношением

$$E_x^X = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X, \end{cases} \quad (7.4)$$

и получает уравнения:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \int E_x^{dy} f_y = f_x, \quad f_x \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \\ (b) \quad & \int F^{dx} E_x^X = F^X, \end{aligned} \quad (7.5)$$

в точном соответствии с обозначением свертки в тензорном исчислении. (7.5 а) заменяет фундаментальное соотношение (7.3 f).

Чтобы привести в соответствие определенные здесь кэт и бра с кэт и бра из § 3, мы должны теперь ввести, как в § 6, векторные множества, соответствующие векторам второго рода  $\bar{v}^\lambda$ ,  $\bar{w}_\lambda$ , затем множества, соответствующие гибридным величинам  $P_{\lambda\bar{\lambda}}$ , и, наконец, один из элементов этого последнего множества должен быть принят в качестве фундаментального тензора. Однако если мы имеем в виду построение символического исчисления только для группы  $G_{\text{ин}}$  с положительно определенным фундаментальным тензором, это может быть сделано более простым способом, а именно немедленным введением фиксированного взаимно однозначного антилинейного соответствия между кэт и бра. Дирак использует эту возможность. Он обозначает через  $\langle A |$  бра, сопряженный кэт  $|A\rangle$ . Таким образом, если  $|A\rangle$  соответствует  $v^\lambda$ ,  $\langle A|$  соответствует  $\bar{v}_\lambda = \overline{v^\lambda}$ . Так как замена  $|$  на  $\langle |$  делает это достаточно ясным, нет необходимости писать  $\langle \bar{A} |^1$ . Свойства эрмитовости и положительной определенности фундаментального тензора выражаются теперь аксиомами:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \langle A|B\rangle = \overline{\langle B|A\rangle} \quad (\bar{u}_\lambda v^\lambda = \overline{v^\lambda u^\lambda}), \\ (b) \quad & \langle A|A\rangle = 0, \quad \text{если только } |A\rangle = 0 \quad (\bar{v}_\lambda v^\lambda = 0). \end{aligned} \quad (7.6)$$

<sup>1)</sup> Однако здесь имеется возражение, с которым мы встретимся в § 12.



После этих шагов кэт и бра соответствуют кэт и бра из § 3, но они являются значительно более общими. Итак мы видим, что, следуя методам § 6, мы получаем сначала четыре рода величин, которые затем попарно отождествляются введением фундаментального тензора. Используя метод Дирака, мы сразу получаем только два рода величин, тогда как фундаментальный тензор вообще не появляется в явном виде.

Длина кэт (бра) может быть теперь определена как корень квадратный из  $\langle A|A \rangle$ , а ортогональность кэт (бра) — с помощью уравнения

$$\langle A|B \rangle = 0. \quad (7.7)$$

Приложение метода § 6 к линейным преобразованиям кэт  $\rightarrow$  кэт или бра  $\rightarrow$  бра приводит к двум различным типам линейных операторов: кэт-бра и бра-кэт. Возвращаясь теперь к обозначениям § 4, мы можем записать произведение типа  $\bar{u}T v$  в следующих формах:

$$\bar{u}T v = v^{\dagger\dagger} T u = v^{\dagger} T \bar{u}, \quad (7.8)$$

откуда мы видим, что это выражение может быть также записано с оператором  $T^{\dagger}$  типа бра-кэт вместо оператора  $T$  типа кэт-бра простым изменением порядка сомножителей. Это обстоятельство может быть использовано для дальнейшего упрощения обозначения, если употреблять только кэт-бра операторы и обозначать их некоторой буквой без каких-либо скобок. Ниже приводится перечень ряда таких произведений и некоторые соответствующие формы записи по методу коренных букв и индексов:

$$\begin{aligned} \alpha|A \rangle &: \alpha_{\lambda}^{\alpha} A^{\lambda}, \quad \alpha^{\alpha\bar{\lambda}} A_{\bar{\lambda}}, \quad \alpha_{\bar{\lambda}}^{\alpha} A_{\bar{\lambda}}; \\ \langle B|\alpha &: B_{\alpha}^{\alpha\lambda}, \quad \bar{B}^{\alpha\lambda}, \quad \bar{B}^{\alpha}_{\bar{\lambda}}; \\ \langle B|\alpha|A \rangle &: B_{\alpha}^{\alpha\lambda} A^{\lambda} = \bar{B}^{\alpha\lambda} A^{\lambda} = B_{\alpha}^{\alpha\bar{\lambda}} A_{\bar{\lambda}} = \bar{B}^{\alpha}_{\bar{\lambda}} A_{\bar{\lambda}}; \\ \langle B|\alpha\beta|A \rangle &: B_{\alpha}^{\alpha\beta} \beta^{\beta\lambda} A^{\lambda}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Если задан кэт-бра оператор  $\alpha$ , мы можем определить оператор  $\beta$  такой, что

$$\overline{\alpha|A} \rangle = \langle A|\beta, \quad (7.10)$$

или в другой записи

$$\bar{\alpha}_{\lambda}^{\bar{x}} \bar{A}^{\bar{\lambda}} = \bar{A}_{\rho} \beta_{\lambda}^{\rho} \alpha^{\lambda \bar{x}} = \bar{A}^{\bar{\lambda}} \beta_{\lambda}^{\bar{x}}. \quad (7.11)$$

Следовательно,  $\beta$  соответствует  $\bar{\alpha}$  из § 4. Но в исчислении Дирака  $\bar{\alpha}$ , т. е.  $\alpha_{\lambda}^{\bar{x}}$ , никогда не встречается, так как это бра-кэт оператор. Отсюда удобно обозначать через  $\bar{\alpha}$  то, что в § 4 обозначалось как  $\alpha$ , и называть  $\bar{\alpha}$  сопряженным<sup>1)</sup>  $\alpha$ . Из правила применения операции  $\bar{\phantom{x}}$  к произведениям мы получаем правило:

*Сопряжение произведения есть произведение сопряженных сомножителей, взятых в обратном порядке.*

Тождественный оператор, соответствующий  $A_{\lambda}^{\bar{x}}$ , а также  $\alpha_{\lambda \bar{x}}$  и  $\alpha^{\lambda \bar{x}}$  в § 3 теперь является просто числом 1. Наконец-то здесь появляется фундаментальный тензор!

Векторные множества, соответствующие ко- или контравариантным тензорам любой заданной валентности, могут быть получены по методам § 6. Каждая величина этого типа является суммой произведений ко- или контравариантных векторов. Следовательно, выражение

$$|A_1\rangle |A_2\rangle \dots |A_u\rangle \quad (7.12)$$

и суммы таких выражений могут рассматриваться как символы элементов векторных множеств, соответствующих (кэт)-тензорам валентности  $u$ . То же справедливо для бра-векторов. Если не возникнут недоразумения, можно использовать обозначения  $|A_1 \dots A_u\rangle$ . Это усовершенствование символики особенно важно в тех случаях, когда приходится иметь дело со сложными динамическими системами, такими, как системы частиц со статистикой Бозе (соответствующих симметричным тензорам) или со статистикой Ферми (соответствующих поливекторам).

Собственные значения оператора определяются, как в § 5. Если мы имеем

$$\alpha |A\rangle = \alpha' |A\rangle \quad (7.13)$$

<sup>1)</sup> Дирак использует выражения «присоединенный» и «комплексно сопряженный». Мы предпочитаем использовать термин «комплексно сопряженный» только для чисел, а термин «сопряженный» для всех остальных объектов.

для некоторого оператора  $\alpha$ , где  $\alpha'$  — скаляр, то  $\alpha'$  называется *правым собственным значением*  $\alpha$ , а  $|A\rangle$  — *собственным кэт*, принадлежащим этому собственному значению. *Левое собственное значение* определяется аналогичным образом. Если  $\alpha$  — эрмитов, т. е.  $\alpha = \bar{\alpha}$ , то (7.13) может быть записано в виде

$$\langle A | \alpha = \bar{\alpha}' \langle A |. \quad (7.14)$$

Но из (7.13) и (7.14) следует, что

$$\langle A | \alpha | A \rangle = \alpha' = \bar{\alpha}', \quad (7.15)$$

и это доказывает, что каждое собственное значение *действительно* и одновременно является правым и левым и что сопряженный каждому собственному кэт (бра) является собственным бра (кэт), принадлежащим тому же собственному значению.

Если  $\alpha'$  и  $\alpha''$  являются двумя *различными* собственными значениями  $\alpha$  и  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$  — принадлежащие им собственные кэт, то мы имеем

$$\langle A | \alpha | B \rangle = \alpha' \langle A | B \rangle = \alpha'' \langle A | B \rangle, \quad (7.16)$$

и, следовательно,

$$\langle A | B \rangle = 0. \quad (7.17)$$

Отсюда *собственные кэт (бра), принадлежащие различным собственным значениям эрмитова оператора, являются взаимно ортогональными.*

Если  $|A\rangle$  — собственный кэт, то и произведение  $|A\rangle$  на любой скаляр также является собственным кэт, принадлежащим тому же собственному значению. Это можно использовать для нормировки собственного кэт (бра) выбором скалярного множителя таким образом, чтобы норма принимала любое подходящее значение  $r$ . Мы называем это «нормировкой на  $r$ »<sup>1)</sup>.  $r$  может принимать любое действительное значение, например 1 или  $\infty$  (некоторого рода). Скалярный множитель, необходимый для нормировки кэт (бра), фиксируется только с точностью до скалярного множителя вида  $e^{i\varphi}$

<sup>1)</sup> Мы используем термин «нормировка» в более общем смысле, чем Дирак. Его нормировка всегда есть нормировка на единицу.

(фазовый множитель). Но мы предположим, что процесс нормировки включает выбор фазового множителя. Таким образом, нормированный кэт (бра) полностью фиксирован.

## 8. Физическая интерпретация <sup>1)</sup>

Чтобы понять необходимость дальнейших усовершенствований, мы должны иметь некоторое представление относительно физической интерпретации кэт, бра и линейных операторов. В квантовой механике динамическая система может находиться в различных *состояниях*, и результат измерения динамических переменных (например, компонент некоторой физической величины) зависит от того, в каком состоянии находится система. Однако, в отличие от классической механики, если система находится в произвольном состоянии, результат измерения не может быть предсказан. Если динамическая переменная вообще может быть измерена, возможно лишь предсказать множество ее допустимых значений и для каждого из них вероятность того, что оно может быть результатом измерения. После измерения система как бы «перескакивает» в некоторое специальное состояние относительно этой переменной, так как в этом новом состоянии результат второго измерения *той же* переменной будет всегда совпадать с результатом первого измерения. Например, в классической механике положение точки на оси  $x$  задается одной динамической переменной  $x$ , и количество состояний равно количеству возможных значений  $x$ . Если точка находится в состоянии  $x = 3$ , то каждое измерение в этом состоянии дает с достоверностью результат  $x = 3$ . Но в квантовой механике существуют другие состояния (и мы знаем, как их осуществить), в которых имеется только определенная вероятность обнаружить измерением  $x$ , например между 3 и  $3 \frac{1}{2}$ .

В матричном исчислении каждый линейный оператор связан с рядом чисел, его собственными значениями. Динамические переменные всегда действительны, а мы знаем, что эрмитовы операторы имеют только действительные собственные

---

<sup>1)</sup> См. Дирак 1947. 5, р. 45 и далее.

значения. Отсюда представляется возможным связать каждую динамическую переменную с эрмитовым оператором (называемым также *действительным* оператором) и предположить, что результатом измерения (если оно вообще возможно) может быть только одно из собственных значений. Это приводит к предположению, что каждому состоянию соответствует некоторый кэт (и его сопряженный бра), определенный с точностью до скалярного множителя. Так как мы знаем, что каждому собственному значению соответствует собственный кэт или множество собственных кэт, мы можем ожидать, что *собственные состояния*, т. е. состояния, соответствующие этим собственным векторам, являются состояниями, в которых результатом измерения с достоверностью является это собственное значение. Что касается других состояний, то необходимо предположить, что их соответствующие кэт могут быть выражены линейно через те собственные кэт, чьи собственные значения могут быть возможными результатами измерения в этом состоянии. Но так как это справедливо для каждого другого состояния, это значит, что оператор *должен иметь достаточное количество собственных кэт, чтобы каждый кэт мог быть выражен в виде их линейной комбинации*. Динамическая переменная, соответствующая такому эрмитову оператору, называется *наблюдаемой*. Говорят, что состояния наблюдаемой, а также соответствующие кэт (бра) образуют *полную систему*.

Как мы видели в § 5, эрмитов оператор в  $U_n$  всегда имеет в точности  $n$  взаимно ортогональных собственных кэт. Но в общем случае число собственных значений может быть счетным или несчетно бесконечным и эти значения могут быть *дискретными*, т. е. распределенными дискретно, или непрерывными, т. е. состояниями из всех чисел одного или нескольких интервалов. Таким образом, мы имеем следующие возможности:

только дискретные: . . . . .  
 только непрерывные: \_\_\_\_\_  
 те и другие: . . . \_\_\_\_\_ . . . \_\_\_\_\_ . . .

Если  $\xi$  — эрмитов оператор, мы обозначим дискретные собственные значения через  $\xi^r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ). Если по какой-либо причине мы будем использовать из непрерывных

собственных значений только счетное множество, мы будем обозначать это множество через  $\xi^s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Наконец, каждое из  $\xi'$ ,  $\xi''$ , ... обозначает действительную переменную, которая может принимать все значения из области непрерывных собственных значений <sup>1)</sup>. Соответствующие им собственные кэт обозначаются  $|\xi'\rangle$ ,  $|\xi^s d\rangle$ ,  $|\xi'c\rangle$ ,  $|\xi''c\rangle$ , ... Это пример заполнения ящиков информацией по Дираку <sup>2)</sup>.

Предположим теперь, что  $\xi$  наблюдаемая. Тогда каждый кэт  $|P\rangle$  может быть выражен в виде суммы дискретных собственных кэт вместе со счетным множеством собственных кэт из области непрерывных собственных значений и интеграла от непрерывных собственных кэт. Таким образом, имеется уравнение вида

$$|P\rangle = \sum_r c^r |\xi^r\rangle + \sum_s c^s |\xi^s d\rangle + \int c(\xi') |\xi'c\rangle d\xi', \quad (8.1)$$

где интеграл берется по области, в которой  $c^r$ ,  $c^s$  и  $c(\xi')$  конечны,  $|\xi^r\rangle$  и  $|\xi^s d\rangle$  нормированы на 1, а  $|\xi'c\rangle$  нормирован некоторым подходящим образом.

Если два кэт  $|P\rangle$  и  $|Q\rangle$  могут быть оба записаны в виде интегралов по области некоторых непрерывных собственных значений  $\xi'$ , т. е.

$$|P\rangle = \int_P c(\xi') |\xi'c\rangle d\xi', \quad |Q\rangle = \int_Q c(\xi') |\xi'c\rangle d\xi', \quad (8.2)$$

то мы имеем

$$\langle P|Q\rangle = \int \int_P c(\xi'') c(\xi') \langle \xi''c | \xi'c\rangle d\xi' d\xi'' \quad (8.3)$$

В первом интеграле

$$\int_P c(\xi'') c(\xi') \langle \xi''c | \xi'c\rangle d\xi'' \quad (8.4)$$

$|\xi''c\rangle$  ортогонален  $|\xi'c\rangle$  во всей области, кроме точки  $\xi'' = \xi'$ , и  $c$  и  $c$  конечны. Но это значит, что интеграл должен

<sup>1)</sup> Здесь мы несколько отходим от Дирака, чтобы прояснить ситуацию для начинающего.

<sup>2)</sup>  $c$  и  $d$  — здесь не множители, а обозначают соответственно «непрерывный» (continuous) и «дискретный» (discrete).

равняться нулю, если  $\langle \xi'' c | \xi' c \rangle$  конечно. Но  $\langle P | Q \rangle$  не может всегда равняться нулю, и, следовательно,  $| \xi' c \rangle$  не может быть нормирован на любое конечное число  $r$ . Интеграл (8.4) может быть записан в виде

$${}_P c(\xi') {}_Q c(\xi') \int \langle \xi'' c | \xi' c \rangle d\xi'', \quad (8.5)$$

а этот интеграл может быть конечным, если только  $\langle \xi'' c | \xi' c \rangle$  равно с точностью до скалярного множителя  $\delta(\xi'' - \xi')$ . Следовательно, конечные скаляры  ${}_P c(\xi')$  и  ${}_Q c(\xi')$  могут быть всегда преобразованы таким образом, чтобы

$$\langle \xi'' c | \xi' c \rangle = \delta(\xi'' - \xi'). \quad (8.6)$$

Мы называем это *нормировкой на  $\delta$ -функцию*. Это бесконечная нормировка, но очень специального вида.

Можно доказать, что разложение (8.1) единственно, если только никакие два члена, входящие в суммы, не принадлежат одинаковому собственному значению<sup>1)</sup>. Это условие всегда выполняется, если каждому собственному значению  $\xi$  принадлежит только одно собственное состояние (т. е.  $\infty'$  собственных кэт, отличающихся только скалярным множителем).

## 9. Функции наблюдаемых<sup>2)</sup>

Под функцией  $f(\xi)$  наблюдаемой мы понимаем такую наблюдаемую, что измерение  $f(\xi)$  в любом состоянии дает с достоверностью результат  $f(\xi')$  тогда и только тогда, когда измерение  $\xi$  в том же состоянии дает с достоверностью результат  $\xi'$ , где  $\xi'$  теперь обозначает любое собственное значение. Это приводит к математическому определению

$$f(\xi) | \xi' \rangle = f(\xi') | \xi' \rangle, \quad (9.1)$$

которое справедливо для любого собственного значения  $\xi'$  при условии, что функция  $f(x)$  действительного переменного  $x$  определена в области, содержащей все собственные

<sup>1)</sup> Ср. Дирак 1947. 5. р. 40.

<sup>2)</sup> Там же р. 41 и далее.

значения  $\xi$ , и что для каждого из этих собственных значений  $f(x)$  однозначна. Отсюда мы видим, что значения  $f(x)$  для  $x$ , не являющихся собственными значениями  $\xi$ , не влияют на функцию  $f(\xi)$ . Можно показать, что сумма и произведение функций от  $\xi$  и функция функции от  $\xi$  также являются функциями от  $\xi$ .

Физическая интерпретация результата измерения должна быть теперь дополнена выражением для вероятности этого результата. Мы предполагаем, что для любого состояния  $|X\rangle$  действительное число  $\langle X|\xi|X\rangle$  представляет среднее значение результата измерения  $\xi$  в этом состоянии, если только  $X$  нормирован на 1:  $\langle X|X\rangle = 1$ . Это можно выразить другим способом. Пусть  $\delta_{xa}$  есть функция  $x$ , которая принимает значение 1 при  $x = a$ , и значение 0 при  $x \neq a$ . Тогда мы можем построить функцию  $\delta_{\xi a}$  наблюдаемой  $\xi$  и скалярной переменной  $a$ . Для всех значений  $x$ , которые не являются собственными значениями  $\xi$ , значения  $\delta_{xa}$  не влияют на функцию  $\delta_{\xi a}$ . Отсюда, если  $a$  не является собственным значением  $\xi$ , мы имеем  $\delta_{\xi a} = 0$ . Если же  $a$  есть собственное значение  $\xi$ , то результат измерения  $\delta_{\xi a}$  равен соответственно единице или нулю в зависимости от того, совпадает ли состояние с собственным состоянием, принадлежащим  $a$ , или нет. Теперь, согласно нашему предположению, для каждого значения  $a$

$$P_a \stackrel{\text{def}}{=} \langle X|\delta_{\xi a}|X\rangle \quad (9.2)$$

есть среднее значение результата измерения  $\delta_{\xi a}$  в состоянии  $|X\rangle$ .  $P_a = 0$ , если  $a$  не является собственным значением  $\xi$ , так как в этом случае  $\delta_{\xi a}$  исчезает.

Если  $a$  — собственное значение  $\xi$ , которое не принадлежит области собственных значений, то каждый раз, когда измерение  $\xi$  дает  $a$  (не  $a$ ), измерение  $\delta_{\xi a}$  дает единицу (нуль). Если теперь выполнено большое число  $N$  измерений  $\xi$  и  $\delta_{\xi a}$  и если измерение  $\xi$  дает значение  $a$   $N'$  раз и другое собственное значение  $N - N'$  раз, то измерение  $\delta_{\xi a}$  дает единицу  $N'$  раз и нуль  $N - N'$  раз. Отсюда среднее значение  $P_a = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N'}{N}$  является вероятностью того, что  $\xi$  имеет значение  $a$  в состоянии  $X$ .

В случае, если  $a$  принадлежит области собственных значений, вероятность найти в точности  $a$ , конечно, равна



нулю. Однако здесь мы интересуемся вероятностью  $P(a) da$  того, что  $\xi$  имеет значение между  $a$  и  $a + da$ . При этом  $P(a) da$  является функцией интервала. Пусть теперь  $E_x^{da}$  есть функция точки-интервала ван Данцига, которая принимает значение 1, если  $x$  принадлежит интервалу  $a$  и  $a + da$ , и равна нулю во всех остальных случаях (ср. § 7). Тогда  $E_\xi^{da}$  является соответствующей функцией интервала-наблюдаемой<sup>1)</sup>. Если интервал  $da$  не содержит собственного значения  $\xi$ , мы имеем  $E_\xi^{da} = 0$ . Но если интервал содержит одно или более собственных значений, то результат измерения  $E_\xi^{da}$  равен соответственно единице или нулю в зависимости от того, принадлежат ли состояния собственным значениям из интервала или нет. По той же причине, что и выше, мы видим, что теперь

$$P(a) da = \langle X | E_\xi^{da} | X \rangle, \quad (9.3)$$

если только  $|X\rangle$  нормирован на единицу.

Если  $|X\rangle$  не нормирован на единицу,  $P(a)$  и  $P(a) da$  будут *пропорциональны* соответственно вероятности того, что  $\xi$  имеет значение  $a$  и принадлежит интервалу.

Очевидно, мы имеем

$$\delta_{\xi a} |\xi'\rangle = \delta_{\xi' a} |\xi'\rangle = \begin{cases} |\xi'\rangle & \text{для } \xi' = a, \\ 0 & \text{для } \xi' \neq a, \end{cases} \quad (9.4)$$

так как  $|\xi'\rangle$  является собственным состоянием  $\delta_{\xi a}$ , принадлежащим нулевому собственному значению. Аналогично

$$E_\xi^{da} |\xi'\rangle = E_{\xi'}^{da} |\xi'\rangle = \begin{cases} |\xi'\rangle, & \xi' \in [a, a + da], \\ 0 & \xi' \notin [a, a + da]. \end{cases} \quad (9.5)$$

## 10. Представления и матрицы

Как мы видели в § 5, каждое множество эрмитовых операторов в  $E_n$  имеет по крайней мере одну полную систему общих собственных значений тогда и только тогда, когда все операторы коммутируют. Можно показать, что это справедливо и в общем случае для наблюдаемых:

<sup>1)</sup> Здесь мы несколько отходим от Дирака (1947.5, р. 48), так как он не вводит в ясной форме функции интервала.

*Множество наблюдаемых имеет по крайней мере одну полную систему общих собственных состояний тогда и только тогда, когда наблюдаемые коммутируют*<sup>1)</sup>.

Однако для получения представлений этого недостаточно. Разложение (8.1) единственно тогда и только тогда, когда никакие два члена не принадлежат одному собственному значению, а это можно обеспечить, только предполагая, что полная система собственных состояний наблюдаемой такова, что каждому собственному значению принадлежит одно и только одно собственное состояние. Если наблюдаемая или множество коммутирующих наблюдаемых удовлетворяют этому условию, то говорят, что они образуют *полную систему коммутирующих наблюдаемых*. В общем случае наблюдаемая или система коммутирующих наблюдаемых не образуют полной системы, но имеется весьма важная теорема:

*Каждая совокупность коммутирующих наблюдаемых может быть дополнена до полной системы добавлением к ней некоторых наблюдаемых*<sup>2)</sup>.

Если задана полная система коммутирующих наблюдаемых, мы называем собственные кэт (бра), принадлежащие общим собственным значениям и нормированные подходящим образом, системой (всегда ортогональной) *базисных кэт (бра)*. Их удобно обозначать с помощью соответствующих собственных значений. Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_u$  — полная система коммутирующих наблюдаемых и пусть  $\xi'_1, \dots, \xi'_u$  — собственные значения (дискретные или непрерывные), принадлежащие некоторому собственному кэт. Тогда этот кэт (нормированный подходящим образом) будет обозначаться через  $|\xi'_1, \dots, \xi'_u\rangle$ , а сопряженный бра — через  $\langle \xi'_1, \dots, \xi'_u |$ . Базисные кэт аналогичны ортогональным базисным векторам  $\underset{i}{i}^{\alpha}$  в тензорном исчислении, а системы чисел  $\xi'_1, \dots, \xi'_u$  служат для того, чтобы отличать их от остальных кэт и друг от друга, подобно тому как коренная буква  $\underset{i}{i}$  служит для отличия базисных векторов  $\underset{i}{i}^{\alpha}$  от других векторов и друг от друга.

<sup>1)</sup> Ср. для доказательства Дирак 1947.5, р. 49.

<sup>2)</sup> Там же, р. 53 и далее.

Однако обозначение наших более общих кэт коренной буквой с одним индексом оказалось бы не всегда приемлемым, так как часто нам необходимо обозначение, которое ясно показывает, к каким собственным значениям принадлежит базисный кэт. В этом состоит причина, почему в специальном случае, когда рассматриваются только наблюдаемые, а базисные кэт определяются полной системой коммутирующих наблюдаемых, и когда, сверх того, базисные кэт образуют бесконечное счетное или несчетное множество, столь эффективным является введение обозначений с ящиками вида  $\langle |$  и  $| \rangle$ , в которых может содержаться вся эта ценная информация.

Введя таким образом систему ортогональных базисных кэт и их сопряженных бра, мы можем построить *ортогональное представление*, т. е. каждый кэт, бра или линейный оператор могут быть *представлены множеством действительных или комплексных чисел*. Для кэт  $|P\rangle$  или бра  $\langle Q|$  мы получаем представления

$$\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | P \rangle, \quad \langle Q | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle, \quad (10.1)$$

а для оператора  $\alpha$  — представление

$$\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle. \quad (10.2)$$

Числа в представлении соответствуют ортогональным компонентам в  $U_n$ , и нет причин, почему мы не могли бы называть их *ортогональными компонентами относительно заданной системы ортогональных базисных кэт*.

Наоборот, мы хотим теперь восстановить  $|P\rangle$ ,  $\langle Q|$  и  $\alpha$ , если заданы их ортогональные компоненты. Предположим сначала, что имеется только одна наблюдаемая  $\xi$ , образующая полную систему. Тогда выражение (8.1)

$$|P\rangle = \sum_r c^r |\xi^r\rangle + \sum_s c^s |\xi^s d\rangle + \int c(\xi') |\xi' c\rangle d\xi' \quad (10.3)$$

единственно, если  $|\xi^r\rangle$ ,  $|\xi^s d\rangle$  и  $|\xi' c\rangle$  нормированы. Представление  $P$  состоит из ортогональных компонент  $\langle \xi^r | P \rangle$  и  $\langle \xi' c | P \rangle$ . Пусть  $|\xi^r\rangle$  и  $|\xi^s d\rangle$  нормированы на единицу, а  $|\xi' c\rangle$  — на  $\rho^{-1} \delta$ , где  $\rho$  — функция  $\xi'$ ,  $\xi'$ , называемая *весовой функцией* представления. Теперь второй член в первой

части (10.3) может быть записан в виде

$$\sum_s c^s |\xi^s d\rangle = \sum_s \int c^s \alpha^s \delta(\xi^s - \xi') |\xi' c\rangle d\xi', \quad (10.4)$$

где  $\alpha^s$  — скалярный множитель, такой, что

$$\alpha^s |\xi^s c\rangle = |\xi^s d\rangle. \quad (10.5)$$

Здесь  $|\xi^s d\rangle$  нормирован на единицу, а  $|\xi^s c\rangle$  — на  $\rho^{-1}\delta$ . Таким образом,  $P$  может быть теперь представлен в виде

$$|P\rangle = \sum_r c^r |\xi^r\rangle + \int c(\xi') |\xi'\rangle d\xi', \quad (10.6)$$

где  $|\xi^r\rangle$  заменяет  $|\xi' c\rangle$  и  $c(\xi')$  является уже не обычной ограниченной функцией, а суммой обычной ограниченной функции и функции интервала, связанной с  $\delta$ -функцией. Умножая (10.6) на  $\langle \xi^r |$  и  $\rho'' \langle \xi'' |$ , мы находим:

$$\begin{aligned} (a) \quad \langle \xi^r | P \rangle &= c^r, \\ (b) \quad \rho'' \langle \xi'' | P \rangle &= \int c(\xi') \rho'' \langle \xi'' | \xi' \rangle d\xi' = c(\xi''), \end{aligned} \quad (10.7)$$

и после подстановки этих значений в (10.6) мы получаем выражение  $|P\rangle$  через его ортогональные компоненты

$$|P\rangle = \sum_r |\xi^r\rangle \langle \xi^r | P \rangle + \int |\xi'\rangle \rho' d\xi' \langle \xi' | P \rangle. \quad (10.8)$$

Это можно записать также в виде формулы

$$\sum_r |\xi^r\rangle \langle \xi^r | + \int |\xi'\rangle \rho' d\xi' \langle \xi' | = I. \quad (10.9)$$

Если имеется полная система коммутирующих наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_u$ , то мы будем иметь здесь дело со случаем, когда  $\xi_1, \dots, \xi_v$  имеют только дискретные собственные значения, а  $\xi_{v+1}, \dots, \xi_u$  — только непрерывные. Тогда общий собственный кэт  $|\xi'_1 \dots \xi'_u\rangle$  может быть нормирован уравнением

$$\begin{aligned} \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle &= \\ &= \rho'^{-1} \delta_{\xi'_1 \xi''_1} \dots \delta_{\xi'_v \xi''_v} \delta(\xi'_{v+1} - \xi''_{v+1}) \dots \delta(\xi'_u - \xi''_u), \end{aligned} \quad (10.10)$$

и вместо (10.8) и (10.9) мы получаем

$$|P\rangle = \sum_{\xi'_1 \dots \xi'_v} \int |\xi'_1 \dots \xi'_u\rangle \rho' d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | P \rangle \quad (10.11)$$

и

$$\sum_{\xi'_1 \dots \xi'_v} \int |\xi'_1 \dots \xi'_u\rangle \rho' d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | = I. \quad (10.12)$$

Из этого уравнения видно, что, используя  $\rho'$ , мы вводим некоторый базисный объем в пространстве с координатами  $\xi'_{v+1}, \dots, \xi'_u$ .

Аналогичным образом может быть рассмотрен общий случай, когда все наблюдаемые имеют как дискретные, так и непрерывные собственные значения.

