

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Книга американских физиков Т.-П.Ченга и Л.-Ф.Ли представляет собой фундаментальное и современное введение в калибровочные теории элементарных частиц. Подробно излагаются как уже сформировавшиеся теории, так и новые направления и тенденции в теоретической физике элементарных частиц.

Предназначена для студентов и аспирантов, изучающих теорию элементарных частиц, а также для специалистов (теоретиков и экспериментаторов) в качестве справочного пособия по физике элементарных частиц,

ОГЛАВЛЕНИЕ

Разделы, отмеченные звездочкой (*), содержат детали, которые могут быть опущены при первом чтении. Разделы и главы, отмеченные знаком +, представляют собой элементарное изложение вопросов, выходящих за пределы основного предмета книги.

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Часть I	
Глава 1. Основы квантования полей	11
1.1. Формализм канонического квантования	12
1.2. Введение в формализм функционального интегрирования	20
1.3*. Квантование ферми-полей	33
Глава 2. Введение в теорию перенормировок	41
2.1. Стандартные перенормировки в теории $\lambda\phi^4$	42
2.2. БПХ-перенормировки в теории $\lambda\phi^4$	52
2.3. Методы регуляризации	59
2.4. Подсчет степеней расходимостей и перенормируемость	70
Глава 3. Ренормализационная группа	83
3.1. Схемы вычитаний в импульсном пространстве и уравнение Каллана — Симанзика	84
3.2*. Схема минимальных вычитаний и ее ренормгрупповое уравнение	95
3.3. Эффективная константа связи	100
Глава 4. Теория групп и кварковая модель	105
4.1. Элементарная теория групп	105
4.2. Группы $SU(2)$ и $SU(3)$	110
4.3. Тензорный метод для групп $SU(n)$	124
4.4. Кварковая модель	138
Глава 5. Киральная симметрия сильных взаимодействий	152
5.1. Глобальные симметрии в теории поля и коммутаторы токов	153
5.2*. Токи, соответствующие симметрии, как физические токи	162
5.3. Спонтанное нарушение глобальной симметрии. Теорема Голдстоуна	171
5.4*. Частичное сохранение аксиально-векторного тока и теоремы о мягких пионах	181
5.5*. Механизм нарушения киральной симметрии	192

Глава 6. Перенормировки и симметрии	202
6.1*. Тождество Уорда для векторного тока и перенормировка	203
6.2*. Аномалия аксиально-векторного тождества Уорда и распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	207
6.3+. Перенормировка в теориях со спонтанно нарушенной симметрией	217
6.4+. Эффективный потенциал и спонтанное нарушение симметрии, индуцированное радиационными поправками	223
Глава 7. Партоновая модель и скейлинг	235
7.1. Партоновая модель глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния	235
7.2. Правила сумм и приложения кварк-партоновой модели	245
7.3. Сингулярности свободных полей на световом конусе и бёркеновский скейлинг	256
Часть II	265
Глава 8. Калибровочные симметрии	
8.1. Локальные симметрии в теории поля	265
8.2*. Калибровочная инвариантность и геометрия	272
8.3. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии; явление Хиггса	278
Глава 9. Квантовые калибровочные теории	287
9.1. Квантование калибровочных теорий с помощью функциональных интегралов	287
9.2. Правила Фейнмана в ковариантных калибровках	297
9.3*. Тождества Славнова — Тейлора	308
Глава 10. Квантовая хромодинамика	321
10.1*. Открытие асимптотической свободы	322
10.2. Лагранжиан КХД и симметрии сильных взаимодействий	335
10.3. Ренормгрупповой анализ скейлинга и нарушение скейлинга	340
10.4*. Партоновая модель и пертурбативная КХД	358
10.5+. Калибровочные теории на решетке и удержание цвета	371
Глава 11. Стандартная теория электрослабых взаимодействий I: основы	387
11.1. Слабые взаимодействия до калибровочной теории	387
11.2. Построение стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории	391
11.3. Дублирование фермионных поколений	409
Глава 12. Стандартная теория электрослабых взаимодействий II: феноменологические следствия	419
12.1. Процессы с нейтральными токами, сохраняющими симметрию ароматов	419
12.2. Слабые углы смешивания, механизм ГИМ и нарушение CP-инвариантности	427
12.3. Промежуточные векторные бозоны W и Z	444
12.4. Хиггсовская частица	453
Глава 13. Избранные вопросы квантовой ароматодинамики	461
13.1. Динамическое нарушение симметрии и модели техницвета	461
13.2. Массы нейтрино, смешивания и осцилляции	472

13.3. Распад $\mu \rightarrow e\gamma$, пример вычисления петель в R_ξ -калибровке	485
Глава 14. Великое объединение	494
14.1. Введение в $SU(5)$ -модель	494
14.2. Спонтанное нарушение симметрии -и калибровочная иерархия	501
14.3. Слияние констант связи	505
14.4. Распад протона и барионная асимметрия Вселенной	511
14.5. Массы фермионов и углы смешивания в минимальной $SU(5)$ -модели	517
Глава 15+. Магнитные монополи	524
15.1. Дираковская теория магнитных полюсов	524
15.2. Солитоны в теории поля	532
15.3. Монополь т'Хофта — Полякова	539
Глава 16+. Инстантоны	550
16.1. Топология калибровочных преобразований	551
16.2. Инстантон и вакуумные туннельные переходы	557
16.3. Инстантоны и проблема $U(1)$	564
Приложение А. Обозначения	572
Приложение Б. Правила Фейнмана	577
Библиография	593
Литература	599
Предметный указатель	610

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

<i>Ааронова—Бома эффект</i>	530, 549
<i>Адлера—Бардина теорема</i>	213
— <i>Белла—Джакива (АБД) аномалия</i>	207—217; см. также Аномалии
— <i>Вайсбергера соотношение (правило сумм)</i>	189—192
— правило сумм	166—170, 250
— условие согласованности	186, 193
Аксиальная проблема $U(1)$	339, 564—569; см. также Масса η -мезона, Распад $\eta \rightarrow 3\pi$, Инстантоны, <i>Когута—Сасскинда полюс</i> , θ -вакуум
Аксион	570
Алгебра зарядов	158
— $SU(2) \times U(1)$	392—393
— $SU(5)$	497
— токов	152, 157—162, 165, 168—169, 321
— — <i>Адлера—Вайсбергера соотношение (правило сумм)</i>	189—192
— — — правило сумм	166—171
— — — условие согласованности	186, 193
— — <i>Голдбергера—Треймана соотношение</i>	185—187, 192—193
— — длина πN -рассеяния	189
— — проблема $\eta \rightarrow 3\pi$	215—216

- — распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 215—216
- — массы псевдоскалярных мезонов 145, 196
- — правило сумм *Дашена* 200
- — проблема массы η -мезона 565—569
- — теоремы о мягких пионах 181—200
- Альтарелли—Паризи* уравнение 359—362, 368—369
- Аномалии 207—217; *см. также* Аксиальная проблема $U(1)$
- и инстантоны 564
- — перенормируемость 320
- неабелевых теорий 214—216
- сокращение в теории $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_\gamma$ 399-401
- Аномальная размерность 92, 95, 103, 353—358, 361
- Асимптотическая свобода 103, 322—335, 371, 386
- — в калибровочных теориях со скалярными мезонами 333—334
- — — неабелевых калибровочных теориях 327—330
- — и конфайнмент 371—386
- — открытие 322
- — парамагнитные свойства вакуума *Янга — Миллса* 330—333
- — применение к процессу e^+e^- 342—343
- — — IN 343—358, 364—371
- Барионная асимметрия Вселенной 514—517
- Барионное число, асимметрия Вселенной 514—517
- — несохранение в ТВО 511—517
- — сохранение в КХД 336
- — — в стандартной электрослабой теории 409
- Барионные массы 145—146, 197—198
- Бекки—Рюэ—Стара* (БРС) преобразования 315—318
- Бесконечного импульса система 170
- β -распад 183, 387, 429
- Билокальные операторы 262, 344—345
- Биунитарное преобразование 82, 338, 412—413
- Блока—Нордсика* теорема 364—365, 370
- Бозон W 390; *см. также* Бозон Z
- — в докалибровочных моделях 390—391, 394—397
- — — стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории 404—406, 435, 442—453
- — масса 445—446
- — распад в бозон *Хиггса* и лептоны 448—449
- — распады лептонные 446—449
- — рождение за счет механизма *Дрелла — Яна* 453
- Бозон Z 404—408, 419; *см. также* Бозон W
- — масса 445—446
- — распады 449—452

- — рождение за счет механизма *Дрелла*—Яна 453
- БПХ-перенормировки 52—59, 71, 83
- Бьёркеновский скейлинг: см. Скейлинг
- V* — *A*-теория 164, 389—390, 406, 419
- Вайнберга*—*Салима* теория: см. *Вайнберга* угол, ГИМ механизм, *Кобаяси*—*Маскава* матрица смешивания, CP-инвариантность, *Хиггса* явление
- — — барионные и лептонные числа 409
- — — выбор группы $SU(2) \times U(1)$ 392—398
- — — глобальные симметрии 409—418
- — — калибровочные бозоны *W* и *Z* 404—408, 444—453
- — — мюонное число 416
- — — нарушение CP-инвариантности 414—415
- — — СНС 401—402
- — — фермионы 398
- теорема 90—92
- угол 405
- — в процессах с нейтральными токами 407—408, 420
- — — — νN -рассеяния 424—426
- — — чисто лептонных процессах 420—424
- — предсказание $SU(5)$ -модели 508-510
- — соотношение между массами бозонов *W* и *Z* 404, 419, 445
- Вакуум 28, 173
- вырожденность в теориях с СНС 173, 536—537
- КХД 372, 571
- множественность вакуумных состояний с различными топологическими индексами 558—563; см. также θ -вакуум
- вакуум, амплитуда перехода 28, 40, 224, 299; 317; см. также Производящий функционал
- Вакуума поляризация 342, 440, 465
- Вакуумного насыщения приближение 437
- Вакуумное среднее, масштаб электрослабого объединения 406, 463, 504
- — однопетлевой сдвиг 217—220
- — условие СНС 173
- — формализм эффективного потенциала 223—224
- Векторная — аксиально-векторная неоднозначность в нейтринных реакциях 422
- Векторные мезоны, массы *W* и *Z* 404—405, 408—409, 445—446
- — и перенормируемость 77, 304, 391
- — калибровочные теории 267, 271
- — *Хиггса* явление 278—286
- Великое объединение 494—523, 547—549
- — квантование заряда 496, 547
- — монополь 524, 547—549

- — несохранение барионного числа 511-517
- — проблема калибровочных иерархий 504—505
- — связь между массами лептонов и кварков 520—522
- — слияние констант связи 505—510

Вершины константа перенормировки 49, 328

Взаимодействия представление 15

Вика поворот 61

— теорема 17—18, 32, 78, 259

Вильсона коэффициент 344, 346—349, 349—350

Вильсоновская петля 381—384

ВКБ-приближение и мнимое время 560—562

Восьмеричный путь 110, 139, 142—144

Вперед-назад асимметрия в $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 424

Вычитание 46; *см. также* Перенормировки, Регуляризация

— схема импульсная (стандартная) 83—87

— — минимальная 96—100

— — на массовой поверхности 85—86

— — при промежуточной перенормировке 84—85

— точка (условие нормировки) 84—87, 100, 323

Гауссов интеграл 30, 288, 296—298

— — по грассмановым переменным 37—40, 298

Гейзенберга представление 15, 21, 154

Гелл-Манна—Нашиджимы соотношение 141, 163

— *Окубо* массовая формула 145—146, 196, 198

Генератор (группы симметрии) 107—111; *см. также* *Нётер* теорема

Геометрия искривленного пространства 273—276

Гинзбурга — Ландау теорема 172

ГИМ механизм 417, 427—428, 437—440, 485, 493; *см. также* Слабые нейтральные токи, Очарование

Гиперзаряд 141

Гиперцвет: *см.* Техницвет

Глобальные симметрии 105, 153—156; *см. также* Барионное число, Сохранение $B - L$, Киральная симметрия, Лептонное число, Мюонное число

Глубокоевклидова область, асимптотическое поведение функций *Грина* 90—95, 99, 323

— — глубоконеупругое IN -рассеяние 235—243, 246—264

Глубоконеупругое рассеяние 103, 235

Глюоны 151, 246—247, 252, 336, 359—362, 371—372, 465—466, 499

Глэшоу—Вайнберга—Салама теория: *см.* *Вайнберга—Салама* теория

Голдбергера—Треймана соотношение 183—185, 192

Голдстоуна теорема 173—182, 278

— — в случае абелевой симметрии 177—179

- — — — неабелевой симметрии 179—181
- Голдстоуновский бозон 174—175; *см. также* Несостоявшийся голдстоуновский бозон, Псевдоголдстоуновский бозон
- — в абелевом случае 174—175
- — — σ -модели 180
- — — сильных взаимодействиях 182
- — и идея техницвета 464—466
- — — явление *Хиггса* 281
- — полюс *Козута—Сасскинда* и аксиальная проблема $U(1)$ 567—570
- «Головастик» диаграмма 217, 218
- и безмассовые голдстоуновские бозоны 220—222
- — сдвиг вакуумного среднего 217—220
- Гомотопические классы 551
- — $S^1 \rightarrow S^1$ 551—553
- — $S^2 \rightarrow S^2$ 540, 551
- — $S^3 \rightarrow S^3$ 553—554
- Грассмана* алгебра 34—40, 316
- Грина* функция 16—19, 23—30, 224
- — асимптотическое поведение 90—95
- — евклидова 26—28
- — одночастично-неприводимая 42, 48
- — связная 17, 29, 31, 48
- — связь перенормированной и перенормированной функций 52, 204
- — составных операторов 78—82, 87, 91
- — усеченная 19, 48
- Гросса—Льюеллина-Смита* правило сумм 251
- Группа 108, 110; *см. также* Подгруппа, Представление
- абелева 106, 156
- вращений 106, 111—112
- групповой параметр 108, 110
- *Ли* 107—108, 500
- полупростая 106, 272, 497, 500, 543, 547
- прямое произведение 106
- ранг 110, 500—501
- унитарная 106
- d^{abc} символ 195, 498
- Дашена* правило сумм 200
- Двойной β -распад безнейтринный 477
- Действие 11
- решеточной теории поля 375—381
- самодуальной евклидовой калибровочной теории 556
- *Янга—Миллса* теории в ковариантных калибровках 299

- Джорджи—Глэшоу модель 394, 496—523, 539—549
- Диагонализация массовых матриц 411—413
- Дикварк 511
- Динамическая масса фермиона 201, 470
- Динамическое нарушение симметрии 461—472; *см. также* Составная хиггсовская частица, Техницвет
- Дирака монополю 524
- — и монополю *т'Хофта—Полякова* 542—545
- — струна 528—532, 544
- — условие квантования 526—532, 542
- — формулировка *Бу—Янга* 532
- Дисперсионное соотношение 191, 347
- Дрелла—Яна процесс в кварк-партонной модели 255—256
- — — — КХД в рамках теории возмущений 371
- — — — процессах рождения бозонов *W* и *Z* 453
- Дуальное поле 525, 555
- Дуальности преобразование уравнения *Максвелла* 525
- Евклидова теория поля калибровочная 554
- — — скалярная 375—376
- — — фермионная 377—378
- Евклидовы γ -матрицы 378
- e^+ e^- -аннигиляция, полное адронное сечение 253—254, 335
- — — — поправки в КХД 342—343
- eD -рассеяние, асимметрия 426
- Заряда квантование 399
- — в ТВО 496—498
- — магнитного монополя 526—527, 543
- Зарядовое сопряжение 475, 495, 515—516, 519—520; *см. также* Майорановская масса
- Иерархий калибровочных проблема 505
- Изоспин 139—140, 156—157; *см. также* $SU(2)$ -симметрия
- и киральная симметрия 152—153, 200
- нарушение в сильных взаимодействиях 198—199
- — — электромагнитных взаимодействиях 140, 199
- структура σ -члена 188—189
- — πN -амплитуды 189—190
- Импульсное правило сумм 251—252, 355—357
- Инстантоны 336, 550—571; *см. также* Аксиальная проблема $U(1)$, Аксион, Аномалии, Гомотопические классы, θ -вакуум
- вакуумное туннелирование 560, 563—564
- размер 557
- формализм функционального интегрирования 560, 563—564

Инфракрасные расходимости 364—365

Кабиббо—Кобаяси—Маскава (ККМ) матрица 428; *см. также Кобаяси—Маскава* матрица смешивания

— угол 165, 247, 388, 410, 427, 429; *см. также Кобаяси—Маскава* матрица смешивания

— универсальность 429

Казимира оператор 111, 470

Калибровка аксиальная 287, 294—297, 312—313, 366—367

— — сумма по поляризациям векторных частиц 312—313

— ковариантная 297—303

— — абелев случай 303—308

— — в стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории 485, 586—592

— — *Ландау* 232, 303

— — *Лоренца* 288, 29Э

— — неабелев случай 308

— перенормируемая 286, 304

— радиационная 287

— *т'Хофта—Фейнмана* 303, 310, 320, 435, 492

— унитарная 280—281, 283—284, 304, 403—404, 492

— условие фиксации 281, 287, 292, 298—299

— — — отсутствие в решеточных калибровочных теориях 383

Калибровочная константа связи 266, 268, 271—272; *см. также* Константа связи, Электрический заряд

Калибровочное взаимодействие с духами 302

— — — фермионами 267, 303

— поле 266, 269, 271, 276—277

— — топологические свойства: *см.* Инстантоны, Монополь магнитный

— преобразование 266, 268—271, 554

— — сингулярное 528—530

— самодействие 271, 302

Калибровочно-ковариантная производная 266

Калибровочные симметрии (взаимодействия) абелевы 265

— — неабелевы (*Янга—Милса*) 267

— — собственные состояния 410, 427, 473, 496, 517; *см. также* Массовые собственные состояния

— теории 272, 273; *см. также* *Вайнберга—Салама* теория, Великое объединение, Евклидова теория поля калибровочная, Квантовая ароматодинамика, КХД, КЭД, Решеточная теория поля калибровочная, Чистая калибровка

Калибровочный параметр ξ 299, 301, 305—308, 328—329, 584—589

Каллана — Гросса соотношение 244—245

— *Симанзика* уравнение 87—95

Каноническая размерность 73, 77, 95; *см. также* Аномальная размерность

- Канонические коммутационные соотношения 12, 287
- Канонического квантования формализм 11—20, 294
- Квантовая ароматодинамика 387—493
- хромодинамика: *см.* КХД
 - электродинамика: *см.* КЭД
- Квантование, канонический формализм 11
- — — решеточная теория 374—375
 - — — скалярная теория 12—20, 203
 - — — фермионная теория 33
 - теорий с магнитным монополюм 526—532
 - формализм функционального интегрирования 11, 577—582
 - — — — калибровочная теория 287—300
 - — — — решеточная теория 374—377
 - — — — скалярная теория 20—32
 - — — — фермионная теория 34—40
- Кварки b , t 149, 410
- валентные 248
 - морские 248
 - c 148—149
 - u , d , s 143—147, 149
- Кварковые массы m_c , m_b 149; *см. также* Киральная симметрия
- — m_u , m_d , m_s 199—200
 - — массовые соотношения в $SU(5)$ -модели 520—522
 - — нарушение киральной симметрии 152, 192—201
 - — составляющих и токовых кварков 200
 - — CP -проблема в сильных взаимодействиях 570—571
 - модели; *см. также* Массовая формула Гелл-Манна—Окубо ω - ϕ -смешивание, Цвейга правило
 - — восьмеричный путь и $SU(3)$ -симметрия ароматов 140—147
 - — квантовые числа 143
 - — киральная симметрия 158—162; *см. также* Аксиальная проблема
 - — трудности 149—150
- Кварконий 149; *см. также* Частицы J/ψ , Γ
- Кинк 534 Киношиты—Ли—Науенберга теорема 365
- Киральная симметрия 152—201, 388, 464, 564—565
- — алгебра 160, 165
 - — нарушение 152, 181—183, 192—201
- K^0 — K^0 -система (смешивание) 431 — 442; *см. также* ГИМ механизм, CP -инвариантность, Очарование
- разность масс K_L — K_S 426, 433, 437—438
 - CP -параметры 433—435, 440—442
- Кобаяси — Маскава (КМ) матрица смешивания; *см. также* Кабиббо угол,

Смешивание

— — — в распадах W -бозона 446—449

— — — ГИМ механизм 437—440

— — — смешивание лептонов 415, 473

— — — ТВО (гипотеза родства) 520

— — — теория CP-нарушения 415, 343—435, 440—444

Ковариантная производная 266—269

— — в $SU(2) \times U(1)$ 401

— — — $SU(5)$ 507

— — как связность 273—274

Ковариантные калибровки: см. Калибровка ковариантная

Когута — Сасскинда полюс 569—570

Коллинеарные расходимости 365

Конденсат: см. Вакуумное среднее

Константа g_A 183—184, 191

— связи 49, 66, 100; см. также Асимптотическая свобода, Калибровочное взаимодействие, Пион-нуклонное взаимодействие

— — зависимость от точки вычитания 100

— — перенормировка 48—49, 328

— — размерность и перенормируемость 72

— — слияние констант связи 505—510

— — эффективная (бегущая) 93, 100—103, 505—510

Контрчлены, БПХ-перенормировки 53—59, 73—76

— калибровочные теории 308—309

— отсутствие перенормировки массы голдстоуновских бозонов 220—222

— при мягком нарушении симметрии 222—223

— составных операторов 80—82

— схема минимальных вычитаний 96—99

Конфайнмент 151, 321, 371—373

— вильсоновская петля 381—383

— и асимптотическая свобода 371—373, 386

— критерии 381—383

— линейно растущий потенциал 372, 383—385

Космология; см. Бариионное число, Асимметрия Вселенной, Нейтрино масса, космологическое ограничение

— замкнутая, открытая, плоская Вселенная 478

— критическая плотность ρ_c 478

— *Хаббла* закон и постоянная 478

Коулмена — Вайнберга механизм: см. Спонтанное нарушение симметрии за счет радиационных поправок

КХД 151, 321; см. также Глюоны, Кварки

— вакуум 372, 492

- глобальные симметрии 152, 201, 339; *см. также* Киральная симметрия
- лагранжиан 335—336
- масштабный параметр 341, 386, 464, 510
- операторное разложение и ренорм-групповые расчеты 335—358; *см. также* e^+ -аннигиляция, Лептон-нуклонное рассеяние, Скейлинг
- партонная картина 246, 252, 359; *см. также* *Альтарелли—Паризи* уравнение
- расчеты по теории возмущений 358—371; *см. также* Лептон-нуклонное рассеяние
- КЭД как прототип калибровочной теории 265
- квантование и трудности квантования 287
- программа перенормировок 42
- ренормгруппа 83
- — β -функция 326—327
- — экранировка заряда 322
- тождества *Уорда* аксиально-векторные (аномалии) 207—214
- — — векторные 208, 308—309, 313
- Ландау полюс 104
- Лептокварк 511
- Лептон-нуклонное рассеяние; *см. также* Нейтрино-нуклонное рассеяние
- — асимметрия eD -рассеяния 426
- — бьёркеновский скейлинг и кварк-партонная модель 235—252
- — — — *Альтарелли — Паризи*-уравнение 359—361
- — — — операторное разложение и уравнение ренормгруппы 343—358
- — — — по теории возмущений 364—371
- — правила сумм: *см. Адлера* правило сумм, *Гросса — Льюеллина-Смита* правило сумм, Импульсное правило сумм
- — неупругое 103, 162—170, 235—252, 262, 343—358, 364—371, 425
- — сингулярности на световом конусе в свободной теории 262—264
- — структура слабых нейтральных токов 424—426
- — упругое 238—239
- Лептонное число 409, 477, 482
- Лептонные углы смешивания 415,475; *см. также* Нейтрино масса, Нейтринные осцилляции
- Лептонный слабый заряженный ток 165, 241, 388
- Лестничные диаграммы 368
- Ли* алгебра 108, 111, 155
- группа 107—108, 500
- Линде—Вайнберга* ограничение на массу хиггсовской частицы 455—458
- Линейно растущий потенциал 372, 383, 385
- Локальные симметрии: *см.* Калибровочные симметрии
- Магнитный момент калибровочной векторной частицы 332
- ток 525

Майорановская масса 475—478; *см. также* Двойной β -распад безнейтринный, Зарядовое сопряжение, Нейтрино масса, Нейтринные осцилляции
Масса: *см.* Векторных мезонов массы, Кварковые массы, Нейтрино масса, Псевдоскалярных мезонов м-ассы, Фермионная масса, Хиггсовская частица
— перенормировка 41, 46—47, 520—522
— — для голдстоуновского бозона 220—222
— эффективная (бегущая) 99, 520—522
Массовая вставка 438; *см. также* ГИМ механизм
Массовые сингулярности: *см. Коллинеарные расходимости*
— собственные состояния 410, 427, 472, 496, 518—520
Мейсснера эффект 279, 372
Минимальное калибровочное взаимодействие 267—268
Монополь магнитный 524; *см. также* Великое объединение, Дирака монополь, Солитоны, Топологический закон сохранения, *т'Хофта—Полякова* монополь
— — и квантование заряда 526, 542
— — — угловой момент 527—528, 545
Мультипликативная перенормируемость 52, 81, 90, 95
Мюонное число 416, 472
Мягкие пионы, случай двух пионов 187—192, 194
— — — одного пиона 183—186
Мягкое нарушение симметрии 222
— — — и перенормируемость 222—223
— — — спонтанное 223
Наиболее притягивающий скалярный канал (НПСК) 470
Намбу—Голдстоуна бозон; *см.* Голдстоуновский бозон
Неинтегрируемый фазовый фактор 379
Неисключительный импульс 90
Нейтринные осцилляции; *см.* Нейтрино масса, Солнечного нейтрино загадка
— — длина осцилляции 473
— — нейтрино-антинейтринные осцилляции 484
— — осцилляции ароматов 472—475
Нейтрино масса 415, 472—485; *см. также* Двойной β -распад безнейтринный, Нейтринные осцилляции
— — в модели $SU(2) \times U(1)$ 482—485
— — — ТВО 482
— — дираковского и майорановского типов 475—477
— — за счет радиационных поправок 481
— — космологическое ограничение 478—480
Нейтрино-нуклонное рассеяние, бьёр-кеновский скейлинг и кварк-пар-тонная модель 240—252
— — проверка алгебры токов (правило сумм *Адлера*) 166—170

- — слабые нейтральные токи (угол *Вайнберга*) 425—426
- Нейтрино-электронное рассеяние 390, 407, 420—424
- Нелептонные слабые процессы 389, 442
- Неперенормируемые взаимодействия 73
- Непертурбативные эффекты, инстантоны 550
- — решеточная теория поля 371
- — солитоны 532
- Несостоявшийся голдстоуновский бозон 281, 283, 286, 304—308, 402, 485—492
- Нётер теорема 154
- Низкоэнергетические теоремы в случае двух мягких пионов 187—192
- — — — одного мягкого пиона 183—186
- Нормировки точка (массовый масштабный параметр) в схеме вычитания в импульсной точке 83—87
- — — — размерной регуляризации 95
- $O(4)$ -симметрия 405, 556; *см. также* $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия
- Одночастично-неприводимые диаграммы 42
- функции *Грина* 42, 79
- — — ω — ϕ -смешивание 146—147
- — — идеальное смешивание 147
- Операторное разложение 343—355
- — на световом конусе 344—346
- — факторизация сингулярностей 343
- Очарование (квантовое число) 147—148, 388; *см. также* ГИМ механизм
- Парамагнитные свойства вакуума теории *Янга—Миллса* 330—333; *см. также*
 - Асимптотическая свобода
- Партоны; *см. также* Глюоны, Кварки, Партонная модель
- как точечноподобные составляющие адрона 239, 243, 246
- море 247—248
- спин заряженных партонов 244—245
- Партонная модель; *см. также* Глубоконеупругое рассеяние, КХД, Партоны,
 - Скейлинг
- — *Дрелла—Яна* процес 255—256
- — e^+e^- -аннигиляция 262—264
- — лептоп-нуклонное рассеяние 243—252
- — функции распределения 244—250
- Парциальная волна 390, 395—396
- Паскоса—Вольфенштейна* соотношение 426
- Переключение 469—472
- Перенормировки; *см. также* Аномалии, Перенормируемость, Ренормализационная группа, Теория возмущений
- в теории $\lambda\phi^4$ 42—59
- — — со спонтанным нарушением симметрии 217—234

- — — *Янга—Миллса* 327—329
- константа 53, 309
- — вершины Z_λ 49
- — волновой функции (поля) Z_ϕ 47
- — заряда 49, 328
- — Z_a 328
- — Z_g 328
- масс 47
- — голдстоуновских бозонов 220— 222
- программа БПХ-перенормировок 52—59
- — стандартных перенормировок 52—54
- составных операторов 78—82
- физическая картина 41—42
- Перенормируемость 59, 71, 76
- векторных теорий 76—78, 303— 304, 392
- мультипликативная 52, 81
- мягкое нарушение симметрии 222—223
- перенормируемые взаимодействия 73
- перенормируемые взаимодействия 72
- суперперенормируемые взаимодействия 72
- Петлевое разложение 226—228
- — в модели $\lambda\phi^4$ 228—232
- — — скалярной КЭД 232—234
- — как разложение по постоянной *Планка* 227
- Пион-нуклонная (π, N) амплитуда: *см. Адлера* условие согласованности, *Адлера—Вайсбергера* соотношение, *Изоспин*, σ -член
- Пион-нуклонное взаимодействие 183— 184, 188—198
- Подгруппа 106
- инвариантная 106
- Поколение 392, 409—418, 495, 518; *см. также* Родства гипотеза, Удвоения фермионных поколений проблема
- подавление взаимодействий между поколениями 430, 517—519
- Поляризации векторных частиц 312, 395
- Понтрягина* индекс: *см. Топологический индекс*
- Постоянная тонкой структуры 446, 507
- Правое нейтрино 483—485
- Представление 107
- базисные векторы НО, 113
- векторное 125, 134
- вещественное 109, 117
- графическое изображение 114— 118, 121—124
- комплексное 469—470, 501; *см. также* Представление вещественное

- неприводимое 107, 113, 127
- присоединенное 109, 138, 499, 501
- произведение представлений 114— 118, 131 — 133
- размерность 107, 113, 122, ISO-IS!
- сопряженное 109, 125, 133—134, 143, 495
- фундаментальное (определяющее) 107, 125, 134, 495
- Проблема массы η -мезона 565—569; *см. также* Аксиальная проблема
- Производящий функционал 27—32, 34, 40, 224, 288, 294—301, 317; *см. также*
 - Вакуум—вакуум амплитуда перехода
- Промежуточный векторный бозон 164, 390
 - — — W 164, 390, 394—396, 404—406, 435—436, 444—453
 - — — Z 396, 404—409, 419—424, 444—453
- Пропагатор 578—588; *см. также* Фейнмана правила
 - в $R\xi$ -калибровке 305
 - векторного поля 76—77, 301, 304, 391
 - духового поля 301
 - несостоявшегося голдстоуновского бозона 301
 - скалярного поля 14, 18—19, 43— 44, 47, 85, 204, 257—258
 - фермионного поля 33, 259, 303
 - хиггсовского скаляра 305
- Протона распад 511—514
 - — амплитуда в $SU(5)$ -теории 512
- Псевдоголдстоуновский бозон 285
 - — в теориях техницвета 466, 468, 471
- Псевдоскалярных мезонов массы: *см.:* Гелл-Манна—Окубо массовая формула, Голдстоуновский бозон, Дашена правило сумм, Кварковые массы, Проблема массы η -мезона, σ -член, Токов алгебра
- Псевдочастицы 550; *см. также* Ин-стантоны
- Размерная трансмутация 232—233
- Распад $\eta \rightarrow 3\pi$ 199, 567; *см. также.* Аксиальная проблема $U(1)$, Изоспин, нарушение в сильных взаимодействиях
 - $\mu \rightarrow e\gamma$ 416, 472, 485—493
 - $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 215, 217
 - — аномалии 216
 - — цвет 216, 335
- Расходимости 42, 45
 - вложенные 59
 - индекс 72, 74, 223
 - инфракрасные 364—365
 - квадратичные 46, 55, 64, 505
 - коллинеарные 365
 - линейные 46, 210

- логарифмические 44—45, 210
- метод подсчета степеней 70—71
- одновершинно-приводимые 59
- перекрывающиеся 59
- примитивные 45, 58
- условная степень 54, 57, 72, 91
- Расширенный техницвет 467—472
- Регуляризация 45, 59
 - ковариантная 60—67
 - — схема вычитания в импульсной точке 83—85
 - размерная 67—70, 96, 308, 320
 - — схема минимальных вычитаний 96—99
- Ренормализационная группа; *см. также* Аномальная размерность, Константа связи эффективная (бегущая)
 - — поправки КХД. к полному сечению e^+e^- -аннигиляции 342—343
 - — — — сечению IN -рассеяния 349—350
 - — $SU(5)$ ТВО, амплитуда распада протона 513
 - — — — связь между массами лептонов и кварков 520—522
 - — — — слияние констант связи 507—508
 - —, суммирование главных логарифмов 101, 363—364
 - — β -функция 88—89, 95
 - — уравнения в КЭД 326—327
 - — — — КХД 329, 333, 340—341
 - — — — теории $\lambda\phi^4$ 89—90, 99, 324—325
 - — — — с $SU(3)$ -симметрией 508—509
 - — — — — юкавским взаимодействием 325—326
 - — γ -функции 88—89, 95, 98
 - — — в КХД 353, 357—358
 - — — моменты функций *Альтарелли—Паризи* 361
 - — — *Каллана—Симанзика* 87—90
 - — — — асимптотические решения 92—95, 99, 350—353
 - — — другие формы 93, 350, 353
 - — физические основания 83—87
- Решеточная теория поля 373—381
 - — — вычисления методом Монте-Карло 374, 385
 - — — закон периметра 385
 - — — — площади 383, 385
 - — — калибровочная 379—386
 - — — плакет 380, 384
 - — — реберная переменная 380
 - — — скалярная 375—377
 - — — фермионная 377—378

ρ параметр 405, 419, 453
— — экспериментальное значение 445, 483
Родства гипотеза 518—520
Самодуальное поле 556
Световой конус, сингулярности 256—264, 344—346
σ-модель 179—181, 464
σ-член 188, 190, 192
Сильной связи разложение 374, 383—386
Симметричный фактор 18, 20, 44, 222, 229, 311, 583; *см. также* Фейнмана правила
Симметрия; *см. также* Барионное число, Глобальные симметрии, *CP-инвариантность*, Калибровочные симметрии, Киральная симметрия, Лептонное число, Спонтанное нарушение симметрии, *Уорда* тождества
— и вырождение масс 138—139, 152—155, 171
— — перенормировки 202—203
— — теория групп 105
Сингулярности полей 257, 343—345
— токов 259—260, 346, 351 Скейлинг 235, 239—243, 256, 321, 354, 358
— процесс *Дрелла—Яка* 255—256
— e+e-аннигиляция 252—254, 261—262
— лептон-нуклонный (бьёркеновский) 239—252, 256—267, 262—264, 354
— — переменные *x*, *y* 239—240
— — функции 241—242
— нарушение 355, 357—358, 359
— сингулярности на световом конусе 257
Слабые радиационные поправки к лагранжиану КХД 339—340
— собственные состояния: *см.* Калибровочные симметрии
— углы смешивания: *см.* *Кабиббо* угол, *Вайнберга* угол, *Кобаяси—Маскава* матрица смешивания, Лептонные углы смешивания Слабый гиперзаряд 398—401, 497, 507 Слабых взаимодействий теории, *V—A* 164, 241, 389—390, 406, 408, 419
— — — *Джорджи* — *Глэшоу* $SO(3)$ 394
— — — с промежуточным векторным бозоном 390—391
— — — стандартная $SU(2) \times U(1)$: *см.* *Вайнберга—Салама* теория
— — — *Ферми* 387
Славнова—Тейлора тождества 308—320
Смешивание в кварковых взаимодействиях 413, 427—428; *см. также* *Кабиббо* угол, *Кобаяси—Маскава* матрица смешивания
— — лептонных взаимодействиях 415, 473
— нейтральных векторных бозонов в электрослабой теории $SU(2) \times U(1)$: *см.* *Вайнберга* угол
— составных операторов при перенормировке 81—82, 355—356
СНС: *см.* Спонтанное нарушение симметрии

$SO(2)$ -симметрия; см. $U(1)$ -симметрия
 $SO(3)$ -симметрия; см. $SU(2)$ -симметрия
 $SO(4)$ -симметрия; см. $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия
Солитоны 532—539, 542—545
— в калибровочной теории со СНС (монополь *т'Хофта* — *Полякова*) 539—542
— — теории $\lambda\phi^4$ в двумерном пространстве 532—537
— — — — — четырехмерном пространстве 537—539
Солнечных нейтрино загадка 472
Составная хиггсовская частица 462—463
Составные полевые операторы 78—82, 91, 259
— — — смешивание при перенормировке 81—82, 353—358
Сохранение $B-L$ 482, 513, 522, 523
Сохранения векторного тока гипотеза 165
Спиральность 242, 245, 396
Спонтанное нарушение симметрии (СНС) 152, 171-181, 278, 410; см. также
Вакуумное среднее, *Голдстоуна* теорема, Киральная симметрия, *Хиггса*
явление
— — — за счет радиационных поправок 217—223, 304
— — — и перенормировки 217—223, 304
— — — — солитоны 537
— — — механизм 284
— — — фермионная масса 181, 411
469, 520 CP -инвариантность, нарушение 414, 415
— — в сильных взаимодействиях 570, 571
— — жесткое и мягкое 444, 571
— — фазы 410, 414, 415, 511
Стандартная электрослабая теория; см. *Вайнберга—Салама* теория
Степень отображения: см. Топологический индекс
Струи 254, 371
Струна дираковская 528—532, 544
Струнная модель адронов 372
Струны натяжение 372—383, 386
Структурная функция 167, 237, 241, 248—252, 351; см. также *Партонная модель*,
Скейлинг, *Формфактор*
— — моменты 346—349, 354, 358, 360—361
— — несинглетные комбинации по ароматам 351, 357—358, 361
— — синглетные комбинации по ароматам 351, 355—357, 361
— — спиральность 242, 245
 $SU(2)$ -симметрия 110—118
— изоспиновая симметрия ароматов 139—140
— калибровочные теории 267
— — — *Джорджи-Глэшоу* модель 394, 539

- — — инстантоны 554
- — — квантование 299—303
- — — и преобразование БРС 315
- $SU(2) \times U(1)$ -симметрия 106, 392—394
- $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия; *см. также* Киральная симметрия
- нарушение до $SU(2)$ и $\rho = 1$ 405, 465
- σ -модель, СНС и теорема *Голдстоуна* 179
- $SU(3)$ -симметрия 118—124
- восьмеричный путь, симметрия ароматов 140—149
- декаплет барионов 142—146
- нарушение 145, 197
- октеты мезонов и барионов 141— 142, 145—147
- теория свободных кварков 159
- трансформационные свойства слабых токов 165
- цветовая симметрия 150—151
- — — лагранжиан КХД 335
- $SU(3) \times SU(3)$ -симметрия, алгебра зарядов 157
- — токов 161
- $SU(4)$ -симметрия 124
- переключение 469—472
- симметрия ароматов 149
- соотношения между массами леп-тонов и кварков в $SU(5)$ -модели 520
- $SU(5)$ -симметрия 110
- переключение 469—472
- ТВО 495—523
- $SU(n)$ -симметрия 110, 124—138
- Судакова* переменные 366, 367
- Суммирование главных логарифмов 101, 363—364, 371
- Суперсимметрия 334, 505
- Сходимость фейнмановских интегралов, теорема 56
- τ -лептон 410
- Твист 345, 351, 355
- ТВО: *см.* Великое объединение
- Тензорные представления группы $SU(n)$ 124—138, 494
- θ -вакуум 562—564, 568—571; *см. также* Аксиальная проблема $U(1)$, CP -инвариантность
- Теория возмущений; *см. также* *Фейнмана* правила, Непертурбативные эффекты, Перенормировки
- — калибровочные теории 300
- — канонический формализм 15—18
- — — — представление взаимодействия 15
- — — — U -матрица 15—16

- — модель $\lambda\phi^4$ 29—32
- Техницвет 461—472
- масштабный параметр $\Lambda_{\text{пл}}$ 467
- Токи аксиально-векторные 207—208, 564—566
- аномалии 564—566
- коммутатор 157, 165, 237, 261
- симметрия 155, 162
- слабые 164—165
- — заряженные 240—241, 388, 392—393, 406
- — меняющие странность 388, 417, 427—428, 435—440
- — нейтральные 388, 394
- — сохраняющие аромат 417, 419—426
- топологические 536
- электромагнитные 237, 260 Токов взаимодействие: см. $V-A$ -взаимодействие
- сохранение 155, 174, 203—205, 208
- Топологический закон сохранения 535—537
- индекс 552—553, 555, 559—564
- (3, 3*) \oplus (3*, 3)-теория 194; см. также Киральная симметрия, нарушение *t'Хофта—Полякова* монополю 524, 539—549; см. также Монополю магнитный, Солитоны
- — взаимосвязь пространственной и внутренней симметрии 545
- — как монополю *Дирака* 542—545
- — $SU(3)$ 539—546
- — $SU(5)$ 547—549
- — — катализ распада протона 549
- — — хромомагнитный заряд 548—549
- — условие квантования 542—543, 547
- Угловой момент и монополю 527—528, 545
- Удвоения фермионных поколений проблема 418, 495; см. также Поколение
- Универсальность *Кабиббо* 420, 429
- калибровочного взаимодействия 267, 271
- Унитарность абелевой калибровочной теории 304, 307
- и перенормируемость в теории слабых взаимодействий 390, 394—398
- — тождества *Уорда* 309—315, 320
- Уорда* тождества 187, 205, 308—309
- — в неабелевых калибровочных теориях (тождества *Славнова—Тейлора*) 313—320
- — для аксиально-векторного тока в КЭД 207—214
- — — векторного тока в $\lambda\phi^4$ 203—207
- — и унитарность 309—315
- f^{abc} символ 119, 159—160, 195
- Фаддеева—Попова* анзац 294

- — детерминант 293, 297—298
- — духи 298, 301—303, 310—315
- — — отсутствие в абелевом случае 296
- — — — аксиальной калибровке 294—295, 315
- — — петли 303, 311, 328
- — — преобразование БРС 315
- — — тождества *Уорда* 313, 319
- — — унитарность 315
- Фазовый переход 374, 386
- Факторизация сингулярностей 341 — 343, 363—364, 359; *см. также* Операторное разложение
- Фейнмана* правила 11—12, 33, 577—592
 - — в абелевой теории в калибровке $R\xi$ 304—306
 - — — ковариантных калибровках 299—303, 584—586
 - — — КЭД 584
 - — — модели $\lambda\phi^4$ 20, 217—220, 577—580, 584
 - — — скалярной КЭД 585
 - — — теории *Вайнберга—Салама* в калибровке $R\xi$ 586
 - — — формализме функционального интегрирования 577—582
 - — для фермионных петель 33, 40
- Фейнмановские параметры 61
- Ферми* константа 164, 241, 387, 391, 406, 429
 - теория β -распада 387
- Фермионная масса; *см. также* Киральная симметрия, Кварковые массы
 - — дираковского и майорановско-го типов 475—478
 - — в минимальной $SU(5)$ -модели 520—522
 - — — модели *Вайнберга—Салама* 404, 411, 454
 - — — теории со спонтанным нарушением симметрии 181
 - — — теориях техницвета 466—471
 - — массовая матрица 411—413; *см. также* Биунитарное преобразование, Массовые собственные состояния
- Ферромагнетизм 172—173
- Фиксированная точка 102; *см. также* Ренормализационная группа
- Фирца* преобразования 407, 439, 512, 573
- Формфактор 183—184, 239; *см. также* Структурная функция
- Функциональное интегрирование 11, 20, 33
 - — калибровочных теорий 287—308
 - — квантование 20—28
 - — скалярных теорий 28—32
 - — фермионных теорий 33—40
- Хиггса* механизм нарушения симметрии 401
 - поля 454

- явление 279—286
- — в абелевом случае 279—281
- — — модели $SU(3)$ 539—540
- — — неабелевом случае 282—286
- — — ТВО $SU(5)$ 501—505
- — — *теории Вайнберга—Салама* 401—405
- Хиггсовская частица 283, 304, 453, 458—460
- — — в теории *Вайнберга—Салама* 404, 409, 453—460
- — взаимодействие с калибровочными бозонами 448, 455
- — — фермионами 402—404, 411, 454
- — заряженная 460
- — масса 404, 455—458
- — рождение 458—460
- — составная (модели техницвета) 462—472
- — триплет 483, 539, 540
- Цвейга* правило 147—148, 197 Цвет 150—151, 335, 460
- дробные заряды кварков 498
- магнитные заряды монополей в ТВО 548
- полное адронное сечение e^+e^- -аннигиляции 254
- распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 216
- сокращение аномалий 401
- Цветовая трубка 372
- Частица J/ψ 148; *см. также* Очарование
- Г 149; *см. также* Кварки
- Частичное сохранение аксиально-векторного тока (ЧСАТ) 181—189, 192—193
- Четырехфермионного взаимодействия эффективный лагранжиан: *см.* Токов взаимодействие
- Четности несохранение 388, 389
- — в атомной физике 426
- Чистая калибровка 555
- Швингеровские члены 161, 188
- Шредингера* представление 15, 21
- Эксперименты по нарушению четности в атомах 426
- Электрический дипольный момент 442—443, 570; *см. также* CP-инвариантность
- заряд: *см.* Заряда квантование
- в электрослабой теории 392—394, 398—401, 407
- как калибровочная константа 266
- Энергии-импульса тензор 355—357
- Эффективного потенциала формализм 223—226
- Юкавское взаимодействие 402—403, 411, 454
- — β -функция 325—326, 334
- — глобальные симметрии в электрослабой теории 409

— — — — — минимальной $SU(5)$ -модели 522—523

— — — — — CP 444

— — расширенные модели техницвета 467—468

— — теория *Вайнберга—Салама* 402—403, 411, 454

Юнга таблица 127—134, 143—144; *см. также* Тензорные представления группы $SU(n)$

— — длина крючка 131

— — основная теорема 130

— — произведение представлений 131—133

— — размерность неприводимого представления 130—131

— — решеточная перестановка 132—133

— — сопряженные представления 133—134

— — стандартная 129

Якоби тождество 109

Янга — *Миллса* поля: *см.* Калибровочные симметрии неабелевы

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга американских физиков Т.-П. Ченга и Л.-Ф. Ли, русский перевод которой предлагается читателю, является введением в современную теорию элементарных частиц и их взаимодействий. Элементарными составляющими материи в настоящее время считаются кварки и лептоны. Мы говорим «в настоящее время», так как не исключено, что в будущем будет открыта сложная структура кварков и лептонов и они перейдут в разряд «составных» частиц. Открытие сложной структуры у объектов, считавшихся ранее элементарными, в физике происходило неоднократно. Последнее событие такого рода — установление кварковой структуры адронов. Однако, хотя возможность существования сложной структуры у кварков и лептонов рассматривается теоретиками вполне серьезно, экспериментальных оснований у этой гипотезы пока нет.

Принцип локальной калибровочной инвариантности является одной из основ теории взаимодействия частиц. Можно сказать, что осознание основополагающей роли принципа локальной калибровочной инвариантности предопределило бурное развитие теории элементарных частиц в последнее двадцатилетие. Создана и убедительно подтверждена в экспериментах единая теория слабых и электромагнитных взаимодействий; создана квантовая хромодинамика, играющая роль главного претендента на роль теории сильных взаимодействий. Убеждение в том, что создание калибровочной теории, объединяющей все взаимодействия, является первоочередной задачей и ее решение может быть найдено в обозримом будущем, разделяют многие исследователи.

Бурное развитие теории элементарных частиц неизбежно привело к необходимости создания учебников, содержащих наряду со стандартным набором сведений по квантовой теории поля (каноническое квантование, диаграммная техника, перенормировки и т. д.) также и методы теории неабелевых калибровочных полей, такие, как функциональное (континуальное) интегрирование, размерная регуляризация. Настоящая книга является руководством такого типа. При отборе материала авторы стремились изложить в первую очередь те разделы квантовой теории полей, которые уже прочно вошли в арсенал физики

элементарных частиц. Книга иллюстрируется многочисленными примерами и конкретными расчетами.

Описание структуры книги, помогающее читателю ориентироваться при чтении, дано в предисловии авторов. С точки зрения советской системы подготовки специалистов книга в первую очередь предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области физики элементарных частиц.

В переводе добавлены ссылки на литературу (они отмечены звездочкой). Это потребовалось, в основном, чтобы отразить важный вклад, внесенный советскими физиками в развитие теории элементарных частиц (например, открытие цветových состояний, разработка аппарата ренормализационной группы и др.).

Перевод выполнен С. И. Азаковым (предисловие; гл. 5—16 и приложения) и Ю. А. Кубышиным (гл. 1—4).

Р. М. Мир-Касимов

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десять лет в физике элементарных частиц был достигнут значительный прогресс. В настоящее время мы впервые располагаем общей теорией взаимодействия частиц. Есть основания полагать, что она дает полное и правильное описание всей негравитационной физики. Эта теория основана на принципе калибровочной симметрии. Сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия являются калибровочными взаимодействиями. Вряд ли можно переоценить важность знания калибровочной теории для всех, кто интересуется современной физикой высоких энергий. Независимо от того, окажутся ли в конечном итоге правильными отдельные ее детали, именно в рамках этой теории в обозримом будущем будут интерпретироваться новые теоретические и экспериментальные достижения.

Цель настоящей книги — ознакомить студента и исследователя с некоторыми основными идеями калибровочных теорий и с их приложениями к физике элементарных частиц. Всюду, где это возможно, мы избегаем громоздких математических доказательств, основываясь на эвристических соображениях и иллюстрируя характерными примерами. При выводе различных формул мы приводим все промежуточные выкладки, обычно отсутствующие в более специализированной литературе. Некоторые хорошо известные результаты выводятся заново способами, более доступными для неспециалистов.

Книга не претендует на роль исчерпывающего обзора. Однако она содержит все сведения, необходимые каждому, кто серьезно решил специализироваться в области теории элементарных частиц. Мы надеемся также, что отдельные части книги окажутся полезными физикам-экспериментаторам, интересующимся общими аспектами калибровочной теории.

Книга основана главным образом на записях лекций, которые один из нас (Л. Л.) читал аспирантам на протяжении последних шести лет в Университете Карнеги — Меллона и в 1981 г. на Летней школе по физике частиц в Хэфэе (Китай) [269]. К ним добавлен материал, который обсуждался на семинарах, руководимых вторым автором (Ч. Т.), в Университете штата Миннесота и в других местах. Все эти записи были дополнены, приведены в порядок, их рамки были значительно

расширены. Мы предполагаем, что читатель имеет некоторое представление о квантовой теории поля и в определенной степени знаком с феноменологией физики высоких энергий. Практически эта книга предназначена для аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики. Мы также надеемся, что некоторые исследователи будут использовать ее в качестве удобного введения в те области, которые они хотят изучить.

Современная теория калибровочных полей может быть описана как «радикально консервативная теория» в смысле Уилера (см. [424]), а именно несколько фундаментальных принципов экстраполируются настолько, насколько это возможно. При этом допускается наличие некоторых парадоксов, которые не удается разрешить. Здесь в качестве аксиом принимаются принципы *локальности*, *причинности* и *перенормируемости*. Обнаруживается, что определенный класс релятивистских квантовых теорий поля, а именно калибровочные теории, обладают необычайным разнообразием свойств (явление Хиггса, асимптотическая свобода, удержание кварков, аномалии и т. д.), необходимых для понимания природы взаимодействий элементарных частиц. При этом не возникает необходимости пересмотра основных принципов теории относительности и квантовой механики. Таким образом, необходимой основой для изучения калибровочной теории является традиционный курс квантовой механики повышенного типа и квантовой теории поля, в особенности квантовой электродинамики (КЭД) — прототипа калибровочной теории.

Книга состоит из двух частей. Часть I содержит материал, который можно охарактеризовать как «докалибровочную теорию». В гл. 1, 2 и 3 рассматриваются основы релятивистской квантовой теории поля (квантование и перенормировка), причем в качестве иллюстративного примера используется простая теория $\lambda\phi^4$. В гл. 4 и 5 мы излагаем элементы теории групп, модель кварков и киральную симметрию. Взаимосвязь отмеченных выше ключевых свойств теории — перенормировок и симметрии — изучается в гл. 6. Утверждение, что кварки являются основными составляющими адронов, в дальнейшем подкрепляется открытием бьёркеновского скейлинга. Скейлинг и кварк-партонная модель описываются в гл. 7. Эти результаты подготавливают почву для всеобщего объединения теорий взаимодействия частиц в рамках неабелевых калибровочных теорий, которое рассматривается в части II. После построения в гл. 8 и 9 классического и квантового вариантов калибровочной теории все готово для перехода к основным главам книги — гл. 10—14, где изложены калибровочные теории — квантовая хромодинамика (КХД) и квантовая ароматодинамика (КАД) — и теория великого объединения (ТВО). В качестве дальнейшей иллюстрации богатства структуры калибровочной теории в гл. 15

и 16 мы приводим решения, полученные вне рамок теории возмущений и соответствующие магнитным монополям и инстантонам.

В конце книги даны два приложения. В приложении А можно найти используемые условные обозначения и нормировки. Приложение Б содержит практическое руководство по выводу правил Фейнмана, а также выражения для пропагаторов и вершин наиболее часто используемых теорий — $\lambda\phi^4$, теории Юкавы, КХД и стандартной модели электрослабых взаимодействий (в R_ξ -калибровке).

В оглавлении некоторые главы и разделы отмечены звездочками и крестиками. Звездочками отмечены разделы, которые можно опустить при первом чтении; крестиками отмечены главы и разделы, содержащие введение в такие проблемы повышенной сложности, которые несколько выходят за рамки основного направления этой книги. Согласно нашему опыту, материал, изложенный в неотмеченных разделах, составляет содержание односеместрового курса калибровочных теорий в физике частиц. Если не опускать отмеченные разделы, то книга в целом соответствует двухсеместровому курсу. Следует также заметить, что, хотя мы расположили разделы в соответствии с их логической взаимосвязью, читателю нет необходимости (на самом деле это даже нерационально) изучать материал в точности в том порядке, в котором он приведен. Например, изучение разд. 1.2 по квантованию с помощью функциональных интегралов можно отложить до гл. 9, где они впервые будут использоваться для квантования калибровочных теорий. Так как мы предполагаем, что у читателей нашей книги будут различные интересы и подготовка, то настоятельно призываем каждого из них тщательно ознакомиться с оглавлением, прежде чем приступить к изучению книги. Для облегчения чтения отдельных разделов часть материала повторяется. Читатель, интересующийся больше экспериментом, а не формальными аспектами релятивистской квантовой теории поля, может пропустить гл. 1, 2, 3 и 6 по квантованию и перенормировкам. После предварительного изучения теории групп и модели кварков в гл. 4, 5 и 7 он может перейти непосредственно к гл. 8, 10, 11, 12, 14 и т. д., где можно найти общее введение в теорию калибровочных полей и ее приложения.

Библиография и список цитированной литературы содержат некоторые обычно цитируемые работы, которые нам знакомы. Эти списки не являются полными. Мы приносим извинения нашим коллегам, на работы которых мы соответствующим образом не сослались. Мы надеемся, что процитировали достаточное количество литературы, чтобы заинтересованный читатель мог, используя ее, найти дальнейшие обзоры и исследовательские статьи.

Нам приятно поблагодарить наших коллег и студентов за оказанную помощь; многие сделали полезные замечания, касающиеся первоначального варианта книги. Мы очень признательны профессору Махико Судзуки, который критически прочел рукопись, а также профессорам Джеймсу Бьёркену, Сиднею Дреллу, Джонатану Рознеру и Линкольну Волфенштейну, поддержавшим нас в нашем стремлении преобразовать записи лекций в книгу. Один из нас (Ч. Т.) благодарит Национальный научный фонд, Комитет по летним исследовательским стипендиям и Фонд Уэлдон Спринг за поддержку; во время различных этапов работы он с удовольствием пользовался гостеприимством групп по теоретической физике Лоуренсовской лаборатории в Беркли, Станфордского центра линейных ускорителей и Миннесотского университета. Л. Л. благодарит Институт теоретической физики при Калифорнийском университете в Санта-Барбара за гостеприимство, а Министерство энергетики и Фонд Алфреда П. Слоуна за поддержку. Наконец, мы выражаем признательность нашим женам за помощь на протяжении всей работы над книгой. Мы очень обязаны мисс Сьюээн Свайерс за трудоемкую работу по напечатанию рукописи, а также высоко ценим техническую помощь со стороны мисс Тины Рамей и мистера Джерри Маккляра.

Добавление к корректуре. Когда рукопись этой книги готовилась к публикации, мы получили известие о том, что группы UA1 и UA2 в ЦЕРН'е наблюдали в $p\bar{p}$ -соударениях события, которые можно интерпретировать как испускание промежуточного векторного W -бозона с массой приблизительно 80 ГэВ¹⁾. Кроме того, объединенная группа Ирвайн — Мичиган — Брукхейвен объявила о предварительном результате, устанавливающем значение нижней границы времени жизни $\tau(p \rightarrow e^+\pi^0) > 6,5 \cdot 10^{31}$ лет.

Сент-Луис и Питсбург
Сентябрь 1982 г.

Ч. Т.
Л. Л.

¹⁾ В настоящее время твердо установлено существование векторных бозонов W и Z с массами $83,5 \pm 2,9$ ГэВ и $93,0 \pm 3,3$ ГэВ соответственно. — Прим. ред.

Глава 1

ОСНОВЫ КВАНТОВАНИЯ ПОЛЕЙ

Динамика классического поля $\phi(x)$ описывается лагранжевой плотностью $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ в соответствии с принципом наименьшего действия:

$$\delta S = 0, \quad (1.1)$$

где S — функционал действия:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

Это условие экстремума приводит к уравнению движения Эйлера — Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0. \quad (1.2)$$

Чтобы проквантовать физическую систему, мы можем воспользоваться одним из двух эквивалентных подходов. Канонический формализм квантования предполагает изменение смысла истинных динамических переменных системы. Они считаются операторами, и постулируется, что эти операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям. Затем строится гамильтониан системы, который используется для определения ее временной эволюции. Это позволяет вычислить амплитуду перехода из состояния в начальный момент времени в состояние в конечный момент времени. Альтернативный подход состоит в использовании для описания квантовой системы формализма фейнмановских функциональных интегралов. В этом подходе амплитуда перехода выражается непосредственно через сумму вкладов (функциональный интеграл) по всем возможным траекториям между начальным и конечным состояниями, взятых с весовыми множителями в виде экспоненты от действия, умноженного на i (в единицах постоянной Планка \hbar), для каждой конкретной траектории. Таким образом, в классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) подынтегральное выражение сильно осциллирует, так что вклады от всех траекторий, за исключением стационарной, определяемой принципом наименьшего действия (1.1), становятся пренебрежимо малыми.

В настоящей главе мы изложим элементарные сведения о квантовании полей. Сначала мы рассмотрим более знакомую

процедуру канонического квантования и ее реализацию в рамках теории возмущений в виде правил Фейнмана. Так как в дальнейшем мы увидим, что теории калибровочных полей наиболее просто квантуются с помощью формализма функциональных интегралов, мы дадим введение в этот метод (и его связь с правилами Фейнмана) в разд. 1.2. В качестве примера мы будем использовать в основном простейшую теорию с самодействующим скалярным полем. Формализм функциональных интегралов для фермионов изложен в разд. 1.3.

Так как формализм функциональных интегралов не понадобится нам до гл. 9, посвященной квантованию калибровочных полей, читатель при желании может отложить изучение разд. 1.2 и 1.3 до этого времени. Нужно заметить, что даже для калибровочных теорий мы будем использовать оба этих формализма квантования. Имеется в виду следующее: мы будем использовать тот язык, который более удобен для рассмотрения данной конкретной задачи, независимо от того, подразумевается ли каноническое квантование или квантование с помощью функциональных интегралов. Например, при обсуждении физических явлений на малых расстояниях в гл. 10 мы используем язык «операторных разложений», хотя для строгого обоснования требуется каноническое квантование. Мы рекомендуем также читателю ознакомиться с приложением Б в конце книги, представляющим собой практическое руководство по выводу правил Фейнмана в формализме функциональных интегралов.

1.1. ФОРМАЛИЗМ КАНОНИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

Предполагается, что читатель знаком с тем, как осуществляется переход от классической нерелятивистской системы частиц к соответствующей квантовой системе. Заменив канонические переменные операторами, а скобки Пуассона — коммутаторами, мы приходим к уравнению Шредингера. Операторы действуют в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций (волновых функций) и удовлетворяют уравнениям движения, которые формально совпадают с классическими уравнениями движения.

С помощью аналогичной процедуры можно проквантовать релятивистское поле. Для системы, описываемой лагранжианом $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, поле $\phi(x)$ удовлетворяет классическому уравнению движения (1.2). Чтобы перейти к соответствующей квантовой системе, потребуем выполнения одновременных канонических коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где сопряженный импульс определяется формулой

$$\pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 \phi)}. \quad (1.4)$$

Гамильтониан

$$H = \int d^3x [\pi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathcal{L}(x)] \quad (1.5)$$

задает динамику системы соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_0 \phi(\mathbf{x}, t) &= i[H, \phi(\mathbf{x}, t)], \\ \partial_0 \pi(\mathbf{x}, t) &= i[H, \pi(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Пример 1.1. Свободное скалярное поле. Пусть задана лагранжева плотность

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\lambda \phi)(\partial^\lambda \phi) - \mu^2 \phi^2].$$

Тогда из (1.2) следует уравнение Клейна — Гордона

$$(\partial^2 + \mu^2) \phi(x) = 0. \quad (1.7)$$

В квантовой теории поле $\phi(x)$ и оператор сопряженного ему импульса, определяемый формулой (1.4), $\pi(x) = \partial_0 \phi(x)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\partial_0 \phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\partial_0 \phi(\mathbf{x}, t), \partial_0 \phi(\mathbf{x}', t)] &= [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Гамильтониан имеет следующий вид:

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2]. \quad (1.9)$$

Уравнения временной эволюции (1.6), которые по существу являются уравнениями Гамильтона, можно привести к виду (1.7). Следовательно, оператор поля $\phi(x)$ формально удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. В случае когда нет взаимодействия, решение может быть найдено точно:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} [a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)}], \quad (1.10)$$

где $\omega_k = (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^{1/2}$. Коэффициенты в разложении $a(\mathbf{k})$ и $a^\dagger(\mathbf{k})$ являются операторами. Из канонических коммутационных соотношений (1.8) следует

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

и гамильтониан (1.9) можно записать в виде

$$H_0 = \int d^3k \omega_k a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (1.12)$$

(здесь мы опустили несущественные постоянные слагаемые). По аналогии с гармоническим осциллятором $a(\mathbf{k})$ и $a^\dagger(\mathbf{k})$ можно интерпретировать как операторы уничтожения и рождения. Тогда одночастичное состояние с импульсом \mathbf{k} можно получить действием оператора рождения на вакуумное состояние:

$$|\mathbf{k}\rangle = [(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}]^{1/2} a^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle. \quad (1.13)$$

При этом условие нормировки имеет вид

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Произведение $a^\dagger a$ обычно интерпретируется как оператор числа частиц. Из формулы (1.12) видно, что H_0 есть гамильтониан системы невзаимодействующих частиц.

Зная решение (1.10) и (1.11), легко вычислить фейнмановский пропагатор, т. е. вакуумное среднее хронологического (упорядоченного по времени) произведения двух полей:

$$\begin{aligned} i\Delta(x_1 - x_2) &\equiv \langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle = \\ &= \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | \phi(x_2)\phi(x_1) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пример 1.2. Скалярное поле с взаимодействием $\lambda\phi^4$. Лагранжева плотность определяется выражением

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\lambda \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4,$$

а уравнение движения имеет вид

$$(\partial^2 + \mu^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{3!} \phi^3(x). \quad (1.15)$$

Сопряженный импульс и канонические коммутационные соотношения те же, что и для свободного поля в примере 1.1. Гамильтониан можно представить в виде

$$H = H_0 + H', \quad (1.16)$$

где H_0 дается выражением (1.9), а

$$H' = \int d^3x \mathcal{H}',$$

где

$$\mathcal{H}' = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.17)$$

есть плотность гамильтониана взаимодействия. Так как свободная теория является точно решаемой, мы можем вычислить амплитуды перехода и матричные элементы физически интересных моделей путем последовательного разложения по степеням параметра λ . Ниже мы дадим краткое описание этой схемы приближений теории возмущений.

В *представлении Гейзенберга* операторы зависят от времени и временная эволюция динамических переменных системы задается гамильтонианом следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= e^{iHt} \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt}, \\ \pi(\mathbf{x}, t) &= e^{iHt} \pi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt}.\end{aligned}$$

При этом вектор состояния $|a\rangle$ не зависит от времени. В *представлении Шредингера*, наоборот, операторы не зависят от времени, а векторы состояний зависят от времени. Связь между представлениями Шредингера и Гейзенберга дается соотношениями

$$\begin{aligned}\phi^S(\mathbf{x}) &= e^{-iHt} \phi(\mathbf{x}, t) e^{iHt}, \quad \pi^S(\mathbf{x}) = e^{-iHt} \pi(\mathbf{x}, t) e^{iHt}, \\ |a, t\rangle^S &= e^{-iHt} |a\rangle.\end{aligned}$$

Для вычислений по теории возмущений удобно другое представление — *представление взаимодействия*, в котором операторы и состояния определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\phi^I(\mathbf{x}, t) &\equiv e^{iH_0 t} \phi^S(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} = e^{-iH_0 t} e^{-iHt} \phi(\mathbf{x}, t) e^{iHt} e^{-iH_0 t} = \\ &= U(t, 0) \phi(\mathbf{x}, t) U^{-1}(t, 0).\end{aligned}\quad (1.18)$$

Для $\pi^I(\mathbf{x}, t)$ имеем аналогичные соотношения; кроме того,

$$|a, t\rangle^I \equiv e^{iH_0 t} |a, t\rangle^S = U(t, 0) |a\rangle,\quad (1.19)$$

где

$$U(t, 0) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}\quad (1.20)$$

есть унитарный оператор временной эволюции. Поскольку операторы в представлении взаимодействия удовлетворяют уравнениям для свободного поля (которые решаются точно)

$$\begin{aligned}\partial_0 \phi^I(\mathbf{x}, t) &= i[H_0, \phi^I(\mathbf{x}, t)], \\ \partial_0 \pi^I(\mathbf{x}, t) &= i[H_0, \pi^I(\mathbf{x}, t)],\end{aligned}\quad (1.21)$$

в этом случае решение динамической задачи сводится к нахождению решения для U -матрицы.

Определим оператор временной эволюции U следующим соотношением:

$$|a, t\rangle^I \equiv U(t, t_0) |a, t_0\rangle^I,\quad (1.22)$$

более общим, чем (1.20), причем $U(t_0, t_0) = 1$ и выполняются следующие правила умножения:

$$\begin{aligned}U(t, t') U(t', t_0) &= U(t, t_0), \\ U(t, 0) U^{-1}(t_0, 0) &= U(t, t_0).\end{aligned}\quad (1.23)$$

Уравнение движения для оператора U легко получить, пользуясь выражениями (1.19) и (1.20):

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H'^I(t) U(t, t_0), \quad (1.24)$$

где

$$H'^I = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}$$

есть гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия, т. е.

$$H'^I = H'(\phi^I). \quad (1.25)$$

Уравнение (1.24) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt_1 H'^I(t_1) \right] = \\ &= T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt_1 \int d^3 x_1 \mathcal{H}'^I(\mathbf{x}_1, t_1) \right], \end{aligned} \quad (1.26)$$

которое можно разложить в степенной ряд

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int_{t_0}^t d^4 x_1 \int_{t_0}^t d^4 x_2 \dots \\ &\dots \int_{t_0}^t d^4 x_p T(\mathcal{H}'^I(x_1) \mathcal{H}'^I(x_2) \dots \mathcal{H}'^I(x_p)). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Функции Грина в теории $\lambda\phi^4$. Представим теперь формальное решение, полученное по теории возмущений, в виде величин, имеющих прямой физический смысл.

В теории поля важно уметь вычислять функции Грина, которые определяются формулой

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle \quad (1.28)$$

и из которых можно построить элементы S -матрицы. Пользуясь соотношениями (1.18), (1.23) и (1.26), легко получить

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \left\langle 0 \left| U^{-1}(t, 0) T \left(\phi^I(x_1) \dots \phi^I(x_n) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp \left[-i \int_{-t}^t dt' H'^I(t') \right] \right) U(-t, 0) \right| 0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где t — произвольный момент времени, который мы устремим к бесконечности. В этом пределе вакуумное состояние становится собственным состоянием оператора U , и произведение

собственных значений двух операторов U в (1.29) равно

$$\frac{1}{\langle 0 | T \left(\exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H'(t') \right] \right) | 0 \rangle} \quad (1.30)$$

Результатом действия этих двух операторов U на вакуумные состояния является сокращение «несвязных частей» в вакуумном среднем (см., например, [50]). Подставив разложение (1.27) с учетом (1.25), n -точечную функцию Грина представим в виде

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 y_1 \dots d^4 y_p \langle 0 | T(\phi^I(x_1) \dots \times \\ \times \phi^I(x_n) \mathcal{H}'(\phi^I(y_1)) \dots \mathcal{H}'(\phi^I(y_p))) | 0 \rangle_c. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Здесь индекс c обозначает «связную часть». Эта терминология отражает свойства графического представления функций Грина.

В качестве простого примера рассмотрим первый член ($p = 1$) для четырехточечной ($n = 4$) функции Грина в теории с $\mathcal{H}'(\phi) = \lambda \phi^4/4!$ (1.17):

$$\begin{aligned} G_1^{(4)}(x_1, \dots, x_4) = \\ = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 y \langle 0 | T(\phi^I(x_1), \dots, \phi^I(x_4) [\phi^I(y)]^4) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Произведем нормальное упорядочение в этом хронологическом (упорядоченном по времени) произведении, переставляя операторы рождения налево от операторов уничтожения и опуская слагаемые, в которых после этих перестановок на крайнем правом месте будет стоять оператор уничтожения и (или) на крайнем левом — оператор рождения. Результат таких перестановок описывается теоремой Вика [419], согласно которой связная часть выражения (1.32) разлагается в произведение двухточечных функций:

$$\begin{aligned} G_1^{(4)}(x_1, \dots, x_4) = \\ = (-i\lambda) \int d^4 y \langle 0 | T(\phi^I(x_1) \phi^I(y)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\phi^I(x_2) \phi^I(y)) | 0 \rangle \times \\ \times \langle 0 | T(\phi^I(x_3) \phi^I(y)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\phi^I(x_4) \phi^I(y)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Множитель $4!$ в знаменателе исходного выражения (1.32) сокращается, так как существует $4!$ способов спарить операторы $\phi^I(x^i)$ с каждым полем в $[\phi^I(y)]^4$. Поскольку поля в представлении взаимодействия удовлетворяют свободным уравнениям,

пропагатор $i\Delta(x, y) \equiv \langle 0 | T(\phi'(x)\phi'(y)) | 0 \rangle$ нам уже известен и дается формулой (1.14). На рис. 1.1 дано графическое изображение выражения (1.33).

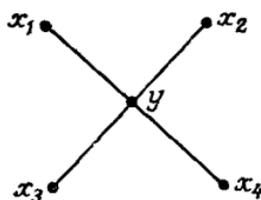


Рис. 1.1. Графическое представление формулы (1.33).

Рассмотрим теперь член второго порядка для четырехточечной функции, т. е. член с $p = 2$, $n = 4$ в (1.31):

$$G_2^{(4)}(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 \times \\ \times \langle 0 | T(\phi'(x_1) \dots \phi'(x_4) [\phi'(y_1)]^4 [\phi'(y_2)]^4) | 0 \rangle. \quad (1.34)$$

Применяя теорему Вика и сохраняя лишь связанные части, получаем

$$G_2^{(4)}(x_1, \dots, x_4) = \\ = \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 [i\Delta(y_1, y_2)]^2 \{ [\Delta(x_1, y_1) \Delta(x_2, y_1)] \times \\ \times [\Delta(x_3, y_2) \Delta(x_4, y_2)] + [\Delta(x_1, y_1) \Delta(x_3, y_1)] [\Delta(x_2, y_2) \Delta(x_4, y_2)] + \\ + [\Delta(x_1, y_1) \Delta(x_4, y_1)] [\Delta(x_2, y_2) \Delta(x_3, y_2)] \} + \frac{1}{2!} (-i\lambda)^2 \int d^4y_1 \times \\ \times d^4y_2 [i\Delta(y_1, y_1)] [i\Delta(y_1, y_2)] \{ \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_2, y_2) \Delta(x_3, y_2) \times \\ \times \Delta(x_4, y_2) + \Delta(x_1, y_2) \Delta(x_2, y_1) \Delta(x_3, y_2) \Delta(x_4, y_2) + \\ + \Delta(x_1, y_2) \Delta(x_2, y_2) \Delta(x_3, y_1) \Delta(x_4, y_2) + \\ + \Delta(x_1, y_2) \Delta(x_2, y_2) \Delta(x_3, y_2) \Delta(x_4, y_1) \}. \quad (1.35)$$

Причину появления в знаменателе первого члена правой части (1.35) множителя $2!$ можно объяснить следующим образом. Множитель $(1/2!)(1/4!)^2$ в исходном выражении (1.34) сокращается факторами, обусловленными тем, что y_1 и y_2 можно переставлять местами, и тем, что существует несколько способов спарить поля, выходящие из каждой вершины. Но при этом возникает двойной учет свойств перестановочной симметрии. Поскольку у нас две одинаковые внутренние линии, соединяющие пару вершин, первый член в (1.35) надо разделить на величину $2!$. Множитель $1/2$ во втором члене выражения (1.35) имеет другое происхождение. Он связан с тем, что внутренняя линия начинается и кончается в одной и той же вершине. Выражение (1.35) представлено графически на рис. 1.2.

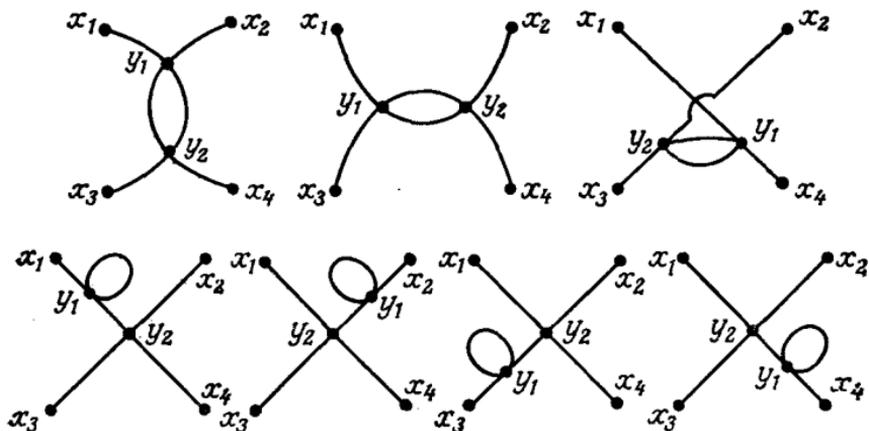


Рис. 1.2. Графическое представление формулы (1.35).

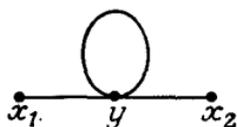


Рис. 1.3. Графическое представление формулы (1.36).

Аналогично для первого члена ($p = 1$) двухточечной ($n = 2$) функции имеем

$$G_1^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{-i\lambda}{2!} \int d^4y [i\Delta(x_1, y)] [i\Delta(y, y)] [i\Delta(x_2, y)], \quad (1.36)$$

что графически изображено на рис. 1.3.

Как правило, удобнее работать с функциями Грина в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &\equiv \\ &\equiv \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{-ip_i x_i} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.37)$$

а также с *усеченными функциями Грина*, которые получаются из $G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ удалением пропагаторов, соответствующих внешним линиям:

$$G_{\text{yc}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \left[\prod_{j=1}^n \frac{-i}{\Delta(p_j)} \right] G^{(n)}(p_1, \dots, p_n), \quad (1.38)$$

где $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0$. В действительности для частиц без спина усеченная функция Грина является обычной амплитудой перехода (*элементом T-матрицы*), с помощью которой непосредственно вычисляются сечения.

Правила Фейнмана в теории $\lambda\phi^4$. Результаты рассмотрения по теории возмущений удобно представить в виде совокупности *правил Фейнмана* для амплитуды перехода. Для взаимодействия $\mathcal{H}_1 = (\lambda/4!)\phi^4(x)$ имеем следующие правила вычисления N -точечной усеченной функции Грина:

1. Сначала нужно нарисовать все возможные связанные топологически различные графы с N внешними линиями.

2. Каждой внутренней линии нужно сопоставить в качестве множителя пропагатор

$$\text{---} \bullet \quad i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon},$$

а каждой вершине — множитель

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \diagup \quad \bullet \\ \bullet \quad \diagdown \quad \bullet \end{array} \quad -i\lambda;$$

3. По каждому внутреннему импульсу l , не фиксированному законами сохранения импульса в каждой вершине, нужно проинтегрировать $\int d^4l/(2\pi)^4$.

4. Выражение для каждого графа нужно разделить на фактор симметрии S , соответствующий числу возможных перестановок внутренних линий при фиксированных вершинах.

1.2. ВВЕДЕНИЕ В ФОРМАЛИЗМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В первом разделе изложены основы процедуры канонического квантования в рамках операторного формализма. Кратко описаны главные этапы вывода правил Фейнмана, позволяющих построить решение квантовополевой модели с взаимодействием методами теории возмущений. В настоящем разделе мы вновь получим тот же набор правил Фейнмана, но теперь уже в рамках формализма функционального интегрирования [113, 134, 351]. Преимущество этого альтернативного способа квантования состоит в том, что он позволяет проследить связь с классической динамикой. Кроме того, при таком подходе мы оперируем только с обычными функциями. Это позволяет более просто проводить любые нелинейные преобразования основных динамических переменных, а также непосредственно видеть возникающие при таких преобразованиях эффекты. Поэтому формализм функционального интегрирования особенно удобен в случае систем со связями, в частности в калибровочных теориях.

Квантовая механика в одном измерении

Опишем сначала формализм функционального интегрирования для простейшей квантовомеханической системы в одном измерении. В последующих частях настоящего раздела мы рассмотрим обобщение этого формализма на случай теории поля как системы с бесконечным числом степеней свободы, а также изложим метод теории возмущений.

Фундаментальной величиной в квантовой механике является матричный элемент перехода между начальным и конечным состояниями:

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle, \quad (1.39)$$

где $|q\rangle$ — собственное состояние оператора Q координаты частицы в представлении Шредингера с собственным значением q :

$$Q|q\rangle = q|q\rangle, \quad (1.40)$$

а символы $|q; t\rangle$ в левой части (1.39) обозначают состояния в представлении Гейзенберга, $|q; t\rangle = e^{iHt}|q\rangle$. Необходимо иметь в виду, что состояния в представлении Гейзенберга не зависят от времени. Обозначения, использованные здесь, означают, что $|q; t\rangle$ и $|q'; t'\rangle$ в формуле (1.39) совпадают с двумя различными шредингеровскими состояниями $|q(t)\rangle$ и $|q'(t')\rangle$ в моменты времени t и t' соответственно. В формализме функционального интегрирования матричный элемент перехода (1.39) представляется в виде функционального интеграла:

$$\langle q'; t' | q; t \rangle = N \int [dq] \exp \left\{ i \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) d\tau \right\}, \quad (1.41)$$

где N — нормирующий множитель, $L(q, \dot{q})$ — лагранжиан. В выражении (1.41) интегрирование ведется по функциональному пространству $q(t)$, т. е. это выражение представляет собой сумму вкладов по всем путям, соединяющим точки $(q; t)$ и $(q'; t')$; эти вклады берутся с весами, равными экспонентам от действия на траекториях, умноженного на мнимую единицу. Ниже мы дадим вывод выражения (1.41) с помощью уже знакомого нам канонического операторного формализма. Мера интегрирования $[dq]$ дана в выражениях (1.50) и (1.51), которые проясняют смысл функционального интеграла.

Разделим сначала интервал (t', t) на n отрезков длиной $\delta t = (t' - t)/n$ каждый. Тогда амплитуда перехода в (1.39) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle &= \int dq_1 \dots dq_{n-1} \langle q' | e^{-iH\delta t} | q_{n-1} \rangle \times \\ &\times \langle q_{n-1} | e^{-iH\delta t} | q_{n-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q \rangle, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где мы подставили полные наборы собственных состояний оператора Q^S в представлении Шредингера. Для достаточно малых δt имеем

$$\langle q' | e^{-iH\delta t} | q \rangle = \langle q' | [1 - iH(P, Q)\delta t] | q \rangle + O((\delta t)^2). \quad (1.43)$$

Если гамильтониан имеет вид

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q), \quad (1.44)$$

то

$$\begin{aligned} \langle q' | H(P, Q) | q \rangle &= \langle q' | \frac{P^2}{2m} | q \rangle + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \delta(q-q') = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q' | p \rangle \langle p | \frac{P^2}{2m} | q \rangle + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

При выводе этого выражения использованы равенства $\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q)$ и $\langle q | p \rangle = e^{ipq}$ и предполагается симметричное упорядочение операторов в $V(Q)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-iH\delta t} | q \rangle &\approx \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \left\{ 1 - i\delta t \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \right] \right\} \approx \\ &\approx \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} e^{-i\delta t H(p, (q+q')/2)}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Здесь $H(p, q)$ — классический гамильтониан. Подставляя это выражение в (1.42), получаем

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle &\approx \int \frac{dp_1}{2\pi} \dots \frac{dp_n}{2\pi} \int dq_1 \dots dq_{n-1} \times \\ &\times \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \left[p_i(q_i - q_{i-1}) - \delta t H\left(p_i, \frac{q_i + q_{i-1}}{2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Тогда амплитуда перехода может быть символически записана в виде

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \int \left[\frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left\{ i \int_t^{t'} dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right\} \equiv \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\frac{dp_1}{2\pi} \right) \dots \left(\frac{dp_n}{2\pi} \right) \int dq_1 \dots dq_{n-1} \times \\ &\times \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \delta t \left[p_i \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\delta t} \right) - H\left(p_i, \frac{q_i + q_{i-1}}{2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Второе из этих равенств определяет функциональный интеграл. Мы уже почти получили требуемый результат — формулу (1.41); остается выполнить импульсное интегрирование по

$[dp/2\pi] = \prod_{i=1}^n dp_i/2\pi$. Поскольку подынтегральное выражение является осциллирующей функцией, продолжим его аналитически в евклидово пространство, считая формально $(i\delta t)$ вещественной величиной. Пользуясь теперь формулой для гауссова интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-ax^2+bx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{b^2/4a}, \quad (1.49)$$

получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_i}{2\pi} \exp \left[\frac{-i\delta t}{2m} p_i^2 + ip_i(q_i - q_{i-1}) \right] = \\ = \left(\frac{m}{2\pi i \delta t} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(q_i - q_{i-1})^2}{2\delta t} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (1.48) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \delta t} \right)^{n/2} \int \prod_i^{n-1} dq_i \times \\ \times \exp \left\{ i \sum_{i=1}^n \delta t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\delta t} \right)^2 - V \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

или

$$\begin{aligned} \langle q; t | q'; t' \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \\ = N \int [dq] \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Поскольку $L = (m\dot{q}^2/2) - V(q)$, это выражение совпадает с выражением (1.41), к которому мы стремились.

Функции Грина одномерной квантовой механики. Приведем теперь наш основной результат — выражения (1.41) и (1.47) — к такой форме, обобщая которую можно получить представления для функций Грина в виде функциональных интегралов в теории поля.

Начнем с простейшей двухточечной функции Грина — матричного элемента хронологического произведения операторов между основными состояниями:

$$G(t_1, t_2) = \langle 0 | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | 0 \rangle,$$

где $|0\rangle$ — основное состояние. Подставляя полные наборы состояний, получаем

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) = \int dq dq' \langle 0 | q'; t' \rangle \times \\ \times \langle q'; t' | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | q; t \rangle \langle q; t | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Матричный элемент

$$\langle 0 | q; t \rangle = \phi_0(q) e^{-iE_0 t} = \phi_0(q, t) \quad (1.53)$$

является волновой функцией основного состояния. Затем выведем представление в виде функционального интеграла для величины $\langle q'; t' | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | q; t \rangle$. Для $t_1 > t_2$ (т. е. $t' > t_1 > t_2 > t$) имеем

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | q; t \rangle &= \\ &= \langle q' | e^{-iH(t'-t_1)} Q^S e^{-iH(t_1-t_2)} Q^S e^{-iH(t_1-t)} | q \rangle = \\ &= \int \langle q' | e^{-iH(t'-t_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | Q^S e^{-iH(t_1-t_2)} | q_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle q_2 | Q^S e^{-iH(t_2-t)} | q \rangle dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Учитывая собственные значения в представлении Шредингера и используя основное представление в виде функционального интеграла (1.47), находим

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | q; t \rangle &= \\ &= \int \left[\frac{dpdq}{2\pi} \right] q_1(t_1) q_2(t_2) \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Нетрудно понять, что та же формула справедлива и для случая $t_2 > t_1$ (т. е. $t' > t_2 > t_1 > t$). Следовательно, формула (1.54) есть общий результат. Подставляя выражения (1.54) и (1.53) в (1.52), получаем

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \int dqdq' \phi_0(q', t') \phi_0^*(q, t) \int \left[\frac{dpdq}{2\pi} \right] q_1(t_1) q_2(t_2) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

или

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \int \left[\frac{dpdq}{2\pi} \right] \phi_0(q', t') \phi_0^*(q, t) q_1(t_1) q_2(t_2) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Однако практическое использование формулы (1.55) затруднено из-за наличия волновых функций основного состояния $\phi_0(q', t')$ и $\phi_0^*(q, t)$. Чтобы избавиться от них, рассмотрим матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | \mathcal{O}(t_1, t_2) | q; t \rangle &= \int dQdQ' \langle q'; t' | Q'; T' \rangle \times \\ &\quad \times \langle Q'; T' | \mathcal{O}(t_1, t_2) | Q; T \rangle \langle Q; T | q; t \rangle, \end{aligned} \quad (1.57)$$

где $\mathcal{O}(t_1, t_2) = T(Q^H(t_1) Q^H(t_2))$ и $t' \geq T' \geq (t_1, t_2) \geq T \geq t$. Пусть $|n\rangle$ — собственное состояние оператора энергии с собственным значением E_n , а $\phi_n(q)$ — соответствующая волновая функция:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad \langle q|n\rangle = \phi_n^*(q).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \langle q'; t' | Q'; T' \rangle &= \langle q' | e^{-iH(t'-T')} | Q' \rangle = \sum_n \langle q' | n \rangle \langle n | e^{-iH(t'-T')} | Q' \rangle = \\ &= \sum_n \phi_n^*(q') \phi_n(Q') e^{-iE_n(t'-T')}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Чтобы выделить в этом выражении волновую функцию основного состояния, учтем тот факт, что $E_n > E_0$ для всех $n \neq 0$, и перейдем к пределу $t' \rightarrow -i\infty$. Получим

$$\lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \langle q'; t' | Q'; T' \rangle = \phi_0^*(q') \phi_0(Q') e^{-E_0|t'|} e^{iE_0T'}. \quad (1.59)$$

Аналогично

$$\lim_{t \rightarrow i\infty} \langle Q; T | q; t \rangle = \phi_0(q) \phi_0^*(Q) e^{-E_0|t|} e^{-iE_0T}. \quad (1.60)$$

Тогда выражение (1.57) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \langle q'; t' | \mathcal{O}(t_1, t_2) | q; t \rangle &= \int dQ dQ' \phi_0^*(q') \phi_0(Q') \times \\ &\times \langle Q'; T' | \mathcal{O}(t_1, t_2) | Q; T \rangle \phi_0^*(Q) \phi_0(q) e^{-E_0|t'|} e^{iE_0T'} e^{-iE_0T} e^{-E_0|t|} = \\ &= \phi_0^*(q') \phi_0(q) e^{-E_0|t'|} e^{-E_0|t|} G(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.52). Из соотношений (1.59) и (1.60) легко находим

$$\lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \langle q'; t' | q; t \rangle = \phi_0^*(q') \phi_0(q) e^{-E_0|t'|} e^{-E_0|t|}. \quad (1.62)$$

Комбинируя равенства (1.61) и (1.62), получаем следующее представление для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \left[\frac{\langle q'; t' | T(Q^H(t_1) Q^H(t_2)) | q; t \rangle}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \right] = \\ &= \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \frac{1}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \int \left[\frac{dq dp}{2\pi} \right] q(t_1) q(t_2) \times \\ &\times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

При выводе этой формулы мы использовали выражение (1.54). Фактор $\langle q'; t' | q; t \rangle$ в знаменателе может быть записан через

функциональный интеграл с помощью равенства (1.51). Представление (1.63) просто обобщается на случай n -точечных функций Грина:

$$G(t_1, \dots, t_n) = \langle 0 | T(q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n)) | 0 \rangle = \\ = \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \frac{1}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \int \left[\frac{dq dp}{2\pi} \right] q(t_1) \dots q(t_n) \times \\ \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}. \quad (1.64)$$

Все эти функции Грина могут быть получены с помощью следующей формулы:

$$G(t_1, \dots, t_n) = \frac{(-i)^n \delta^n W[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}, \quad (1.65)$$

где

$$W[J] = \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \frac{1}{\langle q'; t' | q; t \rangle} \int \left[\frac{dq dp}{2\pi} \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q) + J(\tau) q(\tau)] \right\}. \quad (1.66)$$

Сравнивая это выражение для $W[J]$ с представлением для функций Грина (1.64), мы видим, что производящий функционал $W[J]$ соответствует амплитуде перехода между основным состоянием в момент t и основным состоянием в момент t' в присутствии внешнего источника $J(\tau)$:

$$W[J] = \langle 0 | 0 \rangle_J. \quad (1.67)$$

При этом условии нормировки следующее: $W[0] = 1$. Таким образом, вычисление функций Грина сводится к вычислению $W[J]$. Позже мы увидим, что в случае квантовой теории поля не зависящий от $J(t)$ фактор $\langle q; t | q'; t' \rangle$ в равенстве (1.66) несущественен при вычислении связанных функций Грина, и поэтому его можно опустить.

Евклидовы функции Грина. Вследствие нефизического граничного условия $t' \rightarrow -i\infty$, $t \rightarrow i\infty$ функции Грина, представленные интегралами (1.63) и (1.64), следует интерпретировать как «евклидовы» функции Грина, которые определяются следующим образом:

$$S^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = i^n G^{(n)}(-i\tau_1, \dots, -i\tau_n). \quad (1.68)$$

Тогда производящий функционал для S -функций можно представить в виде

$$\begin{aligned} W_E[J] &= \\ &= \lim_{\substack{\tau' \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow -\infty}} \int [dq] \exp \left\{ \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left[-\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau''} \right)^2 - V(q) + J(\tau'') q(\tau'') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

При этом

$$S^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\tau_1) \dots \delta J(\tau_n)} \Big|_{J=0}.$$

Нефизические пределы $t' \rightarrow -i\infty$, $t \rightarrow i\infty$ имеют смысл в «евклидовом пространстве», где время t заменено на $-it$. Кроме того, функциональный интеграл в таком пространстве (формула (1.69)) является хорошо определенным объектом для потенциалов $V(q)$, ограниченных снизу. Это связано с тем, что мы всегда можем переопределить значение $V(q)$ при q , равном нулю, так, что

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) > 0. \quad (1.70)$$

Тогда экспоненциальный множитель в формуле (1.69) будет обеспечивать сходимость функционального интеграла. Заметим, что условие (1.70) выполняется для физически стабильных систем.

Итак, функциональные интегралы хорошо определены только в евклидовом пространстве (пространстве с мнимым временем). Чтобы вычислить физические величины в реальном пространстве, необходимо выполнить аналитическое продолжение. При конкретных расчетах мы будем проводить все операции в реальном пространстве, имея в виду, что их справедливость может быть обоснована в евклидовом пространстве.

Подведем итоги обсуждения формализма функционального интегрирования для одномерных квантовомеханических систем. Основные результаты — представления (1.41) и (1.47) амплитуды перехода в виде функциональных интегралов. Основываясь на этих формулах, мы получили выражение (1.64) для n -точечной функции Грина, имея в виду в дальнейшем обобщить его на случай квантовой теории поля. Все эти функции Грина $G^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ могут быть получены из производящей функции $W[J]$ — амплитуды перехода между основными состояниями в присутствии внешнего источника J . Эта основная величина может быть вычислена по формуле (1.66), которая допускает следующее очевидное обобщение на случай системы

с N степенями свободы:

$$W[J_1, \dots, J_N] \sim \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \int \prod_i^N [dq_i dp_i] \times \\ \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[\sum_i^N p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i) + \sum_i^N J_i q_i \right] \right\},$$

или

$$W[J_1, \dots, J_N] \sim \lim_{\substack{t' \rightarrow -i\infty \\ t \rightarrow i\infty}} \int \prod_i^N [dq_i] \times \\ \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left[L(q_i, \dot{q}_i) + \sum_i^N J_i p_i \right] \right\}. \quad (1.71)$$

Теория поля

Рассмотрим теорию поля как квантовомеханическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Объектам, введенным ранее для квантовой механики, мы сопоставим следующие:

$$\prod_{i=1}^N [dq_i dp_i] \rightarrow [d\phi(x) d\pi(x)], \\ L(q_i, \dot{q}_i), H(q_i, p_i) \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \int d^3x \mathcal{H}(\phi, \pi), \quad (1.72)$$

где $\pi(x)$, $\mathcal{L}(x)$ и $\mathcal{H}(x)$ — импульс, канонически сопряженный полю, лагранжева плотность и гамильтонова плотность соответственно. Основное состояние в теории поля обычно называется вакуумным состоянием. Таким образом, производящий функционал $W[J]$ есть амплитуда вакуум-вакуумного перехода в присутствии внешнего источника $J(x)$. Тогда обобщением формулы (1.71) является формула

$$W[J] \sim \int [d\phi d\pi] \exp \left\{ i \int d^4x [\pi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathcal{H}(\pi, \phi) + J(x) \phi(x)] \right\}, \quad (1.73)$$

или

$$W[J] \sim \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi(x)) + J(x) \phi(x)] \right\}. \quad (1.74)$$

Далее из наличия предела $t \rightarrow i\infty$ в (1.71) следует, что мы должны сначала вычислить величину $W_E[J]$, где $x_\mu \equiv (t, \mathbf{x})$ заменено на $\bar{x}_\mu \equiv (\tau = it, \mathbf{x})$, которая относится к евклидову пространству и является аналитическим продолжением $W[J]$:

$$W_E[J] \sim \int [d\phi] \exp \left\{ \int d^4\bar{x} [\mathcal{L}(\phi(\bar{x})) + J(\bar{x}) \phi(\bar{x})] \right\}. \quad (1.75)$$

В теории поля обычно представляют интерес *связные* функции Грина, определяемые через производящий функционал следующим образом:

$$G^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \left[\frac{1}{W_E[J]} \frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\bar{x}_1) \dots \delta J(\bar{x}_n)} \right] \Big|_{J=0}. \quad (1.76)$$

Таким образом, чтобы удалить несвязную часть функции Грина, необходимо выражение (1.69) разделить на величину $W[J]$. Напомним, что то же самое мы делали при анализе функций Грина (формулы (1.30) и (1.31)). Важным практическим следствием такого деления является то, что не зависящий от J нормировочный множитель величины $W[J]$ оказывается несущественным при последующих вычислениях функций Грина.

Обратимся снова к нашему иллюстративному примеру — теории $\lambda\phi^4$:

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_1(\phi),$$

где

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \phi)(\partial^\lambda \phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_1(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

Евклидов производящий функционал

$$W[J] = \int [d\phi] \exp \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \right\} \quad (1.77)$$

может быть записан в виде

$$W[J] = \exp \left[\int d^4x \mathcal{L}_1 \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) \right] W_0[J], \quad (1.78)$$

где

$$W_0[J] = \int [d\phi] \exp \left[\int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right]$$

есть производящий функционал свободной теории. (Для упрощения обозначений мы опустили индекс E и черту над x , обозначающие принадлежность к евклидову пространству.) Выражение $-(\partial\phi/\partial\tau)^2 - (\nabla\phi)^2$ в формуле (1.77) может быть заменено выражением $\phi(\partial^2/\partial\tau^2 + \nabla^2)\phi$, так как они различаются на полную четырехмерную дивергенцию. Поэтому мы имеем

$$W_0[J] = \int [d\phi] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) + \int d^4z J(z) \phi(z) \right], \quad (1.79)$$

где

$$K(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right). \quad (1.80)$$

Поскольку переменные x и y можно рассматривать как «непрерывные индексы», выражение (1.79) для $W_0[J]$ аналогично бес-

конечномерному ($N \rightarrow \infty$) гауссову интегралу вида

$$\int d\phi_1 \dots d\phi_N \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j + \sum_k J_k \phi_k \right] \sim \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i (K^{-1})_{ij} J_j \right]. \quad (1.81)$$

Правая часть этого соотношения является обобщением формулы (1.49). Таким образом, мы можем вычислить функциональный интеграл по ϕ в (1.79) и получить с точностью до несущественного множителя следующий результат:

$$W_0[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right], \quad (1.82)$$

где $\Delta(x, y)$ — оператор, обратный оператору $K(x, y)$, определенному выражением (1.80), т. е. выполняется соотношение

$$\int d^4y K(x, y) \Delta(y, z) = \delta^{(4)}(x - z). \quad (1.83)$$

Легко показать, что

$$\Delta(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + \mu^2}, \quad (1.84)$$

где $k = (ik_0, \mathbf{k})$ — четырехмерный евклидов вектор импульса. Разлагая экспоненту в формуле (1.78) в ряд теории возмущений по степеням \mathcal{L}_1 , получаем

$$W[J] = W_0[J] \{1 + \lambda \omega_1[J] + \lambda^2 \omega_2[J] + \dots\}, \quad (1.85)$$

где

$$\omega_1[J] = -\frac{1}{4!} W_0^{-1}[J] \left\{ \int d^4x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4 \right\} W_0[J], \\ \omega_2[J] = -\frac{1}{2(4!)^2} W_0^{-1}[J] \left\{ \int d^4x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4 \right\}^2 W_0[J] = \\ = -\frac{1}{2(4!)} W_0^{-1}[J] \left\{ \int d^4x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4 \right\} \omega_1[J]. \quad (1.86)$$

Пользуясь явным выражением (1.82) для функционала $W_0[J]$, можно вычислить $\omega_1[J]$ и $\omega_2[J]$:

$$\omega_1[J] = -\frac{1}{4!} [\Delta(x, y_1) \Delta(x, y_2) \Delta(x, y_3) \Delta(x, y_4) J(y_1) J(y_2) \times \\ \times J(y_3) J(y_4) + 3! \Delta(x, y_1) \Delta(x, y_2) \Delta(x, x) J(y_1) J(y_2)], \quad (1.87)$$

$$\omega_2[J] = \frac{1}{2} \omega_1^2[J] + \\ + \frac{1}{2(3!)^2} \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_1, y_2) \Delta(x_1, y_3) \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_2, y_4) \times \\ \times \Delta(x_2, y_5) \Delta(x_2, y_6) J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) J(y_5) J(y_6) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{2(4!)} \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_1, y_2) \Delta^2(x_1, x_2) \Delta(x_2, y_3) \Delta(x_2, y_4) \times \\
 & \times J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) + \frac{2}{24!} \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_1, x_1) \Delta(x_1, x_2) \times \\
 & \times \Delta(x_2, y_2) \Delta(x_2, y_3) \Delta(x_2, y_4) J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) + \\
 & + \frac{1}{8} \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_1, x_1) \Delta(x_1, x_2) \Delta(x_2, x_2) \Delta(x_2, y_2) J(y_1) J(y_2) + \\
 & + \frac{1}{8} \Delta(x_1, y_1) \Delta^2(x_1, x_2) \Delta(x_2, x_2) \Delta(x_1, y_2) J(y_1) J(y_2) + \\
 & + \frac{1}{12} \Delta(x_1, y_1) \Delta^3(x_1, x_2) \Delta(x_2, y_2) J(y_1) J(y_2). \quad (1.88)
 \end{aligned}$$

Здесь опущены члены, не зависящие от J . Кроме того, в формулах (1.87) и (1.88) предполагается, что по всем аргументам (x_i, y_i) ведется интегрирование (рис. 1.4 и 1.5).

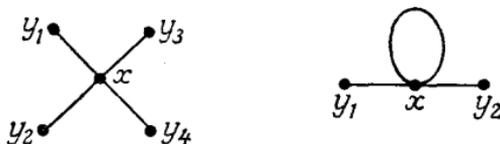


Рис. 1.4. Графическое представление слагаемых, входящих в ω_1 (формула (1.87)).

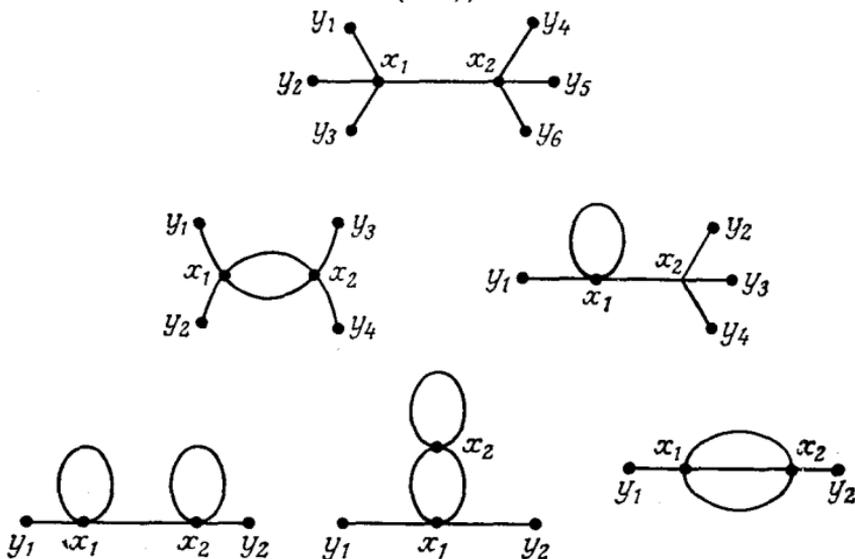


Рис. 1.5. Связные вклады в ω_2 (формула (1.88)).

Первый член в правой части выражения (1.88) $1/2 \omega_1^2$ соответствует несвязным диаграммам. В связанные функции Грина, определенные равенством (1.76),

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \ln \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \quad (1.89)$$

такие члены вклада не дают. Покажем это в явном виде, применив формулу (1.78):

$$\begin{aligned} \ln W[J] &= \ln W_0[J] + \ln \{1 + W_0^{-1}[J](W[J] - W_0[J])\} = \\ &= \ln W_0[J] + \ln \{1 + W_0^{-1}[J](e^{\langle \varphi |} - 1) W_0[J]\}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Так как величина $W_0^{-1}(e^{\langle \varphi |} - 1) W_0$ мала при малых λ , логарифм в (1.90) можно разложить в ряд теории возмущений. Тогда из выражения (1.85) следует

$$\begin{aligned} \ln W[J] &= \ln W_0[J] + (\lambda\omega_1 + \lambda^2\omega_2 + \dots) - \frac{1}{2}(\lambda\omega_1 + \lambda^2\omega_2 + \dots)^2 + \dots \\ &\dots = \ln W_0[J] + \lambda\omega_1 + \lambda^2\left(\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_1^2\right) + \dots \end{aligned} \quad (1.91)$$

Итак, вклад несвязных диаграмм $1/2\omega_1^2$, входящий в ω_2 , действительно сокращается. Несложно обобщить этот результат, доказав, что вклады всех несвязных диаграмм сокращаются в выражении для $\ln W[J]$.

Заметим, что теорема Вика следует из простого правила функционального дифференцирования:

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \int J(z) \delta(z - y) dz = \delta(y - x). \quad (1.92)$$

Различные (евклидовы) функции Грина получаются из определения (1.89). Например, члены с четырьмя множителями J в (1.87) и (1.88) дают четырехточечную функцию в первом и втором порядках теории возмущений. Эти выражения совпадают с выражениями (1.33) и (1.35) (с пропагатором, заданным формулой (1.14)) с тем лишь отличием, что теперь они записаны в евклидовом пространстве.

Аналитическое продолжение $\bar{x}_\mu \rightarrow x_\mu$ и $\bar{x}_\mu \rightarrow k_\mu$ функции $\Delta(\bar{x} - \bar{y})$ в (1.84) приводит к хорошо известному фейнмановскому пропагатору (1.14):

$$-\Delta(\bar{x} - \bar{y}) \rightarrow i\Delta_F(x - y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}.$$

Член $i\epsilon$ в знаменателе указывает на характер граничных условий, которые следует наложить на пропагатор. Он соответствует дополнительному слагаемому $1/2i\epsilon\phi^2$ в лагранжиане, которое обеспечивает сходимость функционального интеграла (1.77) в пространстве Минковского.

Очевидно, что в рамках формализма функционального интегрирования получается тот же самый набор правил Фейнмана, который мы кратко рассмотрели в разд. 1.1. Мы отсылаем читателя к приложению Б, представляющему собой практическое руководство по выводу правил Фейнмана.

1.3. КВАНТОВАНИЕ ФЕРМИ-ПОЛЕЙ

В этом разделе мы опишем процедуру квантования для фермионных систем. После краткого изложения канонического формализма мы покажем, как можно сформулировать схему квантования с помощью функционального интегрирования (см., например, [44]). Для этого потребуются некоторые сведения об алгебрах Грассмана.

Каноническое квантование для фермионов

В разд. 1.1 мы изложили процедуру канонического квантования для скалярного поля. Статистика Бозе — Эйнштейна естественным образом следует из коммутационных соотношений (1.11) для операторов рождения и уничтожения частиц, или, что то же самое, из коммутационных соотношений (1.3) для операторов скалярного поля. Для того чтобы выполнялся принцип запрета Паули для систем с несколькими фермионами, операторы поля должны удовлетворять антикоммутационным соотношениям. Рассмотрим случай свободного поля Дирака:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (1.93)$$

Из (1.2) получаем уравнение Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (1.94)$$

В квантовой теории мы постулируем, что поле $\psi(x)$ и сопряженный ему импульс $\pi(x) = i\psi^\dagger(x)$ являются операторами, удовлетворяющими каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t)\} &= \{\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0, \end{aligned}$$

где $\{A, B\} \equiv AB + BA$. Прделав выкладки, аналогичные тем, которые мы проводили в разд. 1.1 для скалярного случая, можно формально решить уравнение Дирака и вычислить фейнмановский пропагатор:

$$\begin{aligned} iS_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} &\equiv \langle 0 | T(\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\hat{k} - m + ie} \right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x_1 - x_2)}. \quad (1.95) \end{aligned}$$

Повторяя почти дословно рассуждения для скалярного случая (разд. 1.1), можно построить правила Фейнмана и решение по теории возмущений для взаимодействующих ферми-полей. Мы не будем проводить эти выкладки, а заметим лишь, что следствием антикоммутационных соотношений является наличие знака минус для каждой замкнутой фермионной петли в фейнмановской диаграмме.

Квантование фермионов с помощью функционального интеграла

Систему фермионов можно также проквантовать, выразив амплитуду перехода непосредственно через сумму по всем возможным мировым линиям, соединяющим начальное и конечное состояния. Производящий функционал в этом случае имеет вид

$$W[\eta, \bar{\eta}] = \int [d\psi(x)][d\bar{\psi}(x)] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi] \right\}, \quad (1.96)$$

где $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$ — (классические) фермионные поля и поля источников соответственно. Если сумма по путям для бозе-системы является функциональным интегралом по обычным c -числовым функциям (классическим скалярным полям), то функциональный интеграл (1.96) должен вычисляться по антикоммутирующим c -числовым функциям («классическим» фермионным полям):

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(x')\} &= \{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\} = 0, \\ \{\eta(x), \eta(x')\} &= \{\eta(x), \bar{\eta}(x')\} = \{\bar{\eta}(x), \bar{\eta}(x')\} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, эти функции являются элементами алгебры Грассмана. В следующем пункте мы дадим краткое введение в теорию алгебры Грассмана.

Алгебра Грассмана

n -Мерная алгебра Грассмана задается n образующими $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, удовлетворяющими условиям

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.97)$$

и любой элемент алгебры может быть записан в виде конечного ряда

$$p(\theta) = P_0 + P_{i_1}^{(1)}\theta_{i_1} + P_{i_1 i_2}^{(2)}\theta_{i_1}\theta_{i_2} + \dots + P_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\theta_{i_1} \dots \theta_{i_n},$$

где каждый индекс суммирования принимает значения от 1 до n . Это разложение обрывается благодаря условиям (1.97). Рассмотрим теперь дифференцирование и интегрирование в такой алгебре. Прежде чем сформулировать общие результаты для n -мерной алгебры, мы сначала обоснуем их для простейшего случая с одной переменной Грассмана

$$\{\theta, \theta\} = 0 \quad \text{или} \quad \theta^2 = 0. \quad (1.98)$$

Таким образом, любой элемент этой алгебры имеет следующее простое разложение:

$$p(\theta) = P_0 + \theta P_1. \quad (1.99)$$

Если в качестве $p(\theta)$ взять обычное число, то P_0 и P_1 будут обычным и грассмановым числами соответственно. (Мы можем считать, что эта одномерная алгебра Грассмана вложена в алгебру большей размерности так, что имеется более чем один антикоммутирующий элемент.)

Дифференцировать можно справа и слева в соответствии с основным определением

$$\frac{d}{d\theta} \theta = \theta \frac{\overleftarrow{d}}{d\theta} = 1. \quad (1.100)$$

Для элемента $p(\theta)$ «левая производная» равна

$$\frac{d}{d\theta} p(\theta) = P_1, \quad (1.101)$$

а «правая производная»

$$p(\theta) \frac{\overleftarrow{d}}{d\theta} = -P_1, \quad (1.102)$$

так как $(dP_0/d\theta) = 0$ и $(d/d\theta)$ антикоммутирует с P_1 .

Введем теперь операцию интегрирования, которая обычно определяется как обратная по отношению к операции дифференцирования. Но в алгебре Грассмана для производной любого типа выполняется равенство

$$\frac{d^2}{d\theta^2} p(\theta) = 0, \quad (1.103)$$

и определить операцию, обратную дифференцированию, не удастся. Поэтому определим операцию интегрирования формально так, чтобы она обладала некоторыми общими свойствами, которые, согласно нашим интуитивным представлениям, должны быть присущи интегралу. Потребуем, чтобы интеграл был инвариантен при сдвиге переменной интегрирования на константу. Тогда

$$\int d\theta p(\theta) = \int d\theta p(\theta + \alpha). \quad (1.104)$$

Используя явный вид $p(\theta)$ (1.99), получаем

$$\int d\theta P_1 \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \int d\theta = 0, \quad (1.105)$$

где α — другой элемент алгебры Грассмана, не зависящий от θ и антикоммутирующий с θ . Мы можем нормировать остающийся интеграл следующим образом:

$$\int d\theta \theta = 1. \quad (1.106)$$

Из равенств (1.105) и (1.106) следует

$$\int d\theta p(\theta) = P_1. \quad (1.107)$$

Сравнивая с формулой (1.101), мы видим, что интегрирование приводит к тому же результату, что и (левое) дифференцирование:

$$\int d\theta p(\theta) = \frac{d}{d\theta} p(\theta) = P_1. \quad (1.108)$$

Рассмотрим теперь проблему замены переменных интегрирования $\theta \rightarrow \tilde{\theta} = a + b\theta$, где a и b — антикоммутирующее и обычное число соответственно. В случае обычных c -чисел мы имеем известное соотношение

$$\int d\tilde{x} f(\tilde{x}) = \int dx \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right) f(\tilde{x}(x)). \quad (1.109)$$

Как будет выглядеть аналогичное соотношение для грассмано-вых переменных? Учитывая равенства (1.108), находим

$$\int d\tilde{\theta} p(\tilde{\theta}) = \frac{d}{d\tilde{\theta}} p(\tilde{\theta}) = P_1. \quad (1.110)$$

С другой стороны,

$$\int d\theta p(\tilde{\theta}) = \int d\theta b\theta P_1 = bP_1. \quad (1.111)$$

Следовательно,

$$\int d\tilde{\theta} p(\tilde{\theta}) = \int d\theta \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\theta} \right)^{-1} p(\tilde{\theta}(\theta)). \quad (1.112)$$

Таким образом, в формулу для замены антикоммутирующих переменных вместо якобиана перехода, как в обычном случае (1.109), входит обратная величина.

Обобщим теперь наши формулы (1.101), (1.102), (1.105) и (1.106) для одной переменной на случай n -мерной алгебры Грассмана. Здесь мы имеем «левую производную»

$$\frac{d}{d\theta_i} (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n) = \delta_{i1} \theta_2 \dots \theta_n - \delta_{i2} \theta_1 \theta_3 \dots \theta_n + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \delta_{in} \theta_1 \dots \theta_{n-1}$$

и «правую производную»

$$(\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n) \frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i} = \delta_{in} \theta_1 \dots \theta_{n-1} - \dots + (-1)^{n-1} \delta_{i1} \theta_2 \dots \theta_n.$$

Чтобы вычислить левую (правую) производную $(d/d\theta_i)$ выражения $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$, надо переставить с учетом правил антикоммутации переменную θ_i на крайнее левое (правое) место, а затем вычеркнуть θ_i . Символы $d\theta_1, d\theta_2, \dots, d\theta_n$ определяются соотношениями

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = 0, \quad \int d\theta_i = 0, \quad \int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij}, \quad (1.113)$$

что позволяет ввести операцию интегрирования в n -мерном случае. При замене переменных

$$\tilde{\theta}_i = b_{ij}\theta_j \quad (1.114)$$

формула (1.112) обобщается следующим образом:

$$\int d\tilde{\theta}_n \dots d\tilde{\theta}_1 p(\tilde{\theta}) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \left[\det \frac{d\tilde{\theta}}{d\theta} \right]^{-1} p(\tilde{\theta}(\theta)). \quad (1.115)$$

Чтобы вывести эту формулу, надо повторить те же рассуждения, что и в случае одной переменной. Сравним выражения $\int d\tilde{\theta}_n \dots d\tilde{\theta}_1 p(\tilde{\theta})$ и $\int d\theta_n \dots d\theta_1 p(\tilde{\theta}(\theta))$, аналогичные (1.110) и (1.111). Единственные члены в $p(\theta)$, дающие вклад в эти интегралы, — это члены с n множителями $\tilde{\theta}_i$

$$\tilde{\theta}_1 \dots \tilde{\theta}_n = b_{1i_1} \dots b_{ni_n} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_n}. \quad (1.116)$$

Правая часть равенства отлична от нуля лишь в том случае, если все индексы i_1, \dots, i_n различны; при этом мы можем написать

$$\tilde{\theta}_1 \dots \tilde{\theta}_n = b_{1i_1} \dots b_{ni_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_n} = (\det b) \theta_1 \dots \theta_n. \quad (1.117)$$

Но чтобы имели место нормировочные условия (1.113), должно выполняться равенство

$$d\tilde{\theta}_1 \dots d\tilde{\theta}_n = (\det b)^{-1} d\theta_1 \dots d\theta_n, \quad (1.118)$$

которое и приводит к формуле (1.115). Подчеркнем еще раз, что для антикоммутирующих величин интегрирование эквивалентно дифференцированию, поэтому в формулу замены переменных входит $[\det(d\tilde{\theta}/d\theta)]^{-1}$, а не $[\det(d\tilde{\theta}/d\theta)]$.

Как мы уже видели в разд. 1.2, гауссовы интегралы играют важную роль в формализме функционального интегрирования. Нам нужно уметь вычислять интегралы вида

$$G(A) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \exp\left(\frac{1}{2}(\theta, A\theta)\right), \quad (1.119)$$

где A — антисимметричная матрица, а $(\theta, A\theta) = \theta_i A_{ij} \theta_j$. Рассмотрим сначала простой случай $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ -A_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(A) &= \int d\theta_2 d\theta_1 \exp(\theta_1 \theta_2 A_{12}) = \int d\theta_2 d\theta_1 (1 + \theta_1 \theta_2 A_{12}) = \\ &= A_{12} = \sqrt{\det A}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

В общем случае, когда A — антисимметричная матрица размера $n \times n$, приведем ее сначала к стандартному виду с по-

мощью унитарного преобразования (мы считаем здесь n четным числом, так как для нечетных n интеграл обращается в нуль):

$$UAU^\dagger = A_s, \quad (1.121)$$

где

$$A_s = \begin{bmatrix} a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.122)$$

Матрицу U можно построить следующим образом. Поскольку матрица iA эрмитова, существует унитарное преобразование V , приводящее ее к диагональному виду:

$$V(iA)V^\dagger = A_d. \quad (1.123)$$

Здесь A_d — вещественная диагональная матрица, причем диагональные элементы являются корнями следующего секулярного уравнения:

$$\det|iA - \lambda I| = 0. \quad (1.124)$$

Так как $A^T = -A$, то имеем $\det|iA - \lambda I|^T = \det|-iA - \lambda I| = 0$. Следовательно, если λ — решение уравнения (1.124), то и $(-\lambda)$ является его решением, и матрица A_d имеет вид

$$A_d = \begin{bmatrix} a & & & & \\ & -a & & & \\ & & b & & \\ & & & -b & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.125)$$

Чтобы привести A_d к стандартному виду (1.122), используем унитарную матрицу 2×2 :

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad (1.126)$$

обладающую свойством

$$S_2(-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.127)$$

Следовательно, $S(-iA_d)S^\dagger = A_s$, где

$$S = \begin{pmatrix} S_2 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.128)$$

и унитарная матрица в равенстве (1.121) должна быть произведением вида $U = SV$, так как $(SV) A (SV)^\dagger = S(-iA_d) S^\dagger = A_s$. Далее, пусть

$$T = \begin{bmatrix} a^{-1/2} & & & & & \\ & a^{-1/2} & & & & \\ & & b^{-1/2} & & & \\ & & & b^{-1/2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.129)$$

Таким образом,

$$\det(T^{-1}) = \sqrt{\det A} \quad (1.130)$$

и справедливы равенства

$$T(UAU^\dagger)T = T A_s T \equiv \bar{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.131)$$

Гауссов интеграл (1.119) может быть записан в виде

$$G(A) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \exp\left(\frac{1}{2}(\theta, U^\dagger T^{-1} \bar{A}_s T^{-1} U \theta)\right). \quad (1.132)$$

Выполняя замену переменных интегрирования

$$\bar{\theta} = (T^{-1}U)\theta \quad (1.133)$$

и пользуясь формулой (1.115), получаем

$$G(A) = \int d\bar{\theta}_n \dots d\bar{\theta}_1 \exp\left(\frac{1}{2}(\bar{\theta}, \bar{A}_s \bar{\theta})\right) \left[\det\left(\frac{d\bar{\theta}}{d\theta}\right)\right] = \det\left(\frac{d\bar{\theta}}{d\theta}\right). \quad (1.134)$$

Из равенств (1.133) и (1.134) следует соотношение

$$\det\left(\frac{d\bar{\theta}}{d\theta}\right) = \det(T^{-1}U) = \det(T^{-1}) = \sqrt{\det A}, \quad (1.135)$$

и в результате находим

$$G(A) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \exp\left(\frac{1}{2}(\theta, A\theta)\right) = \sqrt{\det A}. \quad (1.136)$$

Эта формула существенно отличается от формулы для гауссова интеграла в случае коммутирующих вещественных переменных

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \dots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x, Ax)\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \quad (1.137)$$

или в случае обычных коммутирующих комплексных переменных ($z = x + iy$):

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{\pi}} \dots \frac{dz_n}{\sqrt{\pi}} \frac{dz_1^*}{\sqrt{\pi}} \dots \frac{dz_n^*}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^* A z) = \frac{1}{\det A}, \quad (1.138)$$

где $\int dz dz^* = \int dx dy$. Нетрудно показать, что гауссов интеграл для комплексных грассмановых переменных равен

$$\int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \dots d\theta_n d\bar{\theta}_n \exp(\bar{\theta} A \theta) = \det A. \quad (1.139)$$

Здесь θ_i и $\bar{\theta}_i$ — независимые образующие алгебры.

Будем считать теперь классические фермионные поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ элементами бесконечномерной алгебры Грассмана. Все

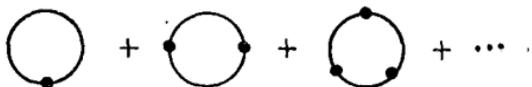


Рис. 1.6. Амплитуда вакуум-вакуумного перехода, представленная как последовательность диаграмм с одной замкнутой петлей.

результаты, полученные выше для n переменных, можно непосредственно обобщить на случай полей.

Поскольку фермионные поля обычно входят в лагранжиан квадратично, $\mathcal{L} = (\bar{\psi}, A\psi)$, функциональный интеграл (1.96) можно считать обобщением гауссова интеграла. Тогда, пользуясь формулой (1.139), получим

$$\mathcal{W} = \int [d\psi(x)] [d\bar{\psi}(x)] \exp \left\{ \int d^4x \bar{\psi} A \psi \right\} = \det A. \quad (1.140)$$

Здесь мы опустили члены с внешними источниками. Величина \mathcal{W} является амплитудой вакуум-вакуумного перехода, и (связные) диаграммы Фейнмана, порожденные $\ln \mathcal{W}$, образуют набор графов с одной замкнутой фермионной петлей (рис. 1.6). Когда мы переходим от обычного функционального интеграла (1.138) к функциональному интегралу по антикоммутирующим переменным (1.140), $(\det A)^{-1}$ заменяется на $\det A$, что приводит к изменению общего знака $\ln \mathcal{W}$. Отсюда следует хорошо известное правило Фейнмана: каждой замкнутой фермионной петле необходимо приписать множитель (-1) .

Согласно гл. 1, если задана любая квантовая теория поля, то для нее можно построить правила Фейнмана, позволяющие вычислять функции Грина и элементы S -матрицы по теории возмущений. Но в релятивистской теории поля при вычислении диаграмм, содержащих петли, мы сразу же сталкиваемся с бесконечностями. Они возникают из-за того, что интегрирование по петлевому импульсу всегда производится от нуля до бесконечности. Другими словами, для релятивистской теории нет естественного обрезания по импульсу. Эти бесконечности делают наши вычисления бессмысленными. Теория перенормировок дает рецепт, позволяющий систематически выделять и устранять все такие бесконечности из физически наблюдаемых величин. Разработка теории перенормировок имела решающее значение в развитии релятивистской квантовой теории поля.

Важно подчеркнуть, что перенормировки имеют общий характер и присущи не только релятивистской теории поля. Потребность в перенормировках вызывается глубокими физическими причинами, а не только необходимостью удалить бесконечности. Даже в полностью конечной теории мы должны перенормировать физические величины. Следующий пример иллюстрирует это утверждение. Рассмотрим электрон, движущийся внутри твердого тела. Поскольку он взаимодействует с кристаллической решеткой, его эффективная масса, определяющая реакцию электрона на внешнее воздействие, равна m^* и, конечно, отличается от массы свободного электрона m , измеренной вне решетки. Масса электрона меняется (перенормируется) от m до m^* в результате взаимодействия с решеткой твердого тела. В этом простом примере в принципе можно измерить как m^* , так и m , включая или выключая взаимодействие (т. е. помещая электрон внутри или вне тела). Очевидно, что разность между ними конечна, так как обе величины, m и m^* , конечны и измеримы. В случае релятивистской теории поля ситуация аналогична, за исключением двух важных моментов. Во-первых, перенормировки, связанные со взаимодействием, обычно бесконечны (что обусловлено расходимостью интегралов, соответствующих петлевым диаграммам). Во-вторых, у нас нет способа выключи-

читать взаимодействие, поэтому нельзя измерить *неперенормированные* (голые) величины, т. е. величины в отсутствие взаимодействия. Например, в квантовой электродинамике разность между голой массой электрона m и его перенормированной массой m^* бесконечна, и голую массу нельзя измерить, так как электрон постоянно взаимодействует с полем виртуальных фотонов и это взаимодействие невозможно выключить.

Идея перенормировок, т. е. удаления бесконечностей из физически измеримых величин, состоит в том, чтобы переместить все бесконечности в голые величины. Другими словами, с самого начала предполагается, что неперенормированные величины содержат расходимости нужного вида, а бесконечная перенормировка, обусловленная взаимодействием, сокращает эти расходимости и приводит к конечным перенормированным величинам. Подчеркнем еще раз, что в релятивистской теории поля перенормированные величины физически измеримы, в то время как голые величины измерить нельзя. Такая программа перенормировок первоначально была сформулирована для квантовой электродинамики (КЭД) Фейнманом [135], Швингером [348, 349], Томонагой [390] и Дайсоном [119] и оказалась весьма успешной: в КЭД было достигнуто поразительное согласие между теорией и экспериментом.

Теория перенормировок довольно сложна с технической точки зрения. Детальное и полное изложение этого вопроса не входит в задачи данной книги. В настоящей главе мы поясним идеи, лежащие в основе теории перенормировок, и приведем примеры, показывающие, как она работает.

2.1. СТАНДАРТНЫЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ТЕОРИИ $\lambda\phi^4$

Сначала в качестве простого примера, иллюстрирующего процедуру перенормировок, рассмотрим теорию $\lambda\phi^4$. Лагранжева плотность разбивается на свободную часть и часть, описывающую взаимодействие:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (2.1)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi_0)^2 - \mu_0^2 \phi_0^2], \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi_0^4. \quad (2.3)$$

Пропагатор и вершина в этой теории показаны на рис. 2.1.

Мы будем в основном рассматривать *одночастично-неприводимые* (1 ЧН) диаграммы. Так называют диаграммы, которые нельзя разбить на несвязные части, разрезая одну из внутренних линий. Соответственно введем понятие одночастично-неприводимой функции Грина, содержащей вклады только от 1 ЧН-

диаграмм; обозначим ее $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$. Например, граф на рис. 2.2, *а* является одночастично-неприводимым, в то время как граф на рис. 2.2, *б* таковым не является. Причина того, что мы

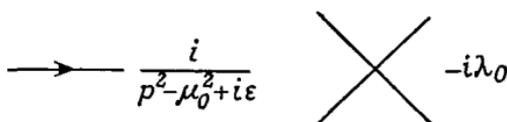


Рис. 2.1.

рассматриваем лишь 1 ЧН-диаграммы, состоит в том, что любую одночастично-приводимую диаграмму можно разложить на 1 ЧН-диаграммы без дополнительных интегрирований по петлям. Поэтому если мы научимся устранять расходимости в

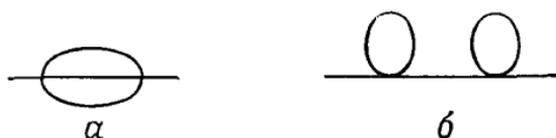


Рис. 2.2.



Рис. 2.3. Пропагатор как сумма диаграмм с одночастично-неприводимыми собственно-энергетическими вставками.

1 ЧН-диаграммах, то сможем работать и с приводимыми диаграммами. Например, двухточечная функция Грина (полный пропагатор)

$$i\Delta(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T(\phi_0(x)(x)\phi_0(0)) | 0 \rangle \quad (2.4)$$

может быть представлена через 1 ЧН-функцию собственной энергии $\Sigma(p^2)$, как показано на рис. 2.3. Тогда этот пропагатор можно записать в виде

$$\begin{aligned} i\Delta(p) &= \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} + \dots = \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} \left[\frac{1}{1 + i\Sigma(p^2) \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}} \right] = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ясно, что если собственную энергию $\Sigma(p^2)$ можно сделать конечной, то и полный пропагатор $\Delta(p)$ также будет конечным.

Поскольку древесные (беспетлевые) диаграммы не содержат расходимостей, мы начнем наши вычисления с однопетлевых 1 ЧН-диаграмм. Нетрудно проверить, что на рис. 2.4 и 2.5 представлены все однопетлевые расходящиеся 1 ЧН-диаграммы

теории $\lambda\phi^4$. На рис. 2.4 изображен граф собственно-энергетического типа, дающий вклад

$$-i\Sigma(p^2) = -\frac{i\lambda_0}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Множитель $1/2$ есть фактор симметрии, примеры вычисления подобных факторов приведены в разд. 1.1. В нашем случае его также можно вычислить следующим образом: существует $4 \cdot 3 = 12$ способов «спаривания» полей $\phi(x_1)\phi(x_2)$ в члене взаимодействия $\phi^4(x)$. Учитывая множитель $1/4!$ в (2.3), получаем требуемый фактор $12/4! = 1/2$. Интеграл в выражении

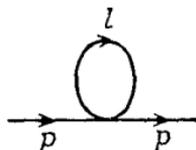


Рис. 2.4.

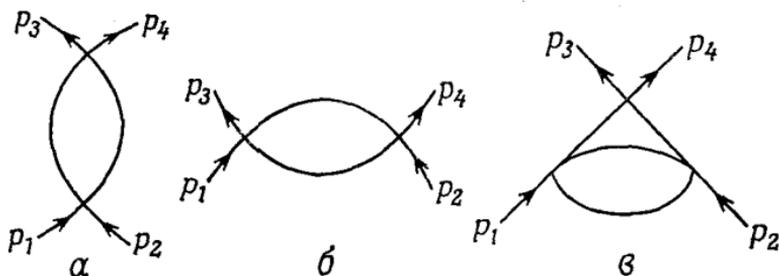


Рис. 2.5.

(2.6) расходится квадратично. На рис. 2.5 показаны диаграммы, соответствующие поправкам к вершинной функции; их вклады равны

$$\Gamma_\alpha = \Gamma(p^2) = \Gamma(s) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{(l-p)^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} \frac{i}{l^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon}, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_\beta = \Gamma(t), \quad \Gamma_\gamma = \Gamma(u), \quad (2.8)$$

где

$$s = p^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (2.9)$$

— переменные Мандельштама. Интегралы в (2.7) и (2.8) расходятся логарифмически.

Программа перенормировок предполагает, что в качестве первого шага в теории вводится некоторая подходящая регуляризация, делающая все расходящиеся интегралы конечными. После этого мы можем (формально) свободно манипулировать выражениями, которые будут становиться бесконечными лишь при снятии регуляризации в конце вычислений (например, если

регуляризация осуществляется обрезанием импульсных интегралов на верхнем пределе, то при стремлении параметра обрезания к бесконечности). В разд. 2.3 мы рассмотрим наиболее распространенные способы регуляризации. Необходимо принять во внимание, что в дальнейшем под расходимостями мы будем понимать регуляризованные расходящиеся выражения, которые на промежуточных этапах вычислений конечны и зависят от параметра регуляризации (например, от параметра обрезания).

Сначала выражение для любой расходящейся диаграммы мы разделим на расходящуюся и конечную части, а затем включим расходящуюся часть в массу, константу связи и операторы поля путем соответствующего переопределения этих величин. Чтобы осуществить такое разделение, воспользуемся одним важным свойством интегралов (2.6) и (2.7): каждое дифференцирование расходящегося интеграла по внешнему импульсу увеличивает степень внутренних импульсов в знаменателе и делает интеграл «менее расходящимся». (Мы имеем дело здесь с так называемыми «примитивно расходящимися» диаграммами; более подробно этот вопрос обсуждается в разд. 2.2.) Таким образом, если продифференцировать выражение достаточное число раз, то оно станет полностью сходящимся. Например, продифференцировав функцию $\Gamma(p^2)$ по p^2 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma(p^2) &= \frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma(p^2) = \\ &= \frac{\lambda_0^2}{p^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l-p)p}{[(l-p)^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon]^2} \frac{1}{l^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Последний интеграл конечен. Этот результат означает, что все расходимости сосредоточены в нескольких первых членах разложения в ряд Тейлора по внешнему импульсу для фейнмановского интеграла. Например, разложение Тейлора для функции $\Gamma(p^2)$ в окрестности точки $p^2 = 0$ имеет вид

$$\Gamma(p^2) = a_0 + a_1 p^2 + \dots + \frac{1}{n!} a_n (p^2)^n + \dots,$$

где

$$a_n = \frac{\partial^n}{\partial p^2} \Gamma(p^2) \Big|_{p^2=0}. \quad (2.11)$$

Коэффициенты a_n при $n \geq 1$ конечны, и лишь a_0 содержит логарифмическую расходимость. Просуммировав все конечные члены, мы можем записать

$$\Gamma(s) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(s), \quad (2.12)$$

где $\Gamma(0)$ — расходящаяся величина, а $\tilde{\Gamma}(s)$ конечна и обладает свойством

$$\tilde{\Gamma}(0) = 0. \quad (2.13)$$

Функции $\Gamma(0)$ и $\tilde{\Gamma}(s)$ вычисляются в явном виде в разд. 2.3. Заметим, что величина $\tilde{\Gamma}(s)$ есть не что иное, как первоначальная функция $\Gamma(s)$, из которой вычтено ее значение в точке $s=0$. Поэтому описанную выше процедуру часто называют *вычитанием*.

Ниже мы воспользуемся разложением в ряд Тейлора для выражений (2.6) и (2.7), чтобы отделить расходящуюся часть от конечной, а затем включим расходящуюся часть в голые величины путем их переопределения.

Перенормировки массы и волновой функции

Вклад в собственную энергию, определяемый выражением (2.6), расходится квадратично. Но этот однопетлевой интеграл обладает особым свойством, а именно: он не зависит от внешнего импульса p . Следовательно, разложение в ряд Тейлора для него тривиально, т. е. $\Sigma(p^2) = \Sigma(0)$. Но это свойство справедливо лишь для однопетлевого приближения в теории $\lambda\phi^4$. Так, уже двухпетлевая собственно-энергетическая диаграмма, показанная на рис. 2.2, а, расходится квадратично и нетривиально зависит от p^2 . Таким образом, разложение в ряд Тейлора по степеням внешнего импульса в окрестности некоторой точки μ^2 для собственной энергии в общем случае имеет два расходящихся члена:

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu^2) + (p^2 - \mu^2)\Sigma'(\mu^2) + \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (2.14)$$

где $\Sigma(\mu^2)$ — квадратично, а $\Sigma'(\mu^2)$ — логарифмически расходящиеся члены, так как каждое дифференцирование по внешнему импульсу $\partial/\partial p_\mu$ понижает степень расходимости на единицу. Величина $\Sigma'(\mu^2)$ может быть записана в виде $1/8(\partial/\partial p_\mu) \times (\partial/\partial p^\mu)\Sigma(p^2)|_{p^2=\mu^2}$. Заметим, что, вообще говоря, в разложение квадратично расходящегося выражения должны входить три расходящихся члена с квадратичной, линейной и логарифмической расходимостями. Но функция $\Sigma(p^2)$ не содержит линейно расходящегося члена, так как он был бы пропорционален p_μ , а это нарушает лоренц-инвариантность. Последнее слабое в (2.14) конечно и удовлетворяет условиям

$$\tilde{\Sigma}(\mu^2) = 0, \quad (2.15)$$

$$\tilde{\Sigma}'(\mu^2) = 0. \quad (2.16)$$

В однопетлевом приближении $\Sigma'(p^2) = \tilde{\Sigma}(p^2) = 0$ для всех p^2 . Но в общем случае эти функции не равны нулю. Подставляя разложение (2.14) в выражение для полного пропагатора (2.5), получаем

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(\mu^2) - (p^2 - \mu^2)\Sigma'(\mu^2) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}. \quad (2.17)$$

Физическая масса определяется как положение полюса пропагатора. Параметр μ^2 , который до сих пор был произвольным, можно выбрать так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$\mu_0^2 + \Sigma(\mu^2) = \mu^2. \quad (2.18)$$

Тогда

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{(p^2 - \mu^2) [1 - \Sigma'(\mu^2)] - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}. \quad (2.19)$$

В силу условия (2.15) функция $\Delta(p)$ имеет полюс в точке $p^2 = \mu^2$. Следовательно, μ^2 — физическая масса, связанная с голой массой уравнением (2.18). Итак, мы осуществили *перенормировку массы*. Поскольку величина $\Sigma(p^2)$ является расходящейся, голая масса μ_0^2 также должна быть расходящейся, чтобы физическая масса была конечной. Теперь мы избавимся от расходящегося члена $\Sigma'(\mu^2)$. Для этого заметим, что функции $\Sigma'(\mu^2)$ и $\tilde{\Sigma}(p^2)$ являются величинами порядка λ_0 (подчеркнем еще раз, что все расходящиеся выражения регуляризованы и конечны). Тогда

$$\tilde{\Sigma}(p^2) \approx [1 - \Sigma'(\mu^2)] \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (2.20)$$

и пропагатор может быть записан в виде

$$i\Delta(p^2) = \frac{iZ_\phi}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}, \quad (2.21)$$

где

$$Z_\phi = [1 - \Sigma'(\mu^2)]^{-1} = 1 + \Sigma'(\mu^2) + O(\lambda_0^2). \quad (2.22)$$

Расходимости входят в мультипликативный фактор и могут быть удалены переопределением полевого оператора ϕ_0 . Точнее, если мы определим *перенормированное поле* ϕ выражением

$$\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_0, \quad (2.23)$$

то перенормированный пропагатор будет иметь вид

$$\begin{aligned} i\Delta_R(p) &= \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T(\phi(x)\phi(0)) | 0 \rangle = \\ &= Z_\phi^{-1} \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T(\phi_0(x)\phi_0(0)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon} = iZ_\phi^{-1} \Delta(p) \end{aligned} \quad (2.24)$$

и будет полностью конечным. Здесь Z_ϕ обычно называют *константой перенормировки волновой функции*. Итак, расходимости собственной энергии могут быть устранены перенормировкой массы (2.18) и волновой функции (2.23).

С помощью перенормированного поля ϕ , определенного выражением (2.23), задаются перенормированные функции Грина $G_R^{(n)}$, связанные с неперенормированными функциями соотно-

шениями

$$G_R^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle = \\ = Z_\phi^{-n/2} \langle 0 | T(\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n)) | 0 \rangle = Z_\phi^{-n/2} G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.25)$$

В импульсном пространстве соответствующие соотношения имеют вид

$$G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_\phi^{-n/2} G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n), \quad (2.26)$$

где

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \\ = \int \left(\prod_{i=1}^n dx_i e^{-ip_i x_i} \right) G_R^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (2.27)$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \\ = \int \left(\prod_{i=1}^n dx_i e^{-ip_i x_i} \right) G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.28)$$

Чтобы перейти от связной функции Грина, входящей в формулу (2.26), к 1 ЧН (усеченной) функции Грина, необходимо вычесть вклады одночастично-приводимых диаграмм, а также удалить пропагаторы, относящиеся к внешним линиям, т. е. удалить $\Delta_R(p_i)$ из $\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ и $\Delta(p_i)$ из $\Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$. Поскольку функции $\Delta_R(p)$ и $\Delta(p)$ связаны соотношением

$$\Delta_R(p_i) = Z_\phi^{-1} \Delta(p_i), \quad (2.29)$$

перенормированные и неперенормированные 1 ЧН-функции Грина удовлетворяют равенству

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_\phi^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \quad (2.30)$$

Перенормировка константы связи

Перейдем теперь к перенормировке одночастично-неприводимой четырехточечной функции Грина, в которую дают вклад диаграммы, представленные на рис. 2.5. С учетом равенств (2.7) и (2.8) эту неперенормированную функцию Грина с точностью до членов порядка λ_0^2 можно записать в виде

$$\Gamma_0(s, t, u) = -i\lambda_0 + \Gamma(s) + \Gamma(t) + \Gamma(u), \quad (2.31)$$

где первый член в правой части есть вклад древесной диаграммы, а последние три члена — расходящиеся однопетлевые вклады. Мы должны устранить эти расходимости переопределением константы связи,

Как можно измерить константу связи теории $\lambda\phi^4$? Поскольку в основной вершине присутствуют четыре частицы, было бы естественно определить константу связи через амплитуду двухчастичного рассеяния, которая физически измерима. Но при обсуждении вопросов перенормировки удобнее определять константу связи через перенормированную одночастично-неприводимую (усеченную) четырехточечную функцию $\Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$, тесно связанную с этой амплитудой. Так как $\Gamma_R^{(4)}$ является функцией кинематических переменных s, t и u (а не постоянной величиной), то, чтобы определить физическую константу связи, необходимо выбрать некоторую точку в кинематической области. Вспоминая, что для частиц, находящихся на массовой поверхности ($p_i^2 = \mu^2$), эти переменные удовлетворяют условию $s + t + u = 4\mu^2$, можно выбрать *симметричную точку*

$$s_0 = t_0 = u_0 = 4\mu^2/3. \quad (2.32)$$

Тогда

$$\Gamma_R^{(4)}(s_0, t_0, u_0) = -i\lambda, \quad (2.33)$$

где λ — физическая константа связи.

Разделим теперь неперенормированную функцию (2.31) на расходящуюся и конечную части, разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности симметричной точки (2.32):

$$\Gamma_0^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u), \quad (2.34)$$

где величина $\tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s) - \Gamma(s_0)$ конечна и обладает свойством

$$\tilde{\Gamma}(s_0) = 0. \quad (2.35)$$

Определим константу перенормировки вершины Z_λ соотношением

$$-iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 = -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0). \quad (2.36)$$

Равенство (2.34) принимает вид

$$\Gamma_0^{(4)}(s, t, u) = -iZ_\lambda^{-1}\lambda_0 + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u), \quad (2.37)$$

причем в симметричной точке имеем

$$\Gamma_0^{(4)}(s_0, t_0, u_0) = -iZ_\lambda^{-1}\lambda_0. \quad (2.38)$$

Из соотношения (2.30) между неперенормированными и перенормированными 1 ЧН-функциями Грина следует

$$\Gamma_R^{(4)}(s, t, u) = Z_\phi^2 \Gamma_0^{(4)}(s, t, u). \quad (2.39)$$

Наконец, из равенств (2.33), (2.38) и (2.39) видно, что перенормированная (физическая) константа связи λ , определенная формулой (2.33), связана с неперенормированной константой

связи λ_0 следующим образом:

$$\lambda = Z_\phi^2 Z_\lambda^{-1} \lambda_0. \quad (2.40)$$

Теперь легко показать, что перенормированная 1 ЧН четырехточечная функция конечна. Из соотношений (2.37), (2.39) и (2.40) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4) &= Z_\phi^2 \Gamma_0^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = \\ &= -iZ_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0 + Z_\phi^2 [\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] = \\ &= -i\lambda + Z_\phi^2 [\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Поскольку $Z_\phi = 1 + O(\lambda_0)$, $\tilde{\Gamma} = O(\lambda_0^2)$, а $\lambda = \lambda_0 + O(\lambda_0^2)$, с точностью до членов порядка λ^2 можно записать

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = -i\lambda + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) + O(\lambda^3). \quad (2.42)$$

Это выражение конечно.

Чтобы перенормировать связную четырехточечную функцию Грина с учетом однопетлевого приближения, мы должны добавить вклад однопетлевой диаграммы, показанной на рис. 2.6,

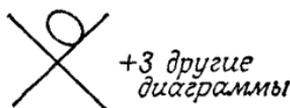


Рис. 2.6.

и приписать по одному полному пропагатору каждой внешней линии. Следовательно, перенормированная функция Грина $G_0^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$ дается формулой

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(p_1, \dots, p_4) &= \left[\prod_{j=1}^4 \left(\frac{1}{p_j^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} \right) \right] \left\{ -i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \right. \\ &\left. + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u) + (-i\lambda_0) \sum_{k=1}^4 [-i\Sigma(p_k^2)] \left(\frac{i}{p_k^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Первый и последний члены в формуле (2.43) удобно объединить следующим образом:

$$\begin{aligned} (-i\lambda_0) \left[\prod_{j=1}^4 \left(\frac{1}{p_j^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} \right) \right] \left[1 + \sum_{k=1}^4 \Sigma(p_k^2) \left(\frac{1}{p_k^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} \right) \right] = \\ = (-i\lambda_0) \left[\prod_{j=1}^4 \left(\frac{1}{p_j^2 - \mu_0^2 - \sum (p_j^2) + i\varepsilon} \right) \right] + O(\lambda_0^3). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Поскольку $\Gamma \sim O(\lambda_0^2)$, $\tilde{\Gamma} \sim O(\lambda_0^2)$, справедливо также соотношение

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{j=1}^4 \left(\frac{1}{p_j^2 - \mu_0^2 + i\varepsilon} \right) [3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] \right] = \\ & = \left[\prod_{j=1}^4 \left(\frac{1}{p_j^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p_j^2) + i\varepsilon} \right) \right] [3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \\ & \quad + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] + O(\lambda_0^3). \quad (2.45) \end{aligned}$$

Используя соотношения (2.44) и (2.45), формулу (2.43) можно представить в виде

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(p_1, \dots, p_4) &= \prod_{j=1}^4 \left[\frac{1}{p_j^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p_j^2)} \right] [-i\lambda_0 + 3\Gamma(s_0) + \tilde{\Gamma}(s) + \\ & \quad + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)] = \left[\prod_{j=1}^4 i\Delta(p_j) \right] \Gamma_0^{(4)}(p_1, \dots, p_4), \quad (2.46) \end{aligned}$$

где учтены также соотношения (2.5) и (2.31). Согласно равенству (2.26), перенормированная четырехточечная функция Грина определена следующим образом:

$$G_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = Z_\phi^{-2} G_0^{(4)}(p_1, \dots, p_4). \quad (2.47)$$

Тогда из формулы (2.46) и соотношений (2.29) и (2.39) между перенормированными и неперенормированными величинами получаем

$$\begin{aligned} G_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4) &= Z_\phi^{-2} \left[Z_\phi^4 \prod_{j=1}^4 i\Delta_R(p_j) \right] Z_\phi^{-2} \Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = \\ &= \prod_{j=1}^4 [i\Delta_R(p_j)] \Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4). \quad (2.48) \end{aligned}$$

Функция $G_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$ также конечна, поскольку, как было показано выше, конечны $\Delta_R(p)$ и $\Gamma_R^{(4)}(p_1, \dots, p_4)$.

Итак, мы убедились, что перенормировки массы, волновой функции и вершины устраняют все расходимости в двух- и четырехточечных функциях Грина в однопетлевом приближении. В других 1 ЧН-диаграммах нет расходимостей, хотя одночастично-приводимые диаграммы, входящие в функции с большим числом внешних концов, содержат расходящиеся однопетлевые подграфы. Например, показанная на рис. 2.7 диаграмма, дающая вклад в шеститочечную функцию Грина, расходится. Ясно, однако, что в данном случае расходимость целиком порождается расходимостью четырехточечной функции и поэтому

будет устранена после перенормировки четырехточечной вершинной функции.

Подведем итоги. Функции Грина можно сделать конечными, если выразить голые величины через перенормированные с помощью соотношений (2.18), (2.23) и (2.40):

$$\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_0, \quad (2.49)$$

$$\lambda = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0, \quad (2.50)$$

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \delta\mu^2, \quad (2.51)$$

где $\delta\mu^2 = \Sigma(\mu^2)$. Сформулируем это утверждение более строго. Если в любой n -точечной функции Грина мы выразим голую

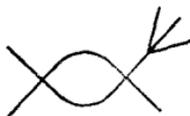


Рис. 2.7.

массу μ_0 и голую константу связи λ_0 через перенормированные массу μ и константу связи λ и, кроме того, согласно формуле (2.26), умножим выражение на $Z_\phi^{-1/2}$ столько раз, сколько имеется внешних полей, то результат (перенормированная n -точечная функция Грина) будет полностью конечным:

$$G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda, \mu) = Z_\phi^{-n/2} G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda_0, \mu_0, \Lambda), \quad (2.52)$$

где Λ — параметр обрезания, необходимый для того, чтобы придать смысл расходящимся интегралам. Свойство теории, состоящее в том, что после того, как λ_0 и μ_0 выражены через λ и μ , все расходимости собираются в некоторые мультипликативные константы ($Z_\phi^{-n/2}$ в равенстве (2.52)), называется *мультипликативной перенормируемостью*. Эквивалентно, 1 ЧН-функции Грина могут быть сделаны конечными, если, согласно формуле (2.30), мы умножим их на $Z_\phi^{n/2}$ и выразим голые параметры λ_0, μ_0 через физические величины λ, μ :

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda, \mu) = Z_\phi^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda_0, \mu_0, \Lambda). \quad (2.53)$$

Процедуру устранения расходимостей, описанную в настоящем разделе, мы будем называть *стандартной схемой перенормировок*. Она тесно связана с той схемой, которая исторически была сформулирована первой.

2.2. БПХ-ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ТЕОРИИ $\lambda\phi^4$

Схема БПХ-перенормировок, развитая в работах Боголюбова и Парасюка [55], Хеппа [218] и Циммермана [444], полностью эквивалентна стандартной схеме перенормировок. Эта альтер-

нативная формулировка программы устранения расходимостей часто бывает более удобной в многочисленных приложениях теории перенормировок. В настоящем разделе мы просто проиллюстрируем связь между этими двумя схемами перенормировок. Краткое и ясное изложение этого вопроса дано в работе Коулмена [91].

В исходном (неперенормированном) лагранжиане (2.1)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi_0)^2 - \mu_0^2 \phi_0^2] - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \quad (2.54)$$

можно заменить голые величины перенормированными, используя соотношения (2.49), (2.50) и (2.51). При этом мы получим

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L},$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.55)$$

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{(Z_\phi - 1)}{2} [(\partial_\nu \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] + \frac{\delta\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda(Z_\lambda - 1)}{4!} \phi^4. \quad (2.56)$$

Функция \mathcal{L} , называемая перенормированной лагранжевой плотностью, имеет точно такой же вид, как \mathcal{L}_0 , но с тем отличием, что вместо неперенормированных величин содержит перенормированные. Слагаемое $\Delta\mathcal{L}$ содержит расходящиеся константы перенормировок. Члены $(Z_\phi - 1)$, $(Z_\lambda - 1)$ и $\delta\mu^2$ все порядка λ , и, следовательно, $\Delta\mathcal{L}$ того же порядка, что и $\lambda\mathcal{L}$. Мы будем называть $\Delta\mathcal{L}$ *лагранжианом контрчленов*.

Процедура БПХ-перенормировок состоит из следующих этапов.

1. С помощью перенормированного лагранжиана (2.55) строим пропагаторы и вершины.

2. Выделяем расходящиеся части однопетлевых 1 ЧН-диаграмм с помощью разложения в ряд Тейлора. Затем строим набор контрчленов $\Delta\mathcal{L}^{(1)}$ таким образом, чтобы эти однопетлевые расходимости сокращались.

3. Новый лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}^{(1)}$ используем для определения двухпетлевых диаграмм и построения контрчленов $\Delta\mathcal{L}^{(2)}$, сокращающих все расходимости вплоть до двухпетлевых. Последовательность этих операций применяется итеративно.

Результирующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}^{(\infty)} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L},$$

где лагранжиан контрчленов является суммой

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}^{(1)} + \Delta\mathcal{L}^{(2)} + \dots + \Delta\mathcal{L}^{(n)} + \dots \quad (2.57)$$

Для того чтобы показать, что такая схема перенормировок эквивалентна стандартной, которая непосредственно связана с неперенормированной теорией возмущений, необходимо убе-

даться в том, что контрчлены (2.57) имеют ту же структуру, что и выражение (2.56). Для этого мы исследуем контрчлены, используя метод подсчета степеней расходимостей.

Метод подсчета степеней расходимостей

Чтобы проанализировать структуру расходимостей произвольной диаграммы Фейнмана, введем для нее понятие *условнои степени расходимости* D . Она равна общей степени петлевых импульсов в числителе минус общая степень петлевых импульсов в знаменателе подынтегрального выражения, соответствующего данной диаграмме. Например, для графа, показанного на рис. 2.8, $D = 4 - 4 = 0$. Следовательно, можно ожидать,

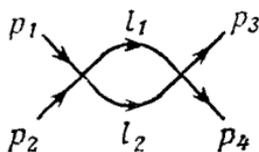


Рис. 2.8.

что диаграмма будет расходиться логарифмически. Чтобы вычислить число D для произвольного графа в теории $\lambda\phi^4$, определим следующие величины:

B — число внешних линий,

IB — число внутренних линий,

n — число вершин.

Так как из каждой вершины выходят четыре линии, оба конца внутренней линии входят в вершины, а у внешней линии лишь один конец входит в одну из вершин, то имеет место соотношение

$$4n = 2(IB) + B. \quad (2.58)$$

Нам необходимо связать отдельные члены этого соотношения с числом петлевых импульсов. Обычные правила Фейнмана предписывают нам интегрировать по всем внутренним импульсам, которые не фиксированы законом сохранения импульса, выполняющимся в каждой вершине. Таким образом, естественно ожидать, что число петлевых импульсов L будет равно числу внутренних линий IB минус число вершин n . Но одна из δ -функций, обеспечивающих сохранение импульса в вершинах, выражает общий закон сохранения импульса для всей диаграммы и поэтому не зависит от внутренних импульсов. Например, граф на рис. 2.8 имеет две вершины. Следовательно, выражение для него содержит две δ -функции: $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - l_1 - l_2) \times \delta^{(4)}(l_1 + l_2 - p_3 - p_4)$. Но это выражение эквивалентно следующему: $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - l_1 - l_2)$. В этом случае мы можем исключить только один внутренний импульс, а не

два. Следовательно, имеем

$$L = IB - n + 1. \quad (2.59)$$

Пропагатор, соответствующий внутренней линии, дает вторую степень петлевого импульса в знаменателе. Каждое интегрирование по петле дает четвертую степень петлевого импульса в числителе. В теории $\lambda\phi^4$ выражение, соответствующее вершине,

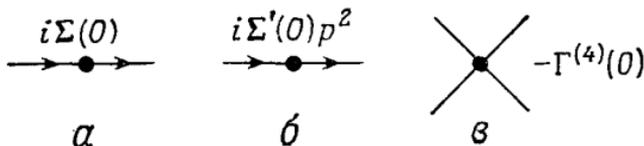


Рис. 2.9. Вершины, соответствующие лагранжиану контрчленов (2.62).

не содержит факторов, зависящих от импульсов, и, следовательно, условная степень расходимости диаграммы равна

$$D = 4L - 2(IB). \quad (2.60)$$

Мы можем исключить величины L и IB из этого выражения, выразив их через B и n с помощью соотношений (2.59) и (2.58):

$$D = 4 - B. \quad (2.61)$$

Так как теория $\lambda\phi^4$ инвариантна при отражении $\phi \rightarrow -\phi$, то число B должно быть четным. Из равенства (2.61) следует, что, согласно подсчету условной степени расходимости, расходятся только двухточечная ($B=2$) и четырехточечная ($B=4$) функции.

С помощью такого подсчета степеней расходимостей, справедливой во всех порядках теории возмущений, можно изучать структуру контрчленов. Для двухточечной функции Грина, согласно формуле (2.61), имеем $D=2$. Таким образом, эта функция расходится квадратично, и нужное нам разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + p^2\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p^2),$$

где слагаемые $\Sigma(0)$ и $\Sigma'(0)$ расходятся, а $\tilde{\Sigma}(p^2)$ конечно. В этом разложении нет члена, линейного по p_μ , так как $\Sigma(p^2)$ является лоренцевым скаляром. Поэтому, чтобы сократить расходимости, необходимо добавить два контрчлена $1/2\Sigma(0)\phi^2 + + 1/2\Sigma'(0)(\partial_\nu\phi)^2$. По правилам Фейнмана им будут соответствовать вершины, изображенные на рис. 2.9, а и б. Для четырехточечной функции Грина условная степень расходимости $D=0$ и разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = \Gamma^{(4)}(0) + \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_i),$$

где $\Gamma^{(4)}(0)$ — логарифмически расходящийся член, который должен сокращаться контрчленом вида $(i\Gamma^{(4)}(0)/4!)\phi^4$. Ему соответствует вершина, представленная на рис. 2.9, в.

Таким образом, общий лагранжиан контрчленов имеет вид

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\Sigma(0)}{2}\phi^2 + \frac{\Sigma'(0)}{2}(\partial_\nu\phi)^2 + \frac{i\Gamma^{(4)}(0)}{4!}\phi^4. \quad (2.62)$$

Очевидно, что он совпадает с выражением (2.56), причем

$$\begin{aligned} \Sigma'(0) &= Z_\phi - 1, \\ \Sigma(0) &= -(Z_\phi - 1)\mu^2 + \delta\mu^2 = -\Sigma'(0)\mu^2 + \delta\mu^2, \\ \Gamma^{(4)}(0) &= -i\lambda(1 - Z_\lambda). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Эти выражения согласуются с выражениями (2.22), (2.51) и (2.36), так как здесь перенормированная константа связи λ определена в точке, где импульсы равны нулю, и $\Gamma^{(4)}(0) = = 3\Gamma(0)$. Таким образом, мы продемонстрировали эквивалентность стандартной схемы и схемы БПХ-перенормировок.

Некоторые замечания о расходимостях поддиаграмм

Мы не будем приводить здесь доказательства того, что схема БПХ-перенормировок устраняет все расходимости в функциях Грина во всех порядках теории возмущений. Ограничимся лишь рядом замечаний относительно некоторых общих особенностей процедуры перенормировок в применении к диаграммам высших порядков, а также свойств сходимости фейнмановских интегралов.

1. Сформулируем без доказательства следующую теорему о сходимости [398]. *Фейнмановский интеграл общего вида сходится, если как условная степень расходимости всего графа, так и условные степени расходимости всех его подграфов отрицательны.* Поясним это утверждение. Рассмотрим диаграмму Фейнмана с n внешними линиями и l петлями. Введем обрезание в импульсном интеграле, чтобы оценить порядок расходимости (Λ — параметр обрезания):

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \int_0^\Lambda d^4q_1 \dots d^4q_l I(p_1, \dots, p_{n-1}; q_1, \dots, q_l). \quad (2.64)$$

Здесь I — произведение вкладов вершин и пропагаторов, зависящее от внешних импульсов p_i и внутренних импульсов q_i . Выберем подмножество $S = \{q'_1, \dots, q'_m\}$ множества петлевых импульсных переменных $\{q_1, \dots, q_l\}$ и одновременно устремим их к бесконечности (точнее, все $q'_i \rightarrow \Lambda$, где $\Lambda \rightarrow \infty$). Будем считать, что все импульсы, не входящие в подмножество S , фикс-

сированы. Пусть $D(S)$ — условная степень расходимости, связанная с интегрированием по данному подмножеству, а именно

$$\left| \int_0^\Lambda d^4q'_1 \dots d^4q'_m I \right| \leq \Lambda^{D(S)} \{\ln \Lambda\}, \quad (2.65)$$

где $\{\ln \Lambda\}$ — некоторая функция $\ln \Lambda$. Тогда сформулированная выше теорема утверждает, что интеграл по $\{q_1, \dots, q_l\}$ схо-

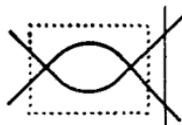


Рис. 2.10.

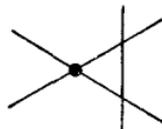


Рис. 2.11.

дится, если величины $D(S)$ для всех возможных подмножеств S отрицательны. Например, диаграмма, изображенная на рис. 2.10, дающая вклад в шеститочечную функцию, имеет $D = -2$. Но интеграл, соответствующий подграфу, заключенному внутри прямоугольника, имеет $D = 0$ и расходится логарифмически. Последовательная схема перенормировок должна систематически устранять все расходимости, в том числе и те, которые относятся к внутренним интегрированим, соответствующим подграфам. В процедуре БПХ-перенормировок расходимости поддиаграмм в действительности устраняются контрчленами более низких порядков. Например, диаграмма на рис. 2.11, содержащая вершину, отвечающую контрчлену, сокращает расходимость поддиаграммы в диаграмме на рис. 2.10.

2. Рассмотрим другой аспект процедуры перенормировок, связанный с диаграммами, содержащими расходящиеся подграфы. Оказывается, что не все расходимости в многопетлевой диаграмме могут быть устранены вычитанием нескольких первых членов разложения в ряд Тейлора по степеням внешних импульсов. Проиллюстрируем это утверждение на следующем примере. Рассмотрим двухпетлевую диаграмму, показанную на рис. 2.12, а. Соответствующий фейнмановский интеграл имеет вид

$$\Gamma_a^{(4)}(p) \sim \lambda^3 [\Gamma(p)]^2, \quad (2.66)$$

где

$$\Gamma(p) = \frac{1}{2} \int d^4l \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \quad (2.67)$$

и $p = p_1 + p_2$. Каждый из множителей $\Gamma(p)$ расходится логарифмически. Но сколько бы раз мы ни дифференцировали величину $\Gamma_a^{(4)}$, ее не удастся сделать конечной, несмотря на то, что условная степень расходимости равна нулю. Но у нас есть

контрчлен $-\lambda^2\Gamma(0)$, отвечающий вычитанию расходимостей на однопетлевом уровне. Он порождает дополнительные вклады, пропорциональные λ^3 , которые изображены на рис. 2.12, б и в, причем $\Gamma_a^{(4)} \sim -\lambda^3\Gamma(p)\Gamma(0)$, а $\Gamma_b^{(4)} \sim -\lambda^3\Gamma(0)\Gamma(p)$ соответственно.

Суммируя вклады трех диаграмм на рис. 2.12, а, б и в, находим

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)}(p) &= \Gamma_a^{(4)} + \Gamma_b^{(4)} + \Gamma_c^{(4)} = \\ &= -\lambda^3[\Gamma(0)]^2 + \lambda^3[\Gamma(p) - \Gamma(0)]^2 = \Gamma^{(4)}(0) + \tilde{\Gamma}^{(4)}(p).\end{aligned}\quad (2.68)$$

Только первый член в правой части расходится, и эта расходимость может быть устранена контрчленом порядка λ^3 вида

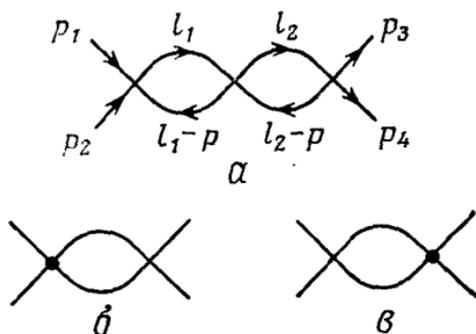


Рис. 2.12. Диаграммы порядка λ^3 , дающие вклад в четырехточечную функцию в s -канале. Темный кружок соответствует контрчлену $-\lambda^2\Gamma(0)$.

$i\Gamma^{(4)}(0)\phi^4/4!$ Этот пример позволяет понять, как после учета контрчленов низших порядков расходимости приобретают вид полинома по внешним импульсам. Для диаграмм с более чем одной петлей оказывается полезным ввести понятие примитивно расходящейся диаграммы. Мы будем называть *примитивно расходящимися* такие диаграммы, для которых общая условная степень расходимости неотрицательна, но все интегрирования по подмножествам импульсов сходятся, т. е. диаграммы, которые расходятся только при стремлении одновременно *всех* петлевых импульсов к бесконечности. Вообще говоря, только для примитивно расходящихся графов (один из них показан на рис. 2.13) можно выделить расходимости непосредственно с помощью разложения в ряд Тейлора. Для диаграмм, не являющихся примитивно расходящимися, расходящиеся выражения принимают форму полинома по внешним импульсам лишь после учета контрчленов низших порядков.

3. В приведенном выше примере двухпетлевой диаграммы, имеющей четыре внешних линии, мы видели, что расходимость графа как целого может быть выделена, если учесть диаграммы с контрчленами низших порядков. Очень просто показать, что

это имеет место для любых *одновершинно-приводимых* диаграмм, в которых интегралы, соответствующие расходящимся подграфам, факторизуются. Несложно проверить, что подобным свойством обладают и диаграммы с *вложенными расходимостями*, т. е. диаграммы, в которых один из каждой пары ее расходящихся 1 ЧН-подграфов полностью содержится внутри другого (см. пример на рис. 2.14, а). После того как расходимости

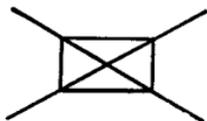


Рис. 2.13. Прimitивно расходящаяся диаграмма с четырьмя внешними линиями.

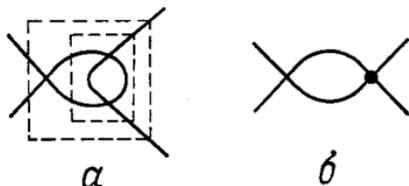


Рис. 2.14. Вложенные расходимости и диаграмма с контрчленом низшего порядка, сокращающая расходимость подграфа.

подграфа устранены за счет диаграмм, содержащих вклады контрчленов низших порядков (рис. 2.14, б), расходимость диаграммы как целого вычитается контрчленом порядка λ^3 . Таким образом, как для одновершинно-приводимых диаграмм, так и для диаграмм с вложенными расходимостями процедура перенормировок формулируется относительно просто. Сложный этап в доказательстве сходимости перенормированных выражений (во всех порядках теории возмущений) связан с анализом *перекрывающихся расходимостей*, которые не являются ни одновершинно-приводимыми, ни вложенными. На рис. 2.2, а приведен пример диаграммы с такими расходимостями. В этом случае трудность состоит в том, чтобы увидеть, как можно систематическим образом устранять расходимости перекрывающихся подграфов, несмотря на то, что они не факторизуются простым образом. Тем не менее эта проблема была успешно решена, и мы отсылаем читателя, интересующегося подобными вопросами, к соответствующей литературе [218, 225, 444]. Целью настоящих замечаний было показать, что доказательство перенормируемости в общем случае опирается на сложную теорию классификации графов и комбинаторный анализ.

2.3. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В этом разделе мы проведем детальные вычисления различных констант перенормировок в рамках перенормированной теории возмущений, описанной в предыдущих разделах. Для того чтобы проводить какие-либо математические выкладки с расходящимися интегралами, мы должны регуляризовать их. Например, можно обрезать интеграл по внутренним импульсам

на верхнем пределе. Тогда расходящаяся часть будет функцией параметра обрезания Λ , в то время как конечная часть не будет зависеть от него в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Процедура регуляризации должна быть осуществлена так, чтобы сохранялись лоренцева инвариантность и симметрии теории. Обычно используют один из следующих двух методов: ковариантную регуляризацию или размерную регуляризацию. Рассмотрим эти два метода.

Ковариантная регуляризация

При этом методе регуляризации [316] пропагатор модифицируют следующим образом:

$$\frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \sum_i \frac{a_i}{l^2 - \Lambda_i^2 + i\epsilon}, \quad (2.69)$$

где $\Lambda_i^2 \gg \mu^2$, а коэффициенты a_i выбраны таким образом, что в асимптотической области ($l^2 \rightarrow \infty$) модифицированный пропагатор имеет внутренний импульс в знаменателе в степени, достаточной для сходимости интеграла.

Обратимся сначала к четырехточечной функции. Диаграмма, показанная на рис. 2.5, a , дает вклад (2.7)

$$\Gamma_a = \Gamma(p^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{i}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (2.70)$$

Ясно, что достаточно произвести замену

$$\frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{l^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} = \frac{\mu^2 - \Lambda^2}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)(l^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)},$$

чтобы интеграл стал конечным. Тогда выражение (2.70) принимает вид

$$\Gamma(p^2) = -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{((l-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon)(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)(l^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)}. \quad (2.71)$$

Мы будем разлагать эту величину в ряд Тейлора в окрестности точки $p^2 = 0$ (или производить вычитание в точке $p^2 = 0$):

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2), \quad (2.72)$$

где

$$\Gamma(0) = -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)^2 (l^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)}, \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(p^2) &= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)(l^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right] = \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l \cdot p - p^2}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)^2 ((l-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

В последней строке мы перешли к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$ в подынтегральном выражении; это законно, так как функция $\tilde{\Gamma}(p^2)$ не содержит расходимостей. Опишем стандартный метод вычисления таких интегралов. Сначала воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_n}{(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n)^n} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n z_i\right), \quad (2.75)$$

позволяющим комбинировать множители, входящие в знаменатели подынтегральных выражений. Переменные z_i называются *фейнмановскими параметрами*. Можно также продифференцировать равенство (2.75) по a_1 и получить тождество вида

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 \dots a_n} = n! \int_0^1 \frac{z_1 dz_1 dz_2 \dots dz_n}{(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n)^{n+1}} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n z_i\right). \quad (2.76)$$

Последняя формула обладает тем преимуществом, что в случае, когда в знаменателе имеются два одинаковых множителя, требуется на один фейнмановский параметр меньше, чем число множителей. Используя тождество (2.76), можно объединить знаменатели в выражении (2.74) следующим образом:

$$\frac{1}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)^2} \frac{1}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon} = 2 \int_0^1 \frac{(1-\alpha) d\alpha}{A^3}. \quad (2.77)$$

Здесь

$$A = (1-\alpha)(l^2 - \mu^2) + \alpha[(l-p)^2 - \mu^2] + i\epsilon = (l-\alpha p)^2 - a^2 + i\epsilon,$$

где

$$a^2 = \mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(p^2) &= \lambda^2 \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2l \cdot p - p^2}{[(l-\alpha p)^2 - a^2 + i\epsilon]^3} = \\ &= \lambda^2 \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(2\alpha-1)p^2}{(l^2 - a^2 + i\epsilon)^3}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Мы произвели замену переменных $l \rightarrow l + \alpha p$ и опустили член, линейный по l , так как вклад от него равен нулю в силу нечетности подынтегрального выражения. Для того чтобы проинтегрировать по импульсу, удобно выполнить *поворот Вика*, т. е. перейти от импульсного пространства Минковского к евклидовым импульсам. Прежде всего заметим, что $d^4 l =$

$= dl_0 dl_1 dl_2 dl_3$ и

$$l^2 - a^2 + i\varepsilon = l_0^2 - l^2 - a^2 + i\varepsilon = l_0^2 - [(l^2 + a^2)^{1/2} - i\varepsilon]^2.$$

Отсюда видно, что подынтегральное выражение в (2.78) имеет полюса в комплексной l_0 -плоскости, расположенные так, как

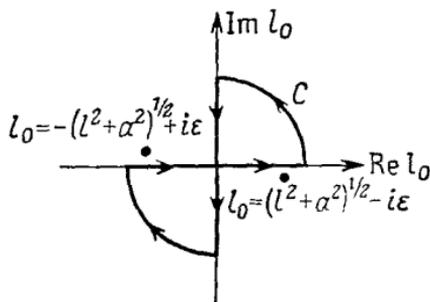


Рис. 2.15.

показано на рис. 2.15. Из теоремы Коши следует

$$\oint_C dl_0 f(l_0) = 0, \quad (2.79)$$

где

$$f(l_0) = \frac{1}{[l_0^2 - ((l^2 + a^2)^{1/2} - i\varepsilon)]^3}.$$

Так как $f(l_0) \rightarrow l_0^{-6}$ при $l_0 \rightarrow \infty$, вклад от криволинейных участков контура C равен нулю. Из равенства (2.79) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 f(l_0) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dl_0 f(l_0).$$

Таким образом, первоначальный контур интегрирования, идущий вдоль вещественной оси, можно повернуть, направив его вдоль мнимой оси. Если произвести замену переменной $l_0 = il_4$, где l_4 вещественна, то

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dl_0 f(l_0) = i \int_{-\infty}^{\infty} dl_4 f(il_4) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl_4}{(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + a^2 - i\varepsilon)^3}. \quad (2.80)$$

Вводя евклидов импульс $k_i = (l_1, l_2, l_3, l_4)$, где $k^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2$, мы можем записать равенство (2.80) в виде

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - a^2 + i\varepsilon)^3} = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - i\varepsilon)^3}, \quad (2.81)$$

где $d^4k = dl_1 dl_2 dl_3 dl_4$. Переходя к сферическим координатам в четырехмерном евклидовом пространстве, запишем

$$\int d^4k = \int_0^\infty k^3 dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\pi \sin^2\chi d\chi. \quad (2.82)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - i\epsilon)^3} &= 2\pi^2 \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - i\epsilon)^3} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk^2}{(k^2 + a^2 - i\epsilon)^3}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Пользуясь известной формулой для бета-функции

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1} dt}{(t+a^2)^n} = \frac{1}{(a^2)^{n-m}} \frac{\Gamma(m) \Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}, \quad (2.84)$$

можно вычислить остающийся интеграл

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2 - i\epsilon)^3} = \frac{1}{32\pi^2 (a^2 - i\epsilon)}. \quad (2.85)$$

Вершинная функция (2.78) запишется в виде

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{d\alpha (1-\alpha)(2\alpha-1)p^2}{[\mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2 - i\epsilon]}. \quad (2.86)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то $\mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2 > 0$ при $p^2 < 4\mu^2$, и мы можем опустить слагаемое $i\epsilon$ в знаменателе. Прямым вычислением получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(p^2) &= \tilde{\Gamma}(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left\{ 2 + \left(\frac{4\mu^2 - s}{|s|} \right)^{1/2} \ln \left[\frac{(4\mu^2 - s)^{1/2} - (|s|)^{1/2}}{(4\mu^2 - s)^{1/2} + (|s|)^{1/2}} \right] \right\} \quad \text{при } s < 0, \\ &= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left\{ 2 + 2 \left(\frac{4\mu^2 - s}{s} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{4\mu^2 - s} \right)^{1/2} \right\} \quad \text{при } 0 < s < 4\mu^2, \\ &= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left\{ 2 + \left(\frac{s - 4\mu^2}{s} \right)^{1/2} \ln \left[\frac{\sqrt{s} - \sqrt{s - 4\mu^2}}{\sqrt{s} + \sqrt{s - 4\mu^2}} \right] + i\pi \right\} \quad \text{при } s > 4\mu^2. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Таким же способом можно выполнить интегрирование по импульсу в расходящемся члене $\Gamma(0)$, определяемом формулой (2.73):

$$\Gamma(0) = \frac{i\lambda^2 \Lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{\alpha(\mu^2 - \Lambda^2) + \Lambda^2}. \quad (2.88)$$

При больших Λ^2 находим

$$\Gamma(0) \approx \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \quad (2.89)$$

Таким образом, однопетлевой вклад в четырехточечную функцию равен

$$\Gamma_1^{(4)}(s, t, u) = 3\Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u), \quad (2.90)$$

где член $\Gamma(0)$, зависящий от параметра обрезания, определяется формулой (2.89), а конечный вклад $\tilde{\Gamma}(s)$ — формулой (2.87). Мы должны еще прибавить контрчлен $(3i\Gamma(0)/4!) \phi^4$, сокращающий расходимости в этом выражении. Согласно (2.36), он соответствует следующей константе перенормировки:

$$Z_\lambda^{-1} = 1 + \frac{3i\Gamma(0)}{\lambda} = 1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \quad (2.91)$$

После сокращения расходимостей полная четырехточечная функция в однопетлевом приближении дается формулой (2.42):

$$\Gamma_R^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u). \quad (2.92)$$

Двухточечная функция, определяемая формулой (2.6) и соответствующая диаграмме на рис. 2.4, равна

$$-i\Sigma(p^2) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (2.93)$$

Этот интеграл расходится квадратично, и его можно регуляризовать, выбрав константы a_1 и a_2 в формуле (2.69) таким образом, что

$$\frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{a_1}{l^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon} + \frac{a_2}{l^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{l^6} \quad \text{при } l^2 \rightarrow \infty.$$

Нетрудно проверить, что для этого нужно положить

$$a_1 = \frac{\mu^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}, \quad a_2 = \frac{\Lambda_1^2 - \mu^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}.$$

Тогда модифицированный пропагатор имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{a_1}{l^2 - \Lambda_1^2 + i\epsilon} + \frac{a_2}{l^2 - \Lambda_2^2 + i\epsilon} &= \\ &= \frac{(\Lambda_1^2 - \mu^2)(\Lambda_2^2 - \mu^2)}{(l^2 - \mu^2)(l^2 - \Lambda_1^2)(l^2 - \Lambda_2^2)} \rightarrow \frac{\Lambda^4}{(l^2 - \mu^2)(l^2 - \Lambda^2)^2}, \end{aligned}$$

если оба параметра Λ_1 и Λ_2 стремятся к большому значению Λ . Регуляризованная собственная энергия равна

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p^2) &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^4}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)(l^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2} = \\ &= -\frac{i\lambda\Lambda^4}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{\alpha\Lambda^2 + (1-\alpha)\mu^2} = -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - \mu^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right]. \quad (2.94) \end{aligned}$$

Так как она не зависит от внешнего импульса p , разложение в ряд Тейлора для нее тривиально:

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) \approx \frac{\lambda}{32\pi^2} \Lambda^2. \quad (2.95)$$

Как мы уже отмечали выше, независимость $\Sigma(p^2)$ от p — особое свойство однопетлевого приближения в теории $\lambda\phi^4$. Для собственно-энергетических диаграмм общего вида $\Sigma(p^2)$ нетривиально зависит от p и разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $p^2 = 0$ имеет вид

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + p^2 \Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (2.96)$$

где $\Sigma(0)$ и $\Sigma'(0)$ зависят от параметра регуляризации, а $\tilde{\Sigma}(p^2)$ конечно. Чтобы сократить эти расходимости, мы должны добавить в лагранжиан контрчлены $1/2 \Sigma(0) \phi^2$ и $1/2 \Sigma'(0) (\partial_\nu \phi)^2$.

Таким образом, полный лагранжиан с учетом однопетлевых контрчленов имеет вид

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} + \Delta \mathcal{L}^{(1)}, \quad (2.97)$$

где

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4,$$

$$\Delta \mathcal{L}^{(1)} = \frac{3i\Gamma(0)}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \Sigma(0) \phi^2 + \frac{1}{2} \Sigma'(0) (\partial_\nu \phi)^2.$$

Объединяя члены одинаковой структуры, мы можем записать (2.97) в виде

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{Z_\phi}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{(\mu^2 - \delta\mu^2)}{2} \phi^2 - \frac{\lambda Z_\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.98)$$

где

$$Z_\phi = 1 + \Sigma'(0), \quad \lambda Z_\lambda^{-1} = \lambda + 3i\Gamma(0), \quad \delta\mu^2 = \Sigma(0). \quad (2.99)$$

Константы перенормировок в однопетлевом приближении имеют следующие значения:

$$Z_\phi = 1, \quad \text{так как} \quad \Sigma'(0) = 0,$$

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2},$$

$$\delta\mu^2 = \frac{\lambda}{32\pi^2} \Lambda^2. \quad (2.100)$$

Если выразить все параметры через голые величины, используя соотношения (2.49)–(2.51), то получим

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi_0)^2 - \mu_0 \phi_0^2] - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4. \quad (2.101)$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с перенормированным лагранжианом (2.1).

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу соглашения о выборе точки разложения $p_i = 0$ для рядов Тейлора (2.72) и (2.96), с помощью которых мы фиксировали конечные части функций Грина. Эквивалентный способ формулировки того же соглашения состоит в том, чтобы наложить на функции Грина определенные условия нормировки. Из (2.96) видно, что конечная часть собственной энергии обладает свойствами

$$\tilde{\Sigma}(p^2)|_{p^2=0} = 0, \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} = 0. \quad (2.103)$$

Отсюда следует, что полный пропагатор

$$i\Delta_R(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon} \quad (2.104)$$

удовлетворяет нормировочным условиям

$$\Delta_R^{-1}(p^2)|_{p^2=0} = -\mu^2, \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial \Delta_R^{-1}}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} = 1. \quad (2.106)$$

Аналогично из соотношения (2.72), означающего, что $\tilde{\Gamma}(0) = 0$, и из формулы (2.92) следует нормировочное условие для вершинной функции:

$$\Gamma_R^{(4)}(0, 0, 0) = -i\lambda. \quad (2.107)$$

(Замечание. Хотя формула (2.104) первоначально была получена для случая, когда функция $\Sigma(p^2)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности точки $p^2 = \mu^2$, она справедлива и для случая, когда разложение ведется в окрестности точки $p^2 = 0$. Чтобы показать это, достаточно провести выкладки, аналогичные (2.14) — (2.22).)

Короче говоря, для того чтобы фиксировать конечные части функций Грина, мы можем использовать условия (2.105) — (2.107) вместо предписания, основанного на разложении функции в ряд Тейлора в окрестности точки $p_i = 0$.

В этой связи заметим, что перенормированная константа связи, определяемая равенством (2.107), отличается от той, которая определялась формулой (2.41), где разложение в ряд Тейлора производилось в окрестности симметричной точки $s_0 = t_0 = u_0 = 4\mu^2/3$. При этом получалось соотношение (2.33)

$$\Gamma_R^{(4)}(s_0, t_0, u_0) = -i\lambda, \quad (2.108)$$

отличающееся от (2.107). Таким образом, различные разложения в ряд Тейлора или различные точки вычитания приводят к раз-

ным определениям константы связи. Это подводит нас к понятию бегущей константы связи (см. гл. 3). Очевидно, что физические результаты не должны зависеть от выбора точки вычитания, который определяется только соглашением. Но как быть на практике с этим очевидным различием в определении константы связи? Пусть мы имеем два выражения для сечения двухчастичного рассеяния, полученные при двух различных определениях константы связи. Такие сечения могут отличаться на общий постоянный множитель (угловые распределения у них одинаковы). Но это несущественно, поскольку константу связи мы должны определять из опыта как значение сечения рассеяния в некоторой точке кинематической области. Поэтому упомянутое различие лишь кажущееся, и два расчета, которые выглядят различными, на самом деле приводят к одному и тому же результату.

Размерная регуляризация

Основная идея метода размерной регуляризации состоит в следующем [24, 57, 88, 389]. Так как ультрафиолетовые расходимости фейнмановских диаграмм возникают при интегрировании по петлевым импульсам в четырехмерном пространстве, эти интегралы можно сделать конечными, понизив размерность пространства-времени. При этом фейнмановские интегралы можно определить как аналитические функции параметра n — размерности пространства-времени, а ультрафиолетовые расходимости будут проявляться как сингулярности при $n \rightarrow 4$. Как и прежде, конечная часть интеграла может быть получена вычитанием нескольких первых членов разложения в ряд Тейлора. Метод размерной регуляризации обладает тем преимуществом, что он не нарушает алгебраических соотношений между функциями Грина, если эти соотношения не зависят от размерности пространства-времени. В частности, такие соотношения, как тождества Уорда, отражающие симметрию теории, сохраняются при введении размерной регуляризации. Описание этого метода дано в обзоре [265].

Мы проиллюстрируем метод размерной регуляризации на одном примере. Рассмотрим четырехточечную функцию Грина (2.7) в однопетлевом приближении, соответствующая диаграмма приведена на рис. 2.5, а. Она пропорциональна логарифмически расходящемуся интегралу

$$I = \int d^4l \frac{1}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (2.109)$$

Чтобы определить интеграл по n -мерному пространству, будем считать, что внутренний импульс имеет n компонент $l_\mu = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$, в то время как внешний импульс имеет

лишь четыре ненулевые компоненты $p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3, 0, \dots, 0)$. Тогда интеграл по n -мерному пространству определяется следующим образом:

$$I(n) = \int d^n l \frac{1}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (2.110)$$

Он сходится при $n < 4$. Чтобы придать смысл этому выражению при нецелых значениях n , преобразуем сначала знаменатель, введя фейнмановские параметры, и произведем поворот Вика (формула (2.75)):

$$I(n) = \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n l}{[(l-\alpha p)^2 - a^2 + i\epsilon]^2} = i \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n l}{[l^2 + a^2 - i\epsilon]^2}, \quad (2.111)$$

где $a^2 = \mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2$.

Подынтегральное выражение не зависит от угловых переменных, и по ним можно проинтегрировать

$$\begin{aligned} \int d^n l &= \int_0^\infty l^{n-1} dl \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \\ &\dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty l^{n-1} dl, \end{aligned} \quad (2.112)$$

где мы воспользовались формулой

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}. \quad (2.113)$$

Тогда равенство (2.111) можно записать в виде

$$I(n) = \frac{2i\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty \frac{l^{n-1} dl}{[l^2 + a^2 - i\epsilon]^2}. \quad (2.114)$$

Мы выделили зависимость от n в явном виде. Интеграл является хорошо определенной величиной в комплексной плоскости по n при $0 < \text{Re}(n) < 4$. Ограничение снизу связано с очевидной расходимостью интеграла на нижнем пределе $l = 0$. Эта инфракрасная расходимость на самом деле является артефактом нашего подхода, и она сокращается с сингулярностью члена $\Gamma(n/2)$ при $n \rightarrow 0$. Выполняя интегрирование по частям, можно расширить область аналитичности функции $I(n)$:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{l^{n-1} dl}{[l^2 + a^2 - i\epsilon]^2} = \frac{-2}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_0^\infty dl \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{[l^2 + a^2 - i\epsilon]^2} \right), \quad (2.115)$$

где мы воспользовались формулой

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1). \quad (2.116)$$

Полученный интеграл хорошо определен при $-2 < \text{Re}(n) < 4$. Если мы повторим эту процедуру ν раз, то область аналитичности расширится до $-2\nu < \text{Re}(n) < 4$ и далее до $\text{Re}(n) \rightarrow -\infty$. Следовательно, интеграл (2.114) можно считать аналитической функцией в области $\text{Re}(n) < 4$. Чтобы увидеть, что происходит при $n \rightarrow 4$, мы воспользуемся формулой (2.84) и вычислим интеграл при $n < 4$:

$$I(n) = i\pi^{n/2}\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 \frac{d\alpha}{[a^2 - i\varepsilon]^{2-n/2}}. \quad (2.117)$$

Из равенства (2.116) следует

$$\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right)}{2 - \frac{n}{2}} \rightarrow \frac{2}{4 - n} \quad \text{при } n \rightarrow 4;$$

мы видим, что сингулярность при $n = 4$ является простым полюсом. Если мы разложим в ряд все величины в окрестности точки $n = 4$:

$$\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) = \frac{2}{4 - n} + A + (n - 4)B + \dots, \quad (2.118)$$

$$a^{n-4} = 1 + (n - 4)\ln a + \dots, \quad (2.119)$$

где A и B — некоторые константы, то в пределе получим

$$I(n) \xrightarrow{n \rightarrow 4} \frac{2i\pi^2}{4 - n} - i\pi^2 \int_0^1 d\alpha \ln[\mu^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2] + i\pi^2 A. \quad (2.120)$$

Функция (2.7) в однопетлевом приближении равна

$$\Gamma(p^2) = \frac{\lambda^2 I}{32\pi^4} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left\{ \frac{2i}{4 - n} - i \int_0^1 d\alpha \ln[\mu^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2] + iA \right\}. \quad (2.121)$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора в окрестности точки $p^2 = 0$, находим

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2), \quad (2.122)$$

где

$$\Gamma(0) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{2i}{4 - n} - i \ln \mu^2 + iA \right) \approx \frac{i\lambda^2}{16\pi^2(4 - n)}, \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(p^2) &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln \left[\frac{\mu^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2}{\mu^2} \right] = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{d\alpha(1 - \alpha)(2\alpha - 1)p^2}{[\mu^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2]}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Последнее выражение получено интегрированием по частям. Видно, что конечная часть точно та же, что и конечная часть (2.86), полученная при ковариантной регуляризации. Таким образом, конечная часть функции Грина, как и следовало ожидать, не зависит от метода регуляризации, а зависит лишь от точки вычитания. Расходимость слагаемого $\Gamma(0)$ связана с простым полюсом при $n = 1$, соответствующим члену с $\ln \Lambda$ в (2.89) при ковариантной регуляризации.

Собственная энергия в однопетлевом приближении (соответствующая диаграмма приведена на рис. 2.4) дается выражением (2.6). При размерной регуляризации оно принимает вид

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \frac{-i\lambda\pi^{n/2}\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)}{32\pi^4 (\mu^2)^{1-n/2}}. \quad (2.125)$$

Поскольку, согласно формуле (2.116),

$$\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right)}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)\left(2 - \frac{n}{2}\right)}, \quad (2.126)$$

квадратично расходящемуся члену в (2.95) соответствуют полюса при $n = 4$ и $n = 2$. При $n \rightarrow 4$ получаем

$$-i\Sigma(0) = \frac{i\lambda\mu^2}{16\pi^2} \frac{1}{4-n}. \quad (2.127)$$

Чтобы сравнить два метода регуляризации, в табл. 2.1 приведены выражения для расходящихся членов. Расходимости

Таблица 2.1

	Ковариантная регуляризация	Размерная регуляризация
$\Gamma(0)$	$\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}$	$\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \frac{2}{4-n}$
$\Sigma(0)$	$\frac{\lambda}{32\pi^2} \Lambda^2$	$\frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\frac{-2\mu^2}{4-n}\right)$

фейнмановских интегралов, вычисленных в n -мерном пространстве, проявляются как полюса Γ -функции при $n = 4, \dots$ и т. д. При этом надо иметь в виду, что квадратично расходящийся интеграл имеет также полюс при $n = 2$ (см. формулу (2.126)).

2.4. ПОДСЧЕТ СТЕПЕНЕЙ РАСХОДИМОСТЕЙ И ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ

В предыдущих разделах подробно рассматриваются перенормировки в теории $\lambda\phi^4$. Здесь будет описана процедура пе-

ренормировок для взаимодействий более общего вида. В этом разделе мы будем следовать схеме БПХ-перенормировок. В последней части раздела мы изучим также вопрос о перенормировках составных операторов.

Теории с фермионами и скалярными частицами

Для простоты мы сначала обратимся к теориям, содержащим только частицы со спинами $1/2$ и 0 . Пусть лагранжева плотность имеет вид $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum_i \mathcal{L}_i$, где \mathcal{L}_0 — свободный лагранжиан, квадратичный по полям, а \mathcal{L}_i — члены, описывающие взаимодействие (например, $\mathcal{L}_i = g_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \partial^\mu \phi$, $g_2 (\bar{\psi} \psi)^2$, $g_3 \bar{\psi} \psi \phi$, $g_4 \phi^3$, $g_5 \phi^4$, ...). Для данной диаграммы определим следующие величины:

- n_i — число вершин типа i ,
- b_i — число скалярных линий в вершине типа i ,
- f_i — число фермионных линий в вершине типа i ,
- d_i — число производных в вершине типа i ,
- B — число внешних скалярных линий,
- F — число внешних фермионных линий,
- IB — число внутренних скалярных линий,
- IF — число внутренних фермионных линий.

Например, в случае, когда $\mathcal{L}_1 = g_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \partial^\mu \phi$, имеем $b_1 = 1$, $f_1 = 2$, $d_1 = 1$. Анализируя структуру графов, можно получить соотношения, аналогичные (2.58):

$$B + 2(IB) = \sum_i n_i b_i, \quad (2.129a)$$

$$F + 2(IF) = \sum_i n_i f_i. \quad (2.129b)$$

Можно вывести формулу для числа петель L диаграммы, обобщающую (2.59):

$$L = (IB) + (IF) - n + 1, \quad (2.130)$$

где

$$n = \sum_i n_i. \quad (2.131)$$

Тогда условная степень расходимости D определяется выражением

$$\begin{aligned} D &= 4L - 2(IB) - (IF) + \sum_i n_i d_i = \\ &= 4 + 2(IB) + 3(IF) + \sum_i n_i (d_i - 4). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Пользуясь формулами (2.129), исключим $1B$ и $1F$ из этого выражения и получим

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F + \sum_i n_i \delta_i, \quad (2.133)$$

где

$$\delta_i = b_i + \frac{3}{2}f_i + d_i - 4. \quad (2.134)$$

Величина δ_i называется *индексом расходимости* взаимодействия \mathcal{L}_i . Для теории $\lambda\phi^4$ $\delta = 0$, и формула (2.133) принимает вид (2.61). В общем случае индекс δ_i можно связать с размерностью константы связи, выраженной в единицах массы.



Рис. 2.16.

Зная, что лагранжева плотность имеет размерность 4, а скалярное поле, фермионное поле и производная имеют размерности 1, $3/2$ и 1 соответственно, нетрудно найти, что размерность константы связи равна

$$\dim(g_i) = 4 - b_i - \frac{3}{2}f_i - d_i = -\delta_i. \quad (2.135)$$

Из формулы (2.133) видно, что при фиксированном числе внешних линий условная степень расходимости диаграммы может иметь три различных режима поведения, соответствующие следующим трем случаям.

1. g_i имеет положительную размерность (или $\delta_i < 0$). Тогда D уменьшается с увеличением числа вершин типа i . В этом случае взаимодействие, описываемое \mathcal{L}_i , называется *суперперенормируемым* взаимодействием, и имеется лишь конечное число расходящихся диаграмм. В качестве примера приведем диаграммы, дающие вклад в двухточечную функцию Грина в суперперенормируемой теории $\lambda\phi^3$. Однопетлевая диаграмма расходится (рис. 2.16, а), но двухпетлевая (рис. 2.16, б) конечна.

2. g_i безразмерна (или $\delta_i = 0$). Индекс D не зависит от числа вершин i -го типа. Расходимости присутствуют во всех порядках теории возмущений, но число функций Грина, содержащих расходимости, конечно. Такие взаимодействия называются *перенормируемыми*. К ним относятся, например, $\mathcal{L}_i = g_1\phi^4$, $g_2\bar{\psi}\psi\phi$.

3. g_i имеет отрицательную размерность (или $\delta_i > 0$). В этом случае D возрастает с ростом числа вершин i -го типа в диаграммах, и все функции Грина расходятся при достаточно больших n .

Такие взаимодействия называются *неперенормируемыми*. Среди них $\mathcal{L}_i = g_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \partial^\mu \phi$, $g_2 (\bar{\psi} \psi)^2$, $g_3 \phi^5$ и т. д.

Индекс расходимости δ_i связан также с *канонической размерностью* полевого оператора. Это понятие определяется через асимптотическое поведение пропагатора свободного поля при высоких энергиях, которое, очевидно, тесно связано с подсчетом степеней расходимостей. Запишем пропагатор свободного поля в следующем виде:

$$D_A(p^2) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T (A(x) A(0)) | 0 \rangle. \quad (2.136)$$

Если его асимптотическое поведение имеет вид

$$D_A(p^2) \xrightarrow{p^2 \rightarrow \infty} (p^2)^{-\omega_A/2}, \quad (2.137)$$

то каноническая размерность оператора поля по определению равна

$$d(A) = (4 - \omega_A)/2. \quad (2.138)$$

Следовательно, для скалярных и фермионных полей и их производных имеем

$$\begin{aligned} d(\phi) &= 1, & d(\partial^\mu \phi) &= 1 + n, \\ d(\psi) &= 3/2, & d(\partial^\mu \psi) &= 3/2 + n. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Для составных операторов, являющихся полиномами по полям, каноническая размерность есть алгебраическая сумма канонических размерностей составляющих полей. Например, $d(\phi^2) = 2d(\phi) = 2$, $d(\bar{\psi}\psi\phi) = 2d(\psi) + d(\phi) = 4$. В случае теорий, содержащих лишь скаляры и фермионы, каноническая размерность оператора совпадает с тем, что мы получили бы при наивном подсчете размерности в единицах массы. Но, как будет видно ниже, для массивных векторных полей ситуация иная. В принятых нами обозначениях и с учетом (2.128) каноническая размерность для отдельного члена взаимодействия в лагранжиане равна

$$d(\mathcal{L}_i) = b_i + \frac{3}{2} f_i + d_i. \quad (2.140)$$

При этом индекс расходимости $\delta_i = d(\mathcal{L}_i) - 4$. Таким образом, если слагаемое имеет каноническую размерность, равную 4, то оно описывает перенормируемое взаимодействие, если меньше 4, то суперперенормируемое, если больше 4, то неперенормируемое.

