А. С. ШВАРЦ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

АТОМИЗДАТ

А. С. ШВАРЦ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1975

УДК 530.145

Шварц А. С. **Математические основы квантовой теории поля.** М., Атомиздат, 1975, с. 368.

Книга содержит изложение основных понятий квантовой теории поля, во многом отличающееся от существующих изложений. Подробно рассматривается теория рассеяния в гамильтоновом и в аксиоматическом подходе, а также связь между этими двумя подходами к квантовой теории поля.

Книга рассчитана как на математиков, желающих познакомиться с квантовой теорией поля, так и на физиков, интересующихся более глубоким анализом основ этой теории. Она будет интересна также специалистам по квантовой теории поля — не только благодаря оригинальности указанного в книге построения квантовой теории поля, но и потому, что она содержит ряд новых результатов, в том числе результаты, полученные автором и его сотрудниками.

Список литературы — 66 наименований.

Ш $\frac{20402-116}{034(01)-75}$ 14—76

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга адресована математикам и физикам, которых интересует четкое изложение основ квантовой теории поля. Было приложено немало усилий для того, чтобы удовлетворить обе категории читателей. Я стремился, чтобы книга была понятной математику, не знающему квантовой механики, и интересной физику — специалисту по квантовой теории поля, чтобы строгость доказательств была достаточной для математика, но не мешала читать физику. Было бы хорошо, если бы эта попытка удовлетворить одновременно физиков и математиков удалась хотя бы отчасти.

В настоящей книге излагаются почти исключительно результаты квантовой теории поля, не зависящие от предположения лоренц-инвариантности (лоренц-инвариантным теориям посвящена только последняя глава). В этом состоит, пожалуй, наиболее существенное отличие ее от изданных до сих пор книг. Другой важной чертой книги является то, что в ней рассматривается как гамильтонова, так и аксиоматическая квантовая теория поля и устанавливается связь между ними.

В существующих книгах по квантовой теории поля нередко приходится встречаться с тем, что в процессе вычислений «правила игры» (основные определения) вдруг меняются или производятся формальные манипуляции с бессмысленными выражениями, а в результате получается осмысленный конечный ответ*. Это, естественно, сильно

* Полностью свободны от недостатков такого рода, пожалуй, только книги Н. Н. Боголюбова, Д. В. Ширкова [1] и Хеппа [2]. Даже замечательная книга А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого [24], в которой очень хорошо раскрыто физическое содержание процедуры перенормировки, в этом отношении небезупречна. Отдельным вопросам квантовой теории поля посвящены написанные на математическом уровне книги Уайтмана [3], Фридрихса [4, 5] и Сигала [6]. Содержание настоящей книги лишь в малой степени пересекается с содержанием перечисленных книг.

затрудняет изучение книги математически настроенному читателю. Он, конечно, понимает, что, изменяя по ходу дела правила игры, физики меньше всего подражают играющим в крокет героям Л. Кэролла, — за ними стоит физическая интуиция, широкое использование аналогий и, в конечном счете, эксперимент. Но от признания, что физики поступают правильно, математику не становится легче.

Я попытался изложить основные понятия квантовой теории поля таким образом, чтобы, не стремясь к абсолютной математической строгости, добиться максимальной четкости и ясности. (Впрочем, бóльшая часть книги написана так, что доведение доказательств до полной строгости не составит труда для квалифицированного математика.

Первые две главы книги и § 12 содержат краткое изложение основ квантовой механики, предназначенное для математиков. В § 13, 20 — 22 излагаются основные факты, касающиеся фоковского пространства и операторов в этом пространстве; на них базируется всё дальнейшее.

Глава 4 посвящена изучению оператора эволюции в представлении взаимодействия $S(t, t_0)$ и его адиабатического аналога $S_\alpha(t, t_0)$. В гл. 5 излагается теория рассеяния в квантовой механике. От этих глав дальнейшее формально мало зависит (например, содержание § 14 существенно используется лишь в § 23, посвященном диаграммной технике теории возмущений для оператора $S(t, t_0)$, и в § 46, а содержание § 16 — в § 25, 33 и 41). Однако пропускать эти главы при чтении, видимо, не стоит: формально, конечно, можно изучать рассеяние частиц в квантовой теории поля, не зная теории потенциального рассеяния, но реального понимания при этом достичь трудно. Глава 7 посвящена изучению функций Уайтмана и Грина в наиболее простой ситуации; от нее существенно зависит только § 29, содержащий построение операторной реализации трансляционно инвариантного гамильтониана с помощью предельного перехода от конечного объема. При первом чтении эту главу и § 29 можно пропустить. В § 28 вводится понятие трансляционно инвариантного гамильтониана и его операторной реализации; этот параграф необходим для понимания гл. 9 и 11. Квантованию классических трансляционно инвариантных систем с бесконечным числом степеней свободы посвящен § 30; его содержание используется в § 35 и 49. В гл. 9 излагаются различные конструкции матрицы рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана; доказательство эквивалентности этих конструкций проводится в гл. 11. Главы 10 и 12 посвящены аксиоматической теории рассеяния (в гл. 12 рассматриваются лоренц-инвариантные теории). Наконец, в гл. 11 рассматриваются в рамках теории возмущений трансляционно инвариантные гамильтонианы; при этом существенно используются результаты изложенной в гл. 10 аксиоматической теории рассеяния и описанное в § 34 фаддеевское каноническое преобразование. Математику естественно начать чтение этой главы с § 46.

Наиболее математически настроенные читатели, прочитав первые пять глав и § 20 и 21, могут сразу перейти к аксиоматической теории рассеяния (гл. 10 и первые параграфы гл. 12). После этого можно читать § 28, 30, 49, 46.

Физик, который хочет прочесть книгу на математическом уровне строгости, может получить необходимую для чтения математическую информацию в дополнении. Если же его устраивает более низкий уровень строгости, он может ограничиться имеющимися у него математическими знаниями. Ему следует тогда начинать чтение с четвертой главы, ознакомившись предварительно с приведенным в начале книги перечнем обозначений. Понятие предгильбертова пространства он может не отличать от понятия гильбертова пространства; понятие эрмитова оператора — от понятия самосопряженного оператора. Под измеримой функцией можно понимать произвольную функцию, а под пространством с мерой — n-мерное евклидово пространство (точнее говоря, если для функций на множестве X определено понятие интеграла, то множество X называется пространством с мерой). Утверждения, в которых встречаются незнакомые ему понятия, физик может пропустить без ущерба для понимания дальнейшего.

В тексте книги обычно не отмечается, кому принадлежат доказанные в ней результаты (ссылки на оригинальные работы появляются лишь в случае, если результат формулируется, но не доказывается). Это объясняется тем, что многое из содержащегося в этой книге (как и во всякой науке) не может быть приписано определенному автору, а является плодом некоторой эволюции; многие теоремы, хотя и не содержатся в таком виде, как сформулированы здесь, ни в одной из предшествующих публикаций, следует считать известными. Ниже перечисляются некоторые работы, использованные в книге. Первые примеры представлений канонических соотношений коммутации (CCR), не эквивалентных фоковскому представлению, принадлежат Сигалу [33], Фридрихсу [4] и ван Хову [34].

Исследование функций Уайтмана в гл. 7 и 8, в частности доказательство теоремы реконструкции, повторяет рассуждения, примененные Уайтманом в аксиоматической квантовой теории поля [15]. Спектральное представление (представление Челлена—Лемана) было впервые получено в работах [35, 36]. В § 32 излагаются результаты Лемана, Симанчика, Циммермана [14]. Теорема эквивалентности принадлежит Чисхольму [37]; строгое доказательство этой теоремы основано на теории рассеяния Хаага—Рюэля. Одевающие операторы впервые рассматривались, видимо, Гринбергом и Швебером [38]. Позже они строились во многих работах (см., например, [36, 5, 2, 40]), в основном в конкретных ситуациях; первая общая конструкция одевающего оператора принадлежит Л. Д. Фаддееву [39]. Данное в книге описание широкого класса одевающих операторов основано на работе [41]. Связь между матрицей рассеяния и адиабатической S-матрицей, описанная в § 33, указана в [42]. Построение аксиоматической теории рассеяния является заслугой прежде всего Хаага [16] и Рюэля [19] (см. также работы [17, 20, 43]). Доказательство адиабатической теоремы в аксиоматической теории рассеяния (§ 41) содержится в [44].

Разумеется, упомянутые статьи далеко не исчерпывают всех работ, имеющих отношение к излагаемым в книге результатам. То же замечание следует сделать по поводу литературы, указанной в тексте введения.

Естественным дополнением к настоящей книге является другая моя книга [23].

Математику было бы полезно после прочтения настоящей книги ознакомиться с книгой [23], во многих отношениях дополняющей изложенные здесь результаты. Для физика, видимо, более целесообразен обратный порядок чтения этих книг.

Разумеется, материал, изложенный в настоящей книге, даже если дополнить его материалом книги [23], составляет лишь небольшую часть современной квантовой теории поля. Более того, он не охватывает многих вопросов, рассмотренных в широко распространенных книгах по квантовой теории поля [1, 24 — 28]. Многие аспекты аксиоматической квантовой теории поля также не затронуты в этой книге; для ознакомления с ними можно рекомендовать монографии [13, 29 — 32].

Я признателен Ю. С. Тюпкину и В. А. Фатееву, оказавшим мне помощь в работе над книгой.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Ю. М. Березанскому, Ф. А. Березину, В. М. Галицкому, О. И. Завьялову, А. Я. Повзнеру, М. К. Поливанову, В. Н. Сушко, И. Тодорову, Л. Д. Фаддееву, Е. С. Фрадкину и другим математикам и физикам, проявившим интерес и внимание к этой книге.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие квантовой теории поля началось с квантовой электродинамики, основные уравнения которой были написаны еще в конце двадцатых годов (Дирак, Гейзенберг, Паули). В этих уравнениях содержится малый параметр $\frac{e^2}{\hbar c} \approx \approx \frac{1}{137}$, поэтому для их решения естественно было применить теорию возмущений по этому параметру. Оказалось, однако, что только в низшем порядке теория возмущений приводит к конечным, согласующимся (с некоторой точностью) с экспериментом результатам. В высших порядках теории возмущений получаются расходящиеся интегралы, что не только не позволяло уточнить результаты первого приближения, но и вызывало серьезные сомнения в корректности всей теории.

Это затруднение в течение долгих лет мешало развитию квантовой электродинамики. Существенный сдвиг произошел лишь через два десятилетия. Он начался с работ Бете, Швингера, Томонага [7 — 9] и достиг своей кульминационной точки в создании Фейнманом [10] метода, позволяющего из расходящихся интегралов высших порядков теории возмущений извлекать конечные результаты, находящиеся в поразительном согласии с экспериментом (ковариантная теория перенормировок). Фейнмановский метод оказался применимым к целому классу теорий (к так называемым перенормируемым теориям); он был развит во многих работах, среди которых прежде всего следует отметить статью Дайсона [11], и поставлен на твердую математическую основу в статье Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка [12].

С появления упомянутых работ начинается период бурного развития квантовой теории поля во многих направлениях. Это развитие не обошлось без задержек и разочарований. Более того, за прошедшие годы не была разрешена

сколько-нибудь окончательно ни одна из стоящих перед квантовой теорией поля основных задач. По-прежнему квантовая электродинамика является единственной квантовополевой теорией, убедительно подтвержденной экспериментом.

Успехи достигнуты также в теории слабых взаимодействий и в теории сильных взаимодействий, но они носят весьма ограниченный характер. Например, современная теория слабых взаимодействий неперенормируема, и поэтому в ней — на уровне квантовой электродинамики тридцатых годов — приходится ограничиваться низким порядком теории возмущений*. Сильные взаимодействия можно пытаться описывать перенормируемыми лагранжианами, но параметр, по которому приходится вести разложение в ряд теории возмущений, оказывается большим и рассчитывать на то, что первые члены ряда теории возмущений дают сколько-нибудь удовлетворительный результат, не приходится, а эффективный выход за рамки теории возмущений сейчас неизвестен. По-прежнему вопрос о связи ряда теорий возмущений и точного решения и о самом существовании точного решения даже для перенормируемых теорий остается открытым.

Однако теперь мы существенно лучше понимаем математическую структуру квантовой теории поля. Немалый вклад в это понимание внесло развитие аксиоматической квантовой теории поля в работах Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева и М. К. Поливанова; Лемана, Симанчика и Циммермана; Уайтмана; Хаага и др. [13—21], в частности построение теории рассеяния в рамках аксиоматического подхода. В последние годы интенсивно развивается направление, получившее название конструктивной квантовой теории поля**.

Сегодня квантовая теория поля представляет обширную область деятельности не только физику, но и математику, давая возможность поставить большое количество четко сформулированных математических задач.

* Недавно были предложены перенормируемые лагранжианы, с помощью которых можно описывать слабые взаимодействия; однако за перенормируемость приходится платить введением в теорию полей, которым соответствуют «лишние» (не наблюдавшиеся в эксперименте) частицы.

** В работах этого направления (см., например, [22]) изучаются конкретные гамильтонианы локальной квантовой теории поля с помощью математически строгого анализа предельного перехода от нерелятивистских гамильтонианов.

Эта книга ставит своей целью дать введение в квантовую теорию поля. Она во многом отличается от опубликованных ранее книг. Одно из основных отличий состоит в том, что в ней проведено максимально полное разделение проблемы перенормировок и проблемы расходимостей. Уже давно стало ясно, что даже при отсутствии расходимостей в квантовой теории поля нельзя пользоваться стандартным в квантовой механике определением матрицы рассеяния — оно должно быть модифицировано в связи с тем, что в квантовой теории поля голые частицы, описываемые свободным гамильтонианом, не совпадают с физическими (одетыми) частицами, описываемыми полным гамильтонианом (говоря языком физиков, можно сказать, что при построении матрицы рассеяния в этом случае возникают конечные перенормировки).

В релятивистской локальной квантовой теории поля расходимости могут отсутствовать только в одномерных моделях, поэтому рассмотрение перенормировок и расходимостей обычно проводится вместе; в наиболее четком с математической точки зрения изложении квантовой теории поля, принадлежащем Н. Н. Боголюбову и Д. В. Ширкову [1], эти два вопроса полностью совпадают.

Однако большая часть того, что известно в квантовой теории поля, не зависит от предположений релятивистской инвариантности и локальности. Поэтому в основной части книги квантовая теория поля строится без этих предположений, и лишь в самом конце книги в качестве предельного случая рассматриваются лоренц-инвариантные локальные теории. Это позволяет не только сделать более простым изложение важнейших положений квантовой теории поля, но и добиться большей ясности при рассмотрении вопроса об устранении расходимостей.

Квантовая теория поля может быть охарактеризована как квантовая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Как известно, при квантовании классической системы с конечным числом степеней свободы обобщенным импульсам $p_1, \ldots, p_n$ и обобщенным координатам $q_1, \ldots, q_n$ соответствуют самосопряженные операторы $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n, \hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n$, подчиненные соотношениям

$$[\hat{p}_k, \hat{p}_l] = [\hat{q}_k, \hat{q}_l] = 0; \qquad [\hat{p}_k, \hat{q}_l] = \frac{1}{i}\,\delta_{kl} \tag{1}$$

(каноническим коммутационным соотношениям).

В классической механике систем с бесконечным числом степеней свободы имеем дело с бесконечным числом импульсов $\pi(\xi)$ и координат $\varphi(\xi)$ (здесь ξ меняется непрерывно или пробегает бесконечный дискретный ряд значений). Естественно предполагать, что в квантовой механике систем с бесконечным числом степеней свободы придется рассматривать операторы $\hat{\pi}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$[\hat{\pi}(\xi), \hat{\pi}(\xi')] = [\hat{\varphi}(\xi), \hat{\varphi}(\xi')] = 0; \quad [\hat{\pi}(\xi), \hat{\varphi}(\xi)] = \frac{1}{i}\,\delta(\xi, \xi');$$
$$\hat{\pi}^+(\xi) = \hat{\pi}(\xi); \quad \hat{\varphi}^+(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \tag{2}$$

(здесь $\delta(\xi, \xi')$ обозначает символ Кронекера, если ξ пробегает дискретный ряд значений, и δ-функцию, если ξ меняется непрерывно; в непрерывном случае, строго говоря, $\hat{\pi}(\xi)$ и $\hat{\varphi}(\xi)$ представляют собой операторные обобщенные функции ξ).