Если имеется только одна наблюдаемая и число собственных состояний конечно, то ортогональные компоненты оператора (10.2) образуют обычную матрицу. Рассмотрим сначала случай полной системы коммутирующих наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_u$  и *счетного* числа общих собственных состояний, следовательно, только дискретных собственных значений. Тогда ортогональные компоненты (10.2) снова могут рассматриваться как элементы матрицы, но уже бесконечной. Если обозначить собственные значения через  $\xi^1, \xi^2, \dots$ , то каждый элемент матрицы имеет вид  $\langle \xi^r | \alpha | \xi^s \rangle$ ;  $r, s = 1, 2, \dots$ . Отсюда сразу следует, что  $\xi_1, \dots, \xi_u$  и все наблюдаемые, являющиеся их функциями, представляются *диагональными матрицами*, т. е. с отличными от нуля элементами только на главной диагонали. Тожественный оператор представляется *единичной матрицей*, т. е. диагональной матрицей, элементами которой являются только  $+I$ .

Если  $\alpha$  — эрмитов,  $\alpha = \bar{\alpha}$ , то

$$\overline{\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle} = \langle \xi''_1 \dots \xi''_u | \alpha | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle. \quad (10.13)$$

Отсюда видно, что матрица эрмитова оператора является эрмитовой матрицей.

Из (10.10) при нормировке на единицу следует, что

$$\begin{aligned} & \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha \beta | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle = \\ & = \sum \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi'''_1 \dots \xi'''_u \rangle \langle \xi'''_1 \dots \xi'''_u | \beta | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle, \end{aligned} \quad (10.14)$$

а это значит, что матрица произведения может быть получена из матриц сомножителей по обычным правилам умножения матриц.

Аналогично из выражения

$$\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | P \rangle = \sum \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle \langle \xi''_1 \dots \xi''_u | P \rangle \quad (10.15)$$

следует, что если  $|P\rangle$  рассматривать как матрицу со счетным числом строк и одним столбцом, то имеют место обычные правила матричного умножения.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда  $\xi_1, \dots, \xi_v$  имеют только дискретные собственные значения, а  $\xi_{v+1}, \dots, \xi_n$  — только непрерывные. Снова мы имеем множество ортогональных компонент  $\alpha$ , но это множество несчетно. Тем не менее все множество чисел рассматривается как матрица, представляющая  $\alpha$ . Вместо (10.14) мы получаем согласно (10.12) для  $\rho' = I$

$$\begin{aligned} \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha \beta | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle &= \\ &= \sum_{\xi'_1 \dots \xi'_v} \int \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi'''_1 \dots \xi'''_u \rangle d\xi'''_{v+1} \dots \\ &\dots d\xi'''_u \langle \xi'''_1 \dots \xi'''_u | \beta | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle \end{aligned} \quad (10.16)$$

в качестве правила умножения для этих обобщенных матриц. Вместо (10.15) мы находим

$$\begin{aligned} \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | P \rangle &= \\ &= \sum_{\xi'_1 \dots \xi'_v} \int \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle d\xi''_{v+1} \dots d\xi''_u \langle \xi''_1 \dots \xi''_u | P \rangle, \end{aligned} \quad (10.17)$$

откуда видно, что  $|P\rangle$  может рассматриваться как обобщенная матрица с несчетным числом строк и одним столбцом.

Для  $\alpha = \xi_j$  и  $\rho' = I$  мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \xi_j | \xi''_1 \dots \xi''_u \rangle &= \\ &= \xi'_j \delta_{\xi'_1 \xi''_1} \dots \delta_{\xi'_v \xi''_v} \delta(\xi'_{v+1} - \xi''_{v+1}) \dots \delta(\xi'_u - \xi''_u), \end{aligned} \quad (10.18)$$

а это означает, что отличные от нуля элементы расположены только на главной диагонали и что эти элементы имеют весьма частный вид произведения  $(u - v)$   $\delta$ -функций.

Пусть теперь  $\alpha$  есть оператор, коммутирующий с  $\xi_1$ . Тогда согласно (10.16) и (10.18) мы имеем

$$\begin{aligned} & \int \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi'''_1 \dots \xi'''_u \rangle d\xi'''_{v+1} \dots d\xi'''_{\xi'_1} \delta_{\xi'_1 \xi'_1} \dots \\ & \dots \delta_{\xi'''_v \xi'''_v} \delta(\xi'''_{v+1} - \xi'''_{v+1}) \dots \delta(\xi'''_u - \xi'''_u) = \\ & = \int \xi'_1 \delta_{\xi'_1 \xi'_1} \dots \delta_{\xi'_v \xi'_v} \delta(\xi'''_{v+1} - \xi'''_{v+1}) \dots \delta(\xi'_u - \xi'''_u) d\xi'''_{v+1} \dots \\ & \dots d\xi'''_u \langle \xi'''_1 \dots \xi'''_u | \alpha | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle, \quad (10.19) \end{aligned}$$

или, используя свойства  $\delta$ -функций,

$$(\xi'_1 - \xi'''_1) \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi'''_1 \dots \xi'''_u \rangle = 0. \quad (10.20)$$

Но  $\xi_1$  имеет только дискретные собственные значения, и, следовательно,  $\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi'''_1 \dots \xi'''_u \rangle$  должно иметь в качестве множителя  $\delta_{\xi'_1 \xi'''_1}$ . Однако если мы возьмем  $\xi_{u+1}$  вместо  $\xi_1$ , те же соображения приводят к заключению, что  $\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \alpha | \xi'''_1 \dots \xi'''_u \rangle$  содержит в качестве множителя  $\delta(\xi'_{u+1} - \xi'''_{u+1})$ . Отсюда, если  $\alpha$  коммутирует со всеми наблюдаемыми  $\xi_1, \dots, \xi_u$ , то все элементы вне главной диагонали исчезают, а все элементы на главной диагонали имеют ту же специальную структуру, что и у матриц  $\xi_1, \dots, \xi_u$ . Все матрицы с этой специальной структурой элементов коммутируют. Коммутация является весьма важным свойством матриц, и поэтому для матриц с несчетным числом строк и столбцов мы используем термин *диагональная матрица* только тогда, когда ее элементы имеют эту специальную структуру. Недиagonальные матрицы с несчетным числом строк и столбцов могут обладать тем свойством, что все элементы вне главной диагонали исчезают. Они часто встречаются в квантовой механике, но они не коммутируют с диагональными матрицами.

### 11. Вероятности и ортогональные компоненты<sup>1)</sup>

Пусть имеется полная система коммутирующих наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_u$ , такая, что первые  $v$  имеют только дискретные собственные значения, а остальные  $u - v$  — только непрерывные. Нас интересует вероятность того, что результат измерения всех этих наблюдаемых в состоянии  $|S\rangle$  есть  $\xi'_1, \dots, \xi'_v$  для первых  $v$ -наблюдаемых и лежит в интервалах

$$[\xi'_{v+1}, \xi'_{v+1} + d\xi'_{v+1}], \dots, [\xi'_u, \xi'_u + d\xi'_u]$$

для остальных  $u - v$ -наблюдаемых. Согласно нашим предположениям в § 9 эта вероятность равна

$$P_{\xi'_1 \dots \xi'_u} d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u = \\ = \langle S | \delta_{\xi_1 \xi'_1} \dots \delta_{\xi_v \xi'_v} E_{\xi_{v+1}}^{d\xi'_{v+1}} \dots E_{\xi_u}^{d\xi'_u} | S \rangle, \quad (11.1)$$

если  $|S\rangle$  нормирован на единицу.

Полагая для удобства  $u = 2$ ,  $v = 1$  и используя (10.12) при  $\rho' = 1$ , мы получаем согласно (9.4, 5)

$$P_{\xi'_1 \xi'_2} d\xi'_2 = \sum_{\xi''_1} \int \langle S | \delta_{\xi_1 \xi'_1} E_{\xi_2}^{d\xi'_2} | \xi''_1 \xi''_2 \rangle d\xi''_2 \langle \xi''_1 \xi''_2 | S \rangle = \\ = \langle S | \xi'_1 \xi'_2 \rangle \langle \xi'_1 \xi'_2 | S \rangle d\xi'_2 = |\langle \xi'_1 \xi'_2 | S \rangle|^2 d\xi'_2. \quad (11.2)$$

Аналогичным образом находим в более общем случае (11.1)

$$P_{\xi'_1 \dots \xi'_u} d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u = |\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | S \rangle|^2 d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u, \quad (11.3)$$

и это означает, что плотность вероятности результатов измерения полной системы наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_u$  задается квадратами абсолютных значений ортогональных компонент состояния относительно полной системы общих собственных состояний.

Ортогональные компоненты  $\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | S \rangle$  не являются обязательно действительными и могут содержать множитель вида  $e^{i\varphi}$ . Они называются *амплитудами вероятности*, а этот множитель называется *фазовым множителем*. Он не влияет на вероятность.

<sup>1)</sup> См. Дирак 1947.5, р. 45 и далее, р. 72 и далее.



Если  $|S\rangle$  нормирован не на единицу, а на  $\delta$ , то  $|\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | S \rangle|^2 d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u$  не являются вероятностями, но они *пропорциональны вероятностям*. В этом случае ортогональные компоненты  $\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | S \rangle$  называются *относительными амплитудами вероятности*.

Мы часто интересуемся двумя различными представлениями одной и той же динамической системы. Пусть  $\eta_1, \dots, \eta_w$  есть другая полная система коммутирующих наблюдаемых (в общем случае не коммутирующих с  $\xi$ ), и пусть  $\eta_1, \dots, \eta_x$  имеют только дискретные собственные значения, а  $\eta_{x+1}, \dots, \eta_w$  — только непрерывные. Тогда из (10.12) и соответствующих формул для  $\eta$  мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} \langle \eta'_1 \dots \eta'_w | P \rangle &= \\ &= \sum_{\xi'_1 \dots \xi'_v} \int \langle \eta'_1 \dots \eta'_w | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle d\xi'_{v+1} \dots d\xi'_u \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | P \rangle, \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | P \rangle &= \\ &= \sum_{\eta'_1 \dots \eta'_x} \int \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \eta'_1 \dots \eta'_w \rangle d\eta'_{x+1} \dots d\eta'_w \langle \eta'_1 \dots \eta'_w | P \rangle, \end{aligned} \quad (11.5)$$

которые выражают ортогональные компоненты  $P$  относительно систем общих собственных состояний наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_u$  и наблюдаемых  $\eta_1, \dots, \eta_w$  друг через друга. Мы уже видели в § 5, что преобразования, которые переводят полную ортогональную систему единичных кэт в другую такую же систему, являются унитарными преобразованиями. Здесь мы имеем полные системы, состоящие из бесконечного числа кэт, причем кэт, нормированных на  $\delta$ , а не единичных. Тем не менее (11.4) и (11.5) являются унитарными преобразованиями, как это видно из соотношения (ср. (3.7) и (7.6a))

$$\overline{\langle \eta'_1 \dots \eta'_w | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle} = \langle \xi'_1 \dots \xi'_u | \eta'_1 \dots \eta'_w \rangle. \quad (11.6)$$

Коэффициенты  $\langle \eta'_1 \dots \eta'_w | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle$  могут рассматриваться как своего рода вероятности. Если все  $\xi$  и  $\eta$  имеют только дискретные собственные значения, то все собственные кэт нормируются на единицу. Тогда  $\langle \eta'_1 \dots \eta'_w | \xi'_1 \dots \xi'_u \rangle$  является

одной из ортогональных компонент кэт  $|\xi'_1 \dots \xi'_u\rangle$  относительно полной системы общих собственных кэт наблюдаемых  $\eta_1, \dots, \eta_w$ , и, таким образом, квадрат ее модуля представляет вероятность того, что измерение  $\eta_1, \dots, \eta_w$  дает  $\eta'_1, \dots, \eta'_w$ , если это измерение проводится в состоянии  $|\xi'_1 \dots \xi'_u\rangle$ , т. е. в состоянии, для которого измерение  $\xi'_1 \dots \xi'_u$  приводит с достоверностью к результату  $\xi'_1, \dots, \xi'_u$ . С этой точки зрения (11.6) может быть интерпретировано как теорема взаимности.

## 12. Обозначение с помощью функций<sup>1)</sup>

Мы уже видели в § 9, что функция полной системы коммутирующих наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_u$  есть такое соответствие между общими собственными состояниями и комплексными числами, что каждому из этих собственных состояний принадлежит одно и только одно число. Следовательно, согласно этому определению представитель  $\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | P \rangle$  любого кэт образует функцию от  $\xi_1, \dots, \xi_u$ . Обозначим эту функцию через  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_u)$  или для краткости  $\psi(\xi)$ :

$$\langle \xi'_1 \dots \xi'_u | P \rangle = \psi(\xi'_1 \dots \xi'_u) = \psi(\xi'). \quad (12.1)$$

Тогда мы можем использовать  $\psi(\xi)$  для обозначения кэт  $|P\rangle$

$$|P\rangle = |\psi(\xi)\rangle. \quad (12.2)$$

Чтобы понять, что это в действительности означает с точки зрения тензорного исчисления, предположим, что число общих собственных значений равно  $n$  и что  $i^x_1, \dots, i^x_n$  ортогональные общие собственные кэт, нормированные на единицу. Пусть  $|P\rangle$  есть кэт  $v^x, v_{\lambda}$ . Тогда его представителем являются ортогональные компоненты  $v^1, \dots, v^n$ , которые численно равны  $v_1, \dots, v_n$ . Но функция  $\psi(\xi)$  является теперь оператором:

$$v^1 i^x_1 i^x_1 + \dots + v^n i^x_n i^x_n. \quad (12.3)$$

<sup>1)</sup> См. Дирак 1947.5, р. 79 и далее.

Она определяется не только вектором  $\psi^x$ , но также и системой операторов, соответствующих  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , так как эта система полная и единственным образом определяет собственные состояния, соответствующие  $i_1^x, \dots, i_n^x$ .

При этой новой символике каждый кэт обозначается функцией  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Рассмотрим теперь кэт  $|P\rangle = |\psi(\xi)\rangle$  и другую функцию  $f(\xi)$ . Мы хотим определить обозначение для произведения  $f(\xi)|P\rangle$  (обращаем внимание, что  $f(\xi)$  наблюдаемая, а не скаляр!). Если  $\xi'_1 \dots \xi'_n$  или, короче,  $\xi'$  — общие собственные значения, то мы имеем

$$\langle \xi' | f(\xi) = \langle \xi' | f(\xi') \quad (12.4)$$

и

$$\langle \xi' | f(\xi) | P \rangle = f(\xi') \langle \xi' | P \rangle = f(\xi') \psi(\xi'). \quad (12.5)$$

Отсюда

$$f(\xi) | \psi(\xi) \rangle = | f(\xi) \psi(\xi) \rangle. \quad (12.6)$$

Но это уравнение показывает, что при новых обозначениях вертикальная черта излишня и что мы можем писать

$$|P\rangle = \psi(\xi)\rangle. \quad (12.7)$$

Теперь мы можем смотреть на  $\psi(\xi)\rangle$  как на произведение наблюдаемой  $\psi(\xi)$  на кэт  $|I\rangle$  или просто  $\rangle$ . Последний называется *стандартным кэтом*. Очевидно, он всегда принадлежит к фиксированной полной системе коммутирующих наблюдаемых и все представляющие его числа или ортогональные компоненты равны  $\dagger I$ . В тензорном исчислении он соответствует кэту, все  $n$  ортогональных компонент которого равны  $I$ :

$$i_1^x \dagger \dots \dagger i_n^x. \quad (12.8)$$

Свертка (12.8) с (12.3) дает вектор  $\psi^x$ .

То же может быть сделано с бра. Если

$$\langle Q | \xi'_1 \dots \xi'_n \rangle = \varphi(\xi'_1, \dots, \xi'_n) = \varphi(\xi'), \quad (12.9)$$

то бра  $\langle Q |$  может быть записан в виде  $\langle \varphi(\xi) |$  или  $\langle \varphi(\xi)$  и может рассматриваться как произведение наблюдаемой  $\varphi(\xi)$  и стандартного бра  $\langle$ , соответствующего бра

$$i_\lambda^1 + \dots + i_\lambda^n$$

в тензорном исчислении. Очевидно,  $\langle P |$  должен соответствовать  $\langle \bar{\psi}(\xi)^1$ .

Теперь и кэт и бра обозначаются функциями от  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , и единственная разница состоит в знаках  $\rangle$  и  $\langle$ , обозначающих умножение кэт (бра) на любой оператор слева (справа). Мы можем часто опускать эти знаки и просто помнить, обозначает ли  $f(\xi)$  кэт, бра или оператор. Это именно то, что в действительности делали многие авторы со времен создания квантовой механики. Они работают с некоторым эрмитовым оператором, например  $H$ , который является функцией системы коммутирующих наблюдаемых и *волновой функцией*, например  $\psi$ , тех же наблюдаемых. Эта волновая функция может умножаться на  $H$  слева:  $H\psi$  обозначает  $H|\psi\rangle$ . Тогда сопряженная  $\bar{\psi}$  может умножаться только справа:  $\bar{\psi}H$  обозначает  $\langle \bar{\psi}|H$ . Произведение  $\bar{\psi}\psi$  обозначает  $\langle \bar{\psi}(\xi)|\psi(\xi)\rangle$ .

С помощью этих сокращенных обозначений Дирак возвращается к привычной форме волновой механики. Но эти сокращенные обозначения вводятся теперь не *ad hoc*<sup>2)</sup>, а являются составной частью теоретически хорошо обоснованного исчисления, которое может быть использовано во всех случаях, включая и те, в которых чрезмерное сокращение в обозначениях могло бы привести к недоразумениям. С этим последним штрихом исчисление Дирака является весьма гибким инструментом и прекрасной иллюстрацией утверждения, что

<sup>1)</sup> Согласно сокращенным обозначениям, введенным в § 7, Дирак пишет  $\langle P |$  для сопряженного  $|P\rangle$ , но при новых обозначениях мы должны писать  $\langle \bar{\psi} |$  для сопряженного  $|\psi\rangle$ . Здесь имеется некоторая непоследовательность в обозначении, которую можно было бы избежать, только записывая всегда  $\langle \bar{P} |$  для сопряженного  $|P\rangle$  независимо от используемого метода обозначения.

<sup>2)</sup> То есть не придуманы специально для этого случая. — *Прим. перев.*

математические методы, которые действительно полезны для прикладных целей, не могут быть обнаружены одними теоретическими исследованиями, а создаются совместными усилиями чистых теоретиков и исследователей, занимающихся прикладными вопросами.

### УПРАЖНЕНИЯ

X. 1. Если  $P$  и  $Q$  — эрмитовы, доказать, что  $PQ + QP$  и  $iPQ - iQP$  также эрмитовы.

X. 2. Если  $U$  — унитарный оператор, доказать, что

$$(Uu) \cdot (Uv) = u \cdot v. \quad (2\alpha)$$

X. 3. Пусть  $\xi$  — линейный оператор,  $m$  — положительное целое число и  $\xi^m | P \rangle = 0$ . Доказать, что  $\xi | P \rangle = 0$ <sup>1)</sup>.

X. 4. Доказать, что равенство

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

справедливо для всех действительных значений  $x$ <sup>1)</sup>.

X. 5. Линейный оператор, который коммутирует с наблюдаемой  $\xi$ , коммутирует с любой функцией от  $\xi$ <sup>1)</sup>.

X. 6. Линейный оператор, который коммутирует с каждой полной системой коммутирующих наблюдаемых, есть функция этих наблюдаемых<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ср. Дирак 1947.5.

## ДОПОЛНЕНИЕ ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ

В настоящее время можно считать установленным, что многие свойства твердого тела и, в частности прочность, пластичность, ползучесть, обусловлены в первую очередь дефектами кристаллической решетки, среди которых особенно важную роль играют дислокации. Изучение дефектов структуры твердого тела развивается в основном в двух направлениях: микроскопическом и макроскопическом. К первому направлению относятся преимущественно экспериментальные работы, в которых выясняется физический механизм явлений и дается его качественное объяснение. В работах второго направления строится феноменологическая теория среды с дефектами на основе континуальной модели. В связи с этим ее часто называют континуальной теорией дислокаций. Целью настоящей работы является краткое изложение математических основ этой теории и ее связи с методами тензорного анализа. По вопросам физической теории дислокаций мы отсылаем читателя к книге Ван Бюрена (1960.4) и к обзору В. Л. Инденбома и А. Н. Орлова (1962.3), где имеются также многочисленные ссылки на другие работы.

### 1. Введение

**Дислокации в кристаллической решетке.** На рис. 34 схематически представлены различные типы дефектов кристаллической решетки. Дефекты *A* и *B* являются моделями соответственно межузельного атома и вакансии. Общим для них является то, что вызванная ими деформация локализована в небольших объемах с характерными размерами порядка нескольких межатомных расстояний. Поэтому их естественно

называть точечными дефектами. Если эти дефекты распределить по некоторой поверхности, то полученный дефект можно классифицировать как поверхностный. Примером такого дефекта являются вакансии, распределенные по поверхности  $CD$  (на рис. 34 видно только ее сечение).

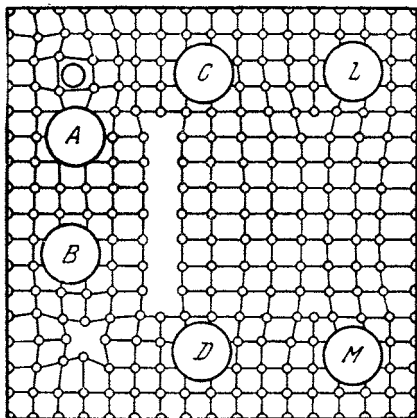


Рис. 34.

Совершенно к другому типу принадлежат дефекты  $L$  и  $M$ . Как видно, они являются краями лишних (или, если угодно, недостающих) атомных плоскостей. Деформации локализованы в окрестности линии, и, следовательно, дефекты являются линейными. Из геометрических соображений очевидно, что эти линии как границы атомных плоскостей не могут оканчиваться внутри кри-

сталла. Они либо замкнуты, либо оканчиваются на границе кристалла, либо уходят «на бесконечность» (но возможен и более сложный случай, когда они оканчиваются на другой линии того же типа). Однако этим дефекты еще полностью не характеризуются. Действительно, замкнутым линейным дефектом может быть также цепочка вакансий.

Рассмотрим произвольный замкнутый контур  $\Gamma$ , охватывающий особую линию  $L$  (нормальную к плоскости чертежа) и проходящий в «хорошей» (без дефектов) части кристалла (рис. 35, а). Попробуем естественным образом сопоставить ему контур  $\Gamma'$  в идеальном кристалле. Как видно из рис. 35, б, контур  $\Gamma'$  при этом оказывается разомкнутым. При согласованной ориентации  $L$  и  $\Gamma$  вектор  $\mathbf{b}$ , соединяющий концы  $\Gamma'$ , однозначно определяется дефектом  $L$  и не зависит от выбора  $\Gamma$ . Наоборот, задание  $\mathbf{b}$  и линии  $L$  полностью характеризует линейный дефект этого вида. По направлению  $\mathbf{b}$  перпендикулярны лишним плоскостям, а его величина пропорциональна их числу.  $\Gamma$  и  $\mathbf{b}$  называются соответственно контуром

Бюргерса и вектором Бюргерса, а особая линия  $L$  с отличным от нуля вектором Бюргерса — дислокацией. Очевидно, для замкнутой цепочки вакансий вектор Бюргерса равен нулю.

Мы можем наглядно представить себе один из возможных механизмов образования дислокаций, если предположим, что

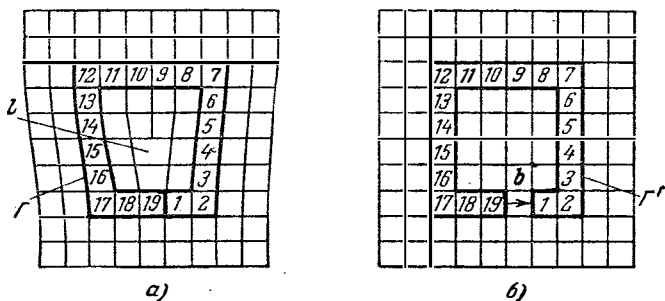


Рис. 35.

показанное на рис. 34 скопление вакансий по поверхности  $CD$  захлопнулось. Единственным дефектом в этом случае будет дислокация, совпадающая с границей  $CD$ . В частности, мы

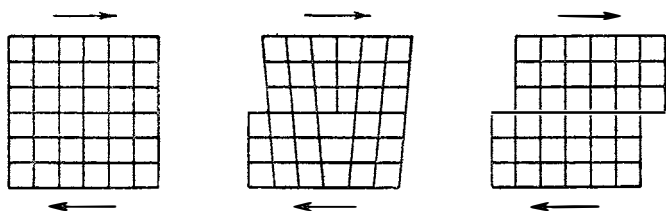


Рис. 36.

можем считать, что  $L$  и  $M$  являются сечениями одной дислокации, образованной таким образом. Другой, более вероятный механизм образования дислокаций за счет сил сдвига показан на рис. 36. Из этого же рисунка видно, что перемещение дислокации в направлении ее вектора Бюргерса, или, как говорят, в ее плоскости скольжения, приводит к результирующему сдвигу кристаллических блоков на



величину  $b$ . Для получения такого же эффекта равномерным сдвигом (без дислокации) потребовались бы силы сдвига на несколько порядков больше. Эта схема объясняет, почему дислокационный механизм играет столь исключительную роль в процессах неупругого деформирования твердых тел.

Кроме указанных дефектов, в реальном кристалле встречаются и другие типы дефектов, например так называемые частичные дислокации, двойнивающие дислокации и т. д. По существу они являются уже не линейными, а поверхностными дефектами. Мы не будем специально на них останавливаться<sup>1)</sup>.

**Дислокации в сплошной среде.** Легко построить модель дислокации в сплошной упругой среде. Проведем в среде разрез вдоль некоторой поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $L$ , и сдвинем берега разреза на постоянный вектор  $b$ , малый по сравнению с характерным размером контура  $L$ . Заполним получившийся зазор тем же материалом (или, наоборот, удалим лишний материал) и произведем столь тщательную склейку, чтобы нигде, кроме границы  $L$ , не осталось никаких следов произведенной операции. Тогда в среде возникнет внутреннее напряженное состояние, которое всюду, кроме контура  $L$ , можно, как обычно, описывать вектором смещения  $u$ . Пусть  $\Gamma$  — произвольный контур, зацепляющийся с  $L$ . Почти очевидно, что

$$\int_{\Gamma} \partial_{\lambda} u_{\mu} dL^{\lambda} = b_{\mu}, \quad (1.1)$$

тогда как для любого контура, не зацепляющегося с  $L$ , этот интеграл равен нулю. Формулу (1.1) легко получить, если взять за основу данную модель дислокации. Но можно, как это обычно и делается, принять (1.1) за определенные дислокации: *дислокацией называется особая линия в среде, обладающая тем свойством, что при любых внешних условиях (силах) интеграл (1.1) по любому достаточно малому контуру  $\Gamma$ , зацепляющемуся с  $L$ , имеет постоянное, отличное от нуля значение.* Малость контура здесь нужна для того, чтобы исключить зацепление с другими

---

<sup>1)</sup> Макроскопическую теорию двойнивающих дислокаций см., например, в работах И. М. Лифшица 1948.2 и А. М. Косевича и А. А. Пастура 1961.4.

дислокациями, если они имеются. Контур  $\Gamma$  и вектор  $\mathbf{b}$  по аналогии называют контуром Бюргерса и вектором Бюргерса.

Данное определение привлекает своей простотой, но в то же время обладает рядом недостатков. Как видно из самого определения, при наличии дислокаций вектор смещения  $\mathbf{u}$  уже не является однозначной функцией точки, и, следовательно, его нельзя в этом случае рассматривать как хорошо определенную физическую величину. Здесь ситуация совершенно аналогична тому, как если бы мы стали определять линейные токи в магнитостатике через циркуляцию градиента скалярного магнитного потенциала. Формально это допустимо, но вряд ли такое определение можно считать физическим. Однако главным недостатком определения является невозможность его распространения на случай непрерывного распределения дислокаций. Вектор смещения в этом случае вообще не определен в области, где плотность дислокаций отлична от нуля, аналогично тому, как скалярный потенциал не имеет смысла в области, где плотность токов не равна нулю. Поэтому в дальнейшем мы дадим другие определения дислокации в сплошной среде, свободные от этих недостатков.

**Источники внутренних напряжений.** Станем теперь на более общую точку зрения и будем рассматривать дислокации как один из возможных источников внутренних напряжений в упругой среде. Изолированную дислокацию  $L$  можно охарактеризовать следующим образом. Вырежем из среды тонкое кольцо  $\Gamma$ , охватывающее  $L$ , и изолируем его от внешних сил. Кольцо тем не менее будет находиться в напряженном состоянии. Для того чтобы это обнаружить, сделаем дополнительный поперечный разрез — концы разреза при этом разойдутся на некоторый вектор  $\mathbf{b}$ , но сечения останутся параллельными (рис. 37, а). Если этим свойством обладает любое достаточно малое кольцо, охватывающее  $L$ , и  $\mathbf{b} = \text{const}$ , то  $L$ , очевидно, можно рассматривать как макромодель физической дислокации в кристаллической решетке. Развертке контура Бюргерса на идеальную решетку соответствует при этом перевод кольца  $\Gamma$  в ненапряженное (естественное) состояние с помощью разреза. Другой возможный источник внутренних напряжений показан на рис. 37, б. Здесь уже имеет место не только расхождение концов, но и поворот сечений на некоторый угол  $\vartheta$ . Величины  $\mathbf{b}$  и  $\vartheta$ , вообще

зависящие от  $\Gamma$ , могут служить мерой интенсивности внутренних напряжений<sup>1)</sup>.

Мы будем рассматривать источники обоих этих типов при произвольных законах распределения: объемные, поверхностные, линейные и точечные. Среда с подобными источниками внутренних напряжений является, по существу, той

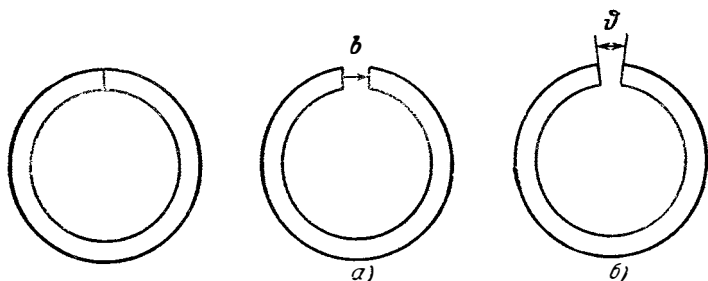


Рис. 37.

моделью, с которой имеет дело континуальная теория дислокаций. Излагая в дальнейшем математические основания этой модели, мы вынуждены будем ограничиться случаем неподвижных источников. Читателя, интересующегося динамикой дислокаций, мы отсылаем к работам А. М. Косевича<sup>2)</sup>. При отборе материала учитывалось также, что ряд вопросов континуальной теории дислокаций достаточно полно рассмотрен в изданном недавно сборнике переводов иностранных авторов<sup>3)</sup>.

В заключение несколько слов о математическом аппарате теории. Ниже мы попытаемся показать, что методы классической дифференциальной геометрии удивительным образом соответствуют физическим представлениям об упругой среде с непрерывным распределением источников внутренних напря-

<sup>1)</sup> Разрезание колец действительно используют в лабораторной и заводской практике для определения внутренних напряжений. При этом обычно в технических условиях на изделия непосредственно задаются допустимые величины расхождения концов для фиксированных размеров колец.