Контрчлены

Поскольку контрчлены строятся таким образом, чтобы сократить расходимости функции Грина, их структура тесно связана со структурой расходящихся членов. Например, как мы

уже видели, в теории $\lambda\phi^4$ для устранения квадратично расходящихся слагаемых в двухточечной функции нужны контрчлены типа $(\partial^\nu\phi)(\partial_\nu\phi)$ с размерностью 4 и типа ϕ^2 с размерностью 2; для логарифмически расходящихся членов четырехточечной функции требуется контрчлен типа ϕ^4 размерности 4. В общем случае мы должны включить в лагранжиан контрчлены, сокращающие все слагаемые в функциях Грина с условной степенью расходимости $D \geq 0$ (см. формулу (2.133)). В целях удобства для выделения расходимостей мы будем использовать разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $p_i = 0$. Структура контрчленов зависит от числа расходящихся членов в этом разложении. Например, если функция Грина расходится квадратично, то в ее разложении в ряд Тейлора

$$\Gamma^{(n)}(p_i) = a + b_i^\mu p_{i\mu} + c_{ij}^{\mu\nu} p_{i\mu} p_{j\nu} + \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i) \quad (2.141)$$

первые три члена расходятся. Контрчлены, призванные сократить член a , не будут содержать производных по полям, контрчлены, которые должны сократить член b , будут содержать одну производную и т. д. В обозначениях (2.128) контрчлен будет иметь вид $O_{\text{кч}} = (\partial_\mu)^\alpha (\psi)^F (\phi)^B$, где $\alpha = 0, 1, \dots, D$. Например, в теории $\lambda\phi^4$ мы имеем контрчлены, соответствующие $F=0, B=2$ с $\alpha=0$ и $\alpha=2$ и $B=4$ с $\alpha=0$. Каноническая размерность $O_{\text{кч}}$ дается формулой

$$d_{\text{кч}} = \frac{3}{2}F + B + \alpha. \quad (2.142)$$

С помощью равенства (2.133) индекс расходимости контрчлена может быть записан в виде

$$\delta_{\text{кч}} = d_{\text{кч}} - 4 = (\alpha - D) + \sum_i n_i \delta_i. \quad (2.143)$$

Так как $\alpha \leq D$, то справедливо неравенство

$$\delta_{\text{кч}} \leq \sum_i n_i \delta_i. \quad (2.144)$$

Следовательно, контрчлены, индуцированные некоторой диаграммой Фейнмана, имеют индексы расходимости $\delta_{\text{кч}}$, не превышающие сумму индексов расходимостей всех взаимодействий, входящих в диаграмму.

Перенормируемые взаимодействия, соответствующие случаю $\delta_i = 0$, порождают контрчлены с $\delta_{\text{кч}} \leq 0$. Если при этом все члены с $\delta_i \leq 0$ присутствуют в исходном лагранжиане, т. е. контрчлены имеют ту же структуру, что и члены исходного лагранжиана, то можно считать, что контрчлены переопределяют параметры, такие, как массы и константы связи. Эти перенормированные величины задаются в теории с самого начала, и для их определения необходимо произвести измерения конеч-

ного числа физических процессов. Зная эти параметры, мы можем произвести расчет всех других физических процессов в рамках рассматриваемой теории. Например, в теории $\lambda\phi^4$ имеются два свободных параметра: константа связи λ и масса μ . Для их определения мы можем использовать значения сечения двухчастичного упругого рассеяния при двух различных углах рассеяния. После этого мы можем вычислять значения сечений при других углах и (или) при любых энергиях (а также

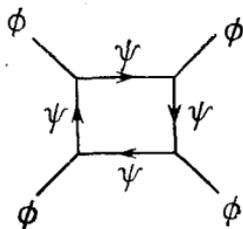


Рис. 2.17.

сечения неупругих процессов). То же самое в основном справедливо и для суперперенормируемых теорий. В отличие от этого в случае неперенормируемых взаимодействий, когда $\delta_i > 0$, возникают контрчлены со сколь угодно большими $\delta_{кч}$ в достаточно высоких порядках теории возмущений. Очевидно, что они не могут быть включены в члены исходного лагранжиана путем переопределения параметров. Например, неперенормируемое взаимодействие $\lambda\phi^6$ с $\delta = 2$ порождает контрчлены со всеми четными степенями ϕ и их производные: ϕ^{2n} и $\partial^{2m}\phi^{2n}$, $n, m = 1, 2, \dots, \infty$. Необходимо бесконечное число измерений для определения этих членов. Таким образом, неперенормируемые взаимодействия не обязательно должны быть бесконечными. Но бесконечное число контрчленов, вызванное неперенормируемостью, сильно ослабляет предсказательную силу такой модели и, следовательно, делает ее непривлекательной, по крайней мере в рамках теории возмущений.

Мы примем теперь более узкое, чем прежде, определение перенормируемости. Будем говорить, что лагранжиан *условно перенормируем* (перенормируем, согласно подсчету условной степени расходимости), если все контрчлены, индуцированные процедурой перенормировки, могут быть включены в лагранжиан путем переопределения его параметров. Согласно этому определению, теория взаимодействия одного фермиона с одним скалярным полем через юкавскую связь $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ неперенормируема, несмотря на то, что константа связи безразмерна. Причина состоит в том, что однопетлевая диаграмма, показанная на рис. 2.17, логарифмически расходится и необходим контрчлен типа ϕ^4 . Но такого слагаемого нет в исходном лагранжиане. Та же теория после того, как мы добавим в нее член

самодействия ϕ^4 , станет перенормируемой. С другой стороны, если мы можем заранее исключить слагаемое того или иного типа в лагранжиане из соображений симметрии, то перенормируемость теории не нарушится, так как вклады высших порядков никогда не приведут к контрчленам этого типа. Например, пусть имеется лагранжиан с одним скалярным полем:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Он перенормируем, так как содержит *все* члены с $\delta \leq 0$ (или с размерностью, меньшей или равной 4), которые симметричны относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$. Контрчлен типа ϕ^3 запрещен этим условием симметрии относительно отражения. С учетом вышесказанного можно по-другому взглянуть на формулу (2.133) или ее частный случай (2.61) для теории $\lambda\phi^4$. Вклады высших порядков, например в шеститочечную функцию, должны быть конечными в (перенормируемой) теории $\lambda\phi^4$. Если бы это было не так, то понадобился бы контрчлен типа ϕ^6 для устранения расходимостей. Но он имеет индекс $\delta = 2$, что нарушает перенормируемость теории.

Теории с векторными полями

Поскольку асимптотическое поведение пропагаторов свободного векторного поля для массивного и безмассового случаев сильно различается, мы проанализируем эти случаи в отдельности.

Безмассовое векторное поле. В теориях с локальной калибровочной инвариантностью, таких, как квантовая электродинамика, векторное поле является безмассовым. Свободный пропагатор имеет убывающую асимптотику на бесконечности. Например, в квантовой электродинамике пропагатор фотона в калибровке Фейнмана имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (2.145)$$

Отсюда следует, что каноническая размерность фотонного поля $d(A) = 1$, как для скалярного поля. Следовательно, весь анализ с подсчетом степеней расходимостей для безмассового векторного поля тот же, что и для скалярного поля. Теории с безмассовым векторным полем будут перенормируемы, если они содержат члены взаимодействия с размерностью не выше четырех и не нарушают локальную калибровочную инвариантность. Например, размерность 4 имеют следующие операторы:

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \quad \phi^2 A_\mu A^\mu, \quad (\partial_\mu \phi) \phi A^\mu,$$

где A_μ — безмассовое векторное поле. Эти примеры в действительности почти исчерпывают все возможные перенормируемые взаимодействия (т. е. размерности 4 или 3) полей со спином 0 и 1/2 с безмассовым векторным полем. Кроме перечисленных возможен еще только оператор $(\partial_\mu \phi) A^\mu$ размерности 3, билинейный по полям; он является частью свободного лагранжиана.

Массивное векторное поле. Свободный лагранжиан массивного векторного поля V_μ обычно выбирается в виде

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) (\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) + \frac{1}{2} M_V^2 V_\mu V^\mu. \quad (2.146)$$

Пропагатор в импульсном представлении равен

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_V^2)}{k^2 - M_V^2 + i\epsilon} \quad (2.147)$$

и имеет асимптотическое поведение:

$$D_{\mu\nu}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} O(1). \quad (2.148)$$

Отсюда следует, что каноническая размерность векторного поля равна 2, что отличается от размерности 1, которую мы получили бы из (наивного) подсчета. Анализ подсчета степеней в этом случае приводит к следующей условной степени расходимости:

$$D = 4 - B - \frac{3}{2} F - 2V + \sum_i n_i (\Delta_i - 4) \quad (2.149)$$

и

$$\Delta_i = b_i + \frac{3}{2} f_i + 2v_i + d_i, \quad (2.150)$$

где V — число внешних векторных линий, v_i — число векторных полей в вершине типа i , а Δ_i — каноническая размерность члена взаимодействия \mathcal{L}_i . Для того чтобы взаимодействие было перенормируемым, необходимо выполнение условия $\Delta_i \leq 4$. Но, согласно (2.150), единственный такой член взаимодействия, трилинейный по полям, имеет вид $\phi^2 A_\mu$. Он явно не обладает лоренц-инвариантностью. Таким образом, нетривиальных перенормируемых взаимодействий с массивным векторным полем не существует. Однако необходимо упомянуть о двух важных исключениях из этого правила.

А. В калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии векторный (калибровочный) бозон приобретает массу таким способом, что перенормируемость не нарушается. Этот механизм подробно обсуждается в гл. 8.

Б. Теория, включающая нейтральный массивный векторный бозон, взаимодействующий с сохраняющимся током, также перенормируема. Эвристически это утверждение можно пояснить

следующим образом. При всех вычислениях пропагатор $D_{\mu\nu}(k)$, описываемый формулой (2.147), умножается на сохраняющиеся токи $J^\mu(k)$ и $J^\nu(k)$. Но в силу закона сохранения тока $k^\mu J_\mu = 0$, или $\partial^\mu J_\mu(x) = 0$ в координатном представлении, член $k_\mu k_\nu / M_V^2$ не будет давать вклада. Следовательно, подсчет степеней расходимостей по существу производится так же, как в безмассовом случае.

Перенормировка составных операторов

До сих пор мы изучали только функции Грина, включающие элементарные полевые операторы. Однако во многих практических приложениях представляют интерес также функции от *составных операторов*, т. е. от локальных мономов полей и их производных типа $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, ϕ^2 , $\phi\partial^2\phi$ и других.

В качестве примера, который позволит нам проиллюстрировать перенормировки таких составных операторов, мы снова используем теорию $\lambda\phi^4$. Рассмотрим составной оператор $1/2\phi^2(x)$. Функция Грина с одной вставкой $1/2\phi^2(x)$ имеет вид

$$G_{\phi^2}^{(n)}(x; x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \left(\frac{1}{2} \phi^2(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \right) | 0 \rangle, \quad (2.151)$$

или в импульсном представлении

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p_1 + \dots + p_n) G_{\phi^2}^{(n)}(p; p_1, \dots, p_n) = \\ = \int d^4x e^{-ipx} \int \prod_{i=1}^n d^4x_i e^{-ip_i x_i} G_{\phi^2}^{(n)}(x; x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.152)$$

В рамках теории возмущений с помощью теоремы Вика представим эту функцию Грина в виде диаграмм Фейнмана. Например, для $G_{\phi^2}^{(2)}(x; x_1, x_2)$ в нулевом порядке по λ имеем

$$\begin{aligned} G_{\phi^2}^{(2)}(x; x_1, x_2) = \langle 0 | T \left(\frac{1}{2} \phi^2(x) \phi(x_1) \phi(x_2) \right) | 0 \rangle = \\ = i\Delta(x - x_1) i\Delta(x - x_2), \end{aligned} \quad (2.153)$$

или в импульсном представлении

$$G_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, -p - p_1) = i\Delta(p_1) i\Delta(p + p_1). \quad (2.154)$$

Если мы отбросим пропагаторы, соответствующие внешним линиям, то получим

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, -p - p_1) = 1. \quad (2.155)$$

Этому вкладу соответствует диаграмма, приведенная на рис. 2.18, а. Та же функция Грина в первом порядке по λ имеет

вид

$$G_{\phi^2}^{(2)}(x; x_1, x_2) = \int d^4y \langle 0 | T \left(\frac{1}{2} \phi^2(x) \phi(x_1) \phi(x_2) \frac{(-i\lambda)}{4!} \phi^4(y) \right) | 0 \rangle = \int d^4y \frac{(-i\lambda)}{2} [i\Delta(x-y)]^2 i\Delta(x_1-y) i\Delta(x_2-y).$$

Соответствующая (усеченная) одночастично-неприводимая функция Грина равна

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, -p-p_1) = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(l-p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (2.156)$$

Диаграмма, отвечающая этому вкладу, показана на рис. 2.18, б. Мы видим, что составной оператор порождает вершину,

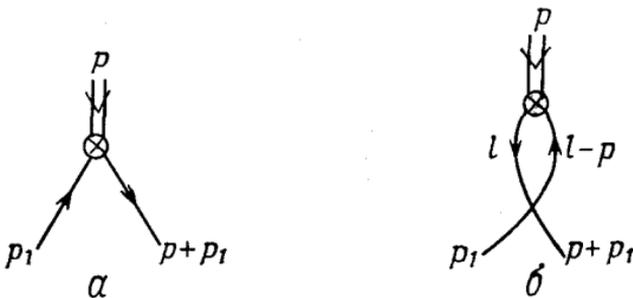


Рис. 2.18. Диаграммы, отвечающие нулевому и первому порядкам функции Грина $\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, -p-p_1)$.

очень похожую на ту, которая порождается членом в лагранжиане. Отличие состоит в том, что составной оператор уносит часть импульса. Это обстоятельство подсказывает метод систематического вычисления функций Грина с составными операторами. Как мы уже видели в разд. 1.2, чтобы вычислить функции Грина элементарного поля $\phi(x)$, удобно ввести в лагранжиан слагаемое $J(x)\phi(x)$, где $J(x)$ — произвольная c -числовая функция. Аналогично для составного оператора $\Omega(x)$ мы можем ввести член $\chi(x)\Omega(x)$, где $\chi(x)$ — c -числовая функция источника:

$$\mathcal{L}[\chi] = \mathcal{L}[0] + \chi\Omega. \quad (2.157)$$

Несложно построить производящий функционал $W[\chi]$, являющийся амплитудой вакуум-вакуумного перехода в присутствии внешнего источника $\chi(x)$. Дифференцируя теперь $\ln W[\chi]$ по χ и полагая затем источник χ равным нулю, получим связанные функции Грина. Если $\Omega(x) = \frac{1}{2}\phi^2(x)$, то мы имеем вершину, показанную на рис. 2.19, а. Она может, например, входить в

однопетлевую диаграмму с четырьмя внешними линиями, соответствующими полю ϕ (рис. 2.19, б):

$$\Gamma_{\Omega}^{(4)}(p; p_1, \dots, p_4) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{i}{(l+p)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\ \times \frac{i}{(l-p_1-p_2)^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (2.158)$$

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы обсудить процедуру перенормировки этого нового класса функций Грина $\Gamma_{\Omega}^{(n)}(p; p_1, \dots, p_n)$. Она почти такая же, как и для функций Грина

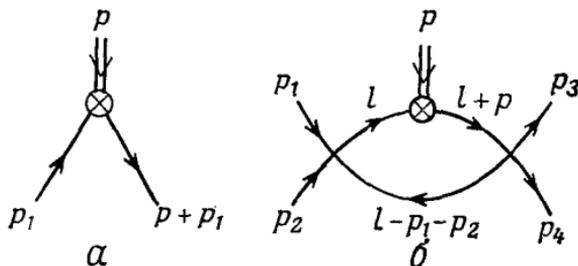


Рис. 2.19.

$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ без $\Omega(x)$. Поскольку вставка составного оператора эквивалентна введению дополнительной вершины, из формулы (2.133) следует, что условная степень расходимости D_{Ω} для функции $\Gamma_{\Omega}^{(n)}$ отличается от условной степени расходимости D для $\Gamma^{(n)}$ на индекс расходимости δ_{Ω} составного оператора:

$$D_{\Omega} = D + \delta_{\Omega} = D + (d_{\Omega} - 4), \quad (2.159)$$

где d_{Ω} — каноническая размерность Ω . Это означает, что введение (перенормируемых или суперперенормируемых) составных операторов с $d_{\Omega} \leq 4$ не ухудшает свойств сходимости для функции Грина. Но вставка оператора с $d_{\Omega} > 4$ усиливает расходимость диаграммы. В случае $\Omega = 1/2 \phi^2$ размерность $d(\phi^2) = 2$, и для n -точечной функции $D_{\phi^2} = 2 - n$. Следовательно, только функция $\Gamma_{\phi^2}^{(2)}$ расходится логарифмически и требует перенормировки. Соответствующая однопетлевая диаграмма, показанная на рис. 2.18, б, имеет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\bar{\Gamma}_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, -p - p_1) = \bar{\Gamma}_{\phi^2}^{(2)}(0; 0, 0) + \bar{\Gamma}_{\phi^2 R}^{(2)}(p; p_1, -p - p_1), \quad (2.160)$$

где $\bar{\Gamma}_{\phi^2 R}^{(2)}$ конечна и нормирована условием

$$\bar{\Gamma}_{\phi^2 R}^{(2)}(0; 0, 0) = 0. \quad (2.161)$$

Устраняющий эту расходимость контрчлен

$$- \frac{i}{2} \bar{\Gamma}_{\phi^2}^{(2)}(0; 0, 0) \chi(x) \phi^2(x)$$

объединяется с исходным членом в лагранжиане и приводит к члену

$$-\frac{i}{2} \chi \phi^2 - \frac{i}{2} \bar{\Gamma}_{\phi^2}^{(2)}(0; 0, 0) \chi \phi^2 = -\frac{i}{2} Z_{\phi^2} \chi \phi^2,$$

где

$$Z_{\phi^2} = 1 + \bar{\Gamma}_{\phi^2}^{(2)}(0; 0, 0). \quad (2.162)$$

Таким образом, выражение для $\Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}$ с учетом однопетлевого вклада имеет вид

$$\Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(p; p_1, -p - p_1) = 1 + \bar{\Gamma}_{\phi^2 R}^{(2)}(p; p_1, -p - p_1) \quad (2.163)$$

и удовлетворяет условию нормировки

$$\Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0; 0, 0) = 1. \quad (2.164)$$

В общем случае в (2.157) мы должны добавить контрчлен $\Delta\Omega$, т. е.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \chi(\Omega + \Delta\Omega). \quad (2.165)$$

В частности, если контрчлен пропорционален самому составному оператору $\Delta\Omega = C\Omega$, как в случае $\Omega = 1/2 \phi^2$, то

$$\mathcal{L}[\chi] = \mathcal{L}[0] + \chi Z_{\Omega} \Omega = \mathcal{L}[0] + \chi \Omega_0, \quad (2.166)$$

где

$$\Omega_0 = Z_{\Omega} \Omega = (1 + C) \Omega.$$

Такие составные операторы называют *мультипликативно перенормируемыми*. Это означает, что функция Грина, содержащая неперенормированный оператор Ω_0 , связана с функцией Грина для перенормированного оператора соотношением

$$\begin{aligned} G_{\Omega_0}^{(n)}(x; x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | T(\Omega_0(x) \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n)) | 0 \rangle = \\ &= Z_{\Omega} Z_{\phi}^{n/2} G_{\Omega R}^{(n)}(x; x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.167)$$

Составной оператор $\Omega = 1/2 \phi^2$ мультипликативно перенормируем, так как это единственный оператор размерности два. В более общем случае $\Delta\Omega \neq C\Omega$, и для перенормировки составного оператора могут потребоваться контрчлены, пропорциональные другим составным операторам. Таким образом, из-за перенормировок возникает смешивание между составными операторами. Например, если $\Omega = \phi^4$, то понадобятся контрчлены $\Delta\Omega = (\partial_{\mu}\phi)^2$, ϕ^2 и ϕ^4 . Для определенности мы ограничимся случаем, когда имеются два составных оператора A и B , которые смешиваются при перенормировке:

$$\mathcal{L}[\chi] = \mathcal{L}[0] + \chi_A(A + \Delta A) + \chi_B(B + \Delta B). \quad (2.168)$$

Контрчлены ΔA и ΔB являются некоторыми линейными комбинациями A и B :

$$\begin{aligned} \Delta A &= C_{AA}A + C_{AB}B, \\ \Delta B &= C_{BA}A + C_{BB}B. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Мы можем представить $\mathcal{L}[\chi]$ в виде

$$\mathcal{L}[\chi] = \mathcal{L}[0] + (\chi_A, \chi_B) C \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (2.170)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 1 + C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & 1 + C_{BB} \end{pmatrix}. \quad (2.171)$$

Матрица C может быть диагонализирована биунитарным преобразованием (см. разд. 11.3), т. е.

$$UCV^\dagger = \begin{pmatrix} Z_{A'} & 0 \\ 0 & Z_{B'} \end{pmatrix}, \quad (2.172)$$

где U и V — унитарные матрицы. Лагранжиан может быть переписан в следующем виде:

$$\mathcal{L}[\chi] = \mathcal{L}[0] + Z_{A'} \chi_{A'} A' + Z_{B'} \chi_{B'} B',$$

где

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (2.173)$$

$$(\chi_{A'}, \chi_{B'}) = (\chi_A, \chi_B) U^\dagger.$$

Этот результат означает, что линейные комбинации A' и B' , определенные равенством (2.173), являются мультипликативно перенормируемыми:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(A'(x) B'(y) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle = \\ = Z_{A'}^{-1} Z_{B'}^{-1} Z_\phi^{-n/2} \langle 0 | T(A'_0(x) B'_0(y) \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.174)$$

В качестве примера смешивания двух составных операторов рассмотрим теорию с лагранжианом

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = \psi(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \\ - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - g \bar{\psi} \psi \phi - \frac{\lambda' \phi^3}{3!}, \end{aligned} \quad (2.175)$$

где $A = \phi^3$ и $B = \bar{\psi} \psi$. Эти два составных оператора могут смешиваться при перенормировке в силу расходимости диаграмм, показанных на рис. 2.20.

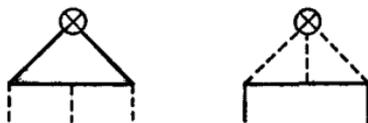


Рис. 2.20. Однопетлевые расходящиеся диаграммы, включающие составные операторы $A = \phi^3$ и $B = \bar{\psi} \psi$. Штриховые линии отвечают полю ϕ , сплошные — полю ψ .

Теория перенормировок, рассмотренная в гл. 2, содержит некоторый произвол, связанный с выбором точки в кинематической области при определении физических параметров, таких, как массы и константы связи. Например, в методе БПХ-перенормировок требуется лишь, чтобы расходящаяся часть одночастично-неприводимой диаграммы сокращалась контрчленами, построенными с помощью разложений в ряд Тейлора. Но точка, в которой производится разложение, произвольна. Различные способы выбора точек разложения, т. е. различных точек вычитания, приводят к разным определениям физических параметров в теории. Однако все точки вычитания равноправны: физика не должна зависеть от выбора условий нормировки. Мы приходим к понятию *ренормализационной группы* (или ренормгруппы): физическое содержание теории должно быть инвариантно при преобразованиях, изменяющих только условия нормировки. Хотя это утверждение на первый взгляд кажется тривиальным, на самом деле оно приводит к далеко не тривиальным ограничениям на асимптотическое поведение функций в теории. В системах с бесконечным числом степеней свободы (таких, как квантовая теория поля) перенормировка может быть построена таким образом, что она будет эквивалентна ряду переопределений физических параметров в пределах соответствующих масштабов длины или энергии. Между физическими величинами, определенными таким образом, должна существовать связь. Можно сказать, что уравнения ренормгруппы описывают эффект изменения шкалы величин в теории или, более точно, выражают связь перенормируемости и масштабных преобразований.

Впервые метод ренормгруппы был применен Гелл-Манном и Лоу в 1954 г. [166] для изучения асимптотического поведения функций Грина в квантовой электродинамике. Ренормализационная группа была открыта Штюкельбергом и Петерманом в 1953 г. [369]. Ее роль в анализе асимптотического поведения, проведенном Гелл-Манном и Лоу, была понята и изучена в работах Боголюбова и Ширкова [56]. В последнее время интерес к ренормгрупповому анализу значительно возрос благодаря работе Вильсона [427]. Наше изложение в основном следует лек-

циям Коулмена [90]. Существует несколько способов построения ренормгрупповых уравнений. В разд. 3.1 мы изучим следствия ренормгрупповой инвариантности с помощью уравнения Каллана — Симанзика [68, 377], связанного со схемами вычитаний в импульсном пространстве. В разд. 3.2 мы кратко обсудим «не зависящие от массы» перенормировки или схему минимальных вычитаний [386, 404] и соответствующее ей уравнение ренормгруппы. В разд. 3.3 мы получим решение этих уравнений, выраженное через «эффективную константу связи», и изучим его свойства¹⁾.

3.1. СХЕМЫ ВЫЧИТАНИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И УРАВНЕНИЕ КАЛЛАНА — СИМАНЗИКА

Как уже говорилось выше, существование ренормализационной инвариантности связано со свободой в выборе точки, в которой строится разложение в ряд Тейлора, что в свою очередь ведет к различным определениям физических параметров в теории. Эта свобода выбора может быть переформулирована в виде произвола в нормировке 1 ЧН амплитуд. При этом физические параметры зависят от выбора нормировочного условия. В качестве иллюстрации рассмотрим теорию $\lambda\phi^4$. Мы приведем два характерных примера условий нормировки зависящих от масс (или схем вычитаний в импульсном пространстве).

Промежуточная перенормировка

Эта схема соответствует разложению в ряд Тейлора в окрестности нулевых внешних импульсов. Для собственной энергии имеем

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + \Sigma'(0)p^2 + \tilde{\Sigma}(p^2). \quad (3.1)$$

Конечная часть $\tilde{\Sigma}(p^2)$ обладает свойствами

$$\tilde{\Sigma}(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = 0. \quad (3.3)$$

¹⁾ Необходимо отметить, что в 1955 г. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков [448], исходя из группового характера конечных перенормировок, вывели функциональные уравнения для квантовопольевых функций, установив тем самым связь между работами [369] и [166], а также впервые получили групповые дифференциальные уравнения в явном виде. Программа частичного суммирования вкладов диаграмм и эффективного улучшения обычной теории возмущений была реализована в работе [449]. — *Прим. ред.*

Полный пропагатор $\Delta_R(p^2)$ связан с собственно энергетической функцией $\tilde{\Sigma}(p^2)$ соотношением

$$i\Delta_R(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)}, \quad (3.4)$$

а 1 ЧН двухточечная функция $\Gamma_R^{(2)}(p^2)$ равна

$$i\Gamma_R^{(2)}(p^2) = i\Delta_R(p^2) [i\Delta_R(p^2)]^{-2} = -i[\Delta_R(p^2)]^{-1} = \\ = -i[p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)]. \quad (3.5)$$

Условия нормировки для $\tilde{\Sigma}(p^2)$ (3.2) и (3.3) могут быть переформулированы для $\Gamma_R^{(2)}(p^2)$:

$$\Gamma_R^{(2)}(0) = \mu^2, \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = -1. \quad (3.7)$$

Для четырехточечной функции конечная часть вкладов высших порядков дается равенством

$$\bar{\Gamma}_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = \bar{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3) - \bar{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0). \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$\bar{\Gamma}_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = 0 \quad \text{при} \quad p_1 = p_2 = p_3 = 0. \quad (3.9)$$

Учитывая также вклад древесного приближения, получаем

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = -i\lambda + \bar{\Gamma}_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3). \quad (3.10)$$

Условие нормировки для полной четырехточечной функции имеет вид

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p, p_3) = -i\lambda \quad \text{при} \quad p_1 = p_2 = p_3 = 0. \quad (3.11)$$

Так как точки $p_i = 0$ не лежат внутри физически допустимой области, в этой схеме вычитаний μ^2 не является физической массой, а λ не является физической константой связи. Но все физически измеримые величины могут быть выражены через эти два параметра. В этом смысле они являются физическими параметрами.

Схема вычитаний на массовой поверхности

В этой схеме вычитаний разложение в ряд Тейлора производится в точке, которая отвечает внешним импульсам, лежащим на массовой поверхности, т. е. $p_i^2 = \mu^2$. Для собственной энергии оно имеет вид

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(\mu^2) + (p^2 - \mu^2)\Sigma'(\mu^2) + \tilde{\Sigma}(p^2). \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$\tilde{\Sigma}(\mu^2) = 0, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=\mu^2} = 0. \quad (3.14)$$

Для функции $\Gamma_R^{(2)}(p^2)$, определяемой равенством (3.5), соответствующие условия имеют следующий вид:

$$\Gamma_R^{(2)}(\mu^2) = 0, \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=\mu^2} = -1. \quad (3.16)$$

В случае четырехточечной функции в качестве точки разложения в ряд Тейлора удобно выбрать симметричную точку в импульсном пространстве:

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = -i\lambda \quad \text{при} \quad p_i^2 = \mu^2, \quad s = t = u = 4\mu^2/3, \quad (3.17)$$

где s , t и u — переменные Мандельштама. Здесь параметры μ^2 и λ являются соответственно физической массой и с точностью до некоторых кинематических факторов физическим дифференциальным сечением при $s = t = u = 4\mu^2/3$.

Приведенные выше два примера являются частными случаями общей схемы вычитаний. Условия нормировки R , вообще говоря, могут характеризоваться несколькими точками в импульсном пространстве ξ_1, ξ_2, \dots , в окрестности которых строится разложение в ряд Тейлора:

$$\Gamma_R^{(2)}(\xi_1^2) = \mu^2, \quad (3.18a)$$

$$\left. \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=\xi_2^2} = -1, \quad (3.18б)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(\xi_3, \xi_4, \xi_5) = -i\lambda. \quad (3.18в)$$

Ренормализационная группа. Рассмотрим две различные процедуры перенормировки R и R' . Так как в обоих случаях исходный голый лагранжиан, записанный через неперенормированные поля, один и тот же:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R(R\text{-величины}) = \mathcal{L}_{R'}(R'\text{-величины}), \quad (3.19)$$

то мы имеем (см. формулу (2.23))

$$\phi_R = Z_\phi^{-1/2}(R) \phi_0, \quad \phi_{R'} = Z_\phi^{-1/2}(R') \phi_0. \quad (3.20)$$

Следовательно,

$$\phi_{R'} = Z_\phi^{-1/2}(R', R) \phi_R,$$

где

$$Z_\phi(R', R) = Z_\phi(R')/Z_\phi(R). \quad (3.21)$$

Это означает, что перенормированные поля в различных схемах вычитаний связаны друг с другом мультипликативной константой. Поля ϕ_R и $\phi_{R'}$ конечны. Поэтому величина $Z_\phi(R', R)$ также должна быть конечной, хотя она и является отношением двух расходящихся величин. Можно получить аналогичные соотношения между константами связи, массами и функциями Грина:

$$\lambda_{R'} = Z_\lambda^{-1}(R', R) Z_\phi^2(R', R) \lambda_R, \quad (3.22)$$

$$\mu_{R'}^2 = \mu_R^2 + \delta\mu^2(R', R). \quad (3.23)$$

Здесь все константы

$$Z_\lambda(R', R) = Z_\lambda(R')/Z_\lambda(R), \quad (3.24)$$

$$\delta\mu^2(R', R) = \delta\mu^2(R') - \delta\mu^2(R) \quad (3.25)$$

являются конечными. Операцию, переводящую величины, относящиеся к схеме перенормировок R , в величины в схеме перенормировок R' , можно рассматривать как преобразование от R к R' . Множество всех таких преобразований образует *ренормализационную группу*. Теперь мы запишем свойство инвариантности теории относительно ренормгрупповых преобразований в аналитическом виде.

Уравнение Каллана — Симанзика

Прежде всего заметим, что дифференцирование неперенормированной функции Грина по голой массе эквивалентно вставке составного оператора $\Omega_0 = 1/2\phi_0^2$, несущего нулевой импульс:

$$\frac{\partial \Gamma^{(n)}(p_i)}{\partial \mu_0^2} = -i \Gamma_{\phi^2}^{(n)}(0; p_i). \quad (3.26)$$

Это равенство справедливо, поскольку величина $\Gamma^{(n)}(p_i)$ зависит от параметра μ_0^2 только через голый пропагатор

$$i\Delta_0(p) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} \quad (3.27)$$

и поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \left(\frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} \right) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon} (-i) \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}. \quad (3.28)$$

Для неперенормированных (1 ЧН) функций Грина справедливы соотношения

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i; \lambda, \mu) = Z_\phi^{n/2} \Gamma^{(n)}(p_i; \lambda_0, \mu_0), \quad (3.29a)$$

$$\Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}(p, p_i; \lambda, \mu) = Z_\phi^{-1} Z_\phi^{n/2} \Gamma_{\phi^2}^{(n)}(p, p_i; \lambda_0, \mu_0). \quad (3.29b)$$

Подставляя (3.29) в (3.26) и используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \Gamma_R^{(n)}(p_i; \lambda, \mu) = \left[\frac{\partial \mu^2}{\partial \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i; \lambda, \mu), \quad (3.30)$$

получаем уравнение Каллана — Симанзика для теории $\lambda\phi^4$:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i; \lambda, \mu) = -i\mu^2 \alpha \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}(0, p_i; \lambda, \mu). \quad (3.31)$$

Здесь α , β и γ — безразмерные функции:

$$\beta = 2\mu^2 \frac{\partial \lambda / \partial \mu_0^2}{\partial \mu^2 / \partial \mu_0^2}, \quad (3.32)$$

$$\gamma = \mu^2 \frac{\partial \ln Z_\phi / \partial \mu_0^2}{\partial \mu^2 / \partial \mu_0^2}, \quad (3.33)$$

$$\alpha = \frac{2Z_{\phi^2}}{\partial \mu^2 / \partial \mu_0^2}. \quad (3.34)$$

Между функциями α и γ существует связь. Чтобы установить ее, вспомним, что при $n = 2$ выполняются условия нормировки (3.6) и (2.164):

$$\Gamma_R^{(2)}(0; \lambda, \mu) = i\mu^2, \quad \Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, 0; \lambda, \mu) = 1. \quad (3.35)$$

Полагая в уравнении (3.31) $n = 2$ и $p_i = 0$, получаем

$$\alpha = 2(\gamma - 1). \quad (3.36)$$

Так как перенормированные величины $\Gamma_R^{(n)}$ и $\Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$ не зависят от параметра обрезания во всех порядках по λ , то можно ожидать, что и функции α , β и γ также не зависят от него. Чтобы строго доказать это утверждение, положим $n = 2$ в уравнении (3.31) и продифференцируем его по p^2 :

$$\begin{aligned} \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - 2\gamma \right] \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p; \lambda, \mu) = \\ = -i\mu^2 \alpha \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, p; \lambda, \mu). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Теперь положим $p^2 = 0$ и воспользуемся условием нормировки (3.7):

$$\left. \frac{\partial \Gamma_R^{(2)}(p^2; \lambda, \mu)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = -1. \quad (3.38)$$

Тогда соотношение (3.37) примет вид

$$\gamma = \mu^2 (1 - \gamma) \left[\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, p^2; \lambda, \mu) \right]_{p^2=0}. \quad (3.39)$$

Из равенства (3.39) видно, что γ не зависит от параметра обрезания. Мы установили, что все функции в уравнении (3.31), кроме β , не зависят от параметра обрезания; следовательно, и β не зависит от него. Так как величины α , β и γ безразмерны, из независимости от параметра обрезания следует, что они являются функциями только безразмерной константы λ , т. е. $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$ и $\gamma = \gamma(\lambda)$.

Для практических расчетов величин α , β и γ удобно следующим образом использовать зависимость констант перенормировки Z_λ , Z_ϕ от параметра обрезания Λ . Если мы проводим вычисления в рамках неперенормированной теории возмущений с параметрами λ_0 и μ_0 , то перенормированные параметры λ и μ , согласно (2.50) и (2.51), равны

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \delta\mu^2, \quad (3.40)$$

$$\lambda = \bar{Z}\lambda_0, \quad (3.41)$$

где

$$\bar{Z} = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2, \quad (3.42)$$

и являются функциями λ_0 , μ_0 и Λ . Из соображений размерности константы λ и Z_i могут зависеть лишь от безразмерных величин λ_0 и Λ/μ_0 . Если мы далее выразим μ_0 через $\mu = \mu(\lambda_0, \mu_0, \Lambda)$, то получим $\lambda = \lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu)$ и $Z_i = Z_i(\lambda_0, \Lambda/\mu)$. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu) \Big|_{\Lambda, \lambda_0} = \frac{\partial \mu^2}{\partial \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu) \Big|_{\Lambda, \lambda_0}, \quad (3.43)$$

получаем

$$\begin{aligned} \beta &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} [\lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu)]_{\Lambda, \lambda_0} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} [\bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/\mu) \lambda_0]_{\Lambda, \lambda_0} = \\ &= -\lambda_0 \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} [\bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/\mu)]_{\mu, \lambda_0}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

или

$$\beta = -\lambda \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} [\ln \bar{Z}(\lambda_0, \Lambda/\mu)]. \quad (3.45)$$

Аналогично выводится формула

$$\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} [\ln Z_\phi(\lambda_0, \Lambda/\mu)]. \quad (3.46)$$

Из этих формул следует, что для вычисления β - и γ -функций, входящих в уравнение Каллана — Симанзика, достаточно знать лишь члены, содержащие $\ln \Lambda$ в выражениях для констант Z_i . В однопетлевом приближении имеем (см. формулу (2.100))

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + O(\lambda_0^2),$$

$$Z_\phi = 1 + O(\lambda_0^2).$$

Следовательно,

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3), \quad (3.47)$$

$$\gamma(\lambda) = O(\lambda^2). \quad (3.48)$$

Уравнение Каллана — Симанзика непосредственно обобщается на случай функций Грина, включающих несколько составных операторов $A, B, C \dots$. Выберем сначала соответствующие линейные комбинации операторов, такие, чтобы они были мультипликативно перенормируемыми (см. разд. 2.4):

$$\{G_{AB\dots}^{(n)}\}_R = Z_A^{-1} Z_B^{-1} \dots Z_\phi^{-n/2} \{G_{AB\dots}^{(n)}\}_0, \quad (3.49)$$

или

$$\{\Gamma_{AB\dots}^{(n)}\}_R = Z_A^{-1} Z_B^{-1} \dots Z_\phi^{n/2} \{\Gamma_{AB\dots}^{(n)}\}_0. \quad (3.50)$$

Тогда легко показать, что уравнение Каллана — Симанзика имеет вид

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma + \gamma_{AB\dots} \right] \{\Gamma_{AB\dots}^{(n)}\}_R = -i\mu^2 \alpha \{\Gamma_{\phi^2, AB\dots}^{(n)}\}_R, \quad (3.51)$$

где

$$\gamma_{AB\dots} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \ln [Z_A Z_B \dots].$$

Теорема Вайнберга об асимптотическом поведении функций Грина

Очевидно, что поведение функций Грина при больших импульсах или на малых расстояниях представляет большой интерес. Оно связано со свойствами перенормируемости теории. Вайнберг [398] доказал важную теорему, описывающую асимптотическое поведение функций Грина для неисключительных значений импульсов в евклидовой области. В евклидовой области все импульсы пространственноподобны $p_i^2 < 0$. Эту ситуацию проще всего реализовать, если считать пространственные компоненты вещественными, а временную — мнимой. Конфигурация импульсов p_1, p_2, \dots, p_n называется неисключительной, если ни одна нетривиальная частичная сумма не обращается в нуль, т. е. $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \neq 0$ при i_1, i_2, \dots, i_k , принимающих все значения $1, 2, \dots, n$. (Тривиальной частичной суммой, обращающейся в нуль, является сумма $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0$, отражающая общий закон сохранения импульса.)

Мы сформулируем без доказательства теорему Вайнберга. Пусть импульсы являются неисключительными и параметризованы следующим образом: $p_i = \sigma k_i$. Тогда 1 ЧН-функция Грина $\Gamma_R^{(n)}$ в глубоко евклидовой области (соответствующей $\sigma \rightarrow \infty$, k_i — фиксированы) растет в любом конечном порядке по константе связи λ как полином по $\ln \sigma$, умноженный на σ^{4-n} . Аналогично $\Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$ растет как полином по $\ln \sigma$, умноженный на σ^{2-n} .

Заметим, что степени числа σ для $\Gamma_R^{(n)}$ и $\Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$ есть просто их условные степени расходимости (см. гл. 2), которые совпадают также с их размерностями в единицах массы.

Эта теорема интуитивно понятна для сходящихся диаграмм. Если внешние импульсы велики и образуют неисключительную конфигурацию, то эти большие импульсы проходят по внутренним петлям и устанавливают шкалу петлевых импульсов, по которым ведется интегрирование. (Для исключительной импульсной конфигурации ситуация может быть иной.) Это объясняет, почему одна и та же степень расходимости возникает как при анализе предела больших внутренних импульсов, так и при анализе предела больших внешних импульсов. Для сходящихся диаграмм справедливость теоремы Вайнберга не столь очевидна. Можно ожидать, что область интегрирования, дающая основной вклад, будет определяться параметром обрезания Λ даже при больших внешних импульсах. Но члены, зависящие от Λ , сокращаются при учете необходимых контрчленов. Остающийся ведущий вклад опять соответствует той области интегрирования по петле, в которой внутренний импульс по порядку величины сравним с большими внешними импульсами. Чтобы проиллюстрировать эти замечания, рассмотрим диаграмму с четырьмя внешними линиями, приведенную на рис. 2.5:

$$\Gamma \sim \int \frac{d^4 l}{[(l-p)^2 - \mu^2][l^2 - \mu^2]}. \quad (3.52)$$

В трех характерных областях интегрирования имеем: $\Gamma \sim \ln \Lambda$ при $l \gg p$; $\Gamma \sim \ln p$ при $l \sim p$; $\Gamma \sim p^{-2}$ при $l \ll p$. После учета контрчлена (соответствующая ему диаграмма показана на рис. 2.19, θ) слагаемое с $\ln \Lambda$ сокращается и заменяется на член, постоянный по p . Следовательно, асимптотическое поведение в основном определяется областью интегрирования, где $l \sim p$. Поэтому степень σ в асимптотике совпадает с условной степенью расходимости. В рассматриваемом частном примере $D = 4 - n = 0$. Из теоремы Вайнберга следует, что асимптотическое поведение имеет вид $\Gamma = \sigma^0 \times$ (полином по $\ln \sigma$). Этот результат согласуется с приведенными выше оценками.

Сделаем еще одно замечание. В глубоко евклидовой области частицы далеки от массовой поверхности $p_i^2 \gg \mu^2$. Тем не менее, как показано в гл. 7 и 10, в случае глубокоупругого рассеяния лептонов оказывается возможным получить полезную информацию с помощью операторного разложения.

Согласно теореме Вайнберга, асимптотика функции Грина в рамках теории возмущений имеет вид

$$\Gamma^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) \xrightarrow[\sigma \rightarrow \infty]{} \sigma^{4-n} [a_0 (\ln \sigma)^{b_0} + a_1 (\ln \sigma)^{b_1} \lambda + \dots], \quad (3.53)$$

где константы a_i и b_i не определены. Остается открытым вопрос, чему равен результат суммирования полиномов по $\ln \sigma$. Если они суммируются к некоторой степени σ , например $\sigma^{-\gamma}$, то величина γ называется *аномальной размерностью*, так как она меняет каноническое поведение σ^{4-n} на $\sigma^{4-n-\gamma}$. Без сомнения, нам хотелось бы знать как можно больше об аномальной размерности γ .

Асимптотическое решение ренормгруппового уравнения

Если можно отбросить неоднородный член в правой части равенства (3.31), включающий массовые вставки, то из уравнения Каллана — Симанзика можно получить информацию об асимптотическом поведении функции Грина. Так как это уравнение связывает величины различных порядков по константе связи ($\mu(\partial/\partial\mu) \sim O(1)$, $\beta(\partial/\partial\lambda) \sim O(\lambda)$, а функция γ еще более высокого порядка), то его можно рассматривать как своего рода рекуррентное соотношение для коэффициентов a_i и b_i , входящих в (3.53). Следовательно, асимптотическое решение уравнения Каллана — Симанзика должно иметь отношение к реальному поведению функции Грина при больших импульсах или на малых расстояниях. Другими словами, это ренормгрупповое уравнение позволяет просуммировать ведущие логарифмические члены во всех порядках теории возмущений.

Из теоремы Вайнберга следует, что $\Gamma_R^{(n)} \gg 1 \phi_R^{(i)}$ в любом конечном порядке по λ в глубокоевклидовой области ($\sigma \rightarrow \infty$). Если мы предположим, что это неравенство справедливо даже после суммирования всех порядков теории возмущений, то можно опустить правую часть уравнения Каллана — Симанзика (3.31) и получить следующее однородное дифференциальное уравнение¹⁾:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right] \Gamma_{ac}^{(n)}(p_i, \lambda, \mu) = 0, \quad (3.54)$$

где $\Gamma_{ac}^{(n)}$ — асимптотическая форма $\Gamma_R^{(n)}$. Таким образом, в глубоко евклидовой области малые изменения массового параметра (член $\mu(\partial/\partial\mu)$) всегда могут быть компенсированы соответствующими малыми изменениями константы связи (член $\beta(\partial/\partial\lambda)$) и масштабными изменениями полей (член $-n\gamma$).

¹⁾ Может сложиться впечатление, что дифференциальные ренормгрупповые уравнения, рассматриваемые в этом разделе (начиная с (3.54)), являются следствием уравнений Каллана — Симанзика вида (3.31), (3.51) и могут быть получены лишь в асимптотическом случае. Последовательный и логически более простой путь вывода ренормгрупповых уравнений, восходящий к работам [166, 448], использует функциональные уравнения и следующие из них дифференциальные уравнения для функций Грина и эффективного заряда вида (3.60), (3.64), которые могут быть записаны и в неасимптотической области.—
Прим. ред.

Сначала мы сопоставим изменению массового параметра соответствующее изменение масштабного параметра. Используя анализ размерностей, можно записать

$$\Gamma_{ac}^{(n)}(p_i, \lambda, \mu) = \mu^{4-n} \bar{\Gamma}_R^{(n)}(p_i/\mu, \lambda), \quad (3.55)$$

где $\bar{\Gamma}_R^{(n)}$ — безразмерная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \bar{\Gamma}_R^{(n)}(\sigma p_i/\mu, \lambda) = 0. \quad (3.56)$$

Из соотношений (3.55) и (3.56) имеем

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + (n-4) \right] \Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = 0. \quad (3.57)$$

Теперь уравнение Каллана — Симанзика может быть записано в следующей асимптотической форме:

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + (n-4) \right] \Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = 0. \quad (3.58)$$

Для решения этого уравнения мы сначала исключим члены, не содержащие производных, с помощью преобразования

$$\Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n} \exp \left[n \int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] F^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu). \quad (3.59)$$

Тогда

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] F^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = 0. \quad (3.60)$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, перейдем к переменной $t = \ln \sigma$. Нужно решить уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] F^{(n)}(e^t p_i, \lambda, \mu) = 0. \quad (3.61)$$

Для этого введем функцию, называемую *эффективной* или *бегущей константой связи* $\bar{\lambda}$, как решение уравнения

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(t, \lambda)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda}) \quad (3.62)$$

с граничным условием $\bar{\lambda}(t=0, \lambda) = \lambda$. Уравнение (3.62) можно записать в другой форме. Для этого проинтегрируем его по t :

$$t = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t, \lambda)} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (3.63)$$

а затем продифференцируем обе части по λ :

$$0 = \frac{1}{\beta(\bar{\lambda})} \frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} - \frac{1}{\beta(\lambda)},$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \bar{\lambda}(t, \lambda) = 0. \quad (3.64)$$

Следовательно, если функция $F^{(n)}$ зависит от t и λ через комбинацию $\bar{\lambda}(t, \lambda)$, то она удовлетворяет уравнению (3.61). Тогда $\Gamma_{ac}^{(n)}$ должна иметь вид

$$\Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n} \exp \left[n \int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] F^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), \mu). \quad (3.65)$$

Можно записать

$$\begin{aligned} \exp \left[n \int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] &\sim \exp \left[n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx + n \int_{\bar{\lambda}}^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] = \\ &= H(\bar{\lambda}) \exp \left[-n \int_{\bar{\lambda}}^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] = H(\bar{\lambda}) \exp \left[-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t', \lambda)) dt' \right], \end{aligned} \quad (3.66)$$

где

$$H(\bar{\lambda}) = \exp \left[n \int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right].$$

Итак, мы получили результат

$$\begin{aligned} \Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) &= \\ &= \sigma^{4-n} \exp \left[-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(x', \lambda)) dx' \right] H(\bar{\lambda}(t, \lambda)) F^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), \mu). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Если положим в этой формуле $t=0$ ($\sigma=1$), то увидим, что комбинация $H(\bar{\lambda}) F^{(n)}(\bar{\lambda})$ равна $\Gamma_{ac}^{(n)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) &= \\ &= \sigma^{4-n} \exp \left[-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(x', \lambda)) dx' \right] \Gamma_{ac}^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), \mu). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Записанное в такой форме асимптотическое решение $\Gamma_{ac}^{(n)}$ имеет простую интерпретацию. Эффект масштабного изменения импульсов p_i в функции Грина $\Gamma_R^{(n)}$ эквивалентен с точностью до мультипликативных факторов замене константы связи λ на эффективную константу $\bar{\lambda}$. Первый множитель σ^{4-n} в выражении (3.68) связан с канонической размерностью и отражает тот

факт, что $\Gamma_R^{(n)}$ имеет размерность $4 - n$ в единицах массы. Экспоненциальный множитель в (3.68) есть поправка к канонической размерности, являющаяся результатом суммирования ведущих логарифмов по теории возмущений. Этот множитель определяется γ -функцией. Именно поэтому γ часто называют *аномальной размерностью* [428].

Подведем итоги нашего обсуждения. Почти очевидно, что в пределе больших импульсов массами можно пренебречь и теория должна быть масштабно-инвариантной. Но даже при отсутствии физических масс в перенормируемой теории есть некоторый энергетический масштаб, так как мы всегда должны накладывать условие нормировки при определенном значении импульса. Следовательно, наивный подсчет размерностей, вообще говоря, неприменим и масштабная инвариантность нарушается. Но зависимость теории от нормировочного масштаба масс дается ренормгрупповым уравнением, отражающим эффект малого изменения масштаба. В благоприятных ситуациях, когда неоднородный член в уравнении Каллана — Симанзика можно опустить, из решения видно, что асимптотическое поведение имеет определенный универсальный характер. При этом операторы приобретают аномальные размерности.

3.2. СХЕМА МИНИМАЛЬНЫХ ВЫЧИТАНИЙ И ЕЕ РЕНОРМГРУППОВОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе мы рассмотрим другие формы ренормгруппового уравнения. Проанализируем еще раз условие мультипликативной перенормируемости (3.29а), которое можно записать в виде

$$\Gamma^{(n)}(p_i; \lambda_0, \mu_0) = Z_\phi^{-n/2} \Gamma_R^{(n)}(p_i; \lambda, \mu, \kappa). \quad (3.69)$$

Если мы будем считать голые параметры λ_0, μ_0, ϕ_0 независимыми переменными, то перенормированные величины будут функциями этих голых параметров и нормировочного масштабного параметра κ . В соотношении (3.69) правая часть зависит от κ как явно, так и неявно через определения λ и μ . Но левая часть не зависит от κ . Следовательно,

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - n\gamma \right] \Gamma_R^{(n)} = 0, \quad (3.70)$$

где

$$\beta(\lambda, \mu/\kappa) = \kappa \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa}, \quad (3.71)$$

$$\gamma_m(\lambda, \mu/\kappa) = \kappa \frac{\partial \ln \mu}{\partial \kappa}, \quad (3.72)$$

$$\gamma(\lambda, \mu/\kappa) = \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \kappa}. \quad (3.73)$$

В отличие от уравнения Каллана — Симанзика (3.31) это ренормгрупповое уравнение не имеет неоднородного члена. Мы постараемся решить его с помощью процедуры, аналогичной той, которая использовалась при решении асимптотического уравнения Каллана — Симанзика (3.54). Но теперь коэффициенты β , γ_m и γ являются безразмерными функциями *двух* переменных λ и μ/κ , что затрудняет решение. Однако в противоположность схеме импульсных вычитаний, рассмотренной в разд. 3.1, существует массово-независимая схема перенормировок, в которой зависимость от массы в ренормгрупповом уравнении исчезает. Мы опишем основные черты этой схемы вычитаний, разработанной т'Хофтом [386] (см. также обсуждение некоторых вопросов в книге Рамона [336]).

Схема минимальных вычитаний

Эта схема перенормировок особенно удобна при размерной регуляризации. При этом расходимость проявляется как полюса выражений, когда размерность $n \rightarrow 4$. Схема минимальных вычитаний состоит в добавлении контрчленов, сокращающих эти полюса, причем контрчлены не имеют конечных частей.

В качестве примера рассмотрим собственную энергию в однопетлевом приближении (рис 2.4) в теории $\lambda\phi^4$. В схеме вычитаний в импульсном пространстве, обсуждавшейся в разд. 3.1, очевидно наличие произвольного масштаба масс κ (например, задаваемого точкой нормировки). В схеме размерной регуляризации также возникает необходимость ввести масштаб масс κ , чтобы сохранить правильную размерность константы связи и масс: $\lambda \rightarrow (\kappa)^{4-n}\lambda$ и $\mu \rightarrow \kappa\mu$. Имеем

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p^2) &= \frac{-i\lambda\kappa^\varepsilon}{2} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{i}{l^2 - \mu^2} = \\
 &= \frac{-i\lambda\kappa^\varepsilon}{2(2\pi)^n} \frac{\pi^{n/2}\Gamma(1-n/2)}{\mu^{2-n}} = \frac{-i\lambda\mu^2}{32\pi^2} \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\kappa}{\mu}\right)^\varepsilon 2^\varepsilon \pi^{\varepsilon/2}, \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = 4 - n. \quad (3.75)$$

При разложении в ряд по ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ мы будем пользоваться формулами

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi(n+1) + O(\varepsilon) \right], \quad (3.76)$$

$$a^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln a} = 1 + \varepsilon \ln a + O(\varepsilon^2), \quad (3.77)$$

где

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma,$$

а $\gamma = 0,5772 \dots$ — константа Эйлера. При $\varepsilon \rightarrow 0$ выражение (3.74) имеет вид

$$-i\Sigma(p^2) \rightarrow \frac{-i\lambda\mu^2}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(2) + 2 \ln(\kappa/\mu) + 2 \ln 2 \sqrt{\pi} + O(\varepsilon) \right]. \quad (3.78)$$

Следовательно, контрчлен $\Sigma(0)\phi^2/2$, который необходимо добавить в лагранжиан в соответствии с формулой (2.62), в схеме минимальных вычитаний имеет вид

$$\Delta\mathcal{L}_{\phi^2} = \frac{\lambda\mu^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \phi^2. \quad (3.79)$$

Он отличается от контрчлена $(\lambda\mu^2/32\pi^2) \left[1/\varepsilon + \frac{1}{2} \psi(2) + \ln(\kappa/\mu) + \ln 2 \sqrt{\pi} \right] \phi^2$, добавляемого в схеме вычитаний в импульсном пространстве. Таким образом, лагранжиан контрчленов в минимальной схеме вычитаний содержит только расходящиеся члены разложения в ряд Лорана по ε . Соотношения между физическими λ , μ и ϕ и голыми параметрами имеют вид

$$\lambda_0 = \kappa^\varepsilon \left[\lambda + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(\lambda)/\varepsilon^r \right], \quad (3.80)$$

$$\mu_0 = \kappa \left[1 + \sum_r b_r(\lambda)/\varepsilon^r \right], \quad (3.81)$$

$$\phi_0 = \phi \left[1 + \sum_r c_r(\lambda)/\varepsilon^r \right] \equiv \phi Z_\phi^{-1/2}. \quad (3.82)$$

Коэффициенты в этих суммах, а значит, и контрчлены, не зависят от произвольного параметра κ и (так как все они безразмерны) от массы частицы μ . Поэтому схему минимальных вычитаний называют также «безмассовой», т. е. процедурой перенормировки, *не зависящей от масс*. Это свойство нетрудно понять, если вспомнить, что контрчлены не имеют конечных частей. Они содержат просто «скелетную» структуру, необходимую для сокращения расходимостей при больших импульсах, когда теория не чувствительна к массам (конечно, если амплитуды имеют хорошее поведение при $p \rightarrow \infty$).

Для вычисления ренормгрупповых параметров (3.71) — (3.73) мы воспользуемся тем, что голые величины не зависят от κ . Тогда из соотношения (3.80) имеем

$$\varepsilon\lambda + \left(a_1 + \kappa \frac{\partial\lambda}{\partial\kappa} \right) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^r} \left[\frac{\partial a_r}{\partial\lambda} \kappa \frac{\partial\lambda}{\partial\kappa} + a_{r+1} \right] = 0. \quad (3.83)$$

Так как выражение $\kappa(\partial\lambda/\partial\kappa)$ аналитично при $\varepsilon = 0$, то можно записать

$$\kappa \frac{\partial\lambda}{\partial\kappa} = d_0 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + \dots \quad (3.84)$$

Из (3.83) очевидно, что $d_r = 0$ при $r > 1$ и

$$\varepsilon(\lambda + d_1) + \left(a_1 + d_0 + d_1 \frac{da_1}{d\lambda} \right) + \sum_r \frac{1}{\varepsilon^r} \left[a_{r+1} + d_0 \frac{da_r}{d\lambda} + d_1 \frac{da_{r+1}}{d\lambda} \right] = 0. \quad (3.85)$$

Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} (\lambda + d_1) &= 0, \\ a_1 + d_1 \frac{da_1}{d\lambda} &= -d_0, \\ \left(1 + d_1 \frac{d}{d\lambda} \right) a_{r+1} &= -d_0 \frac{da_r}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Следовательно,

$$\kappa \frac{d\lambda}{d\kappa} = -a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} - \lambda \varepsilon,$$

или

$$\beta(\lambda) = -a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda}. \quad (3.87)$$

Мы также получаем соотношение

$$\left(1 - \lambda \frac{d}{d\lambda} \right) [a_{r+1}(\lambda) - a_1(\lambda)] = \frac{d}{d\lambda} a_r(\lambda). \quad (3.88)$$

Аналогично из формулы (3.81) имеем

$$\gamma_m = \kappa \frac{\partial \ln \mu}{\partial \kappa} = \lambda \frac{db_1}{d\lambda}, \quad (3.89)$$

$$\lambda \frac{db_{r+1}}{d\lambda} = b_r \lambda \frac{db_1}{d\lambda} - \frac{db_r}{d\lambda} \left(1 - \lambda \frac{d}{d\lambda} \right) a_1(\lambda), \quad (3.90)$$

а из (3.82) получаем

$$\gamma = \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \kappa} = \lambda \frac{dc_1}{d\lambda}, \quad (3.91)$$

$$\lambda \frac{dc_{r+1}}{d\lambda} = c_r \lambda \frac{dc_1}{d\lambda} - \frac{dc_r}{d\lambda} \left(1 - \lambda \frac{d}{d\lambda} \right) a_1(\lambda). \quad (3.92)$$

Таким образом, формулы (3.87), (3.89) и (3.91) позволяют вычислить величины β , γ_m и γ непосредственно по вычетам простых полюсов a_1 , b_1 и c_1 . С помощью рекуррентных соотношений (3.88) и (3.90) можно вычислить вычеты полюсов высших порядков по вычету простого полюса. (Аналогично ведущие логарифмы, логарифмы, следующие за ведущими, и т. д. могут быть вычислены во всех порядках теории возмущений с помощью ренормгруппового уравнения, если известно лишь несколько членов низшего порядка.) Здесь мы ограничимся простой проверкой того, что результат для β -функции совпадает с нашими

предыдущими вычислениями. Из соотношений (2.50), (2.63) и (2.123) имеем

$$\lambda_0 = Z_\phi^{-2} Z_\lambda \lambda,$$

где

$$Z_\phi = 1,$$

$$\lambda Z_\lambda = \lambda - i\Gamma(0) = \lambda + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.93)$$

Следовательно, так как a_1 имеет второй порядок по λ , то $\lambda(da_1/d\lambda) = 2a_1$ и

$$\beta \equiv a_1 = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}, \quad (3.94)$$

что совпадает с (3.47).

Тот факт, что в этой схеме вычитаний β , γ и γ_m являются функциями только переменной λ , существенно упрощает решение ренормгруппового уравнения (3.70). Способ решения аналогичен тому, который использовался выше (см. (3.55) — (3.68)). Используя анализ размерностей, уравнение (3.70) можно записать в виде

$$\left[\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - (\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} + n\gamma(\lambda) + \right. \\ \left. + (n-4) \right] \Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i, \mu, \lambda, \kappa) = 0. \quad (3.95)$$

Для решения уравнения (3.95) введем помимо эффективной константы связи $\bar{\lambda}(t)$ также эффективную массу $\bar{\mu}(t)$ (как и раньше, $t \equiv \ln \sigma$)

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta(\bar{\lambda}), \quad (3.96)$$

$$\frac{d\bar{\mu}(t)}{dt} = [\gamma_m(\bar{\lambda}) - 1] \bar{\mu}(t). \quad (3.97)$$

Граничные условия имеют вид

$$\bar{\lambda}(t=0) = \lambda, \quad (3.98)$$

$$\bar{\mu}(t=0) = \mu. \quad (3.99)$$

Теперь можно записать решение уравнения (3.95), которое очень похоже на решение (3.68):

$$\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i, \mu, \lambda, \kappa) = \sigma^{4-n} \exp \left[-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\mu}(t), \bar{\lambda}(t), \kappa).$$

В такой формулировке возможность перехода к пределу больших импульсов (3.54) и справедливость асимптотического решения (3.68) зависят от того, обращается в нуль или нет эффективная масса $\bar{\mu}(t)$ в глубоководной области $t \rightarrow \infty$.

Нужно заметить, что в схемах с вычитанием в импульсном пространстве, рассмотренных в разд. 3.1, можно также ввести произвольный массовый масштаб μ , играющий роль точки вычитания, чтобы получить однородное ренормгрупповое уравнение [404]. Но тогда функции γ , β , γ_m помимо зависимости от константы связи λ будут содержать зависимость от m/μ . Это несколько усложняет решение уравнения ренормгруппы. Однако при конкретных расчетах точку вычитания μ обычно выбирают достаточно большой, чтобы зависимостью от m/μ в функциях γ , β и γ_m можно было пренебречь.

3.3. ЭФФЕКТИВНАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ

Помимо тривиального множителя σ^{4-n} , обусловленного размерностью, функция Грина $\Gamma_R^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu)$ в глубокоевклидовой области $\sigma \rightarrow \infty$ (или $e^t \rightarrow \infty$) зависит от σ только через эффективную константу связи $\kappa(t, \lambda)$. В дальнейшем при анализе асимптотического поведения функции Грина мы сосредоточим внимание именно на этой зависимости.

Как уже отмечалось в разд. 3.1, определение константы связи λ зависит от точки вычитания. Например, в схеме промежуточной перенормировки четырехточечная функция теории $\lambda\phi^4$ дается формулой (2.42):

$$\Gamma_I^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda_I + \tilde{\Gamma}(s, \lambda_I) + \tilde{\Gamma}(t, \lambda_I) + \tilde{\Gamma}(u, \lambda_I), \quad (3.100)$$

где величина $\tilde{\Gamma}(s, \lambda)$ задается выражением (2.86), а λ_I — константа связи, определенная в этой схеме. Сечение двухчастичного упругого рассеяния связано с четырехточечной функцией соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} |\Gamma^{(4)}|^2. \quad (3.101)$$

В схеме перенормировок на массовой поверхности константа связи определяется по-другому — из разложения четырехточечной функции в симметричной точке $s = t = u = 4\mu^2/3$:

$$\Gamma_s^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda_s + \tilde{\Gamma}_s(s, \lambda_s) + \tilde{\Gamma}_s(t, \lambda_s) + \tilde{\Gamma}_s(u, \lambda_s), \quad (3.102)$$

где

$$\tilde{\Gamma}_s(s, \lambda_s)|_{s=4\mu^2/3} = 0, \quad \Gamma_s^{(4)}(s=t=u=4\mu^2/3) = -i\lambda_s.$$

Поскольку сечение (3.101) должно быть одним и тем же в этих двух схемах, мы имеем

$$\Gamma_I^{(4)}(s, t, u) = \Gamma_s^{(4)}(s, t, u). \quad (3.103)$$

Вычисляя обе части этого равенства в симметричной точке $s_0 = t_0 = u_0 = 4\mu^2/3$, получаем

$$-i\lambda_s = -i\lambda_I + \tilde{\Gamma}(s_0, \lambda_I) + \tilde{\Gamma}(t_0, \lambda_I) + \tilde{\Gamma}(u_0, \lambda_I).$$

Мы получили соотношения между константами связи, определенными в различных схемах перенормировок. Очевидно, что мы можем производить вычитания в любой точке физической или нефизической области. Константа связи в любой схеме перенормировок будет функцией точки вычитания. В этом смысле константа связи зависит от энергии; она называется *эффективной* или *бегущей константой связи*.

Возможна и другая точка зрения на бегущую константу связи. А именно, она описывает эффекты, порожденные главными радиационными поправками. В теории возмущений эффективным параметром разложения в действительности является константа связи, умноженная на некоторые логарифмические

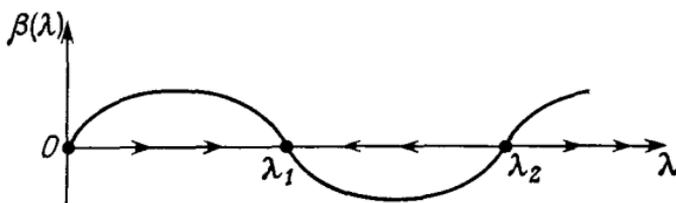


Рис. 3.1. Пример β -функции Каллана — Симанзика, имеющей ультрафиолетово-стабильную точку λ_1 и инфракрасно-стабильные точки 0 и λ_2 . Стрелки показывают направление изменения константы связи при увеличении импульса.

факторы. Точку нормировки обычно выбирают того же порядка по величине, что и характерный масштаб импульсов задачи. Тогда аргумент логарифма, являющийся, как правило, отношением этих двух размерных величин, будет порядка единицы. Но в задачах, где диапазон энергетических масштабов очень велик, радиационные поправки, содержащие эти логарифмические члены, становятся существенными. В решение ренормгруппового уравнения главные логарифмические факторы входят в просуммированном виде с учетом всех порядков теории возмущений.

Бегущая константа связи $\bar{\lambda}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.62):

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(t, \lambda)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda}). \quad (3.104)$$

Его можно также записать в виде (3.64), т. е. как ренормгрупповое уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \bar{\lambda}(t, \lambda) = 0. \quad (3.105)$$

Таким образом, изменение эффективной константы связи λ , вызванное изменением энергетического масштаба, описывается ренормгрупповой β -функцией. Чтобы изучить асимптотическое поведение $\bar{\lambda}$, предположим, что $\beta(\lambda)$ имеет вид, показанный на рис. 3.1. Точки 0 , λ_1 и λ_2 , в которых β -функция обращается в

нуль, называются *фиксированными точками*. Если константа связи λ находится в одной из этих точек при $t = 0$, то она останется в этой точке при всех значениях импульса. Надо различать два вида фиксированных точек. Рассмотрим окрестность λ_1 . Поскольку $\beta(\lambda) > 0$ при $0 < \lambda < \lambda_1$, эффективная константа связи $\bar{\lambda}$, согласно уравнению (3.104), растет с ростом импульса (т. е. $\partial \bar{\lambda} / \partial t = \beta(t) > 0$) и приближается к λ_1 при $t \rightarrow \infty$. Так как $\beta(\lambda) < 0$ при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то $\bar{\lambda}$ уменьшается с ростом импульса и также приближается к λ_1 . Таким образом, в интервале $0 < \lambda < \lambda_2$ константа связи λ всегда стремится к λ_1 при возрастании импульса. Точка λ_1 называется *ультрафиолетово-стабильной фиксированной точкой*. Аналогично нетрудно показать, что в окрестностях точек 0 и λ_2 константа связи стремится к этим точкам при малых значениях импульса, т. е. при $t \rightarrow 0$. Следовательно, начало координат и λ_2 являются примерами *инфракрасно-стабильных фиксированных точек*.

Исследуем теперь асимптотическое решение уравнения Каллана — Симанзика. Предположим, что $0 < \lambda < \lambda_2$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(t, \lambda) = \lambda_1 \quad (3.106)$$

и

$$\Gamma_{ac}^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t, \lambda), \mu) \rightarrow \Gamma_{ac}^{(n)}(p_i, \lambda_1, \mu). \quad (3.107)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда функция $\beta(\lambda)$ имеет простой нуль в точке λ_1 , а величина $\gamma(\lambda_1)$ отлична от нуля. Тогда в окрестности λ_1

$$\beta(\lambda) \approx a(\lambda_1 - \lambda) \quad \text{при } a > 0. \quad (3.108)$$

Из уравнения

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = a(\lambda_1 - \bar{\lambda}) \quad (3.109)$$

получаем

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)e^{-at}. \quad (3.110)$$

Следовательно, для функции (3.108) величина $\bar{\lambda}$ приближается к λ_1 экспоненциально по переменной t . В рамках этого приближения имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(x, \lambda)) dx &= \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma(y) dy}{\beta(y)} \approx -\frac{\gamma(\lambda_1)}{a} \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda_1} = \\ &= -\frac{\gamma(\lambda_1)}{a} \ln \left(\frac{\bar{\lambda} - \lambda_1}{\lambda - \lambda_1} \right) = \gamma(\lambda_1)t = \gamma(\lambda_1) \ln \sigma. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Таким образом, в нашем частном случае выражение (3.68) имеет вид

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Gamma_{ac}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n(1+\gamma(\lambda_1))} \Gamma_{ac}^{(n)}(p_i, \lambda_1, \mu). \quad (3.112)$$

Отсюда следует, что в глубокоевклидовой области изменения полей при масштабных преобразованиях характеризуются аномальной размерностью $\gamma(\lambda_1)$, а поведение функции Грина определяется значениями при $\lambda = \lambda_1$.

В общем случае нахождение нулей β -функции представляет собой сложную задачу, так как для ее решения нужно выйти за рамки теории возмущений. Но $\beta(\lambda)$ имеет тривиальный нуль в начале координат $\lambda = 0$. В этой точке аномальная размерность также обращается в нуль. Кроме того, что вычисление $\gamma(\lambda)$ для малых λ является практически важным, оказывается также, что точка $\lambda = 0$ в некоторых случаях представляет интерес с феноменологической точки зрения. В гл. 7 мы обсудим процессы глубокоэластичного лептон-адронного рассеяния, из которых можно извлечь информацию об асимптотическом поведении производных адронных электромагнитных (или слабых) токов. Явление бёркеновского скейлинга, наблюдаемое в экспериментах, можно интерпретировать как указание на то, что произведение этих токов обладает сингулярностью в пределе свободных полей. Следовательно, если бы нам удалось найти теорию поля, которая обладала бы ультрафиолетово-стабильной точкой в начале координат $\lambda = 0$, то ее можно было бы рассматривать как кандидата на роль теории, описывающей взаимодействия частиц (кварков), составляющих адроны. Другими словами, если бы эффективное взаимодействие кварков убывало с уменьшением расстояния между ними, то мы могли бы объяснить явление бёркеновского скейлинга в глубокоэластичном лептон-адронном рассеянии. Отсюда следует, что теория взаимодействий кварков должна обладать следующим свойством: поля должны становиться свободными в ультрафиолетовом пределе (*асимптотическая свобода*). Чтобы определить, обладает ли та или иная модель этим свойством, надо вычислить β -функцию и проверить, выполняется ли неравенство $\beta(\lambda) < 0$ при $\lambda \geq 0$.

Из формулы (3.47) видно, что теория $\lambda\phi^4$ не является асимптотически свободной в ультрафиолетовом пределе. А именно, мы можем проинтегрировать уравнение (3.104)

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{16\pi^2} \quad (3.113)$$

и получить

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2} t}, \quad (3.114)$$

где $\lambda = \bar{\lambda}(t=0, \lambda)$. Конечно, соотношения (3.113) и (3.114) справедливы лишь при малых $\bar{\lambda}$, так как мы отбросили поправки высших порядков по $\bar{\lambda}$. Если бы эти соотношения имели смысл и при больших константах связи, то из (3.114) следовало

бы, что сила взаимодействия обращается в бесконечность в точке $t = 16\pi^2/3\lambda$, обычно называемой «полюсом Ландау».

В гл. 10 мы рассмотрим β -функции для других теорий. В частности, будет показано, что все теории, не содержащие неабелева калибровочного поля, не могут быть асимптотически свободными.

Подведем основные итоги нашего введения в теорию ренормгруппы и эффективных констант связи. Задача ренормгруппового подхода — описать изменение динамики системы при изменении характерного масштаба величин в наблюдаемом явлении. Обычно интересуются поведением системы либо при очень малых масштабах (ультрафиолетовый предел), либо при очень больших масштабах (инфракрасный предел). Часто в этих случаях ренормгрупповые преобразования (эффективных теорий при различных масштабах) обладают свойством приближаться к фиксированной точке после нескольких итераций. При этом важно, что поведение эффективной теории в окрестности фиксированной точки почти не зависит от деталей этой теории при обычных масштабах. Кроме того, в некоторых случаях вычисления в таких эффективных теориях с фиксированной точкой оказываются намного проще.

Со времен Эйнштейна симметрия играет фундаментальную роль в теоретической физике. В этой и следующих главах мы рассмотрим более знакомый большинству читателей вопрос — глобальную симметрию. Понятие локальной калибровочной симметрии с ее преобразованиями, зависящими от пространственно-временной точки, будет введено в гл. 8. Обычно, требуя, чтобы теория обладала такой калибровочной симметрией, получают вид взаимодействия. Естественным математическим языком для описания симметрий является теория групп. Для того чтобы изучить кварковые модели и неабелевы калибровочные теории сильных и электрослабых взаимодействий, необходимо познакомиться с основами теории групп Ли. В настоящей главе мы даем небольшое введение в этот предмет, преследуя в основном практические цели. Разд. 4.1, являющийся математическим введением, в основном состоит из определений и иллюстрирующих их примеров. Вводимые здесь понятия охватывают теорию групп в том объеме, в каком она практически используется в физике частиц. В разд. 4.2 мы с помощью несложной техники изучим основные свойства групп $SU(2)$ и $SU(3)$, а также изложим графические методы их анализа. В разд. 4.3 мы познакомимся с тензорным методом, который применим и для произвольных групп $SU(n)$. Наконец, в разд. 4.4 дано краткое изложение основных идей кварковой модели, описывающей симметрию ароматов $SU(3)$ в сильных взаимодействиях.

4.1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП

Группой G называется множество элементов (a, b, c, \dots) с законом умножения, обладающее следующими свойствами:

1. *Замкнутость.* Если a и b принадлежат группе G , то и элемент $c = ab$ также принадлежит G .

2. *Ассоциативность.* $a(bc) = (ab)c$.

3. *Существование единичного элемента.* Существует элемент e такой, что $ea = ae = a$ для любого a из группы G .

4. *Существование обратного элемента.* Для любого a из группы G найдется такой элемент a^{-1} , что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Если умножение коммутативно, т. е. $ab = ba$ для любых a и b из группы G , то G называют *абелевой группой*. Если число

элементов в множестве G конечно, то оно называется *конечной группой*. Подмножество группы G , которое само является группой, называют *подгруппой*.

Приведем несколько примеров. *Циклическая группа* порядка n Z_n состоит из элементов вида $a, a^2, a_3, \dots, a^n = e$ (единичный элемент). Она является конечной абелевой группой. *Симметрическая группа* (или *группа перестановок*) S_n , представляющая собой множество перестановок n объектов, есть конечная неабелева группа. *Унитарная группа* $U(n)$ является множеством матриц размера $n \times n$, удовлетворяющим условию $UU^+ = U^+U = 1$. Эта группа неабелева при $n > 1$. Абелева группа $U(1)$ состоит из унитарных матриц размера 1×1 , т. е. фазовых преобразований вида $e^{i\delta}$. Группа унитарных матриц $n \times n$, детерминант которых равен единице, называется *специальной унитарной группой* $SU(n)$. Аналогично $SO(n)$ — группа ортогональных матриц $n \times n$ с единичным детерминантом, удовлетворяющих условию $AA^T = A^T A = 1$. Следовательно, $SO(3)$ есть обычная *группа вращений*.

Пусть даны две группы $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ и $H = \{h_1, h_2, \dots\}$. Если элементы g_i коммутируют с h_j , то можно определить *прямое произведение групп* $G \times H = \{g_i h_j\}$, являющееся группой со следующим законом умножения:

$$g_k h_l \cdot g_m h_n = g_k g_m \cdot h_l h_n. \quad (4.1)$$

Примером прямого произведения групп является группа $SU(2) \times U(1)$. Элементы этой группы — прямые произведения матриц группы $SU(2)$ на фазовые факторы из $U(1)$. Другой пример — группа $SU(3) \times SU(3)$, образованная прямыми произведениями матриц из двух различных групп $SU(3)$. Эти примеры играют важную роль в приложениях теории групп к физике частиц (см. гл. 5 и 11). Если можно представить группу в виде прямого произведения меньших групп, то задача изучения ее структуры существенно упрощается. Чтобы выяснить, когда возможно такое разложение, полезно ввести понятие *инвариантной подгруппы*, т. е. такой подгруппы N , что для любого элемента t из N элемент rtr^{-1} также принадлежит N для любого r из G . Таким образом, любой фактор в прямом произведении групп является инвариантной подгруппой. Если группа не содержит нетривиальной инвариантной подгруппы, т. е. не может быть представлена в виде прямого произведения, то она называется *простой группой*. Примером простой группы является $SU(n)$, но не группа $U(n)$, так как ее можно записать в виде $SU(n) \times U(1)$. Группа называется *полупростой*, когда она является прямым произведением простых групп, не содержащим абелевых сомножителей.

Представление группы есть конкретная реализация закона умножения групповых элементов с помощью матриц. Таким

образом, это отображение абстрактных элементов группы в множество матриц $a \rightarrow D(a)$, такое, что если $ab = c$, то $D(a)D(b) = D(c)$, т. е. отображение, сохраняющее закон группового умножения. Строго говоря, приведенные выше определения групп $U(n)$ и $SU(n)$ даны в терминах *определяющих представлений*. Заметим также, что операции перестановок S_n можно представить в виде конечного числа матриц размера $n \times n$. Пусть представление $D(a)$ может быть приведено к блочно-диагональной форме, т. е. существует несингулярная матрица M , не зависящая от групповых элементов, такая, что

$$MD(a)M^{-1} = \begin{bmatrix} D_1(a) & & 0 \\ & D_2(a) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{для всех } a \text{ из } G. \quad (4.2)$$

В этом случае $D(a)$ называется *приводимым представлением* и записывается в виде прямой суммы $D_1(a) \oplus D_2(a) \oplus \dots$. Если $D(a)$ привести к такой форме нельзя, то его называют *неприводимым представлением*. Матрицы $D(a)$ можно рассматривать как линейные преобразования на множестве базисных векторов (или векторов состояний). *Размерность* представления — это размерность векторного пространства, на котором оно действует. Если представление неприводимо, то все состояния могут быть получены одно из другого с помощью групповых преобразований. Если же представление приводимо, то существует подмножество состояний, которые нельзя перевести в остальные состояния групповыми преобразованиями.

В физических приложениях особый интерес представляют *группы Ли*, которые мы будем здесь понимать как непрерывные группы (элементы которых характеризуются непрерывными параметрами, например углами Эйлера в случае группы вращений $SO(3)$), представимые унитарными операторами. Пусть $a(\theta) = a(\theta_1, \dots, \theta_n)$ — элементы группы, зависящие от n непрерывных вещественных параметров. Единичный элемент полагается равным $e = a(0)$. Закону группового умножения $a(\theta)a(\phi) = a(\xi)$ соответствует отображение пространства параметров на самого себя:

$$f(\theta, \phi) = \xi, \quad (4.3)$$

которое удовлетворяет условиям

$$f(0, \theta) = f(\theta, 0) = \theta, \quad f(\theta, f(\phi, \xi)) = f(f(\theta, \phi), \xi) \quad (4.4)$$

и $f(\theta, \theta') = 0$, если $a(\theta)^{-1}$ представляется как $a(\theta')$. Если функция f в (4.3) является аналитической (или непрерывно дифференцируемой) функцией своих переменных, то данная группа называется группой Ли. Поэтому при изучении таких групп мы

можем пользоваться обычными аналитическими методами в абстрактном групповом пространстве. Кроме того, так как преобразования в квантовой механике задаются унитарными операторами в гильбертовом пространстве, то для нас наиболее интересны группы Ли с унитарными представлениями

$$a(\theta) = \exp\{i\theta \cdot X\} = a(0) + i\theta_k X_k + \dots, \quad (4.5)$$

где величины

$$X_k = -i \left. \frac{\partial a}{\partial \theta_k} \right|_{\theta=0} \quad (4.6)$$

называются (инфинитезимальными) *генераторами* группы. Если $a(\theta)$ унитарны, то X_k образуют набор линейно-независимых эрмитовых операторов. Например, для случая, когда $a(\theta)$ — элемент группы двумерных вращений $SO(2)$, генератором является просто матрица Паули

$$X = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Определим коммутатор двух групповых элементов $a(\phi)$ и $a(\theta)$, близких к единице, как $a(\phi)a(\theta)a(\phi)^{-1}a(\theta)^{-1}$. Это произведение является элементом группы, обозначим его $a(\xi)$. Величина ξ должна быть функцией θ и ϕ :

$$\xi_i = g_i(\theta, \phi), \quad g(0, \phi) = g(\theta, 0) = 0. \quad (4.8)$$

При малых θ и ϕ мы можем разложить $g_i(\theta, \phi)$ в ряд по степеням θ_i и ϕ_i :

$$\xi^i = A^i + B_j^i \theta_j + B_k^i \phi_k + C_{jk}^i \theta_j \phi_k + C_{jk}^i \theta_j \theta_k + C_{jk}^i \phi_j \phi_k + \dots$$

Из граничных условий (4.8) следует

$$A^i = B_j^i = B_k^i = C_{jk}^i = C_{jk}^i = 0,$$

или

$$\xi^i = C_{jk}^i \theta_j \phi_k + \dots \quad (4.9)$$

Приравняем выражения

$$a(\xi) = e + i\xi_i X_i + \dots \quad (4.10a)$$

и

$$a(\phi)a(\theta)a(\phi)^{-1}a(\theta)^{-1} = e + \theta_j \phi_k [X_j, X_k] + \dots \quad (4.10б)$$

Отсюда видно, что величины X_k образуют алгебру Ли:

$$[X_j, X_k] = iC_{jk}^l X_l. \quad (4.11)$$

Константы C_{jk}^l называются *структурными константами* группы и образуют набор вещественных чисел, удовлетворяющих условию

$$C_{jk}^l = -C_{kj}^l. \quad (4.12)$$

Например, генераторами группы вращений в трехмерном пространстве $SO(3)$ являются операторы углового момента J_1 , J_2 и J_3 . Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (4.13)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты с $\varepsilon_{123} = 1$.

Если $D(a)$ — представление группы, то $D^*(a)$ — комплексно-сопряженное представление, так как из равенства $D(a_1)D(a_2) = D(a_1a_2)$ следует $D^*(a_1)D^*(a_2) = D^*(a_1a_2)$. Соотношение (4.6) позволяет определить матрицы представления генераторов $T(X_j) \equiv T_j$:

$$D(a(\theta)) = \exp\{i\theta \cdot \mathbf{T}\}, \quad (4.14)$$

причем

$$[T_j, T_k] = iC_{jk}^l T_l. \quad (4.15)$$

Очевидно, что $(-T_j^*)$ также образуют представление генераторов. Если T_j и $(-T_j^*)$ эквивалентны, т. е. если существует несингулярная матрица S , такая, что

$$ST_jS^{-1} = -T_j^* \quad \text{для всех } j, \quad (4.16)$$

то T_j называют *вещественным представлением*. Как мы увидим в разд. 4.2, все неприводимые представления $SU(2)$ вещественны. В разд. 4.2 мы рассмотрим также некоторые общие свойства вещественных представлений.

Из тождества Якоби

$$[X_j, [X_k, X_l]] + [X_l, [X_j, X_k]] + [X_k, [X_l, X_j]] = 0 \quad (4.17)$$

и равенства (4.11) можно вывести следующее соотношение между структурными константами:

$$C_{jk}^m C_{lm}^n + C_{lj}^m C_{km}^n + C_{kl}^m C_{jm}^n = 0. \quad (4.18)$$

Определим набор матриц T_j , удовлетворяющих коммутационным соотношениям (4.15), равенством

$$C_{jk}^m = i(T_j)_k^m. \quad (4.19)$$

Отсюда видно, что структурные константы также порождают представление алгебры, называемое *присоединенным представлением*. Его размерность равна числу вещественных параметров, необходимых для задания элемента группы.

Для полупростой группы (т. е. не содержащей инвариантной подгруппы $U(1)$), условие нормировки величин T_j , совместное с нелинейным коммутационным соотношением (4.15), выбирают в виде

$$\text{tr}(T_i T_j) = \lambda \delta_{ij}, \quad (4.20)$$

так как $\text{tr}(T_i T_j)$ — вещественная симметричная матрица, которая может быть диагонализирована выбором соответствующих линейных комбинаций генераторов с вещественными коэффициентами. Диагональные элементы этой матрицы положены равными λ . При таком выборе базиса в векторном пространстве генераторов структурные константы могут быть представлены в виде

$$C_{jk}^m = -\frac{i}{\lambda} \text{tr}(T_m [T_j, T_k]), \quad (4.21)$$

откуда следует, что они полностью антисимметричны по всем трем индексам.

Поскольку матрицы представления элементов группы и матрицы представления генераторов этой группы связаны экспоненциальным соотношением (4.14), многие свойства одних могут быть выведены из свойств других. Например, они имеют одинаковую размерность. В дальнейшем, если это не будет приводить к недоразумениям, термин «представление» будет относиться либо к элементам группы, либо к их генераторам. Кроме того, набор базисных состояний представления иногда для краткости мы также будем называть представлением.

4.2. ГРУППЫ $SU(2)$ И $SU(3)$

В теориях частиц мы постоянно имеем дело со специальными унитарными группами $SU(n)$. Группа $SU(2)$ используется при описании изоспиновой симметрии, группа $SU(3)$ лежит в основе теорий, называемых «восьмеричным путем». Стандартная калибровочная модель сильных и электрослабых взаимодействий использует группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$; простейшая теория великого объединения основана на группе $SU(5)$. В этом разделе мы рассмотрим группы $SU(2)$ и $SU(3)$. В разд. 4.3 мы рассмотрим тензорный метод для групп $SU(n)$.

Группа $SU(n)$ — это группа унитарных матриц размера $n \times n$ с единичным детерминантом: $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ и $\det U = 1$. Любая унитарная матрица U может быть записана с помощью эрмитовой матрицы H в виде $U = e^{iH}$. Из тождества $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$ и условия $\det U = 1$ следует $\text{tr} H = 0$. Так как всего существует $n^2 - 1$ независимых эрмитовых матриц $n \times n$ с нулевым следом, то элемент группы $SU(n)$ можно записать в виде

$$U = \exp \left\{ i \sum_{a=1}^{n^2-1} \varepsilon_a J_a \right\}, \quad (4.22)$$

где ε_a (вещественные) групповые параметры. Генераторы группы J_a являются эрмитовыми матрицами с нулевым следом. Из общего числа $(n^2 - 1)$ генераторов диагональны только $(n - 1)$. Поэтому мы говорим, что ранг группы $SU(n)$ равен $n - 1$.

Группа $SU(2)$

Элементы группы зависят от трех групповых параметров. Унитарные унимодулярные матрицы размера 2×2 можно записать в виде

$$U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \exp\{i\epsilon_a \sigma_a\}, \quad (4.23)$$

где σ_a — эрмитовы матрицы 2×2 с нулевым следом. В качестве базиса выберем стандартные матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Генераторы, определенные формулой $J_i = \sigma_i/2$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c, \quad (4.24)$$

где ϵ_{abc} — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты, $\epsilon_{123} = 1$. Абстрагируясь от конкретного вида матриц, мы будем считать, что соотношения (4.24) определяют алгебру Ли группы $SU(2)$ и все представления генераторов удовлетворяют этим коммутационным соотношениям.

Представления группы $SU(2)$. Алгебра (4.24) совпадает с алгеброй (4.13). Поэтому можно говорить об изоморфизме алгебры Ли группы $SU(2)$ и алгебры Ли группы вращений $SO(3)$. Здесь мы будем следовать стандартному методу построения собственных состояний оператора углового момента с целью получить все неприводимые представления группы $SU(2)$.

Определим сначала величину

$$J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (4.25)$$

которая является инвариантным оператором, а именно *оператором Казимира*, коммутирующим со всеми генераторами группы:

$$[J^2, J_a] = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (4.26)$$

Определим также повышающий и понижающий операторы

$$J_{\pm} \equiv J_1 \pm iJ_2. \quad (4.27)$$

Тогда

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2. \quad (4.28)$$

Из соотношения (4.24) следует

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \quad (4.29)$$

$$[J_{\pm}, J_3] = \mp J_{\pm}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим собственные состояния операторов J^2 и J_3 с собственными значениями λ и m :

$$\begin{aligned} J^2|\lambda, m\rangle &= \lambda|\lambda, m\rangle, \\ J_3|\lambda, m\rangle &= m|\lambda, m\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

В силу равенств (4.30) состояния $J_{\pm}|\lambda, m\rangle$ также являются собственными состояниями оператора J_3 с собственными значениями $m \pm 1$ и, как следует из (4.26), с тем же значением λ :

$$J_{\pm}|\lambda, m\rangle = C_{\pm}(\lambda, m)|\lambda, m \pm 1\rangle. \quad (4.32)$$

Константы $C_{\pm}(\lambda, m)$ будут определены ниже. Так как $J^2 - J_3^2 = J_1^2 + J_2^2 \geq 0$, то значения m при данном λ ограничены условием

$$\lambda - m^2 \geq 0. \quad (4.33)$$

Пусть наибольшее значение m равно j :

$$J_+|\lambda, j\rangle = 0. \quad (4.34)$$

Тогда из равенств (4.34), (4.28) и (4.29) получаем

$$0 = J_- J_+ |\lambda, j\rangle = (J^2 - J_3^2 - J_3) |\lambda, j\rangle = (\lambda - j^2 - j) |\lambda, j\rangle, \quad (4.35)$$

или

$$\lambda = j(j+1). \quad (4.36)$$

Аналогично, если j' — наименьшее значение m , то

$$J_- |\lambda, j'\rangle = 0. \quad (4.37)$$

Тогда получаем

$$\lambda = j'(j' - 1). \quad (4.38)$$

Таким образом, $j(j+1) = j'(j'-1)$. Это уравнение имеет два решения: $j' = -j$ и $j' = j+1$. Поскольку второе решение противоречит предположению о том, что j — наибольшее значение m , имеем

$$j' = -j. \quad (4.39)$$

Оператор J_- понижает значение m на единицу. Следовательно, величина $j - j' = 2j$ должна быть целой. Отсюда следует, что j может быть либо целым, либо полуцелым числом. Определим теперь константы $C_{\pm}(\lambda, m)$, входящие в (4.32). Из свойства $J_- = J_+^{\dagger}$ следует равенство $\langle \lambda, m | J_- = C_+^*(\lambda, m) \langle \lambda, m+1 |$, позволяющее записать соотношение

$$\langle \lambda, m | J_- J_+ | \lambda, m \rangle = |C_+(\lambda, m)|^2. \quad (4.40)$$

С другой стороны, из (4.35) имеем

$$\begin{aligned} \langle \lambda, m | J_- J_+ | \lambda, m \rangle &= \langle \lambda, m | (J^2 - J_3^2 - J_3) | \lambda, m \rangle = \\ &= j(j+1) - m^2 - m. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Следовательно,

$$C_+(\lambda, m) = [(j - m)(j + m + 1)]^{1/2}. \quad (4.42)$$

Аналогично

$$C_-(\lambda, m) = [(j + m)(j - m + 1)]^{1/2}. \quad (4.43)$$

Эти состояния $|j, m\rangle$ с $m = j, j - 1, \dots, -j$ образуют базис неприводимого представления группы $SU(2)$, характеризуемого числом j , которое может быть либо целым, либо полуцелым. Размерность такого представления равна $2j + 1$. Для построения матриц представления можно воспользоваться соотношениями

$$J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \\ J_{\pm} |j, m\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |j, m \pm 1\rangle. \quad (4.44)$$

Пример 1. $J = \frac{1}{2}, m = \pm \frac{1}{2}$;

$$J_3 \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (4.45)$$

Если обозначить

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

то

$$J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Из формул $J_+ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0$ и $J_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ получаем

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Далее

$$J_- = J_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

$$J_1 = (J_+ + J_-)/2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = (J_+ - J_-)/2i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Пример 2. $J = 1, m = 1, 0, -1$.

Обозначим

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Тогда

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Из соотношений $J_+ |1, 1\rangle = 0$, $J_+ |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, 1\rangle$ и $J_+ |1, -1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle$ находим

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Тогда

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Нетрудно убедиться прямой проверкой, что матрицы J_i образуют алгебру Ли (4.24).

Произведения представлений группы $SU(2)$. В приложениях часто приходится иметь дело с *произведениями представлений*. Например, пусть имеются две частицы со спином $1/2$, и нужно найти полный спин J системы, описываемой произведением их волновых функций. В этом простом случае ответ нетрудно угадать: $J=0$ или 1 . Попытаемся решить эту задачу методами теории групп. Обозначим через r_1 и r_2 волновые функции первой частицы, соответствующие состояниям со спином вверх и спином вниз. Аналогично через s_1 и s_2 обозначим такие же состояния второй частицы. При преобразованиях группы $SU(2)$

$$r'_i = U(\epsilon)_{ij} r_j, \quad s'_k = U(\epsilon)_{kl} s_l, \quad (4.56)$$

где $U(\epsilon) = \exp\{i\epsilon_a J_a\}$ и $J_a = \sigma_a/2$. Тогда произведение волновых функций преобразуется по формуле

$$(r'_i s'_k) = U(\epsilon)_{ij} U(\epsilon)_{kl} (r_j s_l) \equiv D(\epsilon)_{ik, jl} (r_j s_l). \quad (4.57)$$

Вообще говоря, представление $D(\epsilon)$ приводимо. Чтобы выяснить, на какие неприводимые представления оно разлагается, удобнее работать непосредственно с генераторами, считая $\epsilon_i \ll 1$:

$$\begin{aligned} r'_i &= (1 + i\epsilon_a J_a)_{ij} r_j \equiv (1 + i\epsilon_a J_a^{(1)})_{ij} r_j, \\ s'_k &= (1 + i\epsilon_a J_a)_{kl} s_l \equiv (1 + i\epsilon_a J_a^{(2)})_{kl} s_l, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где оператор $J_a^{(1)}$ действует только на r_i , но не действует на s_i , а оператор $J_a^{(2)}$ действует лишь на s_i , не затрагивая r_i . Определим оператор полного углового момента соотношением

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}. \quad (4.59)$$

Перейдем теперь к более привычным обозначениям. Пусть α_i — волновая функция i -й частицы в состоянии со спином вверх, а β_i — со спином вниз. Для волновой функции двух частиц возможны четыре комбинации: $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\beta_2$, $\beta_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$. Возьмем сначала функцию с наибольшим значением J_3 :

$$J_3(\alpha_1\alpha_2) = (J_3^{(1)}\alpha_1)\alpha_2 + \alpha_1(J_3^{(2)}\alpha_2) = (\sigma_1\alpha_2). \quad (4.60)$$

Очевидно, что это состояние с $J_3 = 1$. Чтобы найти соответствующее значение J , воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= (\mathbf{J}^{(1)})^2 + (\mathbf{J}^{(2)})^2 + 2\mathbf{J}^{(1)} \cdot \mathbf{J}^{(2)} = \\ &= (\mathbf{J}^{(1)})^2 + (\mathbf{J}^{(2)})^2 + 2\left[\frac{1}{2}(J_+^{(1)}J_-^{(2)} + J_-^{(1)}J_+^{(2)}) + J_3^{(1)}J_3^{(2)}\right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Тогда получим

$$\mathbf{J}^2(\alpha_1\alpha_2) = 2(\alpha_1\alpha_2). \quad (4.62)$$

Это означает, что $J = 1$, и мы можем отождествить

$$|1, 1\rangle = (\alpha_1\alpha_2).$$

Чтобы получить все остальные состояния неприводимого представления с $J = 1$, воспользуемся понижающим оператором $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}$:

$$J_-(\alpha_1\alpha_2) = (J_-^{(1)}\alpha_1)\alpha_2 + \alpha_1(J_-^{(2)}\alpha_2) = (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2). \quad (4.63)$$

С другой стороны, согласно (4.44), имеем

$$J_-|1, 1\rangle = \sqrt{2}|1, 0\rangle. \quad (4.64)$$

Следовательно,

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2). \quad (4.65)$$

Очевидно, что

$$|1, -1\rangle = (\beta_1\beta_2). \quad (4.66)$$

Остающееся независимое состояние следует отождествить с $|0, 0\rangle$:

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2). \quad (4.67)$$

Справедливость последнего утверждения можно проверить, как и прежде, пользуясь формулой (4.61). Итак, волновые функции двухчастичной системы построены следующим образом:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \alpha_1\alpha_2, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2), \\ |1, -1\rangle &= \beta_1\beta_2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

(эти функции симметричны относительно замены частиц $1 \leftrightarrow 2$).

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) \quad (4.69)$$

(эта функция антисимметрична относительно замены $1 \leftrightarrow 2$).

В общем случае произведения состояний $|j_1, m_1\rangle \times |j_2, m_2\rangle$ могут быть скомбинированы в собственное состояние $|J, M\rangle$ оператора полного момента $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}$:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle. \quad (4.70)$$

Величины $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$ называют *коэффициентами Клебша — Гордана*. В рассматриваемом случае (формулы (4.68) и (4.69)) имеем

$$\left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| 1 \ 1 \right. \right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| 1 \ 0 \right. \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и т. д.}$$

Процедуру разложения произведения представлений на неприводимые представления можно сформулировать следующим образом:

1. Выберем сначала комбинацию состояний с наибольшим J_3 . Она также является состоянием с наибольшим значением полного момента J .

2. Действуя понижающим оператором $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(2)}$, получим все остальные состояния этого неприводимого представления.

3. Найдем комбинацию состояний, ортогональную к $|J_m, J_m - 1\rangle$, где J_m — максимальное значение J в произведении. Она будет соответствовать состоянию $|J_m - 1, J_m - 1\rangle$. Затем с помощью понижающего оператора построим остальные состояния с $J = J_m - 1$.

4. Будем повторять эту процедуру, пока не достигнем значения $J = |j_1 - j_2|$.

Представления группы $SU(2)$ можно также изобразить графически. Ранг этой группы равен 1, т. е. она имеет один диагональный генератор. Каждому неприводимому представлению j можно поставить в соответствие отрезок прямой линии с точками, соответствующими значениям m (рис. 4.1). В произведении представлений собственные значения диагональных генераторов $J_3^{(1)}$ и $J_3^{(2)}$ складываются. Мы можем представить это сложение графически, помещая центр ($m = 0$) одного из представлений, скажем j_1 , последовательно над каждой точкой другого представления j_2 (примеры приведены на рис. 4.2). Как мы увидим в дальнейшем, этот графический метод может быть обобщен на случай группы $SU(3)$ ранга 2, когда результаты не столь тривиальны и их не так легко получить без помощи таких диаграмм.

Вещественность представлений группы $SU(2)$. Мы будем обозначать матрицы представлений генераторов через $T(J_a) \equiv T_a$. Как уже отмечалось в разд. 4.1, группа $SU(2)$ обладает тем свойством, что все ее представления вещественны, т. е. существует (фиксированная) матрица S , такая, что

$$ST_a S^{-1} = -T_a^* \quad (4.71)$$

Например, в случае определяющего представления $T_a = \sigma_a/2$ имеем $-\sigma_1^* = -\sigma_1$, $-\sigma_2^* = \sigma_2$, $-\sigma_3^* = -\sigma_3$. Условию вещественности (4.71) можно удовлетворить с помощью матрицы

$$\begin{array}{cccc}
 j = \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} \times \text{-----} \times & \frac{1}{2} \\
 & & -1 \cdot & 0 & +1 \\
 j = 1 & & \times \text{-----} \times & \times \\
 & & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
 j = \frac{3}{2} & & \times \text{-----} \times & \times & \times & \times
 \end{array}$$

Рис. 4.1. Графическое изображение мультиплетов группы $SU(2)$. Повышающий (понижающий) оператор J_+ (J_-) смещает состояние вправо (влево).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} &= \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \times \text{-----} \times \end{array} \otimes \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \times \text{-----} \times \end{array} = \begin{array}{c} \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \times \\ \times \text{-----} \times \end{array} = 0 \oplus 1 \\
 \frac{1}{2} \otimes 1 &= \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\ \times \text{-----} \times \end{array} \otimes \begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad 1 \\ \times \text{-----} \times \end{array} = \begin{array}{c} \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \times \text{-----} \times \\ \times \text{-----} \times \end{array} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Рис. 4.2.

$S = \sigma_2$. В общем случае при переходе от T_a к $-T_a^*$ собственные значения диагональных генераторов изменяют знак, так как матрицы T_a эрмитовы и обладают вещественными собственными значениями. Собственные значения генераторов $-T_a^*$ равны собственным значениям T_a с обратным знаком. Для всех неприводимых представлений группы $SU(2)$ собственные значения генератора J_3 присутствуют попарно, т. е. $m = \pm j, \pm(j-1), \dots$. Поэтому все эти представления вещественны: $-T_a^*$ можно построить из T_a , заменяя базис $|j, m\rangle$ на $|j, -m\rangle$. Например, для представления $j = 1$ преобразование

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

переводит состояния $|1, 1\rangle$ и $|1, -1\rangle$ (см. (4.51)) друг в друга и не меняет состояние $|1, 0\rangle$. Легко проверить, что при этом выполняется соотношение (4.71). Можно сформулировать следующий общий признак для представления любой группы: если собственные значения хотя бы одного из диагональных генераторов не группируются в пары чисел с противоположными знаками, то такое представление не является вещественным.

Резюмируем некоторые свойства группы $SU(2)$, которые полезно иметь в виду при изучении менее привычной группы $SU(3)$.

1. Поскольку группа $SU(2)$ имеет ранг 1, только матрица представления генератора J_3 диагональна.

2. Неприводимое представление, характеризуемое числом j (размерности $2j + 1$), имеет базисные векторы $|j, m\rangle$:

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \quad J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle.$$

3. Состояния с разными значениями m можно получить одно из другого с помощью понижающих и повышающих операторов:

$$J_{\pm} |j, m\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |j, m \pm 1\rangle.$$

4. В силу первого свойства каждое неприводимое представление можно изобразить в виде одномерного графа с равноудаленными друг от друга точками, соответствующими $2j + 1$ состояниям. Операторы T_{\pm} перемещают эти точки вдоль графа:



Произведение двух представлений j_1 и j_2 можно разложить на неприводимые, просто помещая отрезок, соответствующий первому представлению, $2j_2 + 1$ раз над отрезком второго представления так, чтобы центр $m_1 = 0$ совпал поочередно с каждым из состояний представления j_2 .

Группа $SU(3)$

Элементы этой группы задаются восемью параметрами. Для определяющего представления мы запишем унитарные унимодулярные матрицы размера 3×3 в виде

$$U(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8) = \exp \{i\epsilon_a \lambda_a\}, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (4.73)$$

Здесь λ_a — эрмитовы матрицы 3×3 с нулевым следом, которые можно выбрать следующим образом [160]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & (4.74) \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Они нормированы условием

$$\text{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (4.75)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad (4.76)$$

где f_{abc} — полностью антисимметричный символ, ненулевые члены которого имеют вид

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= \frac{1}{2}, & f_{156} &= -\frac{1}{2}, & f_{246} &= \frac{1}{2}, & f_{257} &= \frac{1}{2}, \\ f_{345} &= \frac{1}{2}, & f_{367} &= -\frac{1}{2}, & f_{458} &= \sqrt{\frac{3}{2}}, & f_{678} &= \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Генераторы F_a группы $SU(3)$ образуют алгебру Ли, задаваемую равенством

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c. \quad (4.78)$$

Для построения неприводимых представлений группы $SU(3)$ можно следовать схеме, использованной в случае группы $SU(2)$. В нашем изложении мы будем следовать работе Газиоровича [154].

Ранг группы $SU(3)$ равен 2; поскольку матрицы λ_3 и λ_8 диагональные и

$$[F_3, F_8] = 0, \quad (4.79)$$

генераторы F_3 и F_8 могут быть диагонализированы одновременно. Введем следующие повышающие и понижающие операторы:

$$T_{\pm} = F_1 \pm iF_2, \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7, \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5.$$

Определим также

$$T_3 = F_3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8. \quad (4.80)$$

В терминах этих операторов коммутационные соотношения (4.78) принимают вид

$$\begin{aligned} [T_3, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm}, & [Y, T_{\pm}] &= 0, \\ [T_3, U_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} U_{\pm}, & [Y, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm}; \\ [T_3, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} V_{\pm}, & [Y, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm}; \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= 2T_3, \\ [U_+, U_-] &= \frac{3}{2} Y - T_3 \equiv 2U_3, \\ [V_+, V_-] &= \frac{3}{2} Y + T_3 \equiv 2V_3; \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} [T_+, V_+] &= [T_+, U_-] = [U_+, V_+] = 0, \\ [T_+, V_-] &= -U_-, & [T_+, U_+] &= V_+, \\ [U_+, V_-] &= T_-, & [T_3, Y] &= 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Представления группы $SU(3)$. Так как генераторы T_3 и Y можно одновременно привести к диагональному виду, состояния неприводимого представления группы $SU(3)$ должны нумероваться двумя собственными значениями t_3 и y . При этом представление изображается в виде двумерной фигуры на плоскости t_3, y , аналогично тому как представление группы $SU(2)$ изображалось одномерным отрезком (рис. 4.2). Пользуясь коммутационными соотношениями (4.81)–(4.83), можно выяснить, как повышающие и понижающие операторы действуют на состояния:

$$\begin{aligned} T_+ &\text{увеличивает } t_3 \text{ на } 1, \text{ но оставляет } y \text{ неизменным;} \\ U_+ &\text{уменьшает } t_3 \text{ на } 1/2 \text{ и увеличивает } y \text{ на } 1; \\ V_+ &\text{увеличивает } t_3 \text{ на } 1/2 \text{ и увеличивает } y \text{ на } 1 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Если диаграмма представлена при подходящем выборе масштабов по осям t_3 и y , то повышающий и понижающий операторы связывают точки, расположенные на прямых, образующих друг с другом углы, кратные 60° (рис. 4.3).

Каждое неприводимое представление группы $SU(3)$ характеризуется парой целых чисел (p, q) . Оно изображается графически на плоскости t_3, y в виде фигуры, ограниченной шестиугольником: три стороны имеют длину p единиц, а другие три — длину q единиц (рис. 4.4, а). Шестиугольник вырождается в равносторонний треугольник, если p или q равно нулю (рис. 4.4, б, в). Граница фигуры симметрична относительно отражения в оси y . Напомним, что неприводимое представление группы $SU(2)$ характеризуется одним целым числом j ; графически оно изображается прямым отрезком длиной $2j$ единиц. На нем расположено $2j + 1$ точек, каждая из которых соответствует одному состоянию. Для представления (p, q) группы $SU(3)$ кратность состояния, отвечающего точке на плоскости

t_3, y , определяется следующим правилом: точке, лежащей на границе, соответствует одно состояние; точке, принадлежащей второму (если считать от границы внутрь) слою, — два состояния; третьему слою, — три и т. д. до тех пор, пока не будет достигнут треугольник. После этого кратность перестает увеличиваться и остается равной $q + 1$ при $p > q$ (или $p + 1$ при $q > p$).

Эти свойства неприводимого представления можно вывести стандартными методами из коммутационных соотношений. Мы

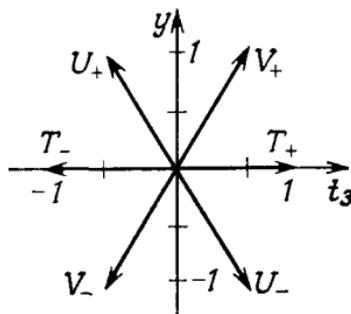
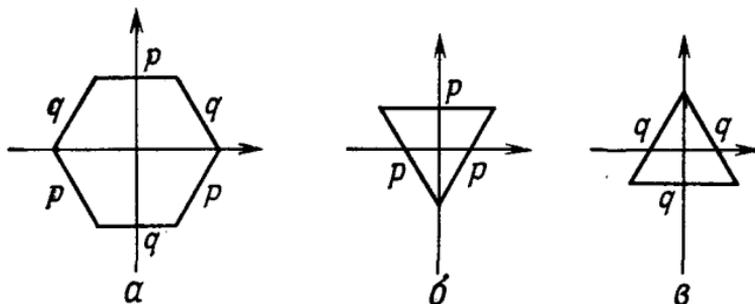


Рис. 4.3.

Рис. 4.4. Границы представлений группы $SU(3)$ (p, q) , $(p, 0)$ и $(0, q)$.

приведем для примера некоторые выкладки такого рода с целью проиллюстрировать общую алгебраическую технику. Чтобы показать, что точка на граничном слое соответствует одному состоянию, выберем два соседних состояния $|A\rangle$ и $|B\rangle$ на границе, как показано на рис. 4.5. Следовательно,

$$U_- |A\rangle = |B\rangle. \quad (4.85)$$

Нужно показать, что при данном $|A\rangle$ состояние $|B\rangle$ единственно независимо от пути, по которому мы переходим от $|A\rangle$ к $|B\rangle$. Рассмотрим альтернативный путь ACB . Пользуясь соотношением $V_- |A\rangle = 0$ и формулой (4.83), можно записать цепочку равенств

$$V_- T_+ |A\rangle = ([V_-, T_+] + T_+ V_-) |A\rangle = U_- |A\rangle = |B\rangle. \quad (4.86)$$

Нетрудно убедиться, что этот результат не зависит от пути, соединяющего $|A\rangle$ и $|B\rangle$. Следовательно, при заданном $|A\rangle$

состояние $|B\rangle$ единственно. Так как состояние с максимальным собственным значением T_3 единственно и лежит на границе, то любая точка на границе соответствует лишь одному состоянию.

Если нам известны кратности состояний, отвечающих различным точкам фигуры, то, сложив их, мы получим размерность неприводимого представления. Сначала рассмотрим внутренний

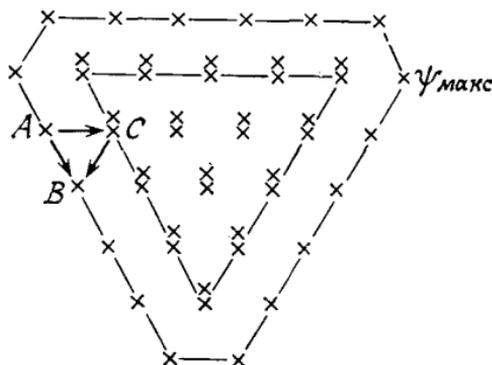


Рис. 4.5. Типичное представление с $(p, q) = (5, 1)$. Кратность состояния в каждой точке показана числом крестиков; ψ_{\max} — состояния с $t = t_3 = (p + q)/2 = 3$.

треугольник, сторона которого содержит $(p - q + 1)$ точек, и вычислим число точек на границе и внутри этого треугольника:

$$\sum_{l=1}^{p-q+1} l = \frac{1}{2} (p - q + 1)(p - q + 2). \quad (4.87)$$

В данном случае кратность состояний, соответствующих этим точкам, равна $(q + 1)$. На слое, внешнем по отношению к этому треугольнику и соседним с ним, находится $3(p - q + 2)$ точек с кратностью q ; на следующем за ним слое — $3(p - q + 4)$ точек с кратностью $(q - 1)$, и т. д. Следовательно, размерность равна

$$\frac{1}{2} (q + 1)(p - q + 1)(p - q + 2) + \sum_{v=0}^q 3(q - v)(p - q + 2v + 2), \quad (4.88)$$

или

$$d(p, q) = (p + 1)(q + 1)(p + q + 2)/2. \quad (4.89)$$

До сих пор мы характеризовали неприводимое представление парой чисел (p, q) . Другой общепринятый способ обозначения — указать размерность представления. Так, неприводимое представление размерности m обозначают символом \mathfrak{m} , а комплексно-сопряженное ему представление обозначают \mathfrak{m}^* . Гра-

фические схемы некоторых наиболее важных представлений приведены на рис. 4.6.

Сделаем еще одно замечание, касающееся графического изображения представления (p, q) . Поскольку, вообще говоря, имеется несколько состояний с данным значением (t_3, y) , необходимо ввести дополнительные обозначения, чтобы различать разные состояния. С этой целью мы будем указывать представление подгруппы $SU(2)$, к которому они относятся. Удобнее

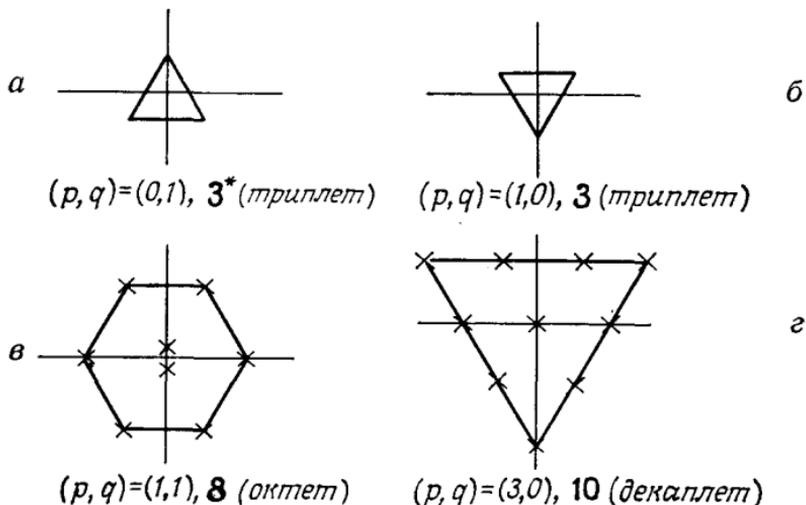


Рис. 4.6. Примеры представлений группы $SU(3)$, определяемых парой (t_3, y) . Точке соответствует одно состояние. Исключением является центр представления 8: здесь одно состояние отвечает $t = 0$, а другое, с $t_3 = 0$, есть член триплета с $t = 1$.

всего приводить значение t величины T -спина. Так, на верхнем отрезке схемы расположена $(p + 1)$ точка, каждая из которых соответствует одному состоянию с $t = p/2$. На следующем отрезке находятся два T -спиновых мультиплета с $t_1 = (p + 1)/2$ и $t_2 = (p - 1)/2$ и т. д. Так как наиболее широкий отрезок, расположенный в шестиугольнике, имеет ширину $(p + q)$, то

$$t_{\text{макс}} = (p + q)/2. \quad (4.90)$$

Для анализа произведения представлений можно воспользоваться техникой, аналогичной той, которая применялась в случае группы $SU(2)$. Зная свойства повышающих и понижающих операторов, можно не только разложить произведения представлений на неприводимые, но и вычислить коэффициенты Клебша—Гордана. Но в случае группы $SU(3)$ имеется несколько повышающих и понижающих операторов, и проведение этой процедуры является довольно трудоемкой задачей. Если мы интересуемся лишь разложением на неприводимые представления, то можно воспользоваться простым графическим методом.

Для этого, как и раньше, нужно помещать фигуру, отвечающую одному представлению, в вершину *каждого* состояния второго представления так, чтобы центр ($t_3 = y = 0$) первого совпадал

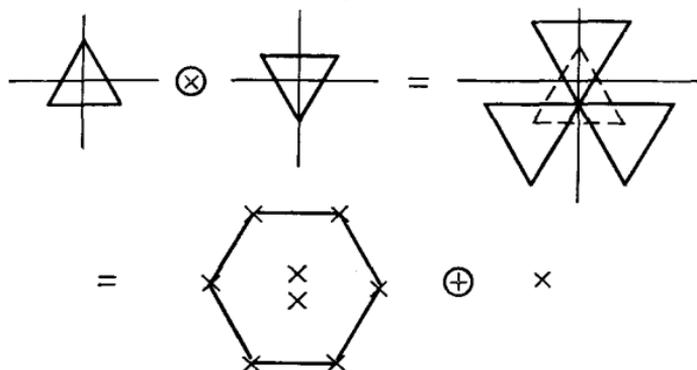


Рис. 4.7.

с точкой, соответствующей каждому состоянию второго представления. Простейший случай разложения $3 \times 3^* = 8 + 1$ показан на рис. 4.7. Более систематический подход, так называемый тензорный метод, будет изложен в следующем разделе.

4.3. ТЕНЗОРНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ГРУПП $SU(n)$

Изучение групп $SU(2)$ и $SU(3)$ в предыдущем разделе показывает, что по мере усложнения группы элементарная техника, используемая для анализа структуры представлений и их произведений, становится непригодной. В случае группы $SU(4)$, имеющей ранг 3, неприводимые представления должны изображаться в виде трехмерных объектов, и нужно обладать хорошим пространственным воображением, чтобы разлагать произведения представлений. Такой подход оказывается безнадежно сложным при анализе групп ранга 4 и выше. Очевидно, что нужен более эффективный подход. Оказывается, что для изучения неприводимых представлений и разложения произведения представлений произвольных групп $SU(n)$ особенно удобен тензорный метод.

Закон преобразования тензоров

Группа $SU(n)$ — это группа унитарных матриц размера $n \times n$ с единичным детерминантом. Мы можем считать эти матрицы линейными преобразованиями некоторого n -мерного комплексного векторного пространства C^n . Тогда любой вектор $\psi_i = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ из C^n отображается преобразованием U_{ij} группы $SU(n)$ в элемент ψ'_i :

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = U_{ij} \psi_j. \quad (4.91)$$

Вектор ψ'_i также принадлежит C^n , а $UU^+ = U^+U = 1$ и $\det U = 1$. Для любых двух векторов можно определить $SU(n)$ -инвариантное скалярное произведение

$$(\psi, \phi) = \psi_i^* \phi_i. \quad (4.92)$$

Сопряженный вектор ψ_i^* преобразуется по следующему закону:

$$\psi_i^* \rightarrow \psi_i'^* = U_{ij}^* \psi_j^* = \psi_j^* U_{ji}^*. \quad (4.93)$$

Удобно ввести верхние и нижние индексы:

$$\psi^i \equiv \psi_i^*, \quad U_i^j \equiv U_{ij} \quad \text{и} \quad U_j^i \equiv U_{ji}^*. \quad (4.94)$$

Тогда комплексное сопряжение приводит к замене нижних индексов на верхние и наоборот. В этих обозначениях соотношения (4.91) и (4.93) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_i &\rightarrow \psi_i' = U_i^j \psi_j, \\ \psi^i &\rightarrow \psi'^i = U_j^i \psi^j. \end{aligned} \quad (4.95)$$

При этом $SU(n)$ -инвариантное скалярное произведение равно

$$(\psi, \phi) = \psi^i \phi_i, \quad (4.96)$$

а условие унитарности принимает вид

$$U_k^i U_j^k = \delta_j^i, \quad (4.97)$$

где δ -символ Кронекера определяется формулой

$$\delta_j^i \equiv \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.98)$$

Заметим, что в принятых нами обозначениях суммирование всегда ведется по паре индексов, один из которых нижний, а другой верхний. Эту операцию мы будем называть *сверткой индексов*. Из векторов ψ_i можно построить базис для *определяющего представления* группы $SU(n)$ (его называют также *фундаментальным* или *векторным* представлением и обозначают символом \mathbf{n}); векторы ψ^i дают базис сопряженного представления \mathbf{n}^* .

Тензоры высших рангов определяются как объекты, преобразующиеся так же, как прямые произведения векторов. В общем случае тензоры имеют как верхние, так и нижние индексы и преобразуются по закону

$$\psi_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = (U_{k_1}^{i_1} U_{k_2}^{i_2} \dots U_{k_p}^{i_p}) \times (U_{j_1}^{l_1} U_{j_2}^{l_2} \dots U_{j_q}^{l_q}) \psi_{l_1 l_2 \dots l_q}^{k_1 k_2 \dots k_p}. \quad (4.99)$$

Они образуют базисы представлений высших размерностей.

Дельта-символ Кронекера и тензор Леви-Чивиты инвариантны относительно $SU(n)$ -преобразований. Они играют важную роль при изучении неприводимых тензоров.

1. Из условия унитарности (4.97) легко получить

$$\delta_j^i = U_k^i U_j^k \delta_i^k. \quad (4.100)$$

Следовательно, δ_j^i — инвариантный тензор. Свертывая индексы некоторого тензора с δ -символом Кронекера, получаем тензор меньшего ранга. Например,

$$\delta_{i_1}^{j_1} \psi_{j_1 i_2 \dots i_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \psi_{i_2 \dots i_p}^{i_2 \dots i_p}. \quad (4.101)$$

Правую часть этого равенства можно считать *следом*, взятым по паре индексов, в данном случае i_1 и j_1 . Тензор, свернутый по всем своим индексам $\psi_{i_1 i_2 \dots i_p}^{i_1 i_2 \dots i_p}$, является скаляром, инвариантным относительно преобразований группы $SU(n)$.

2. Тензор Леви-Чивиты определяется как величина, полностью антисимметричная по всем индексам:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i_1, \dots, i_n) \text{ есть четная перестановка} \\ & (1, \dots, n); \\ -1, & \text{если } (i_1, \dots, i_n) \text{ есть нечетная перестановка} \\ & (1, \dots, n); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.102)$$

Он является инвариантным тензором:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{i_1 i_2 \dots i_n} &= U_{i_1}^{j_1} U_{i_2}^{j_2} \dots U_{i_n}^{j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = \\ &= (\det U) \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Здесь мы воспользовались определением детерминанта и свойством $\det U = 1$ для группы $SU(n)$. Аналогично свертке индексов с помощью δ_j^i мы можем суммировать с использованием символа Леви-Чивиты. Например,

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \psi_{i_2 \dots i_n} = \psi^{i_1}. \quad (4.104)$$

Таким образом, тензоры с верхними индексами могут быть построены из тензоров с нижними индексами и наоборот:

$$\psi^{i_1 i_1} = (\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \psi_{i_2 \dots i_n}) (\varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \psi_{j_2 \dots j_n}). \quad (4.105)$$

Следовательно, чтобы выяснить трансформационные свойства тензора, достаточно изучить тензор только с верхними (или нижними) индексами.

В этой связи заметим также, что величина

$$\psi = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \psi^{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (4.106)$$

является $SU(n)$ -инвариантным скаляром. Из равенства (4.103) и (4.106) следует, что полностью антисимметричный тензор ранга n инвариантен при преобразованиях из группы $SU(n)$.

Неприводимые представления и таблицы Юнга

Тензоры, о которых шла речь выше, в общем случае образуют базисы приводимых представлений группы $SU(n)$. Чтобы разложить их на неприводимые представления, мы воспользуемся следующим свойством этих тензоров. Операция перестановки верхних или нижних индексов коммутирует с групповыми преобразованиями, так как последние производятся с помощью одних и тех же матриц U_{ij} (или U_{ij}^+). Это утверждение мы проиллюстрируем на следующем примере. Рассмотрим тензор второго ранга ψ_{ij} , преобразующийся по закону

$$\psi'^{ij} = U_k^i U_l^j \psi^{kl}. \quad (4.107)$$

Так как матрицы U в этой формуле одинаковы, мы можем переобозначить индексы:

$$\psi'^{ji} = U_l^j U_k^i \psi^{lk} = U_k^i U_l^j \psi^{lk}. \quad (4.108)$$

Следовательно, перестановка индексов не меняет закон преобразования. Если P_{12} — оператор перестановки, меняющий местами первый и второй индексы $P_{12}\psi^{ij} = \psi^{ji}$, то P_{12} коммутирует с групповыми преобразованиями:

$$P_{12}\psi'^{ij} = U_k^i U_l^j P_{12}\psi^{kl}. \quad (4.109)$$

Этим свойством можно воспользоваться для разложения ψ^{ij} . Построим сначала собственные состояния оператора перестановки P_{12} с помощью симметризации и антисимметризации:

$$S^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} + \psi^{ji}), \quad A^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} - \psi^{ji}).$$

Тогда

$$P_{12}S^{ij} = S^{ij}, \quad P_{12}A^{ij} = -A^{ij}. \quad (4.110)$$

Ясно, что S^{ij} и A^{ij} не будут перемешиваться при групповых преобразованиях

$$S^{ij} = U_k^i U_l^j S^{kl}, \quad A^{ij} = U_k^i U_l^j A^{kl}. \quad (4.111)$$

Таким образом, тензор второго ранга ψ^{ij} разлагается на S^{ij} и A^{ij} таким образом, что групповые преобразования никогда не смешивают части с различными симметриями. Оказывается, что величины S^{ij} и A^{ij} не могут быть дальше разложены, поэтому они образуют базисы неприводимых представлений группы $SU(n)$. Эту процедуру можно обобщить на случай тензоров высших рангов (при этом будут присутствовать и величины со

смешанной симметрией). В результате получим, что базисы неприводимых представлений группы $SU(n)$ соответствуют тензорам с определенной симметрией относительно перестановок положения индексов. Решение задачи о нахождении неприводимых тензоров произвольного ранга f (равного числу верхних индексов) включает в себя построение полного набора операторов, переставляющих эти индексы. Проблема построения неприводимого представления группы перестановок может быть

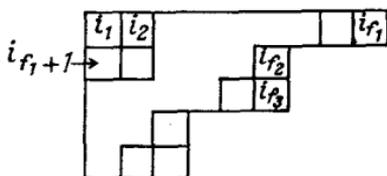


Рис. 4.8.

полностью решена с помощью *таблиц Юнга*. Последние представляют собой графическое изображение операции перестановок f объектов и состоят из f клеток, каждой из которых приписан индекс. Например, в случае тензоров второго ранга операция симметризации индексов i и j , дающая S_{ij} , изображается

как $\boxed{i \ j}$. Операция антисимметризации, приводящая к тен-

зору A_{ij} , изображается в виде $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array}$. В случае тензоров треть-

его ранга имеем следующие таблицы: $\boxed{i \ j \ k}$ для полностью

симметричного тензора S_{ijk} , $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline k \\ \hline \end{array}$ для полностью антисимме-

тричного тензора A_{ijk} и $\begin{array}{|c|c|} \hline i & j \\ \hline k & \\ \hline \end{array}$ для тензора со смешанной симметрией:

$$\psi_{ij; k} \equiv \psi_{ijk} + \psi_{jik} - \psi_{jki} - \psi_{kji}$$

Таблица Юнга общего вида показана на рис. 4.8. Она представляет собой совокупность f клеток, образующих строки и столбцы так, что длина строк не возрастает при движении сверху

вниз: $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ и $f_1 + f_2 + \dots = f$. Каждая клетка снабжена индексом $i_k = 1, 2, \dots, n$. Такой таблице сопоставляется тензор

$$\Psi_{i_1 i_2 \dots i_{f_1}; i_{f_1+1} \dots i_{f_1+f_2}; \dots}, \quad (4.112)$$

построенный по следующим правилам:

1) сначала проводится симметризация по индексам, расположенным в одной строке;

2) затем проводится антисимметризация по индексам, входящим в один столбец.

Таблица, в которой значения индексов не уменьшаются при движении слева направо и монотонно возрастают при движении сверху вниз, называется *стандартной таблицей*. Например,

для $n = 3$ тензор со смешанной симметрией $\begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix}$ имеет сле-

дующие стандартные таблицы:

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 \end{matrix}$$

Такие таблицы, как $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 \end{matrix}$, не являются

стандартными. Нестандартные таблицы соответствуют тензорам, которые при симметризации или антисимметризации либо обращаются в нуль, либо сводятся к стандартным. Таким образом, для таблиц Юнга заданного вида число независимых тензоров равно числу возможных стандартных таблиц. Нетрудно убедиться, что в простейшем случае тензора с k антисимметричными индексами это число равно

$$\left. \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix} \right\} k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}, \quad (4.113)$$

а для тензора с k симметричными индексами

$$\underbrace{\begin{matrix} \square & \square & \square \end{matrix}}_k, \quad \binom{n+k-1}{k} = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{1.2\dots k}. \quad (4.114)$$

Следует заметить, что из-за антисимметризации в любой таблице Юнга должно быть не более n строк. Кроме того, если

в схеме имеется n строк, то с помощью символа $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ можно свернуть индексы в столбцах с n клетками. Отсюда следует, что можно просто вычеркнуть на схемах все столбцы с n строками (см., например, соотношения (4.123) и (4.125)).

Основная теорема. (См., например, [211].) Тензор, соответствующий таблице Юнга заданного вида, образует базис неприводимого представления группы $SU(n)$. Более того, если мы перечислим таблицы Юнга всех возможных видов, содержащие не более $n - 1$ строк, то соответствующие им тензоры образуют полный набор в том смысле, что все конечномерные неприводимые представления будут учтены только один раз.

Приведем теперь две формулы для *размерности неприводимых представлений*. Пусть таблица Юнга характеризуется совокупностью длин ее строк $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$. Обозначим разности длин соседних строк через $\lambda_1 = f_1 - f_2, \lambda_2 = f_2 - f_3, \dots, \lambda_{n-1} = f_{n-1}$. Тогда размерность неприводимого представления группы $SU(n)$ равна числу стандартных таблиц заданного вида:

$$d(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_{n-1}) \times \\ \times \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) \left(1 + \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}}{2}\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}\right) \left(1 + \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_{n-3} + \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}}{3}\right) \times \\ \times \dots \times \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}}{n-1}\right). \quad (4.115)$$

Легко проверить, что равенства (4.113) и (4.114) для таблиц $(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ и $(k, 0, 0, \dots)$ являются частными случаями формулы (4.115).

Пример 1. *Группа $SU(2)$.* Таблицы Юнга могут иметь лишь одну строку $d(\lambda_1) = (1 + \lambda_1)$. В этом случае $\lambda_1 = 2j$. Отсюда следует, что дублетное представление изображается в виде \square ,

триплетное — в виде $\square \square$ и т. д.

Пример 2. *Группа $SU(3)$.* Таблицы Юнга имеют не более двух строк и $d(\lambda_1, \lambda_2) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + (\lambda_1 + \lambda_2)/2)$. Из сравнения с формулой (4.89) видно, что $\lambda_1 = p, \lambda_2 = q$:

$$\begin{array}{l} \square (1, 0) \mathbf{3}, \quad \square \square (2, 0) \mathbf{6}, \quad \square \square \square (3, 0) \mathbf{10}, \\ \square (0, 1) \mathbf{3}^*, \quad \square \square (0, 2) \mathbf{6}^*, \quad \square \square (1, 1) \mathbf{8}. \end{array} \quad (4.116)$$

Если значения n велики, то пользоваться формулой (4.115) довольно сложно. В этом случае часто удобнее оказывается вторая формула. Чтобы написать ее, нужно ввести два понятия — «длина крючка» и «расстояние до первой клетки». Для любой клетки таблицы проведем два перпендикулярных луча в форме «крючка», один из которых идет направо, а другой — вниз. Полное число клеток, через которые проходят эти лучи, включая и ту, из которой они выходят, назовем *длиной крючка* (h_i), связанного с i -й клеткой. Например,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \vdots & \dots & \\ \hline \vdots & & \\ \hline \vdots & & \\ \hline \end{array} \dots h_i = 3, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \vdots \\ \hline & \\ \hline \end{array} \dots h_i = 1. \quad (4.117)$$

Расстояние до первой клетки D_i определим как алгебраическую сумму поклеточных шагов, которые нужно сделать, чтобы пройти из верхнего левого угла таблицы (первая клетка) в i -ю клетку. При этом каждый шаг вправо учитывается как $+1$, а каждый шаг вниз — как -1 . Например,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 0 & \\ \hline -2 & & \\ \hline \end{array} \quad (4.118)$$

Размерность неприводимого представления группы $SU(n)$, соответствующего таблице Юнга, дается формулой

$$d = \prod_i (n + D_i) / h_i. \quad (4.119)$$

Произведение берется по всем клеткам таблицы. Например, если

имеется таблица вида $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$, то для нее длины крючков равны

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \text{ а расстояния до первой клетки } \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}. \text{ Тогда размер-$$

ность $d = n(n-1)(n+1)/3$. При $n=3$ получаем $d=8$.

Разложение произведения представлений

Соответствие между неприводимыми представлениями группы $SU(n)$ и таблицами Юнга находит применение в задаче о разложении произведения представлений. Нахождение неприводимых представлений в произведении двух сомножителей производится следующим способом.

1. В таблице, соответствующей первому сомножителю, припишем один и тот же символ, скажем a , всем клеткам первой строки, один и тот же символ b всем клеткам второй строки и т. д.:

$$\begin{array}{|c|} \hline \alpha \alpha \dots \alpha \\ \hline b b \dots b \\ \hline c c \dots c \\ \hline \end{array} \quad (4.120)$$

2. Присоединим клетки, помеченные символом a , всеми возможными способами к таблице, соответствующей второму сомножителю. При этом будем соблюдать следующие правила: 1) в одном столбце не должны появляться два символа a и 2) получаемый в результате граф должен быть таблицей Юнга (т. е. длина строк не должна возрастать при движении сверху вниз, не должно быть более чем n строк и т. д.). Повторим затем эту процедуру с символами b , c и т. д.

3. После того как все символы присоединены к таблице, прочтем эти присоединенные символы *справа налево* в первой строке, затем во второй строке и т. д. Эта последовательность символов $aabbcac \dots$ должна образовывать *решеточную перестановку*, т. е. слева от любого символа число символов a должно быть не меньше чем число символов b , b не меньше чем c и т. д.

Рассмотрим два примера, относящихся к группе $SU(3)$.

Пример 1.

$$\boxed{a} \times \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} + \square \boxed{a} \quad (4.121)$$

что соответствует

$$3 \times 3 = 3^* + 6. \quad (4.122)$$

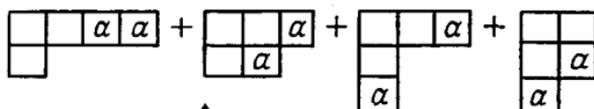
Пример 2.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = 8 \times 8.$$

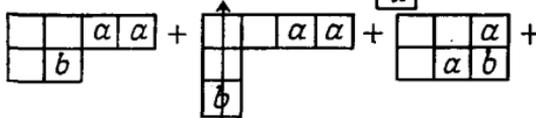
Первый шаг:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline a & \\ \hline \end{array}$$

Второй шаг:



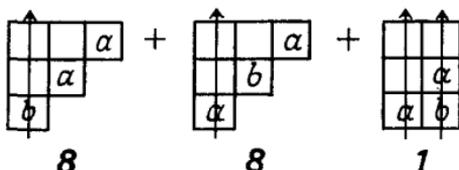
Третий шаг:



27

10

10*



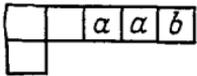
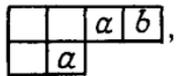
8

8

1

(4.123)

Как мы уже объясняли, любой столбец с n клетками в таблице для группы $SU(n)$ может быть «вычеркнут» (это показано вертикальными линиями, проведенными по таким столбцам). Следовательно, последние три таблицы соответствуют двум октетам и синглету.

Заметим, что такие таблицы, как  и ,

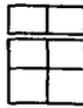
запрещены правилами, так как в них символы не образуют решеточную перестановку. Таким образом,

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + 10^* + 27. \quad (4.124)$$

Таблицы Юнга для сопряженных представлений. Пусть ψ_i и ψ^i — базисные векторы определяющего представления \mathfrak{n} и комплексно-сопряженного ему представления \mathfrak{n}^* . Величина $\psi_i \psi^i$ очевидно является $SU(n)$ -инвариантом. Из разложения произведения представлений нетрудно заметить, что таблица Юнга для сопряженного представления выглядит как столбец из $n - 1$ клеток, так что в произведении $n \times n^*$ будет синглетное представление (столбец из n клеток):

$$\left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \Bigg\} n-1 = \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \Bigg\} n + \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \Bigg\} n-1. \quad (4.125)$$

В общем случае, если к таблице Юнга, соответствующей представлению $\psi_{kl}^{ij\dots}$, добавить клетки так, чтобы получилась прямоугольная таблица с n строками, то добавленные клетки после поворота на 180° представляют собой стандартную таблицу для комплексно-сопряженного представления $(\psi_{kl}^{ij\dots})^* = \psi_{ij\dots}^{kl}$. Например, в случае группы $SU(3)$ представлению 6 соответствует

таблица , которая может быть дополнена до прямоугольника следующим образом: . Следовательно,  есть таблица Юнга для 6^* .

Генераторы группы в тензорных обозначениях

Рассмотрим сначала (определяющее) векторное представление, а затем обобщим наш анализ на случай, когда генераторы действуют на тензоры высшего ранга.

1. *Эрмитовы и вещественные матрицы генераторов.* Любую унитарную унимодулярную матрицу U размера $n \times n$ можно представить в виде

$$U = e^{iH}, \quad (4.126)$$

где H — эрмитова матрица с нулевым следом. Как обычно, групповые параметры выберем вещественными. Если $\epsilon_a = \epsilon_a^*$, $a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$, то

$$H = \epsilon_a \lambda_a, \quad (4.127)$$

где λ_a — эрмитовы матрицы генераторов размера $n \times n$. Для группы $SU(3)$ они имеют вид (4.74). Учитывая коммутационные соотношения

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad (4.128)$$

можно построить алгебру Ли, выбрав в качестве генераторов $F_a = \frac{1}{2} \lambda_a$:

$$[F_a, F_b] = if_{abc} F_c, \quad (4.129)$$

где f_{abc} — структурные константы. В тензорном подходе эрмитову матрицу H удобно представить не в виде (4.127), а следующим образом:

$$H_i^j = \epsilon_\beta^\alpha (W_\alpha^\beta)_i^j, \quad (4.130)$$

где все индексы (α, β, i, j) принимают значения от 1 до n . Мы можем выбрать вещественные матрицы генераторов в виде

$$(W_\alpha^\beta)_i^j = \delta_{\alpha i} \delta^{\beta j} - \frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \delta_i^j. \quad (4.131)$$

Условие эрмитовости матриц H будет выполняться, если будет эрмитовой матрица групповых параметров:

$$\epsilon_\beta^\alpha = \epsilon_\alpha^{\beta*}.$$

Пользуясь (4.131), можно вычислить коммутатор

$$[W_a^\beta, W_\gamma^\delta] = \delta_\gamma^\beta W_a^\delta - \delta_a^\delta W_\gamma^\beta. \quad (4.132)$$

Генераторы группы по определению удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (алгебра Ли)

$$[F_a^\beta, F_\gamma^\delta] = \delta_\gamma^\beta F_a^\delta - \delta_a^\delta F_\gamma^\beta.$$

Здесь структурные константы являются просто комбинациями символов δ_a^β . Нетрудно установить соотношение между вещественными генераторами F_a^β и эрмитовыми генераторами F^a :

$$F^a = \frac{1}{2} (\lambda_a)_\beta^\alpha F_a^\beta. \quad (4.133)$$

Равенство (4.133) можно обратить с помощью тождества

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} (\lambda^a)_{\alpha\beta} (\lambda^a)_{\gamma\delta} = 2 \left(\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right), \quad (4.134)$$

вывод которого мы сейчас приведем. Так как эрмитовы матрицы $n \times n$ с нулевым следом λ^a , $a = 1, \dots, (n^2 - 1)$ и единичная матрица $n \times n$ образуют полный набор эрмитовых матриц $n \times n$, то произвольную эрмитову матрицу M можно разложить по ним:

$$M = m_0 \mathbb{1}_n + \sum_{a=1}^{n^2-1} m_a \lambda^a. \quad (4.135)$$

Здесь $\mathbb{1}_n$ — единичная матрица размера $n \times n$. Нормируем λ^a условием

$$\text{tr} (\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}.$$

Коэффициенты m_0 и m_a в разложении (4.135) могут быть вычислены умножением обеих частей на матрицы базиса и взятием следа:

$$m_0 = \frac{1}{n} \text{tr} M, \quad m_a = \frac{1}{2} \text{tr} (M \lambda^a).$$

Тогда формула (4.135) принимает вид

$$M = \frac{1}{n} (\text{tr} M) \mathbb{1}_n + \sum_{a=1}^{n^2-1} \frac{1}{2} (\text{tr} M \lambda^a) \lambda^a,$$

или в компонентном виде

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{n} \left(\sum_{\gamma, \delta} M_{\delta\gamma} \delta_{\gamma\delta} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_a \sum_{\gamma, \delta} (\lambda^a)_{\alpha\beta} (\lambda^a)_{\gamma\delta} M_{\delta\gamma}.$$

Так как матрица $M_{\alpha\beta}$ произвольна, то получаем

$$\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \sum_a (\lambda^a)_{\alpha\beta} (\lambda^a)_{\gamma\delta},$$

а это и есть тождество (4.134). Используя его и учитывая равенство $\text{tr} F^a = 0$, вещественный генератор можно записать в виде

$$F_\alpha^\beta = \sum_a F^a (\lambda^a)_\alpha^\beta.$$

2. *Вещественные генераторы в векторном представлении.* Недиагональные вещественные генераторы F_α^β ($\alpha \neq \beta$) есть просто повышающие и понижающие операторы. Для определяющего векторного представления W_α^β имеет ненулевой элемент только на пересечении строки с номером α и столбца с номером β . Из инфинитезимальных $SU(n)$ -преобразований базисных векторов $\psi^i \rightarrow \psi'^i = \psi^i + \delta\psi^i$, где $\delta\psi^i = \varepsilon_\beta^\alpha (W_\alpha^\beta)_j^i \psi^j$, находим

$$(F_\alpha^\beta \psi)^i = \delta_\alpha^i \psi^\beta. \quad (4.136)$$

Таким образом, оператор F_α^β , действуя на компоненту α вектора ψ , переводит ее в компоненту β , а действуя на все остальные компоненты, дает нуль. Диагональные генераторы F_α^α образуют набор взаимно коммутирующих операторов. Их собственные значения могут быть использованы для характеристики базисных функций (состояний) неприводимых представлений. Например, в определяющем векторном представлении любой выбранный диагональный генератор D_l , являющийся некоторой линейной комбинацией операторов W_α^α , можно записать в виде

$$(D_l)_j^i = (d_l)_i \delta_j^i, \quad (4.137)$$

где $(d_l)_i$ — собственные значения состояния ψ^i .

3. *Действие вещественных генераторов на тензоры высших рангов.* Действие генератора группы \bar{F}_α^β на любой тензор определяется соотношением

$$\delta\psi = \psi' - \psi = i\varepsilon_\beta^\alpha (F_\alpha^\beta \psi). \quad (4.138)$$

Если задан закон преобразования тензора (4.99) и общий вид матрицы преобразования группы $SU(n)$

$$U_i^k = \delta_i^k + i\varepsilon_\beta^\alpha (W_\alpha^\beta)_i^k, \quad (4.139a)$$

$$U_l^j = \delta_l^j - i\varepsilon_\beta^\alpha (W_\alpha^\beta)_l^j, \quad (4.139b)$$

где индексы $i, j(k, l)$ относятся к непреобразованным (преобразованным) тензорам, то имеем

$$F_\alpha^\beta \psi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \sum_{m=1}^p (W_\alpha^\beta)_{i_m}^{k_m} \psi_{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} - \sum_{n=1}^q (W_\alpha^\beta)_{i_n}^{l_n} \psi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{n-1} j_{n+1} \dots j_q}. \quad (4.140)$$

Знак минус отражает тот факт, что тензоры с верхними индексами соответствуют представлениям, комплексно-сопряженным по отношению к тем, которым соответствуют тензоры с нижними индексами (см. соотношения (4.94) и (4.95)). В частности, для диагонального генератора $F = D_i$ (4.137) имеем

$$D_i \psi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \left[\sum_{m=1}^p (d_i)_{i_m} - \sum_{n=1}^q (d_i)_{j_n} \right] \psi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}. \quad (4.141)$$

Следовательно, квантовое число тензора равно просто алгебраической сумме соответствующих квантовых чисел векторных компонент, образующих этот тензор.

В заключение изложения тензорного метода обсудим более подробно в качестве примера представление группы $SU(2)$ с $j=1$. Выше мы использовали состояния с $m=1, 0, -1$, определяемые формулами (4.51), а в качестве эрмитовых генераторов — матрицы 3×3 (4.52) и (4.55). В тензорном подходе в качестве базиса мы возьмем функции $\psi_{ij} \sim \psi_i^A \psi_j^B$. Индексы $i, j=1, 2$ симметризованы (см. (4.68)). Верхние индексы A и B различают два вектора. Вещественным генератором определяющего представления группы $SU(2)$ является матрица размера 2×2

$$W_1^1 = -W_2^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

т. е. диагональный генератор, имеющий собственные значения $d(\psi_1) = 1/2$ и $d(\psi_2) = -1/2$, соответствующие двум состояниям ψ_i . Мы можем вычислить квантовые числа триплетных состояний следующим образом:

$$d(\psi_{11}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad d(\psi_{12}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (4.142)$$

$$d(\psi_{22}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Оператор

$$W_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

является понижающим. Таким образом,

$$\begin{aligned} W_2^1 \psi_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_A \psi_1^A \psi_1^B + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \psi_1^A \psi_1^B = \psi_2^A \psi_1^B + \psi_1^A \psi_2^B. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Последнее замечание: присоединенное представление, которое мы определили соотношением (4.19) с помощью структурных констант группы, в тензорных обозначениях записывается

особенно просто. Базис присоединенного представления состоит из функций ψ_j^i , обладающих свойством $\psi_j^i = 0$, а его таблица Юнга — последняя схема в равенстве (4.125), которая, очевидно, является самосопряженной. Можно доказать справедливость этих отождествлений. Для этого надо перейти от ψ_j^i к вектору ϕ^a с $(n^2 - 1)$ компонентами, используя соотношение

$$\phi^a = \frac{1}{2} (\lambda^a)_i^j \psi_j^i, \quad (4.144)$$

а также метод, аналогичный тому, который применялся при анализе равенства (4.133). С помощью закона преобразования (4.140) можно показать, что матрицы соответствующих генераторов $(F^a)_{bc}$ действительно равны структурным константам f_{abc} .

4.4. КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ

Теория групп находит применение в физике, так как различные преобразования симметрии, оставляющие физическую систему инвариантной, образуют группу. Следствия этой симметрии могут быть выведены с помощью теоретико-группового анализа без использования информации о конкретной динамике системы. Например, если квантовомеханическая система, описываемая гамильтонианом $H(\mathbf{r})$, не имеет выделенного направления, то все операторы вращения $R(\theta)$ будут оставлять гамильтониан инвариантным:

$$R(\theta) H(\mathbf{r}) R^{-1}(\theta) = H(\mathbf{r}). \quad (4.145)$$

Так как $R(\theta) = e^{i\theta \cdot \mathbf{J}}$, то с помощью генераторов вращений условие инвариантности можно записать в следующем виде:

$$[H, J_i] = 0. \quad (4.146)$$

Вследствие этой симметрии имеем

$$H(\mathbf{J}_i | n) = E_n(\mathbf{J}_i | n), \quad (4.147)$$

если

$$H | n) = E_n | n). \quad (4.148)$$

Таким образом, все состояния, связанные друг с другом преобразованиями вращений, вырождены. Эти состояния являются базисными векторами неприводимых представлений j группы. Из нашего анализа размерностей неприводимых представлений группы $SO(3)$ следует, что кратность вырождения энергетического уровня равна $2j + 1$.

Состояния группы внутренних симметрий отождествляются с различными частицами. Преобразования группы внутренней симметрии переводят одну частицу в другую, но не меняют систему координат, и неприводимые представления группы проявляют себя как вырожденные мультиплеты частиц. В этом разделе мы кратко рассмотрим ранние модели внутренних сим-

метрий сильного взаимодействия. Сначала разрабатывалась идея инвариантности изотопического спина, или изоспиновой инвариантности относительно группы $SU(2)$. Позднее было обнаружено, что эта симметрия является частью более широкой симметрии относительно группы $SU(3)$. Теория, основанная на $SU(3)$ -симметрии и получившая название *восьмеричный путь*, была создана Гелл-Манном [159] и Неemanом [305]. Это в свою очередь привело Гелл-Манна [163] и Цвейга [445] к предположению, что составными частями адронов являются кварки. Цель настоящего раздела — дать краткое историческое введение в эти вопросы и описать, так сказать, кинематику кварковой модели; все это подготовит нас к изучению динамики кварков как фундаментальных полей материи.

Изоспиновая инвариантность: $SU(2)$ -симметрия

Еще в ранних исследованиях ядерных реакций было обнаружено, что ядерные силы (сильные взаимодействия) с хорошей степенью точности не зависят от электрического заряда нуклонов. Сильные взаимодействия инвариантны относительно преобразования, меняющего местами протон p и нейтрон n . Точнее, сильное взаимодействие обладает изоспиновой симметрией относительно группы $SU(2)$, при которой состояния p и n образуют изоспиновый дублет. Поэтому групповая структура изоспиновой симметрии очень похожа на групповую структуру обычного спина. Изоспиновые генераторы T_i удовлетворяют соотношениям алгебры Ли группы $SU(2)$:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad (4.149)$$

где индексы пробегает значения от 1 до 3. Утверждение, что p и n образуют дублет $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$, означает следующее (см. формулу (4.45)):

$$\begin{aligned} T_3 |p\rangle &= \frac{1}{2} |p\rangle, & T_3 |n\rangle &= -\frac{1}{2} |n\rangle, \\ T_+ |n\rangle &= |p\rangle, & T_- |p\rangle &= |n\rangle. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Тот факт, что сильное взаимодействие не отличает n от p , приводит к следующему свойству гамильтониана сильного взаимодействия H_s :

$$[T_i, H_s] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.151)$$

Концепцию изоспина можно распространить и на другие адроны. Например, (π^+, π^0, π^-) , $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ и (ρ^+, ρ^0, ρ^-) являются изотриплетами с $T = 1$; (K^+, K^0) , (\bar{K}^0, K^-) и (Θ^0, Θ^-) — изодублетами с $T = 1/2$; η , ω , ϕ и Λ — изосинглетами с $T = 0$. Поскольку различные члены одного изоспинового мультиплетта имеют разные электрические заряды, очевидно, что изоспиновая симметрия не сохраняется в электромагнитных взаимодей-

ствиях. Следовательно, сохранение изоспина не может быть точной симметрией. Но насколько сильно нарушается эта симметрия? Если симметрия точная, то для *полного* гамильтониана системы выполняется равенство

$$[T_i, H] = 0. \quad (4.152)$$

При этом все члены изомультиплета точно вырождены по массе. Поэтому разности масс частиц, входящих в один мультиплет, являются хорошей мерой степени нарушения симметрии. Эксперименты показывают, что обычно эти разности составляют несколько процентов от самих масс. Например,

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \approx 0,7 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{m_{\pi^+} - m_{\pi^0}}{m_{\pi^+} + m_{\pi^0}} \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ и т. д.} \quad (4.153)$$

Поэтому можно сделать вывод, что изоспин — довольно хорошая симметрия, и записать полный гамильтониан в виде

$$H = H_0 + H_1,$$

где

$$[H_0, T_i] = 0, \quad [H_1, T_i] \neq 0, \quad (4.154)$$

причем

$$H_0 \gg H_1. \quad (4.155)$$

Таким образом, нарушающий симметрию член H_1 можно рассматривать как малое возмущение. Выше уже говорилось о том, что электромагнитные взаимодействия описываются членом H_1 . Оказывается, что слабые взаимодействия также нарушают изоспиновую инвариантность. В связи с этим возникает интересный вопрос: не содержит ли слагаемое в гамильтониане, описывающее сильное взаимодействие, члены, нарушающие изоспиновую инвариантность? Мы еще вернемся к этому вопросу о возможном слабом нарушении изоспина в сильных взаимодействиях в разд. 5.5.

$SU(3)$ -симметрия и кварковая модель

После открытия Λ - и K -частиц было обнаружено, что они обильно рождаются, но имеют большое время жизни. Была выдвинута гипотеза, что эти «новые» частицы обладают новым аддитивным квантовым числом, *странностью* S , которое сохраняется в сильных взаимодействиях (*ассоциативное рождение*), но нарушается при распадах этих частиц за счет слабого взаимодействия. Например, пионы и нуклоны имеют нулевую странность, но $S(\Lambda^0) = -1$, $S(K^0) = +1$. Таким образом, Λ - и K -частицы рождаются в результате сильного взаимодействия, сохраняющего странность, $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$, а затем распадаются за счет слабого взаимодействия, меняющего странность, $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$, $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Странность S , так же как электри-

ческий заряд Q , связана с $U(1)$ -симметрией. Было замечено, что существует линейная связь, так называемое *соотношение Гелл-Манна — Нишидзимы*, между S , Q и диагональным генератором T_3 группы изоспина $SU(2)$ [158, 307]:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (4.156)$$

где

$$Y = B + S;$$

здесь B — барионное число, а Y — гиперзаряд. Таким образом, изоспин и странность (или гиперзаряд) сохраняются лишь приближенно, но определенная их линейная комбинация — электрический заряд — сохраняется точно во всех взаимодействиях.

После этого делались попытки найти «высшую симметрию», которая могла бы объединить изоспин T_i и гиперзаряд Y в одну группу путем расширения мультиплетта, т. е. найти более широкую простую группу, которая содержала бы $SU(2)_T \times U(1)_Y$ в качестве подгруппы. Гелл-Манн [159] и Неeman [305] показали, что все мезоны и барионы с одинаковым спином и четностью можно так сгруппировать в виде таблицы (T_3, Y) (рис. 4.9), что полученные схемы будут очень похожи на представления группы $SU(3)$ (рис. 4.6, *в, г*). При этом мезоны 0^- , 1^- и барионы $1/2^+$ прекрасно укладываются в схему октетного представления ($p = q = 1$), в то время как барионы $3/2^+$ — в схему декаплетного представления ($p = 3, q = 0$). Функции частиц ψ_j^i , входящих в октеты, являясь тензорами с двумя индексами, могут быть записаны в виде матриц

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta^0}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2\omega^0}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad (4.157)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Конечно, в то время, когда был предложен этот *восьмеричный путь*, существование всех мезонов и барионов, предсказываемых этой схемой, не было твердо установлено. Открытие Ω^- -частицы [34] с предсказанной массой и с правильными свойствами распада [161] окончательно убедило значительную часть физиков в правильности классификационной схемы $SU(3)$. Конечно,

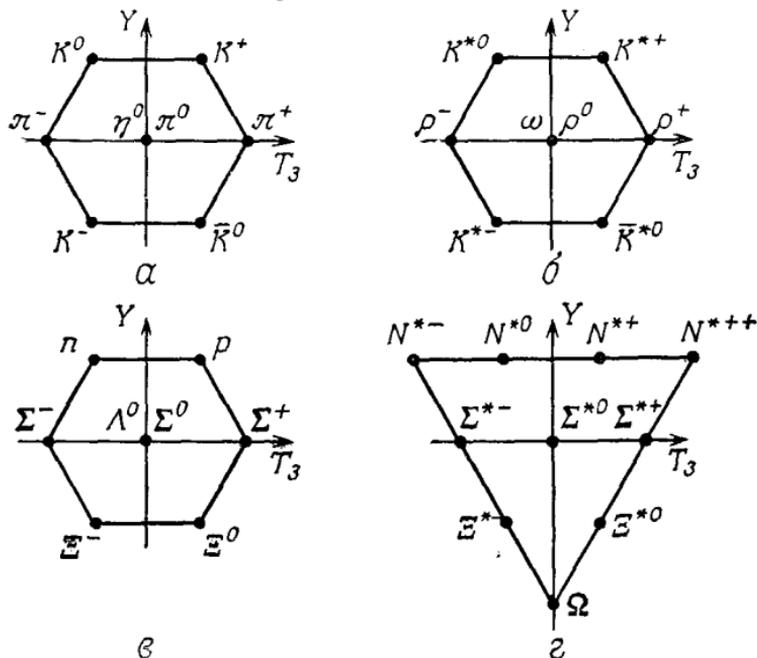


Рис. 4.9. Адроны в представлениях группы $SU(3)$. Октеты: a — 0^- -мезонов; b — 1^- -мезонов; c — $1/2^+$ -барионов и d — декаплет $3/2^+$ -барионов.

$SU(3)$ -симметрия не столь точна, как изоспиновая $SU(2)$ -симметрия. Мерой нарушения $SU(3)$ -симметрии является расщепление масс в пределах одного мультиплетта, например $(m_\Sigma - m_N)/(m_\Sigma + m_N) \approx 0,12$.

Отличительной чертой адронного спектра в схеме *восьмеричного пути* является то, что фундаментальному (определяющему) представлению группы $SU(3)$ (рис. 4.6, a , b) не соответствуют какие-либо известные частицы. В то же время фундаментальное представление любой группы $SU(n)$ играет важную роль, так как все представления высших размерностей могут быть построены из тензорных произведений фундаментального представления. Это свойство наиболее ясно видно в тензорном подходе (см. разд. 4.3). С другой стороны, экспериментаторы продолжали открывать все новые и новые сильно взаимодействующие «элементарные частицы». Было трудно поверить, что все эти адроны действительно элементарны и не имеют внутренней структуры. На этом фоне и была предложена *кварковая модель*. Согласно этой модели, все адроны состоят из кварков

со спином $1/2$, которые преобразуются как члены фундаментального представления ($p = 1, q = 0$) группы $SU(3)$. (Ясно, что даже если не верить в физическую реальность кварков, необходимо признать, что они представляют собой полезный мнемонический прием для понимания классификационной схемы, основанной на группе $SU(3)$.)

1. Имеются три типа (*аромата*) кварков: «верхний» (up), «нижний» (down) и «странный» (strange), преобразующиеся по фундаментальному представлению $\mathbf{3}$:

$$q_i = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \quad (4.158)$$

Этому представлению соответствует таблица Юнга \square . Члены

мультиплета имеют следующие квантовые числа:

	Q	T	T_3	Y	S	B
u	$2/3$	$1/2$	$1/2$	$1/3$	0	$1/3$
d	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	0	$1/3$
s	$-1/3$	0	0	$-2/3$	-1	$1/3$

Античастицы, называемые антикварками, преобразуются по сопряженному представлению $\mathbf{3}^*$:

$$q^i = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix}, \quad (4.159)$$

которому соответствует таблица Юнга \square . Аддитивные кван-

товые числа антикварков противоположны по знаку квантовым числам кварков:

	Q	T	T_3	Y	S	B
\bar{u}	$-2/3$	$1/2$	$-1/2$	$-1/3$	0	$-1/3$
\bar{d}	$1/3$	$1/2$	$1/2$	$-1/3$	0	$-1/3$
\bar{s}	$1/3$	0	0	$2/3$	1	$-1/3$

2. Мезоны ($B = 0$) являются связанными состояниями кварка и антикварка $q\bar{q}$. Из равенства $\mathbf{3} \times \mathbf{3}^* = \mathbf{1} + \mathbf{8}$ следует, что мезоны образуют синглеты и октеты группы $SU(3)$. Для 0^- -мезонов имеем

$$\begin{aligned} \pi^+ &\sim \bar{d}u, & \pi^0 &\sim (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}, & \pi^- &\sim \bar{u}d, \\ K^+ &\sim \bar{s}u, & K^0 &\sim \bar{s}d, & \bar{K}^0 &\sim \bar{d}s, & K^- &\sim \bar{u}s, \\ \eta^0 &\sim (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)/\sqrt{6}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Аналогично 1-октет векторных мезонов имеет тот же кварковый состав. При этом 0-мезон η' и 1-мезон « ϕ » (более подробно о нем будет сказано ниже) можно отождествить с $SU(3)$ -синглетом $q^i q_i = (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$.

3. Бариины ($B=1$) являются связанными состояниями qqq . Из правил перемножения представлений получаем

$$\square \times \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \square\square \quad , \text{ т. е. } 3 \times 3 = 3^* + 6,$$

$$\square \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad , \text{ т. е. } 3 \times 3^* = 1 + 8,$$

$$\square \times \square\square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square\square\square \quad , \text{ т. е. } 3 \times 6 = 8 + 10.$$

Отсюда следует

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10. \quad (4.161)$$

Октеты барионов имеют те же квантовые числа (T_3, Y), что и октеты мезонов, хотя и имеют различное кварковое содержание. Это связано с тем, что T_3 и Y (а также полный изоспин T) являются генераторами группы $SU(3)$ и их собственные значения для данного представления определены однозначно. Мезонные октетные состояния и барионные октетные состояния имеют разные барионные числа, так как B не является генератором группы $SU(3)$. В частности, для $1/2^+$ -барионов имеем



$$\begin{aligned} p &\sim udu, & n &\sim udd, \\ \Sigma^+ &\sim suu, & \Sigma^0 &\sim s(ud + du)/\sqrt{2}, & \Sigma^- &\sim sdd, \\ \Xi^0 &\sim ssu, & \Xi^- &\sim ssd, \\ \Lambda^0 &\sim s(uu + dd - 2ud)/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (4.162)$$

а для $3/2^+$ -барионов 

$$\begin{aligned} N^{*++} &\sim uuu, & N^{*+} &\sim uud, & N^{*0} &\sim udd, & N^{*-} &\sim ddd, \\ \Sigma^{*+} &\sim suu, & \Sigma^{*0} &\sim sud, & \Sigma^{*-} &\sim sdd, \\ \Xi^{*0} &\sim ssu, & \Xi^{*-} &\sim ssd, \\ \Omega^- &\sim sss. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Массовые формулы Гелл-Манна — Окубо

Рассмотрим спектр адронов в присутствии члена $H_1 \ll H_0$, аналогичного (4.154), нарушающего $SU(3)$ -симметрию. Как указывалось выше, изоспиновая симметрия является довольно точной симметрией, поэтому разностями масс в изоспиновом мультиплете можно пренебречь при обсуждении нарушения $SU(3)$ -инвариантности. Дальнейшие выводы можно получить с помощью чисто теоретико-групповых рассуждений. Делая предположение о трансформационных свойствах H_1 ($\sim Y$ или, эквивалентно, $\sim F_8$) относительно группы $SU(3)$, можно получить соотношение между массами различных изоспиновых мультиплетов [159, 309]. Мы продемонстрируем это с помощью простых вычислений на примере кварковой модели, предположив, что энергия связи кварков не зависит от их ароматов (обоснование этого будет дано ниже) и разности масс в представлении группы $SU(3)$ полностью обусловлены разностью масс кварков. Эти утверждения являются частными следствиями гипотезы о том, что $H_1 \sim F_8$. В приближении, в котором изоспиновая $SU(2)$ -симметрия является точной, имеем $m_u = m_d$. Рассмотрим сначала массы 0^- -мезонов. Выражая их через массы кварков, из (4.160) получим

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= m_0^2 + 2m_u^2, \\ m_K^2 &= m_0^2 + m_u^2 + m_s^2, \\ m_\eta^2 &= m_0^2 + \frac{2}{3}(m_u^2 + 2m_s^2), \end{aligned} \quad (4.164)$$

где m_0 — общая часть массы, не зависящая от аромата. Мы записали соотношения между квадратами масс мезонов. В основном это связано с тем, что такие соотношения лучше описывают экспериментальные данные (чем линейные соотношения для масс). Возможным обоснованием является то, что массы 0^- -мезонов обращаются в нуль в пределе $SU(3)$ -симметрии (см. гл. 5) и расчет энергии по теории возмущений в окрестности такого значения автоматически приводит к соотношению между квадратами масс. Из равенства (4.164) имеем

$$4m_K^2 = m_\pi^2 + 3m_\eta^2. \quad (4.165)$$

Согласно экспериментальным данным, левая часть $\approx 0,98 \text{ ГэВ}^2$, а правая $\approx 0,92 \text{ ГэВ}^2$. Таким образом, это соотношение для масс выполняется с точностью до нескольких процентов. Аналогично для $1/2^+$ -барионов из (4.162) имеем

$$\begin{aligned} m_N &= m_0 + 3m_u, \\ m_\Sigma &= m_0 + 2m_u + m_s, \\ m_\Theta &= m_0 + m_u + 2m_s, \\ m_\Lambda &= m_0 + 2m_u + m_s. \end{aligned}$$

Исключая три параметра m_0 , m_u и m_s , получаем соотношение для масс барионов

$$\frac{m_\Sigma + 3m_\Lambda}{2} = m_N + m_\Xi, \quad (4.166)$$

которое очень хорошо описывает экспериментальные данные. Левая часть этого соотношения $\approx 2,23$ ГэВ, а правая часть $\approx 2,25$ ГэВ. Кварковая модель позволяет определить отклонения масс частиц от среднего значения m_0 . Кроме того, мы имеем дополнительное соотношение

$$m_\Lambda = m_\Sigma. \quad (4.167)$$

Для декаплета $3/2^+$ -барионов (4.163) легко получить правило эквидистантности масс

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} = m_{\Theta^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_{N^*}. \quad (4.168)$$

В действительности масса бариона Ω^- сначала была предсказана (правильно) с помощью этого соотношения.

ω — ϕ -смешивание

Что касается массовой формулы Гелл-Манна — Окубо для мультиплета векторных 1^- -мезонов, то возникает впечатление, что она не работает. Действительно, по аналогии с соотношением (4.165) для 0^- -мезонов мы имели бы

$$3m_\omega^2 = 4m_{K^*}^2 - m_\rho^2. \quad (4.169)$$

Так как $m_{K^*} = 890$ МэВ, а $m_\rho = 770$ МэВ, то, согласно этому равенству, $m_\omega = 926,5$ МэВ, в то время как экспериментальное значение равно $m_\omega = 783$ МэВ. Затем был открыт векторный 1^- -мезон ϕ с теми же квантовыми числами, что и у ω (т. е. $T = 0$ и $S = 0$), и с массой 1020 МэВ. Это навело на мысль, что ω не является чистым состоянием $SU(3)$ -октета, а содержит примесь $SU(3)$ -синглета [344]. Обозначим через V_8 член $SU(3)$ -октета с $T = Y = 0$, а через V_1 — $SU(3)$ -синглет. Тогда ω является линейной комбинацией V_8 и V_1 , в то время как ϕ является другой ортогональной комбинацией. Запишем массовую матрицу в пространстве состояний V_8 и V_1 в виде

$$M = \begin{pmatrix} m_{88}^2 & m_{81}^2 \\ m_{18}^2 & m_{11}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.170)$$

Волновые функции для V_8 и V_1 имеют вид

$$V_8 = (uu + dd - 2\bar{s}s)/\sqrt{6}, \quad (4.171)$$

$$V_1 = (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)/\sqrt{3}.$$

Собственными значениями матрицы M будут m_ω и m_ϕ :

$$R^T M R = \begin{pmatrix} m_\omega^2 & 0 \\ 0 & m_\phi^2 \end{pmatrix}, \quad (4.172)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.173)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega &= \cos \theta V_8 - \sin \theta V_1, \\ \phi &= \sin \theta V_8 + \cos \theta V_1. \end{aligned} \quad (4.174)$$

Так как, согласно формуле (4.169), должно быть $m_{88} = 926,5$ МэВ, то можно вычислить угол смешивания θ . Из равенства (4.172) следует

$$M = R \begin{pmatrix} m_\omega^2 & 0 \\ 0 & m_\phi^2 \end{pmatrix} R^T, \quad (4.175)$$

откуда находим

$$\sin \theta = [(m_{88}^2 - m_\omega^2)/(m_\phi^2 - m_\omega^2)]^{1/2} = 0,76. \quad (4.176)$$

Тот факт, что величина $\sin \theta$ близка к $\sqrt{2/3} = 0,81$, важен по следующей причине. Если $\sin \theta$ точно равен $\sqrt{2/3}$ (эта ситуация называется «идеальным смешиванием»), то справедливы формулы

$$\omega = (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}, \quad (4.177)$$

$$\phi = \bar{s}s. \quad (4.178)$$

Точнее, в случае идеального смешивания ϕ состоит лишь из странных кварков, а ω — лишь из нестранных кварков. Следовательно, при значении $\sin \theta$ (4.176) основной вклад в ϕ дает компонента $\bar{s}s$, но имеется очень малая примесь компонент $\bar{u}u$ и $\bar{d}d$.

Правило Цвейга и открытие «очарования»

Поскольку мезоны ω и ϕ имеют одни и те же квантовые числа $T=0$, $Y=0$, можно было бы ожидать, что они обладают одинаковыми свойствами при сильных взаимодействиях. Но эксперименты показывают, что это не так. Мезон ω , как и следовало ожидать, в основном распадается по 3π -каналу, в то время как процесс $\phi \rightarrow 3\pi$ сильно подавлен по сравнению с $\phi \rightarrow \bar{K}K$, несмотря на то, что фазовый объем последнего распада очень мал (m_ϕ лишь немного больше, чем $2m_K \approx 998$ МэВ). Это показывает, что мезон ϕ преимущественно распадается по каналам, включающим странные частицы, а не по каналам, не содержащим таких частиц. Чтобы объяснить это явление, Цвейг

[446], а также независимо некоторые другие авторы [224, 310] предположили, что процессы сильных взаимодействий, в которых конечные состояния могут быть получены только через аннигиляцию q и \bar{q} , подавлены. Следовательно, так как основной вклад в ϕ дает $s\bar{s}$ -компонента, то распад на пионы должен происходить в соответствии с диаграммой на рис. 4.10, а, в то время

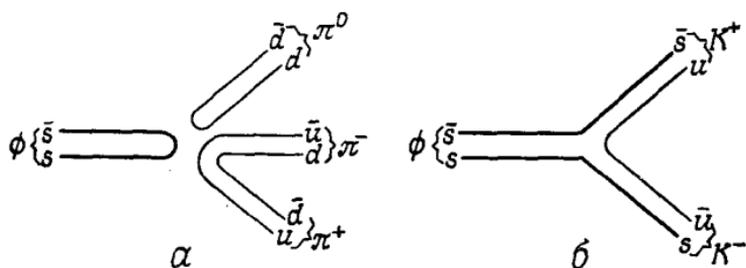


Рис. 4.10. Диаграммы распада ϕ -мезона: а — запрещенная и б — разрешенная правилом Цвейга.

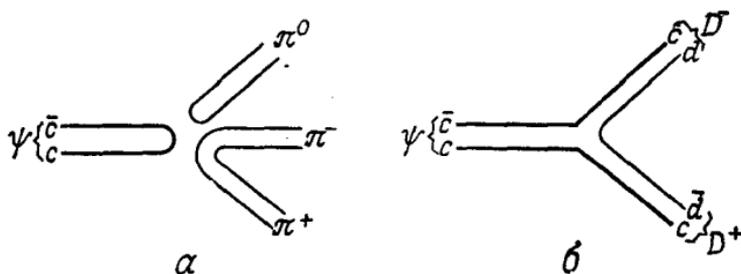


Рис. 4.11. Разрешенные правилом Цвейга распады, такие, как $\psi \rightarrow D^+D^-$ (б), запрещены из энергетических соображений.

как распад по $K\bar{K}$ -каналу не включает аннигиляции s и \bar{s} , как показано на рис. 4.10, б.

В 1974 г. была открыта частица J/ψ (3100) [25, 26]. Она обладает одним довольно необычным свойством: ее ширина (порядка 70 кэВ) много меньше ширины распадов типичных адронов (например, $\Gamma_\rho \sim 150$ МэВ, $\Gamma_\omega \sim 10$ МэВ). Кроме того, ширина должна возрастать при увеличении массы частицы, так как при этом увеличивается фазовый объем процесса распада. Это обычно интерпретируют следующим образом: частица J/ψ является связанным состоянием нового тяжелого кварка, очарованного кварка c , и его античастицы \bar{c} , т. е. $\psi \sim \bar{c}c$. Масса этой частицы ниже порога разрешенных правилом Цвейга распадов в очарованные мезоны (связанные состояния, содержащие хотя бы один очарованный кварк) (рис. 4.11).

Детальное обсуждение свойств очарованных частиц приведено в работе Гайар, Ли и Рознера [153]. Здесь мы лишь ограничимся следующим замечанием: существование этого но-

вого кварка с зарядом $2/3$ было предсказано сначала на основе кварк-лептонной симметрии [51] и, что более убедительно, на основе требования подавления процессов с нейтральными токами, меняющими странность [188]. С учетом нового кваркового числа симметрия ароматов расширяется от группы $SU(3)$ до группы $SU(4)$. Конечно, $SU(4)$ -симметрия сильно нарушена, так как кварк s тяжелый ($m_c \approx 1,5$ ГэВ). Обсуждение такой сильно нарушенной симметрии не имеет большого смысла. Необходимо переходить непосредственно к динамическому рассмотрению кварковых моделей адронов, несущих новые квантовые числа. Например, имеются дополнительные 0 -мезонные состояния

$$\begin{aligned} D^+ &\sim \bar{d}c, & D^- &\sim \bar{c}d, & D^0 &\sim \bar{u}c, & \bar{D}^0 &\sim \bar{c}u, \\ F^+ &\sim \bar{s}c, & F^- &\sim \bar{c}s, & \eta_c &\sim \bar{c}c. \end{aligned} \quad (4.179)$$

В действительности одним из наиболее достоверных свидетельств в пользу кварковой модели является детальная проверка структуры уровней и переходов между различными состояниями «кваркония» ($\bar{c}c$).

В 1977 г. был открыт еще один набор узких резонансов Υ [219, 253], которые были успешно интерпретированы как связанные состояния еще одного тяжелого кварка b (от beauty — красивый или bottom — нижний), имеющего заряд $(-1/3)$ и очень большую массу $m_b \approx 5$ ГэВ.

Как мы увидим дальше (особенно в разд. 11.3), исходя из идеи кварк-лептонной симметрии в теории электрослабых взаимодействий, можно ожидать существование по крайней мере еще одного сверхтяжелого кварка. Этот кварк t (от truth — истинный или от top — верхний) должен иметь заряд $2/3$. Он объединяется вместе с кварком b в пару, аналогичную парам (u, d) и (c, s) .

Первые исследования свойств тяжелых кваркониев были проведены Аппельквистом и Политцером [21]. (Среди более поздних работ, содержащих обсуждение кваркония ($\bar{b}b$), и обзоров отметим [22, 120, 334, 358].)

Трудности простой кварковой модели

Под простой кварковой моделью мы подразумеваем первоначальную модель с тремя или большим числом типов кварков без каких-либо скрытых степеней свободы. Но эта простая модель приводит к следующим трудностям.

1. Кварки имеют дробные электрические заряды, в то время как наблюдаемые адроны имеют целые заряды. Отсюда в силу закона сохранения заряда следует, что по крайней мере один из кварков абсолютно стабилен. Предпринимались попытки об-

наружения этого дробно-заряженного стабильного кварка, но до сих пор не существует общепризнанных доказательств его существования (см., однако, [251]).

2. Все адроны являются лишь связанными состояниями кварков $\bar{q}q$ и qqq (и им сопряженными). Нет никаких экспериментальных указаний на существование связанных состояний qq или $qqqq$. Трудно понять причину отсутствия подобных адронов с массами, сравнимыми с массами наблюдаемых частиц.

3. Наиболее серьезная проблема состоит в следующем. Согласно кварковой модели, для декаплета барионов $J^P = 3/2^+$ волновые функции нарушают связь спина со статистикой. Рассмотрим, например, $N^{*++} \sim uuu$. Так как эта частица является наименьшим состоянием системы из трех кварков u , пространственная волновая функция имеет нулевой полный угловой момент и полностью симметрична. Но N^{*++} имеет спин $3/2$, и спины всех кварков u выстроены в одном направлении (причем третья компонента спина $s_3 = +3/2$), так что спиновая волновая функция также полностью симметрична. Следовательно, полная волновая функция симметрична по отношению к перестановке любой пары составляющих кварков. Но это не совместимо со статистикой Ферми — Дирака, так как кварк u является фермионом со спином $1/2$.

Цветовая степень свободы

Постепенно был найден способ обойти все эти трудности [197, 212, 299]. Выход состоит в том, чтобы постулировать существование для каждого кварка скрытой степени свободы, названной *цветом*¹⁾. Точнее, предполагается, что кварк каждого типа может существовать в трех различных цветовых состояниях, образующих триплет относительно цветовой группы $SU(3)$. Так, для известных кварков мы имеем

$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow & u_\alpha = (u_1, u_2, u_3), & \\
 & d_\alpha = (d_1, d_2, d_3), & \\
 \text{аромат} & s_\alpha = (s_1, s_2, s_3), & (4.180) \\
 & c_\alpha = (c_1, c_2, c_3), & \\
 \downarrow & b_\alpha = (b_1, b_2, b_3). & \\
 & \leftarrow \text{цвет} \rightarrow &
 \end{array}$$

Пять типов (ароматов) кварков соответствуют пяти различным цветовым триплетам. Операторы цветовой группы переводят

¹⁾ Квантовое число, отвечающее дополнительной степени свободы, позднее получившее название «цвет», было независимо введено в работе: Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н.—Препринт ОИЯИ, Д-1968, 1965. — Прим. ред.

кварк одного цвета в кварк другого цвета, но оставляют аромат неизменным: $u_1 \leftrightarrow u_2$, $u_2 \leftrightarrow u_3$, $u_3 \leftrightarrow u_1$ или $d_1 \leftrightarrow d_2$, $d_2 \leftrightarrow d_3$, $d_3 \leftrightarrow d_1$ и т. д. Кроме этого предположения о дополнительной степени свободы постулируется, что физически наблюдаемы лишь состояния, синглетные относительно цветовой группы.

Так как в произведениях представлений $3 \times 3^*$ и $3 \times 3 \times 3$ содержатся цветовые синглеты (см. (4.161)), лишь конфигурации $\bar{q}q$ и qqq могут объединяться в физически наблюдаемые адроны, в то время как состояния q , qq или $qqqq$ не могут быть обнаружены экспериментально. Волновая функция N^{*++} теперь антисимметрична:

$$N^{*++} \sim u_\alpha(x_1) u_\beta(x_2) u_\gamma(x_3) \epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \quad (4.181)$$

где α , β , γ — цветовые индексы, принимающие значения 1, 2, 3.

Важно заметить, что эта цветовая группа симметрии $SU(3)$ не имеет ничего общего с первоначальной группой симметрии ароматов $SU(3)$ восьмеричного пути. Действительно, в отличие от $SU(n)$ -симметрии ароматов с $n = 2, 3, 4 \dots$ цветовая симметрия $SU(3)$ предполагается точной.

Теперь мы имеем довольно любопытную ситуацию: адроны состоят из частиц, которые сами по себе ненаблюдаемы. Кварки могут существовать лишь внутри адронов и никогда не могут существовать в свободном виде. Это свойство обычно называют *конфайнментом кварков*. Любая реалистическая теория адронов как связанных состояний кварков должна описывать это свойство.

В последние годы физики остановили свой выбор на калибровочной теории, называемой квантовой хромодинамикой (КХД), в которой цветное квантовое число играет ту же роль, что и электрический заряд в квантовой электродинамике. В КХД цветные кварки взаимодействуют друг с другом через обмен глюонами подобно тому, как заряженные частицы взаимодействуют путем обмена фотонами. Эти взаимодействия приводят к (зависящему от цвета, но не зависящему от аромата) объединению кварков в адроны. Хотя КХД имеет много привлекательных черт (см. гл. 10), но до сих пор в рамках этой теории не получено убедительного доказательства конфайнмента кварков. Однако существует много указаний (см., например, разд. 10.5) на то, что конфайнмент должен описываться КХД.

КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В разд. 4.4 мы изучили симметрию по ароматам сильных взаимодействий и ее физическую реализацию, основанную на кварковой модели. Полагают, что симметрии $SU(2)$, $SU(3)$ и т. д. отражают вырождения масс кварков $m_u = m_d$, а также в менее точном приближении $m_u = m_d = m_s$. Оказывается, однако, что причина существования этих равенств состоит не столько в том, что массы трех кварков оказались равными друг другу, сколько в том, что все они являются легкими в характерной энергетической шкале сильных взаимодействий. Таким образом, пределами, в которых симметрии выполняются точно, следует на самом деле считать $m_u = m_d = 0$ и в меньшей степени $m_s = 0$ с соответствующими симметриями по ароматам $SU(2)_L \times SU(2)_R$ и $SU(3)_L \times SU(3)_R$, называемыми *киральными симметриями*. Но мы не наблюдаем какого-либо вырождения частиц, которое можно было бы сопоставить указанным симметриям. Разрешение этого парадокса основано на том факте, что физический вакуум неинвариантен (не является синглетом) по отношению к киральным симметриям и, как принято говорить, симметрия спонтанно нарушена. Физическим проявлением такой реализации симметрии служит существование набора бозонов с массами, близкими к нулю: трех пионов, а также всего октета 0^- -мезонов. Здесь мы изложим основы подхода, за которым закрепилось название *алгебра токов*. Матричные элементы для этих легких псевдоскалярных мезонов в определенных кинематических пределах вычисляются непосредственно с помощью коммутационных соотношений и законов сохранения для токов, соответствующих киральной симметрии.

Настоящая глава построена следующим образом. В разд. 5.1 мы обсуждаем связь между симметрией и законами сохранения в теории поля, а также устанавливаем важный результат, состоящий в том, что коммутационные соотношения для зарядов справедливы даже при наличии членов, нарушающих симметрию. В разд. 5.2 мы обращаем внимание читателя на то, что в теории поля токи, соответствующие симметриям, являются в действительности физическими (электромагнитными и слабыми) токами. Рассматривается предложенная Адлером проверка ал-

гебры токов (киральной симметрии) в экспериментах по рассеянию нейтрино при высоких энергиях. В разд. 5.3 мы изучаем спонтанное нарушение глобальных симметрий и теорему Голдстоуна. Это вводит нас в круг вопросов, относящихся к частичному сохранению аксиально-векторного тока (ЧСАТ), изложению которых посвящен разд. 5.4. В пределе безмассовых пионов, отвечающих киральной симметрии, мы можем, используя ЧСАТ и алгебру токов, вывести ряд низкоэнергетических теорем: соотношение Голдбергера — Треймана, условия согласованности Адлера для амплитуды πN -рассеяния, правила сумм Адлера — Вайсбергера и т. д. В разд. 5.5 исследуем случай (явного) нарушения киральной симметрии, приводящего к возникновению ненулевой массы мезона и σ -члена для πN -рассеяния.

Проведенный в настоящей главе анализ показывает, что адронные взаимодействия обладают приближенной киральной симметрией, которая реализуется голдстоуновским способом. Таким образом, любая удовлетворительная теория сильных взаимодействий должна подчиняться указанным требованиям симметрии по ароматам (см. также замечания в конце разд. 5.5). Как мы увидим, калибровочная теория КХД естественным образом обнаруживает такие глобальные симметрии.

5.1. ГЛОБАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ И КОММУТАТОРЫ ТОКОВ

Законы сохранения в физике можно сопоставить соответствующим принципам симметрии. Из инвариантности физической системы относительно определенных преобразований симметрии вытекают отвечающие им совокупности законов сохранения. В классической механике хорошо известны следующие примеры:

Инвариантность относительно трансляций во времени Сохранение энергии

$$t \rightarrow t + a \quad \leftrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Инвариантность относительно трансляций в пространстве Сохранение импульса

$$r_i \rightarrow r_i + b_i \quad \leftrightarrow \quad \frac{dp^i}{dt} = 0$$

Инвариантность относительно вращений Сохранение углового момента

$$r_i \rightarrow R_{ij} r_j, \text{ где } RR^T = 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dJ^i}{dt} = 0$$

В квантовой механике наблюдаемым сопоставляются операторы. Эволюция во времени данных операторов в представлении Гейзенберга определяется их коммутатором с гамильтонианом

$$\frac{dO}{dt} = i[H, O]. \quad (5.1)$$

Таким образом, закон сохранения эквивалентен утверждению, что соответствующий оператор коммутирует с гамильтонианом. Например, сохранение углового момента $dJ_i/dt = 0$ означает, что

$$[J_i, H] = 0. \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что уровни энергии системы $(2j + 1)$ -кратно вырождены, где j — собственное значение оператора углового момента. На языке теории групп оператор Гамильтона инвариантен относительно группы вращений $O(3)$, генераторы которой J_1, J_2 и J_3 удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

Следовательно, состояния с определенной энергией образуют представления группы $O(3)$. Кратность вырождения уровней энергии связана с размерностью неприводимых представлений.

Теорема Нётер

В теории поля симметрии и законы сохранения связаны между собой аналогичным образом. Точный смысл этой связи составляет содержание *теоремы Нётер* [308]. Для системы, описываемой лагранжианом

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) \quad (5.4)$$

и соответствующим уравнением движения

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = 0, \quad (5.5)$$

любому непрерывному преобразованию симметрии, оставляющему действие $S = \int L dt$ инвариантным, отвечает сохраняющийся ток:

$$\partial^\mu J_\mu(x) = 0. \quad (5.6)$$

При этом заряд, определяемый выражением

$$Q(t) = \int d^3x J_0(x), \quad (5.7)$$

является динамическим инвариантом:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (5.8)$$

поскольку поверхностный член на бесконечности пренебрежимо мал:

$$\int d^3x \partial_0 J_0 = \int d^3x \partial^\mu J_\mu = 0. \quad (5.9)$$

Теорему Нётер легко проиллюстрировать в случае внутренней симметрии. Пусть лагранжева плотность \mathcal{L} инвариантна относительно некоторой группы симметрии G , т. е. относительно инфинитезимальных преобразований вида

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x); \quad (5.10)$$

здесь

$$\delta\phi_i(x) = i\varepsilon^a t_{ij}^a \phi_j(x),$$

где ε^a — малые параметры (не зависящие от x), а t^a — набор матриц, подчиняющихся коммутационным соотношениям алгебры Ли группы G :

$$[t^a, t^b] = iC^{abc} t^c \quad (5.11)$$

(C^{abc} — структурные константы группы G). Соответствующая вариация лагранжевой плотности имеет вид

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} \delta(\partial_\mu\phi_i). \quad (5.12)$$

Используя уравнение (5.5), а также тождество

$$\delta(\partial^\mu\phi_i) \equiv \partial_\mu\phi'_i - \partial_\mu\phi_i = \partial_\mu(\delta\phi_i), \quad (5.13)$$

мы можем записать $\delta\mathcal{L}$ в виде

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu(\delta\phi_i) = \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i \right] = \varepsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} i t_{ij}^a \phi_j \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ясно, что если лагранжиан инвариантен относительно преобразования (5.10), т. е. $\delta\mathcal{L} = 0$, то соотношение (5.14) выражает закон сохранения тока

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0,$$

где

$$J_\mu^a = -i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu\phi_i)} t_{ij}^a \phi_j. \quad (5.15)$$

Сохраняющиеся заряды, имеющие вид

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(x), \quad (5.16)$$

являются генераторами группы симметрии.

Симметрии такого типа, которые характеризуются параметрами ε^a в (5.10), не зависящими от точки пространства-вре-

мени, называются *глобальными симметриями*. Поля $\phi_i(x)$ преобразуются строго одинаковым образом во всех точках x пространства-времени.

Пример 1. *Абелева $U(1)$ -симметрия.* Лагранжева плотность, имеющая вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2] - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (5.17)$$

инвариантна относительно преобразования

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \phi'_1 = \phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha, \\ \phi_2 &\rightarrow \phi'_2 = \phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Это $O(2)$ -симметрия, отвечающая инвариантности относительно вращений в плоскости (ϕ_1, ϕ_2) . Для бесконечно малого вращения $\alpha \ll 1$ имеем

$$\phi'_1 = \phi_1 - \alpha \phi_2, \quad \phi'_2 = \phi_2 + \alpha \phi_1, \quad (5.19)$$

т. е. $\phi'_i = \phi_i + i a t_{ij} \phi_j$, где

$$t = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Согласно (5.15), сохраняющийся ток имеет вид

$$J_\mu = -(\partial_\mu \phi_1) \phi_2 + (\partial_\mu \phi_2) \phi_1. \quad (5.21)$$

Вводя комплексные поля

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i \phi_2), \quad (5.22)$$

мы можем переписать лагранжиан (5.17) в виде

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^* \phi) - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (5.23)$$

Последнее выражение инвариантно относительно $U(1)$ -преобразования:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \quad (5.24)$$

и приводит к сохраняющемуся току

$$J_\mu = i [(\partial_\mu \phi^*) \phi - (\partial_\mu \phi) \phi^*]. \quad (5.25)$$

Заметим, что вследствие симметрии $O(2)$ (или $U(1)$) ϕ_1 и ϕ_2 (или ϕ и ϕ^*) вырождены по массе.

Пример 2. *Изоспиновая симметрия $SU(2)$.* Рассмотрим теперь простой пример неабелевой симметрии. Пусть ϕ — изодублет вида

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Лагранжева плотность

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (5.27)$$

инвариантна относительно инфинитезимальных изоспиновых вращений вида

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \phi_i + i\epsilon^a \frac{\tau_{ij}^a}{2} \phi_j, \quad (5.28)$$

где τ^a — стандартные матрицы Паули. Сохраняющийся изоспиновый ток задается выражением

$$J_\mu^a = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \phi_i^\dagger \tau_{ij}^a \phi_j - \phi_i^\dagger \tau_{ij}^a \partial_\mu \phi_j), \quad (5.29)$$

а его временная компонента имеет простой вид

$$\begin{aligned} J_0^a &= -\frac{i}{2} (\partial_0 \phi_i^\dagger \tau_{ij}^a \phi_j - \phi_i^\dagger \tau_{ij}^a \partial_0 \phi_j) = \\ &= -\frac{i}{2} [\pi_i \tau_{ij}^a \phi_j - \phi_i^\dagger \tau_{ij}^a \pi_j^\dagger], \end{aligned} \quad (5.30)$$

где π_i — канонические импульсы, сопряженные полям ϕ_i . Используя канонические коммутаторы

$$[\pi_i(\mathbf{x}, t), \phi_j(\mathbf{x}', t)] = -i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.31)$$

можно показать (см. ниже соотношение (5.37)), что заряды, определяемые выражениями

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(x), \quad a = 1, 2, 3,$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям $SU(2)$ -симметрии

$$[Q_a, Q_b] = i\epsilon_{abc} Q_c. \quad (5.32)$$

Это означает, что Q_a являются генераторами группы $SU(2)$. В данном примере также вследствие $SU(2)$ симметрии поля ϕ_1 и ϕ_2 имеют одинаковые массы.

Алгебра токов

Выше мы видели, что точные симметрии приводят к сохраняющимся токам, а соответствующие заряды порождают групповую алгебру, отвечающую данной симметрии. Эти простые коммутационные соотношения могут быть использованы для классификации состояний частиц. Например, с $SU(2)$ -преобразованиями в примере 2 связаны заряды Q^a , $a = 1, 2, 3$, которые являются генераторами преобразований изоспиновой $SU(2)$ -симметрии (5.32). Как уже указывалось в разд. 4.2 и 4.4, они преобразуют данную частицу в другие частицы, входящие в тот

же самый изоспиновый мультиплет. Ниже мы покажем, что коммутационные соотношения, такие, как (5.32), выполняются даже при наличии членов, нарушающих симметрию. Рассмотрим лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (5.33)$$

где \mathcal{L}_0 инвариантен относительно группы симметрии G , а \mathcal{L}_1 неинвариантен. Мы можем по-прежнему определить ток J_μ^a для инфинитезимальных преобразований (5.10) выражением (5.15), но теперь этот ток не будет сохраняться, а заряды, определяемые выражениями

$$Q^a(t) = \int J_0^a(x) d^3x = -i \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^0 \phi_i)} t_{ij}^a \phi_j d^3x, \quad (5.34)$$

будут зависеть от времени. Тем не менее величина $\delta \mathcal{L} / \delta(\partial^0 \phi_i)$, несмотря на присутствие члена \mathcal{L}_1 , по-прежнему является импульсом, канонически сопряженным ϕ_i :

$$\pi_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^0 \phi_i)} \quad (5.35)$$

и удовлетворяет каноническим коммутационным соотношениям при равных временах:

$$[\pi_i(\mathbf{x}, t), \phi_j(\mathbf{y}, t)] = -i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij}. \quad (5.36)$$

Используя эти соотношения, а также тождество $[AB, CD] = = A[B, C]D - C[D, A]B$, справедливое при $[A, C] = [D, B] = 0$, мы можем, не зная явный вид члена \mathcal{L}_1 , нарушающего симметрию, вычислить коммутатор зарядов (при равных временах):

$$\begin{aligned} [Q^a(t), Q^b(t)] &= - \int d^3x d^3y [\pi_i(\mathbf{x}, t) t_{ij}^a \phi_j(\mathbf{x}, t), \pi_k(\mathbf{y}, t) t_{kl}^b \phi_l(\mathbf{y}, t)] = \\ &= - \int d^3x d^3y \{ \pi_i(\mathbf{x}, t) t_{ij}^a [\phi_j(\mathbf{x}, t), \pi_k(\mathbf{y}, t)] t_{kl}^b \phi_l(\mathbf{y}, t) + \\ &\quad + \pi_k(\mathbf{y}, t) t_{kl}^b [\pi_i(\mathbf{x}, t), \phi_l(\mathbf{y}, t)] t_{ij}^a \phi_j(\mathbf{x}, t) \} = \\ &= - \int d^3x (\pi_k(\mathbf{x}, t) i [t^a, t^b]_{kj} \phi_j(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

Учитывая (5.11), получаем

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = i C^{abc} Q^c(t). \quad (5.37)$$

Таким образом, даже если величины $Q^a(t)$ изменяются со временем, в любой заданный момент времени t коммутационные соотношения групповой алгебры будут выполняться. Эти соотношения обычно называют *алгеброй зарядов*.