Будем говорить, что операторы $\hat{\pi}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$, удовлетворяющие соотношениям (2), образуют представление канонических коммутационных соотношений (CCR). Легко видеть, что операторы

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\varphi}(\xi) + i\hat{\pi}(\xi));$$

$$a^+(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\varphi}(\xi) - i\hat{\pi}(\xi))$$

удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered}[a(\xi), a(\xi')] = [a^+(\xi), a^+(\xi')] = 0; \\ [a(\xi), a^+(\xi')] = \delta(\xi, \xi').\end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, что задача о построении операторов $a(\xi)$, $a^+(\xi)$, удовлетворяющих соотношениям (3), эквивалентна задаче о построении операторов $\hat{\pi}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$, удовлетворяющих соотношениям (2), поэтому семейство операторов $a(\xi)$, $a^+(\xi)$, подчиненных условиям (3), также будем называть представлением CCR. В то время как в случае конечности числа степеней свободы (т. е. в случае, когда ξ пробегает конечное число значений) имеется по существу только одно неприводимое представление CCR, для бесконечного числа степеней свободы можно построить много разных (не связанных унитарной эквивалентностью) неприводимых представлений CCR. Простейшие из неприводимых представлений CCR — фоковские представления (т. е. такие системы операторов $a(\xi)$, $a^+(\xi)$, подчиненных соотношениям (3), для которых можно найти вектор θ, удовлетворяющий условию $a(\xi)\,\theta = 0$). Пространство, в котором действуют операторы $a(\xi)$, $a^+(\xi)$, образующие фоковское представление, называется фоковским пространством, а вектор θ — фоковским вакуумом. Оказывается, что фоковское представление по существу единственно (т. е. два фоковских представления унитарно эквивалентны).

Наиболее важные функции Гамильтона в случае конечного числа степеней свободы — функции вида

$$\mathscr{H}(p, q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + U(q_1, \ldots, q_n). \tag{4}$$

При квантовании классических систем с такими функциями Гамильтона возникают, как известно, квантовые системы с гамильтонианами вида

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \hat{p}_k^2 + U(\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n), \tag{5}$$

где $\hat{p}_k$, $\hat{q}_k$ — операторы, подчиненные соотношениям (1). Легко видеть, что операторы $\hat{p}_k(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)\,\hat{p}_k \exp(-\mathrm{i}Ht)$; $\hat{q}_k(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)\,\hat{q}_k \exp(-\mathrm{i}Ht)$ (гейзенберговские операторы) удовлетворяют соотношениям:

$$[\hat{p}_k(t), \hat{p}_l(t)] = [\hat{q}_k(t), \hat{q}_l(t)] = 0;$$

$$[\hat{p}_k(t), \hat{q}_l(t)] = \frac{1}{\mathrm{i}}\delta_{kl}; \quad \hat{p}_k^+(t) = p_k(t); \quad \hat{q}_k^+(t) = q_k(t); \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} = \hat{p}_k(t); \\ &\frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}(\hat{q}_1(t), \ldots, \hat{q}_n(t)); \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\exp(\mathrm{i}H\tau)\,\hat{p}_k(t)\exp(-\mathrm{i}H\tau) = \hat{p}_k(t+\tau); \\ &\exp(\mathrm{i}H\tau)\,\hat{q}_k(t)\exp(-\mathrm{i}H\tau) = \hat{q}_k(t+\tau) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

соотношения (7) носят название гейзенберговских уравнений; видим, что они формально выглядят точно так же, как классические уравнения Гамильтона).

Обратимся теперь к классической системе с бесконечным числом степеней свободы, описываемой функционалом Гамильтона

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\int \pi^2(\xi)\,d\xi + V(\varphi), \tag{9}$$

где

$$V(\varphi) = \sum_m \int V_m(\xi_1, \ldots, \xi_m)\,\varphi(\xi_1)\ldots\varphi(\xi_m)\,d\xi_1\ldots d\xi_m. \tag{10}$$

Величины $\pi(\xi)$ здесь рассматриваются как обобщенные импульсы, $\varphi(\xi)$ — как обобщенные координаты, ξ — непрерывный параметр. Будем считать ради определенности, что ξ пробегает трехмерное пространство; в этом случае $\varphi(\xi)$ естественно рассматривать как

классическое поле в трехмерном пространстве. Уравнения Гамильтона в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi(\xi, t)}{\partial t} = \pi(\xi, t); \\ &\frac{\partial\pi(\xi, t)}{\partial t} = -\sum_m m\int V_m(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1})\,\varphi(\xi_1)\ldots\varphi(\xi_{m-1})\,d^{m-1}\xi. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

При квантовании классической механической системы с функционалом Гамильтона (9) возникает одна из наиболее простых квантовополевых систем.

Естественно считать, что эта система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2(\xi)\,d\xi + V, \tag{12}$$

где

$$V = \sum_m \int V_m(\xi_1, \ldots, \xi_m)\,\hat{\varphi}(\xi_1)\ldots\hat{\varphi}(\xi_m)\,d^m\xi, \tag{13}$$

$\hat{\pi}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$ — самосопряженные операторы, удовлетворяющие CCR, ξ пробегает трехмерное пространство. Так обычно и считают физики. Однако придать точный смысл этим словам не просто. Прежде всего, как уже было отмечено выше, существует много различных семейств операторов $\hat{\pi}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$, удовлетворяющих соотношениям (2) (различных представлений CCR), и необходимо решить, каким из этих представлений следует пользоваться. Физики используют, как правило, фоковское представление CCR [точнее, представление, которое является фоковским для операторов $a^+(\xi)$, $a(\xi)$, удовлетворяющих соотношениям (3) и линейно выражающихся через операторы $\hat{\pi}(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$]. Однако в наиболее интересных случаях оказывается, что выражение (12) не определяет оператора в фоковском пространстве; это делает рассуждения, которые проводятся обычно в физических книгах, некорректными (хотя конечные результаты, разумеется, оказываются верными).

Для того, чтобы преодолеть описанные затруднения, можно написать гейзенберговские уравнения:

$$\frac{\partial\hat{\varphi}(\xi, t)}{\partial t} = \hat{\pi}(\xi, t);$$

$$\frac{\partial\hat{\pi}(\xi, t)}{\partial t} =$$

$$= -\sum_m m\int V_m(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1})\,\hat{\varphi}(\xi_1, t)\ldots\hat{\varphi}(\xi_{m-1}, t)\,d^{m-1}\xi, \tag{14}$$

соответствующие гамильтониану (12), и искать решения этих уравнений, удовлетворяющие естественным условиям [гамильтониан (12) при этом рассматривается как формальное выражение, и уравнения выводятся с помощью формальных вычислений; можно считать также, что уравнения (14) получаются из классических уравнений Гамильтона (11) заменой классических полей $\pi(\xi, t)$, $\varphi(\xi, t)$ операторами $\hat{\pi}(\xi, t)$, $\hat{\varphi}(\xi, t)$]. Точнее говоря, можно определить операторную реализацию формального гамильтониана (12) как совокупность самосопряженного оператора $\hat{H}$ (оператора энергии) и операторов (операторных обобщенных функций) $\hat{\varphi}(\xi, t)$, $\hat{\pi}(\xi, t)$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, подчиненных следующим условиям:

1) при каждом t операторы $\hat{\pi}(\xi, t)$, $\hat{\varphi}(\xi, t)$ удовлетворяют CCR:

$$[\hat{\pi}(\xi, t), \hat{\pi}(\xi', t)] = [\hat{\varphi}(\xi, t), \hat{\varphi}(\xi', t)] = 0;$$

$$[\hat{\pi}(\xi, t), \hat{\varphi}(\xi', t)] = \frac{1}{i}\delta(\xi, \xi');$$

$$\hat{\varphi}^{+}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi, t); \quad \hat{\pi}^{+}(\xi, t) = \hat{\pi}(\xi, t);$$

2) операторы $\hat{\pi}(\xi, t)$, $\hat{\varphi}(\xi, t)$ удовлетворяют гейзенберговским уравнениям (14);

3) оператор $\hat{H}$ определяет зависимость $\hat{\varphi}(\xi, t)$ и $\hat{\pi}(\xi, t)$ от времени t по формулам:

$$\exp(i\hat{H}\tau)\,\hat{\varphi}(\xi, t)\exp(-i\hat{H}\tau) = \hat{\varphi}(\xi, t+\tau);$$

$$\exp(i\hat{H}\tau)\,\hat{\pi}(\xi, t)\exp(-i\hat{H}\tau) = \hat{\pi}(\xi, t+\tau);$$

4) оператор $\hat{H}$ имеет основное состояние Φ; в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ не существует подпространства, инвариантного относительно операторов $\hat{\varphi}(\xi, t)$ и содержащего вектор Φ.

Построение операторной реализации можно провести с помощью предельного перехода от конечного числа степеней свободы.

Особый интерес представляет рассмотрение трансляционно инвариантных гамильтонианов вида (12) [гамильтонианов с функциями V_m, зависящими только от разностей аргументов: $V_m(\xi_1, \ldots, \xi_m) = v_m(\xi_1 - \xi_m, \ldots, \xi_{m-1} - \xi_m)$]. В книге рассматриваются почти исключительно трансляционно инвариантные гамильтонианы как вида (12), так и более общего вида:

$$H = \sum_{m, n} \int \Lambda_{m, n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)\,\delta(\mathbf{k}_1 + \ldots$$

$$\ldots + \mathbf{k}_m - \mathbf{l}_1 - \ldots - \mathbf{l}_n)\, a^{+}(\mathbf{k}_1) \ldots a^{+}(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{l}_1) \ldots a(\mathbf{l}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{l}, \quad (15)$$

где $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ удовлетворяют CCR. (Всякий трансляционно инвариантный гамильтониан вида (12) может быть записан в форме (15),

если выразить $\hat{\varphi}(\xi)$, $\hat{\pi}(\xi)$ через $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ с помощью соотношений:

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{a^{+}(\mathbf{k}) + a(-\mathbf{k})}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k})}} \exp(-i\mathbf{k}\xi)\, d\mathbf{k},$$

$$\hat{\pi}(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{i\sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})}}{\sqrt{2}} \left(a^{+}(\mathbf{k}) - a(-\mathbf{k})\right) \exp(-i\mathbf{k}\xi)\, d\mathbf{k},$$

где $\varepsilon(\mathbf{k})$ — четная положительная функция, и привести полученное выражение к форме (15), пользуясь CCR и отбрасывая получающиеся при преобразовании бесконечные константы.) Если гамильтониан (15) порождает поляризацию вакуума (т. е. $\Lambda_{m,0} \not\equiv 0$), то он не может определять оператор в фоковском пространстве. Однако для гамильтонианов вида (15) можно ввести определение операторной реализации, аналогичное указанному выше определению операторной реализации для гамильтонианов вида (12), и рассматривать построение операторной реализации как придание операторного смысла формальному выражению (15).

Основная часть книги посвящена теории рассеяния. В нерелятивистской квантовой механике из гамильтониана H, описывающего рассматриваемую систему частиц, естественно выделяется гамильтониан H_0, описывающий свободное движение частиц; по операторам H, H_0 можно определить матрицу рассеяния с помощью формулы

$$S = S_{+}^{*} S_{-}, \quad (16)$$

где S_{-}, S_{+} — операторы, определяемые соотношениями

$$S_{\pm} = \underset{t \to \pm\infty}{\mathrm{s\,lim}} \exp(iHt)\exp(-iH_0 t) \quad (17)$$

(матрицы Мёллера). В квантовой теории поля не существует естественного деления гамильтониана H на «свободный» гамильтониан H_0 и «взаимодействие» $V = H - H_0$; для гамильтонианов вида (15) определение матрицы рассеяния как оператора в фоковском пространстве, задаваемого формулами (16), (17), оказывается возможным лишь в случае, когда $H = H_0 + V$, где

$$H_0 = \int \varepsilon(\mathbf{k})\, a^{+}(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};$$

$$V = \sum_{m, n} \int v_{m, n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)\,\delta(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m - \quad (18)$$

$$- \mathbf{l}_1 - \ldots - \mathbf{l}_n)\, a^{+}(\mathbf{k}_1) \ldots a^{+}(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{l}_1) \ldots a(\mathbf{l}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{l};$$

$$v_{m,0} \equiv 0, \quad v_{m,1} \equiv 0, \quad \varepsilon(\mathbf{k}) > 0$$

(в этом случае основное состояние θ гамильтониана H_0 — «голый вакуум» — и «голое одночастичное состояние» $a^+(\mathbf{k})\,\theta$ оказываются стационарными состояниями полного гамильтониана H). Для гамильтонианов вида (18) удобно определить in- и out-операторы $a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$, $a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$ формулами:

$$S_-a(\mathbf{k}) = a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})\,S_-,$$

$$S_+a(\mathbf{k}) = a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})\,S_+;$$

если матрицы Мёллера $S_{\mp}$ унитарны, то

$$a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}) = \operatorname*{s\,lim}_{t\to\mp\infty} \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\exp(\mathrm{i}\,Ht)\,a(\mathbf{k})\exp(-\mathrm{i}\,Ht) =$$

$$= \operatorname*{s\,lim}_{t\to\mp\infty} \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\,a(\mathbf{k},\,t).$$

Наблюдаемые в эксперименте величины (дифференциальные эффективные сечения) выражаются через так называемые амплитуды рассеяния [матричные элементы матрицы рассеяния в базисе $a^+(\mathbf{k}_1)\ldots$ $\ldots a^+(\mathbf{k}_n)\,\theta$]:

$$S_{m,\,n}(\mathbf{k}_1,\,\ldots,\,\mathbf{k}_m\,|\,\mathbf{l}_1,\,\ldots,\,\mathbf{l}_n) =$$

$$= \langle Sa^+(\mathbf{l}_1)\ldots a^+(\mathbf{l}_n)\,\theta,\quad a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,\theta\rangle =$$

$$= \langle a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{l}_1)\ldots a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{l}_n)\,\theta,\quad a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_1)\ldots a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_m)\,\theta\rangle.$$

В общем случае определение матрицы рассеяния должно быть изменено (физики говорят по этому поводу, что в квантовой теории поля следует рассматривать перенормированную матрицу рассеяния; необходимость перенормировки связана с отличием «голого вакуума» и «голых одночастичных состояний» от «одетого вакуума» и «одетых одночастичных состояний»). Существуют различные конструкции матрицы рассеяния, пригодные для гамильтонианов вида (15); одна из наиболее простых конструкций основана на построении операторной реализации гамильтониана и на определении in- и out-операторов с помощью формул

$$a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}) = \lim_{t\to\mp\infty} \Lambda(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{k})\,t)\,a(\mathbf{k},\,t) \tag{19}$$

(здесь функция $\omega(\mathbf{k})$ подбирается из условия существования предела, а функция $\Lambda(\mathbf{k})$ — из условия, чтобы операторы $a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k})$, $a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k})$ удовлетворяли CCR; предел понимается как слабый предел операторных обобщенных функций). Через in- и out-операторы амплитуды рассеяния выражаются формулой

$$S_{m,\,n}(\mathbf{k}_1,\,\ldots,\,\mathbf{k}_m\,|\,\mathbf{l}_1,\,\ldots,\,\mathbf{l}_n) =$$

$$= \langle a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{l}_1)\ldots a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{l}_n)\,\Phi,\quad a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_1)\ldots a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_m)\,\Phi\rangle, \tag{20}$$

где Φ — основное состояние. Матрица рассеяния может быть определена как оператор в фоковском пространстве, матричными элементами которого являются амплитуды рассеяния (20).