<sup>2)</sup> 1962.4, 5.

<sup>3)</sup> Э ш е л б и 1963.1.

жений. Это позволяет в свою очередь получить наглядную физическую интерпретацию таких относительно сложных понятий дифференциальной геометрии, как параллельный перенос, кручение, кривизна и т. д.<sup>1)</sup> С другой стороны, в случае, когда источники распределены по поверхностям меньшего числа измерений — а эта ситуация характерна для континуальной теории дислокаций, — необходимо сочетание классических \* методов тензорного анализа с идеями теории обобщенных функций. До сих пор этим вопросам не уделялось должного внимания. В частности, они почти не затронуты и в данной книге. Нам представлялось полезным показать на примере континуальной теории дислокаций плодотворность сочетания этих методов.

## 2. Геометрия упругой среды с источниками внутренних напряжений<sup>2)</sup>.

**Качественные характеристики континуума.** Прежде всего, если мы хотим различать такие среды, как песок и металл, мы должны ввести понятие «близости». Физически это означает, что две частицы среды, которые были близкими в начальном состоянии, будут таковыми и в любом другом состоянии. Естественно, что этому требованию удовлетворяет упругая деформация среды с кристаллической решеткой и не удовлетворяет перемещение песка. Математическим эквивалентом понятия близости является предположение, что среда, рассматриваемая как множество материальных точек, является топологическим пространством. При этом два топологических пространства считаются эквивалентными и не различаются, если существует взаимно однозначное и непрерывное преобразование одного пространства в другое. Такое преобразование называется *гомеоморфизмом*<sup>3)</sup>. Можно сказать, что

---

<sup>1)</sup> Отметим, что соответствующая интерпретация в общей теории относительности (см. гл. IX) является значительно более сложной.

<sup>2)</sup> Общие ссылки: Кондо 1955.2; Билби с сотрудниками 1955.4; Эшелби 1963.1; Крёнер 1958.3; Крёнер и Зегер 1959.2. Там же имеются ссылки на другие работы, примыкающие к этому направлению.

<sup>3)</sup> Точные определения таких понятий, как гомеоморфизм, многообразие и т. д. и их свойства можно найти, например, в книге Уитни 1957.2.

топологическое пространство определено с точностью до гомеоморфизма.

Описание положения материальной среды в пространстве практически невозможно без введения системы координат. Это, а также и другие соображения заставляют потребовать, чтобы по крайней мере в окрестности каждой точки можно было ввести систему координат. При этом в общем случае необоснованно было бы требовать существования одной системы координат для всего пространства, если мы хотим рассматривать пространства, топологически не эквивалентные евклидову пространству, например сферу, тор и т. д. Иными словами, мы предполагаем, что окрестность каждой точки среды гомеоморфна  $n$ -мерному евклидову пространству (или полупространству для среды с краем). Обычно  $n = 2$  или  $n = 3$ , хотя иногда целесообразно рассматривать случаи  $n > 3$ .

Наконец, если мы хотим рассматривать в среде поля достаточно гладких функций (например, дифференцируемых или аналитических), то и сама среда должна обладать соответствующей гладкостью. Наглядно мы можем представлять себе это следующим образом: если две кривые (или поверхности) в среде имеют касание определенного порядка в начальном состоянии, то они имеют его и в любом другом состоянии. (Таким свойством, конечно, не обладает среда типа глины). Но это возможно только в том случае, если допустимыми преобразованиями являются не произвольные гомеоморфизмы, а лишь достаточно гладкие — *диффеоморфизмы*. Оказывается, что без существенного ограничения общности последние можно предполагать аналитическими.

Все перечисленные выше требования мы можем кратко сформулировать в одном постулате: *материальная среда есть дифференцируемое (аналитическое) многообразие*.

**Внешнее состояние и внешняя метрика.** Будем в дальнейшем для определенности предполагать, что среда гомеоморфна 3-мерному евклидову пространству  $R_3$  и, следовательно, является элементарным многообразием  $X_3$  (см. § 1 гл. IV). Обозначим точки среды  $\xi$  и точки пространства  $x$ . Пусть  $\Phi$  — некоторое фиксированное гладкое вложение (диффеоморфизм) среды в  $R_3$

$$\Phi : \xi \rightarrow x = \Phi(\xi). \quad (2.1)$$

По предположению, существует обратный диффеоморфизм  $\Phi^{-1}$

$$\Phi^{-1} : x \rightarrow \xi = \Phi^{-1}(x). \quad (2.2)$$

Мы будем говорить, что задание  $\Phi$  определяет *внешнее (геометрическое) состояние среды*. Все характеристики среды, которые зависят только от  $\Phi$ , будем называть *внешними (геометрическими) характеристиками* или *функциями внешнего состояния*.

Для фактического задания  $\Phi$  введем лагранжеву систему координат  $\xi^\lambda$ , связанную со средой, и эйлерову систему координат  $x^i$ . Тогда

$$\Phi : x^i = x^i(\xi^\lambda), \quad (2.3)$$

$$\Phi^{-1} : \xi^\lambda = \xi^\lambda(x^i), \quad (2.4)$$

где  $x^i(\xi^\lambda)$  — достаточно гладкие функции с отличным от нуля якобианом.

Определим теперь основную внешнюю характеристику среды — *внешнюю метрику* — как расстояние между точками  $R_3$ , в которых находятся соответствующие точки среды в состоянии  $\Phi$

$$ds^2 = \overset{\circ}{g}_{\lambda\mu}(\xi) d\xi^\lambda d\xi^\mu = \overset{\circ}{g}_{ik}(x) dx^i dx^k. \quad (2.5)$$

Здесь  $\overset{\circ}{g}_{ik}$  — евклидов метрический тензор  $R_3$ . Если, в частности, в качестве  $x^i$  взяты декартовы координаты, то

$$ds^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k = \sum_i (dx^i)^2. \quad (2.6)$$

Таким образом, внешняя метрика  $ds^2$  однозначно индуцируется вложением  $\Phi$  и имеет различные представления в лагранжевых и эйлеровых координатах.

Имеем очевидные соотношения

$$\overset{\circ}{g}_{\lambda\mu}(\xi) = \overset{\circ}{g}_{ik}(x(\xi)) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\mu}, \quad (2.7)$$

$$\overset{\circ}{g}_{ik}(x) = \overset{\circ}{g}_{\lambda\mu}(\xi(x)) \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^k}. \quad (2.8)$$

Легко показать, что справедливо и обратное утверждение: задание внешней метрики определяет однозначно  $\Phi$  с

точностью до движения среды как твердого тела. Естественно, что внешняя метрика при этом не может быть задана произвольно, а должна удовлетворять уравнению

$$\mathring{K}_{\lambda\mu\nu\kappa}(\mathring{g}_{\sigma\rho}) = 0, \quad (2.9)$$

где  $\mathring{K}_{\lambda\mu\nu\kappa}$  — тензор кривизны Римана — Кристоффеля.

**Внутренняя геометрия.** Будем называть *внутренними характеристиками среды* те характеристики, которые не зависят от вложения  $\Phi$ . Совокупность всех внутренних характеристик определяет *внутреннее состояние*, или *внутреннюю геометрию среды*. К внутренним характеристикам относятся, в частности, указанные выше качественные характеристики: топология, близость, гладкость. Однако всеми этими свойствами могут обладать и неупругие среды. Попробуем теперь описать те внутренние характеристики, которые отличают упругую среду от неупругой.

Под упругостью обычно подразумевают свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешней нагрузки. Это физическое свойство позволяет построить внутреннюю геометрию среды. Наоборот, постулирование существования внутренней геометрии среды, по-видимому, и является наиболее общим математическим эквивалентом понятия упругости. Соответственно неупругие явления (пластичность, ползучесть и т. д.) целесообразно определить как изменение внутренней геометрии.

При построении внутренней геометрии мы будем руководствоваться следующим принципом.

Положим для определенности, что на среду не действуют внешние силы. Этим фиксируется некоторое внешнее состояние среды в целом. Пусть  $\xi$  — точка среды, рассматриваемой как многообразие  $X_3$ , и пусть  $\Gamma$  — некоторая проходящая через нее кривая. Отделим от среды достаточно тонкую материальную трубку, содержащую  $\Gamma$ , и поместим ее в реальное евклидово пространство  $R_3$ . Если  $\Gamma$  — замкнутая кривая, то мы проведем в трубке разрез через точку  $\xi$ . Тогда в силу упругих свойств материала трубки она примет в  $R_3$  определенную конфигурацию. При наличии разреза концы трубки, вообще говоря, разойдутся и повернутся на некоторый угол. Если отношение характерного поперечного размера трубки  $d$  к ее длине  $l$  в  $R_3$  мало, то, исходя из физических представлений о природе внутренних напряжений, можно приближенно

считать данное состояние не напряженным и тем точнее, чем меньше  $d/l$ . При этом предполагается, что трубка изолирована лишь от силовых воздействий, а все остальные параметры, характеризующие ее состояние, например температура, остаются неизменными. Последнее предположение не является существенным и сделано для удобства определения внутренних характеристик среды.

Будем называть предельное состояние трубки при  $d/l \rightarrow 0$  *естественным состоянием среды вдоль кривой  $\Gamma$* . Соответствующее вложение  $\Phi_\Gamma$  в реальное пространство назовем *каноническим диффеоморфизмом кривой  $\Gamma$  (с ее окрестностью)* в  $R_3$ . При заданном  $\Phi_\Gamma$  определим все внутренние геометрические характеристики среды вдоль  $\Gamma$  через соответствующие характеристики естественного состояния. Так, например, два вектора в точках  $\xi$  и  $\xi_1$  на кривой  $\Gamma$  в  $X_3$  будут считаться *параллельными вдоль кривой  $\Gamma$*  тогда и только тогда, когда параллельны их образы, индуцированные вложением  $\Phi_\Gamma$ , в точках  $x = \Phi_\Gamma(\xi)$  и  $x_1 = \Phi_\Gamma(\xi_1)$ ; если образом  $\Gamma$  в  $R_3$  является прямая, то  $\Gamma$  — геодезическая в  $X_3$  и т. д.

Мы можем кратко сформулировать это следующим образом: *внутренняя геометрия среды вдоль каждой кривой  $\Gamma$  индуцируется каноническим диффеоморфизмом  $\Gamma$  в  $R_3$ .*

Подчеркнем, что если естественное состояние понимать как состояние без внутренних напряжений<sup>1)</sup>, то оно, вообще говоря, не существует для среды в целом, но существует для достаточно малой окрестности каждой точки. Таким образом, с точки зрения внутренних напряжений нет необходимости определять естественное состояние вдоль кривой. Однако ниже будет показано, что определение естественного состояния для окрестности точки было бы связано с потерей части информации о природе источников внутренних напряжений. В частности, мы не смогли бы различать источники, показанные на рис. 37, а и 37, б, что существенно с точки зрения теории дислокаций. Этим объясняется необходимость определения естественного состояния как состояния вдоль кривой.

---

<sup>1)</sup> Именно таким образом оно было определено впервые Кондо 1955.2.



Перейдем к конкретному рассмотрению внутренней геометрии среды и начнем с одной из наиболее важных структур геометрии — параллельного перенесения.

**Связность.** Мы отвлечемся сначала от метрических свойств  $R_3$  и будем рассматривать его как аффинное пространство  $E_3$ . Очевидно, введенное выше параллельное перенесение вдоль кривых является линейным. Будем также предполагать, что его можно, как обычно, задать с помощью поля геометрического объекта  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$ , т. е. аффинной связности. Возникает вопрос, насколько однозначно определяется аффинная связность, если параллельное перенесение введено указанным выше способом.

Можно показать<sup>1)</sup>, что  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}$  определен с точностью до слагаемого вида  $A_{\mu}^{\alpha} \omega_{\lambda}$ , где  $A_{\mu}^{\alpha}$  — единичный тензор, а  $\omega_{\lambda}$  — произвольный ковариантный вектор. Однако, если считать, что каноническое вложение  $\Phi_{\Gamma}$  индуцирует естественную параметризацию вдоль  $\Gamma$  (естественным параметром является длина  $\Gamma$  в  $R_3$ ), то связность определяется однозначно.

**Кручение и кривизна.** Пусть  $\xi^{\alpha}$  — точка в пространстве аффинной связности  $L_n$  (§ 1 гл. V). Проведем через нее инфинитезимальный контур, ограничивающий двумерную площадку с бивектором  $df^{\nu\mu}$ . С помощью процесса, аналогичного развертке контура Бюргерса на идеальную решетку, можно шаг за шагом развернуть контур с его окрестностью на касательное пространство  $E_n$  в точке  $\xi^{\alpha}$ <sup>2)</sup>. При этом векторы, заданные вдоль контура и параллельные в смысле связности  $L_n$ , будут в  $E_n$  параллельными в обычном смысле. Наглядно это можно представить себе как обкатку  $E_n$  вдоль граничного контура таким образом, что в каждой точке  $E_n$  касается  $L_n$ .

Будем считать, что направление обкатки согласовано с ориентацией  $df^{\nu\mu}$ . Образом граничного контура в  $E_n$  в общем случае будет некоторая незамкнутая кривая. Пусть при этом начальная точка контура переходит в точку  $\xi$ , а конечная — в точку  $\xi'$  (рис. 38). Вектор  $\Delta\xi = \xi' - \xi$

<sup>1)</sup> Эйзенхарт 1927.3.

<sup>2)</sup> См. Картан 1960.5.

является, очевидно, аналогом вектора Бюргерса. С точностью до малых третьего порядка относительно характерного размера (диаметра) площадки он линейно зависит от  $df^{\nu\mu}$ . Можно показать, что коэффициентом пропорциональности служит тензор кручения  $S_{\nu\mu}^{\cdot x} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{[\nu\mu]}^x$ . Более точно, если  $\Delta\xi^x$  — вектор в  $L_n$ , соответствующий  $\Delta\xi$  в  $E_n$ , то

$$\Delta\xi^x = -S_{\nu\mu}^{\cdot x} df^{\nu\mu}. \quad (2.10)$$

Этим определяется геометрический смысл тензора кручения.

Здесь сразу же обращает на себя внимание аналогия между кручением и моделью дислокации в сплошной среде. Впервые на это указал Кондо <sup>1)</sup>, который просто отождествил кру-

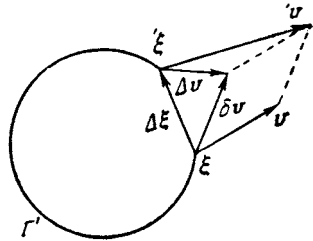


Рис. 38.

чение с распределенной плотностью дислокаций. Этой точки зрения придерживались также авторы всех последующих работ, в которых рассматривалась геометрия среды с дислокациями. Однако здесь допущена некоторая неточность. Если кручение вызвано только дислокациями, то его действительно можно интерпретировать как плотность дислокаций, но в этом случае тензор кручения должен удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Это видно хотя бы из того обстоятельства, что линии дислокаций, по определению, замкнуты и, следовательно, дивергенция плотности дислокаций должна равняться нулю. Мы вернемся к этому вопросу позднее.

Как указывалось выше, при развертке контура на  $E_n$  одновременно происходит отображение в  $E_n$  инфинитезимальной окрестности контура. Этим в свою очередь индуцируется отображение в  $E_n$  векторов, заданных на контуре. Пусть  $v^x$  — вектор, заданный в точке  $\xi^x$ . Его образами в точках  $\xi$  и  $\xi'$  в  $E_n$  будут соответственно  $v$  и  $v'$  (рис. 38). При этом в общем случае  $v'$  не совпадает с вектором  $v$ , перенесенным параллельно из  $\xi$  в  $\xi'$ . Вектор  $\Delta v = v' - v$

<sup>1)</sup> 1955.2.

с точностью до малых третьего порядка относительно диаметра площадки линейно зависит от  $v^\lambda$  и  $df^{\nu\mu}$ . Если  $\Delta v^\lambda$  — его прообраз в  $L_n$ , то (ср. (V.5.11))

$$\Delta v^\lambda = -\frac{1}{2} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} v^\lambda df^{\nu\mu}, \quad (2.11)$$

где  $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$  — тензор кривизны  $L_n$ . Этим определяется геометрический смысл тензора кривизны.

Таким образом, если обозначить  $\delta v = \Delta v + \Delta \xi$  — полное изменение  $v$  с учетом переноса его начала, то мы получим <sup>1)</sup>

$$\delta v^\lambda = -\frac{1}{2} (R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} v^\lambda + 2S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda}) df^{\nu\mu}. \quad (2.12)$$

Так как тензоры кривизны и кручения определяются заданием аффинной связности и в то же время имеют большее суммарное число функциональных степеней свободы (= числу существенных компонент), чем связность, то следует предполагать, что они не могут задаваться независимо. Действительно, они удовлетворяют ряду тождеств, из которых важнейшими являются <sup>2)</sup>

$$R_{[\nu\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 2\nabla_{[\nu} S_{\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\lambda} - 4S_{[\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho} S_{\lambda]\rho}^{\cdot\lambda}, \quad (2.13)$$

$$\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} = 2S_{[\omega\nu}^{\cdot\sigma} R_{\mu]\sigma\lambda}^{\cdot\lambda}. \quad (2.14)$$

Наоборот, если заданы  $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}$  и  $S_{\nu\mu}^{\cdot\lambda}$ , удовлетворяющие (2.14), то этим определяется аффинная связность  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  в  $L_n$  (по крайней мере локально) <sup>3)</sup>. Иными словами, соотношение (2.14), известное как тождество Бианки, является необходимым и достаточным условием интегрируемости.

Мы упростим запись тождеств (2.13), (2.14) и ряда последующих формул, а также лучше поймем их геометрический смысл, если воспользуемся инвариантным дифференциальным оператором, введенным Картаном. Пусть  $P_{\lambda_1 \dots \lambda_p \Lambda}$  — тензор, альтернированный по  $p$  первым индексам, а  $\Lambda$  обо-

<sup>1)</sup> Строгое доказательство (2.12) см., например, в Р. К. 1954.1.

<sup>2)</sup> Эти тождества соответствуют (V.5.19) и (V.5.25) и переходят в них при  $S_{\nu\mu}^{\cdot\lambda} = 0$ .

<sup>3)</sup> См. Р. К. 1954. 1.

значает совокупность остальных индексов. Тогда, по определению,

$$\nabla_{[\mu}^p P_{\lambda_1 \dots \lambda_p] \Lambda} = \nabla_{[\mu} P_{\lambda_1 \dots \lambda_p] \Lambda} + p S_{[\mu \lambda_1}^{\sigma} P_{\sigma | \lambda_2 \dots \lambda_p] \Lambda}. \quad (2.15)$$

Если записать подробно правую часть, то мы увидим, что  $S_{\mu \lambda}^{\alpha}$  не действует на альтернированные индексы  $\lambda_1 \dots \lambda_p$ .

В этом состоит формальный смысл оператора  $\nabla^p$ . Для его геометрической интерпретации рассмотрим точку  $\xi_0^x$  и содержащий ее  $(p+1)$ -мерный инфинитезимальный элемент  $\tau_{p+1}$  с границей  $\tau_p$ . Пусть  $df^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  — элемент границы  $\tau_p$  в точке  $\xi^x$ . Составим тензор

$$\delta P_{\Lambda}(\xi^x) = df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} P_{\lambda_1 \dots \lambda_p \Lambda}, \quad (2.16)$$

валентность которого равна суммарной валентности индексов  $\Lambda$ . Если бы эта валентность была равна нулю, мы могли бы проинтегрировать  $\delta P_{\Lambda}$  по  $\tau_p$ . При валентности, отличной от нуля, этот интеграл, вообще говоря, не имеет инвариантного смысла, так как тензоры в разных точках  $L_n$  нельзя складывать. Однако мы можем придать ему инвариантный смысл, если договоримся параллельно переносить  $\delta P_{\Lambda}$  в  $\xi_0^x$  по геодезическим и затем уже складывать. Если применить к полученному интегралу теорему Стокса и пренебречь величинами высшего порядка малости относительно  $\xi^x - \xi_0^x$ , то мы получим формулу<sup>1)</sup>

$$\int_{\tau_p} P_{\lambda_1 \dots \lambda_p \Lambda} df^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \int_{\tau_{p+1}} \nabla_{[v}^p P_{\lambda_1 \dots \lambda_p] \Lambda} df^{v \lambda_1 \dots \lambda_p}, \quad (2.17)$$

из которой следует, что  $\nabla$  можно рассматривать как обобщение оператора  $\text{div}$  в  $R_n$ . Следует подчеркнуть, что в отличие от  $R_n$  формула (2.17) в  $L_n$  имеет смысл лишь для инфинитезимального элемента  $\tau_{p+1}$ . Если тензор  $P_{\lambda_1 \dots \lambda_p \Lambda}$  удовлетворяет в точке  $\xi_0^x$  условию

$$\nabla_{[v}^p P_{\lambda_1 \dots \lambda_p] \Lambda} = 0, \quad (2.18)$$

<sup>1)</sup> Строгое доказательство см. в Р. К. 1954.1.

то говорят, что он находится в равновесии в  $\xi_0^x$ . В этом случае интеграл (2.17) равен нулю при любом выборе инфинитезимального  $\tau_{p+1}$  в  $\xi_0^x$ .

Тождества (2.13) и (2.14) могут быть теперь записаны в виде

$$R_{[\nu\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot x} = 2\overset{2}{\nabla}_{[\nu}S_{\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot x}, \quad (2.19)$$

$$\overset{2}{\nabla}_{[\omega}R_{\nu\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\lambda x} = 0. \quad (2.20)$$

Таким образом, тождество Бианки (2.20) означает, что тензор кривизны находится в равновесии в каждой точке  $L_n$ .

Мы можем теперь сформулировать условие, которому должно удовлетворять кручение, если оно отождествляется с плотностью дислокаций. Очевидно, в этом случае мы должны положить

$$\overset{2}{\nabla}_{[\nu}S_{\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot x} = 0. \quad (2.21)$$

Соответственно (2.19) при этом принимает вид

$$R_{[\nu\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot x} = 0. \quad (2.22)$$

Вернемся теперь к определению аффинной связности на материальном многообразии. Из геометрического смысла  $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot x}$  и  $S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\cdot x}$  и физической интерпретации параллельного перенесения следует возможность их экспериментального определения. Для этого в окрестности каждой точки нужно вырезать достаточно малые кольца и, разрезав их, измерить  $\Delta\theta$  и  $\Delta\xi$ . После этого можно в принципе проверить, выполняется ли условие интегрируемости (2.20). Мы будем предполагать, что это условие выполняется, и, следовательно, кривизна и кручение единственным образом определяют аффинную связность  $\Gamma_{\nu\mu}^x$  на материальном многообразии. Последнее, таким образом, превращается в пространство аффинной связности  $L_3$ .

**Внутренняя метрика.** По определению расстояние между соседними точками вдоль некоторой кривой равно расстоянию между образами этих точек в естественном состоянии. Чтобы не усложнять без нужды нашу модель, мы предположим, что это расстояние может быть локально задано

с помощью (достаточно гладкой) метрической формы <sup>1)</sup>

$$ds^2 = g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa. \quad (2.23)$$

Метрический тензор  $g_{\lambda\kappa}$  может быть в принципе измерен в каждой точке  $\xi^\kappa$  и, следовательно, имеет вполне определенный физический смысл.

Из того обстоятельства, что метрика и параллельный перенос определяются одним и тем же процессом вложения в  $R_3$ , следует, что они должны быть *согласованы*, т. е. длины векторов и углы между ними при параллельном перенесении сохраняются. Математически это эквивалентно предположению, что  $\Gamma_{\nu\mu}^\kappa$  и  $g_{\lambda\kappa}$  связаны соотношением

$$\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = \partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^\rho g_{\lambda\rho} = 0. \quad (2.24)$$

Некоторые вытекающие отсюда важные физические следствия будут рассмотрены ниже.

Связность, удовлетворяющая (2.24), называется *метрической относительно  $g_{\lambda\kappa}$* . Таким образом, мы предполагаем, что  $L_3$  является пространством с метрической связностью.

Произведя циклическую перестановку индексов  $\mu\lambda\kappa$  в (2.24), можно получить два дополнительных уравнения. Решая полученную систему относительно  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ , находим

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + T_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa}, \quad (2.25)$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}), \quad (2.26)$$

$$T_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} - S_{\lambda\cdot\mu}^{\kappa} + S^{\kappa}_{\cdot\mu\lambda}. \quad (2.27)$$

Величины  $\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}$  являются символами Кристоффеля, соответствующими  $g_{\lambda\kappa}$  (ср. (V. 4.7)), а  $T_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa}$  — тензор, зависящий только от кручения, на который  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$  отличается от римановой связности. Поднятие и опускание индексов в (2.27)

<sup>1)</sup> Более общей модели соответствовала бы так называемая финслерова геометрия.

произведено по обычным правилам относительно  $g_{\lambda\kappa}$  и обратного ему  $g^{\kappa\lambda}$ .

Выражение (2.25) показывает, что метрическая связность однозначно определяется заданием метрики и кручения. Симметрическая составляющая связности  $\Gamma_{(\mu\lambda)}^{\kappa}$ , определяющая геодезические в  $L_3$ , вообще говоря, также зависит как от метрики, так и от кручения. Нетрудно показать, что для того, чтобы  $\Gamma_{(\mu\lambda)}^{\kappa}$  совпадала с  $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\}$ , необходимо и достаточно, чтобы компоненты  $S_{\mu\lambda\kappa}$  были антисимметричными по всем индексам. В этом случае тензор кручения в  $L_3$  эквивалентен скалярной плотности.

Из определения тензора кривизны

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} = 2 \left[ \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{[\nu|\rho}^{\kappa} \Gamma_{\mu]\lambda}^{\rho} \right] \quad (2.28)$$

следует, что в случае метрической связности он может быть выражен через  $g_{\lambda\kappa}$ ,  $S_{\mu\lambda}^{\kappa}$  и их производные. Соответствующая формула имеет вид

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} + 2 \overset{1}{\nabla}_{[\nu} T_{\mu]\lambda}^{\kappa} - 2 T_{[\nu|\rho}^{\kappa} T_{\mu]\lambda}^{\rho}, \quad (2.29)$$

где тензор

$$K_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} = 2 \partial_{[\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu] \lambda \end{smallmatrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ [\nu|\rho] \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu] \lambda \end{smallmatrix} \right\} \quad (2.30)$$

можно рассматривать как риманов тензор кривизны относительно  $g_{\lambda\kappa}$ . Используя (2.29), можно показать, что для метрической связности ковариантные компоненты  $R_{\nu\mu\lambda\kappa}$  альтернированы не только по первой, но и по второй паре индексов, т. е.

$$R_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0. \quad (2.31)$$

Отметим два важных случая. Если кривизна равна нулю, то  $L_3$  превращается в пространство абсолютного параллелизма — параллельное перенесение не зависит от пути. Внутренняя метрика и кручение связаны при этом уравнением

$$K_{\nu\mu\lambda}^{\kappa} = -2 \overset{1}{\nabla}_{[\nu} T_{\mu]\lambda}^{\kappa} + 2 T_{[\nu|\rho}^{\kappa} T_{\mu]\lambda}^{\rho}, \quad (2.32)$$

а условие (2.21), как это следует из (2.20), выполняется автоматически. Возможная физическая интерпретация — источниками внутренних напряжений являются только дислокации.

Другой предельный случай соответствует равенству нулю кручения — дислокации отсутствуют.  $R_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$  совпадает с  $K_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ , и внутренняя геометрия среды становится римановой.

**Снижение валентности.** До сих пор мы не использовали того обстоятельства, что пространство является трехмерным. При его учете возможны некоторые упрощения в обозначениях и записи формул, а также в интерпретации многоиндексных величин. Геометрический смысл величин при этом, конечно, не меняется.

Введем величины, с которыми в дальнейшем нам часто придется иметь дело.

*Обобщенный тензор Кронекера* <sup>1)</sup>

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \stackrel{\text{def}}{=} p! \delta_{[\mu_1}^{\lambda_1} \dots \delta_{\mu_p]}^{\lambda_p} \quad (2.33)$$

определен для любого  $X_n$  и является антисимметричным как по нижним, так и по верхним индексам. Его компоненты равны  $\pm 1$  ( $-1$ ), если последовательность  $\lambda_1 \dots \lambda_p$  ( $p \leq n$ ) является четной (нечетной) перестановкой последовательности  $\mu_1 \dots \mu_p$ , и равны нулю во всех остальных случаях. При  $p = 1$  он совпадает с единичным тензором. Пусть  $P_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$  — произвольный тензор. Тогда

$$P_{[\mu_1 \dots \mu_p]} = \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} P_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \frac{1}{p!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} P_{[\lambda_1 \dots \lambda_p]} \quad (2.34)$$

Имеет место тождество

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p \kappa_1 \dots \kappa_q} = q! \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p \kappa_1 \dots \kappa_q} \quad (2.35)$$

Положим для каждой системы координат

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} \quad (2.36)$$

<sup>1)</sup> Следуя общепринятой традиции, мы рассматриваем  $\delta_{\mu}^{\lambda}$  как компоненты единичного тензора, хотя в духе данной книги следовало бы писать  $A_{\mu}^{\lambda}$ .



Очевидно, компоненты этих величин в каждой системе координат равны  $+1$  ( $-1$ ), если  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  — четная (нечетная) перестановка  $1 \dots n$ , и равны нулю во всех остальных случаях. Отсюда следует, что они лишь обозначениями отличаются от введенных в § 8 гл. II  $n$ -вектор- $\Delta$ -плотностей  $\tilde{E}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  и  $\tilde{e}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ , имеющих соответственно веса  $+1$  и  $-1$ .

Но тогда в пространстве с метрикой  $g^{\kappa\lambda}$

$$\varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{g}} \tilde{\varepsilon}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}, \quad \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g} \tilde{\varepsilon}_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \quad (2.37)$$

являются  $W$ - $n$ -векторами (псевдотензорами). Справедливы тождества ( $n=3$ )

$$\tilde{\varepsilon}^{\lambda_1 \lambda_2 \nu} \tilde{\varepsilon}_{\nu \mu_1 \mu_2} = \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2 \nu} \varepsilon_{\nu \mu_1 \mu_2} = \varepsilon^{\lambda_1 \lambda_2}_2, \quad (2.38)$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\lambda \nu_1 \nu_2} \tilde{\varepsilon}_{\nu_1 \nu_2 \mu} = \varepsilon^{\lambda \nu_1 \nu_2} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \mu} = 2\delta^{\lambda}_{\mu}. \quad (2.39)$$

Пусть тензор  $P \dots_{\nu\mu} \dots$  антисимметричен по индексам  $\nu\mu$ . Тогда в  $X_3$  ему можно взаимно однозначно сопоставить тензорную  $\Delta$ -плотность

$$\tilde{P}^{\lambda \dots} = \tilde{\varepsilon}^{\lambda \nu \mu} P \dots_{\nu \mu} \dots, \quad P \dots_{\nu \mu} \dots = 2\tilde{\varepsilon}_{\nu \mu \lambda} \tilde{P}^{\lambda \dots}. \quad (2.40)$$

Аналогичные формулы имеют место, если тензор  $P$  антисимметричен по трем индексам. В  $L_3$  с метрикой мы можем заменить  $\tilde{\varepsilon}$  на  $\varepsilon$  и сопоставить взаимно однозначно тензору  $P$  псевдотензор  $\tilde{P}$ .