Пример. *Нарушенные симметрии в свободной кварковой $SU(3)$ -модели.* Здесь мы будем интересоваться группой ароматов $SU(3)$ (но не цветовой!). Кварковые поля составляют три-

плотное представление

$$q(x) = \begin{Bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

с трансформационными свойствами

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + i\alpha^a \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} q_j, \quad \alpha^a \ll 1, \quad (5.39)$$

где λ^a — восемь матриц Гелл-Манна, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad (5.40)$$

где f^{abc} — структурные константы группы $SU(3)$. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (5.41)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q, \quad (5.42)$$

$$\mathcal{L}_1 = m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s. \quad (5.43)$$

Лагранжиан \mathcal{L}_0 инвариантен относительно группы симметрии $SU(3)$, а \mathcal{L}_1 неинвариантен. Токи, соответствующие $SU(3)$ -преобразованиям, задаются выражениями

$$V_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)q(x). \quad (5.44)$$

Заряды, определяемые выражениями

$$Q^a(t) = \int V_0^a(x) d^3x,$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры группы $SU(3)$

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = if^{abc}Q^c(t) \quad (5.45)$$

вследствие канонических коммутационных соотношений

$$\{q_{\alpha i}(\mathbf{x}, t), q_{\beta j}^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.46)$$

где i, j — индексы ароматов, а α, β — индексы Дирака. Чтобы симметрия $SU(3)$ была точной, требуется выполнение равенств $m_u = m_d = m_s$. В пределе $\mathcal{L}_1 = 0$ лагранжиана плотность \mathcal{L}_0 инвариантна относительно преобразований группы, более широкой, чем $SU(3)$. Кроме преобразования (5.39), \mathcal{L}_0 остается неизменной при аксиальном преобразовании

$$q \rightarrow q'_i = q_i + i\beta^a \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} \gamma_5 q_j, \quad \beta^a \ll 1. \quad (5.47)$$

Соответствующие токи имеют вид

$$A_{\mu}^a(x) = \bar{q}(x) \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \gamma_{\mu} \gamma_5 q(x). \quad (5.48)$$

Эти токи называют аксиально-векторными. Таким образом, даже в присутствии члена \mathcal{L}^1 , нарушающего симметрию, мы можем определить аксиальный заряд Q^{5a} :

$$Q^{5a}(t) = \int A_0^a(x) d^3x. \quad (5.49)$$

Вместе с векторными зарядами $Q^a(t)$ аксиальные заряды порождают следующие коммутационные соотношения при равных временах:

$$\begin{aligned} [Q^a(t), Q^b(t)] &= if^{abc} Q^c(t), \\ [Q^a(t), Q^{5b}(t)] &= if^{abc} Q^{5c}(t), \\ [Q^{5a}(t), Q^{5b}(t)] &= if^{abc} Q^c(t). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Эти коммутационные соотношения соответствуют киральной алгебре $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Чтобы увидеть это, определим левые и правые заряды с помощью соотношений

$$Q_L^a = \frac{1}{2} (Q^a - Q^{5a}), \quad (5.51a)$$

$$Q_R^a = \frac{1}{2} (Q^a + Q^{5a}). \quad (5.51b)$$

Тогда соотношения (5.50) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [Q_L^a(t), Q_L^b(t)] &= if^{abc} Q_L^c(t), \\ [Q_R^a(t), Q_R^b(t)] &= if^{abc} Q_R^c(t), \\ [Q_L^a(t), Q_R^b(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Таким образом, величины Q_L^a генерируют алгебру $SU(3)_L$, а величины Q_R^a генерируют алгебру $SU(3)_R$.

Можно расширить алгебру зарядов (5.37), рассматривая коммутаторы зарядов и соответствующих им токов при равных временах. С помощью точно такого же вычисления, как то, которое привело к соотношению (5.37), мы можем показать, что

$$[Q^a(t), J_0^b(\mathbf{x}, t)] = iC^{abc} J_0^c(\mathbf{x}, t). \quad (5.53)$$

Далее, используя лоренц-ковариантность, можно включить также другие компоненты токов:

$$[Q^a(t), J_{\mu}^b(\mathbf{x}, t)] = iC^{abc} J_{\mu}^c(\mathbf{x}, t). \quad (5.54)$$

Можно пойти еще дальше и рассмотреть наряду с (5.53) соотношение

$$[J_0^a(\mathbf{x}, t), J_0^b(\mathbf{y}, t)] = iC^{abc}J_0^c(\mathbf{x}, t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.55)$$

Эти соотношения, а также аналогичные расширения соотношений (5.50) называются *алгеброй токов*, см. ниже соотношения (5.80).

Если попытаться включить в алгебру токов (5.55) пространственные компоненты, то возникнут дополнительные члены, исчезающие при пространственном интегрировании. Например,

$$[J_0^a(\mathbf{x}, t), J_i^b(\mathbf{y}, t)] = iC^{abc}J_i^c(\mathbf{x}, t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + S_{ij}^{ab}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial y_j}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.56)$$

где $S_{ij}^{ab}(\mathbf{x})$ — некоторый оператор, зависящий от явного вида величины $J_i^a(\mathbf{x})$. Этот член обращается в нуль при интегрировании по пространству:

$$S_{ij}^{ab}(\mathbf{x})\int\frac{\partial}{\partial y_j}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})d^3y = 0 \quad (5.57)$$

и не меняет поэтому алгебру зарядов и токов (5.54). Члены такого типа называются *швингеровскими членами* [354]. Простое рассуждение показывает, что они, вообще говоря, не могут быть равными нулю. Рассмотрим простейший случай $U(1)$ -симметрии, когда групповые индексы не нужны, а структурные константы отсутствуют. Если предположить, что швингеровские члены отсутствуют, то коммутатор (5.56) имеет вид

$$[J_0(\mathbf{x}, t), J_i(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (5.58)$$

откуда следует

$$[J_0(\mathbf{x}, t), \partial_i J_i(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (5.59)$$

Из сохранения тока $\partial^\mu J_\mu = 0$ получаем

$$[J_0(\mathbf{x}, t), \partial_0 J_0(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (5.60)$$

Беря вакуумное среднее и вставляя полную систему собственных состояний оператора энергии, находим

$$\begin{aligned} \langle 0|[J_0(\mathbf{x}, t), \partial_0 J_0(\mathbf{y}, t)]|0\rangle &= \sum_n (\langle 0|J_0(\mathbf{x}, t)|n\rangle\langle n|\partial_0 J_0(\mathbf{y}, t)|0\rangle - \\ &\quad - \langle 0|\partial_0 J_0(\mathbf{y}, t)|n\rangle\langle n|J_0(\mathbf{x}, t)|0\rangle) = \\ &= i \sum_n (e^{ip_n \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-ip_n \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}) E_n |\langle 0|J_0(0)|n\rangle|^2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Таким образом, в пределе $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ соотношение (5.60) дает

$$\sum_n E_n |\langle 0|J_0(0)|n\rangle|^2 = 0. \quad (5.62)$$

Из условия положительности энергии мы должны заключить, что

$$\langle 0 | J_0(0) | n \rangle = 0 \quad \text{для всех } |n\rangle. \quad (5.63)$$

Таким образом, $J_0 = 0$ тождественно и соотношение (5.60) тривиально. Следовательно, должен существовать отличный от нуля швингеровский член.

Отметим также, что для свободной кварковой модели существуют еще две $U(1)$ -симметрии. Первая $U(1)$ -симметрия отвечает инвариантности \mathcal{L} (формула (5.41)) относительно изменения общей фазы всех кварковых полей

$$q_i(x) \rightarrow e^{i\beta} q_i(x) \quad (5.64)$$

и сохраняющемуся току

$$J_\mu^B(x) \sim \bar{q}_i(x) \gamma_\mu q_i(x). \quad (5.65)$$

(Этот ток связан с барионным зарядом.) Вторая $U(1)$ -симметрия отвечает инвариантности \mathcal{L}_0 (формула (5.42)) относительно преобразования

$$q_i(x) \rightarrow e^{i\beta\gamma_5} q_i(x) \quad (5.66)$$

и (частично) сохраняющемуся току

$$J_\mu^A(x) \sim \bar{q}_i(x) \gamma_\mu \gamma_5 q_i(x). \quad (5.67)$$

(Этот ток связан с «аксиальным барионным зарядом».) Вопросы, относящиеся к этой аксиальной $U(1)$ -симметрии, обсуждаются в разд. 16.3.

5.2. ТОКИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СИММЕТРИИ, КАК ФИЗИЧЕСКИЕ ТОКИ

В предыдущей главе было показано, насколько важную роль играют группы симметрии в классификации частиц. Выше мы видели, что в теории поля соответствующие симметриям токи (*нётеровские токи*) и заряды удовлетворяют определенным коммутационным соотношениям, которые остаются справедливыми даже при наличии членов, нарушающих симметрию. Другой важный результат теоретико-полевого анализа состоит в том, что токи, соответствующие симметрии, являются в точности теми физическими токами, которые входят в электромагнитное и слабое взаимодействие, т. е. сами нётеровские токи или некоторые их линейные комбинации входят в лагранжиан взаимодействия. Таким образом, алгебра токов, которая воспроизводит симметрии сильных взаимодействий, может быть непосредственно проверена в электромагнитных и слабых взаимодействиях, включающих адроны. Приложения алгебры токов рассматриваются в книгах [8, 106].

Электромагнитные токи

Из физических токов лучше всего изучен электромагнитный ток $J_\lambda^{\text{эм}}(x)$, который связан с фотонным полем $A_\lambda(x)$ в лагранжевой плотности взаимодействия следующим образом:

$$\mathcal{L}^{\text{эм}} = e J_\lambda^{\text{эм}} A^\lambda, \quad (5.68)$$

где заряд e является константой электромагнитного взаимодействия. Мы можем разделить ток на лептонную и адронную части:

$$J_\lambda^{\text{эм}} = J_{l\lambda}^{\text{эм}} + J_{h\lambda}^{\text{эм}}. \quad (5.69)$$

Лептонный ток может быть выражен непосредственно через заряженные лептонные поля

$$J_{l\lambda}^{\text{эм}} = -\bar{e}\gamma_\lambda e - \bar{\mu}\gamma_\lambda \mu + \dots, \quad (5.70)$$

где фермионные полевые операторы обозначены символами соответствующих частиц. Поскольку лептоны не испытывают сильных взаимодействий, а электромагнитное взаимодействие можно рассматривать по теории возмущений, мы можем измерять $J_{l\lambda}^{\text{эм}}$ непосредственно в физических процессах. В этом отношении адронный электромагнитный ток $J_{h\lambda}^{\text{эм}}$ сильно отличается от лептонного. Адронный ток нельзя записать прямо в терминах адронных полей, таких, как π , K , N и т. д., поскольку последние не являются элементарными составляющими. Хотя нам известно выражение для $J_{h\lambda}^{\text{эм}}$ через кварковые поля

$$J_{h\lambda}^{\text{эм}} = \frac{2}{3} \bar{u}\gamma_\lambda u - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma_\lambda d - \frac{1}{3} \bar{s}\gamma_\lambda s + \dots, \quad (5.71)$$

его нельзя использовать так, как используется лептонный ток. У нас нет выражения для адронной волновой функции в терминах кварковых полей. Кварки участвуют в сильном взаимодействии, которое должно быть учтено во всех порядках. Пока мы не можем этого сделать, и нам приходится при изучении структуры матричных элементов этого тока основываться на экспериментальных измерениях. С другой стороны, электромагнитный ток является также током, соответствующим симметрии. Он сохраняется во всех известных взаимодействиях. Оператор адронного заряда

$$Q_h^{\text{эм}} = \int J_0^{\text{эм}} d^3x \quad (5.72)$$

удовлетворяет соотношению Гелл-Манна -- Нишиджимы (см. разд. 4.4)

$$Q_h^{\text{эм}} = T_3 + \frac{Y}{2}.$$

Это означает, что аналогичное соотношение справедливо для соответствующих токов:

$$J_{h\lambda}^{\text{эм}} = J_{\lambda}^3 + \frac{1}{2} J_{\lambda}^Y. \quad (5.73)$$

В кварковой модели данному соотношению отвечает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} J_{h0}^{\text{эм}} &= \frac{2}{3} u^{\dagger} u - \frac{1}{3} d^{\dagger} d - \frac{1}{3} s^{\dagger} s + \dots = \\ &= \frac{1}{2} (u^{\dagger} u - d^{\dagger} d) + \frac{1}{6} (u^{\dagger} u + d^{\dagger} d - 2s^{\dagger} s) + \dots = J_0^3 + \frac{1}{2} J_0^Y. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Слабые токи

В теории слабых взаимодействий роль токов аналогична той роли, которую играет ток $J_{\lambda}^{\text{эм}}$ в электромагнитном взаимодействии. Мы увидим (ср. гл. 11), что эти два взаимодействия «объединяются» в современных калибровочных теориях и что слабый и электромагнитный токи являются членами одного мультиплетта, следовательно, они действительно имеют аналогичный теоретический статус. В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением только *заряженного* слабого тока, т. е. той части J_{λ} , которая не рождает ни одно из новых квантовых чисел («чарм», «боттом» и т. д.). Аналогично (5.68) он взаимодействует с заряженным промежуточным векторным бозонным (ПВБ) полем W_{λ} следующим образом:

$$\mathcal{L}^W = g J_{\lambda} W^{\lambda} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (5.75)$$

где g — константа взаимодействия. Мы получаем отсюда при низких энергиях эффективный лагранжиан взаимодействия типа ток — ток:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = - \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{\lambda}^{\dagger} J^{\lambda} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (5.76)$$

где $g^2/M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$, поскольку пропагатор массивного ПВБ дает массовый множитель M_W^2 в знаменателе. Здесь величина $G_F \approx 10^{-5}$ — константа Ферми, измеренная в обратных квадратах массы протона. Слабый ток также можно разделить на лептонную и адронную части

$$J^{\lambda} = J_l^{\lambda} + J_h^{\lambda}; \quad (5.77)$$

здесь

$$J_l^{\lambda} = \bar{\nu}_e \gamma^{\lambda} (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_{\mu} \gamma^{\lambda} (1 - \gamma_5) \mu + \dots, \quad (5.78)$$

где $\nu_e(x)$ и $\nu_{\mu}(x)$ — операторы нейтринных полей. Адронный ток можно записать в $V - A$ -виде:

$$\begin{aligned} J_h^{\lambda} &= [(V_1^{\lambda} + iV_2^{\lambda}) - (A_1^{\lambda} + iA_2^{\lambda})] \cos \theta_c + \\ &+ [(V_4^{\lambda} + iV_5^{\lambda}) - (A_4^{\lambda} + iA_5^{\lambda})] \sin \theta_c, \end{aligned} \quad (5.79)$$

где $\theta_c \approx 0,25$ — угол Кабиббо [64]. Нижние индексы у операторов вектора и аксиального вектора соответствуют ароматическому $SU(3)$ -октету. Различные правила отбора и соотношения симметрии, вытекающие из $SU(3)$ - и $SU(2)$ -трансформационных свойств адронных токов, хорошо проверены в полупептонных слабых процессах. Например, сохраняющий странность векторный ток $V_1^\lambda + iV_2^\lambda$ и сопряженный ему ток $V_1^\lambda - iV_2^\lambda$ являются партнерами изовекторного электромагнитного тока в изоспиновом триплете. Соответствующие заряды являются генераторами изоспиновой подгруппы $SU(2)$ группы $SU(3)$. Эти изоспиновые токи приближенно сохраняются. Данную схему принято называть гипотезой о *сохранении векторного тока* (СВТ) [139]. Таким образом, зная матричные элементы электромагнитного тока (формфакторы), мы можем, используя изоспиновые вращения, вычислить значение формфакторов, соответствующих слабому векторному току, сохраняющему странность. Аналогично можно получить слабые формфакторы, соответствующие векторным токам, изменяющим странность. Для этого следует учесть, что все рассматриваемые векторные токи принадлежат одному и тому же $SU(3)$ -октету и т. д. Кроме этого постулировано [162], что эти векторные и аксиально-векторные токи удовлетворяют $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -алгебре:

$$\begin{aligned} [V_a^0(\mathbf{x}, t), V_b^0(\mathbf{y}, t)] &= if_{abc} V_c^0(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V_a^0(\mathbf{x}, t), A_b^0(\mathbf{y}, t)] &= if_{abc} A_c^0(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [A_a^0(\mathbf{x}, t), A_b^0(\mathbf{y}, t)] &= if_{abc} V_c^0(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Отметим, что эти соотношения, в левые части которых токи входят квадратично, а в правые — линейно, приводят к нелинейным связям между токами. Тем самым данные нелинейные соотношения коммутации фиксируют условия нормировки для токов.

Блестящим успехом кварковой модели адронов было успешное и простое объяснение всех указанных выше свойств симметрии слабого адронного тока. Подобно лептонному току (5.78), адронный слабый ток в (5.79) может быть записан непосредственно в терминах кварковых полей:

$$J_h^\lambda = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) d \cos \theta_c + \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) s \sin \theta_c, \quad (5.81)$$

и, как мы видели в разд. 5.1, алгебра (5.80) $SU(3)_L \times SU(3)_R$ также выполняется в свободной кварковой модели. Ключевой проблемой остается, конечно, построение полной теории взаимодействий кварков, в которой сильное взаимодействие естественным образом обладает приближенной глобальной киральной симметрией $SU(3)_L \times SU(3)_R$.

Алгебра токов и правило сумм

В качестве иллюстрации того, какого рода результаты могут быть получены из алгебры токов (5.80), выведем правило сумм Адлера для рассеяния нейтрино [4].

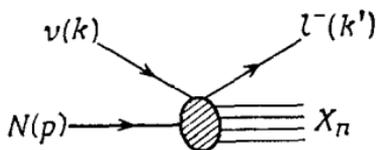


Рис. 5.1.

Рассмотрим (рис. 5.1) рассеяние нейтрино на нуклонной мишени, в которой рождается заряженный лептон l^- и некоторое адронное состояние X_n (n частиц с общим импульсом p_n):

$$\nu(k) + N(p) \rightarrow l^-(k') + X(p_n). \quad (5.82)$$

Определим

$$\begin{aligned} q &= k - k', \\ \nu &= p \cdot q/M, \end{aligned} \quad (5.83)$$

где M — масса нуклона. В лабораторной системе

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0), \quad k_\mu = (E, \mathbf{k}), \quad k'_\mu = (E', \mathbf{k}')$$

мы имеем

$$\begin{aligned} q^2 &= -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \nu &= E - E', \end{aligned} \quad (5.84)$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}' , а энергия велика настолько, что мы можем положить приближенно массу заряженного лептона m_l равной нулю. С учетом (5.76) и (5.78) амплитуду этого процесса можно записать в виде

$$T_n^{(\nu)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_l(k', \lambda') \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u_\nu(k, \lambda) \langle n | J_h^\lambda | p, \sigma \rangle. \quad (5.85)$$

Дифференциальное сечение рассеяния без учета поляризации выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} d\sigma_n^{(\nu)} &= \frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{1}{2M} \frac{1}{2E} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \right] \times \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{\sigma \lambda \lambda'} |T_n^{(\nu)}|^2 (2\pi)^4 \delta(k + p - k' - p_n), \end{aligned} \quad (5.86)$$

где σ , λ и λ' спиновые индексы нуклона, начального и конечного лептона соответственно и

$$p_n = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Суммируя по всем возможным адронным конечным состояниям, получаем *инклюзивное сечение рассеяния*:

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu)}}{d|q^2|dv} = \frac{G_F^2}{32\pi E^2} l^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^{(\nu)}. \quad (5.87)$$

Входящие в это выражение лептонный тензор $l^{\alpha\beta}$ и адронный тензор $W_{\alpha\beta}^{(\nu)}$ имеют следующий вид:

$$l_{\alpha\beta} = \text{tr} [(\hat{k}') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\hat{k}) \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = \\ = 8(k_\alpha k'_\beta + k'_\alpha k_\beta - k \cdot k' g_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k'^\gamma k^\delta), \quad (5.88)$$

$$W_{\alpha\beta}^{(\nu)}(p, q) = \frac{1}{4M} \sum_\sigma \sum_n \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \right] \times \\ \times \langle p, \sigma | J_{h\beta}^+(0) | n \rangle \langle n | J_{h\alpha}(0) | p, \sigma \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p_n - p - q) = \\ = \frac{1}{4M} \sum_\sigma \int \frac{d^4 y}{2\pi} \langle p, \sigma | J_{h\beta}^+(y) J_{h\alpha}(0) | p, \sigma \rangle e^{iq \cdot y}. \quad (5.89)$$

Отметим, что величина $W_{\alpha\beta}^{(\nu)}$ отлична от нуля только при $q_0 = E - E' > 0$. Поскольку это тензор второго ранга, зависящий только от импульсов p и q , его можно записать в виде

$$W_{\alpha\beta}^{(\nu)} = -W_1^{(\nu)} g_{\alpha\beta} + W_2^{(\nu)} p_\alpha p_\beta / M^2 - iW_3^{(\nu)} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\gamma q^\delta / M^2 + W_4^{(\nu)} q_\alpha q_\beta / M^2 + \\ + W_5^{(\nu)} (p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) / M^2 + iW_6^{(\nu)} (p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha) / M^2, \quad (5.90)$$

где $W_i^{(\nu)}$ — лоренц-инвариантные функции q^2 и ν (см. (5.84)), которые называют *структурными функциями*. Сечение рассеяния в (5.87) принимает вид

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu)}}{d|q^2|dv} = \frac{G_F^2}{2\pi} \left(\frac{E'}{E} \right) \left[2W_1^{(\nu)} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + W_2^{(\nu)} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{(E + E')}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3^{(\nu)} \right]. \quad (5.91)$$

В пределе $m_l = 0$ величины $W_{4,5,6}^{(\nu)}$ не дают вклада.

Аналогично для рассеяния антинейтрино

$$\bar{\nu} + N \rightarrow l^+ + X \quad (5.92)$$

имеем

$$\frac{d^2\sigma^{(\bar{\nu})}}{d|q^2|dv} = \frac{G_F^2}{2\pi} \left(\frac{E'}{E} \right) \left[2W_1^{(\bar{\nu})} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + W_2^{(\bar{\nu})} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{E + E'}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3^{(\bar{\nu})} \right], \quad (5.93)$$

где структурные функции $W_i^{(\bar{v})}$ задаются формулой

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{(\bar{v})}(p, q) &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 y}{2\pi} e^{iq \cdot y} \langle p, \sigma | J_{h\beta}(y) J_{h\alpha}^{\dagger}(0) | p, \sigma \rangle = \\ &= -W_1^{(\bar{v})} g_{\alpha\beta} + W_2^{(\bar{v})} p_{\alpha} p_{\beta} / M^2 - iW_3^{(\bar{v})} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\gamma} q^{\delta} / M^2 + W_4^{(\bar{v})} q_{\alpha} q_{\beta} / M^2 + \\ &+ W_5^{(\bar{v})} (p_{\alpha} q_{\beta} + p_{\beta} q_{\alpha}) / M^2 + iW_6^{(\bar{v})} (p_{\alpha} q_{\beta} - p_{\beta} q_{\alpha}) / M^2. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Эти величины также отличны от нуля лишь при $q_0 > 0$. Мы можем несколько видоизменить (5.94), используя трансляционную инвариантность:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{(\bar{v})}(p, q) &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 y}{2\pi} e^{iq \cdot y} \langle p, \sigma | J_{h\beta}(0) J_{h\alpha}^{\dagger}(-y) | p, \sigma \rangle = \\ &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 y}{2\pi} e^{-iq \cdot y} \langle p, \sigma | J_{h\beta}(0) J_{h\alpha}^{\dagger}(y) | p, \sigma \rangle. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Рассмотрим теперь тензор $W_{\alpha\beta}$, определяемый равенством

$$W_{\alpha\beta}(p, q) = \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 y}{2\pi} e^{iq \cdot y} \langle p, \sigma | [J_{h\beta}^{\dagger}(y), J_{h\alpha}(0)] | p, \sigma \rangle. \quad (5.96)$$

Сравнивая это выражение с (5.89) и (5.95), будем иметь

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} &= W_{\alpha\beta}^{(\bar{v})}(p, q) \quad \text{при } q_0 > 0, \\ &= -W_{\alpha\beta}^{(\bar{v})}(p, -q) \quad \text{при } q_0 < 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Чтобы вывести правило сумм, проинтегрируем величину W_{00} по q_0 :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W_{00}(p, q) dq_0 &= \int_0^{\infty} (W_{00}^{(\bar{v})}(p, q) - W_{00}^{(\bar{v})}(p, q)) dq_0 = \\ &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int d^3 y e^{-iq \cdot y} \langle p, \sigma | [J_{h0}^{\dagger}(y, 0), J_{h0}(0)] | p, \sigma \rangle. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Коммутатор при равных временах можно вычислить, используя алгебру токов (5.80). Наиболее просто это можно сделать, используя тот факт, что указанные соотношения коммутации выполняются также в свободной кварковой модели, в которой ток задается выражением (5.81). Используя канонические антикоммутационные соотношения

$$\{q_i^{\dagger}(y, 0), q_j(0)\} = \delta^3(y) \delta_{ij}, \quad (5.99)$$

где индексы i, j относятся как к матричному пространству Дирака, так и пространству ароматов (5.38), мы получаем

$$\begin{aligned}
 [J_{h0}^{\dagger}(\mathbf{y}, 0), J_{h0}(0)] &= [(\cos \theta_c d^{\dagger}(\mathbf{y}, 0) + \sin \theta_c s^{\dagger}(\mathbf{y}, 0)) \times \\
 &\quad \times (1 - \gamma_5) u(\mathbf{y}, 0) u^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) (\cos \theta_c d(0) + \sin \theta_c s(0))] = \\
 &= 2(\cos \theta_c d^{\dagger}(\mathbf{y}, 0) + \sin \theta_c s^{\dagger}(\mathbf{y}, 0)) (1 - \gamma_5) \{u(\mathbf{y}, 0), u^{\dagger}(0)\} \times \\
 &\quad \times (\cos \theta_c d(0) + \sin \theta_c s(0)) - 2u^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) (\cos^2 \theta_c \{d^{\dagger}(\mathbf{y}, 0), d(0)\} + \\
 &\quad + \sin^2 \theta_c \{s^{\dagger}(\mathbf{y}, 0), s(0)\}) u(\mathbf{y}, 0) = 2\delta^3(\mathbf{y}) (\cos^2 \theta_c d^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) d(0) + \\
 &\quad + \sin^2 \theta_c s^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) s(0) + \sin \theta_c \cos \theta_c (d^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) s(0) + \\
 &\quad + s^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) d(0)) - u^{\dagger}(0) (1 - \gamma_5) u(0)) = \\
 &\quad = -\delta^3(\mathbf{y}) [4 \cos^2 \theta_c (V_0^3(0) - A_0^3(0)) + \\
 &\quad + \sin^2 \theta_c (3(V_0^Y(0) - A_0^Y(0)) + 2(V_0^3(0) - A_0^3(0))) + \\
 &\quad + 4 \sin \theta_c \cos \theta_c (V_0^6(0) - A_0^6(0))], \quad (5.100)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 V_0^Y &= (u^{\dagger}u + d^{\dagger}d - 2s^{\dagger}s)/3, & A_0^Y &= (u^{\dagger}\gamma_5 u + d^{\dagger}\gamma_5 d - 2s^{\dagger}\gamma_5 s)/3, \\
 V_0^3 &= (u^{\dagger}u - d^{\dagger}d)/2, & A_0^3 &= (u^{\dagger}\gamma_5 u - d^{\dagger}\gamma_5 d)/2, \\
 V_0^6 &= (d^{\dagger}s + s^{\dagger}d)/2, & A_0^6 &= (d^{\dagger}\gamma_5 s + s^{\dagger}\gamma_5 d)/2.
 \end{aligned} \quad (5.101)$$

Поскольку операторы V_0^6 и A_0^6 изменяют странность, их матричные элементы между нуклонными состояниями равны нулю. Усредняя также по спину нуклона, мы имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | A_0^i | p, \sigma \rangle = 0 \quad \text{при всех } i. \quad (5.102)$$

В результате соотношение (5.98) принимает вид

$$\int_0^{\infty} [W_{00}^{(v)}(p, q) - W_{00}^{(\bar{v})}(p, q)] dq_0 = -\frac{p_0}{M} [4T_3 \cos^2 \theta_c + (3Y + 2T_3) \sin^2 \theta_c], \quad (5.103)$$

где T_3 и Y обозначают изоспин и гиперзаряд нуклонного состояния:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | V_0^3 | p, \sigma \rangle &= 2T_3 p_0, \\
 \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle p, \sigma | V_0^Y | p, \sigma \rangle &= 2Y p_0.
 \end{aligned} \quad (5.104)$$

Выразим левую часть соотношения (5.103) через структурные функции:

$$\int_0^{\infty} W_{00}^{(\nu)} dq_0 = \int [-W_1^{(\nu)} + W_2^{(\nu)} (p_0/M)^2 + W_4^{(\nu)} (q_0/M)^2 + W_5^{(\nu)} (p_0 q_0/M^2)] dq_0. \quad (5.105)$$

Его можно упростить, выбрав подходящую систему отсчета. Рассмотрим вместо системы покоя нуклона систему бесконечного импульса [148], в которой нуклон имеет бесконечный импульс, ортогональный к \mathbf{q} :

$$|\mathbf{p}| \rightarrow \infty \quad \text{при условии} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (5.106)$$

В этой системе имеем

$$\begin{aligned} p_0 &= (\mathbf{p}^2 + M^2)^{1/2} \approx |\mathbf{p}| \rightarrow \infty, \\ \nu &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}/M = p_0 q_0/M, \\ q^2 &= q_0^2 - \mathbf{q}^2 = (\nu M/p_0)^2 - \mathbf{q}^2 \rightarrow -\mathbf{q}^2. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Наибольшим членом в правой части соотношения (5.105) оказывается $W_2^{(\nu)}$:

$$\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} W_{00}^{(\nu)} dq_0 = \frac{p_0}{M} \int_0^{\infty} d\nu W_2^{(\nu)}(q^2, \nu), \quad (5.108)$$

причем мы предположили, что можно поменять порядок интегрирования и перехода к пределу. В итоге правило сумм (5.103) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [W_2^{(\nu)}(q^2, \nu) - W_2^{(\nu)}(q^2, \nu)] d\nu &= 4T_3 \cos^2 \theta_c + (3Y + 2T_3) \sin^2 \theta_c = \\ &= \begin{cases} 2 \cos^2 \theta_c + 4 \sin^2 \theta_c & \text{для протонной мишени,} \\ -2 \cos^2 \theta_c + 2 \sin^2 \theta_c & \text{для нейтронной мишени.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.109)$$

Это *правило сумм Адлера* для рассеяния нейтрино, вытекающее из алгебры токов. Несмотря на то что оно выведено в системе бесконечного импульса, окончательный результат, выраженный через лоренцевы инварианты, справедлив в произвольной системе отсчета. Замечательное свойство данного правила сумм состоит в том, что зависимость левой части от q^2 исчезает в результате интегрирования по ν . Это правило сумм можно использовать для любой мишени с соответствующими T_3 и Y . Обобщение на другие аддитивные ароматические квантовые числа (кроме странности) можно провести непосредственно.

5.3. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ. ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА

Алгебра $SU(3)_L \times SU(3)_R$ (5.80), генерируемая различными физическими токами, наводит на мысль, что гамильтониан сильных взаимодействий H имеет вид

$$H = H_0 + \lambda H_1, \quad (5.110)$$

где оператор H_0 — инвариантен относительно $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -преобразований, а H_1 неинвариантен. В пределе $\lambda = 0$ все генераторы киральной алгебры сохраняются. Мы должны были бы ожидать, что частицы образуют вырожденные мультиплеты, соответствующие неприводимым представлениям группы $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Например, октету псевдоскалярных мезонов должен был бы сопутствовать октет скалярных мезонов, а $J^P = (1/2)^+$ -барионы должны были бы иметь партнеров с противоположными четностями. Однако в действительности нет никаких указаний на существование такой более широкой мультиплетной структуры. Это приводит нас к идее о том, что $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрия спонтанно нарушена и что эта симметрия гамильтониана H_0 не реализуется в спектрах частиц.

Неинвариантность основного состояния как условие нарушения симметрии

Пусть U — элемент группы симметрии, относительно которой гамильтониан H_0 инвариантен. Тогда выполняется равенство

$$UH_0U^\dagger = H_0 \quad (5.111)$$

и существует связь между состояниями, образующими неприводимое представление (базис) группы

$$U|A\rangle = |B\rangle. \quad (5.112)$$

Непосредственно из (5.111) и (5.112) следует соотношение

$$E_A = \langle A|H_0|A\rangle = \langle B|H_0|B\rangle = E_B. \quad (5.113)$$

Таким образом, симметрия гамильтониана H_0 проявляется в вырождении собственных состояний оператора энергии, соответствующих неприводимым представлениям группы симметрии. Однако соотношения (5.112) и, следовательно, (5.113) неявно опираются на предположение об инвариантности основного состояния. В самом деле, поскольку состояния $|A\rangle$ и $|B\rangle$ должны быть связаны с основным состоянием $|0\rangle$ с помощью соответствующих операторов рождения

$$|A\rangle = \phi_A|0\rangle, \quad |B\rangle = \phi_B|0\rangle, \quad (5.114)$$

причем

$$U\phi_AU^\dagger = \phi_B, \quad (5.115)$$

то соотношение (5.112) справедливо, только если

$$U|0\rangle = |0\rangle. \quad (5.116)$$

Если условие (5.116) не выполняется, то нарушается соотношение (5.113), а вместе с ним и вывод о симметрии вырожденных уровней энергии. Такое положение обычно называют *спонтанным нарушением симметрии*. Следует подчеркнуть, однако, что хотя симметрия не проявляется явно в вырождении уровней энергии, однако соотношения симметрии, вытекающие из того факта, что гамильтониан или лагранжиан по-прежнему инвариантны относительно преобразований симметрии, продолжают оставаться справедливыми.

Ферромагнетизм как пример спонтанного нарушения симметрии

Отсутствие вырождения в спектре частиц в симметричной теории может показаться неожиданным, однако имеется ряд известных ситуаций, когда основное состояние не является симметричным. Широко известный случай такой ситуации — это ферромагнетизм вблизи температуры Кюри T_C . При $T > T_C$ все диполи ориентированы случайным образом, основное состояние ротационно-инвариантно. При $T < T_C$ все диполи выстроены вдоль некоторого произвольного направления (спонтанная намагниченность) и ротационная симметрия скрыта. Рассмотрим, как описывается это явление теорией Гинзбурга — Ландау [184]. Предположим, что вблизи точки Кюри намагниченность \mathbf{M} мала, можно произвести разложение плотности свободной энергии в степенной ряд и пренебречь высшими степенями \mathbf{M} :

$$u(\mathbf{M}) = (\partial_i \mathbf{M})^2 + V(\mathbf{M}), \quad (5.117)$$

где

$$V(\mathbf{M}) = \alpha_1(T)(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) + \alpha_2(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})^2. \quad (5.118)$$

Плотности энергии u и V , очевидно, инвариантны относительно вращений. Мы предположили также, что поле меняется медленно, и удержали в разложении только первые производные. Член $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})^2$ с положительным коэффициентом $\alpha_2 > 0$ включен в (5.118), поскольку в точке Кюри величина α_1 обращается в нуль:

$$\alpha_1 = \alpha(T - T_C) \quad \text{при } \alpha > 0.$$

Поскольку член $(\partial_i \mathbf{M})^2$ неотрицателен, мы получаем намагниченность в основном состоянии, просто минимизируя $V(\mathbf{M})$:

$$\delta V / \delta M_i = 0, \quad (5.119)$$

или

$$\mathbf{M}(\alpha_1 + 2\alpha_2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) = 0.$$

При $T > T_c$ (т. е. $\alpha_1 > 0$) решение имеет вид $\mathbf{M} = 0$. При $T < T_c$ (т. е. $\alpha_1 < 0$) решение $\mathbf{M} = 0$ является локальным максимумом, минимизация дает величину намагниченности (*параметр порядка*), равную

$$|\mathbf{M}| = (-\alpha_1/2\alpha_2)^{1/2}. \quad (5.120)$$

Однако теория не определяет направление вектора намагниченности. Основное состояние, в котором \mathbf{M} имеет определенное направление, является членом бесконечно вырожденного набора состояний. Это состояние фиксируется граничным условием и не инвариантно относительно вращений. Для температур ниже точки Кюри ротационная симметрия магнетика спонтанно нарушена. Таким образом, условием, нарушающим симметрию, является неинвариантность вакуума (основного состояния):

$$U|0\rangle \neq |0\rangle. \quad (5.121)$$

Если $U = \exp(i\varepsilon^a Q^a)$, где ε^a — непрерывный групповой параметр, то (5.121) равносильно тому, что заряд, отвечающий симметрии, не уничтожает вакуум:

$$Q^a|0\rangle \neq 0. \quad (5.122)$$

Утверждение, эквивалентное (5.121) и (5.122), состоит в том, что определенные полевые операторы имеют отличное от нуля вакуумное среднее

$$\langle 0 | \phi_j | 0 \rangle \neq 0. \quad (5.123)$$

В этом можно легко убедиться, поскольку преобразование симметрии вида (5.115) или (5.10) можно выразить с помощью генераторов в виде

$$[Q^a, \phi_i] = it_{ij}^a \phi_j, \quad (5.124)$$

где t_{ij}^a соответствующая матрица представления. Таким образом, (5.122) означает, что по крайней мере некоторые из матричных элементов $\langle 0 | \phi_j | 0 \rangle$ отличны от нуля. Отметим также, что вследствие трансляционной инвариантности вакуумного состояния данные матричные элементы не зависят от точки пространства-времени:

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle. \quad (5.125)$$

Теорема Голдстоуна

Спонтанное нарушение симметрии связано с существованием безмассовых бесспиновых частиц. Изучение этой связи было начато Намбу [298, 302, 303]. В дальнейшем доказательства на различных уровнях строгости и общности были даны Голдстоуном [194] и другими авторами [195]. Такие скалярные частицы

называют бозонами Намбу — Голдстоуна или бозонами Голдстоуна. Мы приведем формальное доказательство теоремы Голдстоуна [207] и сопроводим его рядом иллюстрирующих примеров.

Согласно теореме Нётер, любая непрерывная симметрия лагранжиана приводит к существованию сохраняющегося тока:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (5.126)$$

При обычных условиях из этого уравнения следует закон сохранения заряда $dQ(t)/dt = 0$, где $Q(t) = \int d^3x J_0(\mathbf{x}, t)$. Но при спонтанном нарушении симметрии (5.123) величина $Q(t)$ не является хорошо определенной, поскольку полевой оператор в подынтегральном выражении недостаточно быстро убывает на бесконечности. Даже слабый предел, соответствующий матричному элементу $\langle 0 | Q^2(t) | 0 \rangle$, не существует. Трансляционная инвариантность вакуума приводит к выражению

$$\langle 0 | Q^2(t) | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | J_0(0) Q(0) | 0 \rangle,$$

которое расходится, поскольку подынтегральное выражение отлично от нуля и не зависит от \mathbf{x} . Тот факт, что величина Q не существует, на самом деле роли не играет, поскольку в реальных расчетах фигурируют лишь коммутаторы с Q . Для преобразования произвольного полевого оператора $\phi(x)$ мы имеем

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\epsilon Q} \phi(x) e^{-i\epsilon Q} = \phi(x) + i\epsilon [Q, \phi(x)] + \dots$$

Мы предположим здесь, что коммутатор существует, и проведем доказательство, опираясь только на его свойства. Из закона сохранения тока (5.126) следует

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x [\partial^\mu J_\mu(\mathbf{x}, t), \phi(0)] = \\ &= \partial^0 \int d^3x [J^0(\mathbf{x}, t), \phi(0)] + \int d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{x}, t), \phi(0)]. \end{aligned}$$

Для достаточно большой поверхности, т. е. для больших пространственноподобных расстояний, второй член в правой части обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} [Q(t), \phi(0)] = 0. \quad (5.127)$$

Если этот коммутатор, представляющий собой комбинацию полей, имеет отличное от нуля вакуумное среднее

$$\langle 0 | [Q(t), \phi(0)] | 0 \rangle \equiv \eta \neq 0, \quad (5.128)$$

то мы говорим, что симметрия спонтанно нарушена. Вставляя полную систему промежуточных состояний и используя опера-

тор трансляций, мы можем записать (5.128) в виде

$$\sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_n) \{ \langle 0 | J_0(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | J_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t} \} = \eta. \quad (5.129)$$

Правая часть этого выражения отлична от нуля и не зависит от времени вследствие (5.128) и (5.127). Поскольку части, соответствующие положительным и отрицательным частотам, не сокращают друг друга, равенство (5.129) может выполняться только в том случае, если существует промежуточное состояние, для которого

$$E_n = 0 \quad \text{при } \mathbf{p}_n = 0.$$

Таким образом, это — безмассовое состояние (голдстоуновский бозон). Эта частица обладает следующим свойством:

$$\langle n | \phi(0) | 0 \rangle \neq 0, \quad \langle 0 | J_0(0) | n \rangle \neq 0. \quad (5.130)$$

Данное состояние может быть связано с вакуумом с помощью тока $J_0(0)$ или оператора $\phi(0)$. Настоящая теорема справедлива независимо от теории возмущений. Мы проиллюстрируем ее на ряде примеров.

Случай дискретной симметрии

Мы не предполагаем, что голдстоуновские бозоны присутствуют в случае дискретной симметрии. Наша цель — привести пример ситуации, при которой может иметь место условие нарушения симметрии (5.123). Лагранжева плотность, задаваемая выражением

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (5.131)$$

обладает дискретной симметрией

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi. \quad (5.132)$$

Поскольку величина $\partial_0 \phi$ является импульсом, сопряженным полю ϕ , гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4.$$

Таким образом, классический потенциал (плотность энергии) можно отождествить с выражением

$$u(\phi) = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi),$$

где

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4. \quad (5.133)$$

Так как член $(\nabla\phi)^2$ неотрицателен, в точке минимума величины $u(\phi)$ выполняется равенство $\nabla\phi=0$, где ϕ — постоянное значение поля, соответствующее минимуму выражения для $V(\phi)$. Поскольку константа связи λ положительна (так что энергия ограничена снизу), имеется два возможных случая

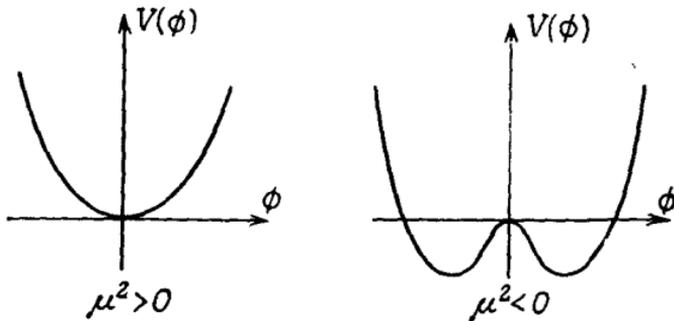


Рис. 5.2. Эффективные потенциалы, соответствующие разным знакам квадратичного члена.

$\mu^2 > 0$ и $\mu^2 < 0$, которые показаны на рис. 5.2. При $\mu^2 < 0$ поле, отвечающее основному состоянию, не равно нулю:

$$\phi = \pm (-\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (5.134)$$

На языке теории квантованных полей основное состояние является вакуумом, и классические поля, отвечающие основному состоянию в (5.134), соответствуют вакуумному среднему (ВС) оператора ϕ :

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v,$$

где

$$v = \pm (-\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (5.135)$$

Два возможных значения в (5.135) соответствуют двум возможным вакуумам. Чтобы построить теорию, следует выбрать один из них (и только один). При любом выборе, скажем $v = +(-\mu^2/\lambda)^{1/2}$, очевидно нарушается первоначальная симметрия теории относительно отражений $\phi \rightarrow -\phi$. (Поскольку пространства Фока, построенные исходя из двух возможных вакуумов, ортогональны друг другу, не имеет смысла строить теорию, основанную на какой-либо суперпозиции двух вакуумов.) Итак, мы получили условие нарушения симметрии.

Поскольку симметрия в данном случае дискретная, мы не предполагаем, что существуют безмассовые голдстоуновские бозоны. Чтобы убедиться в этом, надо рассмотреть небольшие осцилляции около истинного вакуума. Таким образом, мы определяем новое квантованное поле с нулевым ВС. В терминах этого «сдвинутого поля»

$$\phi' = \phi - v \quad (5.136)$$

лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \phi')^2 - (-\mu^2) \phi'^2 - \lambda v \phi'^3 - \frac{\lambda}{4} \phi'^4, \quad (5.137)$$

где ϕ' описывает частицу с массой $(-2\mu^2)^{1/2}$.

Случай абелевой симметрии

Лагранжиан, определяемый выражением

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \pi)^2 - V(\sigma^2 + \pi^2), \quad (5.138)$$

где

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2, \quad (5.139)$$

обладает (непрерывной) симметрией $U(1)$, или $O(2)$:

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (5.140)$$

Экстремум потенциала V определяется условиями

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta \sigma} &= \sigma [-\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)] = 0, \\ \frac{\delta V}{\delta \pi} &= \pi [-\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)] = 0. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Для $\mu^2 > 0$ минимум достигается при

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2, \quad (5.142)$$

где

$$v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (5.143)$$

Потенциал представлен графически на рис. 5.3. Минимумам со-

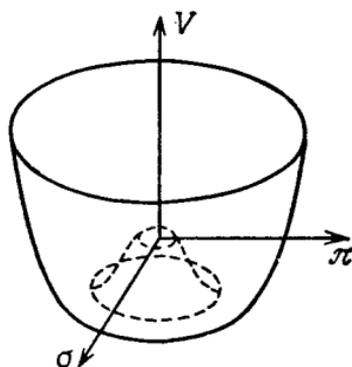


Рис. 5.3. Потенциал (5.139) в случае $\mu^2 > 0$.

ответствуют точки, лежащие на окружности радиуса v в плоскости (σ, π) . Эти точки связаны друг с другом посредством

$O(2)$ -вращений. Следовательно, все эти точки эквивалентны, и существует бесконечное число вырожденных вакуумов. Любая точка на указанной окружности может быть выбрана в качестве истинного вакуума. Мы можем выбрать, например, точку

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = v, \quad \langle 0 | \pi | 0 \rangle = 0. \quad (5.144)$$

При этом $O(2)$ -симметрия нарушена вакуумным состоянием.

Чтобы найти спектр частиц в теории возмущений, рассмотрим небольшие осцилляции около истинного минимума и определим сдвинутое поле

$$\sigma' = \sigma - v. \quad (5.145)$$

Лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\lambda \sigma')^2 + (\partial_\lambda \pi)^2] - \mu^2 \sigma'^2 - \lambda v \sigma' (\sigma'^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma'^2 + \pi^2)^2. \quad (5.146)$$

Здесь отсутствует член, квадратичный по π -полю, а перед членом, квадратичным по σ' -полю, стоит правильный знак. Следовательно, π является безмассовым голдстоуновским бозоном, а σ' — частицей с массой $(2\mu^2)^{1/2}$. В действительности это можно увидеть на рис. 5.3. Малые осцилляции около любой точки, расположенной на окружности, на которой достигается минимум, могут быть разложены на радиальную компоненту и компоненту, отвечающую полярному углу. Полярные осцилляции происходят вдоль эквипотенциальной траектории, и им не соответствует какая-либо энергия, поэтому их следует сопоставить безмассовой частице. При нашем выборе вакуума (5.144) полярные осцилляции происходят вдоль направления π , т. е. π оказывается голдстоуновским бозоном.

Изучим также эти свойства более формально с помощью теоремы Голдстоуна и проследим связь с доказательством соотношений (5.128) и (5.130). Сохраняющийся ток, отвечающий $U(1)$ -симметрии (5.140), дается выражением

$$J_\lambda(x) = [(\partial_\lambda \pi) \sigma - (\partial_\lambda \sigma) \pi], \quad (5.147)$$

а соответствующий заряд имеет вид

$$Q = \int J_0(x) d^3x = \int [(\partial_0 \pi) \sigma - (\partial_0 \sigma) \pi] d^3x. \quad (5.148)$$

Из канонических коммутационных соотношений

$$[\partial_0 \pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.149a)$$

$$[\partial_0 \sigma(\mathbf{x}, t), \sigma(\mathbf{y}, t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.149b)$$

можно получить следующие выражения для коммутаторов:

$$[Q, \pi(0)] = -i\sigma(0), \quad (5.150a)$$

$$[Q, \sigma(0)] = i\pi(0). \quad (5.150b)$$

Согласно формальному доказательству (см. (5.128)—(5.130)) теоремы Голдстоуна, из условия нарушения симметрии (5.144) следует существование безмассовой частицы. При этом для квантов π -поля выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \langle \pi | \pi(0) | 0 \rangle &\neq 0, \\ \langle 0 | J_0(0) | \pi \rangle &\neq 0. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Чтобы убедиться явно в справедливости неравенств (1.151), заметим, что выражение (5.129) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_n) \{ \langle 0 | J_0(0) | n \rangle \langle n | \pi(0) | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \\ - \langle 0 | \pi(0) | n \rangle \langle n | J_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t} \} = -iv. \end{aligned} \quad (5.152)$$

В левой части этого равенства отличный от нуля вклад дает только безмассовое π -состояние: $|n\rangle = |\pi\rangle$. Таким образом, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 p}{2p_0} \delta^3(\mathbf{p}) \{ \langle 0 | J_0(0) | \pi(p) \rangle \langle \pi(p) | \pi(0) | 0 \rangle - \\ - \langle 0 | \pi(0) | \pi(p) \rangle \langle \pi(p) | J_0(0) | 0 \rangle \} = -iv, \end{aligned} \quad (5.153)$$

которое выполняется при

$$\langle 0 | J_0(0) | \pi(p) \rangle = ivp_0, \quad (5.154)$$

если принято условие нормировки $\langle 0 | \pi(0) | \pi(p) \rangle = 1$. Отметим, что из условия ковариантности вытекает требование

$$\langle 0 | J_\mu(0) | \pi(p) \rangle = ivp_\mu. \quad (5.155)$$

Следовательно, матричный элемент дивергенции тока имеет вид

$$\langle 0 | \partial^\mu J_\mu(0) | \pi(p) \rangle = vm_\pi^2, \quad (5.156)$$

и из сохранения тока следует, что либо

$$v = \langle 0 | \sigma(0) | 0 \rangle = 0, \quad (5.157)$$

либо

$$m_\pi = 0. \quad (5.158)$$

Тем самым в данном примере отличное от нуля значение вакуумного среднего $v = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle$ связано с константой распада пиона (см. формулу (5.178)).

Случай неабелевой симметрии: σ -модель с $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрией

Рассмотрим теорию [165, 326, 354], в которую входят следующие поля: изотриплет пионов $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, изоскалярное σ -поле и изодублет нуклонов $N = (p, n)$. Лагранжиан, имею-

щий вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi)^2] + \bar{N} i \gamma^\mu \partial_\mu N + g \bar{N} (\sigma + i \tau \cdot \pi \gamma_5) N - V(\sigma^2 + \pi^2), \quad (5.159)$$

где

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2, \quad (5.160)$$

инвариантен относительно преобразований группы $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = \sigma, \\ \pi &\rightarrow \pi' + \alpha \times \pi, \\ N &\rightarrow N' + i\alpha \cdot \frac{\tau}{2} N \end{aligned} \quad (5.161)$$

при $\alpha_i \ll 1$. Сохраняющийся ток дается выражением

$$J_\mu^a = \bar{N} \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} N + \epsilon^{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c, \quad \text{где } a = 1, 2, 3. \quad (5.162)$$

Генераторы группы $SU(2)$ имеют вид

$$Q^a = \int J_0^a(x) d^3x. \quad (5.163)$$

Лагранжиан (5.159) инвариантен также относительно аксиальных $SU(2)$ -преобразований:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma' = \sigma + \beta \cdot \pi, \\ \pi &\rightarrow \pi' = \pi - \beta \sigma, \\ N &\rightarrow N' = N + i\beta \cdot \frac{\tau}{2} \gamma_5 N, \end{aligned} \quad (5.164)$$

которым соответствует сохраняющийся ток

$$A_\mu^a = \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} N + (\partial_\mu \sigma) \pi^a - (\partial_\mu \pi^a) \sigma \quad (5.165)$$

и генераторы

$$Q^{5a} = \int A_0^a(x) d^3x. \quad (5.166)$$

Заряды (5.163) и (5.166) задают алгебру $SU(2)_L \times SU(2)_R$:

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= i\epsilon^{abc} Q^c, \\ [Q^a, Q^{5b}] &= i\epsilon^{abc} Q^{5c}, \\ [Q^{5a}, Q^{5b}] &= i\epsilon^{abc} Q^c. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Спонтанное нарушение симметрии имеет место при $\mu^2 > 0$, а минимум потенциала достигается при

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2, \quad \text{где } v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (5.168)$$

Мы можем выбрать $\langle 0|\pi|0\rangle = 0$ и

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = v. \quad (5.169)$$

Если определить сдвинутое поле как $\sigma' = \sigma - v$, то легко видеть из выражения для $V(\sigma^2 + \pi^2)$, что π -частицы являются безмассовыми голдстоуновскими бозонами. Следуя процедуре, наметенной в предыдущем примере, мы можем получить выражения для коммутаторов, например

$$[Q^{5a}, \pi^b] = -i\sigma\delta^{ab}. \quad (5.170)$$

При этом выбор (5.169) означает, что аксиальные заряды Q^{5a} не аннигилируют вакуум; в действительности

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|\pi^a\rangle \neq 0. \quad (5.171)$$

Таким образом, симметрия $SU(2)_L \times SU(2)_R$ спонтанно нарушена и сужена до $SU(2)$ -симметрии, генерируемой зарядами Q^a (5.163), поскольку

$$Q^a|0\rangle = 0 \text{ при } a = 1, 2, 3. \quad (5.172)$$

Отметим, что в исходном лагранжиане (5.159) отсутствует ну-клонный массовый член $m_N \bar{N}N$, так как он неинвариантен относительно аксиального преобразования (5.164). Однако из кирально-симметричной связи Юкавы $g\bar{N}(\sigma + i\tau \cdot \pi\gamma_5)N$ в результате спонтанного нарушения симметрии возникает массовый член нуклона

$$g\bar{N}(\sigma + i\tau \cdot \pi\gamma_5)N \rightarrow gv\bar{N}N + g\bar{N}(\sigma' + i\tau \cdot \pi\gamma_5)N, \quad (5.173)$$

где изодублетная масса нуклона равна

$$m_N = gv. \quad (5.174)$$

Мезонные массы равны $m_\sigma = \sqrt{2} \mu$ (изоскалярная) и $m_\pi = 0$ (изотриплетная). Таким образом, симметрия лагранжиана $SU(2)_L \times SU(2)_R$ не реализуется в спектре частиц, в котором отражена только $SU(2)$ -симметрия. В случае $\mu^2 < 0$ симметрия не была бы скрытой: σ и π вырождены по массе и образуют неприводимое представление $(2, 2)$ группы $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

5.4. ЧАСТИЧНОЕ СОХРАНЕНИЕ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОГО ТОКА И ТЕОРЕМЫ О МЯГКИХ ПИОНАХ

Симметрия лагранжиана всегда отражается в алгебре токов. Но при спонтанном нарушении симметрии спектр частиц реализует только ту часть симметрии, которой также обладает и основное состояние. Так, в $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -алгебре электромагнитных и слабых токов (разд. 5.2) мы хотим, чтобы при спонтанном нарушении симметрии вакуум был только $SU(3)$ -

инвариантным. Тогда из теоремы Голдстоуна следует, что должно существовать восемь безмассовых псевдоскалярных мезонов, ассоциированных со спонтанно нарушенными аксиальными зарядами Q^{5a} , $a = 1, \dots, 8$. Очевидно, что в действительности таких безмассовых частиц не существует, а имеется восемь относительно легких мезонов π , K и η . Мы заключаем отсюда, что ароматическая $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрия должна быть также явно нарушена, причем это нарушение киральной симметрии должно сказываться на массах 0-мезонов [104]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}', \quad (5.175a)$$

где гамильтониан \mathcal{H}_0 инвариантен относительно $SU(3)_L \times SU(3)_R$, а \mathcal{H}' неинвариантен. Изотриплет пионов намного легче, чем K - и η -мезоны. Это наводит на мысль разбить далее гамильтониан, нарушающий симметрию, на две части:

$$\lambda \mathcal{H}' = \lambda_1 \mathcal{H}_1 + \lambda_2 \mathcal{H}_2, \quad (5.175b)$$

где гамильтониан \mathcal{H}_1 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -инвариантен и $\lambda_1 \gg \lambda_2$. Таким образом, $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрия выполняется гораздо лучше, чем $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрия. Примером может служить свободная кварковая модель, в которой киральная симметрия нарушена явно кварковым массовым членом (5.43) при $m_s \gg m_u, m_d$, и мы полагаем $\lambda_1 \mathcal{H}_1 = m_s \bar{s}s$ и $\lambda_2 \mathcal{H}_2 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$. Таким образом, мы считаем, что массы пионов пропорциональны массам нестранных кварков, а массы каонов и η -мезона пропорциональны массе странного кварка (более подробно об этом сказано в следующем разделе). В данном разделе мы выведем ряд теорем о мягких пионах, которые справедливы в пределе, когда выполняется киральная симметрия ($\lambda_2 = 0$) и пионы считаются безмассовыми частицами. В следующем разделе будут рассмотрены теоремы о мягких мезонах, чувствительные к структуре члена $\lambda_1 \mathcal{H}_1 + \lambda_2 \mathcal{H}_2$, нарушающего симметрию.

Частичное сохранение аксиально-векторного тока

Как показывают рассуждения, приведенные в разд. 5.3, существует прямая связь голдстоуновских бозонов $\pi^a(x)$ с нарушенными аксиальными зарядами Q^{5a} и токами A_μ^a (см. (5.171)):

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = i f^{ab} p_\mu, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (5.176)$$

где f^{ab} — некоторая константа, не равная нулю. Если предположить, что изоспиновая $SU(2)$ -симметрия не нарушена, эту константу можно записать в виде

$$f^{ab} = f_\pi \delta^{ab}, \quad (5.177)$$

где f_π — постоянная распада пиона, измеряемая в процессе $\pi^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$. Из эксперимента имеем $f_\pi \approx 93$ МэВ. Беря дивергенцию аксиально-векторного тока, получаем

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = \delta^{ab} f_\pi m_\pi^2. \quad (5.178)$$

Таким образом, если в выражении (5.175б) параметр $\lambda_2 = 0$, то гамильтониан строго симметричен относительно $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -преобразований и

$$\partial^\mu A_\mu^a = 0, \quad (5.179)$$

откуда следует, что в выражении (5.178) $m_\pi^2 = 0$ в соответствии с требованием теоремы Голдстоуна. Но в случае, когда симметрия явно нарушена ($\lambda_2 \neq 0$), мы можем переписать (5.178) в виде

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = f_\pi m_\pi^2 \langle 0 | \phi^a(0) | \pi^b(p) \rangle, \quad (5.180)$$

где ϕ^a — оператор пионного поля, удовлетворяющий условию нормировки

$$\langle 0 | \phi^a(0) | \pi^b(p) \rangle = \delta^{ab}.$$

Предположение о том, что справедливо более общее операторное соотношение

$$\partial^\mu A_\mu^a = f_\pi m_\pi^2 \phi^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (5.181)$$

известно как гипотеза о частичном сохранении аксиально-векторного тока (ЧСАТ) [85, 165, 298]. Может показаться, что данное соотношение, связывающее слабые токи A_μ^a с сильно взаимодействующими пионными полями ϕ^a , должно иметь множество экспериментальных следствий. Но на практике, как это видно из приведенного ниже примера, чтобы получить из гипотезы ЧСАТ соотношения, связывающие между собой физически измеримые величины, приходится делать дополнительные предположения.

Низкоэнергетические теоремы в случае одного мягкого пиона

1. Соотношение Голдбергера — Треймана. Рассмотрим измеряемый в нейтронном β -распаде матричный элемент слабого аксиально-векторного тока между нуклонными состояниями $\langle p(k') | A_\mu^1 + iA_\mu^2 | n(k) \rangle$. Из лоренц-ковариантности следует соотношение

$$\begin{aligned} \langle p(k') | A_\mu^1 + iA_\mu^2 | n(k) \rangle &= \\ &= \bar{u}_p(k') [\gamma_\mu \gamma_5 g_A(q^2) + q_\mu \gamma_5 h_A(q^2)] u_n(k), \end{aligned} \quad (5.182)$$

где $q = k - k'$ — передача импульса между n и p . Формфакторы g_A и h_A являются функциями инвариантной переменной q^2 . Экс-

перимент дает $g_A(0) \approx 1,26$. Матричный элемент дивергенции тока имеет вид

$$\langle p(k') | \partial^\mu (A_\mu^1 + iA_\mu^2) | n(k) \rangle = \\ = i\bar{u}_p(k') \gamma_5 u_n(k) [2m_N g_A(q^2) + q^2 h_A(q^2)], \quad (5.183)$$

где m_N — масса нуклона. Гипотеза ЧСАТ (5.181) при

$$\phi_\pi^+ = (\phi^1 + i\phi^2)/\sqrt{2} \quad (5.184)$$

дает

$$\langle p(k') | \partial^\mu (A_\mu^1 + iA_\mu^2) | n(k) \rangle = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \langle p(k') | \phi_\pi^+ | n(k) \rangle = \\ = \frac{2f_\pi m_\pi^2}{-q^2 + m_\pi^2} g_{\pi NN}(q^2) i\bar{u}_p(k') \gamma_5 u_n(k), \quad (5.185)$$

где $g_{\pi NN}(q^2)$ — вершинная функция, отвечающая πNN -взаимодействию. Физическая пион-нуклонная константа связи $g_{\pi NN}$ определяется как

$$g_{\pi NN} = g_{\pi NN}(m_\pi^2), \quad (5.186)$$

причем из эксперимента следует значение $g_{\pi NN}/4\pi \approx 14,6$. Сравнивая (5.185) с (5.183), имеем

$$\frac{2f_\pi m_\pi^2}{-q^2 + m_\pi^2} g_{\pi NN}(q^2) = 2m_N g_A(q^2) + q^2 h_A(q^2). \quad (5.187)$$

Полагая в этом соотношении $q^2 = 0$, получаем

$$f_\pi g_{\pi NN}(0) = m_N g_A(0). \quad (5.188)$$

Это соотношение связывает аксиально-векторную константу связи нуклона $g_A(0)$ с πNN -вершинной функцией $g_{\pi NN}(0)$ в точке, лежащей вне массовой поверхности. Чтобы превратить это соотношение в физическое, необходимо дополнительно предположить, что при переходе из точки $q^2 = 0$ в точку $q^2 = m_\pi^2$ изменение величины $g_{\pi NN}(q^2)$ мало, т. е. что $g_{\pi NN}(q^2)$ — «гладкая» функция:

$$g_{\pi NN}(0) \approx g_{\pi NN}(m_\pi^2) = g_{\pi NN}. \quad (5.189)$$

Только в этом случае мы получаем соотношение Голдбергера — Треймана [192]

$$f_\pi g_{\pi NN} = m_N g_A(0), \quad (5.190)$$

которое выполняется с точностью до 10 % для приведенных выше данных измерений.

Следует заметить, что только формфактор $h_A(q^2)$ имеет пионный полюсный член, соответствующий диаграмме, показанной на рис. 5.4:

$$\text{пионный полюс } h_A(q^2) = \frac{\sqrt{2} f_\pi}{m_\pi^2 - q^2} \sqrt{2} g_{\pi NN}(q^2). \quad (5.191)$$

На массовой поверхности пиона $q^2 = m_\pi^2$ соотношение (5.187) приводит к тривиальному тождеству

$$2f_\pi m_\pi^2 g_{\pi NN}(m_\pi^2) = 2f_\pi m_\pi^2 g_{\pi NN}(m_\pi^2).$$

Как показывает этот пример, чтобы из гипотезы ЧСАТ получить соотношения, связывающие физические величины, необходимо дополнительное предположение о гладкости функции

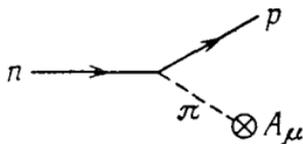


Рис. 5.4.

$g_{\pi NN}(q^2)$. В частности, мы должны экстраполировать пионное поле из точки, лежащей вне массовой поверхности $q^2 = 0$, на массовую поверхность $q^2 = m_\pi^2$. Мы полагаем, что эта экстраполяция вносит лишь небольшую погрешность, поскольку масса пиона m_π^2 мала по сравнению с массами адронов. Соотношение Голдбергера — Треймана (5.190) служит масштабом точности, типичной для экстраполяций такого рода. Это означает, что если гипотезу ЧСАТ распространить на другие псевдоскалярные мезоны, т. е. на K - и η -мезоны, то экстраполяция должна быть произведена в гораздо более широкой кинематической области (от 0 до m_K^2 или m_η^2). Поэтому соотношения, вытекающие из ЧСАТ для каонов и η -мезона, не должны быть столь же хорошими, как для пионов.

Можно также вывести соотношение Голдбергера — Треймана в пределе киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии ($\lambda_2 = 0$ в (5.175)). В этом симметричном пределе токи сохраняются:

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \quad (5.192)$$

в силу чего (5.183) дает

$$2m_N g_A(q^2) + q^2 h_A(q^2) = 0, \quad (5.193)$$

причем пионы являются безмассовыми голдстоуновскими бозонами. Следовательно, полюсный член в $h_A(q^2)$ имеет особенность при $q^2 = 0$. Из (5.191) мы имеем соотношение

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} h_A(q^2) = \frac{-2f_\pi g_{\pi NN}(0)}{q^2}, \quad (5.194)$$

подставляя которое в (5.193), вновь получаем (5.190). Таким образом, отклонение от соотношения Голдбергера — Треймана является мерой гамильтониана $\lambda_2 \mathcal{H}_2$, нарушающего симметрию. Аналогично отклонение от соотношений, вытекающих из ЧСАТ для каонов и η -мезона, которое должно быть более значитель-

ным, является мерой гамильтониана $\lambda_1 \mathcal{H}_1 + \lambda_2 \mathcal{H}_2$, нарушающего киральную $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрию.

2. *Условие согласованности Адлера для амплитуды πN -рассеяния.* Рассмотрим амплитуду пион-нуклонного рассеяния

$$\langle \pi^a(q_2) N(p_2) | \pi^b(q_1) N(p_1) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) T_{\pi N}^{ab}, \quad (5.195)$$

для которой имеется инвариантное разложение вида

$$T_{\pi N}^{ab} = \bar{u}(p_2) \left[A^{ab} + \gamma \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{2} B^{ab} \right] u(p_1).$$

Инвариантные амплитуды A и B являются функциями обычных переменных Мандельштама s и t или более симметричных переменных:

$$v \equiv q_1 \cdot (p_1 + p_2)/2 = q_2 \cdot (p_1 + p_2)/2, \quad v_B \equiv -q_1 \cdot q_2/2.$$

Заметим, что $v \rightarrow 0$ и $v_B \rightarrow 0$, если какой-либо из пионов становится мягким, т. е. $q_1 \rightarrow 0$ или $q_2 \rightarrow 0$. Легко получить выражение для полюсного члена, т. е. однонуклонного вклада в инвариантные амплитуды. Можно показать, что комбинация инвариантных амплитуд (совпадающая с амплитудой рассеяния вперед при $q_1^2 = q_2^2$)

$$T = A + v_B \quad (5.196)$$

является несингулярной при $q_1 \rightarrow 0$ и (или) $q_2 \rightarrow 0$. Кроме того, справедливо разложение на четные и нечетные по изоспину амплитуды:

$$A^{ab} = \delta^{ab} A^{(+)} + \frac{1}{2} [\tau^a, \tau^b] A^{(-)}$$

и аналогичные разложения для $B^{(\pm)}$ и $T^{(\pm)}$.

Чтобы вывести теорему в случае одного мягкого пиона, используем в (5.195) стандартную редукционную формулу (см., например, [50]) для одного пионного полевого оператора:

$$\begin{aligned} T_{\pi N}^{ab} &= i(-q_2^2 + m_\pi^2) \langle N(p_2) | \phi^a(0) | \pi^b(q_1) N(p_1) \rangle = \\ &= \frac{q_2^\mu (-q_2^2 + m_\pi^2)}{i_\pi m_\pi^2} \langle N(p_2) | A_\mu^a(0) | \pi^b(q_1) N(p_1) \rangle, \end{aligned} \quad (5.197)$$

где использовано соотношение ЧСАТ (5.181). При переходе к пределу $q_2 \rightarrow 0$ несингулярная часть амплитуды (5.196) $T(v, v_B, q_1^2, q_2^2)$ обращается в нуль:

$$T^{(+)}(0, 0, m_\pi^2, 0) = 0. \quad (5.198a)$$

Это условие согласованности Адлера в рамках ЧСАТ [2]. Равенство нулю амплитуды $T^{(-)}$ в этом пределе является тривиальным, поскольку она нечетна по отношению к перекрестной

симметрии и должна быть пропорциональна переменной v . При переходе к пределу $q_1 \rightarrow 0$ получаем аналогичное соотношение

$$T^{(+)}(0, 0, 0, m_\pi^2) = 0. \quad (5.198б)$$

Низкоэнергетические теоремы в случае двух мягких пионов

Низкоэнергетические теоремы для матричных элементов, содержащих более одного тока, можно вывести, используя ЧСАТ и алгебру токов. При этом физические соображения и математические методы аналогичны тем, которые используются в хорошо известных теоремах о мягких пионах (см., например, [282]), отражающих калибровочную $U(1)$ -инвариантность, соответствующую закону сохранения заряда.

Рассмотрим двойную дивергенцию хронологически упорядоченного произведения двух аксиальных токов:

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \partial_y^\lambda T(A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y)) &= \partial_x^\mu \partial_y^\lambda (\theta(x_0 - y_0) A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y) + \\ &+ \theta(y_0 - x_0) A_\lambda^b(y) A_\mu^a(x)) = \\ &= \partial_x^\mu (\theta(x_0 - y_0) A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(y) + \theta(y_0 - x_0) \partial^\lambda A_\lambda^b(y) A^{a\mu}(x) - \\ &- \delta(x_0 - y_0) A_\mu^a(x) A_0^b(y) + \delta(y_0 - x_0) A_0^b(y) A_\mu^a(x)) = \\ &= T(\partial^\mu A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(y)) + \delta(x_0 - y_0) [A_0^a(x), \partial^\lambda A_\lambda^b(y)] - \\ &- \partial_x^\mu \delta(x_0 - y_0) [A_\mu^a(x), A_0^b(y)]. \quad (5.199) \end{aligned}$$

Беря матричный элемент этого тождества между нуклонными состояниями и производя преобразование Фурье

$$\int d^4x d^4y e^{iq_1x} e^{-iq_2y},$$

получаем

$$\begin{aligned} q_1^\mu q_2^\lambda \int d^4x e^{iq_1 \cdot x} \langle N(p_2) | T(A_\mu^a(x) A_\lambda^b(0)) | N(p_1) \rangle = \\ = \int d^4x e^{iq_1 \cdot x} \{ \langle N(p_2) | T(\partial^\mu A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(0)) | N(p_1) \rangle - \\ - iq_1^\mu \langle N(p_2) | \delta(x_0) [A_0^b(0), A_\mu^a(x)] | N(p_1) \rangle + \\ + \langle N(p_2) | \delta(x_0) [A_0^a(x), \partial^\lambda A_\lambda^b(0)] | N(p_1) \rangle \}, \quad (5.200) \end{aligned}$$

где мы воспользовались трансляционной инвариантностью и выделили множитель $(2\pi)^4 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)$. Данное соотношение, связывающее матричные элементы токов и матричные элементы дивергенций, является примером *тождеств Уорда*. Оно служит отправным пунктом при выводе низкоэнергетических теорем. Вопрос о существовании тождеств Уорда в высших порядках теории возмущений рассмотрен в разд. 6.1 и 6.2.

ЧСАТ означает, что первый член в правой части соотношения (5.200) является матричным элементом (между нуклонными состояниями) хронологического произведения двух пионных операторов, т. е. амплитудой πN -рассеяния. Второй член можно вычислить с помощью соотношений $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -алгебры токов (см. (5.80)):

$$\delta(x_0) [A_0^b(0), A_\mu^a(x)] = -i\delta(x) \epsilon^{abc} V_\mu^c(x). \quad (5.201)$$

В принципе в этом коммутаторе следует учитывать также вклад швингеровского члена. Оказывается, однако, что определенное в (5.199) хронологическое произведение нековариантно из-за наличия сингулярностей в произведении $T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(y))$ при $x_0 \rightarrow y_0$ и, чтобы сделать его ковариантным, необходимо добавить еще один член. Этот дополнительный член взаимно сократится с швингеровским членом в коммутаторе (5.201) (см., например, [8]). Таким образом, при выводе тождеств Уорда нет необходимости учитывать вклад швингеровского члена.

Третий член в правой части соотношения (5.200) является одновременным коммутатором тока и дивергенции. Этот коммутатор, называемый σ -членом, не подчиняется алгебре токов и зависит от гамильтониана (5.1756), нарушающего симметрию. В рассматриваемых ниже приложениях мы будем в конечном итоге переходить к пределу $p_1 \rightarrow p_2 \equiv p$, $q_1 \rightarrow q_2 \equiv q \rightarrow 0$. Можно показать из общих соображений, что в такой кинематической ситуации σ -член симметричен по индексам a и b . Для этого запишем

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \sigma_N^{ab}(p, q) &= \sigma_N^{ab} = \\ &= i \int d^4x \delta(x_0) \langle N(p) | [A_0^a(\mathbf{x}, x_0), \partial^\lambda A_\lambda^b(0, x_0)] | N(p) \rangle. \end{aligned} \quad (5.202)$$

Учитывая трансляционную инвариантность и производя замену переменных $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, мы можем записать выражение (5.202) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_N^{ab} &= i \int d^3x \langle N(p) | [A_0^a(0, x_0), \partial^\lambda A_\lambda^b(\mathbf{x}, x_0)] | N(p) \rangle = \\ &= i \int d^3x \langle N(p) | [A_0^a(\mathbf{x}, x_0), \partial^0 A_0^b(0, x_0)] | N(p) \rangle, \end{aligned} \quad (5.203)$$

где мы использовали тот факт, что пространственная часть дивергенции обращается в нуль при интегрировании по всему пространству. Далее имеем

$$\begin{aligned} \sigma_N^{ab} &= i\partial_0 \int d^3x \langle N(p) | [A_0^a(\mathbf{x}, x_0), A_0^b(0, x_0)] | N(p) \rangle - \\ &- i \int d^3x \langle N(p) | [\partial_0 A_0^a(\mathbf{x}, x_0), A_0^b(0, x_0)] | N(p) \rangle, \end{aligned} \quad (5.204)$$

или

$$\sigma_N^{ab} - \sigma_N^{ba} = i\partial_0 \int d^3x \langle N(p) | [A_0^a(\mathbf{x}, x_0), A_0^b(0, x_0)] | N(p) \rangle.$$

Коммутатор в правой части после интегрирования дает значение некоторого изоспинового заряда, который не зависит от времени, если мы пренебрегаем эффектами нарушения изоспиновой симметрии. Таким образом, получаем

$$\sigma_N^{ab} = \sigma_N^{ba}. \quad (5.205)$$

Из соотношения (5.203) видно также, что σ -член, будучи пропорциональным величине $\partial^\lambda A_\lambda$, описывает эффекты, связанные с нарушением киральной симметрии.

Соотношение Адлера — Вайсбергера. Чтобы вывести низкоэнергетические теоремы для амплитуд πN -рассеяния с двумя мягкими пионами, воспользуемся редуцированной формулой для обоих пионов в (5.195) и применим формулу ЧСАТ (5.181). В результате получим

$$\begin{aligned} T_{\pi N}^{ab} &= i \int d^4x e^{iq_1x} (q_1^2 - m_\pi^2) (q_2^2 - m_\pi^2) \times \\ &\times \langle N(p_2) | T(\phi^a(x) \phi^b(0)) | N(p_1) \rangle = i (q_1^2 - m_\pi^2) (q_2^2 - m_\pi^2) m_\pi^{-4} f_\pi^{-2} \times \\ &\times \int d^4x e^{iq_1x} \langle N(p_2) | T(\partial^\mu A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(0)) | N(p_1) \rangle. \end{aligned} \quad (5.206)$$

Аналогично рассмотрим амплитуду, отвечающую слабому аксиально-векторному току:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) T_{\mu\lambda}^{ab} &= \\ = \int d^4x d^4y e^{iq_1x} e^{-iq_2y} \langle N(p_2) | T(A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y)) | N(p_1) \rangle. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Амплитуды (5.206) и (5.207) связаны тождеством Уорда (5.200). Для рассеяния вперед $p_1 = p_2 \equiv p$, $q_1 = q_2 \equiv q$, и мы получаем соотношение

$$q^\mu q^\lambda T_{\mu\lambda}^{ab} = -i (q^2 - m_\pi^2)^{-2} m_\pi^4 f_\pi^2 T_{\pi N}^{ab} + iv [\tau^a, \tau^b]/2 - i\sigma_N^{ab}(p, q), \quad (5.208)$$

где мы воспользовались определениями (5.206), (5.207) и (5.202). С помощью коммутационного соотношения (5.201) преобразуем второй член в выражении (5.200) к виду

$$\begin{aligned} &-iq^\mu \int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | \delta(x_0) [A_0^b(0), A_\mu^a(x)] | N(p) \rangle = \\ &= \varepsilon^{abc} q^\mu \bar{u}(p) \gamma_\mu \tau^c u(p)/2 = 2p \cdot q \varepsilon^{abc} \tau^c/2 = -iv [\tau^a, \tau^b]/2. \end{aligned} \quad (5.209)$$

Как показано выше, σ -член симметричен по индексам a, b . Поскольку изоспин пиона равен 1, симметричное по изоспину состояние в t -канале должно обладать изоспином 0 или 2. Поскольку изоспин нуклона равен $1/2$, вклад может давать только состояние с изоспином 0. Таким образом, имеем

$$\sigma^{ab} = \delta^{ab} \sigma_N. \quad (5.210)$$

Левая часть соотношения (5.208) весьма сложна, поскольку она содержит вклады всех возможных промежуточных состояний,

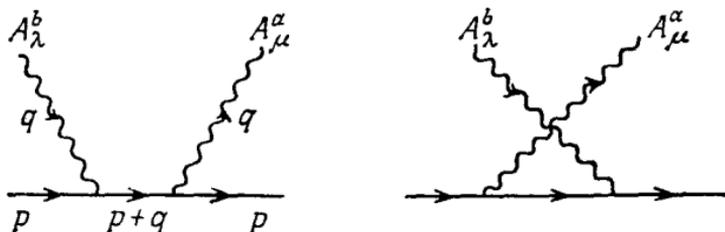


Рис. 5.5.

которые могут быть связаны с нуклоном через аксиально-векторные токи. Положение можно упростить, перейдя к низкоэнергетическому пределу $q_\mu \rightarrow 0$. При этом в амплитуде $T_{\mu\lambda}^{ab}$ останутся лишь члены, сингулярные в этом пределе. Легко видеть, что такие члены соответствуют однонуклонным полюсным диаграммам, показанным на рис. 5.5:

$$(q^\mu q^\lambda T_{\mu\lambda}^{ab})_{\text{полюс}} = 2ig_A^2 \{[\tau^b, \tau^a]v - \delta^{ab} q^2\} (v^2 - m_N^2 q^2) / (q^4 - 4v^2), \quad (5.211)$$

где g_A — величина, определенная в (5.182). Поскольку $q^2 \ll v = p \cdot q$, при малых q имеем

$$(q^\mu q^\lambda T_{\mu\lambda}^{ab})_{\text{полюс}} \approx ig_A^2 v [\tau^a, \tau^b] / 2. \quad (5.212)$$

Таким образом, в низкоэнергетическом пределе тождество Уорда (5.208) принимает вид

$$ig_A^2 v [\tau^a, \tau^b] / 2 = -if_\pi^2 T_{\pi N}^{ab} + iv [\tau^a, \tau^b] / 2 - i\delta^{ab} \sigma_N. \quad (5.213)$$

Амплитуда рассеяния вперед $T_{\pi N}$ является комбинацией вида $A + vB$ (см. (5.196)). Мы имеем следующие теоремы о мягких пионах для нечетной и четной по изоспину амплитуд πN -рассеяния $T^{(\pm)}(v, v_B, q_1^2, q_2^2)$:

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^{-1} T^{(-)}(v, 0, 0, 0) = (1 - g_A^2) / f_\pi^2, \quad (5.214)$$

$$T^{(+)}(0, 0, 0, 0) = -\sigma_N / f_\pi^2. \quad (5.215)$$

Чтобы связать это с физическими амплитудами ($q_1^2 = q_2^2 = m_\pi^2$), мы можем экстраполировать полученный результат до физического порога (длины рассеяния), расположенного при

$$\nu = \nu_0 = m_\pi m_N, \quad \nu_B = -m_\pi^2/2:$$

$$\nu_0^{-1} T^{(-)}(\nu_0, -m_\pi^2/2, m_\pi^2, m_\pi^2) = f_\pi^{-2} (1 - g_A^2) + O(\lambda_2), \quad (5.216)$$

$$T^{(+)}(\nu_0, -m_\pi^2/2, m_\pi^2, m_\pi^2) = O(\lambda_2), \quad (5.217)$$

где мы использовали тот факт, что величина m_π^2 и σ -член возникают в результате нарушения киральной симметрии и имеют в (5.175б) порядок $O(\lambda_2)$ [399]. В качестве альтернативы можно преобразовать низкоэнергетическую теорему в правило сумм, используя дисперсионные соотношения. Например, поскольку амплитуда $T^{(-)}(\nu, q^2)$ нечетна относительно замены $\nu \rightarrow -\nu$, мы можем написать для величины $\nu^{-1} T^{(-)}(\nu, 0)$ дисперсионное соотношение без вычитаний:

$$\frac{T^{(-)}(\nu, 0)}{\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\text{Im } T^{(-)}(\nu', 0) d\nu'}{\nu'^2 - \nu^2}. \quad (5.218)$$

Полагая затем $\nu = 0$ и учитывая (5.124), получаем

$$\frac{1 - g_A^2}{f_\pi^2} = \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\text{Im } T^{(-)}(\nu, 0) d\nu}{\nu^2}. \quad (5.219)$$

Мы можем воспользоваться соотношением Голдбергера — Треймана (5.190) и исключить величину f_π :

$$\frac{1}{g_A^2} = 1 + \frac{2m_N^2}{\pi g_{\pi NN}^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\text{Im } T^{(-)}(\nu, 0) d\nu}{\nu^2}. \quad (5.220)$$

Предполагая, что выполнено условие гладкости

$$\text{Im } T^{(-)}(\nu, 0) \approx \text{Im } T^{(-)}(\nu, m_\pi^2),$$

мы можем с помощью оптической теоремы связать амплитуду на массовой поверхности $\text{Im } T^{(-)}(\nu, m_\pi^2)$ с сечением πN -рассеяния:

$$\text{Im } T^{(-)}(\nu, m_\pi^2) = \nu \sigma_{\text{полн}}^{(-)}(\nu) = \nu [\sigma_{\text{полн}}^{\pi^- p}(\nu) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+ p}(\nu)]. \quad (5.221)$$

Правило сумм (5.220) принимает вид

$$\frac{1}{g_A^2} = 1 + \frac{2m_N^2}{\pi g_{\pi NN}^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu [\sigma_{\text{полн}}^{\pi^- p}(\nu) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+ p}(\nu)]}{\nu}. \quad (5.222)$$

Это соотношение Адлера — Вайсбергера [3, 415]. Используя

экспериментальные данные о полных сечениях πp -рассеяния, мы получаем значение слабой аксиальной нуклонной константы связи $g_A \approx 1,24$, что хорошо согласуется с экспериментальным значением $1,259 \pm 0,017$.

Четная по изоспину амплитуда связана с нарушающим киральную симметрию σ -членом, который исследуется в следующем разделе.

5.5. МЕХАНИЗМ НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Теоремы о мягких пионах, такие, как соотношение Голдбергера — Треймана и правило сумм Адлера — Вайсбергера, являются следствиями точной киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии. Они нечувствительны к структуре членов, нарушающих симметрию в (5.175б). С другой стороны, σ -член описывает эффекты, связанные с нарушением киральной симметрии. Рассмотрим этот коммутатор аксиального тока с его дивергенцией, входящий в выражения (5.199) и (5.203), и возьмем его матричный элемент между некоторыми произвольными адронными состояниями с импульсом p :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{ab} &= i \int d^3x \langle \beta(p) | [A_3^a(\mathbf{x}, 0), \partial^0 A_0^b(0)] | \alpha(p) \rangle = \\ &= - \int d^3y \langle \beta(p) | [Q^{5a}, [\mathcal{H}(y, 0), A_0^b(0)]] | \alpha(p) \rangle = \\ &= - \int d^3y \langle \beta(p) | [Q^{5a}, [\mathcal{H}(0), A_0^b(y, 0)]] | \alpha(p) \rangle = \\ &= \langle \beta(p) | [Q^{5a}, [Q^{5b}, \mathcal{H}(0)]] | \alpha(p) \rangle. \end{aligned} \quad (5.223)$$

Таким образом, σ -член является просто двойным коммутатором гамильтониана \mathcal{H} с двумя аксиальными зарядами. Если в \mathcal{H} отсутствует член, нарушающий киральную симметрию, то аксиальные заряды сохраняются. Они коммутируют с гамильтонианом, и σ -коммутатор обращается в нуль. Поэтому мы можем заменить величину \mathcal{H} в (5.223) на член (5.175б), нарушающий киральную симметрию.

Измерение нуклонного и вакуумного σ -членов

Мы уже видели в (5.215), что четная по изоспину амплитуда πN -рассеяния в пределе мягких пионов пропорциональна матричному элементу σ -коммутатора между нуклонными состояниями. Следует соблюдать осторожность, связывая это выражение для $T^{(+)}(0, 0, 0, 0)$ с амплитудой на массовой поверхности $q_1^2 = q_2^2 = m_\pi^2$, поскольку данная экстраполяция включает поправочный член того же порядка, что и сам σ -член. Но можно провести последовательное разложение по степеням параметра λ_2 в (5.175б), отвечающего нарушению $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -сим-

метрии [76]:

$$T^{(+)}(0, 0, m_\pi^2, m_\pi^2) = T^{(+)}(0, 0, 0, 0) + \\ + m_\pi^2 \frac{\partial T^{(+)}}{\partial q_1^2} + m_\pi^2 \frac{\partial T^{(+)}}{\partial q_2^2} + O(m_\pi^4). \quad (5.224)$$

Используя условия согласованности Адлера (5.198), записанные в виде

$$T^{(+)}(0, 0, m_\pi^2, 0) = T^{(+)}(0, 0, 0, 0) + m_\pi^2 \frac{\partial T^{(+)}}{\partial q_1^2} + O(m_\pi^4) = 0,$$

получаем

$$T^{(+)}(0, 0, m_\pi^2, m_\pi^2) = -T^{(+)}(0, 0, 0, 0) + O(m_\pi^4) = \frac{\sigma_N}{f_\pi^2} + O(m_\pi^4). \quad (5.225)$$

В этом разложении по степеням параметра λ_2 (т. е. m_π^2), нарушающего симметрию, мы игнорируем возможные проблемы, связанные с неаналитичностью [270]. Следует заметить, что даже для амплитуды рассеяния на массовой поверхности точка $v = v_B = 0$ все же находится вне физической области. Но значение амплитуды в этой точке может быть надежно экстраполировано от физических значений с помощью обычных дисперсионных соотношений.

До сих пор мы концентрировали внимание на киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии. Обобщение на $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрию производится непосредственно. Соотношение ЧСАТ для октета аксиально-векторных токов имеет вид

$$\partial^\mu A_\mu^a = f_a m_a^2 \phi^a, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (5.226)$$

где ϕ^a — полевые операторы октета псевдоскалярных мезонов. Аналогично предыдущему случаю можно вывести обобщенные соотношения Голдбергера — Треймана и теоремы о мягких мезонах для амплитуд мезон-барионного рассеяния.

Мы можем также получить низкоэнергетические теоремы в пределе мягких мезонов, рассматривая другие матричные элементы токов. В частности, из соотношения (5.226) имеем

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a | P_b(k) \rangle = \delta_{ab} m_a^2 f_a. \quad (5.227)$$

Используя редукционную формулу и ЧСАТ, мы можем записать это равенство в виде

$$\delta_{ab} m_a^2 f_a = \frac{i(m_b^2 - k^2)}{f_b m_b^2} \int d^4 x e^{-ikx} \langle 0 | T(\partial^\mu A_\mu^a(0) \partial^\nu A_\nu^b(x)) | 0 \rangle = \\ = \frac{i(m_b^2 - k^2)}{f_b m_b^2} \left\{ ik_\nu \int d^4 x e^{-ikx} \langle 0 | T(\partial^\mu A_\mu^a(0) A_\nu^b(x)) | 0 \rangle - \right. \\ \left. - \int d^4 x e^{-ikx} \langle 0 | \delta(x_0) [A_0^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)] | 0 \rangle \right\}. \quad (5.228)$$

Следовательно, низкоэнергетическая теорема записывается в виде

$$\delta_{ab} m_{af}^2 = i \int d^4x \langle 0 | \delta(x_0) [A_0^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)] | 0 \rangle = \sigma_0^{ab}, \quad (5.229)$$

где

$$\sigma_0^{ab} = \langle 0 | [Q^{5a}, [Q^{5b}, \mathcal{H}(0)]] | 0 \rangle.$$

Таким образом, массы псевдоскалярных мезонов связаны с вакуумными матричными элементами σ -члена. (Соотношение (5.229) можно получить непосредственно, вычисляя вакуумное среднее для выражения (5.199).)

(3, 3*) + (3*, 3)-теория нарушения киральной симметрии

С помощью соотношений (5.225) и (5.229) мы связали матричные элементы σ -коммутатора между вакуумными и нуклонными состояниями с экспериментально измеримыми величинами. Теперь необходима теория нарушения киральной симметрии. Какова структура члена $\lambda \mathcal{H}'$ в (5.175)?

Простая возможность состоит в том, что киральная симметрия нарушается только кварковым массовым членом:

$$\lambda \mathcal{H}' = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s, \quad (5.230)$$

или

$$\lambda_1 \mathcal{H}_1 = m_s \bar{s}s \text{ и } \lambda_2 \mathcal{H}_2 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d, \quad (5.231)$$

поскольку кварковые поля преобразуются по представлениям

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q \sim (3, 0),$$

$$q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q \sim (0, 3)$$

группы $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Величина $\lambda \mathcal{H}'$, которая записывается в виде $\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L$, преобразуется по представлению $(3, 3^*) + (3^*, 3)$. Это теория нарушения киральной симметрии, предложенная Гелл-Манном, Оуксом и Реннером [168] и Глешоу и Вайнбергом [189]. Пользуясь теоретико-групповым языком, можно записать

$$\lambda \mathcal{H}' = c_0 u_0 + c_3 u_3 + c_8 u_8, \quad (5.232)$$

где u_a — набор скалярных плотностей. В терминах кварковых полей (5.38) и матриц Гелл-Манна их можно представить в виде

$$u_i = \bar{q} \lambda_i q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 8, \quad (5.233)$$

где

$$\lambda_0 = (2/3)^{1/2} \mathbf{1}. \quad (5.234)$$

Аналогично определим псевдоскалярную плотность в виде

$$v_i = -i \bar{q} \lambda_i \gamma_5 q. \quad (5.235)$$

Пользуясь представлениями (5.233) и (5.235) для u_i и v_i и (5.44) и (5.48) для Q^a и Q^{5a} , можно вычислить их коммутаторы, используя канонические антикоммутиационные соотношения для кварковых полей:

$$\{q_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), q_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.236)$$

где α, β обозначают индексы Дирака и ароматические индексы. В качестве примера рассмотрим коммутатор $[Q^{5a}(t), u^b(\mathbf{x}, t)]$. Не выписывая явно пространственно-временную зависимость, имеем выражение

$$\begin{aligned} [\bar{q} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_0 \gamma_5 q, \bar{q} \lambda^b q] &= [q_\alpha^\dagger q_\beta, q_\gamma^\dagger q_\delta] (\lambda^a \gamma_5)_{\alpha\beta} (\lambda^b \gamma^0)_{\gamma\delta} / 2 = \\ &= (-q_\alpha^\dagger q_\gamma^\dagger \{q_\beta, q_\delta\} + q_\alpha^\dagger \{q_\beta, q_\gamma^\dagger\} q_\delta - q_\gamma^\dagger \{q_\alpha^\dagger, q_\delta\} q_\beta + \\ &\quad + \{q_\alpha^\dagger, q_\gamma^\dagger\} q_\beta q_\delta) (\lambda^a \gamma_5)_{\alpha\beta} (\lambda^b \gamma^0)_{\gamma\delta} / 2 = \\ &= q^\dagger [\lambda^a \gamma_5, \lambda^b \gamma^0] q / 2 = -\bar{q} \gamma_5 \{\lambda^a, \lambda^b\} q / 2. \end{aligned} \quad (5.237)$$

Мы можем определить полностью симметричный символ d_{abc} с помощью равенства

$$\left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} = id^{abc} \frac{\lambda^c}{2}. \quad (5.238)$$

Выпишем отличные от нуля элементы:

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = 1/\sqrt{3}, \quad d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\sqrt{3}/2, \quad (5.239)$$

$$d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = 1/2.$$

Добавляя к этим величинам (5.234), а также

$$d_{0ab} = \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{ab}, \quad (5.240)$$

имеем

$$\delta(x_0) [Q_a^5(x_0), u_j(\mathbf{x}, x_0)] = -id_{ajk} v_k(0) \delta^4(x). \quad (5.241a)$$

Аналогично можно получить равенства

$$\delta(x_0) [Q_a^5(x_0), v_j(\mathbf{x}, x_0)] = id_{ajk} u_k(0) \delta^4(x), \quad (5.241б)$$

$$\delta(x_0) [Q_a(x_0), u_j(\mathbf{x}, x_0)] = if_{ajk} u_k(0) \delta^4(x), \quad (5.241в)$$

$$\delta(x_0) [Q_a(x_0), v_j(\mathbf{x}, x_0)] = if_{ajk} v_k(0) \delta^4(x), \quad (5.241г)$$

где $a = 1, 2, \dots, 8$, $j, k = 0, 1, \dots, 8$, а f_{abc} — обычные структурные константы группы $SU(3)$, причем $f_{ab0} \equiv 0$.

На языке модели кварков имеем

$$u_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s),$$

$$u_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s), \quad (5.242)$$

$$u_3 = (\bar{u}u - \bar{d}d).$$

Коэффициенты в (5.232) выражаются через массы кварков следующим образом:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(m_u + m_d + m_s), \\ c_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{m_u + m_d}{2} - m_s \right), \\ c_3 &= \frac{1}{3}(m_u - m_d). \end{aligned} \quad (5.243)$$

Ниже мы всегда будем предполагать сначала, что имеется изоспиновая инвариантность, т. е. $m_u = m_d$ или $c_3 = 0$. Вопрос о нарушении изоспиновой инвариантности вследствие неравенства масс кварков $m_u \neq m_d$ будет рассмотрен в конце настоящего раздела. Оператор $\lambda \mathcal{H}'$ принимает вид

$$\lambda \mathcal{H}' = c_0 u_0 + c_8 u_8. \quad (5.244)$$

Таким образом, нарушение $SU(3)$ -симметрии происходит только благодаря члену $c_8 u_8$.

Массы токовых кварков

Двойной коммутатор, входящий в σ -член, можно вычислить, используя соотношения (5.241а) и (5.241б). В реальных расчетах проще считать операторы $\lambda \mathcal{H}'$ и F_a^5 матрицами 3×3 и вычислять антикоммутатор (5.237) непосредственно. Мы находим (см. (5.229))

$$\begin{aligned} f_\pi^2 m_\pi^2 &= \frac{(m_u + m_d)}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle, \\ f_K^2 m_K^2 &= \frac{(m_u + m_s)}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{s}s | 0 \rangle, \\ f_\eta^2 m_\eta^2 &= \frac{(m_u + m_d)}{6} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle + \frac{4}{3} m_s \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.245)$$

Поскольку $SU(3)$ -симметрия не является спонтанно нарушенной, будем считать, что вакуум $SU(3)$ -симметричен, т. е.

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle \equiv \mu^3. \quad (5.246)$$

Кроме того, из определения констант распада (5.176) и условий спонтанного нарушения киральной симметрии (5.169) и (5.154) следует

$$f_\pi = f_K = f_\eta \equiv f. \quad (5.247)$$

Наряду с массовой формулой Гелл-Манна — Окубо, $4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$, мы получаем также формулу для отношения кварковых масс:

$$\frac{m_u + m_d}{2m_s} = \frac{m_\pi^2}{2m_K^2 - m_\pi^2} \approx \frac{1}{25}. \quad (5.248)$$

Учитывая значения масс псевдоскалярных мезонов, приходим к выводу, что масса странного кварка s много больше масс нестранных кварков u и d . Это означает, что $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрия является гораздо более точной, чем $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрия. В терминах параметров, входящих в (5.244), это выражается в том, что отношение

$$\frac{c_8}{c_0} \approx -1,25 \quad (5.249)$$

не сильно отличается от значения $-\sqrt{2}$, которое дает $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрия.

σ -член для πN -рассеяния

Вычислим σ -член для нарушающего симметрию гамильтониана (5.244) в случае πN -рассеяния в рамках кварковой модели:

$$\sigma_N = \frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle N | \bar{u}u + \bar{d}d | N \rangle. \quad (5.250)$$

Мы не имеем пока надежного теоретического метода вычисления этого матричного элемента. Поскольку предполагается, что содержание странных кварков в нуклоне мало (см. замечание, следующее за соотношением (7.85)), этот матричный элемент можно оценить с помощью правила Цвейга (см. [75]):

$$\langle N | \bar{s}s | N \rangle \approx 0. \quad (5.251)$$

Выражение (5.250) можно записать тогда в виде

$$\begin{aligned} \sigma_N &\approx \frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle N | \bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s | N \rangle = \\ &= \frac{3(m_u + m_d)}{m_u + m_d - 2m_s} \langle N | c_8 u_8 | N \rangle, \end{aligned} \quad (5.252)$$

где использованы соотношения (5.242) и (5.243). Изменение массы нуклона, связанное с частью гамильтониана $c_8 u_8$, нарушающей $SU(3)$ -симметрию,

$$\Delta m_N = \langle N | c_8 u_8 | N \rangle \quad (5.253)$$

можно связать с общим выражением для расщепления масс в барионном октете:

$$\Delta m_B = \langle B | c_8 u_8 | B \rangle = \alpha \operatorname{tr}(\bar{B}u_8 B) + \beta \operatorname{tr}(\bar{B}B u_8). \quad (5.254)$$

В правую часть входит барионный октет и u_8 , записанные в виде матриц 3×3 (см. (4.157)). Присутствие двух членов в правой части отражает тот факт, что в произведение представлений 8×8 октетное представление входит дважды (см. (4.124)); следовательно, в произведение $8 \times 8 \times 8$ входят два $SU(3)$ -ска-

ляра. Выписывая соотношение (5.254) в явном виде, мы можем связать коэффициенты α и β с массами барионов:

$$\begin{aligned} m_N &= m_0 + (\alpha - 2\beta), & m_{\Xi} &= m_0 - (2\alpha - \beta), \\ m_{\Sigma} &= m_0 + (\alpha + \beta), & m_{\Lambda} &= m_0 - (\alpha + \beta), \end{aligned} \quad (5.255)$$

где несущественный общий множитель $\sqrt{3}$ включен в параметры α и β . Мы вновь получаем массовую формулу Гелл-Манна — Окубо (4.166); кроме того, мы можем записать

$$\langle N | c_8 u_8 | N \rangle = (\alpha - 2\beta) = m_{\Lambda} - m_{\Xi}. \quad (5.256)$$

Следовательно, выражение (5.252) принимает вид

$$\sigma_N = \frac{3(m_u + m_d)}{m_u + m_d - 2m_s} (m_{\Lambda} - m_{\Xi}). \quad (5.257)$$

Для отношения (5.248) мы получаем значение $\sigma_N \approx 30 M_{\text{эВ}}$. Очевидно, что данная оценка весьма неточна, но в настоящее время σ -член, отвечающий πN -рассеянию, является одним из немногих объектов, на котором можно с достаточной степенью надежности проверить схему нарушения киральной симметрии.

Случай $m_u \neq m_d$ и нарушение изоспиновой симметрии сильным взаимодействием

В заключение рассмотрим также возможность нарушения изоспиновой симметрии, связанную с неравенством масс $m_u \neq m_d$. Поскольку нам уже известно, что электромагнитное взаимодействие нарушает данную симметрию, мы должны различать эти два независимых механизма нарушения изоспиновой симметрии. Член, нарушающий $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрию, можно записать в виде

$$\lambda \mathcal{H}' = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_\gamma; \quad (5.258)$$

здесь

$$\mathcal{H}_m = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s, \quad (5.259)$$

$$\mathcal{H}_\gamma = e^2 \int d^4x T (J^\mu(x) J^\nu(0)) D_{\mu\nu}(x), \quad (5.260)$$

где $J^\mu(x)$ — оператор электромагнитного тока, $D_{\mu\nu}(x)$ — пропагатор фотона.

Масса псевдоскалярного мезона содержит два вклада; один связан с σ -членом, соответствующим \mathcal{H}_m , а второй — с σ -членом, соответствующим \mathcal{H}_γ . Выражение (5.229) записывается в виде

$$f_a^2 m_a^2 \delta^{ab} = \sigma_{0m}^{ab} + \sigma_{0\gamma}^{ab}, \quad (5.261)$$

где

$$\sigma_{0m}^{ab} = \langle 0 | [Q^{5a}, [Q^{5b}, \mathcal{H}_m]] | 0 \rangle, \quad (5.262)$$

$$\sigma_{0\gamma}^{ab} = \langle 0 | [Q^{5a}, [Q^{5b}, \mathcal{H}_\gamma]] | 0 \rangle. \quad (5.263)$$

Но для электрически нейтрального оператора Q^{5a} имеем

$$[Q^{5a}, \mathcal{H}_Y] = 0. \quad (5.264)$$

Таким образом, [104]

$$\sigma_{0Y}(\pi^0) = \sigma_{0Y}(K^0) = \sigma_{0Y}(\eta^0) = 0. \quad (5.265)$$

Кроме того, из $SU(3)$ -симметрии, точнее из инвариантности по отношению к U -спину, следует

$$\sigma_{0Y}(\pi^+) = \sigma_{0Y}(K^+) \equiv \mu_Y^3. \quad (5.266)$$

Проводя выкладки, полностью аналогичные тем, которые привели нас к соотношениям (5.245), и используя следствия $SU(3)$ -симметрии (5.246) и (5.247), получаем [409]

$$\begin{aligned} f^2 m^2(\pi^+) &= (m_u + m_d) \mu^3 + \mu_Y^3, \\ f^2 m^2(\pi^0) &= (m_u + m_d) \mu^3, \\ f^2 m^2(K^+) &= (m_u + m_s) \mu^3 + \mu_Y^3, \\ f^2 m^2(K^0) &= (m_d + m_s) \mu^3, \\ f^2 m^2(\eta^0) &= \frac{1}{3} (m_u + m_d + 4m_s) \mu^3. \end{aligned} \quad (5.267)$$

Мы получили (улучшенное) соотношение Гелл-Манна — Окубо, а также соотношения

$$\frac{m^2(\pi^0)}{m^2(K^0)} = \frac{m_u + m_d}{m_s + m_d} \quad (5.268)$$

и

$$\frac{m^2(K^+) - m^2(K^0) - m^2(\pi^+)}{m^2(K^0) - m^2(K^+) + m^2(\pi^+) - 2m^2(\pi^0)} = \frac{m_d}{m_u}. \quad (5.269)$$

Наряду с отношением масс кварков (5.248) мы получаем также

$$m_d/m_u \approx 1,8. \quad (5.270)$$

Данное соотношение показывает, что кварки u и d в действительности не являются вырожденными по массе. Это позволяет разрешить ряд существовавших долгое время трудностей в картине изоспиновой инвариантности, нарушенной только электромагнитным взаимодействием: головоломку со знаками разностей масс протон — нейтрон и $K^+ - K^0$, а также проблему распада $\eta \rightarrow 3\pi$. Если рассматривать распад $\eta \rightarrow 3\pi$, не сохраняющий изоспин, как происходящий через виртуальное электромагнитное взаимодействие второго порядка, то непосредственный расчет в рамках алгебры токов показывает, что в пределе киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии этот распад строго запрещен. (Дальнейшее обсуждение этой проблемы см. в разд. 16.3.) Конечно, в течение длительного времени было хорошо известно [141], что эта картина нарушения изоспиновой симметрии приводит к «неверному» знаку разности масс $n - p$.

Кроме того, если единственной причиной нарушения изоспиновой симметрии является электромагнитное взаимодействие, то мы можем получить (с помощью соотношений (5.265) и (5.266)) *правило сумм Дсшена*:

$$m^2(K^+) - m^2(K^0) = m^2(\pi^+) - m^2(\pi^0), \quad (5.271)$$

что вновь приводит к неверному знаку для разности масс $K^+ - K^0$. Однако из соотношения (5.270) следует, что в действительности имеется существенное нарушение изоспиновой симметрии, источником которого служит само сильное взаимодействие.

Если m_u и m_d так сильно отличаются друг от друга, то как объяснить незначительность наблюдаемого нарушения изоспиновой симметрии? Это возможно, если разность масс кварков u и d сравнима с самими массами m_u и m_d и все эти величины малы в характерной шкале сильных взаимодействий. В самом деле, недавний расчет разности масс $n - p$ [156] дает

$$m_u \approx 4 \text{ МэВ}, \quad m_d \approx 7 \text{ МэВ}. \quad (5.272)$$

Нам известно также (см. гл. 10), что присущий сильному взаимодействию масштаб равен от 200 до 400 МэВ. Таким образом, изотопическая спиновая $SU(2)$ -симметрия является хорошей симметрией вследствие того, что хорошей симметрией является киральная $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрия!

Подобная ситуация (но в меньшей степени) имеет место для ароматической $SU(3)$ - и киральной $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрий. Из соотношений (5.248) и (5.272) получаем

$$m_s \approx 25(m_u + m_d)/2 \approx 130 \text{ МэВ}. \quad (5.273)$$

Следует подчеркнуть, что кварковые массы, которые здесь рассматривались, являются *кварковыми массами алгебры токов*, или *массами токовых кварков*. Они служат параметрами нарушения киральной симметрии. В квантовой теории поля (например, в модели свободных кварков (5.41)) эти параметры входят непосредственно в лагранжиан. Они отличаются от *масс составляющих кварков* \tilde{m} , которые входят как параметры в (нерелятивистские) расчеты адронов как связанных состояний: $m_{\text{протоона}} \approx 3\tilde{m}$, $m_p \approx 2\tilde{m}$. Поскольку даже в полной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамике (КХД) — не удастся решить проблему связанных состояний, исходя только из основных принципов, связь между массами этих двух типов строго не установлена. Но имеется эмпирическое правило, согласно которому массы составляющих кварков \tilde{m} и массы токовых кварков m_i различаются на общую постоянную массу:

$$\tilde{m}_i = m_i + m_0. \quad (5.274)$$

При этом масса m_0 связана с характерным масштабом сильных взаимодействий и равна примерно 300 МэВ.

Глобальная ароматическая симметрия сильных взаимодействий — резюме

Содержание настоящей главы показывает, что жизнеспособная теория сильного взаимодействия, по-видимому, должна обладать приближенной киральной $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрией. Полезная теория свободных кварков (5.41) действительно обладает такой глобальной симметрией. В эту теорию должно быть включено взаимодействие, которое формально (т. е. на уровне лагранжиана) также обладает такой симметрией. Но динамика должна быть такой, чтобы данная симметрия была спонтанно нарушена вакуумным состоянием, которое содержит кварковый конденсат $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ и поэтому не является киральным синглетом. Это динамическое нарушение должно характеризоваться импульсом, величина которого сравнима с f_π . Оно должно быть симметричным по отношению к диагональной подгруппе $SU(3)_V$, чтобы адронные спектры и взаимодействия обладали обычной $SU(3)$ -симметрией *восьмеричного пути* и существовал октет псевдоскалярных голдстоуновских бозонов. Данная киральная симметрия также нарушена явным образом (следовательно, голдстоуновские бозоны не являются строго безмассовыми) по схеме, в которой три массовых члена в лагранжиане, отвечающие легким кваркам, приводят к мягкому нарушению симметрии. Как мы увидим в гл. 10, калибровочная теория сильного взаимодействия (КХД) обладает всеми указанными свойствами.

Вопросы перенормировки и симметрии тесно связаны между собой. Вытекающие из симметрии соотношения между функциями Грина известны как тождества Уорда [379, 397]. В теории с нетривиальной симметрией перенормируемость критически зависит от сокращения расходимостей из разных секторов теории, которое диктуется тождествами Уорда. Это справедливо в еще большей степени для калибровочных теорий, где часто приходится вводить фиктивные степени свободы (например, состояние продольной поляризации фотона и т. д.) и должна быть уверенность в том, что благодаря тождествам Уорда эти нефизические состояния сокращаются в элементах физической S -матрицы. С другой стороны, приходится иметь дело с влиянием перенормировок на сами симметрии. В настоящей главе наше внимание будет сконцентрировано именно на этом последнем аспекте связи между перенормировкой и симметрией.

В разд. 6.1 мы увидим сначала, как тождество Уорда для векторного тока в теории $\lambda\phi^4$ выполняется с точностью до однопетлевых диаграмм. Но аналогичные соображения в разд. 6.2 приводят к заключению, что тождества Уорда в квантовой электродинамике, включающей аксиально-векторные токи, нарушаются перенормировкой в треугольной фермионной петле. В уравнении для дивергенции аксиально-векторного тока должны присутствовать «аномальные члены». Это позволяет вывести в рамках алгебры токов правильную низкоэнергетическую теорему для распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

В последних двух разделах рассматриваются взаимосвязь между спонтанным нарушением симметрии и перенормировкой. Мы вновь сосредоточиваем внимание на влиянии перенормировок на симметрию. В разд. 6.3 мы рассматриваем ряд задач, иллюстрирующих перенормировки в теориях со спонтанно нарушенной симметрией. Наконец, в разд. 6.4 показано, что классический потенциал, который мы многократно использовали при изучении спонтанного нарушения симметрии, может рассматриваться как первый член разложения по степеням константы Планка, а также что при определенных обстоятельствах сами радиационные поправки приводят к спонтанному нарушению симметрии.

6.1. ТОЖДЕСТВО УОРДА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ТОКА И ПЕРЕНОРМИРОВКА

Соотношение (5.200) является примером тождества Уорда. Такие соотношения между функциями Грина вытекают из свойств симметрии лагранжиана (т. е. сохранения зарядов, выражений для коммутаторов зарядов и т. д.). Они играют определенную роль при выводе низкоэнергетических теорем в алгебре токов, и, как показано ниже, на них опирается программа перенормировок для любой теории с нетривиальными симметриями. Следовательно, важно убедиться, что тождества Уорда не нарушаются поправочными членами в высших порядках теории возмущений. В настоящем разделе мы покажем сначала на простом примере теории $\lambda\phi^4$, как тождество Уорда в случае векторного тока выполняется с точностью до однопетлевых диаграмм.

Тождество Уорда для векторного тока

Теория $\lambda\phi^4$ (5.23) обладает $U(1)$ -симметрией с соответствующим сохраняющимся (векторным) током (5.25). Из канониче-

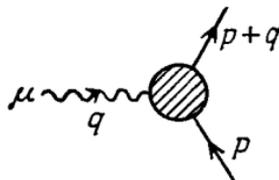


Рис. 6.1. Функция Грина для двух скалярных полей, взаимодействующих с векторным током.

ского коммутационного соотношения для комплексных полей (5.22)

$$[\partial_0\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6.1)$$

получаются коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [J_0(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= i[\partial_0\phi^+(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)]\phi(\mathbf{x}, t) = \\ &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\phi(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$[J_0(\mathbf{x}, t), \phi^+(\mathbf{x}', t)] = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\phi^+(\mathbf{x}, t).$$

Рассмотрим трехточечную функцию Грина, показанную графически на рис. 6.1:

$$G_\mu(p, q) = \int d^4x d^4y e^{-iqx - ipy} \langle 0 | T (J_\mu(x) \phi(y) \phi^+(0)) | 0 \rangle. \quad (6.3)$$

Произведем стандартные в алгебре токов выкладки

$$\begin{aligned} q^\mu G_\mu(p, q) &= -i \int d^4x d^4y e^{-iqx - ipy} \partial_x^\mu \langle 0 | T (J_\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle = \\ &= -i \int d^4x d^4y e^{-iqx - ipy} \{ \langle 0 | T (\partial^\mu J_\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle + \\ &\quad + \langle 0 | T (\delta(x_0 - y_0) [J_0(x), \phi(y)] \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle + \\ &\quad + \langle 0 | \delta(x_0) [J_0(x), \phi^\dagger(0)] \phi(y) | 0 \rangle \}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Первый член в правой части этого равенства обращается в нуль вследствие сохранения тока $\partial^\mu J_\mu = 0$; остальные члены можно упростить, используя (6.2):

$$\begin{aligned} q^\mu G_\mu(p, q) &= -i \int d^4x e^{-i(p+q) \cdot x} \langle 0 | T (\phi(x) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle + \\ &\quad + i \int d^4y e^{-ipy} \langle 0 | T (\phi^\dagger(0) \phi(y)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В правой части получаем выражения для пропагаторов скалярного поля:

$$\Delta(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T (\phi(x) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle. \quad (6.6)$$

Соотношение (6.5) можно записать в виде

$$-iq^\mu G_\mu(p, q) = \Delta(p+q) - \Delta(p). \quad (6.7)$$

Оно является примером тождества Уорда для векторных токов.

$Z_J = 1$ и тождества Уорда

Сделаем отступление, чтобы проиллюстрировать одно приложение тождеств Уорда. Их можно использовать для демонстрации того, что сохраняющийся ток $J_\mu(x)$ не перенормируется как составной оператор. Тождество (6.7) справедливо для перенормированных полей, удовлетворяющих каноническому коммутационному соотношению (6.1). (В случае перенормированных полей в правую часть коммутационных соотношений входит множитель Z_ϕ^{-1} .) В терминах перенормированных величин, используя соотношение (2.167), получаем

$$\begin{aligned} G_\mu^R(p, q) &= Z_\phi^{-1} Z_J^{-1} G_\mu(p, q), \\ \Delta^R(p) &= Z_\phi^{-1} \Delta(p). \end{aligned}$$

Мы можем записать тождество Уорда (6.7) в виде

$$-i Z_J q^\mu G_\mu^R(p, q) = \Delta^R(p+q) - \Delta^R(p).$$

Поскольку правая часть не зависит от точки обрезания, величина Z_J в левой части также не должна зависеть от обрезания, и нам не нужно вводить контрчлен для перенормировки

$J_\mu(x)$. Другими словами, сохраняющийся ток $J_\mu(x)$ не перенормируется как составной оператор, т. е. $Z_J = 1$. Таким образом, тождество Уорда (6.7) также справедливо для перенормированных величин:

$$-iq^\mu G_\mu^R(p, q) = \Delta^R(p+q) - \Delta^R(p). \quad (6.8)$$

В дальнейшем мы будем опускать индекс R в (6.8), подразумевая, что рассматриваются перенормированные функции Грина.

Подобное отсутствие перенормировки имеет место для всех сохраняющихся величин в абелевом (как показывает рассмотренный пример) и неабелевом случаях. В действительности, в случае токов, связанных с неабелевыми симметриями, можно дать прямое объяснение полученному результату. Эти токи должны удовлетворять фундаментальным коммутационным соотношениям, таким, как (5.55). Нелинейный характер коммутаторов фиксирует нормировку токов так, что никакая перенормировка невозможна.

Векторное тождество Уорда на однопетлевом уровне

Поучительно рассмотреть, каким образом однопетлевые диаграммы удовлетворяют тождеству Уорда (6.7). В терминах усеченной функции Грина $\Gamma_\mu(p, q)$ и 1ЧН собственной энергии $\tilde{\Sigma}$, определенных равенствами (см. (2.48) и (2.24))

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p, q) &= [i\Delta(p+q)]^{-1} G_\mu(p, q) [i\Delta(p)]^{-1}, \\ [\Delta(p)]^{-1} &= p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p), \end{aligned} \quad (6.9)$$

тождество Уорда (6.7) принимает вид

$$iq^\mu \Gamma_\mu(p, q) = (p+q)^2 - p^2 - \tilde{\Sigma}(p+q) + \tilde{\Sigma}(p). \quad (6.10)$$

Для вклада вершинной функции $\Gamma_\mu(p, q)$ в древесном приближении, показанного на рис. 6.2, а, имеем

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{(a)}(p, q) = iq^\mu (-i)(2p+q)_\mu = (p+q)^2 - p^2, \quad (6.11)$$

что совпадает с тождеством Уорда в низшем порядке.

Используя размерную регуляризацию для однопетлевой диаграммы (рис. 6.2, б), получаем

$$\begin{aligned} iq^\mu \Gamma_\mu^{(b)}(p, q) &= iq^\mu \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} i\lambda \frac{i}{k^2 - \mu^2} (-i)(2k+q)_\mu \frac{i}{(k+q)^2 - \mu^2} = \\ &= i\lambda \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k+q)^2 - \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

При $n < 2$ первый интеграл в правой части сходится, и мы можем совершить сдвиг переменной интегрирования, заменяя k

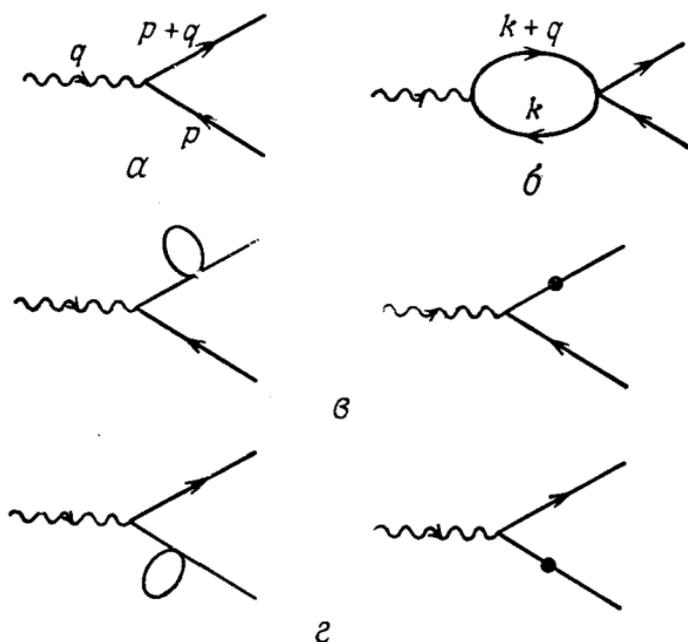


Рис. 6.2. Древесные и однопетлевые диаграммы для вершинной функции, отвечающей взаимодействию векторного тока и скалярных полей.

на $k - q$. При этом получим

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{(b)}(p, q) = i\lambda \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 - \mu^2} - \frac{1}{k^2 - \mu^2} \right] = 0. \quad (6.13)$$

Это равенство остается справедливым при аналитическом продолжении на область $n > 2$, в частности $n = 4$. Вклад диаграммы рис. 6.2, в имеет вид

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{(c)}(p, q) = i q^\mu (-i)(2p + q)_\mu \frac{i}{(p + q)^2 - \mu^2} [\Sigma(p + q) - \Sigma(0)], \quad (6.14)$$

где величина

$$-i\Sigma(p + q) = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2} \quad (6.15)$$

не зависит от внешнего импульса. Получаем

$$\tilde{\Sigma}(p) = \Sigma(p) - \Sigma(0) = 0. \quad (6.16)$$

Следовательно, правая часть равенства (6.14) обращается в нуль, и мы имеем

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{(c)}(p, q) = 0. \quad (6.17)$$

Аналогично имеем также

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{(d)}(p, q) = 0. \quad (6.18)$$

Таким образом, складывая диаграммы на рис. 6.2, а, б, в и г, с точностью до однопетлевого порядка имеем

$$iq^\mu \Gamma_\mu(p, q) = (p + q)^2 - p^2, \quad (6.19)$$

что с учетом равенства (6.16) совпадает с тождеством Уорда (6.10).

Отметим, что приведенное доказательство тождества Уорда (6.7) (или (6.10) в теории возмущений) опирается на два важных момента: 1) алгебраическое соотношение (6.11) и 2) сдвиг переменной интегрирования при переходе от (6.12) к (6.13). Вообще говоря, для того чтобы выполнялось тождество Уорда, которое является следствием симметрии, следует выбирать регуляризационную схему, которая не нарушает исходную симметрию. (Ясно, что размерная регуляризация удовлетворяет этому требованию.)

6.2. АНОМАЛИЯ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОГО ТОЖДЕСТВА УОРДА И РАСПАД $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

Следуя в основном тем же путем, что и в разд. 6.1, мы видим, что (аксиальное) тождество Уорда не является автоматически справедливым в теории, в которой имеются фермионы, даже после того, как она симметричным образом регуляризована. Это происходит вследствие того, что определенные однопетлевые диаграммы вносят аномальные члены, препятствующие рекуррентному воспроизведению тождеств Уорда в высших порядках теории возмущений. Такие аномалии были обнаружены Адлером [5, 6] и Беллом и Джакивом [41] (*аномалии АБД*) при изучении алгебры токов. Ниже мы дадим элементарное введение в данный предмет.

Тождества Уорда на уровне древесных диаграмм и выражения для дивергенции токов как следствие уравнений движения

Рассмотрим трехточечные функции в электродинамике

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) &= \\ &= i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(V_\mu(x_1) V_\nu(x_2) A_\lambda(0)) | 0 \rangle e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) &= \\ &= i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(V_\mu(x_1) V_\nu(x_2) P(0)) | 0 \rangle e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где V_μ , A_μ и P — векторный, аксиально-векторный и псевдоскалярный токи соответственно:

$$\begin{aligned} V_\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x), \\ A_\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x), \\ P(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x), \end{aligned} \quad (6.22)$$

а $q = k_1 + k_2$.

Чтобы получить тождества Уорда, связывающие $T_{\mu\nu\lambda}$ и $T_{\mu\nu}$, необходимы выражения для дивергенций токов V_μ и A_μ , которые вычисляются с помощью уравнений движения

$$\partial^\mu V_\mu(x) = 0, \quad \partial^\mu A_\mu(x) = 2imP(x), \quad (6.23)$$

где m — масса фермионного поля $\psi(x)$. Применяя элементарные соотношения, вытекающие из алгебры токов, такие, как

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu (T(J_\mu(x) \mathcal{O}(y))) &= \\ &= T(\partial^\mu J_\mu(x) \mathcal{O}(y)) + [J_0(x), \mathcal{O}(y)] \delta(x_0 - y_0) \end{aligned} \quad (6.24)$$

для тока $J_\mu(x)$ и локального оператора $\mathcal{O}(y)$, и учитывая, что в данном случае одновременные коммутаторы обращаются в нуль:

$$[V_0(x), A_0(y)] \delta(x_0 - y_0) = 0, \quad (6.25)$$

мы можем формально получить следующие тождества Уорда для векторного и аксиально-векторного токов:

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (6.26)$$

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu}. \quad (6.27)$$

Аномалии, возникающие при перенормировке

Однако, вычисляя вклады наименьшего порядка в $T_{\mu\nu\lambda}$ и $T_{\mu\nu}$ (рис. 6.3 и 6.4), мы находим, что тождества Уорда (6.26) и (6.27) не выполняются:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\lambda} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \left\{ \text{tr} \left[\frac{i}{\hat{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{i}{(\hat{p} - \hat{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] + \left(\begin{array}{l} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \left\{ \text{tr} \left[\frac{i}{\hat{p} - m} \gamma_5 \frac{i}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \frac{i}{(\hat{p} - \hat{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{array}{l} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Для того чтобы проверить тождества Уорда, в частности (6.27), мы используем соотношение

$$\hat{q} \gamma_5 = \gamma_5 (\hat{p} - \hat{q} - m) + (\hat{p} - m) \gamma_5 + 2m \gamma_5 \quad (6.30)$$

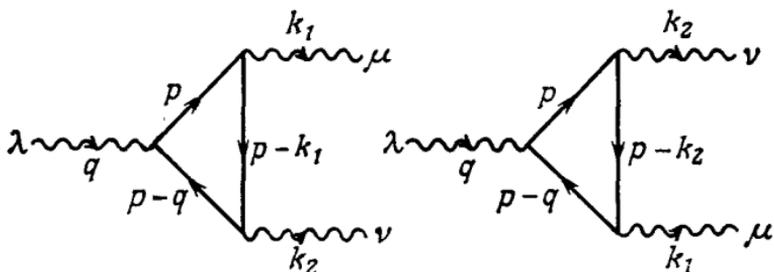


Рис. 6.3. Вклады низшего порядка в выражение (6.20) для $T_{\mu\nu\lambda}$.

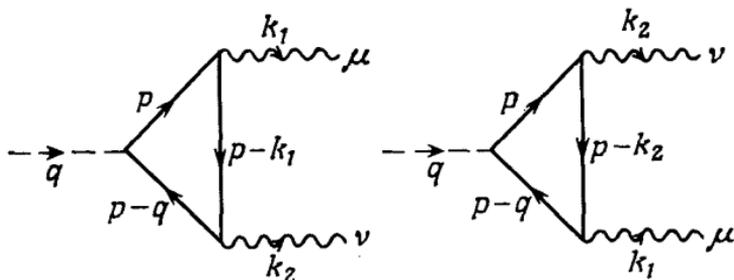


Рис. 6.4. Вклады низшего порядка в выражение (6.21) для $T_{\nu\mu}$.

и получим равенство

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}^{(1)} + \Delta_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (6.31)$$

где

$$\Delta_{\mu\nu}^{(1)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu - \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_2) - m} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\mu \right\}, \quad (6.32a)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_2) - m} \gamma_\nu - \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \right\}. \quad (6.32b)$$

Если интегралы $\Delta_{\mu\nu}^{(i)}$ равны нулю, то мы имеем тождество Уорда (6.27). На первый взгляд кажется, что это действительно так. Если бы мы могли произвести сдвиг переменной интегрирования $p \rightarrow p + k_2$ во втором члене, то два интеграла в $\Delta_{\mu\nu}^{(1)}$ взаимно сократились бы. Аналогичное сокращение пары интегралов произошло бы в (6.32б). Однако интегралы линейно расходятся, и сдвиг переменной интегрирования приводит к возникновению дополнительных конечных членов, причем $\Delta_{\mu\nu}^{(1)} \neq 0$ и $\Delta_{\mu\nu}^{(2)} \neq 0$. Вследствие этого тождество Уорда не выполняется.

Сдвиг переменной интегрирования в линейно расходящихся интегралах

В одномерном случае легко продемонстрировать, что сдвиг переменной интегрирования может оказаться незаконным для расходящегося интеграла (см., например, [226]). Рассмотрим интеграл

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)]. \quad (6.33)$$

Чтобы увидеть, что величина $\Delta(a)$ может быть отлична от нуля, разложим подынтегральное выражение в ряд:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[af'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \dots \right] = \\ &= a [f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2} [f'(\infty) - f'(-\infty)] + \dots, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где штрихи обозначают дифференцирование. Если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ сходится (или по крайней мере расходится логарифмически), то мы имеем $0 = f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots$, и интеграл $\Delta(a)$ равен нулю. Но в случае линейно расходящегося интеграла $0 \neq f(\pm\infty)$, $0 = f'(\pm\infty) = \dots$, и величина $\Delta(a)$ не обязательно равна нулю:

$$\Delta(a) = a [f(\infty) - f(-\infty)]. \quad (6.35)$$

Это соответствует «поверхностному члену» («поверхностью» в одномерном случае являются граничные точки промежутка интегрирования). Этот вывод непосредственно обобщается на случай линейно расходящегося интеграла в n измерениях:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \int d^n r [f(r+a) - f(r)] = \\ &= \int d^n r \left[a^\tau \frac{\partial}{\partial r_\tau} f(r) + a^\tau \frac{\partial}{\partial r_\tau} a^\sigma \frac{\partial}{\partial r_\sigma} f(r) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Используя теорему Гаусса, мы видим, что все члены, кроме первого, обращаются в нуль после интегрирования по поверхности $r = R \rightarrow \infty$:

$$\Delta(a) = a^\tau \frac{R_\tau}{R} f(R) S_n(R), \quad (6.37)$$

где $S_n(R)$ — площадь поверхности гиперболы радиуса R . В случае четырехмерного пространства Минковского имеем

$$\Delta(a) = a^\tau \int d^4 r \partial_\tau f(r) = 2i\pi^2 a^\tau \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 R_\tau f(R). \quad (6.38)$$

Неоднозначность в определении $T_{\mu\nu\lambda}$

Однопетлевая амплитуда $T_{\mu\nu\lambda}$ (условно) линейно расходится; следовательно, она не определена единственным образом. Выражение (6.28) связано с частным выбором протекания импульса в петле p : фермионная линия между векторной и аксиально-векторной вершинами обладает импульсом p . Мы могли бы выбрать его другим способом, так, чтобы импульс этой фермионной линии был равен $p + a$, где a — некоторая (произвольная) линейная комбинация k_1 и k_2 :

$$a = \alpha k_1 + (\alpha - \beta) k_2. \quad (6.39)$$

Из линейной расходимости интеграла следует, что амплитуда $T_{\mu\nu\lambda}$ определена с точностью до величины

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu\lambda}(a) &= T_{\mu\nu\lambda}(a) - T_{\mu\nu\lambda}(0) = \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ \text{tr} \left[\frac{1}{(\hat{p} + \hat{a}) - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} + \hat{a} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\hat{p} + \hat{a} - \hat{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] - \right. \\ &\quad \left. - \text{tr} \left[\frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\hat{p} - \hat{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] \right\} + \left(\begin{array}{c} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right) \equiv \\ &= \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} + \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(2)}. \quad (6.40) \end{aligned}$$

Применяя формулу (6.38), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} a^\tau \frac{\partial}{\partial p_\tau} \text{tr} \left[\frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\hat{p} - \hat{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] = \\ &= - \frac{i2\pi^2 a^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 p_\tau \text{tr} (\gamma_a \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\delta \gamma_\mu) p^\alpha p^\beta p^\delta / p^6 = \\ &= \frac{i2\pi^2 a_\sigma}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\sigma p^\rho}{p^2} 4i \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (6.41) \end{aligned}$$

После замены $p^\sigma p^\rho / p^2$ на $g^{\sigma\rho} / 4$ имеем

$$\Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} = \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda} a^\rho / 8\pi^2. \quad (6.42)$$

Поскольку величина $\Delta_{\mu\nu\lambda}^{(2)}$ получается из (6.42) с помощью замен $k_1 \leftrightarrow k_2$ и $\mu \leftrightarrow \nu$, из соотношений (6.40), (6.42) и (6.39) получаем

$$\Delta_{\mu\nu\lambda} = \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} + \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(2)} = \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda} (k_1 - k_2)^\rho. \quad (6.43)$$

Таким образом, имеется неоднозначность в определении величины $T_{\mu\nu\lambda}$, описываемая произвольным параметром β :

$$T_{\mu\nu\lambda}(a) = T_{\mu\nu\lambda}(0) - \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (k_1 - k_2)^\rho \equiv T_{\mu\nu\lambda}(\beta). \quad (6.44)$$

Определение аномального члена

Попытаемся определить параметр β , потребовав выполнения тождеств Уорда. Мы увидим, что значения β , при котором амплитуда $T_{\mu\nu\lambda}(a)$ удовлетворяет как векторному, так и аксиально-векторному тождествам Уорда (соотношения (6.26) и (6.27)), не существует.

Рассмотрим сначала аксиальное тождество Уорда (6.27). Как и в случае равенства (6.40), можно вычислить два поверхностных члена в (6.31), используя (6.38):

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{(1)} &= -\frac{k_2^\tau}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\partial}{\partial p_\tau} \left(\frac{\text{tr} [(\hat{p} + m) \gamma_5 \gamma_\nu (\hat{p} - \hat{k}_1 + m) \gamma_\mu]}{(p^2 - m^2) [(p - k_1)^2 - m^2]} \right) = \\ &= -\frac{k_2^\tau}{(2\pi)^4} 2i\pi^2 \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\tau}{p^2} \text{tr} (\gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu) p^\alpha k_1^\beta = \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho \end{aligned} \quad (6.45)$$

и

$$\Delta_{\mu\nu}^{(2)} = \Delta_{\mu\nu}^{(1)}. \quad (6.46)$$

Таким образом, из (6.44) и (6.31) получаем

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(\beta) = 2mT_{\mu\nu}(0) - \frac{1-\beta}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho. \quad (6.47)$$

Для векторного тождества Уорда (6.26) имеем

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(0) &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \text{tr} \left[\frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\hat{p} - \hat{k}_1) - m} \hat{k}_1 \right] + \right. \\ &\left. + \text{tr} \left[\frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \hat{k}_1 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{k}_2) - m} \gamma_\nu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Используя тождество

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= (\hat{p} - m) - [(\hat{p} - \hat{k}_1) - m] = \\ &= [(\hat{p} - \hat{k}_2) - m] - [(\hat{p} - \hat{q}) - m], \end{aligned} \quad (6.49)$$

мы можем переписать (6.48) в виде

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(0) &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\hat{p} - \hat{k}_1) - m} - \right. \\ &\left. - \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\hat{p} - \hat{k}_2) - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} - m} \right]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

В правой части вновь имеется поверхностный член, который можно вычислить с помощью (6.38):

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(0) &= \frac{k_1^\tau}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\partial}{\partial p_\tau} \left(\frac{\text{tr} [\gamma_\lambda \gamma_5 (\beta - k_2 + m) \gamma_\nu (\beta + m)]}{[(p - k_2)^2 - m^2](p^2 - m^2)} \right) = \\ &= \frac{k_1^\tau}{(2\pi)^4} 2i\pi^2 \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\tau}{p^2} \text{tr} (\gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) k_2^\alpha p^\beta = \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\lambda\sigma\nu\alpha} k_1^\rho k_2^\sigma. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Далее, учитывая (6.44), получаем

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(\beta) = \frac{1+\beta}{8\pi^2} \varepsilon_{\nu\lambda\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho. \quad (6.52)$$

Таким образом, представить (6.47) в виде (6.27) и (6.52) в виде (6.26) *одновременно* при каком-либо значении параметра β невозможно. Поскольку оказывается, что в тождествах Уорда для амплитуды $\langle 0|T(VVV)|0\rangle$ аномальные члены отсутствуют, а для амплитуды $\langle 0|T(AAA)|0\rangle$ они существуют, логично сопоставить аномалии аксиально-векторному току. Тем самым мы фиксируем способ протекания импульса в петле таким образом, чтобы выполнялось векторное тождество Уорда (6.26), т. е. $\beta = -1$. При этом аксиальное тождество Уорда принимает вид

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho. \quad (6.53)$$

Это соответствует следующей модификации уравнения для дивергенции аксиально-векторного тока (6.23):

$$\partial^\lambda A_\lambda(x) = 2imP(x) + (4\pi)^{-2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x), \quad (6.54)$$

где $F_{\mu\nu}(x)$ — обычный тензор электромагнитного поля. Таким образом, входящий сюда дополнительный член, аномалия АД, возник благодаря перенормировке. Он обладает следующими свойствами:

1. Аномалия АД не зависит от фермионных масс и должна присутствовать также в безмассовой теории.

2. Адлер и Бардин [7] показали, что радиационные поправки высших порядков не изменяют величины коэффициента перед аномальным членом, т. е. треугольные диаграммы, содержащие более чем одну петлю, не дают вклада в аномальный член. Эвристически это можно понять, основываясь на следующем замечании. Треугольные диаграммы высших порядков имеют условные степени расходимости меньше единицы, и для этих диаграмм отсутствует неоднозначность, связанная с выбором способа протекания импульса по петле.

3. Поскольку наши рассуждения проведены в терминах способа протекания импульса в петле и обычной регуляризации

методом обрезания, читатель может задаться вопросом: как эта проблема аномалии выглядит в схеме с размерной регуляризацией? Там эта проблема проявляется как трудность, связанная с определением γ_5 -матрицы Дирака в пространстве-времени с числом измерений, отличным от четырех.

4. Фудзикава [149] отметил, что АБД-аномальное тождество Уорда может быть сформулировано более непосредственным образом в рамках формализма функционального интегрирования. Он показал, что мера в функциональном интеграле для калибровочно-инвариантной фермионной теории не инвариантна относительно γ_5 -преобразования. Дополнительный якобиан, отвечающий этому преобразованию, приводит к аномалии АБД.

Аномалии АБД в случае неабелевых теорий. В неабелевых теориях функции Грина, отвечающие нечетному числу аксиально-векторных связей, включая пятиточечные функции, дают вклад в аномальные члены в дивергенции аксиально-векторного тока [32]. Но треугольная аномалия может рассматриваться как основная, поскольку она является простейшей, и ее отсутствие означает также отсутствие всех других аномальных диаграмм. В дальнейшем мы будем по-прежнему ограничиваться рассмотрением треугольной аномалии. Рассмотрим амплитуду

$$T_{\mu\lambda\nu}^{abc}(k_1, k_2; q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T (V_\mu^a(x_1) V_\nu^b(x_2) A_\lambda^c(0)) | 0 \rangle e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}, \quad (6.55)$$

где

$$\begin{aligned} V_\mu^a(x) &= \bar{\psi}(x) T^a \gamma_\mu \psi(x), \\ A_\lambda^c(x) &= \bar{\psi}(x) T^c \gamma_\lambda \gamma_5 \psi(x), \end{aligned} \quad (6.56)$$

а T^a — матрицы, отвечающие внутренней симметрии. Рассмотрим также амплитуду

$$T_{\mu\nu}^{abc}(k_1, k_2; q) = \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T (V_\mu^a(x_1) V_\nu^b(x_2) P^c(0)) | 0 \rangle e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}, \quad (6.57)$$

где

$$P^c(x) = \bar{\psi}(x) T^c \gamma_5 \psi(x). \quad (6.58)$$

Аномалия в аксиально-векторном тождестве Уорда имеет вид

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = 2m T_{\mu\nu}^{abc} - \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma D^{abc} + \text{коммутаторы}, \quad (6.59)$$

где

$$D^{abc} = \frac{1}{2} \text{tr} (\{T^a, T^b\} T^c). \quad (6.60)$$

В неабелевом случае тождество Уорда обычно также включает одновременные коммутаторы (см., например, ниже соотношение (6.65)).

Распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

Важным приложением аномалии АБД в алгебре токов является вывод теоремы о мягких пионах для распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Амплитуда этого процесса определяется в виде

$$\langle \gamma(k_1 \varepsilon_1) \gamma(k_2 \varepsilon_2) | \pi^0(q) \rangle = \\ = i(2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2) \varepsilon_1^\mu(k_1) \varepsilon_2^\nu(k_2) \Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2, q), \quad (6.61)$$

где величина

$$\Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = \\ = e^2 \int d^4z d^4y e^{ik_1z + ik_2y} \langle 0 | T(J_\mu^{\text{эм}}(z) J_\nu^{\text{эм}}(y)) | \pi^0(q) \rangle \quad (6.62)$$

обладает следующей лоренц-ковариантной структурой:

$$\Gamma^{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho \Gamma(q^2). \quad (6.63)$$

Чтобы вывести низкоэнергетическую теорему, рассмотрим амплитуду

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = \\ = \int d^4x d^4y e^{ik_2y - iqx} \langle 0 | T(A_\lambda^3(x) J_\nu^{\text{эм}}(y) J_\mu^{\text{эм}}(0)) | 0 \rangle, \quad (6.64)$$

удовлетворяющую тождеству Уорда

$$q^\lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = \\ = -i \int d^4x d^4y e^{ik_2y - iqx} \{ \langle 0 | T(\partial^\lambda A_\lambda^3(x) J_\nu^{\text{эм}}(y) J_\mu^{\text{эм}}(0)) | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T(\delta(x_0 - y_0) [A_0^3(x), J_\nu^{\text{эм}}(y)] J_\mu^{\text{эм}}(0)) | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T(\delta(x_0) [A_0^3(x), J_\mu^{\text{эм}}(0)] J_\nu^{\text{эм}}(y)) | 0 \rangle \}. \quad (6.65)$$

Из соотношений алгебры токов (5.80) следует, что члены, содержащие коммутаторы, обращаются в нуль. Рассуждая элементарно, можно отождествить первый член в правой части с амплитудой распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, следующей из ЧСАТ (5.181):

$$\Gamma^{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = \frac{-ie^2(-q^2 + m_\pi^2)}{i\pi m_\pi^2} \times \\ \times \int d^4x d^4y e^{ik_2y - iqx} \langle 0 | T(\partial^\lambda A_\lambda^3(x) J_\nu^{\text{эм}}(y) J_\nu^{\text{эм}}(0)) | 0 \rangle. \quad (6.66)$$

Далее в пределе мягких пионов мы должны были бы получить соотношение $\Gamma(q^2 = 0) = 0$ [375, 395]. Это связано с тем, что

левая часть (6.65) обращается в нуль при $q^\lambda \rightarrow 0$, поскольку $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ не содержит промежуточных состояний, вырожденных с вакуумом, и не связана с вакуумом через аксиально-векторный ток $A_\lambda^3(x)$. Но в тождество Уорда следует включить аномальный член (т. е. ЧСАТ модифицируется в данном случае):

$$q^\lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = \\ = \frac{f_\pi m_\pi^2}{e^2(m_\pi^2 - q^2)} \Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) - \frac{iD}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho, \quad (6.67)$$

где D — аномальный коэффициент (6.60) (см. (6.72)). Мы получаем, таким образом, низкоэнергетическую теорему

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = \frac{ie^2 D}{2\pi^2 f_\pi} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_1^\sigma k_2^\rho, \quad (6.68)$$

или

$$\Gamma(0) = \frac{e^2 D}{2\pi^2 f_\pi}. \quad (6.69)$$

Следовательно, в пределе мягких пионов амплитуда процесса $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ полностью определяется аномалией [5]. Чтобы вычислить коэффициент D , рассмотрим сначала простую кварковую модель (без цветовых степеней свободы), в которой токи имеют вид

$$J_\mu^{3M}(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu Q q(x), \\ A_\mu^3(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda_3}{2} q(x), \quad (6.70)$$

где

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.71)$$

Аномальный коэффициент (6.60) равен

$$D = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\{Q, Q\} \frac{\lambda_3}{2} \right) = \frac{1}{6}, \quad (6.72)$$

что приводит к значению $\Gamma(0) = 0,0123m_\pi^{-1}$, примерно в 3 раза меньшему, чем экспериментальное значение $\Gamma(m_\pi^2) \approx 0,0375m_\pi^{-1}$. Этот результат является аргументом в пользу того, что кварки обладают цветовой степенью свободы. Аномальный коэффициент D пропорционален следу фермионных петель, и должен присутствовать дополнительный множитель, равный 3, возникающий в результате суммирования по трем цветам:

$$\Gamma(0) = 0,037m_\pi^{-1}. \quad (6.73)$$

Заметим, что в приведенном расчете один из ароматов — странность — не дает вклада, поскольку λ_3 отлична от нуля только

для первых двух компонент. С физической точки зрения это соответствует тому, что пион состоит из нестранных кварков. Очевидно, что соотношение (6.73) не меняется, когда включены другие ароматы (c, b, \dots).

6.3. ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИЯХ СО СПОНТАННО НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

В данном разделе мы рассмотрим два свойства перенормировок в теориях со спонтанным нарушением симметрии. Сначала мы изучим однопетлевую перенормировку в простейшей теории $\lambda\phi^4$ (5.131) со спонтанно нарушенной дискретной симметрией, существующей в этой теории. Мы покажем, как диаграммы типа «головастик» дают вклад в сдвиг величины вакуумного среднего (ВС) скалярного поля и что контрчлены имеют тот же вид, что и в симметричной теории. Затем мы изучим случай спонтанно нарушенной непрерывной симметрии и покажем, что голдстоуновские частицы остаются безмассовыми даже при учете радиационных поправок высших порядков.

Однопетлевая перенормировка и сдвиг вакуумного среднего

Вернемся к теории с лагранжианом (5.137). Первоначальный лагранжиан (5.131)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (6.74)$$

обладает дискретной симметрией относительно преобразований $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$. При $\mu^2 > 0$ эта симметрия нарушается вакуумом, причем ϕ имеет ВС, равное

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v, \quad v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (6.75)$$

Производя разложение в окрестности этого вакуума, мы определяем сдвинутое поле:

$$\phi' = \phi - v.$$

Потенциал (5.137) выражается через это поле следующим образом:

$$V(\phi') = \mu^2\phi'^2 + \lambda v\phi'^3 + \frac{\lambda}{4}\phi'^4, \quad (6.76)$$

что соответствует скалярной частице с квадратом массы $2\mu^2$ и с отвечающими самодействию вершинами, показанными на рис. 6.5.

Рассмотрим теперь перенормировку одной петли.

1. *Одноточечная функция* (диаграмма типа «головастик», показанная на рис. 6.6). Мы имеем

$$T = (-6i\lambda v) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = -3i\lambda v I_2, \quad (6.77)$$

где

$$I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2}. \quad (6.78)$$

Чтобы сократить эту расходимость, необходимо ввести в лагранжиан контрчлен вида $-D\phi'$, где

$$D = -3\lambda v I_2. \quad (6.79)$$

2. *Двухточечная функция* (рис. 6.7). Диаграммы на рис. 6.7, а и б соответствуют следующим собственнo-энергетическим членам:

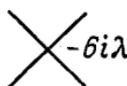
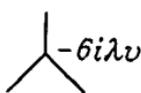


Рис. 6.5. Вершины, отвечающие взаимодействиям, входящим в лагранжиан (6.76).

Рис. 6.6.

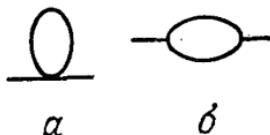


Рис. 6.7.

ческим членам:

$$\Sigma_a(0) = (-6i\lambda) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = -3i\lambda I_2, \quad (6.80)$$

$$\Sigma_b(0) = (-6i\lambda v)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \right)^2 = 18i\lambda^2 v^2 I_4, \quad (6.81)$$

где

$$I_4 = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \right)^2. \quad (6.82)$$

Имеем

$$\Sigma(0) = \Sigma_a(0) + \Sigma_b(0) = -3i\lambda I_2 + 18i\lambda^2 v^2 I_4. \quad (6.83)$$

Здесь требуется контрчлен вида $-A\phi'^2$, где

$$A = -\frac{3}{2} \lambda I_2 + 9\lambda^2 v^2 I_4. \quad (6.84)$$

3. *Трехточечная функция* (рис. 6.8).

$$\Gamma_3(0) = 3(-6i\lambda v)(-6i\lambda) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \right)^2 = 54i\lambda^2 v I_4. \quad (6.85)$$

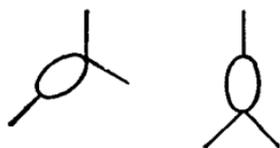


Рис. 6.8.



Рис. 6.9.

Здесь требуется контрчлен вида $-B\phi'^3$, где

$$B = -\frac{i}{3!} (54i\lambda^2 v I_4) = 9\lambda^2 v I_4. \quad (6.86)$$

4. *Четырехточечная функция* (рис. 6.9).

$$\Gamma_4(0) = 3(-6i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{k^2 - 2\mu^2} \right)^2 = 54i\lambda^2 I_4. \quad (6.87)$$

Здесь требуется контрчлен $-\frac{1}{4} C\phi'^4$, где

$$C = -\frac{i}{3!} (54i\lambda^2 I_4) = 9\lambda^2 I_4. \quad (6.88)$$

Таким образом, контрчлены для одной петли имеют вид

$$\delta V(\phi') = A\phi'^2 + B\phi'^3 + \frac{C}{4} \phi'^4 + D\phi', \quad (6.89)$$

а эффективный потенциал в однопетлевом приближении дается выражением

$$V_1(\phi') = V(\phi') + \delta V(\phi') = (\mu^2 + A)\phi'^2 + (\lambda v + B)\phi'^3 + \frac{1}{4}(\lambda + C)\phi'^4 + D\phi'. \quad (6.90)$$

Пусть величина δv равна сдвигу ВС, отвечающему однопетлевому вкладу:

$$\left. \frac{\delta V_1(\phi')}{\delta \phi'} \right|_{\phi' = \delta v} = 0,$$

или

$$2(\mu^2 + A)\delta v + 3(\lambda v + B)(\delta v)^2 + (\lambda + C)(\delta v)^3 + D = 0. \quad (6.91)$$

Поскольку δv — малая величина, мы можем пренебречь членами высших порядков, что дает

$$\delta v = -\frac{D}{2(\mu^2 + A)} \approx -\frac{D}{2\mu^2}. \quad (6.92)$$

Таким образом, чтобы исключить линейный по ϕ' член, необходимо ввести сдвинутое поле ϕ'' :

$$\phi'' = \phi' - \delta v, \quad (6.93)$$

$$\langle 0 | \phi'' | 0 \rangle = 0 \text{ в однопетлевом приближении.} \quad (6.94)$$

Потенциал выражается через это новое поле в виде

$$V_1(\phi'' + \delta v) = a\phi''^2 + b\phi''^3 + \frac{c}{4}\phi''^4, \quad (6.95)$$

где

$$\begin{aligned} c &= \lambda + C = \lambda + 9\lambda^2 I_4, \\ b &= \lambda v + B + \lambda \delta v = \lambda v + 9\lambda^2 v I_4 + \frac{3\lambda^2 v}{2\mu^2} I_2, \\ a &= \mu^2 + A + 3\delta v \lambda v = \mu^2 + 3\lambda I_2 + 9\lambda^2 v^2 I_4. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Легко убедиться, что из (6.96) следует равенство

$$b^2 - ac = 0. \quad (6.97)$$

Во всех приведенных выше расчетах мы опускали высшие степени δv . С учетом соотношения (6.97) мы можем записать

$$\begin{aligned} V_1(\phi') &= V_1(\phi'' + \delta v) = a\phi''^2 + (ac)^{1/2}\phi''^3 + \frac{c}{4}\phi''^4 = \\ &= \frac{1}{4}\frac{a^2}{c} - \frac{a}{2}\left(\phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 + \frac{c}{4}\left(\phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^4. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Отсюда следует, что, несмотря на присутствие контрчленов (6.89), эффективный потенциал остается симметричным относительно изменения знака величины:

$$\phi = \phi'' + \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (6.99)$$

Иными словами, контрчлены продолжают обладать первоначальной симметрией, поскольку они отражают ультрафиолетовые свойства теории, не чувствительные к мягкому нарушению симметрии. Следовательно, даже в теории с нарушенной симметрией требуются лишь контрчлены, отвечающие симметричной теории. Мы продолжим обсуждение этого вопроса ниже, при изучении теории с $U(1)$ -симметрией.

Голдстоуновские бозоны остаются безмассовыми в высших порядках

Перейдем теперь к теориям с непрерывными симметриями, в которых спонтанное нарушение симметрии связано с присутствием голдстоуновских бозонов. Мы покажем, что голдстоуновские частицы остаются безмассовыми даже при учете радиационных поправок высших порядков. Будем вновь рассматривать простейший пример $U(1)$ -симметрии в однопетлевом случае.

Инвариантный лагранжиан (см. (5.138))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\lambda \pi)^2 + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2, \quad (6.100)$$

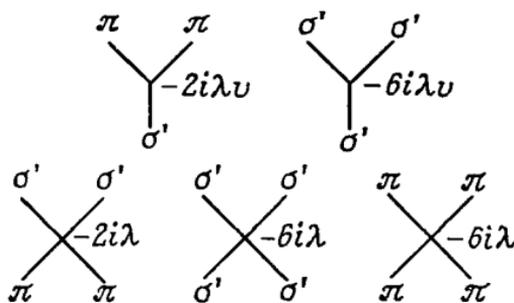


Рис. 6.10. Вершины, отвечающие взаимодействиям, входящим в лагранжиан (6.103).

записанный в терминах сдвинутого поля,

$$\sigma' = \sigma - v, \quad (6.101)$$

где вакуумное среднее равно

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = v = \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}, \quad (6.102)$$

принимает вид (см. (5.146))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\lambda \sigma')^2 + (\partial_\lambda \pi)^2] - \mu^2 \sigma'^2 - \lambda v \sigma' (\sigma'^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma'^2 + \pi^2)^2. \quad (6.103)$$

В это выражение входят безмассовое поле π и массивное поле σ' с квадратом массы $2\mu^2$. Эти поля взаимодействуют через вершины, показанные на рис. 6.10. Мы убедимся, что π -поле остается безмассовым при учете однопетлевых поправок, проверив, что контрчлен, отвечающий перенормировке массы δm^2 , обращается в нуль. Это должно иметь место, поскольку указанный контрчлен не может быть поглощен за счет какого-либо переопределения физической массы π -поля. Напомним, что для собственно-энергетических диаграмм справедливо разложение

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + \Sigma'(0) p^2 + \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (6.104)$$

где δm^2 отождествляется с $\Sigma(0)$. Однопетлевые диаграммы, показанные на рис. 6.11, можно вычислить с помощью правил Фейнмана, приведенных на рис. 6.10:

$$\begin{aligned} \Sigma_a(0) &= (-2i\lambda v) \frac{i}{-2\mu^2} (-6i\lambda v) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = -3\lambda I(2\mu^2), \\ \Sigma_b(0) &= (-2i\lambda) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = \lambda I(2\mu^2), \\ \Sigma_c(0) &= (-2i\lambda v) \frac{i}{-2\mu^2} (-2i\lambda v) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} = -\lambda I(0), \\ \Sigma_d(0) &= (-6i\lambda) \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} = 3\lambda I(0), \\ \Sigma_e(0) &= (-2i\lambda v)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i}{k^2 - 2\mu^2} = 2\lambda [I(2\mu^2) - I(0)], \end{aligned} \quad (6.105)$$

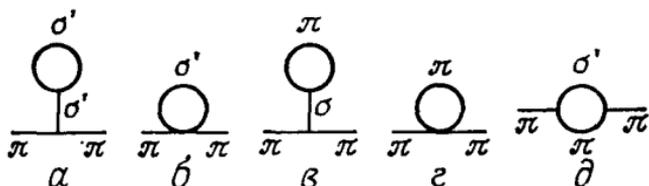


Рис. 6.11. Диаграммы собственной энергии для π -частицы.

где величины Σ соответствуют диаграммам на рис. 6.11, а

$$I(m^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (6.106)$$

Таким образом, $I(2\mu^2) = iI_2$, где величина I_2 определена выражением (6.78). Здесь также имеются обычные факторы симметрии $1/2$. Очевидно, что сумма вкладов всех пяти диаграмм в величину $\Sigma(0)$ равна нулю:

$$\Sigma(0) = \Sigma_a(0) + \Sigma_b(0) + \Sigma_c(0) + \Sigma_d(0) + \Sigma_e(0) = 0. \quad (6.107)$$

Этот результат мы предвидели заранее: π -частицы остаются безмассовыми в соответствии с требованием теоремы Голдстоуна.

Мягкое нарушение симметрии и перенормируемость

Заметим, что правила Фейнмана, приведенные на рис. 6.10, показывают, что имеется пять вершин, которые зависят только от двух параметров λ и ν . Это означает, что имеются три соотношения между пятью константами связи (пятью функциями Грина). Эти соотношения — тождества Уорда — являются следствиями первоначальной $U(1)$ -симметрии. Контрчлены для указанных вершин должны удовлетворять тем же соотношениям, чтобы можно было включить их в переопределение σ и ν [254]. Это можно проверить явно в однопетлевом приближении аналогично предыдущему примеру с дискретной симметрией. Мы снова убеждаемся в том, что контрчлены в теории со спонтанно нарушенной симметрией имеют ту же структуру, что и в соответствующей симметричной теории. В действительности это ключевой момент, объясняющий, почему спонтанное нарушение симметрии в конечном счете не нарушает перенормируемости теории.

Мы обращаем внимание читателя на важное обстоятельство, состоящее в том, что перенормируемость теории со спонтанно нарушенной симметрией зависит только от того, была ли перенормируема симметричная теория. Фактически это несколько более сильная версия теоремы [376], которая утверждает, что добавление членов, мягко нарушающих симметрию, не нарушает перенормируемость симметричной теории. Под *мягким нарушением симметрии* мы понимаем добавление асимметричных членов размерности, меньшей чем четыре, т. е. соответствующих

вершинам с отрицательным индексом расходимости (см. (2.134)):

$$\delta_i = d_i - 4 < 0. \quad (6.108)$$

Из выражения (2.144) для индекса расходимости контрчлена

$$\delta_{\text{кч}} \leq \sum_i n_i \delta_i \quad (6.109)$$

и из того факта, что контрчлены, нарушающие симметрию, могут давать вклад только благодаря диаграммам, включающим хотя бы одно взаимодействие, нарушающее симметрию, мы заключаем непосредственно, что индекс расходимости для асимметричных контрчленов должен быть отрицательным:

$$\delta_{\text{кч}}^{\text{нс}} < 0. \quad (6.110)$$

Мы можем проиллюстрировать эту теорему двумя простыми примерами из $U(1)$ -теории (6.100).

1. Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{нс}} = \sigma$ имеет размерность единица, или $\delta_{\text{нс}} = -3$. Таким образом, единственный контрчлен, удовлетворяющий условию $\delta_{\text{кч}}^{\text{нс}} \leq -3$, имеет вид $\mathcal{L}_{\text{кч}}^{\text{нс}} = -A\sigma$ (π -член можно исключить благодаря симметрии по отношению к отражениям $\pi \rightarrow -\pi$). Это не нарушает перенормируемости теории.

2. Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{нс}} = s(\sigma^2 - \pi^2)$ имеет размерность два, или $\delta_{\text{нс}} = -2$. Поскольку взаимодействия с размерностью меньше двух, или $\delta_{\text{кч}} \leq -2$, могут быть только вида $(\sigma^2 + \pi^2)$ или $(\sigma^2 - \pi^2)$ (линейные по полям члены исключаются благодаря симметрии по отношению к отражениям), то перенормируемость вновь сохраняется.

Спонтанное нарушение симметрии, очевидно, принадлежит к числу мягких, поскольку сдвиг полей меняет только члены размерности меньше четырех. Замечательным обстоятельством является то, что эти нарушающие симметрию члены не только не индуцируют появление асимметричных членов с размерностью, большей или равной четырем, но и члены низшей размерности сохраняют алгебраические соотношения, присущие исходной теории. Таким образом, процесс перенормировки не вносит дополнительного нарушения симметрии в том смысле, что симметричных контрчленов достаточно, чтобы устранить из теории бесконечности, независимо от того, как реализуется симметрия: «обычным» образом или согласно Голдстоуну.

6.4. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ, ИНДУЦИРОВАННОЕ РАДИАЦИОННЫМИ ПОПРАВКАМИ

В приведенных выше рассуждениях о спонтанном нарушении симметрии (СНС) в теории поля мы использовали потенциальную часть классического лагранжиана, чтобы решить в

каждом порядке теории возмущений, что является истинным вакуумом. Нам приходилось производить сдвиг поля в каждом порядке (см. вычисления в разд. 6.3). Требуется более систематический метод анализа СНС, который позволил бы рассматривать сразу все возможные вакуумы и вычислять поправки высших порядков, прежде чем решить, какой из вакуумов в итоге выбирает теория. Таким формализмом является метод эффективного потенциала [195, 229, 350, 351], а соответствующей аппроксимационной схемой служит петлевое разложение [300]. Здесь мы следуем изложению Коулмена и Вайнберга [97].

Метод эффективного потенциала

Чтобы описать этот подход в рамках формализма функционального интегрирования, рассмотрим сначала простой случай одного скалярного поля. Производящий функционал для функций Грина дается выражением (1.74):

$$W[J] = \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi(x)) + J(x)\phi(x)] \right\}. \quad (6.111)$$

Мы можем также рассматривать данное выражение как амплитуду перехода вакуум — вакуум в присутствии внешнего источника $J(x)$:

$$W[J] = \langle 0|0 \rangle_J. \quad (6.112)$$

Когда мы разлагаем величину $\ln W[J]$ в функциональный ряд Тейлора по степеням $J(x)$, коэффициенты разложения представляют собой связанные функции Грина (1.76):

$$\begin{aligned} \ln W[J] &= \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \end{aligned} \quad (6.113)$$

Определим классическое поле $\phi_{\text{кл}}$ как вакуумное среднее (BC) оператора ϕ в присутствии источника $J(x)$:

$$\phi_{\text{кл}}(x) = \frac{\delta \ln W}{\delta J(x)} = \left[\frac{\langle 0|\phi(x)|0 \rangle}{\langle 0|0 \rangle} \right]_J. \quad (6.114)$$

Эффективное действие классического поля $\Gamma(\phi_{\text{кл}})$ определяется функциональным преобразованием Лежандра

$$\Gamma(\phi_{\text{кл}}) = \ln W[J] - \int d^4x J(x) \phi_{\text{кл}}(x). \quad (6.115)$$

Из этого определения следует

$$\frac{\delta \Gamma(\phi_{\text{кл}})}{\delta \phi_{\text{кл}}} = -J(x). \quad (6.116)$$

Мы можем также разложить величину $\Gamma(\phi_{\text{кл}})$ в ряд по степеням $\phi_{\text{кл}}$:

$$\Gamma(\phi_{\text{кл}}) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_{\text{кл}}(x_1) \dots \phi_{\text{кл}}(x_n). \quad (6.117)$$

Можно показать, что величина $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ является суммой всех диаграмм Фейнмана с n внешними линиями. Альтернативно мы можем разложить эффективное действие $\Gamma(\phi_{\text{кл}})$ по степеням импульса. В конфигурационном пространстве это разложение имеет вид

$$\Gamma(\phi_{\text{кл}}) = \int d^4x \left[-V(\phi_{\text{кл}}) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{\text{кл}})^2 Z(\phi_{\text{кл}}) + \dots \right]. \quad (6.118)$$

Член, не содержащий производных величин $V(\phi_{\text{кл}})$, называется *эффективным потенциалом*. Чтобы выразить V через одночастично-неприводимые функции Грина, запишем сначала $\Gamma^{(n)}$ в импульсном пространстве:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_n) \times \\ \times e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} \Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n). \quad (6.119)$$

Подставляя это выражение в (6.117) и производя разложение по степеням k_i , получаем

$$\Gamma(\phi_{\text{кл}}) = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} \times \\ \times \int d^4x e^{i(k_1 + \dots + k_n) x} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} \times \\ \times [\Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) \phi_{\text{кл}}(x_1) \dots \phi_{\text{кл}}(x_n) + \dots] = \\ = \int d^4x \sum_n \frac{1}{n!} \{ \Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) [\phi_{\text{кл}}(x)]^n + \dots \}. \quad (6.120)$$

Сравнивая выражения (6.118) и (6.120), мы видим, что n -я производная величины $V(\phi_{\text{кл}})$ совпадает с суммой всех одночастично-неприводимых диаграмм с n внешними линиями, несущими импульс, равный нулю:

$$V(\phi_{\text{кл}}) = - \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) [\phi_{\text{кл}}(x)]^n. \quad (6.121)$$

Стандартные условия нормировки, существующие в теории возмущений, могут быть выражены через функции, входящие в выражение (6.118). Например, в теории $\lambda\phi^4$ мы можем определить квадрат массы как значение обратного пропагатора при нулевом импульсе:

$$\Gamma^{(2)}(0) = -\mu^2, \quad (6.122)$$

Это дает

$$\mu^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\phi_{\text{кл}}^2} \right|_{\phi_{\text{кл}}=0}. \quad (6.123)$$

Аналогично если мы определим константу связи как значение четырехточечной функции при нулевом внешнем импульсе

$$\Gamma^{(4)}(0) = -\lambda, \quad (6.124)$$

то

$$\lambda = \left. \frac{d^4 V}{d\phi_{\text{кл}}^4} \right|_{\phi_{\text{кл}}=0}. \quad (6.125)$$

Стандартное условие перенормировки волновой функции принимает вид

$$Z(\phi_{\text{кл}})|_{\phi_{\text{кл}}=0} = 1. \quad (6.126)$$

Рассмотрим теперь спонтанное нарушение симметрии в теории с некоторой внутренней симметрией. Оно имеет место, если вакуумное среднее квантованного поля ϕ отлично от нуля даже тогда, когда источник $J(x)$ обращается в нуль. На нашем языке (см. соотношения (6.114) и (6.116)) это означает, что СНС происходит, когда выполняется равенство

$$\frac{\delta \Gamma(\phi_{\text{кл}})}{\delta \phi_{\text{кл}}} = 0 \quad (6.127)$$

при некотором ненулевом значении $\phi_{\text{кл}}$. Более того, поскольку нас обычно интересуют случаи, когда ВС трансляционно-инвариантно, мы можем упростить (6.127) следующим образом:

$$\frac{\delta V(\phi_{\text{кл}})}{\delta \phi_{\text{кл}}} = 0 \text{ при } \phi_{\text{кл}} \neq 0. \quad (6.128)$$

Значение $\phi_{\text{кл}}$, при котором достигается минимум функции $V(\phi_{\text{кл}})$, мы будем обозначать через $\langle \phi \rangle$. Это среднее значение поля ϕ в новом вакуумном состоянии.

Петлевое разложение

Для вычисления $V(\phi_{\text{кл}})$ необходима схема приближений, которая сохраняла бы главное преимущество формализма эффективного потенциала — возможность рассматривать все вакуумы одновременно, прежде чем решить, какой из них является истинным основным состоянием. Очевидно, что обычная теория возмущений с ее разложением по степеням константы связи не подходит для этой цели, поскольку там приходится выбирать в каждом порядке истинное вакуумное состояние и производить сдвиг поля.

Вместо этого мы сформулируем здесь теорию возмущений в виде *петлевого разложения*, т. е. разложения по возрастаю-

шему числу независимых петель в связанных диаграммах Фейнмана. Таким образом, графами низшего порядка будут борновские или древесные диаграммы. Следующий порядок составляют однопетлевые диаграммы, содержащие одно интегрирование по внутреннему импульсу, и т. д. Для эффективного потенциала (6.121) каждый петлевой уровень включает бесконечное суммирование, соответствующее всем возможным внешним линиям. Обычный классический потенциал, с которым мы работали, является просто первым членом (древесные диаграммы) петлевого разложения величины $V(\phi_{кл})$. В действительности петлевое разложение можно отождествить с разложением по степеням константы Планка \hbar . Это можно показать следующим образом. Пусть I — число внутренних линий, а V — число вершин в данной диаграмме Фейнмана. Число независимых петель L равно числу независимых внутренних импульсов, остающихся после того, как учтен закон сохранения импульса в каждой вершине. Поскольку объединение этих законов сохранения импульса отвечает сохранению полного внешнего импульса, число независимых петель в данной диаграмме Фейнмана дается выражением

$$L = I - (V - 1). \quad (6.129)$$

Чтобы связать L со степенью \hbar , нужно проследить, как входит \hbar в стандартную процедуру квантования. Во-первых, \hbar входит в каноническое коммутационное соотношение

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.130)$$

Поэтому множитель \hbar входит в выражение для свободного пропагатора в импульсном пространстве:

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(0)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{i\hbar}{k^2 - m^2 + ie}. \quad (6.131)$$

Во-вторых, \hbar входит в выражение для оператора эволюции $\exp[-iHt/\hbar]$, благодаря чему в представлении взаимодействия фигурирует оператор $\exp\left[i/\hbar \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) d^4x\right]$. Отсюда следует, что в каждой вершине имеется множитель $1/\hbar$. Таким образом, в данную диаграмму Фейнмана входит величина \hbar в степени P :

$$P = I - V = L - 1. \quad (6.132)$$

Следовательно, число петель и степень \hbar непосредственно связаны между собой. Утверждение, что петлевое разложение соответствует разложению по константе Планка, в действительности эквивалентно утверждению, что данное разложение ведется по некоторому параметру a , который является множителем при полном лагранжиане:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, a) \equiv a^{-1}\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \quad (6.133)$$

Приведенный подсчет степеней \hbar (т. е. величины P) отражает тот факт, что, в то время как каждая вершина дает множитель a^{-1} , пропагатор дает множитель a , так как он является величиной, *обратной* по отношению к дифференциальному оператору, входящему в квадратичные члены в \mathcal{L} . Поскольку \hbar , или a , является множителем при полном лагранжиане, он остается неизменным при сдвигах полей и при переопределении или разбиении \mathcal{L} на свободную часть и часть, соответствующую взаимодействию, связанном с такими сдвигами. Короче говоря, он позволяет вычислить потенциал $V(\phi_{\text{кл}})$ до того, как произведен сдвиг. Таким образом, мы имеем пертурбативную схему, подходящую для наших целей.

Отметим, что петлевое разложение представляет собой схему, которая, конечно, не хуже разложения по степеням константы связи обычной теории возмущений, поскольку петлевое разложение на каждом заданном петлевом уровне содержит разложение по константе связи как составную часть. В самом деле, если мы фиксируем число внешних линий (чего мы не делаем при вычислении $V(\phi_{\text{кл}})$), то в простом случае одной константы связи эти два разложения совпадают. Например, в теории $\lambda\phi^4$ (см. (2.58)) для функций Грина с E внешними линиями имеем соотношение

$$4V = E + 2I, \quad (6.134)$$

которое можно преобразовать в соотношение между степенью константы связи V и числом петель L , если воспользоваться выражением (6.129), чтобы исключить I :

$$V = \frac{1}{2}E - L + 1. \quad (6.135)$$

Эффективный потенциал в теории $\lambda\phi^4$

Для иллюстрации вычисления эффективного потенциала рассмотрим простой случай теории $\lambda\phi^4$ в однопетлевом приближении. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (6.136)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2, \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

Мы исследуем три случая, соответствующие $\mu^2 > 0$, $\mu^2 < 0$ и $\mu^2 = 0$.

1. *Случай $\mu^2 > 0$ (СНС отсутствует)*. Чтобы вычислить эффективный потенциал (6.121), необходимо произвести суммирование по всем однопетлевым диаграммам с четным числом внешних линий, обладающих нулевым импульсом (рис. 6.12).

Одночастично-неприводимая функция Грина дается формулой

$$\Gamma^{(2n)}(0, \dots, 0) = iS_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(-i\lambda) \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right]^n, \quad (6.137)$$

где S_n — симметричный фактор:

$$S_n = \frac{(2n)!}{2^n 2n}, \quad (6.138)$$

отвечающий тому обстоятельству, что имеется $(2n)!$ способов сопоставить $2n$ частиц с внешними линиями диаграммы и что перестановки любых двух внешних линий в данной вершине или

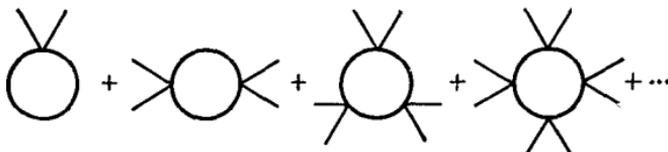


Рис. 6.12.

отражения и повороты n вершин вдоль окружности не дают новых вкладов. Тогда эффективный потенциал, соответствующий беспетлевому и однопетлевому вкладам, имеет вид

$$\begin{aligned} V(\phi_{\text{кл}}) &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left[\frac{(\lambda/2) \phi_{\text{кл}}^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right]^n = \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 + \frac{\lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Интеграл расходится. Если обрезать его при некотором большом импульсе, то получим

$$\begin{aligned} V(\phi_{\text{кл}}) &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_{\text{кл}}^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{64\pi^2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_{\text{кл}}^2 \right)^2 \left[\ln \left(\frac{\mu^2 + \lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2 + i\epsilon}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Появление выражения $\mu^2 + \lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2$ связано с суммированием:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} + \frac{1}{k^2 - \mu^2} \frac{1}{2} \lambda \phi_{\text{кл}}^2 \frac{1}{k^2 - \mu^2} + \dots = \frac{1}{k^2 - (\mu^2 + \lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2)}, \quad (6.141)$$

т. е. член $\lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2$ фактически является массовой вставкой (в этой связи см. соотношение (6.147)).

Чтобы устранить зависимость от параметра обрезания, введем контрчлены, которые имеют ту же структуру, что и исходный потенциал:

$$V_{\text{кч}}(\phi_{\text{кл}}) = \frac{A}{2} \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{B}{4!} \phi_{\text{кл}}^4, \quad (6.142)$$

так что перенормированный эффективный потенциал, определяемый выражением

$$V_r(\phi_{\text{кл}}) = V(\phi_{\text{кл}}) + V_{\text{кч}}(\phi_{\text{кл}}), \quad (6.143)$$

конечен и не зависит от параметра обрезания. Коэффициенты A и B в (6.142) можно определить из нормировочных условий (6.123) — (6.126). Мы получаем

$$V_r(\phi_{\text{кл}}) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left[\left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_{\text{кл}}^2 \right)^2 \ln \left(\frac{\mu^2 + \lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2}{\mu^2} \right) - \frac{\lambda \mu^2}{2} \phi_{\text{кл}}^2 - \frac{3}{8} \lambda^2 \phi_{\text{кл}}^4 \right]. \quad (6.144)$$

Мы видим, что поведение $V(\phi_{\text{кл}})$ при больших значениях $\phi_{\text{кл}}$ изменяется за счет радиационных поправок.

Рис. 6.13.

2. Случай $\mu^2 < 0$ (имеется СНС). Для иллюстрации мы произведем здесь другое разбиение лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi), \quad (6.145)$$

где

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (6.146)$$

и будем рассматривать $U(\phi)$ как возмущение. Имеются две вершины μ^2 и $\lambda \phi^2/2$, которые показаны на рис. 6.13, а. Их сумма равна второй производной $U''(\phi)$, которая совпадает с квадратом массы скалярной частицы при $\phi = \langle \phi \rangle$. Мы будем использовать обозначение

$$m_s^2(\phi) = \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi^2. \quad (6.147)$$

Эффективный потенциал, вычисленный с помощью суммирования диаграмм, приведенных на рис. 6.13, б, с безмассовым пропагатором и вершинами $m_s^2(\phi)$, имеет вид

$$\begin{aligned} V(\phi_{\text{кл}}) &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left[\frac{m_s^2(\phi_{\text{кл}})}{k^2 + i\epsilon} \right]^n = \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[1 + \frac{m_s^2(\phi_{\text{кл}})}{k^2 + i\epsilon} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{m_s^4(\phi_{\text{кл}})}{64\pi^2} \left[\ln \phi_{\text{кл}}^2 / \mu^2 + \dots \right]. \quad (6.148) \end{aligned}$$

Мы видим, что с точностью до несущественной константы это тот же результат, что и в первом случае, где $\mu^2 > 0$. Таким образом, если мы выберем то же нормировочное условие, что и в первом случае, то придем к тому же перенормированному потенциалу (6.144). В данном случае величина μ^2 имеет другой физический смысл и не является массой частицы в нулевом приближении. Тем не менее это конечная величина, параметризующая теорию.

Вычисления в первом и втором случаях иллюстрируют преимущество рассматриваемого пертурбативного подхода: один и тот же результат можно получить независимо от того, имеет место СНС или нет, — не надо производить заранее сдвиг поля. Кроме того, этот подход нечувствителен к тому, каким способом мы разбиваем лагранжиан — как в формуле (6.136) или как в (6.145). Более важным обстоятельством является то, что даже при СНС контрчлены остаются теми же, что и в симметричной теории. Иными словами, ультрафиолетовые расходимости не нарушают симметрию лагранжиана, даже если вакуум ее нарушает. Здесь находит отражение тот факт, что спонтанное нарушение симметрии возникает благодаря отличному от нуля вакуумному среднему $\langle \phi \rangle$, которое имеет размерность массы, а конечные массы не влияют на ультрафиолетовые расходимости.

3. *Случай $\mu^2 = 0$ (СНС возникает благодаря радиационным поправкам)*. В этом случае величина $V(\phi)$ мало отличается от постоянной в окрестности значения $\phi = 0$, и обычная процедура, основанная на использовании классического потенциала, не является адекватным методом решения вопроса о том, индуцируется СНС или нет. Чтобы уяснить себе картину реализации симметрии, надо перейти к высшим порядкам теории. Коулмен и Вайнберг [97] впервые отметили это интересное явление — возбуждение СНС радиационными поправками. Из-за инфракрасных расходимостей мы не можем перейти к пределу $\mu^2 \rightarrow 0$ в выражении (6.144). Чтобы обойти эту трудность, выберем для константы связи нормировочное условие, отличное от (6.125). Вместо (6.125) при $\phi_{\text{кл}} = 0$ положим

$$\lambda = \left. \frac{d^4 V}{d\phi_{\text{кл}}^4} \right|_{\phi_{\text{кл}}=M}, \quad (6.149)$$

где M — некоторый произвольный параметр размерности массы. Эффективный потенциал при $\mu \ll M$ принимает теперь вид

$$\begin{aligned} V_r(\phi_{\text{кл}}) = & \frac{1}{2} \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\text{кл}}^4 + \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ \left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_{\text{кл}}^2 \right)^2 \ln \left[\frac{\mu^2 + \lambda \phi_{\text{кл}}^2 / 2}{\mu^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \lambda \mu^2 \phi_{\text{кл}}^2 - \frac{25}{24} \lambda^2 \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi_{\text{кл}}^4 \ln \left(\frac{2\mu^2}{\lambda M^2} \right) \right\}. \quad (6.150) \end{aligned}$$

Это выражение при $\mu^2 = 0$ имеет предел

$$V_r(\phi_{\text{кл}}) = \frac{1}{4!} \lambda \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{\lambda^2 \phi_{\text{кл}}^4}{256\pi^2} \left[\ln \frac{\phi_{\text{кл}}^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right]. \quad (6.151)$$

Поскольку второй член в (6.151) отрицателен при малых $\phi_{\text{кл}}$, он приводит к тому, что минимум нулевого порядка, расположенный в нуле, превращается в локальный максимум и возникает новый минимум в некоторой точке, отличной от нуля. Иными словами, однопетлевая поправка явилась причиной СНС. Но этот вывод не является безоговорочным, поскольку новый минимум локализован в точке, определяемой равенством

$$\lambda \ln \frac{\langle \phi \rangle^2}{M^2} = -\frac{32}{3} \pi^2 + O(\lambda). \quad (6.152)$$

Тот факт, что величина $\lambda \ln(\langle \phi \rangle^2/M^2)$ больше единицы (т. е. петлевой вклад больше вклада от древесных диаграмм), означает, что новый минимум лежит вне области применимости однопетлевого приближения. В данной простой теории с одной константой связи такой результат неизбежен. Поскольку мы хотим, чтобы однопетлевой вклад был сравним с вкладом древесных диаграмм, величина $\lambda \ln \langle \phi \rangle^2$ должна быть большой, но λ — единственный параметр теории. Это означает, что для того, чтобы избежать этой трудности, следует рассмотреть теорию с более чем одной связью

Безмассовая скалярная КЭД (размерная трансмутация)

Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - \frac{\lambda}{4!} (\phi^*\phi)^2; \quad (6.153)$$

здесь A_μ — фотонное поле, причем $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а ϕ — комплексное скалярное поле:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad (6.154)$$

где $\phi_{1,2}$ вещественны. Мы имеем теперь две константы связи λ и e и можем построить малый параметр разложения.

Вычисление заметно упрощается в калибровке Ландау, где фотонный пропагатор имеет вид

$$i\Delta_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + ie}. \quad (6.155)$$

Поскольку мы всегда считаем, что внешние импульсы равны нулю, и поскольку $k^\mu \Delta_{\mu\nu}(k) = 0$, все графы типа показанного на рис. 6.14 не дают вклада. Заметим также, что эффективный потенциал может зависеть только от величины $\phi_{\text{кл}}^2 = \phi_{\text{кл}}^* \phi_{\text{кл}} = \phi_{1\text{кл}}^2 + \phi_{2\text{кл}}^2$. Нам необходимо вычислить только диаграммы,

имеющие внешние линии, отвечающие полю ϕ_1 ; имеются три основных класса графов с различными частицами, пробегающими по петле (рис. 6.15). Таким образом, получаем

$$V(\phi_{\text{кл}}) = \frac{1}{4!} \lambda \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{\phi_{\text{кл}}^4}{64\pi^2} \left\{ \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] + 3e^4 \right\} \times \\ \times \left[\ln \frac{\phi_{\text{кл}}^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right]. \quad (6.156)$$

Вычисление полностью аналогично предыдущему случаю. Необходимо только заметить, что константа $\phi_1^2 \phi_2^2$ -связи составляет $1/3$ константы ϕ_1^4 -связи, так как виковские спаривания различаются между собой, а дополнительный множитель 3 в

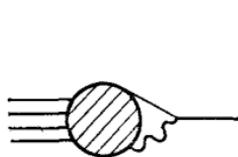


Рис. 6.14.

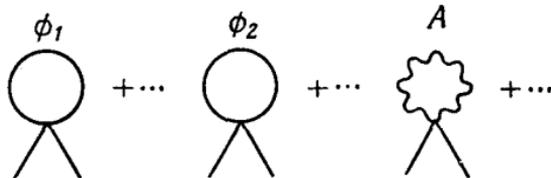


Рис. 6.15.

фотонной петле возникает в результате взятия следа фотонного пропагатора в калибровке Ландау. Если предположить, что λ порядка e^4 , то можно пренебречь членом, пропорциональным λ^2 , в выражении (6.156). Поскольку M — произвольная величина, примем, что она определяет положение нового минимума, $M = \langle \phi \rangle$. Эффективный потенциал принимает тогда вид

$$V(\phi_{\text{кл}}) = \frac{1}{4!} \lambda \phi_{\text{кл}}^4 + \frac{3e^4}{64\pi^2} \phi_{\text{кл}}^4 \left(\ln \frac{\phi_{\text{кл}}^2}{\langle \phi \rangle^2} - \frac{25}{6} \right). \quad (6.157)$$

Мы имеем также соотношение

$$0 = V'(\langle \phi \rangle) = \left(\frac{\lambda}{6} - \frac{11e^4}{16\pi^2} \right) \langle \phi \rangle^3,$$

или

$$\lambda = \frac{33}{8\pi^2} e^4. \quad (6.158)$$

Удивительно, что существует соотношение, связывающее между собой две независимые константы связи. Это можно понять следующим образом. Сначала мы имели два безразмерных параметра e и λ . В результате мы получили также два параметра e и $\langle \phi \rangle$. Иными словами, мы заменили безразмерный параметр λ на размерный параметр $\langle \phi \rangle$. Это явление было названо *размерной трансмутацией* [97]; оно присуще любой теории, в которой нет масштаба размерности массы. Изменение M всегда требует нового определения константы связи. С учетом соотношения (6.158) для потенциала (6.157) можно записать более простое

выражение

$$V(\phi_{\text{кл}}) = \frac{3e^4}{64\pi^2} \phi_{\text{кл}}^4 \ln \left(\frac{\phi_{\text{кл}}^2}{\langle \phi \rangle^2} - \frac{1}{2} \right), \quad (6.159)$$

которое имеет минимум при $\phi_{\text{кл}} = \langle \phi \rangle$, и симметрия спонтанно нарушена. В данном случае петлевое разложение применимо, поскольку вклад однопетлевого приближения может быть сделан меньшим, чем вклад древесного приближения. Кстати, поскольку масса «фотона» после СНС равна $m_\nu = e\langle \phi \rangle$, мы можем использовать обозначение

$$m_\nu(\phi) = e\phi \quad (6.160)$$

и записать (6.157) в виде

$$V(\phi_{\text{кл}}) = \frac{3m_\nu^4(\phi_{\text{кл}})}{64\pi^2} \ln \left(\frac{\phi_{\text{кл}}^2}{\langle \phi \rangle^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (6.161)$$

Полезно сравнить это выражение с выражением (6.148) для скалярной петли.

Заметим также, что если в теорию входят фермионы, то кроме скалярных и векторных петель имеются также фермионные петли. Мы можем вычислить их вклад аналогичным способом. Если воспользоваться тем же методом, что и в рассмотренном выше втором случае, и работать с безмассовыми пропагаторами, то мы получим вершину общего вида $m_f(\phi) = m + h\phi$, где m — масса голого фермиона, а h — константа взаимодействия Юкавы. Поскольку след произведения нечетного числа γ -матриц Дирака равен нулю, необходимо иметь четное число фермионных пропагаторов. При этом можно сгруппировать члены следующим образом:

$$\dots m_f(\phi) \frac{1}{\hbar} m_f(\phi) \frac{1}{\hbar} \dots = \dots \frac{1}{\hbar^2} m_f^2(\phi) \dots \quad (6.162)$$

Тогда вычисления становятся такими же, как в скалярном случае, за одним важным исключением: общим знаком минус при интеграле вдоль петли. Мы имеем следующий вклад от фермионной петли:

$$\delta V(\phi_{\text{кл}}) = -\frac{4}{64\pi^2} m_f^4(\phi_{\text{кл}}) \left[\ln \frac{\phi_{\text{кл}}^2}{M^2} + \dots \right]. \quad (6.163)$$

Множитель 4 возник в результате взятия следа матриц Дирака. Таким образом, в теории, содержащей векторные, скалярные и фермионные петли, мы можем объединить выражения (6.161), (6.148) и (6.163) и получить однопетлевой вклад в виде

$$\delta V(\phi_{\text{кл}}) = \frac{1}{64\pi^2} \left[3m_\nu^4(\phi_{\text{кл}}) + m_s^4(\phi_{\text{кл}}) - 4m_f^4(\phi_{\text{кл}}) \right] \ln \frac{\phi_{\text{кл}}^2}{M^2} + \dots \quad (6.164)$$

ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ И СКЕЙЛИНГ

В процессах лептон-адронного рассеяния при высоких энергиях и больших передачах импульса имеет место замечательное явление, известное как *бьёркеновский скейлинг*. Этот пример корреляции между энергией и угловым распределением рассеянных лептонов в рассматриваемых глубоконеупругих процессах находит простое объяснение в рамках партонной модели Фейнмана [137]. На малых расстояниях адроны можно рассматривать как составные частицы, построенные из (почти свободных) точечноподобных составляющих, обладающих спином $1/2$, так называемых *партонов*. Естественно отождествить их с кварками. После описания кварк-партонной модели и некоторых ее приложений в первых двух разделах главы мы излагаем затем формальный теоретико-полевой аппарат, необходимый для описания поведения на малых расстояниях. Это операторное разложение Вильсона [427] с коэффициентами, удовлетворяющими ренормгрупповым уравнениям. Таким образом, закладывается основа для создания полевой теории сильных взаимодействий, в которой роль фундаментальных полей материи играют кварки.

7.1. ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО ЛЕПТОН-АДРОННОГО РАССЕЯНИЯ

Кинематика и бьёркеновский скейлинг

Лептоны, участвующие в глубоконеупругих процессах, являются либо заряженными лептонами (электронами или мюонами), либо нейтрино, которые рассеиваются на нуклонах мишени посредством электромагнитных или слабых взаимодействий соответственно.

Электрон-нуклонный случай. Импульсы частиц, участвующих в реакции

$$e(k) + N(p) \rightarrow e(k') + X(p_n), \quad (7.1)$$

показаны на рис. 7.1, где X — некоторое адронное конечное состояние с полным импульсом p_n .

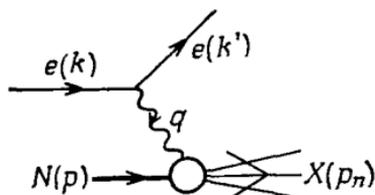


Рис. 7.1.

Определим кинематические переменные соотношениями

$$q = k - k', \quad v = pq/M, \quad W^2 = p_n^2 = (p + q)^2. \quad (7.2)$$

В лабораторной системе имеем

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0), \quad k_\mu = (E, \mathbf{k}), \quad k'_\mu = (E', \mathbf{k}'); \quad (7.3)$$

величина v равна потере энергии лептона

$$v = E - E', \quad (7.4)$$

и, если пренебречь массой лептона m_l , то справедливо соотношение

$$q^2 = (k - k')^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 0, \quad Q^2 = -q^2, \quad (7.5)$$

где θ — угол рассеяния лептона. Амплитуда рассеяния дается выражением

$$T_n = e^2 \bar{u}(k', \lambda') \gamma^{\mu\nu} u(k, \lambda) \frac{1}{q^2} \langle n | J_\mu^{\text{EM}}(0) | p, \sigma \rangle, \quad (7.6)$$

где J_μ^{EM} — адронный электромагнитный ток. Дифференциальное сечение рассеяния для неполяризованных частиц имеет вид

$$d\sigma_n = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{1}{2M} \frac{1}{2E} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \right] \times \\ \times \frac{1}{4} \sum_{\sigma, \lambda, \lambda'} |T_n|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p + k - k' - p_n), \quad (7.7)$$

где $p_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Если просуммировать по всем возможным конечным адронным состояниям (это означает, что они не детектируются), то мы получим *инклюзивное сечение рассеяния*

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{q^4} \left(\frac{E'}{E} \right) l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (7.8)$$

где $\alpha = e^2/4\pi$ — постоянная тонкой структуры. Лептонный тензор имеет вид

$$l_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{k}' \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu) = 2 \left(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right), \quad (7.9)$$

а адронный тензор дается выражением

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu}(p, q) &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \sum_n \int \prod_{i=1}^n \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_{i0}} \right] \times \\
 &\times \langle p, \sigma | J_{\mu}^{\text{EM}}(0) | n \rangle \langle n | J_{\nu}^{\text{EM}}(0) | p, \sigma \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p_n - p - q) = \\
 &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 x}{2\pi} e^{iqx} \langle p, \sigma | J_{\mu}^{\text{EM}}(x) J_{\nu}^{\text{EM}}(0) | p, \sigma \rangle. \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

Иногда удобно записывать его в виде коммутатора. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 x}{2\pi} e^{iqx} \langle p, \sigma | J_{\nu}(0) J_{\mu}(x) | p, \sigma \rangle &= \\
 &= \sum_n \int \frac{d^4 x}{2\pi} e^{i(p_n - p + q)x} \langle p, \sigma | J_{\nu}(0) | n \rangle \langle n | J_{\mu}(0) | p, \sigma \rangle = \\
 &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(p_n - p + q) \langle p, \sigma | J_{\nu}(0) | n \rangle \langle n | J_{\mu}(0) | p, \sigma \rangle. \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

В лабораторной системе $q_0 = \nu > 0$ нет промежуточных состояний $|n\rangle$ с энергией $E_n = M - \nu \leq M$, которые могли бы давать вклад; таким образом, выписанное выше выражение обращается в нуль. Следовательно, мы можем записать

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu}(p, q) &= \\
 &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4 x}{2\pi} e^{iqx} \langle p, \sigma | [J_{\mu}^{\text{EM}}(x), J_{\nu}^{\text{EM}}(0)] | p, \sigma \rangle. \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

Из закона сохранения тока $\partial^{\mu} J_{\mu}^{\text{EM}} = 0$ следует

$$q^{\mu} \langle p, \sigma | J_{\mu}^{\text{EM}} | n \rangle = 0,$$

или

$$q^{\mu} W_{\mu\nu} = q^{\nu} W_{\mu\nu} = 0. \quad (7.13)$$

Из соотношения (7.13) и того факта, что $W_{\mu\nu}$ является лоренцевым тензором второго ранга, зависящим от импульсов p_{μ} и q_{μ} , можно вывести для него ковариантное разложение вида

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu}(p, q) &= \left[-W_1 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{W_2}{M^2} \left(p_{\mu} - \frac{pq}{q^2} q_{\mu} \right) \left(p_{\nu} - \frac{pq}{q^2} q_{\nu} \right) \right], \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

где $W_{1,2}$ — лоренц-инвариантные структурные функции нуклона-мишени, зависящие от инвариантных переменных q^2 и ν (см. (7.2) и (7.5)). Мы можем записать выражение (7.8) в виде

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (7.15)$$

Измерение инклюзивного сечения дает информацию о структурных функциях $W_{1,2}(q^2, \nu)$, которые являются величинами, связанными с сильными взаимодействиями. Они характеризуют отклик нуклона мишени на электромагнитное зондирование (а следовательно, его структуру).

Чтобы получить некоторое представление о структурных функциях, рассмотрим сначала частный случай, когда конечное адронное состояние $X(p_n)$ также является нуклоном. Матричный элемент электромагнитного тока между протонными или нейтронными состояниями может быть записан в виде

$$\langle N(p') | J_{\mu}^{\text{эм}}(0) | N(p) \rangle = \bar{u}(p') [\gamma_{\mu} F_1(q^2) + i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} F_2(q^2) / 2M] u(p), \quad (7.16)$$

где $q = p - p'$. Величины $F_{1,2}(q^2)$ являются лоренц-инвариантными *формфакторами*. Для протона величины $F_1^p(0) = 1$, $F_2^p(0) = 1,79$ (нуклонные магнетоны) равны полному заряду и аномальному магнитному моменту соответственно. Для нейтрона $F_1^n(0) = 0$ и $F_2^n(0) = -1,91$ соответственно. Проверим, что из соотношения $F_1^p(0) = 1$ следует значение полного заряда протона, равное $+1$. Для этого заметим, что если оператор заряда Q действует по формуле

$$Q | p \rangle = | p \rangle, \quad (7.17)$$

то справедливо соотношение

$$\langle p' | Q | p \rangle = \langle p' | p \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta^3(p' - p). \quad (7.18)$$

С другой стороны, из (7.16) следует

$$\begin{aligned} \langle p' | Q | p \rangle &= \int d^3x \langle p' | J_0^{\text{эм}}(x) | p \rangle = \int d^3x e^{i(p' - p) \cdot x} \langle p' | J_0^{\text{эм}}(0) | p \rangle = \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(p' - p) \bar{u}(p') \gamma_0 u(p) F_1(0) = 2E (2\pi)^3 \delta^3(p' - p) F_1(0). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Таким образом, из (7.17) следует, что $F_1(0) = 1$, что и требовалось доказать. В выражении (7.10) можно непосредственно перейти к упругому пределу $p_n^2 = M^2$; при этом мы получим

$$W_1^{\text{уп}}(q^2, \nu) = \delta(q^2 + 2M\nu) \frac{q^2}{2M} G_M^2(q^2), \quad (7.20)$$

$$W_2^{\text{уп}}(q^2, \nu) = \delta(q^2 + 2M\nu) \frac{2M}{(1 - q^2/4M^2)} \left[G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2(q^2) \right],$$

где величины

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M^2} F_2(q^2), \\ G_M(q^2) &= F_1(q^2) + F_2(q^2) \end{aligned} \quad (7.21)$$

являются электрическим и магнитным формфакторами соответственно. Тогда сечение упругого электрон-нуклонного рассеяния

равно

$$\frac{d\sigma^{\text{упр}}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{4E^2} \times \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right)^{-1} \left[G_E^2 - \left(\frac{q^2}{4M^2}\right) G_M^2 \right] - \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{q^2}{2M^2}\right) G_M^2}{\left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (7.22)$$

Таким образом, измерение дифференциального сечения упругого eN -рассеяния дает информацию об электрическом и магнитном формфакторах. Экспериментальные данные для протона описываются следующими эмпирическими выражениями для G_E и G_M (см. обзор [382]):

$$G_E(q^2) \approx \frac{G_M(q^2)}{\kappa_p} \approx \frac{1}{(1 - q^2/0,7 (\text{ГэВ})^2)^2}, \quad (7.23)$$

где $\kappa_p = 2,79$ — магнитный момент протона. Если бы протон был точечноподобной (бесструктурной) частицей, мы имели бы $G_M(q^2) = G_E(q^2) = 1$. Таким образом, нетривиальная зависимость от q^2 в (7.23) указывает на наличие структуры у протона. При этом упругое сечение быстро убывает, поскольку $G_E \approx G_M \sim q^{-4}$.