Для гамильтониана H, представленного в виде $H = H_0 + gV$, где H_0 — свободный гамильтониан (гамильтониан, приводящий к линейным гейзенберговским уравнениям), строится разложение матрицы рассеяния и других физических величин по степеням g (это разложение записывается с помощью предложенных Фейнманом диаграмм).

В лоренц-инвариантной квантовой теории поля естественно исходить из гамильтонианов, получающихся при квантовании лоренц-инвариантных классических систем. Из классических систем, описываемых функционалами Гамильтона вида (9), очевидно, лоренц-инвариантны системы, для которых

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\int (\nabla\varphi(\xi))^2\,d\xi + \frac{1}{2}\,m^2\int \varphi^2(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{n\geqslant 3} c_n \int \varphi^n(\xi)\,d\xi \tag{21}$$

(они приводят к лоренц-инвариантным уравнениям движения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi + m^2\varphi + \sum_{n\geqslant 3} nc_n\,\varphi^{n-1} = 0\Big).$$

Однако при квантовании систем с функционалом Гамильтона (21) встречаемся с трудностями, вызванными сингулярностью функций $V_n(\xi_1,\;\ldots,\;\xi_n) = c_n\delta(\xi_1-\xi_n)\ldots\delta(\xi_{n-1}-\xi_n)$. Именно, при вычислении членов ряда теории возмущений встречаемся с не имеющими смысла выражениями (в координатном представлении — с произведениями обобщенных функций, в импульсном представлении—с расходящимися при больших импульсах интегралами). Эти трудности могут быть преодолены в случае, когда рассматриваются гамильтонианы, не содержащие членов степени больше 4 по φ (т. е. $c_n = 0$ при $n > 4$); в этом случае с помощью предельного перехода от гамильтонианов с несингулярными функциями V_n по рассматриваемому семейству гамильтонианов удается (в рамках теории возмущений) построить семейство лоренц-инвариантных матриц рассеяния. При этом приходим к процедуре ковариантной перенормировки.

В настоящей книге почти не исследуются устранение расходимостей и ковариантные перенормировки; в книге [23] указанные вопросы рассмотрены более подробно с той же точки зрения. (В книге [23] изучаются гамильтонианы вида (12) на несколько более формальном уровне, чем здесь; в частности, большее внимание уделено анализу ряда теории возмущений для таких гамильтонианов.)

Условные обозначения

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$A \times B$ — произведение множеств A и B (множество пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$);

E^n — n-мерное евклидово пространство;

$L^2(X)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых комплексных функций на пространстве с мерой X;

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов гильбертова (или предгильбертова) пространства (для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E^n$ может употребляться как обозначение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, так и обозначение $\mathbf{xy}$);

$\mathcal{S}(E^n)$ — пространство гладких (бесконечно дифференцируемых) убывающих быстрее любой степени функций n переменных;

Ω — куб с ребром L в пространстве E^3, выделяемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant z \leqslant L$;

T_Ω — множество векторов вида $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — целочисленный вектор;

$\varphi_{\mathbf{k}}$ — ортонормированный базис в пространстве $L^2(\Omega)$, образованный функциями $\varphi_{\mathbf{k}} = L^{-3/2}\exp(-i\mathbf{kr})$, где $\mathbf{k} \in T_\Omega$;

$\mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2$ — прямая сумма гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ (пространство, состоящее из пар (h_1, h_2), где $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $h_2 \in \mathcal{H}_2$);

$\mathcal{H}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{H}_n \dotplus \ldots$ — прямая сумма бесконечной последовательности гильбертовых пространств $\mathcal{H}_n$ (пространство, состоящее из последовательностей $(h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, где $h_n \in \mathcal{H}_n$, $\sum\limits_n |h_n|^2 < \infty$);

$F(\mathcal{H})$ — фоковское пространство, построенное по гильбертову пространству $\mathcal{H}$ (если $\mathcal{H} = L^2(X)$, то $F(L^2(X)) = F_0 \dotplus F_1 \dotplus \ldots \dotplus F_n \dotplus \ldots$, где в бозевском случае пространство F_n состоит из квадратично интегрируемых симметричных функций $\psi_n(x_1, \ldots, x_n)$ n переменных $x_i \in X$; в фермиевском случае симметричные функции заменяются на антисимметричные);

$[A, B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B;

$[A, B]_+ = AB + BA$ — антикоммутатор операторов A и B.

Два оператора A и B в гильбертовом пространстве называются сопряженными друг с другом, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ для любых x из области определения оператора A и y из области определения оператора B;

A^* — тот из сопряженных с A операторов, который имеет максимальную область определения;

A^+ — тот из сопряженных с A операторов, область определения которого совпадает с областью определения оператора A (для операторов, определенных на всем гильбертовом пространстве, $A^* = A^+$; будем употреблять в этом случае обозначение A^*);

$\mathrm{s}\lim A_n$ — сильный предел последовательности операторов A_n;

$\mathrm{w}\lim A_n$ — слабый предел последовательности операторов A_n (предполагается, что все операторы A_n имеют одну и ту же область определения D; оператор A с той же областью определения называется сильным пределом последовательности A_n, если $Ax = \lim A_n x$ для всех $x \in D$, и слабым пределом последовательности A_n, если $\langle Ax, y\rangle = \lim\langle A_n x, y\rangle$ для всех x, $y \in D$);

$\delta_{k,l} = \delta_l^k$ — символ Кронекера ($\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$, $\delta_{k,k} = 1$);

$\delta(\xi, \eta)$ — δ-функция [здесь ξ, η принадлежат пространству с мерой; если $\xi, \eta \in E^n$, то $\delta(\xi, \eta) = \delta(\xi - \eta)$];

$$\theta(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad \theta(t) = 1 \text{ при } t \geqslant 0;$$

$$\frac{1}{\omega + i0} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\omega + i\varepsilon} = \frac{1}{i}\int \theta(t)\exp(i\omega t)\,dt;$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta;$$

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f (замыкание множества точек, где функция f отлична от нуля).

Для импульсной переменной будем пользоваться обозначениями $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{q}$; энергетическая переменная обычно обозначается буквой ω. Для обозначения координатной переменной используются буквы $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\eta}$, время обозначено буквами t и τ.

В книге используется система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c приняты равными единице.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Состояния квантовомеханической системы

Почти все современные физические теории построены по следующей схеме. Прежде всего говорится, какой математический объект ψ_t описывает состояние рассматриваемой физической системы в момент времени t. Далее указывается уравнение, управляющее изменением со временем объекта ψ_t [обыкновенно это уравнение имеет вид $\frac{d\psi_t}{dt} = A(\psi_t)$]. И, наконец, выясняется, каким образом по объекту ψ_t можно вычислить наблюдаемые на опыте величины.

Сформулируем постулаты квантовой теории, следуя этой схеме.

Состояние квантовомеханической системы в фиксированный момент времени описывается ненулевым вектором ψ комплексного гильбертова пространства R; при этом считается, что два вектора ψ и $\psi' = C\psi$, отличающиеся друг от друга только ненулевым численным множителем C, определяют одно и то же состояние. Если выбрать $C = \|\psi\|^{-1}$, то вектор ψ' будет нормированным, и, значит, всякое состояние может быть представлено нормированным вектором, который определен, конечно, лишь с точностью до множителя, по модулю равного 1. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем представлять состояния квантовомеханической системы нормированными векторами гильбертова пространства.

§ 2. Эволюция вектора состояния

По вектору ψ_{t_0}, описывающему состояние квантовомеханической системы в момент времени t_0, можно однозначно восстановить вектор состояния ψ_t в любой момент времени. Иными словами, существует оператор $U(t, t_0)$ — *оператор эволюции*, ставящий в соответствие вектору ψ_{t_0} вектор ψ_t.

Оператор $U(t, t_0)$ обладает групповым свойством: $U(t_2, t_1) \times U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$, $U(t_0, t_0) = 1$. Оператор эволюции $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\,\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H(t)\,U(t, t_0) \tag{2.1}$$

с начальным условием $U(t_0, t_0) = 1$. Здесь $H(t)$ — самосопряженный оператор, носящий название *оператора Гамильтона* (гамильтониана) квантовомеханической системы. Уравнение Шредингера можно записать также в виде

$$i\,\frac{d\psi_t}{dt} = H(t)\,\psi_t, \tag{2.2}$$

однако эта запись менее корректна, поскольку оператор $H(t)$ может быть определен не на всем гильбертовом пространстве R, а оператор $U(t, t_0)$ определен всюду.

Легко проверить, что $U^*(t, t_0) = U(t_0, t)$, и вывести отсюда и из группового свойства, что *оператор* $U(t, t_0)$ *унитарен*.

Если гамильтониан H не зависит от времени явно, можно записать $U(t, t_0)$ в виде $U(t, t_0) = \exp(-iH(t - t_0))$. В частном случае одной одномерной нерелятивистской частицы пространство состояний R можно считать пространством $L^2(E^1)$ квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ одной переменной x, где $-\infty < x < \infty$. Оператор Гамильтона в этом случае можно записать в виде $H(t) = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \hat{\mathscr{V}}(x, t)$, где $\hat{\mathscr{V}}(x, t)$ — оператор умножения на функцию $\mathscr{V}(x, t)$ (t играет роль параметра)*. Такой гамильтониан описывает нерелятивистскую частицу с массой m, движущуюся в зависящем от времени поле с потенциалом $\mathscr{V}(x, t)$.

§ 3. Вычисление вероятностей значений измеряемой величины

Каждой наблюдаемой величине а в квантовой механике ставится в соответствие самосопряженный оператор A в пространстве R. Зная этот оператор и состояние квантово-

* Легко видеть, что $\hat{\mathscr{V}}(x, t) = \mathscr{V}(\hat{x}, t)$, где $\hat{x}$ — оператор умножения на x.

механической системы, описываемое нормированным вектором $\psi \in R$, можно предсказать распределение вероятностей значений, которые получаются при измерении величины a в состоянии ψ. Именно, *вероятность* $\mu(\alpha)$ *того, что при измерении величины* a *получится значение* $\leqslant \alpha$, *постулируется равной* $\langle e_\alpha(A)\psi, \psi\rangle$, где $e_\alpha(\lambda)$ — функция, равная 1 при $\lambda \leqslant \alpha$ и равная 0 при $\lambda > \alpha$.

Этот постулат можно сформулировать в несколько ином виде, потребовав, чтобы для любой функции f среднее значение $\overline{f(a)} = \int f(\alpha)\, d\mu(\alpha)$ величины $f(a)$ в состоянии ψ задавалось формулой $\overline{f(a)} = \langle f(A)\psi, \psi\rangle$.

Если величинам $a_1, \ldots, a_n$ соответствуют коммутирующие друг с другом операторы $A_1, \ldots, A_n$, то величины $a_1, \ldots, a_n$ являются *одновременно измеримыми* в том смысле, что для каждого состояния ψ можно говорить о совместном распределении вероятностей значений, которые получаются при измерении величин $a_1, \ldots, a_n$. Именно, вероятность $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ того, что при измерении этих величин в состоянии ψ получатся значения, удовлетворяющие неравенствам $a_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, a_n \leqslant \alpha_n$, постулируется равной $\langle e_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(A_1, \ldots, A_n)\psi, \psi\rangle$, где $e_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — функция, равная 1, если $\lambda_1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \lambda_n \leqslant \alpha_n$, и 0 в противном случае.

Как и для случая одной величины, этот постулат можно переформулировать, потребовав, чтобы для любой функции $f(a_1, \ldots, a_n)$ среднее значение $\overline{f(a_1, \ldots, a_n)}$ величины $f(a_1, \ldots, a_n)$ в состоянии ψ задавалось формулой $\overline{f(a_1, \ldots, a_n)} = \langle f(A_1, \ldots, A_n)\psi, \psi\rangle$.

В упомянутом выше частном случае одной одномерной частицы физической величине x (координате частицы) соответствует оператор $\hat{x}$ умножения на x, импульсу частицы — оператор $\hat{p} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$, оператор $\frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ соответствует кинетической энергии, а оператор умножения на $\mathscr{V}(x, t)$ представляет собой оператор потенциальной энергии. Импульс и кинетическая энергия одновременно измеримы, так же как координата и потенциальная энергия, однако говорить о совместном распределении вероятностей координаты и импульса нельзя.

Если A — самосопряженный оператор с дискретным спектром, то в R существует ортонормированный базис из собственных векторов r_i оператора A; соответствующие

собственные значения обозначим a_i. Матрицы операторов A и $e_\lambda(A)$ в базисе r_i диагональны; диагональные матричные элементы оператора A равны a_i, оператора $e_\lambda(A)$ равны $e_\lambda(a_i)$. Если нормированный вектор $\psi = \sum_i c_i r_i$, то

$$\langle e_\lambda(A)\psi, \psi\rangle = \sum_{i,j} c_i c_j^* e_\lambda(a_i)\langle r_i, r_j\rangle = \sum_i e_\lambda(a_i)|c_i|^2.$$

Отсюда ясно, что при измерении значений физической величины, соответствующей оператору A, с ненулевой вероятностью получаются только a_i — собственные значения оператора A. Вероятность получить при измерении в состоянии ψ значение a равна $\sum_i |\langle\psi, r_i\rangle|^2$, где сумма берется по тем i, для которых $Ar_i = ar_i$.

Ставя в соответствие каждому вектору ψ последовательность $(c_1, \ldots, c_i, \ldots)$ коэффициентов разложения вектора ψ по базису r_i, состоящему из собственных векторов оператора A, получаем изоморфизм пространства R и пространства l^2; этот изоморфизм называется A-*представлением*, а последовательность $(c_1, \ldots, c_i, \ldots)$, соответствующая при нем вектору ψ, называется A-представлением вектора ψ. Таким образом, по A-представлению вектора ψ очень просто вычисляются вероятности различных значений величины a в состоянии ψ.

Понятие A-представления может быть определено и тогда, когда оператор A имеет непрерывный спектр, а также обобщено на случай, когда имеем дело с семейством коммутирующих самосопряженных операторов. Именно, если $A_1, \ldots, A_k$ — коммутирующие друг с другом самосопряженные операторы, то $(A_1, \ldots, A_k)$-представлением называется такой изоморфизм гильбертовых пространств R и $L^2(M)$, при котором операторы $A_1, \ldots, A_k$ переходят в операторы умножения на функции $a_1(m), \ldots, a_k(m)$ (M — пространство с мерой, $m \in M$). Здесь также по $(A_1, \ldots, A_k)$-представлению вектора $\psi \in R$ легко вычисляется распределение вероятностей величин $A_1, \ldots, A_k$ в состоянии ψ. Можно доказать, что $(A_1, \ldots, A_k)$-представление существует для любой системы коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_k$. (Если операторы $A_1, \ldots, A_k$ имеют дискретный спектр, это означает, что существует ортонормированный базис пространства R, состоящий из общих собственных функций операторов $A_1, \ldots, A_k$.)

В общем случае понятие $(A_1, \ldots, A_k)$-представления тесно связано с понятием обобщенной собственной функции операторов $A_1, \ldots, A_k$. Именно, пусть r_m, где m пробегает пространство с мерой M, — обобщенный базис в пространстве R, нормированный на δ-функцию (см. дополнение, § Д.8). Если этот базис является собственным для операторов $A_1, \ldots, A_k$ [т. е. $A_i r_m = a_i(m) r_m$], то изоморфизм пространств R и $L^2(M)$, при котором соответствующие друг другу элемент $x \in R$ и функции $\alpha(m) \in L^2(M)$ связаны соотношением $\alpha(m) = \langle x, r_m \rangle$, является $(A_1, \ldots, A_k)$-представлением.

В дальнейшем будем отождествлять физическую величину с соответствующим ей самосопряженным оператором.

§ 4. Гейзенберговские операторы

До сих пор векторы состояний считались зависящими от времени, а операторы физических величин — постоянными (шредингеровская картина). Возможен, однако, другой, эквивалентный подход, при котором операторы зависят от времени, а векторы состояний постоянны (гейзенберговская картина).

Определим для каждого оператора A зависящий от времени оператор A_t (*гейзенберговский оператор*) по формуле $A_t = U^*(t, 0) A U(t, 0)$.