**Основное уравнение.** Тензор кручения  $S_{\nu\mu}^{\dots\kappa}$  антисимметричен по  $\nu\mu$ , поэтому мы положим

$$\tilde{S}^{\tau\kappa} = \tilde{\varepsilon}^{\tau\nu\mu} S_{\nu\mu}^{\dots\kappa}. \quad (2.41)$$

Тензоры  $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$  и  $R_{\nu\mu\lambda\kappa}$  антисимметричны по первой и второй парам индексов. Следовательно, этой же симметрией обладает и остальная группа членов в правой части (2.29). Введем

$$\tilde{K}^{\tau\sigma} = \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{\tau\nu\mu} \tilde{\varepsilon}^{\sigma\lambda\kappa} K_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad (2.42)$$

$$\tilde{\eta}_R^{\tau\sigma} = -\frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{\tau\nu\mu} \tilde{\varepsilon}^{\sigma\lambda\kappa} R_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad (2.43)$$

$$\tilde{\eta}_S^{\tau\sigma} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{\tau\nu\mu} \tilde{\varepsilon}^{\sigma\lambda\kappa} [\tilde{V}_{[\nu} T_{\mu] \lambda\kappa} - T_{[\nu} T_{\mu] \lambda\kappa}]. \quad (2.44)$$

Тогда (2.29) запишется в виде

$$\tilde{K}^{\lambda\mu} = -(\tilde{\eta}_R^{\lambda\mu} + \tilde{\eta}_S^{\lambda\mu}). \quad (2.45)$$

Мы будем рассматривать (2.45) как основное уравнение внутренней геометрии упругой среды, связывающее внутреннюю метрику с плотностью источников кривизны и кручения. Отметим, что метрика этим уравнением однозначно не определяется. Необходимы дополнительные условия, которые могут быть получены лишь на основе дальнейшей конкретизации физической модели среды.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда кривизна и кручение достаточно малы для того, чтобы оказался возможным переход к линейной модели.

**Линеаризация. Оператор Rot.** Здесь необходимо некоторое уточнение, так как, не вполне ясно, что такое «малые (по сравнению с чем?) кривизна и кручение». В конкретных задачах обычно имеются характерные параметры (например, характерные размеры области, в которой  $\eta_R$  и  $\eta_S$  отличны от нуля), которые позволяют придать этим понятиям определенный смысл. Однако выбор характерных параметров существенно связан с постановкой задачи, и при построении общей теории желательно заранее не связывать себя таким выбором. Поэтому мы станем на другую точку зрения.

Предположим сначала, что кручение отсутствует. В этом случае тензор кривизны  $K$  можно рассматривать как нелинейный оператор, действующий в линейном пространстве симметричных тензоров. Пусть  $g_0$  — некоторая точка этого пространства, и пусть форма, соответствующая  $g_0$ , положительна. Тогда оператор  $K$  заведомо определен в окрестности точки  $g_0$  и ставит в соответствие каждой точке этой окрестности четырехвалентный (или двухвалентный при  $n = 3$ ) тензор кривизны. Мы можем определить для этого оператора *дифференциал*  $K'$  в точке  $g_0$

$$K'(g_0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{K(g_0 + th) - K(g_0)}{t}. \quad (2.46)$$

Очевидно, этим соотношением определяется инвариантный линейный оператор  $K'$ , порождаемый  $K$  и вообще зависящий от  $g_0$ . Для его фактического вычисления можно использовать любую систему координат. В частности, если  $K(g_0) = 0$ ,

т. е.  $g_0$  — евклидов тензор, естественно воспользоваться декартовой (относительно  $g_0$ ) системой координат. Легко показать, что общий вид  $K'$  в этом случае не зависит от выбора  $g_0$ . Вычисление  $K'(g)$  сводится к подстановке  $g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} + th_{\lambda\mu}$  в (2.30) при учете (2.26) и отбрасыванию нелинейных по  $t$  членов. При  $n=3$  можно понизить валентность  $K'$  согласно (2.42). Получающийся в результате линейный оператор будем обозначать символом  $\text{Rot}^1$ ). В декартовых координатах его представление имеет вид ( $p, q$  — симметричные тензоры)

$$p = \text{Rot } q: \quad p^{\lambda\mu} = \varepsilon^{\lambda\nu\rho} \varepsilon^{\mu\sigma\tau} \partial_\nu \partial_\sigma q_{\rho\tau}. \quad (2.47)$$

Отметим важнейшие свойства этого оператора. Из (2.47) следует, что его можно записать также в виде

$$\text{Rot} = \text{rot} (\text{rot})', \quad (2.48)$$

где  $\text{rot}$  — обычный ротор, а штрих обозначает транспонирование. Именно в такой форме этот оператор впервые ввел в теорию упругости Ю. А. Крутков<sup>2)</sup>. Приложение его к теории дислокаций в основном принадлежит Кренеру<sup>3)</sup>. Естественно расширить область определения оператора и считать, что (2.47) определяет его действие также на асимметричных тензорах. Легко видеть, что  $\text{Rot}$  коммутирует с оператором транспонирования и, следовательно, с операторами симметрирования и альтернирования. Очевидны также соотношения

$$\text{div Rot} = 0, \quad \text{Rot grad} = \text{Rot} (\text{grad})' = 0. \quad (2.49)$$

Если определить оператор  $\text{def}$  на векторных полях

$$p = \text{def } u: \quad p_{\lambda\mu} = \partial_{(\lambda} u_{\mu)}, \quad (2.50)$$

то из (2.49) следует важное тождество

$$\text{Rot def} = 0. \quad (2.51)$$

<sup>1)</sup> Целесообразность такого обозначения станет очевидной из дальнейшего. Подчеркнем, что введенный здесь оператор не имеет отношения к оператору  $\text{Rot}$  гл. IV.

<sup>2)</sup> 1949.2.

<sup>3)</sup> 1958.3. Кренер обозначает его символом  $\text{Ink}$ .

Ниже будет показано, что оператор  $\text{Rot}$  имеет для полей тензоров второй валентности в некотором смысле то же значение, что и оператор  $\text{rot}$  для векторных полей. По-видимому, целесообразно называть его *двойным ротором* (*биротором*), а тензорное поле, представимое в виде  $\text{Rot } q$  — *бивихревым*. Соответственно тензорные поля вида  $\text{grad } u$  или  $\text{def } \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  — вектор, можно было бы назвать *потенциальными*.

Перейдем к линейризации  $\tilde{\eta}_S$ . Рассматривая его как оператор (но уже на  $\tilde{S}$  и  $g$ ), мы можем аналогично предыдущему сопоставить ему линейный оператор, который будем обозначать тем же символом. Опуская выкладки, приведем окончательное выражение в декартовой системе координат

$$\eta_S^{\tau\sigma} = \frac{I}{2} \varepsilon^{\tau\nu\mu} \partial_\nu (\delta_\mu^\sigma S_{,\lambda}^\lambda - 2S_{,\mu}^\sigma). \quad (2.52)$$

В дальнейшем мы будем работать, как правило, в декартовой системе координат и для упрощения записи не будем различать плотности и скаляры. В связи с этим в (2.52) опущен знак  $\sim$ .

Наконец, представим внутреннюю метрику в виде

$$g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} + 2h_{\lambda\mu}. \quad (2.53)$$

Тогда основное уравнение (2.45) в прямых обозначениях принимает форму

$$\text{Rot } h = -(\eta_R + \eta_S). \quad (2.54)$$

Тождество Бианки (2.20) теперь записывается в виде

$$\text{div } \eta_R = 0. \quad (2.55)$$

Его можно получить непосредственно, сравнивая (2.49), (2.52) и (2.54). Линейризованное тождество (2.19) также проще всего получить, альтернируя (2.54) и учитывая свойства  $\text{Rot}$  и симметрию  $h$

$$\eta_R^{[\lambda\mu]} + \eta_S^{[\lambda\mu]} = 0, \quad \eta_S^{[\lambda\mu]} = \frac{I}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\rho} \partial_\nu S_{,\rho}^\nu. \quad (2.56)$$

Если кручение вызвано дислокациями, то из (2.21) следует

$$\partial_\nu S^{v\lambda} = 0, \quad \eta_R^{[\lambda\mu]} = 0, \quad (2.57)$$

Отметим, что проведенную линейризацию можно интерпретировать как переход на полевую точку зрения. Действительно, ничто теперь не мешает нам считать среду евклидовым  $R_3$ , отнесенным к «хорошей» декартовой системе координат, а  $h$ ,  $S$  и т. д. — тензорными полями в этом  $R_3$ . С другой стороны, геометрический подход имел несомненное эвристическое значение, и мы можем сохранить все преимущества геометрической интерпретации введенных величин и операторов.

**Упругая деформация.** Упругую деформацию среды  $\varepsilon_{\lambda\mu}$  целесообразно определить как меру уклонения внутренней метрики от внешней. Рассмотрим сначала общий случай нелинеаризованной модели и положим, по определению <sup>1)</sup>,

$$2\varepsilon_{\lambda\mu}(\xi) = \overset{\circ}{g}_{\lambda\mu}(\xi) - g_{\lambda\mu}(\xi). \quad (2.58)$$

Соответственно мы можем говорить о деформированном состоянии среды, понимая его как разность внешнего и внутреннего состояний.

При заданной внутренней метрике деформация  $\varepsilon_{\lambda\mu}$  не может быть произвольной, а должна удовлетворять уравнению (2.9) после подстановки в него  $\overset{\circ}{g}_{\lambda\mu}^{\Gamma} = g_{\lambda\mu} + 2\varepsilon_{\lambda\mu}$ . Это уравнение является обобщением известного условия совместности Сен-Венана и выясняет его геометрический смысл.

Если предположить, что естественное состояние  $\Phi_0$  существует для среды в целом, то в этом состоянии внутренняя метрика совпадает с внешней и, следовательно, является евклидовой. Выбрав тогда соответствующим образом лагранжеву систему координат, мы можем положить

$$ds^2 = \delta_{\lambda\mu} d\xi^\lambda d\xi^\mu. \quad (2.59)$$

Зададим внешнее состояние  $\Phi$  уравнением <sup>2)</sup>

$$\Phi: x^i = \delta_{\lambda}^i \xi^\lambda + u^i(\xi^\lambda). \quad (2.60)$$

Вектор  $u^i$  можно интерпретировать как смещение при переходе от  $\Phi_0$  к  $\Phi$ . Учитывая (2.7), находим для внешней метрики

<sup>1)</sup> Кондо 1955.2.

<sup>2)</sup> Точнее здесь было бы писать не  $\delta_{\lambda}^i$ , а  $\lambda^i$  (см. II, § 3).

в состоянии  $\Phi$  выражение

$$g_{\lambda\mu}^c = \delta_{\lambda\mu} + 2\partial_{(\lambda} u_{\mu)} + (\partial_{\lambda} u_{\mu})(\partial_{\mu} u_{\nu}). \quad (2.61)$$

Подставляя в (2.58), получаем известное в классической теории упругости выражение  $\varepsilon$  через  $u$ . В линейной теории упругости оно принимает вид

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \partial_{(\lambda} u_{\mu)}, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \text{def } u. \quad (2.62)$$

Уравнение совместности (2.9) в этом случае также принимает обычную форму.

Вернемся к линеаризованной модели упругой среды с источниками внутренних напряжений. Легко видеть, что уравнение (2.54) может быть теперь записано в виде

$$\text{Rot } \varepsilon = \eta, \quad (2.63)$$

где  $\eta = \eta_R + \eta_S$  характеризует суммарную плотность источников внутренних напряжений. В континуальной теории дислокаций  $\eta$  часто называют *несовместностью*. Из (2.56) и (2.49) следует, что

$$\eta^{\lambda\mu} = \eta^{\mu\lambda}, \quad \partial_{\lambda} \eta^{\lambda\mu} = 0. \quad (2.64)$$

**Напряжения.** Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением малых деформаций, естественно обычным образом ввести напряжения, связав их законом Гука с деформациями (см. гл. VII)

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu}, \quad \varepsilon_{\lambda\mu} = \bar{C}_{\lambda\mu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}, \\ C^{\alpha\beta\gamma\mu} \bar{C}_{\lambda\mu\nu\rho} &= \delta_{\nu}^{(\alpha} \delta_{\rho}^{\beta)}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

или в прямых обозначениях

$$\sigma = C\varepsilon, \quad \varepsilon = \bar{C}\sigma. \quad (2.66)$$

**Полная система уравнений.** В зависимости от того, какие имеются источники напряжений — внутренние или внешние, мы будем различать *внутреннее* и *внешнее напряженное состояние*. Из предыдущего следует, что полная система уравнений, определяющая внутренние напряжения (деформации), имеет вид

$$\text{Rot } \varepsilon = \eta, \quad \sigma = C\varepsilon, \quad \text{div } \sigma = 0, \quad (2.67)$$

или в напряжениях

$$\text{Rot } \bar{C}\sigma = \eta, \quad \text{div } \sigma = 0. \quad (2.68)$$

Аналогично для внешних напряжений (деформаций)

$$\text{Rot } \varepsilon = 0, \quad \sigma = C\varepsilon, \quad \text{div } \sigma = -q, \quad (2.69)$$

или в напряжениях

$$\text{Rot } \bar{C}\sigma = 0, \quad \text{div } \sigma = -q, \quad (2.70)$$

где  $q$  — плотность внешних сил. Ниже будет показано, что уравнения (2.68) и (2.70) при наложении дополнительных граничных условий однозначно определяют внутренние и соответственно внешние напряжения. В силу линейности модели общий случай получится наложением.

Отметим одно важное обстоятельство. Если задана суммарная плотность источников внутренних напряжений  $\eta$  и известно, что  $q = 0$ , то, решая (2.68), мы получим полную информацию о внутреннем напряженном состоянии среды. Однако при этом мы, вообще говоря, не знаем, какого рода источники — кручения или кривизны — вызвали это состояние, и, следовательно, не сможем однозначно предсказать результаты эксперимента по расхождению концов трубок. Внутренняя метрика также определена лишь с точностью до слагаемого вида  $\text{def } u$ . Таким образом, формулировка задачи в виде (2.68) связана с потерей определенной информации о внутреннем состоянии среды.

Если мы не хотим усложнять модель, но в то же время желаем сохранить информацию об источниках внутренних напряжений, то вместо  $\eta$  следует писать  $\eta_R + \eta_S$ , как это было в (2.54). Что касается внутренней метрики, то для ее однозначного определения (если это вообще представляет какой-либо интерес) достаточно зафиксировать начальное внешнее состояние, относительно которого определяется деформация.

Следующим нашим шагом будет рассмотрение векторных полей с особенностями. Оказывается, их структура во многом аналогична структуре тензорных полей в теории дислокаций и в то же время значительно проще.

### 3. Векторные поля с особенностями

**Обобщенные функции.** Классический анализ, имеющий дело с функциями точки, не вполне адекватен физической теории поля, в которой рассматриваются обычно величины, усредненные по некоторой области. Более адекватный аппарат дается развитой в последние годы теорией обобщенных функций. Эта теория изложена в монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова<sup>1)</sup>, к которой мы и отсылаем читателя за всеми подробностями. Здесь мы ограничимся основными определениями.

Пусть  $x(x^1, \dots, x^n)$  — точка центр-евклидова пространства  $R_n$ . Скалярная или тензорная функция точки  $\varphi(x)$  называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторой ограниченной области. Бесконечно дифференцируемая финитная функция  $\varphi(x)$  называется *основной функцией*, а совокупность всех основных функций, образующая, очевидно, линейное пространство, называется *основным пространством*  $K$ . Говорят, что последовательность основных функций  $\varphi_\nu(x)$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) *стремится к нулю в пространстве*  $K$ , если все эти функции обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю вместе со своими производными любого порядка.

Задание *линейного непрерывного функционала*  $f$  на пространстве  $K$  означает, что указано правило, по которому каждой  $\varphi \in K$  сопоставляется вещественное число  $(f, \varphi)$ , причем выполнены следующие условия:

а) для любых вещественных чисел  $\alpha, \beta$  и любых  $\varphi, \psi \in K$  справедливо равенство  $(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi)$  (линейность  $f$ );

б) если  $\varphi_\nu \rightarrow 0$  в  $K$ , то и числа  $(f, \varphi_\nu) \rightarrow 0$  (непрерывность  $f$ ).

Пусть  $f(x)$  — обычная локально интегрируемая функция<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> 1959.1. Основные сведения излагаются также в последней главе учебника математической физики под ред. Н. С. Кошлякова, 1962.

<sup>2)</sup> То есть существует интеграл от  $|f(x)|$  по любой конечной области.



Можно сопоставить ей функционал  $f$  по правилу

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad (3.1)$$

где интеграл берется по всему пространству. Очевидно,  $f$  линеен и непрерывен. Наоборот, можно показать, что совокупность значений  $(f, \varphi)$  на всех  $\varphi \in K$  однозначно определяет  $f(x)$  (с точностью до значений на множестве меры нуль). В этом смысле можно отождествить  $f$  с  $f(x)$ . Следовательно, каждую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как функционал на  $K$ . Но обратное несправедливо, т. е. не каждому функционалу можно сопоставить функцию точки. Простейшим и в то же время весьма важным примером является функционал  $\delta$ , определяемый правилом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \quad (3.2)$$

Легко показать, что не существует обычной функции, которая бы ему соответствовала. Тем не менее в силу традиции его называют  $\delta$ -функцией и обозначают  $\delta(x)$ . Допуская некоторую вольность обозначений, (3.2) записывают в виде (ср. (X.7.3))

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (3.3)$$

Вообще любой непрерывный линейный функционал  $f$  на основном пространстве называют *обобщенной функцией* и обозначают  $f(x)$ . Обобщенные функции, которым соответствуют обычные функции, называются *регулярными*, все остальные — *сингулярными*. Для сингулярной  $f(x)$  не имеет смысла говорить о ее значении в точке.

Говорят, что обобщенная функция  $f(x)$  *равна нулю в окрестности  $U$  точки  $x$* , если для любой  $\varphi \in K$ , отличной от нуля только в  $U$ ,  $(f, \varphi) = 0$ . Так,  $\delta(x)$  равна нулю в достаточно малой окрестности любой точки  $x \neq 0$ . Допуская некоторую вольность, иногда говорят, что « $\delta$ -функция равна нулю во всех точках, кроме точки  $x = 0$ , где она равна бесконечности». Если  $f(x)$  не равна нулю ни в какой окрестности точки  $x_0$ , то  $x_0$  называется *существенной точкой* для  $f(x)$ . Совокупность всех существенных точек называется *носителем  $f(x)$* . Так, носителем  $\delta(x)$  является одна точка  $x = 0$ . Обобщенную функцию с ограниченным носителем называют *финитной*.

Для обобщенных функций  $f(x)$  естественным образом определяются сложение и умножение на число. Можно определить также произведение  $f(x)$  на бесконечно дифференцируемую функцию  $a(x)$ , если заметить, что  $a(x)\varphi(x) \in K$ , если  $\varphi(x) \in K$ . Тогда  $af$  определяется равенством

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi). \quad (3.4)$$

На этом принципе переброски операции на основную функцию основывается определение всех линейных операций над обобщенными функциями. В то же время нелинейные операции, например произведение обобщенных функций, вообще говоря, не определены.

Важнейшим свойством обобщенных функций является то, что они имеют производные любых порядков, которые также являются обобщенными функциями. Если  $f(x)$  соответствует обычная дифференцируемая функция, то для ее производной  $\partial_\nu f(x) \equiv f_{,\nu}(x)$  с помощью интегрирования по частям находим

$$\int f_{,\nu}(x) \varphi(x) dx = - \int f(x) \varphi_{,\nu}(x) dx. \quad (3.5)$$

Это свойство кладется в основу общего определения *производных обобщенных функций*

$$(f, \nu_1 \dots \nu_m, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi, \nu_1 \dots \nu_m). \quad (3.6)$$

В частности, для производных  $\delta(x)$  имеем

$$\int \delta_{,\nu_1 \dots \nu_m}(x) \varphi(x) dx = (-1)^m \varphi_{,\nu_1 \dots \nu_m}(0). \quad (3.7)$$

Легко видеть, что производные  $\delta(x)$ , как и сама  $\delta(x)$ , имеют носителем точку  $x=0$ . Имеет место теорема: всякая обобщенная функция, носителем которой является одна точка ( $x=0$ ), представима в виде линейной комбинации  $\delta(x)$  и ее производных.

Наконец, отметим, что, кроме обобщенных функций на основном пространстве  $K$ , рассматриваются обобщенные функции и на других основных пространствах. Естественно, что они будут обладать при этом рядом новых свойств. В дальнейшем, если не оговорено противное, обобщенные функции будут предполагаться заданными на пространстве  $K$ .

**Свертка.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — абсолютно интегрируемые функции точки. Тогда функция  $h(x)$ , определяемая равенством

$$h(x) = f(x) * g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(x - x_0) g(x_0) dx_0, \quad (3.8)$$

называется (*интегральной*) *сверткой*  $f(x)$  и  $g(x)$ . Ей можно сопоставить обобщенную функцию

$$\begin{aligned} (h(x), \varphi(x)) &= \int \left\{ \int f(x - x_0) g(x_0) dx_0 \right\} \varphi(x) dx = \\ &= \int \int f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy = \\ &= (f(x), (g(y), \varphi(x + y))). \end{aligned} \quad (3.9)$$

*Свертку обобщенных функций*  $f$  и  $g$  естественно определить формулой

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))). \quad (3.10)$$

Однако здесь возникает осложнение, связанное с тем, что  $\varphi(x + y)$  — уже не финитная функция в пространстве переменных  $x, y$  и, следовательно, не является основной функцией. Тем не менее (3.10) можно принять за определение свертки, если наложить на  $f$  и  $g$  некоторые ограничения. В частности, оказывается, что это определение имеет смысл, если хотя бы одна из обобщенных функций  $f$  и  $g$  является финитной. В дальнейшем мы будем всегда предполагать это условие выполненным.

Легко показать, что свертка коммутативна и ассоциативна, т. е.

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h). \quad (3.11)$$

Пусть  $D$  — произвольный линейный дифференциальный оператор с *постоянными* коэффициентами. Доказывается следующее важнейшее свойство свертки

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg. \quad (3.12)$$

Благодаря этому свойству свертка играет исключительную роль при решении дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

С помощью свертки можно естественным образом сопоставить каждой обычной абсолютно интегрируемой функции

или финитной обобщенной функции  $h(x)$  линейный непрерывный оператор  $H$

$$Hf = h * f. \quad (3.13)$$

Функция  $h(x)$  называется в этом случае *ядром* оператора  $H$ . Рассмотрим, в частности, некоторые операторы, связанные с  $\delta(x)$  и ее производными.

Легко видеть, что  $\delta(x)$  является ядром тождественного оператора  $E$  (ср. (X.7.3))

$$Ef = \delta * f. \quad (3.14)$$

Отметим, что это свойство  $\delta(x)$  можно было бы положить в основу ее определения. *Сдвинутая  $\delta$ -функция*  $\delta(x + \xi)$  является ядром *оператора сдвига*  $T_\xi$

$$T_\xi f(x) = \delta(x + \xi) * f(x) = f(x + \xi). \quad (3.15)$$

Наконец, ядром дифференциального оператора с постоянными коэффициентами  $D$  является  $D\delta$ . Действительно,

$$D\delta * f = \delta * Df = Df. \quad (3.16)$$

**Тензор Грина.** Пусть  $D$  — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, переводящий пространство обобщенных вектор-функций в себя. Рассмотрим уравнения

$$D_{\cdot\mu}^\lambda w^\mu = f^\lambda. \quad (3.17)$$

Напоминаем, что здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, система координат всегда декартова.

Будем предполагать, что существует тензор  $G_{\cdot\nu}^\mu(x)$ , удовлетворяющий уравнению

$$D_{\cdot\mu}^\lambda G_{\cdot\nu}^\mu(x) = e_\nu^\lambda(x), \quad e_\nu^\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\nu^\lambda \delta(x). \quad (3.18)$$

Тогда решение (3.17) можно представить в виде

$$w^\mu = G_{\cdot\nu}^\mu * f^\nu \quad (3.19)$$

(если существует свертка). Действительно,

$$D_{\cdot\mu}^\lambda w^\mu = D_{\cdot\mu}^\lambda G_{\cdot\nu}^\mu * f^\nu = e_\nu^\lambda * f^\nu = f^\lambda. \quad (3.20)$$

Очевидно, тензор  $G_{\nu}^{\mu}$  определен с точностью до произвольного решения однородного уравнения. Если наложить на  $G_{\nu}^{\mu}$  соответствующие условия при  $x \rightarrow \infty$ , то этим можно определить его однозначно. Тем же условиям будет тогда удовлетворять  $\omega^{\mu}$ , определяемое (3.19). Обычно такими условиями являются обращение в нуль решения или его производных до нужного порядка при  $x \rightarrow \infty$ .  $G_{\nu}^{\mu}$  называется в этом случае *тензором Грина* оператора  $D_{\cdot\mu}^{\lambda}$  (для бесконечной области). Он заведомо существует, если оператор  $D_{\cdot\mu}^{\lambda}$  эллиптического типа.

В качестве примера рассмотрим оператор Лапласа в  $R_3$ :

$$D_{\mu}^{\lambda} = \Delta \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad G_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{4\pi r} \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (3.21)$$

В данном случае возможно некоторое упрощение записи, если учесть, что оператор, по существу, является скалярным — на каждую компоненту он действует независимо. Следовательно, мы можем писать

$$\Delta \omega^{\lambda} = f^{\lambda}, \quad \Delta G = \delta(x), \quad G = -\frac{1}{4\pi r}, \quad \omega^{\lambda} = G * f^{\lambda}, \quad (3.22)$$

где  $G$  — *функция Грина* оператора Лапласа. Однако в общем случае приходится иметь дело с тензором Грина.

**Операторы проектирования.** В приложениях важную роль играет разложение векторных или тензорных полей на инвариантные составляющие. Мы покажем это на примере следующих задач.

Пусть требуется определить статическое магнитное поле в неограниченной *анизотропной* среде из условий (ср. (VI. 2.3))

$$\partial_{\lambda} B^{\lambda} = 0, \quad \varepsilon^{\lambda\nu\delta} \partial_{\delta} H_{\nu} = j^{\lambda}, \quad B^{\lambda} = \mu^{\lambda\nu} H_{\nu}. \quad (3.23)$$

Уравнения типа первых двух в дальнейшем удобно будет записывать в форме

$$\operatorname{div}_{\lambda} B^{\lambda} = 0, \quad \operatorname{rot}^{\lambda\nu} H_{\nu} = j^{\lambda}. \quad (3.24)$$

Аналогичная задача для электростатики имеет вид

$$\operatorname{div}_{\lambda} D^{\lambda} = \rho, \quad \operatorname{rot}^{\lambda\nu} E_{\nu} = 0, \quad D^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\nu} E_{\nu}. \quad (3.25)$$

Мы увидим, что обе эти задачи являются частными случаями более общей задачи, которая сейчас будет рассмотрена.

Будем отправляться от алгебраического тождества

$$e_{\nu\mu}^{\lambda\alpha} = \delta_{\nu}^{\lambda}\delta_{\mu}^{\alpha} - \delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\alpha}. \quad (3.26)$$

Свернем обе его части с  $\bar{C}_{\beta}^{\nu}\bar{C}_{\rho}^{\mu}\partial_{\lambda}$ , где  $\bar{C}$  — произвольный постоянный тензор. Учитывая (2.38), получаем операторное тождество

$$\bar{C}_{\beta}^{\alpha}\bar{\Delta} = \overline{\text{grad}}_{\beta} \overline{\text{div}}^{\alpha} - \bar{C}_{\beta}^{\nu}\overline{\text{rot}}_{\nu\rho} \text{rot}^{\rho\alpha}, \quad (3.27)$$

где

$$\bar{\Delta} = \bar{C}_{\mu}^{\lambda}\partial_{\lambda}\partial^{\mu}, \quad (3.28)$$

а операторы  $\overline{\text{grad}}$ ,  $\overline{\text{div}}$  и  $\overline{\text{rot}}$  отличаются от обычных заменой  $\partial_{\lambda}$  на  $\bar{\partial}_{\lambda} = \bar{C}_{\lambda}^{\mu}\partial_{\mu}$ . Если, в частности,  $\bar{C}_{\mu}^{\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$ , то (3.27) совпадает с известным тождеством векторного анализа (в прямых обозначениях)

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}. \quad (3.29)$$

Предположим теперь, что  $\bar{C}$  имеет обратный тензор  $C$ , т. е.  $\bar{C}_{\nu}^{\lambda}C_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}$ . Тогда

$$\bar{\Delta} = \text{grad } \overline{\text{div}} - \overline{\text{rot}} \text{rot}. \quad (3.30)$$

Свертывая (3.30) слева и справа соответственно с  $\bar{C}$  и  $C$ , получаем второе тождество

$$\bar{\Delta} = \overline{\text{grad}} \text{div} - \bar{C} \overline{\text{rot}} \text{rot } C. \quad (3.31)$$

Пусть  $\bar{G}$  — функция Грина скалярного оператора  $\bar{\Delta}$ , т. е.

$$\bar{\Delta}\bar{G} = \delta(x) \quad (3.32)$$

(ее конкретное выражение будет получено ниже). Тогда для любого векторного поля  $w$ , исчезающего на бесконечности, справедливо представление

$$w = \bar{G} * \bar{\Delta}w \quad (3.33)$$

или, учитывая (3.30) и (3.31),

$$w = \bar{G} * \overline{\text{grad}} \text{div } \bar{C}w - \bar{G} * \overline{\text{rot}} \text{rot } w, \quad (3.34)$$

$$w = \bar{G} * \overline{\text{grad}} \text{div } w - \bar{G} * \bar{C} \overline{\text{rot}} \text{rot } Cw. \quad (3.35)$$

Эти представления дают решение задачи о нахождении векторного поля  $w$ , исчезающего на бесконечности, если заданы

$$\rho_1 = \operatorname{div} \bar{C}w, \quad q_1 = \operatorname{rot} w \quad (3.36)$$

или

$$\rho_2 = \operatorname{div} w, \quad q_2 = \operatorname{rot} Cw. \quad (3.37)$$

В частности, для задач (3.23) и (3.25) находим

$$\bar{C}^{\lambda\nu} = \mu^{\lambda\nu}, \quad H = -\bar{G} * \operatorname{rot} j; \quad (3.38)$$

$$\bar{C}^{\lambda,\nu} = \varepsilon^{\lambda\nu}, \quad E = \bar{G} * \operatorname{grad} \rho. \quad (3.39)$$

Отметим, что случай, когда заданы  $\operatorname{rot} C_1 w$  и  $\operatorname{div} C_2 w$ , заменой переменных  $w_1 = C_1 w$  или  $w_2 = C_2 w$  сводится соответственно к (3.36) или (3.37).