Если бы сечения неупругого рассеяния, соответствующие конечным состояниям, отличным от нуклона, вели себя подобно сечению упругого рассеяния, они должны были бы быстро убывать при больших q^2 . Неожиданно оказалось, что экспериментально измеренные сечения в области больших инвариантных масс в конечном состоянии $W \gg M$ обнаруживают гораздо более умеренную зависимость от q^2 (см. обзор [313]). Это наводит на мысль, что внутри нуклона должны существовать некоторые точечноподобные составляющие. Данная ситуация во многом напоминает эксперименты Резерфорда, когда результаты экспериментов по рассеянию α -частиц на большие углы приводили к заключению, что заряд атома мишени сконцентрирован в «точечноподобном ядре». Указанные бесструктурные частицы внутри нуклона называли *партонами*. Мы последовательно изучим партонную модель после того, как будет дано более подробное описание глубоконеупругого рассеяния на основе *бёркеновского скейлинга* [47].

Определим безразмерную скейлинговую переменную в виде

$$x = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu}. \quad (7.24)$$

Область изменения x

$$0 \leq x \leq 1 \quad (7.25)$$

определяется тем, что инвариантная масса ненаблюдаемого конечного адронного состояния больше массы нуклона:

$$W^2 = (p + q)^2 = q^2 + 2Mv + M^2 \geq M^2. \quad (7.26)$$

Отметим, что упругое рассеяние соответствует значению $x = 1$. Определим также переменную

$$y = \frac{v}{E} = 1 - \frac{E'}{E}, \quad (7.27)$$

которая представляет собой долю первоначальной энергии, переданную адронам. Поскольку $0 \leq E' \leq E$, переменная y меняется в пределах

$$0 \leq y \leq 1. \quad (7.28)$$

Удобно выразить сечение рассеяния через переменные x и y . Используя соотношение

$$dx dy = \frac{E'}{E} \frac{d\Omega dE'}{2\pi y M} \quad (7.29)$$

и определения

$$\begin{aligned} MW_1(q^2, v) &= G_1(x, q^2/M^2), \\ vW_2(q^2, v) &= G_2(x, q^2/M^2), \end{aligned} \quad (7.30)$$

мы можем записать (7.15) в виде

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{8\pi\alpha^2}{MEx^2y^2} \left[xy^2 G_1 + \left(1 - y - \frac{M}{2E} xy\right) G_2 \right]. \quad (7.31)$$

Бьёркеновский скейлинг состоит в утверждении, что в пределе больших Q^2 при фиксированном x величины G_i являются функциями только переменной x . Таким образом,

$$\lim_{\substack{Q^2 \rightarrow \infty \\ x \text{ фиксировано}}} G_i(x, \frac{q^2}{M^2}) = F_i(x). \quad (7.32)$$

Безразмерные структурные функции становятся независимыми от какого-либо массового масштаба. Величины $F_i(x)$ называют *скейлинговыми функциями*. Экспериментально бьёркеновский скейлинг в ep -рассеянии был, по-видимому, установлен при довольно низких значениях $Q^2 \geq 2$ (ГэВ)².

Нейтрино-нуклонное рассеяние. Перейдем теперь к процессу

$$\nu_l(k) + N(p) \rightarrow l^-(k') + X(p_n), \quad (7.33)$$

который идет через заряженный слабый ток. Поскольку здесь используется та же основная идея, что и выше при описании электромагнитного lN -рассеяния, и поскольку данная реакция уже рассматривалась при обсуждении правила сумм Адлера в алгебре токов в разд. 5.2, мы приведем здесь лишь сводку результатов. Предположим, что взаимодействие ток — ток описы-

вается слабым эффективным лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = - \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_{\lambda}^{\dagger} J^{\lambda} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (7.34)$$

где G_F — константа Ферми. Слабый (заряженный) ток J^{λ} можно разделить на лептонную и адронную части:

$$J^{\lambda} = J_l^{\lambda} + J_h^{\lambda}. \quad (7.35)$$

Для лептонного слабого тока имеется явное выражение

$$J_l^{\lambda} = \bar{\nu}_e \gamma^{\lambda} (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_{\mu} \gamma^{\lambda} (1 - \gamma_5) \mu + \dots \quad (7.36)$$

Сечение рассеяния нейтрино и антинейтрино можно записать в виде

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu)}}{d\Omega dE'} = \frac{G_F^2}{2\pi^2} E'^2 \left[2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1^{(\nu)} + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2^{(\nu)} - \frac{(E + E')}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3^{(\nu)} \right], \quad (7.37)$$

$$\frac{d^2\sigma^{(\bar{\nu})}}{d\Omega dE'} = \frac{G_F^2}{2\pi^2} E'^2 \left[2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1^{(\bar{\nu})} + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2^{(\bar{\nu})} + \frac{(E + E')}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} W_3^{(\bar{\nu})} \right], \quad (7.38)$$

где $W_i^{(\nu)}$ — структурные функции, определяемые соотношением

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{(\nu)} &= \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4x}{2\pi} e^{iqx} \langle p, \sigma | [J_{h\beta}(x), J_{h\alpha}^{\dagger}(0)] | p, \sigma \rangle = \\ &= -W_1^{(\nu)} g_{\alpha\beta} + W_2^{(\nu)} p_{\alpha} p_{\beta} / M^2 - iW_3^{(\nu)} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\gamma} q^{\delta} / M^2 + \\ &+ W_4^{(\nu)} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{M^2} + W_5^{(\nu)} (p_{\alpha} q_{\beta} + p_{\beta} q_{\alpha}) / M^2 + iW_6^{(\nu)} (p_{\alpha} q_{\beta} - p_{\beta} q_{\alpha}) / M^2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Величины $W_i^{(\nu)}$ можно получить из (7.39), совершая замену $J_{h\alpha} \leftrightarrow J_{h\alpha}^{\dagger}$ (см. также разд. 5.2). Определим также безразмерные структурные функции

$$\begin{aligned} M W_1^{(\nu)}(q^2, \nu) &= G_1^{(\nu)}(x, q^2/M^2), \\ \nu W_2^{(\nu)}(q^2, \nu) &= G_2^{(\nu)}(x, q^2/M^2), \\ \nu W_3^{(\nu)}(q^2, \nu) &= G_3^{(\nu)}(x, q^2/M^2). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Для этих структурных функций также выполняется бьёркеновский скейлинг

$$\lim_{\substack{|q^2| \rightarrow \infty \\ x \text{ фиксирован}}} G_i^{(\nu)}(x, q^2/M^2) = F_i^{(\nu)}(x). \quad (7.41)$$

Часто удобно пользоваться структурными функциями с определенной спиральностью. Их можно получить следующим образом. В лабораторной системе выберем ось z так, чтобы импульсы p_μ и q_μ имели вид

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0), \quad q_\mu = (q_0, 0, 0, q_3). \quad (7.42)$$

При этом вектор продольной поляризации имеет вид

$$\epsilon_\mu^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{-q^2}} (q_3, 0, 0, q_0). \quad (7.43)$$

Соответствующая структурная функция равна

$$W_S(q^2, \nu) = \epsilon_\mu^{(S)*} W^{\mu\nu} \epsilon_\nu^S = -W_1 - \frac{q_3^2}{q^2} W_2 = \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) W_2 - W_1, \quad (7.44)$$

где мы опустили индекс, обозначающий нейтрино (ν). Векторы правой и левой поперечной поляризации имеют вид

$$\epsilon_\mu^{(R)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0), \quad (7.45)$$

$$\epsilon_\mu^{(L)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0), \quad (7.46)$$

а соответствующие им структурные функции равны

$$W_R = W_1 + \frac{1}{2M} (\nu^2 - q^2)^{1/2} W_3, \quad (7.47)$$

$$W_L = W_1 - \frac{1}{2M} (\nu^2 - q^2)^{1/2} W_3.$$

Заметим, что эти структурные функции с определенными спиральностями W_L , W_R и W_S должны быть положительными. В пределе, когда выполняется скейлинг, следующие спиральные структурные функции зависят только от одной переменной x :

$$2MW_S \rightarrow F_S = \frac{1}{x} F_2 - 2F_1,$$

$$MW_L \rightarrow F_L = F_1 - \frac{1}{2} F_3, \quad (7.48)$$

$$MW_R \rightarrow F_R = F_1 + \frac{1}{2} F_3.$$

Дифференциальное сечение можно записать в виде

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu)}}{dx dy} = G_F^2 \frac{MEx}{\pi} [(1-y)F_S^{(\nu)} + F_L^{(\nu)} + (1-y)^2 F_R^{(\nu)}], \quad (7.49)$$

$$\frac{d^2\sigma^{(\bar{\nu})}}{dx dy} = G_F^2 \frac{MEx}{\pi} [(1-y)F_S^{(\bar{\nu})} + (1-y)^2 F_L^{(\bar{\nu})} + F_R^{(\bar{\nu})}]. \quad (7.50)$$

Из этих соотношений следует, что полные сечения линейно растут с энергией. (Такое поведение типично также для рассея-

ния нейтрино на точечном лептоне.) Тот факт, что данное поведение наблюдается экспериментально, служит дополнительным подтверждением существования точечноподобных составляющих нуклона.

Партонная модель

Вычислим теперь лептон-нуклонные структурные функции в *партонной модели* [52, 137], которая является субъядерным вариантом обычного импульсного приближения в теории высокоэнергетического рассеяния составных частиц со слабо связанными составляющими. Процесс инклюзивного рассеяния,

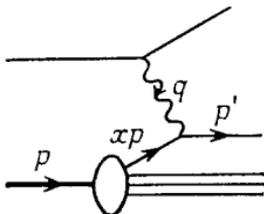


Рис. 7.2. Неупругое рассеяние лептонов на нуклонах как некогерентное упругое рассеяние на партонах.

рассматриваемого как некогерентное упругое рассеяние на точечноподобных составляющих нуклона — партонах, показан на рис. 7.2. Партоны в конечном состоянии далее рекомбинируют (фрагментируют) в адронные состояния. Таким образом, мы делаем следующие физические предположения: 1) в течение времени взаимодействия тока и партона мы можем не принимать во внимание взаимодействия между самими партонами, и 2) взаимодействия в конечном состоянии (необходимые для фрагментации в адроны) происходят в течение такого относительно большого промежутка времени, что их можно не учитывать при вычислении инклюзивных сечений. Более детальное изложение дано в книге [89].

Конкретно предполагается, что каждый из партонов со спином $1/2$ несет часть первоначального импульса нуклона, равную ξp , где $0 \leq \xi \leq 1$, т. е. мы пренебрегаем любой составляющей импульса партона, поперечной по отношению к импульсу нуклона. Следовательно, вклад от такого партона со спином $1/2$ в адронный тензор (7.10) мы можем сразу записать в виде

$$\begin{aligned}
 K_{\mu\nu}(\xi) &= \frac{1}{4\xi M} \sum_{\text{спин}} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \times \\
 &\times \langle \xi p, \sigma | J_{\mu}^{\text{эм}}(0) | p', \sigma' \rangle \langle p', \sigma' | J_{\nu}^{\text{эм}}(0) | \xi p, \sigma \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p' - \xi p - q) = \\
 &= \frac{1}{4\xi M} \sum_{\text{спин}} \bar{u}(\xi p) \gamma_{\mu} u(p') \bar{u}(p') \gamma_{\nu} u(\xi p) \delta(p'_0 - \xi p_0 - q_0)/2p'_0. \quad (7.51)
 \end{aligned}$$

Множитель ξ в знаменателе появляется вследствие замены относительного импульса p на ξp . Дельта-функцию можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta(p'_0 - \xi p_0 - q_0)/2p'_0 &= \theta(p'_0) \delta[p'_0{}^2 - (\xi p_0 + q_0)^2] = \\ &= \theta(p'_0) \delta[p'^2 - (\xi p + q)^2] = \theta(\xi p_0 + q_0) \delta(2Mv\xi + q^2) = \\ &= \theta(\xi p_0 + q_0) \frac{\delta(\xi - x)}{2Mv}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Для суммы по спиновым состояниям имеем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{спин}} \bar{u}(\xi p) \gamma_\mu u(\xi p + q) \bar{u}(\xi p + q) \gamma_\nu u(\xi p) &= \frac{\xi}{2} \text{tr} [\hat{p} \gamma_\mu (\xi \hat{p} + \hat{q}) \gamma_\nu] = \\ &= 2\xi [p_\mu (\xi p + q)_\nu + (\xi p + q)_\mu p_\nu - p (\xi p + q) g_{\mu\nu}] = \\ &= 4M^2 \xi^2 (p_\mu p_\nu / M^2) - 2Mv \xi g_{\mu\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (7.53)$$

где мы пренебрегли массой партона. Следовательно, партонный тензор (7.51) имеет вид

$$K_{\mu\nu}(\xi) = \delta(\xi - x) \left(\frac{\xi}{v} \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} - \frac{1}{2M} g_{\mu\nu} + \dots \right). \quad (7.54)$$

Пусть $f(\xi) d\xi$ — число партонов с импульсами, значения которых заключены в промежутке между ξ и $\xi + d\xi$ (умноженное на квадрат заряда). Тогда мы можем выразить адронный тензор через интеграл от $K_{\mu\nu}(\xi)$:

$$W_{\mu\nu} = \int_0^1 f(\xi) K_{\mu\nu}(\xi) d\xi = \frac{xf(x)}{v} \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} - \frac{f(x)}{2M} g_{\mu\nu} + \dots \quad (7.55)$$

При этом вследствие присутствия дельта-функции, определяющей массовую поверхность конечного партона, структурная функция зависит только от величины $x = -q^2/2Mv$:

$$MW_1 \rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2} f(x), \quad (7.56)$$

$$vW_2 \rightarrow F_2(x) = xf(x). \quad (7.57)$$

Таким образом, скейлинговые функции (7.32) определяют распределение импульса партона в нуклоне мишени.

Заметим также, что из (7.56) и (7.57) следует равенство

$$2xF_1(x) = F_2(x), \quad (7.58)$$

которое известно как *соотношение Каллана — Гросса* [72]. Оно является прямым следствием предположения, что спин партона равен $1/2$. Если бы мы использовали партоны со спином 0, то получили бы выражение

$$K_{\mu\nu} \sim \langle xp | J_\mu | xp + q \rangle \langle xp + q | J_\nu | xp \rangle \sim (2xp + q)_\mu (2xp + q)_\nu.$$

Поскольку здесь нет члена, пропорционального $g_{\mu\nu}$, мы получаем

$$F_1(x) = 0. \quad (7.59)$$

Существует простая интерпретация соотношений (7.58) и (7.59) в терминах спиральных структурных функций. Если определить векторы поляризации фотона как в (7.43) и (7.46), то мы придем к равенствам (см. (7.48))

$$F_S = \frac{1}{x} F_2 - 2F_1, \quad (7.60)$$

$$F_T = F_L + F_R = 2F_1. \quad (7.61)$$

Таким образом, соотношения (7.58) и (7.59) можно записать в виде

$$F_S = 0 \text{ для партонов со спином } 1/2, \quad (7.62)$$

$$F_T = 0 \text{ для партонов со спином } 0. \quad (7.63)$$

Убедимся в том, что эти соотношения являются следствием сохранения углового момента. Для этого перейдем к *брейтовской системе отсчета*, в которой импульс партона при столкновении с виртуальным фотоном только изменяет направление на противоположное, но не меняет своей величины. Тогда получим

$$\begin{aligned} q_\mu &= (0, 0, 0, -2xp), \\ xp_\mu &= (xp, 0, 0, xp), \\ p'_\mu &= (xp, 0, 0, -xp). \end{aligned} \quad (7.64)$$

Если партон имеет нулевой спин, то вклад может давать только виртуальный фотон с нулевой спиральностью (ε^S), в то время как для состояний ($\varepsilon^L, \varepsilon^R$) со спиральностью ± 1 составляющая углового момента, параллельная направлению движения, не сохраняется. С другой стороны, для партона со спином $1/2$ (с пренебрежимо малой массой) компонента спина также меняет направление на противоположное при столкновении, поэтому необходимо, чтобы виртуальный фотон находился в состоянии со спиральностью ± 1 ; следовательно, $F_S = 0$. Соотношения (7.58) или (7.62) достаточно хорошо подтверждаются экспериментами в области скейлинга, и мы можем заключить, что нуклоны действительно содержат точечноподобные составляющие со спином $1/2$.

7.2. ПРАВИЛА СУММ И ПРИЛОЖЕНИЯ КВАРК-ПАРТОННОЙ МОДЕЛИ

Эти заряженные партоны со спином $1/2$ естественно отождествить с кварками, которые были впервые введены для расчета спектроскопических свойств адронов. В конечном счете мы

разовьем полевую теорию сильных взаимодействий — квантовую хромодинамику (КХД), которая является неабелевым обобщением хорошо известной квантовой электродинамики (КЭД). В КХД кварки, подобно электронам в КЭД, выступают в качестве основных полей материи. При этом взаимодействия переносятся электрически нейтральными векторными полями — *глюонами* аналогично тому, как фотоны переносят электромагнитное взаимодействие между электронами. Основываясь на этой картине, мы можем также качественно представить себе вид партонной функции распределения $f(x)$. Из эксперимента следует, что график этой функции имеет вид, показанный на рис. 7.3. Чтобы показать это, мы будем следовать изложению Клоуза [89] и сначала рассмотрим простую модель нуклона, состоящего из трех свободных кварков (рис. 7.4), для которого партонная функция распределения является практически дельта-функцией, сосредоточенной в точке $x = 1/3$, т. е. $f(x) \sim$

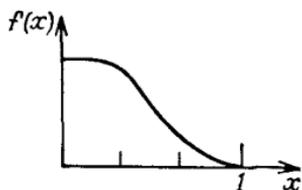


Рис. 7.3.

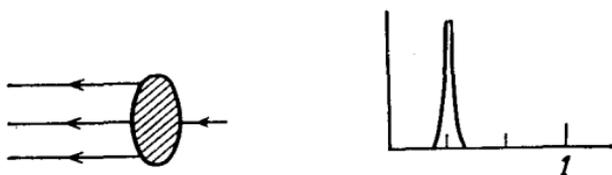


Рис. 7.4.



Рис. 7.5.

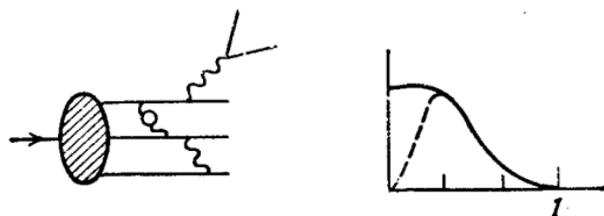


Рис. 7.6.

$\sim \delta(x - 1/3)$. Включим взаимодействие кварков с глюонами. Тогда данное распределение будет сглажено вследствие обмена глюонами между кварками (рис. 7.5). Далее, так же как в случае КЭД, где виртуальный фотон (спектр импульса которого dk/k соответствует тормозному излучению) может излучать пары e^+e^- , глюоны (излучаемые с вероятностью $\sim dx/x$) могут рождать пары $q\bar{q}$. Эти процессы внутренней конверсии и тормозного излучения создают «море $q\bar{q}$ » при малых x , что приводит к окончательной форме распределения, показанной на рис. 7.6.

Мы хотим выяснить, согласуются ли данные по лептон-нуклонному рассеянию при высоких энергиях с теми значениями квантовых чисел, которые получены для кварков из спектроскопической феноменологии. В рамках модели, включающей только легкие кварки u , d и s , адронный электромагнитный ток имеет следующий явный вид:

$$J_\mu^{\text{эм}} = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma_\mu s, \quad (7.65)$$

а адронный (заряженный) ток ниже порога рождения очарованных частиц имеет вид

$$J_h^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c). \quad (7.66)$$

Мы будем работать в приближении, в котором угол Кабиббо равен нулю ($\theta_c \approx 0$); следовательно,

$$J_h^\mu \approx \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d. \quad (7.67)$$

Мы используем здесь символы кварков для обозначения полевых операторов соответствующих частиц. Но в дальнейшем мы будем использовать эти символы для обозначения кварк-партонных функций распределения. Если факторизовать квадрат электрического заряда, то, согласно соотношениям (7.56) и (7.61), будем иметь

$$F_T^{ep}(x) = f_p(x) = \frac{4}{9} (u_p + \bar{u}_p) + \frac{1}{9} (d_p + \bar{d}_p) + \frac{1}{9} (s_p + \bar{s}_p), \quad (7.68)$$

$$F_T^{en}(x) = f_n(x) = \frac{4}{9} (u_n + \bar{u}_n) + \frac{1}{9} (d_n + \bar{d}_n) + \frac{1}{9} (s_n + \bar{s}_n), \quad (7.69)$$

где $q_N(x)$ — вероятность обнаружить в нуклоне мишени N партон в состоянии с долей x продольного импульса и с квантовыми числами кварка q . Величины F_T^{ep} , F_T^{en} ограничены значениями квантовых чисел нуклона. Например:

изоспин

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \{ [u_p(x) - \bar{u}_p(x)] - [d_p(x) - \bar{d}_p(x)] \} dx = \frac{1}{2}, \quad (7.70)$$

странность

$$\int_0^1 [s_p(x) - \bar{s}_p(x)] dx = 0, \quad (7.71)$$

заряд

$$\int_0^1 \frac{2}{3} [u_p(x) - \bar{u}_p(x)] dx - \int_0^1 \frac{1}{3} [d_p(x) - \bar{d}_p(x)] dx - \\ - \int_0^1 \frac{1}{3} [s_p(x) - \bar{s}_p(x)] dx = 1.$$

Используя изоспиновую симметрию (т. е. инвариантность относительно замен $p \leftrightarrow n$ и $u \leftrightarrow d$), мы будем иметь

$$\begin{aligned} u_p(x) &= d_n(x) \equiv u(x), \\ d_p(x) &= u_n(x) \equiv d(x), \\ s_p(x) &= s_n(x) \equiv s(x). \end{aligned} \quad (7.72)$$

Таким образом, выражения (7.68) и (7.69) можно записать в виде

$$F_T^{ep}(x) = f_p(x) = \frac{4}{9}(u + \bar{u}) + \frac{1}{9}(d + \bar{d}) + \frac{1}{9}(s + \bar{s}), \quad (7.73)$$

$$F_T^{en}(x) = f_n(x) = \frac{4}{9}(d + \bar{d}) + \frac{1}{9}(u + \bar{u}) + \frac{1}{9}(s + \bar{s}). \quad (7.74)$$

Отношение протонной структурной функции к нейтронной равно

$$\frac{F_T^{ep}(x)}{F_T^{en}(x)} = \frac{4(u + \bar{u}) + (d + \bar{d}) + (s + \bar{s})}{(u + \bar{u}) + 4(d + \bar{d}) + (s + \bar{s})}. \quad (7.75)$$

Поскольку все $q(x)$ положительны, имеют место ограничения [248, 249]

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_T^{en}(x)}{F_T^{ep}(x)} \leq 4, \quad (7.76)$$

которые согласуются с экспериментальными данными.

Кроме того, анализ кварк-партонной модели, проведенный в начале настоящего раздела, наводит на мысль (см., например, [248, 249]), что кварковую функцию распределения целесообразно разделить на две части, соответствующие *валентным* и *морским кваркам*:

$$q(x) = q_v(x) + q_s(x). \quad (7.77)$$

Присутствие валентных кварков связано с исходной кварковой моделью. Так, в состав протонов и нейтронов входят валентные кварки (uud) и (udd) соответственно. Морские кварки соответствуют парам кварков, рождаемым глюонами: они симмет-

ричны по отношению к ароматической группе $SU(3)$ и, как показывают предшествующие рассуждения, должны быть сосредоточены в области малых x . Для протонной мишени имеем

$$\begin{aligned} u_v(x) &= 2d_v(x), \\ s_v(x) = \bar{u}_v(x) = \bar{d}_v(x) = \bar{s}_v(x) &= 0, \\ u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) &\equiv G(x). \end{aligned} \quad (7.78)$$

Таким образом, выражения (7.73) и (7.74) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_T^{ep}(x) &= \frac{1}{2} u_v(x) + \frac{4}{3} G(x), \\ F_T^{en}(x) &= \frac{1}{3} u_v(x) + \frac{4}{3} G(x). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Разность этих величин дает распределение валентных кварков:

$$F_T^{ep}(x) - F_T^{en}(x) = \frac{1}{6} u_v(x), \quad (7.80)$$

которое должно иметь пик вблизи $x = 1/3$ в соответствии с рис. 7.5. Кроме того, поскольку мы предполагаем, что вклад функции $G(x)$ существен только в области $x \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{F_T^{ep}(x)}{F_T^{en}(x)} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{при } x \rightarrow 0, \\ 3/2 & \text{при } x \rightarrow 1. \end{cases} \quad (7.81)$$

Эти предсказания кварк-партонной модели также подтверждаются экспериментальными наблюдениями.

Для нейтрино-нуклонных структурных функций, отвечающих (7.73) и (7.74), мы приведем лишь основные результаты:

$$\begin{aligned} F_L^{\nu p}(x) &= 2d(x), & F_L^{\nu n}(x) &= 2u(x), \\ F_R^{\nu p}(x) &= 2\bar{u}(x), & F_R^{\nu n}(x) &= 2\bar{d}(x), \\ F_S^{\nu p}(x) &= 0, & F_S^{\nu n}(x) &= 0, \\ F_L^{\bar{\nu} p}(x) &= 2u(x), & F_L^{\bar{\nu} n}(x) &= 2d(x), \\ F_R^{\bar{\nu} p}(x) &= 2\bar{d}(x), & F_R^{\bar{\nu} n}(x) &= 2\bar{u}(x), \\ F_S^{\bar{\nu} p}(x) &= 0, & F_S^{\bar{\nu} n}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Функции в правых частях этих равенств являются функциями распределения для протонной мишени; множители 2 отражают присутствие как векторной, так и аксиально-векторной частей слабого тока. Мы можем выделить функцию распределения странного кварка. Для этого, используя равенства $F_2 = x(F_L + F_R + F_S)$ и (7.82), получаем

$$F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\nu n}(x) = 2x(u + \bar{u} + d + \bar{d}). \quad (7.83)$$

Из равенств $F_2 = xF_T$, (7.73) и (7.74) найдем

$$F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x) = x [5(u + \bar{u} + d + \bar{d})/9 + 2(s + \bar{s})/9]. \quad (7.84)$$

Отсюда окончательно получаем

$$F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x) - \frac{5}{18} [F_2^{vp}(x) + F_2^{vn}(x)] = \frac{2x}{9} [s(x) + \bar{s}(x)]. \quad (7.85)$$

Эта формула согласуется с экспериментальными данными в случае, когда правая часть равна нулю, за исключением области малых x (меньше 0,2). Иными словами, содержание странных кварков и антикварков в нуклонах очень мало. Кроме того, если мы предположим, что функции распределения морских кварков имеют $SU(3)$ -симметрию, то вклад функций $\bar{u}(x)$ и $\bar{d}(x)$ также мал.

Ниже мы рассмотрим ряд правил сумм; их подтверждение является сильным аргументом в пользу описанной выше кварк-партонной картины.

Правило сумм Адлера

Это правило сумм выведено выше при изложении алгебры токов. В скейлинговом пределе $-q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ и при фиксированном x соотношение (5.109) принимает следующий вид ($\theta_c = 0$):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} [F_2^{\bar{v}p}(x) - F_2^{vp}(x)] = 2. \quad (7.86)$$

Мы можем получить этот результат непосредственно в рамках кварк-партонной модели. Поскольку

$$F_2 = x(F_L + F_R + F_S), \quad (7.87)$$

комбинация структурных функций, входящая в левую часть соотношения (7.86), может быть выражена через кварковые функции распределения с помощью (7.82):

$$F_2^{\bar{v}p}(x) - F_2^{vp}(x) = 2x \{[u(x) - \bar{u}(x)] - [d(x) - \bar{d}(x)]\} = 4xT_3(x), \quad (7.88)$$

где T_3 — третья компонента изоспиновой плотности. Используя тот факт, что изоспин протона равен 1/2 (см. 7.70), мы получаем снова соотношение (7.86):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} [F_2^{\bar{v}p}(x) - F_2^{vp}(x)] = 4 \int_0^1 T_3(x) dx = 2. \quad (7.89)$$

Правило сумм Гросса — Льюеллина Смита

Сумма скейлинговых функций

$$F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x) = -2[u(x) + d(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x)], \quad (7.90)$$

где $F_3 = F_R - F_L$, может быть записана в виде комбинации функций плотностей, отвечающих барионному числу и странности:

$$F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x) = -6\left[B(x) + \frac{1}{3}S(x)\right], \quad (7.91)$$

где

$$B(x) = \frac{1}{3}[u(x) + d(x) + s(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x) - \bar{s}(x)], \quad (7.92)$$

$$S(x) = -[s(x) - \bar{s}(x)]. \quad (7.93)$$

Поскольку для протона барионное число равно 1, а странность равна нулю, мы приходим к правилу сумм Гросса — Льюеллина Смита [202]:

$$\int_0^1 dx [F_3^{\nu p}(x) + F_3^{\nu n}(x)] = -6. \quad (7.94)$$

Импульсное правило сумм

Если бы кварки переносили весь импульс нуклона мишени, то мы имели бы правило сумм

$$\int_0^1 [u(x) + d(x) + s(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x)] x dx = 1. \quad (7.95)$$

Поскольку область $x \approx 0$ дает незначительный вклад в этот интеграл, мы можем пренебречь вкладом всех морских кварков:

$$\int_0^1 [u(x) + d(x)] x dx = 1. \quad (7.96)$$

Выражая кварковые функции плотности в левой части этого соотношения через измеримые структурные функции (7.84), получаем

$$\int_0^1 [F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)] dx = \frac{5}{9}. \quad (7.97)$$

Аналогично

$$\int_0^1 [F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\nu n}(x)] dx = 2. \quad (7.98)$$

Однако эксперимент дает для суммы интегралов в (7.97) приближенное значение 0,28. Это показывает, что почти 50 %

импульса нуклона переносятся составляющими, которые не взаимодействуют ни с электромагнитным, ни со слабыми токами [277]. Это также согласуется с предсказаниями КХД-партонной модели, в которой указанные нейтральные составляющие отождествляются с глюонами.

Другие приложения кварк-партонной модели

В остающейся части данного раздела мы кратко коснемся двух других аспектов кварк-партонной модели — ее приложений к описанию процесса e^+e^- -аннигиляции при высоких энергиях и процесса Дрелла — Яна рождения лептонных пар в адрон-адронных столкновениях. Мы будем следовать изложению, приведенному в работах [10, 89].

e^+e^- -аннигиляция

1. Процесс $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Мы будем использовать e^+e^- -аннигиляцию в пару $\mu^+\mu^-$ через однофотонное промежуточное состояние (рис. 7.7, а) в качестве «эталонной реакции» при описа-

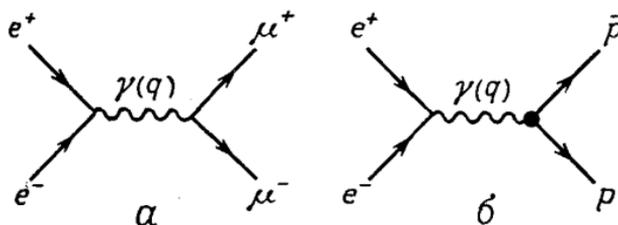


Рис. 7.7.

нии аннигиляции в другие конечные состояния. Полное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, вычисленное в КЭД, равно

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^4} \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}\right)^{1/2} (2m_\mu^2 + q^2), \quad (7.99)$$

где q — импульс промежуточного фотона:

$$q^2 = (p_+ + p_-)^2 \equiv s \geq 0. \quad (7.100)$$

При высоких энергиях $s \gg m_\mu^2$ получаем

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (7.101)$$

Тот факт, что сечение убывает как s^{-1} , типично для аннигиляции e^+e^- в точечноподобные частицы.

2. Процесс $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$. Амплитуда этого процесса (рис. 7.7, б) связана с амплитудой упругого ep -рассеяния соотношением крос-

синг-симметрии. Вычисление дает для сечения этого процесса выражение

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow p\bar{p}) &= \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3q^4} \left(1 - \frac{4M_p^2}{q^2}\right)^{1/2} [2M_p^2 G_E^2(q^2) + q^2 G_M^2(q^2)], \end{aligned} \quad (7.102)$$

где $G_E(q^2)$ и $G_M(q^2)$ — электрический и магнитный формфакторы соответственно (см. (7.21)) при $q^2 \geq 0$. При больших q^2 $G_E(q^2) \sim G_M(q^2) \sim q^{-4}$. Таким образом, при высоких энергиях $s \gg M_p^2$ сечение $\sigma(e^+e^- \rightarrow p\bar{p}) \sim s^{-5}$ быстро уменьшается, что типично для аннигиляции в любое данное адронное конечное состояние, обладающее структурой.

3. Процесс $e^+e^- \rightarrow$ адроны. Рассмотрим теперь инклюзивный процесс аннигиляции пары e^+e^- во все возможные адронные конечные состояния. В кварк-партонной модели мы предполагаем, что на первом этапе идет процесс $e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i$, а затем кварки фрагментируют в свободные адроны (рис. 7.8, а). Индекс

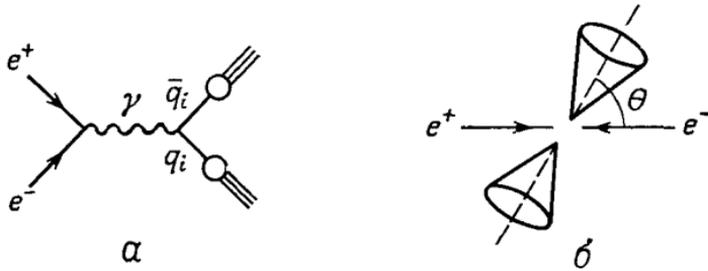


Рис. 7.8.

i нумерует все возможные (аромат и цвет) квантовые числа рождаемых кварков. Таким образом,

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) = \sum_i \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i). \quad (7.103)$$

Отношение сечения данного процесса к сечению эталонной реакции $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ равно

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_i e_i^2, \quad (7.104)$$

т. е. это отношение R равно сумме квадратов зарядов кварков [65]. Таким образом, для энергий ниже порога рождения очарованного кварка мы суммируем по трем цветам u , d и s кварков:

$$R = 3 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = 2 \quad \text{при} \quad \sqrt{s} < 2m_c, \quad (7.105)$$

а выше порога рождения c - и b -кварков:

$$R = 2 + 3 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{11}{3} \quad \text{при} \quad \sqrt{s} > 2m_b. \quad (7.106)$$

Данные измерений, по-видимому, подтверждают это скейлинговое поведение с тремя цветами (см. рис. 7.9 из обзора [131]).

Следует заметить, что имеется много других деталей в поведении e^+e^- -аннигиляции, которые хорошо описываются кварк-партонной моделью. Например, обнаруживается бьёркеновский скейлинг в дифференциальном сечении инклюзивной реакции $e^+e^- \rightarrow hX$ (т. е. детектируется один из конечных адронов), которая связана соотношением кроссинг-симметрии с неупругим $ep \rightarrow eX$ -рассеянием. Кроме того, эксперимент дает веские основания считать, что конечные адроны в e^+e^- -аннигиляции образуют *струи*, т. е. имеют тенденцию вылетать в направлениях, заключенных внутри конусов с малым углом раствора. В промежутке $4 \text{ ГэВ} < \sqrt{s} < 7,5 \text{ ГэВ}$ наблюдаются двухструйные события [213] (рис. 7.8, б), причем угловое распределение для осей струй имеет вид $\sim (1 + \cos^2 \theta)$, где θ — полярный угол оси струи по отношению к направлению пучка e^+e^- . Такое распределение характерно для конечного состояния e^+e^- -рассеяния с точечно-подобными частицами со спином $1/2$. Очевидно, что это согласуется с предсказанием кварк-партонной модели с ее неявным предположением об обрезании поперечного импульса. Наконец, при еще более высоких энергиях ($\sqrt{s} > 7,5 \text{ ГэВ}$), соответствующих в партонной модели КХД тормозному излучению глюонов, появляются указания на существование трехструйных событий [30, 45, 60].

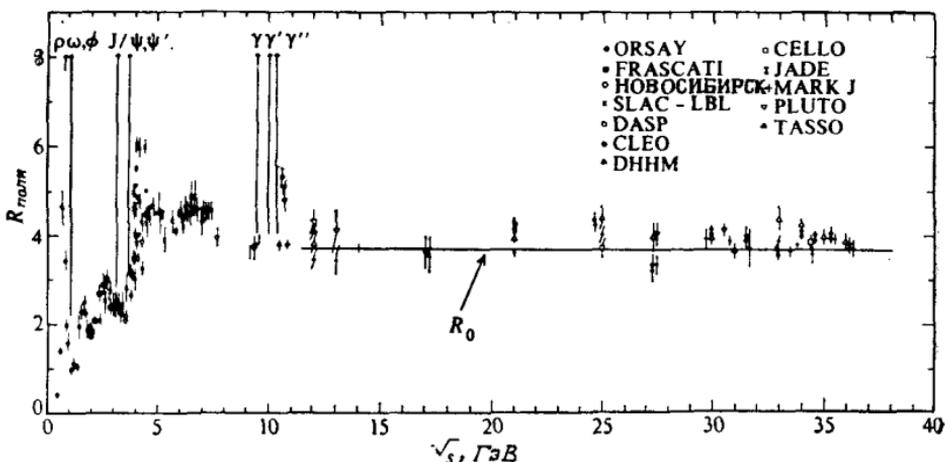


Рис. 7.9. Значения R , полученные в различных экспериментах по e^+e^- -аннигиляции. Указаны только статистические ошибки. Приведено также значение R

$$(7.106), \text{ предсказываемое кварк-партонной моделью; } R_0 = 3 \sum_{u, d, s, c, b} Q_i^2 = \frac{11}{3}.$$

Процесс Дрелла — Яна

Как мы увидим в следующем разделе, можно построить более формальную схему для описания в рамках партоновой модели процессов глубоконеупругого IN -рассеяния и e^+e^- -аннигиляции при высоких энергиях, основанную на операторном разложении на световом конусе и на малых расстояниях. Однако этот

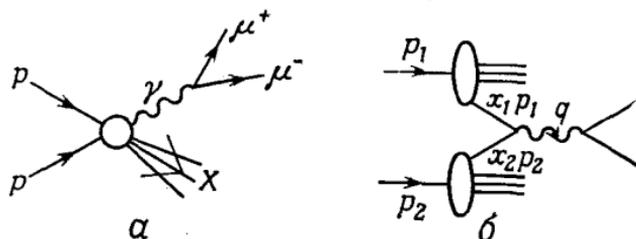


Рис. 7.10.

метод неприменим к другим процессам при высоких энергиях и больших передачах импульса. Партоновая формулировка может быть использована для описания процессов там, где непосредственное формальное применение операторного анализа невозможно. Наиболее важным примером является процесс Дрелла — Яна [117] (рис. 7.10, а)

$$pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X, \quad (7.107)$$

в котором пары $\mu^+\mu^-$ рождаются в адрон-адронных (обычно протон-протонных) столкновениях вместе с ненаблюдаемым адронным состоянием X . В рамках партоновой модели естественно ожидать, что в пределе больших $s \equiv (p_1 + p_2)^2 \rightarrow \infty$ и больших значениях виртуальных фотонных масс $q^2 \rightarrow \infty$ при фиксированном отношении q^2/s реакция идет через аннигиляцию партона и антипартона, каждый из которых выходит из одного из исходных адронов, в массивный виртуальный фотон с последующим распадом последнего в наблюдаемую пару $\mu^+\mu^-$ (рис. 7.10, б). В системе центра масс, пренебрегая массами всех частиц, имеем

$$p_1^\mu = (p, 0, 0, p), \quad p_2^\mu = (p, 0, 0, -p), \quad s = 4p^2. \quad (7.108)$$

Если пренебречь также массами партонов и их поперечными импульсами, то импульсы партонов запишутся в виде

$$k_1^\mu = x_1 p_1^\mu, \quad k_2^\mu = x_2 p_2^\mu, \quad (7.109)$$

что приводит к следующему значению импульса фотона:

$$q^\mu = ((x_1 + x_2)p, 0, 0, (x_1 - x_2)p). \quad (7.110)$$

Следовательно, мы имеем

$$q^2 = 4x_1 x_2 p^2 = x_1 x_2 s. \quad (7.111)$$

Вероятности существования пар кварк — антикварк i -го типа с фракциями импульса x_1 и x_2 в первоначальных протонах даются выражением

$$q_i(x_1) dx_1 \bar{q}_i(x_2) dx_2 + \bar{q}_i(x_1) dx_1 q_i(x_2) dx_2. \quad (7.112)$$

Умножая это выражение на сечение основного партонного процесса $q_i \bar{q}_i \rightarrow \mu^+ \mu^-$, равное

$$\frac{d\sigma}{dq^2} (q_i \bar{q}_i \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} e_i^2 \delta(q^2 - x_1 x_2 s), \quad (7.113)$$

получаем сечение процесса Дрелла — Яна в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dq^2} (pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X) = & \frac{4\pi\alpha^2}{3q^4} \sum_i e_i^2 \int_0^1 [q_i(x_1) \bar{q}_i(x_2) + \\ & + \bar{q}_i(x_1) q_i(x_2)] \frac{dx_1 dx_2}{x_1 x_2} \delta\left(\frac{1}{x_1 x_2} - \frac{s}{q^2}\right). \end{aligned} \quad (7.114)$$

Таким образом, в рамках партонной модели величина $q^4(d\sigma/dq^2)$ является функцией отношения q^2/s , т. е. обнаруживает скейлинговое поведение. Эксперимент убедительно подтверждает это предсказание. Заметим, что эти же кварковые функции распределения измеряются в процессах глубоконеупругого лептон-протонного рассеяния, так что можно также предсказать их абсолютную величину.

7.3. СИНГУЛЯРНОСТИ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ И БЬЕРКЕНОВСКИЙ СКЕЙЛИНГ

В данном разделе мы исследуем бьеркеновский скейлинг в рамках теории поля, дающий более формальное обоснование некоторым из результатов партонной модели. Общее введение в данную проблему см., например, в работах [121, 200].

Глубоконеупругий предел и световой конус

Сначала покажем, что глубоконеупругие IN -процессы при $-q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ и фиксированном значении $-q^2/2M\nu$, рассмотренные в разд. 7.1, зондируют поведение коммутатора токов на световом конусе. Напомним (см. (7.12)), что адронный тензор, входящий в выражение для дифференциального сечения рассеяния, может быть выражен через коммутатор токов:

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{1}{4M} \sum_{\sigma} \int \frac{d^4x}{2\pi} e^{iq \cdot x} \langle p, \sigma | [J_{\mu}(x), J_{\nu}(0)] | p, \sigma \rangle. \quad (7.115)$$

Скалярное произведение в показателе экспоненты можно записать в виде

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = \frac{(q_0 + q_3)}{\sqrt{2}} \frac{(x_0 - x_3)}{\sqrt{2}} + \frac{(q_0 - q_3)}{\sqrt{2}} \frac{(x_0 + x_3)}{\sqrt{2}} - \mathbf{q}_T \cdot \mathbf{x}_T, \quad (7.116)$$

где $\mathbf{q}_T = (q_1, q_2)$ и $\mathbf{x}_T = (x_1, x_2)$. В системе покоя нуклона мишени импульсы имеют вид

$$p_\mu = (M, 0, 0, 0), \quad q_\mu = (v, 0, 0, (v^2 - q^2)^{1/2}). \quad (7.117)$$

В глубоконеупругом пределе ($-q^2 \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$ при фиксированном $-q^2/2Mv$) мы видим, что

$$q_0 + q_3 \sim 2v \text{ и } q_0 - q_3 \sim q^2/2v. \quad (7.118)$$

Мы предполагаем, что доминирующий вклад в интеграл (7.115) дают области, где осцилляции менее быстрые, т. е. $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = O(1)$; следовательно,

$$x_0 - x_3 \sim O(1/v) \text{ и } x_0 + x_3 \sim O(1/xM), \quad (7.119)$$

или

$$x_0^2 - x_3^2 \sim O(1/(-q^2)). \quad (7.120)$$

Таким образом, величина $x^2 = x_0^2 - x_3^2 - x_T^2 \leq x_0^2 - x_3^2 \sim O(1/(-q^2))$ стремится к нулю при $-q^2 \rightarrow \infty$. Иными словами, в скейлинговом пределе мы зондируем структуру произведения токов вблизи светового конуса. Это сводит изучение бьёркеновского скейлинга в теории поля к изучению поведения произведения токов на световом конусе.

Сингулярности свободных полей на световом конусе

Как оказалось, бьёркеновский скейлинг отвечает утверждению, что поведение коммутатора на световом конусе такое же, как в теории свободных полей [144]. Чтобы проложить путь, мы сначала изучим поведение на световом конусе некоторых произведений в свободной теории.

1. *Произведения полей.* В свободных теориях произведения полей, такие, как коммутаторы и пропагаторы, сингулярны на световом конусе ($x^2 \approx 0$), и главные сингулярности не зависят от масс. Рассмотрим, например, пропагатор скалярного поля:

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(0)) | 0 \rangle = i\Delta_F(x) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.121)$$

В (7.121) можно провести преобразование Фурье [56]. Это дает

$$\Delta_F(x) = -\frac{1}{4\pi} \delta(x^2) + \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) [J_1(m\sqrt{x^2}) - iN_1(m\sqrt{x^2})] - \frac{im}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} \theta(-x^2) K_1(m\sqrt{-x^2}), \quad (7.122)$$

где J_n , N_n и K_n — функции Бесселя. При $x^2 \approx 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \frac{-1}{4\pi} \delta(x^2) + \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2} - \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m\sqrt{x^2}}{2} - \frac{m^2}{16\pi^2} \theta(x^2) = \\ &= \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)} + O(m^2 x^2). \end{aligned} \quad (7.123)$$

Главная сингулярность не зависит от масс, поскольку область $x^2 \approx 0$ соответствует в импульсном пространстве большим k^2 . Таким образом, мы можем также вычислить эту не зависящую от масс сингулярность непосредственно для более простого объекта — безмассового пропагатора:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0 e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - k^2 + i\epsilon}. \quad (7.124)$$

Интегрирование по k_0 можно выполнить стандартным контурным методом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0 e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - k^2 + i\epsilon} = \frac{-i\pi}{|k|} [\theta(x_0) e^{-i|k|x_0} + \theta(-x_0) e^{i|k|x_0}], \quad (7.125)$$

Тогда получим

$$\Delta_F(x) = -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{\infty} dk (e^{ikr} - e^{-ikr}) [\theta(x_0) e^{-ikx_0} + \theta(-x_0) e^{ikx_0}], \quad (7.126)$$

где $\kappa = |k|$ и $r = |x|$. Используя тождество

$$\int_0^{\infty} e^{\pm i\alpha\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{\pm i(\alpha \pm i\epsilon)\tau} d\tau = \frac{\mp 1}{i(\alpha \pm i\epsilon)}, \quad (7.127)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \frac{-1}{8\pi^2 r} \left[\theta(x_0) \left(\frac{1}{r - x_0 + i\epsilon} + \frac{1}{r + x_0 - i\epsilon} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \theta(-x_0) \left(\frac{1}{r + x_0 + i\epsilon} + \frac{1}{r - x_0 - i\epsilon} \right) \right] = \\ &= \frac{-i}{4\pi^2} \left[\frac{\theta(x_0)}{r^2 - x_0^2 + i\epsilon x_0} + \frac{\theta(-x_0)}{r^2 - x_0^2 - i\epsilon x_0} \right] = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (7.128)$$

что согласуется с (7.123). Аналогично можно вычислить главную сингулярность для коммутатора двух скалярных полей:

$$[\phi(x), \phi(0)] = i\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ikx} \epsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2), \quad (7.129)$$

что дает следующий результат:

$$\Delta(x) \approx \frac{-1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2) \text{ при } x^2 \approx 0. \quad (7.130)$$

Таким образом, для сингулярных функций имеем тождество

$$i \int d^4k e^{-ik \cdot x} \varepsilon(k_0) \delta(k^2) = (2\pi)^2 \varepsilon(x_0) \delta(x^2). \quad (7.131)$$

Формулу (7.130) можно рассматривать и под другим углом зрения: сингулярности на световом конусе коммутатора $\Delta(x)$ и пропагатора $\Delta_F(x)$ непосредственно связаны между собой:

$$\Delta(x) = 2\varepsilon(x_0) \text{Im}(i \Delta_F(x)). \quad (7.132)$$

Последнее соотношение вытекает из тождества для сингулярных функций

$$\frac{1}{-x^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{-x^2 - i\varepsilon} = -2\pi i \varepsilon(x_0) \delta(x^2), \quad (7.133)$$

которое является частным случаем более общего тождества

$$\left(\frac{1}{-x^2 + i\varepsilon}\right)^n - \left(\frac{1}{-x^2 - i\varepsilon}\right)^n = \frac{-2\pi i}{(n-1)!} \varepsilon(x_0) \delta^{(n-1)}(x^2). \quad (7.134)$$

В дальнейших расчетах мы будем получать сингулярности коммутаторов из сингулярностей пропагаторов с помощью замены:

$$(-x^2 - i\varepsilon)^{-n} \rightarrow 2\pi i \varepsilon(x_0) \delta^{(n-1)}(x^2)/(n-1)! \quad (7.135)$$

Сводка результатов для фермионов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= iS_{\alpha\beta}(x-y), \\ S_{\alpha\beta}(x) &= (i\gamma\partial + m)_{\alpha\beta} \Delta(x), \\ \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle &= iS_{\alpha\beta}^F(x-y), \\ S_{\alpha\beta}^F(x) &= (i\gamma\partial + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x). \end{aligned} \quad (7.136)$$

При $x^2 \approx 0$ имеем

$$S_{\alpha\beta}(x) \approx (i\gamma\partial)_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \delta(x^2) \right], \quad (7.137)$$

$$S_{\alpha\beta}^F(x) \approx (i\gamma\partial)_{\alpha\beta} \left[\frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(x^2 - i\varepsilon)} \right]. \quad (7.138)$$

2. *Произведение скалярных токов.* Мы можем распространить этот анализ на случай составных операторов. Рассмотрим, например, скалярный ток

$$J(x) = : \phi^2(x) :. \quad (7.139)$$

Заметим, что благодаря нормальному упорядочению устраняются сингулярности, имеющие место в произведении $\phi(x + \xi)\phi(x - \xi)$ при $\xi^\mu \rightarrow 0$. Сингулярности произведения $T(J(x)J(0))$ можно выявить, используя теорему Вика:

$$\begin{aligned} T(J(x)J(0)) &= T(: \phi^2(x) : : \phi^2(0) :) = 2[\langle 0 | T(\phi(x)\phi(0)) | 0 \rangle]^2 + \\ &+ 4\langle 0 | T(\phi(x)\phi(0)) | 0 \rangle : \phi(x)\phi(0) : + : \phi^2(x)\phi^2(0) : = \\ &= -2[\Delta_F(x, m)]^2 + 4i\Delta_F(x, m^2) : \phi(x)\phi(0) : + : \phi^2(x)\phi^2(0) :. \end{aligned} \quad (7.140)$$

Следовательно, при $x^2 \approx 0$ мы получаем

$$T(J(x)J(0)) \approx \frac{1}{8\pi^4(x^2 - i\epsilon)^2} - \frac{:\phi(x)\phi(0):}{\pi^2(x^2 - i\epsilon)} + :\phi^2(x)\phi^2(0):. \quad (7.141)$$

Если взять матричный элемент выражения (7.141) между двумя произвольными состояниями $|A\rangle$ и $|B\rangle$, то получим

$$\begin{aligned} \langle A|T(J(x)J(0))|B\rangle &\approx \frac{\langle A|B\rangle}{8\pi^4(x^2 - i\epsilon)^2} - \\ &- \frac{\langle A|:\phi(x)\phi(0):|B\rangle}{\pi^2(x^2 - i\epsilon)} + \langle A|:\phi^2(x)\phi^2(0):|B\rangle, \end{aligned} \quad (7.142)$$

что соответствует диаграммам, приведенным на рис. 7.11.

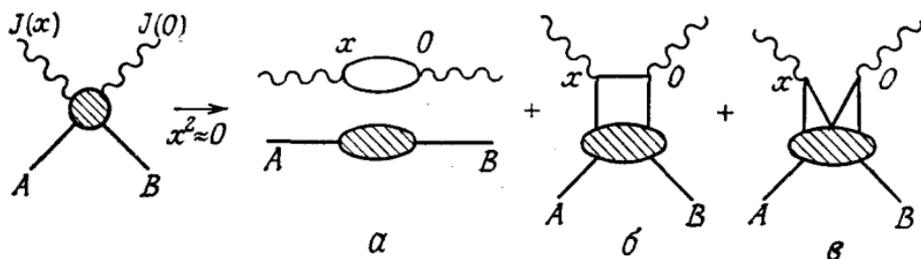


Рис. 7.11. Диаграммы, сингулярные на световом конусе: *a* — имеются две линии, соответствующие свободным безмассовым пропагаторам; *b* — имеется одна такая линия; *c* — нет ни одной такой линии. Заметим, что если $|A\rangle = |B\rangle = |0\rangle$, то отличный от нуля вклад дает только диаграмма *a*.

Для вычисления сингулярностей коммутатора $[J(x), J(0)]$ надо лишь воспользоваться тождеством (7.135).

Сингулярности свободных полей и скейлинг

Теперь мы можем продемонстрировать, как возникает бёркеновский скейлинг в теории свободных полей. Рассмотрим электромагнитный ток

$$J_\mu(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x):, \quad (7.143)$$

где Q — оператор заряда. Будем следовать методу, использованному нами в предыдущем случае при рассмотрении скалярных плотностей токов. Вычислим сначала не коммутатор $[J_\mu(x), J_\nu(0)]$, а хронологическое произведение токов, используя теорему Вика:

$$\begin{aligned} T(J_\mu(x)J_\nu(0)) &= T(:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x)::\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q\psi(0):) = \\ &= \text{tr}[iS_F(-x)\gamma_\mu iS_F(x)\gamma_\nu Q^2] + :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q iS_F(x)\gamma_\nu Q\psi(0): + \\ &+ :\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q iS_F(-x)\gamma_\mu Q\psi(x): + :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu Q\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma_\nu Q\psi(0):, \end{aligned} \quad (7.144)$$

где $S_F(x)$ — величина, определенная в (7.136). Используя соотношение (7.138) и тождество

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = (S_{\mu\nu\lambda\rho} + i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma_5) \gamma^\rho, \quad (7.145)$$

где $S_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}$, мы можем записать выражение (7.144) в пределе $x^2 \approx 0$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} T(J_\mu(x) J_\nu(0)) &\approx (\text{tr } Q^2) \frac{(x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)}{\pi^4 (x^2 - i\varepsilon)^4} + \\ &+ \frac{ix^\alpha}{2\pi^2 (x^2 - i\varepsilon)^2} \{S_{\mu\alpha\nu\beta} [V^\beta(x, 0) - V^\beta(0, x)] + \\ &+ i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} [A^\beta(x, 0) - A^\beta(0, x)]\} + : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu Q \psi(x) \bar{\psi}(0) \gamma_\nu Q \psi(0) : , \end{aligned} \quad (7.146)$$

где

$$V^\beta(x, y) = : \bar{\psi}(x) \gamma^\beta Q^2 \psi(y) : , \quad (7.147)$$

$$A^\beta(x, y) = : \bar{\psi}(x) \gamma^\beta \gamma_5 Q^2 \psi(y) : . \quad (7.148)$$

Используя равенства

$$\frac{x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu}{(x^2 - i\varepsilon)^4} = \frac{2}{3} \frac{g_{\mu\nu}}{(x^2 - i\varepsilon)^3} - \frac{1}{12} \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{(x^2 - i\varepsilon)^2}, \quad (7.149)$$

$$\frac{x^\alpha}{(x^2 - i\varepsilon)^2} = \frac{-1}{2} \partial^\alpha \left(\frac{1}{x^2 - i\varepsilon} \right) \quad (7.150)$$

и совершая подстановку (7.135), мы получим главные сингулярности коммутатора токов на световом конусе:

$$\begin{aligned} [J_\mu(x), J_\nu(0)] &\approx \frac{i \text{tr } Q^2}{\pi^3} \left\{ \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \delta''(x^2) \varepsilon(x_0) + \frac{1}{6} \partial_\mu \partial_\nu [\delta'(x^2) \varepsilon(x_0)] \right\} + \\ &+ \{S_{\mu\alpha\nu\beta} [V^\beta(x, 0) - V^\beta(0, x)] + \\ &+ i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} [A^\beta(x, 0) - A^\beta(0, x)]\} \partial^\alpha \frac{[\delta(x^2) \varepsilon(x_0)]}{2\pi} + \\ &+ : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu Q \psi(x) \bar{\psi}(0) \gamma_\nu Q \psi(0) : . \end{aligned} \quad (7.151)$$

Мы можем затем использовать это явное выражение для коммутатора токов в соотношениях для сечений e^+e^- -аннигиляции и неупругого IN -рассеяния.

1. e^+e^- -аннигиляция. Следуя методу, изложенному в разд. 7.1, можно непосредственно показать, что полное сечение e^+e^- -аннигиляции в адроны можно записать в виде коммутатора токов:

$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) =$

$$= \frac{8\pi^2 \alpha^2}{3(q^2)^2} \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | [J_\mu(x), J^\mu(0)] | 0 \rangle. \quad (7.152)$$

Наиболее сингулярный на световом конусе вклад в это выражение дает первый член разложения (7.151) (таким образом, мы

имеем возможность зондировать поведение коммутатора токов на малых расстояниях):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) \approx \frac{8\pi^2\alpha^2 \text{tr} Q^2}{3\pi^3 (q^2)^2} \int d^4x e^{iqx} \left\{ \frac{8}{3} \delta''(x^2) \varepsilon(x_0) + \frac{1}{6} \partial^2 [\delta'(x^2) \varepsilon(x_0)] \right\}. \quad (7.153)$$

Используя тождество (7.131), мы получаем

$$\begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) &\approx \frac{8\pi^2\alpha^2 \text{tr} Q^2}{3\pi (q^2)^2} \left(\frac{8}{3} \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{6} \right) \theta(q^2) \varepsilon(q_0) = \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} \text{tr} Q^2, \end{aligned} \quad (7.154)$$

или

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \text{tr} Q^2. \quad (7.155)$$

Это соотношение подтверждает результат (7.104), полученный в рамках партонной модели, в случае, когда главная сингулярность на малых расстояниях совпадает с главной сингулярностью в свободной теории. Рассмотрим теперь глубоконеупругое лептон-адронное рассеяние — процесс, существенно связанный с поведением на световом конусе.

2. *Лептон-адронное рассеяние.* В случае глубоконеупругого IN -рассеяния первый член выражения (7.151) не дает вклада в адронный тензор (7.115), поскольку он является s -числом. Поэтому нетривиальный главный сингулярный вклад дает второй член:

$$\begin{aligned} [J_\mu\left(\frac{x}{2}\right), J_\nu\left(-\frac{x}{2}\right)] &\approx \left\{ S_{\mu\alpha\nu\beta} \left[: \bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right) \gamma^\beta Q^2 \psi\left(-\frac{x}{2}\right) : - \right. \right. \\ &- : \bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right) \gamma^\beta Q^2 \psi\left(\frac{x}{2}\right) : \left. \right] + i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} \left[: \bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right) \gamma^\beta \gamma_5 Q^2 \psi\left(-\frac{x}{2}\right) : - \right. \\ &\left. \left. - : \bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right) \gamma^\beta \gamma_5 Q^2 \psi\left(\frac{x}{2}\right) : \right] \right\} \partial^\alpha \left[\frac{\delta(x^2) \varepsilon(x_0)}{2\pi} \right]. \end{aligned} \quad (7.156)$$

Используя разложение для билокального оператора

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right) \psi\left(-\frac{x}{2}\right) &= \bar{\psi}(0) \left[1 + \overleftarrow{\partial}_{\mu_1} \frac{x^{\mu_1}}{2} + \frac{1}{2!} \overleftarrow{\partial}_{\mu_1} \overleftarrow{\partial}_{\mu_2} \frac{x^{\mu_1}}{2} \frac{x^{\mu_2}}{2} + \dots \right] \times \\ &\times \left[1 - \frac{x^{\nu_1}}{2} \overrightarrow{\partial}_{\nu_1} + \frac{1}{2!} \frac{x^{\nu_1}}{2} \frac{x^{\nu_2}}{2} \overrightarrow{\partial}_{\nu_1} \overrightarrow{\partial}_{\nu_2} - \dots \right] \psi(0) = \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \frac{x^{\mu_1}}{2} \frac{x^{\mu_2}}{2} \dots \frac{x^{\mu_n}}{2} \bar{\psi}(0) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} \psi(0), \end{aligned} \quad (7.157)$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} \left[J_\mu \left(\frac{x}{2} \right), J_\nu \left(-\frac{x}{2} \right) \right] &= \sum_{\substack{\text{нечет-} \\ \text{ные } n}} \frac{1}{n!} \frac{x^{\mu_1}}{2} \frac{x^{\mu_2}}{2} \dots \frac{x^{\mu_n}}{2} \mathcal{O}_{\beta\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n+1)}(0) \times \\ &\times S_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha \left[\frac{\delta(x^2) \varepsilon(x_0)}{2\pi} \right] + \sum_{\substack{\text{чет-} \\ \text{ные } n}} \frac{1}{n!} \frac{x^{\mu_1}}{2} \frac{x^{\mu_2}}{2} \dots \frac{x^{\mu_n}}{2} \mathcal{O}'_{\beta\mu_1\mu_2\dots\mu_n}{}^{(n+1)}(0) \times \\ &\times i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha \left[\frac{\delta(x^2) \varepsilon(x_0)}{2\pi} \right], \end{aligned} \quad (7.158)$$

где

$$\mathcal{O}_{\beta\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n+1)}(0) = \bar{\psi}(0) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n} \gamma^\beta Q^2 \psi(0), \quad (7.159a)$$

$$\mathcal{O}'_{\beta\mu_1\mu_2\dots\mu_n}{}^{(n+1)}(0) = \bar{\psi}(0) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n} \gamma^\beta \gamma_5 Q^2 \psi(0). \quad (7.159б)$$

Чтобы вычислить структурные функции, запишем выражение

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle p\sigma | \mathcal{O}_{\beta\mu_1\mu_2\dots\mu_n}^{(n+1)}(0) | p\sigma \rangle = A^{(n+1)} p_\beta p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots p_{\mu_n} + \text{свертки}, \quad (7.160)$$

где $A^{(n+1)}$ — некоторые константы, а свертки, содержащие один или более множителей $g_{\mu_i\mu_j}$, дают x^2 в некоторой степени при сворачивании $x^{\mu_1} x^{\mu_2} \dots x^{\mu_n}$ в выражении (7.158) и играют менее важную роль вблизи светового конуса $x^2 \approx 0$. Кроме того, член $\mathcal{O}^{(n+1)}$ не дает вклада вследствие свойства антисимметрии тензора $\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}$. Следовательно, для адронного тензора (7.115) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(p, q) &\approx \frac{1}{2M} \int \frac{d^4x}{2\pi} e^{ixq} \sum_{\substack{\text{нечет-} \\ \text{ные } n}} \left(\frac{xp}{2} \right)^n \frac{p^\beta}{n!} A^{(n+1)} \times \\ &\times S_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha \left[\frac{\delta(x^2) \varepsilon(x_0)}{2\pi} \right]. \end{aligned} \quad (7.161)$$

Определим величину $f(\xi)$ с помощью соотношения

$$\sum_{\substack{\text{нечет-} \\ \text{ные } n}} \left(\frac{xp}{2} \right)^n \frac{A^{(n+1)}}{n!} = \int d\xi e^{ix\xi p} f(\xi); \quad (7.162)$$

тогда получим

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(p, q) &\approx \frac{i}{2M} \int \frac{d^4x}{2\pi} e^{ixq} \int d\xi e^{ix\xi p} f(\xi) \times \\ &\times S_{\mu\alpha\nu\beta} (q + \xi p)^\alpha p^\beta \frac{\delta(x^2) \delta(x_0)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (7.163)$$

Используя тождество (7.131) в виде

$$i \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{ix(q+\xi p)} \delta(x^2) \varepsilon(x_0) = \delta((q + \xi p)^2) \varepsilon(q_0 + \xi p_0), \quad (7.164)$$

находим

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} \approx & \frac{1}{M} \int d\xi f(\xi) \delta(q^2 + 2M\nu\xi) (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \times \\
 & \times (q + \xi p)^\alpha p^\beta = \frac{1}{2M^2\nu} \int d\xi f(\xi) \delta(\xi + q^2/2M\nu) \times \\
 & \times (-M\nu g_{\mu\nu} + 2\xi p_\mu p_\nu + \dots) = f(x) \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{2M} + \frac{x}{\nu} \frac{p_\mu p_\nu}{M^2} + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.165}$$

при $x = -q^2/2M\nu$. Таким образом, мы вновь получили результаты партонной модели (7.56) и (7.57):

$$\begin{aligned}
 MW_1 & \rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2} f(x), \\
 \nu W_2 & \rightarrow F_2(x) = x f(x).
 \end{aligned}
 \tag{7.166}$$

Отсюда следует, что предположение о канонической структуре для свободных полей на световом конусе эквивалентно партонной модели.

Глава 8

КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

Симметрии, которые обсуждались до сих пор, являются *глобальными симметриями*. Параметры ϵ^a преобразования симметрии в (5.10) не зависят от точки пространства-времени, т. е. предполагается, что поля преобразуются во всех точках одинаково. Рассмотрим теперь теории, в которых преобразования симметрии зависят от пространственно-временных точек, т. е. $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$. Такие симметрии называются *локальными* или *калибровочными симметриями* [418]. Мы увидим, что они могут быть использованы для построения динамики, т. е. определяют так называемые *калибровочные взаимодействия*. Прототипом калибровочных теорий является квантовая электродинамика. В настоящее время распространено убеждение, что все фундаментальные взаимодействия описываются некоторой формой калибровочной теории. В разд. 8.1 после предварительного обсуждения КЭД с ее абелевой локальной $U(1)$ -симметрией исследуются значительно более содержательные по своей структуре неабелевы калибровочные теории — теории Янга — Миллса [438]. После изложения элементарной геометрической интерпретации калибровочной инвариантности в разд. 8.3 рассматриваются вопросы спонтанного нарушения симметрии в калибровочной теории.

8.1. ЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Абелева калибровочная теория

Как уже говорилось, КЭД является абелевой калибровочной теорией. Весьма поучительно продемонстрировать, как эта теория может быть «выведена» из теории свободных электронов Дирака, если потребовать, чтобы последняя была калибровочно-инвариантной и перенормируемой.

Рассмотрим лагранжиан свободного электронного поля $\psi(x)$:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (8.1)$$

Легко видеть, что он обладает глобальной $U(1)$ -симметрией, соответствующей инвариантности теории относительно изменений

фазы:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x).\end{aligned}\quad (8.2)$$

Мы должны превратить эту симметрию в локальную, т. е. «калибровать» ее, заменяя α на $\alpha(x)$, чтобы построить теорию, инвариантную относительно изменений фазы, зависящих от пространственно-временных точек:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x).\end{aligned}\quad (8.3)$$

Член с производной теперь преобразуется довольно сложно:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) = \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)\psi(x).\end{aligned}\quad (8.4)$$

Наличие второго члена показывает, что члены с обычными производными калибровочно-неинвариантны. Необходимо заменить ∂_μ на калибровочно-ковариантную производную D_μ с простым законом преобразования для $D_\mu\psi(x)$:

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x), \quad (8.5)$$

чтобы комбинация $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ была калибровочно-инвариантной. Другими словами, действие ковариантной производной на поле не должно менять его трансформационных свойств. Это может быть достигнуто, если мы расширим теорию, введя в нее новое векторное поле $A_\mu(x)$ — калибровочное поле. Тогда ковариантная производная будет иметь вид

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad (8.6)$$

где e — свободный параметр, который затем мы отождествим с электрическим зарядом. Закон преобразования ковариантной производной (8.5) будет выполняться, если калибровочное поле $A_\mu(x)$ обладает следующим трансформационным свойством:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (8.7)$$

Из (8.1) мы теперь имеем

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (8.8)$$

Чтобы сделать калибровочное поле истинной динамической переменной, необходимо к лагранжиану добавить член с ее производными. Простейшим калибровочно-инвариантным членом размерности четыре или меньше (в обычной нормировке) является

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (8.9)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (8.10)$$

Совершая преобразование (8.7), мы видим, что $F_{\mu\nu}$ само по себе калибровочно-инвариантно. Это полезно продемонстрировать, исходя и из других соображений. Антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$ связан с ковариантной производной следующим образом:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi = ie F_{\mu\nu} \psi. \quad (8.11)$$

Из (8.5) легко видеть, что

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi]' = e^{-ia} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi], \quad (8.12)$$

или

$$F'_{\mu\nu} \psi' = (F_{\mu\nu} \psi) e^{-ia}, \quad (8.13)$$

т. е.

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (8.14)$$

Объединяя (8.8) и (8.9), мы приходим к лагранжиану КЭД:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (8.15)$$

Следует отметить следующие свойства лагранжиана (8.15):

1. Фотон — безмассовая частица, так как член $A_\mu A^\mu$ не является калибровочно-инвариантным.

2. Минимальное взаимодействие фотона с электроном содержится в ковариантной производной $D_\mu \psi$, которая может быть построена на основе трансформационных свойств электронного поля. Другими словами, взаимодействие фотона с любым полем материи определяется его свойствами при преобразованиях из группы симметрии. Обычно это называют *универсальностью*. Другие калибровочно-инвариантные взаимодействия (более высокой размерности), такие, как $\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu}$, отбрасываются вследствие требования перенормируемости.

3. Лагранжиан (8.15) не содержит члена, соответствующего самодействию калибровочного поля, так как фотон не обладает зарядом (или $U(1)$ квантовым числом), т. е. без полей материи теория является теорией свободного поля.

Мы увидим, что неабелевы калибровочные теории обладают первыми двумя свойствами, но не обладают последним. При отсутствии самодействия калибровочного поля делает такие неабелевы теории сильно нелинейными и приводит к тому, что они обладают рядом свойств, фундаментально отличающих их от абелевых теорий.

Неабелева калибровочная симметрия — поля Янга — Миллса

В 1954 г. Янг и Миллс распространили принцип калибровочной симметрии на неабелевы симметрии. (С последующим развитием теорий Янга — Миллса можно ознакомиться в работах

[164, 394].) Мы проиллюстрируем эту конструкцию на примере простейшей группы симметрии изоспина $SU(2)$.

Пусть фермионное поле является изоспиновым дублетом

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

При $SU(2)$ -преобразованиях имеем

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left\{\frac{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}\right\} \psi(x), \quad (8.17)$$

где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — обычные матрицы Паули, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (8.18)$$

а $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — параметры преобразования из группы $SU(2)$. Свободный лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \quad (8.19)$$

инвариантен относительно глобальных $SU(2)$ -преобразований, когда $\{\theta_i\}$ не зависят от точек пространства-времени. Но при локальных преобразованиях симметрии

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\theta) \psi(x), \quad (8.20)$$

где

$$U(\theta) = \exp\left\{\frac{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right\}, \quad (8.21)$$

свободный лагранжиан \mathcal{L}_0 не инвариантен, так как член с производной преобразуется как

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) + \\ &+ \bar{\psi}(x) U^{-1}(\theta) [\partial_\mu U(\theta)] \psi(x). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Чтобы построить калибровочно-инвариантный лагранжиан, мы поступим так же, как в абелевом случае. Сначала введем векторные калибровочные поля A_μ^i , $i = 1, 2, 3$ (по одному на каждый генератор группы), чтобы построить ковариантную производную с помощью минимального взаимодействия

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu}{2}\right) \psi, \quad (8.23)$$

где g — константа связи, аналогичная e в (8.6). Мы требуем, чтобы $D_\mu \psi$ имело те же трансформационные свойства, что и само поле ψ , т. е.

$$D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = U(\theta) D_\mu \psi. \quad (8.24)$$

Отсюда следует

$$\left(\partial_\mu - ig \frac{\tau \cdot A'_\mu}{2}\right) (U(\theta) \psi) = U(\theta) \left(\partial_\mu - ig \frac{\tau \cdot A_\mu}{2}\right) \psi, \quad (8.25)$$

или

$$\left[\partial_\mu U(\theta) - ig \frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} U(\theta)\right] \psi = -ig U(\theta) \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} \psi,$$

т. е.

$$\frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} = U(\theta) \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta). \quad (8.26)$$

Последнее соотношение определяет закон преобразования для калибровочных полей. При инфинитезимальных преобразованиях $\theta(x) \ll 1$ имеем

$$U(\theta) \approx 1 - i \frac{\tau \cdot \theta(x)}{2}, \quad (8.27)$$

и (8.26) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} &= \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} - i\theta^j A_\mu^k \left[\frac{\tau_j}{2}, \frac{\tau_k}{2} \right] - \frac{1}{g} \left(\frac{\tau}{2} \cdot \partial_\mu \theta \right) = \\ &= \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \tau^i \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \left(\frac{\tau}{2} \cdot \partial_\mu \theta \right), \end{aligned}$$

или

$$A'_\mu^i = A_\mu^i + \varepsilon^{ijk} \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i. \quad (8.28)$$

Второй член в правой части (8.28) не что иное, как преобразование для триплетного (присоединенного) представления группы $SU(2)$. Таким образом, поля A_μ^i в отличие от абелева калибровочного поля несут заряды.

Чтобы получить из калибровочных полей антисимметричный тензор второго ранга, мы можем взять за образец соотношение (8.11) и рассмотреть комбинацию

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi \equiv ig \left(\frac{\tau^i}{2} F_{\mu\nu}^i \right) \psi, \quad (8.29)$$

где

$$\frac{\tau \cdot F_{\mu\nu}}{2} = \partial_\mu \frac{\tau \cdot A_\nu}{2} - \partial_\nu \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} - ig \left[\frac{\tau \cdot A_\mu}{2}, \frac{\tau \cdot A_\nu}{2} \right], \quad (8.30)$$

или

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (8.31)$$

Так как $D_\mu \psi$ имеет те же трансформационные свойства, что и ψ , мы видим, что

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi]' = U(\theta) (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi. \quad (8.32)$$

Подставляя определение (8.29) тензора $F_{\mu\nu}^i$ в обе части (8.32), имеем

$$\tau \cdot F'_{\mu\nu} U(\theta) \psi = U(\theta) \tau \cdot F_{\mu\nu} \psi,$$

или

$$\tau \cdot F'_{\mu\nu} = U(\theta) (\tau \cdot F_{\mu\nu}) U^{-1}(\theta). \quad (8.33)$$

При инфинитезимальных преобразованиях $\theta_i \ll 1$ это соотношение принимает вид

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \varepsilon^{ijk} \theta^j F_{\mu\nu}^k. \quad (8.34)$$

В отличие от абелева случая при преобразованиях группы $SU(2)$ $F_{\mu\nu}^i$ преобразуются не тривиально, а как триплет. Но произведение

$$\text{tr} \{ (\tau \cdot F_{\mu\nu}) (\tau \cdot F^{\mu\nu}) \} \sim F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

калибровочно-инвариантно.

Можно подвести итог проведенному обсуждению, приведя явное выражение для полного калибровочно-инвариантного лагранжиана, описывающего взаимодействие между калибровочными полями A_μ^i и полями, составляющими $SU(2)$ -дублет:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (8.35)$$

где

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k, \quad (8.36)$$

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\tau A_\mu}{2} \right) \psi. \quad (8.37)$$

Калибровочные $SU(2)$ -преобразования полей имеют следующий вид:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp \left\{ -i \frac{\tau \cdot \theta(x)}{2} \right\} \psi(x) = U(\theta) \psi(x), \quad (8.38)$$

$$\frac{\tau \cdot A_\mu}{2} \rightarrow \frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} = U(\theta) \left(\frac{\tau \cdot A_\mu}{2} \right) U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta), \quad (8.39)$$

или в инфинитезимальной форме:

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi - i \frac{\tau \cdot \theta}{2} \psi, \quad (8.40)$$

$$A_\mu^i \rightarrow A_\mu^{i'} = A_\mu^i + \varepsilon^{ijk} \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i. \quad (8.41)$$

Обобщение на группы более высокой размерности и на произвольные представления для полей ψ очевидно. Пусть G — некоторая простая группа Ли, генераторы которой образуют алгебру

$$[F^a, F^b] = i C^{abc} F^c, \quad (8.42)$$

где C^{abc} — полностью антисимметричные структурные константы. Предполагается, что ψ принадлежит некоторому представлению, в котором генераторы представлены матрицами T^a , т. е.

$$[T^a, T^b] = i C^{abc} T^c. \quad (8.43)$$

Тогда ковариантная производная имеет вид

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a) \psi, \quad (8.44)$$

а тензор второго ранга для калибровочных полей

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (8.45)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{F})_{\mu\nu} = \partial_\mu (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\nu) - \partial_\nu (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu) - ig [\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu, \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\nu]. \quad (8.46)$$

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \quad (8.47)$$

при этом инвариантен относительно преобразований из группы G :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)) \psi(x) \equiv U(\theta_x) \psi(x), \quad (8.48)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu(x) \rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}'_\mu(x) = U(\theta_x) \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu U^{-1}(\theta_x) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta_x)] U^{-1}(\theta_x), \quad (8.49)$$

а бесконечно малые преобразования имеют вид

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - iT^a \theta^a(x) \psi(x), \quad (8.50)$$

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{a'}(x) = A_\mu^a(x) + C^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x). \quad (8.51)$$

Чисто янг-миллсовский член $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ содержит слагаемые, трilinearные и четырехлинейные по A_μ^a :

$$-gC^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} C^{abc} C^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}, \quad (8.52)$$

которые соответствуют самодействиям неабелевых калибровочных полей. Они возникают из-за нелинейных членов в F_μ^a (8.45), так как сами калибровочные поля A_μ^a преобразуются нетривиальным образом как генераторы калибровочной группы или как элементы ее присоединенного представления. Хотя неабелев случай значительно отличается от абелева (обладает более богатой структурой), свойства универсальности и безмассовости калибровочных полей остаются по существу теми же. Отметим, что число безмассовых калибровочных полей равно числу генераторов группы калибровочной симметрии. Что касается универсальности, то следует сделать два замечания относительно силы взаимодействия.

1. В случае абелевых калибровочных теорий на силу взаимодействия между калибровочным полем A_μ и другими полями не накладывается никаких ограничений. В частности, электрон несет заряд e , а какая-либо другая частица может в принципе обладать зарядом λe , где λ — произвольное число (например $\lambda = \pi$). В неабелевой калибровочной теории, такой, как, например, рассмотренная выше $SU(2)$ -теория с дублетом ψ , имеют

место более жесткие ограничения. Например, если попытаться рассмотреть взаимодействие калибровочного поля с каким-нибудь другим дублетом ϕ с константой взаимодействия λg , то в коммутационном соотношении (8.18), обеспечивающем калибровочную инвариантность, каждый генератор придется умножить на λ и потребовать выполнение равенства $\lambda^2 = \lambda$, или $\lambda = 1$. По существу в неабелевых теориях нормировки генераторов фиксированы коммутатором, который является нелинейным соотношением; следовательно, масштаб g не может быть произвольным.

2. Возможны ли различные калибровочные взаимодействия, ассоциированные с различными калибровочными полями? Если группа *простая*, как в рассмотренном случае, то может быть только одна константа взаимодействия. Но если группа является произведением простых групп, как, например, $SU(2) \times SU(3)$, где набор генераторов, соответствующий любому сомножителю, замыкается при коммутировании и перестановочен с набором генераторов, соответствующим другому сомножителю, то каждой группе в произведении соответствует своя независимая константа взаимодействия.

8.2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЯ

Успешная формулировка Эйнштейном общей теории относительности в 1916 г. обнаружила глубокую связь между гравитацией и геометрией. Это побудило Вейля [416, 417], основываясь на зависящем от пространственно-временной точки (локальном) масштабном преобразовании, объединить с геометрией и электромагнетизм. А именно, он предложил считать, что в некоторой точке, находящейся на расстоянии dx^μ от данной точки, масштаб изменяется (от единицы) до $(1 + S_\mu dx^\mu)$, и, таким образом, зависящая от пространственно-временной точки функция изменяется согласно правилу

$$f(x) \rightarrow (f + (\partial_\mu f) dx^\mu) (1 + S_\mu dx^\mu) \approx f + [(\partial_\mu + S_\mu) f] dx^\mu. \quad (8.53)$$

Вейль пытался вывести электромагнетизм, исходя из требования инвариантности относительно локальных масштабных преобразований, отождествляя масштабный множитель с векторным потенциалом: $S_\mu \leftrightarrow A_\mu$. Его первоначальная попытка оказалась неудачной. В 1925 г. возникла современная квантовая механика, основным моментом в которой было отождествление импульса с оператором $(-i\partial_\mu)$, а канонического импульса в присутствии электромагнитного поля с $(-i\partial_\mu + eA_\mu)$. Затем было установлено, что правильное отождествление вейлевского масштабного множителя имеет вид $S_\mu \leftrightarrow iA_\mu$ и что в действительности необходимо требовать инвариантности теории относительно преобразований *фазы*, зависящих от пространственно-времен-

ной точки (см. (8.3)). Но когда Вейль [418] сформулировал этот подход, он сохранил первоначальную терминологию «калибровочной инвариантности», т. е. инвариантности относительно изменения масштаба или калибровки. Подробную историю развития представлений калибровочной теории читатель может найти в лекциях Янга [437].

Последовательная геометрическая интерпретация калибровочных теорий может быть дана в рамках современной теории расслоений. Но это требует использования дифференциальной геометрии и выходит за рамки данного изложения. Нам достаточно отметить только тот факт, что существует глубокое геометрическое обоснование понятий теории калибровочных полей. Здесь мы излагаем элементарную геометрическую точку зрения на калибровочную инвариантность. Мы покажем, как калибровочные поля A_μ описывают параллельный перенос в зарядовом пространстве, тензором кривизны которого является напряженность поля $F_{\mu\nu}$.

Сформулируем кратко некоторые основные геометрические понятия в случае искривленного пространства. Прежде всего это понятие *параллельного переноса*. Чтобы сравнить два вектора (или тензора), определенные в двух различных точках пространства $V_\mu(x)$ и $V_\mu(x')$, необходимо сначала передвинуть (параллельно перенести) V_μ из точки x в точку x' , т. е. прежде, чем находить разность между двумя векторами, нужно их поместить в одну систему координат. Таким образом, сравнение двух векторов осуществляется в два этапа:

$$DV_\mu = \delta V_\mu + dV_\mu, \quad (8.54)$$

где δV_μ — изменение, связанное с переносом этих двух векторов в начало одной системы координат, а dV_μ — их разность, измеренная в этой системе координат. Параллельный перенос определяется как операция, во время которой угол между переносимым вектором и касательной к траектории остается фиксированным. Конечно, параллельный перенос является тривиальной операцией в плоском (евклидовом) пространстве, так как в этом случае вектор не изменяется, $\delta V_\mu = 0$, и ковариантное дифференцирование является просто обычным дифференцированием:

$$DV^\mu = dV^\mu = (\partial_\lambda V^\mu) dx^\lambda \text{ в плоском пространстве.} \quad (8.55)$$

Но в искривленном пространстве при параллельном переносе вектор явно изменяется, так как в этом случае при переходе от точки к точке происходит изменение координатных осей (т. е. метрика зависит от выбора точки в пространстве). Для точек x и x' , разделенных бесконечно малым промежутком dx^λ , предполагается, что величина δV_μ линейно зависит от dx^λ и V^μ :

$$\delta V^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu dx^\lambda,$$

а

$$\delta V_\mu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V_\nu dx^\lambda, \quad (8.56)$$

так как $\delta(V^\mu V_\mu) = 0$. Коэффициент $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ называется *аффинной связностью*, или *символом Кристоффеля*; можно показать, что он представляет собой некоторую комбинацию производных от метрического тензора (и поэтому обращается в нуль в пространстве с постоянным метрическим тензором). Сравнение вектора, заданного в точке x' , с вектором, параллельно перенесенным из точки x в точку x' , дает

$$DV^\mu = V^\mu(x') - [V^\mu(x) + \delta V^\mu] = (\partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu) dx^\lambda, \quad (8.57)$$

где комбинация в круглых скобках представляет собой ковариантную производную. Это различие между плоским и искривленным пространствами показано на рис. 8.1.

Другим важным объектом неевклидовой геометрии является *тензор кривизны*, который лучше всего ввести, анализируя параллельный перенос вектора вдоль замкнутого контура (см. рис. 8.2, где дано сравнение). Рассмотрим изменение вектора, перенесенного вокруг малого параллелограмма $PP_1P_2P_3$, состоящего из двух векторов a^μ и b^μ и их параллельных сдвигов

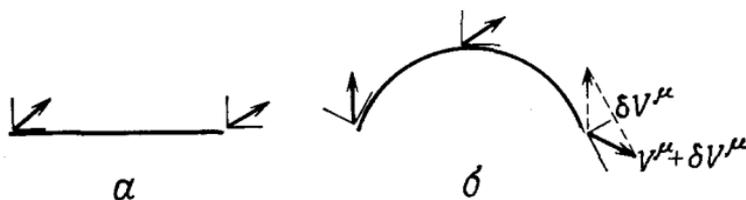


Рис. 8.1. Изменения, вызванные параллельным переносом: а — в плоском пространстве (вектор не меняется) и б — в искривленном пространстве.

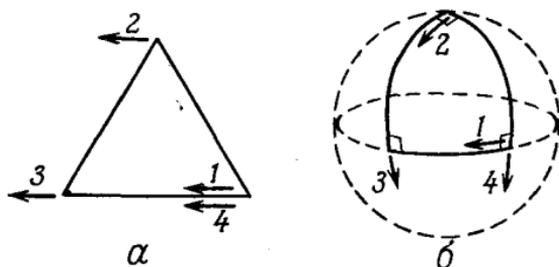


Рис. 8.2. Изменения, вызванные параллельным переносом: а — вдоль замкнутого контура 1—2—3—4 на плоскости и б — на сферической поверхности.

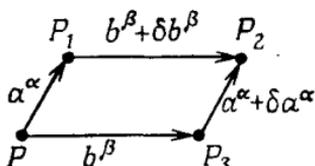


Рис. 8.3.

(рис. 8.3). Пусть δV_μ и $\delta V'_\mu$ — изменения вектора при перенесении его вдоль путей PP_1P_2 и PP_3P_2 соответственно. Тогда полное изменение вектора при перемещении его вдоль всего замкнутого пути равно

$$\Delta V_\mu = \delta V_\mu - \delta V'_\mu, \quad (8.58)$$

где

$$\delta V_\mu = (\Gamma_{\mu\alpha}^\nu V_\nu)_{P_1} a^\alpha + (\Gamma_{\mu\beta}^\nu V_\nu)_{P_1} (b^\beta + \delta b^\beta), \quad (8.59a)$$

$$\delta V'_\mu = (\Gamma_{\mu\beta}^\nu V_\nu)_{P_3} b^\beta + (\Gamma_{\mu\alpha}^\nu V_\nu)_{P_3} (a^\alpha + \delta a^\alpha). \quad (8.59b)$$

Разлагая величины, взятые в точках P_1 и P_3 , можно представить их таким образом, чтобы все тензоры были отнесены к одной точке P :

$$(\Gamma_{\mu\beta}^\nu V_\nu)_{P_1} = (\Gamma_{\mu\beta}^\nu + \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\nu a^\alpha) (V_\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma V_\sigma a^\alpha); \quad (8.60)$$

аналогичное выражение можно получить для $(\Gamma_{\mu\alpha}^\nu V_\nu)_{P_3}$. Подставляя эти выражения в (8.58) и (8.59) и используя соотношение

$$a^\alpha + \delta a^\alpha = a^\alpha - \Gamma_{\tau\eta}^\alpha a^\tau b^\eta \quad (8.61)$$

и аналогичное соотношение для $(b^\beta + \delta b^\beta)$, получим

$$\Delta V_\mu = R_{\mu\alpha\beta}^\nu V_\nu \sigma^{\alpha\beta}. \quad (8.62)$$

Изменение вектора при переносе его вдоль замкнутого контура пропорционально ему самому, площади (тензору), ограниченной этим контуром, $\sigma^{\alpha\beta} = a^\alpha b^\beta$, и тензору кривизны

$$R_{\mu\alpha\beta}^\nu = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\nu - \partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\nu - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\nu. \quad (8.63)$$

В довольно простом случае сферического треугольника, каждый угол которого равен 90° (рис. 8.2), изменение, очевидно, равно $\pi/2$. Этот результат согласуется с соотношением (8.62), так как в данном случае тензор кривизны сводится к кривизне $R = 1/r^2$, где r — радиус сферы. Умножая ее на площадь треугольника $\pi r^2/2$, получим изменение $\pi/2$.

Непосредственное сравнение (8.57) с калибровочной ковариантной производной $D_\mu \psi$ (8.44) показывает, что величину $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu$ с геометрической точки зрения можно интерпретировать как «связность» (т. е. символ Кристоффеля) во внутреннем зарядовом пространстве. Так же как в (8.56), при параллельном переносе поля $\psi(x)$, вследствие локального изменения координатных осей происходит изменение поля

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x + dx) = \psi(x) + \delta\psi(x);$$

здесь

$$\delta\psi(x) = ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu \psi dx_\mu, \quad (8.64)$$

где \mathbf{T} — матрицы представления для генераторов группы симметрии, а ψ — базисный вектор.

При параллельном переносе на конечное расстояние из точки x в x' выражение (8.64) можно экспоненцировать, и мы получим¹⁾

$$P(x', x) = \exp \left\{ ig \int_x^{x'} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu(y) dy^\mu \right\}, \quad (8.65)$$

где интеграл берется вдоль траектории, соединяющей точки x и x' . Таким образом, с каждой траекторией можно связать элемент группы. Проверим, что такая интерпретация совместна с трансформационными свойствами калибровочных полей. Для простоты рассмотрим бесконечно малый параллельный перенос (8.64)

$$\psi(x + dx) = (1 + ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu dx^\mu) \psi(x). \quad (8.66)$$

При другом выборе системы отсчета в каждой точке мы произведем калибровочное преобразование — поворот осей в каждой точке с помощью $\mathbf{T} \cdot \theta(x)$ в соответствии с формулой (8.48):

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\theta_x) \psi(x), \quad (8.67)$$

$$\psi(x') \rightarrow \psi'(x') = U(\theta_{x'}) \psi(x'). \quad (8.68)$$

Чтобы произведение $\bar{\psi}(x + dx) P(x + dx, x) \psi(x)$ было инвариантным, «связность» параллельного переноса должна преобразовываться в соответствии с выражением

$$\begin{aligned} 1 + ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}'_\mu dx^\mu &= \\ &= U(\theta_{x+dx}) (1 + ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu dx^\mu) U^{-1}(\theta_x) = \\ &= (U(\theta_x) + \partial_\nu U(\theta_x) dx^\nu) (1 + ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu dx^\mu) U^{-1}(\theta_x), \end{aligned} \quad (8.69)$$

или

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}'_\mu(x) = U(\theta_x) \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu U^{-1}(\theta_x) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta_x)] U^{-1}(\theta_x), \quad (8.70)$$

что представляет собой требуемый закон преобразования для калибровочных полей, приведенный в (8.49). Этот результат, очевидно, имеет место и тогда, когда точки разделены конечным промежутком. Таким образом, оператор параллельного переноса (8.65) при калибровочных преобразованиях изменяется следующим образом:

$$P(x', x) \rightarrow P'(x', x) = U(\theta_{x'}) P(x', x) U^{-1}(\theta_x). \quad (8.71)$$

Непосредственное сравнение величины $\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}$ (8.46) с тензором кривизны $R^{\rho}_{\mu\nu\lambda}$ (8.63) показывает, что $\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}$ можно интерпретировать как кривизну во внутреннем зарядовом простран-

¹⁾ В формуле (8.65) перед экспонентой следует поставить оператор упорядочения вдоль выбранной траектории, который расставляет матрицы $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu(x(s))$ в порядке возрастания параметра на траектории s в каждом члене разложения экспоненты. — *Прим. перев.*

стве. Это можно проверить непосредственно, рассматривая параллельный перенос вдоль замкнутого пути C . Для простоты выберем в качестве C параллелограмм с вершиной в точке x_μ и двумя образующими dx_μ и δx_μ :

$$P_\square = P(x, x + dx) P(x + dx, x + dx + \delta x) \times \\ \times P(x + dx + \delta x, x + \delta x) P(x + \delta x, x), \quad (8.72)$$

где P — матрицы параллельного переноса (8.65). Используя матричное тождество

$$e^{\lambda A} e^{\lambda B} = e^{\lambda(A+B) + \lambda^2/2 [A, B]} + O(\lambda^3), \quad (8.73)$$

получим

$$P(x, x + dx) P(x + dx, x + dx + \delta x) = \\ = \exp[ig A_\mu(x) dx^\mu] \exp[ig A_\nu(x + dx) \delta x^\nu] = \\ = \exp\left\{ig(A_\mu dx^\mu + A_\nu \delta x^\nu + \partial_\mu A_\nu dx^\mu \delta x^\nu) - \right. \\ \left. - \frac{g^2}{2} [A_\mu, A_\nu] dx^\mu \delta x^\nu\right\} \quad (8.74)$$

и

$$P(x + dx + \delta x, x + \delta x) P(x + \delta x, x) = \\ = \exp[-ig A_\mu(x + \delta x) dx^\mu] \exp[-ig A_\nu(x) \delta x^\nu] = \\ = \exp\left\{-ig(A_\mu dx^\mu + A_\nu \delta x^\nu + \partial_\nu A_\mu dx^\mu \delta x^\nu) - \right. \\ \left. - \frac{g^2}{2} [A_\mu, A_\nu] dx^\mu \delta x^\nu\right\}. \quad (8.75)$$

Таким образом, выражение (8.72) можно представить в виде

$$P_\square = \exp\{ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) dx^\mu \delta x^\nu\}. \quad (8.76)$$

В соотношениях (8.74)–(8.76) мы упростили обозначения, записывая A_μ вместо $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu$. Проведенные вычисления убеждают нас в том, что величину

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu - ig[\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu, \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\nu] \quad (8.77)$$

действительно можно отождествить с тензором кривизны во внутреннем зарядовом пространстве.

В заключение отметим, что существенным моментом всего вышеизложенного является то, что во всяком (физическом или внутреннем) пространстве, где координаты зависят от выбора точки, сравнение двух векторов (или любых двух тензоров), взятых в различных точках, не имеет смысла. Стандартный способ решения этой проблемы состоит во введении понятия параллельного переноса, или аффинной связности. В случае искривленного физического пространства-времени вводится символ Кристоффеля, а в случае внутреннего зарядового простран-

ства вводятся калибровочные поля. Они «компенсируют» изменение локальной системы координат в каждой пространственно-временной точке.

8.3. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ КАЛИБРОВОЧНОЙ СИММЕТРИИ; ЯВЛЕНИЕ ХИГГСА

В разд. 8.1 мы видели, что требование локальной симметрии приводит к возникновению в теории безмассовых векторных частиц. Если мы не хотим иметь дело с такими частицами, а желаем получить массивные векторные бозоны, необходимо как-то нарушить калибровочную симметрию. Введение членов, соответствующих произвольным массам калибровочных бозонов и явно нарушающих калибровочную инвариантность, приводит к такому изменению высокоэнергетического поведения теории, что она перестает быть перенормируемой (см. обсуждение в разд. 2.4). Можно более подробно рассмотреть возможность спонтанного нарушения симметрии, которая обсуждалась в разд. 5.3. В этом случае мы имеем дело со скрытой симметрией; лагранжиан остается инвариантным относительно преобразований симметрии, но динамика такова, что основное состояние, т. е. вакуум, не является синглетом относительно группы симметрии. Выбор одного из всех возможных вырожденных основных состояний в качестве вакуума нарушает симметрию. Это приводит к тому, что обычное вырождение уровней энергии, вытекающее из симметрии, не имеет места. Но, согласно теореме Голдстоуна (см. разд. 5.3), это приводит к существованию некоторого набора безмассовых скалярных бозонов. Таким образом, казалось бы, любой путь приводит к необходимости рассматривать нежелательные безмассовые частицы.

Однако оказывается, что в калибровочных теориях теорема Голдстоуна не справедлива, так как при ее доказательстве требуется выполнение аксиом обычной теории поля: явной лоренц-ковариантности, положительности нормы и т. д. Не существует такого условия, фиксирующего калибровку, для которого калибровочная теория удовлетворяла бы *всем* указанным аксиомам. В ковариантных калибровках имеются состояния с отрицательной нормой (продольные фотоны); в радиационной и аксиальной калибровках отсутствует явная лоренц-ковариантность. Если мы считаем, что присутствие в теории безмассовых калибровочных бозонов и безмассовых голдстоуновских бозонов является недостатком теории, то, рассматривая их совместно, можно избавиться от этого недостатка. И те и другие частицы исчезают из физического спектра теории, объединяясь друг с другом и образуя массивные векторные частицы. При этом не нарушается хорошее высокоэнергетическое поведение симметричной теории. Этот замечательный факт был обнару-

жен Андерсоном [17, 18], показавшим, что некоторые явления в физике конденсированного состояния могут быть объяснены, если рассматривать массивные фотоны. В частности, в сверхпроводимости имеет место явление вытеснения магнитного потока (эффект Мейсснера), что соответствует электромагнитному полю с конечным радиусом действия, т. е. «массивному фотону». Дополнительная продольная компонента на самом деле связана с флуктуациями коллективной плотности электронной системы — плазменными осцилляциями. Последовательное обобщение этого явления на случай релятивистской теории поля было дано Энглертом и Браутом [127], Гуральником и др. [206], а в более полном виде Хиггсом [220, 222]. В литературе обычно это явление называется *явлением Хиггса*. Т'Хофт [384] впервые показал, что калибровочные теории перенормируемы даже в случае спонтанного нарушения симметрии.

Абелев случай

Рассмотрим простой случай абелевой калибровочной теории с группой симметрии $U(1)$:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (8.78)$$

где

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (8.79)$$

Лагранжиан (8.78) инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \phi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (8.80)$$

При $\mu^2 > 0$ минимум потенциала

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (8.81)$$

находится в точке

$$|\phi| = v/\sqrt{2}, \quad (8.82)$$

где

$$v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (8.83)$$

Это означает, что полевой оператор ϕ имеет вакуумное среднее

$$|\langle 0 | \phi | 0 \rangle| = v/\sqrt{2}. \quad (8.84)$$

Если поле ϕ выразить через вещественные поля ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad (8.85)$$

то последние можно выбрать так, что

$$\langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle = v, \quad \langle 0 | \phi_2 | 0 \rangle = 0. \quad (8.86)$$

Лагранжиан (8.78) и потенциал (8.81) обладают $U(1)$ -симметрией, и, решая задачу о минимуме потенциала, можно найти только модуль поля ϕ . Выбор (8.86) в качестве физического вакуума из бесконечного числа возможных минимальных значений поля нарушает симметрию. (Это по существу один из примеров, приведенных в разд. 5.3, если провести замену $\sigma \rightarrow \phi_1$ и $\pi \rightarrow \phi_2$.) Если теперь перейти к полям

$$\phi'_1 = \phi_1 - v \text{ и } \phi'_2 = \phi, \quad (8.87)$$

то можно убедиться, что ϕ'_2 соответствует безмассовому голдстоуновскому бозону. Важной особенностью рассматриваемого случая является, конечно, то, что теория обладает локальной калибровочной симметрией и обычная производная заменена на ковариантную. Член с производной может быть записан в виде

$$\begin{aligned} |D_\mu \phi|^2 &= |(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi'_1 + gA_\mu \phi'_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi'_2 - gA_\mu \phi'_1)^2 - \\ &\quad - gvA^\mu(\partial_\mu \phi'_2 + gA_\mu \phi'_1) + \frac{g^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Последнее слагаемое в этом выражении можно интерпретировать как массовый член для поля A_μ . Таким образом, калибровочный бозон приобретает массу $M = gv$.

Унитарная калибровка (абелев случай). Присутствие в (8.88) члена

$$gvA^\mu \partial_\mu \phi'_2 \quad (8.89)$$

приводит к смешиванию полей A_μ и ϕ'_2 и делает нашу интерпретацию менее очевидной. Чтобы устранить этот член, мы введем полярные переменные для комплексного поля и произведем сдвиг только модуля этого поля:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x)] \exp(i\xi(x)/v) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x) + \dots]. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Для малых осцилляций поля $\eta(x)$ и $\xi(x)$ совпадают с полями $\phi'_1(x)$ и $\phi'_2(x)$ соответственно. Свободный лагранжиан, выраженный через поля $\eta(x)$ и $\xi(x)$, сохраняет прежний вид:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)^2 - (\partial_\mu \xi)^2] - \frac{\mu^2}{2} (\eta^2 + \xi^2). \quad (8.91)$$

Условия канонического квантования не изменяются; $\eta(x)$ и $\xi(x)$ имеют ту же интерпретацию в терминах частиц, что и поля ϕ_1 и ϕ_2 .

Нежелательный член (8.89) можно теперь устранить, проведя преобразование, исключаяющее поле $\phi_2'(x)$ или $\xi(x)$, или, точнее говоря, фиксируя калибровку (которая называется *унитарной калибровкой*). С этой целью введем новые поля

$$\begin{aligned}\phi^u(x) &= \exp(-i\xi/v)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x)), \\ B_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{gv}\partial_\mu\xi(x).\end{aligned}\quad (8.92)$$

Используя свойство калибровочного преобразования (8.80), получим

$$D_\mu\phi = \exp(-i\xi/v)(\partial_\mu\phi^u - igB_\mu\phi^u) = \exp(-i\xi/v)(\partial_\mu\eta - igB_\mu(v + \eta))/\sqrt{2}$$

и

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}|\partial_\mu\eta - igB_\mu(v + \eta)|^2, \quad (8.93)$$

а также

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Лагранжиан (8.78) теперь может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}|\partial_\mu\eta - igB_\mu(v + \eta)|^2 + \frac{\mu^2}{2}(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \\ &\quad - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}(gv)^2 B_\mu B^\mu, \quad (8.94)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}g^2 B_\mu B^\mu \eta(2v + \eta) - \lambda v^2 \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4.$$

Ясно, что \mathcal{L}_0 является свободным лагранжианом массивного векторного бозона с массой $M = gv$ и скалярного мезона с массой $m = \sqrt{2}\mu$. Поле $\xi(x)$ исчезло из лагранжиана. Это покажется менее неожиданным, если подсчитать степени свободы. До спонтанного нарушения симметрии у нас было два скалярных поля ϕ_1 и ϕ_2 и одно калибровочное поле A_μ , соответствующее безмассовому бозону (имеющему только два состояния поляризации). После нарушения симметрии мы имеем только одно скалярное поле η и одно калибровочное поле B_μ , соответствующее массивному бозону (с тремя состояниями поляризации). Таким образом, безмассовое калибровочное поле A_μ объединяется со скалярным полем ξ и становится массивным векторным полем B_μ в (8.92). Таков механизм Хиггса для абелева случая. Поле $\xi(x)$ называется *несостоявшимся голдстоуновским бозоном*.

Неабелев случай

Механизм Хиггса непосредственно обобщается на случай теорий с неабелевой калибровочной симметрией. Рассмотрим случай $SU(2)$ -калибровочной теории с комплексным дублетом скалярных полей $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (8.95)$$

где

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu}{2} \right) \phi, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ V(\phi) &= -\mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \end{aligned} \quad (8.96)$$

При $\mu^2 > 0$ классический потенциал имеет минимум в точке

$$\langle \phi^\dagger \phi \rangle_0 = v^2/2, \quad \text{где } v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (8.97)$$

Физический вакуум можно выбрать так, чтобы вакуумное среднее имело вид

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (8.98)$$

Если определить новое поле

$$\phi' = \phi - \langle \phi \rangle_0, \quad (8.99)$$

то $\langle \phi' \rangle_0 = 0$. Член с ковариантной производной порождает массу векторного бозонного поля, так как выражение

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \left(\left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu}{2} \right) (\phi' + \langle \phi \rangle_0) \right)^\dagger \times \\ &\times \left(\left(\partial^\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}^\mu}{2} \right) (\phi' + \langle \phi \rangle_0) \right) \end{aligned} \quad (8.100)$$

содержит слагаемое

$$\frac{1}{4} g^2 \langle \phi \rangle_0^\dagger \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}^\mu \langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}^\mu, \quad (8.101)$$

соответствующее массовому члену поля \mathbf{A}_μ с массой

$$M_A = \frac{gv}{2}. \quad (8.102)$$

В скалярном секторе имеем

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi &= \phi'^\dagger \phi' + \langle \phi^\dagger \rangle_0 \phi' + \phi'^\dagger \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^\dagger \rangle_0 \langle \phi \rangle_0, \\ (\phi^\dagger \phi)^2 &= v^2 \phi'^\dagger \phi' + (\langle \phi^\dagger \rangle_0 \phi' + \phi'^\dagger \langle \phi \rangle_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (8.103)$$

Представляя ϕ' в виде $\phi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix}$, запишем член, квадратичный по ϕ' , в виде

$$\frac{\lambda v^2}{2} (\phi'_2 + \phi'^{\dagger}_2)^2 = \frac{\mu^2}{2} (\phi'_2 + \phi'^{\dagger}_2)^2. \quad (8.104)$$

Это означает, что только комбинация $(\phi'_2 + \phi'^{\dagger}_2)/\sqrt{2}$ является массивной (физическая хигсова частица). Остальные три поля ϕ'_2 , ϕ'^{\dagger}_1 и $(\phi'_2 - \phi'^{\dagger}_2)/\sqrt{2}$ являются несостоявшимися голдстоуновскими бозонами, которые объединяются с первоначальными тремя безмассовыми калибровочными бозонами и образуют три массивных векторных бозона.

Унитарная калибровка (неабелев случай). Чтобы убедиться в этом явно, перейдем к унитарной калибровке. Введем для скалярного дублета следующую параметризацию:

$$\phi(x) = \exp \left\{ i \frac{\boldsymbol{\tau}}{v} \cdot \boldsymbol{\xi}(x) \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (8.105)$$

где $\langle \xi^a \rangle_0 = \langle \eta \rangle_0 = 0$. Можно определить далее новые поля

$$\phi^u(x) = U(x) \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}, \quad (8.106)$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu}{2} = U(x) \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x), \quad (8.107)$$

где

$$U(x) = \exp \left\{ -i \frac{\boldsymbol{\tau}}{v} \cdot \boldsymbol{\xi}(x) \right\}. \quad (8.108)$$

Используя свойства калибровочных преобразований, получаем

$$D_\mu \phi = U^{-1}(x) D_\mu \phi^u, \quad (8.109)$$

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad (8.110)$$

где

$$D_\mu \phi^u = \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{B}_\mu \right) \phi^u, \quad (8.111)$$

$$G_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g \epsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c). \quad (8.112)$$

Тогда лагранжиан в унитарной калибровке принимает простой вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D_\mu \phi^u)^\dagger (D^\mu \phi^u) + \frac{\mu^2}{2} (v + \eta)^2 - \\ & - \frac{\lambda}{4} (v + \eta)^4 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.113)$$

Первый член лагранжиана содержит слагаемое, квадратичное по полю \mathbf{V}_μ :

$$\frac{g^2}{8}(0, v)(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2}\right)^2 \mathbf{V}_\mu \mathbf{V}^\mu. \quad (8.114)$$

Частица, соответствующая векторному полю \mathbf{V}_μ , имеет массу $M_B = gv/2$. Таким образом, первоначальная калибровочная $SU(2)$ -симметрия полностью нарушена; все три калибровочных поля стали массивными.

Способ нарушения симметрии

Важно иметь в виду, что способ нарушения симметрии не произволен, а зависит от структуры теории, в частности от того, каким представлениям группы соответствуют мультиплеты скалярных полей [233, 267]. Например, если вместо комплексного дублета имеется триплет вещественных скалярных полей $\boldsymbol{\phi}$, то калибровочная симметрия $SU(2)$ будет нарушена до калибровочной симметрии $U(1)$ и останется один безмассовый векторный бозон. Чтобы показать, что это действительно так, выберем потенциал скалярного поля в виде

$$V(\boldsymbol{\phi}) = -\mu^2 \boldsymbol{\phi}^2 + \lambda (\boldsymbol{\phi}^2)^2. \quad (8.115)$$

Вновь минимизация $V(\boldsymbol{\phi})$ определяет величину

$$|\langle \boldsymbol{\phi} \rangle_0| = v/\sqrt{2}, \text{ где } v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (8.116)$$

Пользуясь имеющимся произволом, мы можем выбрать вакуумное состояние следующим образом:

$$\langle \boldsymbol{\phi} \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (8.117)$$

Основное состояние поля $\boldsymbol{\phi}$ направлено вдоль третьей оси, и симметрия спонтанно нарушена. Член с ковариантной производной

$$[D_\mu \boldsymbol{\phi}]^2 = [\partial_\mu \boldsymbol{\phi}' - ig(\boldsymbol{\phi}' + \langle \boldsymbol{\phi} \rangle_0) \times \mathbf{A}_\mu]^2 \quad (8.118)$$

не содержит слагаемого, квадратичного по полю A_μ^3 . Следовательно, поле A_μ^3 продолжает описывать безмассовый векторный бозон. Заметим, что такая форма нарушения симметрии связана с тем фактом, что вакуумное среднее $\langle \boldsymbol{\phi} \rangle_0$ в (8.117) остается инвариантным относительно группы вращений $O(2)$ (или $U(1)$) в плоскости (1,2) пространства внутренней группы симметрии.

Число массивных калибровочных бозонов

Так как число безмассовых калибровочных бозонов соответствует числу генераторов группы (ненарушенной) калибровочной симметрии, число калибровочных бозонов, которые стали массивными (или число несостоявшихся голдстоуновских бозонов), равно разности чисел генераторов начальной и конечной групп симметрии. Мы приведем доказательство этого утверждения; это также позволит нам ввести некий общий формализм.

Рассмотрим лагранжиан общего вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi_i + ig T_{ij}^a A_\mu^a \phi_j)] [(\partial^\mu \phi_i - ig T_{ik}^a A^{\mu k} \phi_k)] - \\ - V(\phi_i) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (8.119)$$

где ϕ_i — набор вещественных полей, преобразующийся по некоторому (возможно, приводимому) представлению группы G калибровочной симметрии с n генераторами:

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + i\varepsilon^a(x) T_{ij}^a \phi_j(x), \\ a = 1, 2, \dots, n. \quad (8.120)$$

Считая, что потенциал в (8.119) инвариантен относительно той же группы преобразований (если потенциал инвариантен относительно более широкой группы, то появятся скаляры, которые приобретут массу только в результате учета радиационных поправок; их часто называют *псевдоголдстоуновскими* бозонами [402]), имеем

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = \varepsilon^a \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j,$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j = 0, \quad a = 1, \dots, n. \quad (8.121)$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} T_{ij}^a \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ik}^a = 0. \quad (8.122)$$

Если V имеет минимум при $\phi_i = v_i$, то второй член в (8.122) обращается в этой точке в нуль, значит,

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \right|_{\phi_i = v_i} T_{ij}^a v_j = 0. \quad (8.123)$$

Следует заметить, что в случае глобальной симметрии равенство (8.123) означает безмассовость некоторых скалярных частиц. То, что матрица вторых производных от потенциала соответствует массовой матрице скалярных частиц, можно увидеть из разложения $V(\phi_i)$ в окрестности минимума:

$$V(\phi_i) = V(v_i) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \right|_{\phi_i = v_i} (\phi_i - v_i) (\phi_k - v_k) + \dots \quad (8.124)$$

Таким образом, массовая матрица имеет вид

$$(M^2)_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Big|_{\phi_i = v_i}. \quad (8.125)$$

Предположим теперь, что G имеет подгруппу G' с n' генераторами, относительно которой вакуум инвариантен:

$$T_{ij}^b v_j = 0 \quad \text{при } b = 1, 2, \dots, n', \quad (8.126a)$$

$$T_{ij}^c v \neq 0 \quad \text{при } c = n' + 1, \dots, n. \quad (8.126b)$$

Если мы выберем T^a линейно независимыми, то (8.123), (8.125) и (8.126) определенно указывают на то, что матрица M^2 имеет $n - n'$ нулевых собственных значений и, следовательно, в теории имеется $n - n'$ голдстоуновских бозонов. В случае калибровочной симметрии эти $n - n'$ безмассовых частиц соответствуют несостоявшимся голдстоуновским бозонам. Для того чтобы откалибровать их, мы выберем следующую параметризацию для полей ϕ_i :

$$\phi_i = \exp \{ iT_{ij}^c \xi^c(x)/v \} (v_j + \eta_j(x)), \quad (8.127)$$

где $c = n' + 1, \dots, n$, т. е. мы суммируем по всем генераторам преобразований, относительно которых вакуум не инвариантен; v в показателе экспоненты — модуль вектора с компонентами v_i . Поля $\eta_i(x)$ — остальные скалярные поля, ортогональные полям ξ^c . После калибровочного преобразования $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ с калибровочной функцией $\theta(x) = -iT^c \xi^c(x)/v$ лагранжиан уже не зависит от полей $\xi^c(x)$ и содержит член, квадратичный по полям A'^c_μ :

$$- \frac{g^2}{2} (T^c v, T^d v) A'^c_\mu A'^{d\mu}. \quad (8.128)$$

Диагонализуя матрицу $\|(T^c v, T^d v)\|$, мы получим теорию с $n - n'$ массивными векторными бозонами. Таким образом, число несостоявшихся голдстоуновских бозонов равно разности чисел генераторов начальной и конечной групп калибровочной симметрии.

В настоящем разделе мы выбрали условия, фиксирующие калибровку (унитарная калибровка), таким образом, чтобы было очевидно, какие частицы описывает теория. В конце разд. 9.2 следующей главы мы рассмотрим другой класс условий, фиксирующих калибровку (перенормируемые калибровки, или R -калибровки), где несостоявшиеся голдстоуновские бозоны явно не исключаются, но пропагаторы калибровочных полей имеют хорошее высокоэнергетическое поведение и перенормируемость теории оказывается более очевидной.

Мы переходим теперь к квантованию калибровочных теорий, процедуре получения решений уравнений поля в рамках теории возмущений и рассмотрению обобщенных тождеств Уорда.

9.1. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Калибровочная инвариантность теории отражает тот факт, что на динамические переменные рассматриваемой системы наложены связи, т. е. среди этих переменных имеются такие, которые не соответствуют истинным динамическим степеням свободы. Процедура квантования таких теорий более сложна, чем та, которая обсуждалась в гл. 1 для случая теории скалярного поля. Наиболее прямым способом квантования калибровочных теорий является формализм функциональных интегралов.

Трудности квантования калибровочных теорий

Мы уже познакомились с проблемой квантования электромагнитного поля $A_\mu(x)$. В рамках канонического формализма канонические переменные $A_\mu(x)$ и сопряженные им импульсы $\pi_\mu(x) = \delta\mathcal{L}(x)/\delta(\partial_0 A^\mu(x))$ считают операторами и постулируют для них коммутационные соотношения. Легко установить, что величины $\pi_0(x)$ и $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}(x)$ обращаются в нуль. Это приводит к тому, что операторы $A_0(x)$ и $\nabla \cdot \mathbf{A}(x)$ коммутируют со всеми каноническими операторами, т. е. являются на самом деле c -числами. Четыре-векторное поле $A_\mu(x)$ фактически описывает две независимые динамические степени свободы. Канонические коммутационные соотношения для поперечных полей $\mathbf{A}_\perp(x)$ и $\boldsymbol{\pi}_\perp(x)$, соответствующих этим степеням свободы, необходимо определить так, чтобы они были совместны с упомянутыми выше связями. Например, мы можем выбрать связи в виде $\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$ (радиационная калибровка) или $A_3(x) = 0$ (аксиальная калибровка). При таких формулировках теряется явная лоренц-инвариантность. С другой стороны, можно сохранить

явную лоренц-инвариантность, вводя для этого в теорию фиктивные степени свободы. При этом в качестве пространства состояний необходимо рассматривать гильбертово пространство с индефинитной метрикой (*формализм Гунты — Блейлера*). Последовательную физическую теорию мы получим только в том случае, если будем считать допустимыми лишь состояния, удовлетворяющие условию $\partial^\mu A_\mu |\Psi\rangle = 0$ (*лоренцева калибровка*). Основным моментом во всех этих формулировках является то, что фиктивные степени свободы (присутствующие из-за калибровочной инвариантности) необходимо устранить надлежащим выбором условия, фиксирующего калибровку. В формализме квантования с помощью функциональных интегралов это проявляется в том, что интегрирование производится с учетом ограничений, соответствующих калибровочному условию. Последовательный учет этих ограничений в неабелевых теориях является в высшей степени нетривиальной задачей, которая была полностью решена в работах [109, 128, 136] и во многих других [285, 330, 383, 384, 396].

Трудности квантования калибровочных теорий можно непосредственно сформулировать в терминах функциональных интегралов. Рассмотрим для определенности случай полей Янга — Миллса с калибровочной группой $SU(2)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (9.1)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (9.2)$$

Если производящий функционал записать в виде

$$W[J] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + \mathbf{J}_\mu(x) \cdot \mathbf{A}^\mu(x)] \right\}, \quad (9.3)$$

то его часть, связанную со свободной теорией, можно представить как

$$W_0[J] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0(x) + \mathbf{J}_\mu(x) \cdot \mathbf{A}^\mu(x)] \right\}, \quad (9.4)$$

где

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_0(x) &= -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a(x) (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a(x). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Теперь ситуация очень похожа на ту, которая имела место в случае скалярной теории, и мы могли бы попытаться взять гауссов интеграл по полю A_μ , как это сделано в (1.79) и (1.81):

$$\int [d\phi] \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \phi K \phi \rangle + \langle J \phi \rangle \right] \sim \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp \langle J K^{-1} J \rangle. \quad (9.6)$$

Но это оказывается невозможным, так как оператор

$$K_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu \quad (9.7)$$

в выражении (9.5), как мы сейчас покажем, не имеет обратного.

Предполагая, что $G^{\nu\lambda}(x-y)$ — ядро оператора, обратного $K_{\mu\nu}$, имеем

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) G^{\nu\lambda}(x-y) = g_\mu^\lambda \delta^4(x-y). \quad (9.8)$$

Используя фурье-преобразование

$$G^{\nu\lambda}(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} G^{\nu\lambda}(k), \quad (9.9)$$

получаем

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) G^{\nu\lambda}(k) = g_\mu^\lambda. \quad (9.10)$$

Произведя инвариантное разбиение

$$G^{\nu\lambda}(k) = a(k^2) g^{\nu\lambda} + b(k^2) k^\nu k^\lambda, \quad (9.11)$$

мы видим, что левая часть уравнения (9.10) равна $-a(k^2)(k^2 g_\mu^\lambda - k_\mu k^\lambda)$ и не может быть равной его правой части. Таким образом, оператор $K_{\mu\nu}$ не имеет обратного. В этом можно убедиться по-другому, если учесть, что оператор $K_{\mu\nu}$, определенный в (9.7), удовлетворяет соотношению $K_{\mu\nu}(x) K_\lambda^\nu(x) \sim \sim K_{\mu\lambda}(x)$. Это означает, что он является оператором проектирования (на поперечные степени свободы калибровочного поля) и, очевидно, не имеет обратного. По тем же причинам в этом случае $\det K$ обращается в нуль и соотношение (9.6) неприменимо. Такой сингулярный характер функционального интеграла, т. е. такая добавочная бесконечность связана с калибровочной инвариантностью теории. В выражениях (9.3) и (9.4) мы суммируем по всем возможным полевым конфигурациям, в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочными преобразованиями, т. е. составляют «орбиты» калибровочной группы. Учет этих лишних конфигураций и является причиной расходимости функционального интеграла. Необходимо найти способ, позволяющий выделять этот бесконечный (функциональный) объем орбиты. Для квантования калибровочной теории необходимо фиксировать калибровку.

Выделение объемного множителя при функциональном интегрировании

1. *Иллюстрация на примере двумерного интеграла.* Прежде чем приступить к вычислениям, которые позволят выделить объемный множитель из функционального интеграла (в бесконечномерном пространстве), для иллюстрации нашей стратегии

рассмотрим двумерный интеграл

$$W = \int dx dy e^{iS(x, y)} = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})}, \quad (9.12)$$

где $\mathbf{r} = (r, \theta)$ — полярные координаты точки. Мы предполагаем, что функция $S(\mathbf{r})$ инвариантна относительно вращений в двумерном пространстве:

$$S(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_\phi) \quad (9.13)$$

при

$$\mathbf{r} = (r, \theta) \rightarrow \mathbf{r}_\phi = (r, \theta + \phi), \quad (9.14)$$

т. е. $S(\mathbf{r})$ постоянна на орбите (являющейся окружностью). Если в этом простом случае мы хотим учитывать вклад в ин-

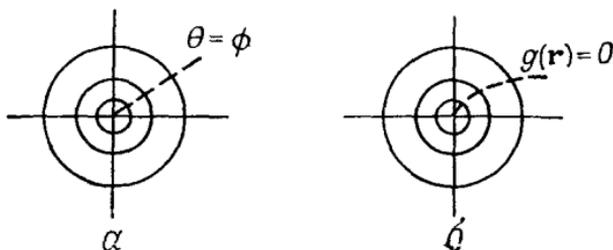


Рис. 9.1.

теграл только от неэквивалентных значений $S(\mathbf{r})$, то нужно выделить «объемный множитель», соответствующий интегрированию по угловой переменной $\int d\theta = 2\pi$. Чтобы это сделать, рассмотрим следующую процедуру, которая может быть обобщена на более сложные случаи. Прежде всего подставим соотношение

$$1 = \int d\phi \delta(\theta - \phi) \quad (9.15)$$

в первоначальное выражение для W :

$$W = \int d\phi \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \delta(\theta - \phi) = \int d\phi W_\phi, \quad (9.16)$$

где $W_\phi = \int d\mathbf{r} \delta(\theta - \phi) e^{iS(\mathbf{r})}$ вычисляется для данного значения угла ϕ . Таким образом, мы сначала вычисляем величину W при фиксированном значении угла $\theta = \phi$, а затем интегрируем по вкладам, соответствующим всем значениям ϕ (рис. 9.1, а). Используя свойство инвариантности (9.13) функции S , имеем

$$W_\phi = W_{\phi'}. \quad (9.17)$$

Следовательно, объем орбиты можно выделить в виде множителя:

$$W = \int d\phi W_\phi = W_\phi \int d\phi = 2\pi W_\phi. \quad (9.18)$$

В общем случае можно выбрать более сложную связь, чем $\theta = \phi$, которую мы представим уравнением кривой

$$g(\mathbf{r}) = 0, \quad (9.19)$$

пересекающей каждую орбиту только один раз, как это показано на рис. 9.1, б, т. е. уравнение $g(\mathbf{r}_\phi) = 0$ должно иметь единственное решение ϕ для данного значения \mathbf{r} . Рассматривая связь общего вида (9.19) вместо простого уравнения (9.15), мы должны определить функцию $\Delta_g(\mathbf{r})$, такую, что

$$[\Delta_g(\mathbf{r})]^{-1} = \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_\phi)]. \quad (9.20)$$

Следовательно,

$$\Delta_g(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \theta} \right|_{g=0}, \quad (9.21)$$

а $\Delta_g(\mathbf{r})$ инвариантна относительно двумерных вращений (9.14), так как

$$[\Delta_g(\mathbf{r}_{\phi'})]^{-1} = \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_{\phi+\phi'})] = \int d\phi'' \delta[g(\mathbf{r}_{\phi''})] = [\Delta_g(\mathbf{r})]^{-1}. \quad (9.22)$$

Повторяя этапы (9.16)–(9.18), мы можем выделить объемный множитель из интеграла

$$W = \int d\phi W_\phi, \quad (9.23)$$

где

$$W_\phi = \int dr e^{iS(\mathbf{r})} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_\phi)]. \quad (9.24)$$

Величина W_ϕ инвариантна относительно вращений:

$$\begin{aligned} W_{\phi'} &= \int dr e^{iS(\mathbf{r})} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_{\phi'})] = \\ &= \int dr' e^{iS(\mathbf{r}')} \Delta_g(\mathbf{r}') \delta[g(\mathbf{r}'_\phi)] = W_\phi, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где мы ввели переменную $\mathbf{r}' = (r, \phi')$ и воспользовались тем, что $S(\mathbf{r})$, $\Delta_g(\mathbf{r})$ и мера интегрирования dr инвариантны относительно вращений. Таким образом, для выделения «объемного» множителя мы можем ввести под знак интеграла ограничивающую δ -функцию и умножить ее на функцию Δ_g , определенную равенством (9.20).

2. *Объемный множитель в функциональном интеграле в калибровочных теориях.* Вернемся теперь к нашей задаче выделения объемного множителя при функциональном интегрировании в производящем функционале в калибровочных теориях. Процедура здесь в точности та же, что и в рассмотренном простом случае. Действие инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow \mathbf{A}_\mu^\theta,$$

где

$$\mathbf{A}_\mu^\theta \cdot \tau/2 = U(\theta) \left[\mathbf{A}_\mu \cdot \tau/2 + \frac{1}{ig} U^{-1}(\theta) \partial_\mu U(\theta) \right] U^{-1}(\theta),$$

$$U(\theta) = \exp[-i\theta(x) \cdot \tau/2]. \quad (9.26)$$

Величины θ являются параметрами группы, зависящими от точки пространства-времени. Матрицы τ — матрицы Паули. Действие постоянно на орбите калибровочной группы, состоящей из всех \mathbf{A}_μ^θ , полученных из некоторой фиксированной конфигурации \mathbf{A}_μ преобразованием $U(\theta)$, пробегающим по всем элементам группы $SU(2)$. При правильном квантовании функциональное интегрирование должно осуществляться только по «гиперповерхности», которая пересекает каждую орбиту лишь один раз. Таким образом, если мы запишем уравнение гиперповерхности в виде

$$f_a(\mathbf{A}_\mu) = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad (9.27)$$

то уравнение

$$f_a(\mathbf{A}_\mu^\theta) = 0 \quad (9.28)$$

должно иметь единственное решение θ при данной полевой конфигурации \mathbf{A}_μ . Соотношение (9.27) представляет собой условие, фиксирующее калибровку.

Необходимо также определить интегрирование по группе. Пусть θ и θ' — элементы группы $SU(2)$ ¹⁾. Если $U(\theta)$ — матрица некоторого представления этой группы, то групповое умножение можно представить в виде

$$U(\theta)U(\theta') = U(\theta\theta'). \quad (9.29)$$

В окрестности единичного элемента можно записать

$$U(\theta) = 1 + i\theta \cdot \tau/2 + O(\theta^2). \quad (9.30)$$

Меру интегрирования по группе можно выбрать следующим образом:

$$[d\theta] = \prod_{a=1}^3 d\theta_a. \quad (9.31)$$

Эта мера инвариантна в том смысле, что

$$d(\theta\theta') = d\theta'.$$

Мы теперь можем выделить объемный множитель, вводя функцию $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$:

$$\Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu] = \int [d\theta(x)] \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^\theta)]. \quad (9.32)$$

Следовательно,

$$\Delta_f[\mathbf{A}_\mu] = \det M_f, \quad (9.33)$$

¹⁾ Авторы обозначают параметры и элементы группы одной буквой θ . — Прим. перев.

где

$$(M_f)_{ab} = \frac{\delta f_a}{\delta \theta_b}. \quad (9.34)$$

Таким образом, матрица M_f связана с бесконечно малыми калибровочными преобразованиями функции $f_a[\mathbf{A}_\mu]$. Точнее говоря, при бесконечно малых калибровочных преобразованиях, которые в соответствии с (9.30) имеют вид

$$A_\mu^{\theta a} = A_\mu^a + \varepsilon^{abc} \theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a, \quad (9.35)$$

изменение $f_a[\mathbf{A}_\mu]$ определяется соотношением

$$f_a[\mathbf{A}_\mu^\theta(x)] = f_a[\mathbf{A}_\mu(x)] + \int d^4 y [M_f(x, y)]_{ab} \theta_b(y) + O(\theta^2). \quad (9.36)$$

Из требования единственности решения уравнения (9.28) следует, что $(\det M_f)$ отличен от нуля.

Функция $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$ обладает важным свойством калибровочной инвариантности. Чтобы увидеть это, запишем соотношение (9.32) в виде

$$\Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu] = \int [d\theta'(x)] \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{\theta'})]; \quad (9.37)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu^\theta] &= \int [d\theta'(x)] \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{\theta\theta'}(x))] = \\ &= \int [d(\theta(x)\theta'(x))] \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{\theta\theta'}(x))] = \\ &= \int [d\theta''(x)] \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{\theta''}(x))] = \Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu]. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Подставим теперь (9.32) в выражение для амплитуды перехода из вакуума в вакуум, записанное в виде функционального интеграла:

$$\begin{aligned} \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}(x) \right\} &= \int [d\theta(x)] [d\mathbf{A}_\mu(x)] \Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \times \\ &\times \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^\theta)] \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}(x) \right\} = \int [d\theta(x)] [d\mathbf{A}_\mu(x)] \Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \times \\ &\times \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu)] \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

При получении последнего равенства мы воспользовались инвариантностью выражений для $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$ и $\exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}(x) \right\}$ относительно калибровочных преобразований $\mathbf{A}_\mu^\theta \rightarrow \mathbf{A}_\mu$. Но подынтегральное выражение не зависит от $\theta(x)$, и интегрирование по $\Pi_x d\theta(x)$ дает бесконечный объем орбиты, который мы и стремились выделить. Поэтому производящий функционал калибровочного поля \mathbf{A}_μ (с учетом (9.33) и (9.39)) можно записать

в виде

$$W_f[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] (\det M_f) \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu)] \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + \mathbf{J}_\mu \cdot \mathbf{A}^\mu] \right\}. \quad (9.40)$$

Это *анзац Фаддеева — Попова* (ФП) [128]. Другими словами, мы можем устранить все лишние интегрирования в процедуре квантования, введя в функциональную меру множитель $\det |\delta f / \delta \theta| \delta[f(\mathbf{A}_\mu)]$.

Проверка анзаца ФП в аксиальной калибровке

Прежде чем продолжить изложение формализма квантования, мы рассмотрим анзац ФП в некотором частном случае. Выберем в качестве условия, фиксирующего калибровку, так называемую *аксиальную калибровку* [23]

$$\dot{f}_a = A_3^a = 0. \quad (9.41)$$

При калибровочных преобразованиях (9.35) преобразование (9.36) с учетом (9.41) имеет вид

$$f_a(\mathbf{A}_\mu^0) = A_3^a + \varepsilon^{abc} \theta^b A_3^c - \frac{1}{g} \partial_3 \theta^a = -\frac{1}{g} \partial_3 \theta^a. \quad (9.42)$$

Отсюда следует, что матрица $M_f = (-1/g) \partial_3 \delta_{ab}$ не зависит от калибровочного поля. При таком выборе (аксиальной) калибровки мы можем опустить множитель $(\det M_f)$ в $W_f[\mathbf{J}]$:

$$W_f[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \delta(\mathbf{A}_3) \exp \{iS[\mathbf{J}]\}, \\ S[\mathbf{J}] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + J_\mu^a A^{\mu a} \right]. \quad (9.43)$$

Удобнее работать с другой формой производящего функционала:

$$W'_f[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{F}_{\mu\nu}] [d\mathbf{A}_\mu] \delta(\mathbf{A}_3) \exp \{iS'[\mathbf{J}]\}, \quad (9.44)$$

где

$$S'[\mathbf{J}] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) + J_\mu^a A^{\mu a} \right]. \quad (9.45)$$

Если проинтегрировать по $F_{\mu\nu}^a$, то выражение (9.44) для $W'_f[\mathbf{J}]$ сведется к (9.43).

Необходимо проверить совместность формулировки ФП, т. е. выражений (9.43) и (9.44), с каноническим квантованием. Иными словами, нужно убедиться, что рассматриваемые ограничения в функциональном интеграле приводят к тем же дина-

мическим переменным, что и процедура канонического квантования.

Сначала мы идентифицируем независимые канонические переменные в аксиальной калибровке $A_3^a = 0$. Лагранжиан в (9.45) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & -\frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2} F^{ija} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g\varepsilon^{abc} A_i^b A_j^c) + \\ & + F^{0ia} (\partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a + g\varepsilon^{abc} A_0^b A_i^c) + \\ & + F^{i3a} (-\partial_3 A_i^a) + F^{03a} (-\partial_3 A_0^a), \end{aligned} \quad (9.46)$$

где $i, j = 1, 2$.

Уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\partial^\lambda \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta (\partial^\lambda F_{\mu\nu}^a)} = \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta F_{\mu\nu}^a}, \quad (9.47)$$

$$\partial^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}'}{\delta (\partial^\lambda A_\mu^a)} = \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta A_\mu^a} \quad (9.48)$$

приводят к следующим уравнениям связи (не содержащим производных по времени):

$$\begin{aligned} F_{ij}^a &= \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g\varepsilon^{abc} A_i^b A_j^c, & F_{i3}^a &= -\partial_3 A_i^a, \\ F_{03}^a &= -\partial_3 A_0^a, & \partial^i F_{0i}^a - \partial^3 F_{03}^a &= -g\varepsilon^{abc} F_{0i}^b A^{ic} \end{aligned} \quad (9.49)$$

и динамическим уравнениям

$$F_{0i}^a = \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a + g\varepsilon^{abc} A_0^b A_i^c, \quad (9.50a)$$

$$\partial^\mu F_{\mu i}^a = -g\varepsilon^{abc} (F_{ij}^b A^{ic} + F_{0i}^b A^{0c}). \quad (9.50b)$$

Следовательно, A_0^a , F_{ij}^a , F_{i3}^a и F_{03}^a — зависимые переменные; с помощью уравнений связи (9.49) их можно исключить из выражения для S' (которое сводится к S''), выразив через остающиеся переменные A_i^a и F_{0i}^a . Такая идентификация независимых канонических переменных приводит нас к следующему выражению для производящего функционала:

$$W_f''[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{F}_{01}] [d\mathbf{F}_{02}] [d\mathbf{A}_1] [d\mathbf{A}_2] \exp\{iS''[\mathbf{J}]\}. \quad (9.51)$$

Совместимость анзаца ФП с процедурой канонического квантования будет установлена, если показать, что этот функциональный интеграл эквивалентен (9.44), а значит, и (9.43). Для этого необходимо доказать, что, если динамическая переменная входит в действие по крайней мере квадратично (с постоянным коэффициентом), то интегрирование по ней равносильно исключению ее из действия с помощью уравнения Эйлера — Лагранжа. Справедливость этого утверждения можно проиллю-

стрировать следующим образом. Рассмотрим (гауссов) функциональный интеграл

$$\begin{aligned} \int [d\phi] \exp \{iS[\phi]\} &= \\ &= \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} a\phi^2(x) + f(x)\phi(x) \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{2a} \int d^4x [f(x)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа, полученное из выражения для S , содержащегося в (9.52), имеет вид

$$a\phi(x) + f(x) = 0. \quad (9.53)$$

Исключая $\phi(x)$ из S , получим равенство

$$S = -\frac{1}{2a} \int d^4x [f(x)]^2, \quad (9.54)$$

которое вновь приводит к (9.52). Это завершает демонстрацию того, что анзац ФП действительно приводит к правильным (т. е. тем же, что и каноническая процедура) ограничениям на меру интегрирования. Как мы проиллюстрировали во введении в функциональное интегрирование в гл. 1, гамильтонов формализм, основанный на производящем функционале

$$W[J] \sim \int [d\phi d\pi] \exp \left\{ i \int d^4x [\pi\partial_0\phi - \mathcal{H}(\pi, \phi) + J\phi] \right\}, \quad (9.55)$$

записанном в виде функционального интеграла, эквивалентен лагранжеву формализму, в котором

$$W[J] \sim \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + J\phi] \right\}. \quad (9.56)$$

Нетрудно убедиться, что функционал (9.51) отвечает гамильтоновой формулировке, в которой F_{0i}^a — поперечные канонические импульсы.

Поскольку в этой аксиальной калибровке детерминант ФП можно опустить, процедура квантования в ней выглядит особенно просто. Но в этой калибровке мы теряем явную лоренц-инвариантность, а правила Фейнмана достаточно сложны.

Абелева калибровочная теория

Следует отметить, что весь формализм, развитый в этом разделе, может быть применен и в более простом случае абелевой калибровочной теории. Для калибровочных преобразований группы $U(1)$ выражение (9.35) принимает вид

$$A_\mu^0(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu\theta(x). \quad (9.57)$$

Понятно, что при любом выборе калибровочного условия (9.27), линейного по полю $A_\mu(x)$, матрица M_f в (9.34) или (9.36), так же как и в только что рассмотренном частном случае аксиальной калибровки в неабелевой теории, не зависит от $A_\mu(x)$. Множитель ФП ($\det M_f$) не существен с физической точки зрения, и его можно опустить в производящем функционале:

$$W_f[J] = \int [dA_\mu] \delta[f(A_\mu)] \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J_\mu(x) A^\mu(x)] \right\}. \quad (9.58)$$

9.2. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА В КОВАРИАНТНЫХ КАЛИБРОВКАХ

При практических расчетах удобнее работать в ковариантных калибровках, в которых в отличие от аксиальной калибровки необходимо рассматривать нефизические «духовые поля». В качестве отправного пункта возьмем производящий функционал (9.40), записанный в виде

$$W[J] = \int [dA_\mu] \exp \left\{ i S_{\text{эфф}} + i \int d^4x \mathbf{J}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu \right\}. \quad (9.59)$$

Таким образом, мы представили множитель $\det M_f \delta[f_a(A_\mu)]$, возникший в результате модификации ФП, в виде экспоненты, добавив тем самым к действию дополнительный член и получив новое действие $S_{\text{эфф}}$. На этом языке удается решить проблему квантования калибровочного поля, так как новые слагаемые в действии приводят в прототипном гауссовом подынтегральном выражении в (9.6) к новому оператору K с отличным от нуля детерминантом и обратимому.

Духи Фаддеева — Попова

Величину $\det M_f$ можно непосредственно записать в виде экспоненты:

$$\det M_f = \exp \{ \text{tr} (\ln M_f) \}. \quad (9.60)$$

Представляя матрицу M_f в виде

$$M_f \equiv 1 + L, \quad (9.61)$$

приходим к соотношению

$$\exp \{ \text{tr} (\ln M_f) \} = \exp \left\{ \text{tr} L + \frac{1}{2} \text{tr} L^2 + \dots + \frac{1}{n} \text{tr} L^n + \dots \right\} = \\ = \exp \left\{ \int d^4x L_{aa}(x, x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y L_{ab}(x, y) L_{ba}(y, x) + \dots \right\}, \quad (9.62)$$

которое приведено на рис. 9.2.

Этот ряд можно рассматривать как ряд по петлям, соответствующим фиктивному изотриплету комплексных скалярных полей $c(x)$. Эти поля и их взаимодействия можно описать производящим функционалом

$$\det M_f \sim \int [dc][dc^\dagger] \times \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \sum_{a,b} c_a^\dagger(x) [M_f(x, y)]_{ab} c_b(y) \right\}. \quad (9.63)$$

Поскольку гауссов интеграл пропорционален не $(\det M_f)^{-1}$, а $\det M_f$, как в случае интегрирования по грассмановым переменным, скалярные поля $c(x)$ должны удовлетворять статистике

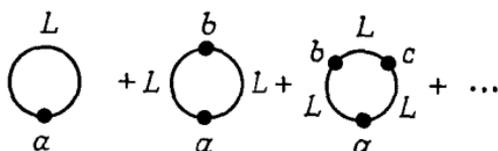


Рис. 9.2. Графическое представление детерминанта Фаддеева — Попова.

Ферми (см. обсуждение в разд. 1.3, особенно уравнения (1.139)—(1.141)). Эти поля называют *духовыми полями Фаддеева — Попова*.

Члены, фиксирующие калибровку

Попытаемся теперь превратить также дельта-функцию $\delta[f_a(\mathbf{A}_\mu)]$ в экспоненциальный множитель. Это можно сделать, обобщая условие, фиксирующее калибровку, т. е. переходя от $f_a(\mathbf{A}_\mu) = 0$ к условию

$$f_a[\mathbf{A}_\mu] = B_a(x), \quad (9.64)$$

где $B_a(x)$ — произвольная функция пространственно-временной точки, не зависящая от калибровочного поля. Определение (9.32) функции Δ_f соответственно обобщается и принимает вид

$$\int [d\theta(x)] \Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^0) - B_a(x)] = 1. \quad (9.65)$$

Это определение, очевидно, приводит к той же функции Δ_f , что и (9.32). Как и прежде, можно выделить бесконечный объем орбиты и записать производящий функционал в виде

$$\mathcal{W}[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu][d\mathbf{B}] (\det M_f) \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu) - B_a] \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(x) - \mathbf{J}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu - \frac{1}{2\xi} \mathbf{B}^2(x) \right] \right\}, \quad (9.66)$$

причем мы включили в подынтегральное выражение константу

$$\text{const} \sim \int [d\mathbf{B}] \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x \mathbf{B}^2(x) \right\},$$

где ξ — произвольный постоянный коэффициент — *калибровочный параметр*. Производящий функционал (9.66) отличается от производящего функционала (9.40) на несущественный нормировочный множитель. Теперь с помощью дельта-функционала можно снять интегрирование по $[d\mathbf{B}(x)]$. Учитывая (9.63), мы получаем

$$W[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] [dc] [dc^\dagger] \exp \{iS_{\text{эфф}}[\mathbf{J}]\},$$

где

$$S_{\text{эфф}}[\mathbf{J}] = S[\mathbf{J}] + S_{\text{фк}} + S_{\text{ДФП}}, \quad (9.67)$$

а дополнительными членами в действии являются фиксирующий калибровку член

$$S_{\text{фк}} = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x \{f_a[\mathbf{A}_\mu(x)]\}^2 \quad (9.68)$$

и член, содержащий духи ФП,

$$S_{\text{ДФП}} = \int d^4x d^4y \sum_{a,b} c_a^\dagger(x) [M_f(x, y)]_{ab} c_b(y). \quad (9.69)$$

Ковариантные калибровки в калибровочных теориях

Здесь мы рассмотрим специальный выбор калибровочного условия (9.27) или (9.64) (*ковариантная, или лоренцева, калибровка*)

$$f_a(\mathbf{A}_\mu) = \partial^\mu A_\mu^a = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (9.70)$$

При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях

$$U(\theta(x)) = 1 + i\theta(x) \cdot \tau/2 + O(\theta^2), \quad (9.71)$$

$$A_\mu^{a\theta}(x) = A_\mu^a(x) + \varepsilon^{abc}\theta^b(x) A_\mu^c(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) \quad (9.72)$$

имеем

$$\begin{aligned} f^a(A_\mu^\theta) &= f^a(\mathbf{A}_\mu) + \partial^\mu \left[\varepsilon^{abc}\theta^b(x) A_\mu^c(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) \right] = \\ &= f^a(\mathbf{A}_\mu) + \int d^4y [M_f(x, y)]_{ab} \theta^b(y), \end{aligned} \quad (9.73)$$

где

$$[M_f(x, y)]_{ab} = -\frac{1}{g} \partial^\mu [\delta^{ab} \partial_\mu - g\varepsilon^{abc} A_\mu^c] \delta^4(x-y). \quad (9.74)$$

С помощью выражений (9.70) и (9.74) мы можем вычислить дополнительные члены (9.68) и (9.69) в эффективном действии:

$$S_{\text{фк}} = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial^\mu \mathbf{A}_\mu)^2, \quad (9.75)$$

$$S_{\text{ДФП}} = \frac{1}{g} \int d^4x \sum_{a,b} c_a^\dagger(x) \partial^\mu [\delta_{ab} \partial_\mu - g\varepsilon_{abc} A_\mu^c] c_b(x). \quad (9.76)$$

Вводя источники η_a^\dagger , η_a для духовых полей c_a и c_a^\dagger , можно записать производящий функционал в виде

$$W_f[\mathbf{J}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\dagger] = \int [d\mathbf{A}_\mu d\mathbf{c} d\mathbf{c}^\dagger] \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + c_a^\dagger \partial^\mu [\delta_{ab} \partial_\mu - g \varepsilon_{abc} A_\mu^c] c_b + J_\mu^a A^{\mu a} + \eta^{a\dagger} c^a + \eta^a c^{a\dagger} \right] \right\}, \quad (9.77)$$

где мы переопределили поля \mathbf{c} и \mathbf{c}^\dagger , включив в них множитель $1/g$.

А. Разложение по теории возмущений в ковариантной калибровке. Чтобы произвести разложение в ряд теории возмущений, сначала представим эффективное действие в чистой теории Янга — Миллса в виде суммы $S_{\text{эфф}} = S_0 + S_I$, где свободное действие S_0 квадратично по полям:

$$S_0 = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \right. \\ \left. + c_a^\dagger \partial^2 c_a + J_\mu^a A^{\mu a} + \eta^{a\dagger} c^a + \eta^a c^{a\dagger} \right], \quad (9.78)$$

а S_I — член, отвечающий взаимодействию:

$$S_I[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{c}, \mathbf{c}^\dagger] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g \varepsilon^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} - i g c^{a\dagger} \partial^\mu \varepsilon^{abc} A_\mu^c c^b \right]. \quad (9.79)$$

Производящий функционал можно записать в виде

$$W[\mathbf{J}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\dagger] = \\ = \exp \left\{ i S_I \left[\frac{\delta}{i \delta \mathbf{J}_\mu}, \frac{\delta}{i \delta \boldsymbol{\eta}}, \frac{\delta}{i \delta \boldsymbol{\eta}^\dagger} \right] \right\} W_A^0[\mathbf{J}] W_c^0[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\dagger], \quad (9.80)$$

где

$$W_A^0[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + J_\mu^a A^{\mu a} \right] \right\}, \\ W_c^0[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\dagger] = \int [d\mathbf{c}^\dagger] [d\mathbf{c}] \exp \left\{ -i \int d^4x \left[c^{a\dagger} \partial^2 c^a - \right. \right. \\ \left. \left. - \eta^{a\dagger} c^a - \eta^a c^{a\dagger} \right] \right\}. \quad (9.81)$$

Б. Пропагаторы. Чтобы найти пропагатор поля \mathbf{A}_μ , перепишем W_A^0 в виде

$$W_A^0[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^a (g^{\mu\nu} \partial^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\xi - 1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu) \delta_{ab} A_\nu^b + J_\mu^a A^{\mu a} \right] \right\} = \\ = \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^a K_{ab}^{\mu\nu} A_\nu^b + J_\mu^a A^{\mu a} \right] \right\}, \quad (9.82)$$

где оператор

$$K_{ab}^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta_{ab}$$

обладает обратным. Проинтегрировать по $[dA_\mu]$ можно, воспользовавшись соотношением (9.6):

$$W_A^0[\mathbf{J}] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_\mu^a(x) G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^b(y) \right\}, \quad (9.83)$$

где

$$G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[- \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - \xi \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}.$$

Легко проверить, что

$$\int d^4y K_{ab}^{\mu\nu}(x-y) G_{\nu\lambda}^{bc}(y-z) = g_\lambda^\mu \delta_a^c \delta^4(x-z). \quad (9.84)$$

Аналогично найдем

$$W_c^0[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\dagger] = \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \eta^{a\dagger}(x) G^{ab}(x-y) \eta^a(y) \right\}. \quad (9.85)$$

где

$$G^{ab}(x-y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \delta_{ab}.$$

Таким образом, мы имеем следующие правила Фейнмана:

1) пропагатор векторных бозонов

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\delta_{ab} i \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\varepsilon};$$



2) пропагатор духов ФП

$$i\Delta^{ab}(k) = -i\delta_{ab} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}.$$



Линия, соответствующая духовому полю, так же как линия для фермиона, имеет направление, т. е. дух отличается от своей античастицы.

В. Взаимодействия калибровочных полей. В неабелевых теориях имеются самодействия калибровочных полей, которые с помощью векторов поляризации $\varepsilon^\mu(k)$ записываются в виде

$$\varepsilon^\mu(k_1) \varepsilon^\nu(k_2) \varepsilon^\lambda(k_3) \Gamma_{\mu\lambda\nu}^{abc}(k_1, k_2, k_3), \quad (9.86)$$

$$\varepsilon^\mu(k_1) \varepsilon^\nu(k_2) \varepsilon^\lambda(k_3) \varepsilon^\rho(k_4) \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4). \quad (9.87)$$

Правила Фейнмана для вершинных функций Γ вытекают из выражения (9.79) для S_I . Их можно установить непосредственно, применяя процедуру, изложенную в гл. 1 (для теории $\lambda\phi^4$). Но они легко выводятся и из свойств симметрии относительно пе-

рестановок калибровочных полей. Такой вывод помогает также запомнить их структуру. В импульсном пространстве первый член в выражении (9.79) имеет вид

$$\frac{1}{3!} \tilde{A}^{a\mu}(k_1) \tilde{A}^{b\nu}(k_2) \tilde{A}^{c\lambda}(k_3) \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3), \quad (9.88)$$

где функции \tilde{A} являются фурье-образами калибровочных полей, а $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ — вершина (9.86) в правилах Фейнмана, которая должна быть полностью антисимметрична при перестановках полей A . Структура, связанная с калибровочной группой $SU(2)$, уже фиксирована:

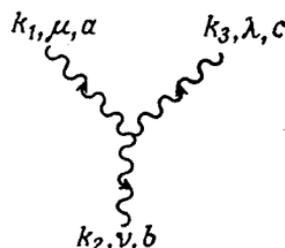
$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = \varepsilon^{abc} \Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3), \quad (9.89)$$

а лоренцеву структуру этой функции можно вывести. Из (9.79) ясно, что $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3)$ состоит из членов вида $k_{2\mu} g_{\nu\lambda}$. Точную комбинацию этих членов можно установить из требования антисимметричности $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3)$ относительно перестановки индексов: $\mu \leftrightarrow \nu$, $1 \leftrightarrow 2$, и т. д., так как тензор ε^{abc} полностью антисимметричен. Поступая таким образом, найдем

$$3) \quad i\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc} = ig\varepsilon^{abc} [(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + \\ + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\mu\lambda}],$$

где

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

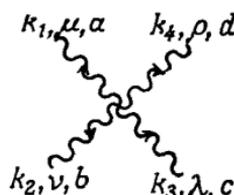


Аналогично для четверного самодействия калибровочного поля в (9.79) имеем вершину

$$4) \quad i\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = ig^2 [\varepsilon^{abe} \varepsilon^{cde} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}) + \\ + \varepsilon^{ace} \varepsilon^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}) + \\ + \varepsilon^{ade} \varepsilon^{cbe} (g_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - g_{\rho\lambda} g_{\mu\nu})],$$

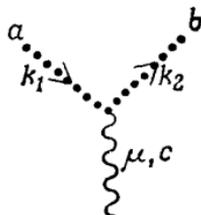
где

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0.$$



Для вершины, связывающей в ковариантной калибровке поля духов и калибровочное поле с вектором поляризации $\varepsilon^\mu(k_1 + k_2)$, имеем

$$5) \quad i\Gamma_\mu^{abc} = g\varepsilon^{abc} k_{1\mu}.$$



Заметим, что эта вершина имеет антисимметричный вид. Необходимо установить согласованное правило, сопоставляющее импульс дѳуховым линиям, входящим слева и справа в каждую вершину. Дѳуховые линии входят в диаграммы только в виде петель. Наряду с каждой диаграммой, содержащей замкнутую петлю калибровочного поля, существует топологически эквивалентная ей диаграмма с замкнутой дѳуховой линией в том же месте. Очень важен тот факт, что, как и в случае фермионных петель, каждая дѳуховая петля должна умножаться дополнительно на -1 .

Заметим также, что от калибровочного параметра ξ зависит только пропагатор калибровочного поля, и значения этого параметра можно подбирать соответствующим образом в зависимости от решаемой задачи. В классе ковариантных калибровок случай $\xi = 1$ называют калибровкой *т'Хофта — Фейнмана*, а случай $\xi = 0$ — калибровкой *Ландау*.

Г. Фермионы. Введение фермионов в чистую теорию Янга — Миллса, рассмотренную выше, не связано с какими-либо трудностями: достаточно добавить к лагранжиану все возможные калибровочно-инвариантные члены, размерности которых не выше четырех:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi, \quad (9.90)$$

где

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igT^a A_\mu^a \psi.$$

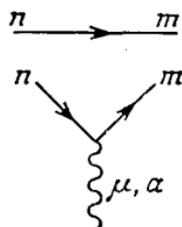
Матрица T^a соответствует генератору в данном представлении. Например, если ψ является $SU(2)$ -дублетом, то $T^a = \tau^a/2$. Таким образом, имеются дополнительные правила Фейнмана для фермионов (с групповыми индексами n, m, \dots):

6) фермионный пропагатор

$$i\Lambda_{nm}(k) = \delta_{nm} \frac{1}{\gamma k - m + i\epsilon};$$

7) вершина, соответствующая взаимодействию фермиона с калибровочным бозоном,

$$i\Gamma_{nm}^{\alpha\mu} = ig(T^a)_{nm} \gamma^\mu.$$



Калибровка R_ξ в калибровочных теориях со спонтанным нарушением симметрии

Наконец, мы подошли к формулировке правил Фейнмана для калибровочных теорий в ковариантной калибровке и со спонтанным нарушением симметрии. Рассмотрим сначала слу-

чай абелевой симметрии. Учитывая обсуждение в разд. 8.3, следует устранить смешивающий член в (8.89)

$$gvA^\mu\partial_\mu\phi_2, \quad (9.91)$$

где ϕ_2 — несостоявшееся голдстоуновское бозонное поле. В разд. 8.3 мы выбрали унитарную калибровку, в которой поле ϕ_2 отсутствует в теории. Таким образом, ϕ_2 можно отождествить с фазой комплексного скалярного поля, и эта фиктивная степень свободы может быть устранена калибровочным преобразованием. Преимущество унитарной калибровки состоит в том, что в ней явно видно, какие частицы описываются теорией. Все состояния, имеющиеся в теории, суть физические состояния хиггсовской частицы и массивного калибровочного бозона с пропагатором, естественным для теории массивного векторного поля (с массой $M = gv$):

$$i\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M^2)}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (9.92)$$

Мы уже отмечали в гл. 2, что теория с таким пропагатором для полей со спином 1 окажется перенормируемой с точки зрения простого подсчета индекса расходимости, если не обнаружено взаимное сокращение определенных функций Грина. Тем не менее, исходя из того факта, что теория с первоначальным лагранжианом до спонтанного нарушения симметрии была перенормируемой с точки зрения подсчета индекса расходимости, т'Хофт [383, 384] доказал, что она остается такой и после спонтанного нарушения симметрии. Ключевым моментом в этом доказательстве является то, что в калибровочной теории можно выбрать другие калибровки — *перенормируемые калибровки*, в которых теория обладает хорошим высокоэнергетическим поведением. Дело в том, что, хотя интерпретация в терминах частиц в унитарной калибровке достаточно проста, перенормируемость не столь очевидна, так как конечные элементы S -матрицы получаются только в результате взаимного уничтожения различных расходящихся функций Грина. Но эта теория должна быть эквивалентна теории в перенормируемой калибровке, где мы получаем пропагаторы с хорошим высокоэнергетическим поведением ценой введения фиктивных частиц (несостоявшихся голдстоуновских бозонов). Таким образом, в перенормируемой калибровке унитарность не является явной, и необходимо убедиться, что фиктивные степени свободы действительно не дают вклада в физические амплитуды. Такие теории относят к «криптоперенормируемым».

Общий класс перенормируемых калибровок можно описать, выбрав фиксирующее калибровку условие (9.64) в виде

$$f(A_\mu, \phi) = (\partial^\mu A_\mu + \xi M\phi_2) = 0, \quad (9.93)$$

где ξ — произвольный параметр. Тогда член, добавляемый к первоначальному лагранжиану и связанный с условием, фиксирующим калибровку, также обобщается и принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{фк}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu + \xi M \phi_2)^2. \quad (9.94)$$

В этом случае смешанный член (9.91) не появляется, и нет необходимости делать преобразования, устраняющие поле ϕ_2 . Приведем явный вид свободного лагранжиана, не выписывая явно члены, содержащие духи ФП:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{2} [(\partial^\mu \phi'_1)^2 - 2\mu^2 \phi_1'^2] + \frac{1}{2} [(\partial^\mu \phi'_2)^2 - \xi M^2 \phi_2'^2] - \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2, \end{aligned} \quad (9.95)$$

где ϕ'_1 и ϕ'_2 — сдвинутые скалярные поля (8.87). Отсюда следуют

8) пропагатор хиггсовского скаляра

$$i\Delta_1(k) = \frac{i}{k^2 - 2\mu^2 + i\epsilon}; \quad \phi'_1 \text{---} \rightarrow \text{---}$$

9) пропагатор несостоявшегося голдстоуновского бозона

$$i\Delta_2(k) = \frac{i}{k^2 - \xi M^2 + i\epsilon}; \quad \phi'_2 \text{---} \rightarrow \text{---}$$

10) пропагатор калибровочного бозона в R_ξ -калибровке

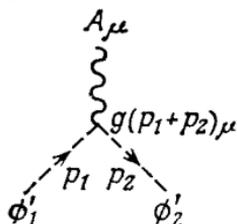
$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}(k) &= \frac{-i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M^2} \right] = \\ &= -i \left[\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{k_\mu k_\nu / M^2}{k^2 - \xi M^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad \mu \text{---} \text{wavy} \text{---} \nu$$

Лагранжиан взаимодействия дается выражением

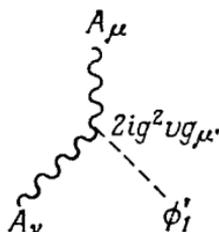
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & g A_\mu (\partial^\mu \phi'_1 \phi'_2 - \partial^\mu \phi'_2 \phi'_1) + \frac{1}{2} g^2 A_\mu A^\mu (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) - \\ & - \frac{\lambda}{4} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2 + g^2 v A^\mu A_\mu \phi'_1 - \lambda v \phi'_1 (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) \end{aligned} \quad (9.96)$$

и приводит к следующим вершинам:

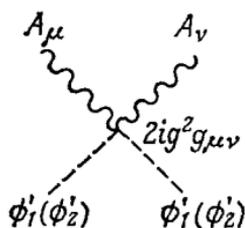
11) $\phi'_1 \phi'_2 A$ -вершина



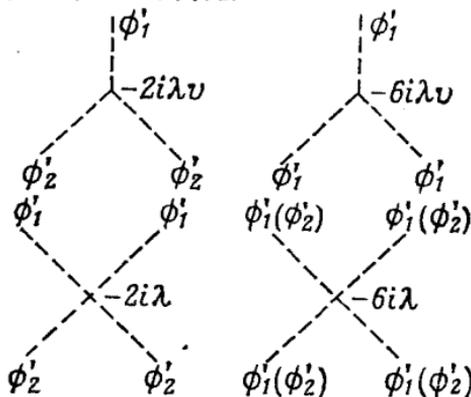
$AA\phi'_1$ -вершина



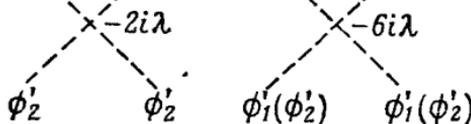
$AA\phi\phi$ -вершина



$\phi\phi\phi$ -вершины



$\phi\phi\phi\phi$ -вершины



Этот класс калибровок, называемых R_ξ -калибровками [150, 439], характеризуется калибровочным параметром ξ . При любом конечном значении параметра ξ пропагатор векторного бозона имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\Delta_{\mu\nu}(k) \rightarrow O(k^{-2}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Если теперь учесть, что константы взаимодействия имеют размерность 0 или 1 в единицах массы, то теория является перенормируемой с точки зрения подсчета индекса расходимости. Например, в частном случае $\xi = 1$ пропагатор имеет вид

$$i\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - M^2 + i\epsilon}.$$

С другой стороны, в пределе $\xi \rightarrow \infty$ пропагатор поля ϕ'_2 (правило 9) обращается в нуль, и несостоявшиеся голдстоуновские бозоны выпадают из теории. Пропагатор векторного мезона (правило 10) принимает вид (9.92), стандартный для массивных частиц со спином 1. Таким образом, мы приходим к унитарной калибровке, в которой нефизические поля отсутствуют.

При любом конечном значении ξ пропагаторы поля ϕ'_2 (правило 9) и калибровочного бозона (правило 10) имеют нефизические особенности при $k^2 = \xi M^2$. Для сохранения унитарности

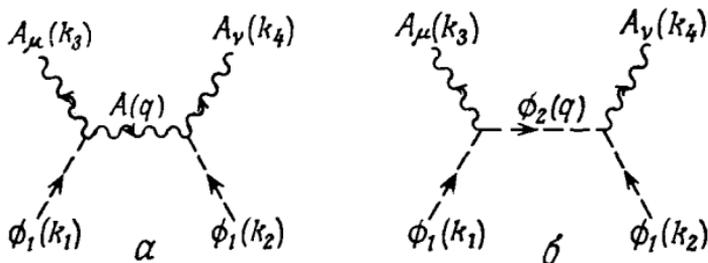


Рис. 9.3.

необходимо, чтобы эти нефизические полюса уничтожались в элементах S -матрицы, включающих только физические частицы: A_μ и ϕ'_1 . На самом деле так и происходит. Мы можем проиллюстрировать это на следующем примере [150]. На рис. 9.3 показаны некоторые древесные диаграммы, соответствующие процессу

$$\phi'_1(k_1) + \phi'_1(k_2) \rightarrow A(k_3) + A(k_4)$$

(наряду с ними имеются диаграммы, в которых конечные A -линии перекрещиваются). Диаграмме на рис. 9.3, а, изображающей обмен квантом поля A , соответствует выражение

$$iT^{(A)} = \epsilon^\mu(k_3) (2ig^2v)^2 \epsilon^\nu(k_4) (-i) \left[\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2}{q^2 - M^2} + \frac{q_\mu q_\nu / M^2}{q^2 - \xi M^2} \right].$$

В нефизическом полюсе $q^2 = \xi M^2$ оно может быть записано в виде

$$iT^{(A)}_{\text{полюс}} = \frac{-4ig^2}{q^2 - \xi M^2} [k_{1\mu} \epsilon^\mu(k_3)] [k_{2\nu} \epsilon^\nu(k_4)]. \quad (9.97)$$

Но диаграмма на рис. 9.3, б, изображающая обмен квантом поля ϕ'_2 , дает вклад

$$\begin{aligned} iT^{(\phi_2)} &= \epsilon^\mu(k_3) g(k_1 + q)_\mu \epsilon^\nu(k_4) g(k_2 - q)_\nu \frac{i}{q^2 - \xi M^2} = \\ &= \frac{4ig^2}{q^2 - \xi M^2} [k_{1\mu} \epsilon^\mu(k_3)] [k_{2\nu} \epsilon^\nu(k_4)], \end{aligned}$$

который уничтожает вклад нефизического полюса, соответствующий обмену квантом поля A_μ в (9.97). Такое уничтожение

нефизических полюсов носит общий характер и может быть доказано во всех порядках теории возмущений с помощью обобщенных тождеств Уорда, являющихся следствием калибровочной инвариантности теории. На практике хорошей проверкой калибровочной инвариантности некоторого вычисленного элемента физической S -матрицы является отсутствие в конечном результате зависимости от произвольного параметра ξ . Пример вычислений в R_ξ -калибровке приведен в разд. 13.3.

Обобщение на случай неабелевых симметрий очевидно. Например, в $SU(2)$ -калибровочной теории с комплексным дублетом ϕ член, добавляемый к лагранжиану и соответствующий R_ξ -калибровке, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{фк}} = -\frac{1}{2\xi} \left[\partial^\mu \mathbf{A}_\mu - ig\xi \left(\langle \phi \rangle_0^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \phi' - \phi'^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \langle \phi \rangle_0 \right) \right]^2. \quad (9.98)$$

Правила Фейнмана в R_ξ -калибровке для стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории электрослабых взаимодействий приведены в приложении Б.

9.3. ТОЖДЕСТВА СЛАНОВА — ТЕЙЛОРА

Изложив в разд. 9.1 и 9.2 процедуру квантования и сформулировав правила Фейнмана для калибровочных теорий, мы можем теперь перейти к вычислениям по теории возмущений. При этом можно воспользоваться процедурами регуляризации и перенормировок, рассмотренными в гл. 2. Из правил Фейнмана, сформулированных в разд. 9.2, видно, что все константы взаимодействия являются безразмерными, а высокоэнергетическое поведение пропагаторов таково, что теория должна быть перенормируемой согласно подсчету индекса расходимости. Расходящиеся диаграммы более высоких порядков можно регуляризовать в рамках схемы аналитического продолжения по размерности пространства-времени (d) и тем самым определить, какие контрчлены необходимо добавить к первоначальному лагранжиану. Они имеют тот же вид, что и члены в первоначальном лагранжиане, но умножаются на коэффициенты, которые расходятся в пределе $\varepsilon = (4 - d) \rightarrow 0$. После добавления к лагранжиану этих контрчленов функции Грина конечны при $\varepsilon \rightarrow 0$ во всех порядках теории возмущений. Практически это довольно сложная программа. Возрождение в последние годы интереса к теоретико-полевому исследованию взаимодействия частиц в значительной степени объясняется предложенным т'Хофтом [383, 384] доказательством того, что неабелевы калибровочные теории перенормируемы и что эта перенормируемость сохраняется даже в случае спонтанного нарушения калибровочной симметрии. Подробное обсуждение процедуры перенормировок в калибровочных теориях [258, 259] выходит за

рамки книги. Здесь мы рассмотрим лишь обобщенные тождества Уорда в теории Янга — Миллса, которые иногда в литературе называют также тождествами Славнова [367] — Тейлора [380], играющие важную роль в программе перенормировок.

Тождества Уорда — это соотношения между различными функциями Грина. Они отражают (нетривиальную) симметрию теории (в данном случае калибровочную инвариантность первоначального действия). Важность этих соотношений в процедуре перенормировок связана с тем, что они ограничивают число независимых ультрафиолетово-расходящихся структур и обеспечивают отсутствие калибровочно-неинвариантных контрчленов. Напомним, что в простой абелевой калибровочной теории КЭД из тождеств Уорда вытекает равенство $Z_1 = Z_2$, из которого следует, что если две частицы имеют одинаковые голые заряды, то их перенормированные заряды также совпадают. В неабелевых теориях имеется намного больше перенормировочных констант, и для доказательства того факта, что перенормированный лагранжиан по-прежнему остается калибровочно-инвариантным, требуется намного больше соотношений между ними. Кроме того, как будет показано ниже, тождества Уорда гарантируют уничтожение всех нефизических сингулярностей в физических амплитудах. Формальный вывод обобщенных тождеств Уорда в неабелевой калибровочной теории мы приводим в конце раздела.

Тождества Уорда и унитарность

Рассмотрим обычную $SU(2)$ -калибровочную теорию с фермионами (f) в дублетном представлении. Требование унитарности S -матрицы

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1, \quad \text{или} \quad \sum_c S_{ac} S_{bc}^* = \delta_{ab},$$

означает, что амплитуда рассеяния T_{ab} , связанная с S_{ab} равенством

$$S_{ab} = \delta_{ab} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_b) T_{ab}, \quad (9.99)$$

удовлетворяет соотношению

$$\text{Im} T_{ab} = \frac{1}{2} \sum_c T_{ac} T_{bc}^* (2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_b). \quad (9.100)$$

Другими словами, из требования унитарности S -матрицы следует, что мнимая часть амплитуды рассеяния T_{ab} непосредственно выражается через сумму произведений матричных элементов, связывающих начальное и конечное физические состояния ϕ всеми физическими состояниями той же энергии и импульса. Для наших вычислений мы рассмотрим амплитуду рассеяния фермиона на антифермионе $T(\bar{f}f \rightarrow \bar{f}f)$ в промежуточном состоя-

нии (см., например, [10, 138]). Схематически это показано на рис. 9.4.

Мнимая часть амплитуды рассеяния в левой части соотношения (9.100) может быть вычислена, если пропагаторы в промежуточных состояниях заменить на их мнимые части и умножить их на амплитуды рассеяния $T(f\bar{f} \rightarrow AA)$ и $T^*(AA \rightarrow f\bar{f})$, взятые из массовой поверхности [103].

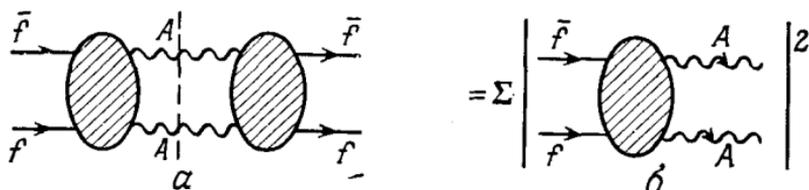


Рис. 9.4. Условие унитарности связывает абсорбтивную часть амплитуды процесса $f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}$ (а) с суммой квадратов амплитуд процесса $f\bar{f} \rightarrow AA$ в физической области переменных двух калибровочных бозонов (б).

Для пропагатора векторного бозона (правило 1 в разд. 9.2) мы выберем калибровку т'Хофта — Фейнмана с калибровочным параметром $\xi = 1$:

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} (-g_{\mu\nu}) / (k^2 + i\varepsilon). \quad (9.101)$$

Его мнимая часть равна

$$\pi \delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta(k^2) \theta(\omega), \quad (9.102)$$

где $\omega = |\mathbf{k}|$. Аналогично мнимая часть пропагатора духов (правило 2 разд. 9.2) имеет вид

$$\pi \delta^{ab} \delta(k^2) \theta(\omega). \quad (9.103)$$

Наличие ступенчатых функций в (9.102) и (9.103) приводит к тому, что промежуточные состояния калибровочных частиц и состояния духовых частиц изменяются в одной и той же физической области. Условие унитарности для амплитуды в четвертом порядке теории возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} \int d\rho_2 \left[\frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{ab} T_{\mu'\nu'}^{ab*} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} - S^{ab} S^{ab*} \right] = \\ = \frac{1}{2} \int d\rho_2 T_{\mu\nu}^{ab} T_{\mu'\nu'}^{ab*} P^{\mu\mu'}(k_1) P^{\nu\nu'}(k_2), \end{aligned} \quad (9.104)$$

где $T_{\mu\nu}^{ab}$ и S^{ab} — амплитуды переходов $f\bar{f} \rightarrow A_\mu^a A_\nu^b$ и $f\bar{f} \rightarrow c^{a+} c^b$ соответственно, а A_μ^a (c^a) — калибровочное (духовое) поле. Интегрирование по $d\rho^2$ — это интегрирование по фазовому пространству двух (безмассовых) частиц. Через $P_{\mu\nu}$ обозначены суммы

по поляризациям калибровочных частиц:

$$P^{\mu\mu'}(k_1) = \sum_{\sigma=1,2} \varepsilon_1^\mu(k_1, \sigma) \varepsilon_1^{\mu'}(k_1, \sigma),$$

$$P^{\nu\nu'}(k_2) = \sum_{\sigma=1,2} \varepsilon_2^\nu(k_2, \sigma) \varepsilon_2^{\nu'}(k_2, \sigma), \quad (9.105)$$

где $\varepsilon_1^\mu(k_1, \sigma)$ и $\varepsilon_2^\nu(k_2, \sigma)$ — четыре-векторы поляризации двух калибровочных частиц с импульсами k_1 и k_2 соответственно.

Заметим, что в этом случае левая часть уравнения (9.104) содержит вклад от дѹховых полей, а правая — нет, так как дѹхи не являются физическими состояниями. Именно этот факт делает демонстрацию соотношений унитарности нетривиальной. Как мы увидим, в конечном итоге к выполнению условия унитарности приводит тот факт, что сумма по поляризациям $P^{\mu\nu}$ в (9.105) не равна $g^{\mu\nu}$, а вклад дѹховых полей в точности компенсирует это различие.

Вычислим, как в (9.104), нетривиальный вклад низшего порядка. Мнимая часть амплитуды $f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}$, удовлетворяющая уравнению (9.100) (разрезанные диаграммы на рис. 9.5), может быть записана с помощью выражений (9.102) и (9.103) в виде суммы квадратов амплитуды $f\bar{f} \rightarrow A\bar{A}$ (рис. 9.6) и амплитуды $f\bar{f} \rightarrow c^+c$ (рис. 9.7). Множитель $1/2$ в левой части уравнения (9.104) обусловлен тем, что при возведении в квадрат амплитуды, показанной на рис. 9.6, появляются девять диаграмм, восемь из которых соответствуют диаграммам рис. 9.5, *a*—*г*, повторенным дважды, а девятая соответствует диаграмме рис. 9.5, *д*. Последняя содержит замкнутую петлю калибровочного бозона и должна быть умножена на симметричный множитель $1/2$. Дѹховое поле ФП c ведет себя как фермион, для

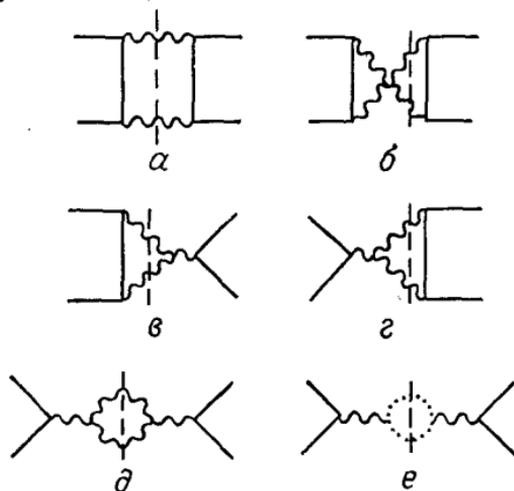


Рис. 9.5. Разрезанные диаграммы четвертого порядка для процесса $f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}$, где промежуточными частицами являются калибровочные бозоны и дѹхи Фаддеева — Попова.

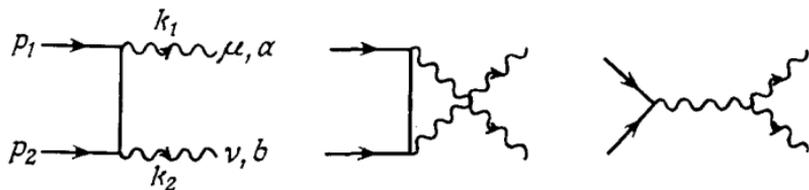


Рис. 9.6. Диаграммы, дающие вклад в амплитуду $T_{\mu\nu}^{ab}$, где конечным состоянием является состояние с двумя калибровочными бозонами.

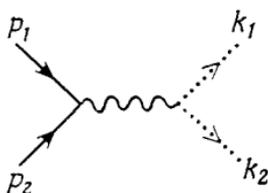


Рис. 9.7. Диаграмма, дающая вклад в амплитуду S^{ab} , где конечным состоянием является состояние с двумя духами Фаддеева — Попова.

которого $c \neq c^\dagger$; поэтому перед членом SS^* стоит знак минус и нет симметричного множителя.

Диаграммы наинизшего порядка для $T_{\mu\nu}^{ab}$ и S^{ab} показаны на рис. 9.6 и 9.7 соответственно:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{ab} = & -ig^2 \bar{v}(p_2) \frac{\tau^b}{2} \gamma_\nu \frac{1}{(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - m} \frac{\tau^a}{2} \gamma_{\mu} u(p_1) - \\
 & -ig^2 \bar{v}(p_2) \frac{\tau^a}{2} \gamma_\mu \frac{1}{(\hat{k}_1 - \hat{p}_2) - m} \frac{\tau^b}{2} \gamma_\nu u(p_1) - \\
 & -g^2 \epsilon^{abc} [(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_1 + 2k_2)_\mu g_{\nu\lambda} - \\
 & - (2k_1 + k_2)_\nu g_{\mu\lambda}] \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} \gamma^\lambda u(p_1), \quad (9.106)
 \end{aligned}$$

$$S^{ab} = -ig^2 \epsilon^{abc} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} \hat{k}_1 u(p_1). \quad (9.107)$$

Поляризация калибровочных частиц. Перейдем теперь к обсуждению вопросов, связанных с поляризацией калибровочных частиц. Калибровочные частицы, будучи безмассовыми, имеют только два физических состояния поляризации: $\epsilon^\mu(k, \sigma)$, $\sigma = 1, 2$. Три 4-вектора k_μ , $\epsilon_\mu(k, 1)$, $\epsilon_\mu(k, 2)$ не образуют базис в четырехмерном пространстве. Введем вектор η_μ , такой, что

$$\eta \cdot \epsilon(k, \sigma) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \quad (9.108)$$

где векторы $\epsilon_\mu(k, \sigma)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\epsilon(k, 1) \cdot \epsilon(k, 2) = 0 \quad (9.109)$$

и поперечности

$$k \cdot \epsilon(k, \sigma) = 0. \quad (9.110)$$

Так как $k^2 = 0$ и η_μ не может быть пропорционален k_μ , должно выполняться условие $k \cdot \eta \neq 0$. Используя обычную процедуру построения соотношений полноты, из условия ортогональности вместе с условием нормировки $\varepsilon^2(k, \sigma) = -1$ для суммы по поляризациям получаем выражение

$$P_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu},$$

где

$$Q_{\mu\nu} = [(k \cdot \eta)(k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu) - \eta^2 k_\mu k_\nu] / (k \cdot \eta)^2. \quad (9.111)$$

Очевидно, что добавочный член $Q_{\mu\nu}$ устраняет непоперечные состояния поляризации. Проверка условия унитарности (9.104) сводится к доказательству того факта, что член, содержащий дѹхи ФП, в точности компенсируется добавочным членом в сумме по поляризациям. Наши вычисления упростятся, если вектор η_μ подчинить условию $\eta^2 = 0$. Тогда добавочные члены в двух суммах по поляризациям в (9.105) принимают вид

$$Q^{\mu\mu'}(k_1, \eta_1) = (k_1^\mu \eta_1^{\mu'} + k_1^{\mu'} \eta_1^\mu) / (k_1 \cdot \eta_1), \quad (9.112a)$$

$$Q^{\nu\nu'}(k_2, \eta_2) = (k_2^\nu \eta_2^{\nu'} + k_2^{\nu'} \eta_2^\nu) / (k_2 \cdot \eta_2). \quad (9.112b)$$

Тождества Уорда для диаграмм низшего порядка. Чтобы вычислить правую часть соотношения (9.104), необходимо рассмотреть свертки $k_1^\mu T_{\mu\nu}^{ab}$ и т. д. Первые два слагаемых в (9.106) дают вклад, отличный от нуля:

$$\begin{aligned} & -ig^2 \bar{v}(p_2) \left(\frac{\tau^b}{2} \frac{\tau^a}{2} \gamma_\nu \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \hat{k}_1 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\tau^a}{2} \frac{\tau^b}{2} \hat{k}_1 \frac{(\hat{k}_1 - \hat{p}_2) + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \gamma_\nu \right) u(p_1) = \\ & = -ig^2 \bar{v}(p_2) \left[\frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right] \gamma_\nu u(p_1) = g^2 \varepsilon^{abc} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} \gamma_\nu u(p_1), \end{aligned} \quad (9.113)$$

где мы воспользовались равенствами

$$(\hat{p}_1 + m) \hat{k}_1 u(p_1) = [2p_1 k_1 - \hat{k}_1 (\hat{p}_1 - m)] u(p_1) = (2p_1 k_1) u(p_1)$$

и т. д. Заметим в скобках, что в случае абелевой калибровочной теории (КЭД) в ковариантной калибровке в результате такой свертки мы бы получили нуль, так как $\varepsilon^{abc} = 0$, и пришли бы к хорошо знакомым тождествам Уорда: $k_1^\mu T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} k_2^\nu = 0$. В этом случае мы получили бы, что члены $Q^{\mu\mu'}$ и $Q^{\nu\nu'}$ в суммах по поляризациям отсутствуют, условие унитарности выполнено и нет необходимости вводить дѹхи ФП в замкнутых петлях. Свертка последнего члена в $T_{\mu\nu}^{ab}$ из (9.106), присутствующего только

в неабелевых теориях с k_1^μ , равна

$$\begin{aligned} & -g^2 \varepsilon^{abc} [2k_1 \cdot k_2 g_{\nu\lambda} + (k_1 - k_2)_\lambda k_{1\nu} - \\ & - (2k_1 + k_2)_\nu k_{1\lambda}] \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} \gamma^\lambda u(p_1) = \\ & = -g^2 \varepsilon^{abc} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} \gamma_\nu u(p_1) - \end{aligned} \quad (9.114)$$

$$-g^2 \varepsilon^{abc} \frac{k_{1\nu}}{(k_1 + k_2)^2} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) u(p_1) - \quad (9.115)$$

$$-g^2 \varepsilon^{abc} \frac{k_{2\nu}}{(k_1 + k_2)^2} \bar{v}(p_2) \frac{\tau^c}{2} \hat{k}_1 u(p_1). \quad (9.116)$$

Мы видим, что (9.114) и (9.113) взаимно уничтожаются, а второй член (9.115) обращается в нуль в силу уравнения Дирака и равенства $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$. Третий член (9.116) пропорционален амплитуде духов S^{ab} в (9.107). Таким образом, мы имеем

$$k_1^\mu T_{\mu\nu}^{ab} = -iS^{ab} k_{2\nu} \quad (9.117)$$

и аналогично

$$T_{\mu\nu}^{ab} k_2^\nu = -iS^{ab} k_{1\mu}. \quad (9.118)$$

Из этих соотношений можно также вывести равенство $k_1^\mu T_{\mu\nu}^{ab} k_2^\nu = 0$. Таковы примеры тождеств Уорда в неабелевых теориях. (Формальный их вывод будет дан ниже.)

Теперь просто проверить, что условие унитарности (9.104) действительно выполняется, так как правую его часть можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d\rho_2 \{ T_{\mu\nu} T_{\mu'\nu'}^* [-g^{\mu\mu'} + (k_1^\mu \eta_1^{\mu'} + k_1^{\mu'} \eta_1^\mu) (k_1 \eta_1)^{-1}] \times \\ & \times [-g^{\nu\nu'} + (k_2^\nu \eta_2^{\nu'} + k_2^{\nu'} \eta_2^\nu) (k_2 \eta_2)^{-1}] \} = \\ & = \frac{1}{2} \int d\rho_2 \{ TT^* gg + [(k_1 T \eta_2) (\eta_1 T^* k_2) + \\ & + (\eta_1 T k_2) (k_1 T^* \eta_2)] (k_1 \eta_1)^{-1} (k_2 \eta_2)^{-1} - \\ & - [(k_1 T) \cdot (\eta_1 T^*) + (\eta_1 T) \cdot (k_1 T^*)] (k_1 \eta_1)^{-1} - \\ & - [(T k_2) \cdot (T^* \eta_2) + (T \eta_2) \cdot (T^* k_2)] (k_2 \eta_2)^{-1} \} = \\ & = \frac{1}{2} \int d\rho_2 \{ TT^* gg + 2SS^* - 2SS^* - 2SS^* \} = \\ & = \frac{1}{2} \int d\rho_2 \{ TT^* gg - 2SS^* \}, \quad (9.119) \end{aligned}$$

где мы воспользовались соотношениями (9.117) и (9.118).

Подводя итоги, можно сказать, что условие унитарности (9.104) связывает левую часть, где использованы правила Фейнмана в ковариантной калибровке с их фиктивными состояниями

с продольной поляризацией и дұхами ФП, с правой частью, в которой в силу калибровочного условия (аксиальной калибровки) (9.108) появляются только физические состояния с поперечной поляризацией. Фиктивные состояния ковариантной калибровки в левой части (9.104) взаимно уничтожаются, и в аксиальной калибровке, выбранной в правой части этого уравнения, существуют только физические состояния. Короче говоря, дұхи ФП необходимы для выполнения условия унитарности.

Преобразование БРС и тождества Уорда

В неабелевых теориях с дұхами ФП наиболее эффективным способом вывода тождеств Уорда является способ, использующий обобщенные калибровочные преобразования Бекки—Рюэ—Стора (БРС) [35]. Рассмотрим снова простую $SU(2)$ -теорию с фермионами в дублетном представлении:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (9.120)$$

где

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ig A_\mu^a T^a) \psi, \quad (9.121)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (9.122)$$

$$a = 1, 2, 3 \text{ и } T^a = \tau^a/2. \quad (9.123)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований

$$\delta \psi = -iT^a \theta^a \psi, \quad (9.124)$$

$$\delta A_\mu^a = \epsilon^{abc} \theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a. \quad (9.125)$$

После включения члена, фиксирующего калибровку, и членов с дұхами ФП (9.75) и (9.76) эффективный лагранжиан в ковариантной калибровке (9.70) принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{фк}} + \mathcal{L}_{\text{ДФП}}, \quad (9.126)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{фк}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2, \quad (9.127)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ДФП}} = i c_a^\dagger \partial^\mu [\delta_{ab} \partial_\mu - g \epsilon_{abc} A_\mu^c] c_b. \quad (9.128)$$

Вместо комплексных дұховых полей c и c^\dagger оказывается удобнее работать с вещественными грассмановыми полями ρ и σ , определенными следующим образом:

$$\begin{aligned} c_a &= (\rho_a + i\sigma_a)/\sqrt{2}, \\ c_a^\dagger &= (\rho_a - i\sigma_a)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (9.129)$$

Используя свойства антикоммутируемости грассмановых полей $\rho^2 = \sigma^2 = 0$, $\rho\sigma = -\sigma\rho$ и т. д., получаем

$$\mathcal{L}_{\text{ДФП}} = -i\partial^\mu \rho_a (D_\mu \sigma_a), \quad (9.130)$$

где

$$D_\mu \sigma^a = \partial_\mu \sigma^a - g\varepsilon^{abc} \sigma^b A_\mu^c. \quad (9.131)$$

Эффективное действие $S_{\text{эфф}}$ не инвариантно относительно общих калибровочных преобразований (9.124) и (9.125) с произвольными параметрами θ^a , но инвариантно при преобразованиях БРС

$$\delta A_\mu^a = \omega D_\mu \sigma^a, \quad (9.132a)$$

$$\delta \psi = ig\omega (T^a \sigma^a) \psi, \quad (9.132b)$$

$$\delta \rho^a = -i\omega \partial^\mu A_\mu^a / \xi, \quad (9.132в)$$

$$\delta \sigma^a = -g\omega \varepsilon^{abc} \sigma^b \sigma^c / 2, \quad (9.132г)$$

где ω — антикоммутирующая грассманова переменная, не зависящая от пространственно-временной точки, а ξ — обычный параметр (ковариантной) калибровки.

Инвариантность $S_{\text{эфф}}$ при преобразованиях БРС. Так как (9.132a) можно записать в виде

$$\delta A_\mu^a = i\partial_\mu \omega \sigma^a - ig\varepsilon^{abc} \omega \sigma^b A_\mu^c, \quad (9.133)$$

преобразование БРС является в действительности калибровочным преобразованием, отвечающим частному выбору калибровочной функции

$$\theta^a = -g\omega \sigma^a. \quad (9.134)$$

Таким образом, первоначальное действие $S = \int d^4x \mathcal{L}$ не меняется при этом преобразовании, т. е. $\delta S = 0$. С учетом соотношения (9.67) очевидно, что доказательство инвариантности действия $S_{\text{эфф}}$ сводится к доказательству соотношения $\delta(S_{\text{ФК}} + S_{\text{ДФП}}) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + i\partial^\mu \rho^a (D_\mu \sigma^a) \right] &= \frac{1}{\xi} (\partial^\lambda A_\lambda^a) \partial_\mu (\delta A^{a\mu}) + \\ &+ i\partial^\mu (\delta \rho^a) (D_\mu \sigma^a) + i\partial^\mu \rho^a \delta (D_\mu \sigma^a). \end{aligned} \quad (9.135)$$

Рассмотрим сначала изменение ковариантной производной от σ^a :

$$\begin{aligned} \delta (D_\mu \sigma^a) &= \delta (\partial_\mu \sigma^a - g\varepsilon^{abc} \sigma^b A_\mu^c) = -g\omega \varepsilon^{abc} \partial_\mu (\sigma^b \sigma^c) / 2 + \\ &+ g\varepsilon^{abc} (\omega D_\mu \sigma^b) \sigma^c + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b (-g\omega \varepsilon^{cde} \sigma^d \sigma^e / 2). \end{aligned} \quad (9.136)$$

Члены, линейные по g и g^2 , по отдельности уничтожаются:

$$-g\omega\varepsilon^{abc}(\partial_\mu\sigma^b)\sigma^c + g\omega\varepsilon^{abc}(\partial_\mu\sigma^b)\sigma^c = 0, \quad (9.137)$$

$$g^2\omega\sigma^c\sigma^d A_\mu^e (\varepsilon^{abc}\varepsilon^{bde} - \varepsilon^{abd}\varepsilon^{bec} - \varepsilon^{abe}\varepsilon^{bac}) = 0. \quad (9.138)$$

Последнее равенство справедливо в силу тождеств Якоби. Таким образом,

$$\delta(D_\mu\sigma^a) = 0. \quad (9.139)$$

Поэтому, используя (9.132а) и (9.132в) в (9.135), получаем

$$\begin{aligned} \delta(S_{\text{фк}} + S_{\text{ДФП}}) &= \\ &= \int \left[\frac{1}{\xi} (\partial^\lambda A_\lambda^a) \partial_\mu (\omega D^\mu \sigma^a) + \partial^\mu \left(\frac{\omega}{\xi} \partial^\lambda A_\lambda^a \right) (D_\mu \sigma^a) \right] d^4x = \\ &= \int \partial^\mu \left[\frac{1}{\xi} (\partial^\lambda A_\lambda^a) (\omega D_\mu \sigma^a) \right] d^4x = 0. \end{aligned} \quad (9.140)$$

Это завершает доказательство инвариантности $S_{\text{эфф}}$ относительно обобщенных калибровочных преобразований БРС (9.132).

Вывод обобщенных тождеств Уорда. Обобщенные тождества Уорда отражают симметрию, соответствующую инвариантности эффективного действия относительно преобразований БРС. Чтобы получить эти соотношения между функциями Грина, рассмотрим производящий функционал для функции Грина, вводя источники \mathbf{J}_μ , α , β , $\bar{\chi}$ и χ для полей \mathbf{A}_μ , ρ , σ , ψ и $\bar{\psi}$ соответственно. Оказывается также, что для вывода тождеств, линейных по производным, взятым по источникам, удобно ввести источники κ_μ , \mathbf{v} , λ и $\bar{\lambda}$ для составных операторов $D_\mu\sigma$, $1/2\sigma \times \sigma$, $\mathbf{T} \cdot \sigma\psi$ и $\bar{\psi} \mathbf{T} \cdot \sigma$, входящих в преобразования БРС (9.132). Таким образом, производящий функционал имеет вид

$$\begin{aligned} W[\mathbf{J}, \alpha, \beta, \chi, \bar{\chi}, \kappa, \mathbf{v}, \lambda, \bar{\lambda}] &= \\ &= \int [d\mathbf{A}^\mu][d\rho][d\sigma][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{эфф}} + \Sigma) \right\}, \end{aligned} \quad (9.141)$$

где член с источниками Σ имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbf{J}_\mu \cdot \mathbf{A}^\mu + \alpha \cdot \rho + \beta \cdot \sigma + \bar{\chi}\psi + \bar{\psi}\chi + \kappa_\mu \cdot D^\mu\sigma + \\ &+ 1/2\mathbf{v} \cdot (\sigma \times \sigma) + \bar{\lambda}\mathbf{T} \cdot \sigma\psi + \bar{\psi}\mathbf{T} \cdot \sigma\lambda. \end{aligned} \quad (9.142)$$

Поскольку эффективное действие $S_{\text{эфф}}$ инвариантно относительно преобразований БРС, производящий функционал для функций Грина обладает тем же свойством, т. е. $\delta W = 0$, или

$$\begin{aligned} \int d^4x \int [d\mathbf{A}_\mu][d\rho][d\sigma][d\psi][d\bar{\psi}] (\delta\Sigma) \times \\ \times \exp \left\{ i \int d^4x' [\mathcal{L}_{\text{эфф}}(x') + \Sigma(x')] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (9.143)$$

где $\delta\Sigma$ — бесконечно малое изменение члена с источниками, связанное с преобразованием БРС:

$$\delta\Sigma = \mathbf{J}_\mu \cdot \delta\mathbf{A}^\mu + \alpha \cdot \delta\rho + \beta \cdot \delta\sigma + \bar{\chi} \delta\psi + \delta\bar{\psi}\chi + \kappa_\mu \cdot \delta(D^\mu\sigma) + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \delta(\sigma \times \sigma) + \bar{\lambda} \delta(\mathbf{T} \cdot \sigma\psi) + \delta(\bar{\psi}\mathbf{T} \cdot \sigma) \lambda. \quad (9.144)$$

Сначала мы продемонстрируем, что не только $\delta(D_\mu\sigma) = 0$ (см. (9.139)), но и изменения всех составных операторов обращаются в нуль:

$$\delta(\sigma^a\sigma^b - \sigma^b\sigma^a) = (-g\omega/2)(\epsilon^{acd}\sigma^c\sigma^d\sigma^b + \epsilon^{bcd}\sigma^a\sigma^c\sigma^d - \epsilon^{bcd}\sigma^c\sigma^d\sigma^a - \epsilon^{acd}\sigma^b\sigma^c\sigma^d) = 0 \quad (9.145)$$

и

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{T} \cdot \sigma)\psi &= \mathbf{T} \cdot \delta\sigma\psi + \mathbf{T} \cdot \sigma\delta\psi = \\ &= \mathbf{T} \cdot \left(-\frac{g}{2}\omega\sigma \times \sigma\right)\psi - ig\omega(\mathbf{T} \cdot \sigma)(\mathbf{T} \cdot \sigma)\psi = 0, \end{aligned} \quad (9.146)$$

так как

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \sigma\mathbf{T} \cdot \sigma &= T^a T^b \sigma^a \sigma^b = \frac{1}{2}(T^a T^b - T^b T^a)\sigma^a \sigma^b = \\ &= \frac{i}{2}\epsilon^{abc} T^c \sigma^a \sigma^b = \frac{i}{2}\mathbf{T} \cdot (\sigma \times \sigma). \end{aligned} \quad (9.147)$$

Следовательно, (9.143) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega \int d^4x \{ [d\mathbf{A}_\mu] \dots [d\bar{\psi}] (\mathbf{J}_\mu \cdot D^\mu\sigma + \alpha \cdot \partial^\mu\mathbf{A}_\mu/\xi - g\beta \cdot \sigma \times \sigma/2 + \\ + ig\bar{\chi}\mathbf{T} \cdot \sigma\psi - ig\bar{\psi}\mathbf{T} \cdot \sigma\chi) \exp\left(i \int d^4x' [\mathcal{L}_{\text{эфф}} + \Sigma]\right) = 0, \end{aligned} \quad (9.148)$$

или

$$\begin{aligned} \omega \int d^4x \left(J_\mu^a \frac{\delta}{\delta\kappa_\mu^a} + \frac{\alpha^a}{\xi} \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^a} - \frac{g}{2} \beta^a \frac{\delta}{\delta v^a} + \right. \\ \left. + ig\bar{\chi} \frac{\delta}{\delta\lambda} - ig \frac{\delta}{\delta\bar{\lambda}} \chi \right) W[\mathbf{J}, \dots, \bar{\lambda}] = 0. \end{aligned} \quad (9.149)$$

Последнее соотношение представляет собой обобщенное тождество Уорда, связывающее различные функции Грина. Чтобы получить соотношения для некоторого конкретного набора функций Грина, нужно просто дифференцировать (9.149) по внешним источникам \mathbf{J}_μ , α , β , ... и положить эти источники равными нулю. Но это довольно утомительная процедура. Информацию, содержащуюся в (9.149), можно получить для имеющихся функций Грина более простым способом, если воспользоваться тем, что из равенства $\delta W = 0$ следует инвариантность функций Грина относительно преобразований БРС (см., например, [278]). Этот факт можно использовать, чтобы получить

соотношения, эквивалентные (9.149). Например, из равенства

$$\delta \langle 0 | T (A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)) | 0 \rangle = 0 \quad (9.150)$$

следует

$$\langle 0 | T (\delta A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)) | 0 \rangle + \langle 0 | T (A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(0)) | 0 \rangle = 0, \quad (9.151)$$

или

$$\omega \langle 0 | T (D_\mu \sigma^a(x) A_\nu^b(0)) | 0 \rangle + \omega \langle 0 | T (A_\mu^a(x) D_\nu \sigma^b(0)) | 0 \rangle = 0. \quad (9.152)$$

Очевидно, что, дифференцируя (9.149) по $J_\mu^a(x)$ и $J_\nu^b(0)$ и приравнявая все источники нулю, мы также придем к соотношению (9.152). Практически этот метод, используемый в (9.150) и

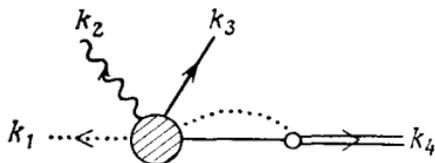


Рис. 9.8.