Отметим следующие соотношения:

$$(AB)_t = U^*(t, 0) ABU(t, 0) =$$

$$= U^*(t, 0) AU(t, 0) U^*(t, 0) BU(t, 0) = A_t B_t;$$

$$(A^*)_t = U^*(t, 0) A^* U(t, 0) = (U^*(t, 0) AU(t, 0))^* = (A_t)^*;$$

$$(f(A))_t = U^*(t, 0) f(A) U(t, 0) = f(U^*(t, 0) AU(t, 0)) = f(A_t);$$

$$\langle A_t \psi, \psi \rangle = \langle U^*(t, 0) AU(t, 0) \psi, \psi \rangle =$$

$$= \langle AU(t, 0) \psi, U(t, 0) \psi \rangle = \langle A\psi_t, \psi_t \rangle.$$

Комбинируя два последних соотношения, можно убедиться, что, вычисляя распределение вероятностей по оператору A и состоянию $\psi_t = U(t, 0)\psi$, получаем тот же ответ, что и при вычислении распределения вероятностей по оператору A_t и состоянию ψ. Именно в этом смысле эквивалентны шредингеровская и гейзенберговская картины.

Из уравнения (2.1) и эрмитово сопряженного уравнения $\mathrm{i}\,\frac{\partial U^*(t, 0)}{\partial t} = -U^*(t, 0) H(t)$ вытекает уравнение для оператора A_t (*гейзенберговское уравнение движения*):

$$\frac{dA_t}{dt} = \mathrm{i}\,[H_t, A_t],$$

где $H_t = U^*(t, 0) H(t) U(t, 0)$. В случае, когда гамильтониан H не зависит от времени, $H_t = H$, $A_t = \exp(\mathrm{i}tH) A \exp(-\mathrm{i}tH)$, а гейзенберговское уравнение принимает вид

$$\frac{dA_t}{dt} = \mathrm{i}\,[H, A_t].$$

Покажем на конкретном примере, как записываются гейзенберговские уравнения движения. Пусть R — пространство квадратично интегрируемых функций одной переменной x, а $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mathscr{V}(\hat{x}, t)$, где $\hat{p} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{d}{dx}$, $\hat{x}$ — оператор умножения на x. Пользуясь выписанными выше соотношениями, можно написать, что

$$H_t = \frac{\hat{p}_t^2}{2m} + \mathscr{V}(\hat{x}_t, t).$$

[В случае, когда H не зависит от времени, $H = H_t$, но и тогда удобно переписать H в виде $H = \frac{\hat{p}_t^2}{2m} + \mathscr{V}(\hat{x}_t)$.]

Из соотношения $[\hat{p}, \mathscr{V}(\hat{x})] = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathscr{V}'(\hat{x})$ следует, что $\left[\hat{p}_t, \frac{\hat{p}_t^2}{2m} + \mathscr{V}(\hat{x}_t, t)\right] = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathscr{V}'(\hat{x}_t, t)$, и, значит, $\frac{d\hat{p}}{dt} = -\mathscr{V}'(\hat{x}_t, t)$. Аналогично устанавливается, что $\frac{d\hat{x}_t}{dt} = \frac{1}{m}\hat{p}_t$. Подобные рассуждения всегда применяются, когда нужно написать гейзенберговские уравнения для конкретного оператора.

§ 5. Интегралы движения. Стационарные состояния

Физическая величина A называется *интегралом движения*, если для любого вектора ψ распределение вероятностей величины A в состоянии $\psi_t = U(t, 0)\psi$ не зависит от времени t. Переходя к гейзенберговской картине, убеждаемся, что величина A является интегралом движения, когда гейзенберговский оператор A_t не зависит от t. В дальнейшем в этом параграфе будем предполагать, что гамильтониан H не зависит от времени. Тогда из гейзенберговского уравнения ясно, что величина A будет интегралом движения в том и только том случае, когда оператор A коммутирует с гамильтонианом H. В частности, интегралом движения будет физическая величина, соответствующая самому оператору H; она имеет смысл энергии.

Состояния, описываемые собственными векторами оператора H (состояния с определенным значением энергии E), называются *стационарными состояниями.* В самом деле, если $H\psi = E\psi$, то $\psi_t = \exp(-iEt)\psi$ — решение уравнения Шредингера. Таким образом, ψ_t отличается от ψ только численным множителем и, следовательно, описывает то же состояние; это и оправдывает название стационарного состояния для решения уравнения $H\psi = E\psi$ (стационарного уравнения Шредингера). Заметим, что в случае, когда вектор $\psi_t = U(t, 0)\psi$ для любого t отличается лишь численным множителем $C(t)$ от вектора ψ, из уравнения Шредингера следует, что $iC'(t)\psi = C(t)H\psi$, откуда $C(t) = \exp(-iEt)$ и $H\psi = E\psi$. Это показывает, что любое состояние, не меняющееся во времени, стационарно в определенном выше смысле.

Стационарное состояние, отвечающее наименьшему значению энергии, называется основным состоянием. Легко убедиться, что основное состояние можно охарактеризовать также как состояние с наименьшим средним значением энергии; иными словами, если Φ_0 — основное состояние, а Ψ — любое другое состояние, то $\langle H\Psi, \Psi\rangle \geqslant \langle H\Phi_0, \Phi_0\rangle$ (предполагаем, что Φ_0 и Ψ — нормированные векторы). В самом деле, ограничиваясь для простоты случаем, когда гамильтониан H имеет только дискретный спектр, разложим вектор Ψ по собственным векторам Φ_n оператора H. Тогда

$$\langle H\Psi, \Psi\rangle = \langle H\sum c_n\Phi_n, \sum c_n\Phi_n\rangle =$$
$$= \sum E_n |c_n|^2 \geqslant E_0 \sum |c_n|^2 \geqslant E_0 = \langle H\Phi_0, \Phi_0\rangle$$

(здесь E_n — собственные значения оператора H, отвечающие собственным векторам Φ_n, $E_0 = \min E_n$ — энергия основного состояния).

ГЛАВА 2

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ И СИСТЕМЫ НЕТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

§ 6. Квантовая механика одной скалярной частицы

Для того чтобы описать конкретную квантовомеханическую систему, необходимо задать гильбертово пространство R состояний этой системы и оператор Гамильтона H, управляющий эволюцией состояний системы, а также выписать операторы основных физических величин. Рассмотрим, как описываются простейшие квантовомеханические системы.

Состояние одной скалярной частицы описывается волновой функцией — квадратично интегрируемой функцией $\psi(\mathbf{r})$ на трехмерном пространстве [т. е. пространство R представляет собой в рассматриваемом случае пространство $L^2(E^3)$]. Оператор Гамильтона для нерелятивистской частицы в поле с потенциальной энергией $\mathscr{V}(r)$ записывается в виде $H = -\frac{1}{2m}\Delta + \hat{\mathscr{V}}(\mathbf{r})$, где m — масса частицы, Δ — оператор Лапласа, а $\hat{\mathscr{V}}(\mathbf{r})$ — оператор умножения на функцию $\mathscr{V}(\mathbf{r})$. Оператор $\hat{x}$ координаты x является оператором умножения на x [т. е. $\hat{x}\psi(\mathbf{r}) = x\psi(\mathbf{r})$], операторы $\hat{y}$ и $\hat{z}$ координат y и z определяются аналогично. Поскольку операторы $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ коммутируют, можно говорить о совместном распределении вероятностей величин x, y, z в состоянии $\psi(\mathbf{r})$. Из основных постулатов сразу следует, что плотность этого распределения вероятностей равна $|\psi(\mathbf{r})|^2$ (как всегда, считаем вектор состояния — функцию $\psi(\mathbf{r})$ — нормированным). Операторы компонент импульса равны соответственно $\hat{p}_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$; $\hat{p}_y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$; $\hat{p}_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}$. Операторы компонент момента импульса определяются формулами: $\hat{M}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$; $\hat{M}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$; $\hat{M}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$. Ради краткости будем говорить обычно о векторных операторах $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$; $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$; $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = (\hat{M}_x,$

$\hat{M}_y$, $\hat{M}_z$). Наряду с термином *компоненты импульса* (момента импульса) будем использовать термин *проекции вектора импульса* (момента импульса).

Уравнения движения для гейзенберговских операторов $\hat{\mathbf{r}}_t$ и $\hat{\mathbf{p}}_t$ имеют вид

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}_t}{dt} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_t}{m}; \quad \frac{d\hat{\mathbf{p}}_t}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial \mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}_t).$$

До сих пор состояния одной частицы описывались функциями $\psi(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} \in E^3$ (координатное представление). Если α — унитарный оператор, отображающий пространство $L^2(E^3)$ на пространство $L^2(M)$, где M — какое-то пространство с мерой [изоморфизм пространства $L^2(E^3)$ и пространства $L^2(M)$], то можно с равным успехом представлять состояние функцией $\psi \in L^2(E^3)$ и функцией $\tilde{\psi} = \alpha\psi \in L^2(M)$. Каждому оператору A в пространстве $L^2(E^3)$ при этом будет соответствовать оператор $\tilde{A} = \alpha A \alpha^{-1}$ в пространстве $L^2(M)$, и из соотношения $\langle f(\tilde{A})\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\rangle = \langle f(A)\psi, \psi\rangle$ вытекает, что вычисление вероятностей по оператору $\tilde{A}$ и функции $\tilde{\psi}$ приводит к тому же результату, что и вычисление вероятностей по оператору A и функции ψ.

Рассмотренный переход от одного представления вектора состояния к другому во многих случаях оказывается полезным. Пусть, например, α — это преобразование Фурье, т. е. $\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(-i\mathbf{pr})\,\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ (в данном случае $M = E^3$). При преобразовании Фурье оператор $\hat{p}_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ переходит в оператор умножения на независимую переменную: $\tilde{\hat{p}}_x\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = p_x\tilde{\psi}(\mathbf{p})$; аналогично, $\tilde{\hat{p}}_y\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = p_y\tilde{\psi}(\mathbf{p})$, $\tilde{\hat{p}}_z\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = p_z\tilde{\psi}(\mathbf{p})$. Пользуясь этим, легко убедиться, что плотность совместного распределения вероятностей величин $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ равна $|\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2$.

Разумеется, описанная выше поцедура перехода от одного представления вектора состояния к другому применима и полезна не только в случае одной частицы.

Рассмотрим сейчас на примере одной частицы общий прием, позволяющий выяснить, как следует записывать операторы компонент импульса и момента импульса. Заметим, что каждому движению T трехмерного пространства E^3 естественно сопоставляется

унитарное преобразование W_T пространства $L^2(E^3)$; именно, оператор W_T, показывающий, как преобразуются волновые функции при движении T, записывается в виде $(W_T\psi)(\mathbf{r}) = \psi(T^{-1}\mathbf{r})$. Легко видеть, что $W_{T_1}W_{T_2} = W_{T_1T_2}$, т. е. операторы W_T образуют унитарное представление группы движений.

Оператор проекции импульса на ось может быть записан как оператор бесконечно малого сдвига вдоль этой оси; точнее, оператор $\hat{p}_x$, например, может быть определен как $i\lim\limits_{a\to 0}\frac{W_{T_a}-1}{a}$, где T_a — сдвиг на расстояние a вдоль оси x [т. е. $T_a(x, y, z) = (x + a, y, z)$]. Оператор проекции момента импульса на ось можно определить как оператор бесконечно малого поворота вокруг этой оси; это значит, что M_z определяется как $i\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1}{\varphi}(W_{S_\varphi} - 1)$, где S_φ обозначает поворот на угол φ вокруг оси z [т. е. $S_\varphi(x, y, z) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z)$].

Пользуясь определением импульса и момента импульса через операторы W_T, легко понять, при каких условиях они будут интегралами движения. Например, если гамильтониан инвариантен при повороте вокруг оси z (т. е. если H коммутирует с операторами W_{S_φ}), он будет, очевидно, коммутировать с оператором M_z, и, значит, M_z будет интегралом движения.

§ 7. Квантовая механика частицы со спином

Состояние частицы со спином описывается столбиком ψ из k квадратично интегрируемых функций на трехмерном пространстве

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{r})\\ \vdots \\ \psi_k(\mathbf{r})\end{pmatrix},$$

или, иными словами, функцией $\psi(\mathbf{r})$, значениями которой являются столбики из k чисел. Вместо обозначения $\psi_i(\mathbf{r})$ для функций этого столбика будем употреблять обозначение $\psi(\mathbf{r}, i)$, рассматривая i как переменную, которая может принимать дискретный ряд значений $1, 2, \ldots, k$, и говорить, что волновая функция частицы со спином зависит от точки $\mathbf{r}$ и дискретной переменной i, принимающей k значений. Можно сказать, что пространство состояний R в данном случае представляет собой пространство квадратично интегрируемых функций $\psi(\xi)$, где $\xi = (\mathbf{r}, i) \in E^3 \times B$, $\mathbf{r} \in E^3$, $i \in B = \{1, \ldots, k\}$. Интегрирование по ξ понимается при этом как интегрирование по $\mathbf{r}$ и суммирование по i, например скалярное произведение двух функций $\varphi \in R$ и $\psi \in R$ определяется так:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi(\xi) \overline{\psi(\xi)}\, d\xi = \sum_{i=1}^{k} \int \varphi(\mathbf{r}, i) \overline{\psi(\mathbf{r}, i)}\, d\mathbf{r}.$$

Операторы координат и компонент импульса, а также оператор Гамильтона, если частица находится в потенциальном поле, записываются точно так же, как для бесспиновой частицы. Дискретная переменная при действии перечисленных операторов на функцию $\psi(\xi) = \psi(\mathbf{r}, i)$ рассматривается как параметр. Операторы проекций момента импульса $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$, $\hat{M}_z$ записываются в виде $\hat{M}_x = \hat{l}_x + \hat{s}_x$; $\hat{M}_y = \hat{l}_y + \hat{s}_y$; $\hat{M}_z = \hat{l}_z + \hat{s}_z$, где $\hat{\mathbf{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z)$ — оператор орбитального момента, а $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ — оператор спинового момента. Оператор орбитального момента действует по тем же формулам, что и оператор момента для бесспиновой частицы (т. е. $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$); оператор спинового момента действует только на дискретную переменную [говорят, что оператор A действует только на дискретную переменную, если он определяется матрицей a_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant k$, по формуле $A\psi(\mathbf{r}, i) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\psi(\mathbf{r}, j)$].

К такой записи оператора момента нетрудно прийти, если исходить из приведенных в § 6 соображений. Каждому вращению T трехмерного пространства должно соответствовать унитарное преобразование W_T пространства R, однако теперь оно уже не сводится к замене аргумента у волновой функции. Например, если $\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_2(\mathbf{r}) \\ \psi_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ — векторная функция от $\mathbf{r}$, то оператор W_T, кроме пространственного аргумента, преобразует по обычному векторному закону значения функции $\psi(\mathbf{r})$; т. е. функция $\psi' = W_T\psi$ задается равенством $\psi'_i(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\psi_j(T^{-1}\mathbf{r})$, где T_{ij} — матрица преобразования T. В общем случае оператор W_T должен быть записан в виде

$$(W_T\psi)(\mathbf{r}, i) = \sum_{j=1}^{k} D_{ij}^{T}\psi(T^{-1}\mathbf{r}, j).$$

Этот вид оператора W_T сразу приводит к написанным выше формулам для операторов проекций момента импульса, которые отождествляются с операторами бесконечно малого поворота вокруг осей.

Операторы W_T должны удовлетворять условию $W_{T_1T_2} = W_{T_1}W_{T_2}$ (определять унитарное представление группы вращений). Отсюда ясно, что матрицы D_T определяют k-мерное унитарное представление группы вращений. Зная конечномерные унитарные представления группы вращений, нетрудно установить, какой вид могут иметь операторы проекций спина. Соответствие вращений T с операторами W_T, а следовательно, с матрицами D^T может быть двузначным (оператор W_T и матрица D_T определены тогда с точностью до знака). Это ничему не мешает, так как вектор состояния в квантовой теории определен лишь с точностью до множителя.