Представления (3.34) и (3.35) можно интерпретировать как однозначные разложения векторного поля  $w$ , исчезающего на бесконечности, на потенциальную и вихревую составляющие в анизотропной среде. Взяв, например, за основу (3.35), мы можем положить

$$w = w_1 + w_2, \quad \operatorname{rot} Cw_1 = 0, \quad \operatorname{div} w_2 = 0, \quad (3.40)$$

где

$$w_1 = \bar{G} * \overline{\operatorname{grad} \operatorname{div} w}, \quad w_2 = -\bar{G} * \bar{C} \overline{\operatorname{rot} \operatorname{rot} Cw}. \quad (3.41)$$

Удобно ввести специальные операторы, осуществляющие разложение (3.40). Оператор  $P$ , определенный на линейном пространстве, называется *оператором проектирования*, если  $PP = P$ . Зададим на пространстве обобщенных вектор-функций, исчезающих на бесконечности, операторы проектирования  $\Pi$  и  $\Theta$ , определив их условиями

$$\operatorname{rot} C\Pi = 0, \quad \operatorname{div} \Theta = 0 \quad (\Pi + \Theta = E), \quad (3.42)$$

где  $E$  — тождественный оператор. Корректность определения следует из однозначности разложения (3.40). Из (3.41) после несложных преобразований находим явные выражения для ядер  $\pi_V^\lambda(x)$  и  $\vartheta_V^\lambda(x)$  операторов  $\Pi$  и  $\Theta$ :

$$\pi_V^\lambda = \bar{\partial}^\lambda \partial_V \bar{G}, \quad \vartheta_V^\lambda = \varepsilon_{\nu\rho}^{\lambda\mu} \partial_\mu \bar{\partial}^\nu \bar{G}, \quad (3.43)$$

$$\pi_V^\lambda(x) + \vartheta_V^\lambda(x) = e_V^\lambda(x). \quad (3.44)$$

Обобщенные функции  $\pi_v^\lambda(x)$  и  $\vartheta_v^\lambda(x)$  можно рассматривать как результат применения операторов  $\Pi$  и  $\Theta$  к ядру тождественного оператора  $e_v^\lambda(x)$ . Как ядра операторов они совпадают с ядром тождественного оператора на соответствующих подпространствах, определяемых  $\Pi$  и  $\Theta$ , но как обобщенные функции существенно отличаются от  $e_v^\lambda(x)$ . Действительно, их носитель совпадает со всем пространством, тогда как носителем  $e_v^\lambda(x)$  является точка  $x = 0$ . Ниже будет показано, что  $\pi_v^\lambda(x)$  и  $\vartheta_v^\lambda(x)$  можно интерпретировать как поля диполя и элементарного вихря.

Потенциальная и вихревая составляющие  $w$ , удовлетворяющие (3.40), могут быть теперь представлены в виде

$$w_1 = \Pi w, \quad w_2 = \Theta w \quad (3.45)$$

или

$$w_1^\lambda = \pi_v^\lambda * w^v, \quad w_2^\lambda = \vartheta_v^\lambda * w^v. \quad (3.46)$$

Нам осталось вычислить функцию Грина  $\bar{G}$  для оператора  $\bar{\Delta}$ . С этой целью в уравнении (3.32) подвергнем переменную  $x$  невырожденному аффинному преобразованию  $A$ :  $x' = Ax$ :

$$x^{\lambda'} = A_{\lambda'}^\lambda x^\lambda, \quad |A| \stackrel{\text{def}}{=} |\text{Det}(A_{\lambda'}^\lambda)| \neq 0, \quad (3.47)$$

такому, что в новых переменных  $x^{\lambda'}$

$$\bar{\Delta} = \delta^{\lambda'\mu'} \partial_{\lambda'} \partial_{\mu'} = \Delta'. \quad (3.48)$$

Имеем

$$\bar{\Delta} = \bar{C}^{\lambda\mu} \partial_\lambda \partial_\mu = \delta^{\lambda'\mu'} A_{\lambda'}^\lambda A_{\mu'}^\mu \partial_\lambda \partial_\mu, \quad (3.49)$$

где  $A_{\lambda'}^\lambda$  — матрица обратного преобразования. Отсюда

$$\bar{C}^{\lambda\mu} = \delta^{\lambda'\mu'} A_{\lambda'}^\lambda A_{\mu'}^\mu, \quad |A| = \sqrt{|\bar{C}|^{-1}}. \quad (3.50)$$

Непосредственно проверяется, что

$$C_{\lambda\mu} \equiv \bar{C}_{\lambda\mu}^{-1} = \delta_{\lambda'\mu'} A_{\lambda'}^\lambda A_{\mu'}^\mu. \quad (3.51)$$

Таким образом, в новых переменных (3.32) принимает вид

$$\Delta' \bar{G}(x') = \delta(A^{-1}x'). \quad (3.52)$$

Из определения  $\delta(x)$  следует

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) = \int \delta(A^{-1}x') \varphi(A^{-1}x') |A|^{-1} dx'. \quad (3.53)$$



Обозначим

$$\psi(x') = |A|^{-1} \varphi(A^{-1}x'). \quad (3.54)$$

Тогда

$$\int \delta(A^{-1}x') \psi(x') dx' = |A| \psi(0), \quad (3.55)$$

и, следовательно,

$$\delta(A^{-1}x') = |A| \delta(x'). \quad (3.56)$$

Подставляя в (3.52) и учитывая (3.50), находим

$$\bar{G}(x') = -\frac{1}{4\pi\bar{r}(x')}, \quad \bar{r}(x') = \sqrt{|\bar{C}| \delta_{\lambda'\mu'} x^{\lambda'} x^{\mu'}}. \quad (3.57)$$

Возвращаясь к исходной переменной и принимая во внимание (3.51), окончательно получаем

$$\bar{G}(x) = -\frac{1}{4\pi\bar{r}(x)}, \quad (3.58)$$

$$\bar{r}(x) = \sqrt{|\bar{C}| C_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu}. \quad (3.59)$$

Если  $\bar{C}_v^\mu = \delta_v^\mu$ , то это выражение совпадает с (3.22). Из (3.59) следует, что приведенные выкладки имеют смысл лишь в случае, когда форма  $C_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu$  положительна.

Подведем итог. Нахождение векторного поля из условий типа (3.36) или (3.37), а также разложение его на потенциальную и вихревую составляющие в анизотропной среде несущественно отличаются от аналогичных задач в изотропной среде. Поэтому в дальнейшем все формулы будут приводиться для изотропной среды. Для перехода к анизотропному случаю достаточно заменить  $r \rightarrow \bar{r}$ , а также ввести операторы с чертой в формулах типа (3.38). Позднее мы увидим, что в случае тензорных полей учет анизотропии связан с большими трудностями.

**Мультиполи.** Пусть  $G(x)$  — аналитическая функция. Запишем в тензорной символике ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$ :

$$\begin{aligned} G(x + \xi) &= G(x) + \xi^{v_1} G_{,v_1}(x) + \frac{1}{2!} \xi^{v_1} \xi^{v_2} G_{,v_1 v_2}(x) + \dots \\ &\dots = \sum_{m=0}^{\infty} P^{v_1 \dots v_m}(\xi) G_{,v_1 \dots v_m}(x), \end{aligned} \quad (3.60)$$

где

$$P^{v_1 \dots v_m}(\xi) = \frac{1}{m!} \xi^{v_1} \dots \xi^{v_m}. \quad (3.61)$$

Применим это разложение к  $\delta(x + \xi)$ :

$$\delta(x + \xi) = \sum_m P^{v_1 \dots v_m}(\xi) \delta_{, v_1 \dots v_m}(x). \quad (3.62)$$

Его нужно понимать в том смысле, что свертка  $\delta(x + \xi) * G(x)$  дает ряд (3.60). Более точно это означает, что мы рассматриваем  $\delta(x + \xi)$  уже не на основном пространстве  $K$ , а на основном пространстве аналитических функций. Обратим внимание на то, что в правую часть (3.62), в отличие от левой, переменные  $x$  и  $\xi$  входят не симметрично.

Пусть теперь  $q(x)$  — финитная обобщенная функция на пространстве  $K$ . Имеем тождество

$$q(x + \xi) = \delta(x + \xi) \overset{\xi}{*} q(\xi), \quad (3.63)$$

где свертка происходит по  $\xi$ . Подставим сюда формально разложение (3.62). Тогда получим

$$q(x + \xi) = \sum_m q^{(m)}(x, \xi), \quad (3.64)$$

$$q^{(m)}(x, \xi) = (-1)^m Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) \delta_{, v_1 \dots v_m}(x), \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) &= (-1)^m P^{v_1 \dots v_m}(\xi) * q(\xi) = \\ &= \int P^{v_1 \dots v_m}(\xi_0 - \xi) q(\xi_0) d\xi_0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

$q^{(m)}(x, \xi)$  называется *мультиполем  $m$ -го порядка*,  $Q^{v_1 \dots v_m}(\xi)$  — *моментом мультиполя*, а ряд (3.64) — *разложением по мультиполям*. По традиции второй член ряда называют *диполем*, третий член — *квадруполем* и т. д.

Выясним, какой смысл можно придать знаку  $=$  в (3.64). Для этого рассмотрим свертку  $\omega = G * q$ . Имеем

$$\begin{aligned} \omega(x + \xi) &= G(x + \xi) \overset{\xi}{*} q(\xi) = \\ &= \sum_m G_{, v_1 \dots v_m}(x) P^{v_1 \dots v_m}(\xi) \overset{\xi}{*} q(\xi) = \\ &= \sum_m (-1)^m Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) G_{, v_1 \dots v_m}(x). \end{aligned} \quad (3.67)$$

С другой стороны, если использовать разложение (3.64),

$$\begin{aligned} \omega(x + \xi) &= G(x) * q(x + \xi) = \\ &= G(x) * \sum_m (-1)^m Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) \delta_{v_1 \dots v_m}(x) = \\ &= \sum_m (-1)^m Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) G_{v_1 \dots v_m}(x). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Таким образом, мы можем придать разложению (3.64) следующий смысл: свертка левой и правой частей (3.64) с любой аналитической функцией дает одинаковый результат.

Для приложений, однако, характерна несколько иная ситуация. Роль  $q(x)$  играют обычно источники поля, распределенные в некоторой ограниченной области  $U$ , а  $G(x)$  является функцией (или тензором) Грина оператора  $D$  и, следовательно, имеет особенность в точке  $x = \theta$ . В связи с этим решение уравнения  $D\omega = q$ , вообще говоря, не будет совпадать с решением, соответствующим замене  $q$  его разложением по мультиполям. Но при этом существенно, что если  $\xi \in U$ , то вне  $U$  эти решения совпадают. Поэтому, если нас интересует поле на некотором расстоянии от источников, мы можем заменить последние рядом по мультиполям и использовать для  $\omega$  выражение (3.68).

Рассмотрим подробнее свойства разложения (3.64). Заменяя  $x \rightarrow x - \xi$ , перепишем его в виде

$$q(x) = \sum_m (-1)^m Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) \delta_{v_1 \dots v_m}(x - \xi). \quad (3.69)$$

Мультиполи сосредоточены в точке  $x = \xi$ , относительно которой вычисляются также моменты  $Q^{v_1 \dots v_m}(\xi)$ . Можно показать, что первый отличный от нуля момент не зависит от выбора точки приведения  $\xi$ , тогда как все остальные от нее зависят. Ряд (3.69) является в некотором смысле антиподом ряда (3.60). Последний сходится тем лучше, чем ближе точка  $\xi$  к точке  $x$ . Сходимость же ряда (3.69) определяется сходимостью ряда

$$\omega(x) = \sum_m (-1)^m Q^{v_1 \dots v_m}(\xi) G_{v_1 \dots v_m}(x - \xi). \quad (3.70)$$

Она тем лучше, чем дальше точка наблюдения  $x$  от точки приведения  $\xi$ .

В дальнейшем мы будем, как это обычно принято, помещать начало координат в точку приведения  $\xi$ . Тогда из (3.66) и (3.61) находим

$$Q^{v_1 \dots v_m} = \int P^{v_1 \dots v_m}(x) q(x) dx = \\ = \frac{I}{m!} \int x^{v_1} \dots x^{v_m} q(x) dx. \quad (3.71)$$

В частности, если

$$q(x) = \sum_a Q_a \delta(x - x_a) \quad (3.72)$$

(например, заряды  $Q_a$ , сосредоточенные в точках  $x_a$ ), то

$$Q^{v_1 \dots v_m} = \frac{I}{m!} \sum_a Q_a x_a^{v_1} \dots x_a^{v_m}. \quad (3.73)$$

Если  $q$  и  $\omega$  — тензоры, то во всех выражениях нужно добавить соответствующие индексы. Так для векторных полей

$$q^\lambda(x) = \sum_m (-I)^m Q^{\lambda v_1 \dots v_m} \delta_{, v_1 \dots v_m}(x), \\ \omega^\mu(x) = \sum_m (-I)^m Q^{\lambda v_1 \dots v_m} G_{, \lambda, v_1 \dots v_m}^\mu(x). \quad (3.74)$$

Заметим, что тензор  $Q^{\lambda v_1 \dots v_m}$  симметричен по индексам  $v_1 \dots v_m$ .

Рассмотрим теперь связь потенциальных и вихревых полей с разложениями источников по мультиполям.

Пусть  $\mathbf{u}$  — потенциальное поле в изотропной среде, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \theta. \quad (3.75)$$

Предположим, что  $\rho$  финитна, и разложим ее по мультиполям

$$\rho(x) = \sum_m (-I)^m M^{v_1 \dots v_m} \delta_{, v_1 \dots v_m}(x). \quad (3.76)$$

Тогда из общей формулы (ср. (3.39))

$$u_{, \mu}(x) = G * \partial_{, \mu} \rho = G_{, \mu} * \rho \quad \left( G = -\frac{I}{4\pi r} \right) \quad (3.77)$$

следует представление  $u_{, \mu}$  в виде суммы полей мультиполей

$$u_{, \mu}(x) = \sum_m u_{, \mu}^{(m)}(x) = \sum_m (-I)^m M^{v_1 \dots v_m} G_{, \mu v_1 \dots v_m}(x). \quad (3.78)$$

В частности, поле диполя с моментом  $M^\nu$  в точке  $x = 0$  (ср. (3.43))

$$u_\mu(x) = u_\mu^{(j)}(x) = -M^\nu G_{,\mu\nu}(x) = -M_\nu \pi_\mu^\nu(x). \quad (3.79)$$

Пусть  $\mathbf{v}$  — вихревое поле в изотропной среде, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{q} \quad (\operatorname{div} \mathbf{q} = 0). \quad (3.80)$$

Считая, что  $\mathbf{q}$  финитна, запишем ее разложение по мультиполям в виде (3.74). В силу линейной независимости членов ряда из условия  $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$  следует

$$Q^{\lambda\nu_1 \dots \nu_m} \delta_{,\lambda\nu_1 \dots \nu_m}(x) = 0, \quad (3.81)$$

откуда

$$Q^{(\lambda\nu_1 \dots \nu_m)} = 0. \quad (3.82)$$

Можно показать, что общее представление для моментов  $Q^{\lambda\nu_1 \dots \nu_m}$ , удовлетворяющих (3.82), имеет вид

$$Q^\lambda = 0, \quad Q^{\lambda\nu_1 \dots \nu_m} = \varepsilon^{\lambda\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} M_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} \quad (m > 0), \quad (3.83)$$

где  $M^{\nu_1 \dots \nu_m}$  — тензор, симметричный по  $\nu_1 \dots \nu_m$ . Равенство нулю  $Q^\lambda$  можно также получить непосредственно из (3.71):

$$Q^\lambda = \int q^\lambda dx = \int (q^\lambda + x^\lambda \partial_\nu q^\nu) dx = \int \partial_\nu (x^\lambda q^\nu) dx. \quad (3.84)$$

Преобразуя последний интеграл в поверхностный и учитывая финитность  $\mathbf{q}$ , получаем требуемый результат.

После подстановки (3.83) разложение для  $q^\lambda$  принимает вид

$$q^\lambda(x) = \operatorname{rot}^{\lambda\nu_1} M_{\nu_1} \delta(x) + \dots \quad (3.85)$$

Первый член соответствует *элементарному вихрю* (или *элементарному току*) в точке  $x = 0$  с моментом  $M_p$

$$M_p = -\frac{1}{2} \varepsilon_{p\lambda\nu_1} Q^{\lambda\nu_1} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{p\lambda\nu_1} \int q^\lambda x^{\nu_1} dx. \quad (3.86)$$

В векторных обозначениях для элементарного вихря и его момента имеем

$$\mathbf{q} = \operatorname{rot} \mathbf{M} \delta(x) = -[\mathbf{M} \operatorname{grad} \delta(x)], \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \mathbf{q}] dx. \quad (3.87)$$

Согласно (3.38) решение системы (3.80) можно представить в форме

$$v_{\mu} = -G * \text{rot}_{\mu\lambda} q^{\lambda} \quad \left( G = -\frac{I}{4\pi r} \right). \quad (3.88)$$

Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем в аналогичных формулах перебрасывать оператор  $\text{rot}_{\mu\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^{\nu}$  на скалярный сомножитель свертки. Тогда

$$v_{\mu} = Z_{\mu\lambda} * q^{\lambda}, \quad Z_{\mu\lambda} = -\text{rot}_{\mu\lambda} G. \quad (3.89)$$

Введенный здесь антисимметричный тензор  $Z_{\mu\lambda}$  можно интерпретировать как *тензор Грина оператора rot на подпространстве вихревых векторных полей*. В отличие от обычного тензора Грина, определяемого (3.18),  $Z_{\mu\lambda}$  удовлетворяет уравнениям (ср. (3.43))

$$\text{rot}^{\nu\mu} Z_{\mu\lambda} = \vartheta_{\lambda}^{\nu}, \quad \text{div}^{\mu} Z_{\mu\lambda} = 0. \quad (3.90)$$

Здесь в правой части первого уравнения вместо ядра тождественного оператора стоит ядро оператора проектирования  $\Theta$ , который совпадает с тождественным на подпространстве вихревых векторов.

Для поля элементарного вихря имеем

$$v_{\mu} = Z_{\mu\lambda} * \text{rot}^{\lambda\nu} M_{\nu} \delta(x) = M_{\nu} \text{rot}^{\lambda\nu} Z_{\mu\lambda} \quad (3.91)$$

или, учитывая (3.90),

$$v_{\mu} = M_{\nu} \vartheta_{\mu}^{\nu}. \quad (3.92)$$

После подстановки выражения для  $G$  получаем хорошо известную в гидродинамике и магнитостатике формулу

$$v = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \frac{[M \text{ grad } r]}{r^2}. \quad (3.93)$$

Формулы (3.79) и (3.92) позволяют интерпретировать  $\pi_{\mu}^{\nu}(x)$  и  $\vartheta_{\mu}^{\nu}(x)$  как поля диполя и элементарного вихря. Из этих же формул следует

$$v_{\mu} - u_{\mu} = M_{\nu} (\vartheta_{\mu}^{\nu} + \pi_{\mu}^{\nu}) = M_{\nu} e_{\mu}^{\nu} = M_{\mu} \delta(x). \quad (3.94)$$

Таким образом, если элементарный вихрь и диполь сосредоточены в одной точке и имеют равные моменты, то их поля совпадают всюду, кроме особой точки, где они

отличаются на  $M_\mu \delta(x)$ . Будем называть такие поля *эквивалентными*. В курсах электродинамики поля элементарных токов и соответствующих им магнитных диполей обычно не различают, что допустимо при рассмотрении изолированных особенностей. Однако при переходе к распределенной плотности токов или диполей это различие становится существенным, так как при интегрировании по области члены вида  $M_\mu \delta(x)$  дают конечный вклад. Как мы увидим ниже, аналогичная ситуация имеет место в теории дислокаций.

### §-Функции и операторы, связанные с поверхностями <sup>1)</sup>.

Мы рассмотрели поля особенностей, сосредоточенных в точке. Но нам придется также иметь дело с особенностями, сосредоточенными на линии, поверхности или в области  $V$  частности, дислокация является особой линией. В связи с этим мы разовьем аппарат, который позволит единообразным методом решать задачи для любых особенностей.

Пусть  $L$  — некоторая кривая в  $R_3$ . Обобщенная функция  $\delta(L)$  на основном пространстве  $K$  определяется соотношением

$$\int \delta(L) \varphi(x) dx = \int_L \varphi(x_L) dL. \quad (3.95)$$

Аналогично для поверхности  $S$  и области  $V$  определяются  $\delta(S)$  и  $\delta(V)$ :

$$\begin{aligned} \int \delta(S) \varphi(x) dx &= \int_S \varphi(x_S) dS, \\ \int \delta(V) \varphi(x) dx &= \int_V \varphi(x_V) dV. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Справедливо представление

$$\delta(L) = \int_L \delta(x - x_L) dL, \quad (3.97)$$

---

<sup>1)</sup> См. также И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов 1959. 1, гл. III, где рассматриваются обобщенные функции, связанные с поверхностями. Однако следует отметить, что они, вообще говоря, не совпадают с вводимыми ниже  $\delta$ -функциями.

которое нужно понимать в том смысле, что

$$\begin{aligned} \int dx \varphi(x) \int_L \delta(x - x_L) dL &= \\ &= \int_L dL \int \delta(x - x_L) \varphi(x) dx = \int_L \varphi(x_L) dL. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Аналогично

$$\delta(S) = \int_S \delta(x - x_S) dS, \quad \delta(V) = \int_V \delta(x - x_V) dV. \quad (3.99)$$

Пусть, например,  $L$  — ось  $x^3$ , а  $S$  — плоскость  $x^1 x^2$ . Тогда  $\delta(L)$  и  $\delta(S)$  можно представить как прямое произведение<sup>1)</sup> одномерных  $\delta$ -функций и функций, тождественно равных единице:

$$\delta(L) = \delta(x^1) \times \delta(x^2) \times 1(x^3), \quad \delta(S) = 1(x^1, x^2) \times \delta(x^3). \quad (3.100)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_S \delta(L) dS &= \int \delta(x^1) \times \delta(x^2) \times 1(0) dx^1 dx^2 = 1, \\ \int_L \delta(S) dL &= \int 1(0, 0) \times \delta(x^3) dx^3 = 1. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Отсюда следует, что мы можем положить

$$\delta(L) \delta(S) = \delta(x^1) \times \delta(x^2) \times \delta(x^3) = \delta(x). \quad (3.102)$$

Легко видеть, что (3.102) не зависит от конкретного вида  $L$  и  $S$ , если только они пересекаются в одной точке  $x = 0$ . Поэтому в общем случае, если кривая  $L$  пересекает поверхность  $S$  в одной точке  $x = x_0$ , мы полагаем<sup>2)</sup>

$$\delta(L) \delta(S) = \delta(x - x_0). \quad (3.103)$$

Для ограниченных  $L$ ,  $S$  и  $V$

$$\int \delta(L) dx = l, \quad \int \delta(S) dx = s, \quad \int \delta(V) dx = v, \quad (3.104)$$

где  $l$ ,  $s$  и  $v$  — соответственно длина, площадь и объем.

<sup>1)</sup> См. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов 1959. 1, стр. 131.

<sup>2)</sup> Строгое доказательство аналогичных соотношений см. в книге де Рама 1955. 3, гл. VI.



Если  $V$  стягивается к точке  $x_0$ , то

$$\delta(V) \approx v \delta(x - x_0), \quad \lim_{V \rightarrow x_0} \frac{1}{v} \delta(V) = \delta(x - x_0). \quad (3.105)$$

Аналогичные предельные формулы имеют место для  $\delta(S)$  и  $\delta(L)$ .

Наряду со скалярными мы будем рассматривать *векторные*  $\delta$ -функции  $\delta(L^v)$  и  $\delta(S^v)$ , определив их для *ориентированных*  $L$  и  $S$  соотношениями

$$\begin{aligned} \int \delta(L^v) \varphi(x) dx &= \int_L \varphi(x_L) dL^v \quad (dL^v = \lambda^v dL), \\ \int \delta(S^v) \varphi(x) dx &= \int_S \varphi(x_S) dS^v \quad (dS^v = n^v dS), \end{aligned} \quad (3.106)$$

где  $\lambda^v(x_L)$  и  $n^v(x_S)$  — соответственно единичный касательный вектор к  $L$  и нормаль к  $S$ .

Для ограниченных  $L$  и  $S$

$$\int \delta(L^v) dx = l^v, \quad \int \delta(S^v) dx = s^v, \quad (3.107)$$

где  $l^v$  и  $s^v$  — векторные длина и площадь. Очевидно, для замкнутых  $L$  и  $S$  они равны нулю.

Легко видеть, что если  $L$  и  $S$  пересекаются в одной точке  $x = x_0$ , то

$$\delta(L_v) \delta(S^v) = \pm \delta(x - x_0) \quad (3.108)$$

в зависимости от того, согласованы их ориентации или нет. Действительно, деформируя  $L$  и  $S$ , мы можем превратить их в прямую и плоскость с постоянными единичными векторами  $\lambda$  и  $n$  и свести задачу к (3.103).

Производные  $\delta$ -функций определяются обычным образом, например

$$\int \delta_{,\mu}(S^v) \varphi(x) dx = - \int_S \varphi_{,\mu}(x_S) dS^v. \quad (3.109)$$

Рассмотрим теперь операторы, определяемые поверхностями. Сопоставим каждой основной функции  $\varphi(x)$  функцию  $f(x)$ :

$$f(x) = \int_L \varphi(x - x_L) dL. \quad (3.110)$$

Этим на пространстве  $K$  задается линейный оператор, однозначно определяемый кривой  $L$ . Будем обозначать его  $\langle L \rangle$  и писать

$$\langle L \rangle \varphi = \int_L \varphi(x - x_L) dL. \quad (3.111)$$

Если кривая  $L$  ограничена, то определение естественным образом распространяется на обобщенные функции. Если  $L$  не ограничена, то ему во всяком случае можно придать смысл для финитных обобщенных функций.

Аналогичным образом определяются  $\langle S \rangle$  и  $\langle V \rangle$ . Все эти операторы имеют простой геометрический смысл. После соответствующей нормировки они могут быть истолкованы как операторы усреднения по линии, поверхности или области.

Формулы, аналогичные (3.111), определяют операторы во всех тех случаях, когда имеют смысл соответствующие интегралы. Однако этим накладывается не всегда оправданное ограничение на класс тех фигур, которым можно сопоставить оператор. В частности, естественно расширить определение оператора таким образом, чтобы его можно было сопоставить такой важной фигуре, как точка. Положим, по определению, что началу координат  $x = 0$  соответствует тождественный оператор  $E$ , а точке  $x = \xi$  — оператор сдвига  $T_\xi$ . Тогда мы можем сказать, что каждой «достаточно хорошей» фигуре  $F$  однозначно сопоставляется оператор  $\langle F \rangle$ .

Ранее мы видели, что ядрами  $E$  и  $T_\xi$  являются  $\delta(x)$  и  $\delta(x - \xi)$ . Аналогично этому ядрами других операторов являются введенные выше  $\delta$ -функции, например

$$\begin{aligned} \varphi(x) * \delta(S) &= \int \varphi(x - x_0) \delta(S_0) dx_0 = \\ &= \int \varphi(x - x_0) dx_0 \int_S \delta(x_0 - x_S) dS = \\ &= \int_S dS \int \varphi(x - x_0) \delta(x_0 - x_S) dx_0 = \\ &= \int_S \varphi(x - x_S) dS = \langle S \rangle \varphi(x). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Наряду со скалярными операторами будем рассматривать *векторные* операторы

$$\begin{aligned}\langle L^{\nu} \rangle \varphi(x) &= \int_L \varphi(x - x_L) dL^{\nu} = \varphi(x) * \delta(L^{\nu}), \\ \langle S^{\nu} \rangle \varphi(x) &= \int_S \varphi(x - x_S) dS^{\nu} = \varphi(x) * \delta(S^{\nu}).\end{aligned}\quad (3.113)$$

Вообще  $p$ -мерной ориентированной поверхности  $S$  в  $R_n$  можно однозначно сопоставить  $\delta(S^{\nu_1 \dots \nu_p})$  и *тензорный* оператор  $\langle S^{\nu_1 \dots \nu_p} \rangle$

$$\int \delta(S^{\nu_1 \dots \nu_p}) \varphi(x) dx = \int_S \varphi(x_S) dS^{\nu_1 \dots \nu_p}, \quad (3.114)$$

$$\langle S^{\nu_1 \dots \nu_p} \rangle \varphi(x) = \int_S \varphi(x - x_S) dS^{\nu_1 \dots \nu_p} = \varphi(x) * \delta(S^{\nu_1 \dots \nu_p}). \quad (3.115)$$

При  $p = n$  ( $p = 0$ ) операторы вырождаются в скалярные (псевдоскалярные).

Определения естественно распространяются на производные от операторов, например

$$\langle S^{\nu}_{,\lambda} \rangle \varphi(x) = \varphi(x) * \delta_{,\lambda}(S^{\nu}) = \langle S^{\nu} \rangle \varphi_{,\lambda}(x). \quad (3.116)$$

Важное значение имеют формулы Стокса для операторов. Пусть  $V$  — область в  $R_3$  с границей  $S$  (ориентации согласованы). Тогда для тензора  $p$  (индексы опускаем) имеем

$$\begin{aligned}\int \delta_{,\lambda}(V) p(x) dx &= - \int_V \partial_{\lambda} p(x_{\nu}) dV = \\ &= - \int_S p(x_S) dS_{\lambda} = - \int \delta(S_{\lambda}) p(x) dx.\end{aligned}\quad (3.117)$$

Отсюда

$$\delta_{,\lambda}(V) = -\delta(S_{\lambda}), \quad \langle V_{,\lambda} \rangle = -\langle S_{\lambda} \rangle, \quad (3.118)$$

или в прямых обозначениях

$$\text{grad } \delta(V) = -\delta(\mathbf{S}), \quad \text{grad } \langle V \rangle = -\langle \mathbf{S} \rangle. \quad (3.119)$$

Следовательно, для замкнутой поверхности  $S$

$$\text{rot } \delta(\mathbf{S}) = 0, \quad \text{rot } \langle \mathbf{S} \rangle = 0. \quad (3.120)$$

Пусть теперь  $S$  — двумерная поверхность и  $L$  — ее граница (ориентации согласованы). Тогда из формул

$$\begin{aligned} \int \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \delta_{,\mu}(S_\lambda) p(x) dx &= - \int_S \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \partial_\mu p(x_S) dS_\lambda = \\ &= - \int_L p(x_L) dL^\nu = - \int \delta(L^\nu) p(x) dx \end{aligned} \quad (3.121)$$

следует

$$\text{rot}^{\nu\lambda} \delta(S_\lambda) = \delta(L^\nu), \quad \text{rot}^{\nu\lambda} \langle S_\lambda \rangle = \langle L^\nu \rangle, \quad (3.122)$$

или в прямых обозначениях

$$\text{rot } \delta(\mathbf{S}) = \delta(L), \quad \text{rot } \langle \mathbf{S} \rangle = \langle L \rangle. \quad (3.123)$$

Отсюда для замкнутого контура  $L$

$$\text{div } \delta(L) = 0, \quad \text{div } \langle L \rangle = 0. \quad (3.124)$$

Наконец, для ориентированной кривой  $L$  с начальной точкой  $\xi$  и конечной  $\eta$  имеем

$$\partial_\lambda \delta(L^\lambda) = \delta(x - \xi) - \delta(x - \eta), \quad \langle L^\lambda, \lambda \rangle = T_{-\xi} - T_{-\eta}. \quad (3.125)$$

Пусть теперь задан ориентированный контур  $L$  и на нем некоторая скалярная или тензорная функция  $f(x_L)$ . Тогда соответствующие  $\delta$ -функция и оператор с весом  $f(x_L)$  определяются формулами

$$\int (f(x_L) \delta(L)) \varphi(x) dx = \int_L \varphi(x_L) f(x_L) dL, \quad (3.126)$$

$$\langle f(x_L) L \rangle \varphi(x) = \int_L \varphi(x - x_L) f(x_L) dL. \quad (3.127)$$

Аналогично определяются остальные  $\delta$ -функции и операторы с весом.