(9.151), является более прямым. Но вся информация о калибровочной инвариантности содержится в более компактном уравнении (9.149), которое очень полезно для формальных манипуляций.

Формальный вывод тождества Уорда (9.117). Наконец, мы продемонстрируем, что тождества Уорда (9.117) и (9.118), использованные при доказательстве унитарности в рассмотренном выше примере, содержатся в (9.149). Рассмотрим четырехточечную функцию $\langle 0 | T (\rho A_\nu \bar{\psi} \psi) | 0 \rangle$. Ее инвариантность относительно преобразований БРС приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \langle 0 | T (\delta \rho A_\nu \bar{\psi} \psi) | 0 \rangle + \langle 0 | T (\rho \delta A_\nu \bar{\psi} \psi) | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | T (\rho A_\nu \delta \bar{\psi} \psi) | 0 \rangle + \langle 0 | T (\rho A_\nu \bar{\psi} \delta \psi) | 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (9.153)$$

Но когда поля ψ берутся на массовой поверхности, составные операторы, соответствующие $\delta \bar{\psi}$ и $\delta \psi$, вкладов не дают, так как не имеют одночастичного полюса. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию Грина

$$\begin{aligned} \langle 0 | T (\rho(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \delta \psi(x_4)) | 0 \rangle = \\ = ig \omega \langle 0 | T (\rho(x_1) A_\nu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \psi(x_4)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (9.154)$$

графическое изображение которой в импульсном пространстве дано на рис. 9.8. Ясно, что эта функция Грина не имеет одночастичного полюса по переменной k_4 и обратится в нуль, когда мы возьмем поле ψ на массовой оболочке, умножив ее на об-

ратный пропагатор $(\gamma \cdot k_4 - m)$ и устремив затем \hat{k}_4 к m . Поэтому, когда все поля берутся на массовой поверхности, остаются только члены, линейные по полю, и соотношение (9.153) приводится к виду

$$\frac{\omega}{\xi} \langle 0 | T (\partial^\mu A_\mu^a A_\nu^b \bar{\psi} \psi) | 0 \rangle + \omega \langle 0 | T (\rho^a \partial_\nu \sigma^b \bar{\psi} \psi) | 0 \rangle = 0.$$

В случае калибровки г'Хофта — Фейнмана (9.101), когда калибровочный параметр $\xi = 1$, это соответствует соотношению

$$k_1^\mu T_{\mu\nu}^{ab} = -i S^{ab} k_{2\nu},$$

в точности совпадающему с тождеством Уорда (9.117).

Заключительные замечания. Мы проиллюстрировали, насколько важны тождества Уорда для проверки того факта, что нефизические особенности (связанные с продольными компонентами калибровочных полей и духами ФП) в физических амплитудах действительно сокращаются. Этот вывод особенно важен при исследовании условия унитарности в теориях со спонтанно нарушенной симметрией. В таких теориях при выборе определенного класса условий, фиксирующих калибровку, можно обнаружить и другие нефизические частицы — несостоявшиеся голдстоуновские бозоны. Необходимо, используя тождества Уорда, проверить, что они также выпадают из физического спектра. Таким образом, мы должны быть уверены, что тождества Уорда выполняются во всех порядках теории возмущений. Так как они являются отражением симметрии теории, очень важно иметь процедуру регуляризации, которая не нарушала бы эту симметрию. Одним из достоинств схемы размерной регуляризации является то, что она явно сохраняет инвариантность относительно преобразований БРС, и, следовательно, в ней по-прежнему имеют место обобщенные тождества Уорда. Тем не менее, как мы видели в разд. 6.2, тождества Уорда, содержащие определенные функции Грина с аксиально-векторными токами, не выполняются автоматически даже в том случае, когда теория регуляризована без нарушения симметрии. Таким образом, в теориях с фермионами необходимо убедиться, что аномалии АБД, которые мешают перенормируемости, не возникают.

Исторически первым успешным применением теории Янга — Миллса явилось создание единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий (гл. 11). Но мы решили изложить сначала калибровочную теорию сильных взаимодействий — квантовую хромодинамику (КХД) в качестве более простого введения в предмет, поскольку в этой теории не возникают проблемы, связанные со спонтанным нарушением симметрии.

КХД представляет собой замечательный синтез различных идей, которые в свое время развивались в физике адронов (кварки, партоны, цвет, алгебра токов и т. д.). В начале 60-х годов была разработана простая кварковая модель, чтобы объяснить закономерности в спектре адронов. При этом последние интерпретировались как связанные состояния локализованных, но по существу невзаимодействующих кварков (разд. 4.4). Эта точка зрения на кварки как на фундаментальные составляющие адронов стала еще более правдоподобной, когда в конце 60-х годов были успешно применены соотношения, вытекающие из квантовой теории кварковых полей, а именно алгебра кварковых токов и их дивергенций (гл. 5). Постепенно выяснилось, что эту простую картину необходимо усложнить, наделив кварки скрытым квантовым числом — цветом, принимающим три различных значения. Затем была проведена серия важных экспериментов по глубоконеупругому рассеянию лептонов на адронах, начало которой положили эксперименты, выполненные в конце 60-х годов группой СЛАК — МИТ. Было обнаружено, что сечения рассеяния удовлетворяют бьёркеновскому скейлингу, который хорошо объясняется фейнмановской партонной моделью (гл. 7). Значение партонной модели и скейлинга заключается в том, что, хотя составляющие адронов (кварки) не рождаются в виде свободных частиц в конечных состояниях глубоконеупругого рассеяния, они ведут себя как очень слабо связанные друг с другом частицы внутри ядра мишени. Как мы увидим ниже, все эти особенности может объяснить квантовая хромодинамика.

Важным свойством КХД, открытым в 1973 г. и позволившим считать ее кандидатом на роль теории сильных взаимодействий, является свойство асимптотической свободы, т. е. уменьшение константы взаимодействия на малых расстояниях. В настоящей

главе в основном рассматриваются свойства КХД на малых расстояниях, где применима теория возмущений. Лишь в последнем разделе мы касаемся вопросов, связанных с удержанием кварков на больших расстояниях, используя при этом непертурбативные методы калибровочной теории на решетке. Замечательным фактом является то, что мы располагаем теорией сильных взаимодействий и можем с уверенностью утверждать, что лагранжиан имеет правильный вид, но нам не известно, как получить из этой теории низкоэнергетическую динамику: удержание кварков, спонтанное нарушение киральной симметрии и спектр адронных масс. Тем не менее имеются многочисленные указания на то, что эти свойства действительно присущи КХД.

10.1. ОТКРЫТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СВОБОДЫ

Гросс и Вильчек [203, 204], а также Политцер [324, 325] обнаружили, что в неабелевых калибровочных теориях в глубоковеклидовой области нулевое значение константы связи является стабильной фиксированной точкой. (т'Хофт [385] также заметил, что в теориях Янга — Миллса график ренормгрупповой β -функции имеет в начале координат отрицательный наклон.) Теории, обладающие таким свойством, называют *асимптотически свободными*. Замечательно, что, как мы покажем ниже, кроме неабелевых теорий калибровочных полей *ни одна* перенормируемая теория поля не может быть асимптотически свободной [96, 440]. Таким образом, в отличие от всех других теорий поля в теориях Янга — Миллса константа связи убывает на малых расстояниях. В хорошо известной абелевой теории КЭД уменьшение эффективной константы взаимодействия на больших расстояниях интуитивно можно понять, исходя из того, что с увеличением расстояния между зарядами усиливается их диэлектрическая экранировка облаком виртуальных электрон-позитронных пар. Таким образом, необходимо понять, за счет чего в неабелевых калибровочных теориях возникает антиэкранирующий эффект. Как мы покажем, облако виртуальных калибровочных частиц, являющихся бозонами, несущими (цветовой) заряд и спин, делает янг-миллсовский вакуум похожим на парамагнетик, а это благодаря релятивистской инвариантности приводит к тому, что вакуум антиэкранирует заряды.

Теории без полей Янга — Миллса не являются асимптотически свободными

Перечислим некоторые важные для нас здесь пункты гл. 3, где ренормализационная группа была проиллюстрирована на примере простой теории $\lambda\phi^4$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (10.1)$$

При растяжении всех 4-импульсов до σp_i , $\sigma \rightarrow \infty$ (глубокоевклидова область), функция Грина (за исключением тривиальных размерных множителей) зависит от $t = \ln \sigma$ только через эффективную константу связи $\bar{\lambda}(\lambda, t)$, которая в свою очередь определяется ренормгрупповой β -функцией (см. (3.104) и (3.105)):

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta(\bar{\lambda}). \quad (10.2)$$

Нас интересует наклон графика β -функции в начале координат $\lambda = 0$, так как при малых значениях константы связи мы можем вычислять β -функцию по теории возмущений, а знак этого наклона определяет, является ли точка $\lambda = 0$ ультрафиолетовой или инфракрасной фиксированной точкой. Если теория асимптотически свободна, т. е. $\lambda = 0$ является ультрафиолетовой фиксированной точкой, то, как отмечалось в гл. 7, мы приходим к каноническим (т. е. таким же, как в свободной теории) сингулярностям на световом конусе и к партонной модели с кварками, свободными на малых расстояниях.

Мы можем вычислить β -функцию следующим образом. В безмассовой теории единственным масштабным параметром μ является точка вычитания, необходимая для определения всех перенормированных величин. Из (3.32) или (3.71) следует, что в этом случае β -функция определяется выражением

$$\beta(\lambda) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu}; \quad (10.3)$$

здесь λ — перенормированная константа взаимодействия, связанная с голой константой взаимодействия соотношением (2.50):

$$\lambda = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0, \quad (10.4)$$

где Z_ϕ — константа перенормировки скалярной волновой функции:

$$\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_0. \quad (10.5)$$

Эту константу можно также определить через значение неперенормированного пропагатора скалярного поля в точке вычитания, являющейся, например, некоторой евклидовой точкой $p^2 = -\mu^2$:

$$i\Delta(p^2)|_{p^2=-\mu^2} = \frac{-iZ_\phi}{\mu^2}. \quad (10.6)$$

Аналогично константа перенормировки вершинной функции Z_λ может быть определена через неперенормированную четырехточечную вершинную функцию (2.38):

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)|_{p_i^2=-\mu^2} = -i\lambda_0/Z_\lambda. \quad (10.7)$$

Однопетлевые вклады в двухточечную и четырехточечную функции Грина, а следовательно, и в Z_ϕ и Z_λ показаны на рис. 10.1. Таким образом, константы перенормировки являются функциями голой константы связи λ_0 и отношения параметра обрезания Λ к параметру вычитания μ .

Чтобы получить из соотношения (10.3) β -функцию, необходимо просто вычислить расходящиеся части констант перенор-

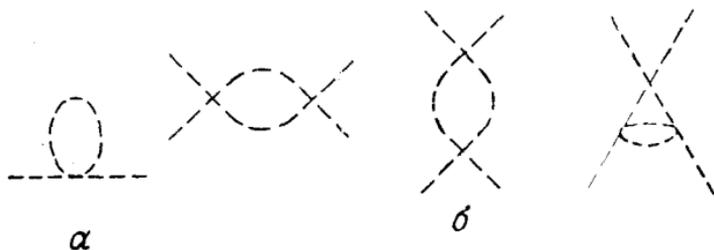


Рис. 10.1. Диаграммы, соответствующие радиационным поправкам наимизшего порядка в теории скалярного мезонного поля: α — к собственной энергии, β — к вершинной функции.

мировок Z и продифференцировать их по параметру обрезания Λ (см. (3.44)):

$$\beta = -\lambda \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} [2 \ln Z_\phi(\lambda_0, \Lambda/\mu) - \ln Z_\lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu)]. \quad (10.8)$$

Однопетлевая поправка в Z_ϕ , показанная на рис. 10.1, α , не дает вклада ($Z_\phi = 1$). Единственные нетривиальные диаграммы показаны на рис. 10.1, β (см. (3.47)). В результате получаем

$$\beta(\lambda) = \frac{+3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3). \quad (10.9)$$

Поскольку область $\lambda < 0$ недопустима (так как гамильтониан в этом случае не ограничен снизу), положительный наклон при $\lambda > 0$ означает, что простая теория $\lambda\phi^4$ с лагранжианом (10.1) при больших евклидовых импульсах не обладает асимптотическим поведением свободного поля. Такая же ситуация имеет место для всех скалярных теорий с внутренней симметрией, лагранжианы которых получаются из (10.1) заменой

$$\phi \rightarrow \phi_i, \quad \lambda\phi^4 \rightarrow \lambda_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l, \quad (10.10)$$

где тензор λ_{ijkl} симметричен по своим индексам. Скалярные поля $\phi_i(x)$ принадлежат некоторому (возможно, приводимому) представлению группы симметрии, и в каждом члене произведена свертка по всем индексам внутренней симметрии. Теперь мы имеем целый набор четверных взаимодействий, удовлетворяющих уравнениям, обобщающим (10.9):

$$\beta_{ijkl} = \frac{d\lambda_{ijkl}}{dt} = \frac{+1}{16\pi^2} [\lambda_{ijmn}\lambda_{mnkl} + \lambda_{ikmn}\lambda_{mnjl} + \lambda_{ilmn}\lambda_{mnjk}].$$

(10.11)

Эта теория по-прежнему не является асимптотически свободной, так как легко можно установить, что существуют β -функции, графики которых имеют положительный наклон в начале координат. Например,

$$\beta_{\text{III}} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda_{\text{IImn}} \lambda_{\text{mnl}} > 0. \quad (10.12)$$

Рассмотрим теперь теории, где взаимодействие скалярных бозонов и фермионов является перенормируемым взаимодействием Юкавы:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\psi) \psi + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m_\phi^2 \phi^2] - \lambda \phi^4 + \rho \bar{\psi} \psi \phi. \quad (10.13)$$

В этом случае мы имеем систему ренормгрупповых уравнений, соответствующих диаграммам, приведенным на рис. 10.2 и 10.3:

$$\beta_\lambda = \frac{d\lambda}{dt} = A_\lambda \lambda^2 + B_\lambda \lambda \rho^2 + C_\lambda \rho^4, \quad (10.14)$$

$$\beta_\rho = \frac{d\rho}{dt} = A_\rho \rho^3 + B_\rho \lambda^2 \rho. \quad (10.15)$$

Следует отметить, что членам низшего порядка не обязательно соответствуют диаграммы, содержащие только одну петлю. В частности, на рис. 10.3, б показана двухпетлевая диаграмма, дающая вклад низшего порядка в (10.15). Но для того, чтобы функция β_λ в (10.14) была отрицательной при A_λ положительном, ρ^2 должно быть по крайней мере порядка λ ; следовательно, членом, пропорциональным $\lambda^2 \rho$, на рис. 10.3, б можно пренебречь по сравнению с членом, пропорциональным ρ^3 , приведенным на рис. 10.3, а, что приводит к следующему результату:

$$\beta_\rho = \frac{+1}{16\pi^2} \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \right) \rho^3 > 0. \quad (10.16)$$

Таким образом, теория с лагранжианом (10.12) также не является асимптотически свободной. Это утверждение можно

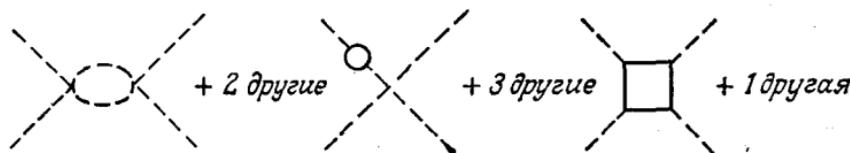


Рис. 10.2. Вклады низшего порядка в константу перенормировки λ четверного взаимодействия.

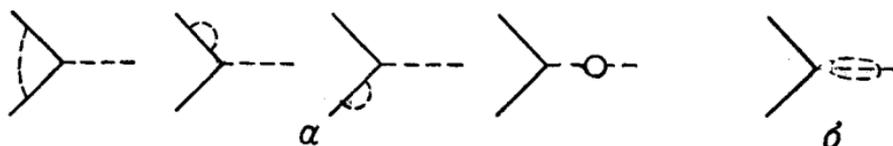


Рис. 10.3. Вклады низшего порядка в константу перенормировки юкавского взаимодействия,

обобщить на всю совокупность перенормируемых теорий, описывающих взаимодействие полей со спинами 0 и 1/2 и обладающих всевозможными внутренними симметриями. Лагранжиан взаимодействия в таких теориях можно представить в виде

$$\mathcal{L}_I = -\lambda_{ijklm} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m + \bar{\psi}_a (A_{ab}^k + iB_{ab}^k \gamma_5) \psi_b \phi_k, \quad (10.17)$$

а уравнение ренормгруппы для комбинации $\rho_{ab}^k = A_{ab}^k + iB_{ab}^k$, обобщающее (10.16), записывается в виде

$$\beta_\rho = \frac{d\rho^i}{dt} = \frac{1}{16\pi^2} \left[2\rho^j \rho^{i+} \rho^j + \frac{1}{2} \rho^j \rho^{j+} \rho^i + \frac{1}{2} \rho^i \rho^j \rho^{j+} + \right. \\ \left. + (\text{tr } \rho^j \rho^{j+}) \rho^i + (\text{tr } \rho^{i+} \rho^j) \rho^j \right], \quad (10.18)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. При выводе последнего уравнения мы воспользовались тем свойством, что, когда проходится (безмассовый) фермионный пропагатор, результат коммутирования γ -матриц сводится к замене $\rho \rightarrow \rho^\dagger$. Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt} (\text{tr } \rho^{i+} \rho^i) = \frac{1}{8\pi^2} \left[2 (\text{tr } \rho^{i+} \rho^j \rho^{j+} \rho^i) + \frac{1}{2} (\text{tr } \rho^{i+} \rho^j \rho^{j+} \rho^i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\text{tr } \rho^{i+} \rho^j \rho^j \rho^{j+}) + \text{Re} (\text{tr } \rho^{i+} \rho^j) (\text{tr } \rho^{i+} \rho^i) + (\text{tr } \rho^{i+} \rho^i) (\text{tr } \rho^j \rho^{j+}) \right]. \quad (10.19)$$

Второе и третье слагаемые в правой части положительно определены, так как они являются следами от квадратов эрмитовых матриц ($\rho^j \rho^{j+}$). Четвертое слагаемое меньше последнего, так как

$$\text{Re} [(\text{tr } \rho^{i+} \rho^j) (\text{tr } \rho^{i+} \rho^i)] \leq |\text{tr } (\rho^{i+} \rho^j)|^2 = (\text{tr } \rho^{i+} \rho^j) (\text{tr } \rho^j \rho^{i+}). \quad (10.20)$$

Следовательно,

$$8\pi^2 \frac{d}{dt} (\text{tr } \rho^{i+} \rho^i) \geq 2 [(\text{tr } \rho^{i+} \rho^j \rho^{j+} \rho^i) + (\text{tr } \rho^{i+} \rho^i) (\text{tr } \rho^j \rho^{j+})] = \\ = (\rho_{ab}^i \rho_{cd}^i + \rho_{ad}^i \rho_{cb}^i) (\rho_{ba}^{i+} \rho_{dc}^{i+} + \rho_{da}^{i+} \rho_{bc}^{i+}) \geq 0 \quad (10.21)$$

(здесь, чтобы получить последнюю строку, мы записали явно операцию взятия следа и изменили обозначения некоторых индексов). Следовательно, все перенормируемые теории, в которые входят только поля со спинами 0 и 1/2, не являются асимптотически свободными. Наконец, нам известно, что график β -функции КЭД имеет положительный наклон при нулевом значении константы взаимодействия, так как

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_0 = Z_3^{1/2} e_0, \quad (10.22)$$

где мы воспользовались тождеством Уорда $Z_1 = Z_2$, а Z_3 — константа перенормировки волновой функции фотона, которая может быть вычислена из диаграммы поляризации вакуума, при-

веденной на рис. 10.4, а:

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \ln(\Lambda/\mu). \quad (10.23)$$

Таким образом, как и в (10.8), имеем

$$\beta_e = -e \frac{\partial [\ln Z_3^{1/2}(e_0, \Lambda/\mu)]}{\partial \ln \Lambda} = \frac{+e^3}{12\pi^2} + O(e^5). \quad (10.24)$$

Аналогично в скалярной КЭД, где вклад в Z_3 дают диаграммы с петлями заряженных скалярных мезонов, показанные на

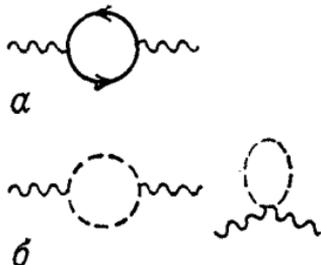


Рис. 10.4.

рис. 10.4, б, получаем

$$\beta_e = \frac{+e^3}{48\pi^2} + O(e^5). \quad (10.25)$$

Неабелевы калибровочные теории асимптотически свободны

Лагранжиан в теории Янга — Миллса общего вида, приведенный в разд. 8.1, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (10.26)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu],$$

где $A_\mu = T^a A_\mu^a$ — эрмитова матрица векторного поля, а матрицы T^a удовлетворяют соотношениям

$$[T^a, T^b] = iC^{abc} T^c, \quad \text{tr} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (10.27)$$

Чтобы проквантовать теорию, необходимо фиксировать калибровку. В разд. 9.2 приведены правила Фейнмана для теории в ковариантной калибровке, а также соответствующие члены, фиксирующие калибровку и духи Фаддеева — Попова. В частности, пропагатор калибровочного бозона имеет вид

$$i\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = i \left[-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) k_\mu k_\nu / k^2 \right] \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (10.28)$$

где ξ — калибровочный параметр. Тогда β -функцию можно вычислить точно так же, как в других перенормируемых теориях, рассмотренных выше. Если определить калибровочное взаимодействие через трехточечную функцию векторных полей в соответствии с правилом 3 в разд. 9.2:

$$i\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = \\ = igC^{abc} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu], \quad (10.29)$$

то перенормированная константа взаимодействия будет связана с голой константой следующим образом:

$$g = Z_A^{3/2} Z_g^{-1} g_0, \quad (10.30)$$

где Z_A — константа перенормировки волновой функции векторного бозона:

$$A_\mu = Z_A^{-1/2} A_{0\mu}, \quad (10.31)$$

которую можно также определить через поперечную часть перенормированного пропагатора векторного бозона, взятого в (евклидовой) точке вычитания $k^2 = -\mu^2$:

$$[i\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k)]_0^{\text{tr}}|_{k^2=-\mu^2} = iZ_A \left(g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2} \right) \delta^{ab} / \mu^2. \quad (10.32)$$

Аналогично константу перенормировки вершинной функции Z_g можно определить через неперенормированную трехточечную вершинную функцию (10.29):

$$[\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)]_0 = Z_g^{-1} g_0 C^{abc} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + \\ + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu] \quad \text{при } k_i^2 = -\mu^2. \quad (10.33)$$

Может оказаться полезным сравнить (10.30), (10.31), (10.32) и (10.33) с соответствующими выражениями (2.40), (2.23), (2.21) и (2.38) в теории $\lambda\phi^4$. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в Z_A и Z_g , приведены на рис. 10.5 и 10.6 соответственно. После утомительных вычислений находим

$$Z_A = 1 + \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{13}{3} - \xi \right) t_2(V) \ln \Lambda/\mu, \quad (10.34)$$

$$Z_g = 1 + \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{17}{6} - \frac{3\xi}{2} \right) t_2(V) \ln \Lambda/\mu, \quad (10.35)$$

где

$$t_2(V) \delta^{ab} = C^{acd} C^{bcd}. \quad (10.36)$$

Как мы видели в разд. 4.1, сами структурные константы являются матричными элементами генераторов в присоединенном представлении:

$$C^{abc} = [T^a(V)]_{bc}, \quad (10.37)$$

и (10.36) можно переписать в виде

$$t_2(V) \delta^{ab} = \text{tr} \{T^a(V) T^b(V)\}. \quad (10.38)$$

Величины выбранного представления мы обозначим буквой V (от *vector*), так как векторные поля A_μ^a принадлежат присоединенному представлению группы. Равенство (10.38) показывает, что $t_2(V)$ можно интерпретировать как сумму квадратов зарядов векторных калибровочных частиц, соответствующих внутренней симметрии. Исходя из простых свойств присоединенного представления группы $SU(n)$, которые обсуждались в разд. 4.1, и используя (4.21) и (4.136), получаем

$$t_2(V) = n \quad \text{для} \quad SU(n). \quad (10.39)$$

Из (10.34) и (10.35) немедленно следует широкоизвестный результат

$$\beta_g = -g \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \left[\frac{3}{2} \ln Z_A - \ln Z_g \right] = -\frac{g^3}{16\pi^2} \frac{11}{3} t_2(V) < 0, \quad (10.40)$$

который на однопетлевом уровне оказывается независимым от калибровочного параметра ξ . Если калибровочные поля взаимодействуют с фермионами и скалярными мезонами, взятыми в представлениях, в которых матрицы генераторов группы имеют соответственно вид $T^a(F)$ и $T^a(S)$, то можно непосредственно воспользоваться выражениями (10.24) и (10.25); в результате получим

$$\beta_g = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[-\frac{11}{3} t_2(V) + \frac{4}{3} t_2(F) + \frac{1}{3} t_2(S) \right], \quad (10.41)$$

где суммы квадратов зарядов, соответствующих внутренней симметрии, для фермионов и скаляров соответственно опреде-



Рис. 10.5. Диаграммы собственной энергии векторного поля (пунктирная линия соответствует духам Фаддеева — Попова).

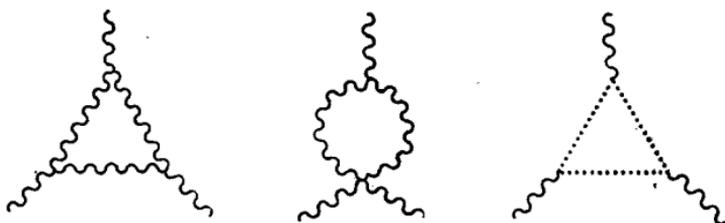


Рис. 10.6. Поправки к трилинейной вершине калибровочного бозона,

ляются выражениями

$$\begin{aligned} t_2(F) \delta^{ab} &= \text{tr} \{T^a(F) T^b(F)\}, \\ t_2(S) \delta^{ab} &= \text{tr} \{T^a(S) T^b(S)\}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Для фермионов и скаляров, взятых в фундаментальном представлении группы $SU(n)$, имеем $T^a(S) = T^a(F) = \lambda^a/2$, а

$$t_2(F) = t_2(S) = 1/2. \quad (10.43)$$

Если используются двухкомпонентные фермионные поля или вещественные скаляры, то коэффициенты при $t_2(F)$ и $t_2(S)$ в (10.41) приобретают дополнительные множители $1/2$.

Янг-миллсовский вакуум как парамагнитная среда

Одной из самых замечательных особенностей квантовой теории поля является то, что в четырехмерном пространстве-времени асимптотически свободны только теории Янга — Миллса. Оказывается, что это явление имеет простое физическое объяснение [223, 306]. Это объяснение в конечном итоге связано с тем, что неабелевы калибровочные поля обладают спином и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а также в отличие от абелевых фотонов сами обладают зарядом, соответствующим калибровочной симметрии.

Как уже отмечалось в начале этого раздела, свойство асимптотической свободы означает, что вакуум антиэкранирует заряды, т. е. действует как диэлектрическая среда с диэлектрической постоянной

$$\epsilon < 1. \quad (10.44)$$

Кроме того, вакуум квантовой теории поля отличается от обычной поляризуемой среды в одном очень важном пункте — он релятивистски инвариантен. Это означает, что (относительная) магнитная проницаемость μ связана с диэлектрической проницаемостью соотношением

$$\mu \epsilon = 1, \quad (10.45)$$

так что скорость света в вакууме равна 1. Это позволяет связать электрические свойства среды с ее магнитными свойствами, которые могут быть двух типов:

1. *Диамagnetизм Ландау* ($\mu < 1$). Заряженные частицы в среде в ответ на внешнее магнитное поле создают ток, который сам индуцирует магнитное поле, направленное противоположно этому внешнему полю.

2. *Парамагнетизм Паули* ($\mu > 1$). Если частицы обладают магнитными моментами, то они стремятся выстроиться вдоль внешнего поля.

Оказывается, проще представить себе магнитные свойства янг-миллсовского вакуума; антиэкранировка (10.44) означает, что

$$\mu > 1.$$

Янг-миллсовский вакуум ведет себя как парамагнитная среда. Заметим, что в случае обычной поляризуемой среды, которая может, например, одновременно обладать свойствами диэлектрической экранировки ($\epsilon > 1$) и парамагнетизма ($\mu > 1$), такого соответствия не существует.

Следует подчеркнуть, что электромагнитная терминология используется здесь только по аналогии с обычной калибровочной $U(1)$ -теорией. В действительности мы имеем в виду заряды, соответствующие калибровочной симметрии. Например, в калибровочной $SU(3)$ -теории КХД это цветовые заряды; под электрическими и магнитными свойствами мы подразумеваем цветовые электрические и магнитные свойства и т. д. Когда мы говорим, что поля Янга — Миллса в КХД (глюоны) обладают зарядом, магнитным моментом, электрическим квадрупольным моментом и т. д., мы имеем в виду, что они обладают цветовым зарядом, цветовым магнитным моментом и т. д. (На самом деле глюоны электрически нейтральны.) Что же является тогда зарядом, магнитным моментом и т. д. янг-миллсовской частицы? Рассмотрим простую $SU(2)$ -теорию. В ней имеется трилинейное взаимодействие калибровочных полей, соответствующее в правилах Фейнмана вершине (см. правило 3 в разд. 9.2):

$$i\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = ie^{abc} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu], \quad (10.46)$$

которую можно сопоставить взаимодействию заряженной частицы со спином 1 с фотоном. Чтобы такая интерпретация действительно была возможной, предположим, что для калибровочных $SU(2)$ -полей A_μ^a

A_μ^3 соответствует фотонному полю A_μ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \pm A_\mu^2) \text{ соответствуют заряженным полям } V_\mu^\pm \quad (10.47)$$

со спином 1 и массой M .

Множитель e^{abc} дает

$$\epsilon^{-+3} = \frac{1}{2}i(\epsilon^{123} - \epsilon^{213}) = i. \quad (10.48)$$

Мы подберем импульсы (напомним, что все 4-импульсы предполагаются входящими в вершину) следующим образом:

$$k_1^\mu \approx \left(M, -\frac{\mathbf{k}}{2}\right), \quad k_2^\mu \approx \left(-M, -\frac{\mathbf{k}}{2}\right), \quad k_3 \approx (0, \mathbf{k})$$

при $M \gg |\mathbf{k}|$; векторы поляризации заряженных частиц имеют вид

$$e_1^\mu = \left(-\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}}{2M}, \mathbf{e}\right), \quad e_2^\mu = \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'}{2M}, \mathbf{e}'\right),$$

так что $\epsilon_1 \cdot k_1 \approx \epsilon_2 \cdot k_2 \approx 0$. Свертывая векторы ϵ_1^μ , ϵ_2^μ и A^λ с вершиной (10.46), получаем

$$i\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{-+3} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu A^\lambda = 2M \left[g \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' A_0 + \frac{g}{M} (\mathbf{e} \times \mathbf{e}') \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}) \right] + O(k^2). \quad (10.49)$$

Таким образом, мы можем отождествить g с электрическим зарядом, а g/M с магнитным моментом, соответствующим гиромагнитному отношению

$$\gamma_V = 2. \quad (10.50)$$

Можно вычислить плотность энергии вакуума в присутствии внешнего магнитного поля

$$u_0 = \frac{1}{2\mu} B_{\text{внеш}}^2. \quad (10.51)$$

Отсюда можно определить магнитную проницаемость μ . Нильсен [306] и Хьюз [223] показали, что $\mu \equiv 1 + \chi$, где χ — магнитная восприимчивость:

$$\chi \sim (-1)^{2s} q^2 \sum_{s_3} \left(-\frac{1}{3} + \gamma^2 s_3^2 \right); \quad (10.52)$$

здесь q , γ и s_3 — заряд, гиромагнитное отношение и проекция спина на направление внешнего магнитного поля соответственно. Первое слагаемое в скобках в (10.52) соответствует диамагнитному вкладу, а второе — парамагнитному вкладу. Множитель $(-1)^{2s}$ означает, что для фермионной системы возникает дополнительный знак минус. При нормальном упорядочении операторов рождения и уничтожения в гамильтониане с целью выделить энергию вакуума антикоммутиационные соотношения для фермионных полей приводят к дополнительному знаку минус. (По этой же причине фермионные петли в диаграммах Фейнмана умножаются на минус единицу.) Легко проверить, что для фермионов ($\gamma_F = 2$)

$$\chi_F \sim -q_F^2 2 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{4}{3} q_F^2. \quad (10.53)$$

Отрицательность восприимчивости означает, что система является диамагнитной ($\mu_F < 1$) и, следовательно, обладает свойством диэлектрического экранирования $\epsilon_F > 1$, как в КЭД. Отметим также известное отношение один к трем, которое составляют парамагнитный и диамагнитный вклады. Учитывая, что безмассовые векторные калибровочные частицы имеют только два состояния спиральности $s_3 = \pm 1$, для векторных, фермионных и скалярных частиц получаем

$$\chi \sim \frac{22}{3} q_V^2 - \frac{4}{3} q_F^2 - \frac{1}{3} q_S^2. \quad (10.54)$$

Чтобы найти отсюда калибровочные заряды, следует отождествить квадраты зарядов со следами в (10.38) и (10.42):

$$q_V^2 \rightarrow \frac{1}{2} t_2(V), \quad q_F^2 \rightarrow t_2(F), \quad q_S^2 \rightarrow t_2(S). \quad (10.55)$$

Получается результат, идентичный (10.41). Множитель $1/2$ в (10.55) отражает тот факт, что в калибровочных теориях векторные частицы описываются эрмитовыми полями, а каждое комплексное заряженное поле в действительности имеет две вещественные компоненты (см., например, (10.47)).

Калибровочные теории и скалярные мезоны

Рассмотрим теперь возможность сделать с помощью механизма Хиггса все янг-милловские векторные бозоны массивными (как в разд. 8.3), не уничтожая свойство асимптотической

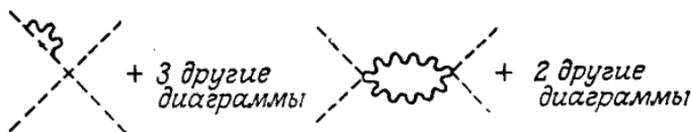


Рис. 10.7.

свободы [77, 204]. При этом возникают значительные трудности, связанные с четверным взаимодействием хиггсовских скаляров, которое оказывается ультрафиолетово-нестабильным. Выражение (10.10) модифицируется за счет дополнительного вклада

$$- \frac{1}{16\pi^2} [12s_2(S) g^2 \lambda_{ijkl} - 3A_{ijkl} g^4] \quad (10.56)$$

от диаграмм, показанных на рис. 10.7, где

$$s_2(S) \delta_{ij} \equiv (T^a(S) T^a(S))_{ij},$$

$$A_{ijkl} \equiv \{T^a(S), T^b(S)\}_{ij} \{T^a(S), T^b(S)\}_{kl} +$$

+ два других слагаемых, получаемых перестановкой индексов. (10.57)

Таким образом, в качестве основы мы имеем уравнения ренорм-группы вида

$$\begin{aligned} \frac{dg^2}{dt} &= -b_0 g^4, \quad b_0 > 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= A\lambda^2 + B'\lambda g^2 + Cg^4. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Вводя переменную $v = \lambda/g^2$, из уравнений (10.58) получаем

$$\frac{1}{g^2} \frac{dv}{dt} = Av^2 + Bv + C \equiv \beta_v, \quad (10.59)$$

где $B = B' - b_0$. Асимптотическая свобода требует, чтобы $g \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$, т. е. чтобы ν стремилось к фиксированной точке в ультрафиолетовом пределе. Так как правая часть (10.59) является полиномом второго порядка, условие того, что уравнение $\beta_\nu = 0$ имеет два вещественных решения, имеет простой вид:

$$\Delta = B^2 - 4AC \geq 0. \quad (10.60)$$

Обозначим эти корни через ν_1 и ν_2 , и пусть $\nu_2 > \nu_1$. Так как наклоны графика функции β_ν в этих точках определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\beta_\nu}{d\nu} \right|_{\nu_1} &= A(\nu_1 - \nu_2) < 0, \\ \left. \frac{d\beta_\nu}{d\nu} \right|_{\nu_2} &= A(\nu_2 - \nu_1) > 0, \end{aligned} \quad (10.61)$$

меньший корень ν_1 является стабильной фиксированной точкой. Но λ и ν_1 должны оставаться положительными (чтобы классический потенциал был ограничен снизу), поэтому должно выполняться условие

$$B < 0, \quad (10.62)$$

так как и A , и C положительны, а $\nu_1 = (-B - \sqrt{\Delta})/4A < -B/2A$. Во всех исследованных случаях эти асимптотические условия (10.60) и (10.62) всегда приводят к тому, что в теорию можно ввести лишь малое число скалярных мезонов. Это число оказывается слишком малым для того, чтобы полностью нарушить калибровочную симметрию и сделать все калибровочные бозоны массивными. Эта ситуация не меняется даже в присутствии юкавских взаимодействий: их вклад в уравнения (10.58), вообще говоря, мал. (Важным исключением является суперсимметричная теория.) Таким образом, в асимптотически свободных теориях спонтанное нарушение калибровочной симметрии отсутствует, и, следовательно, в такие теории вообще нельзя включать элементарные скалярные поля.

Группы, являющиеся произведениями простых групп

До сих пор мы ограничивались рассмотрением только простых групп Ли, т. е. теорий только с одной калибровочной константой взаимодействия. В более общем случае рассматриваются прямые произведения простых групп $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, каждой из которых приписывается своя константа взаимодействия g_i . В низшем порядке по g_i^3 β -функции не зависят друг от друга, поэтому результаты для теории, где калибровочная группа является произведением простых групп, непосредственно по-

лучаются из результатов, полученных для отдельных сомножителей. В частности, если один из сомножителей G_i является абелевой группой $U(1)$, то соответствующая калибровочная константа взаимодействия не стремится к нулю и теория не является асимптотически свободной.

10.2. ЛАГРАНЖИАНЫ КХД И СИММЕТРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Успех кварк-партоновой модели в описании бёркеновского скейлинга, наблюдаемого в глубоконеупругом лептон-адронном рассеянии, позволил предположить, что полевая теория сильных взаимодействий должна быть асимптотически свободной, чтобы кварки на малых расстояниях слабо взаимодействовали друг с другом. В предыдущем разделе мы показали, что только теория Янга — Миллса при больших евклидовых импульсах обладают асимптотически свободным поведением.

Какая симметрия кварковой модели должна быть калибровочной? В разд. 4.4 мы уже видели, что, постулируя наличие у кварков скрытого квантового числа, называемого цветом и принимающего три значения, можно преодолеть трудности, возникающие в простой кварковой модели. Эта идея о точной цветовой симметрии подкрепляется согласием экспериментальных измерений с вычислениями сечений процесса $p^0 \rightarrow 2\gamma$, учитывающими аномалии (разд. 6.2), и основанными на кварк-партоновой модели вычислениями сечения процесса $e^+e^- \rightarrow$ адроны (разд. 7.2). Кроме того, поскольку необходимо учитывать, что наблюдаемыми являются только цветовые синглеты, следует предположить, что силы, действующие между цветными кварками, зависят от цвета. Независимость сильного взаимодействия от цвета привела бы к феноменологически неприемлемому результату, когда допускалось бы существование вырожденных адронных состояний различных цветов. Все это приводит к идее о том, что цветовая симметрия в кварковой модели должна быть калибровочной. Таким образом, сильные взаимодействия должны описываться теорией Янга — Миллса с цветовой калибровочной группой $SU(3)$, причем каждый кварковый аромат преобразуется как триплет фундаментального представления. Это требование вместе с требованием перенормируемости теории сильных взаимодействий (почти) полностью фиксирует вид лагранжиана. Такая теория называется *квантовой хромодинамикой* ([145, 203, 405]); ее лагранжиан обычно записывается в виде

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} = -\frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \sum_k^{n_f} \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k, \quad (10.63)$$

где

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu q_k &= (\partial_\mu - igA_\mu)q_k, \\ A_\mu &= \sum_{a=1}^8 A_\mu^a \lambda^a / 2, \end{aligned} \quad (10.64)$$

а λ^a — матрицы Гелл-Манна, удовлетворяющие коммутационным соотношениям группы $SU(3)$:

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (10.65)$$

и условию нормировки:

$$\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}. \quad (10.66)$$

Калибровочные поля сильных взаимодействий A_μ^a называются *глюонами*, а поля q_k являются полями кварков, где k — индекс ароматов $k = 1, 2, \dots, n_f$ (n_f — число кварковых ароматов):

$$q_k : u, d, s, c, b, \dots \quad (10.67)$$

В выражение (10.63) мы не включили возможный $SU(3)$ -инвариантный и перенормируемый член размерности 4:

$$\text{tr} G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad \tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} G_{\lambda\rho}.$$

Такой член может быть записан как дивергенция тока $\text{tr} \tilde{G}G \sim \partial^\mu K_\mu$; следовательно, он дает вклад в действие только в виде поверхностного члена. Предполагая, как обычно, что на бесконечности поле обращается в нуль $A_\mu^a \rightarrow 0$, можно оправдать отбрасывание этого члена. Отметим, однако, что для калибровочных полей с нетривиальными топологическими свойствами так поступать нельзя. Из эксперимента мы знаем, что если в лагранжиане КХД присутствует член $\text{tr} \tilde{G}G$, то он должен умножаться на очень малый коэффициент. Пока мы будем считать, что этот член отсутствует, и учтем его в полной мере в гл. 16, где рассматриваются проблемы, связанные с инстантонами.

Лагранжиан КХД (10.63) несомненно обладает всеми хорошо известными симметриями сильных взаимодействий. Он сохраняет зарядовую и пространственную четности. Поскольку глюоны не зависят от аромата, лагранжиан КХД сохраняет странность и т. д. На самом деле он обладает всеми симметриями ароматов модели свободных кварков, в частности киральной симметрией $SU(3) \times SU(3)$, явно нарушенной массовыми членами, как это обсуждалось в гл. 5 (см. замечания в конце разд. 5.5). Если динамика КХД такова, что киральная симметрия реализуется

голдстоуновским способом, то становятся объяснимыми успехи теории частичного сохранения аксиально-векторного тока и алгебры токов.

Калибровочная инвариантность, перенормируемость и симметрии КХД

Очень важно понимать, что эти свойства симметрии не просто включены в лагранжиан (10.63), а являются следствиями калибровочной инвариантности и перенормируемости. В дальнейшем мы покажем, что лагранжиан (10.63) эквивалентен лагранжиану самой общей перенормируемой теории Янга — Миллса с группой $SU(3)$, описывающей кварки и глюоны:

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{q}(A + B\gamma_5) i\gamma^\mu D_\mu q + \bar{q}(C + iD\gamma_5) q - \frac{Z}{2} \text{tr} GG, \quad (10.68)$$

где A , B , C и D — эрмитовы матрицы в пространстве ароматов, а Z — константа. Мы можем записать лагранжиан (10.68) в терминах левых и правых кварковых полей

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q$$

в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3')} = & \bar{q}_L(A + B) i\gamma^\mu D_\mu q_L + \bar{q}_R(A - B) i\gamma^\mu D_\mu q_R + \\ & + \bar{q}_L(C + iD) q_R + \bar{q}_R(C - iD) q_L - \frac{Z}{2} \text{tr} GG. \end{aligned} \quad (10.69)$$

Последнее выражение можно преобразовать в (10.63), сделав два следующих шага.

1. Сначала изменим масштаб глюонного поля и константы калибровочного взаимодействия:

$$A_\mu^a \rightarrow Z^{1/2} A_\mu^a, \quad g \rightarrow Z^{-1/2} g,$$

так что коэффициент Z перед членом кинетической энергии глюонов превратится в единицу, а ковариантная производная кварковых полей не изменится. Затем введем новые кварковые поля q_L и q_R таким образом, чтобы независимые матрицы $A + B$ и $A - B$ стали единичными матрицами. После этого лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \bar{q}_L i\gamma^\mu D_\mu q_L + \bar{q}_R i\gamma^\mu D_\mu q_R + \bar{q}_L M q_R + \\ & + \bar{q}_R M^\dagger q_L - \frac{1}{2} \text{tr} GG, \end{aligned} \quad (10.70)$$

где

$$M = C + iD, \quad (10.71)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathcal{L}^{(1')} = \bar{q} i\gamma^\mu D_\mu q + \bar{q}(C + iD\gamma_5) q - \frac{1}{2} \text{tr} GG. \quad (10.72)$$

Мы не вводим здесь новых обозначений для новых полей и матриц.

2. Используем теперь важное утверждение, доказываемое в линейной алгебре. (Доказательство этой теоремы дано в разд. 11.3). Это утверждение гласит, что матрица общего вида, такая, как M в (10.71), не являющаяся ни диагональной, ни симметричной, всегда может быть диагонализирована двойным унитарным преобразованием таким образом, чтобы ее собственные значения были положительными. В результате получим

$$SMT^+ = M_d, \quad (10.73)$$

где S и T — унитарные матрицы, а M_d — диагональная матрица с положительными элементами:

$$\text{tr } M_d = \sum_k m_k. \quad (10.74)$$

Легко увидеть, что это позволяет преобразовать $\mathcal{L}^{(1)}$ (10.70) к каноническому виду (10.63). Теперь мы можем так переопределить кварковые поля

$$q_L \rightarrow Sq_L \text{ и } q_R \rightarrow Tq_R, \quad (10.75)$$

что массовый член в (10.72) диагонализуется, и в него не входят матрицы γ_5 ; при этом мы не вводим в члены $D_\mu q$ матрицы γ_5 . С физической точки зрения все это оказывается возможным благодаря тому, что сильные взаимодействия переносятся аромато-нейтральными векторными глюонами. Если бы цветовые глюонные поля зависели от ароматов, то матрицы A, B, C и D в (10.68) не коммутировали бы с генераторами калибровочной группы; если бы глюоны не были частицами со спином 1, то симметрии сильных взаимодействий определялись бы и другими членами, а не только матрицами кварковых масс. Это еще один аргумент против присутствия элементарных скалярных полей в теории сильных взаимодействий (наряду с обсуждавшимися в предыдущем разделе трудностями, связанными с механизмом Хиггса в асимптотически свободных теориях).

Сделаем еще два замечания общего характера относительно симметрии КХД.

А. Киральная симметрия КХД. Мы уже отмечали, что в пределе $m_u = m_d = m_s = 0$ лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{КХД}}$ так же, как и лагранжиан модели свободных кварков, инвариантен относительно киральных унитарных преобразований (5.39) и (5.47). Другими словами, в отсутствие матрицы масс кварков теория инвариантна относительно унитарных преобразований (10.75), и мы имеем $U(3)_L \times U(3)_R$ -симметрию. Диагональные подгруппы $SU(3)$ и $U(1)$ реализуются обычным образом, т. е. вакуум также инвариантен относительно $U(3)_{L+R}$ -преобразований. Адроны обра-

зуют вырожденные $SU(3)$ -мультиплеты, и барионное число сохраняется. Остальные симметрии — аксиальная $SU(3)$ и $U(1)$, соответствующие $U(3)_{L-R}$ -преобразованиям, — не отвечают явному вырождению частиц. Так как в теории не используются какие-либо элементарные скалярные поля, мы должны предположить, что эти аксиальные симметрии нарушаются вакуумом КХД. (Выяснение того, имеет ли это место в действительности, представляет собой трудную динамическую проблему, которая до сих пор полностью не решена, но все данные указывают на то, что наши предположения верны.) Тогда в соответствии с теоремой Голдстоуна в адронном спектре должны присутствовать почти безмассовые псевдоскалярные мезоны. Восемь из них сразу можно отождествить с тремя π -мезонами, четырьмя K -мезонами и одним η -мезоном. Но так как аксиальная $U(3)$ -симметрия тоже должна быть нарушена, не хватает еще одного псевдоскаляра. В этом состоит знаменитая аксиальная $U(1)$ -проблема. А именно, в безмассовом пределе КХД (по существу любая кварковая модель) инвариантна относительно фазовых преобразований

$$q_k \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta} q_k, \quad (10.76)$$

где θ принимает одно и то же значение для всех k , т. е. u_L, d_L, s_L умножаются на общий фазовый множитель $e^{-i\theta}$, а u_R, d_R, s_R — на $e^{i\theta}$. Эта приближенная симметрия не наблюдается в сильных взаимодействиях: она не реализуется ни в обычной, ни в голдстоуновской модах. Решение $U(1)$ -проблемы обсуждается в гл. 16 в связи с инстантонными решениями в КХД, о которых мы упомянули в начале этого раздела.

Б. Стабильность симметрии КХД относительно слабых радиационных поправок. Рассмотрим теперь кратко проблему нарушающих симметрию членов, которые возникают за счет слабых радиационных поправок [405]. Хотя мы еще не касались калибровочной теории электрослабых взаимодействий, тем не менее указанная проблема может быть рассмотрена, так как для этого нужно знать лишь некоторые общие свойства такой теории.

1. Генераторы электрослабой калибровочной группы коммутируют с генераторами калибровочной группы КХД, т. е. глюоны являются аромато-нейтральными, а промежуточные векторные бозоны слабых взаимодействий (W -бозоны) и токи являются цветовыми синглетами.

2. Характерный масштаб энергий слабых взаимодействий определяется массами W -бозонов $M_W = O(10^2 \text{ ГэВ})$.

3. Калибровочные константы слабых взаимодействий порядка e и связаны с хорошо знакомой константой Ферми слабых взаимодействий соотношением $G_F = O(\alpha/M_W^2)$, где $\alpha = e^2/4\pi$ — постоянная тонкой структуры.

Зная, что константы слабых взаимодействий порядка e , можно было ожидать, что слабые радиационные поправки приведут к неприемлемо большим, порядка α , нарушениям законов сохранения четности и странности. Из первого свойства следует, что все эти радиационные поправки сами инвариантны относительно группы $SU(3)_{\text{цвет}}$. В частности, добавки к лагранжиану порядка α должны быть операторами размерности 4. Поэтому (как было продемонстрировано выше) подходящим переопределением глюонного и кваркового полей лагранжиан может быть сведен к каноническому виду (10.63) со всеми его симметриями. Как показывает анализ размерностей, члены, содержащие операторы размерности $D > 4$, должны умножаться на коэффициенты вида $(M_W)^{-(D-4)}$. Например, член $\bar{q}\gamma_\mu(1-\gamma_5)q\bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma_5)q$ имеет размерность $D=6$, следовательно, он должен иметь коэффициент $O(\alpha/M_W^2)$ и в соответствии с третьим свойством должен быть порядка G_F .

Итак, КХД обладает тем преимуществом, что ее нулевой порядок автоматически обладает набором глобальных симметрий, которые превосходно согласуются с известными симметриями сильных взаимодействий и стабильны относительно слабых радиационных поправок.

10.3. РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ СКЕЙЛИНГА И НАРУШЕНИЕ СКЕЙЛИНГА

Для лагранжиана КХД (10.63) ренормгрупповая β -функция (10.41) при $t_2(V)=3$, $t_2(F)=1/2$ и $t_2(S)=0$ принимает вид

$$\beta_g = \frac{-1}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right) g^3 \equiv -bg^3, \quad (10.77)$$

где n_f — число кварковых ароматов. При изменении масштаба импульсов $p_i \rightarrow \lambda p_i$ эффективная константа связи $\bar{g}(g, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = -b\bar{g}^3, \quad (10.78)$$

где

$$t = \ln \lambda. \quad (10.79)$$

Уравнение (10.78) можно проинтегрировать и получить

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g^2}{1 + 2bg^2t}, \quad (10.80)$$

где $g = \bar{g}(g, 0)$. Таким образом, при $n_f < 17$, а значит, $b > 0$ знаменатель в (10.80) не может обратиться в нуль. При $\lambda \rightarrow \infty$, т. е. при больших импульсах λp_i , получаем $\bar{g}(t) \rightarrow 0$, и теория является асимптотически свободной. Однако следует отметить, что эффективная константа связи стремится к нулю логарифмически,

$\bar{g} \sim (2b \ln \lambda)^{-1}$, т. е. очень медленно. Для удобства мы можем выбрать в качестве масштабного параметра λ отношение рассматриваемого импульса Q к параметру вычитания μ , т. е. $\lambda^2 = Q^2/\mu^2$, или $t = 1/2 \ln Q^2/\mu^2$. Тогда выражение (10.80) можно переписать в виде

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + 4\pi b \alpha_s(\mu^2) \ln Q^2/\mu^2}, \quad (10.81)$$

где $\alpha_s(Q^2) = \bar{g}^2(t)/4\pi$, $\alpha_s(\mu^2) = g^2/4\pi$. Можно далее упростить это выражение, определяя параметр Λ из

$$\ln \Lambda^2 = \ln \mu^2 - \frac{1}{\alpha_s(\mu^2) 4\pi b},$$

что дает

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3} n_f\right) \ln Q^2/\Lambda^2}. \quad (10.82)$$

В этом виде константа калибровочного сильного взаимодействия $\alpha_s(Q^2)$ выражается через один параметр Λ . Мы видим, что при малых импульсах $\alpha_s(Q^2)$ возрастает и фактически расходится при $Q^2 = \Lambda^2$. Хотя соотношение (10.82) получено в рамках теории возмущений и не применимо при больших константах связи, тем не менее параметр Λ является полезной мерой масштаба энергий, при которых константа сильных взаимодействий становится большой. Следовательно, Λ является фундаментальным импульсным масштабом и называется *масштабным параметром КХД*.

Поскольку КХД асимптотически свободна, на первый взгляд может показаться, что, используя ренормгруппу и теорию возмущений, можно рассчитать большое число процессов, происходящих при высоких энергиях. На самом деле это не так: ренормгрупповой анализ является теорией масштабных преобразований и предполагает умножение всех компонент четыре-импульса на одно и то же число; ультрафиолетовый асимптотический предел — это переход в глубокоевклидову область, где все частицы находятся вдалеке от их массовых поверхностей. К счастью, существуют физические ситуации, когда некоторые из «внешних частиц» находятся бесконечно далеко от их массовых поверхностей. В низшем порядке по электрослабому взаимодействию полуплеptonные инклюзивные процессы можно факторизовать на известную лептонную часть и на адронную часть, соответствующую амплитуде рассеяния вперед фотона (или W -бозона) с переменной массой $-q^2$. В частности, сечение e^+e^- -аннигиляции и лептон-адронного рассеяния определяет абсорбтивную часть матричных элементов произведения электрослабых токов между некоторыми состояниями $|A\rangle$:

$$\langle A | T (J_\mu(x) J_\nu(0)) | A \rangle. \quad (10.83)$$

Предел высоких энергий и больших $(-q^2)$ соответствует глубоковеклидовой области. (Приложения теории с асимптотической свободой в общем виде описаны в работах [200, 324].)

$e^+ e^-$ -аннигиляция

Согласно (7.152), в случае e^+e^- -аннигиляции состояние $|A\rangle$ в (10.83) является вакуумным состоянием. Таким образом, фотонная масса q^2 является единственной масштабной величиной,



Рис. 10.8.

и можно непосредственно воспользоваться ренормгрупповым анализом. Рассмотрим обратный фотонный пропагатор в КЭД:

$$\Gamma^{\mu\nu}(q) = (-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / q^2) \Pi(q^2). \quad (10.84)$$

Поляризация вакуума $\Pi(q^2)$ имеет «наивную» размерность 2, так что соответствующее ренормгрупповое уравнение (3.58) принимает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_A - 2 \right] \Pi(q^2) = 0, \quad (10.85)$$

где γ_A — аномальная размерность фотонного поля:

$$\gamma_A = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} [\ln Z_3(e, g, \Lambda/\mu)], \quad (10.86)$$

Z_3 — обычная константа перенормировки фотонной волновой функции (поляризация вакуума; соответствующие одно- и двухпетлевые диаграммы приведены на рис. 10.8). Мы получаем

$$\gamma_A = C \left(3 \sum_k^{n_f} e_k^2 \right) \left[1 + \frac{3s_2(V)}{16\pi^2} g^2 + \dots \right]. \quad (10.87)$$

Для матриц $T^a(V)$ представления векторных калибровочных полей имеем

$$s_2(V) \delta_{ij} = (T^a(V) T^a(V))_{ij} = ((n^2 - 1)/2n) \delta_{ij} \text{ для группы } SU(n). \quad (10.88)$$

Для $SU(3)$ -глюонов $s_2(V) = 4/3$, e_k — электрический заряд кваркового аромата k . Мы не выписываем явно константу пропорциональности C , так как она не войдет в конечный результат. Решая уравнение (10.85) так же, как (3.68), для $Q^2 = -q^2$

имеем

$$\begin{aligned} \Pi(Q^2) &\approx Q^2 \exp \left[-2 \int_0^t \gamma_A(g(t')) dt' \right] \approx \\ &\approx Q^2 \left[1 - 2C \left(3 \sum e_k^2 \right) \left(t + \frac{3s_2(V)}{16\pi^2 b} \ln t + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.89)$$

Сечение рассеяния для процесса $e^+e^- \rightarrow$ адроны можно получить взятием абсорбтивной части:

$$R(Q^2) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \left(3 \sum_k e_k^2 \right) \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \dots \right]. \quad (10.90)$$

Таким образом, результат (7.104), основанный на простых соображениях о скейлинге в партонной модели, получен здесь снова вместе с поправочным членом КХД [19, 442], где $\alpha_s(Q^2)$ дается выражением (10.81). Мы видим, что отношение $R(Q^2)$ приближается к $R(Q^2 = \infty)$ сверху. Этот предасимптотический поправочный член, по крайней мере в области выше порога рождения очарованных частиц, вероятно, все еще меньше, чем экспериментальные ошибки, так что, хотя нахождение полного сечения e^+e^- -аннигиляции не является идеальным способом определения $\alpha_s(Q^2)$, суммарные экспериментальные данные согласуются с предсказанием КХД (10.90).

Неупругое IN -рассеяние

Согласно (7.10), в случае IN -рассеяния состояние $|A\rangle$ в (10.83) является состоянием нуклона. Следовательно, мы будем изучать физические величины с двумя масштабами масс: переменная фотонная масса $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$, а нуклон должен быть на массовой поверхности $p^2 = M^2$. Необходимо разработать методы, позволяющие факторизовать матрицу в произведение не зависящих от импульса величин (которые отождествляются со структурными функциями и функциями распределения партонов) и функций, зависящих от q^2 , которые обладают скейлинговым поведением в соответствии с ренормгруппой. (Более детальное обсуждение этой факторизации дано в разд. 10.4.)

А. Операторное разложение. Техниккой, осуществляющей такую факторизацию, является операторное разложение [427], в котором сингулярности произведения операторов выражаются в виде суммы несингулярных операторов с коэффициентами, являющимися сингулярными s -числовыми функциями. Физической основой такого разложения является то, что произведение локальных операторов на расстояниях, малых по сравнению с характерной длиной системы, должно выглядеть как локальный оператор.

A1. Разложение на малых расстояниях:

$$A(x)B(y) \underset{(x-y)_\mu \rightarrow 0}{\approx} \sum_i C_i(x-y) \mathcal{O}_i\left(\frac{1}{2}(x+y)\right), \quad (10.91)$$

где A , B и \mathcal{O}_i — локальные операторы. Операторы \mathcal{O}_i , появляющиеся в разложении, должны иметь квантовые числа, соответствующие квантовым числам произведения AB в левой части. Функции $C_i(x)$ являются сингулярными s -числовыми функциями и называются *вильсоновскими коэффициентами*. В перенормируемых теориях было доказано, что при $x \rightarrow y$ такие разложения справедливы в любом конечном порядке теории возмущений. Исходя из простого подсчета размерностей, можно получить поведение вильсоновских коэффициентов на малых расстояниях с точностью до логарифмических коэффициентов:

$$C_i(x) \underset{x \ll 1/m}{\longrightarrow} (x)^{d_i - d_A - d_B} (\ln xm)^p [1 + O(xm)], \quad (10.92)$$

где d_A , d_B и d_i — размерности (в единицах массы) операторов A , B и \mathcal{O}_i соответственно. Чем выше размерность операторов \mathcal{O}_i , тем менее сингулярными являются коэффициенты $C_i(x)$. Следовательно, на малых расстояниях доминирующими являются те операторы, которые имеют наименьшую размерность.

Полезность этого разложения связана с его универсальностью: вильсоновские коэффициенты не зависят от рассматриваемого процесса. Зависимость от конкретного процесса проявляется в матричных элементах локальных операторов \mathcal{O}_i , которые на малых расстояниях не сингулярны. Другим его достоинством является то, что в конкретной теории в разложении обычно участвует небольшое число операторов. Следовательно, основанные на разложении Вильсона вычисления относительно просты.

A2. Разложение на световом конусе. Такой тип разложения уже встречался в разд. 7.3. Соотношения (7.141) и (7.146) являются примерами общего разложения на световом конусе

$$A\left(\frac{x}{2}\right)B\left(-\frac{x}{2}\right) \approx \sum_i C_i(x) \mathcal{O}_i\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) \text{ при } x^2 \approx 0 \quad (10.93)$$

с сингулярными s -числовыми функциями и регулярными бислокальными операторами $\mathcal{O}_i(x, y)$. Бислокальные операторы можно разложить в ряд Тейлора (как в (7.157)) и получить

$$\mathcal{O}_i\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \sum_j x^{\mu_1} \dots x^{\mu_j} \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}(0), \quad (10.94)$$

так что на световом конусе произведение двух локальных операторов можно также представить в виде суммы локальных операторов:

$$A\left(\frac{x}{2}\right)B\left(-\frac{x}{2}\right) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\approx} \sum_{j, i} C_i^{(j)}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_j} \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}(0). \quad (10.95)$$

Если в качестве базисных операторов $O_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j)}$ взять бесследовые симметричные тензоры с j индексами, то они будут соответствовать спину j . Поведение вильсоновских коэффициентов на световом конусе $x^2 \rightarrow 0$ (как в 10.92)) можно получить простым подсчетом размерностей

$$O_i^{(j)}(x) \xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} (\sqrt{x^2})^{d_{j,i} - j - d_A - d_B} (\ln x^2 m^2)^p, \quad (10.96)$$

где $d_{j,i}$ — размерность оператора $O_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j,i)}(0)$. Следовательно, в отличие от случая (10.92) ведущий член соответствует наименьшему значению $(d_{j,i} - j)$, т. е. размерности оператора $O_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j,i)}$, из которой вычтен его спин. Такая комбинация называется *твистом* оператора:

$$\tau = d - j, \quad (10.97)$$

т. е. твист равен размерности минус спин. Операторы с низшими твистами доминируют в разложении на световом конусе.

Скалярное поле ϕ , фермионное поле ψ и калибровочное поле $F_{\mu\nu}$ все имеют твист, равный единице. Взятие производной от этих полей не может уменьшить их твистов и в лучшем случае оставляет их неизменными, так как взятие производной увеличивает размерность на единицу, изменяя при этом спин на 1 или не изменяя его. Таким образом, минимальный твист оператора, содержащего m полей, равен m . Наиболее важными операторами на световом конусе являются операторы с твистом 2, примеры которых приведены ниже:

скаляры

$$O_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j,s)} = \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_j} \phi, \quad (10.98a)$$

фермионы

$$O_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j,t)} = \bar{\psi} \gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_j} \psi + \text{перестановки}, \quad (10.98б)$$

векторные частицы

$$O_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j,g)} = F_{\mu_1 \alpha} \overleftrightarrow{D}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}_{\mu_{j-1}} F_{\mu_j}^\alpha + \text{перестановки}. \quad (10.98в)$$

В калибровочной теории производные в (10.98а, б) заменяются ковариантными производными $\overleftrightarrow{D}_\mu$. В разд. 7.3 мы видели, что доминирование канонических операторов с твистом 2 в теории свободного поля приводит к бьёркеновскому скейлингу.

Теперь можно приступить к рассмотрению того, как сечение глубоконеупругого IN -рассеяния факторизуется на два множителя, один из которых не зависит от импульса, а другой обладает скейлинговым поведением, определяемым ренормгруппой, причем сечение рассеяния связано с абсорбтивной частью амплитуды ток-нуклонного рассеяния вперед, которая затем

разлагается в ряд на световом конусе. Матричные элементы локальных операторов образуют не зависящую от импульса часть, а c -числовые вильсоновские коэффициенты удовлетворяют уравнению ренормгруппы. Мы покажем сначала, что эти вильсоновские коэффициенты связаны с моментами структурных N -функций.

Б. Моменты структурных функций и вильсоновские коэффициенты. Чтобы основные пункты выкладок не затемнялись сложными лоренцевыми структурами, проиллюстрируем сначала

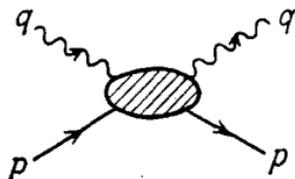


Рис. 10.9.

процедуру расчетов на примере скалярных токов $J(x)$. Рассмотрим амплитуду рассеяния вперед (рис. 10.9):

$$T(q^2, \nu) = \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle p | T \left(J \left(\frac{x}{2} \right) J \left(-\frac{x}{2} \right) \right) | p \rangle, \quad (10.99)$$

где $\nu = p \cdot q / M$. (Детали кинематики этого процесса см. в разд. 7.1.) Используя операторное разложение

$$T \left(J \left(\frac{x}{2} \right) J \left(-\frac{x}{2} \right) \right) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\approx} \sum_{ij} C_i^j(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_j} \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}(0) \quad (10.100)$$

(где значения индекса i соответствуют всевозможным операторам с твистом 2), перепишем амплитуду (10.99) в виде

$$\begin{aligned} T(q^2, \nu) &\approx \sum_{i,j} \int d^4x e^{-iq \cdot x} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_j} C_i^j(x^2) \langle p | \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}(0) | p \rangle = \\ &= \sum_{ij} (i)^j \frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}} \dots \frac{\partial}{\partial q_{\mu_j}} \left[\int d^4x e^{-iq \cdot x} C_i^j(x^2) \right] \times \\ &\quad \times \langle p | \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}(0) | p \rangle. \end{aligned} \quad (10.101)$$

Матричный элемент локального симметричного бесследового оператора $\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}$ может быть параметризован следующим образом:

$$\langle p | \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_j}^{(j, i)}(0) | p \rangle = O_i^{(j)} [p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots p_{\mu_j} - \text{свертки}], \quad (10.102)$$

где $O_i^{(j)}$ — константа, а свертка содержит по крайней мере один множитель $g_{\mu_m \mu_n}$. Используя равенство

$$\frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}} \dots \frac{\partial}{\partial q_{\mu_j}} = 2^j q^{\mu_1} q^{\mu_2} \dots q^{\mu_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^j + \text{свертки}, \quad (10.103)$$

при больших $(-q^2)$, когда $-q^2/2Mv$ фиксировано, получим

$$T(q^2, v) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\approx} \sum_{ij} (2i)^j (p \cdot q)^j \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^j \left[\int d^4 x e^{-iq \cdot x} C_i^j(x^2) \right] O_i^{(j)} = \\ = \sum_j \sum_i \left(\frac{2p \cdot q}{-q^2} \right)^j \tilde{C}_i^j(q^2) O_i^{(j)}, \quad (10.104)$$

где

$$\tilde{C}_i^j(q^2) = (-iq^2)^j \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^j \int d^4 x e^{-iq \cdot x} C_i^{(j)}(x^2) \quad (10.105)$$

является по существу фурье-образом произведения $x^{\mu_1} \dots x^{\mu_j} C_i^j(x^2)$. Заметим, что свертки, входящие в (10.102) и (10.103), содержат меньшие степени $(2p \cdot q)$, которыми в скейлинговом пределе можно пренебречь. Таким образом, для амплитуды $T(q^2, v)$, разложенной на члены с определенными проекциями спина,

$$T(q^2, v) = \sum_j T_j(q^2, v), \quad (10.106)$$

из (10.104) следует

$$T_j(q^2, v) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\approx} x^{-j} \sum_i \tilde{C}_i^{(j)} O_i^{(j)}, \quad (10.107)$$

где $x = -q^2/2Mv$. Отсюда видно, что для того, чтобы выделить оператор с данным спином j , необходимо разложить $T(q^2, v)$ в ряд по степеням x^{-1} при больших $-q^2$. В глубоководноупругом рассеянии на самом деле измеряется абсорбтивная часть амплитуды рассеяния вперед $T(q^2, v)$:

$$W(q^2, v) = \frac{1}{\pi} \text{Im} T(q^2, v), \quad (10.108)$$

а сама амплитуда может быть восстановлена по измеряемым величинам с помощью дисперсионного соотношения

$$T(q^2, v) = \int \frac{v^s dv'}{v'^s (v' - v)} W(q^2, v') + P_{s-1}(q^2, v), \quad (10.109)$$

где мы предположили, что число вычитаний равно s , а $P_{s-1}(q^2, v)$ — полином по v порядка $s-1$ при фиксированном значении q^2 . Если мы предположим далее, что при больших $(-q^2)$ полином $P_{s-1}(q^2, v)$ стремится к $P_{s-1}(x)$, т. е. к полиному по x^{-1} порядка $s-1$, то получим

$$T(q^2, v) = \int_{-1}^{+1} \frac{(x')^{s-1} W(q^2, x') dx'}{(x')^{s-1} (x' - x)} + P_{s-1}(x) \approx \\ \approx P_{s-1}(x) + \sum_{J=s}^{\infty} x^{-J} \int_{-1}^{+1} dx' (x')^{J-1} W(q^2, x'). \quad (10.110)$$

Первые s членов этого разложения не определены, поскольку не известны константы вычитания. Но при $J \geq s$, сравнивая

(10.110) с (10.106) и (10.107), имеем

$$\int_{-1}^{+1} dx x^{J-1} W(q^2, x) \underset{-q^2 \rightarrow \infty}{\approx} \sum_i \tilde{C}_i^{(J)}(q^2) O_i^{(J)} \quad \text{при } J \geq s. \quad (10.111)$$

Таким образом, моменты структурных функций определяют вильсоновские коэффициенты (точнее, их фурье-образы) $\tilde{C}_i^{(J)}(q^2)$.

В более реалистическом случае электромагнитного тока $J \rightarrow J_\mu^{\text{эм}}$ мы можем провести аналогичный анализ. Используя обычные предположения относительно высокоэнергетического поведения амплитуды комптоновского рассеяния вперед, мы снова получим соотношение (10.111) при всех $J \geq 2$, когда t -канал комптоновского рассеяния (т. е. канал ток \times ток) обладает квантовым числом вакуума, и при $J \geq 1$ для невакуумных каналов. Разлагая (10.111) по аналогии с (7.30) на две части, соответствующие инвариантным структурным функциям $F_{1,2}(x, Q^2)$ неупругого eN -рассеяния (мы изменили обозначения по сравнению с разд. 7.1: $G_i(x, q^2) \rightarrow F_i(x, Q^2)$), получим

$$\int_{-1}^1 dx x^{J-2} F_2(x, Q^2) \approx \frac{1}{4} \sum_i \tilde{C}_i^{(J)}(Q^2) O_i^{(J)}, \quad (10.112a)$$

$$\int_{-1}^1 dx x^{J-1} F_1(x, Q^2) \approx \frac{1}{2} \sum_i \tilde{C}_i^{(J)}(Q^2) O_i^{(J)}. \quad (10.112b)$$

Нам удалось выделить из сечения рассеяния, которое имеет два масштаба масс $p^2 = M^2$ и q^2 , множитель, зависящий только от q^2 , к которому можно применить масштабное преобразование $q_\mu \rightarrow \lambda q_\mu$ и ренормгрупповой анализ. Заметим, что точный бёркеновский скейлинг (7.32) $F_i(x, q^2) \rightarrow F_i(x)$ соответствует поведению свободного поля:

$$\tilde{C}_i^{(J)}(Q^2) \rightarrow \text{const} \quad \text{при } Q^2 \rightarrow \infty. \quad (10.113)$$

Мы предполагаем, что в общем случае такое поведение будет модифицироваться за счет взаимодействия. Простейшее возможное отклонение от этого скейлингового поведения может быть связано с тем, что степени $\ln(Q^2/m^2)$ в каждом порядке теории возмущений в результате суммирования дают некоторые степени величины Q^2 , что приводит к следующей зависимости:

$$\tilde{C}_i^{(J)}(Q^2) \sim \left(\frac{1}{Q^2}\right)^{\gamma_J/2}. \quad (10.114)$$

Здесь γ_J можно интерпретировать как аномальную размерность, приобретенную оператором $O_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_J}^{(J, i)}$ из-за наличия взаимодействия. Поскольку сохраняющиеся величины конечны, их

константы перенормировки не зависят от обрезания и аномальные размерности обращаются в нуль. Электромагнитные токи и тензор энергии-импульса являются такими величинами. Если бы они появлялись в правой части операторного разложения, то их вильсоновские коэффициенты (точнее, фурье-образы последних) обладали бы скейлинговым поведением свободной теории без аномальных размерностей. Но для моментов общего вида из уравнения (10.114) следует

$$\int_0^1 F_2(x, Q^2) x^{J-2} dx \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\approx} \left(\frac{1}{Q^2}\right)^{\gamma_J/2}. \quad (10.115)$$

Так как структурные функции F_i положительно определены, аномальные размерности γ_i должны монотонно возрастать с увеличением J , и так как тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ не появляется в вакуумном канале операторного разложения произведения токов, то $\gamma_2 = 0$, а

$$\gamma_J \geq 0 \quad \text{при} \quad J \geq 2. \quad (10.116)$$

Это означает, что в вакуумном канале моменты структурных функций должны уменьшаться с ростом Q^2 . Кроме того, из экспериментально наблюдаемого приближенного скейлинга следует, что аномальные размерности должны быть очень малы.

В. Ренормгрупповые уравнения для вильсоновских коэффициентов. В гл. 3 мы ввели ренормгрупповое уравнение для функции Грина общего вида. Аналогичные уравнения можно получить для вильсоновских коэффициентов, сравнивая ренормгрупповые уравнения для функций Грина, содержащих произведения операторов, и уравнения для функций Грина, содержащих локальные операторы, входящие в операторное разложение [86].

Операторное разложение схематически можно представить в виде

$$A(x) B(0) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \sum_i C_i(x, g, \mu) \mathcal{O}_i(0), \quad (10.117)$$

где g — константа связи, а μ — точка вычитания в процедуре перенормировок. Его же можно записать через n -точечные функции Грина, со вставками операторов AB и \mathcal{O}_i :

$$\Gamma_{AB}^{(n)} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \sum_i C_i(x, g, \mu) \Gamma_{\mathcal{O}_i}^{(n)}, \quad (10.118)$$

где

$$\Gamma_{AB}^{(n)} = \langle 0 | T \left(A(x) B(0) \prod_{k=1}^n \phi_k(y_k) \right) | 0 \rangle, \quad (10.118a)$$

$$\Gamma_{\mathcal{O}_i}^{(n)} = \langle 0 | T \left(\mathcal{O}_i(0) \prod_{k=1}^n \phi_k(y_k) \right) | 0 \rangle. \quad (10.118b)$$

Функции Грина по отдельности удовлетворяют ренормгрупповым уравнениям (см. (3.58))

$$\begin{aligned} [D + \sum_k \gamma_k(g) - \gamma_A(g) - \gamma_B(g)] \Gamma_{AB}^{(n)}(g, \mu) &= 0, \\ [D + \sum_k \gamma_k(g) - \gamma_i(g)] \Gamma_{\mathcal{O}_i}^{(n)}(g, \mu) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$D = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g}, \quad (10.119)$$

а γ_A , γ_B и γ_i — аномальные размерности операторов A , B и \mathcal{O}_i соответственно; мы предположили, что они не перемешиваются при перенормировке. Используя (10.118), получаем

$$[D + \gamma_A(g) + \gamma_B(g) - \gamma_i(g)] C_i(x, g, \mu) = 0. \quad (10.120)$$

Таким образом, вильсоновский коэффициент C_i ведет себя так, как если бы он являлся функцией Грина операторов A , B и \mathcal{O}_i . Решение, общий вид которого дан в (3.68), принимает вид

$$\begin{aligned} C_i(e^{-t} x_0, g, \mu) &= e^{t(d_A + d_B - d_i)} \exp \left\{ \int_0^t dt' [\gamma_A(\bar{g}(t')) + \gamma_B(\bar{g}(t')) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_i(\bar{g}(t'))] \right\} C_i(x_0, g(t), \mu), \end{aligned} \quad (10.121)$$

где d_A , d_B и d_i — «наивные» размерности операторов A , B и \mathcal{O}_i соответственно. Аналогичные уравнения и решения, конечно, имеют место для фурье-образов вильсоновских коэффициентов $\tilde{C}_i(q^2, g, \mu)$. В случае глубококонепругого рассеяния мы имеем разложение на световом конусе, которое может быть преобразовано в суммы бесконечных наборов локальных операторов с возрастающим спином n и с вильсоновскими коэффициентами $\tilde{C}_i^n(q^2, g, \mu)$, которые связаны с моментами структурных функций соотношениями (10.112):

$$\begin{aligned} M_n(Q^2) &= \int_0^1 dx x^{n-2} F_2(x, Q^2) \approx \frac{1}{8} \sum_i \tilde{C}_i^n(Q^2, g, \mu) \mathcal{O}_i^n = \\ &= \frac{1}{8} \sum_i \tilde{C}_i^n(Q_0^2, \bar{g}(t), \mu) \exp \left[- \int_0^t \gamma_i^n(\bar{g}(t')) dt' \right] \mathcal{O}_i^n, \end{aligned} \quad (10.122)$$

где γ_i^n — аномальная размерность оператора $\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n, i)}$.

Г. Глубококонепругое рассеяние в КХД. Применим теперь этот анализ глубококонепругого рассеяния в КХД [177, 205], где электромагнитный ток дается выражением

$$J_\mu(x) = \sum_{k=1}^{n_f} : \bar{q}_k(x) \gamma_\mu e_k q_k(x) : ; \quad (10.123)$$

здесь $q_k(x)$ — оператор поля кварка с индексом аромата k , e_k — его заряд и подразумевается суммирование по цвету. Рассмотрим амплитуду комптоновского рассеяния вперед (считаем, что произведено усреднение по спинам нуклонов):

$$T_{\mu\nu}^{(p, q)} = \frac{i}{2M} \int \frac{d^4y}{2\pi} e^{ipy} \langle p | T (J_\mu(y) J_\nu(0)) | p \rangle = \quad (10.124)$$

$$= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) T_1 + \frac{1}{M^2} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) T_2. \quad (10.125)$$

Абсорбтивные части инвариантных амплитуд T_i являются структурными функциями W_i , определяемыми в глубоконеупругом рассеянии:

$$W_{1,2}(\nu, q^2) = \frac{1}{\pi} \text{Im} T_{1,2}(\nu, q^2). \quad (10.126)$$

Г1. Операторное разложение и моменты структурных функций. Операторное разложение произведения электромагнитных токов на световом конусе имеет вид

$$iT (J_\mu(y) J_\nu(0)) = \sum_{n,i} \left\{ -g_{\mu\nu} y_{\mu_1} y_{\mu_2} \dots y_{\mu_n} i^n C_{1,i}^{(n)}(y^2, g, \mu) + \right. \\ \left. + g_{\mu\mu_1} g_{\nu\mu_2} y_{\mu_3} \dots y_{\mu_n} i^{n-2} C_{2,i}^{(n)}(y^2, g, \mu) \right\} \mathcal{O}_i^{(n) \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}(0). \quad (10.127)$$

В КХД имеются три набора калибровочно-инвариантных операторов твиста 2 (выражения (10.128а)–(10.128в)), доминирующих в окрестности светового конуса $y^2 \approx 0$:

$$\mathcal{O}_{NS}^{(n) \mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{1}{2} \frac{i^{n-1}}{n!} \left\{ \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q(x) + \right. \\ \left. + \text{перестановки векторных индексов} \right\}, \quad (10.128а)$$

где λ^a — стандартные $n_f \times n_f$ эрмитовы бесследовые матрицы группы ароматов $SU(n_f)$, т. е. в теории с тремя ароматами u , d и s это известные матрицы Гелл-Манна группы $SU(3)$. Этот набор операторов дает вклад в операторное разложение для несинглетных по аромату комбинаций структурных функций, таких, как $F_2^{ep} - F_2^{en}$ или F_3^{vA} , когда нейтрино рассеивается на изоскалярной мишени A . Здесь мы основную часть усилий затратим на изучение более сложного случая синглетных по аромату комбинаций. В них могут давать вклад два набора операторов:

$$\mathcal{O}_q^{(n) \mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{1}{2} \frac{i^{n-1}}{n!} \left\{ \bar{q}(x) \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q(x) + \right. \\ \left. + \text{перестановки} \right\}, \quad (10.128б)$$

$$\mathcal{O}_G^{(n) \mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{i^{n-2}}{n!} \text{tr} \left\{ G^{\mu_1 \nu} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_{n-1}} G_\nu^{\mu_n} + \right. \\ \left. + \text{перестановки} \right\}. \quad (10.128в)$$

Поскольку $\mathcal{O}_q^{(n)}$ и $\mathcal{O}_g^{(n)}$ имеют одни и те же квантовые числа, при перенормировке они могут перемешиваться (см. разд. 2.4).

Подставляя (10.127) в (10.124), получаем

$$T_{\mu\nu}(p, q) = \frac{i}{2M} \int \frac{d^4 y}{2\pi} e^{iq \cdot y} \sum_{n, i} \left\{ -g_{\mu\nu} y_{\mu_1} y_{\mu_2} \cdots y_{\mu_n} i^{(n)} C_{1, i}^{(n)}(y^2, g, \mu) + \right. \\ \left. + g_{\mu\mu_1} g_{\nu\mu_2} i^{n-2} (y_{\mu_3} \cdots y_{\mu_n}) C_{2, i}^{(n)}(y^2, g, \mu) \right\} \times \\ \times \langle p | \mathcal{O}_i^{(n) \mu_1 \cdots \mu_n}(0) | p \rangle + \dots \quad (10.129)$$

Записывая усредненный по спину матричный элемент в виде

$$\langle p | \mathcal{O}_i^{(n) \mu_1 \cdots \mu_n}(0) | p \rangle = A_i^{(n)} (p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n} + \text{свертки}), \quad (10.130)$$

где $A_i^{(n)}$ — константа, можно представить (10.129) в виде

$$T_{\mu\nu}(p, q) \sim \frac{1}{2M} \sum_{n, i} \left\{ -g_{\mu\nu} (2p \cdot q)^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{1, i}^{(n)}(y^2, g, \mu) + \right. \\ \left. + p_\mu p_\nu (2p \cdot q)^{n-2} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{2, i}^{(n)}(y^2, g, \mu) \right\} A_i^{(n)} + \dots = \\ = \frac{1}{2M} \sum_{n, i} \left\{ -g_{\mu\nu} \left(\frac{2p \cdot q}{-q^2} \right)^n \tilde{C}_{1, i}^{(n)}(q^2, g, \mu) + \right. \\ \left. + p_\mu p_\nu \left(\frac{2p \cdot q}{-q^2} \right)^{n-1} \frac{1}{2p \cdot q} \tilde{C}_{2, i}^{(n)}(q^2, g, \mu) \right\} A_i^{(n)} + \dots, \quad (10.131)$$

где

$$\tilde{C}_{1, i}^{(n)}(Q^2, g, \mu) = (Q^2)^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{1, i}^{(n)}(y^2, g, \mu),$$

$$\tilde{C}_{2, i}^{(n)}(Q^2, g, \mu) = (Q^2)^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^{n-2} \int d^4 y e^{iq \cdot y} C_{2, i}^{(n)}(y^2, g, \mu). \quad (10.132)$$

Из (10.131) мы сразу получаем выражения для инвариантных амплитуд:

$$T_1(x, Q^2) = \frac{1}{2M} \sum_{n, i} x^{-n} \tilde{C}_{1, i}^{(n)}(Q^2, g, \mu) A_i^{(n)}, \quad (10.133a)$$

$$T_2(x, Q^2) = \frac{1}{2M} \sum_{n, i} x^{-n+1} \tilde{C}_{2, i}^{(n)}(Q^2, g, \mu) A_i^{(n)}. \quad (10.133b)$$

Точно так же, как был осуществлен переход от (10.106) к (10.112), можно получить связь между моментами структурных функций и вильсоновскими коэффициентами (их фурье-образами):

$$\int_0^1 dx x^{n-2} F_2(x, Q^2) \approx \frac{1}{8} \sum_i \tilde{C}_{1, i}^{(n)}(Q^2, g, \mu) A_i^{(n)}, \quad (10.134a)$$

$$\int_0^1 dx x^{n-1} F_1(x, Q^2) \approx \frac{1}{4} \sum_i \tilde{C}_{2, i}^{(n)}(Q^2, g, \mu) A_i^{(n)}. \quad (10.134b)$$

Г2. Ренормгрупповой анализ и матрица аномальных размерностей в синглетном случае. Сосредоточим наше внимание на синглетном по аромату случае. Так как между операторами,

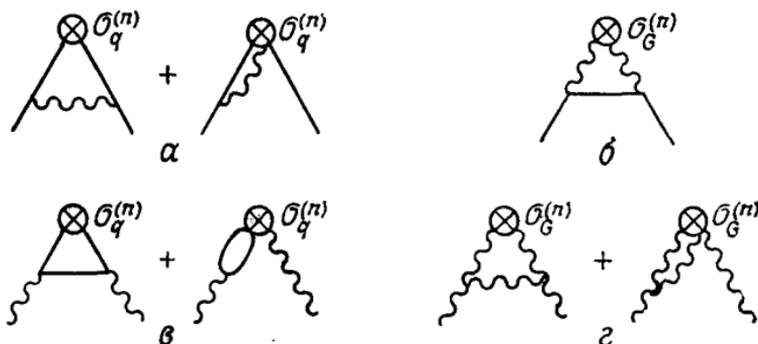


Рис. 10.10. Диаграммы, дающие вклады: α — в $\gamma_{qq}^{(n)}$, β — в $\gamma_{Gq}^{(n)}$, γ — в $\gamma_{qG}^{(n)}$ и ζ — в $\gamma_{GG}^{(n)}$.

отвечающими твисту 2, возможны смешивания, ренормгрупповое уравнение для вильсоновских коэффициентов принимает матричный вид:

$$(D\delta_{jk} - \gamma_{kj}^{(n)}) \tilde{C}_{\alpha, i}^{(n)}(q^2, g, \mu) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (10.135)$$

где $\gamma^{(n)}$ — матрица 2×2 аномальных размерностей для синглетных по аромату операторов $\mathcal{O}_q^{(n)}$ и $\mathcal{O}_G^{(n)}$. Решение уравнения (10.135) имеет вид

$$\tilde{C}_{\alpha, i}^{(n)}(Q^2/\mu^2, g) \sim \sum_i \tilde{C}_{\alpha, i}^{(n)}(1, \bar{g}(t)) \exp \left\{ - \int_0^t dt' \gamma_{ij}^{(n)}(\bar{g}(t')) \right\}, \quad (10.136)$$

где

$$t = \frac{1}{2} \ln(Q^2/\mu^2). \quad (10.137)$$

В асимптотически свободной КХД величины $\gamma^{(n)}$ вычисляются по теории возмущений в соответствии с однопетлевыми диаграммами, приведенными на рис. 10.10:

$$\gamma_{ij}^{(n)} = d_{ij}^{(n)} g^2 + O(g^3), \quad (10.138)$$

где

$$d_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} d_{qq}^{(n)} & d_{qG}^{(n)} \\ d_{qG}^{(n)} & d_{GG}^{(n)} \end{pmatrix},$$

а

$$d_{qq}^{(n)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{8}{3} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right) \right],$$

$$d_{qG}^{(n)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{16}{3} \frac{n^2 + n + 2}{n(n^2 - 1)} \right],$$

$$d_{Gq}^{(n)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[-4n_f \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)} \right],$$

$$d_{GG}^{(n)} = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 6 \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{n(n-1)} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] + \frac{4}{3} n_f \right\} \quad (10.139)$$

(n_f — число кварковых ароматов). Эта матрица может быть диагонализирована подходящим выбором линейных комбинаций $\mathcal{O}_q^{(n)}$ и $\mathcal{O}_G^{(n)}$, а ее собственные значения соответствуют аномальным размерностям линейных комбинаций, перенормируемых мультипликативным образом. Используя в (10.138) выражение (10.80) для эффективной константы связи, полученное в низшем порядке теории возмущений, получим

$$-\int_0^t dt' \gamma_{ii}^{(n)}(\bar{g}(t')) = -\int_0^t \frac{g^2 d_{ii}^{(n)} dt'}{1 + 2bg^2 t'} =$$

$$= \frac{-d_{ii}^{(n)}}{2b} \ln(1 + 2bg^2 t) \rightarrow \frac{-d_{ii}^{(n)}}{2b} \ln t. \quad (10.140)$$

Вильсоновские коэффициенты при больших q^2 имеют следующее поведение:

$$\tilde{C}_{\alpha, i}^{(n)}(Q^2/\mu^2, g) \sim \sum_j \tilde{C}_{\alpha, j}^{(n)}(1, 0) \left[\ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right]^{-d_{ji}^{(n)}/2b}, \quad (10.141)$$

где $\tilde{C}_{\alpha, j}^{(n)}(-1, 0)$ — вильсоновские коэффициенты в теории свободного поля. Теперь для больших Q^2 соотношения (10.134) принимают вид

$$M_2^{(n)}(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} F_2(x, Q^2/\mu^2) \approx$$

$$\approx \frac{1}{8} \sum_i \tilde{C}_{2, j}^{(n)}(1, 0) A_i^{(n)} \left[\ln(Q^2/\mu^2) \right]^{-d_{ji}^{(n)}/2b}, \quad (10.142a)$$

$$M_1^{(n)}(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} F_1(x, Q^2/\mu^2) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4} \sum_i \tilde{C}_{1, j}^{(n)}(1, 0) A_i^{(n)} \left[\ln(Q^2/\mu^2) \right]^{-d_{ji}^{(n)}/2b}. \quad (10.142b)$$

Таковы основные результаты КХД для глубоконеупругого рассеяния. Они были получены путем факторизации инклюзивного сечения на часть, не зависящую от импульсов (локальный оператор), и часть, обладающую скейлинговым поведением в соответствии с ренормгруппой (вильсоновские коэффициенты).

В асимптотически свободной КХД лидирующая сингулярность (при $Q^2 \rightarrow \infty$) вильсоновских коэффициентов может быть найдена с помощью ренормгрупповой β -функции и аномальных размерностей $\gamma_{ij}^{(n)}$, тогда как матричные элементы $A_i^{(n)}$ локальных операторов не могут быть получены до тех пор, пока не решена проблема связанных состояний (на больших расстояниях) в КХД. Хотя мы не можем вычислить сами скейлинговые функции, но мы обладаем достаточной информацией относительно самого скейлинга и его нарушения. КХД предсказывает очень слабую зависимость моментов структурных функций от q^2 , как это видно из (10.142). Таким образом, имеет место приближенный бёркеновский скейлинг с логарифмическими нарушениями.

Г3. *Снова об импульсном правиле сумм.* В качестве иллюстрации мы вычислим выражение для синглетного по аромату второго момента ($n=2$) структурной функции, скажем $F_2(x, Q^2)$. В этом случае одним из операторов со спином 2 и твистом 2 будет тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$. Его сохранение приводит к тому, что он не перенормируется: $Z_\theta = 1$; следовательно, соответствующая аномальная размерность должна обращаться в нуль, $\gamma_\theta = 0$ (см. разд. 6.1, где обсуждаются подобные вопросы, связанные с перенормировкой оператора сохраняющегося векторного тока $Z_j = 1$). При $n=2$ из уравнения (10.128) следует, что имеются два оператора твиста 2:

$$[\mathcal{O}_q^{(2)}]_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \sum_{k=1}^{n_f} \bar{q}_k (\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu) q_k, \quad (10.143a)$$

$$[\mathcal{O}_G^{(2)}]^{\mu\nu} = \text{tr} (G^{\mu\lambda} G_\lambda^\nu). \quad (10.143b)$$

Мы рассматриваем только члены низшего порядка, поэтому $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Матрица (10.139) принимает вид

$$d_{ij}^{(2)} = \frac{1}{36\pi^2} \begin{pmatrix} 16 & -3n_f \\ -16 & 3n_f \end{pmatrix}. \quad (10.144)$$

Она, очевидно, имеет нулевое собственное значение $\tilde{d}_\theta = 0$, соответствующее левому собственному вектору $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$, т. е. комбинации

$$\theta_{\mu\nu} = [\mathcal{O}_q^{(2)} + \mathcal{O}_G^{(2)}]_{\mu\nu}, \quad (10.145)$$

являющейся тензором энергии-импульса. Другое собственное значение равно $\tilde{d}_{\theta'} = (16 + 3n_f)/36\pi^2$. В общем случае мы можем выразить матрицу $d_{ij}^{(n)}$ через ее собственные значения \tilde{d}_i и проекционные операторы P_i на соответствующие собственные векторы:

$$d_{ij}^{(n)} = \sum_k \tilde{d}_k (P_k)_{ij}, \quad P_k P_l = \delta_{kl} P_k, \quad \sum_k P_k = 1. \quad (10.146)$$

Легко видеть, что в нашем случае $n = 2$ проекционные операторы (для левых векторов) имеют вид

$$P_\theta = \frac{1}{16 + 3n_f} \begin{pmatrix} 3n_f & 3n_f \\ 16 & 16 \end{pmatrix}, \quad P_{\theta'} = \frac{1}{16 + 3n_f} \begin{pmatrix} 16 & -3n_f \\ -16 & 3n_f \end{pmatrix}. \quad (10.147)$$

Второй момент для синглетной по аромату структурной функции может быть записан в виде

$$\int_0^1 dx F_2(x, Q^2) = \frac{1}{8} \sum_{i,j} \{ \tilde{C}_{2,i}^{(2)}(1, 0) (P_\theta)_{ij} A_j^{(2)} + \tilde{C}_{2,i}^{(2)}(1, 0) (P_{\theta'})_{ij} A_j^{(2)} [\ln(Q^2/\mu^2)]^{-\tilde{d}_{\theta}/2b} \}. \quad (10.148)$$

Так как $\tilde{d}_{\theta'} > 0$, то при $Q^2 \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_0^1 dx F_2(x, Q^2) = \frac{1}{8} \sum_{i,j} \{ \tilde{C}_{2,i}^{(2)}(1, 0) (P_\theta)_{ij} A_j^{(2)} \}. \quad (10.149)$$

Чтобы вычислить правую часть, заметим, что в низшем порядке по $\bar{g}(t)$ в операторное разложение (произведения токов) дают вклад только кварки; следовательно, значения вильсоновских коэффициентов, соответствующих свободной теории, равны

$$\tilde{C}_{2,q}^{(2)}(1, 0) = 0, \quad \tilde{C}_{2,q}^{(2)}(1, 0) = \langle e_q^2 \rangle, \quad (10.150)$$

где

$$\langle e_q^2 \rangle = \frac{1}{n_f} \sum_k e_k^2 \quad (10.151)$$

есть среднее от квадрата заряда кварка. Таким образом, в правую часть входит только член $\sum_j (P_\theta)_{qj} A_j^{(2)}$. Чтобы его вычислить, заметим сначала, что

$$\begin{aligned} (1, 0) \frac{1}{16 + 3n_f} \begin{pmatrix} 3n_f & 3n_f \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_q^{(2)} \\ \mathcal{O}_G^{(2)} \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{3n_f}{16 + 3n_f} (\mathcal{O}_q^{(2)} + \mathcal{O}_G^{(2)}) \equiv r\theta, \end{aligned} \quad (10.152)$$

где θ — оператор тензора энергии-импульса (10.145), а величину

$$r = \frac{3n_f}{16 + 3n_f} \quad (10.153)$$

можно интерпретировать как часть импульса, переносимую кварками. В случае трех кварковых ароматов $r = 9/25$, что согласуется с экспериментальными результатами, если их интерпретировать в рамках кварк-партонной модели (импульсное

правило сумм) разд. 7.2. В отличие от общего случая матричный элемент оператора $\theta_{\mu\nu}$ известен:

$$\langle p | \theta_{\mu\nu} | p \rangle = p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2. \quad (10.154)$$

Сравнивая (10.154) с (10.128) и (10.130), имеем $(P_\theta)_{qj} A_j^{(2)} = 8r$, а (10.149) принимает вид

$$\left[\int_0^1 dx F_2(x, q^2) \right]_{\text{синглет}} = r \langle e_q^2 \rangle. \quad (10.155)$$

Это означает, что область под кривой структурной функции имеет строго скейлинговое поведение.

Г4. *Пример нарушения скейлинга.* Для произвольного n диагонализированные величины $d_i^{(n)}$ обладают свойством медленно

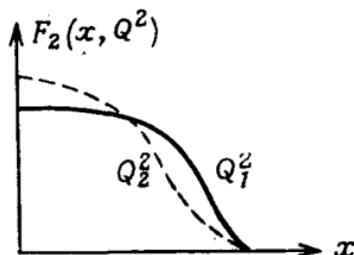


Рис. 10.11. Характер нарушения скейлинга функции $F_2(x, Q^2)$ при $Q_2^2 > Q_1^2$.

увеличиваться с ростом n . При $n > 2$, когда важна область больших x (~ 1), момент $M^{(n)}(Q^2)$ уменьшается как $[\ln(Q^2)]^{-|d^{(n)}|/2b}$; при $n < 2$, когда важна область малых x (~ 0), момент $M_2^{(n)}(Q^2)$ растет как $[\ln(Q^2)]^{+|d^{(n)}|/2b}$. Это приводит к следующему характеру нарушения скейлинга: при $Q^2 \rightarrow \infty$ часть $F_2(x, Q^2)$, отвечающая большим x , убывает, а часть, отвечающая малым x , возрастает; при этом площадь области под кривой остается неизменной (рис. 10.11). В пределе бесконечного Q^2 структурная функция приближается к острому пику в точке $x = 0$.

В заключение этого раздела обсудим кратко вопрос, связанный с одной уже выполненной экспериментальной проверкой предсказаний КХД. С этой целью рассмотрим более простой случай *несинглетной* комбинации структурных функций, когда нет усложнений, связанных с перемешиванием операторов. Тогда результат, соответствующий (10.142), имеет вид

$$[M_2^{(n)}(Q^2)]_{\text{не синглет}} = B^{(n)} [\ln(Q^2/\mu^2)]^{-d^{(n)}/2b}, \quad (10.156)$$

где $B^{(n)}$ — константа, значение которой непредсказуемо, а $d^{(n)}$ — коэффициент при g^2 в выражении для аномальной размерности

оператора (10.128):

$$d^{(n)} = \frac{1}{6\pi^2} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right], \quad (10.157)$$

который, как и следовало ожидать, имеет тот же вид, что и $d_{qq}^{(n)}$. Приведем выражения для логарифмов моментов

$$\begin{aligned} \ln M^{(n)}(Q^2) &= \frac{-d^{(n)}}{2b} \ln \ln(Q^2/\mu^2) + \dots, \\ \ln M^{(n')} (Q^2) &= \frac{-d^{(n')}}{2b} \ln \ln(Q^2/\mu^2) + \dots. \end{aligned} \quad (10.158)$$

Многоточия в правых частях выражений (10.158) обозначают нелидирующие члены (которые могут быть существенными при современных энергиях).

Если мы изобразим зависимость одного из этих логарифмов от другого, то получим прямую линию с наклоном $d^{(n)}/d^{(n')}$. Было обнаружено, что такие экспериментальные зависимости согласуются с предсказаниями КХД в пределах ошибок измерений (см., например, [58, 107]).

10.4 ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ И ПЕРТУРБАТИВНАЯ КХД

В этом разделе мы даем краткое введение в пертурбативную КХД. Мы снова сосредоточим наше внимание на прототипных процессах глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния. Сначала приведем вероятностную интерпретацию результата, полученного в предыдущем разделе в рамках КХД, с точки зрения партонной модели. Затем покажем, как тот же результат может быть получен суммированием лидирующих логарифмов в теории возмущений.

Прежде всего еще раз сформулируем результат, касающийся глубоконеупругого IN -рассеяния, полученный в КХД с помощью операторного разложения и уравнения ренормгруппы. Для n -го момента несинглетных по аромату комбинаций структурных функций $F_2(x, Q^2)$ формулу (10.156) можно записать в виде

$$M^{(n)}(t) = M^{(n)}(0) \left[\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(0)} \right]^{d^{(n)}/2b}, \quad (10.159)$$

где $t = 1/2 \ln Q^2/Q_0^2$, $\alpha_s(t)$ — квадрат эффективной калибровочной константы сильного взаимодействия (10.82), а b и $d^{(n)}$ — лидирующий коэффициент ренормгрупповой β -функции (10.77) и аномальная размерность (10.157) соответственно. Таким образом, КХД предсказывает «почти скейлинговое поведение» с логарифмическим нарушением. Эта ситуация изображена на рис. 10.11.

Партонная модель и нарушения скейлинга

Как следует понимать в рамках партонной модели различные виды нарушения скейлинга, в частности указанное выше нарушение скейлинга в КХД? В гл. 7 уже отмечалось, что точный бьёркеновский скейлинг получается, если можно пользоваться импульсным приближением и рассматривать взаимодействие как некогерентную сумму рассеяний на (свободных) составляющих мишени. Такая картина имеет место в случае любой слабосвязанной системы, и рассеяние представляет собой как бы прощупывание структуры мишени виртуальными фотонами. Из принципа неопределенности следует, что виртуальный фотон с массой $(Q^2)^{1/2}$ позволяет определить структуру в масштабе длин $(Q^2)^{-1/2}$. С увеличением массы виртуального фотона структура выясняется на все более малых расстояниях. Обычно такое представление материи в виде «структуры в структуре» (т. е. в виде дискретных уровней) позволяет объяснить нарушение скейлинга при значениях Q^2 из некоторых конкретных интервалов (т. е. при достижении следующих уровней). Таким образом, в общем случае мы наблюдали бы чередование скейлингового поведения и его нарушения по мере перехода от одного уровня в структуре материи к другому. На границах, разделяющих эти уровни, где происходит нарушение скейлинга, структурная функция будет изменяться с изменением Q^2 и перераспределяться в сторону области, соответствующей меньшим значениям масштабной переменной x , так как каждая составляющая будет нести все меньшую долю импульса мишени.

В соответствии с такими партонными представлениями следствия КХД можно интерпретировать в терминах адронов, имеющих непрерывный набор составляющих слоев. При определенных значениях Q^2 можно считать, что форма структурной функции нуклона имеет вид, схематически изображенный на рис. 7.4—7.6. По мере увеличения Q^2 и все более глубокого проникновения в одетый кварк мы будем обнаруживать все большее число виртуальных кварков и глюонов, и валентные кварки будут все большую часть первоначального импульса нуклона отдавать глюонам и морским кваркам. В конце концов структурная функция приближается к дельта-функции, сосредоточенной в точке $x = 0$:

$$F_2(x, Q^2) \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\approx} \delta(x). \quad (10.160)$$

Уравнение Альтарелли — Паризи

Таким образом, в соответствии с описанной картиной нарушение скейлинга в КХД происходит из-за того, что эффективная константа сильного взаимодействия $\alpha_s(t)$ недостаточно быстро уменьшается при $Q^2 \rightarrow \infty$. Хотя теория является асимптотически

свободной, на малых расстояниях все еще имеются некоторые остаточные взаимодействия. Все это можно установить, используя хорошо определенные количественные соотношения, впервые предложенные Альтарелли и Паризи [15]. Простое изложение этих вопросов дано в книге [89].

Пусть при $t = 1/2 \ln Q^2/Q_0^2$ вероятность обнаружить кварк, несущий долю x импульса нуклона, равна $q(x)$. При увеличении массы t виртуального фотона до $t + \delta t$ вероятность $q(x)$

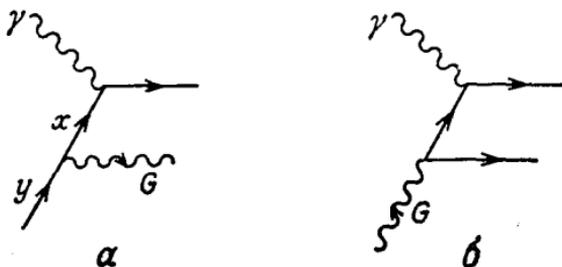


Рис. 10.12.

может увеличиться на $\delta q(x)$ вследствие того, что другой кварк с долей импульса $y > x$ может испустить глюон и уменьшить тем самым свой импульс от значения y до значения x (рис. 10.12, а). Таким образом, можно считать, что этот кварк содержался в том, который первоначально наблюдался при меньшем значении t . Это означает, что распределение кварков фактически зависит от t , и можно определить величину $P_{qq}(z)$, соответствующую изменению (на единицу t) распределения вероятности того, что в некотором кварке содержится другой кварк с долей $z = x/y$ импульса первоначального кварка, равного y . Такое изменение, очевидно, является эффектом порядка g^2 ; следовательно, уравнение эволюции имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dq(x, t)}{dt} &= \bar{g}^2(t) \int_x^1 dy \int_0^1 dz \delta(x - yz) P_{qq}(z) q(y, t) = \\ &= \bar{g}^2(t) \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}(x/y) q(y, t). \end{aligned} \quad (10.161)$$

Этот интеграл имеет вид свертки, и его можно проанализировать с помощью преобразования Меллина, так как при таком преобразовании момент произведения является произведением моментов.

Определим моменты функции распределения (т. е. структурной функции)

$$M^{(n)}(t) = \int_0^1 dx x^n q(x, t). \quad (10.162)$$

Тогда уравнение (10.161) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dM^{(n)}(t)}{dt} &= \bar{g}^2(t) \int_0^1 dx x^n \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}(x/y) q(y, t) = \\ &= \bar{g}^2(t) \int_0^1 dy y^n q(y, t) \int_0^1 dz z^n P_{qq}(z) = \bar{g}^2(t) M^{(n)}(t) D^{(n)}, \end{aligned} \quad (10.163)$$

где

$$D^{(n)} = \int_0^1 dz z^n P_{qq}(z). \quad (10.164)$$

Таким образом, партонная картина нарушения скейлинга приводит к дифференциальному уравнению для моментов структурной функции. Ее эволюция определяется зависящей от t константой связи кварков с глюонами $\alpha_s(t)$. Решение уравнения (10.163) можно получить интегрированием

$$\frac{dM^{(n)}(t)}{M^{(n)}(t)} = \frac{D^{(n)}}{2b} \frac{dt}{t},$$

или

$$\frac{M^{(n)}(t)}{M^{(n)}(t_0)} = \left[\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(t_0)} \right]^{-D^{(n)}/2b}. \quad (10.165)$$

Это в точности совпадает с результатом КХД для несинглетных моментов (10.159), если мы отождествим

$$D^{(n)} = -d^{(n)}. \quad (10.166)$$

Итак, моменты функции Альтарелли — Паризи P_{qq} являются просто коэффициентами $d_{qq}^{(n)}$ несинглетных аномальных размерностей.

Если приведенный выше анализ распространить на синглетную по аромату комбинацию структурных функций, то необходимо дополнительно рассмотреть вклад от (синглетной) глюонной функции распределения $G(x, t)$ (рис. 10.12, б). В соответствии с (10.161) теперь имеем

$$\frac{dq(x, t)}{dt} = \bar{g}^2(t) \int_x^1 \frac{dy}{y} [P_{qq}(x/y) q(y, t) + P_{qG}(x/y) G(y, t)], \quad (10.167)$$

$$\frac{dG(x, t)}{dt} = \bar{g}^2(t) \int_x^1 \frac{dy}{y} [P_{qG}(x/y) q(y, t) + P_{GG}(x/y) G(y, t)]. \quad (10.168)$$

(Предполагается, что проведено суммирование по индексам кварковых ароматов, чтобы получить синглетную комбинацию.) Уравнение (10.167) означает, что синглетная функция распре-

деления кварков изменяется в зависимости от t не только за счет тормозного излучения глюонов, но и из-за того, что глюоны могут превращаться в кварк-антикварковые пары способом, не зависящим от ароматов. При этом связанные уравнения эволюции соответствуют смешиванию операторов в более формальном подходе, в котором используются операторное разложение и уравнение ренормгруппы. Моменты P_{qq} , P_{qg} , P_{gq} и P_{gg} можно отождествить с (взятыми со знаком минус) коэффициентами аномальной размерности $d_{qq}^{(n)}$, $d_{qg}^{(n)}$, $d_{gq}^{(n)}$ и $d_{gg}^{(n)}$.

Теория возмущений и партонная модель

Итак, мы установили, что результаты КХД, такие, как формула (10.159), имеют простую интерпретацию в рамках партонной модели кварков и глюонов. Это свидетельствует о том, что данные результаты можно получить непосредственно по теории возмущений, не обращаясь к формальному аппарату операторного разложения и уравнения ренормгруппы. Прежде чем начать вычисления по теории возмущений, рассмотрим общую постановку вопроса о том, как получить результаты кварк-партонной модели в рамках этой теории.

Как отмечалось в предыдущем разделе, хотя КХД асимптотически свободна и эффективная константа связи $\bar{g}^2(q^2) \sim (\ln q^2)^{-1}$ убывает, тем не менее непосредственное применение теории возмущений к многим процессам, происходящим при высоких энергиях, наталкивается на трудности. Для этого имеются по крайней мере две причины.

1. Теория возмущений имеет дело с полями кварков и глюонов, которые не являются физическими асимптотическими состояниями. Таким образом, непосредственное использование свойств асимптотической свободы позволяет вычислить только общие характеристики системы, которые не зависят от конкретных свойств конечных состояний. Такие величины, как полные адронные сечения e^+e^- -рассеяния при высоких энергиях и глубоконеупругие инклюзивные сечения lN -рассеяния, преимущественно определяются реакцией системы на малых пространственно-временных промежутках и не чувствительны к сложному непертурбативному процессу превращения кварков и глюонов в адроны с единичной вероятностью.

2. Обычно физические величины зависят кроме эффективной константы связи $g(q^2)$ еще от некоторого параметра размерности массы m . Поэтому если пытаться разложить физические величины в ряды по степеням $g(q^2)$ в пределе больших q^2 , то в общем случае встретятся члены вида $[g^2(q^2) \ln q^2/m^2]^n$, которые портят это разложение. Физически зависимость от m является проявлением свойств теории на больших расстояниях. Таким образом, для использования теории возмущений в КХД тре-

буется выполнение хотя бы одного из следующих двух условий.

А. Члены $\ln q^2/m^2$ не появляются. Так происходит в случае сечений $\sigma_{\text{полн}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ и $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{струи})$, когда группы частиц суммируются внутри узких конусов (см. разд. 7.2). Эти сечения конечны в пределе $m \rightarrow 0$ и поэтому не зависят от множителей $\ln q^2/m^2$.

Б. Члены $\ln q^2/m^2$ можно просуммировать, и зависимость от m может быть как-то факторизована. Эта «факторизация массовых сингулярностей» уже отмечалась в предыдущем разделе; она имеет место в случае глубококонепругого лептонного рассеяния. Чтобы в более явной форме увидеть полезность свойства факторизации, рассмотрим безразмерную наблюдаемую $\Psi(g(\mu^2), Q^2/\mu^2, m^2/\mu^2)$. Так как значение Ψ не может зависеть от масштаба μ , выбранного для определения константы взаимодействия, мы имеем

$$\mu \frac{d\Psi}{d\mu} = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} \right) \Psi = 0. \quad (10.169)$$

Это уравнение является уравнением ренормгруппы для рассматриваемой наблюдаемой. Если удастся установить факторизуемость Ψ при $Q^2 \rightarrow \infty$:

$$\Psi \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} C(g(\mu^2), Q^2/\mu^2) D(g(\mu^2), m^2/\mu^2) + O(m^2/Q^2), \quad (10.170)$$

то уравнение (10.169) можно использовать для определения зависимости от Q^2 :

$$\mu \frac{d\Psi}{d\mu} = \left(\mu \frac{dC}{d\mu} \right) D + \left(\mu \frac{dD}{d\mu} \right) C = 0, \quad (10.171)$$

или

$$\frac{\mu}{C} \frac{dC}{d\mu} = - \frac{\mu}{D} \frac{dD}{d\mu} \equiv \gamma(g), \quad (10.172)$$

где константа разделения γ может зависеть только от g , а C удовлетворяет стандартному уравнению ренормгруппы

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma(g) \right] C(g(\mu^2), Q^2/\mu^2) = 0. \quad (10.173)$$

Из этого уравнения и из соотношения $\gamma(g) = g^2 d$ получаем уже знакомое нам решение (см., например, (10.159)):

$$\begin{aligned} C(g(\mu^2), Q^2/\mu^2) &= C(0, 1) \left[\frac{g^2(Q^2)}{g^2(\mu^2)} \right]^{d/2b} = \\ &= C(0, 1) [1 + b g^2(\mu^2) \ln(Q^2/\mu^2)]^{-d/2b}, \end{aligned} \quad (10.174)$$

где использован явный вид функции $g^2(Q^2)$, приведенный в (10.80). Заметим, что функция $C(g(\mu^2), Q^2/\mu^2)$ зависит от $g(\mu)$ и Q^2/μ^2 только через комбинацию $g^2(\mu^2) \ln(Q^2/\mu^2)$. Тот факт, что каждый множитель $g^2(\mu^2)$ сопровождается $\ln(Q^2/\mu^2)$, очевидно,

соответствует суммированию лидирующих логарифмических членов вида $g^{2n}(\mu^2) (\ln(Q^2/\mu^2))^n$ в теории возмущений.

В предыдущем разделе мы видели, что факторизация массовых сингулярностей является результатом использования операторного разложения; следовательно, s -числовые сингулярные функции удовлетворяют ренормгрупповым уравнениям. Поэтому в результате проведенного обсуждения мы приходим к следующему соответствию между формальным теоретико-полевым аппаратом и более простыми методами расчета в теории возмущений:

<i>Формальный аппарат</i>	<i>Теория возмущений</i>
операторное разложение	↔ факторизация диаграмм с массовыми сингулярностями
уравнение ренормгруппы	↔ суммирование лидирующих логарифмов

Следует отметить, что, хотя эта таблица может оказаться полезной при выяснении смысла используемых вычислений, в большинстве случаев такое простое выделение отдельных этапов невозможно. На самом деле факторизацию обычно удается осуществить только после того, как просуммированы все логарифмы.

Прежде чем продолжить обсуждение результатов, полученных по теории возмущений и в рамках партонной модели, мы проведем сначала явное вычисление, иллюстрирующее сделанные выше замечания.

Вычисление амплитуды глубоконеупругого рассеяния по теории возмущений

Нас интересует амплитуда комптоновского рассеяния вперед виртуального фотона (с импульсом q_μ) на кварке (с импульсом p_μ). В соответствии с операторным разложением необходимо идентифицировать и факторизовать диаграммы, содержащие степени $\ln p^2$. Таким образом, мы ищем диаграммы, которые расходятся при $p^2 = m^2 \rightarrow 0$. Существуют расходимости двух типов, которые часто называют *инфракрасными расходимостями* и *массовыми сингулярностями*.

Расходимости первого типа возникают в той области фазового пространства, где импульс (реальной или виртуальной) безмассовой частицы обращается в нуль. Из теоремы Блоха — Нордсика [54] следует, что в инклюзивных сечениях такие инфракрасные расходимости уничтожаются. Но все сечения фактически являются инклюзивными в силу конечности разрешения по энергии во всех экспериментах. Такая ситуация имеет место и в глубоконеупругом рассеянии.

Мы сконцентрируем наше внимание на расходящихся, возникающих из-за массовых сингулярностей. Такие сингулярности появляются в теориях, где взаимодействуют безмассовые частицы; они обусловлены тем кинематическим фактом, что две безмассовые частицы (скажем, с импульсами p и p'), которые движутся параллельно друг другу, обладают общей инвариантной массой, равной нулю:

$$k^2 = (p + p')^2 = 2EE'(1 - \cos \theta) \rightarrow 0 \text{ при } \theta \rightarrow 0, \quad (10.175)$$

хотя ни p_μ , ни p'_μ не являются мягкими. Иногда эту расходящуюся называют *коллинеарной расходящейся*. Имеется также

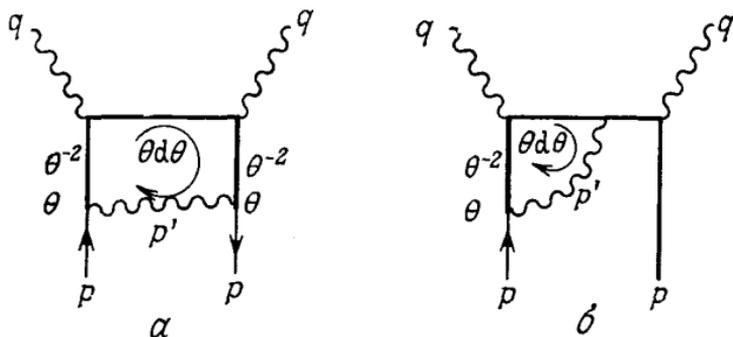


Рис. 10.13. Массовые сингулярности присутствуют в случае диаграммы *а* и отсутствуют в случае диаграммы *б*; θ — угол между векторами p и p' . Пропагатор, которому соответствует жирная линия, расходится, как θ^{-2} в пределе $\theta \rightarrow 0$.

теорема, доказанная Киношитой [236], а также Ли и Науенбергом [262], которую в упрощенном виде можно сформулировать следующим образом: для достаточно инклюзивных сечений массовые сингулярности уничтожаются. Физическое обоснование этой теоремы во многом аналогично физическому обоснованию теоремы Блоха — Нордсика: в физических измерениях разрешение по углам недостаточно совершенно, и необходимо суммировать по всем состояниям в пределах некоторого конечного углового разрешения. Таким образом, в наших вычислениях мы не будем касаться массовых сингулярностей, возникающих из-за недетектируемых конечных частиц, движущихся параллельно друг другу, так как все эти сингулярности взаимно уничтожаются. Но в глубоконеупругом рассеянии массовые сингулярности все еще остаются. Они возникают из тех областей фазового пространства, где импульс внутренней безмассовой частицы параллелен импульсу внешней безмассовой частицы, с которой первая взаимодействует. Рассмотрим однопетлевые диаграммы, приведенные на рис. 10.13. Пусть $k = p + p'$ — импульс вдоль петли. Следовательно, мы имеем множитель θ^{-2} от каждого из $1/k^2$ пропагаторов и $\theta d\theta$ от множителя $d \cos \theta$ в d^4k ;

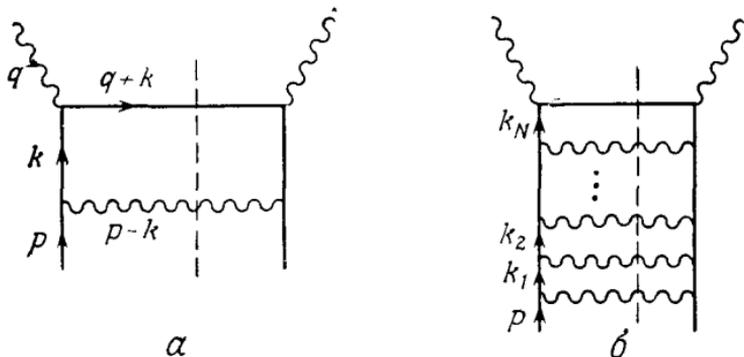


Рис. 10.14. Абсорбтивная часть амплитуды комptonовского рассеяния вперед.

наконец, каждая вершина, в которой взаимодействуют безмассовые частицы, дает вклад, пропорциональный θ . Таким образом, диаграмма на рис. 10.13, *a* имеет массовую сингулярность $d\theta/\theta \sim \ln p^2$, а диаграмма на рис. 10.13, *б* конечна. Поэтому мы остановимся на исследовании диаграммы, приведенной на рис. 10.13, *a*, и ее обобщений на более высокие порядки.

Однопетлевые диаграммы. Удобно использовать аксиальную калибровку (соотношения (9.41) и (9.108))

$$\eta_\mu A^\mu = 0, \quad (10.176)$$

где η_μ — некоторый 4-вектор. Глюонный пропагатор в этой калибровке имеет вид

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{d_{\mu\nu}(k)}{k^2 + i\varepsilon},$$

где

$$d_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - (k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu) (k \cdot \eta)^{-1} + \eta^2 k_\mu k_\nu (k \cdot \eta)^{-2}. \quad (10.177)$$

В аксиальной калибровке духи Фаддеева — Попова отсутствуют и вычисления значительно упрощаются. Чтобы получить абсорбтивную часть амплитуды, заменим пропагатор $(k^2 + i\varepsilon)^{-1}$ на $\pi\delta(k^2)$. Таким образом, диаграмма, показанная на рис. 10.14, *a*, дает вклад в адронный тензор сечения неупругого лептонного рассеяния (уравнение (7.10)):

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{g^2 s_2(V)}{2M} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \frac{\delta((p-k)^2) \delta((q+k)^2)}{(k^2)^2} d^{\rho\sigma} (p-k) T_{\rho\mu\nu\sigma},$$

где

$$T_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \text{tr} [\hat{p} \gamma_\rho \hat{k} \gamma_\mu (\hat{k} + \hat{q}) \gamma_\nu \hat{k} \gamma_\sigma], \quad (10.178)$$

а $s_2(V)$ — обычный цветовой множитель (10.88), равный 4/3 для группы $SU(3)_{\text{цвет}}$. Удобно использовать переменные Судакова [370]:

$$k_\mu = \xi p_\mu + \beta q'_\mu + k_{\perp\mu}, \quad (10.179)$$

где

$$q' = q + xp, \quad k_{\perp} \cdot p = k_{\perp} \cdot q' = 0. \quad (10.180)$$

Предположим, что $q'^2 \approx p^2 \approx 0$, а $p \cdot q' \approx p \cdot q$, причем $(-q^2)$ велико; тогда

$$d^4k = 2\pi (p \cdot q) d\beta d\xi dk_{\perp}^2. \quad (10.181)$$

Как мы увидим, происхождение логарифмического члена $\ln(-q^2/p^2)$ связано с областями фазового пространства, соответствующими $\beta \approx 0$ и $\xi \approx x$. Таким образом, переменная x , введенная в (10.180), в соответствии с обычной интерпретацией партонной модели является частью продольного импульса мишени. (Это также оправдывает предположение, что $q'^2 \approx 0$.) В этих переменных имеем

$$\int d^4k \delta((p-k)^2) \delta((q+k)^2) = 2\pi p \cdot q \int d\beta d\xi dk_{\perp}^2 \times \\ \times \frac{1}{2p \cdot q (1-\xi)} \delta\left(\beta - \frac{k_{\perp}^2}{2p \cdot q (1-\xi)}\right) \frac{1}{2p \cdot q} \delta\left(\xi - x + \frac{1-x}{1-\xi} \frac{k_{\perp}^2}{2p \cdot q}\right). \quad (10.182)$$

Возводя (10.179) в квадрат, получаем

$$k^2 = k_{\perp}^2 + 2\beta\xi(p \cdot q) = k_{\perp}^2 + \frac{\xi}{1-\xi} k_{\perp}^2 = k_{\perp}^2/(1-\xi). \quad (10.183)$$

Следовательно, (10.182) можно переписать в виде

$$\int d^4k \delta((p-k)^2) \delta((q+k)^2) = \frac{\pi}{2p \cdot q} \int d\beta d\xi dk^2 \times \\ \times \delta\left(\beta - \frac{k^2}{2p \cdot q}\right) \delta\left(\xi - x + (1-x) \frac{k^2}{2p \cdot q}\right). \quad (10.184)$$

Сворачивая глюонный тензор поляризации $d^{\rho\sigma}(p-k)$ с величиной $T_{\rho\mu\nu\sigma}$ (положив $\eta = q'$) и воспользовавшись алгеброй γ -матриц, получаем основной член, пропорциональный выражению, соответствующему древесной диаграмме (выражение (7.53)):

$$d^{\rho\sigma}(p-k) T_{\rho\mu\nu\sigma} = (4k^2) \frac{1+\xi^2}{1-\xi} \frac{1}{2} \text{tr} [x \hat{p} \gamma_{\mu} (\hat{q} + x \hat{p}) \gamma_{\nu}]. \quad (10.185)$$

При выводе выражения (10.185) мы учли относительные вклады первого и второго слагаемых в (10.177) (равные $(1-\xi)k^2$ и $2\xi k^2/(1-\xi)$ соответственно) и отбросили вклад третьего слагаемого, имеющий порядок $(k^2)^2$ и поэтому не дающий вклада в величину $\ln(Q^2/p^2)$, получаемую в результате. Объединяя выражения (10.184) и (10.185), получаем

$$W_{\mu\nu}(p, q) = \frac{g^2}{6\pi^2} \int \frac{dk^2}{k^2} \left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \left[\frac{x}{v} \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2} + \dots\right]. \quad (10.186)$$

Сравнивая выражение (10.186) с результатом простой партон-ной модели (7.54), мы видим, что однопетлевая диаграмма вносит в функцию распределения партонов $f(x)$ (которая первоначально была равна единице) следующий вклад:

$$df(x) = \frac{1}{2} g^2 P(x) \frac{dk^2}{k^2}, \quad (10.187)$$

где

$$P(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right) \frac{1}{3\pi^2}. \quad (10.188)$$

Мы запишем это в виде, который более удобен для интерпретации и для вычислений вкладов более высокого порядка:

$$df = \left[\frac{1}{2} g^2 \frac{dk^2}{k^2} \right] \left\{ \int \frac{d\xi}{\xi} \delta \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) P(x) \right\}. \quad (10.189)$$

Таким образом, диаграмма на рис. 10.14, *a*, учитывающая глюонное тормозное излучение, приводит к зависимости от импульсов в функции распределения кварков, содержащей функцию Альта-релли — Паризи $P(x)$. Если внимательно проследить за членами p^2 , то можно найти пределы интегрирования в интеграле по dk^2 , и он будет равен

$$\int_{p^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} = \ln(Q^2/m^2) \quad \text{при} \quad p^2 \approx m^2. \quad (10.190)$$

Таким образом, однопетлевой диаграмме (рис. 10.14, *a*) соответствует выражение с массовой сингулярностью:

$$f(x, Q^2) \sim [g^2 \ln(Q^2/m^2)] \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right). \quad (10.191)$$

Диаграммы более высокого порядка. Диаграммы более высокого порядка обладают свойствами, во многом похожими на свойства однопетлевых диаграмм. Общим для них является то, что в аксиальной калибровке основной вклад дают лестничные диаграммы [198] (см. рис. 10.14, *b*) в той области фазового пространства, где

$$p^2 \ll k_1^2 \ll k_2^2 \dots \ll k_N^2 \ll Q^2. \quad (10.192)$$

Предполагается, что диаграммы на рис. 10.14, *b* содержат всевозможные вершинные и собственно-энергетические вставки. Эффективно такие вставки сводятся к тому, что в каждой вершине мы должны брать константу связи $g(k_i^2)$, зависящую от импульса.

Каждая ступенька лестницы представляет собой ящичную диаграмму, подобную той, вклад от которой мы только что вычислили в виде (10.189). Для всех интегралов по поперечным импульсам dk_i^2 , соответствующим квадратным скобкам в

(10.189), имеем

$$I_T^{(N)}(Q^2/m^2) = \int_{m^2}^{Q^2} \frac{dk_1^2}{2k_1^2} g^2(k_1^2) \int_{m^2}^{k_1^2} \frac{dk_2^2}{2k_2^2} g^2(k_2^2) \dots \int_{m^2}^{k_{N-1}^2} \frac{dk_N^2}{2k_N^2} g^2(k_N^2) \approx \\ \approx \frac{1}{N!} \left[\int_{m^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{2k^2} g^2(k^2) \right]^N \equiv \frac{1}{N!} \rho^N. \quad (10.193)$$

Используя асимптотический вид $g^2(k^2)$, получаем

$$\rho = \int_{m^2}^{Q^2} \frac{d \ln(k^2)}{2b \ln(k^2/\mu^2)} = \frac{1}{2b} [\ln \ln(Q^2/\mu^2) - \ln \ln(m^2/\mu^2)]. \quad (10.194)$$

Интеграл по продольным компонентам импульса, соответствующий интегралу в фигурных скобках в выражении (10.189), имеет вид

$$I_L^{(N)} = \int_{\xi_2}^1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_{\xi_3}^1 \frac{d\xi_2}{\xi_2} \dots \int_0^1 \frac{d\xi_N}{\xi_N} \delta\left(1 - \frac{x}{\xi_N}\right) \times \\ \times P(\xi_1) P(\xi_2/\xi_1) \dots P(\xi_N/\xi_{N-1}). \quad (10.195)$$

Доля импульса p , переносимая кварками i и $i+1$, равна ξ_i и ξ_{i+1} соответственно. Аргументом функции Альтарелли — Паризи является отношение ξ_{i+1}/ξ_i этих двух величин. Выражение (10.195) имеет вид многократной свертки, и для упрощения результата можно перейти к моментам:

$$\int_0^1 dx x^{n-1} I_L^{(N)}(x) = \left[\int_0^1 dz z^n P(z) \right]^N \equiv [d^{(n)}]^N. \quad (10.196)$$

Тогда момент структурной функции, соответствующей N -ступенчатой лестничной диаграмме, равен

$$M_N^{(n)}(Q^2) = \frac{1}{N!} [\rho d^{(n)}]^N. \quad (10.197)$$

Суммируя по N , получаем

$$M^{(n)}(Q^2) = \sum_N M_N^{(n)}(Q^2) = \exp[\rho d^{(n)}] = \\ = \exp\left\{\frac{d^{(n)}}{2b} [\ln \ln(Q^2/\mu^2) - \ln \ln(m^2/\mu^2)]\right\} = \\ = [\ln(Q^2/\mu^2)]^{d^{(n)}/2b} [\ln(m^2/\mu^2)]^{-d^{(n)}/2b}. \quad (10.198)$$

Найденный результат указывает на свойство факторизуемости, которое означает, что $M^{(n)}(Q^2)$ разлагается на произведение функции от Q^2/μ^2 и функции от m^2/μ^2 . Заметим, что эта фак-

торизуемость имеет место только после суммирования всех лестничных диаграмм; отдельные слагаемые не факторизуются.

Наконец, проверим, согласуется ли данное здесь определение $d^{(n)}$ с полученным выше результатом. Из равенств (10.196) и (10.188) получаем выражение

$$d^{(n)} = \int_0^1 dz z^n P(z) = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^1 dz \frac{z^n (1+z^2)}{1-z}, \quad (10.199)$$

которое в действительности расходится при $z \rightarrow 1$. Более тщательный анализ показывает, что при вычислении выражения,



Рис. 10.15.

соответствующего диаграмме на рис. 10.15, а, необходимо учитывать диаграмму с вершинной поправкой, приведенную на рис. 10.15, б, чтобы имела место теорема Блоха — Нордсика о взаимном уничтожении инфракрасных расходимостей. Это соответствует замене

$$\int_0^1 \frac{f(z)}{1-z} dz \rightarrow \int_0^1 \frac{f(z) - f(1)}{1-z} dz. \quad (10.200)$$

Таким образом, $d^{(n)}$ может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} d^{(n)} &= \frac{1}{3\pi^2} \int_0^1 dz \frac{z^n (1+z^2) - 2}{1-z} = \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} [(1-x)^n (2-2x+x^2) - 2] = \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right]. \end{aligned} \quad (10.201)$$

Таким образом, суммируя лидирующие логарифмы, мы получаем в точности тот же результат, что и найденный с помощью более формальной процедуры, основанной на уравнениях ренормгруппы.

После того как мы поняли основные идеи и провели вычисления, касающиеся хорошо известного случая глубоко неупругого рассеяния, можно перейти к другим жестким процессам рас-

сеяния, на которые описанная выше схема довольно просто обобщается. При этом реальное преимущество заключается в том, что в большинстве таких жестких процессов непосредственное применение операторного разложения невозможно. Таким образом, пертурбативную КХД можно использовать для вычисления процесса Дрелла — Яна инклюзивного рождения лептонных пар в адронных столкновениях (см. разд. 7.3). В этом случае факторизация оказывается возможной, а партонные функции распределения обладают той же зависимостью от импульсов, как и в случае глубоконеупругого рассеяния. Другим важным примером использования пертурбативной КХД для вычисления физических величин, которые не являются «инфракрасно чувствительными», может служить предсказание углового распределения конечных состояний (струй) [368] и энергетических потоков для e^+e^- -аннигиляции в адроны при высоких энергиях [61].

10.5. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ НА РЕШЕТКЕ И УДЕРЖАНИЕ ЦВЕТА

Квантовая хромодинамика обладает замечательным свойством асимптотической свободы. Уменьшение эффективной константы связи на малых расстояниях дает правильное описание бьёркеновского скейлинга (и его нарушения за счет логарифмов). Весьма вероятно, что механизм, обеспечивающий уменьшение хромодинамической константы связи на малых расстояниях, приводит к ее росту на больших расстояниях. Это могло бы разрешить центральный парадокс феноменологической картины: на малых расстояниях кварки должны вести себя как свободные, а на больших полностью удерживаться внутри адрона. Наличие сильной связи само по себе, конечно, недостаточно для объяснения удержания кварков. Для этого необходимо показать, что спектр частиц в КХД реализуется в терминах связанных состояний кварков и глюонов. Ниже мы приведем сначала качественные соображения относительно того, каким образом в асимптотически свободной теории может происходить удержание кварков. Эти соображения должны рассматриваться как мотивировка определения теории на решетке. Затем будет продемонстрировано, что удержание можно объяснить в рамках приближения сильной связи калибровочной теории на решетке.

Качественная картина удержания

Качественные соображения о природе удержания, приводящие к некоторым правильным физическим следствиям, основаны на схеме, в которой кварки связаны между собой «струнами» [301] или узкими трубками из силовых линий цветового потока.

Предполагается, что вакуум КХД представляет собой конденсат, состоящий из глюонов и легких кварк-антикварковых пар (см., например, обзор [286]). В каком-то смысле он напоминает собой основное состояние сверхпроводника. В сверхпроводнике конденсат из электронных пар приводит к эффекту Мейсснера, состоящего в том, что магнитное поле выталкивается из конденсата до тех пор, пока энергетический баланс не приводит к локальному нарушению симметрии и возвращению в нормальную

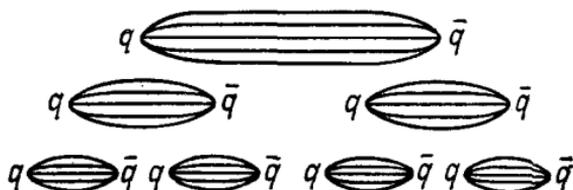


Рис. 10.16. Силовые линии между кварком и антикварком. При удалении кварков друг от друга разрыв струны сопровождается рождением пары кварк—антикварк.

фазу. Это можно представить себе так, как будто в сверхпроводящую среду помещена пара, состоящая из магнитного монополя и антимонполя, между которыми магнитный поток стянут в узкую струноподобную конфигурацию, объединяющую эту пару монополей. Аналогично в энергетически более выгодной конфигурации, скажем, кварка и антикварка цветовые (электрические) линии потока, связывающие их, сильно локализованы в ограниченной области пространства (рис. 10.16). Из трансляционной инвариантности следует, что плотность энергии глюонного поля вдоль трубки постоянна. Следовательно, полная энергия поля пропорциональна расстоянию. Это означает, что кварки удерживаются линейно растущим на больших расстояниях потенциалом

$$E(r) \rightarrow Kr, \quad (10.202)$$

где r — расстояние между источниками, а K — константа, обычно называемая *натяжением струны*. Таким образом, после рождения пары кварк — антикварк (например, в процессе e^+e^- -аннигиляции) с увеличением расстояния между ними энергетически выгодным оказывается разрыв связывающей их струны и образование новой пары кварк — антикварк и т. д. Это продолжается до тех пор, пока первоначальная струна не разорвется на несколько отдельных струн, каждая из которых имеет длину, характерную для размера адрона ~ 1 ферми ($\sim 5 \text{ ГэВ}^{-1}$). Такая картина соответствует превращению первоначальной пары кварк — антикварк в набор адронов, имеющих типичные энергии-массы около 1 ГэВ. Таким образом, можно дать грубую оценку натяжения струны:

$$K \approx \frac{1}{5} \text{ ГэВ}^2. \quad (10.203)$$

Из струнной модели адронов вытекают и другие следствия, согласующиеся с экспериментом: адроны лежат на *траекториях Редже* [338] с наклонами $\approx 1 \text{ ГэВ}^{-2}$. Десятилетнее интенсивное изучение динамики адронов, основанное на представлениях, в соответствии с которыми взаимодействие адронов осуществляется за счет обмена частицами и в которых решающую роль играли свойства унитарности и аналитичности, выявило многие свойства этих взаимодействий. Одно из важных открытий в этом S -матричном подходе [83] заключалось в том, что адроны с одинаковыми квантовыми числами внутренней симметрии, но с разными спинами удовлетворяют простому соотношению между спином J и массой M , [84]: говорят, что они лежат на одной и той же траектории Редже

$$J = \alpha_0 + \alpha' M^2,$$

где

$$\alpha' \approx 1 \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (10.204)$$

Представим себе теперь два безмассовых (и для простоты бесспиновых) кварка, связанных друг с другом струной длиной d и вращающихся со скоростью света [155]. Таким образом, каждая точка, находящаяся на расстоянии r от центра, движется со скоростью $v = (2r/d)c$. Тогда полная масса равна

$$M = 2 \int_0^{d/2} \frac{K dr}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{\pi K d}{2}, \quad (10.205)$$

а полный угловой момент

$$J = 2 \int_0^{d/2} \frac{K r v dr}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{\pi K d^2}{8}. \quad (10.206)$$

Таким образом, натяжение струны K из (10.202) можно непосредственно выразить через наклон траектории Редже α' :

$$K = \frac{1}{2\pi\alpha'}. \quad (10.207)$$

Используя экспериментальное значение α' (10.204), получаем $K \approx 0,2 \text{ ГэВ}^2$, что качественно согласуется с грубой оценкой (10.203).

Теория поля на решетке

Для изучения свойств КХД на больших расстояниях необходимо регуляризовать теорию так, чтобы эта регуляризация не была связана с обычным разложением в ряд по диаграммам Фейнмана, которое приемлемо только в случае малых констант связи. С этой целью Вильсон [429, 430] развил калибровочную

теорию на решетке, в которой вместо пространственно-временного континуума вводится дискретное пространство-время. Это приводит к естественной схеме обрезания, так как длины волн меньше удвоенного шага решетки a не имеют смысла, т. е. область изменения импульсов ограничена значением π/a . Кроме того, в такой формулировке теория поля во многом аналогична статистической механике. Поэтому мы можем привлечь интуицию и опыт, накопленные в статистической механике, для решения задач квантовой теории поля. Вместе с обрезанием по импульсам возникает ограничение на кинетическую энергию, и в пределе сильной связи ее можно рассматривать как возмущение. Это соответствует высокотемпературному разложению в статистической механике. В случае конечной решетки имеется конечное число переменных. При этом оказывается возможным исследовать различные физически интересные величины (например, энергетический спектр, корреляционные функции и т. д.) в рамках формализма функционального интегрирования с помощью вычислений на компьютерах по методу Монте-Карло.

Как и в любой процедуре обрезания, в решеточной формулировке имеется большая неоднозначность. В пределе, когда шаг решетки стремится к нулю, физические следствия перенормируемой теории поля не должны зависеть от деталей регуляризации; они, если так можно сказать, не должны помнить о величине шага решетки. Это означает, что в этом пределе корреляционная длина в теории должна быть очень большой по сравнению с шагом решетки. На языке статистической механики бесконечность корреляционной длины соответствует *фазовому переходу* второго рода (непрерывному). Если в модели имеется фазовый переход только первого рода, корреляционная длина никогда не становится бесконечной и требуемой непрерывной теории не существует. Кроме того, в решеточной калибровочной теории легко аналитически получить результаты в пределах сильной и слабой связи. Необходимо выяснить, связаны ли эти два предельных случая теории непрерывным образом, т. е. существуют ли фазовые переходы при промежуточных значениях константы связи. Поэтому очень важно исследовать фазовую структуру калибровочной теории на решетке. В настоящее время большинство наших сведений о фазах КХД получено с помощью различных численных расчетов.

Имеется два наиболее распространенных метода введения решетки в теорию поля. В евклидовой решеточной формулировке и пространство, и время являются дискретными [429]. Квантование в этом случае после виковского поворота (к евклидову пространству) осуществляется в рамках формализма функционального интегрирования. Этот метод обладает тем преимуществом, что в нем сохраняются некоторые следы первоначальной симметрии относительно преобразований Лоренца, поэтому

он формулируется в изящном виде. Кроме того, как мы увидим в случае калибровочной теории на решетке, нет необходимости вводить члены, фиксирующие калибровку. Другим методом является гамильтонова формулировка на решетке, в которой в пространстве-времени Минковского дискретны только пространственные измерения [243]. Эту теорию можно канонически проквантовать в рамках обычного гамильтонова формализма. Ее преимущество заключается в том, что некоторые физические величины (особенно спектр масс) могут быть непосредственно вычислены. Ниже мы будем рассматривать евклидову формулировку с шагом пространственно-временной решетки a . Узлы решетки параметризуются 4-вектором n . Четырехмерное интегрирование заменяется суммированием:

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_n. \quad (10.208)$$

Скалярные поля. Исследуем сначала простейший случай скалярного поля $\phi(x)$. Действие непрерывной теории в евклидовом пространстве-времени имеет вид

$$S(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (10.209)$$

где

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (10.210)$$

Скалярное поле ϕ существует в каждом узле решетки n :

$$\phi(x) \rightarrow \phi_n. \quad (10.211)$$

Производная заменяется выражением

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \frac{1}{a} (\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n), \quad (10.212)$$

где $\hat{\mu}$ — четыре-вектор длины a в направлении μ . Для решеточного действия имеем

$$S(\phi) = \sum_n \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_{\mu=1}^4 (\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n)^2 + a^4 \left(\frac{m^2}{2} \phi_n^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_n^4 \right) \right\}. \quad (10.213)$$

Полезно перейти в импульсное пространство, чтобы определить спектр свободной теории ($\lambda = 0$). С этой целью произведем фурье-преобразование:

$$\phi_n = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot n} \phi(k). \quad (10.214)$$

Так как рассматривать длины волн меньше удвоенного шага решетки не имеет смысла, интегрирование в приведенном выше выражении производится только по одной зоне Бриллюэна об-

ратной решетки, т. е.

$$-\frac{\pi}{a} \leq k_\mu \leq \frac{\pi}{a} \text{ для каждого } \mu, \quad (10.215)$$

где $k_\mu \equiv k \cdot \hat{\mu}$. После подстановки (10.214) в (10.213) члены, которые получились из кинетической энергии, запишутся в следую-

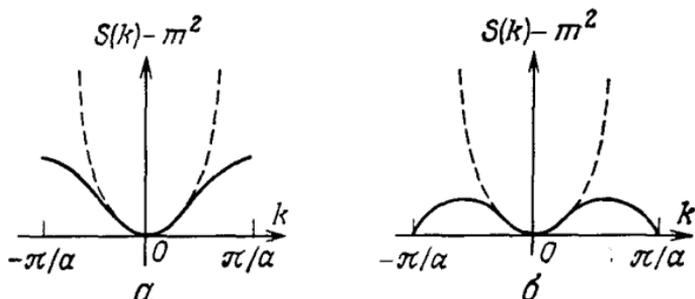


Рис. 10.17. Дисперсионное соотношение $S(k)$ для свободных a — скалярной и b — фермионной систем. Штриховые линии k^2 отвечают обычным непрерывным теориям; сплошные — решеточным теориям.

щем виде:

$$a^4 \sum_n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} e^{i(k+k') \cdot n} (e^{iak_\mu} - 1)(e^{iak'_\mu} - 1) = \\ = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (e^{iak_\mu} - 1)(e^{-iak_\mu} - 1) = 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sin^2(ak_\mu/2).$$

Тогда действие свободной теории примет вид

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right) + m^2 \right] \phi(-k) \phi(k). \quad (10.216)$$

Таким образом, каждая мода дает в действие, записанное в импульсном пространстве, вклад

$$S(k) \equiv m^2 + \sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right),$$

а не стандартный вклад, равный $m^2 + k^2$. Тем не менее оба этих выражения имеют один и тот же непрерывный предел, так как они совпадают при минимальном значении $k = 0$ (на рис. 10.17, а).

Решеточное действие (10.213) может быть проквантовано с помощью формализма фейнмановских функциональных интегралов, в рамках которого вакуумное среднее дается формулой

$$\langle 0 | \phi_{n_1} \phi_{n_2} \dots \phi_{n_l} | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_n [d\phi_n] (\phi_{n_1} \phi_{n_2} \dots \phi_{n_l}) e^{-S(\phi)}, \quad (10.217)$$

где

$$Z = \int \prod_n [d\phi_n] e^{-S(\phi)}. \quad (10.218)$$

Смысл интегралов в этих формулах должен быть ясен, так как можно напомнить, что обычные функциональные интегралы на самом деле определяются сначала на дискретной пространственно-временной решетке и только в конце совершается переход к непрерывному пределу. Если изменить масштабы полей:

$$\phi'_n = \sqrt{\lambda} \phi_n, \quad (10.219)$$

то решеточное действие принимает вид

$$S(\phi) = \frac{1}{\lambda} S'(\phi'), \quad (10.220)$$

где

$$S'(\phi') = \sum_n \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_{\mu} (\phi'_{n+\mu} - \phi'_n)^2 + a^4 \left(\frac{m^2}{2} \phi'^2_n + \frac{1}{4} \phi'^4_n \right) \right\}, \quad (10.221)$$

т. е. константа взаимодействия λ стала общим множителем для всего действия. При этом выражения (10.217) и (10.218) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi'_{n_1} \phi'_{n_2} \dots \phi'_{n_l} | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{Z'} \int \prod_n [d\phi'_n] (\phi'_{n_1} \phi'_{n_2} \dots \phi'_{n_l}) \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} S'(\phi') \right\}, \end{aligned} \quad (10.222)$$

$$Z' = \int \prod_n [d\phi'_n] \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} S'(\phi') \right\}. \quad (10.223)$$

Заметим, что выражение (10.223) обладает той же структурой, что и статистическая сумма в статистической механике, если произвести отождествление

$$\frac{1}{\lambda} \rightarrow \beta \equiv \frac{1}{kT}. \quad (10.224)$$

Таким образом, разложение сильной связи (т. е. по степеням λ^{-1}) соответствует высокотемпературному разложению в статистической механике.

Фермионные поля. Рассмотрим теперь фермионные поля на решетке. Процедура, подобная той, которой мы воспользовались в случае скалярных полей, приведет к евклидову решеточному действию для системы свободных фермионов:

$$S_0(\psi) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}_n \gamma_{\mu} (\psi_{n+\mu} - \psi_{n-\mu}) + ma^4 \bar{\psi}_n \psi_n \right\}, \quad (10.225)$$

где γ -матрицы евклидовы, т. е.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (10.226)$$

В импульсном пространстве действие (10.225) записывается в виде

$$S_0(\psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-k) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m \right\} \psi(k), \quad (10.227)$$

откуда следует дисперсионное соотношение

$$S(k) = \frac{\sin^2 ak_\mu}{a^2} + m^2, \quad (10.228)$$

показанное на рис. 10.17, б. В этом случае в зоне Бриллюэна имеются два одинаковых минимума. Один из них локализован около точки $k = 0$ и приводит к правильному непрерывному пределу. Другая мода, соответствующая минимумам в точках $k = \pm\pi/a$, обладает бесконечным импульсом при $a \rightarrow 0$, а при конечных a все еще может быть возбуждена. Фермионное вырождение, т. е. удвоение числа фермионных состояний, должно быть подавлено за счет соответствующей модификации теории на решетке. Это допустимо, если такая модификация не влияет на непрерывный предел. Можно рассмотреть много регуляризационных процедур, которые снимают это вырождение; здесь мы приведем одну из них, предложенную Вильсоном, в соответствии с которой к решеточному лагранжиану просто добавляется нелокальное слагаемое

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2a} \bar{\psi}_n (\psi_{n+\rho} + \psi_{n-\rho} - 2\psi_n). \quad (10.229)$$

Таким образом, в евклидовом пространстве свободное фермионное действие принимает вид

$$S_0(\psi) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_\mu \bar{\psi}_n [(1 + \gamma_\mu) \psi_{n+\rho} + (1 - \gamma_\mu) \psi_{n-\rho} - 2\psi_n] + ma^4 \bar{\psi}_n \psi_n \right\}, \quad (10.230)$$

а в импульсном пространстве оно равно

$$S_0(\psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-k) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m - \sum_\mu \frac{\cos ak_\mu - 1}{a} \right\} \psi(k). \quad (10.231)$$

Это действие обладает тем свойством, что нежелательный минимум, о котором говорилось выше, увеличивается, а поведение теории при малых k не изменяется, так что в непрерывном пределе остается только минимум в точке $k = 0$.

Локальная калибровочная инвариантность и действие КХД

Как было показано выше, при формулировке теории на решетке имеется значительная свобода. К лагранжиану можно добавлять различные члены, которые не дают вклада в непрерывном пределе. Используя эту свободу, Вильсон предложил особенно изящную формулировку калибровочных теорий на решетке. В таком подходе локальная калибровочная симметрия является точной симметрией математически хорошо определенной системы.

Напомним наши рассуждения в разд. 8.2, касающиеся геометрической интерпретации калибровочной инвариантности. Параллельный перенос материальной частицы вдоль мировой линии C из точки x в точку x' можно представить «неинтегрируемым» фазовым множителем ее волновой функции (т. е., как и в (8.65), с каждой траекторией ассоциируется элемент группы)¹⁾:

$$U(x', x) = \exp \left\{ ig \int_C \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu(y) dy^\mu \right\}. \quad (10.232)$$

Таким образом, при калибровочном преобразовании, описываемом калибровочной функцией

$$\Phi(\theta_x) = \exp \{ i \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}(x) \}, \quad (10.233)$$

имеем

$$\psi(x) \rightarrow \Phi(\theta_x) \psi(x), \quad (10.234)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \Phi^\dagger(\theta_x),$$

а

$$U(x', x) \rightarrow \Phi(\theta_{x'}) U(x', x) \Phi^\dagger(\theta_x). \quad (10.235)$$

(Мы обращаем внимание читателя на изменение обозначений калибровочного преобразования и матриц параллельного переноса по сравнению с обозначениями в разд. 8.2.)

Решеточный вариант калибровочных преобразований (10.234) и (10.235) можно записать в виде

$$\psi_n \rightarrow \Phi_n \psi_n, \quad \bar{\psi}_n \rightarrow \bar{\psi}_n \Phi_n^\dagger, \quad (10.236)$$

а

$$U(n + \hat{\mu}, n) \rightarrow \Phi_{n+\hat{\mu}} U(n + \hat{\mu}, n) \Phi_n^\dagger. \quad (10.237)$$

В случае калибровочной симметрии с группой $SU(3)$

$$\Phi_n = \exp \left\{ i \frac{\lambda^i}{2} \theta_n^i \right\}, \quad (10.238)$$

¹⁾ Перед экспонентой должен стоять оператор упорядочения (см. примечание к формуле (8.65)). — *Прим. перев.*

где λ^i , $i = 1, 2, \dots, 8$, — обычные матрицы Гелл-Манна, а

$$U(n + \hat{\mu}, n) = \exp \left\{ iag \frac{\lambda^i}{2} A_{n, \mu}^i \right\}. \quad (10.239)$$

Последнее выражение представляет собой решеточный вариант матрицы параллельного переноса между соседними узлами решетки: $n \rightarrow n + \hat{\mu}$. Обычно эта матрица называется *реберной переменной*. Из соотношений (10.236) и (10.237) следует, что комбинация $\bar{\psi}_n U(n, n + \hat{\mu}) \psi_{n+\hat{\mu}}$ является калибровочно инвариантной. Отсюда ясно, как модифицировать (10.230), чтобы полу-

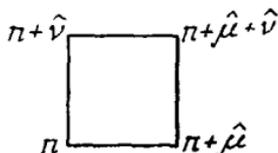


Рис. 10.18. Решеточный плакет.

чить кварковую часть $SU(3)$ -калибровочно-инвариантного действия КХД:

$$S_{\text{КХД}} = S(q) + S(A), \quad (10.240)$$

$$S(q) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_{\mu} \bar{\psi}_n [(1 + \gamma_{\mu}) U(n, n + \hat{\mu}) \psi_{n+\hat{\mu}} + (1 - \gamma_{\mu}) U(n, n - \hat{\mu}) \psi_{n-\hat{\mu}} + 2\psi_n] - ma^4 \bar{\psi}_n \psi_n \right\}. \quad (10.241)$$

А как должно выглядеть решеточное действие для глюонного поля $S(A)$? Понятно, что в него должны входить только реберные переменные. Простейшими калибровочно-инвариантными комбинациями будут переменные, определенные на четырех ребрах. (Комбинации, определенные на двух и трех ребрах, являясь матрицами группы $SU(3)$, тривиальны в силу условия унитарности и равенства единице детерминанта.) Отсюда следует

$$S(A) = \frac{-1}{2g^2} \sum_p \text{tr} U_p, \quad (10.242)$$

где

$$U_p = U(n, n + \hat{\mu}) U(n + \hat{\mu}, n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) \times \\ \times U(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}, n + \hat{\nu}) U(n + \hat{\nu}, n) \quad (10.243)$$

представляет собой произведение четырех реберных переменных, взятых вдоль границы элементарного квадрата (называемого *плакетом*¹⁾, рис. 10.18). Сумма в (10.242) берется по всем плакетам решетки. Из обсуждения параллельного переноса

¹⁾ Plaquette (франц.) — небольшая металлическая пластинка. — *Прим. перев.*

вдоль границы квадрата, приведенного в разд. 8.2, следует, что выражение (10.242) можно записать в виде ¹⁾

$$S(A) = \frac{-1}{2g^2} \sum_p \text{tr} \{ \exp (ia^2 g F_{n, \mu\nu}) \}, \quad (10.244)$$

где

$$F_{n, \mu\nu} = \partial_\mu A_{n, \nu} - \partial_\nu A_{n, \mu} - ig [A_{n, \mu}, A_{n, \nu}], \quad (10.245)$$

$$\partial_\mu A_{n, \nu} \equiv \frac{1}{a} (A_{n+\mu, \nu} - A_{n, \nu}),$$

а $A_{n, \mu}$ — глюонное поле $A_\mu^i \lambda^i / 2$ в узле n . Из этого выражения сразу же можно получить непрерывный предел

$$S(A) = \frac{-1}{2g^2} \sum_p \left\{ 1 - \frac{a^4}{2} g^2 F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \dots \right\} \rightarrow \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}, \quad (10.246)$$

где мы воспользовались тем фактом, что матрицы λ являются бесследовыми (так что линейные по $F_{\mu\nu}$ члены исчезают) и $\text{tr}(\lambda^i \lambda^j) = 2\delta^{ij}$.

Критерий удержания; петля Вильсона

Чтобы определить, имеет ли место удержание кварков в КХД, необходимо найти энергию системы, состоящей из кварка в точке $x = (t, \mathbf{0})$ и антикварка в точке $x = (t, \mathbf{R})$. В случае отсутствия удержания мы предполагаем, что

$$E(R) \rightarrow 2m \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (10.247)$$

где m — масса кварка. Наличие удержания означает, что межкварковый потенциал безгранично растет:

$$E(R) \rightarrow \infty \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (10.248)$$

Состояние $q\bar{q}$ в момент времени t можно представить в виде (см., например, [29])

$$|q(t, \mathbf{0}) \bar{q}(t, \mathbf{R})\rangle = \sum_C f(C) \Gamma[(t, \mathbf{R}), (t, \mathbf{0}); C] |0\rangle; \quad (10.249)$$

здесь $\Gamma[x', x; C]$ — калибровочно-инвариантный $q\bar{q}$ -оператор:

$$\Gamma[x', x; C] = \bar{q}(x') U(x', x; C) q(x), \quad (10.250)$$

где ²⁾

$$U(x', x; C) = \exp \left\{ ig \int_x^{x'} \frac{1}{2} \lambda^i A_\mu^i(y) dy^\mu \right\}, \quad (10.251)$$

¹⁾ Формула (10.244) получается из (10.242) при $a \rightarrow 0$, если в показателе экспоненты отбросить члены $O(a^3)$. — Прим. перев.

²⁾ См. примечание 2 на стр. 276. — Прим. перев.

а C — траектория, соединяющая точки x и x' . Рассмотрим теперь перекрытие $q\bar{q}$ -состояния в момент времени $t=0$ и $q\bar{q}$ -состояния в момент времени $t=T$:

$$\Omega(T, R) = \langle 0 | \Gamma^+ [(0, \mathbf{0}), (0, \mathbf{R}); C] \Gamma [(T, \mathbf{0}), (T, \mathbf{R}); C] | 0 \rangle. \quad (10.252)$$

Вставляя полную систему собственных состояний энергии, получаем в евклидовом пространстве

$$\Omega(T, R) = \sum |\langle 0 | \Gamma^+ [(0, \mathbf{0}), (0, \mathbf{R}); C] | n \rangle|^2 e^{-E_n T}. \quad (10.253)$$

При больших T основной вклад дает слагаемое с наименьшим значением E_n . Это наименьшее собственное значение энергии соответствует потенциальной энергии $q\bar{q}$ -системы, в которой кварк и антикварк отстоят друг от друга на расстоянии R :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Omega(T, R) \sim e^{-E(R)T}. \quad (10.254)$$

В терминах кварковых полей функция перекрытия $\Omega(T, R)$ может быть записана в следующем виде:

$$\Omega(T, R) = \langle 0 | \bar{q}(0, \mathbf{R}) U [(0, \mathbf{R}), (0, \mathbf{0}); C] q(0, \mathbf{0}) \times \\ \times \bar{q}(T, \mathbf{0}) U [(T, \mathbf{0}), (T, \mathbf{R}); C] q(T, \mathbf{R}) | 0 \rangle. \quad (10.255)$$

Если мы рассматриваем кварки как внешние источники (как в случае тяжелых кварков), то кварковый пропагатор (в фоновом глюонном поле) можно выразить в виде

$$\langle 0 | q^\beta(t', \mathbf{x}) \bar{q}^\alpha(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle = \\ = \exp \left[i \int_t^{t'} A_0(\tau, \mathbf{x}) d\tau \right] \langle 0 | q^\beta(t', \mathbf{x}) \bar{q}^\alpha(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle_{\text{своб}} \sim \\ \sim U[(t', \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}); C] \delta^{\alpha\beta} e^{-m|t' - t|}. \quad (10.256)$$

Объединяя (10.256) и (10.255), получаем

$$\Omega(T, R) \sim e^{-2mT} W(C), \quad (10.257)$$

где

$$W(C) = \langle 0 | \text{tr} U[x, x; C] | 0 \rangle. \quad (10.258)$$

Здесь C — граница прямоугольника, показанного на рис. 10.19. Корреляционная функция $W(C)$ называется *вильсоновской петлей*; ее поведение определяет свойства удержания, так как из сравнения (10.257) и (10.254) следует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W(C) \sim e^{-T |E(R) - 2m|}. \quad (10.259)$$

Как мы сейчас покажем, в пределе сильной связи в решеточной калибровочной теории вильсоновская петля удовлетворяет за-

кону площади, т. е. для большого контура

$$W(C) \sim \exp\{-KA(C)\}, \quad (10.260)$$

где K — константа, а $A(C)$ — площадь поверхности, границей которой является контур C . Например, для прямоугольного контура, показанного на рис. 10.19, имеем

$$A(C) = TR. \quad (10.261)$$

Подставляя (10.260) и (10.261) в выражение (10.259), получаем для $q\bar{q}$ -системы линейно растущий потенциал. Кроме того, кон-

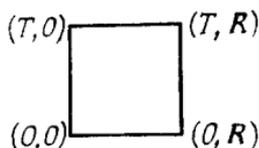


Рис. 10.19. Вильсоновская петля.

станту K в выражении (10.260) можно отождествить с натяжением струны. Заметим, что мы рассматриваем кварки просто как внешние цветовые источники. Таким образом, с помощью вильсоновской петли можно исследовать вопрос об удержании цвета в чисто глюонной теории без кварковых полей.

Закон площади в разложении сильной связи

В (10.222) и (10.223) мы привели выражение для корреляционной функции в скалярной теории поля, записанное через функциональные интегралы. Аналогичное выражение можно получить для вильсоновской петли в чистой глюодинамике; она будет представлена в виде функционального интеграла по глюонным полям. Так как (инфинитезимальные) реберные переменные непосредственно связаны с калибровочными полями, в решеточной калибровочной теории их можно выбрать в качестве основных динамических степеней свободы. Как мы увидим, это позволяет записать выражение (10.258) в более простом виде:

$$W(C) = \frac{1}{Z} \int \prod_{n, \mu} dU(n, n + \hat{\mu}) \operatorname{tr} U(x, x; C) \exp\left\{-\frac{1}{2g^2} \sum_p \operatorname{tr} U_p\right\}, \quad (10.262)$$

где

$$Z = \int \prod_{n, \mu} dU(n, n + \hat{\mu}) \exp\left\{-\frac{1}{2g^2} \sum_p \operatorname{tr} U_p\right\}. \quad (10.263)$$

Отметим, что мы не добавили к действию никаких членов, фиксирующих калибровку, так как реберная переменная (т. е. решеточное калибровочное поле) меняется только в ограниченной области. Объем пространства траекторий, порождаемых калиб-

ровочными преобразованиями, конечен. Следовательно, до перехода к непрерывному пределу нет необходимости вводить члены, соответствующие фиксации калибровки (см. разд. 9.1). Реберные переменные являются элементами группы $SU(3)$. Унитарные матрицы группы $SU(3)$ можно параметризовать обобщенными углами Эйлера и записать групповые интегралы в яв-

Рис. 10.20.

ном виде, выразив их через эти восемь углов. В любом случае имеют место следующие свойства ортогональности:

$$\int dU(n, n + \hat{\mu}) [U(n, n + \hat{\mu})]_{ij} = 0, \quad (10.264)$$

$$\int dU(n, n + \hat{\mu}) [U(n, n + \hat{\mu})]_{ij} [U^\dagger(n, n + \hat{\mu})]_{kl} = \frac{1}{3} \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (10.265)$$

$$\int dU(n, n + \hat{\mu}) [U(n, n + \hat{\mu})]_{ij} [U(n, n + \hat{\mu})]_{kl} = 0. \quad (10.266)$$

Тождество (10.265) означает, что вклады от ребер, имеющих противоположные направления, взаимно уничтожаются при интегрировании. Таким образом, если имеются два соседних плакета одинаковой ориентации, то после интегрирования по переменной, определенной на их общем звене, они сливаются в один прямоугольник (рис. 10.20). В пределе сильной связи величина $1/g^2$ рассматривается в качестве малого параметра, и экспоненту в (10.262) можно разложить в ряд:

$$\begin{aligned} W(C) = & \frac{1}{Z} \int dU(n, n + \hat{\mu}) \text{tr} U(x, x; C) \times \\ & \times \left[1 - \frac{1}{2g^2} \sum_p \text{tr} U_p + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2g^2} \right)^2 \sum_p \sum_{p'} \text{tr} U_p \text{tr} U_{p'} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (10.267)$$

Для простоты мы возьмем плоский прямоугольный контур C , показанный на рис. 10.19. Ясно, что в этом пределе сильной связи из свойств ортогональности реберных переменных, приведенных в (10.264)–(10.266), следует, что неисчезающий вклад в $W(C)$ наимизшего порядка дает член, пропорциональный $(1/g^2)^{N_p}$, где N_p — минимальное число плакетов, необходимых для того, чтобы заполнить поверхность, ограниченную контуром C :

$$W(C) \sim \left(\frac{1}{g^2} \right)^{N_p}. \quad (10.268)$$

Это соответствует закону площади, так как площадь поверхности, ограниченной контуром C , равна

$$A(C) = a^2 N_p. \quad (10.269)$$

Следовательно,

$$W(C) \sim (g^2)^{-A(C)/a^2} = \exp\{- (TR \ln g^2)/a^2\}. \quad (10.270)$$

Сравнивая это выражение с (10.260), получаем линейно растущий потенциал

$$E(R) = KR, \quad (10.271)$$

где

$$K = \frac{\ln g^2}{a^2}. \quad (10.272)$$

Можно также рассмотреть разложение слабой связи для вильсоновской петли, переходя к непрерывному пределу и заменяя действие гауссовским приближением. Тогда мы получим закон периметра. Оказывается, что это эквивалентно кулоновскому потенциалу $E(R) \sim R^{-1}$. Учитывая соответствующие перенормировочные эффекты, можно видеть, что по-прежнему имеет место свойство асимптотической свободы.

Означает ли это, что мы доказали существование в КХД свойств асимптотической свободы и удержания цвета? Пока что нет, так как можно заметить, что и в решеточной калибровочной $U(1)$ -теории выполняются как закон периметра (кулоновское взаимодействие), так и закон площади (удержание), — в приведенных выше следствиях разложения сильной связи не использован неабелев характер теории. Дело в том, что режимы сильной и слабой связи могут быть разделены одним или несколькими разрывными фазовыми переходами. Было доказано, что четырехмерная абелева калибровочная теория обладает нетривиальной фазовой структурой, но подобного аналитического доказательства того, что в КХД отсутствуют фазовые переходы при конечных константах связи, пока не существует.

Эту проблему, правда, можно исследовать, используя численные методы. Особенно успешными при этом оказались два подхода. В одном из них используется метод приближения Паде, с помощью которого результаты, полученные в разложении сильной связи, экстраполируются на ту область, где становятся справедливыми результаты теории возмущений по малой константе связи [240]. Другой подход сводится к вычислениям по методу Монте-Карло, в котором функциональный интеграл (10.263) рассматривается как статистическая сумма статмеханической системы [102]. Вводя различные конфигурации, типичные для систем, находящихся в термодинамическом равновесии, вычислили различные корреляционные функции. Результаты, полученные в этих двух подходах, указывают на то, что в области промежуточных констант связи фазовые переходы отсутствуют. Зависи-

мость $g^2(a) \sim e^{\kappa a^2}$ (10.272), полученная в рамках разложения сильной связи, действительно переходит в найденную в пределе слабой связи зависимость $g^2(a) \sim 1/(\ln a^{-1})$ при $a \rightarrow 0$. Было установлено, что этот переход гладкий и резкий (см. также [241]), так же как в аналогичных вычислениях для $U(1)$ -теории, явно указывающих на наличие фазового перехода. Кроме того, эти методы позволяют получить удовлетворительные численные соотношения между натяжением струны, являющимся параметром, описывающим взаимодействия на больших расстояниях, и константами калибровочного взаимодействия на малых расстояниях (такими, как масштабный параметр КХД Λ : $100 \text{ МэВ} \leq \Lambda \leq 300 \text{ МэВ}$). Все эти численные результаты вселяют надежду на возможность доказательства того, что асимптотическая свобода и удержание цвета действительно сосуществуют в единой фазе КХД.

СТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ I: ОСНОВЫ

В этой и следующей главах мы излагаем стандартную калибровочную теорию слабых и электромагнитных взаимодействий. В ее рамках объединяются квантовая электродинамика и низкоэнергетическая $V-A$ -теория слабых взаимодействий для заряженных токов. Эта объединенная теория перенормируема. Она предсказывает также существование нового набора нейтральных токов; успешное экспериментальное подтверждение в последние годы различных аспектов этой теории усилило нашу уверенность в ее правильности. Гл. 11 может служить введением, в котором излагается теоретическая структура модели. В гл. 12 изучаются ее феноменологические следствия. Возможные расширения и модификации стандартной теории электрослабого взаимодействия обсуждаются в гл. 13.

11.1. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДО КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В настоящем разделе дается краткий обзор теорий слабого взаимодействия, существовавших до появления калибровочных моделей, — четырехфермионной теории и теории с промежуточным векторным бозоном. В частности, мы обсудим трудности, которые встретились при попытках сделать эти теории внутренне замкнутыми.

Четырехфермионные взаимодействия

Вскоре после того, как Паули постулировал существование нейтрино, Ферми [132, 133] предложил свою теорию β -распада $n \rightarrow pe\bar{\nu}$, лагранжиан которой имеет вид

$$\mathcal{L}_F(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{p}(x) \gamma_\lambda n(x)] [\bar{e}(x) \gamma^\lambda \nu(x)] + \text{эрмит. сопр.}, \quad (11.1)$$

где операторы фермионных полей обозначаются первыми буквами названий соответствующих частиц, а константа взаимодей-

ствия Ферми

$$G_F \approx 10^{-5}/m_p^2 \quad (11.2)$$

(m_p — масса протона).

В последующие годы были открыты другие процессы, например $\pi - \mu$ - и $\mu - e$ -распады, в которых распадающиеся частицы обладают, так же как в β -распаде, сравнительно большим временем жизни. Стало ясно, что речь идет о новом классе взаимодействий — слабых взаимодействиях. Неожиданное открытие несохранения четности [264, 433] в значительной мере стимулировало исследования по слабым взаимодействиям, в результате которых была сформулирована $V - A$ -теория [139, 343, 371]. Согласно этой теории, слабые взаимодействия описываются эффективным лагранжианом, во многом похожим на лагранжиан (11.1),

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda^\dagger(x) J^\lambda(x) + \text{эрмит. сопр.}, \quad (11.3)$$

где слабый ток $J_\lambda(x)$ представляет собой разность векторного и аксиально-векторного токов.

Если разбить ток $J_\lambda(x)$ на лептонную и адронную части:

$$J_\lambda(x) = J_{l\lambda}(x) + J_{h\lambda}(x), \quad (11.4)$$

то лептонный ток $J_l^\lambda(x)$ можно записать непосредственно в терминах лептонных полей

$$J_l^\lambda(x) = \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \mu, \quad (11.5)$$

а адронный ток $J_h^\lambda(x)$ можно разложить на части, имеющие определенные свойства при преобразованиях из группы ароматов $SU(3)$, как в (5.79), и в компактном виде выразить через поля кварков

$$J_h^\lambda(x) = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) d_\theta, \quad (11.6)$$

где

$$d_\theta = \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \quad (11.7)$$

(угол Кабиббо $\theta_c \approx 15^\circ$). Сравнивая (11.5) и (11.6) и предполагая существование лептон-кварковой симметрии, мы приходим к следующему естественному обобщению выражения (11.6) для адронного тока:

$$J_h^\lambda(x) = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) d_\theta + \bar{c} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) s_\theta, \quad (11.8)$$

где

$$s_\theta = \cos \theta_c s - \sin \theta_c d, \quad (11.9)$$

а s — поле постулированного нового тяжелого кварка — очарованного [51]. Что более важно, было показано, что в любой разумной теории слабых взаимодействий должен существовать дополнительный адронный ток для снижения до приемлемого уровня эффектов изменения странности, связанных с нейтраль-

ными токами [188]. Хотя этот механизм подавления был предложен до того, как стали рассматриваться калибровочные теории, он находит более естественное объяснение в рамках этих теорий. Это будет продемонстрировано в разд. 11.3 и более детально — в разд. 12.2.

Необходимо сделать замечание, касающееся общих свойств слабых токов, определенных в (11.5) и (11.8). Они являются заряженными токами, несущими единичный заряд; в низшем порядке нет процессов с нейтральными токами, таких, как, например, реакция $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu N$. Токи (11.5) и (11.8) билинейны по фундаментальным фермионным полям и содержат оператор проекции на спиральность $(1 - \gamma_5)$. Другими словами, в слабых токах присутствуют только левые фермионы. Таким образом,

$$\bar{\psi} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \psi = 2 \bar{\psi}_L \gamma^\lambda \psi_L, \quad (11.10)$$

где

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi, \quad (11.11)$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (11.12)$$

Правило, согласно которому «нарушение четности максимально в слабых взаимодействиях», имеет простую интерпретацию в терминах лептонных и кварковых полей: в теории слабых взаимодействий, где лагранжиан содержит только заряженные токи, фундаментальными динамическими степенями свободы для полей материи являются двухкомпонентные левые фермионные поля.

Если мы ограничимся только основным порядком по G_F , то большое количество экспериментальных данных может быть успешно описано с помощью $V - A$ -лагранжиана (11.3). Исключений довольно мало. Не ясно, например, правильно ли описываются нелептонные слабые распады членом $J_{h\lambda}(x) J_h^\lambda(x)$ в (11.3), так как мы не можем провести надежных вычислений эффектов сильных взаимодействий. Нарушение CP -инвариантности, открытое в системах нейтральных K -мезонов [87], не может быть описано простым способом. В наиболее удачной феноменологической теории несохранения CP -четности постулируется существование нового сверхслабого взаимодействия [131]. Короче говоря, низший порядок $V - A$ -теории правильно описывает те явления с участием слабых взаимодействий, для описания которых, как предполагается, она должна быть применима.

Тем не менее теория с лагранжианом (11.3) не может рассматриваться как внутренне непротиворечивая квантовая теория поля: она неперенормируема, и даже в низшем порядке по G_F при высоких энергиях в ней нарушается унитарность.

1. *Отсутствие перенормируемости.* Взаимодействие в (11.3) неперенормируемо. Оно представляет собой оператор размер-

ности β , т. е. константа взаимодействия G_F имеет размерность (масса)⁻². Следовательно, вклады более высоких порядков все больше расходятся, и эти расходимости нельзя собрать таким образом, чтобы они вошли в несколько «голых» параметров (см. гл. 2, особенно разд. 2.4). В неперенормируемой теории, даже если константа связи мала, нет никакой гарантии, что члены более высоких порядков не будут большими. Тогда вся совокупность правил отбора (например, отсутствие процессов с заряженными токами, в которых $\Delta S > 1$ и $\Delta S = -\Delta Q$), являющаяся основой $V-A$ -теории, становится бессмысленной, когда борновские члены низшего порядка не являются доминирующими.

2. *Нарушение унитарности.* Даже если мы ограничимся только борновским приближением, имеются определенные процессы, в которых нарушается унитарность. Рассмотрим, как с помощью эффективного лагранжиана (11.3) описывается реакция $\nu_\mu e \rightarrow \rightarrow \nu_e e$. Амплитуда содержит только одну парциальную волну с $J = 1$, а сечение реакции при высоких энергиях имеет вид $\sigma \sim G_F^2 s$, где $s = 2m_e E$ (E — энергия частицы ν_μ в лабораторной системе отсчета). Но из требования унитарности следует, что $\sigma(J = 1)$ ограничено величиной s^{-1} . Таким образом, при энергиях больше $\sqrt{s} \sim G_F^{-1/2} \approx 300$ ГэВ сечение, вычисленное теоретически на основе лагранжиана (11.3), нарушало бы унитарность (детали см. в разд. 11.2).

Оказывается, что эти две проблемы тесно связаны друг с другом. Если диаграммы низших порядков при высоких энергиях имеют плохое поведение, нарушающее унитарность, то вклады более высокого порядка, являющиеся интегралами от выражений, соответствующих диаграммам низших порядков, не могут быть перенормированы.

Теория с промежуточным векторным бозоном (ПВБ)

Подобно электромагнитному току, слабый ток в лагранжиане $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ (11.3) преобразуется при преобразованиях Лоренца как 4-вектор, и теорию слабых взаимодействий можно попытаться строить по аналогии с КЭД, вводя новое массивное поле W_μ и записывая взаимодействие в виде

$$\mathcal{L}_I = g(J_\mu W^\mu + \text{эрмит. сопр.}). \quad (11.13)$$

Тогда теорию с четырехфермионным лагранжианом (11.3) можно рассматривать как эффективную низкоэнергетическую теорию, полученную из теории с лагранжианом \mathcal{L}_I во втором порядке теории возмущений (рис. 11.1). При этом выполняется равенство $g^2 M_W^{-2} = 2^{-1/2} G_F$, где множитель M_W^{-2} возникает из-за массивного пропагатора ПВБ. Поскольку КЭД является калибровочной теорией, лагранжиан взаимодействия (11.13) есте-

ственно рассматривать как лагранжиан взаимодействия в калибровочной теории Янга — Миллса с массивными калибровочными бозонами.

Обратимся теперь к проблемам унитарности и перенормируемости в теории с ПВБ. Проблема унитарности по-прежнему остается, но теперь она возникает в некоторых других процессах. Например, можно показать (см. разд. 11.2), что в случае



Рис. 11.1. Четырехфермионное взаимодействие как низкоэнергетическое приближение для диаграммы порядка g^2 в теории с ПВБ.

реакции $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$ с продольно поляризованными частицами W , парциальная ($J = 1$) высокоэнергетическая амплитуда порядка $G_F E^2$ (E — энергия нейтрино), хотя условие унитарности требует, чтобы она была ограничена константой.

Несмотря на то, что константа взаимодействия g теперь безразмерна, эта теория по-прежнему не является перенормируемой. Лагранжиан свободного массивного векторного бозона имеет вид

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger) (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \quad (11.14)$$

и приводит к пропагатору в импульсном пространстве:

$$i\Delta_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon}. \quad (11.15)$$

При $k \rightarrow \infty$ этот пропагатор ведет себя как константа, поэтому обычный подсчет степеней показывает, что теория неперенормируема. Проблема, конечно, заключается в том, что ПВБ является массивным, из-за чего возникает член $k_\mu k_\nu / M_W^2$ в пропагаторе. Но именно массивность поля W необходима, чтобы получить желаемую низкоэнергетическую четырехфермионную теорию. Поэтому ключевая проблема состоит в том, как ввести массивные калибровочные бозоны в теории Янга — Миллса таким образом, чтобы она при этом осталась перенормируемой.

11.2. ПОСТРОЕНИЕ СТАНДАРТНОЙ $SU(2) \times U(1)$ -ТЕОРИИ

Как отмечалось в предыдущем разделе, в слабых взаимодействиях должны участвовать массивные промежуточные векторные бозоны, но их массивность делает теорию неперенормируемой. Это серьезное противоречие было в конце концов раз-

решено в калибровочных теориях со спонтанным нарушением симметрии. Кроме того, оказалось, что в последовательной перенормируемой теории слабые взаимодействия объединяются с электромагнетизмом. Калибровочной группой симметрии в ней является группа $SU(2) \times U(1)$. В настоящее время эта теория считается стандартной теорией электрослабого взаимодействия.

Идею объединения слабых и электромагнитных взаимодействий впервые выдвинул Швингер [353] в 1957 г., отметивший их векторную природу. Глэшоу [185] предположил, что в искомой перенормируемой теории слабых взаимодействий должны одновременно рассматриваться и электромагнитные взаимодействия; позднее он предложил [186] модель с калибровочной $SU(2) \times U(1)$ -симметрией. В его теории перенормируемость отсутствовала, так как массы ПВБ вводились как дополнительные параметры. Аналогичная попытка была предпринята Саламом и Уордом [347]. Наконец, перенормируемая теория с массами ПВБ, возникающими за счет механизма Хиггса, была предложена Вайнбергом [400] в 1967 г.; годом позднее она независимо обсуждалась Саламом [346]. Поэтому стандартную теорию часто называют моделью Вайнберга — Салама или моделью Глэшоу — Вайнберга — Салама. Но теоретики, занимающиеся физикой высоких энергий, не осознавали важности этого подхода до тех пор, пока т'Хофт [383, 384] не доказал перенормируемость калибровочных теорий со спонтанным нарушением симметрии и без него.

Ниже излагается теория Вайнберга — Салама. Для простоты мы сначала ограничимся рассмотрением самого легкого фермионного «семейства», или «поколения» (ν_e, e, u, d). Как будет показано, теория в приближении, когда рассматривается только одно поколение, полностью самосогласована и замкнута. Более тяжелые поколения (ν_μ, μ, c, s) и (ν_τ, τ, t, b) будут снабжены структурой, тождественной структуре легкого поколения. Их введение в стандартную теорию обсуждается в разд. 11.3.

Выбор группы $SU(2) \times U(1)$

Алгебраический подход. Чтобы выбрать калибровочную группу, необходимо рассмотреть теорию с ПВБ, в которой имеются только электрон и нейтрино. Лагранжиан слабого взаимодействия дается выражениями (11.13) и (11.5)

$$\mathcal{L}_W = g(J_\lambda W^\lambda + \text{эрмит. сопр.}), \quad (11.16)$$

где заряженный V — A -ток

$$J_\lambda = \bar{\nu}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) e. \quad (11.17)$$

С другой стороны, электромагнитное взаимодействие этих лептонов описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{эм} = eJ_{\lambda}^{эм} A^{\lambda}, \quad (11.18)$$

где электромагнитный ток

$$J_{\lambda}^{эм} = -\bar{e}\gamma_{\lambda}e. \quad (11.19)$$

В единой калибровочной теории слабых и электромагнитных взаимодействий необходимо присутствие по крайней мере трех калибровочных бозонов (W^{\pm} и фотона), взаимодействующих с токами J , J^{\dagger} и $J^{эм}$. Простейшей группой с тремя генераторами является группа $SU(2)$. Но, как мы сейчас покажем, алгебра токов (11.17) и (11.19) не замкнута относительно операции коммутирования. Определим слабые и электрические заряды следующим образом:

$$\begin{aligned} T_+(t) &= \frac{1}{2} \int d^3x J_0(x) = \frac{1}{2} \int d^3x v_e^{\dagger} (1 - \gamma_5) e, \\ T_-(t) &= T_+^{\dagger}(t), \\ Q(t) &= \int d^3x J_0^{эм}(x) = - \int d^3x e^{\dagger} e. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Используя канонические коммутационные соотношения для фермионов

$$\{\psi_i^{\dagger}(\mathbf{x}, t), \psi_j(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

можно показать, что

$$[T_+(t), T_-(t)] = 2T_3(t), \quad (11.21)$$

где

$$T_3(t) = \frac{1}{4} \int d^3x [v_e^{\dagger} (1 - \gamma_5) v_e - e^{\dagger} (1 - \gamma_5) e]. \quad (11.22)$$

Поскольку $T_3 \neq Q$, T_{\pm} , Q не образуют замкнутую алгебру. Причину этого установить нетрудно. Для того чтобы оператор Q был генератором группы $SU(2)$, заряды компонент полного мультиплетта должны в сумме давать нуль в соответствии с требованием, что генераторы группы $SU(2)$ должны быть бесследовыми. В рассматриваемом случае мы пытаемся построить дублет из v_e и e , которые явно не удовлетворяют этому условию. Кроме того, операторы $T_{\pm}(t)$ имеют $V - A$ -вид, а оператор Q — чисто векторный.

Здесь имеются две возможности.

1. Можно ввести еще один калибровочный бозон, связанный с оператором T_3 в (11.21). Тогда эти четыре генератора образуют алгебру группы $SU(2) \times U(1)$. Именно на этом выборе мы в конце концов остановимся.

2. Можно добавить к мультиплету новые фермионы и тем самым модифицировать токи таким образом, чтобы новый набор

T_{\pm} и Q образовал замкнутую алгебру группы $SU(2)$. В рассматриваемом случае можно попытаться образовать триплет из e , ν_e и нового заряженного тяжелого лептона E^+ . Такая теория действительно была построена Джорджи и Глэшоу [173]. (Они также ввели нейтральный тяжелый лептон N , чтобы получить при низких энергиях слабый ток в $V-A$ -виде.) В этой модели

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} E^+ \\ \nu_e \cos \alpha + N \sin \alpha \\ e \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} E^+ \\ N \\ e \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) (N \cos \alpha - \nu_e \sin \alpha) \end{aligned}$$

являются двумя триплетами и одним синглетом. Это приводит к слабому току вида

$$\begin{aligned} T_+(t) = \frac{1}{2} \int d^3x [E^+ (1 - \gamma_5) (\nu_e \cos \alpha + N \sin \alpha) + \\ + (\nu_e^+ \cos \alpha + N^+ \sin \alpha) (1 - \gamma_5) e + \\ + E^+ (1 + \gamma_5) N + N^+ (1 + \gamma_5) e]. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Легко показать, что

$$[T_+(t), T_-(t)] = 2Q(t),$$

где

$$Q = \int d^3x [E^+ E - e^+ e]. \quad (11.24)$$

Очевидно, что в этом случае единственным нейтральным током является электромагнитный ток, поэтому после открытия в 1973 г. нейтральных слабых токов от этой модели пришлось отказаться. Кроме того, в нее трудно ввести кварки с дробными зарядами.

Соображения, основанные на унитарности. Точно так же из унитарности следует, что необходимо ввести либо новый заряженный лептон, либо новый нейтральный калибровочный бозон. Рассмотрим процесс $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$, где оба бозона W продольно поляризованы. Амплитуда полного процесса в низшем порядке теории возмущений, показанная на рис. 11.2, имеет вид

$$\begin{aligned} T_t(\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-) &= -i\bar{\nu}(p') (-ig\hat{\epsilon}') (1 - \gamma_5) \times \\ & \times \frac{i}{\not{p} - \hat{k} - m_e} (-ig\hat{\epsilon}) (1 - \gamma_5) u(p) = \\ & = -2g^2 v(p') \frac{\hat{\epsilon}(\not{p} - \hat{k})\hat{\epsilon}(1 - \gamma_5)}{(\not{p} - \hat{k})^2 - m_e^2} u(p). \end{aligned} \quad (11.25)$$

Векторы поляризации $\epsilon_\mu^{(i)}(k)$, где $\epsilon^{(i)}\epsilon^{(i)} = -\delta_{ij}$, а $k\epsilon^{(i)} = 0$, можно выбрать в системе покоя бозона W , так как $\epsilon_0^{(i)} = 0$, а $\epsilon_j^{(i)} = \delta_{ij}$. Чтобы получить $\epsilon^{(i)}$ в системе отсчета, связанной с движущимся бозоном W , $k_\mu = (E, 0, 0, k)$, где $k = \sqrt{E^2 - M_W^2}$, можно воспользоваться соответствующим лоренцевским бустом вдоль оси z . Поперечные поляризации при

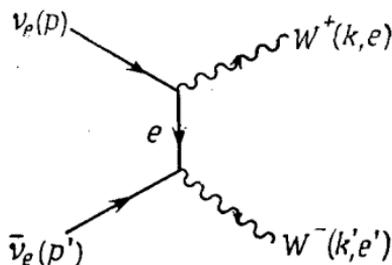


Рис. 11.2. Процесс $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$ с обменом лептонами в t -канале.

таких лоренцевских преобразованиях не изменяются, тогда как вектор продольной поляризации становится равным $\epsilon_\mu^{(3)} = M_W^{-1}(k, 0, 0, E)$. В высокоэнергетическом пределе, где $k = E - M_W^2/2E + \dots$, вектор $\epsilon_\mu^{(3)}$ можно аппроксимировать следующим выражением:

$$\epsilon_\mu^{(3)} = k_\mu/M_W + O(M_W/E). \quad (11.26)$$

Таким образом, подставляя (11.26) в (11.25), получаем

$$\begin{aligned} T_t &\approx -2g^2/(k^2 - 2p \cdot k) \bar{\nu}(p') (\hat{k}'/M_W) \times \\ &\quad \times (\hat{p} - \hat{k}) (\hat{k}/M_W) (1 - \gamma_5) u(p) \approx \\ &\quad \approx \frac{2g^2}{M_W^2} \bar{\nu}(p') \hat{k}' (1 - \gamma_5) u(p), \end{aligned} \quad (11.27)$$

где мы воспользовались равенством $(\hat{p} - \hat{k}) \hat{k} u(p) = (2p \cdot k - k^2) u(p)$. Чтобы показать в более явном виде, что эта амплитуда является чистой парциальной волной с $J=1$, можно выбрать конфигурации импульсов следующим образом:

$$\begin{aligned} p_\mu &= (E, 0, 0, E), & p'_\mu &= (E, 0, 0, -E), \\ k_\mu &= (E, k\mathbf{e}), & k'_\mu &= (E, -k\mathbf{e}), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{e} = (\sin \theta, 0, \cos \theta). \quad (11.28)$$

Так как ν и $\bar{\nu}$ обладают противоположными спиральностями, имеем

$$u(p) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E} \end{pmatrix} \chi_{-1/2} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_z \end{pmatrix} \chi_{-1/2}, \quad (11.29)$$

$$\bar{\nu}(p') = \sqrt{E} \chi_{1/2}^\dagger \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{E}, -1 \right) = \sqrt{E} \chi_{1/2}^\dagger (-\sigma_z, -1), \quad (11.30)$$

где

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда комбинация спиноров в (11.27) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(p') \hat{k}' (1 - \gamma_5) u(p) &= E \chi_{1/2}^\dagger (-1, -1) \times \\ &\times \begin{pmatrix} E & k\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e} \\ -k\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e} & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \chi_{-1/2} = \\ &= -4E \chi_{1/2}^\dagger (E - k\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}) \chi_{-1/2} = 4Ek \sin \theta. \end{aligned} \quad (11.31)$$

При $E \rightarrow \infty$ имеем $T_t \approx G_F E^2 \sin \theta$, и разложение по парциальным волнам спиральной амплитуды [142, 228] в этом случае имеет следующий вид:

$$T_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}(E, \theta) = \sum_{J=M}^{\infty} (2J+1) T_{\lambda_3 \lambda_4, \lambda_1 \lambda_2}^J(E) d_{\mu\lambda}^J(\theta),$$

где $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ — спиральности начальных и конечных частиц, $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 1$, $\mu = \lambda_3 - \lambda_4 = 0$, $M = \max(\lambda, \mu) = 1$; $d_{\mu\lambda}^J(\theta)$ — обычная матрица поворотов, причем $d_{10}^1(\theta) = \sin \theta$. Ясно, что T_t соответствует вкладу только одной парциальной волны с $J=1$ и ограничение $T^{J=1}(E) < \text{const}$, основанное на унитарности не выполняется. Чтобы избавиться от этого плохого высокоэнергетического поведения, необходимо учесть и другие диаграммы, соответствующие этому процессу. Имеются две возможности; диаграммы с обменами в s -канале или в u -канале. (Диаграммы t -канала не улучшают ситуацию, так как они дают такой же вклад и с тем же знаком.) В случае альтернативы, связанной с тяжелым лептоном, диаграмма с обменом в u -канале, показанная на рис. 11,3а, приводит к амплитуде

$$\begin{aligned} T_u(\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-) &= -2g'^2 \bar{\nu}(p') \frac{\hat{e}(\not{p} - \not{k}') \hat{e}'(1 - \gamma_5)}{(\not{p} - \not{k}')^2 - m_E^2} u(p) \approx \\ &\approx \frac{-2g'^2}{M_W^2} \bar{\nu}(p') \hat{k}' (1 - \gamma_5) u(p). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Если $g^2 = g'^2$, вклад в (11.27), обладающий таким высокоэнергетическим поведением, сокращается.

В случае альтернативы, связанной с нейтральным векторным бозоном, диаграмма с обменом в s -канале, показанная на

рис. 11.3, б, приводит к амплитуде

$$T_s(\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-) = -i\bar{v}(p')(-if\gamma_\beta)(1-\gamma_5)u(p)L_{\alpha\mu\nu}\epsilon'^\mu(k')\epsilon^\nu(k) \times \\ \times i[-g^{\alpha\beta} + (k+k')^\alpha(k+k')^\beta/M_Z^2]/[(k+k')^2 - M_Z^2]. \quad (11.33)$$

Выбирая взаимодействие бозонов ZWW так, чтобы оно имело янг-миллсовскую структуру:

$$L_{\alpha\mu\nu} = -if'[(k'-k)_\alpha g_{\mu\nu} - (2k'+k)_\nu g_{\alpha\mu} + (2k+k')_\mu g_{\alpha\nu}], \quad (11.34)$$

получим

$$\epsilon'^\mu\epsilon^\nu L_{\alpha\mu\nu} = -if'[(k'-k)_\alpha(\epsilon' \cdot \epsilon) - 2(k' \cdot \epsilon)\epsilon'_\alpha + 2(k \cdot \epsilon')\epsilon_\alpha] \approx \\ \approx -i\frac{f'}{M_W^2}[(k-k')_\alpha(k \cdot k')]. \quad (11.35)$$

Следовательно,

$$T_s \approx \frac{-ff'}{M_W^2}\bar{v}(p')\hat{k}'(1-\gamma_5)u(p). \quad (11.36)$$

Если теперь положить $ff' = 2g^2$, то амплитуда (11.36) при высоких энергиях также взаимно уничтожится с амплитудой (11.27).

Фактически, если мы потребуем, чтобы все нарушающие унитарность амплитуды уничтожались, то в результате придем к

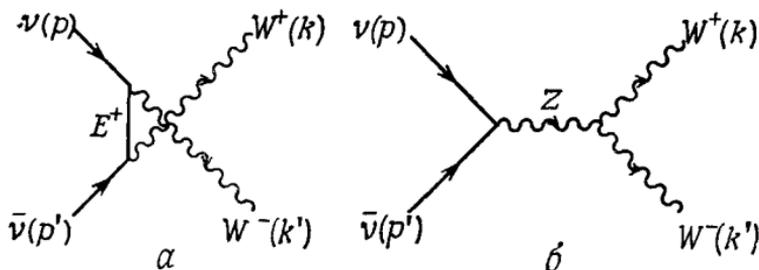


Рис. 11.3. Процесс $\nu\bar{\nu} \rightarrow W^+W^-$ с обменами а — в u -канале и б — в s -канале.