Как известно, для каждой размерности $k \geqslant 0$ существует ровно одно (с точностью до эквивалентности) k-мерное унитарное, неприводимое представление группы вращений. При k нечетном это представление однозначно, при k четном оно двузначно. Говорят, что функция $\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \psi_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$, принимающая значения в пространстве представления, описывает частицу со спином $s = \frac{k-1}{2}$. Эта терминология оправдывается тем, что проекции спина изменяются от $-s$ до s (т. е. каждый из операторов $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$, построенных указанным в этом параграфе способом, имеет собственные значения $-s$, $-s+1$, ..., $s-1$, s).

Особенно важным является случай частиц со спином 1/2, поскольку многие элементарные частицы, в частности электрон, протон, нейтрон, имеют спин 1/2. Операторы проекций спина могут быть записаны в этом случае с помощью матриц:

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Описанный выше аппарат полностью пригоден, если у частицы есть какие-либо другие внутренние квантовые числа, кроме спина (например, изоспин). Единственная разница состоит в том, что в случае, когда нет внутренних квантовых чисел, кроме спина, представление группы вращений матрицами D^T неприводимо; в противном случае оно приводимо.

§ 8. Квантовое описание системы нетождественных частиц

Два электрона (или два протона) обладают одинаковой массой, одинаковым зарядом; они неразличимы и по другим свойствам. Именно это имеют в виду, говоря, что все электроны являются *тождественными* частицами. Если в системе частиц какие-либо две частицы являются тождественными, приходится существенно изменять квантово-механическое описание этой системы. Рассмотрим в этом параграфе только такие системы частиц, среди которых никакие две не являются тождественными.

Если рассматривается система из n бесспиновых частиц, то гильбертово пространство R состояний такой системы представляет собой пространство $L^2(E^{3n})$ квадратично интегрируемых функций n пространственных переменных.

Рассмотрим теперь n частиц со спином и предположим, что j-я частица в отдельности описывается функцией $\psi(\xi)$, определенной на множестве B_j (в координатном представлении B_j является множеством пар $(\mathbf{r}, i)$, где $\mathbf{r}$ — точка трехмерного пространства, а i пробегает дискретное множество $1, 2, \ldots, k_j$). Тогда пространство состояний всей системы является пространством $R = L^2(B_1 \times \ldots \times B_n)$ квадратично интегрируемых функций $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, пробегающих соответственно множества $B_1, \ldots, B_n$. В координатном представлении волновая функция $\psi(x_1, y_1, z_1, i_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, i_n)$ системы частиц зависит от координатных (x_j, y_j, z_j) и спиновых переменных i_j каждой из частиц.

Каждый оператор, соответствующий физической величине, связанной с j-й частицей, естественным образом определяет оператор в пространстве R. Например, в координатном представлении операторы $\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{z}_j$ координат j-й частицы действуют в R как операторы умножения на x_j, y_j, z_j; операторы $\hat{p}_{jx}, \hat{p}_{jy}, \hat{p}_{jz}$ компонент импульса j-й частицы $\hat{\mathbf{p}}_j$ действуют в R как операторы дифференцирования по координатам j-й частицы: $\hat{p}_{jx} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\hat{p}_{jy} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_j}$, $\hat{p}_{jz} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z_j}$ $\left(\text{можно написать короче: } \hat{\mathbf{p}}_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}\right)$.

Вообще, если в пространстве $L(B_j)$ оператор A переводит функцию $\psi(\xi)$ в функцию $\psi'(\xi) = \int A(\xi, \eta)\,\psi(\eta)\,d\eta$, то соответствующий ему оператор в пространстве R переводит функцию $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в функцию

$$\psi'(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \int A(\xi_j, \eta)\,\psi(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \eta, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n)\,d\eta$$

Оператор полного импульса $\mathbf{P}$ задается формулой

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\mathbf{p}}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}. \tag{8.1}$$

Оператор Гамильтона системы n частиц в простейшем случае записывается в виде

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m_j} + \mathscr{V}(\hat{\mathbf{r}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{r}}_n) = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\Delta_j}{2m_j}\right) + \mathscr{V}(\hat{\mathbf{r}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{r}}_n) \tag{8.2}$$

[функция $\mathscr{V}$ обычно имеет вид $\mathscr{V}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathscr{V}_j(\mathbf{r}_j) + \sum_{j<l} \mathscr{V}_{jl}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)$].

Если $\mathscr{V}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \mathscr{V}_1(\mathbf{r}_1) + \ldots + \mathscr{V}_n(\mathbf{r}_n)$ (случай невзаимодействующих частиц во внешнем поле), задача о движении n частиц сводится к n одночастичным задачам. Найдем, например, стационарные состояния системы n невзаимодействующих частиц. Обозначим $\varphi_1^{(j)}(\xi_j), \ldots, \varphi_r^{(j)}(\xi_j), \ldots$ стационарные состояния j-й частицы [т. е. собственные функции оператора $H_j = \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m_j} + \mathscr{V}_j(\hat{r}_j)$ в пространстве $L^2(B_j)$], а $E_r^{(j)}$ — соответствующие собственные значения. Легко видеть, что функция $\varphi_{r_1}^{(1)}(\xi_1) \times \varphi_{r_2}^{(2)}(\xi_2) \ldots \varphi_{r_n}^{(n)}(\xi_n)$ является стационарным состоянием гамильтониана $H = H_1 + \ldots + H_n$ в пространстве R с собственным значением $E_{r_1}^{(1)} + \ldots + E_{r_n}^{(n)}$. Если для каждого j функции $\varphi_r^{(j)}(\xi_j)$ образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(B_j)$, то произведения $\varphi_{r_1}^{(1)}(\xi_1) \ldots \varphi_{r_n}^{(n)}(\xi_n)$ образуют полную ортонормированную систему в пространстве R.

До сих пор состояния системы n частиц представлялись функциями координат и спиновых переменных, т. е. использовалось координатное представление. Пусть теперь для каждой из частиц осуществлен переход к другому представлению, т. е. выбран изоморфизм α_j пространства $L^2(B_j)$ и пространства $L^2(M_j)$, где M_j — некоторое пространство с мерой. Тогда нетрудно построить изоморфизм α пространства $R = L^2(B_1 \times \ldots \times B_n)$ и пространства $L^2(M_1 \times \ldots \times M_n)$ квадратично интегрируемых функций n переменных $(m_1, \ldots, m_n)$, пробегающих соответственно множества $M_1, \ldots, M_n$. Иначе говоря, состояния системы из n частиц можно представлять функциями $\psi(m_1, \ldots, m_n)$, где $m_j \in M_j$. Если обозначить пространство состояний j-й частицы через R_j, то пространство состояний R системы n частиц изоморфно тензорному произведению $R_1 \otimes \ldots \otimes R_n$ (это сразу следует из определения тензорного произведения; см. дополнение, § Д4). Отсюда очевидна независимость от выбора представления.

В частности, нередко бывает удобен переход к импульсному представлению. В импульсном представлении состояние системы n частиц описывается вместо функции $\psi(\mathbf{r}_1, i_1, \ldots, \mathbf{r}_n, i_n)$, зависящей от координат и спиновых переменных, функцией

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}_1, i_1, \ldots, \mathbf{p}_n, i_n) =$$
$$= (2\pi)^{-3n/2} \int \exp\left(-\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}_k \mathbf{r}_k\right) \psi(\mathbf{r}_1, i_1, \ldots, \mathbf{r}_n, i_n)\, d^n \mathbf{r}$$

импульсных и спиновых переменных.

Оператор импульса i-й частицы $\hat{\mathbf{p}}_i$ в импульсном представлении сводится к умножению на $\mathbf{p}_i$; оператор полного импульса $\mathbf{P} = \sum \hat{\mathbf{p}}_i$ (сумма операторов импульса отдельных частиц) — к умножению на $\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n$.

§ 9. Частица в ящике с периодическими граничными условиями

Рассмотрим в качестве примера скалярную частицу, которая свободно движется в кубе Ω, определяемом неравенствами $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant z \leqslant L$. Для того чтобы задача о движении такой частицы приобрела точный смысл, нужно фиксировать условия, которым удовлетворяет волновая функция стационарного состояния на границе куба; предполагаем граничные условия периодическими. Пространство состояний R в данном случае состоит из всех квадратично интегрируемых функций в кубе Ω, а гамильтонианом является оператор $H = (-1/2m)\Delta$ с периодическими граничными условиями (более точно определение гамильтониана будет сформулировано ниже).

Поставим в соответствие параллельному переносу на вектор $\mathbf{a}$ в трехмерном пространстве унитарное преобразование $W_{\mathbf{a}}$ в пространстве R, положив $(W_{\mathbf{a}}\psi)(\mathbf{r}) = \check{\psi}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, где $\check{\psi}(\mathbf{r})$ — периодическое продолжение функции $\psi(\mathbf{r})$, заданной в кубе Ω, на все трехмерное пространство. Операторы проекций импульса $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ можно определить теперь как операторы бесконечно малого параллельного переноса вдоль осей x, y, z $\left(\text{например, } \hat{p}_x = = \mathrm{i} \lim\limits_{a \to 0} \dfrac{W_{(a,0,0)} - 1}{a}\right)$.

Легко убедиться, что $\hat{p}_x \psi = \dfrac{1}{\mathrm{i}} \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$; оператор $\hat{p}_x$ определен на функциях $\psi \in L^2(\Omega)$, для которых $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \in L^2(\Omega)$ и удовлетворяются периодические граничные условия $\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z)$. Через оператор $\hat{\mathbf{p}}$ гамильтониан записывается в виде $H = \dfrac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2$.

Функции $\varphi_{\mathbf{k}} = L^{-3/2} \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})$, где $\mathbf{k}$ пробегает решетку T_Ω, состоящую из векторов вида $\dfrac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — вектор с целочисленными координатами), образуют полную ортонормированную систему общих собственных функций операторов H, $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$. Всякая функция $\psi \in R$ может быть представлена в виде $\psi(\mathbf{r}) = \sum c_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ (сумма по решетке T_Ω); функция $c_{\mathbf{k}}$ на решетке T_Ω называется *волновой функцией в импульсном представлении.*

§ 10. Одномерный гармонический осциллятор

Рассмотрим одномерную частицу [частицу с пространством состояний $R = L^2(E^1)$], гамильтониан которой $H = \dfrac{\hat{p}^2}{2} + \dfrac{\hat{x}^2}{2} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dx^2} + \dfrac{1}{2} \hat{x}^2$ (гармонический осциллятор).

Найдем прежде всего гейзенберговские операторы $\hat{p}_t$ и $\hat{x}_t$ из гейзенберговских уравнений

$$\frac{d\hat{p}_t}{dt} = -\hat{x}_t; \quad \frac{d\hat{x}_t}{dt} = \hat{p}_t.$$

Эта система операторных уравнений линейна и благодаря этому может быть решена как соответствующая система числовых уравнений. Один из возможных путей решения состоит во введении вспомогательных операторов

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \mathrm{i}\hat{p}); \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \mathrm{i}\hat{p}).$$

Уравнения для гейзенберговских операторов $\hat{a}_t$ и $\hat{a}_t^+$ имеют чрезвычайно простой вид

$$\frac{d\hat{a}_t}{dt} = -\mathrm{i}\hat{a}_t; \quad \frac{d\hat{a}_t^+}{dt} = \mathrm{i}\hat{a}_t^+,$$

откуда $\hat{a}_t^+ = \hat{a}^+ \exp(\mathrm{i}t)$; $\hat{a}_t = \hat{a}\exp(-\mathrm{i}t)$. Из этих соотношений сразу получаются формулы $\hat{x}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_t + \hat{a}_t^+)$ и $\hat{p}_t = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\hat{a}_t^+ - \hat{a}_t)$.

Операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ очень удобны при решении задач, связанных с гармоническим осциллятором.

Заметим, что гамильтониан выражается через эти операторы формулой $H = \hat{a}^+\hat{a} + 1/2$, их коммутационные соотношения с гамильтонианом имеют вид $[H, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$, $[H, \hat{a}] = -\hat{a}$, а их коммутатор $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$.

Займемся теперь задачей отыскания стационарных состояний гамильтониана H. Воспользуемся следующим утверждением: если $H\varphi = E\varphi$, то $H(\hat{a}\varphi) = (E-1)\hat{a}\varphi$ (т. е. если φ — стационарное состояние и $\hat{a}\varphi \neq 0$, то $\hat{a}\varphi$ также является стационарным состоянием). Это утверждение следует из соотношений $H(\hat{a}\varphi) = \hat{a}(H-1)\varphi = (E-1)\hat{a}\varphi$.

Аналогично можно утверждать, что $H(\hat{a}^+\varphi) = \hat{a}^+(H+1)\varphi = (E+1)\hat{a}^+\varphi$.

Отметим прежде всего, что основное состояние φ_0 должно удовлетворять условию $\hat{a}\varphi_0 = 0$ (в противном случае $\hat{a}\varphi_0$ — стационарное состояние с меньшей энергией). Решая уравнение $\hat{a}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0 = 0$, приходим к выводу, что $\varphi_0 = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ (константа $\pi^{-1/4}$ возникает из условия нормировки), а соответствующее собственное значение $E_0 = 1/2$. Из φ_0 получается бесконечное множество стационарных состояний $\varphi_n = c_n(\hat{a}^+)^n\varphi_0 = c_n 2^{-n/2}\left(\hat{x} - \frac{d}{dx}\right)^n\left(\pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)$ (c_n — нормировочная константа). Поскольку применение оператора $\hat{a}^+$ увеличивает энергию на 1, имеем $H\varphi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi_n$. Легко видеть, что функции φ_n имеют вид $\varphi_n(x) = H_n(x) \times \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$, где $H_n(x)$ — полином n-й степени; оказывается, что полином $H_n(x)$ с точностью до множителя совпадает с n-м полиномом Эрмита. Вычислим нормировочные константы c_n, считая, что все они выбраны действительными и положительными. Очевидно, что $\varphi_n = \gamma_n\hat{a}^+\varphi_{n-1}$, где $\gamma_n = c_n/c_{n-1}$. Скалярный квадрат этого равенства дает соотношение

$$1 = \langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = \gamma_n^2\langle\hat{a}^+\varphi_{n-1}, \hat{a}^+\varphi_{n-1}\rangle = \gamma_n^2\langle\hat{a}\hat{a}^+\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\rangle = \gamma_n^2\left\langle\left(H + \frac{1}{2}\right)\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\right\rangle = n\gamma_n^2,$$

откуда $\gamma_n = 1/\sqrt{n}$ и $c_n = (n!)^{-1/2}$.

Полученная ортонормированная система стационарных состояний $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^{+n}\varphi_0$ с уровнями энергии $E_n = n + 1/2$ исчерпывает *все стационарные состояния*. Это можно проверить, например, доказав полноту функций φ_n в пространстве $L^2(E^1)$. Можно дать и более непосредственное доказательство. Пусть φ — стационарное состояние. Обозначим символом n наименьшее из чисел, для которых $\hat{a}^n\varphi_0 = 0$ (такие числа обязательно существуют в силу ограниченности снизу собственных значений гамильтониана H). Тогда $\hat{a}^{n-1}\varphi = \lambda\varphi_0$, где $\lambda \neq 0$. Применяя к этому равенству оператор $(\hat{a}^+)^{n-1}$, после несложных преобразований получим, что φ пропорционально φ_{n-1}.

Более общий гамильтониан $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$ приводится к рассмотренному выбором другой системы единиц. Можно, однако, в этом случае использовать проведенные выше рассуждения, положив

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + \frac{\mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{m\omega}}\right); \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - \frac{\mathrm{i}\hat{p}}{\sqrt{m\omega}}\right).$$

Эти операторы по-прежнему связаны соотношением $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, но гамильтониан через них выражается формулой $H = \omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$, и в соответствии с этим $[H, \hat{a}] = -\omega\hat{a}$, $[H, \hat{a}^+] = \omega\hat{a}^+$. Зависимость операторов $\hat{a}_t$ и $\hat{a}_t^+$ от времени имеет вид $\hat{a}_t = \hat{a}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, $\hat{a}_t^+ = \hat{a}^+\exp(\mathrm{i}\omega t)$.