Производные определяются обычным образом переброской операции на  $\varphi(x)$ . В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумения, мы будем опускать скобки в

выражениях для  $\delta$ -функции с весом и писать, например,  $\text{rot}^{\mu\lambda} M_\lambda(x_L) \delta(L)$ .

Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\delta(L^\nu) = \lambda^\nu(x_L) \delta(L), \quad \delta(S^\nu) = n^\nu(x_S) \delta(S), \quad (3.128)$$

где  $\lambda^\nu$  и  $n^\nu$  — соответственно единичный касательный вектор и нормаль.

Отметим, что формулы типа Стокса, вообще говоря, не распространяются на  $\delta$ -функции и операторы с весом.

**Поля произвольно распределенных диполей и вихрей.** Плотности диполя и элементарного вихря с моментами  $M_\nu$ , сосредоточенных в точке  $x=0$ , как мы видели, можно представить соответственно в виде

$$\rho(x) = -\partial^\nu M_\nu \delta(x), \quad q^\lambda(x) = \text{rot}^{\lambda\nu} M_\nu \delta(x). \quad (3.129)$$

Аналогично для произвольного распределения диполей и вихрей удобно ввести представления

$$\rho(x) = -\partial^\nu \mu_\nu(x), \quad q^\lambda(x) = \text{rot}^{\lambda\nu} \mu_\nu(x), \quad (3.130)$$

где  $\mu_\nu(x)$  — *плотность моментов* соответственно диполей и вихрей. В частности, для распределений в области  $V$ , по поверхности  $S$  и по линии  $L$  имеем

$$\mu_\nu(x) = M_\nu(x_V) \delta(V), \quad (3.131)$$

$$\mu_\nu(x) = M_\nu(x_S) \delta(S), \quad (3.132)$$

$$\mu_\nu(x) = M_\nu(x_L) \delta(L), \quad (3.133)$$

где  $M_\nu(x_V)$ ,  $M_\nu(x_S)$  и  $M_\nu(x_L)$  — соответственно *объемная*, *поверхностная* и *линейная* плотности моментов.

Важными случаями распределения по  $S$  и  $L$  являются такие распределения, при которых  $M_\nu$  направлены по нормали к  $S$  и по касательной к  $L$ . В этих случаях мы будем писать

$$\mu_\nu(x) = M(x_S) \delta(S_\nu), \quad (3.134)$$

$$\mu_\nu(x) = M(x_L) \delta(L_\nu) \quad (3.135)$$

и называть  $M(x_S)$  и  $M(x_L)$  соответственно *скалярной* поверхностной и линейной плотностью моментов. Обычно, когда говорят, что моменты распределены по  $S$  или  $L$  с постоянной плотностью, подразумевают под этим, что  $M = \text{const}$ .

Для полей произвольно распределенных диполей и вихрей согласно (3.77) и (3.89) имеем

$$u_{\mu}(x) = \partial_{\mu} G * \rho, \quad v_{\mu}(x) = Z_{\mu\lambda} * q^{\lambda}. \quad (3.136)$$

Подставляя сюда (3.130) и учитывая, что

$$\partial_{\mu} \partial^{\nu} G = \pi_{\mu}^{\nu}(x), \quad \text{rot}^{\lambda\nu} Z_{\mu\lambda} = \vartheta_{\mu}^{\nu}(x) \quad (3.137)$$

(ср. (3.43) и (3.90)), находим простые выражения для полей через плотности моментов

$$u_{\mu}(x) = -\pi_{\mu}^{\nu} * \mu_{\nu}, \quad v_{\mu}(x) = \vartheta_{\mu}^{\nu} * \mu_{\nu}, \quad (3.138)$$

или

$$\mathbf{u} = -\Pi\mu, \quad \mathbf{v} = \Theta\mu. \quad (3.139)$$

Таким образом, поля диполей и вихрей являются соответственно потенциальной (с обратным знаком) и вихревой составляющими плотности моментов. Как следствие, отсюда сразу получаем (ср. (3.94))

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mu. \quad (3.140)$$

Ранее мы назвали потенциальное и вихревое поля эквивалентными, если они отличаются лишь в одной точке на  $M_{\nu}\delta(x)$ . Расширим это понятие и будем говорить, что  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  *L-эквивалентны*, если они отличаются на плотность моментов  $\mu$ , сосредоточенную на  $L$ . Аналогично определим *S- и V-эквивалентные* поля. Из предыдущего следует, что каждому вихревому полю можно однозначно сопоставить эквивалентное потенциальное поле с той же плотностью моментов и наоборот.

Рассмотрим подробнее некоторые распределения моментов и соответствующие им поля. Пусть в области  $V$  с границей  $S$  задано распределение моментов с постоянной объемной плотностью  $M_{\nu}$ . Тогда

$$u_{\mu}(x) = -\pi_{\mu}^{\nu} * M_{\nu}\delta(V) = -\langle V \rangle M_{\nu}\pi_{\mu}^{\nu}, \quad (3.141)$$

или, учитывая (3.137) и (3.118),

$$u_{\mu}(x) = \partial_{\mu} G * M_{\nu}\delta(S^{\nu}) = \langle S^{\nu} \rangle M_{\nu}\partial_{\mu} G. \quad (3.142)$$

Если интерпретировать  $M_{\nu}$  как момент электрических диполей и положить  $\rho(x_S) = M_{\nu}n^{\nu}(x_S)$ , то (ср. (3.128))

$$u_{\mu}(x) = \partial_{\mu} G * \rho(x_S)\delta(S) = \langle \rho(x_S) S \rangle \partial_{\mu} G, \quad (3.143)$$

т. е. и можно рассматривать как поле нескомпенсированных электрических зарядов на  $S$  с поверхностной плотностью  $\rho(x_S)$ . Аналогичным образом легко показать, что

$$v_\mu(x) = Z_{\mu\lambda} * Q^\lambda(x_S) \delta(S) = \langle Q^\lambda(x_S) S \rangle Z_{\mu\lambda}, \quad (3.144)$$

где  $Q^\lambda(x_S) = \varepsilon^{\lambda\nu\rho} M_\nu n_\rho(x_S)$  можно интерпретировать как нескомпенсированный поверхностный ток. Учитывая (3.89), формулу (3.144) можно записать в виде

$$v = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \int_S \frac{[Mn]}{r} dS. \quad (3.145)$$

Пусть теперь  $S$  — поверхность с граничным контуром  $L$ , на которой задано распределение моментов с постоянной скалярной плотностью  $M$ . Тогда

$$v_\mu(x) = Z_{\mu\lambda} * \operatorname{rot}^{\lambda\nu} M \delta(S_\nu), \quad (3.146)$$

или, принимая во внимание (3.122),

$$v_\mu(x) = Z_{\mu\lambda} * M \delta(L^\lambda) = M \langle L^\lambda \rangle Z_{\mu\lambda}. \quad (3.147)$$

Таким образом, распределение токов с постоянной скалярной плотностью по  $S$  равносильно линейному току с контуром  $L$ , что физически совершенно очевидно — токи на поверхности взаимно компенсируются, за исключением граничного тока. Если  $F$  — поверхность, пересекающая  $L$  в одной точке, то для потока плотности тока  $q^\lambda$  через  $F$ , учитывая (3.108), имеем

$$\int_F q^\lambda dF_\lambda = M \int_F \delta(L^\lambda) dF_\lambda = \pm M, \quad (3.148)$$

т. е.  $M$  является линейной плотностью тока на  $L$  (силой тока). Одновременно мы получили физическую интерпретацию формулы (3.108). Что касается потенциального поля для данного распределения моментов, то оно имеет вид

$$u_\mu(x) = -M \pi_\mu^\nu * \delta(S_\nu) = -M \langle S_\nu \rangle \pi_\mu^\nu. \quad (3.149)$$

Очевидным следствием является: поле вихря с контуром  $L$  и линейной плотностью  $M$  и поле диполей, распределенных с постоянной скалярной плотностью  $M$  по произвольной поверхности  $S$ , опирающейся на  $L$ .  $S$ -эквиваленты, т. е.

отличаются на  $M\delta(S_\mu)$  (эквивалентность магнитного листка и линейного тока!).

Рассмотрим, наконец, распределение моментов с постоянной линейной плотностью по замкнутому контуру  $L$

$$\mu_\nu = M\delta(L_\nu). \quad (3.150)$$

Из свойства  $\delta(L)$  (3.124) и формул (3.139) немедленно следует

$$v_\nu(x) = \mu_\nu(x) = M\delta(L_\nu), \quad u_\nu(x) = 0. \quad (3.151)$$

Мы можем наглядно интерпретировать это следующим образом. Диполи вдоль  $L$  взаимно компенсируются, а вихревое поле можно рассматривать как поле бесконечно тонкого соленоида. Как известно, оно равно нулю вне соленоида.

#### 4. Внутренние напряжения в упругой среде

**Тензоры Грина теории упругости.** Пусть  $q^\rho(x)$  — плотность объемных сил, которую мы будем рассматривать как обобщенную финитную вектор-функцию. Тогда *тензоры Грина для смещений*  $U_{\mu\rho}(x)$  и *напряжений*  $G_{\cdot\rho}^{\alpha\beta}(x)$  в неограниченной упругой среде определяются соотношениями

$$u_\mu = U_{\mu\rho} * q^\rho, \quad \sigma^{\alpha\beta} = G_{\cdot\rho}^{\alpha\beta} * q^\rho, \quad (4.1)$$

где  $u_\mu$  и  $\sigma^{\alpha\beta}$  — исчезающие на бесконечности смещения и напряжения, вызванные этими силами. Имеем

$$\sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda u_\mu = C^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda U_{\mu\rho} * q^\rho, \quad (4.2)$$

откуда находим связь между  $G_{\cdot\rho}^{\alpha\beta}$  и  $U_{\mu\rho}$

$$G_{\cdot\rho}^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\lambda\mu} U_{\mu\rho, \lambda}. \quad (4.3)$$

Из уравнений (2.69) и (4.1) следует

$$G_{\cdot\rho, \beta}^{\alpha\beta} * q^\rho = -q^\alpha, \quad G_{\cdot\rho, \beta}^{\alpha\beta} = -\delta_\rho^\alpha \delta(x). \quad (4.4)$$

Учитывая (4.3), находим уравнение для  $U_{\mu\rho}$

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} U_{\mu\rho, \beta\lambda}(x) = -\delta_\rho^\alpha \delta(x). \quad (4.5)$$



Для его решения воспользуемся преобразованием Фурье<sup>1)</sup>.  
Имеем (здесь  $k \cdot x$  обозначает  $k_\lambda x^\lambda$ )

$$U_{\mu\rho}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{U}_{\mu\rho}(k) e^{ik \cdot x} dk, \quad (4.6)$$

$$\tilde{U}_{\mu\rho}(k) = \int U_{\mu\rho}(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (4.7)$$

$$ik_\lambda \tilde{U}_{\mu\rho}(k) = \int \partial_\lambda U_{\mu\rho}(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad (4.8)$$

$$\int \delta(x) e^{-ik \cdot x} dx = 1. \quad (4.9)$$

Используя эти соотношения, получаем алгебраическое уравнение для Фурье-образа тензора Грина  $\tilde{U}_{\mu\rho}$

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} k_\lambda k_\beta \tilde{U}_{\mu\rho}(k) = \delta_\rho^\alpha. \quad (4.10)$$

Решив его относительно  $\tilde{U}_{\mu\rho}$ , мы сведем задачу к нахождению обратного преобразования Фурье по формуле (4.6). В работе И. М. Лифшица и Л. Н. Розенцвейга<sup>2)</sup> было показано, что нахождение  $U_{\mu\rho}(x)$  в конечном счете сводится к нахождению корней некоторого алгебраического уравнения шестой степени, коэффициенты которого зависят от  $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$ . В ряде случаев (изотропная среда, гексагональная симметрия, слабая анизотропия) корни этого уравнения находятся в явном виде, в остальных случаях его приходится решать численно. Мы приведем здесь решение для изотропной среды, которое в этом случае легко получить непосредственно<sup>3)</sup>.

Для изотропной среды (ср. (VII. 5.23))

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} = \lambda \delta^{\alpha\beta} \delta^{\lambda\mu} + \mu (\delta^{\alpha\lambda} \delta^{\beta\mu} + \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\lambda}), \quad (4.11)$$

и уравнение (4.10) принимает вид ( $k^2 = k_\lambda k^\lambda$ )

$$(\lambda + \mu) k^\alpha k^\mu \tilde{U}_{\mu\rho} + \mu \delta^{\alpha\mu} k^2 \tilde{U}_{\mu\rho} = \delta_\rho^\alpha. \quad (4.12)$$

Свертывая его с  $k_\alpha$ , находим

$$k^\mu \tilde{U}_{\mu\rho} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{k_\rho}{k^2}. \quad (4.13)$$

<sup>1)</sup> О преобразовании Фурье для обобщенных функций см. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов 1959. I, гл. II.

<sup>2)</sup> 1947. 7.

<sup>3)</sup> Лейбфрид 1953. 3.

Подставляя в (4.12), получаем выражение для  $\tilde{U}_{\mu\rho}$

$$\tilde{U}_{\mu\rho}(k) = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\rho} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_\mu k_\rho}{k^4} \right]. \quad (4.14)$$

Отсюда

$$U_{\mu\rho}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 \mu} \left[ \delta_{\mu\rho} \int \frac{1}{k^2} e^{ik \cdot x} dk - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \int \frac{k_\mu k_\rho}{k^4} e^{ik \cdot x} dk \right]. \quad (4.15)$$

Для вычисления интегралов подвергнем преобразованию Фурье известное тождество

$$\Delta^2 r(x) \equiv \partial_\lambda \partial^\lambda \partial_\mu \partial^\mu r(x) = -8\pi \delta(x). \quad (4.16)$$

Учитывая, что  $\tilde{\partial}_\lambda = ik_\lambda$ , находим

$$k^4 \tilde{r}(k) = -8\pi, \quad (4.17)$$

откуда

$$r(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int \frac{1}{k^4} e^{ik \cdot x} dk. \quad (4.18)$$

Дифференцируя по  $x^\mu$  и  $x^\rho$  и свертывая результат с  $\delta^{\mu\rho}$ , получаем искомые выражения для интегралов

$$\begin{aligned} r_{,\mu\rho} &= \frac{1}{\pi^2} \int \frac{k_\mu k_\rho}{k^4} e^{ik \cdot x} dk, \\ \delta^{\mu\rho} r_{,\mu\rho} &\equiv \frac{2}{r} = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{1}{k^2} e^{ik \cdot x} dk. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Подстановка в (4.15) дает окончательное выражение

$$U_{\mu\rho}(x) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{2}{r} \delta_{\mu\rho} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} r_{,\mu\rho} \right]. \quad (4.20)$$

В дальнейшем тензоры Грина  $U_{\mu\rho}$  и  $G_{\mu\rho}^{\alpha\beta}$  для произвольной анизотропной неограниченной среды считаются известными.

**Операторы проектирования.** Как показал Крёнер<sup>1)</sup>, симметричный двухвалентный тензор  $A$ , исчезающий на бесконечности, может быть однозначно разложен на потенциальную

<sup>1)</sup> 1958. 3.

составляющую  $A_1^0$  и бивихревую составляющую  $A_2^0$

$$\begin{aligned} A &= A_1^0 + A_2^0, \\ \text{Rot } A_1^0 &= 0 \rightarrow A_1^0 = \text{def } b, \\ \text{div } A_2^0 &= 0 \rightarrow A_2^0 = \text{Rot } B. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь  $b$  и  $B$  — соответственно вектор и симметричный двухвалентный тензор, играющие роль потенциалов. При этом для однозначного определения  $B$  на него можно наложить дополнительное условие  $\text{div } B = 0$ . Однако Крёнер не дал алгоритма, с помощью которого можно было бы найти потенциалы  $b$  и  $B$  и фактически осуществить данное разложение. Ниже приводится решение как этой, так и более общей задачи о разложении тензорного поля на инвариантные составляющие<sup>1)</sup>.

Разложение (4.21) удобно сформулировать в терминах операторов проектирования. Введем на линейном пространстве тензоров  $A$  операторы проектирования  $\Pi^0$  и  $\Theta^0$ , определив их соотношениями

$$\text{Rot } \Pi^0 = 0, \quad \text{div } \Theta^0 = 0, \quad \Pi^0 + \Theta^0 = E, \quad (4.22)$$

где  $E$  — тождественный оператор. Тогда все пространство разлагается в прямую сумму двух подпространств потенциальных и бивихревых тензоров

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \Pi^0 A = \pi^0 * A, \\ A_2^0 &= \Theta^0 A = \theta^0 * A. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь  $\pi^0$  и  $\theta^0$  — обобщенные тензор-функции четвертой валентности, являющиеся ядрами операторов  $\Pi^0$  и  $\Theta^0$ .

Таким образом, задача заключается в нахождении явных выражений для  $\Pi^0$  и  $\Theta^0$ , или, что то же, для  $\pi^0$  и  $\theta^0$ .

Запишем алгебраическое тождество (ср. (3.26))

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\beta_1 \mu_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \varepsilon_{\beta_2 \mu_2}^{\alpha_2 \lambda_2} = \\ &= \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \delta_{\mu_2}^{\lambda_2} + \delta_{\mu_1}^{\alpha_1} \delta_{\mu_2}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1}^{\lambda_1} \delta_{\beta_2}^{\lambda_2} - \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\mu_2}^{\alpha_2} \delta_{\mu_1}^{\lambda_1} \delta_{\beta_2}^{\lambda_2} - \delta_{\mu_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1}^{\lambda_1} \delta_{\mu_2}^{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

<sup>1)</sup> И. А. Кунин 1964. 1.

Свертывая его с  $\partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} \partial^{\mu_1} \partial^{\mu_2}$ , получаем операторное тождество

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta_1 \mu_1}^{\alpha_1 \lambda_1} \varepsilon_{\beta_2 \mu_2}^{\alpha_2 \lambda_2} \partial_{\lambda_1 \lambda_2} \partial^{\mu_1 \mu_2} = \\ = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} \Delta^2 + \partial_{\beta_1 \beta_2} \partial^{\alpha_1 \alpha_2} - \Delta \left( \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \partial_{\beta_2} \partial^{\alpha_2} + \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} \partial_{\beta_1} \partial^{\alpha_1} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Вспоминая определение (2.47) оператора Rot и учитывая (2.38) и (2.50), мы можем после несложных преобразований записать окончательно (4.25) в виде

$$\Delta^2 = \text{def} (2\Delta - \text{grad div}) \text{div} + \text{Rot Rot}. \quad (4.26)$$

Это тождество является аналогом (3.29).

Введем для удобства записи формул тензор

$$R_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} = r(x) \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} \quad (4.27)$$

и применим обе части тождества (4.26) к выражению

$$-\frac{1}{8\pi} R_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} * A_{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Учитывая (4.16), получаем для  $A$  представление

$$\begin{aligned} A = -\frac{1}{8\pi} \text{def} (2\Delta - \text{grad div}) \text{div} R * A - \\ -\frac{1}{8\pi} \text{Rot Rot} R * A. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Легко видеть, что обобщенные тензор-функции

$$\pi^0 = -\frac{1}{8\pi} \text{def} (2\Delta - \text{grad div}) \text{div} R, \quad (4.29)$$

$$\vartheta^0 = -\frac{1}{8\pi} \text{Rot Rot} R \quad (4.30)$$

являются ядрами операторов проектирования  $\Pi^0$  и  $\Theta^0$ , что и решает задачу о разложении тензорного поля на потенциальную и бивихревую составляющие. Одновременно мы получили выражения для векторного и тензорного потенциалов

$$b = \frac{r}{8\pi} * (\text{grad div} - 2\Delta) \text{div} A, \quad (4.31)$$

$$B = -\frac{r}{8\pi} * \text{Rot} A, \quad \text{div} B = 0.$$

Рассмотрим теперь разложение более общего вида, учитывающее тензор упругих констант. Положим

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2, \\ \text{Rot } \bar{C} A_1 &= 0, \quad \text{div } A_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

или в терминах операторов проектирования

$$\begin{aligned} A_1 &= \Pi A = \pi * A, \quad A_2 = \Theta A = \theta * A, \\ \text{Rot } \bar{C} \Pi &= 0, \quad \text{div } \Theta = 0, \quad \Pi + \Theta = E. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Здесь  $\bar{C}$  — тензор, обратный тензору упругих констант  $C$ .

Мы можем интерпретировать это разложение следующим образом. Пусть  $A$  — тензор напряжений. Тогда  $A_1$  — составляющая напряжений, вызванная объемными силами, т. е. решение системы (2.70), а  $A_2$  — внутренние напряжения, т. е. решение системы (2.68). Разложение (4.21) можно рассматривать как частный случай данного, если положить

$$C_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} = \delta_{\lambda}^{(\alpha} \delta_{\mu}^{\beta)}. \quad (4.34)$$

Легко проверить, что одно из возможных представлений для  $\Pi$  и  $\Theta$  дается выражениями

$$\Pi = -G * \text{div}, \quad \Theta = E + G * \text{div}, \quad (4.35)$$

где  $G$  — определенный выше тензор Грина теории упругости. Другое представление будет построено ниже.

**Тензор Грина для внутренних напряжений.** При определении тензора Грина для системы (2.68) необходимо учитывать, что правая часть первого уравнения удовлетворяет дополнительному условию  $\text{div } \eta = 0$ . С аналогичной ситуацией мы уже встречались при определении тензора Грина для вихревого поля.

Представим решение (2.68) в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \eta^{\lambda\mu}. \quad (4.36)$$

Очевидно, тензор Грина  $Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta}(x)$  должен удовлетворять второму уравнению системы. В правой части первого уравнения для  $Z$  должно стоять ядро оператора, который совпадает с тождественным на подпространстве бивихревых тензоров и дивергенция которого равна нулю. Но этими свойствами

как раз и обладает  $\Theta^0$ . Таким образом (ср. (3.90)),

$$\operatorname{div} Z = 0, \quad \operatorname{Rot} \bar{C} Z = \vartheta^0. \quad (4.37)$$

Покажем, что имеет место операторное тождество

$$\Theta = \Theta C \Theta^0 \bar{C}. \quad (4.38)$$

Для его доказательства, прежде всего, замечаем, что дивергенция обеих частей равна нулю в силу (4.33). С другой стороны, из (4.22) и (4.33) следует, что

$$\operatorname{Rot} \Theta^0 = \operatorname{Rot}, \quad \operatorname{Rot} \bar{C} \Theta = \operatorname{Rot} \bar{C}. \quad (4.39)$$

Применяя теперь к обеим частям (4.38) оператор  $\operatorname{Rot} \bar{C}$  и учитывая (4.39), получаем тождество. Но если результаты применения операторов  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{Rot} \bar{C}$  к двум тензорам, обращающимся в нуль на бесконечности, совпадают, то совпадают и сами тензоры, так как их разность есть исчезающее на бесконечности решение однородных уравнений теории упругости. А это и доказывает (4.38).

Итак, для внутренних напряжений  $\sigma$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \Theta \sigma = \Theta C \Theta^0 \bar{C} \sigma = \\ &= -\frac{1}{8\pi} (C + G * \operatorname{div} C) (\operatorname{Rot} \operatorname{Rot} R * \bar{C} \sigma). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь использовано (4.35). После очевидных преобразований находим

$$\sigma = -\frac{1}{8\pi} (C \operatorname{Rot} R + G * \operatorname{div} C \operatorname{Rot} R) * \operatorname{Rot} \bar{C} \sigma. \quad (4.41)$$

Отсюда получаем явное выражение для *тензора Грина внутренних напряжений*

$$Z(x) = -\frac{1}{8\pi} [C \operatorname{Rot} R(x) + G(x) * \operatorname{div} C \operatorname{Rot} R(x)], \quad (4.42)$$

а следовательно, и решение системы (2.68) для неограниченной анизотропной среды<sup>1)</sup>.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $Z$  удовлетворяет уравнениям (4.37). Легко также видеть, что при  $x \rightarrow \infty$   $Z \sim r^{-1}$ .

---

<sup>1)</sup> Система (2.68) для неограниченной изотропной среды была решена другим методом Крёнером 1958. З.

Общая задача о нахождении тензора напряжений в неограниченной анизотропной среде при наличии внешних и внутренних источников напряжений формулируется следующим образом: требуется найти симметричный тензор  $\sigma$  при условии  $\sigma(\infty) = 0$ , если заданы

$$\operatorname{div} \sigma = -q, \quad \operatorname{Rot} \bar{C} \sigma = \eta. \quad (4.43)$$

Решение записывается в виде

$$\sigma = G * q + Z * \eta. \quad (4.44)$$

В частном случае, когда  $C$  удовлетворяет (4.34), из (4.29) и (4.30) следует

$$G^0(x) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{def} (\operatorname{grad} \operatorname{div} - 2\Delta) R(x), \quad (4.45)$$

$$Z^0(x) = -\frac{1}{8\pi} \operatorname{Rot} R(x). \quad (4.46)$$

Распишем в компонентах (4.44), подставив в него  $q$  и  $\eta$  из (4.43). Имеем

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= -G_{\dots\rho}^{\alpha\beta} * \sigma^{\rho\nu} + Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \operatorname{Rot}_{\sigma\tau}^{\lambda\mu} \bar{C}_{\dots\rho\nu}^{\sigma\tau} \sigma^{\rho\nu} = \\ &= [-G_{\dots(\rho, \nu)}^{\alpha\beta} + \bar{C}_{\dots\rho\nu}^{\sigma\tau} \operatorname{Rot}_{\sigma\tau}^{\lambda\mu} Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta}] * \sigma^{\rho\nu}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Сравнивая с (4.33), находим

$$\pi_{\dots\rho\nu}^{\alpha\beta}(x) = -G_{\dots(\rho, \nu)}^{\alpha\beta}(x), \quad (4.48)$$

$$\vartheta_{\dots\rho\nu}^{\alpha\beta}(x) = \bar{C}_{\dots\rho\nu}^{\sigma\tau} \operatorname{Rot}_{\sigma\tau}^{\lambda\mu} Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta}(x). \quad (4.49)$$

**Силовые и бивихревые мультиполи.** Пусть  $q^\rho(x)$  — плотность объемных сил, отличная от нуля в ограниченной области, и пусть ее разложение по мультиполям имеет вид

$$q^\rho(x) = \sum_m (-I)^m Q^{\rho\nu_1 \dots \nu_m} \delta_{\nu_1 \dots \nu_m}(x). \quad (4.50)$$

Тогда для соответствующих смещений и напряжений имеем

$$u_\mu(x) = \sum_m (-I)^m Q^{\rho\nu_1 \dots \nu_m} U_{\mu\rho, \nu_1 \dots \nu_m}(x), \quad (4.51)$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = \sum_m (-I)^m Q^{\rho\nu_1 \dots \nu_m} G_{\dots\rho, \nu_1 \dots \nu_m}^{\alpha\beta}(x). \quad (4.52)$$

Рассмотрим подробнее диполь с моментом  $Q^{\rho\nu}$ . Пусть, например,  $Q^{11} = M$ , а все остальные компоненты равны нулю.

Легко видеть, что такой диполь можно интерпретировать как пару сил с компонентами  $\left(\frac{1}{\varepsilon} M, 0, 0\right)$  и  $\left(-\frac{1}{\varepsilon} M, 0, 0\right)$ , сосредоточенных соответственно в точках  $x_1\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0\right)$  и  $x_2\left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0\right)$ . Точнее, такой паре сил будет соответствовать ряд (4.50), в котором первым отличным от нуля членом является данный диполь, а следующий отличный от нуля член имеет порядок  $\varepsilon^2$ . Следовательно, диполь является предельным образом такой пары при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , или, что то же, при достаточном удалении точки наблюдения  $x$ . В связи с этой интерпретацией данный диполь называется *центром растяжения*. Аналогичный смысл имеют диполи с отличными от нуля моментами  $Q^{22} = M$  и  $Q^{33} = M$ . Наложение этих диполей дает *центр расширения* с отличными от нуля моментами  $Q^{11} = Q^{22} = Q^{33} = M$ .

Подобным образом диполь с отличными от нуля моментами  $Q^{12} = Q^{21} = M$  интерпретируется как *центр сдвига*, и с моментами  $Q^{12} = -Q^{21} = M$  — как *центр вращения*. Общий случай получается наложением.

Перейдем к разложению в ряд по мультиполям плотности источников внутренних напряжений  $\eta^{\lambda\mu}(x)$ , которую будем предполагать финитной. Имеем

$$\eta^{\lambda\mu}(x) = \sum_m (-1)^m H^{\lambda\mu\nu_1 \dots \nu_m} \delta_{,\nu_1 \dots \nu_m}(x). \quad (4.53)$$

Условие  $\text{div } \eta = 0$  в силу линейной независимости членов ряда дает (ср. (3.82))

$$H^{\lambda\mu} = 0, \quad H^{\lambda(\mu\nu_1 \dots \nu_m)} = 0 \quad (m > 0). \quad (4.54)$$

Учитывая, что  $H^{\lambda\mu\nu_1}$  симметричен по первой паре индексов и согласно (4.54) антисимметричен по второй, находим

$$\begin{aligned} H^{\lambda\mu\nu_1} &= -H^{\lambda\nu_1\mu} = -H^{\nu_1\lambda\mu} = H^{\nu_1\mu\lambda} = H^{\mu\nu_1\lambda} = \\ &= -H^{\mu\lambda\nu_1} = -H^{\lambda\mu\nu_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Отсюда легко показывается, что разложение (4.53) имеет вид (ср. (3.85))

$$\eta^{\lambda\mu}(x) = \text{Rot}_{\nu\rho}^{\lambda\mu} M^{\rho\nu} \delta(x) + \dots \quad (4.56)$$



где

$$\begin{aligned} M_{\rho\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\lambda\nu_1} \varepsilon_{\nu\mu\nu_2} Q^{\lambda\mu\nu_1\nu_2} = \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\rho\lambda\nu_1} \varepsilon_{\nu\mu\nu_2} \int \eta^{\lambda\mu} x^{\nu_1} x^{\nu_2} dx. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Первый член разложения (4.56) можно назвать *элементарным двойным вихрем* с моментом  $M^{\rho\nu}$ . Ниже мы интерпретируем его в терминах дислокаций.