перенормируемому лагранжиану, который будет иметь тот же вид, что и лагранжиан, выведенный формально в рамках алгебраического подхода. (Детали такого построения изложены в работах [40, 100, 276].)

Выбрав в качестве калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$, можно сразу же написать калибровочно-инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}, \quad (11.37)$$

где величины

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.38)$$

и

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (11.39)$$

являются тензорными калибровочными полями для групп $SU(2)$ и $U(1)$ соответственно. Очевидно, что теория с таким лагранжианом до спонтанного нарушения симметрии описывает четыре типа безмассовых калибровочных бозонов.

Фермионы (в приближении одного поколения)

В этом разделе исследуется стандартная модель с фермионным сектором, состоящим только из лептонов e и ν_e и кварков u и d . Оказывается, такая упрощенная теория полностью самосогласованна. Введение более тяжелых фермионов, таких, как μ , s , c и т. д., исследуются в разд. 11.3.

Как уже отмечалось в разд. 11.1, в рассматриваемой модели основными динамическими фермионными степенями свободы являются двухкомпонентные поля с определенной спиральностью. Или, более конкретно, поскольку в калибровочных взаимодействиях сохраняется спиральность, мы можем и должны исходить из независимых левых и правых фермионов. Таким образом, первое поколение состоит из следующих 15 двухкомпонентных спиноров:

$$\psi = \nu_{eL}, e_L, e_R, u_L, u_R, d_L, d_R, \quad (11.40)$$

где

$$e_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e, \quad e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e \text{ и т. д.} \quad (11.41)$$

Цветовой индекс $\alpha = 1, 2, 3$ у кварковых полей мы опускаем.

Квантовые числа в $SU(2) \times U(1)$ -модели. Из (11.5), (11.7), (11.20) и (11.22) следует, что генераторами группы $SU(2)$ являются слабые токи:

$$T_+ = \int (\nu_{eL}^\dagger e_L + u_L^\dagger d_L) d^3x, \quad T_- = (T_+)^\dagger, \quad (11.42)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \int (\nu_{eL}^\dagger \nu_{eL} - e_L^\dagger e_L + u_L^\dagger u_L - d_L^\dagger d_L) d^3x.$$

Из этих выражений для генераторов группы $SU(2)$ ясно, что величины

$$l_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \text{ и } q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (11.43)$$

являются $SU(2)$ -дублетами, а e_R, u_R и d_R — синглетами. Группа $U(1)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы электрический заряд

$$\begin{aligned} Q &= \int \left(-e^\dagger e + \frac{2}{3} u^\dagger u - \frac{1}{3} d^\dagger d \right) d^3x = \\ &= \int \left(-e_L^\dagger e_L - e_R^\dagger e_R + \frac{2}{3} u_L^\dagger u_L + \frac{2}{3} u_R^\dagger u_R - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} d_L^\dagger d_L - \frac{1}{3} d_R^\dagger d_R \right) d^3x \quad (11.44) \end{aligned}$$

представлял собой линейную комбинацию генератора группы $U(1)$ и генератора T_3 группы $SU(2)$ в (11.42). Видно, что комбинация

$$Q - T_3 = \int \left[-\frac{1}{2} (v_{eL}^\dagger v_{eL} + e_L^\dagger e_L) + \frac{1}{6} (u_L^\dagger u_L + d_L^\dagger d_L) - e_R^\dagger e_R + \frac{2}{3} u_R^\dagger u_R - \frac{1}{3} d_R^\dagger d_R \right] d^3x \quad (11.45)$$

обладает тем свойством, что для нее все члены любого из $SU(2)$ -дублетов в (11.43) имеют одно и то же квантовое число. Очевидно, что она коммутирует с генераторами группы $SU(2)$, т. е.

$$[Q - T_3, T_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.46)$$

Тогда мы выберем оператор

$$Y = 2(Q - T_3) \quad (11.47)$$

в качестве генератора группы $U(1)$ и будем называть его *слабым гиперзарядом*. В отличие от генераторов T_i генератор Y не удовлетворяет никаким нелинейным коммутационным соотношениям. Масштаб этого генератора, т. е. коэффициент пропорциональности между ним и оператором $Q - T_3$, можно выбрать произвольно. Чтобы получить правильные значения электрического заряда различных частиц, нужно воспользоваться уравнениями (11.45) и (11.47) и положить

$$\begin{aligned} Y(l_L) &= -1, & Y(e_R) &= -2, \\ Y(q_L) &= 1/3, & Y(u_R) &= 4/3, & Y(d_R) &= -2/3. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Эти значения гиперзаряда совпадают с удвоенным средним зарядом каждого мультиплетта, так как среднее значение генератора T_3 всегда равно нулю. Следует отметить, что групповая структура позволяет произвольно выбрать гиперзаряд. Таким образом, «квантование заряда» (т. е. равенство электрических зарядов частиц целому кратному некоторой основной единицы) не выполняется автоматически в $SU(2)_L \times U(1)$ -теории. Это может иметь место только в том случае, если калибровочная группа является полупростой. В гл. 14 мы увидим, что это действительно так в случае объединения электрослабой теории с квантовой $SU(3)$ -хромодинамикой в рамках «калибровочной теории великого объединения».

Сокращение аномалий. Как уже отмечалось в разд. 6.2 и 9.3, аномалии АБД мешают калибровочным теориям быть перенормируемыми [59, 174, 201]. Калибровочные взаимодействия фермионов не должны приводить к аномальным тождествам Уорда. Таким образом, в фермионном представлении R с матрицами представления $T^a(R)$ след $\text{tr}(\{T^a(R), T^b(R)\}T^c(R))$ в (6.60) должен обращаться в нуль.

В рассматриваемом случае фермионы являются либо дублетами, либо синглетами относительно группы $SU(2)$. Матрица T^a должна быть либо матрицей Паули τ^a , либо $U(1)$ -гиперзарядом Y . Поскольку в случае группы $SU(2)$ аномалии отсутствуют,

$$\text{tr}(\{\tau^i, \tau^j\} \tau^k) = 2\delta^{ij} \text{tr}(\tau^k) = 0, \quad (11.49)$$

рассмотрим случаи, где по крайней мере одна из матриц T является гиперзарядом Y . Так как все члены данного $SU(2)$ -мультиплетта имеют одно и то же значение гиперзаряда, в случае, когда две из матриц T являются матрицами Y , имеем

$$\text{tr}(\tau^i Y Y) \sim \text{tr}(\tau^i) = 0,$$

а в случае, когда одна матрица T является матрицей Y ,

$$\text{tr}(\{\tau^i, \tau^j\}, Y) = 2\delta^{ij} \text{tr} Y. \quad (11.49a)$$

Таким образом, вклад аномалии пропорционален следу матрицы Y (сумме гиперзарядов всех фермионов):

$$\text{tr} Y = \sum_i Y_i = \sum_{\text{лептоны}} Y + \sum_{\text{кварки}} Y.$$

Но это выражение обратится в нуль, если в него подставить значения гиперзаряда фермионов в каждом поколении:

$$\sum_{\text{лептоны}} Y = -1 \times 2 - 2 = -4, \quad (11.49b)$$

$$\sum_{\text{кварки}} Y = 3 \left(\frac{1}{3} \times 2 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = 4.$$

Множитель 3 перед скобками возникает из-за цветовых степеней свободы. В случае когда все три матрицы T являются гиперзарядом Y , из (11.47) получаем

$$\text{tr}(Y Y Y) = 8 \text{tr}(Q^3 - 3Q^2 T_3 + 3Q T_3^2 - T_3^3) \sim \text{tr}(Q^2 T_3 - Q T_3^2), \quad (11.50a)$$

поскольку $\text{tr} T_3^3 = 0$, а членами с Q^3 мы можем пренебречь, так как электромагнитный ток является вектором (V), а треугольные фермионные петли типа $V V V$ не приводят к аномалиям. Явные вычисления правой части (11.50a) приводят к следующим результатам:

$$\sum_{\text{лептоны}} (Q^2 T_3 - Q T_3^2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}, \quad (11.50b)$$

$$\sum_{\text{кварки}} (Q^2 T_3 - Q T_3^2) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, аномалии вновь сокращаются, как в (11.49), и можно заключить, что при выборе фермионных квантовых чисел (11.43) и (11.48) $SU(2) \times U(1)$ -теория свободна от аномалий АБД.

На самом деле существует простой способ демонстрации сокращения аномалий, выражаемый соотношениями (11.49) и (11.50). Если использовать (11.47), то соотношения (11.49а) и (11.50а) можно записать в виде

$$\text{tr } Y \sim \text{tr } Q, \quad (11.51)$$

$$\text{tr}(Q^2 T_3 - Q T_3^2) \sim \text{tr}(T_3 Q Y) \sim \text{tr}(T_3^2 Y) \sim \text{tr } Q,$$

поскольку $\text{tr}(T_3 Q^2) = \text{tr}(T_3 Y^2) = \text{tr}(T_3^3) = 0$. Таким образом, нетривиальный вклад в аномалию АБД в $SU(2) \times U(1)$ -теории пропорционален

$$\text{tr } Q = \sum_i Q_i = 0. \quad (11.52)$$

Заряды лептонов и кварков взаимно уничтожаются, если принять во внимание три цветовые степени свободы. [Замечание: учитывая (11.52), можно показать, что в полной стандартной $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -модели аномалии отсутствуют. Точнее, вклады от дополнительных треугольных диаграмм с глюонами и калибровочными электрослабыми бозонами также взаимно уничтожаются.]

Калибровочно-инвариантный лагранжиан с фермионами (11.40) имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,$$

где

$$\mathcal{L}_2 = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (11.53)$$

а ковариантная производная имеет вид

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - i g \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu + i g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi. \quad (11.54)$$

Например,

$$D_\mu l_L = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) l_L, \quad (11.55)$$

$$D_\mu e_R = \left(\partial_\mu + i g' B_\mu \right) e_R. \quad (11.56)$$

Заметим, в частности, что в лагранжиане \mathcal{L} нет калибровочно-инвариантных членов, билинейных по фермионным полям. Следовательно, $SU(2) \times U(1)$ -симметричные члены, соответствующие фермионным массам, отсутствуют.

Механизм Хиггса нарушения симметрии

Мы должны ввести набор скалярных полей Φ , причем это нужно сделать так, чтобы вакуумное среднее $\langle \Phi \rangle_0$ было инвариантным относительно группы $U(1)_{\text{эм}}$. В этом случае симмет-

рия нарушается следующим образом:

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \Phi \rangle_0} U(1)_{\text{эм}}.$$

Из первоначальных четырех калибровочных бозонов $SU(2) \times U(1)$ -теории три станут массивными, а один, соответствующий фотону, останется безмассовым.

Как мы видели в разд. 8.3, комплексный скалярный дублет полностью нарушает $SU(2)$ -симметрию, и один из членов этого дублета должен быть нейтральным, чтобы была возможность сделать $\langle \Phi \rangle_0 U(1)_{\text{эм}}$ -инвариантным. Необходимо иметь комплексный дублет следующего вида:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad Y(\Phi) = 1. \quad (11.57)$$

Полный калибровочно-инвариантный лагранжиан, содержащий скалярные поля, тогда имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4; \quad (11.58)$$

здесь

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (11.59)$$

где

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau \cdot \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \Phi, \quad (11.60)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (11.61)$$

Наиболее общее юкавское $SU(2) \times U(1)$ -взаимодействие между скалярами и фермионами описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_4 = f^{(e)} \bar{l}_L \Phi e_R + f^{(u)} \bar{q}_L \tilde{\Phi} u_R + f^{(d)} \bar{q}_L \Phi d_R + \text{эрмит. сопр.}, \quad (11.62)$$

где изодублет

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$$

обладает гиперзарядом $Y(\tilde{\Phi}) = -1$.

Как уже обсуждалось в разд. 5.3 и 8.3, при положительных μ^2 и λ в (11.61) имеет место спонтанное нарушение симметрии, так как вакуумное среднее скалярного изодублета отлично от нуля:

$$\langle \Phi \rangle_0 \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{где } v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (11.63)$$

Спектры частиц и взаимодействия в унитарной калибровке

Используя для скалярных полей полярные координаты, представим изодублет в виде

$$\Phi(x) = U^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

где

$$U(\xi) = \exp[i\xi(x) \cdot \tau/v]. \quad (11.64)$$

Таким образом, два первоначальных комплексных поля $\phi^+(x)$ и $\phi^0(x)$ в (11.57) параметризуются с помощью четырех вещественных полей $\xi_i(x)$ и $\eta(x)$. Эти сдвинутые поля имеют нулевые вакуумные средние:

$$\langle 0 | \xi_i | 0 \rangle = \langle 0 | \eta | 0 \rangle = 0. \quad (11.65)$$

Чтобы определить спектр частиц, проведем калибровочное преобразование и перейдем к унитарной калибровке, определяя новые поля. [Замечание: Мы упростили выражение (11.64). В принципе поля ξ_i в показателе экспоненты должны умножаться на генераторы всех нарушенных симметрий, как в соотношении (8.127). Но в рассматриваемом случае это различие несущественно.] Получим

$$\Phi' = U(\xi) \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

или

$$\Phi'(x) = \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \chi, \quad \text{где } \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.66)$$

и

$$\begin{aligned} l'_L &= U(\xi) l_L, & e'_R &= e_R, \\ q'_L &= U(\xi) q_L, & u'_R &= u_R, & d'_R &= d_R, \end{aligned} \quad (11.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} &= U(\xi) \left(\frac{\tau \cdot A_\mu}{2} \right) U^{-1}(\xi) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\xi)] U^{-1}(\xi), \\ B'_\mu &= B_\mu. \end{aligned}$$

Затем выразим каждое слагаемое \mathcal{L}_i в (11.58) через новые поля. Рассмотрим сначала слагаемое, содержащее поля Φ , и, используя (11.66), получим

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \Phi')^\dagger (D^\mu \Phi') - V(\Phi'), \quad (11.68)$$

где

$$D_\mu \Phi' = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{2} \tau \cdot A'_\mu - i \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \left[\frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \right] \chi, \quad (11.69)$$

$$V(\Phi') = \mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 \quad (11.70)$$

и

$$\mathcal{L}_4 = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} [f^{(e)} \bar{e}'_L e'_R + f^{(u)} \bar{u}'_L u'_R + f^{(d)} \bar{d}'_L d'_R] + \\ + \frac{v}{\sqrt{2}} [f^{(e)} \bar{e}'_L e'_R + f^{(u)} \bar{u}'_L u'_R + f^{(d)} \bar{d}'_L d'_R] + \text{эрмит. сопр.}, \quad (11.71)$$

Спектр масс. Из приведенных выше уравнений можно легко выделить массовые члены, билинейные по полям:

а. *Скалярная масса* (физической хиггсовской частицы)

$$m_\eta = \sqrt{2} \mu. \quad (11.72)$$

б. *Фермионные массы*

$$m_e = f^{(e)} v / \sqrt{2}, \quad m_u = f^{(u)} v / \sqrt{2}, \quad m_d = f^{(d)} v / \sqrt{2}. \quad (11.73)$$

в. *Массы векторных мезонов.* Три несостоявшихся голдстоуновских бозона $\xi(x)$ исчезают в результате преобразований (11.66). (Говорят, что они «съедаются» калибровочными бозонами с образованием трех массивных ПВБ.) Массы векторных мезонов входят в член $(D_\mu \Phi')^2$ лагранжиана \mathcal{L}_3 :

$$\mathcal{L}_{VMM} = \frac{v^2}{2} \chi^\dagger \left(\frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}'_\mu + \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \left(\frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}'^\mu + \frac{g'}{2} B'^\mu \right) \chi = \\ = \frac{v^2}{8} \{ g^2 [(A'_\mu)^2 + (A'^2_\mu)^2] + (gA'^3_\mu - g'B'^2_\mu)^2 \} \equiv \\ \equiv M_W^2 W_\mu^\dagger W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu. \quad (11.74)$$

Необходимо провести следующее отождествление собственных состояний массовых и зарядовых матриц. Для заряженных векторных мезонов

$$M_W^2 W_\mu^\dagger W^{-\mu} = \frac{g^2 v^2}{8} [(A'_\mu)^2 + (A'^2_\mu)^2]. \quad (11.75)$$

Следовательно,

$$W_\mu^\pm = (A'^1_\mu \mp i A'^2_\mu) / \sqrt{2}, \quad (11.76)$$

$$M_W^2 = g^2 v^2 / 4. \quad (11.77)$$

Что касается нейтральных векторных мезонов, то так как группа $U(1)_{\text{эм}}$ не нарушена, т. е. $Q\langle\Phi\rangle_0 = 0$, то связанный с ней калибровочный бозон (фотон) остается безмассовым, и мы имеем

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{v^2}{8} (gA'^3_\mu - g'B'^2_\mu)^2 = \\ = \frac{v^2}{8} (A'^3_\mu, B'_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^3_\mu \\ B'^2_\mu \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} (Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}. \quad (11.78)$$

Массовую матрицу мы диагонализировали с помощью ортогонального преобразования

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_W A'_\mu - \sin \theta_W B'_\mu, \\ A_\mu &= \sin \theta_W A'_\mu + \cos \theta_W B'_\mu, \end{aligned} \quad (11.79)$$

где

$$\operatorname{tg} \theta_W = g'/g, \quad (11.80)$$

$$M_Z^2 = v^2 (g^2 + g'^2)/4. \quad (11.81)$$

Угол поворота θ_W обычно называют *углом Вайнберга*. Используя соотношения (11.27), (11.80) и (11.81), мы найдем отношение масс векторных мезонов

$$\rho = M_W^2 / (M_Z^2 \cos^2 \theta_W) = 1. \quad (11.82)$$

Хиггсовский дублет и равенство $\rho = 1$. Мы вывели (11.82), используя хиггсовские скаляры в дублетном представлении. Напомним некоторые этапы этого вывода. Из требования калибровочной инвариантности следует, что скалярный потенциал (11.61) является функцией величины $|\Phi|^2$, которую можно рассматривать как квадрат длины 4-вектора с четырьмя вещественными компонентами изодублета Φ . Таким образом, $V(\Phi) = V(|\Phi|^2)$ обладает более широкой симметрией $O(4) \approx SU(2)_L \times SU(2)'$, а после спонтанного нарушения симметрии (11.63) симметрией $O(3) \approx SU(2)$. Нам уже встречался такой пример нарушения симметрии в разд. 5.3, где рассматривалась σ -модель $SU(2) \times SU(2)$. Мультиплет (σ, π) преобразуется по представлению $(1/2, 1/2)$ при преобразованиях из группы $SU(2) \times SU(2)$ и является 4-вектором относительно $O(4)$ -симметрии. Истинный вакуум выделяет направление (там было выбрано σ -направление), и симметрия теории нарушается до группы $O(3)$, а π по-прежнему остается вырожденным триплетом. В данном случае A_μ остается вырожденным триплетом относительно остаточной $O(3)$ -симметрии. Поэтому мы имеем очень важное равенство для трех билинейных по полям членов в выражении (11.74):

$$\left(\frac{g}{2} \tau \langle \Phi \rangle_0 \mathbf{A}_\mu \right)^2 = \frac{1}{2} M_W^2 [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 + (A_\mu^3)^2]. \quad (11.83)$$

Если теперь принять, что полю A_μ^3 также соответствует массовый член $1/2 M_W^2$, то вид массовой матрицы в (11.78) для нейтральных ПВБ полностью фиксируется значениями следа ($= M_Z^2/2$) и детерминанта ($= 0$):

$$\frac{1}{2} (A_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} M_W^2 & M_W (M_Z^2 - M_W^2)^{1/2} \\ M_W (M_Z^2 - M_W^2)^{1/2} & M_Z^2 - M_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (11.84)$$

Отсюда немедленно получается выражение для отношения масс (11.82).

Заряженные токи. Чтобы отождествить токи в изучаемой модели с токами в $V - A$ -теории, рассмотрим теперь калибровочные взаимодействия фермионов, содержащиеся в лагранжиане \mathcal{L}_2 (11.53), (11.54):

$$\begin{aligned} \bar{l}'_L \left(\frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{A}}' - \frac{g'}{2} \hat{B}' \right) l'_L + \bar{q}'_L \left(\frac{g}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{A}}' + \frac{g}{6} \hat{B}' \right) q'_L - \\ - \bar{e}'_R g' \hat{B}' e'_R + \bar{u}'_R \frac{2g'}{3} \hat{B}' u'_R - \bar{d}'_R \frac{g'}{3} \hat{B}' d'_R = \\ = g \left(\frac{1}{2} \bar{l}'_L \boldsymbol{\tau} \gamma_\mu l'_L + \frac{1}{2} \bar{q}'_L \boldsymbol{\tau} \gamma_\mu q'_L \right) \cdot \mathbf{A}'^\mu + \\ + \frac{1}{2} g \left(-\bar{l}'_L \gamma_\mu l'_L + \frac{1}{3} \bar{q}'_L \gamma_\mu q'_L - 2\bar{e}'_R \gamma_\mu e'_R + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \bar{u}'_R \gamma_\mu u'_R - \frac{2}{3} \bar{d}'_R \gamma_\mu d'_R \right) B'^\mu \equiv (gJ_\mu^1 A'^{1\mu} + gJ_\mu^2 A'^{2\mu}) + \\ + \left(gJ_\mu^3 A'^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B'^\mu \right), \quad (11.85) \end{aligned}$$

которые соответствуют взаимодействиям заряженных и нейтральных токов.

Взаимодействие заряженных токов в (11.85) описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{CC} = (gJ_\mu^1 A'^{1\mu} + gJ_\mu^2 A'^{2\mu}) = \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}), \quad (11.86)$$

где поля W_μ^\pm определены в (11.76), а

$$\begin{aligned} J_\mu^+ = J_\mu^1 + iJ_\mu^2 = \bar{\nu}'_L \gamma_\mu e'_L + \bar{u}'_L \gamma_\mu d'_L = \\ = \frac{1}{2} \bar{\nu}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e' + \frac{1}{2} \bar{u}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d'. \quad (11.87) \end{aligned}$$

Низкоэнергетическое четырехфермионное взаимодействие, показанное на рис. 11.1, можно описать следующим эффективным лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{\Phi\Phi}^{CC} = \frac{-g^2}{2M_W^2} J_\mu^+ J^{-\mu}, \quad (11.88)$$

а это в точности лагранжиан $V - A$ -теории. Сравнивая (11.88) с (11.3), (11.5) и (11.87), можно положить

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (11.89)$$

Из этого соотношения с помощью (11.77) получаем, что вакуумное среднее (11.63) равно

$$v = 2^{-1/4} G_F^{-1/2} \approx 250 \text{ ГэВ}. \quad (11.90)$$

Нейтральные токи. Для нейтральных токов в (11.85) имеем

$$\mathcal{L}_{NC} = gJ_\mu^3 A'^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B'^\mu = gJ_\mu^3 (\cos \theta_W Z^\mu + \sin \theta_W A^\mu) + \\ + \operatorname{tg} \theta_W g (J_\mu^{3M} - J_\mu^3) (\cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu), \quad (11.91)$$

где использованы соотношения (11.79), (11.80) и (11.47). Таким образом,

$$\mathcal{L}_{NC} = eJ_\mu^{3M} A^\mu + (g/\cos \theta_W) J_\mu^0 Z^\mu, \quad (11.92)$$

где

$$e = g \sin \theta_W, \quad (11.93)$$

$$J_\mu^0 = J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W J_\mu^{3M}. \quad (11.94)$$

Нейтральные токи можно явно записать через фермионные поля:

$$J_\mu^0 = \sum_f [g_L^f \bar{f}_L \gamma_\mu f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma_\mu f_R] = \\ = \frac{1}{2} \sum [g_L^f \bar{f} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) f + g_R^f \bar{f} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) f], \quad (11.95a)$$

где $f = \nu_e, e, u$ и d . Константами взаимодействия слабых нейтральных токов являются

$$g_{L,R}^f = T_3(f_{L,R}) - Q(f) \sin^2 \theta_W. \quad (11.95b)$$

Тогда из (11.42) и (11.44) имеем

$$g_L^\nu = \frac{1}{2}, \quad g_R^\nu = 0, \\ g_L^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \quad g_R^e = \sin^2 \theta_W, \\ g_L^u = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_R^u = -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \\ g_L^d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_R^d = \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W. \quad (11.95b)$$

Исходя из взаимодействия (11.92), можно получить низкоэнергетическое четырехфермионное взаимодействие, соответствующее произведению нейтральных токов:

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{NC} = \frac{-g^2}{2 \cos^2 \theta_W M_Z^2} J_\mu^0 J^{0\mu} = \frac{-g^2}{2M_W^2} J_\mu^0 J^{0\mu}, \quad (11.96)$$

где мы воспользовались равенством (11.82). Множитель 2 в знаменателе возникает из-за симметричного множителя в фейнмановских правилах для двух одинаковых токов в (11.96). Таким образом, $SU(2) \times U(1)$ -теория предсказывает набор слабых взаимодействий, сравнимых по интенсивности с хорошо известными фермиевскими взаимодействиями заряженных токов. В качестве иллюстрации рассмотрим упругое $\nu_e e$ -рассеяние, в которое дают

вклад как заряженные, так и нейтральные токи. Низкоэнергетическая амплитуда (рис. 11.4) имеет вид

$$T(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) = \frac{g^2}{8M_W^2} \left\{ [\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e] [\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e] [\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e - 4 \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma^\mu e] \right\}. \quad (11.97)$$

Используя соотношения Фирца (см. приложение А), эти два тока можно объединить следующим образом:

$$T(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e] [\bar{e} \gamma^\mu (a - b \gamma_5) e],$$

где

$$a = 2 \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{2}. \quad (11.98)$$

Естественно, старая $V - A$ -теория получается при $a = b = 1$.

Как описано в гл. 12, именно такой класс процессов с нейтральными токами был открыт в экспериментах при высоких

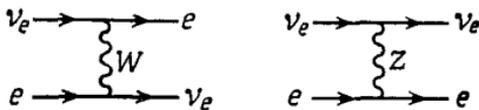


Рис. 11.4. Вклады заряженных и нейтральных токов в упругое $\nu_e e$ -рассеяние.

энергиях. Все экспериментальные данные согласуются с теоретическими предсказаниями для значений угла Вайнберга, близких к значению (см. обзор в [235])

$$\sin^2 \theta_W \approx 0,22. \quad (11.99)$$

Обсуждение. Следующим важным шагом в проверке стандартной теории является, безусловно, открытие заряженных и нейтрального калибровочных бозонов с массами и зарядами, которые она предсказывает. Из соотношений (11.89) и (11.93) имеем

$$M_W = 2^{-5/4} e G_F^{-1/2} / \sin \theta_W \approx 37 \text{ ГэВ} / \sin \theta_W. \quad (11.100)$$

Взяв значение θ_W из (11.99), мы получаем, что $M_W \approx 80$ ГэВ, а из (11.82) находим $M_Z \approx 90$ ГэВ. Другой чрезвычайно важной проверкой будет открытие хиггсовской частицы η . Но численное значение массы m_η (11.72) не фиксируется измеренными ранее величинами. Это сильно затрудняет поиск частицы η , особенно если учесть, что она слабо взаимодействует с фермионами — в соответствии с (11.71) это взаимодействие порядка $(m_f/M_W)e$.

В стандартной теории, даже только с одним семейством фермионов, имеется семь произвольных параметров e , $\sin \theta_W$, M_W ,

m_η, m_e, m_u, m_d . В первоначальном симметричном лагранжиане семью произвольными параметрами являются: две калибровочные константы взаимодействия g и g' , две константы самодействия скалярного поля μ^2 и λ и три константы юкавского взаимодействия $f^{(e)}, f^{(u)}$ и $f^{(d)}$. Заметим, что объединение электромагнитного и слабого взаимодействия в некотором смысле не является полным; мы вынуждены вводить две константы g и g' , чтобы включить эти два класса взаимодействий. Исследования, связанные с поиском дальнейших объединений, обсуждаются в гл. 14.

Наконец, подчеркнем, что руководящими принципами при построении калибровочных моделей являются принципы симметрии и перенормируемости. Мы должны включить в лагранжиан *все* калибровочно-инвариантные члены размерности четыре и меньше. Только накладывая требования определенной глобальной симметрии, можно отбросить некоторые из этих членов, не нарушая перенормируемости теории. В случае стандартной электрослабой теории нельзя наложить какой-либо специальной глобальной симметрии. Законы сохранения, имеющиеся в теории, такие, как законы сохранения барионного или лептонного числа, после выбора представлений для фермионных и скалярных полей являются просто следствиями калибровочной инвариантности и перенормируемости. Таким образом, в каждом фермионном поколении должны присутствовать как лептоны, так и кварки, чтобы из-за аномалий АБД не нарушалась перенормируемость теории. С другой стороны, перекрестные взаимодействия лептонов и кварков в (11.62) отсутствуют, так как они запрещены калибровочной симметрией. Например, если бы существовал набор скаляров, преобразующийся как дублет при преобразованиях из группы $SU(2)$ и как триплет при преобразованиях из группы $SU(3)_{\text{цвет}}$: h_α^i ($i = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3$), то мы располагали бы калибровочно-инвариантными юкавскими взаимодействиями $\bar{l}_{iL} h_{\alpha Q}^i q_R^\alpha$ и $\bar{q}_{i\alpha} h_{\beta Y}^i g_Y^{\alpha\beta\gamma} e^{\alpha\beta\gamma}$, которые соответствуют членам, не сохраняющим барионный B и лептонный L заряды. Таким образом, теория Вайнберга — Салама автоматически приводит к сохранению B и L . (Мы пренебрегаем здесь ненаблюдаемо малым инстантонным эффектом [388].) Нарушение закона сохранения лептонного числа массовыми членами майорановского нейтрино рассматривается в разд. 13.2. Законы сохранения барионного и лептонного чисел нарушаются в калибровочных теориях великого объединения (см. гл. 14).

11.3. ДУБЛИРОВАНИЕ ФЕРМИОННЫХ ПОКОЛЕНИЙ

В разд. 11.2 мы показали, как строится основной вариант стандартной теории электрослабой калибровочной теории, в котором число фермионов ограничено: 15 двухкомпонентных по-

лей в (11.40). Левые поля преобразуются как дублеты, а правые являются синглетами. Теперь мы хотели бы избавиться от этого ограничения. Из выражений (11.5) и (11.9) следует, что мы можем рассматривать другие левые фермионные дублеты

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d_\theta \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s_\theta \end{pmatrix}_L, \quad (11.101)$$

где

$$d_\theta = \cos \theta_c d + \sin \theta_c s, \quad s_\theta = \cos \theta_c s - \sin \theta_c d; \quad (11.102)$$

правые поля являются синглетами. Другими словами, в теории происходит «дублирование» фермионной структуры. Открытия лептонов τ , ν_τ [321, 322] и кварка b [219, 253] позволяют утверждать, что это дублирование продолжается: экспериментальные данные не противоречат предположению о том, что $(\nu_\tau, \tau)_L$ является $SU(2)$ -дублетом и что существует еще более тяжелый кварк t , составляющий дублет с кварком b . В этом разделе мы ставим задачу ввести систематическим образом эти фермионы в стандартную модель. Хотелось бы понять, почему в кварковом дублете присутствует угол Кабиббо, а в лептонном секторе соответствующего угла смешивания нет. Другими важными фактами, связанными с наличием многих фермионных поколений, являются подавление эффектов нейтральных токов, изменяющих аромат, и фазы нарушения CP -инвариантности в калибровочных взаимодействиях (см. также разд. 12.2).

Калибровочные и массовые собственные состояния

Присутствие угла Кабиббо в выражениях (11.102) уже указывает на то, что мы должны различать два типа фермионных состояний: собственные состояния калибровочных взаимодействий (имеющие определенные свойства относительно калибровочных преобразований, т. е. поля d_θ и s_θ) и собственные состояния массовых матриц (т. е. поля d и s); они связаны друг с другом некоторым линейным преобразованием. Это происходит из-за того, что до спонтанного нарушения симметрии (СНС) фермионы являются безмассовыми, а после СНС собственные состояния массовой матрицы фермионов определяются юкавским взаимодействием. Дублирование фермионных поколений, которое упоминалось во введении к этому разделу, означает, что имеется несколько групп с одинаковыми калибровочными собственными состояниями. Таким образом, фермионные состояния обладают индексом «семейства», или «поколения»: $A = e, \mu, \tau, \dots$. В разд. 11.2 мы рассмотрели упрощенную конструкцию только с одним поколением фермионов. В этом приближении между калибровочными собственными состояниями и собственными состояниями массовых матриц нет различия. По-

сколько в разд. 11.2 мы использовали только свойства фермионных полей относительно калибровочных преобразований, то эти поля должны рассматриваться как калибровочные собственные состояния. При последовательном обобщении на случай многих фермионных поколений эти калибровочные собственные состояния в разд. 11.2 заменяются на вектор, каждой компоненте которого соответствует свой индекс поколения. Мы должны сделать следующую подстановку:

$$\begin{aligned} e \rightarrow e'_A &= (e', \mu', \tau'), & \nu_e \rightarrow \nu'_A &= (\nu'_e, \nu'_\mu, \nu'_\tau), \\ u \rightarrow p'_A &= (u', c', t'), & d \rightarrow n'_A &= (d', s', b'). \end{aligned} \quad (11.103)$$

Тогда $SU(2)$ -дублетами являются

$$l_{AL} = \begin{pmatrix} \nu'_A \\ e'_A \end{pmatrix}_L \quad \text{и} \quad q_{AL} = \begin{pmatrix} p'_A \\ n'_A \end{pmatrix}_L. \quad (11.104)$$

Штрих у поля означает, что оно является калибровочным собственным состоянием. (Мы изменили обозначения по сравнению с разд. 11.2, где штрихами отмечались поля в унитарной калибровке.) В частях лагранжиана, описывающих фермионное взаимодействие, предполагается свертка по индексам поколений. Обобщения выражений (11.53) и (11.62) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \bar{l}_{AL} \left(\hat{\partial} - \frac{ig}{2} \tau \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{ig'}{2} \hat{B} \right) l_{AL} + \bar{e}'_{AR} i \left(\hat{\partial} + ig' \hat{B} \right) e'_{AR} + \\ &\quad + \bar{q}_{AL} i \left(\hat{\partial} - \frac{ig}{2} \tau \cdot \hat{\mathbf{A}} - \frac{ig'}{6} \hat{B} \right) q_{AL} + \\ &\quad + \bar{p}'_{AR} i \left(\hat{\partial} - \frac{2ig'}{3} \hat{B} \right) p'_{AR} + \bar{n}'_{AR} i \left(\hat{\partial} + \frac{ig'}{3} \hat{B} \right) n'_{AR}, \end{aligned} \quad (11.105)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= f_{AB}^{(e)} \bar{l}_{AL} \Phi e'_{BR} + f_{AB}^{(p)} \bar{q}_{AL} \Phi p'_{BR} + \\ &\quad + f_{AB}^{(n)} \bar{q}_{AL} \Phi n'_{BR} + \text{эрмит. сопр.} \end{aligned} \quad (11.106)$$

Таким образом, константы юкавских взаимодействий заменяются на матрицы констант взаимодействий, действующие в пространстве поколений. После СНС, определенного в (11.63), получаем выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} [f_{AB}^{(e)} \bar{e}'_{AL} e'_{BR} + f_{AB}^{(p)} \bar{p}'_{AL} p'_{BR} + f_{AB}^{(n)} \bar{n}'_{AL} n'_{BR}] + \\ &\quad + \frac{v}{\sqrt{2}} [f_{AB}^{(e)} \bar{e}'_{AL} e'_{BR} + f_{AB}^{(p)} \bar{p}'_{AL} p'_{BR} + f_{AB}^{(n)} \bar{n}'_{AL} n'_{BR}] + \\ &\quad + \text{эрмит. сопр.}, \end{aligned} \quad (11.107)$$

которое является обобщением выражения (11.71). Поэтому в базе, элементами которого являются калибровочные собственные состояния, массовые матрицы фермионов имеют вид

$$M_{AB}^{(i)} = \frac{-v}{\sqrt{2}} f_{AB}^{(i)}, \quad i = e, p, n. \quad (11.108)$$

Двойные унитарные преобразования. Важно отметить, что нет причин, по которым эти матрицы были бы диагональными; в действительности в общем случае они не симметричны и не эрмитовы. Мы продемонстрируем теперь, что они могут быть диагонализированы двойными унитарными преобразованиями, т. е. для данной матрицы M_{AB} существуют унитарные матрицы S и T , такие, что

$$S^\dagger M T = M_d, \quad (11.109)$$

где M_d — диагональная матрица с положительными собственными значениями. Это утверждение основано на том, что любая матрица M всегда может быть представлена в виде произведения эрмитовой матрицы H и унитарной матрицы V :

$$M = H V, \quad (11.110)$$

причем эрмитова матрица H может быть затем диагонализирована некоторой унитарной матрицей.

Доказательство равенства (11.109) строится следующим образом. Матрица MM^\dagger является эрмитовой и положительно определенной; она может быть диагонализирована унитарной матрицей S :

$$S^\dagger (MM^\dagger) S = M_d^2, \quad (11.111)$$

где

$$M_d^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & & \\ & m_2^2 & \\ & & m_3^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица S определяется не однозначно, а с точностью до диагональной фазовой матрицы, т. е. если выполняется (11.111), то

$$(SF)^\dagger (MM^\dagger) (SF) = M_d^2,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & \\ & e^{i\phi_2} & \\ & & e^{i\phi_3} \end{pmatrix}. \quad (11.112)$$

Эти фазовые степени свободы мы рассмотрим подробнее, когда будем исследовать вопрос о нарушающих CP -инвариантность калибровочных взаимодействиях. Здесь же ими можно воспользоваться для доказательства того, что все собственные значения матрицы M_d в (11.109) являются положительными:

$$M_d = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix}, \quad m_i > 0. \quad (11.113)$$

Определим эрмитову матрицу V следующим образом:

$$H = SM_d S^\dagger; \quad (11.114)$$

тогда можно показать, что матрица

$$V \equiv H^{-1}M, \quad V^\dagger = M^\dagger H^{-1} \quad (11.115)$$

является унитарной в силу соотношений (11.111) и (11.114):

$$\begin{aligned} VV^\dagger &= H^{-1}MM^\dagger H^{-1} = H^{-1}SM_d^2 S^\dagger H^{-1} = \\ &= H^{-1}(SM_d S^\dagger)(SM_d S^\dagger)H^{-1} = H^{-1}HHH^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (11.116)$$

Из определений матриц H и V (11.114) и (11.115) имеем

$$S^\dagger HS = S^\dagger MV^\dagger S = M_d, \quad (11.117)$$

или

$$S^\dagger MT = M_d, \quad (11.118)$$

где $T \equiv V^\dagger S$ также является унитарной матрицей, что и требовалось доказать. Таким образом, мы получаем следующие соотношения между калибровочными собственными состояниями и массовыми собственными состояниями:

$$\bar{\psi}'_L M \psi'_R = (\bar{\psi}'_L S)(S^\dagger MT)(T^\dagger \psi'_R) = \bar{\psi}_L M_d \psi_R, \quad (11.119)$$

где

$$\psi'_L = S\psi_L, \quad \psi'_R = T\psi_R. \quad (11.120)$$

Матрица смешивания во взаимодействиях с заряженными кварковыми токами

Применим теперь этот результат к заряженным слабым кварковым токам, которые можно вывести из (11.105) или из (11.87) с помощью подстановки выражения (11.103):

$$J_{q\mu}^+ = \bar{q}_{AL}\gamma_\mu \tau^+ q_{AL} = \bar{p}'_{AL}\gamma_\mu n'_{AL} = \bar{p}_{AL}\gamma_\mu [S_{(p)}^\dagger S_{(n)}]_{AB} n_{BL}, \quad (11.121)$$

где

$$p'_L = S_{(p)} p_L, \quad n'_L = S_{(n)} n_L. \quad (11.122)$$

Таким образом, в терминах массовых собственных состояний кварковыми дублетами трех семейств являются

$$q_{AL} : \begin{pmatrix} u \\ d'' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s'' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b'' \end{pmatrix}_L, \quad (11.123)$$

где

$$\begin{pmatrix} d'' \\ s'' \\ b'' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (11.124)$$

а $U = S_{(p)}^\dagger S_{(n)}$. Очевидно, что матрица U также является унитарной.

Фазы нарушения CP -инвариантности. Если бы массовые матрицы были вещественными, то матрица U была бы ортогональной, все фермионные калибровочные взаимодействия были бы вещественными и не было бы нарушения CP -инвариантности. С другой стороны, произвольная унитарная матрица 3×3 может быть параметризована тремя вещественными углами поворотов и шестью комплексными фазами. Но не все комплексные фазы имеют физический смысл, так как некоторые из них можно устранить переопределением кварковых полей (за исключением заряженных токов, все остальные члены в лагранжиане диагональны по кварковым ароматам). На первый взгляд кажется, что шесть кварковых ароматов могут поглотить шесть фаз. (Напомним, что q_L и q_R должны подвергаться одному и тому же фазовому преобразованию, чтобы массы оставались вещественными.) В действительности это неверно, так как матрица смешивания U инвариантна при одинаковом изменении фаз всех кварковых полей. Поэтому за счет переопределения можно устранить только пять фаз. Чтобы убедиться в этом явно, начнем с первого дублета в (11.123):

$$q_{1L} = \begin{pmatrix} u \\ U_{11}d + U_{12}s + U_{13}b \end{pmatrix}. \quad (11.125)$$

Если U_{11} имеет фазу δ , т. е.

$$U_{11} = R_{11}e^{i\delta}, \quad R_{11} \text{ — вещественная величина,} \quad (11.126)$$

то ее можно устранить переопределением поля u -кварка:

$$u \rightarrow u' = ue^{-i\delta} \quad (11.127)$$

и

$$q_{1L} = e^{i\delta} \begin{pmatrix} u' \\ R_{11}d + U'_{12}s + U'_{13}b \end{pmatrix}. \quad (11.128)$$

Подобным же образом можно вынести за скобки комплексные фазы величин U_{21} и U_{31} , если переопределить поля s - и t -кварков в (11.123). Появившиеся перед дублетами общие фазовые множители несущественны, поскольку калибровочное взаимодействие между дублетами с различными индексами поколений в (11.105) отсутствует. Наконец, фазы величин U_{12} и U_{13} можно убрать, переопределяя s - и b -поля. Тогда дублеты (11.123) принимают вид

$$\begin{pmatrix} u' \\ R_{11}d + R_{12}s' + R_{13}b' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c' \\ R_{21}d + R_{22}e^{i\delta_1}s' + R_{23}e^{i\delta_1}b' \end{pmatrix}_L, \\ \begin{pmatrix} t' \\ R_{31}d + R_{32}e^{i\delta_2}s' + R_{33}e^{i\delta_2}b' \end{pmatrix}_L. \quad (11.129)$$

Мы уменьшили число параметров до 13 (9 величин R_{ij} и 4 фазы δ_i). Нормировка каждого состояния приводит к трем условиям, а ортогональность между различными состояниями приводит еще к шести условиям. Поэтому остаются четыре независимых параметра. Поскольку для вещественной ортогональной матрицы 3×3 необходимо иметь три параметра, в конце концов у нас остается одна независимая фаза.

Мы закончим обсуждение описанной выше процедуры подсчета независимых параметров, применив ее к общему случаю n дублетов. Комплексная матрица $n \times n$ описывается $2n^2$ вещественными параметрами; если на нее наложить условие унитарности, то число параметров уменьшится до n^2 . Далее $(2n - 1)$ фаза может быть устранена переопределением кварковых состояний. Помня о том, что ортогональная матрица $n \times n$ описывается $n(n - 1)/2$ параметрами (углами), мы получаем следующее число независимых физических фаз:

$$n^2 - (2n - 1) - n(n - 1)/2 = (n - 1)(n - 2)/2. \quad (11.130)$$

Таким образом, в теории с двумя поколениями имеется только один угол смешивания — угол Кабиббо, а фазы отсутствуют. Только в теории с $2 \times 3 = 6$ кварковыми ароматами можно получить нетривиальную фазу нарушения CP -инвариантности в калибровочном взаимодействии кварков. Это наблюдение впервые было сделано Кобаяси и Маскава [238], и унитарную матрицу (11.124) часто называют матрицей КМ. Феноменология, связанная с нарушением CP -инвариантности в калибровочных теориях, обсуждается в разд. 12.2.

Вырождение массы нейтрино и отсутствие лептонного смешивания

Мы видели, что стандартная теория дает естественное объяснение присутствия угла Кабиббо и CP -фаз в заряженных кварковых токах. Подобным образом та же теория помогает понять отсутствие этих параметров в лептонном секторе; безмассовость нейтрино приводит к тому, что смешивания, о которых говорилось выше, в лептонном секторе физически ненаблюдаемы. В этом можно убедиться следующим образом. Так же, как в (11.121), мы можем записать заряженный слабый ток лептонов в виде

$$J_{\mu}^{\dagger} = \bar{l}_{AL} \gamma_{\mu} \tau^{+} l_{AL} = \bar{\nu}'_{AL} \gamma_{\mu} e'_{AL} = \bar{\nu}_{AL} [S_{(\nu)}^{\dagger} S_{(e)}]_{AB} \gamma_{\mu} e_B, \quad (11.131)$$

где

$$\nu'_L = S_{(\nu)} \nu_L, \quad e'_L = S_{(e)} e_L, \quad (11.132)$$

а лептонными дублетами в терминах массовых собственных состояний должны быть

$$l_{AL} : \begin{pmatrix} \nu_e'' \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu'' \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau'' \\ \tau \end{pmatrix}_L; \quad (11.133)$$

здесь

$$\begin{pmatrix} \nu_e'' \\ \nu_\mu'' \\ \nu_\tau'' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (11.134)$$

где $V = S_{(\nu)}^\dagger S_{(e)}$. Но нейтрино являются безмассовыми, и, следовательно, нейтринные состояния вырождены. Любые унитарно преобразованные ν -состояния являются собственными состояниями массовой матрицы, в частности $\nu_{AL} = \nu_{AL}''$, или матрицу V можно положить равной единичной матрице. Таким образом, нетривиальные углы лептонного смешивания никогда не появятся в каком бы то ни было физическом процессе, если ν -состояния вырождены. В связи с этим следует отметить, что состояния, обычно называемые нейтринными состояниями ν_l , в действительности являются (калибровочными) собственными состояниями слабых взаимодействий. Состояние ν_l определяется как «невидимая» частица, отсутствующая в $\pi \rightarrow l$ -распаде и (или) детектируемая с помощью испускания l в рассеянии ν на материи. При $V = 1$ различные лептонные семейства полностью разделены.

Замечание. Мы здесь предполагали, что имеется только один набор хиггсовских дублетов. При этом юкавские взаимодействия прямо пропорциональны массовой матрице фермионов. Диагонализация массовой матрицы приводит также к диагонализации юкавских взаимодействий. В случае большего количества дублетов юкавские взаимодействия приводят к изменению ароматов [53]. Однако грубые оценки показывают, что такой механизм изменения ароматов, вообще говоря, приводит к сильным эффектам изменяющих странность нейтральных токов и нарушению сохранения числа мюонов.

Стандартная теория (с одним дублетом хиггсовских скаляров) обладает глобальными симметриями, соответствующими отдельному сохранению e -, μ - и τ -лептонных чисел. Такие процессы, как $\mu \rightarrow e\gamma$, $K^0 \rightarrow \mu e$ и т. д., запрещены во всех порядках. Еще раз подчеркнем, что все эти свойства не заложены искусственно, а являются естественными следствиями теории, в которой нейтрино вырождены. Возможность того, что нейтрино может обладать малой массой, рассматривается в разд. 13.2. Даже в случае массивных нейтрино ожидается, что нетривиальные углы лептонного смешивания всегда будут появляться мультипликативно с разностями нейтринных масс. Следователь-

но, эффекты несохранения мюонного числа неизбежно подавляются. Эти замечания иллюстрируются конкретными вычислениями в гл. 13.

Сохранение аромата во взаимодействиях с нейтральными токами

Наличие унитарного преобразования (11.124) означает, что адронные заряженные токи не диагональны по ароматам, и в слабых взаимодействиях заряженных токов странность не сохраняется. С другой стороны, в полном согласии с известными экспериментальными наблюдениями соотношение (11.124) не приводит к нейтральным токам, изменяющим ароматы. Если в (11.95) мы перейдем от базиса калибровочных собственных состояний к базису собственных состояний массовой матрицы с помощью (11.122), то получим

$$J_{\mu}^0 = g_L^p \sum_A \bar{p}'_{AL} \gamma_{\mu} p'_{AL} + g_R^p \sum_A \bar{p}'_{AR} \gamma_{\mu} p'_{AR} + \\ + g_L^n \sum_A \bar{n}'_{AL} \gamma_{\mu} n'_{AL} + g_R^n \sum_A \bar{n}'_{AR} \gamma_{\mu} n'_{AR}; \quad (11.135a)$$

условие унитарности означает, что в этом уравнении штрихи можно просто опустить, т. е.

$$J_{\mu}^0 = \sum_f (g_L^f \bar{f}_L \gamma_{\mu} f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma_{\mu} f_R), \quad (11.135b)$$

где $f = \nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b, \dots$. Это оказывается возможным, так как имеет место дублирование фермионных поколений в том смысле, что фермионы с одними и теми же зарядами и спиральностями обладают одинаковым поведением относительно калибровочных преобразований. Фактически это и было первоначальной мотивировкой введения Глэшоу, Илиопулосом и Майани (ГИМ) очарованного кварка, обладающего тем же зарядом и таким же слабым взаимодействием, что u -кварк. Однако механизм ГИМ означает нечто большее, чем просто отсутствие взаимодействия с изменяющим ароматы нейтральным током в борновском приближении. Поскольку константа слабого калибровочного взаимодействия g порядка e (соотношение (11.93)), необходимо соблюдать осторожность, чтобы эффекты более высоких порядков не приводили к амплитудам процессов с изменяющим странность нейтральным током порядка $G_F \alpha$, таким, как $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$. (Амплитуды экспериментально наблюдаемых процессов не превышают по порядку G_F^2). Механизм ГИМ рассматривается в следующей главе. Достаточно отметить, что здесь используется та же связь между углами смешивания и различием фермионных масс, которая рассматривалась выше в связи с несохранением мюонного числа:

предполагается, что индуцированные амплитуды обладают величинами $\sim g^2 G_F \Delta m_q^2 / M_W^2 \approx G_F^2 \Delta m_q^2$, где Δm_q — разность масс кварков и мы воспользовались соотношением (11.89).

Заключение

Подведем итог обсуждению вопросов, связанных с фермионным сектором стандартной модели. Фермионные калибровочные собственные состояния обнаруживают повторяющуюся структуру, и их можно сгруппировать в поколения. Каждое поколение состоит из 15 двухкомпонентных полей лептонов и кварков с четырьмя левыми дублетами и семью правыми синглетами. Аномалии АБД, связанные с лептонными и кварковыми петлями, в точности взаимно уничтожают друг друга. Таким образом, стандартная модель с одним поколением является полностью самосогласованной теорией. Принципиально новой физической особенностью, возникающей в модели с более чем одним фермионным поколением, является наличие углов смешивания и комплексных фаз в калибровочных взаимодействиях фермионов. Это связано с тем, что калибровочная инвариантность допускает, чтобы массовая матрица для каждого набора подобных заряженных фермионов была недиагональной. Затем путем диагонализации массовой матрицы вводятся ее собственные состояния. Они связаны с калибровочными собственными состояниями унитарными преобразованиями. Эта процедура неприменима к лептонам, так как нейтрино вырождены по массе. Таким образом, в стандартной теории с тремя поколениями имеются три угла смешивания и одна фаза, отвечающая нарушению CP -инвариантности в калибровочном взаимодействии кварков. Всего мы должны внести в такую теорию 17 параметров (см. обсуждение в конце разд. 11.2). В настоящее время глубокое понимание такой повторяющейся фермионной структуры отсутствует. (Существование группы симметрии поколений? Наличие лептонной и кварковой субструктуры?) Обычно эту проблему называют *проблемой фермионных поколений*, или просто *проблемой поколений*.

**СТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ
ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ
II: ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ**

12.1. ПРОЦЕССЫ С НЕЙТРАЛЬНЫМИ ТОКАМИ, СОХРАНЯЮЩИМИ СИММЕТРИЮ АРОМАТОВ

Основным требованием ко всякой калибровочной модели электрослабых взаимодействий является присутствие в ней в низкоэнергетическом пределе надежно установленных заряженных слабых $V-A$ -токов. Но модель Глэшоу—Вайнберга—Салама, удовлетворяя этому требованию, предсказывает при низких энергиях также новые эффекты, связанные с нейтральными слабыми токами. Их экспериментальное открытие с последующим подтверждением деталей предсказанной структуры привело к всеобщему признанию этой модели в качестве стандартной теории электрослабых взаимодействий. В настоящем разделе мы обсудим процессы, соответствующие на уровне древесных диаграмм нейтральным токам, диагональным в пространстве ароматов (см. (11.135)). Эффекты изменения ароматов нейтральными токами, индуцируемые петлевыми диаграммами более высокого порядка, рассматриваются в следующем разделе наряду с вопросами нарушения CP -инвариантности.

При передачах импульса, много меньших чем массы калибровочных векторных бозонов, эффективный лагранжиан взаимодействия слабых токов можно записать в виде

$$\frac{1}{4} \mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{4} (\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\text{ЗТ}} + \mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\text{НТ}}) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (J_{\mu}^+ J^{-\mu} + \rho J_{\mu}^0 J^{0\mu}), \quad (12.1)$$

где J_{μ}^+ и J_{μ}^0 определены в (11.87) и (11.95) соответственно, а параметр ρ характеризует относительную интенсивность процессов с заряженными токами (ЗТ) и нейтральными токами (НТ):

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W}. \quad (12.2)$$

В стандартной теории, где имеется только один дублет хиггсовских бозонов, значение ρ фиксировано (см. (11.82)):

$$\rho = 1. \quad (12.3)$$

Часть с нейтральными токами в (12.1) описывает основное взаимодействие (11.92)

$$\mathcal{L}^{\text{НТ}} = \frac{g}{\cos \theta} Z^{\mu} J_{\mu}^0 \quad (12.4)$$

с нейтральным слабым током, диагональным по кварк-лептонным ароматам $f = l, \nu_l, u, d, s, c, \dots$:

$$J_\mu^0 = g_L^f \bar{f}_L \gamma_\mu f_L + g_R^f \bar{f}_R \gamma_\mu f_R = \\ = \frac{1}{2} [g_L^f \bar{f} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) f + g_R^f \bar{f} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) f], \quad (12.5)$$

где

$$g_L^f = T_3(f_L) - Q(f) \sin^2 \theta_W, \quad (12.6)$$

$$g_R^f = T_3(f_R) - Q(f) \sin^2 \theta_W, \quad (12.7)$$

а T_3 и Q — третья компонента слабого изоспина и электрический заряд соответственно. Мы умышленно параметризовали части с нейтральными токами, так, чтобы они имели достаточно общий вид, включающий все модели, основанные на группе $SU(2) \times U(1)$, т. е. модели с различным содержанием фермионов и разным выбором представления. Значения $g_{L,R}^f$ для первого фермионного поколения в стандартной модели даны в (11.95). Универсальность (и дублирование фермионов) приводит к тому, что для $i = L, R$ имеем $g_i^e = g_i^\mu = g_i^\tau$, $g_i^u = g_i^c = g_i^t$, $g_i^d = g_i^s = g_i^b$, а для нейтрино, конечно, $g_L^\nu = 1/2$. Таким образом, в предсказаниях стандартной модели, касающихся нейтральных токов, имеется только один неизвестный параметр — угол Вайнберга θ_W , характеризующий отношение сил взаимодействий, отвечающих калибровочным группам $SU(2)$ и $U(1)$.

Нейтральные токи были открыты группой, работавшей с камерой Гаргамелль в ЦЕРНе [215]. Полученные при этом данные и большинство последующих результатов касались инклюзивного рассеяния нейтрино на (изоскалярной) адронной мишени. Но мы решили обсудить здесь сначала теоретически более простую ситуацию, связанную с процессами, в которых принимают участие лептонные нейтральные токи.

Процессы $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$ и $\bar{\nu}_\mu + e \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e$

Эти два процесса являются процессами с чисто нейтральными токами и описываются диаграммами, приведенными на

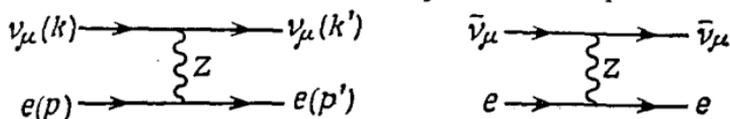


Рис. 12.1.

рис. 12.1. Амплитуда процесса $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$ равна

$$T_\nu(\lambda, \lambda') = \frac{g^2}{4M_Z^2 \cos^2 \theta_W} g_L^\nu [\bar{u}(k') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(k)] \times \\ \times \{\bar{u}(p', \lambda') [g_L^e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) + g_R^e \gamma^\mu (1 + \gamma_5)] u(p, \lambda)\}. \quad (12.8)$$

Суммируя по конечному и усредняя по начальному спинам электрона (ν_μ всегда является левым фермионом), получаем

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} |T_\nu(\lambda, \lambda')|^2 = 2 \left(\frac{G_F g_L^y}{\sqrt{2}} \right)^2 L_{\mu\nu}^-(k, k') [(g_L^e)^2 L^{-\mu\nu}(p, p') + (g_R^e)^2 L^{+\mu\nu}(p, p')], \quad (12.9)$$

где

$$L_{\mu\nu}^\pm(k, k') = \text{tr} [\hat{k}' \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5) \hat{k} \gamma_\nu (1 \pm \gamma_5)] = 8 (k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - k \cdot k' g_{\mu\nu} \mp i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k'^\alpha k^\beta). \quad (12.10)$$

Мы пренебрегли массами лептонов. Таким образом,

$$(k \cdot p) = (k' \cdot p') \text{ и } (k' \cdot p) = (k \cdot p'). \quad (12.11)$$

Произведения лептонных тензоров в (12.9) равны

$$L_{\mu\nu}^-(k, k') L^{\mp\mu\nu}(p, p') = 128 \{ [(k \cdot p)^2 + (k' \cdot p)^2] \pm \pm [(k \cdot p)^2 - (k' \cdot p)^2] \}, \quad (12.12)$$

$$\frac{1}{2} \sum |T_\nu|^2 = (16G_F)^2 (g_L^y)^2 \times [(g_L^e)^2 (k \cdot p)^2 + (g_R^e)^2 (k' \cdot p)^2]. \quad (12.13)$$

Сечение рассеяния дается выражением

$$d\sigma = \frac{1}{2E_\nu} \frac{1}{2m_e} \frac{1}{|\mathbf{v}|} (2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p') \left(\frac{1}{2} \sum |T_\nu|^2 \right) \times \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0}. \quad (12.14)$$

Интеграл по фазовому пространству легко вычисляется:

$$\int (2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'_\nu} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_e} = \frac{1}{8\pi} \frac{dE_e}{E_\nu}, \quad (12.15)$$

где $E_\nu(E'_\nu)$ и E_e — энергии начального (конечного) нейтрино и конечного электрона в лабораторной системе отсчета. Тогда

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu e)}{dE_e} = \frac{1}{32\pi m_e E_\nu^2} \left(\frac{1}{2} \sum |T_\nu|^2 \right) = \frac{8m_e G_F^2}{\pi} (g_L^y)^2 [(g_L^e)^2 + (g_R^e)^2 (E'_\nu/E_\nu)^2]. \quad (12.16)$$

Используя обычную скейлинговую переменную (для передачи энергии)

$$y = E_e/E_\nu, \quad (12.17)$$

имеем

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu e)}{dy} = \frac{8G_F^2}{\pi} m_e E_\nu (g_L^y)^2 [(g_L^e)^2 + (g_R^e)^2 (1-y)^2], \quad (12.18)$$

а полное сечение можно представить в виде

$$\sigma(\nu_{\mu}e) = \frac{8G_F^2}{\pi} m_e E_{\nu} (g_L^{\nu})^2 \left[(g_L^e)^2 + \frac{1}{3} (g_R^e)^2 \right]. \quad (12.19)$$

Следует заметить, что множитель $(1-y)^2$ в (12.18) и соответствующий множитель $1/3$ в (12.19) связаны с членом, имеющим спиральность, противоположную спиральности налетающего нейтрино. Таким образом, можно предположить, что сечение процесса $\bar{\nu}_{\mu} + e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + e$ с участием антинейтрино равно

$$\sigma(\bar{\nu}_{\mu}e) = \frac{8G_F^2}{\pi} m_e E_{\nu} (g_L^{\nu})^2 \left[\frac{1}{3} (g_L^e)^2 + (g_R^e)^2 \right], \quad (12.20)$$

так как $\bar{\nu}_{\mu}$ имеет спиральность, противоположную спиральности ν_{μ} . Из выражений (12.19) и (12.20) видно, что значения полных сечений $\sigma(\nu_{\mu}e)$ и $\sigma(\bar{\nu}_{\mu}e)$ ложатся на эллипсы в плоскости (g_L^e, g_R^e) (рис. 12.3), которые пересекаются в четырех допустимых областях. Эти четыре решения отражают наличие знаковых неоднозначностей двух видов: полученные значения сечений рассеяния не чувствительны к заменам 1) $g_L \leftrightarrow -g_L$, $g_R \leftrightarrow -g_R$ и 2) $g_L \leftrightarrow g_L$, $g_R \leftrightarrow -g_R$. Нечувствительность к последней замене является просто векторной — аксиально-векторной неоднозначностью. Таким образом, необходимы еще два независимых измерения, чтобы разрешить эти неоднозначности.

Процессы $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$ и $\bar{\nu}_e + e \rightarrow \bar{\nu}_e + e$

В эти процессы дают вклад как заряженные, так и нейтральные токи (см. (11.97) и рис. 11.4 и 12.2). Значения сечений рассеяния равны

$$\sigma(\nu_e e) = \frac{8G_F^2}{\pi} m_e E_{\nu} (g_L^{\nu})^2 \left[(1 + g_L^e)^2 + \frac{1}{3} (g_R^e)^2 \right], \quad (12.21)$$

$$\sigma(\bar{\nu}_e e) = \frac{8G_F^2}{\pi} m_e E_{\nu} (g_L^{\nu})^2 \left[\frac{1}{3} (1 + g_L^e)^2 + (g_R^e)^2 \right]. \quad (12.22)$$

Сечение (12.22) было измерено в процессах с реакторными нейтрино. Его значение позволило устранить первую из отмеченных выше знаковых неоднозначностей, так как знак интерференции амплитуды, отвечающей ЗТ, с амплитудой, отвечающей НТ, теперь известен благодаря присутствию в (12.22) члена, линейного по g_L . Остаются еще два возможных решения на рис. 12.3, связанные с векторной — аксиально-векторной неоднозначностью.

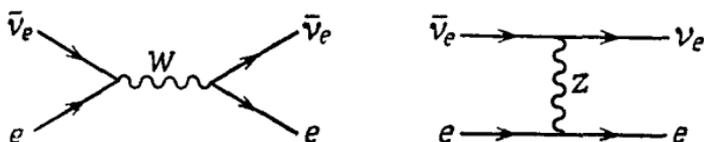


Рис. 12.2.

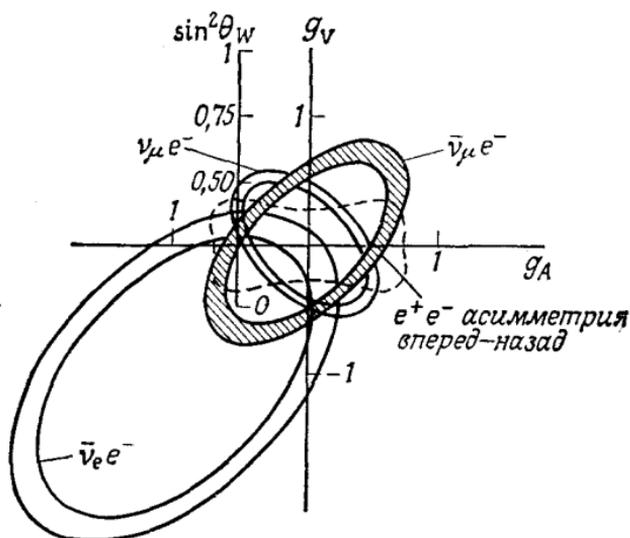


Рис 12.3. Экспериментальные результаты по $\nu_e e^-$ -рассеянию и e^+e^- -аннигиляции, касающиеся взаимодействий электрона с нейтральными токами; $g_V = (g_L^e + g_R^e)$ и $g_A = (g_L^e - g_R^e)$. Единственная допустимая область, общая для всех четырех типов чисто лептонных процессов, соответствует области, отвечающей стандартной модели с $\sin^2 \theta_W \approx 0,22$ [33].

Вклад нейтральных токов в процесс $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Векторный Z-бозон слабого взаимодействия может давать вклад как в процесс рассеяния Баба $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, так и в процессы $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$. Мы остановимся на более простом случае реакций $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (или $\tau^+\tau^-$), которым соответствуют диаграммы, приведенные на рис. 12.4.

Можно установить, что сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} [A(1 + \cos^2 \theta) + B \cos \theta], \quad (12.23)$$

где

$$A = 1 + 2\text{Re} \chi g_V^e g_V^\mu + |\chi|^2 [(g_V^e)^2 + (g_A^e)^2][(g_V^\mu)^2 + (g_A^\mu)^2], \quad (12.24)$$

$$B = 4\text{Re} \chi g_A^e g_A^\mu + 8|\chi|^2 g_V^e g_V^\mu g_A^e g_A^\mu, \quad (12.25)$$

а

$$\chi = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \frac{s}{(s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma)}, \quad (12.26)$$

$g_V = (g_L + g_R)$, $g_A = (g_L - g_R)$, θ — угол между направлениями μ^- в конечном состоянии и падающего e^- , Γ — ширина Z -бозона. Основным членом в A является чисто фотонный вклад. Члены, пропорциональные $\text{Re } \chi$, соответствуют интерференции

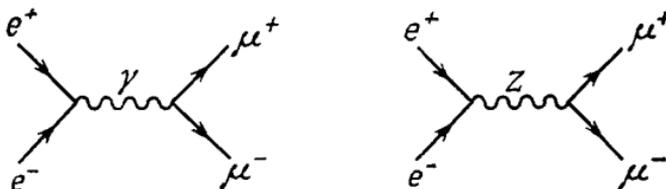


Рис. 12.4.

нейтрального и электромагнитного токов; члены, пропорциональные $|\chi|^2$, являются чисто Z -бозонными вкладами. Из-за наличия в (12.23) $\cos \theta$ существует асимметрия вперед — назад:

$$\Delta_{\text{вн}} = \frac{\int_0^1 d \cos \theta (d\sigma/d \cos \theta) - \int_{-1}^0 d \cos \theta (d\sigma/d \cos \theta)}{\int_{-1}^{+1} d \cos \theta (d\sigma/d \cos \theta)} = \frac{3}{8} \frac{B}{A}. \quad (12.27)$$

При низких энергиях $s \ll M_Z^2$ имеем

$$A \approx 1 - \frac{4sG_F}{\sqrt{2} e^2} g_V^2, \quad (12.28)$$

$$B \approx - \frac{8sG_F}{\sqrt{2} e^2} g_A^2, \quad (12.29)$$

где, используя универсальность, мы положили $g_{V,A}^e = g_{V,A}^\mu$. При этом можно видеть два эффекта слабого взаимодействия:

1. Отличие полного сечения $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ от соответствующей величины в КЭД. При низких энергиях оно пропорционально g_V^2 .

2. Асимметрия вперед — назад в угловом распределении, которая при низких энергиях позволяет определить g_A^2 . Эти эффекты слабого взаимодействия могут быть измерены уже при максимальных энергиях, достижимых на установке РЕТРА, что позволяет определить допустимую область (g_A, g_V) -плоскости на рис. 12.3 и выбрать одно из остающихся двух решений, а именно то, которое соответствует стандартной теории с $\sin^2 \theta \approx \approx 0,22$.

Нейтрино-адронные процессы с нейтральными токами

Хотя рассмотренные выше чисто лептонные процессы имеют то преимущество, что они не усложнены сильными взаимодействиями, польза от их исследования несколько уменьшается,

так как экспериментальные данные в этой области обычно имеют небольшую статистику. Это отличает их от процессов рассеяния нейтрино на нуклоне, где мы располагаем большим количеством точных данных, особенно для инклюзивного ν -рассеяния на изоскалярных мишенях. Для интерпретации экспериментальных результатов в соответствующей кинематической области обычно обращаются к кварк-партонной модели. В этом случае можно получить константы g_L^u, g_R^d слабого взаимодействия кварков первого поколения способом, аналогичным тому, который используется в ν -лептонном рассеянии, рассмотренном выше. Например, для глубоконеупругого рассеяния $\nu + N \rightarrow \nu + X$ на изоскалярной мишени $N = 1/2(n + p)$ (по аналогии с (12.18)) при $g_L^v = 1/2$ имеем

$$\frac{d\sigma^{\text{HT}}(\nu N)}{dy} = \frac{G_F^2 M E_\nu Q}{\pi} \{ [(g_L^u)^2 + (g_L^d)^2] + [(g_R^u)^2 + (g_R^d)^2] (1 - y)^2 \}, \quad (12.30)$$

где

$$Q = \int_0^1 x [u(x) + d(x)] dx, \quad (12.31)$$

а $u(x)$, $d(x)$ — функции распределения кварков, зависящие от бьёркеновской масштабной переменной x (функции распределения антикварков $\bar{u}(x) = \bar{d}(x) = 0$) (см. (7.72) и (7.78)). Заметим, что коэффициент в (12.30) равен значению партонного сечения для процесса с заряженными токами $\nu + N \rightarrow l^- + X$:

$$\frac{d\sigma^{3T}(\nu N)}{dy} = \frac{G_F^2 M E_\nu Q}{\pi}. \quad (12.32)$$

Отношение $R_\nu \equiv \sigma^{\text{HT}}(\nu N) / \sigma^{3T}(\nu N)$ зависит только от искомым констант слабых взаимодействий. Полностью аналогичный результат получается для рассеяния антинейтрино, но в этом случае множитель $(1 - y)^2$ относится к величинам g_L^2 и $d\sigma^{3T}/dy$. Тем самым $\sigma^{3T}(\bar{\nu} N) = \frac{1}{3} \sigma^{3T}(\nu N)$. В итоге получаем

$$\frac{\sigma^{\text{HT}}(\nu N) + \sigma^{\text{HT}}(\bar{\nu} N)}{\sigma^{3T}(\nu N) + \sigma^{3T}(\bar{\nu} N)} = (g_L^u)^2 + (g_L^d)^2 + (g_R^u)^2 + (g_R^d)^2, \quad (12.33)$$

$$\frac{\sigma^{\text{HT}}(\nu N) - \sigma^{\text{HT}}(\bar{\nu} N)}{\sigma^{3T}(\nu N) - \sigma^{3T}(\bar{\nu} N)} = (g_L^u)^2 + (g_L^d)^2 - (g_R^u)^2 - (g_R^d)^2. \quad (12.34)$$

Так же, как в случае $\nu_\mu e$ - и $\bar{\nu}_\mu e$ -рассеяния, к этим νN - и $\bar{\nu} N$ -измерениям необходимо добавить данные для протонной и нейтронной мишеней или для полуинклюзивного рождения пионов на изоскалярных мишенях, чтобы разрешить знаковые и изоспиновые неоднозначности. Мы здесь не будем вдаваться в де-

тали. Достаточно сказать, что результаты вновь находятся в согласии со стандартной теорией. Укажем только, что соотношение (12.34) в стандартной модели принимает вид

$$\frac{\sigma^{\text{HT}}(\nu N) - \sigma^{\text{HT}}(\bar{\nu} N)}{\sigma^{\text{3T}}(\nu N) - \sigma^{\text{3T}}(\bar{\nu} N)} = \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \theta_W). \quad (12.35)$$

Это соотношение Паскоса — Волфенштейна [314]. Таким образом, измерения R_ν и $R_{\bar{\nu}}$ непосредственно дают значение $\sin^2 \theta_W$. Самые последние и точные данные получены группами CDHS [180] и CHARM [230].

Необходимо отметить, что в реальном феноменологическом анализе принимаются во внимание значительно более детальные вычисления, учитывающие вклады морских кварков, поправки КХД и т. д. Дальнейшее обсуждение феноменологических значений угла Вайнберга и параметра ρ (12.2) дано в разд. 12.3, где рассматриваются вопросы, связанные с промежуточными векторными бозонами W и Z .

Измерение электрон-дейтронной асимметрии; историческое замечание

Выше мы привели результаты для констант связи в слабых взаимодействиях электронов g_{LR}^e , полученные из исследований лептонных реакций νe и e^+e^- , хотя исторически первая информация об этих константах была получена в замечательных экспериментах по полулептонному $e - D$ -рассеянию, проведенных группами SLAC и SLAC — Yale [331]. В то время существовала неясность относительно структуры слабых взаимодействий электронов, так как ряду исследователей не удалось зарегистрировать эффекты нарушения четности в атомах в соответствии с предсказаниями стандартной теории. Объявлялось также об экспериментальных эффектах («аномальные» y -распределения в νN -рассеянии), которые можно было интерпретировать как указание на наличие заряженных $V + A$ -токов и т. д. В результате для объяснения всех этих эффектов был предложен ряд вариантов модели Вайнберга — Салама. В эксперименте, проведенном группой SLAC, была измерена асимметрия нарушения четности:

$$A = \frac{\sigma(\lambda = 1/2) - \sigma(\lambda = -1/2)}{\sigma(\lambda = 1/2) + \sigma(\lambda = -1/2)}, \quad (12.36)$$

где $\sigma(\lambda = \pm 1/2)$ — двойное дифференциальное сечение рассеяния $d^2\sigma/d\Omega dE_e$ правых и левых электронов на дейтронах. Имея значение $g_{L,R}^{u,d}$ и используя измеренный параметр асимметрии, можно найти $g_{L,R}^e$. Эксперимент группы SLAC оказался решающим в доказательстве того, что стандартная модель является единственной жизнеспособной теорией.

12.2. СЛАБЫЕ УГЛЫ СМЕШИВАНИЯ, МЕХАНИЗМ ГИМ И НАРУШЕНИЕ СР-ИНВАРИАНТНОСТИ

В настоящем разделе мы изучим феноменологические следствия того факта, что в стандартной теории электрослабых взаимодействий, изложенной в разд. 11.3, имеется несколько фермионных поколений. В частности, мы остановимся на меняющем странность нейтральном токе и на проблеме нарушения CP -инвариантности в системах $\bar{K}^0 - K^0$ как на примерах, иллюстрирующих механизм ГИМ.

Как было показано в разд. 11.3, поскольку юкавские взаимодействия, вообще говоря, включают в себя фермионы, принадлежащие различным поколениям, матрица фермионных масс в пространстве ароматов не является диагональной. Это означает, что массовые собственные состояния отличаются от слабых собственных состояний, обладающих определенными трансформационными свойствами. В простом случае двух фермионных поколений такое отличие приводит к кабиббовскому смешиванию кварков в заряженном токе, и слабые кварковые собственные состояния имеют вид

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \quad u_R, c_R, d_R, s_R$$

и

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L = \mathcal{R}_L \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L,$$

т. е. слабые собственные состояния d' , s' получаются в результате поворотов массовых собственных состояний d , s . Заметим, что угол Кабиббо θ_c представляет собой разность между углами поворотов в секторах (u_L, c_L) и (d_L, s_L) . Вот почему в секторах правых фермионов нет угла смешивания: ведь поля (u_R, c_R) не взаимодействуют с полями (d_R, s_R) . Нейтральный ток, пропорциональный оператору $(Q \sin^2 \theta_W - T_{3L})$ (см. (11.94)), обладает тем важным свойством, что он диагонален по ароматам (т. е. сохраняет их симметрии). Это следует из того факта, что все фермионы с одинаковыми зарядами и спиральностями имеют одинаковые трансформационные свойства относительно калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$ [190, 313], так что матрицы поворотов, такие, как приведенная выше матрица \mathcal{R}_L , коммутируют с оператором нейтрального тока $(Q \sin^2 \theta_W - T_{3L})$. Например, в секторе (d_L, s_L) часть $(1 - \gamma_5)$ нейтрального тока имеет вид

$$\begin{aligned} J_\mu^0(d, s) &= (\bar{d}', \bar{s}')_L \left[-\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} \right] \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L = \\ &= (\bar{d}, \bar{s})_L \left[-\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2} \right] \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L \end{aligned}$$

и сохраняет ароматы. Фактически это первоначально и побудило Глэшоу, Илиопулосу и Майяни [188] ввести s -кварк, объединив его в один дублет с s'_L так, чтобы s'_L имел то же $SU(2) \times U(1)$ -квантовое число, что и d'_L . Введение s -кварка устраняет меняющий странность нейтральный ток (механизм ГИМ). Иначе в порядке G_F были бы возможны процессы с нейтральными токами с $\Delta S \neq 0$ (например, $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $K^\pm \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$), неприемлемые с точки зрения феноменологии. Следует подчеркнуть, что такое подавление неприемлемых процессов в механизме ГИМ происходит без какого-либо искусственного подбора значений параметров теории. В действительности, как отмечалось в разд. 11.3, механизм ГИМ означает нечто гораздо большее, чем простое взаимное уничтожение на древесном уровне процессов с изменением странности; он приводит к дополнительному подавлению нейтральных токов с $\Delta S \neq 0$, индуцируемых петлевыми диаграммами более высокого порядка. Такое дополнительное подавление необходимо, так как в противном случае амплитуды индуцируемых процессов были бы порядка $G_F \alpha$, тогда как экспериментальные значения амплитуд этих процессов обычно порядка $G_F^2 m^2$ (где m порядка нескольких ГэВ). Мы проиллюстрируем этот механизм подавления, вычисляя разность масс $K_L - K_S$: $\Delta m = 0,35 \cdot 10^{-14}$ ГэВ.

Как отмечалось в разд. 11.3, в случае трех фермионных поколений возникает еще одна особенность — в матрице смешивания может быть фаза, нарушающая CP -инвариантность. Мы обсудим значение этой особенности, приведя вычисление параметра смешивания состояний ϵ , описывающего нарушение CP -инвариантности в системе нейтральных каонов.

Матрица смешивания

Кабиббо — Кобаяси — Маскава (ККМ)

Основное взаимодействие заряженных токов (ЗТ) в (11.86) вместе со смешиванием, введенным для диагонализации матрицы кварковых масс (соотношение (11.124)), приводит к следующим взаимодействиям ЗТ. В простом случае двух фермионных поколений мы имеем знакомую схему с поворотом Кабиббо, дополненную очарованным кварком в рамках механизма ГИМ:

$$\mathcal{L}_{\text{ЗТ}} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{c})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L W_\mu^+ + \text{эрмит. сопр.} \quad (12.37)$$

Поскольку в этом случае массовую матрицу можно считать вещественной, унитарные преобразования являются обычными вращениями. Кроме того, амплитуда любого процесса $d \leftrightarrow s$, происходящего с изменением странности, должна быть пропор-

циональна величине $(m_c - m_u) \sin \theta_c$, так как в пределе $m_c = m_u$ всегда можно выбрать одну линейную комбинацию c и u , которая не взаимодействует ни с s , ни с d . Подобная ситуация возникает, если имеет место вырождение состояний d и s и т. д. В случае трех поколений, т. е. шести кварков, матрицы смешивания не являются просто обычными ортогональными матрицами. В этом случае имеем

$$\mathcal{L}_{\text{ЗТ}} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t})_L \gamma^\mu U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L W_\mu^+ + \text{эрмит. сопр.}, \quad (12.38)$$

где унитарная матрица

$$U = \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix} \quad (12.39)$$

может иметь одну комплексную фазу, и ее можно параметризовать так, чтобы она приняла вид, в котором ее впервые ввели Кобаяси и Маскава [238]:

$$U = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 - s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (12.40)$$

где использованы обозначения $c_i = \cos \theta_i$ и $s_i = \sin \theta_i$. Подбирая подходящим образом знаки у кварковых полей, мы можем ограничить область изменения углов так, что $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ и $-\pi \leq \delta \leq \pi$.

В такой параметризации КМ угол θ_1 близок к углу Кабиббо. Ясно также, что угол θ_3 должен быть малым вследствие наблюдаемой приближительной *универсальности Кабиббо*. Для точности напомним, что из времени жизни мюона и из ядерного β -распада $0^+ \rightarrow 0^+$, разрешенного правилами суперотбора, можно получить два значения константы Ферми, которые мы обозначим G_μ^R и G_F^R (индекс R указывает на то, что параметры перенормированы). Используя (12.39), можно получить теоретическое предсказание

$$[G_\mu^R/G_F^R] = U_{ud}^{-1} [1 + (\Delta_\mu - \Delta_F)], \quad (12.41)$$

где Δ_μ и Δ_F — радиационные поправки к G_μ^R и G_F^R соответственно, конечные части которых предполагаются различными для μ - и β -распадов. Это различие приводит к поправке $\sim 2\%$, которой нельзя пренебречь. Получим [363, 364]

$$|U_{ud}| = 0,9737 \pm 0,0025, \quad (12.42)$$

а общая подгонка для гиперонных распадов приводит [360] к следующему значению $|U_{us}|$:

$$|U_{us}| = 0,219 \pm 0,003. \quad (12.43)$$

Из (12.42) и (12.43) находим

$$|U_{ud}|^2 + |U_{us}|^2 = 0,996 \pm 0,004. \quad (12.44)$$

Тот факт, что основное значение меньше единицы, указывает на «утечку» взаимодействия u -кварка с b -кварком, определяемую матричным элементом

$$|U_{ub}| = 0,06 \pm 0,06, \quad (12.45)$$

а это на языке углов КМ означает

$$|s_3| < 0,28. \quad (12.46)$$

Таким образом, угол θ_3 может быть таким же малым (если не меньше), как угол Кабиббо. Чтобы получить ограничения на другие параметры КМ, располагая имеющейся информацией, приходится выбирать различные окольные пути, например вычислять параметры процессов $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ (см. ниже). Результаты всех этих вычислений согласуются с качественной картиной, в соответствии с которой диагональные элементы матрицы ККМ (12.39) являются наибольшими, и с удалением от диагонали матричные элементы уменьшаются:

$$(U_{ud} \approx U_{cs} \approx U_{tb}) \gg (U_{cd} \approx U_{ts} \approx U_{us} \approx U_{cb}) \gg (U_{ub} \approx U_{td}). \quad (12.47)$$

Таким образом, все углы КМ θ_i малы. Это приводит к цепочке доминантных распадов

$$t \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow s.$$

Поэтому имеет смысл говорить о фермионных поколениях даже в терминах массовых собственных состояний (u, d) , (c, s) , (t, b) и т. д., так как взаимодействия внутри поколений наиболее сильные.

В параметризации КМ (12.40) фаза δ , нарушая CP -инвариантность, появляется только в секторе тяжелых кварков. Это вопрос соглашения. Очевидно, δ можно передвинуть в другие секторы, переопределив фазы кварковых полей. Это означает, что для получения нарушения CP -инвариантности необходимо использовать более чем один элемент матрицы U . Физически это соответствует тому факту, что нарушение CP -инвариантности происходит из-за интерференции между амплитудами с различными CP -собственными значениями.

Феноменология $K^0 - \bar{K}^0$ -смешивания: некоторые основные параметры

Мы кратко опишем систему $K^0 - \bar{K}^0$, чтобы определить рамки, в которых изучаются нарушения CP -инвариантности в стандартной модели (детали см. в [237, 293, 432]).

Впервые распад нейтральных K -мезонов рассмотрели Гелл-Манн и Пайс [169], применив для этого квантовую механику. Интересной особенностью является то, что собственные состояния нейтральных каонов по отношению к сильным и слабым взаимодействиям отличаются друг от друга, так как первые сохраняют странность, а вторые — нет. В частности, собственные состояния сильных взаимодействий K^0 и \bar{K}^0 могут смешиваться посредством слабых переходов, таких, как $K^0 \rightleftharpoons 2\pi \rightleftharpoons \bar{K}^0$. В этой системе $K^0 - \bar{K}^0$ состояние \bar{K}^0 определяется как сопряженное состоянию K^0 относительно CP -преобразования:

$$|\bar{K}^0\rangle = CP |K^0\rangle. \quad (12.48)$$

Индукцированный слабым взаимодействием переход в системе $K^0 - \bar{K}^0$ описывается элементом S -матрицы

$$S_{\alpha'\alpha} = \langle \alpha' | T \exp \left(-i \int H'_W(t) dt \right) | \alpha \rangle, \quad (12.49)$$

где $\alpha, \alpha' = K^0$ или \bar{K}^0 , $H'_W(t) = e^{iHt} H_W e^{-iHt}$, а H_W — гамильтониан слабого взаимодействия. Во втором порядке по H_W элемент $T_{\alpha\alpha'}$ матрицы перехода (T -матрицы) можно записать в виде

$$S_{\alpha'\alpha} - \delta_{\alpha\alpha'} = -2\pi i T_{\alpha\alpha'}(E_\alpha), \quad (12.50)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha'}(E_\alpha) &= \langle \alpha' | H_W | \alpha \rangle - \frac{i}{2} \int dt \langle \alpha' | T (H'_W(t) H'_W(0)) | \alpha \rangle = \\ &= \langle \alpha' | H_W | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \sum_\lambda \left[\frac{\langle \alpha' | H_W | \lambda \rangle \langle \lambda | H_W | \alpha \rangle}{E_{\alpha'} - E_\lambda + i\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \alpha' | H_W | \lambda \rangle \langle \lambda | H_W | \alpha \rangle}{E_\alpha - E_\lambda + i\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку K^0 и \bar{K}^0 — собственные состояния сильного взаимодействия, для α и α' в состоянии покоя имеем

$$\langle \alpha' | H_{st} | \alpha \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} m_\alpha. \quad (12.51)$$

Таким образом, из (12.50) и (12.51) следует, что матричный элемент «эффективного гамильтониана» системы $K^0 - \bar{K}^0$ можно представить в виде

$$\langle \alpha' | H_{\text{эфф}} | \alpha \rangle \equiv H_{\alpha\alpha'} = m_K \delta_{\alpha\alpha'} + T_{\alpha\alpha'}(m_K). \quad (12.52)$$

Для удобства матрицу в (12.52) запишем в виде

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (12.53)$$

где индекс 1 соответствует состоянию K^0 , а индекс 2 — состоянию \bar{K}^0 . Используя формулу

$$\frac{1}{\chi - a + i\varepsilon} = P \frac{1}{\chi - a} - i\pi\delta(\chi - a), \quad (12.54)$$

мы можем разложить матричный элемент гамильтониана $H_{\text{эфф}}$ на реальную и мнимую части:

$$H = M - i \frac{\Gamma}{2}, \quad (12.55)$$

или

$$H_{\alpha\alpha'} = M_{\alpha\alpha'} - \frac{i}{2} \Gamma_{\alpha\alpha'},$$

где

$$M_{\alpha\alpha'} = m_K \delta_{\alpha\alpha'} + \langle \alpha' | H_W | \alpha \rangle + P \sum_{\lambda} \frac{1}{m_K - E_{\lambda}} \langle \alpha' | H_W | \lambda \rangle \langle \lambda | H_W | \alpha \rangle, \quad (12.56)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha'} = 2\pi \sum_{\lambda} \langle \alpha' | H_W | \lambda \rangle \langle \lambda | H_W | \alpha \rangle \delta(E_{\lambda} - m_K). \quad (12.57)$$

Заметим, что матрицы Γ , M эрмитовы,

$$\Gamma^{\dagger} = \Gamma, \quad M^{\dagger} = M, \quad (12.58)$$

в силу эрмитовости H_W и H_{st} , тогда как «эффективный гамильтониан» $H_{\text{эфф}}$ неэрмитов. Используя *CPT*-инвариантность, можно показать, что

$$H_{11} = H_{22},$$

или

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} \quad \text{и} \quad M_{11} = M_{22}. \quad (12.59)$$

Гамильтониан (12.53) непосредственно диагонализуется; соответствующие собственные состояния и собственные значения имеют вид

$$H |K_{L,S}\rangle = \lambda_{L,S} |K_{L,S}\rangle, \quad (12.60)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_S &= H_{11} + (H_{12}H_{21})^{1/2}, \\ \lambda_L &= H_{11} - (H_{12}H_{21})^{1/2}, \end{aligned} \quad (12.61)$$

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}(1+|\varepsilon|^2)} [(1+\varepsilon)|K_0\rangle + (1-\varepsilon)|\bar{K}_0\rangle], \quad (12.62)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}(1+|\varepsilon|^2)} [(1+\varepsilon)|K_0\rangle - (1-\varepsilon)|\bar{K}_0\rangle];$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{H_{12}} - \sqrt{H_{21}}}{\sqrt{H_{12}} + \sqrt{H_{21}}}. \quad (12.63)$$

Вещественные и мнимые части собственных значений $\lambda_{L,S}$ являются соответственно массами и ширинами распадов $K_{L,S}$;

$$\lambda_{L,S} = m_{L,S} - \frac{i}{2} \gamma_{L,S}. \quad (12.64)$$

Отметим, что из CP -инвариантности следует

$$M_{12} = M_{21}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}, \quad (12.65)$$

или

$$H_{12} = H_{21},$$

откуда получаем $\varepsilon = 0$ в (12.63). Это вместе с условием эрмитовости (12.58) означает, что если имеет место CP -симметрия, то M_{ij} и Γ_{ij} являются вещественными. Так как наблюдаемое нарушение CP -инвариантности в нейтральных каонных системах мало, мы выберем приближение, в котором $\text{Im } M_{12} \ll \ll \text{Re } M_{12}$, $\text{Im } \Gamma_{12} \ll \ll \text{Re } \Gamma_{12}$, а ε мало. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{H_{12} - H_{21}}{4\sqrt{H_{12}H_{21}} + (\sqrt{H_{12}} - \sqrt{H_{21}})^2} \approx \\ &\approx \frac{H_{12} - H_{21}}{4\sqrt{H_{12}H_{21}}} \approx \frac{(2\text{Im } M_{12} - i\text{Im } \Gamma_{12})}{2i(\lambda_L - \lambda_S)}. \end{aligned} \quad (12.66)$$

Параметр ε является мерой нарушения CP -инвариантности в физических состояниях системы $K^0 - \bar{K}^0$. Используя выражение (12.57) и рассматривая вклады всех промежуточных состояний $\lambda = 2\pi, 3\pi, \pi e\nu, \dots$, можно показать, что $|\text{Im } \Gamma_{12}| < |\text{Im } M_{12}|$. Тогда разности масс и скоростей распада можно приближенно представить в виде

$$-\Delta\gamma \equiv \gamma_L - \gamma_S = 2|\Gamma_{12}|, \quad (12.67)$$

$$\Delta m \equiv m_L - m_S = 2|M_{12}| \approx 2\text{Re } M_{12}, \quad (12.68)$$

так как $\text{Im } M_{12}$ мало. Параметр ε запишется в виде

$$\varepsilon = \frac{-\text{Im } M_{12}}{1/2\Delta\gamma - i\Delta m}. \quad (12.69)$$

Одним из удивительных свойств системы $K^0 - \bar{K}^0$ является то, что, хотя m_K близко к порогу рождения 3π и хотя (в силу малости ε) доминантными распадными модами K_S и K_L являются соответственно CP -четная 2π и CP -нечетная 3π моды, K_L и K_S имеют сильно различающиеся времена жизни:

$$\gamma_S \approx 500\gamma_L \approx \Delta\gamma. \quad (12.70)$$

Это позволяет четко разделять в лабораторных условиях эти две собственные моды и дало возможность Кронину, Фитчу и др. [87] открыть весьма незначительную моду распада $K_L \rightarrow 2\pi$. Детальное исследование интерференции между волнами K_L и K_S приводит к чрезвычайно малой разности масс $\Delta m = m_L - m_S$:

$$\Delta m/m_K = 0,71 \cdot 10^{-14}. \quad (12.71)$$

что соответствует значению

$$\Delta m \approx \frac{1}{2} \gamma_S. \quad (12.72)$$

Далее можно установить фазу параметра ε (подтвержденную экспериментально)

$$\arg \varepsilon \approx \arctg (2 \Delta m / \gamma_S) \approx 45^\circ \quad (12.73)$$

и записать ее абсолютную величину в простом виде:

$$|\varepsilon| \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Im } M_{12}}{\text{Re } M_{12}} \right). \quad (12.74)$$

Из (12.72) ясно также, что величина Δm является эффектом порядка $G_F^2 m^2$. Мы покажем, как этот результат можно понять в рамках механизма ГИМ.

Основными измеренными параметрами, характеризующими нарушение CP -инвариантности, являются отношения амплитуд

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= \langle \pi^+ \pi^- | H_W | K_L \rangle / \langle \pi^+ \pi^- | H_W | K_S \rangle, \\ \eta_{00} &= \langle \pi^0 \pi^0 | H_W | K_L \rangle / \langle \pi^0 \pi^0 | H_W | K_S \rangle \end{aligned} \quad (12.75a)$$

и «зарядовая асимметрия»

$$\delta = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}) - \Gamma(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu)}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}) + \Gamma(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu)}. \quad (12.75b)$$

Разбивая конечное 2π -состояние на две части с изоспинами $I=0$ и $I=2$, получаем

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= (\varepsilon_0 + \varepsilon_2) / (1 + 2^{-1/2} \omega), \\ \eta_{00} &= (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_2) / (1 - 2^{1/2} \omega), \end{aligned} \quad (12.76)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \langle I=0 | H_W | K_L \rangle / \langle I=0 | H_W | K_S \rangle, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle I=2 | H_W | K_L \rangle / \langle I=0 | H_W | K_S \rangle, \\ \omega &= \langle I=2 | H_W | K_S \rangle / \langle I=0 | H_W | K_S \rangle. \end{aligned} \quad (12.77)$$

Поскольку для распадов, сохраняющих CP -инвариантность, справедливо правило $\Delta I = 1/2$, то $\omega \ll 1$ и им можно пренебречь. Кроме того, амплитуду процесса $K^0 \rightarrow 2\pi$ можно параметризовать следующим образом:

$$\langle I=n | H_W | K^0 \rangle = A_n e^{i\delta_n}, \quad (12.78)$$

где δ_n — сдвиг фазы $\pi\pi$ -рассеяния в канале $I=n$, характеризующий сильные взаимодействия в конечном состоянии. Обычно выбор фазы [434] таков, что A_0 является вещественной величиной:

$$\text{Im } A_0 = 0. \quad (12.79)$$

В этом случае из (12.62), (12.77) и (12.78) легко найти, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon, \\ \varepsilon_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i(\delta_0 - \delta_2)} \frac{\text{Im } A_2}{A_0} \equiv \varepsilon'. \end{aligned} \quad (12.80)$$

Поэтому

$$\eta_{+-} = \varepsilon + \varepsilon', \quad \eta_{00} = \varepsilon - 2\varepsilon', \quad \delta = \text{Re } \varepsilon. \quad (12.81)$$

Экспериментально получены значения

$$|\varepsilon| \approx 2 \cdot 10^{-3}, \quad |\varepsilon'/\varepsilon| < 1/50. \quad (12.82, 83)$$

Все результаты согласуются с ранее предложенной теорией Волфенштейна [431], которая приписывала все эффекты нарушения CP -инвариантности сверхслабому взаимодействию с $\Delta S = 2$. Ниже мы покажем, что стандартная электрослабая теория со смешиванием КМ может привести к результатам, имитирующим результаты сверхслабой теории.

Эффективный лагранжиан с $\Delta S = 2$ для свободных кварков

Стратегия, первоначально предложенная Гайяр и Ли [151], состоит в том, чтобы сначала построить лагранжиан с $\Delta S = 2$

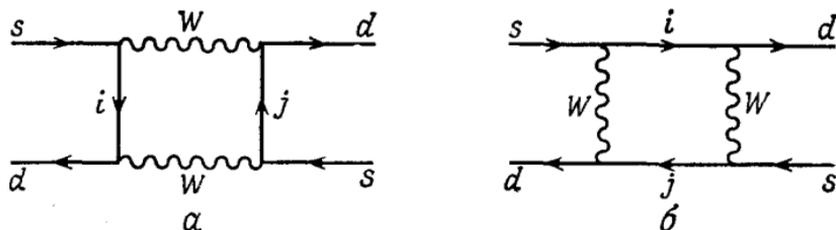


Рис. 12.5. Диаграммы Фейнмана для амплитуды перехода $\bar{s}d \rightarrow \bar{s}d$ с $\Delta S = 2$. Член «аннигиляции» диаграммы a равен члену «рассеяния» диаграммы b ; $i, j = u, c, t$.

на основе модели свободных кварков, а затем рассмотреть матричный элемент этого лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\Delta S=2}$ между состояниями K^0 и \bar{K}^0 , чтобы получить Δm из (12.68) и $|\varepsilon|$ из (12.74).

Прежде всего вычисляются выражение, соответствующее ящичной диаграмме, показанной на рис. 12.5, с промежуточными кварками $i, j = u, c, t$ в приближении, когда все внешние импульсы принимают равными нулю (так как они малы по сравнению с M_W и с массами тяжелых кварков). В калибровке Фейнмана — т'Хофта имеем

$$\begin{aligned} iT(\bar{s}d \rightarrow \bar{s}d) &= 2 \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^4 \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-i}{k^2 - M_W^2} \right)^2 \times \\ &\times \left(\bar{d}_L \gamma^\mu \frac{\gamma \cdot k + m_i}{k^2 - m_i^2} \gamma^\nu s_L \right) \left(\bar{d}_L \gamma_\nu \frac{\gamma \cdot k + m_j}{k^2 - m_j^2} \gamma_\mu s_L \right), \end{aligned} \quad (12.84)$$

где

$$\xi_i = U_{is} U_{id}^* \quad (12.85)$$

а U — элементы матрицы смешивания ККМ (12.39). Рассмотрим сначала интегрирование по импульсам в выражении

$$I_{\alpha\beta}(i, j) \equiv \int \frac{d^4 k k_\alpha k_\beta}{(k^2 - M_W^2)^2 (k^2 - m_i^2) (k^2 - m_j^2)} = \frac{-i\pi^2}{4M_W^2} A(x_i, x_j) g_{\alpha\beta}, \quad (12.86)$$

где

$$A(x_i, x_j) = \frac{J(x_i) - J(x_j)}{x_i - x_j},$$

$$J(x_i) = \frac{1}{1 - x_i} + \frac{x_i^2 \ln x_i}{(1 - x_i)^2}, \quad (12.87)$$

а $x_i = m_i^2/M_W^2$. Используя тождество

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu = g^{\mu\alpha} \gamma^\nu + g^{\nu\alpha} \gamma^\mu - g^{\mu\nu} \gamma^\alpha - ie^{\mu\alpha\nu\beta} \gamma_5 \gamma_\beta, \quad (12.88)$$

можно вычислить произведения дираковских матриц

$$[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu (1 - \gamma_5)/2] \dots [\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu (1 - \gamma_5)/2] = 4[\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)/2] \dots [\gamma_\alpha (1 - \gamma_5)/2]. \quad (12.89)$$

Подставляя (12.86) и (12.89) в (12.84), найдем

$$T(\bar{s}d \rightarrow sd) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\pi \sin^2 \theta_W} (\bar{d}_L \gamma^\mu s_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) \sum_{i,j} \xi_i \xi_j A(x_i, x_j). \quad (12.90)$$

Выполняя (2!) (2!) виковских спариваний, мы видим, что эта амплитуда может быть получена непосредственно из эффективного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{\Delta S=2} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{16\pi} \left(\frac{1}{M_W \sin \theta_W} \right)^2 \lambda \mathcal{O}_{II}, \quad (12.91)$$

где

$$\mathcal{O}_{II} = [\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) s] [\bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) s], \quad (12.91a)$$

$$\lambda = M_W^2 \sum_{i,j} \xi_i \xi_j A(x_i, x_j). \quad (12.91b)$$

В принципе можно учесть и радиационные глюонные поправки КХД. Но так как другие величины также определены неточно, такие поправки существенно не изменяют наши результаты, и мы ими пренебрежем.

Разность масс $K_L - K_S$ и механизм ГИМ

С помощью эффективного лагранжиана (12.91) можно вычислить Δm из (12.68):

$$\Delta m = -2 \operatorname{Re} [\langle K | -\mathcal{L}_{\Phi\Phi}^{\Delta S=2} | \bar{K} \rangle]. \quad (12.92)$$

В этом расчете можно выделить два аспекта. Первый из них связан с оценкой матричного элемента $\langle K | \mathcal{O}_{JJ} | \bar{K} \rangle$, а второй — с вычислением c -числа (12.91б), соответствующего сумме произведений углов смешивания и масс кварков.

Чтобы получить порядок величины $\langle K | \mathcal{O}_{JJ} | \bar{K} \rangle$, мы выбираем приближение «вакуумного насыщения», в котором

$$\begin{aligned} \langle K | [\bar{d}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) s] [\bar{d}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) s] | \bar{K} \rangle = \\ = \frac{8}{3} \langle K | \bar{d}\gamma^\mu \gamma_5 s | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d}\gamma_\mu \gamma_5 s | K \rangle = \frac{8}{3} \frac{f_K^2 m_K^2}{2m_K}, \end{aligned} \quad (12.93)$$

где $f_K \approx 1,23 f_\pi$ — константа каонного распада; множитель $(2m_K)^{-1}$ возникает из условия нормировки состояния. Множитель $8/3$ соответствует четырем способам виковского спаривания, умноженным на $2/3$. Выбирая такое приближение, мы надеемся, что простое вакуумное промежуточное состояние даст нам представление о величине четырехфермионного матричного элемента \mathcal{O}_{JJ} . В несколько более реалистических расчетах этого матричного элемента с помощью модели «мешка» МИТ получено значение, в два раза меньшее (т. е. того же порядка) чем то, которое получается в данном расчете, основанном на рассмотрении только вклада вакуумных вставок [359]. Но даже в этом случае неясно, дают ли эти диаграммы основной вклад в низкоэнергетические параметры, такие, как разность масс $K_L - K_S$ [432]. Игнорируя эти осложнения, из (12.91) и (12.93) получаем

$$\Delta m = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{6\pi} \frac{f_K^2 m_K}{\sin^2 \theta_W} \operatorname{Re} \left[\sum_{ij} \xi_i \xi_j^* A(x_i, x_j) \right]. \quad (12.94)$$

На первый взгляд кажется, что так как правая часть порядка αG_F , то значение Δm должно получиться слишком большим. Но именно в этом месте срабатывает механизм сокращения ГИМ. Поскольку $x_i \ll 1$, величину $A(x_i, x_j)$ можно разложить в ряд по степеням x_i и x_j . Главный постоянный член такого разложения не дает вклада в сумму вследствие условия унитарности

$$\sum \xi_i = \sum U_{is} U_{id}^* = 0. \quad (12.95)$$

Среди остальных доминируют члены, пропорциональные x_i :

$$\sum_{i, j} \xi_i \xi_j A(x_i, x_j) = \sum_i \xi_i^2 x_i + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \ln \frac{x_i}{x_j}. \quad (12.96)$$

Отсюда видно, что множитель x_i превращает $G_{F\alpha}$ в $G_F^2 m_i^2$:

$$G_{F\alpha} x_i \xi_i \approx G_F^2 m_i^2 \xi_i. \quad (12.97)$$

Полагая $m_u = 0$, можем записать

$$\frac{m_L - m_S}{m_K} = \frac{2}{3} \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_K^2 \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{m_c}{37 \Gamma_{\text{ЭВ}}} \right)^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c X, \quad (12.98)$$

где

$$X = (\sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c)^{-1} \text{Re} \left[(U_{cs} U_{cd}^*) + (U_{ts} U_{td}^*)^2 (m_i^2 / m_c^2) + \right. \\ \left. + U_{cs} U_{cd}^* U_{ts} U_{td}^* \frac{2m_t^2}{m_t^2 - m_c^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_c^2} \right) \right] \quad (12.99)$$

и использовано соотношение (11.100). В четырехкварковой модели, где имеет место простой поворот Кабиббо (12.37) с $(U_{cs} U_{cd}^*)^2 = \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c$, множитель X в (12.99) равен 1. Именно так Гайяр и Ли [151] еще до открытия частицы J/ψ получили оценку $m_c \approx 1,5$ ГэВ. Хотя масса m_t предполагается очень большой (≥ 20 ГэВ), она умножается на матричный элемент U_{td} , соответствующий малому углу смешивания (см. (12.45) и (12.47)), и мы не ожидаем, что X сильно отличается от единицы. Таким образом, результат, полученный в (12.98), должен рассматриваться как значительный успех механизма ГИМ, реализованного в рамках стандартной теории электрослабых взаимодействий.

Прежде чем закончить этот подраздел, касающийся механизма ГИМ, сделаем два замечания.

Замечание 1. Для эвристического понимания того, как срабатывает механизм ГИМ, можно воспользоваться понятием *массовой вставки* при проведении вычислений петлевых диаграмм [78]. Массовые вставки возникают либо при выборе простого представления для фермионного пропагатора

$$\frac{1}{\not{k} - m} = \frac{1}{\not{k}} + \frac{1}{\not{k}} m \frac{1}{\not{k}} + \dots, \quad (12.100)$$

либо при рассмотрении матрицы фермионных масс ($\bar{\psi}_{iL} m_{ij} \psi_{jR} + \text{эрмит. сопр.}$) как возмущение в симметричной теории (где все фермионы безмассовые). Такая массовая вставка во внут-

ренную линию изменяет спиральность соответствующей частицы на противоположную и может также привести к тому, что слабое собственное состояние не будет собственным состоянием матрицы масс, если используется один из недиагональных элементов m_{ij} . В качестве примера на рис. 12.6 показан основной

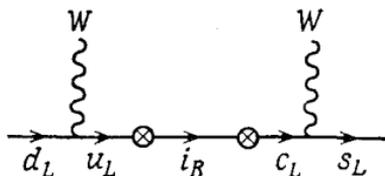


Рис. 12.6. Основной механизм перехода $s \leftrightarrow d$. Все частицы являются слабыми собственными состояниями с $i = u, c, t$. Следовательно, массовая матрица не является диагональной.

механизм перехода $s \leftrightarrow d$. В этих диаграммах, как можно проверить, взаимодействия должны быть пропорциональны (см. ниже замечание 2) произведению $m_{ui}m_{ic} = \sum_i U_{di}U_{si}^*m_i^2$, которое является основным членом в механизме ГИМ. (Наш пример вычисления Δm несколько усложнен, так как это переход с $\Delta S = 2$.)

Замечание 2. Вопрос о том, приводит ли механизм ГИМ к подавляющему степенной рост множителю $\sum_i U_{di}U_{si}^*(m_i^2/M_W^2)$, который обращается в нуль в пределе, когда все m_i равны, зависит от свойств сходимости конкретного рассматриваемого интеграла по петлевой импульсной переменной. Имеется случай, когда сокращение в механизме ГИМ приводит к более слабому подавлению, чем такое степенное подавление. Оно может принять вид $\sum_i U_{di}U_{si}^* \ln(m_i^2/M_W^2)$ и также обращаться в нуль в пределе равных масс. Примером такого логарифмического сокращения ГИМ является зарядовый радиус перехода $s \leftrightarrow d$, который физически важен, в частности, для процесса $K \rightarrow \pi e^+ e^-$ [151]. В калибровке т'Хофта — Фейнмана основной вклад дает диаграмма, приведенная на рис. 12.7, а. В низшем порядке по M_W^{-2} пропагатор W -частиц можно аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{-i}{k^2 - M_W^2} \approx \frac{i}{M_W^2}. \quad (12.101)$$

Затем совершается преобразование Фирца (см. приложение А) в полученном четырехфермионном $V - A$ -взаимодействии:

$$(\bar{s}_L \gamma^\mu q_{iL})(\bar{q}_{iL} \gamma_\mu d_L) = (\bar{s}_L \gamma^\mu d_L)(\bar{q}_{iL} \gamma_\mu q_{iL}). \quad (12.102)$$

Таким образом, мы можем вычислить вершинную функцию перехода непосредственно из диаграммы, приведенной на

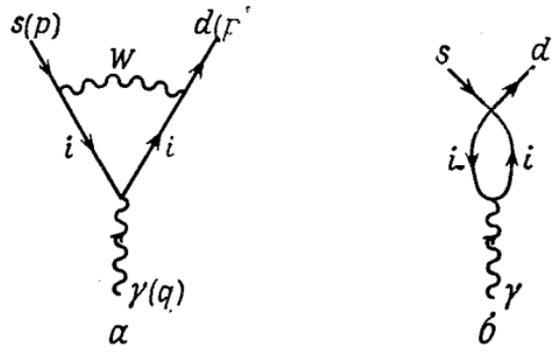


Рис. 12.7. Основной вклад в зарядовый радиус перехода $s \leftrightarrow d$. Диаграмма б является приближением к диаграмме а, полученным в результате преобразования Фирца $V - A$ -четырёхфермионного взаимодействия.

рис. 12.7, б:

$$\Gamma_\mu(p, p'; q) = \left(i \frac{2}{3} e\right) \left(-i \frac{G_F}{\sqrt{2}}\right) (\bar{s}_L \gamma^\nu d_L) \sum_i \xi_i I_{\mu\nu}(i), \quad (12.103)$$

где

$$I_{\mu\nu}(i) = \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \frac{i}{\gamma \cdot k - m_i} \gamma_\mu \frac{i}{\gamma \cdot (k - q) - m_i}. \quad (12.104)$$

Величина $I_{\mu\nu}$ — известный тензор поляризации вакуума, который при $m_i^2 \gg q^2$ имеет вид

$$I_{\mu\nu}(i) \approx \frac{1}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) [\ln \Lambda - \ln(m_i^2/q^2)]. \quad (12.105)$$

Постоянные расходящиеся члены снова сокращаются, поскольку $\sum_i \xi_i = 0$; при этом остается множитель слабого подавления ГИМ $\sum_i \xi_i \ln(m_i^2/q^2)$.

Параметр смешивания состояний в случае нарушения CP-инвариантности в системе каонов и углы КKM

Параметр нарушения CP-инвариантности ϵ (12.74) дается выражением

$$|\epsilon| \approx \frac{1}{2} \frac{\text{Im} \langle K | -\mathcal{L}_{\text{эфФ}}^{\Delta S=2} | \bar{K} \rangle}{\text{Re} \langle K | -\mathcal{L}_{\text{эфФ}}^{\Delta S=2} | \bar{K} \rangle} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right), \quad (12.106)$$

где четырехфермионный матричный элемент $\langle K | \mathcal{O}_{JJ} | \bar{K} \rangle$ сократился, а величина λ определена выражением (12.91б). В пре-

деле $m_u = 0$ воспользуемся снова равенством (12.95) и получим

$$\operatorname{Im}(\lambda) = 2 \left\{ \xi_{cI} \xi_{cR} m_c^2 + \xi_{tI} \xi_{tR} m_t^2 + \right. \\ \left. + (\xi_{cI} \xi_{tR} + \xi_{tI} \xi_{cR}) \frac{m_c^2 m_t^2}{m_t^2 - m_c^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_c^2} \right) \right\}, \quad (12.107)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) = \left\{ (\xi_{cR}^2 - \xi_{cI}^2) m_c^2 + (\xi_{tR}^2 - \xi_{tI}^2) m_t^2 + \right. \\ \left. + (\xi_{cR} \xi_{tR} - \xi_{cI} \xi_{tI}) \frac{2m_c^2 m_t^2}{m_t^2 - m_c^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_c^2} \right) \right\}, \quad (12.108)$$

где приняты обозначения $\xi_{iI} \equiv \operatorname{Im} \xi_i$, $\xi_{iR} \equiv \operatorname{Re} \xi_i$. Заметим, что если использовать параметризацию КМ, приведенную в (12.40), то

$$\xi_{tI} = -\xi_{cI} = c_2 s_1 s_2 s_3 \sin \delta. \quad (12.109)$$

Это позволяет выделить ξ_{cI} в (12.107). Поэтому $\operatorname{Im}(\lambda)$, а следовательно, и сам параметр ϵ пропорциональны комбинации углов КМ:

$$\epsilon \sim s_1 s_2 s_3 \sin \delta. \quad (12.110)$$

Тогда параметр нарушения CP -инвариантности подавляется всеми углами КМ. Поскольку есть некоторые основания предполагать, что все углы θ_i малы, эта изящная теория нарушения CP -инвариантности, естественно, дает нам малое значение ϵ .

Для определенности запишем выражения (12.106)–(12.108) для случая малых углов КМ. За исключением ξ_{cI} , являющегося общим множителем, мы отбросим все такие члены и приближенно положим

$$\xi_{cR} \approx -s_1 c_1 c_2^2 c_3, \quad \xi_{tR} \approx -s_1 c_1 s_2^2 c_3.$$

Выражение для ξ_{tR} справедливо только в частном случае

$$s_2 \gg s_3. \quad (12.111)$$

Это условие согласуется с существующими в настоящее время экспериментальными ограничениями, но не вытекает из них. Имеем

$$\operatorname{Im}(\lambda) \approx 2 \xi_{cI} \left[\xi_{cR} m_c^2 - \xi_{tR} m_t^2 + \right. \\ \left. + (\xi_{tR} - \xi_{cR}) \frac{m_c^2 m_t^2}{m_t^2 - m_c^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_c^2} \right) \right], \quad (12.112a)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) \approx \left[\xi_{cR}^2 m_c^2 + \xi_{tR}^2 m_t^2 + \frac{2 \xi_{cR} \xi_{tR} m_c^2 m_t^2}{m_t^2 - m_c^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_c^2} \right) \right]. \quad (12.112b)$$

Подставляя (12.112) в выражение (12.106), получаем [123, 124, 125]

$$\epsilon \approx c_2 s_2 s_3 \sin \delta \left\{ \frac{s_2^2 (1 + \eta \ln \eta) - c_2^2 \eta (1 + \ln \eta)}{s_2^4 + c_2^4 \eta - 2 s_2^2 c_2^2 \eta \ln \eta} \right\}. \quad (12.113)$$

где $\eta = m_c^2/m_t^2$, а некоторые члены более высоких степеней по η отброшены.

Завершим это обсуждение нарушения CP -инвариантности тремя короткими замечаниями.

1. Вычисление ϵ' . Вычисление параметра нарушения CP -инвариантности в распадах ϵ' (в отличие от параметра нарушения CP -инвариантности состояния ϵ) менее надежно, так как оно зависит от теоретического понимания нелептонных слабых распадов. В большинстве подходов значение ϵ' оказывается слишком малым, чтобы быть детектируемым. Но если основной вклад в процесс $K \rightarrow 2\pi$ дает диаграмма «пингвин» одноглюонного обмена [182] показанная на рис. 12.8, то вычисленное

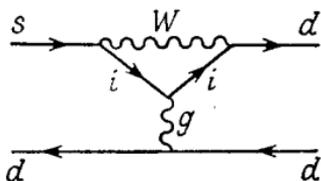


Рис. 12.8. Диаграмма «пингвин» процесса $s\bar{d} \rightarrow d\bar{d}$ с $i = u, c, t$.

отношение $|\epsilon'/\epsilon|$ практически нечувствительно к значениям углов смешивания, а его предсказываемое значение колеблется от 0,01 до 0,03. Такое значение, вероятно, можно будет проверить в экспериментах следующего поколения.

2. Электрический дипольный момент нейтрона. Это еще одна важная область, где стандартная теория с нарушающими CP -инвариантность комплексными взаимодействиями заряженных токов может выступать в качестве сверхслабой модели. Обе они предсказывают значение электрического дипольного момента нейтрона d_n/e много меньше 10^{-26} см [16, 337]. Основная причина малости этой величины в стандартной теории электрослабого взаимодействия снова связана с механизмом ГИМ: вклад однопетлевой диаграммы, такой, как показанная на рис. 12.9, а, равен нулю, так как он является «самосопряженным» и фаза нарушения CP -инвариантности отсутствует:

$\sum_i U_{ui}U_{ui}^* = 1$. В таких диаграммах любая фаза, соответствующая одной вершине, уничтожается противоположной фазой, соответствующей другой вершине. На двухпетлевом уровне могут существовать «несамосопряженные» диаграммы (рис. 12.9, б). Это приводит к электромагнитной вершине с передачей 4-импульса k :

$$ed_n(k^2) \bar{u} \sigma_{\mu\nu} k^\nu \gamma_5 u A^\mu. \quad (12.114)$$

Формфактор d_n , являющийся электрическим дипольным моментом в статическом пределе, подавляется обычным множителем ГИМ $\Delta m^2/M_W^2 = \sum_i U_{qi}U_{q'i}^*m_i^2/M_W^2$. Однако Шабалин [356, 357] показал, что даже этот множитель обращается в нуль в пределе $k \rightarrow 0$ за счет взаимного уничтожения выражений, которые соответствуют двум наборам диаграмм, показанным на рис. 12.9, в. *CP*-нечетная часть пропорциональна выражению

$$\left[\frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} \Gamma_{qq'} \frac{1}{\hat{p} - m'} - \frac{1}{\hat{k} + \hat{p} - m'} \Gamma_{q'q} \frac{1}{\hat{p} - m} \right],$$

где $\Gamma_{qq'}$ — регуляризованные фотонные вершинные функции кварков, и можно показать, что с точностью до однопетлевых поправок

$$\Gamma_{qq'} = \Gamma_{q'q}.$$

В статическом пределе $k \rightarrow 0$ импульс k в кварковых пропагаторах можно опустить, и рассмотренные выше вклады, очевидно, обращаются в нуль. Поэтому необходимо включить радиационные поправки более высокого порядка, основной вклад в которые дают диаграммы с глюонами КХД. Таким образом, предполагается, что дипольный момент нейтрона порядка

$$\frac{d_n}{e} \leq m_{u,d} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \frac{g^4}{(2\pi)^4 M_W^2} \left(\frac{m_q}{M_W} \right)^4. \quad (12.115)$$

Множитель $m_{u,d}$ отражает свойство оператора дипольного момента менять спиральность на противоположную. Обычно при-

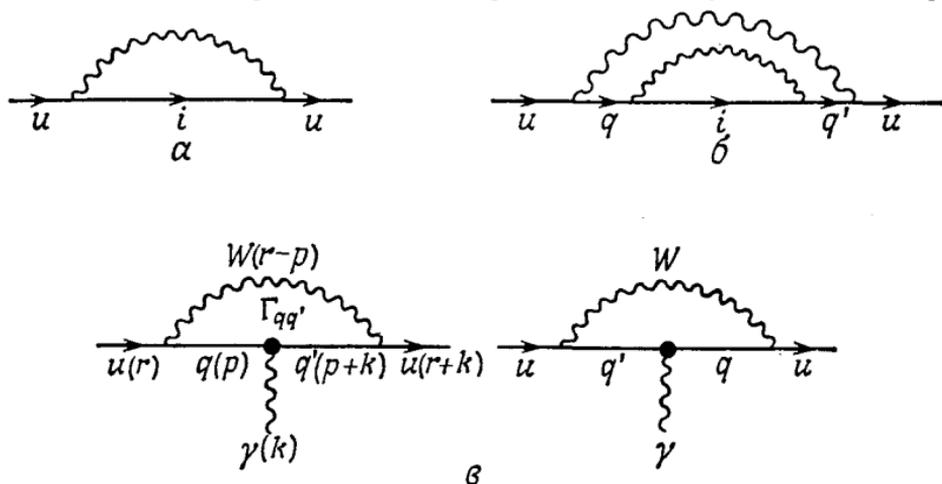


Рис. 12.9. Диаграммы для дипольного момента индуцированного u -кварка: фотонная линия должна «прикрепляться» ко всем заряженным линиям в a — однопетлевых и b — двухпетлевых диаграммах. На диаграммах v черные кружки изображают кварк — э. м. вершины. Будучи по крайней мере однопетлевыми, диаграммы v на самом деле является двухпетлевыми и обращаются в нуль в пределе $k \rightarrow 0$.

водится численное значение

$$|d_n/e| < 10^{-33} \text{ см.} \quad (12.116)$$

Если рассматривать диаграммы с обмeнами между различными валентными кварками внутри нейтронов, то получается такое же ограничение. Но большой вклад могут давать выражения, соответствующие диаграммам «пингвин». Поскольку подавление ГИМ может быть только логарифмическим, они приводят к значению (d_n/e) порядка 10^{-30} см (см. [157] и цитируемые там работы).

3. Жесткое и мягкое нарушения CP -инвариантности. В стандартной теории имеется только один хиггсовский дублет, так что вакуумное среднее $\langle \Phi \rangle_0$ должно быть вещественным, поскольку любая возможная фаза не имеет физического смысла и может быть устранена соответствующим поворотом. Причиной того, что матрица масс оказывается комплексной, является наличие самих юкавских взаимодействий. Обычно это называется *жестким нарушением CP -инвариантности* в том смысле, что этот эффект возникает из-за операторов размерности 4. Но существует другой класс теорий с нарушением CP -инвариантности, где это нарушение является спонтанным и, следовательно, *мягким* [260]. Чтобы возникло спонтанное нарушение CP -инвариантности, необходимо расширить хиггсовскую структуру (например, взяв два комплексных дублета) и получить комплексное вакуумное среднее. Физически различие между жестким и мягким нарушениями CP -инвариантности заключается в том, что эффект мягкого нарушения исчезает при энергиях выше энергетического масштаба нарушения симметрии, тогда как жесткое нарушение имеет место и в этом случае. Следует также отметить, что в теории с более чем одним хиггсовским дублетом юкавское взаимодействие недиагонально в пространстве ароматов, если не наложено требование некоторой дискретной симметрии. Такие взаимодействия в общем случае приводят к слишком сильным эффектам нейтральных токов, нарушающих странность и не сохраняющих мюонное число (см. также замечания в разд. 11.3).

12.3. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ БОЗОНЫ W И Z

Наиболее важной отличительной чертой калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии является существование массивных калибровочных бозонов. В стандартной модели имеются три таких промежуточных векторных бозона W^+ , W^- и Z . В настоящем разделе обсуждаются вопросы, связанные с их массами, распадами и возможными механизмами рождения.

Массы

Массы бозонов W и Z можно выразить через угол Вайнберга θ_W (см. (11.100) и (11.82)):

$$M_W = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{\sqrt{2} G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W} = \frac{37,3 \text{ ГэВ}}{\sin \theta_W}, \quad (12.117)$$

$$M_Z = \left(\frac{e^2}{\sqrt{2} G_F} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin 2\theta_W} = \frac{74,6 \text{ ГэВ}}{\sin 2\theta_W}. \quad (12.118)$$

Экспериментальное значение θ_W позволяет предсказать значения этих масс. Поскольку эти калибровочные бозоны довольно тяжелые, в настоящее время мы обнаруживаем их виртуальные эффекты, изучая низкоэнергетическую феноменологию заряженных и нейтральных токов. В стандартной модели, где хиггсовские частицы рассматриваются в дублетном представлении группы $SU(2) \times U(1)$, массы M_W и M_Z связаны (см. (11.82) и (12.158)) соотношением

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1. \quad (12.119)$$

Это определяет относительную интенсивность реакций с заряженными и нейтральными токами. Из данных по нейтринным процессам с нейтральными токами можно найти значения двух параметров [235]:

$$\rho = 0,998 \pm 0,050, \quad (12.120)$$

$$\sin^2 \theta_W = 0,224 \pm 0,015. \quad (12.121)$$

Тот факт, что ρ очень близко к единице, говорит в пользу стандартной модели. Конечно, это не исключает возможность существования в теории нескольких хиггсовских дублетов. Кроме того, можно рассматривать и другие представления для хиггсовских частиц с малыми вакуумными средними (за исключением синглетных хиггсовских скаляров, которые не взаимодействуют с W или Z).

Если мы положим $\rho = 1$, то усредненные данные нейтринных экспериментов дают

$$\sin^2 \theta_W = 0,227 \pm 0,010. \quad (12.122)$$

Тогда массы промежуточных бозонов принимают значения

$$\begin{aligned} M_W &= 78,5 \pm 1,7 \text{ ГэВ}, \\ M_Z &= 89,3 \pm 2 \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (12.123)$$

Тот факт, что значения этих масс предсказываются в довольно узкой области, позволяет произвести четкую проверку стандартной модели.

Более точное определение $\sin^2 \theta_W$ и масс калибровочных бозонов требует включения радиационных поправок от слабых процессов и учета зависимости констант связи от энергии (см. разд. 3.3). Так как угол Вайнберга определяется через константы связи (уравнение (11.80)), он также зависит от энергии. С учетом радиационных поправок значение $\sin^2 \theta_W$ при выбранном значении M_W получается равным

$$\sin^2 \theta_W(M_W) = 0,215 \pm 0,10 \pm 0,004, \quad (12.124)$$

где $\pm 0,004$ отражает теоретические расхождения в вычислениях радиационных поправок [280, 290, 365]. Если значение постоянной тонкой структуры при M_W принять равным

$$\frac{1}{\alpha(M_W)} = 127,49, \quad (12.125)$$

то для масс калибровочных бозонов получим следующие значения:

$$M_W = \frac{38,5 \text{ ГэВ}}{\sin \theta_W(M_W)} = 83,0 \pm 2,4 \text{ ГэВ}, \quad (12.126)$$

$$M_Z = M_W / \cos \theta_W = 93,8 \pm 2,0 \text{ ГэВ}. \quad (12.127)$$

Таким образом, эффекты более высокого порядка приводят к увеличению значений M_W и M_Z приблизительно на 5%. Предполагается, что M_Z будет измерено с точностью от 0,1 до 0,2 ГэВ в e^+e^- -эксперименте при высоких энергиях, что позволит оценить электрослабые радиационные поправки более высокого порядка.

Рассмотрим теперь распады W - и Z -частиц. Мы увидим, что их время жизни очень мало, так как они распадаются «полуслабо».

Распады W -бозона

Взаимодействие W -бозона с фермионами дается выражениями (11.86) и (11.121):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \left[(\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \right] + \text{эрмит. сопр.}, \quad (12.128) \end{aligned}$$

где U — матрица Кабиббо — Кабаяси — Маскава (12.39). Используя выражение (12.128), можно вычислить ширины различных распадных мод.

Рассмотрим, например, распад

$$W^-(k) \rightarrow e(p) + \bar{\nu}(q), \quad (12.129)$$

матричный элемент которого равен

$$T_e = \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{u}_e(p) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu(q) \varepsilon^\mu(k), \quad (12.130)$$

где $\varepsilon^\mu(k)$ — вектор поляризации W -бозона. Суммируя по всем значениям спинов фермионов и усредняя по всем возможным поляризациям W -бозона, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\text{спин}} |T_e|^2 &= \frac{g^2}{3} [p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} (pq)] \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_W^2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} g^2 M_W^2, \end{aligned} \quad (12.131)$$

где мы пренебрегли массой электрона. Ширина распада покоящегося W -бозона равна

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \frac{1}{2M_W} \int (2\pi)^4 \delta^4(k - p - q) \frac{1}{3} \sum |T_e|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} = \\ &= \frac{g^2 M_W}{48\pi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^3}{6\pi}. \end{aligned} \quad (12.132)$$

Эта ширина распада пропорциональна константе Ферми G_F , а не G_F^2 , как в обычном слабом распаде; поэтому мы говорим о полуслабом распаде.

Очевидно, что все другие лептонные распады $W^- \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu$ и $W^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau$ имеют те же ширины: $\Gamma_\mu = \Gamma_\tau = \Gamma_e$. Для адронных распадов можно вычислить ширину распада W -бозона в кварковую пару, которая затем с вероятностью, равной единице, превращается в адрон:

$$\Gamma(W \rightarrow n_i \bar{p}_j) = 3 |U_{ij}|^2 \Gamma_e, \quad (12.133)$$

где $n_i = d, s, b$, $p_j = u, c, t$, а Γ_e определяется формулой (12.132). Множитель 3 возникает из-за цветовых степеней свободы кварков. Процесс $W \rightarrow n_i \bar{p}_j$ представляет всевозможные распады в адроны, имеющие те же квантовые числа, что и $n_i + \bar{p}_j$. Мы предполагаем, что продукты распадов на легкие кварки обладают двухструйной структурой, дополненной иногда испусканием глюонной струи. Выражение для полной ширины распада можно упростить, если воспользоваться свойством U -матрицы $\sum_i |U_{ij}|^2 = \sum_j |U_{ij}|^2 = 1$ (считая, что $m_t \ll M_W$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{полн}} &= 3\Gamma_e + \sum_{i,j} 3 |U_{ij}|^2 \Gamma_e = 12\Gamma_e = \\ &= \frac{\sqrt{2} G_F M_W^3}{\pi} = 5,23 (M_W \text{ в ГэВ})^3 \cdot 10^{-6} \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (12.134)$$

Таким образом, при $M_W = 83$ ГэВ полная ширина равна

$$\Gamma = 2,99 \text{ ГэВ}, \quad (12.135)$$

а отношение ширин лептонных кварков

$$B_e = \frac{\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}_e)}{\Gamma(W \rightarrow \text{все})} = \frac{1}{12}, \quad B_e = B_\mu = B_\tau. \quad (12.136)$$

Большое значение ширины (12.135) отражает как то, что W -бозон распадается полуслабо, так и то, что масса M_W велика и имеется очень большой фазовый объем.

Замечания. 1. В стандартной модели имеются три поколения лептонов и кварков. Если мы обобщим ее так, чтобы число поколений было равно N , а массы всех лептонов и кварков были меньше M_W , то полная ширина и доля лептонных распадов будут равны

$$\Gamma_{\text{полн}} = 4N\Gamma_e = \frac{\sqrt{2} NG_F M_W^3}{3\pi}, \quad B_e = \frac{1}{4N}. \quad (12.137)$$

2. При вычислении ширин адронных распадов мы предполагали, что массами кварков можно пренебречь. Это может быть плохим приближением для распадных мод с участием t -кварка, если m_t окажется существенно больше, чем имеющаяся в настоящее время нижняя граница ~ 20 ГэВ.

3. Тщательное исследование адронных распадных мод может дать полезную информацию о матрице смешивания U_{ij} .

4. Из правил Фейнмана ясно, что, даже если масса хиггсовской частицы $m_\phi < M_W$, W -бозон не может прямо распасться на хиггсовскую частицу ϕ^0 за счет лагранжиана наимизшего порядка. Интересная возможность распада $W \rightarrow \phi^0 \bar{\nu}_l$, описываемая диаграммой второго порядка, приведена на рис. 12.10, а. Сначала можно предположить, что кроме появления дополнительной степени константы связи g будет иметь место дальнейшее подавление этого процесса из-за пропагатора W -бозона порядка M_W^{-2} . Однако $WW\phi$ -взаимодействие содержит множитель M_W . Этот множитель, а также дополнительный множитель, связанный с фазовым пространством трех частиц, уничтожают подавление за счет пропагатора W -бозона. Поэтому мы предполагаем, что ширина этого распада уменьшается только на порядок g^2 по сравнению с шириной распада $W \rightarrow e\nu_e$, и это может оказаться полезным при поиске хиггсовской частицы ϕ^0 . Матричный элемент процесса $W \rightarrow \phi^0 \bar{\nu}_l$ дается формулой

$$T_\phi = \frac{g^2 M_W}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(p+q)^2 - M_W^2} \bar{u}_e(p) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu(q) \epsilon^\mu. \quad (12.138)$$

Суммируя по всем значениям спинов фермионов и усредняя по поляризациям W -бозона, получаем

$$\frac{1}{3} \sum |T_\phi|^2 = \frac{1}{3} \frac{g^4 M_W^2}{[(p+q)^2 - M_W^2]^2} \left[(pq) + \frac{2}{M_W^2} (pk)(qk) \right]. \quad (12.139)$$

Ширина распада определяется выражением

$$\Gamma_\phi = \frac{1}{2M_W} \int (2\pi)^4 \delta^4(k-l-p-q) \times \\ \times \frac{d^3 l}{(2\pi)^3 2l_0} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q_0} \frac{1}{3} \sum |T_\phi|^2. \quad (12.140)$$

Используя формулу

$$I^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3 p}{2p_0} \frac{d^3 q}{2q_0} \delta^4(Q-p-q) p^\alpha q^\beta = \frac{\pi}{24} (Q^2 g^{\alpha\beta} + 2Q^\alpha Q^\beta), \quad (12.141)$$

где $Q = k - l$, получаем

$$\Gamma_\phi = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^3}{6\pi} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\ln \left| \frac{2m_\phi}{M_W} \right| + \frac{23}{24} \right], \quad (12.142)$$

где приближенно принято $m_e = 0$ и $m_\phi \ll M_W$. Сравнивая это выражение с выражением для распада $W \rightarrow e\bar{\nu}_e$, имеем

$$\frac{\Gamma(W^- \rightarrow \phi^0 \bar{\nu}_e)}{\Gamma(W^- \rightarrow e\bar{\nu}_e)} = \frac{\alpha}{4\pi \sin^2 \theta_W} \left[\ln \left| \frac{2m_\phi}{M_W} \right| + \frac{23}{24} \right]. \quad (12.143)$$

Этот результат показывает, что если ϕ^0 -бозон много легче W -бозона, то логарифмический множитель может привести к

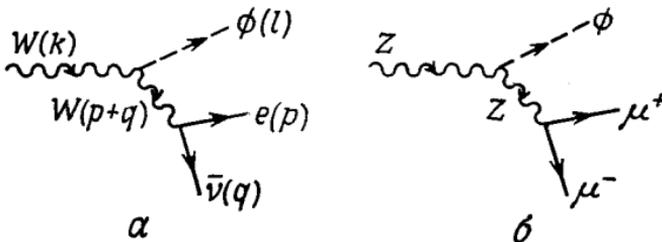


Рис. 12.10.

усилению. Такую моду распада в ϕ^0 -бозон трудно наблюдать экспериментально из-за неуловимости нейтрино и малого времени жизни ϕ^0 -частицы.

Распады Z -бозона

Если взаимодействие Z -бозона с любым фермионом f параметризовать следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\text{нт}} = M_Z \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \bar{f} \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2}} (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f Z^\mu, \quad (12.144)$$

то ширина каждой распадной моды будет определяться формулой

$$\Gamma(Z \rightarrow \bar{f}f) = \frac{G_F M_Z^3}{24\pi\sqrt{2}} (|g_V^f|^2 + |g_A^f|^2). \quad (12.145)$$

В стандартной модели имеем

$$g_V^e = g_V^\mu = g_V^\tau = -1 + 4 \sin^2 \theta_W, \quad g_A^e = g_A^\mu = g_A^\tau = -1, \\ g_V^u = g_V^c = g_V^t = 1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_A^u = g_A^c = g_A^t = 1, \quad (12.146)$$

$$g_V^d = g_V^s = g_V^b = -1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_A^d = g_A^s = g_A^b = -1$$

и $g_V^v = g_A^v = 1$ для всех нейтринных ароматов. Соотношения (12.146) получаются из (11.95) при $g_V = 2(g_L + g_R)$, $g_A = 2(g_L - g_R)$ вследствие универсальности. Заметим, что экспериментальное значение (12.124) $\sin^2 \theta_W = 0,215$ близко к $1/4$, а константа векторного взаимодействия с заряженным лептоном $g_V^l = 0,14$ мала по сравнению с константой аксиально-векторного взаимодействия $g_A^l = 1$. Парциальная ширина распада на пару нейтрино с определенным ароматом f равна

$$\Gamma_{\nu_f} = \Gamma(Z^0 \rightarrow \nu_f \bar{\nu}_f) = \frac{G_F M_Z^3}{24\pi\sqrt{2}} \times 2 = 2,2 (M_Z \text{ в ГэВ})^3 \cdot 10^{-7} \text{ ГэВ}. \quad (12.147)$$

Подстановка в это выражение значения M_Z (12.127) дает

$$\Gamma_{\nu_f} = 0,18 \text{ ГэВ}. \quad (12.148)$$

Относительные ширины распадов $Z \rightarrow \bar{f}f$ для f из одного данного поколения можно получить с помощью (12.146):

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu\bar{\nu}) : \Gamma(Z \rightarrow l\bar{l}) : \Gamma(Z \rightarrow u\bar{u}) : \Gamma(Z \rightarrow d\bar{d}) = \\ = 2 : [1 + (1 - 4 \sin^2 \theta_W)^2] : 3 \left[1 + \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \right)^2 \right] : \\ : 3 \left[1 + \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right)^2 \right] = 2 : 1,02 : 3,54 : 4,53. \quad (12.149)$$

Полная ширина распада

$$\Gamma_{\text{полн}} = \Gamma(Z \rightarrow \text{все}) = 24 \left(1 - 2 \sin^2 \theta_W + \frac{8}{3} \sin^4 \theta_W \right) \Gamma_{\nu_f} = 3,0 \text{ ГэВ}. \quad (12.150)$$

Относительная вероятность (скорость) распада на $\mu^+ \mu^-$ есть

$$B(\mu^+ \mu^-) = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(Z \rightarrow \text{все})} = \\ = \frac{1}{24} \frac{(1 - 4 \sin^2 \theta_W + 8 \sin^4 \theta_W)}{(1 - 2 \sin^2 \theta_W + 8/3 \sin^4 \theta_W)} = 3,06 \cdot 10^{-2}. \quad (12.151)$$

В соотношениях (12.149)—(12.151) использовано значение $\sin^2 \theta_W = 0,215$ из (12.124). Скорость распада (12.151) не очень чувствительна к значениям $\sin^2 \theta_W$ в окрестности значения 0,22. Например, при изменении $\sin^2 \theta_W$ от 0,2 до 0,25 $B(\mu^+\mu^-)$ изменяется с 3,06 до 3,13 %. Это окажется полезной информацией при поиске Z -бозонов, рождаемых адронами.

Замечания. 1. Если обобщить стандартную модель на случай N фермионных поколений, то выражения (12.150) и (12.151) примут вид

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{все}) = 1,0 \cdot N \text{ ГэВ}, \quad B(\mu^+\mu^-) = \frac{0,092}{N}. \quad (12.152)$$

2. Хотя распад $Z \rightarrow \phi^0\phi^0$ запрещен законом сохранения углового момента и бозе-статистикой, имеется мода распада $Z \rightarrow$

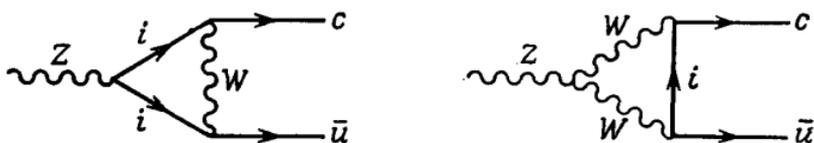


Рис. 12.11. Однопетлевые диаграммы процесса $Z \rightarrow c\bar{u}$, где $i = d, s, b$.

$\rightarrow \phi^0\mu^+\mu^-$ [53]. Такой распад, показанный на рис. 12.10, б, аналогичен распаду $W \rightarrow \phi^0 l \bar{\nu}$. Подобно выражению (12.143), получаем

$$\frac{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-\phi^0)}{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\alpha}{4\pi \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \left[\ln \left| \frac{2m_\phi}{M_W} \right| + \frac{23}{24} \right]. \quad (12.153)$$

Из (12.153) и (12.151) получаем, что скорость распада $Z \rightarrow \mu^+\mu^-\phi^0$ порядка 10^{-4} при $m_\phi = 10$ ГэВ. Возможностей детектировать эту моду распада намного больше по сравнению с распадом $W \rightarrow \phi^0 e \nu$, так как μ^+ и μ^- можно наблюдать, а ϕ^0 должна проявить себя в виде максимума на графике недостающих масс. К тому же предполагается, что в будущих установках по e^+e^- -столкновениям будет рождаться 10^6 Z -бозонов в год, так что даже распады с малыми скоростями могут быть детектированы.

3. Поскольку Z -бозоны будут рождаться в больших количествах, можно надеяться, что удастся изучить редкие моды распада Z -бозонов, которым соответствуют диаграммы с петлями. Особый интерес при проверке неабелева характера теории представляют реакции, которым соответствуют диаграммы с трилинейными взаимодействиями калибровочных бозонов. Большинство из редких распадов Z -бозонов изучено, и установлено, что связанные с ними эффекты слишком малы, чтобы их удалось обнаружить в ближайшем будущем [11]. Например, предположим, что мы хотим изучить распад с участием нейтральных

токов, изменяющих ароматы, такой, как распад $Z \rightarrow \bar{u}c$, показанный на рис. 12.11. Из-за механизма ГИМ для амплитуды такого процесса имеем

$$\Gamma \sim g^4 \left[\sum_i U_{ui} U_{ci}^* m_i^2 / M_W^2 \right]^2, \quad (12.154)$$

откуда для скоростей распадов получаем

$$\frac{\Gamma(Z \rightarrow c\bar{u})}{\Gamma(Z \rightarrow c\bar{c})} \sim \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left(\frac{m_i^2}{M_W^2} \right)^2. \quad (12.155)$$

Даже для таких больших значений m_i , как 10 ГэВ, эта величина порядка 10^{-9} .

Замечания о рождении W - и Z -частиц

1. Отметим, что в наиболее чистом виде W - и Z -бозоны могут рождаться в процессе e^+e^- -аннигиляции. Рождение Z -бозона

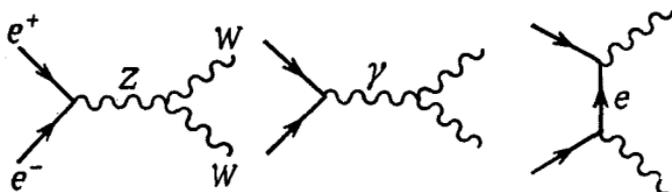


Рис. 12.12.

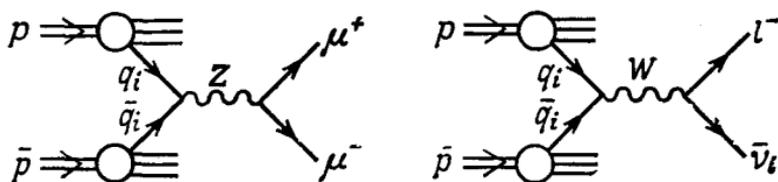


Рис. 12.13.

выглядит как острый пик в e^+e^- -столкновениях, во многом похожий на пики, соответствующие частицам J/ψ и Υ . Для этого Z -резонанса имеем

$$R_Z = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \text{все})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)} \approx 5000, \quad (12.156)$$

что соответствует пяти событиям в секунду, если светимость равна $10^{32} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$. Можно также отметить, что в противоположность ситуации, возникающей в случае частиц J/ψ и Υ , ширина бозона Z (2—3 ГэВ) много больше, чем разрешение по энергии пучков ($\approx 100 \text{ МэВ}$). Так что форма резонансной кривой позволяет непосредственно получить $\Gamma_{\text{полн}}$. Из этих данных можно «подсчитать» число нейтринных ароматов N_ν , ис-

пользуя соотношение

$$\Gamma_{\text{полн}} - \Gamma_{\text{детект}} = N_{\nu} \Gamma(Z \rightarrow \nu_f \bar{\nu}_f), \quad (12.157)$$

так как мы знаем значение ширины распада $\Gamma(Z \rightarrow \nu_f \bar{\nu}_f)$ (12.148), а $\Gamma_{\text{детект}}$ определяется из наблюдаемого сечения в резонансном пике, которое, согласно резонансной формуле Брейта — Вигнера, должно быть пропорционально $\Gamma(e^+e^-) \times \Gamma_{\text{детект}} \times \Gamma_{\text{полн}}^{-1}$.

2. Если в эксперименте с e^+e^- -пучками $\sqrt{s} > 2M_W$, то W -бозоны будут рождаться за счет процессов, диаграммы которых приведены на рис. 12.12. Эта реакция $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ представляет особый интерес, так как она включает в себя трилинейное взаимодействие калибровочных бозонов и будет служить важной проверкой неабелевой природы рассматриваемых калибровочных теорий [13, 372].

3. На практике, по-видимому, первые акты рождения W - и Z -частиц будут зарегистрированы в протон-антипротонных соударениях за счет механизма Дрелла — Яна (рис. 12.13); см. обзор [333].

12.4. ХИГГСОВСКАЯ ЧАСТИЦА

В стандартной теории электрослабых взаимодействий мы начинаем с дублета комплексных скалярных полей. После спонтанного нарушения симметрии три из четырех первоначальных вещественных скалярных полей поглощаются калибровочными полями и остается одно нейтральное скалярное хиггсовское поле ϕ^0 . (См., например, обзоры по феноменологии хиггсовских частиц [123, 124, 268].)

Общие свойства хиггсовской частицы

Хиггсовский скаляр в минимальной модели Вайнберга — Салама обладает следующими основными свойствами.

Соотношение $M_W = M_Z \cos \theta_W$. Как отмечалось выше (см., например, (11.82) — (11.84)), это соотношение следует из дублетной структуры хиггсовских частиц и подтверждается экспериментально. Но нельзя исключить возможность наличия в теории нескольких дублетов. На самом деле имеются и другие хиггсовские структуры, которые также приводят к этому соотношению [392]. Для общего $SU(2) \times U(1)$ -мультиплетта хиггсовских частиц $\phi_{T,Y}$ со слабым изоспином T и слабым гиперзарядом Y параметр ρ определяется формулой [255]

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = \frac{\sum_{T,Y} |v_{T,Y}|^2 [T(T+1) - Y^2/4]}{2 \sum_{T,Y} |v_{T,Y}|^2 Y^2/4}, \quad (12.158)$$

где $v_{T,Y} = \langle 0 | \phi_{T,Y} | 0 \rangle$ — вакуумное среднее для хиггсовской частицы. Требование, чтобы $\rho = 1$ для произвольного $v_{T,Y}$, означает, что

$$T(T+1) = \frac{3}{4} Y^2. \quad (12.159)$$

Примерами решений уравнения (12.159) являются $(T, Y) = (1/2, 1), (3, 4), (25/2, 15), \dots$

Взаимодействие полей Хиггса с фермионами. Юкавское взаимодействие хиггсовской частицы ϕ^0 сохраняет четность и фермионные ароматы, а сила его пропорциональна массе фермиона. Это можно показать следующим образом. Юкавское взаимодействие описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_Y = f_{ij} \bar{\psi}'_{iL} \phi \psi'_{jR} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (12.160)$$

где i, j — фермионные ароматы, а штрихи над фермионными полями указывают на то, что они являются слабыми собственными состояниями. Условие нарушения симметрии (см. (11.63) и (11.90))

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix},$$

где

$$v = (\mu^2/\lambda)^{1/2} = 2^{-1/4} G_F^{-1/2} \approx 250 \text{ ГэВ}, \quad (12.161)$$

приводит к матрице фермионных масс

$$\mathcal{L}_M = m_{ij} \bar{\psi}'_{iL} \psi'_{jR} + \text{эрмит. сопр.}, \quad \text{где } m_{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} f_{ij}. \quad (12.162)$$

В этом случае матрица фермионных масс пропорциональна матрице констант юкавских взаимодействий. Таким образом, диагоналізуем массовую матрицу

$$\mathcal{L}_M = m_{ij} \bar{\psi}'_{iL} \psi'_{jR} + \text{эрмит. сопр.} = m_i \bar{\psi}_{iL} \psi_{iR} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (12.163)$$

где ψ_i — ее собственные состояния, мы диагоналізуем и матрицу констант юкавских взаимодействий физического хиггсовского поля ϕ^0 с полями фермионов:

$$\mathcal{L}_Y = 2^{3/4} \sqrt{G_F} m_i \phi^0 \bar{\psi}_{iL} \psi_{iR} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (12.164)$$

которая сохраняет четность и фермионные ароматы; сила взаимодействия пропорциональна массе фермиона. Это свойство пропорциональности матрицы фермионных масс матрице констант юкавских взаимодействий является следствием того, что хиггсовские частицы образуют одно неприводимое представление [190].

Экспериментальным следствием пропорциональности силы взаимодействия массе фермиона является то, что хиггсовская частица ϕ^0 наиболее легко может рождаться тяжелыми фермионами и ее основными каналами распада являются разрешенные кинематикой распады на тяжелые фермионы. Благодаря множителю $\sqrt{G_F}$ в юкавском взаимодействии (12.164) это взаимодействие с известными на сегодняшний день фермионами является очень слабым. Кроме того, тот факт, что эти взаимодействия сохраняют фермионные ароматы, означает, что мы не сможем обнаружить их следы в редких, но хорошо выделяемых процессах с изменением ароматов.

Взаимодействия хиггсовских частиц с калибровочными бозонами. Константы этих взаимодействий, пропорциональные gM_V , где M_V — масса калибровочного бозона W или Z , намного больше констант рассмотренных выше юкавских взаимодействий:

$$\mathcal{L}_{\phi VV} = g\phi^0 \left(M_W W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2 \cos \theta_W} M_Z Z_\mu Z^\mu \right). \quad (12.165)$$

Структура четверных взаимодействий $\phi^2 VV$ приведена в приложении.

Масса хиггсовской частицы

В стандартной модели масса физической хиггсовской скалярной частицы дается выражением (11.72):

$$m_\phi = (2\mu^2)^{1/2} = (2\lambda)^{1/2} v.$$

Хотя нам известно кое-что о v , мы не располагаем в настоящее время никакой информацией относительно константы четверного взаимодействия λ . Это наше незнание точного значения массы хиггсовской частицы очень сильно затрудняет экспериментальный поиск ϕ^0 . Но существуют определенные теоретические предположения относительно порядка величины m_ϕ . Если мы потребуем, чтобы константа λ была меньше 1 и оставалась применимой теория возмущений, то из (12.161) получим верхнюю границу:

$$m_\phi < 350 \text{ ГэВ}. \quad (12.166)$$

С другой стороны, если константа λ слишком мала, то нарушающий симметрию вакуум будет нестабильным. Как показано ниже, это дает нижнюю границу значений массы m_ϕ .

Ограничение Линде — Вайнберга. Основная идея заключается в том, что если константа λ слишком мала, то однопетлевые вклады (в частности, от петли калибровочного бозона) в

эффективный потенциал (см. разд. 6.4) становятся более существенными; они приводят к тому, что $V(\langle\phi\rangle \neq 0)$ становится больше, чем $V(\langle\phi\rangle = 0)$, и спонтанное нарушение симметрии исчезает [273, 407]. Чтобы привести соответствующие вычисления, кратко сформулируем результаты, полученные в разд. 6.4, и обобщим их на рассматриваемый случай калибровочной $SU(2) \times U(1)$ -теории [97].

Основные вычисления, проведенные в разд. 6.4, включают в себя суммирование бесконечного числа однопетлевых диаграмм (рис. 6.12), где петли состоят из линий, соответствующих пропагаторам скаляров, фермионов и калибровочных бозонов. Ясно, что неабелева природа теории не особенно существенна, так как трilinearные и четырехлинейные по калибровочным полям члены самодействия в данном случае не играют роли. Поэтому можно просто воспользоваться результатами разд. 6.4 (см. в частности, (6.164)). Чтобы быть уверенным в том, что учтены различия в определениях и нормировках констант взаимодействия и полей, остановимся сначала на случае петли калибровочного $SU(2)$ -бозона. Если комплексные скалярные поля разложить на вещественные поля:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (12.167)$$

то получим

$$\phi^2 \equiv \phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \phi_i^2 \quad (12.168)$$

где

$$\langle \phi^2 \rangle_0 = \frac{1}{2} \langle \phi_1 \rangle_0^2 = \frac{1}{2} v^2. \quad (12.169)$$

Поскольку эффективный потенциал может зависеть только от ϕ^2 , для наших целей достаточно вычислить в явном виде однопетлевые диаграммы с внешними линиями ϕ_1 , и так как взаимодействие калибровочных бозонов со скалярным полем имеет вид $\phi^\dagger (\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{A}_\mu) \phi$, то все три калибровочных бозона дают одинаковые вклады. Для каждого из них, скажем A_μ^1 можно просто воспользоваться результатом скалярной КЭД — уравнением (6.157). Учитывая, что поля $\phi_{1,2}$ в (6.154) нормированы не так, как наши поля ϕ_i , и используя правила Фейнмана, приведенные в приложении Б, необходимо заменить e^2 на $g^2/4$. Тогда получим

$$V(\phi_1^2) = \frac{3}{64\pi^2} \left(\frac{g^2}{4}\right)^2 \phi_1^4 \ln \phi_1^2/M^2 + \dots,$$

или

$$V(\phi^2) = \frac{3}{16\pi^2 v^4} M_W^4 \phi^4 \ln \phi^2/M^2 + \dots, \quad (12.170)$$

где мы воспользовались равенством $M_W^2 = 1/4 g^2 v^2$ и уравнением (12.168). Если включить петли других калибровочных бозонов, то получим

$$V_g(\phi^2) = \frac{3}{16\pi^2 v^4} \sum_V m_V^4 \phi^4 \ln \phi^2/M^2 + \dots \quad (12.171)$$

Индекс V пробегает значения, соответствующие векторным бозонам W^\pm и Z . Включив скалярные и фермионные петли, мы в результате получим однопетлевой эффективный потенциал, похожий на потенциал (6.164):

$$V_1(\phi^2) = C\phi^4 \ln \phi^2/M^2, \quad (12.172)$$

где

$$C = \frac{1}{16\pi^2 v^4} \left(3 \sum_V m_V^4 + m_\phi^4 - 4 \sum_f m_f^4 \right). \quad (12.173)$$

Следует напомнить, что множитель 3 в члене, соответствующем векторному бозону, возникает из-за взятия следа в числителе пропагатора калибровочного бозона в калибровке Ландау; множитель 4 в фермионном члене появляется из-за взятия следа дираковских матриц, а знак минус отражает тот факт, что фермионы подчиняются статистике Ферми. Из эффективного потенциала

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi) = -\mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 + C\phi^4 \ln(\phi^2/M^2) \quad (12.174)$$

можно определить v , используя условия

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi=v/\sqrt{2}} = 0, \quad (12.175)$$

$$-\mu^2 + \lambda v^2 + C v^2 (\ln v^2/2M^2 + 1/2) = 0. \quad (12.176)$$

Масса хиггсовского бозона определяется выражением

$$m_\phi^2 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=v/\sqrt{2}} = 2v^2 \left[\lambda + C \left(\ln \left(\frac{v^2}{2M^2} \right) + \frac{3}{2} \right) \right], \quad (12.177)$$

где мы использовали соотношение (12.176), чтобы исключить μ^2 .

Рассмотрим теперь случай, когда константа λ очень мала, так что ею можно пренебречь в равенствах (12.174)–(12.177). Значение потенциала в минимуме $\phi = v/\sqrt{2}$ равно

$$V(v) = -\frac{1}{2} \mu^2 v^2 + \frac{C v^4}{4} \ln(v^2/2M^2). \quad (12.178)$$

При $\phi = 0$ значение потенциала

$$V(0) = 0, \quad (12.179)$$

и спонтанное нарушение симметрии отсутствует. Так как мы хотим, чтобы значение (12.178) было абсолютным минимумом

потенциала, должно выполняться условие

$$V(v) < V(0). \quad (12.180)$$

Отсюда с учетом (12.176) и (12.178) получаем

$$\ln(v^2/2M^2) + 1 > 0. \quad (12.181)$$

Подставив условие (12.181) в выражение (12.177), имеем

$$m_\phi^2 > Cv^2 = \frac{1}{16\pi^2 v^4} \sum_V 3m_V^4 = \frac{3\alpha^2(2 + \sec^4 \theta_W)}{16\sqrt{2} G_F \sin^4 \theta_W}, \quad (12.182)$$

где мы пренебрегли массами m_ϕ и m_f , предполагая, что они малы по сравнению с m_V . Для значения $\sin^2 \theta_W \approx 0,215$ последнее неравенство дает

$$m_\phi > 7,9 \text{ ГэВ}. \quad (12.183)$$

В противном случае радиационные поправки делают асимметричный вакуум нестабильным.

Гипотеза Коулмена — Вайнберга. Весьма интересна гипотеза, согласно которой в стандартной модели $\mu^2 = 0$, а спонтанное нарушение симметрии происходит только благодаря радиационным квантовым поправкам [97, 412]. Из (12.176) и (12.177) получаем

$$m_\phi = (2C)^{1/2} v \approx 11 \text{ ГэВ}. \quad (12.184)$$

Хотя это позволяет предсказать точное значение m_ϕ , следует иметь в виду, что на современном этапе нет достаточных оснований считать, что $\mu^2 = 0$, несмотря на то, что это довольно заманчивое предположение, привлекательное в силу своей простоты.

Рождение хиггсовской частицы

Из приведенного выше обсуждения взаимодействия хиггсовской частицы с фермионами и калибровочными бозонами ясно, что в большинстве вероятных механизмов рождения хиггсовских частиц используются их взаимодействия с 1) тяжелыми фермионами, 2) калибровочными бозонами, так как эти взаимодействия менее подавлены.

В первой категории, возможно, самой многообещающей является реакция

$$a) V_{Q\bar{Q}} \rightarrow \phi^0 + \gamma$$

(рис. 12.14), где $V_{Q\bar{Q}}$ — связанное состояние $1^- Q\bar{Q}$ тяжелых кварков [420]. Помимо того, что константа взаимодействия хиггсовской частицы с тяжелым фермионом велика, этот процесс привлекателен еще и тем, что адронный распад кваркония $V_{Q\bar{Q}}$ по-

давлен благодаря правилу Цвейга. Оценки вероятностей распадов приводят к следующему результату:

$$\frac{\Gamma(V_{Q\bar{Q}} \rightarrow \phi^0 + \gamma)}{\Gamma(V_{Q\bar{Q}} \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-)} \approx \frac{G_F M_V^2}{4\sqrt{2}\pi\alpha} \left(1 - \frac{m_\phi^2}{M_V^2}\right), \quad (12.185)$$

где M_V — масса $V_{Q\bar{Q}}$. Для $M_V \approx 30$ ГэВ и $m_\phi \ll M_V$ эта доля составляет 8%. Одной из важных особенностей этого механизма является то, что в нем рождается монохроматический фотон,

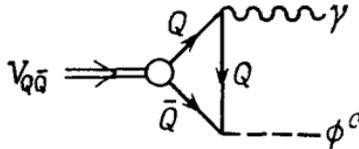


Рис. 12.14.

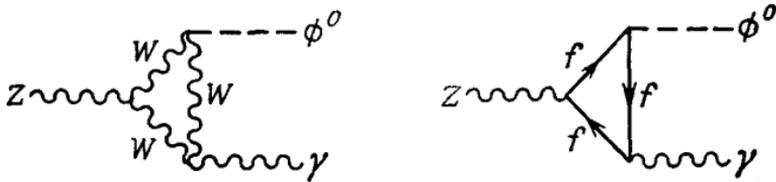


Рис. 12.15.

поэтому данную реакцию можно использовать для экспериментального обнаружения хиггсовской частицы.

Ко второй категории относятся несколько интересных процессов.

б) $Z^0 \rightarrow \phi^0 + \gamma$

(рис. 12.15, где f на второй диаграмме обозначает некоторый тяжелый фермион, константа взаимодействия которого с ϕ^0 велика [67]). Оказывается, что при $m_f < M_W$ основной вклад дают диаграммы с W -петлей, а при $m_f \ll M_Z$ доля этого канала составляет 10^{-6} . Фотон, рождающийся в результате такого распада, также является монохроматическим.

в) $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 + \phi^0$

(рис. 12.16). При $\sqrt{s} \approx 200$ ГэВ возможно даже рождение хиггсовской частицы с массой около 100 ГэВ и сечением более 10^{-37} см². Это соответствует одному событию в день при светимости 10^{32} см² с⁻¹ [123].

г) $Z \rightarrow \phi^0 + e^+ + e^-$.

Этот распад уже обсуждался в разд. 12.3 в связи с изучением распадов Z -бозона. Общим здесь является то, что ϕ^0 проявляет

себя как максимум в спектре отдачи относительно пары e^+e^- . Оценки дают $B(Z^0 \rightarrow \phi^0 e^+ e^-) \geq 10^{-6}$ для $m_\phi < 40$ ГэВ. Аналогичный процесс $W^- \rightarrow \phi^0 e \bar{\nu}$ также рассчитан в разд. 12.3, но де-

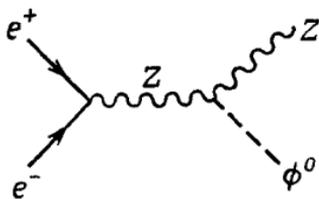


Рис. 12.16.

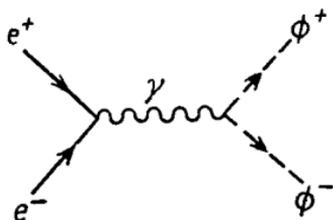


Рис. 12.17.

тектирование этой моды распада W -бозона довольно затруднительно.

Заряженные хиггсовские частицы

В стандартной теории нет физической заряженной хиггсовской частицы. Но во многих расширениях минимальной модели такие частицы имеются, что приводит к более богатой феноменологии [116, 196]. Хотя значения масс и констант связи этих частиц не сильно ограничиваются теорией, но если они существуют, то могут рождаться в процессе e^+e^- -аннигиляции за счет фотонного обмена (рис. 12.17). При энергии много больше пороговой сечение процесса $\sigma(e^+e^- \rightarrow \phi^+\phi^-)$ составляет $1/4$ от стандартного точечноподобного сечения $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$. Таким образом, если имеется несколько хиггсовских частиц с зарядом 1 или 2, то их вклады в полное сечение e^+e^- -процесса должны быть достаточно значительными, чтобы эти частицы были наблюдаемыми.

Кроме того, заряженные хиггсовские частицы будут генерировать скалярные или псевдоскалярные заряженные токи [294], которые могут давать вклад во взаимодействия заряженных токов при низких энергиях, такие, как $\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu}$, $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$, $n \rightarrow p e \bar{\nu}$, $\pi \rightarrow e \nu$ и т. д. В будущем прецизионные измерения этих низкоэнергетических процессов могут пролить свет на свойства заряженных хиггсовских частиц. Любое заметное отличие от структуры типа V или A может говорить в пользу их существования.

Глава 13

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ АРОМАТОДИНАМИКИ

Под «стандартной моделью» сильных и электрослабых взаимодействий обычно подразумевают калибровочную $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -теорию, в которой дублет элементарных хиггсовских скалярных полей спонтанно нарушает симметрию от электрослабой группы $SU(2) \times U(1)$ до электромагнитной группы $U(1)_{\text{эм}}$. В этой теории нейтрино безмассовые и имеются три поколения фермионов, а нарушение CP -инвариантности обусловлено комплексной матрицей смешивания ККМ в слабых взаимодействиях заряженных токов.

Некоторые аспекты стандартной теории электрослабых взаимодействий по различным причинам могут быть пересмотрены и расширены. В разд. 13.1 обсуждается специальная реализация динамического нарушения симметрии, основанная на аналогии с калибровочной теорией цвета — квантовой хромодинамикой (КХД). Такие схемы в литературе обычно называют *моделями техницвета* или *гиперцвета*. Их рассмотрение преследует цель построить теорию без элементарного скалярного поля. В разд. 13.2 изучается вопрос о возможном существовании массивных нейтрино. Обсуждаются вероятное происхождение нейтринных массовых членов и феноменологические следствия, к которым может привести их присутствие. В разд. 13.3 детально рассматривается процесс $\mu \rightarrow e\gamma$ как эффект высшего порядка в слабых взаимодействиях при наличии массивных нейтрино. При этом ставится задача — проиллюстрировать применение правил Фейнмана в R_{ξ} -калибровке в одном нетривиальном случае, когда нефизические «несостоявшиеся голдстоуновские бозоны» играют важную роль в сохранении калибровочной инвариантности в ходе вычислений.

13.1. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И МОДЕЛИ ТЕХНИЦВЕТА

Предпринимаются попытки заменить элементарные хиггсовские скаляры составными полями (см., например, [408]). Значительный класс таких моделей содержит составляющие фермионы, связанные калибровочными взаимодействиями, построен-

ными по аналогии с взаимодействиями в КХД [373, 411]. При этом постулируется существование набора новых калибровочных зарядов — *техницветов*. Цель заключается в том, чтобы получить теорию со спонтанным нарушением симметрии, в которой имеются только калибровочные взаимодействия и отсутствует элементарное скалярное поле с самодействиями и юкавскими взаимодействиями. Последовательная теория такого рода пока не построена. Однако в реализации этой программы был достигнут заметный прогресс (см. обзоры [36, 130]). Наша цель состоит в том, чтобы проиллюстрировать возможность построения динамических моделей со спонтанным нарушением симметрии. В своем изложении мы следуем работе [361].

Мотивировка замены элементарных хиггсовских скаляров

Хиггсовские скаляры вводятся в калибровочные теории, чтобы обеспечить спонтанное нарушение симметрии. В теории электро-слабых взаимодействий благодаря им появляются массы у калибровочных W - и Z -бозонов. В случае одного дублета элементарных хиггсовских частиц получается правильное соотношение для параметров нейтральных и заряженных токов: $M_W = M_Z \cos \theta_W$. В стандартной модели лептоны и кварки приобретают массы также за счет юкавского взаимодействия при спонтанном нарушении симметрии. Величины фермионных масс легко получить, подбирая различные значения констант взаимодействия; комплексные константы юкавского взаимодействия приводят к нарушающим CP -инвариантность взаимодействиям заряженных токов, которые получают диагонализацией массовой матрицы фермионов (см. разд. 11.3 и 12.2).

Эта «универсальность» элементарной хиггсовской частицы связана со свободой выбора констант хиггсовских взаимодействий: на константы самодействия и юкавского взаимодействия скалярных частиц не наложено никаких ограничений при условии, что эти взаимодействия удовлетворяют требованиям калибровочной инвариантности. В результате калибровочная теория с элементарными хиггсовскими скалярами содержит много произвольных параметров, связанных с полями Хиггса. Это проявляется в том факте, что в общем случае массы и углы смешивания не могут быть вычислены, а должны рассматриваться как параметры, вводимые в теорию.

Кроме того, как мы увидим в гл. 14, посвященной теории великого объединения, когда группа $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ стандартной модели вкладывается в простую калибровочную группу, отмеченный выше произвол не особенно сужается. С другой стороны существует (см. разд. 14.2) серьезная проблема «калибровочной иерархии», которая может быть описана следующим об-

разом. В теориях великого объединения с группой G спонтанное нарушение симметрии должно происходить по крайней мере в два этапа, соответствующие редукциям $G \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ при масштабе энергий M и $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1) \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{\text{эм}}$ при масштабе энергий μ . Масштаб μ фиксируется интенсивностью слабых взаимодействий и равен 250 ГэВ (см. (11.90)). Что касается масштаба M , то он предполагается величиной порядка 10^{14} ГэВ. Такое значение следует из нижней границы времени жизни протона и соответствует правильному предсказанию $\sin^2 \theta_W$. Если эти этапы СНС обусловлены элементарными хиггсовскими скалярами, то отношение $\mu^2/M^2 \approx 10^{-24}$ должно вводиться искусственно и подгоняться с точностью до 24-го десятичного знака в каждом порядке теории возмущений (см. разд. 14.2).

Это побуждает нас исследовать различные возможности спонтанного нарушения симметрии без введения элементарных скалярных полей. Понятие составного хиггсовского скаляра в действительности не ново. В разд. 8.3 мы уже отмечали, что идея явления Хиггса впервые рассматривалась в теории сверхпроводимости. В этой теории электромагнитная калибровочная симметрия спонтанно нарушается конденсатом (т. е. отличным от нуля средним по основному состоянию) электронных (куперовских) пар, который действует как эффективный составной хиггсовский скаляр. Таким образом, СНС происходит динамически за счет взаимодействия электронов с фононами решетки. (См. первые работы по динамическому нарушению симметрии [302, 303].) Поэтому в случае электрослабого взаимодействия возникает вопрос: если хиггсовские скаляры являются составными, то какие частицы являются их составляющими? Какие взаимодействия ответственны за то, что эти составляющие связываются в единое целое? Как можно получить все желаемые схемы СНС без введения большого числа произвольных параметров?

Основная идея техницвета

Естественно, возникает вопрос, может ли сильное взаимодействие КХД, связывающее цветные кварки, быть взаимодействием, которое обуславливает СНС в электрослабом взаимодействии? Мы увидим, что, хотя КХД не может обеспечить СНС, тем не менее анализ причин этого позволяет предложить другие возможные теории в качестве кандидатов на эту роль.

Рассмотрим стандартную $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -модель, но на этот раз без элементарного хиггсовского скаляра. К тому же для простоты ограничимся одним поколением фермионов:

$$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad l_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L. \quad (13.1)$$

Тогда лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^{\alpha\mu\nu} G_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{4} A^{i\mu\nu} A_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \\ + i(\bar{q}\gamma_\mu D^\mu q + \bar{l}\gamma_\mu D^\mu l), \quad (13.2)$$

где $\alpha = 1, \dots, 8$; $i = 1, 2, 3$. Так как вакуумное среднее хиггсовского скаляра, из-за которого нарушается калибровочная $SU(2) \times U(1)$ -симметрия, равно нулю, может показаться, что все фермионы и все калибровочные бозоны, включая W - и Z -бозоны, останутся безмассовыми. Как мы сейчас увидим, на самом деле этого не происходит.

Выключим на время электрослабое взаимодействие и вспомним из гл. 10 некоторые основные свойства сильного взаимодействия; тот факт, что u - и d -кварки являются безмассовыми, означает, что мы имеем симметрию ароматов $SU(2)_L \times SU(2)_R$. В соответствии с обсуждением в гл. 5 киральной симметрии и ее нарушения все свидетельствует в пользу того, что эта симметрия реализуется голдстоуновским способом. Симметрия спонтанно нарушается, так что вакуум инвариантен только относительно диагональной подгруппы $SU(2)_{L+R}$:

$$\langle \bar{u}u \rangle_0 = \langle \bar{d}d \rangle_0 \neq 0, \quad (13.3)$$

и имеются в точности три безмассовых голдстоуновских бозона $\pi^\pm, 0$. Хотя этот результат строго не доказан в рамках КХД, все указывает на то, что это действительно так.

Чтобы выразить все это в более удобных обозначениях, определим эффективные скалярное и псевдоскалярное поля (σ, π), имеющие квантовые числа билинейных комбинаций кварковых полей:

$$\sigma \sim \bar{q}q \quad \text{и} \quad \pi \sim i\bar{q}\tau\gamma_5 q, \quad (13.4)$$

где $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. Таким образом, мы получаем $SU(2) \times SU(2)$ σ -модель, рассмотренную в разд. 5.3. Из условия спонтанного нарушения симметрии (5.169) и обобщения равенства (5.155) непосредственно следует, что вакуумное среднее в (13.3) определяется константой пионного распада f_π :

$$\langle \sigma \rangle_0 = v \approx 95 \text{ МэВ}, \quad (13.5)$$

а именно

$$\frac{1}{2v^2} \langle \bar{q}q \rangle_0 = f_\pi = 95 \text{ МэВ}. \quad (13.6)$$

Константа f_π в свою очередь должна быть связана с масштабным параметром КХД $\Lambda_c \approx 200 \text{ МэВ}$, так как эта величина является единственным масштабом в нашей теории.

Включим теперь в рассмотрение электрослабое взаимодействие. Из (13.1) следует, что билинейные комбинации кварковых

полей преобразуются как

$$\phi_{\text{эфф}} = \begin{pmatrix} \pi_1 + i\pi_2 \\ \sigma + i\pi_3 \end{pmatrix}. \quad (13.7)$$

Тогда вакуумное среднее $\langle \sigma \rangle = f_\pi$ нарушает $SU(2)_L \times U(1)$ -симметрию до электромагнитной $U(1)$ -симметрии; при этом поля π поглощаются тремя калибровочными бозонами, которые в результате становятся W^\pm - и Z -бозонами. Из (11.77) и (13.5) имеем

$$M_W = \frac{1}{2} g f_\pi \approx 30 \text{ МэВ}, \quad (13.8)$$

что на три порядка меньше значения (80 ГэВ), требуемого в стандартной модели. Но этот простой механизм динамического нарушения симметрии приводит к правильному соотношению

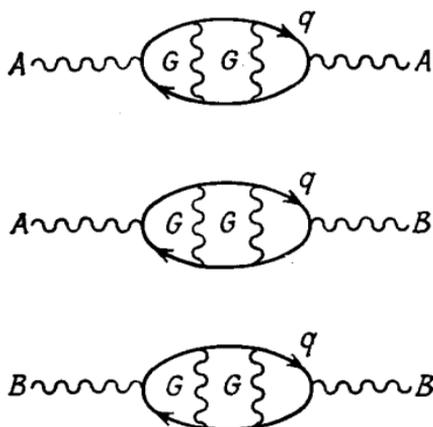


Рис. 13.1. Петли вакуумной поляризации калибровочного бозона слабого взаимодействия, возникающие из кварк-глюонных состояний.

между M_W и M_Z . Это обусловлено тем, что остается $SU(2)_{L+R}$ -симметрия (изоспиновая симметрия сильных взаимодействий), которая приводит к равенству $M_W = M_Z \cos \theta_W$ (т. е. $\rho = 1$), как это было объяснено в разд. 11.2 (см., в частности, (11.83)).

Чтобы приведенный выше результат стал более очевидным, рассмотрим диаграммы поляризации вакуума, приведенные на рис. 13.1. Они получаются в теории с лагранжианом (13.2). Из диаграммы AA на рис. 13.1 получаем

$$\pi_{\mu\nu}^{ij}(k) = \delta^{ij} \left(\frac{g}{2}\right)^2 (g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) k^2 \pi(k^2). \quad (13.9)$$

После суммирования вкладов вакуумных петель пропагатор калибровочного бозона A_μ

$$\delta^{ij} \frac{(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)}{k^2}$$

принимает вид

$$\delta^{ij} \frac{(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2)}{k^2 [1 - g^2 \pi(k^2)/4]} \quad (13.10)$$

Так как киральная симметрия должна реализоваться голдстоуновским способом, взаимодействие КХД приводит к безмассовому полюсу в члене, соответствующем вкладу петли поляриза-

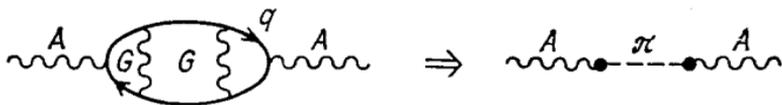


Рис. 13.2.

ции вакуума (рис. 13.2). Это означает, что функция вакуумной поляризации в (13.9) дается выражением

$$\pi(k^2) = f_\pi^2 / k^2. \quad (13.11)$$

Таким образом, вклад диаграммы AA , показанной на рис. 13.1, в выражение (13.10) имеет полюс в точке

$$k^2 = M_{AA}^2 = g^2 f_\pi^2 / 4.$$

Аналогично диаграммы AB и BB , приведенные на рис. 13.1, имеют полюса в точках

$$M_{AB}^2 = gg' f_\pi^2 / 4, \quad M_{BB}^2 = g'^2 f_\pi^2 / 4.$$

Сравнивая эти выражения с (11.78), немедленно получаем соотношение (13.8), отвечающее значению $\rho = 1$ в формуле (11.82). Следует заметить, что если бы мы рассмотрели теорию с тремя поколениями, т. е. шестью кварковыми ароматами, то группой киральной симметрии была бы группа $SU(6) \times SU(6)$ и было бы 35 голдстоуновских бозонов. Три из них стали бы продольными модами, отвечающими W^\pm - и Z -бозонам, а остальные 32 приобрели бы очень малые массы в высших порядках электрослабых взаимодействий, т. е. являлись бы псевдоголдстоуновскими бозонами.

В любом случае мы видим, что при соответствующих условиях взаимодействие КХД само нарушает электрослабую калибровочную группу как раз нужным образом. Однако такую возможность нельзя рассматривать как реалистическую, поскольку

- 1) масштаб оказывается неверным, мы получаем $M_W \approx \approx 30$ МэВ вместо 80 ГэВ, как это требуется;
- 2) фермионы остаются безмассовыми.

Первую проблему можно решить относительно простым способом, постулируя существование другого КХД-подобного взаимодействия, называемого *техницветовым* (ТЦ) *взаимодействием*,

обладающего таким масштабным параметром $\Lambda_{\text{ТЦ}}$, который приводит к правильной с точки зрения феноменологии массе W -бозона:

$$M_W = \frac{1}{2} g_{\text{ТЦ}} F_\pi \approx 80 \text{ ГэВ}. \quad (13.12)$$

Тогда $F_\pi \approx 250 \text{ ГэВ}$ и $\Lambda_{\text{ТЦ}}$ порядка 1 ТэВ . Другими словами, теория техницветового взаимодействия, например, с калибровочной группой $SU(3)$ подобна КХД во всех отношениях, за исключением того, что в ней появляется конденсат (или вакуумное среднее) при энергии, на три порядка большей, чем в КХД. Таким образом, в этой теории имеются фермионы, несущие техницвет (техникварки Q), со следующими свойствами преобразований относительно группы $SU(2)_L \times U(1) \times SU(3)_c \times SU(3)_{\text{ТЦ}}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix} &\sim (2, 1/3, 1, 3), \\ U_R &\sim (1, 4/3, 1, 3), \\ D_R &\sim (1, -2/3, 1, 3). \end{aligned}$$

Обычные кварки и лептоны являются ТЦ-синглетами. Техникварки образуют связанные состояния точно так же, как обычные кварки образуют связанные состояния в результате обычных цветовых взаимодействий. Киральная симметрия ТЦ также спонтанно нарушается; при этом величина, определяющая постоянную распада технипиона, равна

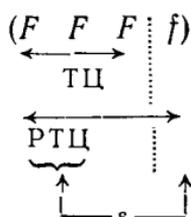
$$\frac{1}{2V^2} \langle \bar{Q}Q \rangle_0 = F_\pi \approx 250 \text{ ГэВ}. \quad (13.13)$$

Таким образом, в области энергий порядка 1 ТэВ можно ожидать богатого спектра новых частиц.

Расширенный техницвет

В рассмотренной выше картине по-прежнему не решена вторая проблема — проблема безмассовости фермионов. Кварки и лептоны обладают отдельными киральными симметриями, которые остаются ненарушенными. Эту ситуацию можно сравнить с той, которая имеет место в стандартной модели, где юкавское взаимодействие элементарного хиггсовского скаляра с фермионами приводит к появлению у фермионов «токовых масс» (см. (11.71)) при $\langle \phi \rangle_0 \neq 0$. Таким образом, необходимо найти способы, позволяющие получить эффективные юкавские взаимодействия между обычными фермионами и технимезонами. Один из возможных путей сделать это — расширить группу техницвета $G_{\text{ТЦ}}$ до калибровочной группы *расширенного техницвета* $G_{\text{РТЦ}}$: помещая технифермионы F (имеющие, например, три техни-

цвета) и обычные фермионы f (техницветовые синглеты) в одно неприводимое представление группы $G_{\text{РТЦ}}$:



Симметрия расширенного техницвета (РТЦ) нарушается до симметрии техницвета при некотором масштабе энергий μ . Векторный калибровочный бозон E , имеющийся в РТЦ и отсутствующий в ТЦ, приобретает массу $M_E \approx g_{\text{РТЦ}}\mu$ и взаимодействует с токами вида $\bar{F}\gamma_\mu f$. Эффективное четырехфермионное взаимодействие, соответствующее обмену бозоном E , имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{g_{\text{РТЦ}}}{M_E} \right)^2 (\bar{F}_L \gamma_\mu f_L) (\bar{f}_R \gamma^\mu F_R). \quad (13.14)$$

С помощью преобразований Фирца получаем выражение

$$-\frac{1}{2\mu^2} [(\bar{F}F)(\bar{f}f) - (\bar{F}\gamma_5 F)(\bar{f}\gamma_5 f) + \dots],$$

где мы воспользовались соотношением $M_E \approx g_{\text{РТЦ}}\mu$. Тогда конденсация технифермионов $\langle \bar{F}F \rangle_0 \neq 0$ дает массы обычных фермионов:

$$m_f = \frac{1}{2\mu^2} \langle \bar{F}F \rangle_0. \quad (13.15)$$

Поскольку $\langle \bar{F}F \rangle \sim (1 \text{ ТэВ})^3$, необходимо иметь $\mu \approx 30 \text{ ТэВ}$, чтобы получить $m_f \sim 1 \text{ ГэВ}$.

Так как векторные бозоны E являются $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$ -синглетами, для каждого обычного фермиона нужен набор технифермионов, чтобы этот обычный фермион приобрел массу. Для одного поколения фермионов необходимо восемь наборов технифермионов:

$$U_1, U_2, U_3, D_1, D_2, D_3, N \text{ и } E,$$

где индексы являются цветовыми индексами КХД. Тогда группа симметрии ароматов взаимодействия ТЦ не меньше, чем $SU(8)_L \times SU(8)_R$. Когда эта киральная симметрия спонтанно нарушается, три голдстоуновских бозона объединяются с W^+ , W^- и Z и остается большое число относительно легких (в шкале масс порядка 1 ТэВ) псевдоголдстоуновских бозонов. Это позволит уже в ближайшем будущем произвести проверку ТЦ-подхода к проблеме динамического нарушения симметрии.

Переключение

Чтобы обычные фермионы нескольких поколений приобрета-ли массы за счет одного поколения технифермионов, необхо-димо нарушать калибровочную группу РТЦ до группы ТЦ в несколько последовательных этапов. Например, модель с тремя поколениями может быть построена за счет последовательных нарушений

$$SU(6)^{РТЦ} \xrightarrow{\mu} SU(5)^{РТЦ} \xrightarrow{\mu'} SU(4)^{РТЦ} \xrightarrow{\mu''} SU(3)^{ТЦ}$$

с фермионами

$$\begin{array}{c} (F \ F \ F \ f'' \ f' \ f), \\ \leftarrow \text{РТЦ} \rightarrow \\ \leftarrow \text{ТЦ} \rightarrow \end{array}$$

преобразующимися как секстет группы РТЦ. Первое поколение $f = \{e, \nu, u, d\}$ имело бы массу $m_f \approx (1/2\mu^2) \langle FF \rangle$, второе поколе-ние $f' = \{\mu, \nu', c, s\}$ — массу $m_{f'} \approx (1/2\mu'^2) \langle FF \rangle$ и т. д.

Можем ли мы иметь такую последовательность СНС без эле-ментарного хиггсовского скаляра? Нужно ли вводить новое взаи-модействие ТЦ, чтобы выполнить каждое последующее наруше-ние РТЦ-симметрии? Один из возможных способов избежать та-кого увеличения числа калибровочных групп ТЦ основан на идее «переключения». Эта идея касается поведения асимптоти-чески свободных теорий с ненарушенными калибровочными груп-пами, в которых фермионы содержатся в комплексном представ-лении группы. Мы условимся, что все фермионы описываются левыми полями. Например, в КХД с n ароматами входят фер-мионы q_{L_i} и $(q^c)_{L_i} = i\gamma_2 q_{R_i}^{+T}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), и мы говорим, что ее фермионы принадлежат представлению $n(3 + 3^*)$ группы $SU(3)_c$, которое вещественно. Ниже делается утверждение, что в асимптотически свободной теории, в которой фермионы содер-жатся в комплексном представлении калибровочной группы, сим-метрия нарушается, когда константы калибровочного взаимодей-ствия становятся большими в инфракрасной области. Может произойти несколько следующих одно за другим нарушений, прежде чем фермионы будут содержаться в вещественном пред-ставлении ненарушенной подгруппы и переключение прекратит-ся. Это позволяет нам установить иерархию массовых масшта-бов экономичным и естественным способом.

Мы проиллюстрируем схему переключения, сравнивая КХД с моделью, обладающей калибровочной $SU(5)$ -группой, где фер-мионы берутся в представлениях 5^* и 10 . В тензорной записи элементы представления 5^* обозначаются вектором ψ^i , а эле-менты представления 10 — антисимметричным тензором $\psi_{ij} = = -\psi_{ji}$, где $i, j = 1, 2, \dots, 5$ (подробнее см. разд. 4.3, 14.1 и

14.5). Возможные скалярные связанные состояния, состоящие из таких фермионных билинейных комбинаций, принадлежат представлениям

$$\begin{aligned} 5^* \times 5^* &= 10_A^* + 15_S, \\ 10 \times 10 &= 5^* + 45_A^* + 50_S, \\ 5^* \times 10 &= 5 + 45. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Это следует сравнить со случаем КХД:

$$\begin{aligned} 3 \times 3 &= 3^* + 6, \\ 3^* \times 3^* &= 3 + 6^*, \\ 3 \times 3^* &= 1 + 8. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Чтобы иметь лоренцевский скаляр, билинейная комбинация фермионов должна быть симметричным произведением. Потенциал связанного состояния $\bar{\psi}_1 \psi_2$ в приближении обмена одним калибровочным бозоном дается выражением

$$V(r) = \frac{-\alpha(\mu)}{2r} (C_1 + C_2 - C), \quad (13.18)$$

где C_1 и C_2 — операторы Казимира в представлениях, в которых берутся составляющие фермионы, а C — оператор Казимира в представлении, которому принадлежит связанное состояние. Это соответствует известному соотношению $-2\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^2 + \mathbf{T}_2^2 - \mathbf{T}^2$, где $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ в симметрии изоспина. Затем мы идентифицируем наиболее притягивающий скалярный канал (НПСК), для которого комбинация $C_1 + C_2 - C$ максимальна. Основное утверждение схемы переключения заключается в том, что при переходе из области высоких энергий в область низких энергий, где бегущая константа связи становится большой, прежде всего будет конденсироваться НПСК, когда

$$\alpha(\mu) (C_1 + C_2 - C) = O(1). \quad (13.19)$$

Это, несомненно, согласуется с КХД, где НПСК является синглет $1 \in 3 \times 3^*$. В случае $SU(5)$ -модели НПСК является представлением 5^* , содержащееся в представлении 10×10 . Имеем

$$\langle 0 | \psi_{ij} \psi_{kl} \epsilon^{ijklm} | 0 \rangle \approx \mu^3 \delta_{m5}, \quad (13.20)$$

т. е. различие заключается в том, что здесь конденсат не является синглетом и должен выделять направление в $SU(5)$ -пространстве, а следовательно, нарушать калибровочную $SU(5)$ -симметрию: $SU(5) \rightarrow SU(4)$ при масштабе μ . Калибровочные $SU(5)$ -бозоны, которые отсутствуют в $SU(4)$, должны приобретать массы порядка $g\mu$. Фермионные мультиплеты расщепляются следующим образом:

$$5^* = 4^* + 1, \quad 10 = 6 + 4.$$

Так же как в КХД, фермионы, участвующие в создании конденсата, приобретают динамическую массу, тесно связанную с «конституентной массой» (см. разд. 5.5); равенство $\langle \bar{q}q \rangle_0 = \mu^3$ приводит к члену динамической массы $\sim \mu \bar{q}q$ для кварков. В случае $SU(5)$ -модели массы приобретают частицы секстета в представлении 10 ($\psi_{ab} = -\psi_{ba}$, $a = 1, \dots, 4$). Эти динамические массы сильно зависят от энергий и обращаются в нуль при энергиях больше μ . При энергиях меньше μ эффекты, связанные с тяжелыми частицами, не играют роли [20]; мы имеем теорию, основанную на калибровочной группе $SU(4)$, где фермионы принадлежат представлению $4 + 4^* + 1$. Константа калибровочного взаимодействия изменяется в соответствии с β -функцией группы $SU(4)$. Новым НПСК являются теперь представления 4 и 4^* , объединенные в один синглет. Этот канал конденсируется, когда

$$\alpha(\mu')(C_4 + C_{4^*} - C_1) = O(1).$$

Калибровочная группа $SU(4)$ остается ненарушенной, и переключение прекращается, так как конденсат является $SU(4)$ -синглетом. Фермионы из представлений 4 и 4^* приобретают динамическую массу порядка μ' , которая является массовым масштабом конденсата — $SU(4)$ -синглета. В рассмотренном примере $SU(5)$ -модели возникают только два массовых масштаба, но легко построить примеры, которые приводят к еще некоторому их числу.

Вырисовываются контуры теории частиц низких энергий (≤ 300 ТэВ), основанной на калибровочной группе:

$$SU(2)_L \times U(1) \times SU(3)_c \times G_{\text{PTC}}.$$

Фермионы принадлежат комплексному представлению группы РТЦ. С энергий $\mu \sim 300$ ТэВ симметрия РТЦ переключается до симметрии ТЦ при энергии μ' , являющейся массовым масштабом порядка нескольких ТэВ. Фермионы теперь принадлежат вещественному представлению группы ТЦ. При $\mu'' \approx \approx 250$ ГэВ конденсаты технифермионов приводят к нарушению $SU(2)_L \times U(1) \rightarrow U(1)_{\text{эм}}$. Кварки и лептоны являются ТЦ-синглетами, но вместе с техникварками и технилептонами они составляют мультиплет относительно группы РТЦ. Они приобретают массы за счет эффективного юкавского взаимодействия (см. (13.15)). В принципе эта схема позволяет определить массы кварков и лептонов, углы Кабиббо, массы W^\pm - и Z^0 -бозонов в терминах единственного параметра — константы калибровочного взаимодействия РТЦ при некотором массовом масштабе. Практически реализовать такую программу непросто. В частности, некоторые легкие псевдоголдстоуновские бозоны могут приводить к слишком большой интенсивности процессов с участием меняющихся кварковые (или лептонные) ароматы нейтральных токов. Из нашего обсуждения ясно также, что для того, чтобы достичь

первоначальной цели — иметь теорию с очень малым числом подбираемых параметров, необходимо ввести большое число частиц. Таким образом, пока не удастся построить экономичную и изящную теорию.

13.2. МАССЫ НЕЙТРИНО, СМЕШИВАНИЯ И ОСЦИЛЛЯЦИИ

В разд. 11.3 мы уже отмечали, что причиной отсутствия в лептонном секторе стандартной электрослабой теории углов смешивания типа угла Кабиббо является вырождение по массе нейтрино (все нейтрино имеют одинаковую массу — нулевую). Это вырождение означает, что диагонализировать массовую матрицу нейтрино нет необходимости (на самом деле нет массовой матрицы). Отсутствие физически важных углов смешивания приводит к законам сохранения для лептонных ароматов — электронного, мюонного и τ -лептонного чисел. Такие процессы, как $\mu \rightarrow e\gamma$, запрещены. Если нейтрино не являются в точности безмассовыми, то к каким феноменологическим последствиям приведут малые нейтринные массы? Кроме ненулевой ширины распада $\mu \rightarrow e\gamma$ (см. вычисления в следующем разделе) появятся новые особенности, связанные с осцилляциями нейтрино.

Осцилляции нейтрино

Этот термин означает, что пучок нейтрино (образовавшихся в результате слабых распадов, соответствующих некоторому определенному аромату), двигаясь в вакууме, может спонтанно превращаться в пучок нейтрино другого аромата, т. е. осциллировать, например $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$. Такое свойство может объяснить «загадку солнечных нейтрино» [27, 105]. Хотя вопросы, связанные с нейтринными массами и смешиваниями, обсуждались ранее в работах Сакаты и др. (см., например, [287, 297]), наиболее подробно они изучались Понтекорво и др. [46, 199, 328, 329], особенно в связи с нейтринными осцилляциями.

Если нейтрино не безмассовые, то их массовая матрица, так же как в случае кварков, должна быть недиагональной и комплексной. Необходимо с помощью унитарных поворотов привести ее к диагональному виду. Таким образом, массовые состояния отличаются от состояний, участвующих в калибровочном взаимодействии:

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i, \quad (13.21)$$

где $\nu_\alpha = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ — состояния нейтрино, участвующих в слабом взаимодействии, а $\nu_i = \nu_1, \nu_2, \nu_3$ — собственные состояния массовой матрицы с собственными значениями m_1, m_2 и m_3 ; U — уни-

тарная матрица, которая может быть параметризована так же, как матрица КМ для углов смешивания кварков (см. (12.40)):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 s_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (13.22)$$

где $c_i \equiv \cos \theta_i$, $s_i \equiv \sin \theta_i$. Конечно, нет оснований ожидать, что эти углы в чем-то подобны углам Кабиббо — Кобаяси — Ма-скава.

Если в момент времени $t = 0$ возникает пучок чистых ν_e -состояний, например в результате распада $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, то он представляет собой суперпозицию собственных состояний массовой матрицы:

$$|\nu_e(0)\rangle = c_1 |\nu_1\rangle + s_1 c_3 |\nu_2\rangle + s_1 s_3 |\nu_3\rangle. \quad (13.23)$$

Эволюция состояния во времени определяется соответствующими собственными значениями оператора энергии. Предположим, что все нейтрино в пучке обладают одним и тем же фиксированным импульсом p ; тогда собственные состояния массовой матрицы отвечают собственным значениям оператора энергии

$$E_i^2 = p^2 + m_i^2, \quad (13.24)$$

или

$$|\nu_e(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + s_1 c_3 e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle + s_1 s_3 e^{-iE_3 t} |\nu_3\rangle. \quad (13.25)$$

Вероятность обнаружить нейтрино ν_α в момент времени t дается выражением $|\langle \nu_\alpha | \nu(t) \rangle|^2$. Так, например, вероятность обнаружить ν_e равна

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = 1 - 2c_1^2 s_1^2 c_3^2 [1 - \cos(E_1 - E_2)t] - 2c_1^2 s_1^2 s_3^2 [1 - \cos(E_1 - E_3)t] - 2s_1^4 s_3^2 c_3^2 [1 - \cos(E_2 - E_3)t]. \quad (13.26)$$

При $p \gg m_i$ имеем

$$E_i = (p^2 + m_i^2)^{1/2} \approx p + (m_i^2/2p), \quad (13.27)$$

$$E_i - E_j = (m_i^2 - m_j^2)/2p.$$

Полезно определить длины осцилляций

$$l_{ij} = \frac{2\pi}{E_i - E_j} \approx \frac{4\pi p}{|m_i^2 - m_j^2|} = 2,5 \text{ м} \left[\frac{p \text{ (МэВ)}}{\Delta m^2 \text{ (эВ)}^2} \right], \quad (13.28)$$

так что (13.26) можно рассматривать как вероятность наблюдать ν_e на расстоянии x от источника:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(x) = 1 - 2c_1^2 s_1^2 c_3^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{12}}\right) \right] - 2c_1^2 s_1^2 s_3^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{13}}\right) \right] - 2s_1^4 s_3^2 c_3^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{23}}\right) \right]. \quad (13.29)$$

При $x \gg l_{ij}$ гармоники сглаживаются и будет наблюдаться только средняя интенсивность:

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = 1 - 2c_1^2 s_1^2 - 2s_1^4 s_3^2 c_3^2. \quad (13.30)$$

Наименьшее возможное среднее значение равно $\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = 1/3$; оно соответствует частному случаю $s_1^2 = 2/3$, $s_3^2 = 1/2$. Аналогично

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} \rangle &= 2c_1^2 s_1^2 c_2^2 + 2s_1^2 s_3^2 c_3^2 (s_2^2 - c_1^2 c_2^2) + \\ &\quad + 2s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 \cos \delta (s_3^2 - c_2^2), \\ \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} \rangle &= 2c_1^2 s_1^2 s_2^2 + 2s_1^2 s_3^2 c_3^2 (c_2^2 - c_1^2 s_2^2) + \\ &\quad + 2s_1^2 s_2 s_3 c_1 c_2 c_3 \cos \delta (s_3^2 - c_2^2). \end{aligned} \quad (13.31)$$

Таким образом, в принципе можно выразить лептонный CP -угол δ через скорости переходов одного вида нейтрино в нейтрино различных ароматов.