Стационарные состояния выражаются через основное состояние φ_0 формулой $\varphi_n = (n!)^{-1/2} (\hat{a}^+)^n \varphi_0$, а их энергии $E_n = (n + 1/2)\omega$.

Через операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ бывает удобно выражать и гамильтониан ангармонического осциллятора. Если, например, $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \alpha\hat{x}^3 + \beta\hat{x}^4$, то через $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ гамильтониан H выражается так:

$$H = \frac{\omega}{2} + \omega\hat{a}^+ \hat{a} + \gamma(\hat{a}^+ + \hat{a})^3 + \delta(\hat{a}^+ + \hat{a})^4,$$

где $\gamma = \alpha(2m\omega)^{-3/2}$, $\delta = \beta(2m\omega)^{-2}$.

§ 11. Система связанных осцилляторов

Рассмотрим квантовомеханическую систему с пространством состояний $R = L^2(E^n)$ и гамильтонианом

$$H = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{i,j} k_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j$$

(здесь $\alpha_j > 0$, а квадратичная форма $\sum k_{ij}x_i x_j$ положительно определена). В таком виде может быть записан гамильтониан системы осцилляторов, связанных упругими силами. С помощью линейной замены переменных $\xi_i = \sum_j a_{ij}x_j$ (перехода к нормальным координатам) гамильтониан H может быть приведен к виду

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \hat{\xi}_i^2.$$

(Это сразу получается из теоремы о том, что симметричную матрицу ортогональным преобразованием можно привести к диагональному виду, или из эквивалентного утверждения, что две квадратичные формы, одна из которых положительно определена, линейным преобразованием одновременно можно привести к сумме квадратов.)

В новой форме гамильтониан H представляет собой систему из n невзаимодействующих одномерных осцилляторов и исследуется совершенно тривиально (см. § 8). Заметим здесь лишь, что, введя операторы $\hat{a}_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_i}\,\hat{\xi}_i - \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)$; $\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega_i}\,\hat{\xi}_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)$, можно записать гамильтониан H в виде $H = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(\hat{a}_i^+\hat{a}_i + 1/2)$. Для операторов $\hat{a}_i^+$, $\hat{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнены соотношения

$$[\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0; \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \delta_{ij}$$

(эти соотношения, которые носят название канонических соотношений коммутации, еще встретятся). Основное состояние Φ гамильтониана H удовлетворяет условиям $a_i\Phi = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Все стационарные состояния получаются из Φ применением некоторого числа операторов $\hat{a}_i^+$, т. е. имеют вид $\hat{a}_1^{+\nu_1}\hat{a}_2^{+\nu_2}\ldots\hat{a}_n^{+\nu_n}\Phi$, где $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — целые неотрицательные числа; их энергии равны $\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right)\omega_1 + \ldots + \left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\omega_n$.

Часто приходится рассматривать гамильтониан H', отличающийся от H ангармоническими членами: $H' = H + V$, где $V = \sum_{k_1,\ldots,k_n} c_{k_1\ldots k_n}\hat{x}_1^{k_1}\ldots\hat{x}_n^{k_n}$. Гамильтониан H' также бывает удобно выражать через операторы $\hat{a}_i^+$, $\hat{a}_i$. Получаем

$$H' = \text{const} + \sum_{i=1}^{n}\omega_i\hat{a}_i^+\hat{a}_i + \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\\ l_1,\ldots,l_n}} \Gamma_{k_1,\ldots,k_m|l_1,\ldots,l_n}\hat{a}_1^{+k_1}\ldots\hat{a}_n^{+k_n}\hat{a}_1^{l_1}\ldots\hat{a}_n^{l_n},$$

где коэффициенты $\Gamma_{k|l}$ могут быть выражены через $c_{k_1,\ldots,k_n}$.

В общем случае не удается вычислить стационарные состояния гамильтониана H' и другие физические величины, связанные с этим гамильтонианом. Однако в случае, если ангармонические члены V рассматриваются как малое возмущение, можно построить весьма удобную технику для вычисления разложений физических величин, связанных с H', по степеням малого параметра. Эта техника (диаграммы Фейнмана) описана в § 23.

ГЛАВА 3

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

§ 12. Система n тождественных частиц

Как уже упоминалось в § 8, два электрона являются тождественными частицами и описывать систему двух электронов с помощью рецептов § 8 нельзя. Если описывать систему двух электронов волновой функцией $\psi(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_i = (\mathbf{r}_i, s_i)$ — совокупность координатной переменной $\mathbf{r}_i$ и спиновой переменной s_i, то числу $\sum\limits_{s_1, s_2} |\psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2)|^2 = p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ естественно придать смысл плотности вероятности того, что первый электрон будет находиться в точке $\mathbf{r}_1$, а второй — в точке $\mathbf{r}_2$. Однако первый и второй электроны физически неразличимы, поэтому имеет смысл лишь плотность вероятности нахождения одного из электронов (безразлично, первого или второго) в точке $\mathbf{r}_1$, а другого — в точке $\mathbf{r}_2$. Выход из положения следующий. В качестве волновых функций системы двух электронов нужно рассматривать лишь те из квадратично интегрируемых функций $\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\mathbf{r}_1, s_1, \mathbf{r}_2, s_2)$, которые антисимметричны по переменным ξ_1, ξ_2 [т. е. $\psi(\xi_2, \xi_1) = -\psi(\xi_1, \xi_2)$]. Тогда, очевидно, $p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = p(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, и эта величина будет иметь смысл плотности вероятности нахождения одного из электронов в точке $\mathbf{r}_1$, а другого в точке $\mathbf{r}_2$. Для системы двух протонов, двух нейтронов, двух μ-мезонов ситуация точно такая же. Если рассматривается система двух π_0-мезонов, то в качестве волновых функций следует брать функции $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, симметричные по переменным $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

Перейдем к точным определениям.

Все частицы делятся на два класса — *бозоны* и *фермионы*.

Пространством F_n состояний системы n тождественных бозонов (фермионов) является гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций n переменных $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *симметричных* (соответственно *антисимметричных*) по переменным $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (здесь $\xi_i \in X$, а X — пространство с мерой). Желая отметить, что имеем дело с бозонами, будем для пространства F_n применять обозначение F_n^s, в случае фермионов — F_n^a. Пространство $L^2(X^n) = L^2(X \times \ldots \times X)$, подпространствами которого являются F_n^s и F_n^a, обозначим $\mathscr{B}_n$.

Эксперимент показывает, что *частицы с полуцелым спином* (электроны, протоны и т. д.) *являются фермионами, а частицы с целым спином* (π-мезоны, фотоны и т. д.) — *бозонами*; в релятивистской квантовой теории поля этот вывод может быть получен и на основе теоретических соображений.

Нетрудно проверить, что пространство F_n полностью определяется гильбертовым пространством F_1 состояний одной частицы и числом n [и не зависит от способа представления пространства F_1 состояний одной частицы в виде $L^2(X)$]. В самом деле, как уже упоминалось в § 8, изоморфизм α пространства $L^2(X)$ и пространства $L^2(Y)$ естественным образом порождает изоморфизм α_n пространств $L^2(X^n) = L^2(X \times \ldots \times X)$ и $L^2(Y^n) = L^2(Y \times \ldots \times Y)$; легко видеть, что при изоморфизме α_n симметричные функции переходят в симметричные и антисимметричные — в антисимметричные.

Если $\mathscr{B}$ — гильбертово пространство состояний одной частицы, то пространство состояний n тождественных частиц F_n может быть описано как n-я симметричная тензорная степень пространства $\mathscr{B}$ в случае бозонов и как n-я антисимметричная тензорная степень пространства $\mathscr{B}$ в случае фермионов.

Определим в пространстве $\mathscr{B}_n = L^2(X^n)$ операторы симметризации P_s и антисимметризации P_a формулами

$$P_s \psi(\xi) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \psi(\pi(\xi));$$

$$P_a \psi(\xi) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-1)^{\gamma_\pi} \psi(\pi(\xi))$$

(здесь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X^n$, π — перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $1, \ldots, n$, $\pi(\xi) = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}) \in X^n$, γ_π — четность перестановки π, $\sum\limits_{\pi}$ — сумма по всем перестановкам π). В частности, при $n = 2$

$$P_s \psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(\psi(\xi_1, \xi_2) + \psi(\xi_2, \xi_1));$$

$$P_a \psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(\psi(\xi_1, \xi_2) - \psi(\xi_2, \xi_1)).$$

Очевидно, что $P_s \mathcal{B}_n = F_n^s$; $P_a \mathcal{B}_n = F_n^a$; $P_s \psi = \psi$, если $\psi \in F_n^s$, $P_a \psi = \psi$, если $\psi \in F_n^a$.

Легко проверить, что P_s и P_a — операторы ортогонального проектирования пространства $\mathcal{B}_n$ на подпространства F_n^s и F_n^a.

Пусть H — оператор в $\mathcal{B}_n$, коммутирующий с операторами P_s и P_a. Тогда F_n^s и F_n^a являются для H инвариантными подпространствами. Если $\psi \in \mathcal{B}_n$ — собственная функция оператора H, то $P_s \psi$ и $P_a \psi$ (если они не равны нулю) — очевидно, также собственные функции оператора H, лежащие соответственно в F_n^s и F_n^a и принадлежащие тому же собственному значению.

Рассмотрим систему n невзаимодействующих тождественных частиц, т. е. систему, гамильтониан которой переводит функцию $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в функцию

$$\check{\psi}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \int A(\xi_i, \eta_i)\, \psi(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)\, d\eta_i \tag{12.1}$$

в частности, одночастичный гамильтониан H_1 переводит функцию $\psi(\xi)$ в функцию $\check{\psi}(\xi) = \int A(\xi, \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta$, т. е. обобщенная функция $A(\xi, \eta)$ является ядром оператора H_1). Формула (12.1) определяет, очевидно, оператор H_n* в пространстве $\mathcal{B}_n$, коммутирующий с операторами P_s и P_a и, стало быть, переводящий в себя пространства F_n^s и F_n^a. Операторы на пространствах F_n^s и F_n^a, действие которых задается соотношением (12.1), будем обозначать соответственно H_n^s и H_n^a; это и есть гамильтонианы системы n невзаимодействующих бозонов и системы n невзаимодействующих фермионов.

* Более аккуратно оператор H_n может быть описан как самосопряженный оператор в $\mathcal{B}_n$, переводящий функцию вида $\varphi_1(\xi_1) \ldots \varphi_n(\xi_n)$, где функции φ_i принадлежат области определения оператора H_1, в функцию $\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(\xi_1) \ldots \varphi_{i-1}(\xi_{i-1})\, (H_1\varphi_i)(\xi_i) \times \times \varphi_{i+1}(\xi_{i+1}) \ldots \varphi_n(\xi_n)$ (такой оператор существует только один).

Предположим для определенности, что одночастичный гамильтониан H_1 имеет дискретный спектр, и обозначим φ_n полную ортонормированную систему его собственных функций, а E_n — соответствующие собственные значения. Тогда, очевидно, функции $\varphi_{k_1}(\xi_1) \ldots \varphi_{k_n}(\xi_n)$ образуют полную ортонормированную систему оператора H_n в пространстве $\mathcal{B}_n$ (см. § 8). Из сказанного выше следует, что $P_s \varphi_{k_1}(\xi_1) \ldots \varphi_{k_n}(\xi_n)$ — собственные функции гамильтониана H_n^s и лежат в пространстве F_n^s, а $P_a \varphi_{k_1}(\xi_1) \ldots \varphi_{k_n}(\xi_n)$ — собственные функции гамильтониана H_n^a и лежат в F_n^a (соответствующие собственные значения в обоих случаях равны $E_{k_1} + \ldots + E_{k_n}$). В случае фермионов функции $P_a \varphi_{k_1}(\xi_1) \ldots \varphi_{k_n}(\xi_n)$ следует рассматривать лишь для значений индексов $k_1, \ldots, k_n$, попарно отличных друг от друга, поскольку при совпадении хотя бы одной пары индексов оператор антисимметризации дает нуль*. Легко проверить, что функции $P_s \varphi_{k_1}(\xi_1) \ldots \varphi_{k_n}(\xi_n)$ образуют полную систему функций в F_n^s, а функции $P_a \varphi_{k_1}(\xi_1) \ldots \ldots \varphi_{k_n}(\xi_n)$ — полную систему функций в F_n^a; эти функции не нормированы, однако можно утверждать, что две функции, принадлежащие одной из этих систем, либо ортогональны друг другу, либо пропорциональны. В координатном представлении пространство состояний одной частицы реализуется как пространство $L^2(E^3 \times B)$, где B — конечное множество, поэтому пространство состояний системы n тождественных частиц реализуется как пространство квадратично интегрируемых симметричных (антисимметричных) функций $\psi(\mathbf{r}_1, i_1, \ldots, \mathbf{r}_n, i_n)$ координатных переменных $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n \in E^3$ и дискретных переменных $i_1, \ldots, i_n \in B$ (функции ψ в случае бозонов не меняются, а в случае фермионов меняют знак при одновременной перестановке координат $\mathbf{r}_l$ и $\mathbf{r}_m$ и дискретных переменных i_l и i_m).

Оператор полного импульса $\mathbf{P}_n$ и гамильтониан H_n системы n нерелятивистских тождественных частиц записываются точно так же, как и в § 8 [формулы (8.1), (8.2)]; единственное отличие состоит в том, что массы тождественных частиц равны, а потенциальная энергия $\mathcal{V}_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$

* Иными словами, в системе невзаимодействующих тождественных фермионов никакие два фермиона не могут находиться в одном и том же стационарном состоянии. (Это утверждение носит название принципа Паули.)

должна быть симметричной функцией координат; будем предполагать всегда, что

$$\mathscr{V}_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathscr{V}(\mathbf{r}_j) + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant n} \mathscr{W}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)$$

(первая сумма отвечает потенциальной энергии частиц во внешнем поле, а вторая — парному взаимодействию между ними). Легко видеть, что операторы $\mathbf{P}_n$ и H_n переводят симметричные функции в симметричные и антисимметричные в антисимметричные, т. е. могут рассматриваться как операторы в пространствах F_n^s и F_n^a. Операторы $\hat{\mathbf{p}}_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}$, очевидно, этим свойством не обладают; это связано с тем, что для тождественных частиц бессмысленно говорить об импульсе j-й частицы.

В случае отсутствия взаимодействия оператор потенциальной энергии имеет вид $\mathscr{V}_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \mathscr{V}(\mathbf{r}_1) + \ldots + \mathscr{V}(\mathbf{r}_n)$; как было показано выше, отыскание стационарных состояний системы n частиц при отсутствии взаимодействия легко сводится к одночастичной задаче.

§ 13. Фоковское пространство

В § 12 мы фиксировали пространство с мерой X и рассмотрели гильбертовы пространства F_n^s и F_n^a квадратично интегрируемых симметричных или антисимметричных функций $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, зависящих от n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n \in X$. Нередко бывает удобно вместо пространств F_n^s и F_n^a рассматривать прямые суммы

$$F^s = F_0^s \dotplus F_1^s \dotplus \ldots \dotplus F_n^s \dotplus \ldots,$$

$$F^a = F_0^a \dotplus F_1^a \dotplus \ldots \dotplus F_n^a \dotplus \ldots$$

Здесь F_0^s и F_0^a — пространства констант (функций, зависящих от нуля переменных), т. е. одномерные пространства.