Для напряжений, обусловленных силовым диполем с симметричным моментом  $Q^{\rho\nu}$  и элементарным двойным вихрем с моментом  $M^{\rho\nu}$ , соответственно имеем

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = -G_{\cdot\rho}^{\alpha\beta} * \partial_\nu Q^{\rho\nu} \delta(x) = -Q^{\rho\nu} G_{\cdot(\rho, \nu)}^{\alpha\beta}(x), \quad (4.58)$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = Z_{\cdot\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} M^{\rho\nu} \delta(x) = M^{\rho\nu} \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} Z_{\cdot\lambda\mu}^{\alpha\beta}(x). \quad (4.59)$$

Учитывая (4.48) и (4.49), получаем (ср. (3.79) и (3.92))

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = Q^{\rho\nu} \pi_{\cdot\rho\nu}^{\alpha\beta}(x), \quad (4.60)$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = M^{\sigma\tau} C_{\sigma\tau}^{\cdot\rho\nu} \vartheta_{\cdot\rho\nu}^{\alpha\beta}(x). \quad (4.61)$$

Отсюда следует, что элементарный двойной вихрь с моментом  $M^{\sigma\tau}$  эквивалентен силовому диполю с моментом  $Q^{\rho\nu} = -M^{\sigma\tau} C_{\sigma\tau}^{\cdot\rho\nu}$ , — их поля напряжений отличаются на  $Q^{\rho\nu} \delta(x)$ .

**Характеристики распределения дислокаций и силовых диполей.** Выше было введено кручение  $S^{\mu\nu}$  в качестве геометрической характеристики внутреннего напряженного состояния (наряду с кривизной) и указана возможность его экспериментального определения. Таким образом, кручение следует рассматривать как измеримую физическую величину. Там же было показано, что кручение является континуальной моделью дислокаций при дополнительном условии  $\partial_\mu S^{\mu\nu} = 0$ . Чтобы подчеркнуть это, введем для данного случая специальное обозначение

$$\alpha^{\mu\nu} = -S^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \alpha^{\mu\nu} = 0 \quad (4.62)$$

и будем, по определению, называть  $\alpha^{\mu\nu}(x)$  *плотностью дислокаций*.

Второй характеристикой распределения дислокаций является *плотность источников внутренних напряжений типа дислокаций*, или *дислокационная несовместность*  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ , определяемая выражением (2.52), где индекс  $S$  следует заменить на  $(\alpha)$ . Из (2.56) и (4.62) следует симметричность  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ . Легко также показать, что (2.52) в данном случае можно представить в виде

$$\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu} = \text{rot}_v^{(\lambda} \alpha^{\mu)} v. \quad (4.63)$$

Таким образом, задание  $\alpha^{\mu\nu}$  однозначно определяет  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ , а следовательно, и внутренние напряжения  $\sigma^{\alpha\beta}$ . Однако обратное неверно. Задание  $\sigma^{\alpha\beta}$  однозначно определяет  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$  (при отсутствии источников типа кривизны), но  $\alpha^{\mu\nu}$  однозначно этим не определяется. Чтобы выяснить степень произвола в задании  $\alpha^{\mu\nu}$ , положим  $\alpha^{\mu\nu} = \alpha_0^{\mu\nu} + \alpha_I^{\mu\nu}$ , где  $\alpha_0^{\mu\nu}$  — какое-нибудь частное решение (4.63), а  $\alpha_I^{\mu\nu}$  — общее решение соответствующего однородного уравнения. Из формулы

$$\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu} = \text{Rot}_{v\rho}^{\lambda\mu} \varepsilon^{\nu\rho} = \text{rot}_v^{(\lambda} \text{rot}_\rho^{\mu)} \varepsilon^{\nu\rho} \quad (4.64)$$

следует, что можно положить  $\alpha_0^{\mu\nu} = \text{rot}_\rho^{\mu} \varepsilon^{\rho\nu}$ . С другой стороны, легко показать, что  $\alpha_I^{\mu\nu} = \partial^\nu v^\mu - \partial_\lambda v^\lambda \delta^{\nu\mu}$ , где  $v^\mu$  — произвольный вектор. Полагая  $v^\mu = \text{rot}_\rho^{\mu} u^\rho + \partial^\mu \varphi$ ,  $\text{div}_\rho u^\rho = 0$ , получаем окончательно следующее представление для  $\alpha^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \alpha^{\mu\nu} &= \text{rot}_\rho^{\mu} \beta^{\rho\nu}, \\ \beta^{\rho\nu} &= \varepsilon^{\rho\nu} + \partial^{(\rho} u^{\nu)} + \varepsilon^{\rho\kappa\nu} \partial_\kappa \varphi \quad (\text{div}_\rho u^\rho = 0). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Итак, задание внутренней деформации  $\varepsilon$  определяет  $\alpha$  с точностью до  $\text{rot}(\text{def } u + \omega)$ , где  $u$  — произвольный вихревой вектор, а  $\omega$  — произвольный вихревой антисимметричный тензор. Последний, как нетрудно видеть, представим в виде  $\omega^{\rho\nu} = \varepsilon^{\rho\kappa\nu} \partial_\kappa \varphi$ , где  $\varphi$  — произвольный скаляр.

Наконец, мы введем третью, пожалуй, наиболее удобную для приложений характеристику распределения дислокаций. Положим

$$\alpha^{\mu\nu} = \text{rot}_\rho^{\mu} \mu^{\rho\nu}, \quad (4.66)$$

где  $\mu^{\rho\nu}(x)$  — некоторая геометрическая характеристика распределения дислокаций, *не зависящая от упругих постоянных*. Очевидно,  $\mu^{\rho\nu}$  определена с точностью до  $\partial^\rho \omega^\nu$ , где  $\omega^\nu$  — произвольный вектор. По соображениям, которые станут ясны из дальнейшего, назовем  $\mu^{\rho\nu}$  *плотностью моментов дислокаций*. Имеем

$$\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu} = \text{rot}_\nu^{(\lambda} \alpha^{\mu)\nu} = \text{rot}_\nu^{(\lambda} \text{rot}_\rho^{\mu)} \mu^{\rho\nu} = \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} \mu^{\rho\nu}. \quad (4.67)$$

Отсюда видно, что антисимметричная составляющая  $\mu^{[\rho\nu]}$  не влияет на  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$ , а следовательно, и на  $\epsilon^{\rho\nu}$  (но не на  $\alpha^{\mu\nu}$ !).

Пусть  $L$  — некоторый замкнутый или уходящий на бесконечность контур, ограничивающий поверхность  $S$ , и пусть  $b^\nu$  — постоянный вектор. Выражение

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = b^\nu \delta(L^\mu) \quad (4.68)$$

в силу (3.124) можно рассматривать как плотность некоторого распределения дислокаций. Проведем произвольную поверхность  $F$ , пересекающую  $L$  в одной точке, и рассмотрим поток  $\alpha^{\mu\nu}$  через  $F$ . Учитывая (3.108), получаем

$$\int_F \alpha^{\mu\nu}(x_F) dF_\mu = b^\nu \int_F \delta(L^\mu) dF_\mu = \pm b^\nu, \quad (4.69)$$

где знак  $+$  или  $-$  берется в зависимости от того, совпадают или не совпадают ориентации  $L$  и  $F$ .

Так как этот поток не зависит от выбора  $F$ , пересекающей  $L$ , и равен нулю, если  $F$  не пересекает  $L$ , то мы приходим к выводу, что (4.68) является плотностью, соответствующей одиночной дислокации с контуром  $L$  и вектором Бюргерса  $b^\nu$ . С другой стороны, учитывая (3.122), имеем

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = \text{rot}_\rho^\mu b^\nu \delta(S^\rho), \quad (4.70)$$

и, следовательно,  $\alpha^{\mu\nu}$  можно также интерпретировать как распределение дислокаций по поверхности  $S$  с постоянным вектором Бюргерса  $b^\nu$  и *поверхностной* плотностью моментов  $M^{\rho\nu}(x_S) = b^\nu n^\rho(x_S)$  (ср. распределение вихрей по  $S$  с постоянной скалярной плотностью моментов). Величина

$$\mu^{\rho\nu}(x) = b^\nu \delta(S^\rho) = M^{\rho\nu}(x_S) \delta(S) \quad (4.71)$$

является плотностью моментов дислокаций, соответствующей распределениям (4.70) или (4.68).

Мы можем, естественно, обобщить это на случай произвольного распределения дислокаций. Пусть, например, дислокации распределены в некоторой области  $V$ . Тогда характеристиками распределения являются плотности

$$\mu^{\rho\nu}(x) = M^{\rho\nu}(x_V) \delta(V), \quad (4.72)$$

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = \text{rot}_p^\mu M^{\rho\nu}(x_V) \delta(V), \quad (4.73)$$

$$\kappa_{(a)}^{\lambda\mu}(x) = \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} M^{(\rho\nu)}(x_V) \delta(V), \quad (4.74)$$

где  $M^{\rho\nu}(x_V)$  — *объемная* плотность моментов дислокаций.

При распределении дислокаций по поверхности  $S$  или контуру  $L$  следует соответственно заменить  $\delta(V)$  на  $\delta(S)$  или  $\delta(L)$ , а  $M^{\rho\nu}(x_V)$  — на *поверхностную*  $M^{\rho\nu}(x_S)$  или *линейную*  $M^{\rho\nu}(x_L)$  плотности моментов дислокаций.

В предельном случае *элементарной дислокации*, которую можно получить, например, стягиванием поверхности  $S$  в (4.70) в точку  $x_0$  или, что то же, достаточным удалением точки наблюдения  $x$ , выражение для  $\mu^{\rho\nu}$  принимает вид

$$\mu^{\rho\nu}(x) = M^{\rho\nu}(x_0) \delta(x - x_0), \quad M^{\rho\nu}(x_0) = b^\nu s^\rho, \quad (4.75)$$

где  $s^\rho$  — векторная площадь  $S$  (ср. (3.107)).

Аналогичными характеристиками распределения силовых диполей в области  $V$  являются

$$q^\rho(x) = -\partial_\nu Q^{\rho\nu}(x_V) \delta(V), \quad (4.76)$$

$$q^{\rho\nu}(x) = Q^{\rho\nu}(x_V) \delta(V), \quad (4.77)$$

где  $q^\rho(x)$  — *плотность диполей*,  $q^{\rho\nu}(x)$  — *плотность моментов диполей* и  $Q^{\rho\nu}(x_V)$  — *объемная плотность моментов*. При распределении диполей по  $S$  или  $L$  следует соответственно заменить  $\delta(V)$  на  $\delta(S)$  или  $\delta(L)$ , а  $Q^{\rho\nu}(x_V)$  — на *поверхностную*  $Q^{\rho\nu}(x_S)$  или *линейную*  $Q^{\rho\nu}(x_L)$  плотности моментов диполей.

Наконец, если задано дискретное распределение дислокаций или моментов и мы хотим усреднить его по некоторой характерной области  $V$ , то для этого нужно применить к данному распределению оператор  $\nu^{-1}\langle V \rangle$ , где  $\nu$  — объем области.

Сравним характеристики распределения дислокаций и диполей, предполагая все остальные характеристики среды фиксированными. Плотность дислокаций  $\alpha^{\mu\nu}$  содержит полную — достаточную и необходимую — информацию о дислокациях как физическом объекте, но с точки зрения внутренних напряжений содержит излишнюю информацию. Дислокационная несовместность  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}$  содержит полную — достаточную и необходимую — информацию о внутренних напряжениях, вызванных дислокациями, но часть информации о самих дислокациях в ней потеряна. Плотность моментов  $\mu^{\rho\nu}$  содержит полную информацию о дислокациях, но определена с точностью до  $\partial^\rho v^\nu$ , где  $v^\nu$  — произвольный вектор. По отношению к внутренним напряжениям  $\mu^{\rho\nu}$  определена с точностью до  $\text{def } v \neq \omega$ , где  $\omega$  — произвольный антисимметричный тензор. Плотность силовых диполей  $q^\rho$  содержит полную — достаточную и необходимую — информацию о силовых диполях как источниках напряжений, но часть информации о распределении диполей потеряна. Плотность моментов диполей  $q^{\rho\nu}$  содержит полную информацию о распределении диполей, но по отношению к напряжениям определена с точностью до произвольного тензора  $p^{\rho\nu}$ , удовлетворяющего условию  $\text{div}_\nu p^{\rho\nu} = 0$ .

**Поля дислокаций и силовых диполей.** Если распределение дислокаций задано с помощью  $\alpha^{\mu\nu}(x)$  или  $\eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu}(x)$ , то из (4.36) для внутренних напряжений имеем

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \eta_{(\alpha)}^{\lambda\mu} = Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \text{rot}_\nu^{\lambda\mu} \alpha^{\mu\nu}. \quad (4.78)$$

В приложениях часто удобно задавать распределение дислокаций с помощью плотности моментов дислокаций  $\mu^{\rho\nu}(x)$ , которая непосредственно связывается с другими параметрами задачи. Тогда, учитывая (4.49), находим (ср. также (4.61) и (3.138))

$$\sigma^{\alpha\beta}(x) = Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \text{Rot}_{\rho\nu\lambda\mu}^{\lambda\mu(\rho\nu)} = \mathfrak{D}_{\dots\rho\nu}^{\alpha\beta} * C_{\dots\sigma\tau}^{\rho\nu} \mu^{\sigma\tau}. \quad (4.79)$$

Аналогично для напряжений  $'\sigma^{\alpha\beta}$ , вызванных силовыми диполями с *симметричной* плотностью моментов  $q^{\rho\nu} = q^{\nu\rho}$  и плотностью  $q^\rho = -\partial_\nu q^{\rho\nu}$ , учитывая (4.48), получаем (ср. также (4.60) и (3.138))

$$'\sigma^{\alpha\beta}(x) = G_{\dots\rho}^{\alpha\beta} * q^\rho = \pi_{\dots\rho\nu}^{\alpha\beta} * q^{\rho\nu}. \quad (4.80)$$

Сопоставим распределению дислокаций с плотностью моментов  $\mu^{\rho\nu}$  распределение силовых диполей с дуальной симметричной плотностью моментов  $q^{\rho\nu}$  с помощью соотношений

$$q^{\rho\nu} = -C_{\dots\sigma\tau}^{\rho\nu} \mu^{\sigma\tau}, \quad \mu^{(\rho\nu)} = -\bar{C}_{\dots\sigma\tau}^{\rho\nu} q^{\sigma\tau}. \quad (4.81)$$

Тогда для соответствующих напряжений из (4.79) и (4.80) следует (ср. (3.139))

$$' \sigma = \Pi q, \quad \sigma = -\Theta q, \quad (4.82)$$

т. е. поле  $' \sigma$  силовых диполей и поле  $\sigma$  дислокаций являются соответственно составляющей типа внешних напряжений и составляющей типа внутренних напряжений (с обратным знаком) дуальной плотности моментов.

Как следствие отсюда получаем важные соотношения (ср. (3.140))

$$' \sigma - \sigma = q, \quad \sigma = ' \sigma - q = ' \sigma + C \mu. \quad (4.83)$$

Обобщая отношение эквивалентности, введенное выше для случая векторных полей, будем называть *эквивалентными* поля внешних и внутренних напряжений, удовлетворяющие условиям вида (4.83), где  $q(x)$  — финитная обобщенная тензор-функция.

По существу, мы доказали следующее соотношение эквивалентности: каждой задаче (линейной) континуальной теории дислокаций с заданной плотностью моментов  $\mu$  можно однозначно сопоставить задачу классической теории упругости с дуальной плотностью моментов силовых диполей  $q$ , причем соответствующие напряжения будут эквивалентными<sup>1)</sup>. С точностью до антисимметричной составляющей  $\mu^{[\rho\nu]}$ , которая не влияет на напряжения, это соответствие будет взаимно однозначным.

Преобразуем выражение для  $' \sigma$ , учитывая (4.3) и (4.81)

$$\begin{aligned} ' \sigma^{\alpha\beta} &= -G_{\dots\rho, \nu}^{\alpha\beta} * q^{\rho\nu} = C^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda \partial_\nu U_{\rho\mu} * C^{\rho\nu\sigma\tau} \mu_{\sigma\tau} = \\ &= C^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda (G_{\dots\mu}^{\sigma\tau} * \mu_{\sigma\tau}). \end{aligned} \quad (4.84)$$

<sup>1)</sup> Мы доказали соотношение эквивалентности для неограниченной анизотропной среды (см. также К р о у п а 1962 г. 7). С помощью формулы Грина его можно обобщить на случай граничных задач.

Сравнивая с (4.2), приходим к выводу, что вектор

$$u_\mu = G_{\dots\mu}^{\sigma\tau} * \mu_{\sigma\tau} = U_{\mu\rho} * q^\rho \quad (q^\rho = -\partial_\nu q^{\rho\nu}) \quad (4.85)$$

является смещением, соответствующим дуальной плотности моментов диполей  $q^{\rho\nu}$ . Так как в области, где плотность моментов дислокаций  $\mu^{\rho\nu}$  равна нулю,  $\sigma^{\alpha\beta}$  совпадает с  $'\sigma^{\alpha\beta}$ , то в этой и только в этой области  $u_\mu$  можно рассматривать как векторный потенциал (вообще говоря, не однозначный), через который по обычным формулам (локально) выражаются  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  и  $\sigma^{\alpha\beta}$ . С этой оговоркой, если угодно, его можно интерпретировать как *поле смещений, вызванное данным распределением дислокаций*.

Рассмотрим теперь некоторые примеры дуальных моментов и эквивалентных полей.

Как следует из (4.75), момент элементарной дислокации  $M^{\rho\nu}$  равен  $b^\nu s^\rho$ . В изотропной среде, учитывая (4.11), для момента дуального диполя находим

$$Q^{\rho\nu} = -\lambda b_\sigma s^\sigma \delta^{\rho\nu} - 2\mu b^{(\rho} s^{\nu)}. \quad (4.86)$$

В частности, если  $S$  — плоская площадка и вектор Бюргера ей параллелен ( $b_\sigma s^\sigma = 0$ ), то момент соответствует центру сдвига в плоскости  $S$ . Если вектор Бюргера нормален площадке (призматическая дислокация), то момент соответствует комбинации центра расширения и центра растяжения в направлении нормали. Соответствующее поле напряжений  $'\sigma$  дается формулой (4.58).

Пусть дислокации распределены с поверхностной плотностью  $M^{\rho\nu}(x_S)$  по поверхности  $S$  с границей  $L$ , и пусть  $Q^{\rho\nu}(x_S)$  — дуальная поверхностная плотность моментов диполей. Тогда для соответствующих напряжений имеем

$$' \sigma^{\alpha\beta} = -G_{\dots\rho, \nu}^{\alpha\beta} * Q^{\rho\nu}(x_S) \delta(S) = -\langle Q^{\rho\nu}(x_S) S \rangle G_{\dots\rho, \nu}^{\alpha\beta}, \quad (4.87)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * M^{\rho\nu}(x_S) \delta(S) = \langle M^{\rho\nu}(x_S) S \rangle \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta}. \quad (4.88)$$

Согласно (4.83) их разность равна  $Q^{\rho\nu}(x_S) \delta(S)$ , т. е. особенности, сосредоточенной на  $S$ .

Если  $M^{\rho\nu}(x_S) = b^\nu n^\rho(x_S)$  и, следовательно,  $\mu^{\rho\nu}$  задается (4.71), то это распределение соответствует одиночной дис-

локации с плотностью (4.68). Из (4.78) следует, что соответствующее поле напряжений имеет вид <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} * \text{rot}^{(\lambda, \nu)} b_\nu \delta(L^\mu) = -b_\nu \langle L^\mu \rangle \text{rot}^{(\lambda, \nu)} Z_{\dots\lambda\mu}^{\alpha\beta} \Rightarrow \\ &= b_\nu \int_L Z_{\dots\lambda\mu, \tau}^{\alpha\beta} (x - x_L) \varepsilon^{\tau\nu(\lambda} dL^\mu). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Оно имеет особенность только на контуре  $L$ . Напротив, поле напряжений дуальных моментов

$$\sigma^{\alpha\beta} = b_\sigma C^{\sigma\tau\rho\nu} \langle S_\tau \rangle G_{\dots\rho, \nu}^{\alpha\beta} = b_\sigma C^{\sigma\tau\rho\nu} \int_S G_{\dots\rho, \nu}^{\alpha\beta} (x - x_S) dS_\tau \quad (4.90)$$

имеет особенность на  $S$ . Его нельзя выразить в виде интеграла по  $L$ .

Из (4.35) находим поле смещений одиночной дислокации

$$u_\mu = b_\sigma \langle S_\tau \rangle G_{\dots\mu}^{\sigma\tau} = b_\sigma \int_S G_{\dots\mu}^{\sigma\tau} (x - x_S) dS_\tau. \quad (4.91)$$

После подстановки сюда выражения для  $G_{\dots\mu}^{\sigma\tau}$  в изотропной среде и несложных преобразований легко получить известную формулу Бюргерса <sup>2)</sup>, которую обычно трактуют как выражение для смещений одиночной дислокации. Точнее было бы считать, что она дает смещения, соответствующие дуальной плотности силовых диполей, распределенных по  $S$ .

Пусть теперь дислокации распределены в области  $V$  с границей  $S$  с постоянной объемной плотностью моментов  $M^{\rho\nu}(x_V)$ . Тогда плотность дислокаций, учитывая (3.118), можно представить в виде

$$\alpha^{\mu\nu}(x) = \text{rot}_\rho^{\mu} M^{\rho\nu} \delta(V) = -\varepsilon^{\mu\tau\rho} M_\rho^{\nu} \delta(S_\tau), \quad (4.92)$$

т. е. это распределение в точности равносильно соответствующему распределению нескомпенсированных дислокаций на  $S$  (ср. с аналогичным распределением токов).

<sup>1)</sup> Для изотропной среды представление  $\sigma$  через интеграл по контуру было получено Пичем и Келером 1950.1. См. также статью де Вита в книге Эшелби 1963.1.

<sup>2)</sup> См., например, статью де Вита в книге Эшелби 1963.1



В заключение отметим, что если дуальная плотность моментов  $q$  удовлетворяет условиям  $\operatorname{div} q = 0$  или  $\operatorname{Rot} \bar{C}q = 0$ , то из (4.82) следует, что в этих случаях соответственно  $'\sigma = 0$ ,  $\sigma = -q$  или  $'\sigma = q$ ,  $\sigma = 0$ . Это позволяет непосредственно строить различные примеры дислокационных полей.

### Задачи со сферической и цилиндрической симметрией.

В качестве иллюстрации общей теории рассмотрим некоторые простые задачи, решение которых может быть получено прямым путем.

Начнем со случая сферической симметрии. Пусть область  $V$  есть шар, ограниченный сферой  $S$  радиуса  $R$ . Легко видеть, что в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$

$$\delta(V) = \theta(R - r), \quad \delta(S) = \delta(r - R), \quad (4.93)$$

где  $\theta(r)$  — функция единичного скачка:  $\theta(r) = 1$  при  $r > 0$  и  $\theta(r) = 0$  при  $r < 0$ .

Для простоты ограничимся рассмотрением тензоров с отличными от нуля компонентами  $A_{rr} \equiv A_r$ ,  $A_{\theta\theta} = A_{\varphi\varphi} \equiv A_\theta$ . Тогда компоненты дислокационной несовместности  $\eta(r)$ , определяемой выражением (4.67), в сферических координатах запишутся в виде <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{2}{r} \left[ \mu'_\theta + \frac{1}{r} (\mu'_\theta - \mu'_r) \right], \\ \eta_\theta &= \frac{1}{r} [(r\mu'_\theta)' - \mu'_r]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Легко проверить, что условие

$$\operatorname{div} \eta = 0, \quad \text{или} \quad \eta'_r + \frac{2}{r} (\eta_r - \eta_\theta) = 0, \quad (4.95)$$

выполняется тождественно. Таким образом,  $\eta$  имеет одну существенную компоненту  $\eta_r$ , через которую  $\eta_\theta$  выражается с помощью (4.95).

Уравнения (2.67) для изотропной среды принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \varepsilon'_\theta + \frac{2}{r^2} (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) &= \eta_r, & \sigma'_r + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0, \\ \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_r + 2\lambda \varepsilon_\theta, & \sigma_\theta &= \lambda \varepsilon_r + 2(\lambda + \mu) \varepsilon_\theta. \end{aligned} \quad (4.96)$$

<sup>1)</sup> Общее представление оператора  $\operatorname{Rot}$  в сферических и цилиндрических координатах см. в книге А. И. Лурье 1955.1.

Пусть на сфере  $S$  задано распределение дислокаций с вектором Бюргера, направленным по радиусу и равным по величине  $b = \text{const}$ . Тогда для плотности моментов из общей формулы

$$\mu^{\rho\nu}(x) = b^\nu n^\rho(x_S) \delta(S), \quad (4.97)$$

учитывая (4.93), находим

$$\mu_r = b\delta(r - R), \quad \mu_\theta = 0. \quad (4.98)$$

Подставляя в (4.94), получаем выражение для существенной компоненты  $\eta$

$$\eta_r = -\frac{2b}{R^2} \delta(r - R). \quad (4.99)$$

Решение (4.96) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{b}{R} \left[ \theta(R - r) + \frac{R^3}{r^3} \theta(r - R) \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{b}{R} \left[ \theta(R - r) - \frac{R^3}{2r^3} \theta(r - R) \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Данную задачу естественно интерпретировать следующим образом. В сферическую полость радиуса  $R$  вставляется шар из того же материала с радиальным зазором (или натягом)  $b$  и производится спайка. Если вместо спайки на границе приложить двойной силовой слой, то согласно соотношению эквивалентности соответствующие напряжения отличаются на дуальную плотность моментов (ср. (4.83))

$$q_r = -(\lambda + 2\mu) b\delta(r - R), \quad q_\theta = -\lambda b\delta(r - R). \quad (4.101)$$

Другую возможную интерпретацию мы получим, если рассмотрим распределение температуры  $T$  по закону

$$T(r) = T_0 \theta(R - r) \quad (T_0 = \text{const}). \quad (4.102)$$

Легко показать, что распределению температуры с произвольным законом  $T(x)$  соответствует несовместность типа кривизны

$$\eta^{\lambda\mu}(x) = \text{Rot}_{\rho\nu}^{\lambda\mu} \gamma T(x) \delta^{\rho\nu}. \quad (4.103)$$

где  $\gamma$  — коэффициент температурного расширения. Тогда для распределения (4.102)

$$\eta_r = -\frac{2\gamma T_0}{R} \delta(r - R). \quad (4.104)$$

Сравнивая с (4.99), заключаем, что с точки зрения внутренних напряжений это распределение температуры в точности равносильно распределению дислокаций с вектором Бюргера  $b = \gamma T_0 R$ .

При  $R \rightarrow 0$  предельным образом (единичной) сферической дислокации является точечный источник с плотностями<sup>1)</sup>

$$\mu_r = \frac{\delta(r)}{2\pi r^2}, \quad \mu_\theta = 0; \quad \eta_r = -\frac{\delta(r)}{\pi r^4}. \quad (4.105)$$

Соответствующие напряжения имеют вид

$$\sigma_r = \frac{2\mu}{3\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ (3\lambda + 2\mu) \frac{\theta(r)}{r^3} + \frac{2}{3} (3\lambda + 4\mu) \frac{\delta(r)}{r^2} \right], \quad (4.106)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\mu}{3\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ (3\lambda + 2\mu) \frac{\theta(r)}{r^3} - \frac{1}{3} (3\lambda - 2\mu) \frac{\delta(r)}{r^2} \right].$$

Пусть теперь

$$\eta_r = -a\theta(R - r) \quad (a = \text{const}). \quad (4.107)$$

Этой несовместности, например, соответствует распределение температуры

$$T(r) = T_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \theta(R - r), \quad T_0 = \frac{aR^2}{4\gamma}. \quad (4.108)$$

Решение имеет вид

$$\sigma_r = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{15(\lambda + 2\mu)} a \left[ (5R^2 - 3r^2) \theta(R - r) + \frac{2R^5}{r^3} \theta(r - R) \right], \quad (4.109)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{15(\lambda + 2\mu)} a \left[ (5R^2 - 6r^2) \theta(R - r) - \frac{R^5}{r^3} \theta(r - R) \right].$$

<sup>1)</sup> Пространственной  $\delta(x)$  соответствует  $(2\pi r^2)^{-1} \delta(r)$ .

В заключение рассмотрим распределение дислокаций по поверхности цилиндра радиуса  $\rho = R$  с вектором Бюргера  $b = \text{const}$ , направленным по радиусу  $\rho$ . Соответствующие выражения для отличных от нуля компонент  $\mu$  и  $\eta$  имеют вид

$$\mu_\rho = b\delta(\rho - R), \quad \eta_z = -\frac{b}{R} \delta'(\rho - R), \quad (4.110)$$

а напряжения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{b}{R} \left[ \theta(R - \rho) + \frac{R^2}{\rho^2} \theta(\rho - R) \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{b}{R} \left[ \theta(R - \rho) - \frac{R^2}{\rho^2} \theta(\rho - R) \right]. \end{aligned} \quad (4.111)$$

При  $R \rightarrow 0$  получаем в пределе линейный источник

$$\mu_\rho = \frac{\delta(\rho)}{\pi\rho}, \quad \eta_z = \frac{2}{\pi} \frac{\delta(\rho)}{\rho^3} \quad (4.112)$$

с напряжениями

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{2\theta(\rho)}{\rho^2} + \frac{\delta(\rho)}{\rho} \right], \\ \sigma_\varphi &= -\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{2\theta(\rho)}{\rho^2} - \frac{\delta(\rho)}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (4.113)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1872.1. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen. Reprinted Math. Ann. **43** (1893), 63—100.
- 1877.1. L. B. Christoffel, Ueber die Fortpflanzung von Stößen durch elastische feste Körper. Ann. di Mat. II **8**, 193—243.
- 1880.1. A. Voss, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannfaltigkeiten. Math. Ann. **16**, 129—78.
- 1894.1. L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. Leipzig, Teubner.
- 1898.1. W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle. Leipzig, Teubner.
- 1900.1. E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem. Leipzig, Teubner.
- 1900.2. H. Burkhardt and W. F. Meyer, Potentialtheorie. Enc. d. m. Wiss. II A. 7b. Leipzig, Teubner.
- 1901.1. G. Ricci, T. Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. **54**, 125—201.
- 1904.1. G. Hamel, Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, Z. Math. Phys. **50**, 1.
- 1904.2. A. E. H. Love, Wave Motions with Discontinuities at Wave Fronts. Proc. Lond. Math. Soc. II. **1**, 37—62.
- 1907.1. O. Tedone, Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre. Enc. d. m. Wiss. IV. 24, Leipzig, Teubner.
- 1908.1. R. Weitzenböck, Komplex-Symbolik, Leipzig, 1908.
- 1913.1. E. B. Wilson, Vector Analysis. New Haven, Yale University Press.
- 1916.1. A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, Barth.
- 1917.1. E. T. Whittaker, Analytical Dynamics. Cambridge University Press.
- 1917.2. T. Levi-Civita, 'Nozione di parallelismo in una varietà qualunque'. Rend. Circ. Mat. Pal. **42**, 173—205.
- 1918.1. J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie. Verh. Kon. Akad. v. Wet. **12**, No. 6, 95 pp.
- 1920.1. M. v. Laue, Die Relativitätstheorie. Braunschweig, Vieweg.