В более общем случае

$$\begin{aligned} \nu_\alpha &= \sum U_{\alpha i} \nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum U_{\alpha i} \nu_i e^{-iE_i t}, \end{aligned} \quad (13.32)$$

легко получить вероятность обнаружения аромата ν_β в пучке нейтрино ν_α :

$$\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \cos\left(\frac{2\pi x}{l_{ij}}\right). \quad (13.33)$$

Можно также показать, что наименьшее возможное значение усредненной вероятности равно $\langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle = 1/N$.

Необычность рассматриваемого явления осцилляции, конечно, внутренне связана с квантовомеханической теорией измерений. Возможность нейтрино одного аромата ν_α спонтанно превратиться в нейтрино другого аромата отражает неопределенность в измерениях энергии-импульса в таких процессах. Например, если бы мы могли точно установить, какое собственное состояние массовой матрицы ν_i порождается источником, то вся схема с осцилляциями разрушилась бы, так как требуемая для этого точность измерения импульса не позволила бы локализовать источник с точностью, лучшей чем длина осцилляций. Таким образом, при более тщательном рассмотрении нужно использовать волновые пакеты и т. д., но результаты получаются те же [232].

Принципиальным моментом, о котором следует помнить, является то, что для осцилляций нейтрино мы должны иметь ненулевые (и невырожденные) массы нейтрино и углы смешивания.

Тогда возникает вопрос: можем ли мы иметь массивные нейтрино в калибровочных теориях? Прежде чем обсуждать проблему масс нейтрино в электрослабой $SU(2) \times U(1)$ -теории, рассмотрим кратко особые свойства нейтринных массовых членов.

Массовые члены нейтрино дираковского и майорановского типов

Примем следующие определения, касающиеся операций зарядового сопряжения (C) и проектирования на спиральность:

$$\begin{aligned}\psi^c &= C\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^*, & \bar{\psi}^c &= \psi^T C, \\ \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, & \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi.\end{aligned}\quad (13.34)$$

Будем также использовать обозначение

$$\psi_L^c \equiv (\psi_L)^c = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi^c = (\psi^c)_R. \quad (13.35)$$

Массовые члены фермионов связывают левые и правые поля. Массовый член дираковского типа связывает компоненты L и R одного и того же поля:

$$\mathcal{L}_D = D(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) = D\bar{\psi}\psi. \quad (13.36)$$

Таким образом, собственное состояние массовой матрицы имеет вид

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (13.37)$$

Массовый член майорановского типа связывает компоненты L и R сопряженных полей. В обозначениях (13.35) имеем

$$\mathcal{L}_{MA} = A(\bar{\psi}_L^c\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_L^c) = A\bar{\chi}\chi, \quad (13.38)$$

$$\mathcal{L}_{MB} = B(\bar{\psi}_R^c\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_R^c) = B\bar{\omega}\omega. \quad (13.39)$$

Тогда собственными состояниями массовой матрицы являются самосопряженные поля

$$\begin{aligned}\chi &= \psi_L + \psi_L^c, & \chi^c &= \chi, \\ \omega &= \psi_R + \psi_R^c, & \omega^c &= \omega.\end{aligned}\quad (13.40)$$

Эти равенства можно обратить:

$$\begin{aligned}\psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\chi, & \psi_L^c &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\chi, \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\omega, & \psi_R^c &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\omega.\end{aligned}\quad (13.41)$$

Действие матрицы γ_5 на поля ψ , χ и ω дает

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \\ \omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_L + \psi_R \\ -\psi_L + \psi_L^c \\ +\psi_R - \psi_R^c \end{pmatrix}. \quad (13.42)$$

Конечно, это приводит к изменению знаков у D , A и B в выражениях (13.36), (13.38) и (13.39). Поля ψ' , χ' и ω' интерпретируются как правильные собственные состояния массовой матрицы для значений фермионных масс со знаком минус.

Когда одновременно присутствуют и дираковские, и майорановские массовые члены, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DM} &= D\bar{\psi}_L\psi_R + A\bar{\psi}_L^c\psi_L + B\bar{\psi}_R^c\psi_R + \text{эрмит. сопр.} = \\ &= \frac{1}{2}D(\bar{\chi}\omega + \bar{\omega}\chi) + A\bar{\chi}\chi + B\bar{\omega}\omega = (\bar{\chi}, \bar{\omega}) \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Массовая матрица может быть диагонализирована, и для двух ее собственных значений получаем

$$M_{1,2} = \frac{1}{2} \{ (A+B) \pm [(A-B)^2 + D^2]^{1/2} \}. \quad (13.44)$$

Эти значения соответствуют собственным значениям массовой матрицы майорановского типа:

$$\eta_1 = (\cos \theta) \chi - (\sin \theta) \omega, \quad \eta_2 = (\sin \theta) \chi + (\cos \theta) \omega, \quad (13.45)$$

где

$$\text{tg } 2\theta = D/(A-B). \quad (13.46)$$

Уравнения (13.44) и (13.46) легко обратить, и мы получим

$$\begin{aligned} D &= (M_1 - M_2) \sin 2\theta, \\ A &= M_1 \cos^2 \theta + M_2 \sin^2 \theta, \\ B &= M_1 \sin^2 \theta + M_2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Таким образом, самый общий массовый член (13.43) с четырехкомпонентным фермионным полем фактически описывает две майорановские частицы с разными массами.

Интересно убедиться в том, что в пределе $A=B=0$ получается формализм обычного четырехкомпонентного дираковского поля. При $\theta = \pi/4$ собственные состояния массовой матрицы $(\chi \pm \omega)/\sqrt{2}$ соответствуют собственным значениям $\pm D/2$. Чтобы изменить отрицательный знак у массы, необходимо провести киральное преобразование, как это сделано в (13.42). Таким обра-

ЗОМ, ПОЛЯ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L + \psi_L^c + \psi_R + \psi_R^c) \equiv \xi_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi' - \omega') &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_L + \psi_L^c - \psi_R + \psi_R^c) \equiv \xi_2 \end{aligned} \quad (13.48)$$

соответствуют одному и тому же собственному значению $D/2$. Из-за этого вырождения мы можем выбрать любую новую ком-

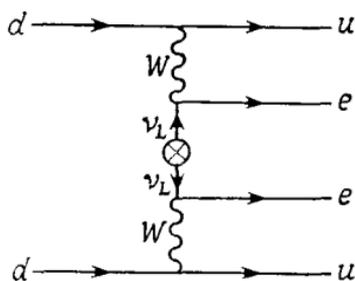


Рис. 13.3. Кварковая диаграмма двойных β -распадов, в результате которых нейтрино не появляются. Символ \otimes соответствует вставке майорановского члена $\bar{\nu}_L \nu_L + \text{эрмит. сопр.}$

бинацию полей, если они получаются в результате некоторого поворота в плоскости (ξ_1, ξ_2) . Поэтому

$$\mathcal{L}_{DM}(A=B=0) = \frac{1}{2} D (\bar{\xi}_1 \xi_1 + \bar{\xi}_2 \xi_2) = \frac{1}{2} D (\bar{\xi}'_1 \xi'_1 + \bar{\xi}'_2 \xi'_2). \quad (13.49)$$

В частности, для линейной комбинации (другой поворот на 45°)

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2) = \psi_L + \psi_R, \\ \xi'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2) = \psi_L^c + \psi_R^c \end{aligned} \quad (13.50)$$

очевидно, что выражение (13.49) сводится к $D\bar{\psi}\psi$, где $\psi = \psi_L + \psi_R$.

Таким образом, дираковский фермион действительно соответствует вырожденному пределу $A=B=0$ более общего случая двух майорановских частиц. Так как майорановские массовые члены A (13.38) и B (13.39) приводят к несохранению аддитивного квантового числа, которое несет поле ψ , например электрического заряда, все элементарные фермионы, за исключением нейтрино, будучи заряженными, должны иметь $A=B=0$. В случае нейтрино майорановский массовый член нарушает закон сохранения лептонного числа, изменяя его на две единицы. Присутствие таких масс майорановских нейтрино приводит, например, к двойным β -распадам $(Z-1) \rightarrow (Z+1) + e + e$, в результате которых нейтрино не появляются, и к каонным распадам, таким, как $K^- \rightarrow \pi^+ ee$. Кварковая диаграмма, соответствующая

щая таким не сохраняющим лептонное число процессам, показана на рис. 13.3. (Мы не рассматриваем теории, в которых заряженные $V + A$ -токи взаимодействуют с тяжелыми ПВБ W_R , где такая амплитуда не должна быть пропорциональной массовому члену майорановского нейтрино.)

Возможные значения масс нейтрино

В настоящее время основным свидетельством в пользу того, что нейтрино обладает отличной от нуля массой, является результат (пока не подтвержденный) одного эксперимента по β -распаду трития ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$. Было обнаружено, что форма электронного спектра около конечной точки может быть интерпретирована, если предположить, что нейтрино обладает массой m_{ν_e} в пределах от 15 до 45 эВ [284]. Все другие экспериментальные результаты дают только верхнюю границу значений масс:

$$m_{\nu_e} < 60 \text{ эВ}, \quad m_{\nu_\mu} < 510 \text{ кэВ}, \quad m_{\nu_\tau} < 250 \text{ МэВ}. \quad (13.51)$$

Но можно получить гораздо более жесткие ограничения, если обратиться к космологическим теориям. Мы приведем краткое обоснование этих ограничений.

Космологическое ограничение на массы нейтрино. Общепризнанной в настоящее время стандартной космологической моделью, правильно описывающей Вселенную, считается *модель Большого взрыва*. В основе этой модели лежат космологический принцип и уравнения Эйнштейна. Она описывает пространственно-однородную и изотропную Вселенную, расширяющуюся в соответствии с законом Хаббла

$$V = HR, \quad (13.52)$$

где V — скорость, R — расстояние, а H — постоянная Хаббла (≈ 15 км/с/млн световых лет). Основные свойства рассматриваемой модели легко понять, если исходить из механики Ньютона. В модели Большого взрыва имеется понятие *критической плотности* ρ_c , во многом похожее на понятие скорости разбега и соответствующее точному взаимному уничтожению кинетической и (гравитационной) потенциальной энергий:

$$\rho_c = 3H^2/8\pi G \approx 5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3, \quad (13.53)$$

где G — ньютоновская константа. Если плотность Вселенной $\rho < \rho_c$, то она будет всегда расширяться (*открытая Вселенная*); если $\rho > \rho_c$, то расширение будет замедляться и в конце концов прекратится, после чего Вселенная начнет сжиматься (*замкнутая Вселенная*). Установленное в настоящее время ограни-

чение на полную плотность Вселенной, полученное из ее возраста и замедления расширения, имеет вид

$$\rho^0 \leq 4\rho_c (\approx 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3), \quad (13.54)$$

где индекс нуль означает, что плотность относится к настоящему времени. С другой стороны, учет наблюдаемых галактик и скоплений дает значение плотности ρ^0 , которое составляет не более одной десятой от ρ_c . Поэтому можно говорить о наличии во Вселенной неизлучающих масс.

Стандартная космологическая модель оказывается способной дать общее обоснование большому количеству результатов наблюдений. Эти наблюдения говорят о том, что материя во Вселенной первоначально находилась в виде атомов водорода с небольшой примесью атомов гелия и других легких элементов. Если галактики разлетаются в соответствии с законом Хаббла, то в прошлом они должны были быть намного ближе друг к другу, составляя Вселенную, которая была меньше и горячее. Высказывают мнение, что такая горячая Вселенная должна была «сварить» весь водород, превратив его в более тяжелые элементы. Однако присутствие малого количества тяжелых элементов, наблюдаемых во Вселенной, согласуется с нашей картиной, в соответствии с которой они возникли в галактиках позднее. А именно, тяжелые элементы не являются первичными по своему происхождению, и космологическая эволюция должна быть такой, что в ранней Вселенной тяжелые элементы не синтезировались. Это было бы возможно, если бы существовало интенсивное поле излучения, которое разрушало бы тяжелые элементы, как только они образовывались. Такое электромагнитное излучение, которое находилось в тепловом равновесии с материей, должно присутствовать еще и теперь. Спектр этого излучения в результате хаббловского расширения должен испытывать красное смещение и быть низкотемпературным спектром черного тела фоновых фотонов. Это фоновое излучение действительно было открыто, и было найдено, что оно имеет эквивалентную температуру около 2,7 К. (Это значение согласуется с результатами вычислений количества космологического гелия на основе теории нуклеосинтеза.) Используя стандартную формулу излучения черного тела, связывающую плотность числа частиц n с температурой:

$$n = T^3 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(g_B + \frac{3}{4} g_F \right), \quad (13.55)$$

где

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \approx 1,202,$$

g_B, g_F — числа бозонных и фермионных степеней свободы соответственно [например, $g_B = 2$ для фотонного газа (два значения спиральности), $g_F = 2$ для безмассовых нейтрино, $g_F = 4$ для электронов и т. д.], получаем следующее значение плотности числа фотонов при $T = 2,7$ К в настоящее время:

$$n_\gamma^0 \approx 400 \text{ см}^{-3}. \quad (13.56)$$

Аналогично в стандартной модели Большого взрыва предполагается, что Вселенная погружена в море первичных нейтрино. Так как нейтрино вышли из состояния термодинамического равновесия до того, как процесс e^+e^- -аннигиляции нагрел фоновое излучение, наблюдаемые в настоящее время нейтрино от космического черного тела должны иметь более низкую температуру [318]:

$$\left(\frac{T_\nu^0}{T_\gamma^0}\right)^3 \approx \frac{4}{11}, \quad (13.57)$$

или $T_\nu^0 \approx 1,9$ К. Используя соотношения (13.55) — (13.57), для плотности числа нейтрино получаем

$$n_\nu^0 \approx \frac{3}{4} \left(\frac{T_\nu^0}{T_\gamma^0}\right)^3 n_\gamma^0 \approx 110 \text{ см}^{-3}, \quad (13.58)$$

что соответствует плотности нейтрино

$$\rho_\nu^0 \approx \sum_i \frac{3}{11} n_\nu^0 m_i = \sum_i 2m_i (\text{эВ}) \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3, \quad (13.59)$$

где сумма берется по всем собственным состояниям матрицы нейтринных масс. Тогда из ограничения (13.54) можно получить ограничение на сумму нейтринных масс [101, 179, 378]

$$\sum_i m_i < 100 \text{ эВ}. \quad (13.60)$$

Интересно рассмотреть случай «плоской» Вселенной, плотность которой в точности равна ρ_c , а вся неизлучающая масса существует в виде нейтрино (т. е. игнорируются все другие возможности, такие, как магнитные монополи и т. д.). В этом случае мы будем иметь

$$\sum_i m_i \approx 25 \text{ эВ}. \quad (13.61)$$

Как можно получить малые массы нейтрино? Фермионные массы, появляющиеся из-за голых массовых членов или из-за юкавских взаимодействий (за счет механизма Хиггса), вследствие бесконечной перенормировки массы и константы связи являются в калибровочных теориях произвольными параметрами.

Следовательно, они не могут быть вычислены и должны определяться экспериментально.

Массы нейтрино, если они отличны от нуля, должны быть малы по сравнению со всеми другими массовыми масштабами. Хотелось бы теоретически как-то понять их малость. Имеется несколько специальных случаев, когда массы нейтрино не являются произвольными и могут быть малыми.

1. Самая очевидная возможность состоит в том, что массовые члены нейтрино в нулевом порядке отсутствуют, а радиационные поправки более высокого порядка приводят к появлению масс [79, 175]. Рассмотрим дираковские массовые члены.

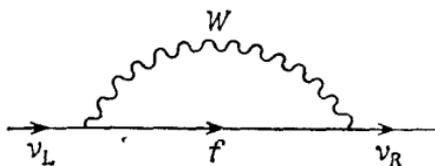


Рис. 13.4.

Если описываемые теорией частицы таковы, что нет ни члена голых масс $\bar{\psi}_L \psi_R$ (т. е. ψ_L и ψ_R преобразуются различно), ни массового члена $\bar{\psi}_L \Gamma^a \psi_R \langle \phi^a \rangle_0$, порожденного механизмом Хиггса (так как отсутствует поле ϕ^a или $\langle \phi^a \rangle = 0$), то выражение, соответствующее диаграмме, приведенной на рис. 13.4, конечно, так как нет возможных контрчленов, которые устранили бы соответствующую расходимость. Такая масса m_ν в теории, где предполагается, что поле ν_R под действием калибровочной группы преобразуется нетривиальным образом (и, следовательно, взаимодействует с W -бозоном), может быть вычислена и должна быть порядка $g^2 m_f$. Подобная ситуация возможна также в случае массовых членов майорановского типа.

2. Как обсуждается в следующей главе, в теориях великого объединения (ТВО) сильных и электрослабых взаимодействий требуется существование в одной теории двух значительно различающихся массово-энергетических масштабов $\mu_{1,2}$, соответствующих двум этапам нарушения симметрии:

$$G_{\text{ТВО}} \xrightarrow{\mu_1} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\mu_2} SU(3)_{\text{цвет}} \times U(1)_{\text{эм}}.$$

В некоторых ситуациях это чрезвычайно малое отношение $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ (порядка 10^{-13}) может найти отражение в фермионном спектре. Матрица нейтринных масс (13.43) может иметь вид [170]

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}, \quad (13.62)$$

где $m \sim \mu_2$, $M \approx \mu_1$. Собственными значениями являются $m_1 \approx m^2/M$ и $m_2 \approx M$; $(m_1/m_2) \approx (\mu_2/\mu_1)^2 \ll 1$. Таким образом, в итоге имеются одно «сверхтяжелое нейтрино» и одна очень легкая частица, которую можно отождествить с обычным нейтрино.

Массы нейтрино в $SU(2) \times U(1)$ -моделях

В стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории электрослабых взаимодействий нейтрино являются безмассовыми, так как простая хиггсовская структура теории приводит к глобальной симметрии, соответствующей сохранению лептонного числа. Эта симметрия запрещает массовые члены $\bar{\nu}_L^c \nu_L$ майорановского типа, а поля ν_R , которые, объединяясь с ν_L , могли бы образовать массовый член дираковского типа, отсутствуют. Другими словами, безмассовость нейтрино связана с тем, что в стандартной модели рассматривается ограниченный набор частиц. Если рассмотреть модель, соответствующую более полному объединению, число полей неизбежно увеличится, что приведет к появлению нейтринных массовых членов. (В разд. 14.5 мы увидим, что простейшая модель великого объединения — минимальная $SU(5)$ -модель — все еще обладает глобальной симметрией, соответствующей сохранению разности барионного и лептонного чисел $(B - L)$, которая также запрещает майорановские массовые члены.) Но в ТВО, таких, как $SO(10)$, симметрия, связанная с сохранением разности $(B - L)$, нарушена и нейтрино приобретают массу. Хотя в последнее время интерес к массивным нейтрино связан с моделями великого объединения, мы рассмотрим расширения на случай $m_\nu \neq 0$ минимальной $SU(2) \times U(1)$ -модели [30], так как все модели великого объединения обязательно содержат в себе $SU(2) \times U(1)$ -модель, а с электрослабой теорией работать намного проще.

В стандартной теории электрослабого взаимодействия поля лептонов и хиггсовских скаляров обладают следующими трансформационными свойствами относительно группы $SU(2) \times U(1)$:

$$\begin{aligned} l_L &= \begin{pmatrix} \nu \\ l^- \end{pmatrix}_L \sim (2, -1), & l_R^- &\sim (1, -2), \\ \Phi_i &= \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \sim (2, +1). \end{aligned} \quad (13.63)$$

Первые числа в скобках в правой части (13.63) являются размерностями представлений группы $SU(2)$, а вторые — $U(1)$ -гиперзарядами $Y = 2(Q - T_3)$. Индексы лептонных ароматов опущены. Члены, билинейные по лептонным полям, имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{l}_L l_R &\sim (2, 1) \times (1, -2) = (2, -1), \\ \bar{l}_L l_L &\sim (2, -1) \times (2, -1) = (1, -2) + (3, -2), \\ \bar{l}_R l_R &\sim (1, -2) \times (1, -2) = (1, -4). \end{aligned} \quad (13.64)$$

Так как $\Phi \sim (2, 1)$, в стандартной модели присутствуют только юкавские взаимодействия $\bar{l}_R l_L \Phi + \text{эрмит. сопр.}$, и имеется глобальная симметрия, соответствующая сохранению лептонного числа.

Существует много возможных расширений стандартной модели, в которых $m_\nu \neq 0$; их можно разбить на следующие довольно обширные категории:

- 1) расширение только хиггсовского сектора;
- 2) расширение только лептонного сектора;
- 3) расширение и хиггсовского и лептонного секторов.

В первом случае другими скалярами, исключая дублет Φ , которые можно связать с лептонными билинейными комбинациями (13.64) с образованием калибровочно-инвариантных юкавских $SU(2) \times U(1)$ -взаимодействий, являются: триплет $\mathbf{H} \sim (3, 2)$, однократно заряженный синглет $h^+ \sim (1, 2)$ и двукратно заряженный синглет $R^{++} \sim (1, 4)$. Например, триплет \mathbf{H} с $Y = 2$,

$$\tau \cdot \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H^+ & \sqrt{2} H^{++} \\ \sqrt{2} H^0 & -H^+ \end{pmatrix}, \quad (13.65)$$

приводит к дополнительным юкавскому и трилинейному скалярному взаимодействиям

$$\bar{l}_{iL}^c l_{jL} \mathbf{H} (\epsilon \tau)_{ij} + \mu \Phi_i \Phi_j \mathbf{H}^* (\epsilon \tau)_{ij} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (13.66)$$

где $\epsilon = i\tau_2$, а ϵ_{ij} и $(\epsilon \tau)_{ij}$ — антисимметричная и симметричная матрицы соответственно. Если \mathbf{H} имеет вакуумное среднее

$$\langle \tau \cdot \mathbf{H} \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_H & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.67)$$

то появляется нейтринный массовый член майорановского типа $(v_H f) \bar{\nu}_L^c \nu_L$. Следует заметить, что v_H дает также вклад в массы W - и Z -бозонов, причем

$$\rho \equiv (M_W/M_Z \cos \theta_W)^2 = \frac{v_\phi^2 + 2v_H^2}{v_\phi^2 + 4v_H^2}, \quad (13.68)$$

где v_ϕ — вакуумное среднее дублета. Феноменологическое значение $\rho = 0,998 \pm 0,050$ (12.120) приводит к ограничению $(v_H/v_\phi) < 0,17$, если допустимо одно стандартное отклонение.

Во втором случае простейшая схема, очевидно, получится, если к нейтральному синглету добавить правое нейтрино ν_R . Тогда появятся дополнительные члены в лагранжиане (для простоты мы сначала рассматриваем теорию с одним ароматом):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \bar{l}_{iL} \nu_R \Phi_i^* + B \bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{эрмит. сопр.} \rightarrow \\ & \rightarrow D \bar{\nu}_L \nu_R + B \bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{эрмит. сопр.}, \end{aligned} \quad (13.69)$$

где $D = (1/\sqrt{2})v_\phi f$. Майорановский член голых масс B появляется вследствие того, что ν_R полностью нейтрален относительно группы $SU(2) \times U(1)$, и мы не требуем выполнения в теории закона сохранения лептонного числа. Таким образом, при таком расширении мы, естественно, приходим к рассмотрению нейтринных массовых членов дираковского и майорановского типов (13.43). Поскольку член $A\bar{\nu}_L^c \nu_L$ отсутствует (мы не вводим триплет хиггсовских частиц), массовая матрица имеет вид (13.62). Если сделать разумное предположение, что дираковская масса D порядка масс кварков с зарядом $2/3$, а майорановская масса B порядка масштаба энергий, при котором группа ТВО нарушается до группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, т. е. имеет очень большую величину, то состояния ν_L и ν_R , участвующие в слабых взаимодействиях, являются суперпозицией двух майорановских собственных состояний массовой матрицы. При этом ν_L представляет собой преимущественно нейтрино с малой массой $\approx \frac{1}{4}D^2/B$ и ничтожно малой примесью (D/B) супертяжелого нейтрино с массой $\approx B$; ν_R имеет противоположные свойства.

Можно также рассмотреть возможность того, что D и B сравнимы по величине и по какой-то причине обе малы. В этом случае угол смешивания не будет малым, и малые собственные состояния массовой матрицы приведут к осцилляциям нейтрино. Но этот тип осцилляций отличается от осцилляций, рассмотренных выше (см. (13.21)), так как диагонализация (13.43) (см. (13.45)) означает, что

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (13.70)$$

а киральные проекции χ и ω (13.41) являются обычными нейтрино, принимающими участие в слабых взаимодействиях:

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ \nu^c \end{pmatrix}_L \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix}. \quad (13.71)$$

Таким образом, мы имеем нейтрино-антинейтринные осцилляции $\nu_L \rightarrow (\nu^c)_L$, т. е. $\nu_L \rightarrow (\nu_R)^c$. Так как нейтрино ν_R взаимодействуют только за счет сверхслабого юкавского взаимодействия, такие осцилляции с превращением нейтрино в «стерильные частицы» сильно отличались бы от осцилляций ароматов, которые обсуждались до этого [33]. Когда учитываются поколения лептонных ароматов, D и B становятся матрицами 3×3 (для трех лептонных ароматов). Каждое состояние нейтрино, принимающего участие в слабом взаимодействии, будет суперпозицией шести майорановских собственных состояний массовой матрицы. Тогда будут иметь место как осцилляции с изменением ароматов, так и осцилляции частица — античастица: $\nu_{aL} \rightarrow \nu_{bL}$ и $\nu_{aL} \leftrightarrow (\nu_b^c)_L$.

Руководствуясь принципом, что, когда состав частиц, описываемых теорией, фиксирован, глобальные симметрии должны определяться калибровочной симметрией и перенормируемостью, мы обнаруживаем, исследуя простое расширение минимальной $SU(2) \times U(1)$ -модели на случай $m_\nu \neq 0$, что при $m_\nu \neq 0$ физические нейтрино неизбежно должны быть майорановскими частицами. Это является отражением того факта, что, если у нас имеются и дираковские, и майорановские массовые члены, то собственные состояния массовой матрицы по-прежнему являются самосопряженными майорановскими полями. Отсюда можно заключить, что майорановские поля являются естественными представлениями полей нейтрино.

13.3. РАСПАД $\mu \rightarrow e\gamma$, ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕТЕЛЬ В R_ξ -КАЛИБРОВКЕ

Перенормируемость является важнейшим свойством калибровочных теорий слабых взаимодействий. Представляется весьма

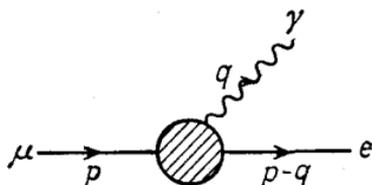


Рис. 13.5.

поучительным детально рассмотреть один нетривиальный пример вычислений слабых радиационных поправок высшего порядка. В настоящем разделе исследуется индуцированный нейтринными осцилляциями распад $\mu \rightarrow e\gamma$ в качестве примера вычисления петель в R_ξ -калибровке. Мы работаем в рамках стандартной модели (с одним дублетом элементарных хиггсовских скаляров), модифицированной присутствием нейтринных массовых членов. Этот процесс выбран потому, что в отличие от ящичных диаграмм $s\bar{d} \rightarrow \bar{s}d$, рассматриваемых в разд. 12.2, здесь в основном порядке нельзя пренебречь несостоявшимися голдстоуновскими бозонами, необходимыми для получения калибровочно-инвариантного конечного результата. Кроме того, в основном механизме распада $\mu \rightarrow e\gamma$, показанном на рис. 13.5, проявляются некоторые свойства неабелевой теории, в частности существование трилинейных взаимодействий калибровочных бозонов. Конечно, этот процесс подавляется за счет механизма ГИМ (в силу различия нейтринных масс). Но если он наблюдаем (к сожалению, это маловероятно), его интерпретация не будет усложняться эффектами сильного взаимодействия, как в случае процессов с меняющимися странность нейтральными токами.

Амплитуда процесса $\mu \rightarrow e\gamma$, показанного на рис. 13.5, может быть записана в виде

$$T(\mu \rightarrow e\gamma) = \varepsilon^\lambda \langle e | J_\lambda^{\text{эм}} | \mu \rangle, \quad (13.72)$$

где $\varepsilon^\lambda(q)$ — поляризация фотона; T имеет следующее лоренцево разложение:

$$\langle e | J_\lambda^{\text{эм}} | \mu \rangle = \bar{u}_e(p - q) [iq^\nu \sigma_{\lambda\nu} (A + B\gamma_5) + \gamma_\lambda (C + D\gamma_5) + q_\lambda (E + F\gamma_5)] u_\mu(p), \quad (13.73)$$

где A, B, \dots, F — инвариантные амплитуды. Из калибровочной инвариантности электромагнетизма

$$\partial^\lambda J_\lambda^{\text{эм}} = 0 \quad (13.74)$$

следует условие

$$-m_e(C + D\gamma_5) + m_\mu(C - D\gamma_5) + q^2(E + F\gamma_5) = 0,$$

или

$$C = D = 0, \quad (13.75)$$

когда фотон берется на массовой поверхности $q^2 = 0$. И так как $\varepsilon^\lambda q_\lambda = 0$, на массовой оболочке амплитуда распада $\mu \rightarrow e\gamma$ отвечает магнитному переходу.

$$T(\mu \rightarrow e\gamma) = \varepsilon^\lambda \bar{u}_e(p - q) [iq^\nu \sigma_{\lambda\nu} (A + B\gamma_5)] u_\mu(p). \quad (13.76)$$

Поскольку (13.76) соответствует оператору размерности пять, амплитуда распада $\mu \rightarrow e\gamma$ на массовой оболочке должна представляться набором петлевых диаграмм. Они приводят к конечной амплитуде, так как присутствие контрчленов, устраняющих

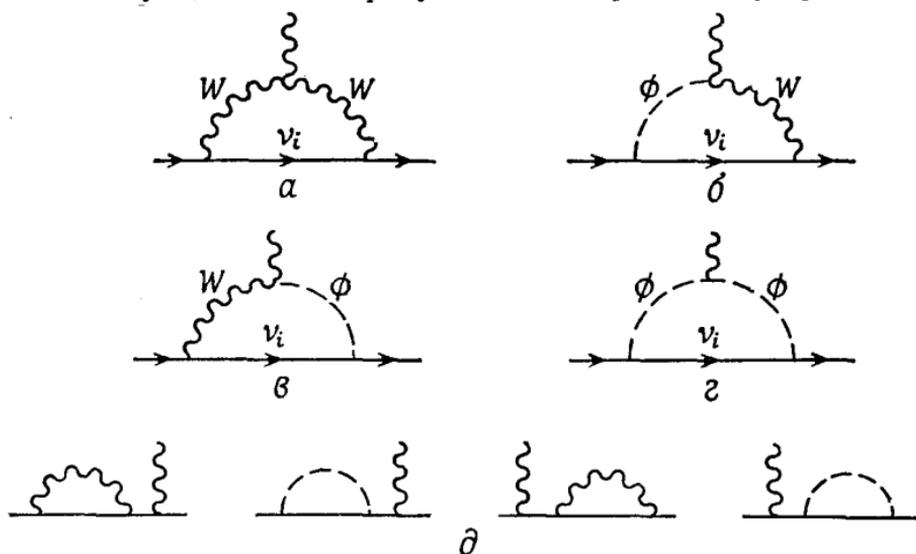


Рис. 13.6. Однопетлевые диаграммы для амплитуды процесса $\mu \rightarrow e\gamma$. Штриховые линии соответствуют несуществующему голдстоуновскому бозону в перенормируемых калибровках. Таким образом, в унитарной калибровке остаются только диаграмма a и две из диаграмм d ,

соответствующие расходимости, невозможно, т. е. по той же причине, по которой $(g-2)$ аномальный магнитный момент электрона должен быть конечным и вычисляемым в КЭД.

Поскольку в этом процессе изменяется лептонный аромат, он строго запрещен в стандартной теории, где $m_\nu = 0$ и мюонное число сохраняется. В этом разделе мы будем считать, что нейтрино не являются безмассовыми и их смешивания и осцилляции дают вклад в процесс $\mu \rightarrow e\gamma$ (рис. 13.6). Сначала мы выберем нейтрино, имеющие более привычные (чистые) дираковские массовые члены

$$v_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i \quad \alpha = e, \mu, \tau; \quad i = 1, 2, 3. \quad (13.77)$$

Распространение на более общий случай майорановских нейтрино будет дано в конце этого раздела. Диаграммы наименьшего порядка, дающие вклад в амплитуду процесса $\mu \rightarrow e\gamma$ в R_ξ -калибровке, показаны на рис. 13.6. Так как мы знаем, что конечная амплитуда должна иметь вид магнитного перехода (13.76), наша стратегия состоит в том, чтобы пренебречь всеми членами, которые не могут быть сведены к члену, соответствующему магнитному моменту. Это означает, что нет необходимости вычислять диаграммы, приведенные на рис. 13.6, δ , так как они пропорциональны $\bar{u}_e \gamma^\lambda u_\mu$ и уничтожатся членами аналогичного вида, возникающими из диаграмм, приведенных на рис. 13.6, $a - g$. Поскольку мы полагаем приближенно $m_e = 0$, две инвариантные амплитуды распада $\mu \rightarrow e\gamma$ равны:

$$A = B, \quad (13.78)$$

в соответствии с тем, что электрон в конечном состоянии является левым (с W -бозоном взаимодействует e_L , и спиральность не может измениться на противоположную в пределе $m_e = 0$). Кроме того, используя разложение Гордона (см. приложение А), получаем

$$\begin{aligned} T &= A \bar{u}_e (p - q) (1 + \gamma_5) i \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \epsilon^\lambda u_\mu (p) = \\ &= A \bar{u}_e (p - q) (1 + \gamma_5) (2p \cdot \epsilon - m_\mu \gamma \cdot \epsilon) u_\mu (p). \end{aligned} \quad (13.79)$$

Таким образом, при вычислении инвариантной амплитуды A мы должны только сосредоточить внимание на члене $p \cdot \epsilon$. Импульсы, приписанные линиям на диаграммах рис. 13.6, $a - g$, приведены на рис. 13.7.

Диаграмма рис. 13.6, a .

$$\begin{aligned} T_i(a) &= -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\bar{u}_e (p - q) \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) U_{ei}^* \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_i} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) U_{\mu i} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_\mu (p) \right] [i\Delta^{\nu\beta}(k)] [i\Delta^{\mu\alpha}(k + q)] (-ie) \Gamma_{\nu\alpha\beta} \epsilon^\nu, \end{aligned} \quad (13.80)$$

где $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}\epsilon^\gamma$ — вершина W -бозон — фотон. Для

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}(k_1, k_2, k_3) = [(k_3 - k_1)_\alpha g_{\gamma\beta} + (k_2 - k_3)_\gamma g_{\alpha\beta} + (k_1 - k_2)_\beta g_{\gamma\alpha}],$$

где все импульсы k_i входят в вершину, имеем

$$\begin{aligned} \epsilon^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha\beta}(-q, k+q, -k) &\equiv \Gamma_{\alpha\beta} = \\ &= [(2k \cdot \epsilon) g_{\alpha\beta} - (k+2q)_\beta \epsilon_\alpha - (k-q)_\alpha \epsilon_\beta], \end{aligned} \quad (13.81)$$

причем $\Delta^{\nu\beta}(k)$ и $\Delta^{\mu\alpha}(k+q)$ — пропагаторы W -бозонов в R_ξ -калибровке:

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = -[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) k_\mu k_\nu / (k^2 - \xi M^2)] / (k^2 - M^2), \quad (13.82)$$

M — масса W -бозона. Матричные элементы U_{ei} и $U_{\mu i}$ являются углами смешивания в (13.77). Если просуммировать все диа-

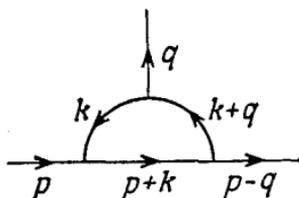


Рис. 13.7.

граммы ν_i , соответствующие трем промежуточным массовым собственным состояниям,

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \frac{U_{ei}^* U_{\mu i}}{(p+k)^2 - m_i^2} \right\} &= \sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} \left\{ \frac{1}{(p+k)^2} + \frac{m_i^2}{[(p+k)^2]^2} + \dots \right\} = \\ &= \sum_i \frac{U_{ei}^* U_{\mu i} m_i^2}{[(p+k)^2]^2} + \dots, \end{aligned} \quad (13.84)$$

то основной член обратится в нуль $\sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} = 0$, что отражает механизм сокращения ГИМ. Тогда имеем

$$T(a) = \sum_i T_i(a) = ic \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{R}{[(p+k)^2]^2}, \quad (13.85)$$

где

$$c = \frac{g^2 e}{4} \sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} m_i^2, \quad (13.86)$$

$$R = \Delta^{\nu\beta}(k) \Delta^{\mu\alpha}(k+q) N_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}, \quad (13.87)$$

$$N_{\mu\nu} = \bar{u}_e(p-q) \gamma_\mu (\beta + \hat{k}) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_\mu(p). \quad (13.88)$$

Пропагатор W -бозона можно разбить на две части:

$$\Delta^{\mu\nu}(k) \equiv \Delta_1^{\mu\nu}(k) + \Delta_2^{\mu\nu}(k), \quad (13.89)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1^{\mu\nu}(k) &= -(g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / M^2) / (k^2 - M^2), \\ \Delta_2^{\mu\nu}(k) &= -(k^\mu k^\nu / M^2) / (k^2 - \xi M^2).\end{aligned}\quad (13.90)$$

Подставляя выражение (13.89) в (13.87), находим

$$\Delta_2^{\nu\beta}(k) \Delta_2^{\mu\alpha}(k+q) \Gamma_{\alpha\beta} = 0, \quad (13.91)$$

так как

$$(k+q)^\alpha k^\beta \Gamma_{\alpha\beta} = 0. \quad (13.92)$$

Для (13.85) тогда имеем

$$\begin{aligned}T(a) &= ic \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2]^2} \left\{ \frac{S_1 - S_2 - S_3}{(k^2 - M^2)[(k+q)^2 - M^2]} + \right. \\ &+ \left. \frac{S_2}{(k^2 - \xi M^2)[(k+q)^2 - \xi M^2]} + \frac{S_3}{(k^2 - M^2)[(k+q)^2 - \xi M^2]} \right\},\end{aligned}\quad (13.93)$$

где

$$\begin{aligned}S_1 &= \Gamma^{\mu\nu} N_{\mu\nu}, \quad S_2 = (k^\lambda \Gamma_\lambda^\mu) (k^\nu N_{\mu\nu}) / M^2, \\ S_3 &= [(k+q)^\lambda \Gamma_\lambda^\mu] [(k+q)^\nu N_{\mu\nu}] / M^2.\end{aligned}\quad (13.94)$$

Объединяя знаменатели с помощью фейнмановских параметров и сдвигая переменную интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}T(a) &= i3!c \int a_1 da_1 da_2 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3}{(k^2 - a^2)^4} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\tilde{S}_2}{(k^2 - b^2)^4} + \frac{\tilde{S}_3}{(k^2 - d^2)^4} \right] \right\},\end{aligned}\quad (13.95)$$

где

$$\begin{aligned}a^2 &= (1 - \alpha_1) M^2 + \dots, \\ b^2 &= [(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \xi + \alpha_2] M^2 + \dots, \\ d^2 &= [(1 - \alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 \xi] M^2 + \dots.\end{aligned}\quad (13.96)$$

Чтобы выделить только члены $p \cdot \varepsilon$, проведем замены:

$$\begin{aligned}S_1 &\rightarrow \tilde{S}_1 = (p \cdot \varepsilon) [\bar{u}_e (1 + \gamma_5) u_\mu] 2m_\mu [2(1 - \alpha_1)^2 + (2\alpha_1 - 1)\alpha_2], \\ S_2 &\rightarrow \tilde{S}_2 = -k^2 (p \cdot \varepsilon) [\bar{u}_e (1 + \gamma_5) u_\mu] (m_\mu / M^2) \times \\ &\quad \times \{ (3\alpha_2 - 1) + [2\alpha_1^2 - \alpha_1 + \alpha_2 (2\alpha_1 - 1/2)] \}, \\ S_3 &\rightarrow \tilde{S}_3 = -k^2 (p \cdot \varepsilon) [\bar{u}_e (1 + \gamma_5) u_\mu] (m_\mu / M^2) \times \\ &\quad \times [2\alpha_1^2 + \alpha_1 + (2\alpha_1 - 1/2)\alpha_2].\end{aligned}\quad (13.97)$$

Выполняя интегрирования по импульсам

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - a^2)^4} &= \frac{i}{96\pi^2 a^4}, \\ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - a^2)^4} &= \frac{-i}{48\pi^2} \frac{1}{a^2},\end{aligned}\quad (13.98)$$

а затем по фейнмановским параметрам α_1 и α_2 , находим, что вклад от диаграммы рис. 13.6, а в инвариантную амплитуду A равен

$$A(a) = \frac{c}{64\pi^2} \frac{m_\mu}{M^4} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{\ln \xi}{\xi - 1} + \left(\frac{1}{\xi - 1} \right) \left(\frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} - 1 \right) \right]. \quad (13.99)$$

Диаграмма рис. 13.6, б.

$$\begin{aligned} T_i(b) = & -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\bar{u}_e(p-q) \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) U_{ei}^* \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_i} \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{-ig}{\sqrt{2} M} \right) \frac{U_{\mu i}}{2} [m_i(1 - \gamma_5) - m_\mu(1 + \gamma_5)] u_\mu(p) \right] \times \\ & \times [-i \Delta^{\lambda\nu}(k+q)] \frac{1}{k^2 - \xi M^2} (ieMe_\nu). \quad (13.100) \end{aligned}$$

Разбивая пропагатор W -бозона, как это было сделано в (13.89), суммируя по всем диаграммам ν_i и пользуясь приближением (13.84) и тем, что

$$\sum_i \frac{U_{ei}^* U_{\mu i} m_i^2}{(p+k)^2 - m_i^2} \approx \sum_i \frac{U_{ei}^* U_{\mu i} m_i^2}{(p+k)^2}, \quad (13.101)$$

получаем

$$\begin{aligned} T(b) = & ic \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N_\lambda}{[(p+k)^2]^2} \frac{1}{k^2 - \xi M^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{[\varepsilon^\lambda - \varepsilon \cdot k (k+q)^\lambda / M^2]}{(k+q)^2 - M^2} + \frac{\varepsilon \cdot k (k+q)^\lambda / M^2}{(k+q)^2 - \xi M^2} \right\}, \quad (13.102) \end{aligned}$$

где c — константа связи (13.86), а

$$N_\lambda \equiv \bar{u}_e(p-q) (1 + \gamma_5) \gamma_\lambda [(p+k)^2 - m_\mu(\not{k} + m_\mu)] u_\mu(p). \quad (13.103)$$

Объединяя знаменатели с помощью фейнмановских параметров и сдвигая переменную интегрирования, находим

$$T(b) = 6ic \int \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2}{(k^2 - b^2)^4} + \frac{\tilde{N}_2}{(k^2 - a^2)^4} \right], \quad (13.104)$$

где a и b определены соотношениями (13.96). Выделяем снова только члены $p \cdot \varepsilon$ в числителе:

$$\begin{aligned} N_1 \equiv N_\lambda \varepsilon^\lambda \rightarrow \tilde{N}_1 &= -2(p \cdot \varepsilon) [\bar{u}_e(1 + \gamma_5) u_\mu] \alpha_2 m_\mu, \\ N_2 \equiv N_\lambda (k+q)^\lambda k \cdot \varepsilon / M^2 \rightarrow \tilde{N}_2 &= k^2(p \cdot \varepsilon) [\bar{u}_e(1 + \gamma_5) u_\mu] \times \\ & \times \frac{1}{2} m_\mu [(1 - 4\alpha_1)(1 - \alpha_1 - \alpha_2) - (1 - 3\alpha_1)]. \quad (13.105) \end{aligned}$$

После интегрирований по импульсам (13.98) и фейнмановским параметрам получаем инвариантную амплитуду, соответствующую

щую диаграмме рис. 13.6, б:

$$A(\beta) = \frac{c}{64\pi^2} \frac{m_\mu}{M^4} \left[\frac{5}{6\xi} + \frac{4}{3} \frac{\ln \xi}{\xi - 1} - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{\xi - 1} \right) \left(\frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} - 1 \right) \right]. \quad (13.106)$$

Диаграмма рис. 13.6, в. Следуя процедуре, полностью аналогичной той, с помощью которой была вычислена диаграмма рис. 13.6, б, получаем

$$A(\theta) = \frac{c}{64\pi^2} \frac{m_\mu}{M^4} \left[\frac{5}{6\xi} - \frac{\ln \xi}{\xi - 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\xi - 1} \right) \left(\frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} - 1 \right) \right]. \quad (13.107)$$

Диаграмма рис. 13.6, г.

$$\begin{aligned} T_i(\varepsilon) = & -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{u}_e(p-q) \left(\frac{ig}{\sqrt{2} M} \right) \frac{U_{ei}^*}{2} [m_i(1+\gamma_5) - m_e(1-\gamma_5)] \times \right. \\ & \times \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_i} \left(\frac{-ig}{\sqrt{2} M} \right) \frac{U_{\mu i}}{2} [m_i(1-\gamma_5) - m_\mu(1+\gamma_5)] u_\mu(p) \left. \right\} \times \\ & \times \frac{i}{k^2 - \xi M^2} \frac{i}{(k+q)^2 - \xi M^2} [ie\varepsilon \cdot (2k+q)]. \quad (13.108) \end{aligned}$$

Полагая приближенно $m_e = 0$ и используя (13.101), получаем

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) = & \frac{-ic}{M^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\bar{u}_e(p-q)(1+\gamma_5) k u_\mu(p)] \times \\ & \times \frac{2k \cdot \varepsilon}{(\not{p} + \not{k})^2} \frac{1}{k^2 - \xi M^2} \frac{1}{(k+q)^2 - \xi M^2}. \quad (13.109) \end{aligned}$$

Объединяя знаменатели, проинтегрируем по импульсам:

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) = & -4ic(p \cdot \varepsilon) [\bar{u}_e(1+\gamma_5) u_\mu] \times \\ & \times \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{-i}{32\pi^2 a'^2} \right) \frac{m_\mu}{M^2}, \quad (13.110) \end{aligned}$$

где $a'^2 = (1 - \alpha_1) \xi M^2$. После интегрирования по параметрам получаем выражение для инвариантной амплитуды:

$$A(\Gamma) = \frac{-c}{32\pi^2} \left(\frac{m_\mu}{M^4} \right) \frac{5}{6\xi}. \quad (13.111)$$

Вклады диаграмм рис. 13.6, а — г приведены на рис. 13.8. Очевидно, что полный вклад этих диаграмм равен

$$A = B = e \frac{g^2}{8M^2} \frac{m_\mu}{32\pi^2} \delta_\nu, \quad (13.112)$$

где δ_ν — фактор подавления ГИМ:

$$\delta_\nu = \sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} (m_i^2/M^2). \quad (13.113)$$

Заметим, что в конечном результате зависимость от калибровочного параметра ξ исчезла. Прямое вычисление ширины распада

дает

$$\Gamma(\mu \rightarrow e\nu) = \frac{m_\mu^3}{8\pi} (|A|^2 + |B|^2). \quad (13.114)$$

Используя выражение $\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}) = m_\mu^5 G_F^2 / 192\pi^3$, можно получить отношение ширины распадов [78, 257, 289, 323]

$$B(\mu \rightarrow e\nu) \equiv \Gamma(\mu \rightarrow e\nu) / \Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}) = \frac{3\alpha}{32\pi} \delta_\nu^2, \quad (13.115)$$

где α — постоянная тонкой структуры, и мы воспользовались равенством $G_F / \sqrt{2} = g^2 / 8M^2$. Даже если масса нейтрино взята та-

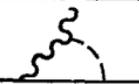
	R_ξ -калибровка	Калибровка г'Хофта ($\xi = 1$)	Унитарная калибровка ($\xi \rightarrow \infty$)
	$1 - \frac{1}{3} f(\xi) + 2g(\xi)$	$\frac{5}{3}$	1
	$\frac{5}{6\xi} + \frac{4}{3} f(\xi) - \frac{7}{3} g(\xi)$	1	0
	$\frac{5}{6\xi} - f(\xi) + \frac{1}{3} g(\xi)$	0	0
	$-\frac{5}{3\xi}$	$-\frac{5}{3}$	0

Рис. 13.8. Вклады диаграмм в инвариантную амплитуду $A = B$ процесса $\mu \rightarrow e\nu$ в единицах $(eg^2/8M^2) (m_\mu/32\pi^2) \delta_\nu$; здесь $f(\xi) = \ln \xi / (\xi - 1)$, $g(\xi) = [\xi f(\xi) - 1] / (\xi - 1)$.

кой, что она соответствует космологическому ограничению 100 эВ (13.60), мы имеем безнадежно малую величину $B(\mu \rightarrow e\nu) < 10^{-40}$.

Прокомментируем теперь очень кратко ситуацию, когда нейтрино являются майорановскими частицами [81]. Здесь мы также можем выделить две широкие категории.

1. Нейтринные массовые члены являются чисто майорановскими $A\bar{\nu}_L^c \nu_L$. Каждое собственное состояние, участвующее в слабом взаимодействии, по-прежнему является суперпозицией трех (майорановских) собственных состояний массовой матрицы, и описанное выше вычисление амплитуды процесса $\mu \rightarrow e\nu$ должно быть проведено без каких-либо модификаций.

2. Мы имеем нейтринные массовые члены как дираковского, так и майорановского типов. В частности, когда мы имеем ситуацию, описанную в (13.69), $D\bar{\nu}_L \nu_R + B\bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{эрмит. сопр.}$, где $B \gg D$ (теоретически это наиболее привлекательная возможность). Каждое собственное состояние, участвующее в слабых взаимодействиях, является суперпозицией шести собственных состояний массовой матрицы майорановского типа: три из них являются легкими с $m \sim D^2/B$, а три очень тяжелыми с $M \sim B (\gg M_W)$. Эти вычисления амплитуды процесса $\mu \rightarrow e\nu$ без

использования приближения малых масс промежуточных нейтрино были проведены. Как и следовало ожидать, сокращение ГИМ не является теперь полным из-за присутствия сверхтяжелых нейтрино. Но отношение скоростей распада $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ все еще настолько ничтожно мало, что его невозможно определить экспериментально, так как примесь тяжелых нейтрино в нейтрино ν_L чрезвычайно мала: $\theta \approx D/B$, или $(m/M)^{1/2}$. Поэтому можно заключить, что только в случае, когда нейтринные массовые члены имеют самый общий вид (13.43) (т. е. в них входят и хиггсовский триплет, и нейтрино ν_R) и их величины таковы, что $B \gg D \gg A$, существует некоторая возможность получить значение $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ для процесса, индуцированного нейтринными осцилляциями, которое достаточно велико, чтобы его можно было измерить.

Существует определенная уверенность в том, что вплоть до таких малых расстояний, как 10^{-16} см, взаимодействия элементарных частиц правильно описываются калибровочной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -теорией. Это стандартная модель в физике частиц: квантовая хромодинамика является теорией сильных взаимодействий, а модель Глэшоу — Вайнберга — Салама лежит в основе теории слабых и электромагнитных взаимодействий.

Конечно, желательно иметь более общую теорию, в которой все три взаимодействия объединены и являются проявлениями одного фундаментального взаимодействия, — теорию, содержащую только одну калибровочную группу. Джорджи и Глэшоу [176] показали, что самой простой калибровочной группой, на основе которой можно объединить все три взаимодействия стандартной модели с известными в настоящее время кварками и лептонами каждого поколения, является группа $SU(5)$. Однако, поскольку константы сильных и электрослабых взаимодействий существенно различаются, такое объединение не должно проявлять себя, пока не будут достигнуты энергии порядка 10^{14} ГэВ, соответствующие расстояниям порядка 10^{-28} см.

Объединение цвета и аромата впервые обсуждалось Пати и Саламом [315]. Имеются также другие привлекательные модели, основанные на калибровочных группах $SO(10)$ [146, 171] и E_6 [208]. В настоящей главе мы остановимся на самой простой модели великого объединения, основанной на группе $SU(5)$.

14.1. ВВЕДЕНИЕ В $SU(5)$ -МОДЕЛЬ

Рассмотрим сначала общую структуру $SU(5)$ -модели. (Детальное обсуждение приведено в работе [63].) Первоначальные причины использования Джорджи и Глэшоу калибровочной группы $SU(5)$ приводятся в конце этого раздела.

Общее представление группы $SU(5)$ можно описать, используя тензорные обозначения (см. разд. 4.3):

$$\psi_{kl}^{ij} \dots \rightarrow U_m^i U_n^j U_k^s U_l^t \dots \psi_{st}^{mn} \dots, \quad (14.1)$$

где все индексы принимают значение от 1 до 5, а

$$[U]_m^i = [\exp(i\alpha^a \lambda^a / 2)]_m^i$$

есть унитарная матрица 5×5 . Матрицы $\{\lambda^a\}$, $a = 0, 1, \dots, 23$ образуют набор из двадцати четырех обобщенных матриц 5×5 Гелл-Манна, являющихся эрмитовыми и бесследовыми (так что матрицы U унитарны и их детерминант равен единице) и удовлетворяющих условию нормировки $\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}$. Например,

$$\lambda^3 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix}. \quad (14.2)$$

Чтобы получить $SU(3) \times SU(2)$ -содержание представления группы $SU(5)$, отождествим первые три $SU(5)$ -индекса с цветовыми индексами, а остальные два — с индексами группы $SU(2)_L$:

$$i = (a, r), \quad \text{где } a = 1, 2, 3, \text{ а } r = 4, 5. \quad (14.3)$$

Фермионное содержание

В стандартной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -модели в каждом поколении (семействе) имеются 15 левых двухкомпонентных фермионных полей. Как мы увидим, теории великого объединения вообще и $SU(5)$ -модель в частности не проливают свет на проблему дублирования фермионов (см. разд. 11.3). Поэтому для краткости мы сначала изложим теорию только для первого (e) фермионного поколения:

$$\begin{aligned} (\nu_e, e^-)_L : (1, 2), \quad e_L^+ : (1, 1), \quad (u_a, d_a)_L : (3, 2), \\ u_L^{ca} : (3^*, 1), \quad d_L^{ca} : (3^*, 1), \end{aligned} \quad (14.4)$$

где справа указано, по каким представлениям группы $SU(3) \times SU(2)$ преобразуются члены этого поколения. Верхний индекс c соответствует зарядовому сопряжению (см. соотношения (13.34) и (13.35)):

$$\psi^c = C\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^*, \quad (\psi_R)^c = (\psi^c)_L \equiv \psi_L^c. \quad (14.5)$$

Простейшие представления группы $SU(5)$ имеют следующее $SU(3) \times SU(2)$ -содержание:

Фундаментальное представление ψ_i	$5 = (3, 1) + (1, 2).$	
Фундаментальное сопряженное представление ψ^i	$5^* = (3^*, 1) + (1, 2^*).$	(14.6)
Антисимметричное представление 5×5 $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$	$10 = (3^*, 1) + (3, 2) + (1, 1).$	

Менее очевидными моментами в приведенном выше разложении являются соотношения эквивалентности $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\psi_{\alpha\beta} \sim (3^*, 1)$ и $\varepsilon_{rs}\psi^{rs} \sim (1, 1)$, где мы следуем правилу (14.3) относительно индексов группы $SU(5)$. Сравнивая (14.4) и (14.6), мы видим, что одно поколение фермионов можно естественным образом разместить в приводимом $SU(5)$ -представлении $5^* + 10$:

$$5^* : (\psi^i)_L = (d^{c1} d^{c2} d^{c3} e^- - \nu_e)_L \quad (14.7)$$

или

$$5 : (\psi^i)_R = (d_1 d_2 d_3 e^+ - \nu_e^c)_R \quad (14.8)$$

и

$$10 : (\chi_{ij})_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{bmatrix}_L. \quad (14.9)$$

Следует заметить, что в этом приближении одного поколения калибровочные собственные состояния совпадают с массовыми собственными состояниями. Поэтому мы все приведенные выше собственные состояния обозначили как поля с определенными массами. Вводя фермионные поколения μ и τ , мы также свяжем их с представлениями 5^* и 10 . Следовательно, все калибровочные собственные состояния будут некоторыми линейными суперпозициями массовых собственных состояний (см. разд. 11.3).

Мы условились выбирать фазу таким образом, чтобы нейтринное поле входило в представление 5^* (и 5) со знаком минус. Это подтверждает сделанный выше выбор, согласно которому дублет $l^a = (\nu, e)_L$ преобразуется в соответствии с представлением 2 группы $SU(2)$ и связан с сопряженным ему дублетом $l_a = (e, -\nu)_L$ с помощью антисимметричного тензора $l^b = \varepsilon^{ab} l_a$. До сих пор мы рассматривали только квантовые числа группы $SU(3) \times SU(2)$. То, что все частицы обладают правильными $U(1)$ -зарядами, будет показано ниже при обсуждении квантования заряда.

Квантование заряда

Из схемы, основанной на группе $SU(5)$, немедленно следует очень простое объяснение экспериментально наблюдаемого квантования заряда. Действительно, когда калибровочная группа объединения является простой, имеет место квантование заряда. Это связано с тем, что собственные значения генераторов простой неабелевой группы дискретны, тогда как в случае абелевой группы $U(1)$ они непрерывны. Например, для группы вращений $SO(3)$ собственные значения третьей компоненты углового момента могут принимать только либо целые, либо полуцелые зна-

чения, тогда как в случае группы трансляций во времени $U(1)$ нет никаких ограничений на собственные значения (энергию) соответствующего генератора. Таким образом, поскольку в $SU(5)$ -теории оператор электрического заряда Q является одним из генераторов, его собственные значения дискретны, т. е. квантованы.

Поскольку электрический заряд является аддитивным квантовым числом, оператор Q должен быть некоторой линейной комбинацией диагональных генераторов группы $SU(5)$. В случае группы $SU(5)$ имеются только четыре таких генератора, и, так как Q коммутирует со всеми элементами группы $SU(3)_c$, мы имеем

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + cT_0, \quad (14.10)$$

где T_3 и T_0 — диагональные генераторы групп $SU(2)$ и $U(1)$ соответственно; в фундаментальном представлении они совпадают с матрицами (14.2), умноженными на $1/2$. Из выражения (14.10) видно, что в случае группы $SU(5)$ формула для Q не содержит каких-либо членов, кроме тех, которые входят в выражение для Q , существующее в рамках модели Глэшоу — Вайнберга — Салама. Коэффициент c , связывающий Y и T_0 , можно получить, сравнивая значения T_0 в фундаментальном представлении, приведенные в (14.2), и значения гиперзаряда частиц в (14.8), т. е.

$$c = -(5/3)^{1/2}. \quad (14.11)$$

Наличие коэффициента c означает, что гиперзаряд Y не нормирован должным образом, чтобы быть одним из генераторов группы $SU(5)$, масштаб которых фиксирован нелинейными коммутационными соотношениями

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = iC^{abc} \frac{\lambda^c}{2},$$

где

$$\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad a, b, c = 0, 1, \dots, 23.$$

Для проверки значения (14.11) заметим, что в фундаментальном представлении $T_a = \lambda_a/2$ и из соотношений (14.10), (14.11), (14.2) и (14.8) следует

$$Q(\psi_i) = \begin{bmatrix} -1/3 & & & \\ & -1/3 & & \\ & & -1/3 & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \equiv Q_i \delta_{ij}. \quad (14.12)$$

Отсюда для фундаментального сопряженного представления 5^* имеем

$$Q(\psi^i) = -Q_i \delta_{ij}. \quad (14.13)$$

Из трансформационного свойства (14.1) следует, что тензор общего вида $\psi_k^{ij} \dots$ обладает тем же квантовым числом, что и $\psi^i \psi^j \psi_k \dots$. Таким образом,

$$Q(\psi_{ij}) = Q_i + Q_j, \quad (14.14)$$

$$Q(\psi_i^j) = Q_i - Q_j. \quad (14.15)$$

Эти величины в очевидных обозначениях являются диагональными элементами генератора Q в представлениях **10** и **24** (см. также (4.141)).

Наиболее интересным аспектом квантования заряда, как это видно из (14.12), является связь между генераторами цветовой группы $SU(3)$ и зарядом. Условие бесследовости для оператора заряда приводит к тому, что

$$3Q_d + Q_{e^+} = 0. \quad (14.16)$$

Заряды кварков составляют $1/3$ заряда лептона, так как имеются три цвета. Таким образом, теория с группой $SU(5)$ дает рациональное объяснение значений зарядов частиц и значений слабого гиперзаряда в стандартной модели электрослабого взаимодействия.

Сокращение аномалий

Мы должны также проверить, что в модели с левыми фермионами не возникает аномалий. Конечно, нам уже известно из (11.52), что взаимодействие каждого поколения с калибровочными бозонами $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ свободно от аномалий. Теперь необходимо убедиться в том, что взаимодействия фермионов с остальными $SU(5)$ -калибровочными бозонами также не приводят к аномалиям.

В общем случае аномалии любого фермионного представления R пропорциональны следу (см. (6.60)) [28, 174, 311]:

$$\text{tr}(\{T^a(R), T^b(R)\} T^c(R)) = \frac{1}{2} A(R) d^{abc}, \quad (14.17)$$

где $T^a(R)$ — матрицы представления R , а d^{abc} — полностью симметричный тензор возникающий при рассмотрении антикоммуторов (5.238):

$$\{\lambda^a, \lambda^b\} = 2d^{abc} \lambda^c. \quad (14.18)$$

Заметим, что величина $A(R)$ в выражении (14.17), характеризующая аномалии в данном представлении R , не зависит от выбора генераторов и нормирована так, что в фундаментальном представлении она равна единице. Таким образом, для вычисления $A(R)$ можно использовать генераторы, имеющие простой вид, и показать, что аномалии, соответствующие представлениям

5^* и 10 , сокращаются. Возьмем, например, $T^a = T^b = T^c = Q$; тогда немедленно получаем

$$\frac{A(5^*)}{A(10)} = \frac{\text{tr } Q^3(\psi^i)}{\text{tr } Q^3(\psi_{ij})} = \frac{3(1/3)^3 + (-1)^3 + 0^3}{3(-2/3)^3 + 3(2/3)^3 + 3(-1/3)^3 + 1^3} = -1$$

и

$$A(5^*) + A(10) = 0. \quad (14.19)$$

Таким образом, выбранное фермионное представление $5^* + 10$ свободно от аномалий.

Калибровочные бозоны

Присоединенное представление A_j^i группы $SU(5)$ имеет размерность $5^2 - 1 = 24$ и разлагается на следующие представления группы $SU(3) \times SU(2)$:

$$24 = (8, 1) + (1, 3) + (1, 1) + (3, 2) + (3^*, 2). \quad (14.20)$$

Воспользовавшись правилом индексов (14.3), будем интерпретировать матричные элементы A_j^i следующим образом:

A_β^α ; $(8, 1)$ являются $SU(3)_c$ -глюонами G_β^α из (10.63).

A_s^r ; $(1, 3)$ являются тремя векторными $SU(2)$ -полями \mathbf{W} , комбинации компонент которых $W^\pm = (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$ определены в (11.38) и (11.76) (с заменой \mathbf{A} на \mathbf{W}).

$-\sqrt{\frac{1}{15}} A_\alpha^a + \sqrt{\frac{3}{20}} A_r^r$; $(1, 1)$ является $U(1)$ -полем B из (11.39), соответствующим диагональному элементу матрицы A_j^i , который не принадлежит представлению ни группы $SU(3)$, ни группы $SU(2)$.

Остальные 12 калибровочных бозонов имеют индексы, соответствующие как группе $SU(3)$, так и группе $SU(2)$:

$$A_\alpha^r : (3, 2), \quad A_r^a : (3^*, 2).$$

Они называются калибровочными бозонами X и Y :

$$A_\alpha^r = (X_\alpha, Y_\alpha), \quad A_r^a = \begin{pmatrix} X^a \\ Y^a \end{pmatrix}.$$

Эти векторные поля, преобразующиеся нетривиальным образом относительно группы $SU(3)$, обладают дробными зарядами. В соответствии с (14.15) имеем

$$Q_X = -4/3, \quad Q_Y = -1/3. \quad (14.21)$$

Записывая все калибровочные бозоны $SU(5)$ в виде матрицы 5×5 , $A = \sum_{a=0}^{23} A^a \lambda^a / 2$, будем иметь

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} [G - 2B/\sqrt{30}]_{\beta}^{\alpha} & X_1 & & & Y_1 \\ & X_2 & & & Y_2 \\ & X_3 & & & Y_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & -W^3/\sqrt{2} + 3B/\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad (14.22)$$

Предполагается, что спонтанное нарушение симметрии происходит в два этапа, характеризуемых двумя масштабами масс, которые определяются вакуумными средними двух мультиплетов хиггсовских полей $v_1 \gg v_2$:

$$SU(5) \xrightarrow{v_1} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{v_2} SU(3) \times U(1).$$

Это соответствует тому, что бозоны X и Y являются супертяжелыми: $M_{X, Y} \gg M_{W, Z}$. Проблема спонтанного нарушения симметрии в $SU(5)$ -модели рассматривается в следующем разделе.

Причины использования группы $SU(5)$

При построении объединенной теории сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий с одной константой связи мы ищем калибровочную группу, которая являлась бы простой или по крайней мере представляла собой произведение тождественных простых групп (которым отвечает одна константа связи благодаря существованию некоторых дискретных симметрий). Она должна быть достаточно большой, чтобы в ней содержалась в качестве подгруппы группа $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ стандартной модели, т. е. ранг этой группы должен быть не меньше 4. Под этим мы подразумеваем, что она должна иметь по крайней мере 4 генератора, которые можно одновременно диагонализировать, так как в ее алгебру должны входить генераторы стандартной модели, коммутирующие друг с другом: два из них являются генераторами цветовой группы $SU(3)$, а два других — генератор группы слабых взаимодействий T_3 и гиперзаряд Y из $SU(2) \times U(1)$.

Можно составить исчерпывающий список групп Ли данного ранга (l):

$$A_l = SU(l+1), \quad B_l = O(2l+1), \quad C_l = Sp(2l), \quad D_l = O(2l)$$

и (исключительные группы) $E_{6,7,8}$, F_4 и G_2 , где индекс указывает ранг. Таким образом, группами ранга $l=4$, которые можно рассматривать в качестве кандидатов на роль группы великого

объединения, являются $SU(5)$, $O(9)$, $Sp(8)$, $O(8)$, F_4 , $SU(3) \times SU(3)$ и $SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ и т. д.

Однако все эти возможные варианты, за исключением групп $SU(5)$ и $SU(3) \times SU(3)$, должны быть отброшены, так как они не обладают комплексными представлениями. Из (14.4) видно, что для описания фермионов необходимы комплексные представления; в стандартной модели фермионные представления не эквивалентны их комплексно-сопряженным представлениям. Возможность, связанная с группой $SU(3) \times SU(3)$, также может быть быстро отброшена, так как в этой группе не могут одновременно возникать частицы как с целыми, так и с дробными зарядами.

Таким образом, группа $SU(5)$, будучи группой ранга 4, является наименьшей группой, которая содержит $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ без введения каких-либо новых фермионов. Она имеет комплексные представления и может включать дробные заряды. Как мы видели, ее свободное от аномалий приводимое представление $5^* + 10$ содержит набор квантовых чисел, соответствующих одному поколению лептонов и кварков. В моделях с более широкими группами, чем $SU(5)$, обязательно были бы частицы, отличные от 15 двухкомпонентных фермионов с их известными квантовыми числами. В этом смысле $SU(5)$ -модель является единственной теорией великого объединения в данном простейшем случае.

14.2. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И КАЛИБРОВОЧНАЯ ИЕРАРХИЯ

Модель с группой $SU(5)$ должна иметь два масштаба масс — массы калибровочных бозонов X и W . (Ниже в этой главе мы часто будем обозначать одной буквой X оба калибровочных бозона X и Y и одной буквой W калибровочные бозоны W и Z .) Величины этих масс характеризуют спонтанное нарушение симметрии (СНС) $SU(5)$ до симметрии $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ и затем до симметрии $SU(3) \times U(1)$. Кроме того, как мы увидим в последующих разделах, масса M_X больше массы M_W примерно на 12 порядков величины. Таким образом, имеется громадная иерархия калибровочных симметрий.

Как обсуждалось в гл. 8, калибровочные бозоны могут стать массивными за счет явления Хиггса; при этом некоторые элементарные скалярные поля приобретают отличные от нуля вакуумные средние. Этот механизм сохраняет перенормируемость теории. Чтобы в одной теории было два масштаба масс, необходимо иметь два набора скаляров, обладающих сильно различающимися вакуумными средними, что приводит к желаемой калибровочной иерархии. В $SU(5)$ -модели это может быть достигнуто за счет скаляров, содержащихся в присоединенном (H_1^c)

и в векторном (ϕ_i) представлениях:

$$SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\langle \phi \rangle} SU(3) \times U(1). \quad (14.23)$$

Общий $SU(5)$ -инвариантный потенциал четвертого порядка имеет вид

$$V(H, \phi) = V(H) + V(\phi) + \lambda_4 (\text{tr } H^2) (\phi^\dagger \phi) + \lambda_5 (\phi^\dagger H^2 \phi), \quad (14.24)$$

где

$$V(H) = -m_1^2 (\text{tr } H^2) + \lambda_1 (\text{tr } H^2)^2 + \lambda_2 (\text{tr } H^4), \quad (14.25)$$

$$V(\phi) = -m_2^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda_3 (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (14.26)$$

(H — эрмитова бесследовая матрица). Для простоты наложим требование дополнительной дискретной симметрии относительно преобразований $H \rightarrow -H$ и $\phi \rightarrow -\phi$, чтобы избавиться от различных кубических членов.

Найдем сначала значения $H \neq 0$, минимизирующие потенциал при $\phi = 0$. (Это соответствует первому этапу спонтанного нарушения симметрии.) Затем займемся поиском более низких минимумов при малых, но не исчезающих значениях ϕ (второй этап СНС).

Можно показать, что при $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > -7/30\lambda_2$ $V(H)$ имеет экстремум при $H = \langle H \rangle$, где

$$\langle H \rangle = v_1 \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix}, \quad (14.27)$$

причем

$$v_1^2 = m_1^2 / (60\lambda_1 + 14\lambda_2). \quad (14.28)$$

Здесь мы лишь очень кратко дадим вывод, приведенный Ли [267]. Сначала H можно диагонализировать унитарным преобразованием таким образом, что $H_j^i \rightarrow H_i \delta_j^i$, где $\sum_i H_i = 0$. Уравнения $\partial V / \partial H_i = 0$ являются кубическими уравнениями относительно диагональных элементов H_i , которые могут удовлетворяться самое большее при трех различных значениях. Детальные вычисления показывают, что если константы связи принимают значения в указанных выше областях, то потенциал V достигает своего минимума, когда имеются только два различных значения H_i , которые можно расположить так, как это сделано в соотношении (14.27).

Мы сдвигаем поле, чтобы определить набор новых скаляров, которые в матричном обозначении, аналогичном (14.22), можно

представить следующим образом:

$$H' = H - \langle H \rangle = \left[\begin{array}{c|cc} [H_8]_{\beta}^a - 2H_0/\sqrt{30} & H_{X1} & H_{Y1} \\ & H_{X2} & H_{Y2} \\ & H_{X3} & H_{Y3} \\ \hline H_{X1}^{\dagger} & H_{X2}^{\dagger} & H_{X3}^{\dagger} \\ H_{Y1}^{\dagger} & H_{Y2}^{\dagger} & H_{Y3}^{\dagger} \\ & [H_3]_s^r + 3H_0/\sqrt{30} & \end{array} \right]. \quad (14.29)$$

Их спектр масс можно получить непосредственным вычислением вторых производных от V при $H = \langle H \rangle$. Эти значения приведены в табл. 14.1.

Таблица 14.1. Скалярные поля $H:24$ и $\phi:5$ в минимальной $SU(5)$ -модели. Безмассовые поля $(H_{X\alpha}, H_{Y\alpha})$ являются несостоявшимися голдстоуновскими бозонами, которые „поглощаются“ калибровочными бозонами (X^a, Y^a)

Скалярные поля	Квантовые числа $SU(3) \times SU(2)$	(Масса) ²
$[H_8]_{\beta}^a$	(8, 1)	$20\lambda_2 v_1^2$
$[H_3]_s^r$	(1, 3)	$80\lambda_2 v_1^2$
H_0	(1, 1)	$4m_1^2$
$(H_{X\alpha}, H_{Y\alpha})$	(3, 2)	0
$(H_{X\alpha}^{\dagger}, H_{Y\alpha}^{\dagger})$	(3*, 2)	0
$\phi_{i\alpha}$	(3, 1)	$-m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5) v_1^2$
$\phi_{d\alpha}$	(1, 2)	$-m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5) v_1^2$

Так как H принадлежит присоединенному представлению, ковариантную производную можно записать в виде

$$D_{\mu}H = \partial_{\mu}H + ig[A_{\mu}, H] = D_{\mu}H' + ig[A_{\mu}, \langle H \rangle], \quad (14.30)$$

где A_{μ} — матрица калибровочного поля (14.22). Таким образом, первоначальный член «кинетической энергии» $|D_{\mu}H|^2$ содержит слагаемое $g^2 |A_{\mu}, \langle H \rangle|^2$. Это массовый член для калибровочных бозонов.

Из выражения (14.27) видно, что $\langle H \rangle$ коммутирует с генераторами подгруппы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Поэтому массовые члены полей G_{β}^a, W_r и B обращаются в нуль. Калибровочные бозоны X и Y , объединяясь с несостоявшимися голдстоуновскими скалярами H_X и H_Y , приобретают массы. Имеем

$$M_X = M_Y = \sqrt{25/2} gv_1. \quad (14.31)$$

Тот факт, что H приобретает отличное от нуля вакуумное среднее, приводит также к изменениям в ϕ -системе за счет взаи-

модействий с константами λ_4 и λ_5 . Цветовой триплет ϕ_t : (3, 1) и дублет ароматов ϕ_d : (1, 2), являющиеся компонентами $\phi = (\phi_{t\alpha}, \phi_{d\alpha})$, приобретают соответственно массовые члены:

$$\begin{aligned} m_t^2 &= -m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_5)v_1^2, \\ m_d^2 &= -m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_5)v_1^2. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Таким образом, после первого этапа спонтанного нарушения симметрии ожидается, что все ненулевые значения масс частиц будут порядка v_1 , т. е. порядка массы M_X , которая должна быть очень большой. На втором этапе СНС $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$, происходящем при 250 ГэВ, необходимы скаляры в дублетном $SU(2)$ -представлении. Мы принимаем, что по каким-то причинам квадрат массы m_d^2 этого дублета ϕ_d исчезающе мал (по сравнению с v_1^2). Таким образом, ϕ_d будет сохраняться при низких энергиях (~ 250 ГэВ), так как супертяжелые частицы (с массами порядка v_1) не участвуют во взаимодействии. Соответствующая физика легких частиц описывается $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -инвариантным эффективным потенциалом

$$V_{\text{эфф}}(\phi_d) = -m_d^2 \phi_d^\dagger \phi_d + \lambda_3 (\phi_d^\dagger \phi_d)^2. \quad (14.33)$$

Это, безусловно, не что иное, как потенциал Хиггса для модели Вайнберга — Салама (см. гл. 11). Иерархия калибровочных симметрий означает, что ϕ_d имеет вакуумное среднее, много меньшее v_1 :

$$\langle \phi_d \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = (m_d^2/\lambda_3)^{1/2} \approx 250 \text{ ГэВ}. \quad (14.34)$$

Следует подчеркнуть, что изложенные выше рассуждения были проведены в приближении, когда оба этапа СНС рассматриваются отдельно. Правильная минимизация потенциала $V(H, \phi)$ составной системы привела бы к вакуумному среднему $\langle H \rangle$, которое слегка сдвинуто по отношению к (14.27). Это также нарушило бы в некоторых случаях вырождение по массе в табл. 14.1, но все эти поправки должны быть малы — порядка (v_2/v_1) . Кроме того, калибровочные бозоны X и Y также имели бы различие в массах $O(v_2)$.

Мы увидим, что модель требует выполнения неравенства $v_1 \geq 10^{12} v_2$. Наличие в теории столь различных массовых масштабов понять очень трудно. Малость массы m_d , являющаяся следствием малости v_2 в соответствии с (14.34), представляется неестественной, так как в нее дает вклад большая величина v_1 (см. (14.32)). Кроме того, весьма проблематична возможность последовательного рассмотрения такой сильной калибровочной иерархии в присутствии радиационных поправок [181], т. е. неясно, можно ли легким скалярным частицам приписывать малые массы во всех порядках теории возмущений. Собственная

масса элементарной скалярной частицы квадратично расходится. Величину v_1 можно рассматривать как параметр обрезания в низкоэнергетической эффективной теории поля ϕ_a . Ожидается, что поправки к массе, соответствующие диаграммам, подобным приведенной на рис. 14.1, велики: $\Delta m_a^2 \sim g^4 v_1^2$. С такими поправками малая масса скалярного поля, по-видимому, может быть получена только за счет тщательного подбора параметров в

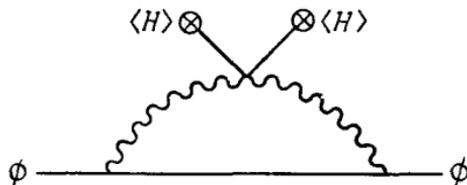


Рис. 14.1. Диаграмма собственной энергии скалярной частицы ϕ .

каждом порядке теории возмущений. Эту ситуацию обычно называют *проблемой калибровочных иерархий* (см. обзор [82]). Выход мог бы состоять в том, чтобы найти модель, не обладающую таким неестественным свойством. Если такая модель существует, то она, вероятно, должна обладать дополнительными симметриями. Часто предполагается, что эти симметрии могут быть некоторой разновидностью суперсимметрии, которая запрещает появление квадратично расходящихся скалярных масс. (В этом случае к калибровочным бозонам и хиггсовским частицам должны быть добавлены суперсимметричные фермионные партнеры. При этом главные расходимости в диаграммах, подобных приведенной на рис. 14.1, уничтожаются соответствующими расходимостями от фермионных петель.) До сих пор не было построено ни одной реалистической модели, и проблема удовлетворительного описания калибровочной иерархии все еще не решена.

14.3. СЛИЯНИЕ КОНСТАНТ СВЯЗИ

Стандартная модель описывает сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия при энергиях $\leq 10^2$ ГэВ; при этом используются три различные константы связи: g_s , g и g' для калибровочных групп $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$ соответственно. Таким образом, в рамках стандартной модели невозможно понять, почему силы, участвующие в этих трех взаимодействиях, столь различны. Одним из главных достоинств теории великого объединения является то, что она дает объяснение этому факту [178] (это и явилось первоначальным толчком к ее рассмотрению).

Теория великого объединения по определению содержит только одну константу связи, связанную с объединенной калибровочной группой. Та же константа связи должна фигурировать

и при рассмотрении подгрупп калибровочной группы. Тот факт, что при низких энергиях различным подгруппам могут соответствовать разные константы связи, является следствием спонтанного нарушения симметрии. Калибровочные бозоны X и Y (или просто X -бозоны) $SU(5)$ -модели приобретают массы и не влияют на перенормировки констант связи. Это по-разному сказывается на радиационных поправках для констант связи, соответствующих разным подгруппам, приводя при низких энергиях к различным эффективным константам связи в силу их зависимости

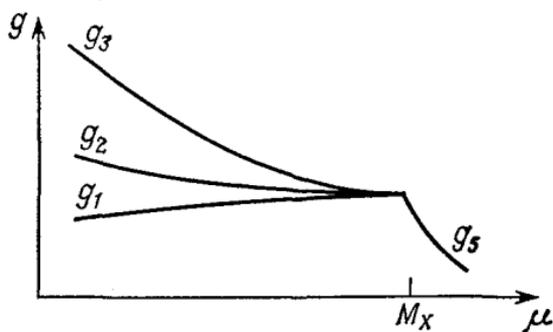


Рис. 14.2. Слияние констант связи. При масштабе $\mu > M_X$, где массой X -бозона можно пренебречь, взаимодействия, соответствующие различным подгруппам, остаются объединенными. При масштабе $\mu < M_X$ характер изменения констант связи определяется тем, насколько широка калибровочная группа.

от энергии, определяемой уравнениями ренормгруппы, как это было проиллюстрировано в гл. 3. Отсутствие взаимодействия с тяжелыми X -бозонами приводит к тому, что коэффициенты в ренормгрупповых уравнениях для константы связи, соответствующих различным подгруппам, не равны друг другу. Ниже масштаба объединения [т. е. M_X в случае группы $SU(5)$] они эволюционируют по-разному, приводя к наблюдаемым различиям в силах взаимодействий.

Прежде чем перейти к детальному анализу, сделаем несколько качественных утверждений о слиянии констант связи, иллюстрируемом на рис. 14.2.

А. Так как константы связи зависят от энергии только логарифмически и при энергиях $\approx 10^2$ ГэВ g_s , g и g' совершенно различны, мы предполагаем, что масштаб объединения M_X превосходит значение 10^2 ГэВ на много порядков величины.

Б. Из анализа уравнений ренормгруппы мы устанавливаем следующие факты. Для неабелевых калибровочных групп константа связи уменьшается с ростом энергии, и скорость уменьшения больше для более широких групп. Для абелевой группы константа связи растет с ростом энергии. Таким образом, при энергиях меньше M_X константы связи должны упорядочиваться следующим образом: $g_s > g > g'$, что вполне соответствует экспериментальным наблюдениям.

В. Кроме того, при значениях энергии меньше M_X траектории трех констант связи, показанные на рис. 14.2, должны иметь строго правильное поведение, чтобы все они пересекались в одной точке при $\mu = M_X$. Это приводит к нетривиальному условию согласованности между значениями g_s , g и g' . Из этого условия можно получить выражение для угла Вайнберга θ_w , который связывает g и g' , в терминах постоянной тонкой структуры α и константы сильных взаимодействий КХД α_s (см. (14.57)).

Перейдем теперь к подробному анализу. Прежде всего мы должны изучить связь между константами взаимодействия в моделях с группами $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ и $SU(5)$ при масштабе объединения M_X . Рассмотрим соответствующие этим группам ковариантные производные. Для определенности выпишем их для случая фундаментальных представлений этих групп:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 G_\mu^\alpha \lambda^\alpha / 2 + ig \sum_{r=1}^3 W_\mu^r \tau^r / 2 + ig' B_\mu Y / 2, \quad (14.35)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a \lambda^a / 2. \quad (14.36)$$

Определение констант связи зависит от выбора нормировки генераторов. Для неабелевых групп нормировка фиксирована нелинейными коммутационными соотношениями между генераторами их алгебр Ли. Поэтому матрицы Гелл-Манна $\{\lambda^a\}$, как и их обобщения $\{\lambda^a\}$ на случай группы $SU(5)$, а также матрицы Паули $\{\tau^r\}$ нормируются аналогичным образом. Например, $\text{tr} \{\lambda^a \lambda^b\} = 2\delta^{ab}$ и т. д. Мы имеем

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1, \quad (14.37)$$

где

$$g_3 \equiv g_s, \quad g_2 \equiv g. \quad (14.38)$$

Константа связи g_1 относится к абелевой подгруппе $U(1)$. Поэтому

$$ig_1 \lambda^0 A_\mu^0 = ig' Y B_\mu.$$

Поле A_μ^0 отождествляется с калибровочным полем B_μ . Отметим, что алгебра группы $U(1)$ не накладывает никаких (нелинейных) ограничений на ее генератор, поэтому Y и λ^0 могут быть нормированы независимо. Это различие в нормировках можно определить, если заметить, что в соответствии с размещением частиц в представлении $\mathbf{5}$ (14.8) слабый гиперзаряд должен иметь следующий вид:

$$Y = \begin{bmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (14.39)$$

Сравнивая (14.39) с явным видом λ^0 из (14.2), так же, как в (14.11), получаем

$$Y = - (5/3)^{1/2} \lambda^0, \quad g' = - (3/5)^{1/2} g_1, \quad (14.40)$$

так как $g'Y = g_1\lambda^0$. Из выражений (11.80), (14.37) и (14.40) следует

$$\sin^2 \theta_W \equiv g'^2 / (g^2 + g'^2) = 3/8. \quad (14.41)$$

Это соотношение и равенства (14.37) выполняются в пределе группы $SU(5)$, т. е. при масштабе энергий $\mu > M_X$. Теперь необходимо рассмотреть область $\mu < M_X$. Эволюция константы

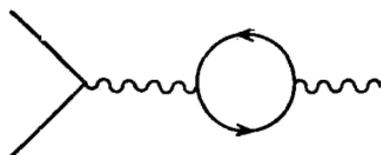


Рис. 14.3. Перенормировка константы связи, вызванная фермионной петлей.

связи в теории с калибровочной группой $SU(n)$ описывается уравнением ренормгруппы (см. (10.77)–(10.79))

$$\frac{dg_n}{d(\ln \mu)} = -b_n g_n^3, \quad (14.42)$$

где

$$b_n = (11n - 2N_F)/48\pi^2, \quad n \geq 2, \quad (14.43)$$

$$b_1 = -N_F/24\pi^2. \quad (14.44)$$

Следовательно,

$$b_n - b_1 = 11n/48\pi^2. \quad (14.45)$$

Мы здесь пренебрегли вкладом от хиггсовского скаляра. Здесь N_F — число кварковых ароматов ($N_F = 6$ в теории с тремя поколениями). Видно, что фермионы не влияют на относительную скорость эволюции константы связи. Полагая, что с $SU(3)$ -глюонами взаимодействуют только кварки, а с калибровочными $SU(2)$ - и $U(1)$ -бозонами — и кварки и лептоны, можно неожиданно обнаружить, что фермионы должны давать один и тот же вклад в перенормировки всех констант калибровочных взаимодействий. Мы несколько отвлечемся от темы и объясним эту ситуацию.

Фермионы дают вклад за счет однопетлевой диаграммы, показанной на рис. 14.3. Этот вклад пропорционален величине $F_n = N_m g_n^2 \text{tr}(T_i T_j)$, где N_m — число мультиплетов (двухкомпонентных) фермионов, взаимодействующих с калибровочными бозонами, а все генераторы одинаково нормированы условием $\text{tr}(T_i T_j) = 1/2 \delta_{ij}$. Запишем сначала значения множителя F_n для каждой калибровочной группы. Для группы $SU(3)$ N_m — число цветовых триплетов. Так как с глюонами взаимодействуют как

кварки, так и антикварки, то $N_m = 2N_F$ и $F_3 = N_F g_3^2 \delta_{\alpha\beta}$. Для группы $SU(2)$ N_m равно числу дублетов. Поскольку для каждого лептонного дублета имеются три цветовых кварковых дублета, $N_m = \frac{1}{2}(1 + 3)N_F$ и $F_2 = N_F g_2^2 \delta_{ab}$. В случае группы $U(1)$ непосредственное суммирование (квадратов) слабых гиперзарядов с должным изменением нормировки в соответствии с (14.40) также дает $F_1 = N_F g_1^2$. С точки зрения группы $SU(5)$ равенства $F_3 = F_2 = F_1$ не являются больше случайным фактом: все фермионы образуют (приводимое) представление группы $(5^* + 10)$, и генераторы каждой подгруппы в этом представлении нормированы одинаково. Кроме того, мы требуем, чтобы все члены этого представления приобретали сравнимые массы $\ll M_X$. Эту ситуацию можно противопоставить ситуации с калибровочными бозонами, в которой в конечном итоге мы имеем два различных массовых масштаба: $M_W \ll M_X$, хотя калибровочные бозоны принадлежат одному (присоединенному) представлению группы $SU(5)$. Такое расхождение в массах приводит к различным эффектам при перенормировках констант связи, соответствующих различным подгруппам.

Вернемся теперь к решениям уравнения (14.42). Для g_1 , g_2 и g_3 имеем

$$g_1^{-2}(\mu) = g_1^{-2}(\mu_0) + 2b_1 \ln(\mu/\mu_0), \quad (14.46)$$

$$g_2^{-2}(\mu) = g_2^{-2}(\mu_0) + 2b_2 \ln(\mu/\mu_0), \quad (14.47)$$

$$g_3^{-2}(\mu) = g_3^{-2}(\mu_0) + 2b_3 \ln(\mu/\mu_0). \quad (14.48)$$

Константы взаимодействия при низких энергиях можно выразить через известные параметры, если воспользоваться соотношениями (11.80) $\text{tg } \theta_W = g'/g$, (11.93) $e = g \sin \theta_W$ и (14.40):

$$g_1^2(\mu)/4\pi = (5/3) \alpha(\mu)/\cos^2 \theta_W, \quad (14.49)$$

$$g_2^2(\mu)/4\pi = \alpha(\mu)/\sin^2 \theta_W, \quad (14.50)$$

$$g_s^2(\mu)/4\pi \equiv \alpha_s(\mu). \quad (14.51)$$

Выражения (14.46) — (14.48) можно переписать в виде

$$\alpha_s^{-1}(\mu) = \alpha_s^{-1} + 8\pi b_3 \ln(\mu/M_X), \quad (14.52)$$

$$\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = \alpha_s^{-1} + 8\pi b_2 \ln(\mu/M_X), \quad (14.53)$$

$$(3/5) \alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = \alpha_s^{-1} + 8\pi b_1 \ln(\mu/M_X), \quad (14.54)$$

где мы использовали равенства (14.37):

$$g_1(M_X) = g_2(M_X) = g_3(M_X) = g_5, \quad g_5^2/4\pi = \alpha_5. \quad (14.55)$$

Взяв линейную комбинацию выражений $[2 \times (14.52) - 3 \times (14.53) + (14.54)]$, получим

$$2\alpha_s^{-1} - 3\alpha^{-1} \sin^2 \theta_W + (3/5)\alpha^{-1} \cos^2 \theta_W = \\ = 8\pi [2(b_3 - b_1) - 3(b_2 - b_1)] \ln(\mu/M_X) = 0. \quad (14.56)$$

Правая часть обращается в нуль в силу (14.43) — (14.45). Таким образом,

$$\sin^2 \theta_W = 1/6 + 5\alpha(\mu)/9\alpha_s(\mu). \quad (14.57)$$

Это условие согласованности, упомянутое в замечании В. Значения констант связи при $\mu = M_W$, где угол Вайнберга выбирается из экспериментов с нейтральными токами, согласуются с этим предсказанием.

Взяв линейную комбинацию выражений $[(8/3) \times (14.52) - (14.53) - (5/3) \times (14.54)]$, из (14.43) — (14.45) получим

$$\ln(M_X/\mu) = (\pi/11) \left[\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3\alpha_s(\mu)} \right]. \quad (14.58)$$

Это соотношение определяет масштаб объединения M_X . Кроме того, из (14.57) и (14.58) имеем

$$\sin^2 \theta_W = 3/8 - (55/24\pi)\alpha(\mu) \ln(M_X/\mu). \quad (14.59)$$

Следует отметить, что при вычислении постоянной b_n мы взяли самое простое пороговое поведение: промежуточную частицу с массой $m < \mu$ мы считали безмассовой, а в случае $m > \mu$ мы брали массу промежуточной частицы бесконечно большой, и эта частица не участвовала во взаимодействии. В частности, при $\mu > M_X$ калибровочные бозоны X и Y группы $SU(5)$ дают вклад, и равенства констант связи (14.37) имеют место во всех порядках теории возмущений. При $\mu < M_X$ они не участвуют во взаимодействии, и постоянные b_n становятся разными для подгрупп $SU(3)$, $SU(2)$ и $U(1)$. При более тщательном рассмотрении порогов можно на самом деле отождествить M_X с массой X -бозона. В выражениях (14.43) — (14.45) мы также пренебрегли вкладами от скалярных частиц. Если включить в рассмотрение хиггсовские скаляры модели Вайнберга — Салама и более детально исследовать эффекты более высоких порядков, то получим набор численных результатов в окрестности значений:

$$M_X \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ ГэВ}, \quad (14.60)$$

$$\sin^2 \theta_W \approx 0,21, \quad (14.61)$$

при выборе значений масштабного параметра КХД $\Lambda \approx 300 \text{ МэВ}$ (см. обзоры [250, 291]).

14.4. РАСПАД ПРОТОНА И БАРИОННАЯ АСИММЕТРИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Распад протона

Очень важным следствием теории великого объединения является несохранение барионного числа. Модель с группой $SU(5)$ обладает этим свойством, и из набора древесных диаграмм с X -бозонным обменом можно получить эффективный лагранжиан, описывающий распад протона.

Взаимодействия $(5^* + 10)$ -фермионов (ψ^i, χ_{ij}) с калибровочными полями, как обычно, можно определить через ковариантные производные. Используя матрицу калибровочных бозонов A (14.2), получаем

$$g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^T\psi + g\bar{\chi}\gamma^\mu \{A_\mu, \chi\} = -\sqrt{\frac{1}{2}} gW_\mu^+ (\bar{\nu}\gamma^\mu e + \bar{u}_\alpha\gamma^\mu d_\alpha) + \\ + \sqrt{\frac{1}{2}} gX_{\mu\alpha}^a [\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_\gamma^c\gamma^\mu q_{\beta a}\varepsilon^{ab}(\bar{q}_{ab}\gamma^\mu e^+ - \bar{l}_b\gamma^\mu d_\alpha^c)] + \dots, \quad (14.62)$$

где все фермионы являются левыми, а g — калибровочная константа связи $SU(5)$ -модели. Дублетами $SU(2)$ являются

$$X_{\alpha a} = (X_\alpha, Y_\alpha), \quad (14.63)$$

$$q_{\alpha a} = (u_\alpha, d_\alpha), \quad (14.64)$$

$$l_\alpha = (\nu_e, e); \quad (14.65)$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и ε_{ab} — полностью антисимметричные тензоры. Следует еще раз напомнить, что мы пользуемся приближением одного фермионного поколения. Если включить в рассмотрение другие фермионные поколения (все в представлениях $5^* + 10$), то фермионные поля в (14.62), (14.64) и (14.65) заменятся на соответствующие линейные комбинации фермионов, обладающих одинаковыми $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -зарядами. Более подробное обсуждение углов смешивания и фаз CP -нарушения мы отложим до следующего раздела; пока достаточно иметь в виду только сам факт их возможного присутствия.

Важно отметить, что взаимодействие X -бозонов с фермионами происходит по двум каналам с различными барионными числами (рис. 14.4). В одном случае они взаимодействуют с кварками и лептонами ($B_1 = 1/3$); в этом случае их называют *лептокварками*. В другом случае они преобразуют кварки в антикварки ($B_2 = 2/3$) и поэтому их называют *дикварками*. Следовательно, за счет обмена X -бозонами канал $B = -1/3$ может превратиться в канал $B = 2/3$, т. е. на древесном уровне возникает процесс с изменением барионного числа ($\Delta B = 1$), показанный на рис. 14.5.

Так как масса M_X велика (по сравнению с массами всех фермионов), из (14.62) можно вывести эффективное четырехфер-

мионное локальное взаимодействие

$$\mathcal{L}_{\Delta B=1} = (g^2/2M_X^2) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{ab} (\bar{u}_\gamma^c \gamma^\mu q_{\beta a}) (\bar{d}_\alpha^c \gamma_\mu l_b + \bar{e}^+ \gamma_\mu q_{ab}). \quad (14.66)$$

Отметим следующие свойства этого эффективного лагранжиана с $\Delta B = 1$:

1. $\Delta(B-L) = 0$. Разность барионного и лептонного чисел сохраняется; таким образом, процесс $p \rightarrow e^+ \pi^0$ разрешен, а процесс $n \rightarrow e^- \pi^+$ и т. д. запрещен.

2. $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -инвариантность. Все индексы цветов и ароматов в выражении (14.66) свернуты, и электрический заряд сохраняется. Это действительно должно иметь место, так как мы рассматриваем только один массовый масштаб (т. е. M_X), считая все другие частицы, включая W - и Z -бозоны, безмассовыми.

Это означает, что независимо от того, верна или нет $SU(5)$ -модель, при построении доминантной ($\Delta B = 1$)-амплитуды в самом общем виде мы должны включить в рассмотрение все $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -симметричные операторы низшей размерности [414, 425]. Низшая размерность равна шести, как в выражении (14.66), а операторы более высокой размерности будут с необходимостью подавляться дополнительными степенями M_X в знаменателе. Таким образом, эта процедура представляет собой расширенный вариант той схемы, которую Ферми использовал для построения эффективной амплитуды β -распада, где необходимо было накладывать только требование сохранения глобального $U(1)$ -заряда. Оказывается, что если мы ограничимся фермионами с хорошо известными квантовыми числами для группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, как в (14.4), то полный список таких шестимерных операторов будет довольно коротким. (Многие из них связаны тождествами Фирца.) Если проверить этот

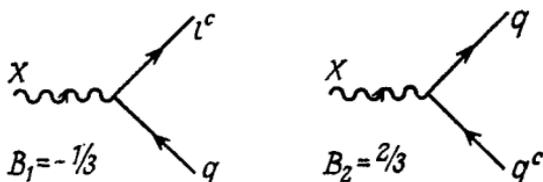


Рис. 14.4. Бозоны X как лептокварки и дикварки.

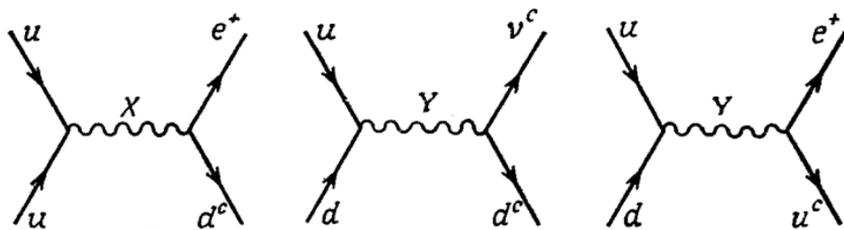


Рис. 14.5. Процессы с нарушением барионного числа в диаграммах низшего порядка, соответствующих обмену X - и Y -бозонами.

список, то можно обнаружить, что для общей амплитуды будет по-прежнему выполняться правило отбора $\Delta(B - L) = 0$. На самом деле, как мы увидим в следующем разделе, в минимальном варианте $SU(5)$ -модели с хиггсовским мультиплетом в представлении $5 + 24$ сохранение $B - L$ является точной глобальной симметрией модели. Следовательно, она имеет место во всех порядках теории возмущений.

Мы также сделаем замечание в скобках о том, что четырехфермионный эффективный лагранжиан в (14.66) в случае протонного распада содержит правило $\Delta S \leq 0$. Когда рассматривается и второе фермионное поколение, конечное состояние d^c на рис. 14.5 необходимо заменить на состояния d^c и s^c , повернутые на угол Кабиббо. Поэтому становится разрешенным распад $p \rightarrow e^+ K^0$, но не распады $p \rightarrow e^+ \bar{K}^0$ и т. д. Это правило отбора является всего лишь следствием простой кварковой модели, так как оператор низшей размерности с $\Delta B = 1$ имеет три кварковых поля, а у странного кварка $S = -1$.

Чтобы найти время жизни протона и скорости распада из лагранжиана $\mathcal{L}_{\Delta B=1}$ (14.66) с углами смешивания минимальной $SU(5)$ -модели, необходимо провести дополнительно два этапа вычислений.

А. Эффективный лагранжиан записан при массовом масштабе M_X , и его нужно перенормировать до характерного адронного масштаба $O(1 \text{ ГэВ})$. Лидирующие логарифмические радиационные поправки к $\mathcal{L}_{\Delta B=1}$, возникающие из-за обмена калибровочными $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -бозонами, можно оценить, воспользовавшись стандартной техникой ренормгруппы, которая обсуждалась в гл. 3. (Пример таких вычислений можно найти в следующем разделе.) Это дает фактор усиления амплитуды, приближенно равный четырем [63].

Б. Распады протона и связанного нейтрона можно рассматривать как процессы, описываемые четырехфермионным взаимодействием (14.66), где конечный антикварк, объединяясь с кварком-спектатором из начального нуклона, образует конечную мезонную систему. Для вычисления матричных элементов $\mathcal{L}_{\Delta B=1}$ между адронными состояниями использовались различные феноменологические модели адронной физики: $SU(6)$ -модель, релятивистские модели мешков и т. д. (см. обзор [250]). К сожалению, в полученных таким образом результатах имеются значительные расхождения — значения амплитуды могут различаться в 5 раз. Однако большинство модельных вычислений указывает на то, что в минимальной $SU(5)$ -модели должны существовать двухчастичные или квазидвухчастичные каналы распада нуклона, которые сравнительно просто детектировать:

$$p \rightarrow e^+ \pi^0, e^+ \omega, \bar{\nu} \pi^+ \quad \text{и т. д.},$$

$$n \rightarrow e^+ \pi^-, \bar{\nu} \pi^0, e^+ \rho^- \quad \text{и т. д.}$$

Время жизни протона τ_N , предсказываемое моделью, несомненно очень чувствительно к тому, насколько однозначно мы определяем M_X , так как $\tau_N \sim M_X^4$. Поскольку масса M_X непосредственно связана с параметром КХД Λ , значение которого пока не установлено, следует иметь в виду, что приведенное значение $\tau_N \approx 10^{30}$ лет в $SU(5)$ -модели, вероятно, определено с точностью до множителя $10^{\pm 2}$.

Барионная асимметрия Вселенной

В остальной части этого раздела мы кратко обсудим вопрос о том, как теория великого объединения, предсказывающая распад протона, может объяснить, почему Вселенная, по-видимому, не содержит больших концентраций антиматерии [110, 393, 413, 440]. Такая космологическая асимметрия между материей (барионами) и антиматерией (антибарионами) является загадкой даже на уровне $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -модели. Не существует космологической модели, в которой было бы возможно *рождение* одних только барионов, если все ответственные за это физические процессы сохраняют барионное число. До того как стала рассматриваться ТВО, в стандартных космологических моделях асимметричные начальные граничные условия накладывались заранее (см. соотношение (14.68)), и многие считают это неудовлетворительным.

В разд. 13.2 мы уже отмечали в связи с обсуждением космологических ограничений на массы нейтрино, что стандартная космологическая модель приводит к весьма удовлетворительной картине, которая объясняет различные результаты наблюдений. В частности, наблюдаемое фоновое излучение черного тела с температурой 2,7 К согласуется с вычислениями количества первичного гелия по теории нуклеосинтеза.

Однако стандартная модель, включающая только взаимодействия, сохраняющие барионное число, не фиксирует отношение плотности числа фотонов n_γ (соответствующей температуре 2,7 К) к наблюдаемой плотности числа нуклонов n_N . Мы должны искусственно ввести в качестве начального условия значение

$$\frac{n_N}{n_\gamma} \approx 10^{-9}. \quad (14.67)$$

Когда Вселенная была достаточно горячей, чтобы барионы (кварки) и антибарионы (антикварки) могли благодаря излучению свободно рождаться парами, указанное выше соотношение приводило к барионной асимметрии:

$$\delta = \frac{n_q - n_{q^c}}{n_q + n_{q^c}} \approx 10^{-9}, \quad (14.68)$$

где n_q и n_{q^c} — плотности чисел кварков и антикварков соответственно.

Почему должна существовать такая асимметрия с таким значением δ ? Более удовлетворительной представляется картина, в которой Вселенная, будучи в начальный момент в симметричном состоянии (или лучше независимо от начальных условий), приобрела бы барионную асимметрию благодаря основным физическим взаимодействиям. Чтобы иметь такую ситуацию, необходимо постулировать существование нового взаимодействия частиц, отличного от тех, которые присутствуют в $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -модели. Кроме того, новое взаимодействие, которое изменяет барионное число, должно также обладать следующими общими свойствами: 1) оно должно нарушать C - и CP -инвариантности; 2) из его существования должно следовать, что во время космологического расширения Вселенной был период, когда процессы, нарушающие B -, C - и CP -инвариантности, носили термодинамически неравновесный характер [342]. Ясно, что CP -симметрия и симметрия относительно зарядового сопряжения автоматически не допускают существование значения δ , определенного в (14.68), отличного от нуля, так как соответствующие этим симметриям преобразования переставляют местами n_q и n_{q^c} . Необходимость отсутствия равновесия кажется менее очевидной.

Это можно понять эвристически, если вспомнить, что из требования CPT -инвариантности следует, что состояния частиц и античастиц должны обладать одной и той же массой и, следовательно, иметь одинаковый вес в больцмановском распределении. Таким образом, никакое CPT -инвариантное взаимодействие не может привести в состоянии термодинамического равновесия к ненулевому значению δ .

Теории великого объединения, такие, как $SU(5)$ -модель, обладают требуемыми свойствами, приводящими к ненулевому значению δ . В их рамках имеются процессы, нарушающие B -, C - и CP -инвариантности, связанные с взаимодействиями с X -бозонами (а также с хиггсовскими частицами), которые выводятся из равновесия благодаря космологическому расширению.

Чтобы показать, как это может происходить, необходимо сначала вычислить скорости различных реакций как функции энергии (т. е. температуры). Критерием термодинамического равновесия является требование, чтобы скорость реакции была больше скорости расширения Вселенной. Оказывается, что при двухчастичных соударениях, показанных на рис. 14.5, требуемый переход из равновесного состояния в неравновесное невозможен. Но распады и обратные распады тяжелого X -бозона обладают такими переходами, так как они имеют порог. При $kT > M_X$ X -бозоны должны существовать в термодинамическом равновесии, и их количество должно быть сравнимо с количеством

обычных частиц (например, $N_X \approx N_Y$). Эта смесь X - и X^c -бозонов распадается с нарушением B - и CP -инвариантностей. А это приводит к преимущественному рождению кварков по сравнению с антикварками (см. обсуждение ниже). В обычных условиях возникающий при этом избыток барионов в конце концов сводился бы на нет за счет обратных распадов. Но когда Вселенная охладится до температур, соответствующих $kT < M_X$,

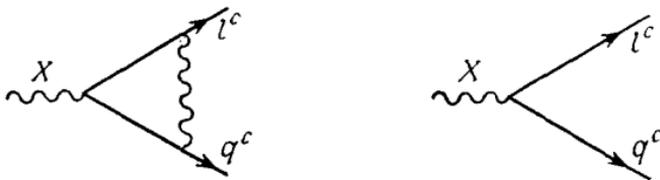


Рис. 14.6. Ненулевой вклад в $\gamma_1 - \gamma_1^c$ может дать этот интерференционный эффект четвертого порядка.

число X -бозонов (и обратных распадов) подавляется больцмановским фактором $\exp(-M_X/kT)$. Рождение барионов практически прекращается, и избыток барионов, возникший на раннем этапе, «замораживается».

Как мы уже отмечали, имеются два класса каналов распада X -бозона с различными барионными числами $B_1 = -1/3$ и $B_2 = 2/3$. Поэтому мы имеем следующие четыре ширины распада X -бозона и его античастицы X^c :

$$\gamma_1 \equiv \Gamma(X \rightarrow l^c q^c), \quad \text{где } B_1 = -1/3, \quad (14.69)$$

$$\gamma_2 \equiv \Gamma(X \rightarrow qq), \quad \text{где } B_2 = 2/3, \quad (14.70)$$

$$\gamma_1^c \equiv \Gamma(X^c \rightarrow lq), \quad \text{где } B_1' = 1/3, \quad (14.71)$$

$$\gamma_2^c \equiv \Gamma(X^c \rightarrow q^c q^c), \quad \text{где } B_2' = -2/3. \quad (14.72)$$

CPT -инвариантность требует, чтобы полные ширины распада были одинаковыми для частиц и античастиц, т. е.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1^c + \gamma_2^c. \quad (14.73)$$

Но из теоремы CPT следует, что $\gamma_1 = \gamma_1^c$ и $\gamma_2 = \gamma_2^c$ только в борновском приближении. В случае наличия взаимодействий, нарушающих C - и CP -инвариантности, интерферирующие члены более высокого порядка, такие, как приведенные на рис. 14.6, могут приводить к тому, что

$$\gamma_1 - \gamma_1^c = \gamma_2^c - \gamma_2 \neq 0. \quad (14.74)$$

Следовательно, в неравновесной ситуации в продуктах распада X и X^c , находящихся сначала в смеси в равном количестве, будет избыток барионов:

$$\delta \sim \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_1^c B_1' + \gamma_2^c B_2' = (\gamma_1 - \gamma_1^c)(B_1 - B_2). \quad (14.75)$$

Это явно отражает тот факт, что ненулевое значение δ связано с нарушением B -, C - и CP -инвариантностей; оно должно быть малым, так как $\gamma_1 - \gamma_1^c$ с необходимостью является членом высшего порядка (и возможно, умножается на некоторую малую CP -фазу). В самом деле, в минимальной $SU(5)$ -модели (см. следующий раздел) в разность $\gamma_1 - \gamma_1^c$ дает нетривиальный вклад только член десятого порядка теории возмущений, что приводит к значению δ , на много порядков меньшему, чем наблюдаемая асимметрия 10^{-9} . Чтобы исправить эту ситуацию, предлагалось много различных моделей. Дальнейшее развитие в этом направлении, возможно, преждевременно, так как на данном этапе результаты количественных вычислений δ все еще неопределенны. Ясно, что такие ТВО, как $SU(5)$ -модель, обладают качественно правильными свойствами, которые могут в рамках стандартной космологической модели дать естественное объяснение наблюдаемой барионной асимметрии Вселенной.

14.5. МАССЫ ФЕРМИОНОВ И УГЛЫ СМЕШИВАНИЯ В МИНИМАЛЬНОЙ $SU(5)$ -МОДЕЛИ

Изучая модель Вайнберга — Салама в разд. 11.3, мы установили, что, когда имеется несколько частиц с одинаковым зарядом, собственные состояния их массовой матрицы, вообще говоря, отличаются от собственных состояний полей, обладающих определенными квантовыми числами калибровочного взаимодействия. Массовые собственные состояния связаны с собственными состояниями калибровочного взаимодействия некоторым унитарным преобразованием.

В настоящем разделе мы рассмотрим включение в теорию всех трех фермионных поколений представления $5^* + 10$. Фермионные поля, используемые в предыдущих разделах этой главы, должны быть заменены на калибровочные собственные состояния, которые являются векторами в трехмерном пространстве индекса поколения $A = e, \mu, \tau$:

$$\begin{aligned} e &\rightarrow e'_A = \delta_{AB} e_B, & e_B &= (e, \mu, \tau), \\ \nu_e &\rightarrow \nu'_A = T_{AB}^+ \nu_B, & \nu_B &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \\ u &\rightarrow p'_A = U_{AB}^+ p_B, & p_B &= (u, c, t), \\ d &\rightarrow n'_A = V_{AB}^+ n_B, & n_B &= (d, s, b). \end{aligned} \tag{14.76}$$

Мы выбрали базис так, чтобы калибровочные собственные состояния заряженных лептонов e'_A совпадали с их массовыми собственными состояниями e_A . Для безмассовых нейтрино в качестве их массовых собственных состояний можно взять любую комбинацию вырожденных полей; следовательно, матрицу T_{AB}

тоже можно положить равной δ_{AB} . Поскольку массовые матрицы не обязательно являются симметричными, унитарные преобразования U_{AB} и V_{AB} могут быть различными для левых и правых фермионных полей. Если вспомнить, что в этой главе мы имеем дело только с левыми фермионами, то это означает, что мы должны различать преобразования для частиц и античастиц. Таким образом, к (14.76) мы должны добавить

$$u^c \rightarrow p'_A = U_{AB}^{c\dagger} p_B^c, \quad p_B^c = (u^c, c^c, t^c), \quad (14.77)$$

$$d^c \rightarrow n'_A = V_{AB}^{c\dagger} n_B^c, \quad n_B^c = (d^c, s^c, b^c), \quad (14.78)$$

и вообще $U_{AB} \neq U_{AB}^c$ и $V_{AB} \neq V_{AB}^c$.

Гипотеза родства

Хотя «поколение» — понятие, хорошо определенное в терминах калибровочных собственных состояний, исторически мы интуитивно группировали фермионы, рассматривая их как массовые собственные состояния:

e -поколение: (e, ν_1, d, u) ,

μ -поколение: (μ, ν_2, s, c) , (14.79)

τ -поколение: (τ, ν_3, b, l) ,

причем каждое последующее поколение стоит выше предыдущего на шкале масс. Кроме того, эта схема разбиения на группы подкрепляется нашими сведениями о слабом взаимодействии в том смысле, что переходы, связанные с заряженными токами, между различными поколениями подавляются благодаря малым углам смешивания (12.47). Возникает естественный вопрос, можно ли это свойство обобщить на случай ТВО, в которой имеются новые токи, взаимодействующие с калибровочными X -бозонами и изменяющие ароматы кварков? Справедлива ли по-прежнему наблюдаемая при низких энергиях структура поколений (14.79) в $SU(5)$ -моделях? Чтобы привлечь внимание к этой проблеме, ее обобщают в виде так называемой «гипотезы родства». А именно, предполагают, что *все* переходы между поколениями подавлены за счет соответствующих малых углов смешивания. Например, гипотеза родства говорит о том, что процессы, происходящие с изменением барионного числа, такие, как $u \rightarrow \tau^+$ или b^c , подавлены по отношению к процессам $u \rightarrow e^+$ или d^c и т. д. Это, конечно, имеет важное значение при анализе распада протона. Сильное нарушение этой гипотезы резко уменьшает ширины распада и изменяет отношения ширины для различных каналов.

Калибровочные $SU(5)$ -взаимодействия в (14.62) могут быть записаны в соответствии с (14.76), (14.77) и (14.78) через калиб-

ровочные собственные состояния:

$$\mathcal{W} (\bar{\nu}'_A e'_A + \bar{p}'_A n'_A) + X (p'_A p'_A + \bar{n}'_A e'^+_A + \bar{e}'_A n'^c_A) + Y (\bar{p}'_A n'_A + \bar{p}'_A e'^+_A + \bar{\nu}'_A n'^c_A), \quad (14.80)$$

где мы опустили все индексы, за исключением индекса поколения A . Выражая эти взаимодействия через массовые собственные состояния, имеем

$$\mathcal{W} [\bar{\nu}_A e_A + \bar{p}_A (UV^\dagger)_{AB} n_B] + X [\bar{p}_A (U^c U^\dagger)_{AB} p_B + \bar{n}_A (V)_{AB} e_B^+ + \bar{e}_A (V^{c\dagger})_{AB} n_B^c] + Y [\bar{p}_A (U^c V^\dagger)_{AB} n_B + \bar{p}_A (U)_{AB} e_B^+ + \bar{\nu}_A (V^{c\dagger})_{AB} n_B^c]. \quad (14.81)$$

Матрица поворотов КМ (11.124) представляет собой комбинацию (UV^\dagger) . Ясно, что шесть других матриц поворотов, входящих в выражения для взаимодействий с калибровочными X - и Y -бозонами, не имеют такого вида. Следовательно, в принципе в этих новых вершинах взаимодействий мы можем найти сильно различающиеся между собой углы смешивания. В результате гипотеза родства может не быть справедливой. Однако ниже мы покажем, что в случае $SU(5)$ -модели с простейшей возможной хиггсовской структурой, т. е. минимальной $SU(5)$ -модели, эти новые смешивания по существу сводятся к хорошо знакомым матрицам поворотов КМ.

Пусть фермионы принадлежат представлению $5^* + 10$; тогда скаляры, которые могут участвовать в юкавском взаимодействии, должны принадлежать представлениям

$$\begin{aligned} 5^* \times 5^* &= 10^* + 15, \\ 10 \times 10 &= 5^* + 45^* + 50, \\ 5^* \times 10 &= 5 + 45. \end{aligned} \quad (14.82)$$

Непосредственной проверкой можно установить, что только представления 5 и 45 обладают компонентами, преобразующимися по представлениям $(1, 2)$ подгруппы $SU(3) \times SU(2)$. В минимальной $SU(5)$ -модели хиггсовские скаляры существуют только в представлениях 24 и 5 , причем в представлении 5 имеет место нарушение симметрии $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$, и фермионы приобретают массы.

Мы имеем следующие юкавские взаимодействия:

$$f_{AB}^{(1)} (\chi_{Aij})^T C (\chi_{Bkl}) \phi^m \varepsilon^{ijklm} + f_{AB}^{(2)} (\chi_{Aij})^T C \psi_B^i \phi^{j\dagger} + \text{эрмит. сопр.}, \quad (14.83)$$

где C — дираковская матрица зарядового сопряжения. Тогда из антикоммутиации фермионных полей и антисимметрии матриц

$S = i\gamma^2\gamma^0$ следует, что матрица $f_{AB}^{(1)}$ юкавских констант взаимодействия симметрична. Когда скаляр ϕ из представления 5 приобретает, как и в (14.34), отличное от нуля вакуумное среднее:

$$\langle\phi\rangle = (0, 0, 0, 0, v_2), \quad (14.84)$$

взаимодействия (14.83) приводят к членам, квадратичным по фермионным полям:

$$v_2 f_{AB}^{(1)} (\bar{p}_A p_B) + v_2 f_{AB}^{(2)} (\bar{n}_A n_B + \bar{e}_A e_B). \quad (14.85)$$

Массовые матрицы для состояний p , n и e обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} v_2 f_{AB}^{(1)} &= M_{AB}^{(p)} = M_{BA}^{(p)}, \\ v_2 f_{AB}^{(2)} &= M_{AB}^{(n)} = M_{AB}^{(e)}. \end{aligned} \quad (14.86)$$

Симметричность массовой матрицы p -кварка приводит к тому, что матрица $U^\dagger U^c$ диагональна и унитарна (см. (11.109)). Равенство $M^{(n)} = M^{(e)}$ является следствием $SU(4)$ -симметрии вакуумного среднего (14.84). Отсюда следует, что для диагонализации матриц $M^{(n)}$ и $M^{(e)}$ необходимо одно и то же двойное унитарное преобразование. Так как для заряженных лептонов мы выбрали калибровочные собственные состояния, матрицы V и V^c можно взять единичными. Таким образом, с точностью до комплексной матрицы с определителем, равным единице, все матрицы углов смешивания в (14.81) имеют вид (UV^\dagger) , т. е. являются не чем иным, как матрицами поворотов КМ в теории слабых взаимодействий. В минимальной $SU(5)$ -модели гипотеза родства полностью реализуется.

Связь между массами лептонов и кварков

Имеются ли какие-нибудь указания в пользу минимального варианта $SU(5)$ -теории?

Из равенства $M^{(n)} = M^{(e)}$ следует [176]

$$m_e = m_d, \quad m_\mu = m_s, \quad m_\tau = m_b. \quad (14.87)$$

Снова, как в случае равенства констант связи (14.37), имеются определенные соотношения, основанные на $SU(5)$ -симметрии, которые нужно дополнить, учитывая существенные перенормировочные поправки.

Вычисления собственной энергии фермиона по теории возмущений дают

$$m(\mu) = m - m g_n^2 b_m^{(n)} \ln(\Lambda/\mu). \quad (14.88)$$

Таким образом, уравнение ренормгруппы для эффективной массы имеет вид

$$\frac{d \ln m(\mu)}{d \ln \mu} = b_m^{(n)} g_n^2(\mu). \quad (14.89)$$

Это дифференциальное уравнение можно проинтегрировать, так как мы знаем из (10.80) зависимость константы связи от мас-

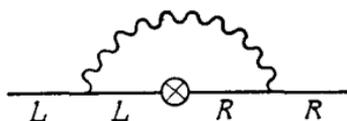


Рис. 14.7. Диаграмма собственной энергии фермионов.

штабного параметра:

$$g_n^2(\mu) = \frac{g_n^2(\mu_0)}{1 + 2b_n g_n^2(\mu_0) \ln(\mu/\mu_0)}, \quad (14.90)$$

которая, очевидно, является решением (14.42):

$$\frac{dg_n^2(\mu)}{d \ln \mu} = -2b_n g_n^4(\mu). \quad (14.91)$$

В результате получаем

$$\frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} = \left[\frac{g_n(\mu)}{g_n(\mu_0)} \right]^{-b_m^{(n)}/b_n}, \quad (14.92)$$

где константы b_n даны в (14.43). Вычислим теперь $b_m^{(n)}$, используя рис. 14.7:

$$b_m^{(n)} = -\frac{3}{8\pi^2} \sum_a (T^a T^a)_{ij}, \quad (14.93)$$

где T^a — матрицы представления, выбранного для фермионов. Для $SU(n)$ при $n \geq 2$ имеем

$$\sum_a (T^a T^a)_{ij} = \frac{n^2 - 1}{2n} \delta_{ij}, \quad (14.94)$$

а в случае $U(1)$ (уравнение (14.40))

$$(T^0)^2 = \frac{3}{5} \left(\frac{Y}{2} \right)^2. \quad (14.95)$$

Используя выражения для b_n (14.43) и (14.44), получаем

$$\frac{m_p(\mu)}{m_p(\mu_0)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{-6}{10N_F}}, \quad (14.96)$$

$$\frac{m_n(\mu)}{m_n(\mu_0)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{3}{10N_F}}, \quad (14.97)$$

$$\frac{m_e(\mu)}{m_e(\mu_0)} = \left[\frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right]^{\frac{-27}{10N_F}}, \quad (14.98)$$

где N_F — число кварковых ароматов. Заметим, что калибровочные $SU(2)$ -бозоны не дают вклада, так как все правые фермионы являются синглетами относительно $SU(2)$ и диаграмма на рис. 14.7 описывает однократное изменение спиральности на противоположную. Деля (14.97) на (14.98) и используя (14.87) ($m_n(M_X) = m_e(M_X)$), получаем (с учетом того, что $g_3(M_X) = g_1(M_X) = g_5(M_X)$)

$$\frac{m_n(\mu)}{m_e(\mu)} = \left[\frac{g_3(\mu)}{g_5(M_X)} \right]^{\frac{8}{11-2N_F/3}} \left[\frac{g_1(\mu)}{g_5(M_X)} \right]^{\frac{3}{N_F}}. \quad (14.99)$$

Если взять эффективную токовую массу кварков на пороге рождения

$$\mu = \mu_{th} \equiv 2m_q(\mu_{th}), \quad (14.100)$$

то для $n_3 = b$, $e_3 = \tau$ и $\mu \approx 10$ ГэВ получим

$$\frac{m_b}{m_\tau} \approx 3, \quad (14.101)$$

что должно рассматриваться как успешное предсказание теории [63].

Неясно, как правильно вычислить перенормировочные эффекты для более легких фермионов, так как для этого нужно рассматривать меньшие значения масштабного параметра μ . Но если мы просто рассмотрим инвариантное относительно ренорм-группы отношение, следующее из (14.87),

$$\frac{m_\mu}{m_e} = \frac{m_s}{m_d}, \quad (14.102)$$

то увидим, что обе стороны отличаются друг от друга на множитель порядка 10, так как из вычислений, основанных на алгебре токов, следует, что $m_s/m_d \approx 20$. Говорит ли эта «неудача» с определенностью о том, что минимальная $SU(5)$ -модель не является жизнеспособной? Такое сильное утверждение нельзя считать обоснованным, так как для очень легкого d -кварка ($m_d \approx \approx 7$ МэВ) уравнения ренормгруппы, по-видимому, не выполняются. Таким образом, вопрос о правильности минимальной $SU(5)$ -модели по-прежнему остается открытым.

Сохранение $B - L$

Мы завершим этот раздел замечанием о другом аспекте минимальной $SU(5)$ -модели; она все еще обладает глобальной $U(1)$ -симметрией, соответствующей сохранению разности барионного и лептонного чисел $B - L$ [426]. Ясно, что калибровочные бозоны X и Y сохраняют $B - L$, если мы припишем им квантовое число $B - L = 2/3$. Необходимо проверить, что юкав-

ские взаимодействия (14.83) обладают этой симметрией, и при спонтанном нарушении симметрии (14.84) она не исчезает.

Выражение (14.83) можно символически записать в виде

$$f^{(1)}(10_f)(10_f)(5_\phi) + f^{(2)}(10_f)(5_f^*)(5_\phi^*). \quad (14.103)$$

Легко проверить, что новый заряд (назовем его F) сохраняется. Из первого члена следует

$$F(5_\phi) = -2F(10_f), \quad (14.104)$$

а из второго —

$$F(5_f) = 3F(10_f). \quad (14.105)$$

Это означает, что сохраняющийся $U(1)$ -заряд может быть записан через операторы числа частиц:

$$F = (1/5)[N(10_f) + 3N(5_f) - 2N(5_\phi)]. \quad (14.106)$$

Множитель $1/5$ соответствует общепринятой нормировке. Ясно, что $\langle \phi \rangle$ в (14.84) не инвариантно относительно $U(1)$ -преобразований, генерируемых как F -зарядом (14.106), так и слабым гиперзарядом, так как ни

$$F(5_\phi) = -2/5 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

ни

$$Y(5_\phi) = \begin{bmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (14.107)$$

не уничтожают вектор в (14.84). Но линейная комбинация $F' = F + 2/5 Y$ обладает тем свойством, что $F'(5_\phi)\langle \phi \rangle = 0$, поэтому сохраняется после спонтанного нарушения симметрии. Заметим, что F' есть не что иное, как $B - L$, поскольку

$$F'(5_f) = \begin{bmatrix} 1/3 & & & & \\ & 1/3 & & & \\ & & 1/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (14.108)$$

Именно потому, что B и L являются случайными глобальными симметриями стандартной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -модели, в минимальной $SU(5)$ -модели симметрии B и L нарушены и остается только $(B - L)$ -симметрия.

Современная теория магнитных зарядов впервые была сформулирована Дираком более 50 лет назад. С тех пор проводятся активные экспериментальные исследования с целью их обнаружения. Замечательным свойством неабелевой калибровочной теории является существование в ней объектов, обладающих свойствами магнитных монополей [327, 387]. Предполагается, что монополи, связанные со спонтанным нарушением симметрии в калибровочных теориях великого объединения, должны быть сверхтяжелыми ($\sim 10^{16}$ ГэВ?) и поэтому могли не регистрироваться детекторами. Недавнее значительное расширение исследований по поиску магнитных монополей было вызвано опытом Кабреры [66], который интерпретировал полученные им результаты как свидетельство существования монополей. Но если даже это первое возможное наблюдение монополей не подтвердится в других экспериментах, теоретические исследования монополей должны привести к более глубокому пониманию структуры неабелевых калибровочных теорий со спонтанным нарушением симметрии.

В этой главе мы даем краткое введение в калибровочную теорию магнитных монополей. В разд. 15.1 рассматриваются свойства монополей, предложенных первоначально Дираком [112]. Затем в разд. 15.2 обсуждаются общие свойства решений уравнений движения с конечной энергией (солитонов) в теории поля. В разд. 15.3 мы иллюстрируем некоторые свойства монополя т'Хофта — Полякова в неабелевых калибровочных теориях, являющегося в определенном смысле синтезом монополя Дирака и солитонного решения. Следует подчеркнуть, что наше обсуждение проводится на элементарном уровне, и мы часто жертвуем математической строгостью ради простоты изложения. В качестве прекрасных обзоров по этому предмету читателю рекомендуются работы [93, 95, 191].

15.1. ДИРАКОВСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ

В этом разделе рассматриваются свойства магнитных монополей в том виде, в котором они первоначально были введены Дираком. (Более подробное изложение дано в работе [191].)

Классический электромагнетизм и преобразования дуальности

Начнем с классического электромагнетизма, прекрасно описываемого уравнениями Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \partial_0 \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (15.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{B} = 0. \quad (15.2)$$

Эти уравнения можно записать в ковариантной форме, используя тензор электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu, \quad (15.3)$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (15.4)$$

где

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}), \quad F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k, \quad (15.5)$$

а дуальный тензор определяется как

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (15.6)$$

В вакууме, где $j_\mu = 0$, уравнения Максвелла (15.3) и (15.4) симметричны относительно преобразования дуальности

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu}, \quad (15.7)$$

которое соответствует перестановке местами электричества и магнетизма: $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$. Присутствие электрического тока j_μ в уравнении (15.3) нарушает эту симметрию. Можно ввести магнитный ток $k^\mu = (\sigma, \mathbf{k})$ в правую часть (15.4), так что модифицированные уравнения Максвелла примут вид

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = -j_\mu, \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = -k^\mu. \quad (15.8)$$

Эти уравнения симметричны относительно дуального преобразования (15.7), дополненного подстановками

$$j^\mu \rightarrow k^\mu, \quad k^\mu \rightarrow -j^\mu. \quad (15.9)$$

Таким образом, (F, \tilde{F}) , (E, B) и (j, k) — «дуальные векторы» в некоторых двумерных плоскостях, а преобразования дуальности — повороты (на 90°) в этих плоскостях. (Рассмотренные преобразования дуальности полезны при переводе результатов хорошо знакомой теории электромагнетизма с электрическими зарядами на язык теории, в которой существуют магнитные заряды.) Введение магнитного тока k^μ обуславливает существование магнитно заряженных частиц — *магнитных монополей*. По аналогии с электрическим током, создаваемым точечными заря-

дами q_i , находящимися в точках x_i ,

$$j^\mu(x) = \sum_i q_i \int dx_i^\mu \delta^4(x - x_i), \quad (15.10a)$$

магнитный ток, создаваемый точечными магнитными зарядами g_i , дается выражением

$$k^\mu(x) = \sum_i g_i \int dx_i^\mu \delta^4(x - x_i), \quad (15.10б)$$

причем интегралы в (15.10a) и (15.10б) берутся вдоль мировых линий частиц.

Монополь в квантовой теории

Казалось бы, на классическом уровне магнитный монополь можно рассматривать на тех же основаниях, что и электрически заряженную частицу, и представляется загадочным, что магнитные монополи не наблюдаются в лаборатории. На квантовом уровне, как впервые было установлено Дираком, существование монополя приводит к условию

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{1}{2} n, \quad \text{где } n \text{ — целое число.} \quad (15.11)$$

Это — знаменитое условие квантования Дирака, означающее *квантование заряда*, т. е. устанавливающее, что возможное значение электрического заряда любой частицы является целым кратным некоторого основного заряда (ср. с обсуждением в разд. 14.1). Это можно показать следующим образом. Рассмотрим случай, когда частицы могут нести либо электрический, либо магнитный заряды, но не оба одновременно. Возможные значения электрического и магнитного зарядов обозначим через q_i и g_i соответственно. Условие квантования Дирака (15.11) означает, что

$$\frac{q_i g_j}{4\pi} = \frac{1}{2} n_{ij},$$

где n_{ij} — целое число. Тогда при любом фиксированном значении магнитного заряда g_j каждый электрический заряд q_i должен быть равен произведению целого числа на $2\pi/g_j$. Аналогично при любом фиксированном электрическом заряде q_i каждый магнитный заряд должен быть равен произведению целого числа на $2\pi/q_i$. Если теперь предположить, что существуют наименьший электрический заряд q_0 и наименьший магнитный заряд g_0 , то

$$q_i = n_i q_0, \quad (15.12)$$

$$g_i = n'_i g_0, \quad (15.13)$$

$$\frac{q_0 g_0}{4\pi} = \frac{1}{2} n_0, \quad (15.14)$$

где n_i , n'_i и n_0 — целые числа. Из условия (15.14) следует также, что взаимодействие между двумя магнитными монополями, пропорциональное

$$g_0^2 \sim q_0^2 \frac{n_0^2}{4} \left(\frac{4\pi}{q_0^2} \right)^2 \sim (n_0/2\alpha)^2 q_0^2, \quad (15.15)$$

в $\alpha^{-2} \sim 10^4$ раз сильнее взаимодействия между электрически заряженными частицами. Другими словами, малость константы взаимодействия, соответствующей электрическим зарядам, $q_0^2/4\pi \sim \alpha \sim 1/137$, приводит к очень сильному взаимодействию между монополями; поэтому родиться паре магнитных монополей намного труднее, чем паре электрически заряженных частиц.

Угловой момент и условие квантования Дирака

Один из эвристических способов «вывода» условия квантования Дирака (15.11) связан с исследованием движения заряженной частицы в поле монополя. Напряженность магнитного поля, создаваемого расположенным в начале координат монополем с магнитным зарядом g , равна

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (15.16)$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ — единичный вектор в радиальном направлении. Движение частицы с массой m и электрическим зарядом q в этом поле описывается уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (15.17)$$

Можно вычислить скорость изменения ее орбитального углового момента:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{qg}{4\pi r^3} \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{qg}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \right).$$

Это означает, что полный угловой момент можно определить следующим образом:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} - \frac{qg}{4\pi} \hat{\mathbf{r}}. \quad (15.18)$$

Очевидно, что эта величина сохраняется. Второй член в (15.18) можно интерпретировать как угловой момент электромагнитного поля, так как с учетом (15.16) мы имеем

$$\mathbf{L}_{\text{эм}} = \int d^3x \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = - \frac{g}{4\pi} \int d^3x (\nabla \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{r}} = - \frac{qg}{4\pi} \hat{\mathbf{r}}.$$

Таким образом, сохранение полного углового момента \mathbf{J} означает, что в присутствии электрических и магнитных зарядов угловой момент распределяется между частицей и полем. При квантовании теории естественно предположить, что компоненты

J будут удовлетворять обычным коммутационным соотношениям для компонент углового момента. Это приведет к тому, что собственные значения операторов J_i будут принимать полуцелые значения. Так как мы предполагаем, что первый член в (15.18), т. е. орбитальный угловой момент, имеет целые собственные значения, то получаем

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{1}{2} n, \quad \text{где } n \text{ — целое число,}$$

т. е. условие квантования Дирака (15.11).

Дираковская струна

Условие квантования Дирака можно вывести строго, рассматривая квантование движения частицы в данном электромагнитном поле. При обычном квантовании электромагнитного поля в отсутствие монополя тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ выражается через 4-вектор-потенциал $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

или

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (15.19)$$

так что условие $\partial^\mu \bar{F}_{\mu\nu} = 0$ автоматически удовлетворяется. Уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в электромагнитном поле, имеет вид

$$\left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \right] \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (15.20)$$

Оно инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \nabla \alpha(\mathbf{x}),$$

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow e^{ia(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}),$$

где $\alpha(\mathbf{x})$ — произвольная функция. Четыре-вектор-потенциал A_μ играет чрезвычайно важную роль, являясь основной динамической переменной при квантовании. Но если существует монополь, то вектор-потенциал не может существовать в любой точке пространства-времени, так как $\bar{F}^{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению (15.8), а не (15.4). Может быть, квантовая механика исключает существование магнитного монополя? Дирак обошел эту трудность, введя понятие струны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим магнитное поле монополя, напряженность которого определена выражением (15.16). Для любой замкнутой поверхности, охватывающей начало координат, имеем

$$g = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (15.21)$$

Ясно, что \mathbf{B} нельзя записать всюду как $\nabla \times \mathbf{A}$, так как в этом случае интеграл (15.21) обратился бы в нуль. Но мы можем так определить \mathbf{A} , что \mathbf{B} будет совпадать с $\nabla \times \mathbf{A}$ всюду, за исключением некоторой линии, исходящей из начала координат и уходящей в бесконечность. Чтобы показать, что это действительно возможно, рассмотрим поле, создаваемое бесконечно длинным и тонким соленоидом, расположенным вдоль отрицательной полуоси z , положительный полюс которого (имеющий

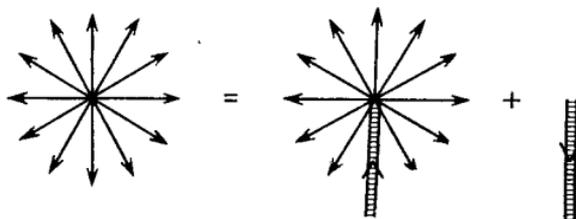


Рис. 15.1.

магнитный заряд g) находится в начале координат. Напряженность этого магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{B}_{\text{сол}} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} + g\theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{z}}, \quad (15.22)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в направлении оси z . Эта величина отличается от напряженности поля магнитного монополя (15.16) вторым слагаемым в (15.22) — сингулярным магнитным потоком вдоль соленоида. Так как магнитное поле, напряженность которого дана в (15.22), не создается какими-либо источниками ($\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{сол}} = 0$), можно принять

$$\mathbf{B}_{\text{сол}} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (15.23)$$

Тогда из выражений (15.16), (15.22) и (15.23) следует, что напряженность магнитного поля монополя дается формулой

$$\mathbf{B} = \frac{g^2}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} = \nabla \times \mathbf{A} - g\theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{z}}; \quad (15.24)$$

это поле показано на рис. 15.1. Линия, вдоль которой расположен соленоид, называется *дираковской струной*. Нетрудно показать, что вектор-потенциал \mathbf{A} поля, создаваемого соленоидом, может быть записан в виде

$$\mathbf{A} = \frac{g}{4\pi r} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \hat{\phi}, \quad (15.25)$$

где полярный и азимутальный углы определены обычным образом. Он сингулярен вдоль отрицательной полуоси z . Из соотношения (15.24) следует, что поле монополя можно представить вектор-потенциалом \mathbf{A} вместе со струной.

Следует подчеркнуть, что дираковская струна ненаблюдаема. Например, она не проявляет себя в эффекте Ааронова — Бома [9], представляющем собой квантовомеханическую интерференцию заряженных частиц в области, где $\mathbf{B} = 0$, а $\mathbf{A} \neq 0$. Условие отсутствия эффекта Ааронова — Бома в известном эксперименте с двумя щелями, когда заряженная частица (q), двигаясь по двум различным траекториям 1 и 2, между которыми находится дираковская струна, достигает детектирующего экрана, имеет вид

$$\left| \exp\left(iq \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \psi_1 + \exp\left(iq \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \psi_2 \right|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2.$$

Это в точности совпадает с условием квантования Дирака (15.11):

$$qg = q \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2n\pi,$$

где замкнутый контур состоит из траектории 1 и траектории 2 (направление которой изменено на обратное).

Убедиться в том, что дираковская струна ненаблюдаема, можно и иначе, показав, что ее можно произвольно перемещать с помощью подходящего калибровочного преобразования. Продемонстрируем это следующим образом. Векторный потенциал (15.25) не является единственным для поля соленоида. Если провести несингулярное калибровочное преобразование $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$, где χ — несингулярная однозначная функция координат точки, то член $\nabla \times \mathbf{A}$ в (15.24), а следовательно, и член, соответствующий дираковской струне, останутся неизменными. Чтобы изменять положение струны, необходимо расширить понятие калибровочного преобразования. Перепишем выражение (15.24) для магнитного поля монополя в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathbf{r}), \quad (15.26)$$

где $\mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathbf{r})$ — вклад дираковской струны, проходящей вдоль некоторой кривой \mathcal{C} из начала координат и уходящей на бесконечность, который соответствует магнитному потоку, равному g :

$$\mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathbf{r}) = g \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{x} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{x}). \quad (15.27)$$

Рассмотрим другую струну, выходящую из начала координат и уходящую на бесконечность вдоль кривой \mathcal{C}' . Обозначим через Γ кривую, состоящую из кривой $-\mathcal{C}'$ (т. е. кривой \mathcal{C}' с направлением, измененным на противоположное) и кривой \mathcal{C} . Сделав соответствующие предположения относительно поведения на бесконечности или считая, что \mathcal{C}' отличается от \mathcal{C} только на некотором конечном участке (рис. 15.2), кривую Γ можно рассматривать как замкнутую. Пусть $\Omega(\mathbf{r})$ — телесный угол, под кото-

рым из точки \mathbf{r} видна некоторая поверхность, натянутая на контур Γ . Различный выбор этой поверхности приводит к значениям Ω , отличающимся друг от друга на число, кратное 4π , но приводящим к одному и тому же значению $\nabla\Omega$. Рассмотрим теперь расширенное калибровочное преобразование, определенное следующим образом:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{g}{4\pi} \nabla\Omega. \quad (15.28)$$

Заметим, что $\Omega(\mathbf{r})$ — многозначная функция, и она не определена для точек \mathbf{r} , лежащих на кривой Γ . Следовательно, $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ всюду, за исключением точек, принадлежащих



Рис. 15.2.

струнам. Используя теорему Стокса для малого замкнутого контура \mathcal{C}_1 вокруг некоторой точки на кривой Γ , найдем, что поток величины $\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A})$ вдоль Γ равен

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1} \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \cdot d\sigma &= \oint_{\mathcal{C}_1} (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{g}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \nabla\Omega \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \frac{g}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} d\Omega = g \end{aligned} \quad (15.29)$$

(σ_1 — произвольная поверхность, натянутая на контур \mathcal{C}_1), где мы воспользовались (15.28). Тогда из (15.27) следует, что (15.29) можно записать в виде

$$\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathcal{C}', \mathbf{r})$$

или

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}' + \mathbf{h}(\mathcal{C}', \mathbf{r}). \quad (15.30)$$

Формула (15.30) показывает, что дираковскую струну можно произвольно перемещать с помощью калибровочного преобразования (15.28). Возможность произвольно выбирать положение струны говорит о том, что она является нефизическим объектом; другими словами, дираковская струна является калибровочным артефактом.

Вывод условия квантования Дирака

Условие (15.11) следует из того чрезвычайно важного требования, что обобщенное калибровочное преобразование (15.28), вызывающее изменение волновой функции частицы, должно иметь эквивалентное квантовомеханическое описание. Так, при преобразовании (15.28) изменение волновой функции

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp\left(-i \frac{qg}{4\pi} \Omega\right) \psi \quad (15.31)$$

не должно приводить к многозначному результату. Поскольку величина $\Omega(\mathbf{r})$ определена с точностью до 4π , должно выполняться равенство

$$qg = 2n\pi,$$

т. е. условие квантования Дирака (15.11).

Замечание 1. Чтобы сделать приведенный выше вывод более ясным, полезно рассмотреть в качестве примера векторные потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' для струн \mathcal{C} и \mathcal{C}' , направленных вдоль отрицательной и положительной полуосей z соответственно. Из (15.25) имеем в явном виде

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{g}{4\pi} (1 - \cos\theta) d\phi,$$

$$\mathbf{A}' \cdot d\mathbf{r} = \frac{-g}{4\pi} (1 + \cos\theta) d\phi.$$

Разность этих двух выражений немедленно дает калибровочную функцию

$$\chi = \frac{g}{4\pi} (2\phi) = \frac{g}{2\pi} \Omega.$$

Замечание 2. Сингулярных потенциалов и сингулярных калибровочных преобразований можно избежать, если в разных областях пространства использовать различные потенциалы поля монополя, а именно \mathbf{A} и \mathbf{A}' в областях, из которых исключены струны \mathcal{C} и \mathcal{C}' соответственно (например, отрицательная и положительная полуоси z). Условие квантования Дирака тогда следует из того требования, что в области пересечения этих двух областей потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' должны быть связаны однозначным калибровочным преобразованием [434]. Хотя это более изящная формулировка, в большинстве практических вычислений удобнее использовать сингулярный потенциал Дирака со струной.

15.2. СОЛИТОНЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Чтобы подготовить читателя к обсуждению монополя в неабелевой калибровочной теории, рассмотрим сначала на элементарном уровне классические решения с конечной энергией в теории поля, обычно называемые *солитонами* (подробнее см. [93, 335]).

В качестве примера рассмотрим теорию $\lambda\phi^4$ в одном пространственном и в одном временном измерениях. Лагранжиан такой теории имеет вид

$$L = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - V(\phi) \right] dx, \quad (15.32)$$

где

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - a^2)^2, \quad a^2 = \mu^2/\lambda. \quad (15.33)$$

Соответствующий гамильтониан дается формулой

$$H = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (15.34)$$

Как указано в разд. 5.3, при $\mu^2 > 0$ классическая конфигурация, соответствующая основному состоянию, имеет вид

$$\phi = \pm a = \pm \sqrt{\mu^2/\lambda}, \quad (15.35)$$

а энергия основного состояния $E = 0$. Интересной особенностью этой модели является то, что в ней существуют статические (не зависящие от времени) решения уравнений движения с конечной энергией (*солитоны*). Не зависящие от времени решения уравнений движения могут быть получены из лагранжиана L с помощью вариационного принципа:

$$-\delta L = \delta \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] = 0. \quad (15.36)$$

С математической точки зрения такая задача эквивалентна задаче о движении частицы единичной массы в поле потенциала $-V(x)$; уравнение движения в этом случае выводится из соотношения

$$\delta \int dt L' = \delta \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right] = 0. \quad (15.37)$$

Любому движению частицы в поле потенциала $-V(x)$ соответствует не зависящее от времени решение уравнения поля. Но не все эти решения являются решениями с конечной энергией. Чтобы получить решение с конечной энергией, необходимо потребовать, чтобы поле ϕ стремилось к нулю функции $V(\phi)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ с тем, чтобы интеграл энергии (15.34) был конечным. В задаче о движении частицы это соответствует условию, что при $t \rightarrow \pm\infty$ частица должна приближаться к нулям потенциала. Конечно, основные состояния, в которых частица все время находится в точке $x = a$ или $x = -a$, удовлетворяют этому требованию. Но имеются и другие нетривиальные движения, при которых оно также выполняется. Из условия конечности энергии следует, что решение при $t = \pm\infty$ принимает вакуумные значения ($\pm a$); но поскольку мы имеем систему с вырожденным вакуумом, решение может принимать значения, равные различным минимумам ($\pm a$

или $-a$) в различных бесконечно удаленных точках ($+\infty$ или $-\infty$). Например, имеются движения, где частица стартует с вершины одного горба и движется к вершине другого, имея нулевую энергию (рис. 15.3). Этим свойством движения с нулевой энергией можно воспользоваться при нахождении явного вида

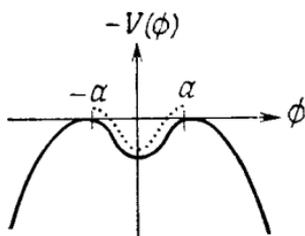


Рис. 15.3.

решений с конечной энергией в теории поля. Из закона сохранения энергии для движения частицы с нулевой энергией имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + [-V(x)] = 0,$$

что соответствует уравнению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V(\phi) \quad (15.38)$$

в случае теории поля. Уравнение (15.38) легко решается интегрированием, и результат имеет вид

$$x = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' [2V(\phi')]^{-1/2}, \quad (15.39)$$

где ϕ_0 — значение ϕ в точке $x=0$; оно может быть любым числом между a и $-a$. Наличие произвольного параметра ϕ_0 связано с трансляционной инвариантностью уравнения (15.38), из которого следует, что если $\phi = f(x)$ — решение этого уравнения, то $\phi = f(x-c)$, где c — произвольная константа, также является его решением. В случае теории $\lambda\phi^4$ потенциал дается формулой (15.33), и решения с конечной энергией, следующие из (15.39), можно записать в виде

$$\phi_+(x) = a \operatorname{th}(\mu x), \quad (15.40)$$

$$\phi_-(x) = -a \operatorname{th}(\mu x). \quad (15.41)$$

Решение ϕ_+ обычно называют кинком, а ϕ_- — антикинком. Энергия кинка (антикинка) может быть вычислена из (15.40), ((15.41)) и (15.34); она равна

$$E = 4\mu^3/3\lambda \quad (15.42)$$

и действительно конечна. Ясно, что при $x \rightarrow \pm \infty$ решение ϕ_+ (или ϕ_-) приближается к нулям функции $V(\phi)$, т. е.

$$\phi_{\pm} \rightarrow \pm a \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (15.43)$$

Это поведение показано на рис. 15.4.

Можно показать, что решения устойчивы относительно малых возмущений, хотя они и не соответствуют абсолютному минимуму потенциальной энергии $V(\phi)$ (т. е. $\phi \neq \pm a$ для всех зна-

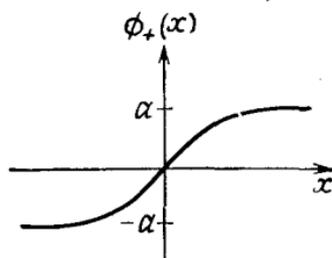


Рис. 15.4.

чений x и t). Эти решения уравнений движения с конечной энергией представляют физический интерес, так как они напоминают частицу со структурой в следующих отношениях:

1. Ее энергия сконцентрирована в конечной области пространства. Это связано с тем, что решения ϕ_{\pm} отличаются от конфигурации основного состояния $\phi = \pm a$ (с нулевой энергией) только в малой области около начала координат.

2. Ее можно вынудить двигаться со скоростью, меньшей единицы. Это удастся благодаря тому, что уравнение движения лоренц-ковариантно, и с помощью лоренцевского буста можно получить решение с отличной от нуля скоростью.

Топологические законы сохранения

Решения с конечной энергией в теории $\lambda\phi^4$ в пространстве размерности $1+1$ обладают довольно интересным топологическим свойством, благодаря которому эти решения оказываются устойчивыми. Это топологическое свойство легко обобщается на случай более сложной теории в пространстве высших размерностей и оказывается очень полезным для нахождения устойчивых решений с конечной энергией.

Топологические свойства кинка (антикинка) в теории $\lambda\phi^4$ в двумерном пространстве-времени можно изучить, поступая следующим образом. Из требования конечности энергии имеем на пространственных бесконечностях

$$\phi(\infty) - \phi(-\infty) = n(2a), \quad (15.44)$$

где $n=0$ соответствует основному состоянию, $n=1$ — кинку, а $n=-1$ — антикинку. Соотношение (15.44) может быть записано

В виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \phi) dx = n(2a). \quad (15.45)$$

Таким образом, если мы определим ток j_μ как

$$j_\mu(x) = \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi(x),$$

то он автоматически будет сохраняться, так как $\varepsilon_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор. Соответствующий сохраняющийся заряд в точности совпадает с выражением (15.45):

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} j_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi dx = n(2a). \quad (15.46)$$

Отсюда следует, что кинковое число n в (15.44) является сохраняющимся квантовым числом. Таким образом, переходы между кинками (антикинками) и основными состояниями невозможны, т. е. кинки (антикинки) являются стабильными. Этот закон сохранения, обычно называемый *топологическим законом сохранения* [283], отличается от обычных нётеровских законов сохранения (таких, как закон сохранения энергии), вытекающих из симметрии теории (см. разд. 5.1), так как он выполняется независимо от уравнений движения. Топологический закон сохранения можно интуитивно понять, например, если учесть, что для превращения кинковой конфигурации (ϕ_+ или ϕ_-) в конфигурацию основного состояния, где $\phi = a$ или $-a$ для всех x , необходимо изменить значение ϕ от $-a$ до a , проходя барьер при $\phi = 0$, имеющий бесконечную протяженность по x . Очевидно, что для этого требуется бесконечная энергия.

Таким образом, топологический закон сохранения (15.46) разбивает все множество решений с конечной энергией на отдельные секторы: $n = 0$ (вакуум), $n = 1$ (кинк), $n = -1$ (антикинк) и т. д. Эти различные секторы могут быть охарактеризованы их топологическими свойствами следующим образом. В двумерном пространстве-времени пространственные бесконечности состоят из двух дискретных точек $\pm\infty$. Обозначим это множество через S . В теории $\lambda\phi^4$ множество минимумов потенциала, задаваемое формулой (15.35), также состоит из двух дискретных точек $\pm a$; мы обозначим его M_0 :

$$M_0 = \{\phi: V(\phi) = 0\}. \quad (15.47)$$

Условие конечности энергии решения уравнения движения приводит к тому, что асимптотические значения $\phi(x)$ должны совпадать с нулями функции $V(\phi)$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \phi \in M_0. \quad (15.48)$$

Это условие можно рассматривать как отображение множества S на множество M_0 . Например, в случае конфигурации основного состояния обе точки $\pm\infty$ отображаются в точку a (или $-a$), а в случае кинковой конфигурации ϕ_+ происходит отображение $+\infty$ в $+a$ и $-\infty$ в $-a$. Эти отображения топологически различны в том смысле, что никакими непрерывными деформациями нельзя из одного из них получить другое. (Дальнейшее обсуждение см. в разд. 16.1.) Такова суть топологических законов сохранения. Эти топологические свойства оказываются очень полезными в более сложных теориях с высшими размерностями, где трудно получить явные решения уравнений.

Подводя итог, отметим, что в теории $\lambda\phi^4$ в двух измерениях существуют решения уравнений движения с конечной энергией и нетривиальными топологическими свойствами, и эти решения устойчивы относительно перехода в вакуум. Понятно, что существование топологических устойчивых решений такого типа с конечной энергией требует наличия в теории вырожденного вакуума (спонтанного нарушения симметрии) и нетривиальных топологических свойств.

Солитоны в четырехмерном пространстве-времени

До сих пор рассматривались решения с конечной энергией в двумерной теории поля. В более реалистическом случае четырехмерной теории поля мы увидим, что для существования топологически устойчивых решений уравнений движения скалярного поля с конечной энергией необходимо присутствие далекодействующих полей типа магнитного поля. Это, естественно, приведет нас к неабелевым калибровочным теориям.

Рассмотрим сначала решения с конечной энергией в четырехмерной теории скалярного поля с некоторой группой симметрии G . Запишем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 - V(\phi_i), \quad (15.49)$$

где

$$V(\phi_i) \geq 0. \quad (15.50)$$

Обозначим через M_0 множество значений $\phi_i = \eta_i$, минимизирующих потенциальную энергию $V(\phi_i)$:

$$M_0 = \{\phi_i = \eta_i: V(\eta_i) = 0\}. \quad (15.51)$$

Заметим, что все ϕ_i , принадлежащие M_0 , являются константами, не зависящими от пространственно-временных точек x_μ . Предположим, что эти значения связаны между собой преобразованиями из группы симметрии G . Например, точки $\phi = \pm a$ в случае теории $\lambda\phi^4$ связаны между собой преобразованием симметрии $\phi \rightarrow -\phi$. Возможные направления, по которым простран-

ственная координата \mathbf{r} может уходить на бесконечность, мы будем отмечать единичным вектором в трехмерном пространстве:

$$S^2 = \{\hat{\mathbf{r}}: \hat{\mathbf{r}}^2 = 1\}. \quad (15.52)$$

Ясно, что S^2 является сферой в трехмерном пространстве. Говорят, что S^2 — двумерная сфера или два-сфера. В отличие от двумерного случая, где у нас было множество, состоящее из двух дискретных точек ($\pm\infty$), S^2 является связным множеством. Это приводит к тому, что топология пространственных бесконечностей в четырехмерной теории поля сильно отличается от топологии двумерной теории поля. Энергия данной полевой конфигурации дается выражением

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi_i)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + V(\phi_i) \right]. \quad (15.53)$$

Из условия, что решение уравнения движения имеет конечную энергию, следует, что при $r \rightarrow \infty$ ϕ_i стремится к одному из нулей (минимальных значений) функции $V(\phi_i)$, т. е.

$$\phi_i^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \phi(R\hat{\mathbf{r}}) \in M_0. \quad (15.54)$$

Заметим, что конфигурация основного состояния ϕ_i^∞ стремится к одному и тому же значению по всем направлениям. Если M_0 является дискретным набором (т. е. группа G является группой дискретной симметрии), то ϕ_i^∞ должна быть константой (так как она должна быть непрерывной) в силу того, что S^2 — связное множество. Поэтому ϕ_i^∞ имеет ту же топологию, что и вакуумная конфигурация, т. е. топологически тривиальна. Чтобы получить топологически нетривиальное решение, M_0 должно быть многообразием ненулевой размерности. Это в свою очередь требует, чтобы группа симметрии G была непрерывной. Из уравнения (15.53) следует, что энергия ограничена снизу неравенством

$$H \geq \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + V(\phi_i) \right]. \quad (15.55)$$

Запишем градиентный член $(\nabla \phi)^2$ в виде сумм радиального и поперечного членов

$$(\nabla \phi)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \phi)^2. \quad (15.56)$$

Так как на бесконечности ϕ_i^∞ является функцией только направления $\hat{\mathbf{r}}$, то, если ϕ_i^∞ не является константой, второй член в (15.56) порядка r^{-2} при $r \rightarrow \infty$. Это приводит к тому, что интеграл в (15.55) расходится. Следовательно, в случае, когда в четырехмерной теории имеются только скалярные поля, топологически устойчивые решения с конечной энергией невозможны [108].

Оказывается, что эту трудность можно преодолеть, вводя в теорию калибровочные поля, т. е. сделав симметрию G локальной. В этом случае градиентный член $\nabla_i \phi$ заменяется ковариантной производной

$$D_i \phi = \nabla_i \phi + ig (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{T}) \phi. \quad (15.57)$$

Хотя A_i^a и $\nabla_i \phi$ убывают как r^{-1} , может оказаться (благодаря скрытым сокращениям), что $D_i \phi$ убывает как r^{-2} и интеграл энергии конечен, т. е. решение обладает нетривиальными топологическими свойствами. Заметим, что для таких не зависящих от времени решений калибровочное поле A_i^a убывает как r^{-1} , а напряженность поля убывает как r^{-2} , что соответствует дальнедействующему магнитному полю (ср. с (15.25)).

15.3. МОНОПОЛЬ Т'ХОФТА — ПОЛЯКОВА

Как отмечалось в предыдущем разделе, в калибровочной теории со скалярными полями можно найти топологически нетривиальные решения с конечной энергией. Поскольку электромагнитное взаимодействие описывается ненарушенной калибровочной $U(1)$ -симметрией, а решения с конечной энергией требуют спонтанного нарушения симметрии (существование вырожденного вакуума), мы естественным образом приходим к неабелевой калибровочной теории, в которой в качестве подгруппы калибровочной симметрии содержится электромагнитная группа симметрии $U(1)$. В такой теории монополи появляются как топологически нетривиальное решение с конечной энергией. В этом разделе мы опишем такое решение, обладающее свойствами магнитного монополя, открытое т'Хофтом [387] и Поляковым [327]. Простейшим примером неабелевой теории с магнитным монополем является $SO(3)$ -модель, предложенная Джорджи и Глэшоу [173], хотя от нее и отказались после экспериментального открытия нейтральных токов (см. разд. 11.2). Изучение решений, соответствующих редукции $SO(3) \rightarrow SO(2)$ [т. е. $SU(2) \rightarrow U(1)$], позволяет получать монополи в теориях с более широкими калибровочными группами, как это мы сделаем для модели великого объединения, основанной на группе $SU(5)$. Таким образом, сначала мы сконцентрируем свое внимание на фундаментальном случае группы $SO(3)$.

Солитонные решения в $SO(3)$ -модели

Модель Джорджи — Глэшоу основана на калибровочной группе $SU(2)$ с триплетом хиггсовских скаляров ϕ (для основных решений типа монополя мы будем пренебрегать фермионными полями). Лагранжиан этой модели имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D^\mu \phi) (D_\mu \phi) - V(\phi), \quad (15.58)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (15.59)$$

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a - e\epsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c, \quad (15.60)$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi \cdot \phi - a^2)^2. \quad (15.61)$$

Уравнения движения имеют вид

$$(D_\nu F^{\mu\nu})_a = -e\epsilon_{abc} \phi_b (D^\mu \phi)_c, \quad (15.62a)$$

$$(D^\mu D_\mu \phi)_a = -\lambda \phi_a (\phi \cdot \phi - a^2). \quad (15.62b)$$

В этой модели множество значений ϕ , минимизирующих потенциальную энергию $V(\phi)$, определяется следующим образом:

$$M_0 = \{\phi = \eta; \eta^2 = a^2\}, \quad (15.63)$$

т. е. M_0 состоит из точек на сфере в трехмерном пространстве внутренней симметрии, и все точки множества M_0 эквивалентны в том смысле, что каждая из них может быть получена из другой $SO(3)$ -преобразованием. Для удобства мы выберем вектор

$$\phi = (0, 0, a) \quad (15.64)$$

в качестве конфигурации основного состояния. Спонтанное нарушение симметрии происходит следующим образом (см. обсуждение в разд. 8.3):

$$SU(2) \sim SO(3) \rightarrow SO(2) = U(1),$$

так как вектор ϕ (15.64) все еще инвариантен относительно поворотов вокруг оси 3 ($SO(2)$ -преобразований). Ненарушенную $U(1)$ -симметрию отождествим с симметрией электромагнитного взаимодействия, а соответствующий безмассовый калибровочный бозон — с фотоном $A_\mu^3 = A_\mu$. Тогда электрическое и магнитное поля определяются следующим образом:

$$F_3^{0i} = E^i, \quad F_3^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k. \quad (15.65)$$

Для получения решения с конечной энергией потребуем, чтобы при $r \rightarrow \infty$ $\phi(r)$ стремилось к некоторому значению из множества M_0 . Так как пространственные бесконечности также образуют два-сферу S^2 (см. (15.52)), имеющую ту же топологию, что и множество M_0 , мы можем отобразить каждую точку S^2 в соответствующую точку два-сферы S^2 множества M_0 , чтобы получить конфигурации с нетривиальной топологией:

$$\phi_i^\infty = \eta_i = a \hat{r}_i. \quad (15.66)$$

Нетрудно убедиться, что эти отображения не могут быть непрерывно деформированы в отображения, соответствующие вакуумным конфигурациям, когда вся два-сфера S^2 отображается в

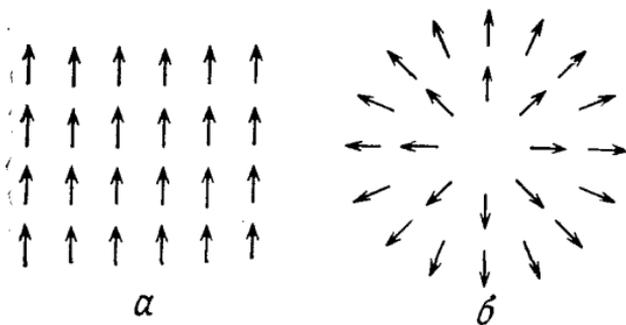


Рис. 15.5. Конфигурации поля ϕ : а — для вакуума, б — для монополя.

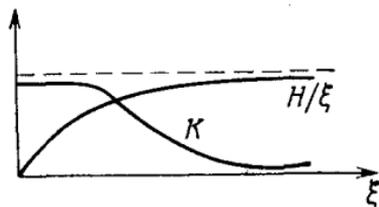


Рис. 15.6.

точку, определяемую соотношением (15.64). Таким образом, отображения (15.66) топологически устойчивы. (Дальнейшее обсуждение отображений с нетривиальной топологией, таких, как $S^1 \rightarrow S^1$ и $S^3 \rightarrow S^3$, см. в разд. 16.1.)

С учетом (15.66) $\phi_b \sim \hat{r}_b$, и требование, чтобы $D_\mu \phi_b = 0$ с точностью до величин порядка r^{-2} (см. обсуждение в конце предыдущего раздела), необходимое для конечности энергии, приводит к следующему асимптотическому поведению калибровочного поля: $A_i^b \sim \epsilon_{bij} \hat{r}_j$. Полагая, что решения с наименьшей энергией соответствуют максимальной симметрии, можно записать следующий анзац для нахождения явных решений:

$$\phi_b = \frac{r^b}{er^2} H(aer), \quad A_b^i = -\epsilon_{bij} \frac{r_j}{er^2} [1 - K(aer)], \quad A_b^0 = 0, \quad (15.67)$$

где H и K — безразмерные функции, которые необходимо определить из уравнения движения. На рис. 15.5 сравниваются графические изображения конфигураций поля ϕ для вакуума (15.64) и монополя (15.67). В случае анзаца (15.67), когда поля не зависят от времени, энергия системы определяется следующим образом:

$$E = \frac{4\pi a}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\xi^2 \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} (K^2 - 1)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - \xi^2)^2 \right], \quad (15.68)$$

где $\xi = aer$. Условия стационарности энергии E относительно вариаций H и K записываются в виде

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1), \quad (15.69a)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2). \quad (15.69b)$$

Эти уравнения движения для H и K можно получить, подставив анзац (15.67) в уравнения движения (15.62). Из асимптотического условия (15.66) следует

$$H(\xi) \sim \xi \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (15.70a)$$

Чтобы обеспечить сходимость интеграла в (15.68), потребуем выполнения следующих условий:

$$K(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (15.70b)$$

и

$$H \leq O(\xi), \quad K(\xi) - 1 \leq O(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow 0. \quad (15.70b)$$

Оказывается, что решения уравнений (15.69) с граничными условиями (15.70) действительно существуют, и функции H и K ведут себя, как показано на рис. 15.6. Полную энергию этого решения, которую мы будем интерпретировать как классическую массу, можно получить из (15.68):

$$\text{масса} = \frac{4\pi a}{e} f(\lambda/e^2), \quad (15.71)$$

где $f(\lambda/e^2)$ — значение интеграла в (15.68), найденное численно и оказавшееся порядка единицы в широкой области значений λ/e^2 . Таким образом, масштаб масс этого классического решения определяется параметром a , являющимся вакуумным средним скалярного поля, а также масштабом спонтанного нарушения симметрии $SO(3) \rightarrow SO(2)$.

Солитон т'Хофта — Полякова как магнитный монополь

Из асимптотического условия (15.70b) видно, что на больших расстояниях

$$F_a^{ij} \sim \frac{1}{er^4} \epsilon^{ijkl} r_a r_k \sim \frac{1}{aer^3} \epsilon^{ijkl} r^k \phi_a,$$

откуда следует, что магнитное поле в (15.65) на больших расстояниях имеет вид

$$\mathbf{B} \sim \frac{-1}{e} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (15.72)$$

Сравнивая это выражение с (15.16), видим, что это поле является полем монополя, имеющего магнитный заряд

$$g = -4\pi/e. \quad (15.73)$$

Константа e в (15.73) является константой электромагнитного взаимодействия, которая в этой простой модели связана с оператором электрического заряда следующим образом:

$$Q = eT_3, \quad (15.74)$$

где T_3 — третья компонента операторов слабого изоспина, являющихся генераторами калибровочной $SO(3)$ -симметрии. Так как наименьший возможный ненулевой электрический заряд, который может появляться в теории, равен $q_0 = e/2$, что соответствует $T_3 = 1/2$, то из (15.73) следует

$$\frac{q_0 g}{4\pi} = \frac{-1}{2}. \quad (15.75)$$

Таким образом, сравнивая с условием квантования Дирака (15.11), мы видим, что магнитный заряд g найденного монополя принимает наименьшее значение. Это классическое топологически нетривиальное решение с конечной энергией называется монополем т'Хофта — Полякова. Заметим, что квантование электрического заряда в (15.74) является следствием того факта, что электромагнитная группа симметрии $U(1)$ является подгруппой *простой* неабелевой калибровочной группы, в данном случае $SO(3)$, и не зависит от существования монополя. Скорее здесь обнаруживается то, что и магнитный монополь, и квантование заряда являются следствием спонтанного нарушения *простой* неабелевой группы симметрии до электромагнитной группы $U(1)$.

Рассмотренный монополь т'Хофта — Полякова отличается от монополя Дирака в двух важных аспектах: монополь т'Хофта — Полякова имеет конечную сердцевину, тогда как монополь Дирака является точечным объектом, и для монополя т'Хофта — Полякова нет необходимости вводить дираковскую струну. Конечный размер сердцевины монополя т'Хофта — Полякова следует из того факта, что при больших ξ уравнения (15.69а) и (15.69б) принимают вид

$$\frac{d^2 K}{d\xi^2} = K, \quad \frac{d^2 h}{d\xi^2} - \frac{2\lambda}{e^2} h = 0,$$

где $H = h + \xi$. Таким образом, при больших ξ имеем

$$K \sim e^{-\xi} \approx e^{-Mr}, \\ H - \xi \sim e^{-\mu\xi/M} \approx e^{-\mu r},$$

где $\mu = (2\lambda)^{1/2} a$ и $M \approx ea$ — массы скалярного и калибровочного бозонов соответственно. Отсюда следует, что приближение к асимптотике каждого поля контролируется массами соответствующих частиц. Следовательно, можно считать, что монополь т'Хофта — Полякова имеет определенный размер, определяемый его массой. На расстояниях меньше этого размера роль массив-

ных полей сводится к обеспечению гладкой структуры, а на расстояниях больше размера монополя они быстро убывают, приводя к полевым конфигурациям, неотличимым от монополя Дирака. Отсюда легко понять, как получается значение массы монополя (15.71). Разобьем вклад в энергию в (15.68) на две части, соответствующие значениям полей внутри и вне сердцевины монополя соответственно. Вне сердцевины $D_\mu\phi = 0$ и электрическое поле $E = 0$, а остается только магнитное поле

$$\int d^3x \frac{1}{2} B^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 \int_{1/M}^{\infty} 4\pi r^2 dr \frac{1}{r^4} = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{e^2} M.$$

Для стационарного решения вклад от полей внутри сердцевины должен быть сравним с вкладом от полей вне ее. Это приводит к тому, что $E = O(M/\alpha)$. Таким образом, монополю является тяжелым, так как он обладает малой сердцевиной, а кулоновская магнитная энергия становится бесконечной при $r \rightarrow 0$.

Что касается дираковской струны в случае монополя т'Хофта — Полякова, то она заменяется скалярным полем. Чтобы увидеть это, запишем асимптотические решения в виде

$$A_a^i = \varepsilon^{aij} \frac{r_j}{er^2}, \quad \phi_b = \frac{ar_b}{r}. \quad (15.76)$$

Поле A_a^i в (15.76) можно представить в виде

$$A_a^i = \frac{1}{a^2e} \varepsilon^{abc} \phi^b \partial^i \phi^c, \quad (15.77)$$

а тензор магнитного поля на больших расстояниях тогда имеет вид

$$\begin{aligned} F_3^{ij} &= \partial^i A_3^j - \partial^j A_3^i - e(A_1^i A_2^j - A_2^i A_1^j) = \\ &= \partial^i A_3^j - \partial^j A_3^i + \frac{1}{ea^3} \boldsymbol{\phi} \cdot (\partial^i \boldsymbol{\phi} \times \partial^j \boldsymbol{\phi}). \end{aligned} \quad (15.78)$$

Таким образом, тензор магнитного поля определяется формулой

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i + (\text{дополнительный член}).$$

Для монополя Дирака дополнительный член сингулярен и содержит дираковскую струну, тогда как для монополя т'Хофта — Полякова дополнительный член — гладкая функция и содержит скалярные поля. Итак, можно сказать, что в случае монополя т'Хофта — Полякова сингулярная дираковская струна «сгладилась» и превратилась в скалярное поле.

Подводя итог, можно сказать, что в $SO(3)$ -модели, где небелева симметрия спонтанно нарушается до электромагнитной $U(1)$ -симметрии, существует топологически нетривиальное реше-

ние с конечной энергией — монополь т'Хофта — Полякова, обладающий следующими свойствами.

1. На больших расстояниях он ведет себя так же, как монополь Дирака.

2. Он имеет конечную сердцевину, размер которой определяется массами калибровочного бозона или скалярной частицы.

3. Классическая масса монополя порядка масштаба спонтанного нарушения симметрии, т. е. вакуумного среднего скалярного поля.

4. Вводить дираковскую струну нет необходимости.

Взаимосвязь пространственной и внутренней симметрий

Отметим, наконец, очень важное свойство монополя в неабелевой калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии: он смешивает пространственную и внутреннюю симметрии. Анзац т'Хофта — Полякова (15.67) фактически обладает той особенностью, что он симметричен относительно поворотов, генерируемых оператором

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{T}, \quad (15.79)$$

где \mathbf{L} — пространственный угловой момент (включающий «обычный» спин), а \mathbf{T} — генератор внутренней симметрии «изоспина». Так, например, сам вид произведения $\hat{\phi} \cdot \mathbf{T} \sim \mathbf{r} \cdot \mathbf{T}$, где $\hat{\phi}$ определяется выражением (15.67), указывает на его инвариантность относительно поворотов, генерируемых оператором \mathbf{J} . Чтобы проверить согласованность этих рассуждений, запишем (15.79) в более явном виде. Если калибровочное поле вне сердцевины монополя дается формулой (15.76), то для канонического импульса $p_i = mv_i + e(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{T})$ имеем

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{T}, \quad (15.80)$$

а

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{T} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{T} + \mathbf{T} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T})\hat{\mathbf{r}}. \quad (15.81)$$

Сравнивая последнее выражение с (15.18), находим

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} - \frac{g}{4\pi} Q\hat{\mathbf{r}} \quad (15.82)$$

и, вспоминая, что магнитный заряд монополя т'Хофта — Полякова дается формулой (15.73), получаем условие согласованности

$$Q = e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{T}}. \quad (15.83)$$

Это действительно правильное отождествление, так как вне сердцевины $\hat{\phi} = \hat{\mathbf{r}}$, и ненарушенная электромагнитная $U(1)$ -симметрия

соответствует тем $SU(2)$ -поворотам, которые оставляют поле ϕ инвариантным. Например, если вектор $\hat{\mathbf{r}}$ направлен вдоль оси z , то вектор $\hat{\phi}$ направлен вдоль третьей оси в пространстве группы $SO(3)$ и $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{T} = T_3$ является генератором поворотов вокруг третьей оси, относительно которых $\hat{\phi}$ инвариантно.

Эта «взаимосвязь» пространственной и внутренней симметрии приводит к неожиданным последствиям. Рассмотрим, например, скалярные частицы (ϕ^+, ϕ^-) , преобразующиеся как дублет при поворотах с генератором \mathbf{T} ; для $Q = eT_3$ имеем

$$Q\phi^\pm = \pm \frac{1}{2}e\phi^\pm.$$

Соотношение (15.79) показывает, что объединенная система, состоящая из этого изодублета и монополя, может обладать полуцелым угловым моментом, хотя никакие фундаментальные фермионные поля мы не вводим. Это явление «получения спина из изоспина» обсуждалось Джакивом и Ребби [227] и Хазенфратцем и т'Хофтом [216]. Голдхабер (193) показал, что это не нарушает обычную связь спина со статистикой.

Проводя те же рассуждения, можно показать, что уравнение Дирака в фоновом поле монополя $A_\mu(x)$ может иметь решения в виде парциальных волн с целым значением J . В связи с этим имеет место другой неожиданный результат: оказывается, что фермионы меняют свою природу, рассеиваясь на монополе в S -состоянии. Так как при прохождении фермиона через сердцевину монополя $\hat{\mathbf{r}} \rightarrow -\hat{\mathbf{r}}$ и второе слагаемое в (15.82) меняет знак, то J может сохраняться, только если либо а) заряд, либо б) спиральность фермиона изменятся соответствующим образом. Этот парадокс можно разрешить, только если обратиться к квантовой теории монополя.

Что касается изменения заряда, то обнаруживается, что квантованный монополь обладает набором возбужденных состояний, имеющих заряды калибровочных бозонов, взаимодействующих с верхними и нижними членами изодублета. Такие состояния, обладающие и электрическим, и магнитным зарядами, называются *дионами*. Таким образом, закон сохранения полного заряда в рассеянии фермионов на монополях будет по-прежнему выполняться, если монополь будет превращаться в дион:

$$\mathcal{M} + \phi^+ \rightarrow \mathcal{D} + \phi^-. \quad (15.84)$$

Что касается изменения спиральности, то оно также возможно в присутствии поля монополя, так как мы имеем отличную от нуля аксиальную аномалию, $\mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, и возможность несохранения киральности (см. разд. 6.2), а для безмассовых фермионов киральность и изменение спиральности взаимосвязаны.

Монополи в моделях великого объединения

Монополь т'Хофта — Полякова $SU(2) \rightarrow U(1)$ можно рассматривать в качестве основной модели при исследовании монополей в теориях с более широкими калибровочными группами. Исследования, основанные на топологии, приводят к следующему общему результату: устойчивые монополи возникают в любых калибровочных теориях, где *простая* калибровочная группа G нарушается до меньшей группы $H = h \times U(1)$, явно содержащей в качестве множителя группу $U(1)$. Такие топологические рассуждения приводятся, например, в работах [93, 95]. Это утверждение, несомненно, находится в согласии с нашими предположениями о том, что квантование заряда и существование монополя связаны между собой и что квантование заряда следует из спонтанного нарушения *простой* калибровочной группы. Таким образом, в теориях великого объединения, где симметрия, описываемая некоторой большой *простой* группой, например $SU(5)$, нарушается до группы $SU(3)_c \times U(1)_{эм}$, также имеются монополи типа монополя т'Хофта — Полякова. Масса монополя определяется масштабом массы M_X , возникающим при нарушении симметрии, и имеет порядок M_X/e^2 . В $SU(5)$ -модели $M_X \gtrsim 10^{14}$ ГэВ, что приводит к очень большой массе монополя $\sim 10^{16}$ ГэВ. Это означает, что такой тип монополя находится вне пределов досягаемости при работе на ускорителях. Но он, возможно, играл существенную роль на очень ранней стадии развития Вселенной [210, 332]. Фактически попытки подавить избыток монополей в обычной космологии и привели первоначально к «сценарию раздувающейся Вселенной» [209] и последующему его усовершенствованию [12, 217, 274], что оказалось весьма многообещающим при решении различных фундаментальных проблем космологии.

Следует отметить, что в теориях великого объединения у устойчивого монополя, имеющего наименьший магнитный заряд (а следовательно, наименьшую массу), ожидается наличие как «обычного», так и цветового магнитных зарядов. (В этом случае предполагается, что цветовые магнитные поля экранируются глюонами.) А именно, вложение группы $SU(2) \times U(1)$ в $G \rightarrow SU(3)_c \rightarrow U(1)_{эм}$ таково, что конечный «магнитный $U(1)$ -фактор» входит как в группу $U(1)_{эм}$, так и в группу $SU(3)_c$. Чтобы в этом убедиться явно, рассмотрим следующее вложение группы $SU(2)$ в группу $SU(5)$ из гл. 14:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \boldsymbol{\tau} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (15.85)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули. Таким образом, матрицы \mathbf{T} действуют и в цветовом $SU(3)$ (первые три компоненты), и в электросла-

бом $SU(2)$ секторах. (Возможны и другие альтернативные подходы, где третий цвет заменен первым или вторым.) Было показано [114], что вложение (15.85) приводит к наименьшим магнитным зарядам. Если рассмотреть матрицу электромагнитных зарядов (14.12) в $SU(5)$ -модели, то монополю хиггсовского поля $\hat{\phi} \sim \hat{r}$ позволяет записать ее в следующем сферически-симметричном виде:

$$Q = \frac{e}{3} \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 - \frac{2}{3} \hat{r} \cdot \tau & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.86)$$

что согласуется с (14.12), когда $\hat{r} = \hat{z}$. Тогда векторный потенциал монополя имеет тот же вид, что и (15.76):

$$A_i^a = \frac{1}{g_5 r} \varepsilon_{a i j} \hat{r}_j, \quad (15.87)$$

где g_5 — константа взаимодействия калибровочной группы $SU(5)$, связанная с электромагнитной константой взаимодействия e соотношением (14.50) и с константой $SU(3)_c$ -взаимодействия КХД g_3 соотношением (14.47):

$$e = \sqrt{3/8} g_5, \quad g_5 = g_3. \quad (15.88)$$

Выражение (15.87) приводит к матричному магнитному полю

$$\mathbb{B}_i = B_i^a T^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a T^a = \frac{\hat{r} \cdot \tau}{g_5 r^2} \hat{r}_i. \quad (15.89)$$

Можно выделить электромагнитную и цветовую компоненты, взяв след от произведений матрицы \mathbb{B} магнитного поля и матриц генераторов калибровочных групп $U(1)_{\text{эм}}$ и $SU(3)_c$. Чтобы получить правильные нормировочные множители, следует учитывать соотношения (15.88) и тот факт, что в фундаментальном представлении $\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$. Таким образом, поле (15.89) имеет электромагнитную компоненту

$$B_i = 2 \sqrt{3/8} \text{tr}(\mathbb{B}_i Q) = \frac{1}{2e} \frac{f_i}{r^2}, \quad (15.90)$$

соответствующую магнитному заряду, равному одной дираковской единице $g = 2\pi/e$. Аналогично можно вычислить цветовые магнитные поля

$$B_i^a = 2 \text{tr}(\mathbb{B}_i \lambda^a) = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{a8} \frac{f_i}{g_5 r^2}, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (15.91)$$

Из выражений (15.90) и (15.91) следует, что «матрица магнитного заряда» имеет две компоненты, которые в унитарной ка-

либровке представляются в виде

$$T_3 = -\frac{1}{2}(Q + Q_c), \quad (15.92)$$

где Q_c — цветовой гиперзаряд $\lambda_8/\sqrt{3}$.

В необходимости цветового магнитного поля можно убедиться, исходя из более «физических» соображений, если рассмотреть эксперимент Ааронова — Бома с дробно заряженным кварком, скажем d_1 (кварк d с первой компонентой цвета). Условие нулевого эффекта выполняется, так как происходит сокращение фаз благодаря появлению дополнительного фазового множителя, равного цветovому заряду кварка q_c , умноженному на поток цветового магнитного поля монополя:

$$\exp\left\{-i\frac{e}{3}\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}_{эм} + iq_c \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}_c\right\} = e^{-i2\pi/3} e^{i2\pi/3} = 1,$$

где использовано равенство $e = 2\pi/g$ и т. д.

Катализ протонного распада монополем. Относительно группы $SU(2)$, вложенной в группу $SU(5)$, в соответствии с (15.86) пятнадцать левых членов первого $SU(5)$ фермионного поколения (14.7) и (14.9) имеют следующие трансформационные свойства:

$$\text{дублеты: } \begin{pmatrix} e^+ \\ d_3 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} d_3^c \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u_2^c \\ u_1 \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u_1^c \\ u_2 \end{pmatrix}_L, \quad (15.93)$$

$$\text{синглеты: } \nu_L, d_{1L}, d_{2L}, u_{3L}, d_{1L}^c, d_{2L}^c, u_{3L}^c.$$

С этими дублетами оказываются возможными реакции с изменением барионного числа, такие, как

$$M + u_1 + u_2 + d_3 \rightarrow M + e^+. \quad (15.94)$$

Этот процесс можно рассматривать как обратный процессу (15.84) с последующим «распадом диона». Обычно ожидается, что такие переходы сильно подавлены из-за сверхтяжелого массового множителя M_X . Однако в работах [69, 341, 423, 424] показано, что в случае взаимодействия фермионов с монополями вакуум системы фермионов и монополей может быть сильно вырожден, и в областях пространства, где сосуществуют магнитные и хромагнитные поля монополей теорий великого объединения, имеются конденсаты, такие, как, например, $\langle u_1 u_2 d_3 e^- \rangle_0$. Мы предполагаем, что цветovое магнитное поле простирается на расстояние радиуса конфайнмента порядка 1 ферми. Таким образом, предполагается, что взаимодействия (15.94), в которых барионный заряд не сохраняется, могут иметь сечения, типичные для сильных взаимодействий. Это должно проявляться в распадах протонов, сильно катализируемых монополями. Хотя теоретические исследования этого механизма все еще продолжаются, ясно, что квантовая теория взаимодействий частиц с монополями в высшей степени нетривиальна и интересна с точки зрения физики.

В предыдущей главе мы имели дело с частицеподобными решениями теории Янга — Миллса — монополями; они соответствуют полям с нетривиальными топологическими свойствами в обычном трехмерном пространстве. Перейдем теперь к изучению инстантонных решений, т. е. решений, обладающих нетривиальной топологической структурой в евклидовом четырехмерном пространстве-времени. Так же как солитонные решения, рассмотренные в гл. 15, инстантоны имеют конечную пространственную протяженность — отсюда наличие окончания «он» в их названии, однако в отличие от солитонов они являются структурами во времени (хотя и мнимом), что объясняет наличие корня «инстант»¹⁾. По этой же причине в литературе иногда их называют также «псевдочастицами».

Так же как в гл. 15, изложение дается на элементарном уровне. Настоящая глава построена следующим образом. В разд. 16.1 после краткого введения в топологические понятия теории гомотопий показано, как получаются инстантонные решения в евклидовой теории Янга — Миллса. Интерпретация инстантонов как решений, соответствующих туннельным переходам между вакуумными состояниями с различными топологическими квантовыми числами, дана в разд. 16.2. Здесь же показывается, что вакуум в неабелевой калибровочной теории вообще и в КХД в частности не единствен. Лагранжиан Янга — Миллса на самом деле описывает целый континуум теорий, каждая из которых соответствует определенному значению параметра θ , так же как различные значения константы связи соответствуют различным теориям. В разд. 16.3 вводятся безмассовые фермионы; в их присутствии вакуумные туннельные переходы подавляются. Далее мы видим, как нетривиальная структура вакуума КХД, выявленная с помощью инстантонных решений, может помочь нам разрешить знаменитую аксиальную проблему $U(1)$, существующую во всякой кварковой теории с киральной симметрией. С другой стороны, сами инстантоны приводят к на-

¹⁾ «Instant» (англ.) — мгновение. Термин «инстантон» был введен г'Хофтом [388]. — *Прим. перев.*

рушению P - и CP -инвариантности в сильных взаимодействиях. В разд. 16.3 кратко рассматриваются возможные пути преодоления этой трудности.

На протяжении всей главы, особенно в первых двух разделах, мы будем работать с $SU(2)$ -теорией Янга — Миллса. В приложениях в основном рассматривается КХД с группой симметрии $SU(3)$. Однако нужно иметь в виду, что все результаты применимы в случае подгруппы $SU(2)$ группы $SU(3)$ или любой другой неабелевой группы более высокого ранга.

16.1. ТОПОЛОГИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В гл. 15 нам уже встречались поля с нетривиальной топологией. Они соответствовали отображениям из S^2 в S^2 , где S^2 — сфера в трехмерном пространстве, являющаяся двумерным многообразием, т. е. два-сфера. В настоящей главе возникает необходимость рассматривать отображения $S^3 \rightarrow S^3$, где S^3 — сфера в четырехмерном евклидовом пространстве, т. е. три-сфера.

Гомотопические классы

Для изучения топологических свойств непрерывных функций их можно разбить на *гомотопические классы*, причем каждый класс состоит из функций, которые могут быть непрерывным образом деформированы друг в друга. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f_0(x)$ и $f_1(x)$ — непрерывные функции, отображающие X в Y . Обозначим через I единичный интервал на вещественной прямой $0 \leq t \leq 1$. Тогда функции f_0 и f_1 *гомотопны*, если и только если существует *непрерывная* функция $F(x, t)$, отображающая прямое произведение X и I в Y , такая, что $F(x, 0) = f_0(x)$, а $F(x, 1) = f_1(x)$. Непрерывная функция $F(x, t)$, описывающая непрерывную деформацию функции $f_0(x)$ в $f_1(x)$, называется *гомотопией*. Все функции, отображающие X в Y , можно тогда разбить на гомотопические классы, такие, что две функции принадлежат одному классу, если они гомотопны.

Для иллюстрации понятия гомотопических классов рассмотрим следующие примеры.

$S^1 \rightarrow S^1$. Пусть X — множество $\{\theta\}$ точек на окружности единичного радиуса; каждая точка определяется своим углом θ , причем точки, соответствующие углам θ и $\theta + 2\pi$, отождествляются. Пусть далее Y — множество комплексных чисел u_1 с модулем, равным единице, $u_1 = \{e^{i\theta}\}$, топологически эквивалентное окружности единичного радиуса — «одномерной сфере». Рассмотрим отображение $\{\theta\} \rightarrow \{e^{i\theta}\}$. Непрерывные функции

$$f(\theta) = \exp[i(n\theta + a)] \quad (16.1)$$

с различными значениями a , но с одним и тем же фиксированным целым числом n образуют гомотопический класс. Действительно, можно построить гомотопию

$$F(\theta, t) = \exp\{i[n\theta + (1-t)\theta_0 + t\theta_1]\}, \quad (16.2)$$

такую, что функции

$$f_0(\theta) = \exp[i(n\theta + \theta_0)], \quad (16.3)$$

$$f_1(\theta) = \exp[i(n\theta + \theta_1)] \quad (16.4)$$

будут гомотопными. Функцию $f(\theta)$ из (16.1) можно представлять себе как отображение одной окружности на другую. При таком отображении n точек на первой окружности отображаются в одну и ту же точку на второй, и это можно рассматривать как « n -кратный обход» второй окружности. Таким образом, каждый гомотопический класс характеризуется своей *степенью отображения* n , которую также называют *топологическим индексом*, или *индексом Понтрягина*. Из (16.1) следует, что для данного отображения $f(\theta)$ степень отображения n можно определить по формуле

$$n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left[\frac{-i}{f(\theta)} \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]. \quad (16.5)$$

Особый интерес представляет отображение с наименьшим нетривиальным числом обходов $n = 1$:

$$f^{(1)}(\theta) = e^{i\theta}. \quad (16.6)$$

Взяв степени этого отображения, мы можем получать отображения с более высокими значениями степени отображения. Например, отображение $[f^{(1)}(0)]^m$ будет иметь степень отображения m . Отображение (16.6) можно записать в декартовых координатах:

$$f(x, y) = x + iy, \quad \text{где } x^2 + y^2 = 1. \quad (16.7)$$

Мы можем обобщить область определения X этого отображения, переходя от окружности единичного радиуса всей вещественной прямой $-\infty \leq x \leq \infty$, считая конечные точки $x = \infty$ и $x = -\infty$ одной и той же точкой, т. е. будем рассматривать отображения, обладающие свойством $f(x = \infty) = f(x = -\infty)$. Конечно, такая вещественная прямая со склеенными конечными точками имеет ту же топологию, что и окружность единичного радиуса. Примерами такого типа отображений с $n = 1$ являются

$$f_1(x) = \exp\{i\pi x/(x^2 + \lambda^2)^{1/2}\}, \quad (16.8)$$

$$f'_1(x) = \exp\{i2 \arcsin [x/(x^2 + \lambda^2)^{1/2}]\} = \frac{(\lambda + ix)^2}{\lambda^2 + x^2}, \quad (16.9)$$

где λ — произвольное число. В этом случае топологический индекс для произвольного отображения можно выразить следую-

щим образом:

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{-i}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} \right], \quad (16.10)$$

что для функций (16.8) и (16.9) дает $n = 1$.

$S^3 \rightarrow S^3$. Рассмотрим теперь отображения из три-сферы на группу $SU(2)$, т. е. отображения точек сферы в четырехмерном евклидовом пространстве S^3 , каждая точка которой определяется тремя углами, на элементы группы $SU(2)$, которые также характеризуются тремя параметрами. Многообразие элементов группы $SU(2)$ топологически эквивалентно три-сфере S^3 . В этом можно легко убедиться, если учесть, что каждый элемент группы $SU(2)$ с помощью матриц Паули можно представить в виде $U = \exp\{i\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau}\}$. Используя соотношения между матрицами Паули, матрицу U можно представить как $U = u_0 + i\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$, где вещественные величины u_0 и \mathbf{u} удовлетворяют уравнению

$$u_0^2 + \mathbf{u}^2 = 1, \quad (16.11)$$

которое следует из того, что $UU^+ = U^+U = 1$. Это уравнение — не что иное, как уравнение для сферы в четырехмерном евклидовом пространстве S^3 . В этом случае отображения также характеризуются топологическим индексом n , и обобщением формулы (16.7), отвечающим значению $n = 1$, является

$$f(x_0, \mathbf{x}) = x_0 + i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \text{где } x_0^2 + \mathbf{x}^2 = 1. \quad (16.12)$$

Можно показать (см., например, [94]), что топологический индекс n можно представить в виде

$$n = \frac{-1}{24\pi^2} \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \operatorname{tr} (\epsilon_{ijk} A_i A_j A_k),$$

где

$$A_i = f^{-1}(x_0, \mathbf{x}) \partial_i f(x_0, \mathbf{x}), \quad (16.13)$$

а θ_1, θ_2 и θ_3 — углы, параметризующие S^3 .

Наши рассуждения легко обобщить на тот случай, когда X — все трехмерное пространство, в котором все бесконечно удаленные точки отождествлены. Примерами рассматриваемых отображений при $n = 1$ являются отображения

$$f_1(x) = \exp\{i\pi\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}/(\mathbf{x}^2 + \lambda^2)^{1/2}\}, \quad (16.14)$$

$$f'_1(x) = (\lambda\boldsymbol{\tau} + i\mathbf{x})^2/(\mathbf{x}^2 + \lambda^2), \quad (16.15)$$

представляющие собой обобщения отображений (16.8) и (16.9). Так же, как в (16.10), мы можем представить теперь степень

отображения в виде объемного интеграла:

$$n = \frac{-1}{24\pi^2} \int_V d^3x \operatorname{tr} (\varepsilon_{ijk} A_i A_j A_k), \quad (16.16)$$

$$A_i = f^{-1}(x) \partial_i f(x).$$

Как мы увидим ниже, $SU(2)$ -преобразования вида (16.12), (16.14) и (16.15) чрезвычайно интересны с точки зрения физики.

Инстантонные решения в евклидовой калибровочной теории

Будем искать решения уравнений, обладающие конечным действием, в классической теории Янга — Миллса в евклидовом пространстве ($x^2 = x_0^2 + \mathbf{x}^2$). Калибровочные поля в теории с группой $SU(2)$:

$$A_\mu = \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\tau^a}{2} F_{\mu\nu}^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

описываются лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (16.17)$$

где для удобства обозначений мы изменили масштабы калибровочных полей:

$$A_\mu \rightarrow \frac{i}{g} A_\mu, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow \frac{i}{g} F_{\mu\nu}, \quad (16.18)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

При калибровочном преобразовании U поля A_μ преобразуются следующим образом:

$$A'_\mu = U^{-1} A_\mu U + U^{-1} \partial_\mu U. \quad (16.19)$$

Мы требуем, чтобы решения уравнений удовлетворяли таким граничным условиям, при которых на бесконечности лагранжиан обращается в нуль, т. е. $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$, так чтобы евклидово действие

$$S_E = \int d^4x \frac{1}{2g^2} \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

было конечным. Это означает, что в евклидовом пространстве должно выполняться асимптотическое условие

$$F_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \quad (16.20)$$

Обычно для этого требуется, чтобы

$$A_\mu(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \quad (16.21)$$

С точки зрения калибровочных преобразований (16.19) это требование слишком ограничительное. Условие (16.20) требует только, чтобы A_μ стремилось к конфигурации

$$A_\mu(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} U^{-1} \partial_\mu U, \quad (16.22)$$

которая получается из $A_\mu(x) = 0$ калибровочным преобразованием (16.19), и, следовательно, (16.20) выполняется. Такое поле $A_\mu(x)$ называется «чисто калибровочным». Заметим, что точки на бесконечности ($|x| \rightarrow \infty$) в четырехмерном евклидовом пространстве образуют три-сферу, и матрица калибровочного преобразования U в (16.22) представляет собой отображение S^3 в группу $SU(2)$. Таким образом, функции U относятся к тому типу функций, отображающих $S^3 \rightarrow S^3$, которые мы обсуждали в связи с гомотопическими классами, и обладают некоторой степенью отображения (топологическим индексом). Инстантонное решение, найденное Белавиным, Поляковым, Шварцем и Тюпкиным [39], соответствует функциям U с нетривиальным топологическим индексом, т. е. $n = 1$ (при этом решения для инстантонов с $n > 1$ на больших расстояниях получаются как произведения решений, отвечающих $n = 1$).