Пространства F^s и F^a называют фоковскими пространствами. Элементы этих пространств представляют состояния системы тождественных бозонов или фермионов, число которых не фиксировано. Говоря одновременно о бозонах и фермионах, будем применять обозначение F для одного из пространств F^s или F^a. Векторы из пространства F^s

или F^a можно, очевидно, рассматривать как последовательности $(f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$, где $f_n \in F_n^s$ (соответственно $f_n \in F_n^a$), удовлетворяющие условию $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2 < \infty$. Иными словами, элементами пространства F можно считать столбики

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(\xi_1) \\ \cdots\cdots \\ f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \cdots\cdots \end{pmatrix},$$

образованные из симметричных (антисимметричных) функций $f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и удовлетворяющих условию*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)|^2 \, d\xi_1 \ldots d\xi_n < \infty.$$

Линейная комбинация и скалярное произведение двух таких столбиков определяются естественным образом, например скалярное произведение столбиков f и g

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \overline{g_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Пространства F_n естественно вложены в фоковское пространство F (вектору $f \in F_n$ соответствует последовательность $(f_0, \ldots, f_n, \ldots) \in F$, для которой $f_n = f$, $f_k = 0$ при $k \neq n$).

Введем оператор числа частиц

$$N = N_0 \dotplus N_1 \dotplus \ldots \dotplus N_n \dotplus \ldots,$$

где N_n — оператор в пространстве F_n, сводящийся к умножению на число частиц n. Собственными подпространствами оператора N являются пространства F_n.

Оператор импульса $\mathbf{P}$ и гамильтониан системы нерелятивистских частиц H в фоковском пространстве определяются как прямые суммы введенных в § 12 операторов $\mathbf{P}_n$ и H_n:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \dotplus \mathbf{P}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathbf{P}_n \dotplus \ldots;$$

$$H = H_0 \dotplus H_1 \dotplus \ldots \dotplus H_n \dotplus \ldots$$

---

* Такие столбики носят название *фоковских столбиков*.

(операторы **P** и H действуют в фоковском пространстве, построенном по пространству с мерой $E^3 \times B$).

В нерелятивистской квантовой механике операторы всех наблюдаемых величин оставляют инвариантными пространства $F_n \subset F$ (т. е. коммутируют с оператором числа частиц N). Однако даже в нерелятивистском случае технически очень удобно выражать операторы физических величин через вспомогательные операторы, не коммутирующие с N. В качестве таких вспомогательных операторов введем сейчас операторы $a(f)$ и $a^+(f)$ — операторы уничтожения и рождения частицы с волновой функцией $f \in L^2(X)$.

Прежде всего определим операторы $a_n(f)$, где $f \in L^2(X)$, действующие из пространства F_n в пространство F_{n-1}. Именно, будем считать, что оператор $a_n(f)$ переводит функцию $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F_n$ в функцию $\check{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in F_{n-1}$, определяемую формулой

$$\check{\varphi}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \sqrt{n} \int \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

(оператор $a_0(f)$ переводит пространство F_0 в нуль).

Оператор $a_n^+(f)$, заданный на пространстве F_{n-1} и принимающий значения в пространстве F_n, определим как оператор, сопряженный с $a_n(f)$. Легко вычислить, что оператор $a_n^+(f)$ переводит функцию $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ в бозевском случае в функцию $\sqrt{n}\, P^s(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, \overline{f(\xi_n)})$, а в фермиевском случае — в функцию $\sqrt{n}\, P^a(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, \overline{f(\xi_n)})$.

Выделим в пространстве F подмножество D, состоящее из финитных последовательностей $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ (иными словами, D представляет собой наименьшее линейное многообразие в E, содержащее все подпространства F_n). Операторы $a(f)$ и $a^+(f)$, где $f \in L^2(X)$, зададим на множестве D, считая, что последовательность $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ они переводят соответственно в последовательности

$$(a_1(f)\varphi_1,\ a_2(f)\varphi_2, \ldots, a_{n+1}(f)\varphi_{n+1}, \ldots);$$

$$(0,\ a_1^*(f)\varphi_0, \ldots, a_n^*(f)\varphi_{n-1}, \ldots).$$

Очевидно, что эти операторы переводят множество D в себя и сопряжены друг другу на множестве D.

Легко видеть (см. § 20), что в фермиевском случае операторы $a(f)$, $a^+(f)$ ограничены ($\|a(f)\| = \|f\|$), и их можно

по непрерывности продолжить на все пространство F; в бозевском случае операторы $a(f)$, $a^+(f)$ неограничены ($\|a_n(f)\| = \sqrt{n}\, \|f\|$).

Непосредственным вычислением без труда устанавливается, что операторы $a(f)$, $a^+(f)$ в бозевском случае удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a(f),\ a(g)] = [a^+(f),\ a^+(g)] = 0;\ \ [a(f),\ a^+(g)] = \langle f, g\rangle \tag{13.1}$$

(*каноническим коммутационным соотношениям* — CCR). В фермиевском случае имеют место аналогичные равенства для антикоммутаторов:

$$[a(f), a(g)]_+ = [a^+(f), a^+(g)]_+ = 0;\ \ [a(f), a^+(g)]_+ = \langle f, g\rangle \tag{13.2}$$

(*канонические антикоммутационные соотношения* — CAR).

Операторы $a(f)$ линейно зависят от функции $f \in L^2(X)$. Это означает, что их можно рассматривать как операторные обобщенные функции на X, т. е. ввести в рассмотрение символы $a(x)$, $a^+(x)$, связанные с операторами $a(f)$, $a^+(f)$ соотношениями

$$a(f) = \int f(x)\, a(x)\, dx;$$

$$a^+(f) = \int \overline{f(x)}\, a^+(x)\, dx.$$

Символам $a(x)$, $a^+(x)$ не придаем никакого операторного смысла; соответственно интеграл вида $\int f(x)\, a(x)\, dx$ понимаем просто как другое обозначение для оператора $a(f)$.

Заметим, однако, что при желании символу $a(x)$ можно придать смысл оператора на некотором подмножестве пространства F, а символу $a^+(x)$ — смысл оператора, действующего из пространства F в некоторое более широкое пространство (см. дополнение, § Д.7).

В дальнейшем придется рассматривать также выражения вида

$$A = \int f(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\, a^+(x_1) \ldots a^+(x_m)\, a(y_1) \ldots \ldots a(y_n)\, d^m x d^n y, \tag{13.3}$$

где f — обобщенная функция. Такое выражение очевидным образом определяет оператор на множестве D, если функция f имеет вид

$$f_1(x_1)\ldots f_m(x_m)\,g_1(y_1)\ldots g_n(y_n), \qquad (13.4)$$

а $f_i, g_i \in L^2(X)$ [тогда следует считать, что $A = a^+(\bar{f}_1)\ldots$ $\ldots a^+(f_m)\,a(g_1)\ldots a(g_n)$] и, стало быть, также когда функция f является конечной суммой произведений вида (13.4). Без труда проверяется, что при этом условии оператор A, действуя на последовательность $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \ldots) \in D$, переводит ее в последовательность $\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_k, \ldots) \in D$, для которой

$$\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sqrt{\frac{k!}{(k-m)!}\cdot\frac{(k-m+n)!}{(k-m)!}}\times$$
$$\times P\int \varphi_{n-m+k}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-m}, x_1, \ldots, x_n)\,f(\xi_{k-m+1}, \ldots, \xi_k \mid x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_n)\,d^n x \qquad (13.5)$$

(P обозначает оператор симметризации в бозевском и антисимметризации в фермиевском случаях).

Для произвольной функции f будем считать, что оператор A определяется формулой (13.5); область определения оператора A в этом случае состоит из всех последовательностей $\varphi \in D$, для которых функции $\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, полученные по формуле (13.5), квадратично интегрируемы. Когда речь идет о выражении вида

$$A = \sum_{m,n}^{\infty}\int A_{m,n}(x_1, \ldots, x_m \mid y_1, \ldots, y_n)\,a^+(x_1)\ldots$$
$$\ldots a^+(x_m)\,a(y_1)\ldots a(y_n)\,d^m x\,d^n y, \qquad (13.6)$$

то каждому слагаемому будем придавать смысл оператора описанным выше способом, а сумму ряда понимать в сильном смысле. Представление оператора A в виде (13.6) называется *представлением в нормальной форме* (в выражении (13.6) операторы рождения стоят левее операторов уничтожения!).

Всякий ограниченный оператор может быть представлен в виде (13.6), если сходимость ряда понимать в слабом смысле.

В фоковском пространстве F особую роль играет вектор θ, определяемый последовательностью $(1, 0, 0, \ldots)$. Этот вектор соответствует состоянию, не содержащему ни одной частицы ($\theta \in F_0$), и называется *вакуумным вектором*; он удовлетворяет условию $a(f)\,\theta = 0$ для любой функции $f \in L^2(X)$. Легко проверить, что вектор $\theta \in F$ — циклический относительно семейства операторов $a^+(f)$. Можно написать явное выражение любого вектора $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \ldots) \in F$ через обобщенные операторные функции $a^+(x)$ и вектор θ; именно, применяя формулу (13.5), видим, что

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,a^+(\xi_1)\ldots a^+(\xi_n)\,\theta\,d^n\xi. \qquad (13.7)$$

Рассмотрим простейшие операторы в фоковском пространстве. Начнем с операторов вида

$$\int A(x, y)\,a^+(x)\,a(y)\,dx\,dy. \qquad (13.8)$$

Последовательность $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \ldots) \in D$ оператор (13.8) переводит в последовательность $(\psi_0, \ldots, \psi_k, \ldots)$, где

$$\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = kP\int \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, x)\,A(\xi_k, x)\,dx. \qquad (13.9)$$

Нетрудно проверить, что в случае, когда функция $A(x, y)$ является ядром самосопряженного оператора в $L^2(X)$, оператор вида (13.8) существенно самосопряжен в F. Обозначим A самосопряженное расширение оператора $\int A(x, y)\,a^+(x)\,a(y)\,dx dy$. Оператор A коммутирует с оператором N и, следовательно, переводит в себя пространства F_n; индуцируемый оператором A оператор в пространстве F_n обозначим A_n. Операторы вида A_n уже встречались ранее — именно в такой форме записывался гамильтониан системы n тождественных невзаимодействующих частиц. В § 12 были найдены собственные функции и собственные значения оператора A_n в предположении, что оператор A_1 является самосопряженным оператором с дискретным спектром в $L^2(X)$. Из этого результата легко получить описание собственных векторов и собственных значений самосопряженного оператора A. Именно, векторы $\prod_{i=1}^{\infty}(a^+(\bar{\varphi}_i))^{n_i}\,\theta$ образуют полную систему собственных векторов рассматриваемого оператора, а соответствующие собственные значения равны $\sum_{i=1}^{\infty} n_i E_i$ (здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots$ — полная система собственных функций оператора A_1; $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ — соответствующие собственные значения; числа n_i образуют финитную последовательность, причем в фермиевском случае n_i равно 0 или 1, а в бозевском $n = 0, 1, 2, \ldots$). Доказательство в основном сводится к замечанию, что вектор $a^+(\bar{f}_1) \ldots a^+(\bar{f}_n)\,\theta$ лишь численным множителем отличается от вектора, соответствующего в фоковском пространстве F функции $Pf_1(\xi_1) \ldots f_n(\xi_n)\,\theta \in F_n$ (напомним, что F_n естественно вложено в F).

Операторы

$$B = \int B(x_1, x_2 \mid y_1, y_2)\, a^+(x_1)\, a^+(x_2)\, a(y_1)\, a(y_2)\, dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2 \tag{13.10}$$

также коммутируют с оператором числа частиц (как и все операторы (13.3), у которых $m = n$). Таким образом, оператор B переводит подпространство F_n в себя; из формулы (13.5) следует, что определяемый им в пространстве F_n оператор B_n задается соотношением

$$\begin{aligned} &\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \\ &= k(k-1)\, P \int \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{k-2}, x_1, x_2) \times \\ &\times B(\xi_{k-1}, \xi_k \mid x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Теперь можно записать в нормальной форме определенные выше операторы N, $\mathbf{P}$ и H.

Оператор N может быть представлен в виде

$$N = \int a^+(\xi)\, a(\xi)\, d\xi \tag{13.12}$$

[или, если быть более точным, оператор N можно записать формулой (13.8), где $A(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta)$]. Это очевидным образом вытекает из соотношения (13.9), в силу которого оператор N переводит последовательность $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \ldots) \in D$ в последовательность $(\psi_0, \ldots, \psi_k, \ldots)$, где $\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = kP \int \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, x)\, \delta(\xi_k, x)\, dx = kP\varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = k\varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.

Оператор импульса $\mathbf{P}$ и гамильтониан системы нерелятивистских тождественных частиц H были определены в фоковском пространстве, построенном по пространству с мерой $E^3 \times B$. Операторы, действующие в этом пространстве, удобно выражать через операторные обобщенные функции $a^+(\mathrm{x}, s)$, $a(\mathbf{x}, s)$ в координатном представлении и через операторные обобщенные функции $a^+(\mathbf{k}, s)$, $a(\mathbf{k}, s)$ в импульсном представлении (здесь x, $\mathbf{k} \in E^3$, $s \in B$). В дальнейшем иногда будем пользоваться обозначениями $a_s^+(\mathbf{k}) = a^+(\mathbf{k}, s)$, $a_s(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}, s)$. Снова, используя соотношение (13.9), легко видеть, что в координатном представлении можно записать оператор импульса в виде

$$\mathbf{P} = \sum_s \frac{1}{i} \int a^+(\mathbf{x}, s)\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\, a(\mathbf{x}, s)\, d\mathbf{x} \tag{13.13}$$

или, подробнее, формулой

$$\mathbf{P} = \sum_{s, s'} \int A(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, s')\, a^+(\mathbf{x}, s)\, a(\mathbf{y}, s')\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y},$$

где $A(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}, s') = \delta_s^{s'} \cdot \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. В импульсном представлении оператор $\mathbf{P}$ имеет вид

$$\mathbf{P} = \sum_s \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s)\, d\mathbf{k}. \tag{13.14}$$

С помощью соотношений (13.9) и (13.11) нетрудно убедиться, что гамильтониан H системы нерелятивистских тождественных частиц может быть представлен в виде суммы операторов вида (13.8) и (13.10). Именно в координатном представлении

$$\begin{aligned} H = &\sum_s \int a^+(\mathbf{x}, s) \left(-\frac{\Delta}{2m}\right) a(\mathbf{x}, s)\, d\mathbf{x} + \\ &+ \sum_s \mathscr{V}(\mathbf{x})\, a^+(\mathbf{x})\, a(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \sum_s \frac{1}{2} \int \mathscr{W}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)\, a^+(\mathbf{x}_1, s) \times \\ &\times a^+(\mathbf{x}_2, s)\, a(\mathbf{x}_2, s)\, a(\mathbf{x}_1, s)\, d\mathbf{x}_1\, d\mathbf{x}_2, \end{aligned} \tag{13.15}$$

в импульсном представлении

$$\begin{aligned} H = &\sum_s \int \frac{\mathbf{k}^2}{2m}\, a^+(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s)\, d\mathbf{k} + \\ &+ \sum_s \int \widetilde{\mathscr{V}}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, a^+(\mathbf{k}_1, s)\, a(\mathbf{k}_2, s)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + \end{aligned}$$

$$+\sum_s \frac{1}{2}\int \tilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4)\,\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4)\times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_1, s)\,a^+(\mathbf{k}_2, s)\,a(\mathbf{k}_3, s)\,a(\mathbf{k}_4, s)\,d^4\mathbf{k}, \qquad (13.16)$$

где $\tilde{\mathscr{V}}(\mathbf{k})$, $\tilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k})$ — преобразования Фурье функций $\mathscr{V}(\mathbf{x})$, $\mathscr{W}(|\mathbf{x}|)$.