- 1921.1. W. Pauli, Relativitätstheorie. Enc. d. m. Wiss. v. 12, Leipzig—Berlin, Teubner.
- 1921.2. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer.
- 1921.3. J. A. Schouten and D. J. Struik, On some Properties of general Manifolds relating to Einstein's theory of Gravitation. Am. J. of Math. **43**, 213—16.
- 1921.4. E. Kasner, Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations. Ibid. p. 217—21.
- 1921.5. J. A. Schouten, Über die konforme Abbildung  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung, auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung. Math. Zeitschr. **11**, 58—88.
- 1922.1. O. Veblen, Normal Coordinates for the Geometry of Paths. Proc. Nat. Acad. **8**, 192—7.
- 1922.2. E. Kasner, The Solar Gravitational Field completely determined by its Light Rays. Math. Ann. **85**, 227—36.
- 1923.1. A. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge University Press.
- 1923.2. H. W. Brinkmann, On Riemann Spaces conformal to Einstein Spaces. Proc. Nat. Acad. **9**, 172—4.
- 1923.3. R. Weitzenböck, Invariantentheorie. Groningen, Noordhoff.
- 1924.1. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül. Berlin, Springer. (См. 1954.1).
- 1925.1. Л. Т. Окава, L'extrémal dans un champ gravifique à pseudo-orthogonalité. Proc. Physicomath. Soc. Tokyo **3**, 51—8.
- 1926.1. L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry. Princeton University Press, Oxford University Press, Second edition 1949.
- 1926.2. J. L. Synge, On the Geometry of Dynamics. Trans. Roy. Soc. London **A 226**, 31—106.
- 1926.3. G. Vranceanu, Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonome. Rend. Acc. Linc. (6) **4**, 508—11.
- 1927.1. G. D. Birkhoff, Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. New York.
- 1927.2. T. Levi Civita, The Absolute Differential Calculus. London, Blackie & Son.
- 1927.3. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. New York.
- 1927.4. J. A. Schouten, Über  $n$ -fache Orthogonalsysteme in  $V_n$ . Math. Zeitschr. **26**, 706—30.
- 1928.1. Z. Hořák, Sur les systèmes non holonomes. Bull. Int. Ac. Sc. de Bohême **29**, 1—18.
- 1929.1. A. D. Fokker, Relativiteitstheorie. Groningen, Noordhoff.
- 1931.1. T. Y. Thomas, The Elementary Theory of Tensors. New York—London. McGraw-Hill.
- 1931.2. W. Slebodzinski, Sur les équations de Hamilton. Bull. Acad. Roy. Belg. (5) **17**, 864—70.
- 1932.1. O. Veblen and J. H. C. Whitehead, The Foundations of Differential Geometry. Cambridge Tracts No. 29, 96 pp.

- 1932.2. A. Wundheiler, Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik, *Prac. Matematyczno-Fizycznych Warszawa*, **40**, 97—142.
- 1933.1. J. A. Schouten and E. R. v. Kampen, Beiträge zur Theorie der Deformation. *Prac. Matematyczno-Fizycznych Warszawa* **4**, 1—19.
- 1933.2. I. Koga, Vibrations of Piezo-electric Oscillating Crystals. London, Edinburgh, and Dublin *Phil. Mag. and J. of Sc.* (7) **12**, 275—83.
- 1933.3. E. Jahnke and F. Emde, *Funktionentafeln*. Leipzig—Berlin, Teubner. New York, Dover Publications.
- 1933.4. P. A. M. Dirac, Homogeneous Variables in Classical Dynamics. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **29**, 389—400.
- 1934.1. G. Prange, Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. *Enc. d. m. Wiss.* iv. **12**, **13**, Leipzig, Teubner.
- 1934.2. F. R. Lack, G. W. Willard, and J. E. Fair, Some Improvements in Quartz Crystal Circuit Elements. *Bell System Techn. Journ.* **13**, 453—63.
- 1934.3. 4, 5, 6. D. v. Dantzig, Electromagnetism, independent of metrical geometry. *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* **37**, 521—5, 526—31, 644—52, 825—36.
- 1934.7. J. L. Synge, The Energy Tensor of a Continuous Medium. *Trans. Roy. Soc. of Canada* **3**, **28**, 127—71.
- 1935.1. J. A. Schouten and D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I. Groningen—Batavia, Noordhoff. В тексте цитируется как H. M.
- 1936.1. B. v. Dijl, The Applications of Ricci Calculus to the Solutions of Vibrational Equations of Piezo-electric Quartz, *Physica* **3**, 317—26.
- 1936.2. J. L. Synge, *Tensorial Methods in Dynamics*. Toronto University Press.
- 1936.3. D. v. Dantzig, Ricci Calculus and Functional Analysis, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* **39**, 785—94.
- 1936.4. P. Jordan, *Anschauliche Quantentheorie*. Berlin. Springer.
- 1937.1. J. W. Givens, Tensor Coordinates of Linear Spaces, *Ann. of Math.* **38**, 355—85.
- 1937.2. J. v. Weysenhoff, Duale Grössen, Grossrotation, Grossdivergenz und die Stokes-Gaussischen Sätze in allgemeinen Räumen, *Ann. Soc. Pol. de Math.* **16**, 127—44.
- 1937.3. J. L. Synge, Relativistic Hydrodynamics, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **43**, 376—416.
- 1937.4. H. A. Kramers, *Die Grundlagen der Quantentheorie*. Leipzig. Akad. Verl. Ges.
- 1938.1. L. Brillouin, *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*, Paris, Masson.
- 1938.2. J. A. Schouten, Über die geometrische Deutung von gewöhnlichen  $p$ -Vektoren und  $W$ - $p$ -Vektoren und den korrespondierenden Dichten, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* **41**, 709—16.
- 1938.3. J. A. Schouten and D. J. Struik, Einführung in die neuen Methoden der Differentialgeometrie, II. Groningen—Batavia, Noordhoff. В тексте цитируется как H. M.

- 1939.1. A. Fokker, De beweging van golfgroepen volgens de kanonische vergelijkingen van Hamilton, *Hand. 27ste Ned. Nat. Gen. Congr.* 1—4.
- 1939.2. A. Fokker, Hamilton's Canonical equations for the Motion of Wave Groups, *Physica* 6, 785—90.
- 1939.3. D. v. Dantzig, On the Phenomenological Thermodynamics of Moving Matter., *Physica* 6, 673—704.
- 1939.4. D. v. Dantzig, On Relativistic Thermodynamics, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* 42, 601—7.
- 1939.5. D. v. Dantzig, Stress Tensor and Particle Density in special Relativity Theory, *Nature* 143, 855.
- 1939.6. D. v. Dantzig, On Relativistic Gas Theory, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* 42, 608—25.
- 1940.1. J. A. Schouten and D. v. Dantzig, On Ordinary Quantities and  $\mathcal{W}$ -quantities, *Comp. Math.* 7, 447—73.
- 1940.2. D. v. Dantzig, On the Thermo-hydrodynamics of Perfectly Perfect Fluids, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* 43, 387—402, 609—18.
- 1944.1. A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York, Dover Publications.
- 1945.1. D. E. Littlewood, Invariant Theory under Orthogonal Groups, *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* 50, 349—79.
- 1946.1. H. Dorgelo and J. A. Schouten, On Units and Dimensions, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* 48, 124—31, 282—91, 393—403.
- 1946.2. W. G. Cady, Piezo-electricity. *Intern. Ser. in Pure and Applied Physics*. New York—London, McGraw-Hill.
- 1947.1. A. Lichnerowicz, *Algèbre et Analyse Linéaire*. Paris, Masson.
- 1947.2. L. Brandt, *Vector and Tensor Analysis*. New York, Wiley & Sons; London, Chapman & Hall.
- 1947.3. A. D. Michal, *Matrix and Tensor Calculus*. Galcit Aeronautic Series. New York, John Wiley & Sons; London, Chapman & Hall.
- 1947.4. W. P. Mason, First and Second Order Equations for Piezo-electric Crystals expressed in Tensor Form, *Bell System Techn. Journal* 26, 80—138.
- 1947.5. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, Clarendon Press.
- 1947.6. A. Duschek, *Matrizen, Vektoren und Tensoren*, *Ing. Arch.* 1, 371—382.
- 1948.1. E. J. Post, Reciprocal Properties of Elastic Waves in Anisotropic Media, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.* 51, 65—72.
- 1949.1. J. A. Schouten and W. v. D. Kulk, *Pfaff's Problem and its Generalizations*, Oxford, Clarendon Press. В тексте цитируется как П. Ф.
- 1951.1. J. A. Schouten, *Regular Systems of Equations and Superfluous Coordinates*. *Scriptum 6 of the Mathematical Centre*, Amsterdam.



## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1947.7. И. М. Лифшиц и Л. Н. Розенцвейг, О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды. *ЖЭТФ* **17**, 783—91.
- 1948.2. И. М. Лифшиц, О макроскопическом описании явления двойникования в кристаллах. *ЖЭТФ* **18**, 1134.
- 1949.2. Ю. А. Крутков, Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд-во АН СССР.
- 1950.1. M. Peach and J. S. Koehler, The Forces exerted on Dislocations and the Stress Fields produced by Them. *Phys. Rev.* **80**, 436—9.
- 1950.2. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Camb.—Mass., Addison—Wesley (Г. Голдстейн, Классическая механика. М., Гостехиздат, 1957).
- 1950.3. W. P. Mason, *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*. New York. (В. Мэзон, Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. М., ИЛ, 1952).
- 1953.1. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Гостехиздат.
- 1953.2. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. М., Гостехиздат.
- 1953.3. G. Leibfried. *Versetzungen in anisotropen Material*. *Zs. Phys.* **135**, 22—43.
- 1954.1. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag (в тексте цитируется Р. К.).
- 1954.2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред. М., Гостехиздат.
- 1955.1. А. И. Лурье, Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат.
- 1955.2. K. Kondo, *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry*. Vol. 1 (Vol. 2—1958, Vol. 3—1962). Tokyo, Gakujutsu Bunken Fukyu—Kai.
- 1955.3. G. de Rham, *Variétés Différentiables*. Paris, Hermann (Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия. М. ИЛ).
- 1955.4. V. A. Bilby, R. Bullough and E. Smith, Continuous Distributions of Dislocations: a New Application of the Methods of Non-Riemannian Geometry. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **231**, 263—73.
- 1955.5. K. Yano, *The Theory of Lie Derivatives and Its Applications*. Amsterdam, North—Holland Publishing Co.
- 1956.1. G. C. McVittie. *General Relativity and Cosmology*. London, Chapman and Hall Ltd (Г. К. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология. М., ИЛ, 1961).
- 1956.2. J. L. Synge, *Relativity: the Special Theory*. Amsterdam, North-Holland Publishing Co.

- 1957.1. I. Mikusinski and R. Sikorski, The Elementary Theory of Distributions. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe. I. (II—1961) (Я. Микусинский и Р. Сикорский, Элементарная теория обобщенных функций. М. ИЛ, I, 1959; II, 1963).
- 1957.2. H. Whitney, Geometric Integration Theory. Princeton—New Jersey, Princeton University Press (Х. Уитни, Геометрическая теория интегрирования. М., ИЛ, 1960).
- 1958.1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика. М., Физматгиз.
- 1958.2. J. N. Sneddon and D. S. Berry, The Classical Theory of Elasticity. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag (И. Н. Снеддон и Д. С. Берри, Классическая теория упругости. М., Физматгиз).
- 1958.3. E. Kröner, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag.
- 1959.1. И. М. Гельфанд и Е. Г. Шилор, Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз.
- 1959.2. E. Kröner und A. Seeger, Nichtlineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Arch. for Rat. Mech. and Analysis **34**, 97—119.
- 1960.1. J. L. Synge, Classical Dynamics. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag (Дж. Л. Синг, Классическая динамика. М., Физматгиз, 1963).
- 1960.2. J. A. Wheeler, Neutrinos, Gravitation and Geometry. Bologna (Дж. Уилер, Гравитация, нейтрино и вселенная. М., ИЛ, 1962).
- 1960.3. J. L. Synge, Relativity: the General Theory. Amsterdam, North-Holland Publishing Co. (Дж. Синг, Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963).
- 1960.4. H. G. Van Buegan, Imperfections in Crystals. Amsterdam, North-Holland Publishing Co (Ван Бюрен, Дефекты в кристаллах. М., ИЛ, 1962).
- 1960.5. Э. Картан, Риманова геометрия в ортогональном репере. Изд. МГУ.
- 1961.1. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз.
- 1961.2. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз.
- 1961.3. А. И. Лурье, Аналитическая механика. М., Физматгиз.
- 1961.4. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, О дислокационной модели двойника. ФТТ, **3**, 1290—7.
- 1961.5. Новейшие проблемы гравитации. Сб. статей под ред. Д. Иваненко. М., ИЛ.
- 1962.1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля. М., Физматгиз.
- 1962.2. Л. И. Седов, Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз.
- 1962.3. В. Л. Инденбом, А. Н. Орлов, Физическая теория пластичности и прочности. УФН XXVI, 557—91.
- 1962.4. А. М. Косевич, Поле деформаций в изотропной упругой среде с движущимися дислокациями, ЖЭТФ **42**, 152—62.

- 1962.5. А. М. Косевич. Уравнение движения дислокации. ЖЭТФ 45, 637—48.
- 1962.6. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, Дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз.
- 1962.7. F. Kroupa, Continuous distribution of dislocation loops. Чехословацкий физ. ж. V12, 191.
- 1963.1. Дж. Эшелби, Континуальная теория дислокаций. М., ИЛ.
- 1964.1. И. А. Кунин, Внутренние напряжения в анизотропной упругой среде. ПММ.

**Примечание.** Работы: 1872.1, 1917.1, 1921.1, 1923.1, 1926.1, 1927.1, 1932.1, 1933.3, 1935.1, 1936.2, 1938.3, 1944.1, 1946.2, 1947.5 имеются в переводах,

---

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная размерность** 184  
**Абсолютно инвариантное поле**  
116, 173  
**Альтернирование** 38, 164  
**Аффинная геометрия** 14
- Базисные векторы** 28, 93  
**Бианки тождество** 146, 386, 395  
**Бивектор** 60  
— аксиальный 82  
—, канонические формы 60, 167  
— полярный 82  
— специальный первого и второго рода 79  
—, теорема о главных листах 70, 167  
**Бозе статистика** 353  
**Бра** 337, 349  
**Бюргерса вектор** 375, 377  
— контур 374, 377
- Валентность** 34, 164  
**Вектор** 83, 164  
— аксиальный 82  
— единичный 61, 338  
— изотропный 61, 134, 170, 338  
— ковариантный 26, 164  
— контравариантный 25, 162  
— полярный 82  
**Векторная алгебра** 86  
**Векторное произведение** 88  
**Величины второго рода** 334  
**Вероятности амплитуда** 367  
**Вес** 49, 164  
**Взаимные системы векторов** 30  
**Виртуальное перемещение** 271  
**Внешний дифференциал** 98, 100, 172  
**Внешняя метрика** 381
- Внутренняя геометрия среды** 382  
— метрика 388  
**Волновая поверхность** 246, 255  
— функция 371  
**Волны в анизотропной среде** 243  
**Вращение** 100  
**Выключение индекса** 31, 38, 165
- Гамильтона соотношение** 284  
— уравнения 282, 285  
— функция 281  
**Гамильтона — Якоби уравнения** 287  
**Гармоническая функция** 154, 180  
**Гаусса теорема** 106  
— уравнение 274  
**Геодезическая** 130, 176  
**Геодезическое расстояние** 274  
**Геодезических уравнение** 131, 176  
**Геометрическая величина** 24, 91, 164  
**Геометрический образ** 184  
— объект 24, 91, 163  
**Геометрия группы** 17  
**Гибридные величины** 335  
**Гиперплоскости координаты** 20  
**Гиперплоскость** 20  
**Гиперсфера единичная** 62, 170  
**Гравитация** 317  
**Градиент** 98  
**Граничные задачи** 156, 180  
**Грина среда** 252  
— тензор 404  
— теорема 153  
— тождества 152, 179  
— функция 156, 404  
**Группа** 13  
— аффинная 13, 161

- Группа вращений 17, 168  
 — — и отражений 17, 168  
 — кристалла 217  
 — унимодулярная 16, 168  
 — унитарная 339  
 — центрo-аффинная 16, 162, 168  
 — эквиаффинная 16, 168
- Девиатор 201  
 Декартова система координат 62, 162  
 Деформации тензор 201, 396  
 Диагональная матрица 364, 366  
 Дивергенция 101  
 Дислокации 375, 376  
 —, плотность 432  
 —, — моментов 434  
 Диэлектрические константы 212  
 Длина 61, 134, 170, 352  
 Допустимые системы координат 14, 91  
 — — основных единиц 183  
 Дуальная плотность моментов 437
- Единичная матрица 364  
 Единичный кэт (бра) 338  
 — объем 64, 72  
 Естественное состояние среды 383
- И**гнорируемая координата 294  
 Идеальная жидкость 329  
 Изомер 37, 164  
 Изотропная кризая 134  
 Изотропное направление 134  
 Импульс 281  
 Индекс 59, 166, 336  
 Индексы 13, 160  
 — выключенные 31, 38, 165  
 — живые 29, 165  
 — мертвые 29, 165  
 —, опускание, поднятие 63  
 — текущие 14, 160  
 — фиксированные 15, 160  
 Интегрируемое векторное поле 98  
 Инфинитезимальная окрестность 92
- Канонический параметр 131, 176  
 Касательное  $E_n$  92  
 Кварцевый резонатор 256
- Клейна принцип 17  
 Ковариантная производная 128, 176  
 Ковариантный вектор 26, 164  
 — дифференциал 126, 176  
 Коммутирующие наблюдаемые 361  
 — операторы 342  
 Константы связи 262  
 Контравариантный вектор 25, 164  
 Конус нулевой (световой) 61  
 Координаты декартовы 62, 162  
 — криволинейные 91, 161  
 — неголономные 121, 150, 175, 276  
 — нормальные 133, 176  
 — прямолинейные 133, 176  
 Коренная буква 14, 160  
 Коренных букв и индексов метод 15  
 Корень 15  
 Коэффициенты аффинной связности 127  
 Кривизны тензор 144, 151, 177, 386  
 Кристаллические классы 216  
 Кристоффеля символ 135, 177  
 Кронекера символ 30, 93  
 Кручения тензор 129, 385  
 Кэт 337, 348
- Л**агранжа производная 119, 174  
 — уравнения 119, 281, 284  
 — функция 281  
 Леви-Чивита уравнение 274  
 Лейбница правило 115  
 Ли дифференциал, производная 115, 173  
 Линейное пространство 346  
 Локальное  $E_n$  92, 162  
 Лоренца преобразование 302
- Майкельсона — Морлея опыт 305  
 Максвелла уравнение 189, 302  
 Масса покоя 311  
 Материи плотность 313  
 Матрицы 65, 165  
 — ранг 165  
 — транспонирование 67  
 —, умножение 65  
 Матричное исчисление 66, 171, 339

- Матричное исчисление Дирака 333  
 Механическая связь 261  
 Минковского геометрия 304  
 Мировая линия 21, 275  
 Многообразие 91, 161  
 Момент мультиполя 409  
 Мопертюи уравнение 296  
 Мультиполи 409
- Наблюдаемая** 356  
 Наименьшего действия принцип 296  
 Направление 19  
 Напряжений тензор (плотность) 204  
 Начало координат 16  
 Неголономная механическая система 278  
 Неголономные компоненты 121  
 Неймана принцип 219  
 Несобственное подпространство 20, 162  
 Несовместность 397  
 — дислокационная 433  
 Нонор 224  
 Норма 338  
 Нормировка кэт (бра) 354, 358  
 Носитель обобщенной функции 400  
 — оболочки 27  
 Нуль-многообразие 18  
 Нуль-форма 18
- Область положительная, отрицательная** 61  
 Обобщенная функция 400  
 Оболочка 27, 163  
 Общие собственные кэт (бра) 344  
 Объединение 20, 163  
 Объект неголономности 122, 175, 277  
 Оператор проектирования 406  
 — сдвига 403  
 — усреднения 417  
 — эрмитов 342  
 Ориентация 16, 162  
 — внешняя, внутренняя 22, 163  
 Ортогональность (кэт и бра) 352  
 Ортогональные векторы 62, 338  
 — компоненты вектора 63, 170  
 Основная функция 399
- Основное пространство 399  
 Основные единицы 182  
 Остроградского теорема 106  
 Относительная размерность 185  
 Отождествление величин после введения ориентации 74  
 — — — —  $G_{eq}$  72, 162  
 — — — —  $G_{or}$  73, 169  
 — — — —  $G_{ro}$  74, 169
- Параллелизм 175  
 Параллелотоп 44  
 Параллельное перенесение 125  
 — — аффинное 126, 175  
 — — Вейля 159  
 — — симметрическое 135, 176  
 Параметрическая форма  $E_p$  18  
 Пересечение 19, 163  
 Плоскость 20  
 Плотности 51, 164  
 Поверхность скоростей 255  
 Подвижная связь 279  
 Подпространства в  $E_n$  18  
 — параллельные 19  
 Поливектор 42, 164  
 — простой 42, 165  
 Полное множество кэт (бра) 344  
 Потенциальная функция 154, 180  
 Представления 360  
 — ортогональные 362  
 Преобразование антилинейное 347  
 — инфинитезимальное 114  
 — координат 15  
 — линейное 346  
 — объектов 24  
 — точечное 15  
 — унитарное 339  
 Проекция 22, 163  
 Производные единицы 182  
 Промежуточные компоненты 34, 161  
 Пространство аффинное 14, 161  
 — аффинной связности 127  
 — — — без кручения 129  
 — евклидово 17  
 — локально аффинное 144  
 — метрической связности 389  
 — ориентированное  $E_n$  16, 162  
 — —  $R_n$  17, 162  
 — риманово 134  
 — событий 275

- Пространство унимодулярное 16  
 — центро-аффинное 16, 162  
 — эквиаффинное 16  
 Прямая линия 20  
 Псевдоскаляр 53  
 Псевдотензор 53  
 Пуассона скобка 291  
 Пьезомагнитный эффект 239  
 Пьезоэлектрические константы 214  
 Пьезоэлектрический эффект 238  
  
 Разложение  $p$ -вектора на листы 46  
 Размерность геометрического образа 184  
 — оболочки 27  
 — физического объекта 185  
 Рауса — Гельмгольца преобразование 296  
 Редукция 21, 22, 163  
 Релятивистская гидродинамика 320  
 — динамика 307  
 — кинематика 302  
 Реономная голономная система 270  
 — неголономная система 278  
 Риччи тензор 146  
  
 Самосопряженное направление 251  
 Свертка 30, 164  
 — интегральная 402  
 Связывающая величина 34, 161  
 Септор 223  
 Сигнатура 59, 166, 336  
 Симметрирование 37, 164  
 Симметрированное произведение 165  
 Симметричный тензор 38, 42, 164  
 Система образующих группы 218  
 Скаляр 25, 164  
 Скалярная кривизна 147  
 Скалярное произведение 87, 338, 349  
 Склерономная голономная система 271  
 — неголономная система 278  
 След 201  
 Собственное значение 69, 167, 354  
 Собственное подпространство 162  
 — состояние 356  
 Собственный вектор 69, 167  
 — кэт (бра) 342, 354  
 Соотношение эквивалентности 437  
 Сопряженное направление 251  
 Состояния системы 355  
 Сохранения импульса и энергии закон 316  
 Средняя плотность потока импульса 321  
 — — — частиц 320  
 — — — энергии 321  
 — — энергии 320  
 Стандартный кэт 370  
 Стокса теорема, формулы 103, 106—112, 172, 418  
  
 Температуры вектор 329  
 Тензор 34, 164  
 — антисимметричный 35, 38, 42, 164  
 — двухвалентный 56, 165  
 — — обратный 14, 35, 166  
 — — разложение 223  
 — — ранг 57, 166  
 — — симметричный 58  
 — — —, индекс 58, 336  
 — — —, канонические формы 58  
 — — — неопределенный 59  
 — — — отрицательно определенный 59, 336  
 — — — положительно определенный 59, 336  
 — — —, собственное значение 69, 167  
 — — —, собственный вектор 69, 167  
 — — —, теорема с главных осей 70, 167  
 — — — фундаментальный 61, 162  
 — единичный 35, 93, 167  
 — ковариантный 34  
 — контравариантный 34  
 — симметричный 37, 41  
 Тензора альтернирование 38, 164  
 — изомер 37, 164  
 — симметрирование 37, 164  
 —  $\mu$ -оболочка 39, 165  
 —  $\kappa$ -ранг 39, 165  
 Тензоров свертка 36, 164

- Тензорное сложение 36, 164  
 — умножение 36, 164  
 Тождества для тензора кривизны 145, 177, 386  
 Точка 90  
 Трансляция 19
- У**влечение координатной системы 113  
 Угол 62, 170  
 Упругие константы 207—10  
 Устойчивая траектория 273
- Ф**азовый множитель 338, 367  
 Ферми статистика 353  
 Физическая величина 183  
 Физический объект 183  
 Финитная функция 399  
 Френеля уравнение 253  
 Фундаментальный тензор 61, 162, 170  
 — — эрмитов 336  
 Функции в инволюции 291  
 — наблюдаемых 358  
 Функция интервала (области) 349
- Ч**етырехмерной скорости вектор 305, 310
- Ш**аровая часть тензора 201
- Э**йконал 286, 288  
 Эйнштейна правило 13  
 — пространство 318  
 Эквивалентные поля 414, 421, 437  
 Эквискалярные  $X_{n-1}$  99  
 Элемент мировой линии 285  
 Элементарная дислокация 435  
 Элементарные делители 58  
 Элементарный вихрь 412  
 — двойной вихрь 432  
 Энантиоморфные классы 219  
 Энергетическая функция 250  
 Энергии-импульса вектор 311  
 — — тензорная плотность 313  
 Эрмитов бивектор 335  
 — тензор 335  
 — —, теорема о главных осях 339  
 Эффект линейный 227
- Я**дро оператора 403
- n*-вектор 47  
*p*-вектор 42  
*p*-направление 19, 163  
*W*-*p*-вектор 53  
*W*-скаляр 53  
*W*-тензор 53, 164  
*x*-сечение 256  
 $\Delta$ -плотность 49, 164  
 $\delta$ -функция 350, 400  
 — сдвинутая 403
-



## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Равенства  $\stackrel{\text{def}}{=} 13$ ;  $\stackrel{*}{=} 31$ ;  $\stackrel{h}{=} 151$
- Единичный тензор и символы
- Кroneкера  $A_{\lambda}^{\alpha} 35, 93, 167$ ;  
 $A_{\alpha}^{\lambda} 13, 90, 161, 162$ ;  $A_{\alpha}^{\alpha} 14$ ;  
 $A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} 34$ ;  $\delta_{\lambda}^{\alpha}, \delta_{\alpha}^{\lambda}, \delta_{\lambda}^{\alpha'}$  30,  
 93, 391;  $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} 391$ .
- Фундаментальный тензор  $g^{\alpha\lambda}, g_{\lambda\alpha} 61, 162, 170$ ;  $a_{\lambda\alpha} 336$ .
- Определители  $\Delta = \text{Det}(A_{\alpha}^{\lambda}) 13$ ;  
 $g = |\text{Det}(g_{\lambda\alpha})| 65, 70$ .
- Симметрирование и альтернирование  $P^{(\lambda_1 \dots \lambda_p)} 37$ ;  $P^{[\lambda_1 \dots \lambda_p]} 38$ .
- Транспонирование и эрмитово сопряжение  $P^{\dagger} 67, 171, 341$ ;  
 $\ddagger P 341$ .
- Базисные векторы  $e_{\lambda}^{\alpha}, e_{\alpha}^{\lambda} 28, 93$ ;  
 $i^h, i_i 62$ .
- Плотности и  $W$ -величины  $\tilde{p} 49$ ;  
 $\hat{p} 52$ ;  $\check{p} 53$ .
- Антисимметричные величины
- $E^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, e^{\alpha_1 \dots \alpha_n} 48$ ;  
 $\tilde{E}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \tilde{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} 50, 167$ ;  
 $\check{E}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \check{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} 391$ ;  
 $I^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, i^{\alpha_1 \dots \alpha_n} 64, 171$ .
- Неголономные координаты  $(d\xi)^h 121, 175$ ;  $\Omega_j^i 122, 175$ .
- Группы  $G_a 13, 161$ ;  $G_{\text{НО}}, G_{\text{ЭГ}}, G_{\text{Са}} 16, 168$ ;  $G_{\text{ОГ}}, G_{\text{ГО}} 17, 168$ ;  $G_{\text{УП}} 339$ .
- Пространства, многообразие  $A_n 129, 176$ ;  $E_n 14, 161$ ;  $L_n 126$ ;  
 $R_n 17, 162$ ;  $U_n 336$ ;  $V_n 134, 162$ ;  $X_n 91, 161$ .
- Коэффициенты связности и символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}, \Gamma_{\mu} = = \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} 127, 175$ ;  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} 135, 177$ .
- Кривизна и кручение  $R_{\nu\mu\lambda}^{\alpha} 143, 177, 386$ ;  $R_{\mu\lambda} 146, 178$ ;  $K_{\nu\mu\lambda\alpha} 145, 177$ ;  $K_{\mu\lambda} 146, 178$ ;  $S_{\mu\lambda}^{\alpha} 129, 176, 385$ .
- Вариация  $\overset{\nu}{d} 118, 174$ .
- Дифференциалы  $D 98, 100, 172$ ;  
 $\delta 126, 176$ .
- Операторы  $\partial_{\alpha} 162$ ;  $\nabla_{\mu} 128, 176$ ;  
 $\nabla^{\mu} 151$ ;  $\nabla^2 152$ ;  $\overset{p}{\nabla} 387$ ;  $\text{Div} 101, 172$ ;  $\text{div} 102, 172$ ;  $\text{Grad} 98, 172$ ;  
 $\text{Rot} 100, 172$ ;  $\text{Rot} 394$ ;  $\text{def} 394$ ;  
 $\text{rot} 102, 172$ ;  $\text{Pot} 154, 180$ ;  $D^{\perp} 115, 172$ ;  $[L] 118, 174$ ;  $\langle S \rangle 417$ ;  
 $\langle S^{\lambda} \rangle 418$ .
- Скобки Пуассона  $[\varphi, \psi] 291$
- $\delta$ -функции  $\delta(x) 350, 400$ ;  $\delta(S) 414$ ;  
 $\delta(S^{\lambda}) 416$ .
- Интегральная свертка  $f * g 402$
- Кэт, бра и скалярное произведение  $\{ \}, \langle |, \langle | \rangle 349$ .