Выразим сначала топологический индекс через калибровочные поля. Для этого введем зависящий от калибровки (ненаблюдаемый) ток:

$$K_\mu = 4\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr} \left[A_\nu \partial_\lambda A_\rho + \frac{2}{3} A_\nu A_\lambda A_\rho \right]. \quad (16.23)$$

Нетрудно проверить, что

$$\partial_\mu K_\mu = 2 \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}), \quad (16.24)$$

где

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \quad (16.25)$$

есть тензор, дуальный к $F_{\mu\nu}$. Рассмотрим объемный интеграл

$$\int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu K_\mu = \frac{1}{2} \int_S d\sigma_\mu K_\mu, \quad (16.26)$$

где поверхностный интеграл берется по S^3 на бесконечности. В этой области A_μ дается соотношением (16.22), и, используя свойства антисимметрии по индексам и соотношение $U^\dagger U = 1$, получаем

$$K_\mu = \frac{4}{3} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \operatorname{tr} [(U^\dagger \partial_\nu U) (U^\dagger \partial_\lambda U) (U^\dagger \partial_\mu U)]. \quad (16.27)$$

Подставляя (16.27) в (16.26) и сравнивая его с выражением для топологического индекса при отображениях $S^3 \rightarrow S^3$ (16.16), имеем

$$n = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}). \quad (16.28)$$

Чтобы найти поле $A_\mu(x)$, удовлетворяющее на евклидовой три-сфере на бесконечности граничному условию (16.22), воспользуемся важным условием положительности в евклидовом пространстве:

$$\text{tr} \int (F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 d^4x \geq 0. \quad (16.29)$$

Так как

$$(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 = 2(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \pm F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}), \quad (16.30)$$

имеет место неравенство

$$\text{tr} \int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x \geq \left| \text{tr} \int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}d^4x \right| = 16\pi^2n, \quad (16.31)$$

где мы воспользовались соотношением (16.28). Таким образом, евклидово действие удовлетворяет неравенству

$$S_E(A) \geq \frac{8\pi^2n}{g^2}. \quad (16.32)$$

Тогда из неравенства (16.29) следует, что действие минимально (т. е. в (16.32) достигается равенство), когда

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (16.33)$$

т. е. самодуальные или антисамодуальные поля являются решениями классической евклидовой теории Янга — Миллса (обладающими конечным действием). Заметим, что обычное решение $A_\mu = 0$ с тривиальным топологическим квантовым числом $n = 0$, конечно, удовлетворяет условию (16.33).

Для нахождения нетривиальных самодуальных решений в теориях калибровочных полей Белавин и др. [39] использовали такую стратегию, в которой сначала рассматривается $F_{\mu\nu}$ в калибровочной теории с группой $O(4)$, изоморфной группе $SU(2) \times SU(2)$: одну из групп $SU(2)$ можно отождествить с группой $SU(2)$ внутренней симметрии, а другую — с три-сферой на пространственно-временной бесконечности. Кроме того, поскольку в $O(4)$ матрица $F_{\mu\nu}$ фактически является матрицей с четырьмя индексами $F_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, где (α, β) — индексы пространства внутренней $O(4)$ -симметрии, а (μ, ν) — евклидовы индексы $O(4)$, условие самодуальности (16.33) можно записать в виде простого условия симметрии, наложенного на эти зарядовые и пространственно-временные индексы. Теперь можно построить явные решения. Мы здесь не будем вдаваться в подробности, так как калибровочное $SU(2)$ -преобразование имеет как раз тот вид, который приведен в (16.12):

$$U(x) = \frac{x_0 + ix \cdot \tau}{\rho}, \quad (16.34)$$

где $\rho^2 = x_0^2 + \mathbf{x}^2$. Такое преобразование приводит к калибровочному полю

$$A_\mu(x) = \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \lambda^2} \right) U^{-1} \partial_\mu U, \quad (16.35)$$

где λ — произвольный масштабный параметр, который обычно называется *размером инстантона*. В случае $\rho \gg \lambda$ имеем

$$A_\mu(x) \rightarrow U^{-1} \partial_\mu U, \quad (16.36)$$

как это и должно быть в соответствии с граничным условием. В более явном виде можно записать

$$A_0(x) = \frac{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}}{\rho^2 + \lambda^2}, \quad \mathbf{A}(x) = \frac{-i(\boldsymbol{\tau} x_0 + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{x})}{\rho^2 + \lambda^2}. \quad (16.37)$$

Далее можно проверить, что соответствующий интеграл действия в самом деле имеет значение $8\pi^2/g^2$.

В следующем разделе обсуждается физическая интерпретация этих нетривиальных минимумов евклидова действия.

16.2. ИНСТАНТОН И ВАКУУМНЫЕ ТУННЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Физическая интерпретация инстантонных решений как квантовомеханических событий, соответствующих туннельным переходам между вакуумными состояниями с различными топологическими квантовыми числами, впервые была предложена т'Хофтом [388], а позднее обоснована в работах [70, 227].

В формализме функциональных интегралов основная амплитуда перехода вакуум — вакуум выражается в виде суммы (функционального интеграла) по всем возможным траекториям между начальным и конечным состояниями, причем вклад каждой траектории равен экспоненте с показателем, представляющим собой произведение i на действие, вычисленное для этой траектории. В предыдущих главах рассматривались суммы по полевым конфигурациям, удовлетворяющие на границе только условию $A_\mu(x) \rightarrow 0$. Но ниже мы увидим, что вакуум в неабелевой калибровочной теории поля обладает неожиданно богатой структурой. Она соответствует суперпозиции вакуумных состояний с различными топологическими зарядами. Инстантонные полевые конфигурации связывают начальные и конечные вакуумные состояния с различными топологическими зарядами. Мы рассмотрим влияние учета всех таких полевых конфигураций в формализме функционального интегрирования.

Множество вакуумных состояний

Для определенности поместим нашу систему в ящик. Условие вакуума

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad (16.38)$$

выполняется в области

$$t < -T/2, \quad t > T/2, \quad |\mathbf{x}| > R, \quad (16.39)$$

где T и R — очень большие величины. В случае пространства-времени размерности $2+1$ эта область изображена на рис. 16.1.

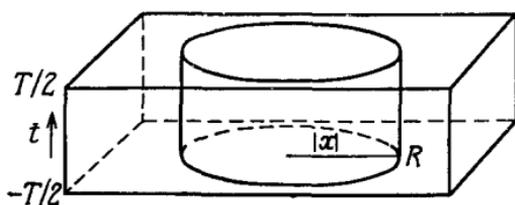


Рис. 16.1.

Суммирование производится по всем траекториям $A_\mu(x)$, удовлетворяющим тому граничному условию, что вне цилиндра выполняется соотношение (16.38), определяющее вакуумное состояние.

На протяжении всего этого раздела мы будем считать, что условие, фиксирующее калибровку, имеет вид

$$A_0(x) = 0 \quad \text{при всех } x. \quad (16.40)$$

Но у нас остается свобода производить не зависящие от времени калибровочные преобразования:

$$\partial_0 U(\mathbf{x}) = 0, \quad (16.41)$$

так как

$$A_0(x) \rightarrow A'_0(x) = U^{-1}(\mathbf{x}) A_0(x) U(\mathbf{x}) + U^{-1}(\mathbf{x}) \partial_0 U(\mathbf{x}) = 0,$$

где мы использовали (16.40) и (16.41). Таким образом, вакуум описывается не зависящим от времени потенциалом $A_i(x)$, являющимся чисто калибровочным потенциалом:

$$A_i(x) = A_i(\mathbf{x}) = U^{-1}(\mathbf{x}) \partial_i U(\mathbf{x}). \quad (16.42)$$

В начальный момент времени $t = -T/2$ мы можем воспользоваться остающейся калибровочной свободой и потребовать, например, чтобы

$$A_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (16.43)$$

что соответствует выбору

$$U(\mathbf{x}) = 1. \quad (16.44)$$

Тогда из определяющего вакуумное состояние условия (16.38) следует

$$F_{0i} = \partial_0 A_i = 0. \quad (16.45)$$

Таким образом, равенство (16.43) выполняется всюду в вакууме, т. е. всюду в пространстве-времени вне цилиндра на рис. 16.1. В частности, все точки границы верхнего круга цилиндра ($t = T/2$) отождествлены, т. е. отображаются в соответствии с (16.44). В реалистическом случае $3 + 1$ -мерного пространства-времени такое отображение соответствует вакууму $t = T/2$. Он описывается чисто калибровочным полем, построенным из отображений трехмерного пространства, бесконечно удаленные точки которого отождествлены, в многообразии калибровочной группы $SU(2)$. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, такие калибровочные преобразования, а следовательно, и вакуумные состояния (16.42), могут быть разбиты на неэквивалентные гомотопические классы. Например, полевая конфигурация (16.42) с

$$U(\mathbf{x}) = \exp\{i\pi\tau \cdot \mathbf{x}/(x^2 + \lambda^2)^{1/2}\}, \quad (16.46)$$

как уже указывалось (см. (16.14)), является вакуумным состоянием с $n = 1$. Таким образом, мы приходим к заключению, что имеется множество вакуумных состояний $|n\rangle$, каждое из которых характеризуется своим топологическим индексом.

Формальная связь между вакуумами и инстантонное решение

Как показано в разд. 16.1, инстантонное решение характеризуется топологическим индексом ν . Теперь мы покажем, что такая траектория связывает вакуумные состояния с различными топологическими зарядами:

$$\begin{aligned} A_i^{\text{инст}}(\mathbf{x}, x_0 = -\infty) &= A_i(\mathbf{x}) \text{ вакуумного состояния } |n\rangle, \\ A_i^{\text{инст}}(\mathbf{x}, x_0 = \infty) &= A_i(\mathbf{x}) \text{ вакуумного состояния } |n + \nu\rangle. \end{aligned} \quad (16.47)$$

Чтобы убедиться в этом формально, вспомним основное инстантонное решение с $\nu = 1$, которое описывается соотношениями (16.34), (16.35) и (16.37). Чтобы оно удовлетворяло калибровочному условию $A_0 = 0$ (16.40), совершим калибровочное преобразование поля $A_\mu(x)$ (16.37):

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = V^{-1}(x) A_\mu(x) V(x) + V^{-1}(x) \partial_\mu V(x). \quad (16.48)$$

Из условия $A'_0(x) = 0$ следует

$$\frac{\partial}{\partial x_0} V(x) = -A_0(x) V(x) = \frac{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}}{x_0^2 + \mathbf{x}^2 + \lambda^2} V(x), \quad (16.49)$$

где использовано инстантонное решение (16.37). Уравнение (16.49) можно проинтегрировать и получить

$$V(x) = \exp \left\{ \frac{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}}{(x^2 + \lambda^2)^{1/2}} \left(\arctg \frac{x_0}{(x^2 + \lambda^2)^{1/2}} + \theta_0 \right) \right\}. \quad (16.50)$$

Постоянную интегрирования можно выбрать следующим образом:

$$\theta_0 = (n + 1/2) \pi. \quad (16.51)$$

Мы получили уравнение (16.49), наложив граничное условие на временную компоненту $A_0(x) \rightarrow A'_0(x) = 0$. Если мы потребуем теперь, чтобы пространственная компонента $A_i(x)$ обращалась в нуль при $x_0 = \pm\infty$, то

$$A'_i = V^{-1}(x) \partial_i V(x), \quad (16.52)$$

где

$$\begin{aligned} V(x_0 = -\infty) &= \exp \left\{ i\pi \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}}{(x^2 + \lambda^2)^{1/2}} (n) \right\}, \\ V(x_0 = \infty) &= \exp \left\{ i\pi \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}}{(x^2 + \lambda^2)^{1/2}} (n + 1) \right\}. \end{aligned} \quad (16.53)$$

Таким образом, инстантонное решение (16.37) действительно связывает два вакуумных состояния, различающиеся топологическим индексом. Это значит, что представление вакуум-вакуумной амплитуды перехода в виде функционального интеграла нужно обобщить следующим образом:

$$\langle n | e^{-iHt} | m \rangle_I = \int [dA]_{v=n-m} \exp \left\{ -i \int (\mathcal{L} + JA) d^4x \right\}, \quad (16.54)$$

где $|n\rangle$ и $|m\rangle$ — вакуумные состояния с топологическими индексами n и m соответственно. Итак, мы должны просуммировать по всем калибровочным полям, принадлежащим одному и тому же гомотопическому классу с топологическим зарядом $v = n - m$.

Инстантон как квазиклассическая амплитуда туннельного перехода

Поскольку инстантон является минимумом евклидова действия, т. е. классической траекторией в мнимом времени, он напоминает квазиклассическую амплитуду подбарьерного перехода в нерелятивистской квантовой механике. Такая аналогия действительно оказывается плодотворной, поэтому мы очень кратко рассмотрим решение элементарной квантовомеханической задачи о туннельном переходе между двумя основными состояниями в случае потенциала двойной ямы, показанного на рис. 16.2, а:

$$V(q) = (q^2 - q_0^2)^2, \quad (16.55)$$

где $q(t)$ — некоторая обобщенная координата. Энергия рассматриваемой системы равна

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + V(q). \quad (16.56)$$

Классическому основному состоянию системы соответствуют значения координаты $q = q_0$ или $q = -q_0$, при которых $E = 0$.

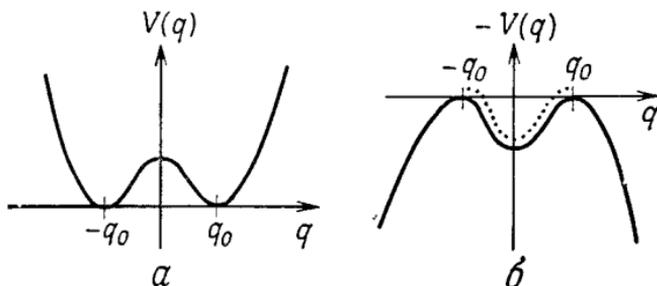


Рис. 16.2.

В классической механике, конечно, нет траектории с $E = 0$, связывающей значения q_0 и $-q_0$. Но в соответствующей квантовой механической задаче возможен туннельный переход, так что истинным основным состоянием является не $|q_0\rangle$ и не $| -q_0\rangle$, а их суперпозиция

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|q_0\rangle + | -q_0\rangle). \quad (16.57)$$

Амплитуда квантовомеханического туннельного перехода может быть вычислена с помощью классической траектории частицы, движущейся в мнимом времени. Это связано с тем, что в мнимом времени, когда $t = -i\tau$, а $(dq/dt)^2 = -(dq/d\tau)^2$, энергия системы определяется выражением

$$-E = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) \right], \quad (16.56a)$$

и задача становится эквивалентной задаче о движении частицы в потенциале $-V(q)$, показанном на рис. 16.2, б. Таким образом, в мнимом времени существует траектория, идущая от $-q_0$ к q_0 с $E = 0$. Положив в (16.56a) $E = 0$, мы можем найти эту траекторию:

$$q(\tau) = q_0 \operatorname{th}(2^{1/2} q_0 \tau). \quad (16.58)$$

Действие на этой траектории в мнимом времени конечно и выражается в виде

$$\begin{aligned} S_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 - [-V(q)] \right\} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau V(q) = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [q^2(\tau) - q_0^2]^2 d\tau = \frac{4}{3} 2^{1/2} q_0^3. \end{aligned} \quad (16.59)$$

Чтобы найти амплитуду туннельного перехода, используем формализм функциональных интегралов, в котором амплитуда перехода определяется как

$$\langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle = \int [dq] e^{iS/\hbar}. \quad (16.60)$$

В мнимом времени (в евклидовом пространстве) эта формула принимает вид

$$\langle q_f | e^{-H\tau/\hbar} | q_i \rangle = \int [dq] e^{-S_E/\hbar}, \quad (16.61)$$

где $S_E = -iS$ — евклидово действие. Правую часть (16.61) можно рассматривать как сумму по всем возможным траекториям, идущим от q_i к q_f . В квазиклассическом приближении (разложении по степеням \hbar) основной вклад в интеграл (16.61) дают те траектории, для которых S_E стационарно. Нетрудно убедиться, что амплитуда туннельного перехода в рассматриваемом случае имеет вид

$$T \sim e^{-S_E/\hbar} (1 + O(\hbar)) \approx \exp(-4\sqrt{2}q_0^3/3\hbar). \quad (16.62)$$

Такой результат можно подтвердить явными вычислениями (детали см. в работе [94]).

Этот пример и уравнение (16.53) позволяют интерпретировать инстантонные решения как конфигурации, соответствующие туннельным переходам между различными вакуумными состояниями: $|n\rangle \rightarrow |n+1\rangle$. Если обобщить амплитуду перехода в (16.61) на теорию поля, то можно обнаружить, что не все полевые конфигурации (траектории) приводят к конечному действию, так как в теории поля мы имеем дело с бесконечным числом степеней свободы. Но в квазиклассическом приближении конфигурации, на которых действие бесконечно, не дают вклад в функциональный интеграл, так как каждая траектория в нем имеет весомой множитель $e^{-S_E/\hbar}$. Поэтому в данном случае доминирующий вклад дают конфигурации, на которых действие конечно. Следовательно, амплитуда туннельного перехода в квазиклассическом приближении может быть вычислена в терминах инстантонных конфигураций и имеет вид

$$T \sim e^{-S_E} \approx \exp(-8\pi^2/g^2), \quad (16.63)$$

где мы воспользовались условием (16.32). Выражение (16.63) явно указывает на то, что этот эффект не может быть обнаружен в рамках обычной теории возмущений по константе связи.

θ -вакуум

Так как вакуумные состояния $|n\rangle$, соответствующие различным топологическим индексам, разделены барьерами конечной энергии и между ними происходят туннельные переходы, можно

предположить, что истинное вакуумное состояние представляет собой суперпозицию этих состояний. Отметим, что при калибровочном преобразовании T_1 , соответствующем топологическому индексу, равному единице, топологический индекс состояния увеличивается на единицу, т. е.

$$T_1 |n\rangle = |n+1\rangle, \quad (16.64)$$

а калибровочная инвариантность означает, что оператор T_1 коммутирует с гамильтонианом:

$$[T_1, H] = 0. \quad (16.65)$$

Эта ситуация аналогична известной задаче о периодическом потенциале, где роль T играет оператор трансляций, истинным основным состоянием является *блховская волна* и, кроме того, существует сохраняющийся *квазиимпульс*. Истинный, или θ -вакуум может быть построен следующим образом:

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{-in\theta} |n\rangle; \quad (16.66)$$

он является собственным вектором оператора калибровочного преобразования:

$$T_1 |\theta\rangle = e^{i\theta} |\theta\rangle. \quad (16.67)$$

Так же как квазиимпульс в случае периодического потенциала, θ отмечает в теории физически неэквивалентные секторы; внутри каждого сектора можно исследовать распространение калибровочно-инвариантных возмущений. Так как секторы, соответствующие различным значениям θ , никак не связаны друг с другом, то не существует никакого метода для определения значения θ .

В терминах θ -вакуума амплитуда перехода вакуум — вакуум в формализме функциональных интегралов должна иметь следующий вид:

$$\langle \theta' | e^{-iHt} | \theta \rangle_J = \delta(\theta - \theta') I_J(\theta). \quad (16.68)$$

Записывая левую часть через вакуумные состояния с различными топологическими индексами, имеем

$$\begin{aligned} \langle \theta' | e^{-iHt} | \theta \rangle_J &= \sum_{m, n} e^{im\theta'} e^{-in\theta} \langle m | e^{-iHt} | n \rangle_J = \\ &= \sum_{m, n} e^{-i(n-m)\theta} e^{im(\theta' - \theta)} \int [dA]_{n-m} \exp\left(i \int (\mathcal{L} + JA) d^4x\right), \end{aligned} \quad (16.69)$$

где мы воспользовались соотношением (16.54). Выражение (16.69) можно представить в стандартной форме, обозначая

$n - m$ через v и суммируя по индексу m :

$$I_J(\theta) = \sum_v e^{-iv\theta} \int [dA]_v \exp \left[-i \int (\mathcal{L} + JA) d^4x \right] = \\ = \sum_v \int [dA]_v \exp \left[-i \int (\mathcal{L}_{\text{эфф}} + JA) d^4x \right], \quad (16.70)$$

где, воспользовавшись (16.28), мы положили

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} + \frac{\theta}{16\pi^2} \text{tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}). \quad (16.71)$$

Таким образом, богатая структура вакуума в калибровочной теории, связанная с туннельными переходами между состояниями с различными топологическими индексами, приводит к появлению в эффективном лагранжиане члена, нарушающего P - и CP -инвариантность. Как уже отмечалось в разд. 10.2, обычно такой член отбрасывают, так как величину $F\tilde{F}$ можно выразить в виде дивергенции тока (16.24) и, следовательно, в виде поверхностного члена в действии (соотношение (16.26)). Тем не менее, так как имеется нетривиальная инстантонная конфигурация калибровочного поля, которая не исчезает на бесконечности (соотношение (16.22)), такой «аномальный» член на самом деле остается в неабелевых калибровочных теориях поля.

16.3. ИНСТАНТОНЫ И ПРОБЛЕМА $U(1)$

Проблема $U(1)$

Идея киральной симметрии и описание кварк-глюонного взаимодействия в рамках КХД, казалось бы, противоречат друг другу. Для простоты мы проиллюстрируем эту проблему в случае, когда в теории имеются только два кварковых аромата — кварки u и d . В пределе $m_{u,d} \rightarrow 0$ лагранжиан КХД обладает симметрией $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$, которая шире киральной симметрии $SU(2)_L \times SU(2)_R$, рассмотренной в гл. 5. Симметрия $U(1)_V$, связанная с преобразованием $q_i \rightarrow e^{i\alpha} q_i$, приводит к току

$$J_\mu^B = \bar{u} \gamma_\mu u + \bar{d} \gamma_\mu d.$$

Это как раз барионный ток в случае двух ароматов, и $U(1)_V$ -симметрия выражает закон сохранения барионного числа. Но $U(1)_A$ -симметрия, связанная с преобразованием $q_i \rightarrow e^{i\beta \gamma_5} q_i$ и с током

$$J_\mu^5 = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d, \quad (16.72)$$

по-видимому, не соответствует какой-либо наблюдаемой симметрии в спектре адронов (например, мы не наблюдаем удвоения четности барионных состояний). Поэтому мы предполагаем, что

$U(1)_A$ -симметрия спонтанно нарушена и появляются дополнительные безмассовые псевдоскаляры, кроме пионного изотриплета, являющегося изотриплетом голдстоуновских частиц, возникающих в результате спонтанного нарушения киральной $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии. В случае массивных кварков предполагается, что этот новый голдстоуновский $U(1)$ -бозон имеет массу, сравнимую с массой пиона, так как они состоят из тех же кварков. (Это утверждение ниже мы уточним количественно.) Такой изоскалярный псевдоскалярный мезон экспериментально не наблюдался. Соответствующими квантовыми числами обладает η -мезон, но он слишком тяжел. Обычно эта проблема называется «проблемой $U(1)$ », или «проблемой массы η -мезона» [187]. Как мы увидим, существование инстантонов разрешает эту проблему [388]. Существует еще одна проблема $U(1)$, связанная с распадом $\eta \rightarrow 3\pi$. Ниже мы коснемся этой проблемы и метода ее решения.

Проблема массы η -мезона. Может показаться, что присутствие в J_μ^5 (взаимодействующем с глюонами) аномалии АБД позволит избежать этого парадокса, так как дивергенция тока J_μ^5 не обращается в нуль в пределе $m_u, d \rightarrow 0$:

$$\partial^\mu J_\mu^5 = 4 \frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr} (G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}) + 2im_u \bar{u} \gamma_5 u + 2im_d \bar{d} \gamma_5 d, \quad (16.73)$$

где $G_{\mu\nu}$ — матрица тензора глюонного поля, $\tilde{G}^{\mu\nu}$ — матрица дуального тензора, и мы отказались от нормировки полей, принятой в (16.17). (Множитель 4 перед первым членом в правой части соответствует теории с двумя ароматами $2N_F = 4$.) Но проблема не так проста, как может показаться. Мы уже видели из (16.24), что член $\text{tr} G \tilde{G}$ сам является дивергенцией тока:

$$\partial^\mu K_\mu = 4 \frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr} G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (16.74)$$

где

$$K_\mu = 4 \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} G^{\nu\lambda} A^\rho, \quad (16.75)$$

а $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$ — глюонное поле. Таким образом, мы можем определить новый аксиально-векторный ток

$$\tilde{J}_\mu^5 = J_\mu^5 - K_\mu, \quad (16.76)$$

сохраняющийся в пределе $m_u, d \rightarrow 0$:

$$\partial^\mu \tilde{J}_\mu^5 = 2im_u \bar{u} \gamma_5 u + 2im_d \bar{d} \gamma_5 d. \quad (16.77)$$

Очевидно, что ток K_μ , а следовательно, и J_μ^5 , ненаблюдаемы, так как они не калибровочно-инвариантны. Тем не менее, поскольку

заряд

$$\tilde{Q}_5 = \int \tilde{J}_0^5 d^3x \quad (16.78)$$

сохраняется, соответствующая симметрия, реализованная голдстоуновским способом, привела бы к возникновению псевдоскалярного мезона с $I = 0$ и с массой m_0 [406]:

$$m_0 \leq (\sqrt{3}) m_\pi. \quad (16.79)$$

Чтобы это увидеть, воспользуемся стандартной техникой алгебры токов и получим тождество Уорда, полностью аналогичное (5.228):

$$m_{0f_0}^2 = i \frac{m_0^2 - k^2}{m_0^2} \left\{ ik^\nu \int d^4x e^{-ikx} \langle 0 | T (\partial^\mu \tilde{J}_\mu^5(0) \tilde{J}_\nu^5(x)) | 0 \rangle + \right. \\ \left. + \int d^4x e^{-ikx} \langle 0 | \delta(x_0) [\partial^\mu \tilde{J}_\mu^5(0), \tilde{J}_0^5(x)] | 0 \rangle \right\}, \quad (16.80)$$

где f_0 — постоянная распада изоскалярного мезона. Так как в первом члене правой части нет полюса, соответствующего нулевой массе, переходя к пределу $k^\nu \rightarrow 0$, мы свяжем $m_{0f_0}^2$ с σ -членом, имеющим тот же вид, что и в случае $m_\pi^2 f_\pi^2$, рассмотренном в разд. 5.5. Таким образом,

$$m_{0f_0}^2 = m_\pi^2 f_\pi^2. \quad (16.81)$$

Это отражает тот факт, что коммутатор \tilde{J}_μ^5 с массовыми членами кварков совпадает с соответствующим коммутатором оператора J_μ^5 . Чтобы продвинуться дальше, запишем (16.72) в виде суммы октета и синглета группы $SU(3)$:

$$J_\mu^5 = \frac{1}{\sqrt{3}} J_\mu^{(8)5} + \sqrt{\frac{2}{3}} J_\mu^{(0)5}, \quad (16.82)$$

где

$$J_\mu^{(8)5} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d - 2\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 s),$$

$$J_\mu^{(0)5} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d + \bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 s).$$

Считая, что $SU(3)$ является хорошей симметрией и все постоянные распада псевдоскалярного октета равны, мы немедленно получаем

$$f_0 \geq \frac{1}{\sqrt{3}} f_\pi, \quad (16.83)$$

откуда и следует ограничение (16.79), особенно если допустить, что возможно существование более чем одного изоскалярного псевдоскалярного мезона, взаимодействующего с \tilde{J}_μ^5 . Как впервые указали Когут и Сасскинд [244], один из путей избежать обескураживающего результата (16.79) заключается в том, что-

бы ток \tilde{J}_μ^5 взаимодействовал с «частицей», не обладающей массой, даже когда $m_{u,d} \neq 0$. Тогда первый член в правой части (16.80) не исчезает в пределе $k_\nu \rightarrow 0$, вследствие чего отсутствует простая взаимосвязь между $m_0^2 f_0^2$ и σ -членом и нет ограничения на m_0 . Так как \tilde{J}_μ^5 не является калибровочно-инвариантным, можно предположить, что этот полюс, зависящий от калибровки и соответствующий безмассовой частице, не приводит к появлению полюсов у физических (калибровочно-инвариантных) величин. Как мы увидим, в решении т'Хофта проблемы $U(1)$ действительно реализуется механизм Когута — Сасскинда в новом инстантонном θ -вакууме. В этом случае $U(1)_A$ -симметрия спонтанно нарушена, но при этом голдстоуновский бозон с $I=0$ не возникает.

Проблема распада $\eta \rightarrow 3\pi$. Необходимо отметить, что существует и вторая проблема $U(1)$, связанная с распадом $\eta \rightarrow 3\pi$, которая также может быть решена с помощью механизма Когута — Сасскинда. Мы уже указывали в конце гл. 5, что в киральном пределе обмен виртуальными фотонами приводит к нулевой амплитуде процесса $\eta \rightarrow 3\pi$ [347]. Поэтому данный распад должен происходить за счет разности масс кварков в члене, соответствующем нарушению изоспиновой симметрии:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (m_u - m_d) (\bar{u}u - \bar{d}d). \quad (16.84)$$

Следовательно, главный член в киральном возмущении [57] имеет вид

$$\langle 3\pi | \mathcal{L}' | \eta \rangle \xrightarrow{q_\pi \rightarrow 0} (m_u - m_d) A / \sqrt{2} f_\pi^2, \quad (16.85)$$

где

$$A = \langle \pi\pi | m_u \bar{u}\gamma_5 u + m_d \bar{d}\gamma_5 d | \eta \rangle = \frac{1}{2i} \langle \pi\pi | \partial^\mu \tilde{J}_\mu^5(0) | \eta \rangle, \quad (16.86)$$

а двухпионная система и η -мезон имеют одинаковые энергию и импульс. Таким образом, даже при $m_u \neq m_d$ амплитуда распада $\eta \rightarrow 3\pi$ по-прежнему обращается в нуль, поскольку величина A в (16.86) является полной дивергенцией, взятой между состояниями с одним и тем же 4-импульсом. Итак, мы убеждаемся, что и вторая проблема $U(1)$ может быть решена за счет существования полюса, соответствующего безмассовой частице, взаимодействующей с током \tilde{J}_μ^5 , и приводящего к тому, что амплитуда A отлична от нуля.

θ -вакуум в присутствии безмассовых фермионов

Покажем теперь, каким образом структура θ -вакуума приводит к спонтанному нарушению $U(1)_A$ -симметрии и почему связанная с этим нарушением безмассовая частица не является фи-

зической величиной. Вместо того чтобы следовать первоначальным вычислениям т'Хофта в формализме функциональных интегралов, укажем здесь только на физические идеи, лежащие в основе, и приведем некоторые эвристические рассуждения.

Поскольку заряд \tilde{Q}_5 не является калибровочно-инвариантной величиной при калибровочном преобразовании, характеризуемом топологическим индексом n (см. (16.64)), он изменяется (см., например, [70]) следующим образом:

$$\tilde{Q}_5 \rightarrow \tilde{Q}'_5 = T_n^{-1} \tilde{Q}_5 T_n = \tilde{Q}_5 + 2nN_F, \quad (16.87)$$

где N_F — число безмассовых кварковых ароматов. Проще всего проверить соотношение (16.87) следующим образом. Положим первоначальный заряд \tilde{Q}_5 равным нулю; тогда из равенства

$$\tilde{Q}'_5 = \int d^3x K'_0, \quad (16.88)$$

где

$$K'_0 = \frac{2N_F g^2}{4\pi^2} \frac{1}{3} \varepsilon_{0ijk} \text{tr} (A_i A_j A_k), \quad A_i = U^{-1} \partial_i U,$$

следует соотношение (16.87), если выражение для \tilde{Q}'_5 сравнить с выражением для топологического индекса (16.16). Соотношение (16.87) означает, что T_n действует как оператор, «повышающий» киральность, — инстантоны «съедают» пары безмассовых кварков:

$$[\tilde{Q}_5, T_n] = 2nN_F T_n. \quad (16.89)$$

Более того, операторы T_n изменяют топологический индекс вакуума:

$$T_n |0\rangle = |n\rangle. \quad (16.90)$$

Однако

$$\tilde{Q}_5 |n\rangle = 2nN_F |n\rangle, \quad (16.91)$$

поскольку (16.89) и $\tilde{Q}_5 |0\rangle = 0$. Таким образом, вакуумное состояние с определенным топологическим квантовым числом обладает также определенной киральностью (т. е. является собственным состоянием оператора \tilde{Q}_5). Так как заряд \tilde{Q}_5 сохраняется:

$$[\tilde{Q}_5, H] = 0, \quad (16.92)$$

отличными от нуля будут только такие амплитуды переходов вакуум — вакуум, в которых начальные и конечные состояния имеют одни и те же топологические индексы:

$$\langle n | e^{-iHt} | m \rangle \sim \delta_{nm}, \quad (16.93)$$

или в более общем виде для любого оператора $P_\nu(x)$ с киральностью $2N_F \nu$

$$\langle n | e^{-iHt} P_\nu(x) | m \rangle \sim \delta_{n-m, \nu}. \quad (16.94)$$

Следовательно, в присутствии безмассовых фермионов (т. е. когда \bar{Q}_5 сохраняется) туннельные переходы между вакуумами с различными топологическими индексами, обсуждавшиеся в предыдущем разделе, становятся невозможными.

Означает ли это, что в рассматриваемой ситуации θ -вакуум не играет никакой роли? Нет, не означает, так как в вакууме $|n\rangle$ нарушается кластерное разложение. Например, среднее значение операторов, взятых в точках, находящихся друг от друга на значительном расстоянии, в вакуумном состоянии с $n=0$ не обращается в нуль, так как имеется «аномальный» вакуум с топологическим зарядом $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | P_v^+(x) P_v(y) | 0 \rangle &\xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \sum_m \langle 0 | P_v^+(x) | m \rangle \langle m | P_v(y) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | P_v^+(x) | v \rangle \langle v | P_v(y) | 0 \rangle \neq 0. \end{aligned} \quad (16.95)$$

Соотношение (16.95) указывает также на спонтанное нарушение симметрии, так как вакуумное среднее операторов, обладающих киральностью, отлично от нуля. Таким образом, θ -вакуум по-прежнему играет важную роль.

Каковы киральные свойства θ -вакуума? При киральных поворотах на угол α имеем

$$e^{-i\alpha\bar{Q}_5} |\theta\rangle = \sum_n e^{-in\theta - i\alpha 2nN_F} |n\rangle = |\theta + 2\alpha N_F\rangle,$$

т. е. θ -вакуум переходит в другой вакуум с $\theta' = \theta + 2\alpha N_F$. Таким образом, сохранение (зависящего от калибровки) тока означает, что теория инвариантна относительно вращений, изменяющих ее вакуумное состояние $|\theta\rangle \rightarrow |\theta'\rangle$. Это означает, что в присутствии безмассовых фермионов величина θ не имеет физического смысла: все значения θ одинаково подходят.

Малые θ -осцилляции — полюс Когута — Сасскинда

Описанная выше ситуация очень напоминает ту, с которой мы сталкивались в простой теории $\lambda\phi^4$ со спонтанным нарушением калибровочной $U(1)$ -симметрии (см. (5.138)). В этом случае в результате $U(1)$ -поворотов вакуумные состояния могли переходить одно в другое, как показано на рис. 5.3. Таким образом, параметр θ в КХД мы можем интерпретировать как параметр, характеризующий направление, фиксирование которого отвечает нарушению симметрии. Тем не менее между этими двумя теориями со спонтанным нарушением $U(1)$ -симметрии имеется очень существенное различие. В $U(1)$ -теории, описываемой лагранжианом (5.138), все вакуумные состояния, связанные друг с другом поворотами, эквивалентны. А в КХД параметр θ похож на константу взаимодействия: различным значениям θ соответствуют различные гильбертовы пространства. В $U(1)$ -теории

(5.138) показано, что малые осцилляции около истинного вакуума угловой составляющей (π), не требующие какой-либо энергии (т. е. возбуждения нулевой энергии), интерпретируются как физические безмассовые частицы (голдстоуновские бозоны). В отличие от этого изменения параметра θ в КХД не имеют какого-либо смысла, точно так же как квазимпульсы не могут быть изменены в случае периодического потенциала. Следовательно, малые осцилляции параметра θ в КХД соответствуют нефизической безмассовой частице. Но это как раз частица, соответствующая полюсу Когута — Сасскинда, необходимому для решения проблемы $U(1)$.

CP-проблема в сильных взаимодействиях

Хотя существование инстантонов, по-видимому, решает проблему $U(1)$, они приводят к появлению θ -члена в эффективном лагранжиане (16.71), нарушающему P -инвариантность и сохраняющему S -инвариантность (а следовательно, нарушающему CP -инвариантность). Четкий экспериментальный верхний предел дипольного момента нейтрона (см. разд. 12.2) можно рассматривать как ограничение на параметр θ в КХД, $\theta < 10^{-9}$. Это и есть CP -проблема в сильных взаимодействиях. Как рациональным образом объяснить столь малое значение θ , если считать, что это параметр сильных взаимодействий и, естественно, предполагать априори, что он порядка единицы? Казалось бы единственно правдоподобное решение состоит в том, что θ эффективно обращается в нуль. Было предложено несколько различных способов достижения этого, среди которых мы отметим следующие три подхода (см., например, [421]). (Первые два механизма предполагают, что существует глобальная $U(1)$ -симметрия и S -матрица, как отмечалось выше, не зависит от θ , поэтому с помощью вращения можно всегда перейти к нулевому его значению.)

1. *Кварк нулевой массы.* Точная $U(1)$ -симметрия возникает из-за того, что масса одного из кварков (например, m_u) равна нулю. Однако вычисления, основанные на алгебре токов, показывают, что эта возможность чрезвычайно маловероятна.

2. *Аксионное решение.* Увеличить число хиггсовских мезонов таким образом, чтобы КХД вместе со стандартной теорией электрослабого взаимодействия все же обладала глобальной $U(1)_{PQ}$ -симметрией [317], даже если $m_{u,d} \neq 0$. Но в этом случае один из скаляров (аксион) играет роль голдстоуновского бозона для группы $U(1)_{PQ}$. На классическом уровне эта частица безмассовая, а на квантовом у нее возникает небольшая масса (так же как у η -мезона) только за счет аксиальной аномалии и взаимодействия инстантонов [410, 421]. Так как простейший вариант этого подхода, сформулированный в рамках $SU(2) \times U(1)$ -мо-

дели, исключается экспериментом, приходится постулировать такую структуру в рамках $SU(5)$ -модели великого объединения, что приведет к появлению «невидимого аксиона» с бесконечно малыми массой и константами взаимодействия [111, 234]. Но при этом могут возникнуть некоторые проблемы в стандартной космологии (см., например, [362]).

3. *Мягкое нарушение CP -инвариантности.* Предлагалось также считать, что равенство $\theta = 0$ должно выполняться из-за требования симметрии («сильные взаимодействия CP -инвариантны»). Но этого недостаточно, так как высшие порядки в слабых взаимодействиях (нарушающие CP -инвариантность) приводят к появлению зависящих от γ_5 массовых членов для кварков. Чтобы избавиться от них, необходимо произвести киральные повороты, которые приведут к появлению θ -члена. Чтобы иметь вычисляемый и малый ($< 10^{-9}$) параметр θ_{wk} , нарушение CP -инвариантности в слабых взаимодействиях должно быть мягким (т. е. должно осуществляться операторами размерности меньше четырех). Соответствующую реалистическую модель до сих пор построить не удалось.

Таким образом, мы видим, что ни одно из предложенных решений не является полностью удовлетворительным, и значение параметра θ в КХД остается невыясненным. Мы отсылаем читателя к работе [279], являющейся одним из последних обзоров по КХД, включающих в себя такие вопросы, как инстантоны, проблема $U(1)$ и т. д.

Наконец, сделаем очень краткие замечания о роли, которую играют инстантоны. При очень малых константах взаимодействия g , соответствующих очень малым расстояниям r , как следует из (16.63), эффекты туннельных переходов ничтожно малы, и при соответствующих условиях можно пользоваться теорией возмущений КХД, как показано в гл. 10. При некоторых промежуточных значениях g можно по-прежнему пользоваться теорией возмущений, но с учетом возможности вакуумных туннельных переходов. Это приводит [71] к внезапно быстрому росту g при увеличении r от нуля до расстояния, сравнимого с размером адрона ($\sim 0,5$ ферми). Этот результат согласуется с феноменологическими моделями кварков и с вычислениями калибровочной теории на решетке, которую мы рассмотрели в конце разд. 10.5. Для больших расстояний в настоящее время нет надежных методов вычисления инстантонных эффектов (в действительности не ясно даже, существенны ли они вообще в этом случае), хотя они напоминают нам о том, что вакуум КХД должен иметь очень сложную структуру.

Приложение А ОБОЗНАЧЕНИЯ

МЕТРИКА

$$\text{Метрический тензор } g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Контравариантная координата

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.2})$$

Ковариантная координата $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\mathbf{x})$.

Скалярное произведение

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{A.3})$$

Производные

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (\text{A.4})$$

где

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Четырехмерная дивергенция } \partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{A.6})$$

МАТРИЦЫ ПАУЛИ

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2ie^{ijk}\sigma_k, \quad \varepsilon^{ijk} \text{ полностью антисимметричен, } \varepsilon^{123} = 1; \quad (\text{A.9})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}. \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Полнота: } \sum_i (\sigma_i)_{ab} (\sigma_i)_{cd} = 2 \left(\delta_{bc} \delta_{ad} - \frac{1}{2} \delta_{ab} \delta_{cd} \right). \quad (\text{A.11})$$

МАТРИЦЫ ДИРАКА

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma_\mu = (\gamma_0, -\boldsymbol{\gamma}), \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (\text{A.14})$$

Матрица спина $s^i = \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}\sigma^{jk}$, $i = 1, 2, 3$. (A.15)

Зарядовое сопряжение $\psi^c = C\psi^\dagger$, $C\gamma_\mu C^\dagger = -\gamma_\mu^*$. (A.16)

Тождество $\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda = g_{\alpha\beta}\gamma_\lambda + g_{\beta\lambda}\gamma_\alpha - g_{\alpha\lambda}\gamma_\beta + i\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^\mu\gamma_5$. (A.17)

Преобразования Фирца

пусть $\Gamma_S = 1$, $\Gamma_V = \gamma_\mu$, $\Gamma_T = \sigma_{\mu\nu}$, $\Gamma_A = \gamma_\mu\gamma_5$, $\Gamma_P = \gamma_5$: (A.18)

тогда $\sum_i g_i (\Gamma_i)_{\alpha\beta} (\Gamma_i)_{\gamma\delta} = \sum_j \hat{g}_j (\Gamma_j)_{\alpha\delta} (\Gamma_j)_{\gamma\beta}$, (A.19)

где индексы i, j принимают значения S, V, T, A и P , а величины g_i и \hat{g}_j связаны соотношением

$$\begin{bmatrix} \hat{g}_S \\ \hat{g}_V \\ \hat{g}_T \\ \hat{g}_A \\ \hat{g}_P \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 12 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -2 & 0 & 1/2 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 12 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_S \\ g_V \\ g_T \\ g_A \\ g_P \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Представление Дирака

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Эрмитово сопряжение

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma^{\mu\nu}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \quad (\text{A.22})$$

Матрица спина $s = 1/2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$. (A.23)

Зарядовое сопряжение $C = i\gamma_2$. (A.24)

ПЛОСКАЯ ВОЛНА И СПИНОРЫ ДИРАКА

Падающая плоская волна $e^{-ik \cdot x} \equiv \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$. (A.25)

Уходящая плоская волна $e^{ik \cdot x} \equiv \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$, (A.26)

где $\omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$. (A.27)

Пространственно-временная трансляция

$$A(x) = e^{ip \cdot x} A(0) e^{-ip \cdot x}, \quad (\text{A.28})$$

где $p^\mu = (H, \mathbf{p})$ — оператор энергии-импульса.

$$\text{Уравнение Клейна — Гордона} \quad (\partial^2 + \mu^2) \phi(x) = 0. \quad (\text{A.29})$$

$$\text{Уравнение Дирака} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (\text{A.30})$$

В импульсном пространстве

$$(\hat{p} - m)u(p, s) = 0, \quad (\hat{p} + m)v(p, s) = 0, \quad (\text{A.31})$$

где $u(p, s)$ и $v(p, s)$ — спиноры Дирака.

Нормировка

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = 2m\delta_{ss'}, \quad \bar{v}(p, s)v(p, s') = -2m\delta_{ss'}. \quad (\text{A.32})$$

Операторы проектирования

$$\begin{aligned} \sum_s u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) &= (\hat{p} + m)_{\alpha\beta}, \\ \sum_s v_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p, s) &= (\hat{p} - m)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Разложение Гордона

$$\bar{u}(p, s)\gamma^\mu u(q, s) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p, s) [(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu] u(q, s), \quad (\text{A.34})$$

$$\bar{u}(p, s)\gamma^\mu\gamma_5 u(q, s) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p, s) [(p-q)^\mu\gamma_5 + i\sigma^{\mu\nu}(p+q)_\nu\gamma_5] u(q, s).$$

В представлении Дирака (A.21) спиноры Дирака даются формулами

$$u(p, s) = (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_s, \quad v(p, s) = (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s, \quad (\text{A.35})$$

$s = 1, 2,$

где

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}. \quad (\text{A.36})$$

НОРМИРОВКА СОСТОЯНИЙ,

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ РАСПАДА

Одночастичные состояния нормируются следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}, \alpha | \mathbf{p}', \alpha' \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (\text{A.37})$$

где α, α' — индексы спина и (или) внутренней симметрии. Оператор проектирования на одночастичное состояние

$$\begin{aligned} \sum_{p, \alpha} |p, \alpha\rangle \langle p, \alpha| &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{\alpha} |p, \alpha\rangle \langle p, \alpha| = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) \sum_{\alpha} |p, \alpha\rangle \langle p, \alpha|. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Вероятность перехода в единицу времени в единичном объеме для процесса $i \rightarrow f$ равна

$$\omega(i \rightarrow f) = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) |\langle f | T | i \rangle|^2, \quad (\text{A.39})$$

где $\langle f | T | i \rangle$ — ковариантная T -матрица, связанная с S -матрицей соотношением

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \langle f | T | i \rangle. \quad (\text{A.40})$$

Скорость распада

Вероятность перехода в единицу времени и в единицу объема в определенное конечное состояние дается формулой

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{\omega(i \rightarrow f)}{\rho_i} dN_f, \quad (\text{A.41})$$

где $\rho_i = 2E_i$ — плотность распадающегося состояния, а $dN_f =$

$$= \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \text{ — плотность конечного состояния.}$$

Полная скорость распада равна

$$\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2E_i} \times \\ \times \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_i - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\langle f | T | i \rangle|^2 S, \quad (\text{A.42})$$

где S — статистический множитель, который получается за счет учета фактора $1/m!$, если в конечном состоянии присутствуют m одинаковых частиц:

$$S = \prod_i \frac{1}{m_i!}. \quad (\text{A.43})$$

Сечения рассеяния

Сечение процесса $a_1 + a_2 \rightarrow f$ дается формулой

$$d\sigma(a_1 + a_2 \rightarrow f) = \frac{\omega(a_1 + a_2 \rightarrow f)}{J_i} dN_f, \quad (\text{A.44})$$

где J_i — фактор потока налетающих частиц, определяемый выражением

$$J_i = \rho_1 \rho_2 v, \quad (\text{A.45})$$

где ρ_1, ρ_2 — плотности начального состояния, а v — относительная скорость между двумя частицами в начальном состоянии.

Фактор потока J_i можно записать в системе центра масс:

$$J_i = 2E_1 2E_2 \left| \frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} \right| = 4 |p_1 E_2 - p_2 E_1| = \\ = 4 |p_1| (E_1 + E_2) = 4 [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}. \quad (\text{A.46})$$

Заметим, что J_i в (A.46) выражается в терминах лоренц-инвариантных величин. Следовательно, выражение (A.46) выполняется и в любой другой системе отсчета.

Сечение дается формулой

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_f)}{4 [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} |\langle f | T | i \rangle|^2 \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^2 2E_j} S. \quad (\text{A.47})$$

Приложение Б

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

В теории поля стандартная процедура вычисления любой величины, представляющей интерес с точки зрения физики, основана на правилах Фейнмана. Эффективное использование этих правил в значительной степени упрощает вычисления. Самыми важными в правилах Фейнмана являются выражения для пропагаторов и вершин, характеризующих структуру теории. В настоящем приложении мы излагаем в общих чертах практический метод вывода выражений для пропагаторов и вершин в самом общем случае. В конце приложения приводятся результаты для случаев, интересных с физической точки зрения.

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ВЫВОДУ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОПАГАТОРОВ И ВЕРШИН, ВХОДЯЩИХ В ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

Случай теории $\lambda\phi^4$

Рассмотрим сначала простую теорию $\lambda\phi^4$, описывающую бозоны с нулевым спином, а затем обобщим полученные результаты на более сложные случаи. Если лагранжиан теории $\lambda\phi^4$ разбить на свободный лагранжиан \mathcal{L}_0 и лагранжиан взаимодействия \mathcal{L}_I :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (\text{Б.1})$$

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2, \quad (\text{Б.2})$$

$$\mathcal{L}_I(\phi) = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (\text{Б.3})$$

то производящий функционал для функций Грина примет вид

$$\begin{aligned} W[J] &= \int [d\phi] \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) + J(x)\phi(x)] d^4x \right\} = \\ &= \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_I \left(-i \frac{\partial}{\partial J} \right) \right] d^4x \right\} W_0[J], \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

где

$$W_0[J] = \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0(x) + J(x)\phi(x)] \right\}. \quad (\text{Б.5})$$

Так как свободный лагранжиан \mathcal{L}_0 (Б.2) квадратичен по полям, интеграл (Б.5) можно вычислить следующим образом. Запишем (Б.5) в виде

$$W_0[J] = \int [d\phi] \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + J(x) \phi(x) \right] d^4x \right\} = \\ = \int [d\phi] \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \phi(x) P(x) \phi(x) + J(x) \phi(x) \right] d^4x \right\}, \quad (\text{Б.6})$$

где

$$P(x) = -(\partial^2 + \mu^2 - i\varepsilon) - \text{эрмитов оператор}. \quad (\text{Б.7})$$

В подынтегральное выражение в (Б.6) мы включили $\exp \left\{ -\frac{1}{2} \times \times \int \varepsilon \phi^2 d^4x \right\}$, где $\varepsilon > 0$, чтобы сделать функциональный интеграл сходящимся. Пусть функция $\phi_c(x)$ является решением классического уравнения свободного поля в присутствии внешнего источника:

$$P(x) \phi_c(x) = -J(x). \quad (\text{Б.8})$$

Это уравнение можно решить с помощью техники функций Грина. Определим функцию $\Delta_F(x)$ следующим образом:

$$P(x) \Delta_F(x-y) = \delta^4(x-y). \quad (\text{Б.9})$$

Тогда

$$\phi_c(x) = - \int \Delta_F(x-y) J(y) d^4y. \quad (\text{Б.10})$$

Легко убедиться в том, что для оператора $P(x)$, определенного в (Б.7), имеем

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \Delta_F(k), \quad (\text{Б.11})$$

где

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{Б.12})$$

Произведем теперь в (Б.6) замену переменной интегрирования, переходя от $\phi(x)$ к $\phi'(x)$, причем

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \phi'(x). \quad (\text{Б.13})$$

Тогда соотношение (Б.6), как и в случае обычных гауссовских интегрирований, примет вид

$$W_0[J] = N \exp \left\{ -i \int \left[\frac{1}{2} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] d^4x d^4y \right\}, \quad (\text{Б.14})$$

где нормировочный множитель

$$N = \int [d\phi'] \exp \left\{ i \int \frac{1}{2} \phi'(x) P(x) \phi'(x) d^4x \right\} \quad (\text{Б.15})$$

не зависит от функции источника $J(x)$ и не существует при вычислении связной функции Грина. Производящий функционал

дается тогда выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[J] = N \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_I \left(-i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

а функция Грина определяется соотношением

$$\langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{Б.17})$$

Используя правило для функционального дифференцирования

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \int \delta^4(y-x) J(x) d^4x = \delta^4(x-y), \quad (\text{Б.18})$$

нетрудно видеть, что взятие функциональных производных в соотношениях (Б.16) и (Б.17) воспроизведет разложение, получаемое в соответствии с теоремой Вика.

Связные функции Грина могут быть получены дифференцированием функционала $\mathcal{W}[J]$ (соотношение (1.76)):

$$\begin{aligned} i^n \frac{\delta^n \ln \mathcal{W}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \\ = \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle_{\text{связ.}} \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Свободный пропагатор, двухточечную функцию нулевого порядка по константе связи λ можно получить из $\mathcal{W}_0[J]$ следующим образом:

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle_{\text{своб}} = i^2 \frac{\delta^2 \ln \mathcal{W}_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} = i \Delta_F(x-y). \quad (\text{Б.20})$$

Чтобы получить вершинную функцию в теории $\lambda \phi^4$, возьмем четырехточечную функцию $G^{(4)}(x_1 \dots x_4)$ и оставим только члены низшего порядка по λ . После некоторых алгебраических выкладок получим

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1 \dots x_4) = -i\lambda \int i\Delta_F(x_1-x) i\Delta_F(x_2-x) \times \\ \times i\Delta_F(x_3-x) i\Delta_F(x_4-x) d^4x, \end{aligned} \quad (\text{Б.21})$$

или в импульсном пространстве

$$G^{(4)}(k_1, \dots, k_4) = i\Delta_F(k_1) i\Delta_F(k_2) i\Delta_F(k_3) i\Delta_F(k_4) (-i\lambda), \quad (\text{Б.22})$$

где

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) G^{(4)}(k_1 \dots k_4) = \\ = \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i e^{-ik_i x_i} G^{(4)}(x_1 \dots x_4). \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

После удаления пропагаторов, соответствующих внешним линиям, четырехточечная сильно связанная функция (вершинная функция) имеет вид

$$\Gamma^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -i\lambda. \quad (\text{Б.24})$$

Таким образом, в теории $\lambda\phi^4$ пропагатор (Б.12) и вершина (Б.24) имеют вид

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \quad \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (\text{Б.25})$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad -i\lambda \quad (\text{Б.26})$$

Заметим, что пропагатор в импульсном пространстве представляет собой фурье-образ оператора, обратного к оператору $P(x)$, входящему в член, квадратичный по полям в свободном лагранжиане (Б.6). Вершиной является коэффициент в члене взаимодействия, умноженный на i и на число возможных перестановок одинаковых полей в нем.

Обобщение

Чтобы обобщить сформулированный выше результат на случай более сложных взаимодействий, рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \phi_i(x) P_{ij} \phi_j(x) + \chi_i^*(x) V_{ij}(x) \chi_j(x) + \bar{\psi}_i(x) X_{ij}(x) \psi_j(x) + \mathcal{L}_I(\phi, \chi, \chi^*, \psi, \bar{\psi}), \quad (\text{Б.27})$$

где ϕ_i (χ_i) — набор вещественных (комплексных) бозонных полей, которые могут быть скалярными или векторными, а ψ_i — набор фермионных полей. Индекс i является спинорным, лоренцевским, изоспинным и т. д. индексом. Операторы P , V и X являются матричными операторами, которые могут содержать производные; они должны быть обратимыми. Операторы X и V выбираются эрмитовыми, тогда как P является вещественным симметричным оператором:

$$X^\dagger = X, \quad V^\dagger = V, \quad P^T = P. \quad (\text{Б.28})$$

Предполагается, что эти операторы содержат фактор $i\epsilon$, так что функциональный интеграл является сходящимся. Общий член в $\mathcal{L}_I(x)$ имеет явный вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & \int d^4x_1 d^4x_2 \dots \\ & \dots \alpha_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p \dots i_q \dots}(x; x_1, x_2, \dots, x_m \dots, x_n \dots, x_p \dots, x_q \dots) \times \\ & \times \bar{\psi}_{i_1}(x_1) \dots \psi_{i_m}(x_m) \dots \phi_{i_n}(x_n) \dots \chi_{i_p}^*(x_p) \dots \chi_{i_q}(x_q) \dots \end{aligned} \quad (\text{Б.29})$$

Определим операторы, обратные P , V , X , следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sum_I P_{ij}(x) P_{iI}^{-1}(x-y) &= \delta_{ii} \delta^4(x-y), \\ \sum_I V_{ij}(x) V_{iI}^{-1}(x-y) &= \delta_{ii} \delta^4(x-y), \\ \sum_I X_{ij}(x) X_{iI}^{-1}(x-y) &= \delta_{ii} \delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (\text{Б.30})$$

а их фурье-образы равенствами

$$\begin{aligned} P_{ij}^{-1}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{P}_{ij}^{-1}(k), \\ V_{ij}^{-1}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{V}_{ij}^{-1}(k), \\ X_{ij}^{-1}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{X}_{ij}^{-1}(k). \end{aligned} \quad (\text{Б.31})$$

Тогда пропагаторы даются выражениями

$$\begin{aligned} j \dashrightarrow \dashrightarrow i \Delta_F^\phi(k)_{ij} &= \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle 0 | T(\phi_i(x) \phi_j(0)) | 0 \rangle = i [\tilde{P}^{-1}(k)]_{ij}, \\ j \dashrightarrow \dashrightarrow i \Delta_F^\chi(k)_{ij} &= \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle 0 | T(\chi_i^*(x) \chi_j(0)) | 0 \rangle = \\ &= i [\tilde{V}^{-1}(k)]_{ij}, \\ j \dashrightarrow \dashrightarrow i S_F(k)_{ij} &= \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle 0 | T(\bar{\psi}_i(x) \psi_j(0)) | 0 \rangle = \\ &= i [\tilde{X}^{-1}(k)]_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{Б.32})$$

Для определения вершины введем функцию

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1 i_2 \dots}(x; x_1, x_2, \dots) &= \int \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^4 (2\pi)^4} \dots e^{ik_1(x-x_1) + ik_2(x-x_2) + \dots} \times \\ &\times \bar{\alpha}_{i_1 i_2 \dots}(k_1, k_2, \dots). \end{aligned} \quad (\text{Б.33})$$

Функция $\bar{\alpha}$ содержит множители $ik_{j\mu}$, соответствующие каждой производной $\partial/\partial x_{j\mu}$, действующей на поле с аргументом x_j . Тогда вершина определяется соотношением

$$\begin{aligned} I(k_1, k_2, \dots) &= i \sum_{\{1 \dots m-1\}} \sum_{\{m \dots n-1\}} \sum_{\{n \dots p-1\}} \sum_{\{p \dots q-1\}} \sum_{\{q \dots\}} \times \\ &\times (-1)^P \bar{\alpha}_{i_1, i_2}(k_1, k_2, \dots). \end{aligned} \quad (\text{Б.34})$$

Суммирование производится по всем перестановкам индексов и импульсов, как показано на рис. Б.1. Направления импульсов выбираются таким образом, что все они входят в вершину. Любому полю $\bar{\psi}$ (или χ^*) соответствует линия со стрелкой, направленной из вершины, а полю ψ (или χ) соответствует линия с противоположно направленной стрелкой. Поля ϕ представляются линиями без направлений. Если имеется несколько фермионных полей, то важен только множитель $(-1)^P$. Каждой пе-

рестановке двух фермионных полей соответствует множитель (-1) .

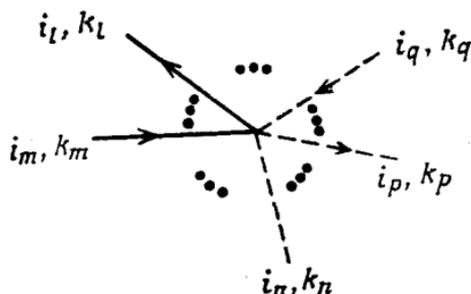


Рис. Б.1.

Например, член взаимодействия в теории $\lambda\phi^4$ можно записать в виде

$$-\frac{\lambda}{4!} \phi^{(4)}(x) = -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x_1 \dots d^4x_4 \delta^4(x-x_1) \delta^4(x-x_2) \times \\ \times \delta^4(x-x_3) \delta^4(x-x_4) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4). \quad (\text{Б.35})$$

Тогда

$$\alpha(x; x_1 \dots x_4) = -\frac{\lambda}{4!} \delta^4(x-x_1) \dots \delta^4(x-x_4), \quad (\text{Б.36})$$

$$\bar{\alpha}(k_1 \dots k_4) = -\frac{\lambda}{4!}. \quad (\text{Б.37})$$

Вершина определяется выражением

$$I(k_1 \dots k_4) = i \sum_{(1, 2, 3, 4)} \bar{\alpha}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \\ = i \sum_{(1, \dots, 4)} (-\lambda/4!) = -i\lambda. \quad (\text{Б.38})$$

Этот результат согласуется с полученным выше соотношением (Б.24).

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Имея выражения для пропагаторов и вершин, мы можем теперь сформулировать правила Фейнмана для вычисления функций Грина.

а. Нарисуйте все топологически различные связные диаграммы желаемого порядка.

б. В каждой диаграмме каждой внутренней линии поставьте в соответствие пропагатор:

$$\text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \quad \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad \text{для бозона со спином 0,}$$

$$\beta \xrightarrow{p} \alpha \quad \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} \quad \text{для фермиона со спином 1/2.}$$

Пропагатор бозона со спином 1 зависит от рассматриваемой теории.

в. Каждой вершине припишите вершинную функцию, приведенную в (Б.34) и выведенную из соответствующего члена в лагранжиане взаимодействия.

г. По каждому внутреннему импульсу k , не фиксированному законом сохранения импульса в вершине, выполните интегрирование $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$.

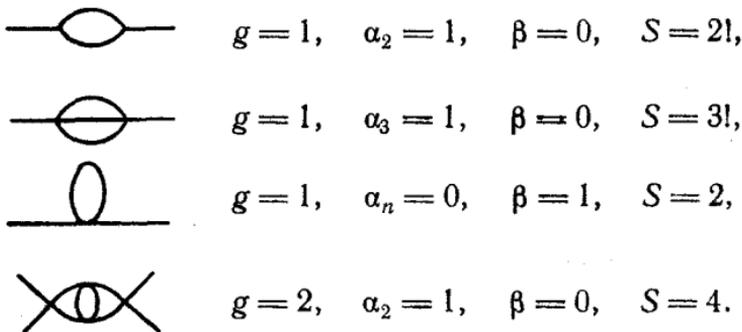
д. Умножьте выражение, соответствующее каждой диаграмме, на

- 1) множитель (-1) для каждой замкнутой фермионной линии;
- 2) множитель (-1) , если она отличается от другой такой же диаграммы только перестановкой двух одних и тех же внешних фермионных линий;
- 3) симметричный множитель S^{-1} , причем

$$S = g \prod_{n=2, 3, \dots} 2^\beta (n!)^{\alpha_n},$$

где α_n — число пар вершин, связанных n одинаковыми самосопряженными линиями, β — число линий, связывающих вершину с самой собой, а g — число перестановок вершин, которые при фиксированных внешних линиях оставляют диаграмму неизменной.

Например,



е. Собственная (или одночастично-неприводимая) функция Грина $\Gamma^{(n)}(p_1 \dots p_n)$ состоит из одночастично-неприводимых (1ЧН) диаграмм.

1) Для получения связной функции Грина $G^{(n)}(p_1 \dots p_n)$ припишите пропагаторы всем внешним линиям.

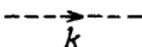
2) Для получения амплитуды рассеяния $T(p_1 \dots p_n)$ импульсы всех внешних линий поместите на массовую поверхность, т. е. $p_i^2 = m_i^2$, а внешним фермионным линиям припишите спиноры:

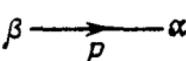
$u(p)$ [или $v(p)$] для фермионов [или антифермионов], входящих с импульсом p ; $\bar{u}(p)$ [или $\bar{v}(p)$] для фермионов [или антифермионов], выходящих с импульсом p . Внешним векторным бозонным линиям припишите векторы поляризации: $\epsilon_\mu(k, \lambda)$ [или $\epsilon_\mu^*(k, \lambda)$] для векторных бозонов, входящих (выходящих) с импульсом k .

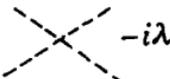
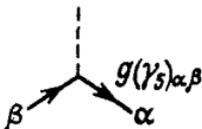
СПИСОК ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОПАГАТОРОВ И ВЕРШИН В ТЕОРИЯХ $\lambda\phi^4$, ЮКАВЫ, КЭД И КХД

а. Теория $\lambda\phi^4$ и теория Юкавы со скаляр-фермионным взаимодействием

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \bar{\psi} (i\gamma \cdot \partial - m) \psi + ig\psi\gamma_5\psi\phi.$$

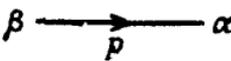
Скалярный пропагатор  $i\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 - \mu^2 + ie}.$

Фермионный пропагатор  $iS_F(p)_{\alpha\beta} = \left(\frac{i}{\not{p} - m + ie} \right)_{\alpha\beta}.$

Вершины  

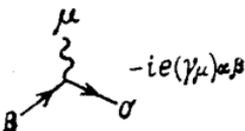
б. Квантовая электродинамика (КЭД)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi} (i\gamma \cdot \partial - e\gamma \cdot A - m) \psi.$$

Фермионный пропагатор  $iS_F(p)_{\alpha\beta} = \left(\frac{i}{\not{p} - m + ie} \right)_{\alpha\beta}$

Фотонный пропагатор  $iD_F(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + ie} \times$
 $\times [g_{\mu\nu} + (\xi - 1) k_\mu k_\nu / k^2];$

$\xi = 1$ в калибровке Фейнмана,
 $\xi = 0$ в калибровке Ландау.

Вершина 

в. Скалярная КЭД

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 +$$

$$+ [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi] - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2.$$

Скалярный
пропагатор

$$---\rightarrow--- \quad i\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 - \mu^2 + ie}.$$

Фотонный
пропагатор

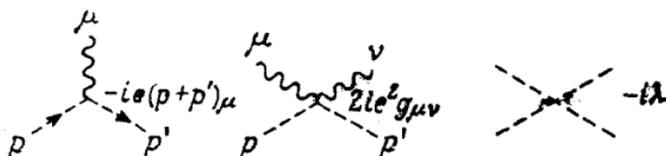
$$\nu \text{ ~~~~~ } \mu$$

$$k \quad iD_F(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + ie} \times$$

$$\times [g_{\mu\nu} + (\xi - 1) k_\mu k_\nu / k^2];$$

$\xi = 1$ в калибровке Фейнмана, $\xi = 0$ в калибровке Ландау.

Вершины



г. Неабелева калибровочная теория

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) \times$$

$$\times (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gC^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 -$$

$$- \bar{\eta}^a \partial_\mu (\partial^\mu \delta^{ac} - gC^{abc} A^{b\mu}) \eta^c + \bar{\psi} [i\gamma_\mu (\partial^\mu - igA^{a\mu} T^a) - m] \psi +$$

$$+ [(\partial^\mu - igA^{a\mu} R^a)\phi]^\dagger [(\partial_\mu - igA_\mu^b R^b)\phi] - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2.$$

Пропагатор
векторного
мезона

$$b \text{ ~~~~~ } \alpha$$

$$\nu \quad k \quad \mu \quad iD_F^{ab}(k)_{\mu\nu} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + ie} \times$$

$$\times [g_{\mu\nu} + (\xi - 1) k_\mu k_\nu / k^2];$$

$\xi = 1$ в калибровке Фейнмана — т'Хофта, $\xi = 0$ в калибровке Ландау.

Фермионный пропагатор $\beta \xrightarrow{p} \alpha \quad iS_F^{ij}(p)_{\alpha\beta} = \left(\frac{i\delta^{ij}}{p - m + ie} \right)_{\alpha\beta}.$

Скалярный пропагатор $m \text{ --- } \xrightarrow{k} \text{ --- } l \quad i\Delta_F^{lm}(k) = \frac{i\delta^{lm}}{k^2 - m^2 + ie}.$

Пропагатор духа $b \text{ } \xrightarrow{k} \text{ } \alpha \quad i\Delta_F^{ab}(k) = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + ie}.$

Вершины

$$igC^{abc}[(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\mu\lambda}]$$

$$-ig^2[C^{eab}C^{ecd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + C^{eac}C^{edb}(g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + C^{ead}C^{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu})]$$

$$gC^{abc}\rho_\mu$$

$$ig(\gamma_\mu)_{ab}(T^a)_{ij}$$

$$ig(p+p')_\mu R^a_{lm}$$

$$-ig^2 g_{\mu\nu} \{R^a, R^b\}_{lm}$$

Для КХД имеем

$$C^{abc} = f^{abc}, \text{ где } a, b, c = 1, 2, \dots, 8,$$

а матрицы представления имеют вид

$$(T^a)_{ij} = (\lambda^a/2)_{ij}, \text{ где } i, j = 1, 2, 3,$$

$$(R^a)_{lm} = 0.$$

ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ СТАНДАРТНОЙ $SU(2) \times U(1)$ -ТЕОРИИ В R_ξ -КАЛИБРОВКЕ

Поскольку эти правила несколько сложнее, мы укажем некоторые этапы их вывода.

Члены, фиксирующие калибровку, и члены с духами ФП в эффективном лагранжиане

После спонтанного нарушения симметрии из ковариантных производных скалярных полей возникают смешанные члены, со-

державшие векторные бозоны и скалярные частицы:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \left[\left(\partial_\mu - ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu - ig' \frac{B_\mu}{2} \right) (\phi' + \langle \phi \rangle_0) \right]^\dagger \times \\ &\times \left[\left(\partial^\mu - ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{A}^\mu - ig' \frac{B^\mu}{2} \right) (\phi' + \langle \phi \rangle_0) \right] = \\ &= ig \mathbf{A}^\mu \left[-\partial_\mu \phi'^\dagger \frac{\tau}{2} \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{\tau}{2} \partial_\mu \phi' \right] + \\ &+ ig' \frac{B^\mu}{2} [\langle \phi^\dagger \rangle_0 \partial_\mu \phi' - \partial_\mu \phi'^\dagger \langle \phi \rangle_0] + \dots \quad (\text{Б.39}) \end{aligned}$$

В практических расчетах удобнее исключить такие смешанные члены. Для этой цели мы выберем калибровочные функции (9.27) в следующем виде:

$$f_i = \partial_\mu A_i^\mu + ig \xi \left(\phi'^\dagger \frac{\tau_i}{2} \langle \phi \rangle_0 - \langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{\tau_i}{2} \phi' \right) \text{ для } SU(2), \quad (\text{Б.40})$$

$$f = \partial_\mu B^\mu + ig' \frac{\xi}{2} (\phi'^\dagger \langle \phi \rangle_0 - \langle \phi^\dagger \rangle_0 \phi') \text{ для } U(1),$$

так что фиксирующий калибровку член (9.68) выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{фк}} &= -\frac{1}{2\xi} \left[\partial_\mu \mathbf{A}^\mu + ig \xi \left(\phi'^\dagger \frac{\tau}{2} \langle \phi \rangle_0 - \langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{\tau}{2} \phi' \right) \right]^2 - \\ &- \frac{1}{2\xi} \left[\partial_\mu B^\mu + \frac{ig' \xi}{2} (\phi'^\dagger \langle \phi \rangle_0 - \langle \phi^\dagger \rangle_0 \phi') \right]^2. \quad (\text{Б.41}) \end{aligned}$$

Чтобы найти духи ФП из этих калибровочных условий, проведем инфинитезимальное калибровочное $SU(2)$ -преобразование с калибровочной функцией $\mathbf{u}(x)$:

$$\delta A_\mu^i(x) = \varepsilon^{ijk} u^j(x) A_\mu^k(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu u^i(x),$$

$$\delta \phi(x) = -i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{u}(x) \phi(x),$$

или

$$\delta \phi' = -i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{u} (\phi' + \langle \phi \rangle_0). \quad (\text{Б.42})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta f_i &= \partial_\mu \left[\varepsilon^{ijk} u^j A_\mu^k - \frac{1}{g} (\partial_\mu u^i) \right] + ig \xi \left[(\phi'^\dagger + \langle \phi^\dagger \rangle_0) i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{u} \frac{\tau_i}{2} \langle \phi \rangle_0 + \right. \\ &\quad \left. + \langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{\tau_i}{2} i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{u} (\phi' + \langle \phi \rangle_0) \right], \end{aligned}$$

$$\delta f = i \frac{g'}{2} \xi \left[(\phi'^\dagger + \langle \phi^\dagger \rangle_0) i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{u} \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^\dagger \rangle_0 i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{u} (\phi' + \langle \phi \rangle_0) \right],$$

или

$$\begin{aligned} \delta f_i &= \left\{ -\frac{1}{g} \partial^\mu [\delta_{ij} \partial_\mu - g \varepsilon_{ijk} A_\mu^k] - \right. \\ &\quad \left. - g \xi \left[\langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{1}{2} \langle \phi \rangle_0 \delta_{ij} + \phi'^\dagger \frac{\tau_j \tau_i}{4} \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{\tau_i \tau_j}{4} \phi' \right] \right\} u_j, \quad (\text{Б.43}) \end{aligned}$$

$$\delta f = -\frac{g'}{2} \xi \left[\langle \phi^\dagger \rangle_0 \tau_j \langle \phi \rangle_0 + \phi'^\dagger \frac{\tau_j}{2} \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^\dagger \rangle_0 \frac{\tau_j}{2} \phi' \right] u_j.$$

Аналогично при инфинитезимальных калибровочных $U(1)$ -преобразованиях с калибровочной функцией $\alpha(x)$,

$$\delta B_\mu = -\frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha, \quad \delta \phi' = -i \frac{\alpha}{2} (\phi' + \langle \phi \rangle_0), \quad (\text{Б.44})$$

имеем

$$\begin{aligned} \delta f_i &= -\frac{g}{4} \xi [2 \langle \phi^+ \rangle_0 \tau_i \langle \phi \rangle_0 + \phi'^+ \tau_i \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^+ \rangle_0 \tau_i \phi'] \alpha, \\ \delta f &= -\frac{1}{g'} \left\{ \partial^2 + \frac{g'}{4} \xi [2 \langle \phi^+ \rangle_0 \langle \phi \rangle_0 + \phi'^+ \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^+ \rangle_0 \phi'] \right\} \alpha. \end{aligned} \quad (\text{Б.45})$$

Мы можем объединить (Б.43) и (Б.45) с помощью матричных обозначений:

$$\delta \begin{pmatrix} f_i(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = \int d^4 y \begin{pmatrix} M_f(x, y)_{ij} & M_f(x, y)_i \\ M_f(x, y)_j & M_f(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j(y)/g \\ \alpha(y)/g' \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.46})$$

где

$$\begin{aligned} M_f(x, y)_{ij} &= - \left\{ \partial^\mu [\delta_{ij} \partial_\mu - g e_{ijk} A_\mu^k] + g^2 \xi \left[\frac{1}{2} \langle \phi \rangle_0^2 \delta_{ij} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi'^+ \frac{\tau_j \tau_i}{4} \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi'^+ \rangle_0 \frac{\tau_i \tau_j}{4} \phi' \right] \right\} \delta^4(x-y), \\ M_f(x, y)_j &= -\frac{g g'}{2} \xi \left[\langle \phi^+ \rangle_0 \tau_j \langle \phi \rangle_0 + \phi'^+ \frac{\tau_j}{2} \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^+ \rangle_0 \frac{\tau_j}{2} \phi' \right] \times \\ &\quad \times \delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (\text{Б.47})$$

$$M_f(x, y) = - \left\{ \partial^2 + \frac{g' \xi}{4} [2 |\langle \phi \rangle_0|^2 + \phi'^+ \langle \phi \rangle_0 + \langle \phi^+ \rangle_0 \phi'] \right\} \delta^4(x-y).$$

Лагранжиан (9.69), описывающий духи ФП, дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ДФП}} &= \int d^4 x d^4 y (\omega_i^\dagger(x), \chi^\dagger(x)) \begin{pmatrix} M_f(x, y)_{ij} & M_f(x, y)_i \\ M_f(x, y)_j & M_f(x, y) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \omega_j(y) \\ \chi(y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{Б.48})$$

Пропагаторы и вершины для бозонов и духов ФП

Определим физические векторные бозоны следующим образом:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2),$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W A_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad A_\mu = \sin \theta_W A_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu,$$

а скалярные мезоны запишем в виде

$$\phi' = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{\phi_1 + i \phi_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Для полей духов мы можем определить аналогичные комбинации:

$$\omega^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_1 \mp i\omega_2),$$

$$\omega_z = \cos \theta_W \omega_3 - \sin \theta_W \chi, \quad \omega_\gamma = \sin \theta_W \omega_3 + \cos \theta_W \chi.$$

Используя эти определения, легко вывести выражения для пропагаторов и квадратичной части лагранжиана $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_{\text{фк}} + \mathcal{L}_{\text{ДФП}}$ в (11.37), (11.59), (Б.41) и (Б.48):

$$W^\pm \text{ wavy} \sim \frac{-i}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} [g_{\mu\nu} + (\xi - 1)k_\mu k_\nu / (k^2 - \xi M_W^2)]$$

$$Z \text{ wavy} \sim \frac{-i}{k^2 - M_Z^2 + i\epsilon} [g_{\mu\nu} + (\xi - 1)k_\mu k_\nu / (k^2 - \xi M_Z^2)]$$

$$\phi^\pm \text{ dashed} \sim \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2 + i\epsilon}$$

$$\phi_2 \text{ dashed} \sim \frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2 + i\epsilon}$$

$$\phi_1 \text{ dashed} \sim \frac{i}{k^2 - 2\mu^2 + i\epsilon}$$

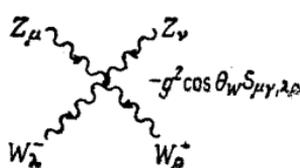
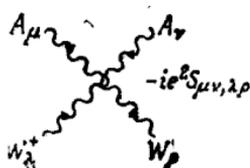
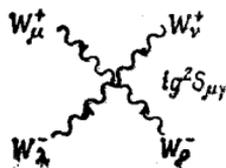
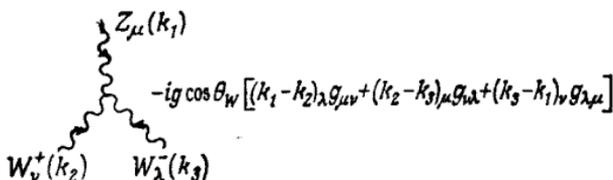
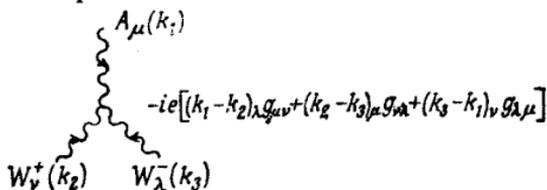
$$\omega^\pm \text{ dotted} \sim \frac{-i}{k^2 - \xi M_W^2 + i\epsilon}$$

$$\omega_z \text{ dotted} \sim \frac{-i}{k^2 - \xi M_Z^2 + i\epsilon}$$

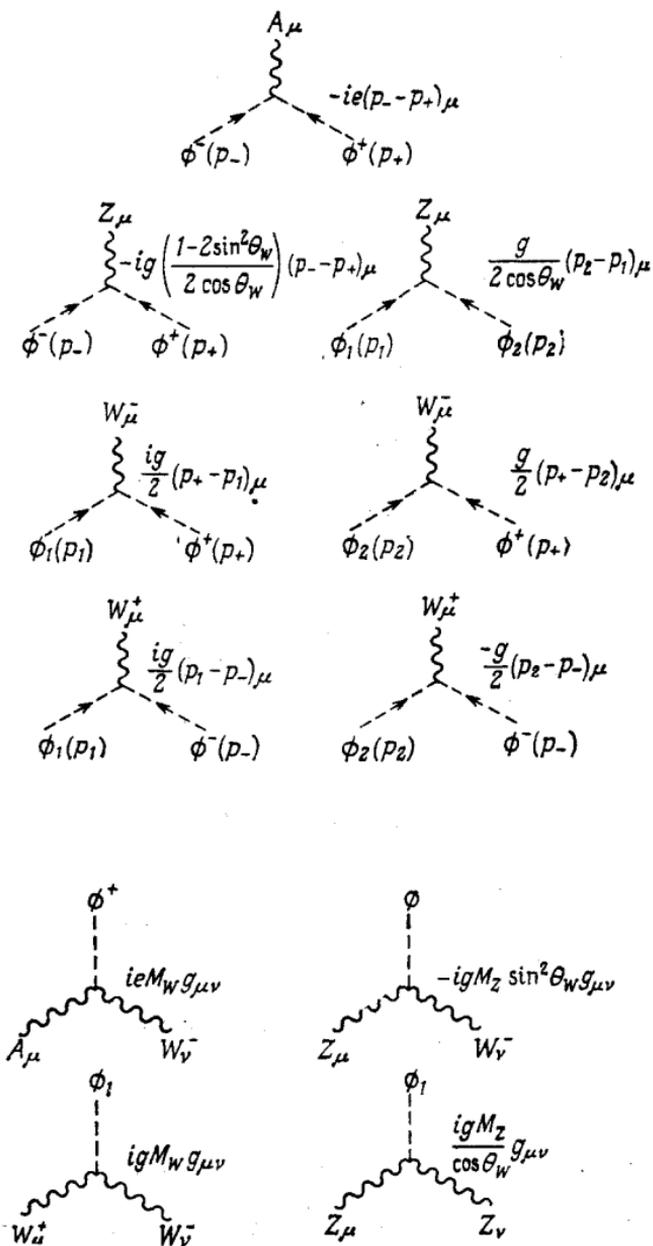
$$\omega_\gamma \text{ dotted} \sim \frac{-i}{k^2 + i\epsilon}$$

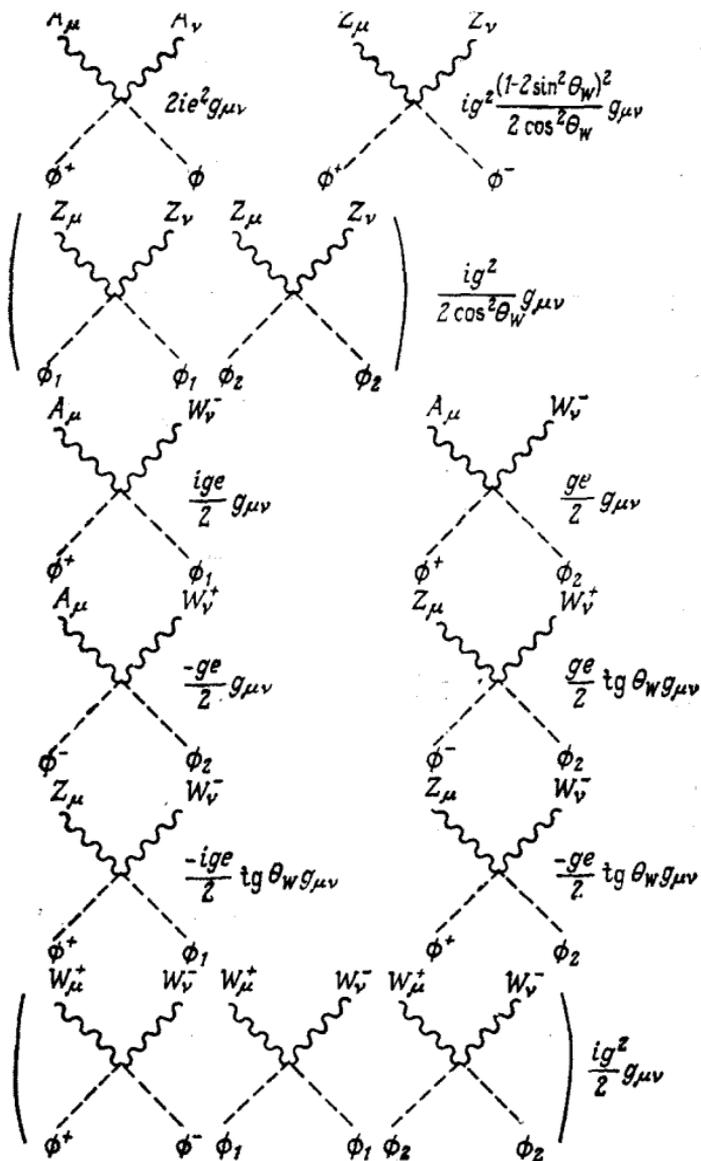
где $\xi = 1$ соответствует калибровке т'Хофта — Фейнмана, $\xi = 0$ — калибровке Ландау, а $\xi = \infty$ — унитарной калибровке.

Бозонными вершинами являются



где $S_{\mu\nu, \lambda\rho} = 2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}$. В диаграммах, приведенных ниже, линии *всех* заряженных бозонов выбраны так, что они *входят* в вершины:





Включение лептонов и кварков

Пропагатор \xrightarrow{p} $\frac{i}{\hat{p} - m_l + i\epsilon}$

Вершины для лептонов $l = (e, \mu, \tau)$, $\nu_l = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, для кварков $q: p = (u, c, t)$, $n = (d, s, b)$ с углами смешивания КKM U_{pn} из соотношения (12.39);

$$l \rightarrow l \quad -ie\gamma_\mu$$

$$W_\mu^- \quad \frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

$$\nu \rightarrow l$$

$$\nu \rightarrow \nu \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

$$Z_\mu \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

$$l \rightarrow l \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu[(-1+4\sin^2\theta_W)-\gamma_5]$$

$$Z_\mu \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu[(-1+4\sin^2\theta_W)-\gamma_5]$$

$$\nu \rightarrow l \quad \frac{-igm_l}{2\sqrt{2}M_W}(1-\gamma_5)$$

$$\phi^-$$

$$l \rightarrow l \quad \frac{-igm_l}{2M_W}$$

$$\phi_1$$

$$l \rightarrow l \quad \frac{gm_l}{2M_W}\gamma_5$$

$$\phi_2$$

$$n \rightarrow n \quad \frac{-igm_n}{2M_W}$$

$$\phi_1$$

$$n \rightarrow n \quad \frac{gm_n}{2M_W}\gamma_5$$

$$\phi_2$$

$$q \rightarrow q \quad ieQ_q\gamma_\mu$$

$$W_\mu^- \quad \frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)U_{qn}$$

$$p \rightarrow n$$

$$p \rightarrow p \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu[(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W)+\gamma_5]$$

$$Z_\mu \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu[(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W)+\gamma_5]$$

$$n \rightarrow n \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu[(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W)-\gamma_5]$$

$$Z_\mu \quad \frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu[(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W)-\gamma_5]$$

$$p \rightarrow n \quad \frac{-ig}{2\sqrt{2}M_W}[m_n(1-\gamma_5)-m_p(1+\gamma_5)]U_{pn}$$

$$\phi^-$$

$$p \rightarrow p \quad \frac{-igm_p}{2M_W}$$

$$\phi_1$$

$$p \rightarrow p \quad \frac{-gm_p}{2M_W}\gamma_5$$

$$\phi_2$$

Библиография ¹⁾

Мы приводим здесь названия монографий и обзорных статей, в которых затрагиваются общие вопросы, изложенные в настоящей книге. Этот список отнюдь не является полным, в нем наверняка отсутствуют названия некоторых важных работ, о чем мы весьма сожалеем. Тем не менее мы надеемся, что для читателя, желающего углубить свои знания, этот неформальный путеводитель окажется полезным.

Физика частиц

1. *Källén G.* Elementary particle physics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1964. [Имеется перевод: *Челлен Г.* Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1966.]
2. *Gasiorowicz S.* Elementary particle physics. — New York: Wiley, 1966. [Имеется перевод: *Газиорович С.* Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1969.]
3. *Frazer W. R.* Elementary particle physics. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
4. *Cheng D. C., O'Neill G. K.* Elementary particle physics: an introduction. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1979.
5. *Lee T. D.* Particle physics and introduction to field theory. — New York: Harwood, 1981.
6. *Perkins D. H.* Introduction to high energy physics (2nd edn). — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1982. [Имеется перевод: *Перкинс Д.* Введение в физику высоких энергий. — М.: Мир, 1975.]
7. *Leader E., Predazzi E.* An introduction to gauge theories and the new physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- 8*. *Новожилов Ю. В.* Введение в теорию элементарных частиц. — М.: Наука, 1972.
- 9*. *Окунь Л. Б.* Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1984.
- 10*. *Биленький С. М.* Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов. — М.: Энергоиздат, 1981.
- 11*. *Марков М. А.* Нейтрино. — М.: Наука, 1964.
- 12*. *Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А.* Дисперсионная теория сильных взаимодействий при низких энергиях. — М.: Наука, 1967.
- 13*. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.

Квантовая теория поля

1. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic quantum mechanics. — New York: McGraw-Hill, 1964; Relativistic quantum fields. — New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. В 2-х томах. — М.: Наука, 1978.]

¹⁾ Литература, отмеченная звездочкой, добавлена при переводе. — *Прим. ред.*

2. *Sakurai J. J.* Advanced quantum mechanics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967.
3. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, ч. 1. — М.: Наука, 1968.
4. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, ч. 2. — М.: Наука, 1971.
5. *Nash C.* Relativistic quantum field. — New York: Academic Press, 1978.
6. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
7. *Itzykson C., Zuber J.* Introduction to quantum field theory. — New York: McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: *Ицксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля, т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.]
8. *Lee T. D.* Particle physics and introduction to field theory. — New York: Harwood, 1981.
- 9*. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
- 10*. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. — М.: Наука, 1980.
- 11*. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды по статистической физике. — М.: Изд-во МГУ, 1979.
- 12*. *Биленький С. М.* Введение в диаграммную технику Фейнмана. — М.: Атомиздат, 1971.
- 13*. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1986.
- 14*. *Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. — М.: Наука, 1979.
- 15*. *Киржниц Д. А.* Полевые методы теории многих частиц. — М.: Атомиздат, 1963.
- 16*. *Ахизер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1981.
- 17*. *Медведев Б. В.* Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977.
- 18*. *Ефимов Г. В.* Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. — М.: Наука, 1985.
- 19*. *Фок В. А.* Работы по квантовой теории поля. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.

Функциональный интеграл

1. *Feynman R. P., Hibbs A. R.* Quantum mechanics and path integrals. — New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.]
2. *Fried H. M.* Functional methods and models in quantum field theory. — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1972.
3. *Славнов А. А., Фадеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
4. *Ramond P.* Field theory: a modern primer. — Reading, Massachusetts: Benjamin Cummings, 1981. [Имеется перевод: *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. — М.: Мир, 1984.]
5. *Abers E., Lee B. W.* Gauge theories. Phys. Rep., 1973, v. 9C, p. 1. [Имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.]
6. *Marinov M. S.* Path integrals in quantum theory — an outlook of basic concepts. Phys. Rep., 1980, v. 60C, p. 1.
- 7*. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976.
- 8*. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

Теория групп

1. *Haternalmesh M.* Group theory. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1962. [Имеется перевод: *Хатернеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Мир, 1966.]

2. *Carruthers P.* Introduction to unitary symmetry. — New York: Interscience, 1966.
3. *Gitmore R.* Lie groups, Lie algebra and some of their applications. — New York: Wiley-Interscience, 1974.
4. *Wybourne B.* Classical groups for physicists. — New York: Wiley-Interscience, 1974.
5. *Lichtenberg D. B.* Unitary symmetry and elementary particles (2nd edn). — New York: Academic Press, 1978.
6. *Georgi H.* Lie algebra in particle physics. — Reading, Massachusetts: Benjamin Cummings, 1982.
7. *Slansky R.* Group theory for unified model building. — Phys. Rep., 1981, v. 79C, p. 1.
- 8*. *Ляховский В. Д., Болохов А. А.* Группы симметрии и элементарные частицы. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
- 9*. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. — М.: Наука, 1970.
- 10*. *Конопельченко Б. Г.* Группы симметрии в квантовой теории поля. — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, с. 135.
- 11*. *Неуен Ван Хьеу.* Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. — М.: Атомиздат, 1967.
- 12*. *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. — М.: Наука, 1979.

Модель кварков

1. *Gell-Mann M., Ne'eman Y.* The eightfold way. — New York: Benjamin, 1964.
2. *Kokkedee J. J. J.* The quark model. — New York: Benjamin, 1969. [Имеется перевод: *Коккэде Д.* Теория кварков. — М.: Мир, 1971.]
3. *Close F. E.* An introduction to quarks and partons. — New York: Academic Press, 1979. [Имеется перевод: *Клоуз Ф.* Кварки и партоны. — М.: Мир, 1982.]
4. *Lipkin H. J.* Quarks for pedestrians. — Phys. Rep., 1973, v. 8C, p. 173.
- 5*. *Арбузов Б. А., Логунов А. А.* Строение элементарных частиц и связи между различными силами природы. — УФН, 1977, т. 123, вып. 3, с. 505.

Алгебра токов

1. *Adler S. L., Dashen R. F.* Current algebra and application to particle physics. — New York: Benjamin, 1968. [Имеется перевод: *Адлер С., Дашен Р.* Алгебры токов и их применение в физике частиц. — М.: Мир, 1970.]
2. *Treiman S. B., Jackiw R., Gross D. J.* Lectures on current algebra and its applications. — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972. [Имеется перевод: *Трейман С., Джекив Р., Гросс Д.* Лекции по алгебре токов. — М.: Атомиздат, 1977.]
3. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C.* Current in hadron physics. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Имеется перевод: *де Альфаро В. и др.* Токи в адронной физике. — М.: Мир, 1976.]
- 4*. *Волков М. К., Первушин В. Н.* Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. — М.: Атомиздат, 1978.
- 5*. *Волков Д. В.* Феноменологические лагранжианы. — ЭЧАЯ, 1973, т. 4, с. 3.
- 6*. *Говорков Н. Б.* Цветные степени свободы в адронной физике. — ЭЧАЯ, 1977, т. 8, с. 1056.
- 7*. *Боголюбов П. Н.* — ЭЧАЯ, 1973, т. 3, с. 1.

Партонная модель и световой конус

1. *Roy P.* Theory of lepton-hadron processes at high energies. — Oxford: Oxford University Press, 1975.

2. *Close F. E.* An introduction to quarks and partons. — New York: Academic Press, 1979. [Имеется перевод: *Клоуз Ф.* Кварки и партоны. — М.: Мир, 1982.]
3. *Kogut J., Susskind L.* The parton picture of elementary particles. — Phys. Rep., 1973, v. 8С, p. 77.
4. *Frishman Y.* Light cone and short distances. — Phys. Rep., 1974, v. 13С, p. 1.
5. *Altarelli G.* Partons in quantum chromodynamics. — Phys. Rep., 1982, v. 81С, p. 1.
- 6*. *Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.* — ЭЧАЯ, 1971, т. 2, вып. 5.

Калибровочная теория (общие вопросы)

1. *Taylor J. C.* Gauge theory of weak interactions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1976. [Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978.]
2. *Itzykson С., Zuber J.-B.* Quantum field theory. — New York: McGraw-Hill, 1980. [Имеется перевод: *Ицксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля, т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.]
3. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
4. *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.
5. *Ramond P.* Field Theory: a modern primer. — Reading, Massachusetts: Benjamin Cummings, 1981. [Имеется перевод: *Рамон П.* Теория поля. — М.: Мир, 1984.]
6. *Lopes J. L.* Gauge field theories, an introduction. — New York: Pergamon Press, 1981.
7. *Lee T. D.* Particle physics and introduction to field theory. — New York: Harwood, 1981.
8. *Aitchison I. J. R., Hey A. J. G.* Gauge theories in particle physics. — Bristol: Hilger, 1982.
9. *Abers E., Lee B. W.* Gauge theories. — Phys. Rep., 1973, v. 9С, p. 1. [Имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.]
10. *Li L.-F.* Introduction to gauge theories of electromagnetic and weak interactions. (To be published in Proc. of 1982 Summer School on Particle Physics at Hefei, China.)
- 11*. *Хуанг К.* Кварки, лептоны и калибровочные поля. — М.: Мир, 1985.
- 12*. *Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

КХД

1. *Politzer H. D.* Asymptotic freedom: an approach to strong interactions. — Phys. Rep., 1974, v. 14С, p. 129.
2. *Marciano W., Pagels H.* Quantum chromodynamics. — Phys. Rep., 1978, v. 36С, p. 137.
3. *Ellis J., Sachrajda C.* Quantum chromodynamics and its application. — In: Quarks and leptons — Cargese 1979 (ed. M. Levy et al.). — New York: Plenum Press, 1980.
4. *Buras A. J.* Asymptotic freedom in deep inelastic processes in the leading order and beyond. — Rev. mod. Phys., 1980, v. 52, p. 199.
5. *Dokshitzer Yu. L., Dyakonov D. L., Troyan S. I.* Hard processes in quantum chromodynamics. — Phys. Rep., 1980, v. 58С, p. 269.
6. *Llewellyn Smith C. H.* Topics in quantum chromodynamics. — In: Quantum flavordynamics, quantum chromodynamics and unified theories (ed. K. T. Mahanthappa and J. Randa). — New York: Plenum Press, 1980.

7. *Reya E.* Perturbative quantum chromodynamics. — Phys. Rep., 1981, v. 69C, p. 195.
8. *Müller A. H.* Perturbative QCD at high energies. — Phys. Rep., 1981, v. 73C, p. 237.
9. *Altarelli G.* Partons in quantum chromodynamics. — Phys. Rep., 1982, v. 81C, p. 1.
10. *Wilczek F.* Quantum chromodynamics: the modern theory of the strong interactions. — Ann. Rev. Nucl. and Part. Sci., 1982, v. 32, p. 177.
11. *Cloze F. E.* First lap in QCD. — Phys. Scripta, 1982, v. 25, p. 86.
- 12*. *Андреев И. В.* Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. — М.: Наука, 1981.

КХД на решетке

1. *Wilson K. G.* Quarks and strings on a lattice. — In: New phenomena in subnuclear physics (ed. A. Zichichi). — New York: Plenum Press, 1975.
2. *Drouffe J. M., Itzykson C.* Lattice gauge fields. — Phys. Rep., 1978, v. 38C, p. 134.
3. *Kogut J. B.* An introduction to lattice gauge theory and spin system. — Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, p. 650.
- 4*. *Макеенко Ю. М.* Метод Монте-Карло в калибровочных теориях на решетке. — УФН, 1984, т. 143, с. 161.
- 5*. *Halliday I. G.* Lattice field theories. — Rep. Prog. Phys., 1984, v. 47, p. 987.
- 6*. *Зайлер Э.* Калибровочные теории. — М.: Мир, 1985.

Слабые взаимодействия

1. *Lee T. D., Wu C. S.* Weak interactions. — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1965, v. 15, p. 381. [Имеется перевод: *Ли Ц., Ву Ц.* Слабые взаимодействия. — М.: Мир, 1968.]
2. *Marshak R., Riazuddin, Ryan C. P.* Theory of weak interactions in particle Physics — New York: Wiley-Interscience, New York, 1969.
3. *Commins E.* Weak interactions. — New York: McGraw-Hill, 1973.
- 4*. *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
- 5*. Слабые взаимодействия. Под ред. *М. К. Гайар* и *М. Николича*. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

Стандартная модель электрослабых взаимодействий

1. *Taylor J. C.* Gauge theories of weak interactions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1976. [Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978.]
2. *Lopes J. L.* Gauge field theories: an introduction. — New York: Pergamon Press, 1981.
3. *Commins E., Bucksbaum P. H.* The new weak interactions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
4. *Abers E., Lee B. W.* Gauge Theories. — Phys. Rep., 1973, v. 9C, p. 1. [Имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.]
5. *Bég M. A. B., Sirlin A.* Gauge theories of weak interactions. — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1974, v. 24, p. 379.
6. *Harari H.* Quarks and leptons. — Phys. Rep., 1978, v. 42C, p. 235.
7. *Fritzsch H., Minkowski P.* Flavor dynamics of quarks and leptons. — Phys. Rep., 1981, v. 73C, p. 67.
8. *Bég M. A. B., Sirlin A.* Gauge theories of weak interactions II. — Phys. Rep., 1982, v. 88C, p. 1.

ТВО

1. *Gaillard M. K., Maiani L.* New quarks and leptons. Quarks and leptons — Cargese 1979, p. 433 (ed. M. Levy et al.). — New York: Plenum Press, 1980.

2. *Langacker P.* Grand unified theories and proton decay. — *Phys. Rep.*, 1981, v. 72C, p. 185.
3. *Ellis J.* Phenomenology of unified gauge theories. Proc. 1981 Les Houches Summer School, 1981 (to be published).
4. *Zee A.* The unity of forces in the universe, v. I. — Singapore: World Science Press, 1982.
- 5*. *Матинян С. Г.* На пути объединения слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий. — *УФН*, 1980, т. 130, с. 3.
- 6*. *Гелл-Манн М., Рамон П., Сланский Р.* Цветовая симметрия, электрические заряды и стабильность протона в единых калибровочных теориях. — *УФН*, 1980, т. 130, с. 459.

Космология

1. *Peebles P. J. E.* Physical cosmology. — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1971.
2. *Sciama D. W.* Modern cosmology. — Cambridge: Cambridge University Press, 1972. [Имеется перевод: *Шама Д.* Современная космология. — М.: Мир, 1973.]
3. *Weinberg S.* Gravitation and cosmology. — New York: Wiley, 1972. [Имеется перевод: *Вейнберг С.* Гравитация и космология: принципы и приложения общей теории относительности. — М.: Мир, 1976.]
4. *Weinberg S.* The first three minutes. — New York: Basic Books, 1977. [Имеется перевод: *Вейнберг С.* Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. — М.: Энергоиздат, 1981.]
5. *Wilczek F.* Erice lecture on cosmology. Proc. 1981 Int. Sch. of Subnucl. Phys. 'Ettore Majorana' (to be published).
6. *Zee A.* The unity of forces in the universe, V. II. — Singapore: World Science Press, 1982.
- 7*. *Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Полевая теория гравитации и новые представления о пространстве и времени. — *ЭЧАЯ*, 1981, т. 12, вып. 1.
- 8*. *Денисов В. И., Логунов А. А.* Новая теория пространства-времени и тяготения. — *ЭЧАЯ*, 1982, т. 13, вып. 4.
- 9*. *Линде А. Д.* Раздувающаяся Вселенная. — *УФН*, 1984, т. 144, с. 177.
- 10*. *Долгов А. Д., Зельдович Я. Б.* Космология и элементарные частицы. — *УФН*, 1980, т. 130, с. 559.

Литература

1. *Abers E. S., Lee B. W.* — Phys. Rep., 1973, v. **9C**, p. 1. [Имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.]
2. *Adler S. L.* — Phys. Rev., 1965, v. **139**, p. B1638.
3. *Adler S. L.* — Phys. Rev., 1965, v. **140**, p. B736.
4. *Adler S. L.* — Phys. Rev., 1966, v. **143**, p. 1144.
5. *Adler S. L.* — Phys. Rev., 1969, v. **177**, p. 2426.
6. *Adler S. L.* — In: Lectures on elementary particles and quantum field theory. Proc. 1970 Brandeis Summer Institute (ed. S. Deser et al.). MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
7. *Adler S. L., Bardeen W. A.* — Phys. Rev., 1969, v. **182**, p. 1517.
8. *Adler S. L., Dashen R. F.* Current algebra and applications to particle physics. — New York: Benjamin, 1968. [Имеется перевод: *Адлер С., Дашен Р.* Алгебры токов и их применение в физике частиц. — М.: Мир, 1970.]
9. *Aharonov Y., Bohm D.* — Phys. Rev., 1959, v. **115**, p. 485.
10. *Aitchison I. J. R., Hey A. I. G.* Gauge theories in particle physics. — Bristol: Hilger, 1982.
11. *Albert D. et al.* — Nucl. Phys., 1980, v. **B166**, p. 460.
12. *Albrecht A., Steinhardt P. J.* — Phys. Rev. Lett., 1982, v. **48**, p. 1220.
13. *Alles W., Boyer C., Buras A. J.* — Nucl. Phys., 1977, v. **B119**, p. 125.
14. *Altarelli G.* — Phys. Rep., 1982, v. **81**, p. 1.
15. *Altarelli G., Parisi G.* — Nucl. Phys., 1977, v. **B126**, p. 298.
16. *Altarev I. S. et al.* — Phys. Lett., 1981, v. **102B**, p. 13.
17. *Anderson P. W.* — Phys. Rev., 1958, v. **112**, p. 1900.
18. *Anderson P. W.* — Phys. Rev., 1963, v. **130**, p. 439.
19. *Appelquist T., Georgi H.* — Phys. Rev., 1973, v. **D8**, p. 4000.
20. *Appelquist T., Carazzone J.* — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 2856.
21. *Appelquist T., Politzer H. D.* — Phys. Rev. Lett., 1975, v. **34**, p. 43.
22. *Appelquist T., Barnett R. M., Lane K. D.* — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1978, v. **28**, p. 387.
23. *Arnowitz R., Fickler S. I.* — Phys. Rev., 1962, v. **127**, p. 1821.
24. *Ashmore J. F.* — Nuovo Cimento Lett., 1972, v. **4**, p. 289.
25. *Aubert J. J. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1974, v. **33**, p. 1404.
26. *Augustin J. E. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1974, v. **33**, p. 1406.
27. *Bahcall J. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1980, v. **45**, p. 945.
28. *Banks T., Georgi H.* — Phys. Rev., 1976, v. **D14**, p. 1159.
29. *Bander M.* — Phys. Rep., 1981, v. **75C**, p. 205.
30. *Barber D. P. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. **43**, p. 830.
31. *Barber D. P. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1981, v. **46**, p. 1663.
32. *Bardeen W. A.* — Phys. Rev., 1969, v. **184**, p. 1848.
33. *Barger V. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1980, v. **45**, p. 692.
34. *Barnes V. E. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1964, v. **12**, p. 204.
35. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* — Phys. Lett., 1974, v. **52B**, p. 344.
36. *Bég M. A. B.* — In: Recent developments in high-energy physics. Proc. of Orbis Scientiae (ed. A. Perlmutter and L. F. Scott). — New York: Plenum Press, 1980.

37. *Bég M. A. B., Sirlin A.* — *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 1974, v. 24, p. 379.
38. *Bég M. A. B., Sirlin A.* — *Phys. Rep.*, 1982, v. 88C, p. 1.
39. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.* — *Phys. Lett.*, 1975, v. 59B, p. 85.
40. *Bell J. S.* — *Nucl. Phys.*, 1973, v. B60, p. 427.
41. *Bell J. S., Jackiw R.* — *Nuovo Cimento*, 1969, v. 60A, p. 47.
42. *Bell J. S., Sutherland D. G.* — *Nucl. Phys.*, 1968, v. B4, p. 315.
43. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, ч. 1 — М.: Наука, 1968.
44. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1986.
45. *Berger Ch. et al.* — *Phys. Lett.*, v. 86B, p. 418.
46. *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* — *Phys. Rep.*, 1978, v. 41C, p. 225.
47. *Bjorken J. D.* — *Phys. Rev.*, 1969, v. 179, p. 1547.
48. *Bjorken J. D.* — In: *Weak interactions at high energy and the production of new particles. Proc. 1976 SLAC Summer Institute on Particle Physics* (ed. M. S. Zupf). SLAC, Stanford, California, 1976.
49. *Bjorken J. D., Drell S. D.* *Relativistic quantum mechanics.* — New York: McGraw-Hill, 1964. [Имеется перевод: *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория, т. 1. — М.: Наука, 1978.]
50. *Bjorken J. D., Drell S. D.* *Relativistic quantum fields.* — New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория, т. 2. — М.: Наука, 1978.]
51. *Bjorken J. D., Glashow S. L.* — *Phys. Lett.*, 1964, v. 11, p. 255.
52. *Bjorken J. D., Paschos E. A.* — *Phys. Rev.*, 1969, v. 185, p. 1975.
53. *Bjorken J. D., Weinberg S.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v. 38, p. 622.
54. *Bloch F., Nordsieck A.* — *Phys. Rev.*, 1937, v. 52, p. 54.
55. *Bogoliubov N. N., Parasiuk O. S.* — *Acta Math.*, 1957, v. 97, p. 227.
56. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
57. *Bollini C. G., Giambiagi J. J.* — *Phys. Lett.*, 1972, v. 40B, p. 566.
58. *Bosetti P. C. et al.* — *Nucl. Phys.*, 1978, v. B142, p. 1.
59. *Bouchiat C., Iliopoulos J., Meyer Ph.* — *Phys. Lett.*, 1972, v. 38B, p. 519.
60. *Brandelik R. et al.* — *Phys. Lett.*, 1979, v. 86B, p. 243.
61. *Brown L., Ellis S.* — *Phys. Rev.*, 1981, v. D24, p. 2383.
62. *Buras A. J.* — *Rev. Mod. Phys.*, 1980, v. 52, p. 199.
63. *Buras A. J., Ellis J., Gaillard M. K., Nanopoulos D. V.* — *Nucl. Phys.*, 1978, v. B135, p. 66.
64. *Cabibbo N.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1963, v. 10, p. 531.
65. *Cabibbo N., Parisi G., Testa M.* — *Nuovo Cimento Lett.*, 1970, v. 4, p. 35.
66. *Cabrera B.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v. 48, p. 1378.
67. *Cahn R., Chanowitz M., Fleishon N.* — *Phys. Lett.*, 1979, v. 82B, p. 113.
68. *Callan C. G. Jr.* — *Phys. Rev.*, 1970, v. D2, p. 1541.
69. *Callan C. G. Jr.* — *Phys. Rev.*, 1982, v. D25, p. 2141; v. D26, p. 2058.
70. *Callan C. G. Jr., Dashen R. F., Gross D. J.* — *Phys. Lett.*, 1976, v. 63B, p. 334.
71. *Callan C. G. Jr., Dashen R. F., Gross D. J.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, v. 44, p. 435.
72. *Callan C. G. Jr., Gross D. J.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 22, p. 156.
73. *Carruthers P.* *Introduction to unitary symmetry.* — New York: Interscience, 1966.
74. *Cheng D. C., O'Neill G. K.* *Elementary particle physics: an introduction.* — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1979.
75. *Cheng T. P.* — *Phys. Rev.*, 1976, v. D13, p. 2161.
76. *Cheng T. P., Dashen R.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 26, p. 594
77. *Cheng T. P., Eichten E., Li L.-F.* — *Phys. Rev.*, 1974, v. D9, p. 2259.
78. *Cheng T. P., Li L.-F.* — *Phys. Rev.*, 1977, v. D16, p. 1425.
79. *Cheng T. P., Li L.-F.* — *Phys. Rev.*, 1978, v. D17, p. 2375.
80. *Cheng T. P., Li L.-F.* — *Phys. Rev.*, 1980, v. D22, p. 2868.
81. *Cheng T. P., Li L.-F.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, v. 45, p. 1908

82. *Cheng T. P., Li L.-F.* — In: Proc. 1980 Guangzhou Conf. on Theor. Part. Phys. — Beijing: Science Press, 1980.
83. *Chew G.* S-matrix theory of strong interaction. — New York: Benjamin, 1962.
84. *Chew G., Frautschi S. C.* — Phys. Rev., 1961, v. **123**, p. 1478.
85. *Чжоу Гуанчжао.* — ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 703.
86. *Christ N., Hasslacher B., Mueller A.* — Phys. Rev., 1972, v. **D6**, p. 3543.
87. *Christenson J. H., Cronin J. W., Fitch V. L., Turlay R.* — Phys. Rev. Lett., 1964, v. **13**, p. 138.
88. *Cicuta G. M., Montaldi E.* — Nuovo Cimento Lett., 1972, v. **4**, p. 329.
89. *Close F. E.* An introduction to quarks and partons. — London: Academic Press, 1979. [Имеется перевод: *Клоуз Ф.* Кварки и партоны. — М.: Мир, 1982.]
90. *Coleman S.* — In: Properties of the fundamental interactions, Proc. of 1971 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi), p. 358. — Bologna: Editrice Compositori, 1971.
91. *Coleman S.* — In: Properties of the fundamental interactions, Proc. of 1971 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi), p. 604. — Bologna: Editrice Compositori, 1971.
92. *Coleman S.* — In: Laws of hadronic matter. Proc. 1973 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi). — London: Academic Press. [Имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.]
93. *Coleman S.* — In: New phenomena in subnuclear physics. Proc. 1975 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi). — New York: Plenum Press, 1975.
94. *Coleman S.* — In: The whys of subnuclear physics. Proc. 1977 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi). — New York: Plenum Press, 1977.
95. *Coleman S.* — In: Proc. 1981 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana», 1981. [Имеется перевод: *Коулмен С.* — УФН, 1984, т. 143, с. 227.]
96. *Coleman S., Gross D. J.* — Phys. Rev. Lett., 1973, v. **31**, p. 851.
97. *Coleman S., Weinberg E.* — Phys. Rev., 1973, v. **D7**, p. 1888.
98. *Commins E.* Weak interactions. — New York: McGraw-Hill, 1973.
99. *Commins E., Bucksbaum P. H.* The new weak interactions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
100. *Cornwall J. M., Levin D. N., Tiktopoulos G.* — Phys. Rev., 1974, v. **D10**, p. 1145.
101. *Cowsik R., McClelland J.* — Phys. Rev. Lett., 1972, v. **29**, p. 669.
102. *Creutz M.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. **43**, p. 553, Erratum *ibid.*, 1979, v. **43**, p. 890.
103. *Cutkosky R. E.* — J. Math. Phys., 1960, v. **1**, p. 429.
104. *Dashen R.* — Phys. Rev., 1969, v. **183**, p. 1291.
105. *Davis R., Harmer D. S., Hoffman K. C.* — Phys. Rev. Lett., 1968, v. **20**, p. 1205.
106. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C.* Currents in hadron physics. — Amsterdam: North-Holland, 1973. [Имеется перевод: *де Альфаро В.* и др. Токи в адронной физике. — М.: Мир, 1976.]
107. *de Groot J. G. H. et al.* — Phys. Lett., 1979, v. **82B**, p. 292.
108. *Derrick G. H.* — J. Math. Phys., 1964, v. **5**, p. 1252.
109. *DeWitt B.* — Phys. Rev., 1967, v. **162**, p. 1195, 1239.
110. *Dimopoulos S., Suskind L.* — Phys. Rev., 1978, v. **D18**, p. 4500.
111. *Dine M., Fischler W., Srednicki M.* — Phys. Lett., 1981, v. **104B**, p. 199.
112. *Dirac P. A. M.* — Proc. R. Soc., 1931, v. **A133**, p. 60. [Имеется перевод в сб.: Монополю Дирака. — М.: Мир, 1970.]
113. *Dirac P. A. M.* — Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 1933, v. **3**, p. 64.
114. *Dokos C. P., Tomaras T. N.* — Phys. Rev., 1980, v. **D21**, p. 2940.

115. *Dokshitzer Yu. L., Dyakonov D. I., Troyan S. I.* — Phys. Rep. 1980, v. 58C, p. 269.
116. *Donoghue J. F., Li L.-F.* — Phys. Rev., 1979, v. D9, p. 945.
117. *Drell S. D., Yan T. M.* — Ann. Phys. (NY), 1971, v. 66, p. 595.
118. *Drouffe J. M., Itzykson C.* — Phys. Rep., 1978, v. 38C, p. 134.
119. *Dyson F. J.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 486.
120. *Eichten E. et al.* — Phys. Rev., 1980, v. D21, p. 203.
121. *Ellis J.* — In: Weak and electromagnetic interactions at high energy, Proc. of 1976 Les Houches Summer Sch. (ed. R. Balian and C. H. Llewellyn Smith). — Amsterdam: North-Holland, 1977.
122. *Ellis J.* — In: Proc. 1981 Les Houches Summer Sch., 1981.
123. *Ellis J., Gaillard M. K., Nanopoulos D. V.* — Nucl. Phys., 1976, v. B106, p. 292.
124. *Ellis J., Gaillard M. K., Nanopoulos D. V.* — Nucl. Phys., 1976, v. B109, p. 216.
125. *Ellis J., Gaillard M. K., Nanopoulos D. V., Rudaz S.* — Nucl. Phys., 1977, v. B131, p. 285.
126. *Ellis J., Sachrajda C.* — In: Quarks and leptons — Cargese 1979 (ed. M. Levy et al.). — New York: Plenum Press, 1980.
127. *Englert F., Brout R.* — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 321.
128. *Faddeev L. D., Popov V. N.* — Phys. Lett., 1967, v. 25B, p. 29.
129. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
130. *Farhi E., Susskind L.* — Phys. Rep., 1981, v. 74C, p. 277.
131. *Felst R.* — In: Proc. 1981 Int. Sym. on Lepton and Photon Interactions at High Energies. (ed. W. Pfeil). — Bonn: University Press, 1981.
132. *Fermi E.* — Nuovo Cimento, 1934, v. 11, p. 1.
133. *Fermi E.* — Z. Phys., 1934, v. 88, p. 161.
134. *Feynman R. P.* — Rev. Mod. Phys., 1948, v. 20, p. 267.
135. *Feynman R. P.* — Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 939, p. 1430.
136. *Feynman R. P.* — Acta Phys. Polon., 1963, v. 24, p. 697.
137. *Feynman R. P.* Photon-hadron interaction. — Reading, Massachusetts: Benjamin, 1972. [Имеется перевод: Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. — М.: Мир, 1975.]
138. *Feynman R. P.* — In: Weak and electromagnetic interactions at high energy, Proc. of 1976 Les Houches Summer School (ed. R. Balian and C. H. Llewellyn Smith). — Amsterdam: North-Holland, 1977.
139. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* — Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 193.
140. *Feynman R. P., Hibbs A. R.* Quantum mechanics and path integrals. — New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.]
141. *Feynman R. P., Speisman G.* — Phys. Rev., 1954, v. 94, p. 500.
142. *Frazer W. R.* Elementary particle physics. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
143. *Fried H. M.* Functional methods and models in quantum field theory. — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1972.
144. *Frishman Y.* — Phys. Rep., 1974, v. 13C, p. 1.
145. *Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H.* — Phys. Lett., 1973, v. 47B, p. 365.
146. *Fritzsch H., Minkowski P.* — Ann. Phys. (NY), 1975, v. 93, p. 193.
147. *Fritzsch H., Minkowski P.* — Phys. Rep., 1981, v. 73C, p. 67.
148. *Fubini S., Furlan G.* — Physics, 1965, v. 1, p. 229.
149. *Fujikawa K.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1195.
150. *Fujikawa K., Lee B. W., Sanda A. I.* — Phys. Rev., 1972, v. D6, p. 2923.
151. *Gaillard M. K., Lee B. W.* — Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 897.
152. *Gaillard M. K., Maiani L.* — In: Quarks and leptons — Cargese 1979 (ed. M. Levy et al.). — New York: Plenum Press, 1980.

153. Gaillard M. K., Lee B. W., Rosner J. — Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 277.
154. Gasiorowicz S. Elementary Particle Physics. — New York: Wiley, 1966. [Имеется перевод: Газиорович С. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1969.]
155. Gasiorowicz S., Rosner J. L. — Am. J. Phys., 1981, v. 49, p. 954.
156. Gasser A., Leutwyler H. — Nucl. Phys., 1975, v. B94, p. 269.
157. Gavela M. B. et al. — Phys. Lett., 1982, v. 109B, p. 83, p. 215.
158. Gell-Mann M. — Phys. Rev., 1953, v. 92, p. 833.
159. Gell-Mann M. California Institute of Technology Synchrotron Laboratory Report No. CTSL-20, 1961. (Перепечатано в книге [167].)
160. Gell-Mann M. — Phys. Rev., 1962, v. 125, p. 1067.
161. Gell-Mann M. — In: Proc. 11th Int. Conf. High Energy Phys. (CERN) (ed. J. Prentki), CERN, Geneva, 1962.
162. Gell-Mann M. — Physics, 1964, v. 1, p. 63.
163. Gell-Mann M. — Phys. Lett., 1964, v. 8, p. 214.
164. Gell-Mann M., Glashow S. L. — Ann. Phys. (NY), 1961, v. 15, p. 437.
165. Gell-Mann M., Levy M. — Nuovo Cimento, 1960, v. 16, p. 705.
166. Gell-Mann M., Low F. E. — Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
167. Gell-Mann M., Ne'man Y. The eightfold way. — New York: Benjamin, 1964.
168. Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B. — Phys. Rev., 1968, v. 175, p. 2195.
169. Gell-Mann M., Pais A. — Phys. Rev., 1955, v. 97, p. 1387.
170. Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R. — In: Supergravity (ed. D. Z. Freeman and P. van Nieuwenhuizen), North-Holland, Amsterdam, 1979.
171. Georgi H. — In: Particles and fields — 1974 (ed. C. E. Carlson). — New York: American Institute of Physics, 1974.
172. Georgi H. Lie algebra in particle physics. — Reading, Massachusetts: Benjamin Cummings, 1982.
173. Georgi H., Glashow S. L. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1494.
174. Georgi H., Glashow S. L. — Phys. Rev., 1972, v. D6, p. 429.
175. Georgi H., Glashow S. L. — Phys. Rev., 1973, v. D7, p. 2487.
176. Georgi H., Glashow S. L. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 438.
177. Georgi H., Politzer H. D. — Phys. Rev., 1974, v. D9, p. 416.
178. Georgi H., Quinn H., Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 451.
179. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. — Письма ЖЭТФ, 1966, т. 4, с. 174.
180. Geweniger C. — In: Proc. Neutrino 79. (Bergen) (ed. A. Haatuft and C. Jarlskog), European Phys. Society, 1979.
181. Gildener E. — Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 1667.
182. Gilman F., Wise M. B. — Phys. Lett., 1979, v. 83B, p. 83.
183. Gilmore R. Lie groups, Lie algebras and some of their applications. — New York: Wiley-Interscience, 1974.
184. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. — ЖЭТФ, 1950, т. 20, с. 1064.
185. Glashow S. L. Ph. D. Thesis, Harvard University, 1958.
186. Glashow S. L. — Nucl. Phys., 1961, v. 22, p. 579.
187. Glashow S. L. — In: Hadrons and their interactions, Proc. 1967 Int. School of Physics «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi). — New York: Academic Press, 1967.
188. Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L. — Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 1285.
189. Glashow S. L., Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 20, p. 224.
190. Glashow S. L., Weinberg S. — Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 1958.
191. Goddard P., Olive D. I. — Rep. Prog. Phys., 1978, v. 41, p. 1357.
192. Goldberger M. L., Treiman S. B. — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 1178.
193. Goldhaber A. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1122.
194. Goldstone J. — Nuovo Cimento, 1961, v. 19, p. 154.
195. Goldstone J., Salam A., Weinberg S. — Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 965.
196. Golowich E., Yang T. C. — Phys. Lett., 1979, v. 80B, p. 245.
197. Greenberg O. W. — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 598.
198. Грибов В. Н., Лунатов Л. Н. — ЯФ, 1972, т. 15, с. 781, с. 1218,

199. *Gribov V. N., Pontecorvo B.* — Phys. Lett., 1969, v. **28B**, p. 495.
200. *Gross D.* — In: Methods in field theory, Proc. of 1975 Les Houches Summer School (ed. R. Balian and J. Zinn-Justin) — Amsterdam: North-Holland, 1976.
201. *Gross D., Jackiw R.* — Phys. Rev., 1972, v. **D6**, p. 477.
202. *Gross D., Llewellyn Smith C. H.* — Nucl. Phys., 1969, v. **B14**, p. 337.
203. *Gross D., Wilczek F.* — Phys. Rev. Lett., 1973, v. **30**, p. 1343.
204. *Gross D., Wilczek F.* — Phys. Rev., 1973, v. **D8**, p. 3633.
205. *Gross D., Wilczek F.* — Phys. Rev., 1974, v. **D9**, p. 980.
206. *Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. E.* — Phys. Rev. Lett., 1964, v. **13**, p. 585.
207. *Guralnik G. S. et al.* — In: Advances in particle physics (ed. R. Cool and R. Marshak), v. 2, p. 567. — New York: Interscience, 1968.
208. *Gursey F., Ramond P., Sikivie P.* — Phys. Lett., 1975, v. **60B**, p. 177.
209. *Guth A. H.* — Phys. Rev., 1981, v. **23**, p. 347.
210. *Guth A. H., Tye S. H.* — Phys. Rev. Lett., 1980, v. **44**, p. 631.
211. *Hamermesh M.* Group theory. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1962. [Имеется перевод: Хамермеш М. Теория групп. — М.: Мир, 1966.]
212. *Han M., Nambu Y.* — Phys. Rev., 1965, v. **139B**, p. 1006.
213. *Hanson G. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1975, v. **35**, p. 1609.
214. *Harari H.* — Phys. Rep., 1978, v. **42C**, p. 235.
215. *Hasert F. J. et al.* — Phys. Lett., 1973, v. **46B**, p. 138.
216. *Hasenfratz P., 't Hooft G.* — Phys. Rev. Lett., 1976, v. **36**, p. 1119.
217. *Hawking S. W., Moss I. G.* — Phys. Lett., 1982, **B110**, p. 35.
218. *Hepp K.* — Comm. Math. Phys., 1966, v. **2**, p. 301.
219. *Herb S. W. et al.* — Phys. Rev. Lett., 1977, v. **39**, p. 252.
220. *Higgs P. W.* — Phys. Rev. Lett., v. **12**, p. 132.
221. *Higgs P. W.* — Phys. Rev. Lett., 1964, v. **13**, p. 509.
222. *Higgs P. W.* — Phys. Rev., 1966, v. **145**, p. 1156.
223. *Hughes R. J.* — Nucl. Phys., 1981, v. **B186**, p. 376.
224. *Iizuka J.* — Prog. Theor. Phys. Suppl., 1966, v. **37—8**, p. 21.
225. *Izykson C., Zuber J.-B.* Quantum field theory. — New York: McGraw-Hill 1980. [Имеется перевод: Ицксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля, т. I, II. — М.: Мир, 1984.]
226. *Jackiw-R.* — In: Lectures on current algebra and its applications. — Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1972. [Имеется перевод: Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов. — М.: Атомиздат, 1977.]
227. *Jackiw R., Rebbi C.* — Phys. Rev. Lett., 1976, v. **36**, p. 1119, v. **37**, p. 172.
228. *Jacob M., Wick G. C.* — Ann. Phys. (NY), 1959, v. **7**, p. 404.
229. *Jona-Lasinio G.* — Nuovo Cimento, 1964, v. **34**, p. 1790.
230. *Jonker et al.* — Phys. Lett., 1981, v. **99B**, p. 265.
231. *Källen G.* Elementary particle physics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1964. [Имеется перевод: Челлен Г. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1966.]
232. *Kayser B.* — Phys. Rev., 1981, v. **D24**, p. 110.
233. *Kibble T. W.* — Phys. Rev., 1967, v. **155**, p. 1554.
234. *Kim J. E.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. **43**, p. 103.
235. *Kim J. E., Langacker P., Levine M., Williams H. H.* — Rev. Mod. Phys., 1981, v. **53**, p. 211.
236. *Kinoshita T.* — J. Math. Phys., 1962, v. **3**, p. 650.
237. *Kleinknecht K.* — Ann. Phys. Nucl. Sci., 1976, v. **26**, p. 1.
238. *Kobayashi M., Maskawa M.* — Prog. Theor. Phys., 1973, v. **49**, p. 652.
239. *Kogut J. B.* — Rev. Mod. Phys., 1979, v. **51**, p. 659.
240. *Kogut J. B., Pearson R., Shigemitsu J.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. **43**, p. 484.
241. *Kogut J. B., Pearson R., Shigemitsu J.* — Phys. Lett., 1981, v. **98B**, p. 63.
242. *Kogut J. B., Susskind L.* — Phys. Rep., 1973, v. **8C**, p. 77.

243. *Kogut J. B., Susskind L.* — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 395.
244. *Kogut J. B., Susskind L.* — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 1477.
245. *Kogut J. B., Susskind L.* — Phys. Rev., 1975, v. **D11**, p. 3594.
246. *Kokkedee J. J. J.* The quark model. — New York: Benjamin, 1979. [Имеется перевод: *Коккэде Д.* Теория кварков. — М.: Мир, 1972.]
247. *Копплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.
248. *Kuti J., Weisskopf V. F.* — Phys. Rev., 1971, v. **D4**, p. 3418.
249. *Landshoff P. V., Polkinghorne J. C.* — Nucl. Phys., 1971, v. **B28**, p. 240.
250. *Langacker P.* — Phys. Rep., 1981, v. **72C**, p. 185.
251. *LaRue G. S., Fairbank W. M., Hebard F.* — Phys. Rev. Lett., 1977, v. **38**, p. 1011.
252. *Leader E., Predazzi E.* An introduction to gauge theories and the new physics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
253. *Lederman L. M.* — In: Proc. 19th Int. Conf. High Energy Phys. (Tokyo), (ed. G. Takeda). — Physical Society of Japan, Tokyo, 1978.
254. *Lee B. W.* Chiral dynamics. — New York: Gordon & Breach, 1972.
255. *Lee B. W.* — In: Proc. 16th Int. Conf. on High Energy Phys. (Illinois) (ed. J. D. Jackson and A. Roberts). Fermilab, Batavia, Illinois, 1972.
256. *Lee B. W.* — In: Renormalization and invariance in quantum field theory (ed. E. R. Caianiello). — New York: Plenum Press, 1974.
257. *Lee B. W., Shrock R.* — Phys. Rev., 1977, v. **D16**, p. 1445.
258. *Lee B. W., Zinn-Justin J.* — Phys. Rev., 1972, v. **D5**, p. 3121, p. 3137.
259. *Lee B. W., Zinn-Justin J.* — Phys. Rev., 1973, v. **D7**, p. 1049.
260. *Lee T. D.* — Phys. Rep., 1974, v. **9C**, p. 143.
261. *Lee T. D.* Particle physics and introduction to field theory. — New York: Harwood, 1981.
262. *Lee T. D., Nauenberg M.* — Phys. Rev., 1964, v. **133**, p. 1549.
263. *Lee T. D., Wu C. S.* — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1965, v. **15**, p. 381.
264. *Lee T. D., Yang C. N.* — Phys. Rev., 1956, v. **104**, p. 254.
265. *Leibbrandt G.* — Rev. Mod. Phys., 1975, v. **47**, p. 849.
266. *Levin D., Tiktopoulos G.* — Phys. Rev., 1975, v. **D12**, p. 420.
267. *Li L.-F.* — Phys. Rev., 1974, v. **D9**, p. 1723.
268. *Li L.-F.* — In: Proc. 1980 Guangzhou Conf. on Theor. Part. Phys. — Beijing: Science Press, 1980.
269. *Li L.-F.* — In: Proc. 1981 Summer Sch. on Part. Phys. (Hefei), 1981.
270. *Li L.-F., Pagels H.* — Phys. Rev. Lett., 1971, v. **26**, p. 1204.
271. *Lichtenberg D. B.* Unitary symmetry and elementary particles (2nd edn). — London: Academic Press, 1978.
272. *Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, ч. 2. — М.: Наука, 1971.
273. *Линде А. Д.* — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 73.
274. *Linde A. D.* — Phys. Lett., 1982, v. **B108**, p. 389.
275. *Lipkin H. J.* — Phys. Rep., 1973, v. **8C**, p. 173.
276. *Llewellyn Smith C. H.* — In: Proc. 5th Hawaii Topical Conf. Part. Phys. (ed. P. N. Dobson et al.) — Honolulu, Hawaii: Univ. of Hawaii Press, 1973.
277. *Llewellyn Smith C. H.* — Phys. Rep., 1974, v. **3C**, p. 264.
278. *Llewellyn Smith C. H.* — In: Quantum flavordynamics, quantum chromodynamics and unified theories (ed. K. T. Mahanthappa and J. Randa) — New York: Plenum Press, 1980.
279. *Llewellyn Smith C. H.* — Phil Trans. R. Soc. Lond., 1992, v. **A304**, p. 5.
280. *Llewellyn Smith C. H., Wheeler J. F.* — Phys. Lett., v. **105B**, p. 486.
281. *Lopes J. L.* Gauge field theories, an introduction. — New York: Pergamon Press., 1981.
282. *Low F. E.* — Phys. Rev., 1954, v. **96**, p. 1428.
283. *Lubkin E.* — Ann. Phys. (NY), 1963, v. **23**, p. 233.
284. *Lyubimov V. A. et al.* — Phys. Lett., 1980, v. **94B**, p. 266.
285. *Mandelstam S.* — Phys. Rev., 1968, v. 168, p. 1884.

286. *Mandelstam S.* — In: Proc. 1979 Int. Sym. on Lepton and Photon Interactions at High Energies (ed. T. B. W. Kirk and H. D. I. Abarbanel). — Fermilab, Batavia, Illinois.
287. *Maki Z. et al.* — Prog. Theor. Phys., 1962, v. 28, p. 870.
288. *Marciano W., Pagels H.* — Phys. Rev., 1978, v. 36C, p. 137.
289. *Marciano W., Sanda H.* — Phys. Lett., 1977, v. 67B, p. 303.
290. *Marciano W., Sirlin A.* — Phys. Rev., 1980, v. D22, p. 2695.
291. *Marciano W., Sirlin A.* — In: The Second Workshop on Grand Unification (ed. J. Leveille, L. Sulak, D. Unger). — Boston: Birkhauser, 1981.
292. *Marinov M. S.* — Phys. Rep., 1980, v. 60C, p. 1.
293. *Marshak R., Riazuddin, Ryan C. P.* Theory of weak interactions in particle physics. — New York: Wiley — Interscience, 1969.
294. *McWilliams B., Li L.-F.* — Nucl. Phys., 1981, v. B179, p. 62.
295. *Muller A. H.* — Phys. Rep., 1981, v. 73C, p. 237.
296. *Nachtmann O.* — Nucl. Phys., 1972, v. B38, p. 397.
297. *Nakagawa M. et al.* — Prog. Theor. Pys., 1963, v. 30, p. 727.
298. *Nambu Y.* — Phys. Rev. Lett., 1960, v. 4, p. 380.
299. *Nambu Y.* — In: Preludes in theoretical physics (ed. de DeShalit) — Amsterdam: North-Holland, 1966.
300. *Nambu Y.* — Phys. Lett., 1968, v. 26B.
301. *Nambu Y.* — Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 4262.
302. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* — Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345.
303. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* — Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 246.
304. *Nash C.* Relativistic quantum fields. — London: Academic Press, 1978.
305. *Ne'eman Y.* — Nucl. Phys., 1961, v. 26, p. 222.
306. *Nielsen N. K.* — Am. J. Phys., 1981, v. 49, p. 1171.
307. *Nishijima K., Nakano T.* — Prog. Theor. Phys., 1953, v. 10, p. 581.
308. *Noether E.* — Nachr. Kgl. Geo. Wiss Gottinger, 1918, v. 235.
309. *Okubo S.* — Prog. Theor. Phys., 1962, v. 27, p. 949.
310. *Okubo S.* — Phys. Lett., 1963, v. 5, p. 163.
311. *Okubo S.* — Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 3528.
312. *Panofsky W.* — In: Proc. 14th Int. Conf. on High Energy Physics (Vienna) (ed. J. Prentki and J. Steinberger). CERN, Geneva.
313. *Paschos E.* — Phys. Rev., 1977, v. D15, p. 1966.
314. *Paschos E., Wolfenstein L.* — Phys. Rev., 1973, v. D7, p. 91.
315. *Pati J. C., Salam A.* — Phys. Rev., 1973, v. D8, p. 1240.
316. *Pauli W., Villars F.* — Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 434.
317. *Peccei R. D., Quinn H. R.* — Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 1791.
318. *Peebles P. J. E.* — Ast. J., 1966, v. 146, p. 542.
319. *Peebles P. J. E.* — Physical cosmology. — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1971.
320. *Perkins D. H.* Introduction to high energy physics, 2nd edn. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1982. [Имеется перевод: Перкинс Д. Введение в физику высоких энергий. — М.: Мир, 1975.]
321. *Perl M. L. et al.* — Phys. Rev. Lett. v. 35, p. 1489.
322. *Perl M. L.* — Phys. Lett., 1977, v. 70B, p. 487.
323. *Петков С. Т.* — ЯФ, 1977, т. 25, с. 641.
324. *Politzer H. D.* — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1346.
325. *Politzer H. D.* — Phys. Rep., 1974, v. 14C, p. 129.
326. *Polkinghorne J. C.* — Nuovo Cimento, 1958, v. 8, p. 179.
327. *Поляков А. М.* — Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.
328. *Понтекорво Б. М.* — ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 247.
329. *Понтекорво Б. М.* — ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 1717.
330. *Попов В. Н., Фаддеев Л. Д.*, Препринт ИТФ 67-36, Киев, 1967.
331. *Prescott C. Y. et al.* — Phys. Lett., 1978, v. 77B, p. 347.
332. *Preskill J. P.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 1365.
333. *Quigg C.* — Rev. Mod. Phys., 1977, v. 49, p. 297.
334. *Quigg C., Rosner J. L.* — Phys. Rev., 1979, v. 56, p. 169.
335. *Rajaraman R.* — Phys. Rep., 1975, v. 21C, p. 227.

336. *Ramond P.* Field theory: a modern primer. — Reading, Massachusetts: Benjamin Cummings, 1981. [Имеется перевод: П. Рамон. Теория поля. — М.: Мир, 1984.]
337. *Ramsey N. F.* — Phys. Rep., 1978, v. 43, p. 409.
338. *Regge T.* — Nuovo Cimento, 1959, v. 14, p. 951.
339. *Reya E.* — Phys. Rep., 1981, v. 69C, p. 195.
340. *Roy P.* Theory of lepton-hadron processes at high energies. — Oxford: Oxford University Press, 1975.
341. *Рубаков В. А.* — Письма ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 658.
342. *Сахаров А. Д.* — Письма ЖЭТФ, 1967, т. 5, с. 32.
343. *Sakurai J. J.* — Nuovo Cimento, 1958, v. 7, p. 649.
344. *Sakurai J. J.* — Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 472.
345. *Sakurai J. J.* — Advanced quantum mechanics. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967.
346. *Salam A.* — In: Elementary particle physics (Nobel Symp. No. 8). (ed. N. Svartholm). — Stockholm: Almqvist and Wilsell, 1968.
347. *Salam A., Ward J. C.* — Phys. Lett., 1964, v. 13, p. 168.
348. *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1948, v. 73, p. 416.
349. *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 898.
350. *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 664.
351. *Schwinger J.* — Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 914.
352. *Schwinger J.* — Proc. Natl. Acad. Sci., 1951, v. 37, p. 452.
353. *Schwinger J.* — Ann. Phys. (NY), 1957, v. 2, p. 407.
354. *Schwinger J.* — Phys. Rev. Lett., 1959, v. 3, p. 296.
355. *Sciama D. W.* Modern cosmology. Cambridge University Press, 1972.
356. *Шабалин Е. П.* — ЯФ, 1977, т. 28, с. 151.
357. *Шабалин Е. П.* — ЯФ, 1980, т. 31, с. 1665.
358. *Shifman M. A.* — In: Proc. 1981 Int. Sym. on Lepton and Photon Interactions at High Energies (ed. W. Pfeil). — Bonn: University Press, 1981.
359. *Shrock R. E., Treiman S. B.* — Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 2148.
360. *Shrock R. E., Wang L.-L.* — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 1692.
361. *Sikiwie P.* — In: Proc. 1980 Int. Sch. of Phys. «Enrico Fermi» (ed. G. Costa and R. Gatto). — Amsterdam: North-Holland, 1982.
362. *Sikiwie P.* — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1156.
363. *Sirlin A.* — Rev. Mod. Phys., 1978, v. 50, p. 573.
364. *Sirlin A.* — Phys. Rev., 1980, v. D22, p. 971.
365. *Sirlin A., Marciano W.* — Nucl. Phys., 1981, v. B189, p. 442.
366. *Slansky R.* — Phys. Rep., 1981, v. 79C, p. 1.
367. *Славнов А. А.* — ТМФ, 1972, т. 10, с. 153.
368. *Sterman G., Weinberg S.* — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1436.
369. *Stueckelberg E. C. G., Peterman A.* — Helv. Phys. Acta., 1953, v. 26, p. 499.
370. *Судаков В. В.* — ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 87.
371. *Sudarshan E. C. G., Marshak R. E.* — Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 1860.
372. *Сушков О. П., Фламбаум В. В., Хриплович И. Б.* — ЯФ, 1974, т. 20, с. 1015.
373. *Susskind L.* — Phys. Rev., 1979, v. D20, p. 2619.
374. *Sutherland D. G.* — Phys. Lett., 1966, v. B23, p. 384.
375. *Sutherland D. G.* — Nucl. Phys., 1967, v. B2, p. 433.
376. *Symanzik K.* — In: Fundamental interactions at high energies (ed. A. Perlmutter). — New York: Gordon and Breach, 1970.
377. *Symanzik K.* — Comm. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
378. *Szalay A., Marx G.* — Astron. Astrophys., 1976, v. 49, p. 437.
379. *Takahashi Y.* — Nuovo Cimento, 1957, v. 6, p. 370.
380. *Taylor J. C.* — Nucl. Phys., 1971, v. B33, p. 436.
381. *Taylor J. C.* Gauge theory of weak interactions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1976. [Имеется перевод: Тейлор Дж. Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978.]

382. Taylor R. E. — In: Proc. 1975 Int. Symp. on Lepton and Photon Interactions at High Energies (ed. W. T. Kirk), p. 679, Stanford, California, 1975.
383. 'tHooft G. — Nucl. Phys., 1971, v. B33, p. 173.
384. 'tHooft G. — Nucl. Phys., 1971, v. B35, p. 167.
385. 'tHooft G. Неопубликованные замечания на Марсельской конференции по полям Янга — Миллса, 1972 (цитируется в работе [325] с. 132).
386. 'tHooft G. — Nucl. Phys., 1973, v. B61, p. 455.
387. 'tHooft G. — Nucl. Phys., 1974, v. B79, p. 276.
388. 'tHooft G. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8.
389. 'tHooft G., Veltman M. — Nucl. Phys., 1972, v. B44, p. 189.
390. Tomonaga S. — Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 224.
391. Treiman S. B., Jackiw R., Gross D. J. Lectures on current algebra and its applications. Princeton University Press, 1972. [Имеется перевод: Грейман С. Б., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов. — М.: Атомиздат, 1977.]
392. Tsao H.-S. — In: Proc. 1980 Guangzhou Conf. on Theor. Part. Phys. — Beijing, China: Science Press, 1980.
393. Toussaint D., Treiman S. B., Wilczek F., Zee A. — Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1036.
394. Utiyama R. — Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 1597.
395. Veltman M. — Proc. R. Soc., 1967, v. A301, p. 107.
396. Veltman M. — Nucl. Phys., 1970, v. B21, p. 288.
397. Ward J. C. — Phys. Rev., 1950, v. 78, p. 1824.
398. Weinberg S. — Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 838.
399. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 616.
400. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264.
401. Weinberg S. — Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 1412.
402. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 1698.
403. Weinberg S. Gravitation and cosmology. — New York: Wiley, 1972.
404. Weinberg S. — Phys. Rev., 1973, v. D8, p. 3497.
405. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 494.
406. Weinberg S. — Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 3583.
407. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 294.
408. Weinberg S. — Phys. Rev., 1976, v. D13, p. 974.
409. Weinberg S. — In: Festschrift for I. I. Rabi (ed. L. Motz). — New York: New York Acad. Sci., 1977.
410. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 223.
411. Weinberg S. — Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 1277.
412. Weinberg S. — Phys. Lett., 1979, v. 82B, p. 387.
413. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 850.
414. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 1566.
415. Weisberger W. I. — Phys. Rev., 1966, v. 143, p. 1302.
416. Weyl H. — Ann. Physik, 1919, v. 59.2, p. 101.
417. Weyl H. Space-time-matter (translated by H. L. Brose). — New York, Dover, 1951.
418. Weyl H. — Z. f. Physik, 1929, v. 56, p. 330.
419. Wick G. C. — Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 268.
420. Wilczek F. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1304.
421. Wilczek F. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 279.
422. Wilczek F. — In: Proc. 1981 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana, (to be published), 1981.
423. Wilczek F. — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, p. 1148.
424. Wilczek F. — Ann. Rev. Nucl. and Part. Sci., 1982, v. 32, p. 177.
425. Wilczek F., Zee A. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 1517.
426. Wilczek F., Zee A. — Phys. Lett., 1979, v. 88B, p. 311.
427. Wilson K. G. — Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.
428. Wilson K. G. — Phys. Rev., 1971, v. D3, p. 1818.

429. *Wilson K. G.* — *Phys. Rev.*, 1974, v. **D14**, p. 2455.
430. *Wilson K. G.* — In: *New phenomena in subnuclear physics*, Proc. 1975 Int. Sch. Subnucl. Phys. «Ettore Majorana» (ed. A. Zichichi). — New York: Plenum Press, 1975.
431. *Wolfenstein L.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1964, v. **13**, p. 352.
432. *Wolfenstein L.* — In: *Neutrino 79* (Bergen) (ed. A. Haatuft and C. Jarlskog). *European Phys. Society.*
433. *Wu C. S. et al.* — *Phys. Rev.*, 1957, v. **105**, p. 1413.
434. *Wu T. T., Yang C. N.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1964, v. **13**, p. 380.
435. *Wu T. T., Yang C. N.* — *Nucl. Phys.*, 1976, v. **B107**, p. 365.
436. *Wybourne B.* *Classical groups for physicists.* — New York: Wiley-Interscience, 1974.
437. *Yang C. N.* — In: *Proc. 6th Hawaii Topical Conf. Part. Phys.* (ed. P. N. Dabson). — Honolulu: University Press of Hawaii, 1975.
438. *Yang C. N., Mills R.* — *Phys. Rev.*, 1954, v. **96**, p. 191.
439. *Yao Y. P.* — *Phys. Rev.*, 1973, v. **D7**, p. 1647.
440. *Yoshimura M.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1978, v. **41**, p. 281.
441. *Zee A.* — *Phys. Rev.*, 1973, v. **D7**, p. 3630.
442. *Zee.* — *Phys. Rev.*, 1973, v. **D8**, p. 4038.
443. *Zee A.* *The unity of forces in the universe. I and II.* — Singapore: World Science Press, 1982.
444. *Zimmermann W.* — In: *Lectures on elementary particles and quantum field theory*, Proc. 1970 Brandeis Summer Institute (ed. S. Deser et al.). — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1970.
445. *Zweig G.* CERN report no. 8182/TH 401, 1964.
446. *Zweig G.* CERN report no. 8419/TH 412, 1964.
- 447*. *Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н.* — Препринт ОИЯИ, 1965, Д-1968.
- 448*. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* — ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 203.
- 449*. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* — ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 391.
- 450*. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* — ДАН СССР, 1955, т. 105, с. 685.
- 451*. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Ширков Д. В.* — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 805.
- 452*. *Логунов А. А.* — ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 793.
- 453*. *Логунов А. А., Неген Ван Хьеу, Хрусталева О. А.* — В кн.: *Проблемы теоретической физики. Сборник, посвященный Н. Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием.* — М.: Наука, 1969.
- 454*. *Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н., Соловьев Л. Д.* — *Nucl. Phys.*, 1957, v. 4, p. 427.
- 455*. *Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.* — ДАН СССР, 1954, т. 96, с. 261.
- 456*. *Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.* — ДАН СССР, 1955, т. 102, с. 489.
- 457*. *Медведев Б. В., Павлов В. П., Поливанов М. К., Суханов А. Д.* — ТМФ, 1972, т. 13, с. 3.
- 458*. *Salat A.* — *Phys. Rev.* 1951, v. 82, p. 217.
- 459*. *Фрадкин Е. С.* — ЖЭТФ, 1955, т. 28, с. 750.
- 460*. *Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.* — ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 698.
- 461*. *Герасимов С. Б.* — ЯФ, 1965, т. 2, с. 598.
- 462*. *Красников Н. В., Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н.* — ЭЧАЯ, 1981, т. 1, с. 1000.
- 463*. *Вайнштейн А. Н., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.* — ЭЧАЯ, 1982, т. 13, с. 542.
- 464*. *Efremov A. V., Radyushkin A. V.* — *Revista del Nuovo Cimento*, 1980, v. 3, p. 211.
- 465*. *Кадышевский В. Г.* — ЭЧАЯ, 1980, т. 11, с. 5.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Ааронова—Бома* эффект 530, 549
Адлера—Бардина теорема 213
— *Белла—Джакива* (АБД) аномалия 207—217; *см. также* Аномалии
— *Вайсбергера* соотношение (правило сумм) 189—192
— правило сумм 166—170, 250
— условие согласованности 186, 193
Аксиальная проблема $U(1)$ 339, 564—569; *см. также* Масса η -мезона, Распад $\eta \rightarrow 3\pi$, Инстантоны, *Когута—Сасскинда* полюс, θ -вакуум
Аксион 570
Алгебра зарядов 158
— $SU(2) \times U(1)$ 392—393
— $SU(5)$ 497
— токов 152, 157—162, 165, 168—169, 321
— — *Адлера—Вайсбергера* соотношение (правило сумм) 189—192
— — — правило сумм 166—171
— — — условие согласованности 186, 193
— — *Голдбергера—Треймана* соотношение 185—187, 192—193
— — длина nN -рассеяния 189
— — проблема $\eta \rightarrow 3\pi$ 215—216
— — распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 215—216
— — массы псевдоскалярных мезонов 145, 196
— — правило сумм *Дашена* 200
— — проблема массы η -мезона 565—569
— — теоремы о мягких пионах 181—200
Альтарелли—Паризи уравнение 359—362, 368—369
Аномалии 207—217; *см. также* Аксиальная проблема $U(1)$
— и инстантоны 564
— — перенормируемость 320
— — неабелевых теорий 214—216
— сокращение в теории $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_\gamma$ 399—401
Аномальная размерность 92, 95, 103, 353—358, 361
Асимптотическая свобода 103, 322—335, 371, 386
— — в калибровочных теориях со скалярными мезонами 333—334
— — — неабелевых калибровочных теориях 327—330
— — и конфайнмент 371—386
— — — открытие 322
— — парамагнитные свойства вакуума *Янга—Миллса* 330—333
— — применение к процессу e^+e^- 342—343
— — — IN 343—358, 364—371
Барийная асимметрия Вселенной 514—517
Барийное число, асимметрия Вселенной 514—517
— — несохранение в ТВО 511—517
— — сохранение в КХД 336
— — — в стандартной электрослабой теории 409
Барийные массы 145—146, 197—198
Бекки—Рюэ—Стора (БРС) преобразование 315—318
Бесконечного импульса система 170
 β -распад 183, 387, 429
Билокальные операторы 262, 344—345
Бнуитарное преобразование 82, 338, 412—413
Блоха—Нордсика теорема 364—365, 370
Бозон W 390; *см. также* Бозон Z
— — в докалибровочных моделях 390—391, 394—397
— — — стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории 404—406, 435, 442—453
— — масса 445—446
— — распад в бозон *Хиггса* и лептоны 448—449
— — распады лептонные 446—449
— — рождение за счет механизма

- Дрелла — Яна 453
 Бозон Z 404—408, 419; *см. также*
 Бозон W
 — — масса 445—446
 — — распады 449—452
 — — рождение за счет механизма
 Дрелла—Яна 453
 БПХ-перенормировки 52—59, 71, 83
 Бьёркеновский скейлинг: *см.* Скейлинг

 V — A -теория 164, 389—390, 406, 419
 Вайнберга—Салама теория: *см.* Вайн-
 берга угол, ГИМ механизм, Кобая-
 си—Маскава матрица смешивания,
 CP -инвариантность, Хиггса явление
 — — — барионные и лептонные чис-
 ла 409
 — — — выбор группы $SU(2) \times U(1)$
 392—398
 — — — глобальные симметрии 409—
 418
 — — — калибровочные бозоны W и
 Z 404—408, 444—453
 — — — мюонное число 416
 — — — нарушение CP -инвариантно-
 сти 414—415
 — — — СНС 401—402
 — — — фермионы 398
 — теорема 90—92
 — угол 405
 — в процессах с нейтральными то-
 ками 407—408, 420
 — — — — νN -рассеяния 424—426
 — — — чисто лептонных процессах
 420—424
 — — предсказание $SU(5)$ -модели
 508—510
 — — соотношение между массами
 бозонов W и Z 404, 419, 445
 Вакуум 28, 173
 — вырожденность в теориях с СНС
 173, 536—537
 — КХД 372, 571
 — множественность вакуумных со-
 стояний с различными топологиче-
 скими индексами 558—563; *см. так-
 же* θ -вакуум
 — вакуум, амплитуда перехода 28,
 40, 224, 299; 317; *см. также* Про-
 изводящий функционал
 Вакуума поляризация 342, 440, 465
 Вакуумного насыщения приближение
 437
 Вакуумное среднее, масштаб электро-
 слабого объединения 406, 463, 504
 — — однопетлевой сдвиг 217—220
 — — условие СНС 173
 — — формализм эффективного по-
 тенциала 223—224

 Векторная — аксиально-векторная не-
 однозначность в нейтринных реак-
 циях 422
 Векторные мезоны, массы W и Z
 404—405, 408—409, 445—446
 — — и перенормируемость 77, 304,
 391
 — — калибровочные теории 267, 271
 — — Хиггса явление 278—286
 Великое объединение 494—523, 547—
 549
 — — квантование заряда 496, 547
 — — монополь 524, 547—549
 — — несохранение барионного числа
 511—517
 — — проблема калибровочных не-
 рархий 504—505
 — — связь между массами лептонов
 и кварков 520—522
 — — слияние констант связи 505—
 510
 Вершины константа перенормировки
 49, 328
 Взаимодействия представление 15
 Вика поворот 61
 — теорема 17—18, 32, 78, 259
 Вильсона коэффициент 344, 346—349,
 349—350
 Вильсоновская петля 381—384
 ВКБ-приближение и мнимое время
 560—562
 Восьмеричный путь 110, 139, 142—
 144
 Вперед-назад асимметрия в $e^+e^- \rightarrow$
 $\mu^+\mu^-$ 424
 Вычитание 46; *см. также* Перенорми-
 ровки, Регуляризация
 — схема импульсная (стандартная)
 83—87
 — — минимальная 96—100
 — — на массовой поверхности 85—
 86
 — — при промежуточной перенорми-
 ровке 84—85
 — точка (условие нормировки) 84—
 87, 100, 323

 Гауссов интеграл 30, 288, 296—298
 — — по грассмановым переменным
 37—40, 298
 Гейзенберга представление 15, 21, 154
 Гелл-Манна—Нашиджимы соотноше-
 ние 141, 163
 — Окубо массовая формула 145—
 146, 196, 198
 Генератор (группы симметрии) 107—
 111; *см. также* Нётер теорема
 Геометрия искривленного простран-
 ства 273—276

- Гинзбурга — Ландау теорема 172
 ГИМ механизм 417, 427—428, 437—440, 485, 493; см. также Слабые нейтральные токи, Очарование
 Гиперзаряд 141
 Гиперцвет: см. Техницвет
 Глобальные симметрии 105, 153—156; см. также Барнионное число, Сохранение $B - L$, Киральная симметрия, Лептонное число, Мюонное число
 Глубоковеклидова область, асимптотическое поведение функций Грина 90—95, 99, 323
 — — — — — глубоконеупругое IN -рассеяние 235—243, 246—264
 Глубоконеупругое рассеяние 103, 235
 Глюоны 151, 246—247, 252, 336, 359—362, 371—372, 465—466, 499
 Глэшоу—Вайнберга—Салама теория: см. Вайнберга—Салама теория
 Голдбергера—Треймана соотношение 183—185, 192
 Голдстоуна теорема 173—182, 278
 — — — — — в случае абелевой симметрии 177—179
 — — — — — неабелевой симметрии 179—181
 Голдстоуновский бозон 174—175; см. также Несостоявшийся голдстоуновский бозон, Псевдоголдстоуновский бозон
 — — — — — в абелевом случае 174—175
 — — — — — σ -модели 180
 — — — — — сильных взаимодействиях 182
 — — — — — и идея техницвета 464—466
 — — — — — явление Хиггса 281
 — — — — — полюс Козута—Сасскинда и аксиальная проблема $U(1)$ 567—570
 «Головастик» диаграмма 217, 218
 — и безмассовые голдстоуновские бозоны 220—222
 — — — — — сдвиг вакуумного среднего 217—220
 Гомотопические классы 551
 — — — $S^1 \rightarrow S^1$ 551—553
 — — — $S^2 \rightarrow S^2$ 540, 551
 — — — $S^3 \rightarrow S^3$ 553—554
 Грассмана алгебра 34—40, 316
 Грина функция 16—19, 23—30, 224
 — — — — — асимптотическое поведение 90—95
 — — — — — евклидова 26—28
 — — — — — одночастично-неприводимая 42, 48
 — — — — — связанная 17, 29, 31, 48
 — — — — — связь перенормированной и перенормированной функций 52, 204
 — — — — — составных операторов 78—82, 87, 91
 — — — — — усеченная 19, 48
 Гросса—Льюеллина—Смита правило сумм 251
 Группа 108, 110; см. также Подгруппа, Представление
 — абелева 106, 156
 — вращений 106, 111—112
 — групповой параметр 108, 110
 — Ли 107—108, 500
 — полупростая 106, 272, 497, 500, 543, 547
 — прямое произведение 106
 — ранг 110, 500—501
 — унитарная 106
 d^{abc} символ 195, 498
 Дашена правило сумм 200
 Двойной β -распад безнейтринный 477
 Действие 11
 — решеточной теории поля 375—381
 — самодуальной евклидовой калибровочной теории 556
 — Янга—Миллса теории в ковариантных калибровках 299
 Джорджи—Глэшоу модель 394, 496—523, 539—549
 Диагонализация массовых матриц 411—413
 Дикварк 511
 Динамическая масса фермиона 201, 470
 Динамическое нарушение симметрии 461—472; см. также Составная хиггсовская частица, Техницвет
 Дирака монополю 524
 — — — — — монополю т'Хофта—Полякова 542—545
 — — — — — струна 528—532, 544
 — — — — — условие квантования 526—532, 542
 — — — — — формулировка Ву—Янга 532
 Дисперсионное соотношение 191, 347
 Дрелла—Яна процесс в кварк-партонной модели 255—256
 — — — — — КХД в рамках теории возмущений 371
 — — — — — процессах рождения бозонов W и Z 453
 Дуальное поле 525, 555
 Дуальности преобразование уравнения Максвелла 525
 Евклидова теория поля калибровочная 554
 — — — — — скалярная 375—376
 — — — — — фермионная 377—378

- Евклидовы γ -матрицы 378
 e^+e^- -аннигиляция, полное адронное сечение 253—254, 335
 — — — поправки в КХД 342—343
 eD -рассеяние, асимметрия 426
 Заряда квантование 399
 — — в ТВО 496—498
 — — магнитного монополя 526—527, 543
 Зарядовое сопряжение 475, 495, 515—516, 519—520; *см. также* Майорановская масса
 Иерархий калибровочных проблема 505
 Изоспин 139—140, 156—157; *см. также* $SU(2)$ -симметрия
 — и киральная симметрия 152—153, 200
 — нарушение в сильных взаимодействиях 198—199
 — — электромагнитных взаимодействиях 140, 199
 — структура σ -члена 188—189
 — — πN -амплитуды 189—190
 Импульсное правило сумм 251—252, 355—357
 Инстантоны 336, 550—571; *см. также* Аксиальная проблема $U(1)$, Аксион, Аномалии, Гомотопические классы, θ -вакуум
 — вакуумное туннелирование 560, 563—564
 — размер 557
 — формализм функционального интегрирования 560, 563—564
 Инфракрасные расходимости 364—365
Кабиббо—Кобаяси—Маскава (ККМ) матрица 428; *см. также* Кобаяси—Маскава матрица смешивания
 — угол 165, 247, 388, 410, 427, 429; *см. также* Кобаяси—Маскава матрица смешивания
 — универсальность 429
Казимира оператор 111, 470
 Калибровка аксиальная 287, 294—297, 312—313, 366—367
 — — сумма по поляризациям векторных частиц 312—313
 — ковариантная 297—303
 — — абелев случай 303—308
 — — в стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории 485, 586—592
 — — Ландау 232, 303
 — — Лоренца 288, 293
 — — неабелев случай 308
 — перенормируемая 286, 304
 — радиационная 287
 — *г'Хофта—Фейнмана* 303, 310, 320, 435, 492
 — унитарная 280—281, 283—284, 304, 403—404, 492
 — условие фиксации 281, 287, 292, 298—299
 — — — отсутствие в решеточных калибровочных теориях 383
 Калибровочная константа связи 266, 268, 271—272; *см. также* Константа связи, Электрический заряд
 Калибровочное взаимодействие с духами 302
 — — фермионами 267, 303
 — поле 266, 269, 271, 276—277
 — — топологические свойства: *см.* Инстантоны, Монополь магнитный
 — преобразование 266, 268—271, 554
 — — сингулярное 528—530
 — — самодействие 271, 302
 Калибровочно-ковариантная производная 266
 Калибровочные симметрии (взаимодействия) абелевы 265
 — — неабелевы (*Янга—Миллса*) 267
 — — собственные состояния 410, 427, 473, 496, 517; *см. также* Массовые собственные состояния
 — теории 272, 273; *см. также* Вайнберга—Салама теория, Великое объединение, Евклидова теория поля калибровочная, Квантовая ароматодинамика, КХД, КЭД, Решеточная теория поля калибровочная, Чистая калибровка
 Калибровочный параметр ξ 299, 301, 305—308, 328—329, 584—589
Каллана—Гросса соотношение 244—245
 — *Симанзика* уравнение 87—95
 Каноническая размерность 73, 77, 95; *см. также* Аномальная размерность
 Канонические коммутационные соотношения 12, 287
 Канонического квантования формализм 11—20, 294
 Квантовая ароматодинамика 387—493
 — хромодинамика: *см.* КХД
 — электродинамика: *см.* КЭД
 Квантование, канонический формализм 11
 — — — решеточная теория 374—375
 — — — скалярная теория 12—20, 203
 — — — фермионная теория 33

- теорий с магнитным монополюм 526—532
- формализм функционального интегрирования 11, 577—582
- — — калибровочная теория 287—300
- — — — решеточная теория 374—377
- — — — скалярная теория 20—32
- — — — фермионная теория 34—40
- Кварки b , t 149, 410
- валентные 248
- морские 248
- c 148—149
- u , d , s 143—147, 149
- Кварковые массы m_c , m_b 149; *см. также* Киральная симметрия
- — m_u , m_d , m_s 199—200
- — массовые соотношения в $SU(5)$ -модели 520—522
- — нарушение киральной симметрии 152, 192—201
- — составляющих и токовых кварков 200
- — CP -проблема в сильных взаимодействиях 570—571
- — модели; *см. также* Массовая формула Гелл-Манна—Окубо ω - ϕ -смешивание, Цвейга правило
- — восьмеричный путь и $SU(3)$ -симметрия ароматов 140—147
- — квантовые числа 143
- — киральная симметрия 158—162; *см. также* Аксиальная проблема
- — трудности 149—150
- Кварконый 149; *см. также* Частицы J/ψ , Y
- Кинк 534
- Киношиты—Ли—Науенберга теорема 365
- Киральная симметрия 152—201, 388, 464, 564—565
- — алгебра 160, 165
- — нарушение 152, 181—183, 192—201
- K^0 — \bar{K}^0 -система (смешивание) 431—442; *см. также* ГИМ механизм, CP -инвариантность, Очарование
- разность масс K_L — K_S 426, 433, 437—438
- CP -параметры 433—435, 440—442
- Кобаяси — Маскава (КМ) матрица смешивания; *см. также* Кабиббо угол, Смешивание
- — — в распадах W -бозона 446—449
- — — ГИМ механизм 437—440
- — — смешивание лептонов 415, 473
- — — ТВО (гипотеза родства) 520
- — — теория CP -нарушения 415, 343—435, 440—444
- Ковариантная производная 266—269
- — в $SU(2) \times U(1)$ 401
- — — $SU(5)$ 507
- — как связность 273—274
- Ковариантные калибровки: *см.* Калибровка ковариантная
- Когута — Сасскинда полюс 569—570
- Коллинеарные расходимости 365
- Конденсат: *см.* Вакуумное среднее
- Константа g_A 183—184, 191
- связи 49, 66, 100; *см. также* Асимптотическая свобода, Калибровочное взаимодействие, Пион-нуклонное взаимодействие
- — зависимость от точки вычитания 100
- — перенормировка 48—49, 328
- — размерность и перенормируемость 72
- — слияние констант связи 505—510
- — эффективная (бегущая) 93, 100—103, 505—510
- Контрчлены, БПХ-перенормировки 53—59, 73—76
- калибровочные теории 308—309
- отсутствие перенормировки массы голдстоуновских бозонов 220—222
- при мягком нарушении симметрии 222—223
- составных операторов 80—82
- схема минимальных вычитаний 96—99
- Конфайнмент 151, 321, 371—373
- вильсоновская петля 381—383
- и асимптотическая свобода 371—373, 386
- критерии 381—383
- линейно растущий потенциал 372, 383—385
- Космология; *см.* Бариионное число, Асимметрия Вселенной, Нейтрино масса, космологическое ограничение
- замкнутая, открытая, плоская Вселенная 478
- критическая плотность ρ_c 478
- Хаббла закон и постоянная 478
- Коулмена — Вайнберга механизм: *см.* Спонтанное нарушение симметрии за счет радиационных поправок
- КХД 151, 321; *см. также* Глюоны, Кварки
- вакуум 372, 492
- глобальные симметрии 152, 201, 339; *см. также* Киральная симметрия

- лагранжиан 335—336
- масштабный параметр 341, 386, 464, 510
- операторное разложение и ренорм-групповые расчеты 335—358; *см. также* e^+e^- -аннигиляция, Лептон-нуклонное рассеяние, Скейлинг
- партонная картина 246, 252, 359; *см. также* *Альтарелли—Паризи* уравнение
- расчеты по теории возмущений 358—371; *см. также* Лептон-нуклонное рассеяние
- КЭД как прототип калибровочной теории 265
- квантование и трудности квантования 287
- программа перенормировок 42
- ренормгруппа 83
- — β -функция 326—327
- — экранировка заряда 322
- тождества *Уорда* аксиально-векторные (аномалии) 207—214
- — — векторные 208, 308—309, 313
- Ландау полюс 104
- Лептокварк 511
- Лептон-нуклонное рассеяние; *см. также* Нейтрино-нуклонное рассеяние
- — асимметрия eD -рассеяния 426
- — бьёркеновский скейлинг и кварк-партонная модель 235—252
- — — — *Альтарелли — Паризи* уравнение 359—361
- — — — операторное разложение и уравнение ренормгруппы 343—358
- — — — по теории возмущений 364—371
- — правила сумм: *см. Адлера* правило сумм, *Гросса — Льюеллина-Смита* правило сумм, Импульсное правило сумм
- — неупругое 103, 162—170, 235—252, 262, 343—358, 364—371, 425
- — сингулярности на световом конусе в свободной теории 262—264
- — структура слабых нейтральных токов 424—426
- — упругое 238—239
- Лептонное число 409, 477, 482
- Лептонные углы смешивания 415, 475; *см. также* Нейтрино масса, Нейтринные осцилляции
- Лептонный слабый заряженный ток 165, 241, 388
- Лестничные диаграммы 368
- Ли* алгебра 108, 111, 155
- группа 107—108, 500
- Линде—Вайнберга* ограничение на массу хиггсовской частицы 455—458
- Линейно растущий потенциал 372, 383, 385
- Локальные симметрии: *см.* Калибровочные симметрии
- Магнитный момент калибровочной векторной частицы 332
- ток 525
- Майорановская масса 475—478; *см. также* Двойной β -распад безнейтринный, Зарядовое сопряжение, Нейтрино масса, Нейтринные осцилляции
- Масса: *см.* Векторных мезонов массы, Кварковые массы, Нейтрино масса, Псевдоскалярных мезонов массы, Фермионная масса, Хиггсовская частица
- перенормировка 41, 46—47, 520—522
- — для голдстоуновского бозона 220—222
- эффективная (бегущая) 99, 520—522
- Массовая вставка 438; *см. также* ГИМ механизм
- Массовые сингулярности: *см. Коллинеарные расходимости*
- собственные состояния 410, 427, 472, 496, 518—520
- Мейсснера* эффект 279, 372
- Минимальное калибровочное взаимодействие 267—268
- Монополь магнитный 524; *см. также* Великое объединение, Дирака монополь, Солитоны, Топологический закон сохранения, *г'Хофта—Полякова* монополь
- — и квантование заряда 526, 542
- — — угловой момент 527—528, 545
- Мультипликативная перенормируемость 52, 81, 90, 95
- Мюонное число 416, 472
- Мягкие пионы, случай двух пионов 187—192, 194
- — — одного пиона 183—186
- Мягкое нарушение симметрии 222
- — — и перенормируемость 222—223
- — — спонтанное 223
- Наиболее притягивающий скалярный канал (НПСК) 470

- Намбу—Голдстоуна* бозон; см. Голдстоуновский бозон
 Неинтегрируемый фазовый фактор 379
 Неисключительный импульс 90
 Нейтринные осцилляции; см. Нейтрино масса, Солнечного нейтрино загадка
 — — длина осцилляции 473
 — — нейтрино-антинейтринные осцилляции 484
 — — осцилляции ароматов 472—475
 Нейтрино масса 415, 472—485; см. также Двойной β -распад безнейтринный, Нейтринные осцилляции
 — — в модели $SU(2) \times U(1)$ 482—485
 — — — ТВО 482
 — — дираковского и майорановского типов 475—477
 — — за счет радиационных поправок 481
 — — космологическое ограничение 478—480
 Нейтрино-нуклонное рассеяние, бьёркеновский скейлинг и кварк-партоновая модель 240—252
 — — проверка алгебры токов (правило сумм *Адлера*) 166—170
 — — слабые нейтральные токи (угол *Вайнберга*) 425—426
 Нейтрино-электронное рассеяние 390, 407, 420—424
 Нелептонные слабые процессы 389, 442
 Неперенормируемые взаимодействия 73
 Непертурбативные эффекты, инстантоны 550
 — — решеточная теория поля 371
 — — солитоны 532
 Несостоявшийся голдстоуновский бозон 281, 283, 286, 304—308, 402, 485—492
 Нётер теорема 154
 Низкоэнергетические теоремы в случае двух мягких пионов 187—192
 — — — одного мягкого пиона 183—186
 Нормировки точка (массовый масштабный параметр) в схеме вычитания в импульсной точке 83—87
 — — — размерной регуляризации 95
 $O(4)$ -симметрия 405, 556; см. также $SU(2) \times SU(2)$ -симметрия
 Одночастично-неприводимые диаграммы 42
 — функции *Грина* 42, 79
 — — — ω — ϕ -смешивание 146—147
 — — — идеальное смешивание 147
 Операторное разложение 343—355
 — — на световом конусе 344—346
 — — факторизация сингулярностей 343
 Очарование (квантовое число) 147—148, 388; см. также ГИМ механизм
 Парамагнитные свойства вакуума теории *Янга—Миллса* 330—333; см. также Асимптотическая свобода
 Партоны; см. также Глюоны, Кварки, Партоновая модель
 — как точечноподобные составляющие адрона 239, 243, 246
 — море 247—248
 — спин заряженных партонов 244—245
 Партоновая модель; см. также Глубокоупругое рассеяние, КХД, Партоны, Скейлинг
 — — *Дрелла—Яна* процес 255—256
 — — e^+e^- -аннигиляция 262—264
 — — лептон-нуклонное рассеяние 243—252
 — — функции распределения 244—250
 Парциальная волна 390, 395—396
Паскоса—Вольфенштейна соотношение 426
 Переключение 469—472
 Перенормировки; см. также Аномалии, Перенормируемость, Ренормализационная группа, Теория возмущений
 — в теории $\lambda\phi^4$ 42—59
 — — — со спонтанным нарушением симметрии 217—234
 — — — *Янга—Миллса* 327—329
 — константа 53, 309
 — — вершины Z_λ 49
 — — волновой функции (поля) Z_ϕ 47
 — — заряда 49, 328
 — — Z_a 328
 — — Z_g 328
 — масс 47
 — — голдстоуновских бозонов 220—222
 — программа БПХ-перенормировок 52—59
 — — стандартных перенормировок 52—54
 — составных операторов 78—82
 — физическая картина 41—42
 Перенормируемость 59, 71, 76
 — векторных теорий 76—78, 303—304, 392

- мультипликативная 52, 81
- мягкое нарушение симметрии 222—223
- неперенормируемые взаимодействия 73
- перенормируемые взаимодействия 72
- суперперенормируемые взаимодействия 72
- Петлевое разложение 226—228
 - — в модели $\lambda\phi^4$ 228—232
 - — скалярной КЭД 232—234
 - — как разложение по постоянной Планка 227
- Пион-нуклонная (πN) амплитуда: *см. Адлера условие согласованности, Адлера—Вайсбергера соотношение, Изоспин, σ -член*
- Пион-нуклонное взаимодействие 183—184, 188—198
- Подгруппа 106
 - инвариантная 106
- Поколение 392, 409—418, 495, 518; *см. также Родства гипотеза, Удвоения фермионных поколений проблема*
- подавление взаимодействий между поколениями 430, 517—519
- Поляризации векторных частиц 312, 395
- Понтрягина индекс: *см. Топологический индекс*
- Постоянная тонкой структуры 446, 507
- Правое нейтрино 483—485
- Представление 107
 - базисные векторы 110, 113
 - векторное 125, 134
 - вещественное 109, 117
 - графическое изображение 114—118, 121—124
 - комплексное 469—470, 501; *см. также Представление вещественное*
 - неприводимое 107, 113, 127
 - присоединенное 109, 138, 499, 501
 - произведение представлений 114—118, 131—133
 - размерность 107, 113, 122, 130—131
 - сопряженное 109, 125, 133—134, 143, 495
 - фундаментальное (определяющее) 107, 125, 134, 495
- Проблема массы η -мезона 565—569; *см. также Аксиальная проблема*
- Производящий функционал 27—32, 34, 40, 224, 288, 294—301, 317; *см. также Вакуум—вакуум амплитуда перехода*
- Промежуточный векторный бозон 164, 390
 - — — W 164, 390, 394—396, 404—406, 435—436, 444—453
 - — — Z 396, 404—409, 419—424, 444—453
- Пропагатор 578—588; *см. также Фейнмана правила*
 - в RE -калибровке 305
 - векторного поля 76—77, 301, 304, 391
 - дүхового поля 301
 - несостоявшегося голдстоуновского бозона 301
 - скалярного поля 14, 18—19, 43—44, 47, 85, 204, 257—258
 - фермионного поля 33, 259, 303
 - хиггсовского скаляра 305
- Протона распад 511—514
 - — амплитуда в $SU(5)$ -теории 512
- Псевдоголдстоуновский бозон 285
 - — в теориях техницвета 466, 468, 471
- Псевдоскалярных мезонов массы: *см. Гелл-Манна—Окубо массовая формула, Голдстоуновский бозон, Дашена правило сумм, Кварковые массы, Проблема массы η -мезона, σ -член, Токов алгебра*
- Псевдочастицы 550; *см. также Инстантоны*
- Размерная трансмутация 232—233
- Распад $\eta \rightarrow 3\pi$ 199, 567; *см. также Аксиальная проблема $U(1)$, Изоспин, нарушение в сильных взаимодействиях*
 - $\mu \rightarrow e\gamma$ 416, 472, 485—493
 - $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 215, 217
 - — аномалии 216
 - — цвет 216, 335
- Расходимости 42, 45
 - вложенные 59
 - индекс 72, 74, 223
 - инфракрасные 364—365
 - квадратичные 46, 55, 64, 505
 - коллинеарные 365
 - линейные 46, 210
 - логарифмические 44—45, 210
 - метод подсчета степеней 70—71
 - одновершинно-приводимые 59
 - перекрывающиеся 59
 - примитивные 45, 58
 - условная степень 54, 57, 72, 91
- Расширенный техницвет 467—472
- Регуляризация 45, 59
 - ковариантная 60—67
 - — схема вычитания в импульсной точке 83—85

- размерная 67—70, 96, 308, 320
- — схема минимальных вычитаний 96—99
- Ренормализационная группа; *см. также* Аномальная размерность, Константа связи эффективная (бегущая)
- — поправки КХД к полному сечению e^+e^- -аннигиляции 342—343
- — — — сечению IN -рассеяния 349—350
- — $SU(5)$ ТВО, амплитуда распада протона 513
- — — — связь между массами лептонов и кварков 520—522
- — — — слияние констант связи 507—508
- — суммирование главных логарифмов 101, 363—364
- — β -функция 88—89, 95
- — уравнения в КЭД 326—327
- — — — КХД 329, 333, 340—341
- — — — теории $\lambda\phi^4$ 89—90, 99, 324—325
- — — — с $SU(3)$ -симметрией 508—509
- — — — — юкавским взаимодействием 325—326
- — — — γ -функции 88—89, 95, 98
- — — — в КХД 353, 357—358
- — — — моменты функций *Альтарелли—Паризи* 361
- — — — *Каллана—Симанзика* 87—90
- — — — асимптотические решения 92—95, 99, 350—353
- — — — другие формы 93, 350, 353
- — — — физические основания 83—87
- Решеточная теория поля 373—381
- — вычисления методом Монте-Карло 374, 385
- — — — закон периметра 385
- — — — площади 383, 385
- — — — калибровочная 379—386
- — — — плакет 380, 384
- — — — реберная переменная 380
- — — — скалярная 375—377
- — — — фермионная 377—378
- ρ параметр 405, 419, 453
- — экспериментальное значение 445, 483
- Родства гипотеза 518—520
- Самодуальное поле 556
- Световой конус, сингулярности 256—264, 344—346
- σ -модель 179—181, 464
- σ -член 188, 190, 192
- Сильной связи разложение 374, 383—386
- Симметричный фактор 18, 20, 44, 222, 229, 311, 583; *см. также* *Фейнмана* правила
- Симметрия; *см. также* Барнионное число, Глобальные симметрии, CP -инвариантность, Калибровочные симметрии, Киральная симметрия, Лептонное число, Спонтанное нарушение симметрии, *Уорда* тождества
- и вырождение масс 138—139, 152—155, 171
- — перенормировки 202—203
- — теория групп 105
- Сингулярности полей 257, 343—345
- токов 259—260, 346, 351
- Скейлинг 235, 239—243, 256, 321, 354, 358
- процесс *Дрелла—Яна* 255—256
- e^+e^- -аннигиляция 252—254, 261—262
- лептон-нуклонный (бьёркеновский) 239—252, 256—267, 262—264, 354
- — переменные x, y 239—240
- — функции 241—242
- нарушение 355, 357—358, 359
- сингулярности на световом конусе 257
- Слабые радиационные поправки к лагранжиану КХД 339—340
- собственные состояния: *см.* Калибровочные симметрии
- углы смешивания: *см.* *Кабиббо* угол, *Вайнберга* угол, *Кобаяси—Маскава* матрица смешивания, Лептонные углы смешивания
- Слабый гиперзаряд 398—401, 497, 507
- Слабых взаимодействий теории, $V-A$ 164, 241, 389—390, 406, 408, 419
- — — — *Джорджи—Глэшоу* $SO(3)$ 394
- — — — с промежуточным векторным бозоном 390—391
- — — — стандартная $SU(2) \times U(1)$: *см.* *Вайнберга—Салама* теория
- — — — *Ферми* 387
- Славнова—Тейлора* тождества 308—320
- Смешивание в кварковых взаимодействиях 413, 427—428; *см. также* *Кабиббо* угол, *Кобаяси—Маскава* матрица смешивания
- — лептонных взаимодействиях 415, 473
- — нейтральных векторных бозонов в электрослабой теории $SU(2) \times U(1)$: *см.* *Вайнберга* угол

- составных операторов при перенормировке 81—82, 355—356
- CHC: см. Спонтанное нарушение симметрии
- SO(2)-симметрия; см. U(1)-симметрия
- SO(3)-симметрия; см. SU(2)-симметрия
- SO(4)-симметрия; см. SU(2) × SU(2)-симметрия
- Солитоны 532—539, 542—545
- в калибровочной теории со CHC (монополь *г'Хофта* — *Полякова*) 539—542
- — теории $\lambda\phi^4$ в двумерном пространстве 532—537
- — — — четырехмерном пространстве 537—539
- Солнечных нейтрино загадка 472
- Составная хиггсовская частица 462—463
- Составные полевые операторы 78—82, 91, 259
- — — смешивание при перенормировке 81—82, 353—358
- Сохранение *B—L* 482, 513, 522, 523
- Сохранения векторного тока гипотеза 165
- Спиральность 242, 245, 396
- Спонтанное нарушение симметрии (CHC) 152, 171—181, 278, 410; см. также *Вакуумное среднее*, *Голдстоуна* теорема, *Киральная симметрия*, *Хиггса* явление
- — — за счет радиационных поправок 217—223, 304
- — — и перенормировки 217—223, 304
- — — — солитоны 537
- — — — механизм 284
- — — фермионная масса 181, 411, 469, 520
- CP-инвариантность, нарушение 414, 415
- — в сильных взаимодействиях 570, 571
- — жесткое и мягкое 444, 571
- — фазы 410, 414, 415, 511
- Стандартная электрослабая теория; см. *Вайнберга—Салама* теория
- Степень отображения: см. Топологический индекс
- Струн 254, 371
- Струна дираковская 528—532, 544
- Струнная модель адронов 372
- Струны натяжение 372—383, 386
- Структурная функция 167, 237, 241, 248—252, 351; см. также *Партонная модель*, *Скейлинг*, *Формфактор*
- — моменты 346—349, 354, 358, 360—361
- — несинглетные комбинации по ароматам 351, 357—358, 361
- — синглетные комбинации по ароматам 351, 355—357, 361
- — спиральность 242, 245
- SU(2)-симметрия 110—118
- изоспиновая симметрия ароматов 139—140
- калибровочные теории 267
- — — *Джорджи—Глзшоу* модель 394, 539
- — — инстантоны 554
- — — квантование 299—303
- — — и преобразование БРС 315
- SU(2) × U(1)-симметрия 106, 392—394
- SU(2) × SU(2)-симметрия; см. также *Киральная симметрия*
- нарушение до SU(2) и $\rho = 1$ 405, 465
- σ -модель, CHC и теорема *Голдстоуна* 179
- SU(3)-симметрия 118—124
- восьмеричный путь, симметрия ароматов 140—149
- декаплет барионов 142—146
- нарушение 145, 197
- октеты мезонов и барионов 141—142, 145—147
- теория свободных кварков 159
- трансформационные свойства слабых токов 165
- цветовая симметрия 150—151
- — — лагранжиан КХД 335
- SU(3) × SU(3)-симметрия, алгебра зарядов 157
- — токов 161
- SU(4)-симметрия 124
- переключение 469—472
- симметрия ароматов 149
- соотношения между массами лептонов и кварков в SU(5)-модели 520
- SU(5)-симметрия 110
- переключение 469—472
- ТВО 495—523
- SU(*n*)-симметрия 110, 124—138
- Судакова* переменные 366, 367
- Суммирование главных логарифмов 101, 363—364, 371
- Суперсимметрия 334, 505
- Сходимость фейнмановских интегралов, теорема 56
- τ -лептон 410
- Твист 345, 351, 355
- ТВО: см. Великое объединение

- Тензорные представления группы $SU(n)$ 124—138, 494
- θ -вакуум 562—564, 568—571; *см. также* Аксиальная проблема $U(1)$, CP -инвариантность
- Теория возмущений; *см. также* Фейнмана правила, Непертурбативные эффекты, Перенормировки
- — калибровочные теории 300
 - — канонический формализм 15—18
 - — — — представление взаимодействия 15
 - — — — U -матрица 15—16
 - — модель $\lambda\phi^4$ 29—32
- Техницвет 461—472
- масштабный параметр Λ_{TH} 467
- Токи аксиально-векторные 207—208, 564—566
- аномалии 564—566
 - коммутатор 157, 165, 237, 261
 - симметрия 155, 162
 - слабые 164—165
 - заряженные 240—241, 388, 392—393, 406
 - меняющие странность 388, 417, 427—428, 435—440
 - нейтральные 388, 394
 - сохраняющие аромат 417, 419—426
 - топологические 536
 - электромагнитные 237, 260
- Токов взаимодействие: *см.* V - A -взаимодействие
- сохранение 155, 174, 203—205, 208
- Топологический закон сохранения 535—537
- индекс 552—553, 555, 559—564
 - (3, 3^*) \oplus (3^* , 3)-теория 194; *см. также* Киральная симметрия, нарушение
- t Хофта—Полякова монополю 524, 539—549; *см. также* Монополю магнитный, Солитоны
- — взаимосвязь пространственной и внутренней симметрий 545
 - — как монополю Дирака 542—545
 - — $SO(3)$ 539—546
 - — $SU(5)$ 547—549
 - — катализ распада протона 549
 - — хромагнитный заряд 548—549
 - — условие квантования 542—543, 547
- Угловой момент и монополю 527—528, 545
- Удвоения фермионных поколений проблема 418, 495; *см. также* Поколение
- Универсальность Кабиббо 420, 429
- калибровочного взаимодействия 267, 271
- Унитарность абелевой калибровочной теории 304, 307
- и перенормируемость в теории слабых взаимодействий 390, 394—398
 - — тождества Уорда 309—315, 320
 - Уорда тождества 187, 205, 308—309
 - — в неабелевых калибровочных теориях (тождества Славнова—Тейлора) 313—320
 - — для аксиально-векторного тока в КЭД 207—214
 - — векторного тока в $\lambda\phi^4$ 203—207
 - — и унитарность 309—315
- fabс* символ 119, 159—160, 195
- Фаддеева—Попова язац 294
- — детерминант 293, 297—298
 - — духи 298, 301—303, 310—315
 - — отсутствие в абелевом случае 296
 - — — — аксиальной калибровке 294—295, 315
 - — — петли 303, 311, 328
 - — — преобразование БРС 315
 - — — тождества Уорда 313, 319
 - — — унитарность 315
- Фазовый переход 374, 386
- Факторизация сингулярностей 341—343, 363—364, 359; *см. также* Операторное разложение
- Фейнмана правила 11—12, 33, 577—592
- — в абелевой теории в калибровке $R\xi$ 304—306
 - — ковариантных калибровках 299—303, 584—586
 - — — КЭД 584
 - — — модели $\lambda\phi^4$ 20, 217—220, 577—580, 584
 - — — скалярной КЭД 585
 - — — теории Вайнберга—Салама в калибровке $R\xi$ 586
 - — — формализме функционального интегрирования 577—582
 - — для фермионных петель 33, 40
- Фейнмановские параметры 61
- Ферми константа 164, 241, 387, 391, 406, 429
- теория β -распада 387
- Фермионная масса; *см. также* Киральная симметрия, Кварковые массы
- — дираковского и майорановского типов 475—478
 - — в минимальной $SU(5)$ -модели 520—522

- — — модели Вайнберга—Салама 404, 411, 454
 — — — теории со спонтанным нарушением симметрии 181
 — — — теориях техницвета 466—471
 — — — массовая матрица 411—413; см. также Биунитарное преобразование, Массовые собственные состояния
 Ферромагнетизм 172—173
 Фиксированная точка 102; см. также Ренормализационная группа
 Фирца преобразования 407, 439, 512, 573
 Формфактор 183—184, 239; см. также Структурная функция
 Функциональное интегрирование 11, 20, 33
 — — калибровочных теорий 287—308
 — — квантование 20—28
 — — скалярных теорий 28—32
 — — фермионных теорий 33—40
- Хиггса** механизм нарушения симметрии 401
 — поля 454
 — явление 279—286
 — — в абелевом случае 279—281
 — — — модели $SO(3)$ 539—540
 — — — неабелевом случае 282—286
 — — — ТВО $SU(5)$ 501—505
 — — — теории Вайнберга—Салама 401—405
 Хиггсовская частица 283, 304, 453, 458—460
 — — — в теории Вайнберга—Салама 404, 409, 453—460
 — — — взаимодействие с калибровочными бозонами 448, 455
 — — — — фермионами 402—404, 411, 454
 — — — заряженная 460
 — — — масса 404, 455—458
 — — — рождение 458—460
 — — — составная (модели техницвета) 462—472
 — — — триплет 483, 539, 540
- Цвейга** правило 147—148, 197
 Цвет 150—151, 335, 460
 — дробные заряды кварков 498
 — магнитные заряды монополей в ТВО 548
 — полное адронное сечение e^+e^- -аннигиляции 254
 — распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 216
 — сокращение аномалий 401
 Цветовая трубка 372
- Частица J/ψ 148; см. также Очарование
 — Y 149; см. также Кварки
 Частичное сохранение аксиально-векторного тока (ЧСАТ) 181—189, 192—193
 Четырехфермионного взаимодействия эффективный лагранжиан: см. Токков взаимодействие
 Четности несохранение 388, 389
 — — в атомной физике 426
 Чистая калибровка 555
- Швингеровские** члены 161, 188
 Шредингера представление 15, 21
- Эксперименты по нарушению четности в атомах 426
 Электрический дипольный момент 442—443, 570; см. также CP -инвариантность
 — заряд: см. Заряда квантование
 — в электрослабой теории 392—394, 398—401, 407
 — как калибровочная константа 266
 Энергин-импульса тензор 355—357
 Эффективного потенциала формализм 223—226
- Юкавское** взаимодействие 402—403, 411, 454
 — — β -функция 325—326, 334
 — — глобальные симметрии в электрослабой теории 409
 — — — — минимальной $SU(5)$ -модели 522—523
 — — — — CP 444
 — — расширенные модели техницвета 467—468
 — — теория Вайнберга—Салама 402—403, 411, 454
 Юнга таблица 127—134, 143—144; см. также Тензорные представления группы $SU(n)$
 — — длина крючка 131
 — — основная теорема 130
 — — произведение представлений 131—133
 — — размерность неприводимого представления 130—131
 — — решеточная перестановка 132—133
 — — сопряженные представления 133—134
 — — стандартная 129
- Якоби** тождество 109
 Янга — Миллса поля: см. Калибровочные симметрии неабелевы

ОГЛАВЛЕНИЕ ¹⁾

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7

Часть I

Глава 1. Основы квантования полей	11
1.1. Формализм канонического квантования	12
1.2. Введение в формализм функционального интегрирования	20
1.3*. Квантование ферми-полей	33
Глава 2. Введение в теорию перенормировок	41
2.1. Стандартные перенормировки в теории $\lambda\phi^4$	42
2.2. БПХ-перенормировки в теории $\lambda\phi^4$	52
2.3. Методы регуляризации	59
2.4. Подсчет степеней расходимостей и перенормируемость	70
Глава 3. Ренормализационная группа	83
3.1. Схемы вычитаний в импульсном пространстве и уравнение Каллана — Симанзика	84
3.2*. Схема минимальных вычитаний и ее ренормгрупповое уравнение	95
3.3. Эффективная константа связи	100
Глава 4. Теория групп и кварковая модель	105
4.1. Элементарная теория групп	105
4.2. Группы $SU(2)$ и $SU(3)$	110
4.3. Тензорный метод для групп $SU(n)$	124
4.4. Кварковая модель	138
Глава 5. Киральная симметрия сильных взаимодействий	152
5.1. Глобальные симметрии в теории поля и коммутаторы токов	153
5.2*. Токи, соответствующие симметрии, как физические токи	162
5.3. Спонтанное нарушение глобальной симметрии. Теорема Голдстоуна	171
5.4*. Частичное сохранение аксиально-векторного тока и теоремы о мягких пионах	181
5.5*. Механизм нарушения киральной симметрии	192
Глава 6. Перенормировки и симметрии	202
6.1*. Тождество Уорда для векторного тока и перенормировка	203
6.2*. Аномалия аксиально-векторного тождества Уорда и распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	207

¹⁾ Разделы, отмеченные звездочкой (*), содержат детали, которые могут быть опущены при первом чтении. Разделы и главы, отмеченные знаком †, представляют собой элементарное изложение вопросов, выходящих за пределы основного предмета книги.

6.3 [†] .	Перенормировка в теориях со спонтанно нарушенной симметрией	217
6.4 [†] .	Эффективный потенциал и спонтанное нарушение симметрии, индуцированное радиационными поправками	223
Глава 7.	Партонная модель и скейлинг	235
7.1.	Партонная модель глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния	235
7.2.	Правила сумм и приложения кварк-партонной модели	245
7.3.	Сингулярности свободных полей на световом конусе и бёркеновский скейлинг	256
Часть II		
Глава 8.	Калибровочные симметрии	266
8.1.	Локальные симметрии в теории поля	266
8.2*.	Калибровочная инвариантность и геометрия	272
8.3.	Спонтанное нарушение калибровочной симметрии; явление Хиггса	278
Глава 9.	Квантовые калибровочные теории	287
9.1.	Квантование калибровочных теорий с помощью функциональных интегралов	287
9.2.	Правила Фейнмана в ковариантных калибровках	297
9.3*.	Тождества Славнова — Тейлора	308
Глава 10.	Квантовая хромодинамика	321
10.1*.	Открытие асимптотической свободы	322
10.2.	Лагранжиан КХД и симметрии сильных взаимодействий	335
10.3.	Ренормгрупповой анализ скейлинга и нарушение скейлинга	340
10.4*.	Партонная модель и пертурбативная КХД	358
10.5 [†] .	Калибровочные теории на решетке и удержание цвета	371
Глава 11.	Стандартная теория электрослабых взаимодействий I: основы	387
11.1.	Слабые взаимодействия до калибровочной теории	387
11.2.	Построение стандартной $SU(2) \times U(1)$ -теории	391
11.3.	Дублирование фермионных поколений	409
Глава 12.	Стандартная теория электрослабых взаимодействий II: феноменологические следствия	419
12.1.	Процессы с нейтральными токами, сохраняющими симметрию ароматов	419
12.2.	Слабые углы смешивания, механизм ГИМ и нарушение CP -инвариантности	427
12.3.	Промежуточные векторные бозоны W и Z	444
12.4.	Хиггсовская частица	453
Глава 13.	Избранные вопросы квантовой ароматодинамики	461
13.1.	Динамическое нарушение симметрии и модели техникета	461
13.2.	Массы нейтрино, смешивания и осцилляции	472
13.3.	Распад $\mu \rightarrow e\gamma$, пример вычисления петель в R_ξ -калибровке	485
Глава 14.	Великое объединение	494
14.1.	Введение в $SU(5)$ -модель	494
14.2.	Спонтанное нарушение симметрии и калибровочная иерархия	501

14.3.	Слияние констант связи	505
14.4.	Распад протона и барионная асимметрия Вселенной	511
14.5.	Массы фермионов и углы смешивания в минимальной $SU(5)$ -модели	517
Глава 15[†].	Магнитные монополи	525
15.1.	Дираковская теория магнитных полюсов	525
15.2.	Солитоны в теории поля	532
15.3.	Монополь т'Хофта — Полякова	539
Глава 16[†].	Инстантоны	550
16.1.	Топология калибровочных преобразований	551
16.2.	Инстантоны и вакуумные туннельные переходы	557
16.3.	Инстантоны и проблема $\hat{U}(1)$	564
Приложение А.	Обозначения	572
Приложение Б.	Правила Фейнмана	577
	Библиография	593
	Литература	599
	Предметный указатель	610

Учебное издание

Та-пей Ченг, Линг-фонг Ли

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Ст. научный редактор Н. Л. Телеснин. Мл. научн. редакторы В. И. Аксенова,

Р. Х. Зацепина, И. А. Зиновьева, Г. Г. Сорокина, В. Н. Цлаф.

Художник В. С. Потапов. Художественный редактор К. В. Радченко.

Технический редактор И. И. Володина. Корректор В. И. Киселева

ИБ № 5909

Сдано в набор 08.07.86. Подписано к печати 16.03.87. Формат 60×90^{1/8}. Бумага кн.-журн. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 19,5 бум. л. Усл. печ. л. 39,0. Усл. кр.-отт. 39,0. Уч.-изд. л. 36,13. Изд. № 2/4627. Тираж 5000 экз. Зак. № 264. Цена 5 р. 70 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.