Легко построить примеры выражений вида (13.6), не определяющих оператор в фоковском пространстве. В частности, выражение

$$A=\int \alpha(x_1, \ldots; x_m)\,a^+(x_1)\ldots a^+(x_m)\,dx_1\ldots dx_m \qquad (13.17)$$

может определять оператор в фоковском пространстве лишь в случае, если функция α квадратично интегрируема. Действительно, по общему определению оператор, определяемый выражением (13.7), должен переводить последовательность $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \ldots)\in D$ в последовательность $(\psi_0, \ldots, \psi_n, \ldots)$, где

$$\psi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)=\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}\,P\varphi_{n-m}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-m})\times$$
$$\times\alpha(\xi_{n-m+1}, \ldots, \xi_n).$$

Если функция α квадратично интегрируема, функции ψ_n также будут квадратично интегрируемы, и, значит, выражение (13.17) определяет оператор на всем множестве D, и этот оператор переводит множество D в себя. Однако, если функция α не принадлежит пространству L^2, функция ψ_n может быть квадратично интегрируема только при условии $\varphi_{n-m}\equiv 0$. Это означает, что в область определения оператора, задаваемого выражением (13.17), может входить лишь нулевой вектор; иными словами, выражение (13.17) не задает никакого оператора, поскольку область определения должна быть плотна в фоковском пространстве.

Рассмотрим в фоковском пространстве $F(L^2(E^3))$, построенном по пространству с мерой E^3, операторы, определяемые выражениями вида

$$A=\sum_{m,\,n}^{m+n\leqslant s}\int A_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m|\,\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)\,\delta(\mathbf{k}_1+\ldots+$$
$$+\mathbf{k}_m-\mathbf{l}_1-\ldots-\mathbf{l}_n)\,a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{l}_1)\ldots a(\mathbf{l}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{l} \qquad (13.18)$$

(эти операторы характеризуются тем, что они коммутируют с оператором импульса). Будем предполагать, что функции $A_{m,\,n}$ принадлежат пространству $\mathscr{S}(E^{3(m+n)})$ гладких быстро убывающих функций. В пространстве F выделим подмножество $\mathscr{S}_\infty$, состоящее из последовательностей $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \ldots)\in D$, удовлетворяющих условию $\varphi_k\in\mathscr{S}(E^{3k})$. В дальнейшем будет удобно рассматривать операторы в пространстве $F(L^2(E^3))$ только на множестве $\mathscr{S}_\infty$. С помощью соотношения (13.5) легко установить, что в случае, если $A_{m,\,0}\equiv 0$, в область определения оператора, задаваемого выражением (13.18), входят все элементы множества $\mathscr{S}_\infty$; этот оператор переводит всякую последовательность из множества $\mathscr{S}_\infty$ в последовательность, принадлежащую тому же множеству. Если хотя бы одна из функций $A_{m,\,0}$ не равна тождественно нулю, из проведенных выше рассуждений вытекает, что выражение (13.18) не может определять оператор в фоковском пространстве, поскольку функция $A_{m,\,0}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m)$ не является квадратично интегрируемой.

В фермиевском случае среди векторов фоковского пространства $F=\sum_{0\leqslant n<\infty} F_n$, построенного по пространству с мерой X, удобно выделить *четные векторы* — векторы, принадлежащие прямой сумме подпространств F_{2n}, и *нечетные векторы* — векторы, принадлежащие прямой сумме подпространств F_{2n+1}. Оператор в фоковском пространстве называется *ферми-четным*, если он переводит четный вектор в четный и нечетный вектор — в нечетный. Если ввести в F инволюцию τ, переводящую последовательность $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}, \varphi_{2n+1}, \ldots)$ в последовательность $(\varphi_0, -\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}, -\varphi_{2n+1}, \ldots)$, то четный вектор можно определить условием $\tau x=x$, нечетный вектор — условием $\tau x=-x$, ферми-четный оператор — требованием $\tau A=A\tau$. Оператор, записанный в виде (13.6) (в нормальной форме), будет ферми-четным в случае, если функции $A_{m,\,n}$ отличны от нуля лишь тогда, когда числа m и n имеют одинаковую четность.

Операторы, соответствующие физическим величинам, должны быть ферми-четными. В частности, гамильтониан всегда считается ферми-четным оператором.

ГЛАВА 4

ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ. ОПЕРАТОРЫ $S(t, t_0)$ и $S_\alpha(t, t_0)$

§ 14. Нестационарная теория возмущений

Пусть гамильтониан $H(t)$ имеет вид $H(t) = H_0 + gV(t)$, где H_0 — гамильтониан, для которого можно найти оператор эволюции $U_0(t, t_0) = \exp(-iH_0(t - t_0))$. Поставим задачу найти оператор эволюции $U(t, t_0)$ для гамильтониана $H(t)$ в виде ряда по степеням параметра g. Удобнее будет ввести связанный с $U(t, t_0)$ оператор $S(t, t_0) = \exp(iH_0t)\, U(t, t_0) \exp(-iH_0t_0)$ и вычислять его. Позднее выяснится, что оператор $S(t, t_0)$ весьма важен и сам по себе. В случае, если будет нужно отметить, что операторы $U(t, t_0)$ и $S(t, t_0)$ зависят от параметра g, будем использовать обозначения $U(t, t_0|g)$ и $S(t, t_0|g)$.

Оператор $U(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Из этого уравнения без труда получается и уравнение для оператора $S(t, t_0)$:

$$i\frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = g\widetilde{V}(t)\, S(t, t_0), \tag{14.1}$$

где $\widetilde{V}(t) = \exp(iH_0t)\, V(t) \exp(-iH_0t)$; начальное условие записывается в виде $S(t_0, t_0) = 1$.

В некоторых физических ситуациях оператор H_0 имеет смысл *свободного гамильтониана* (т. е. описывает невзаимодействующие частицы), а оператор $H - H_0 = gV(t)$ представляет собой *гамильтониан взаимодействия*; эту терминологию обычно употребляют и в квантовой теории поля. Однако в квантовой теории поля, как станет ясно позже, разделение гамильтониана на свободный и гамильтониан взаимодействия весьма условно; будем избегать этих терминов, порождающих вводящие в заблуждение ассоциации.

Будем искать оператор $S(t, t_0)$ в виде разложения в ряд по степеням g:

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n S_n(t, t_0).$$

Подставляя это разложение в уравнение для $S(t, t_0)$, получаем рекуррентные формулы

$$i\frac{\partial S_n(t, t_0)}{\partial t} = \widetilde{V}(t)\, S_{n-1}(t, t_0).$$

Пользуясь начальным условием $S(t_0, t_0) = 1$, убеждаемся, что $S_0(t_0, t_0) = 1$ и $S_n(t_0, t_0) = 0$ при $n \geqslant 1$; таким образом, для $n \geqslant 1$

$$S_n(t, t_0) = \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \widetilde{V}(\tau)\, S_{n-1}(\tau, t_0)\, d\tau. \tag{14.2}$$

Вместо разложения S в ряд по степеням g можно было бы переписать уравнение для S с начальным условием в виде интегрального уравнения

$$S(t, t_0) = 1 + g\int_{t_0}^{t} \widetilde{V}(\tau)\, S(\tau, t_0)\, d\tau$$

и решать это уравнение методом итераций.

Из (14.2) заключаем, что

$$S_1(t, t_0) = \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \widetilde{V}(\tau)\, d\tau,$$

$$S_2(t, t_0) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \widetilde{V}(\tau_1)\, \widetilde{V}(\tau_2),$$

. . . .

$$S_n(t, t_0) = \left(\frac{1}{i}\right)^n \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, \widetilde{V}(\tau_1) \ldots \widetilde{V}(\tau_n).$$

Можно сказать, что

$$S_n(t, t_0) = \left(\frac{1}{i}\right)^n \int_{\Gamma_n} d\tau_1 \ldots d\tau_n\, \widetilde{V}(\tau_1) \ldots \widetilde{V}(\tau_n),$$

где Γ_n — область, определенная неравенствами $t \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_n \geqslant t_0$.

Введем обозначение

$$T(\widetilde{V}(\tau_1) \ldots \widetilde{V}(\tau_n)) = \widetilde{V}(\tau_{i_1}) \ldots \widetilde{V}(\tau_{i_n}),$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — перестановка индексов $1, \ldots, n$, обладающая тем свойством, что $\tau_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant \tau_{i_n}$. Иными словами, $T(\tilde{V}(\tau_1) \ldots \tilde{V}(\tau_n))$ (*хронологическое* или *T-произведение* операторов $\tilde{V}(\tau_1), \ldots, \tilde{V}(\tau_n)$) определяется как произведение операторов $\tilde{V}(\tau_1), \ldots, \tilde{V}(\tau_n)$, расположенных в порядке убывания времен τ_i. Если некоторые из времен τ_i совпадают, то перестановка, при которой $\tau_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant \tau_{i_n}$, не единственна, но, как легко видеть, T-произведение не будет зависеть от выбора перестановки. С помощью T-произведения можно записать $S_n(t, t_0)$ в виде

$$S_n(t, t_0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{i}\right)^n \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} T(\tilde{V}(\tau_1) \ldots \tilde{V}(\tau_n))\, d\tau_1 \ldots d\tau_n.$$

В самом деле, область интегрирования в этом интеграле можно разбить на $n!$ областей G_P, поставив в соответствие каждой перестановке $P = (j_1, \ldots, j_n)$ индексов $1, \ldots, n$ область G_P, выделяемую неравенствами $t \geqslant \tau_{j_1} \geqslant \ldots \geqslant \tau_{j_n} \geqslant t_0$. Ясно, что

$$\left(\frac{1}{i}\right)^n \int \ldots \int_{G_P} T(\tilde{V}(\tau_1) \ldots \tilde{V}(\tau_n))\, d\tau_1 \ldots d\tau_n =$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n \int \ldots \int_{G_P} \tilde{V}(\tau_{j_1}) \ldots \tilde{V}(\tau_{j_n})\, d\tau_1 \ldots d\tau_n,$$

а этот интеграл простым переобозначением переменных приводится к интегралу, определяющему $S_n(t, t_0)$. Таким образом, $\left(\frac{1}{i}\right)^n \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} T(\tilde{V}(\tau_1) \ldots \tilde{V}(\tau_n))\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$ разбивается на $n!$ одинаковых интегралов, равных $S_n(t, t_0)$; это доказывает нужную формулу. Весь оператор $S(t, t_0)$ можно представить рядом

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{i}\right)^n g^n \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} T(\tilde{V}(\tau_1) \ldots \tilde{V}(\tau_n))\, d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{14.3}$$

Этот ряд принято коротко записывать в виде

$$S(t, t_0) = T \exp\left(\frac{1}{i} g \int_{t_0}^{t} \tilde{V}(\tau)\, d\tau\right) \tag{14.4}$$

и называть *T-экспонентой*. Если оператор $V(t)$ ограничен при каждом t и непрерывно (в сильном смысле) зависит от t, ряд (14.3) сходится по норме [кстати, отсюда следует в рассматриваемой ситуации существование решений у уравнений (2.1) и (14.1)]. В самом деле, при этих условиях $\sup\limits_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \| \tilde{V}(\tau) \| = \sup\limits_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \| V(\tau) \| < \infty$ и $\| S_n(t, t_0) \| \leqslant \leqslant \frac{1}{n!} (\sup\limits_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \| V(\tau) \|)^n |t - t_0|^n$. В тех случаях, когда доказать сходимость ряда (14.3) не удается, полученный результат имеет условный характер [если разложение в ряд по g возможно, то этот ряд имеет вид (14.3)]. Без предположения о возможности разложения в ряд по g можно доказать соотношение

$$\left.\frac{\partial^n S(t, t_0 | g)}{\partial g^n}\right|_{g=0} =$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} T(\tilde{V}(\tau_1) \cdots \tilde{V}(\tau_n))\, d\tau_1 \cdots d\tau_n.$$

Если гамильтониан H представлен в виде $H_0 + V$, где H_0 и V не зависят от времени, то бывает удобно рассмотреть вспомогательный гамильтониан $H_\alpha(t) = H_0 + + \exp(-\alpha |t|) V$. Введем оператор $S_\alpha(t, t_0) = = \exp(iH_0 t)\, U_\alpha(t, t_0) \exp(-iH_0 t_0)$, где $U_\alpha(t, t_0)$ — оператор эволюции, построенный по $H_\alpha(t)$.

Эквивалентным образом можно определить оператор $S_\alpha(t, t_0)$ как решение дифференциального уравнения

$$i \frac{\partial S_\alpha(t, t_0)}{\partial t} = \exp(-\alpha |t|)\, \tilde{V}(t)\, S_\alpha(t, t_0)$$

с начальным условием $S_\alpha(t_0, t_0) = 1$ [здесь $\tilde{V}(t) = = \exp(iH_0 t)\, V \exp(-iH_0 t)$]. Проведенные выше рассуждения позволяют записать $S_\alpha(t, t_0)$ в виде T-экспоненты:

$$S_\alpha(t, t_0) = T \exp\left(\frac{1}{i} \int_{t_0}^{t} \exp(-\alpha |\tau|)\, \tilde{V}(\tau)\, d\tau\right).$$

Особую роль играет оператор $S_\alpha(\infty, -\infty) = \operatorname*{slim}_{t\to\infty,\, t_0\to-\infty} S_\alpha(t, t_0)$; его будем называть *адиабатической S-матрицей* и обозначать просто S_α. Два других важных оператора $S_\alpha(0, \pm\infty) = \operatorname*{slim}_{t\to\pm\infty} S_\alpha(0, t)$ будем обозначать $S_{\alpha+}$ и $S_{\alpha-}$ и называть *адиабатическими матрицами Мёллера*.

В ситуациях, когда H_0 можно считать свободным гамильтонианом, а V — взаимодействием, рассмотрение гамильтониана $H_\alpha(t)$ с $\alpha \to 0$ отвечает использованию адиабатического (бесконечно медленного) включения и выключения взаимодействия; это объясняет введенную выше терминологию. Вместе с гамильтонианом $H = H_0 + V$ часто бывает полезно рассматривать семейство гамильтонианов $H_g = H_0 + gV$, где g — константа, которую называют обычно константой связи. Операторы $S_\alpha(t, t_0)$, $S_\alpha(\infty, -\infty)$, $S_\alpha(0, \pm\infty)$, построенные по гамильтониану H_g, будем обозначать соответственно $S_\alpha(t, t_0 | g)$, $S_\alpha(\infty, -\infty | g) = S_\alpha(g)$ и $S_\alpha(0, \pm\infty | g) = S_{\alpha\pm}(g)$.

§ 15. Стационарные состояния гамильтониана, зависящего от параметра

Рассмотрим семейство гамильтонианов $H(g)$, где $0 \leqslant g \leqslant g_0$. Предположим, что для каждого g существует нормированный собственный вектор φ_g оператора $H(g)$ с собственным значением $E(g)$, дифференцируемо зависящий от параметра g. Без ограничения общности можно считать, что

$$\left\langle \varphi_g, \frac{d\varphi_g}{dg} \right\rangle = 0.$$

В самом деле, если это соотношение не выполнено, то всегда можно подобрать такой фазовый множитель $\exp(i\alpha(g))$, что векторы $\tilde{\varphi}_g = \exp(-i\alpha(g))\,\varphi_g$ будут обладать нужными свойствами; именно, следует взять $\alpha(g) = \frac{1}{i}\int_0^g \left\langle \varphi_\lambda, \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} \right\rangle d\lambda$ (функция $\alpha(g)$ действительна, поскольку, дифференцируя условие нормировки $\langle \varphi_\lambda, \varphi_\lambda \rangle = 1$, можно получить, что

$$\left\langle \varphi_\lambda, \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} \right\rangle + \left\langle \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda}, \varphi_\lambda \right\rangle = \left\langle \varphi_\lambda, \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} \right\rangle + \overline{\left\langle \varphi_\lambda, \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} \right\rangle} = 0 \Bigg).$$

Продифференцировав по g соотношение

$$H(g)\,\varphi_g = E(g)\,\varphi_g,$$

получим

$$(H(g) - E(g))\,\frac{d\varphi_g}{dg} = -\frac{dH(g)}{dg}\,\varphi_g + \frac{dE(g)}{dg}\,\varphi_g. \qquad (15.1)$$

Скалярно умножив это соотношение на φ_g, видим, что

$$\frac{dE(g)}{dg} = \left\langle \frac{dH(g)}{dg}\,\varphi_g, \varphi_g \right\rangle. \qquad (15.2)$$

Рассмотрим чаще всего встречающийся случай, когда $H(g) = H_0 + gV$; тогда, очевидно,

$$\frac{dE(g)}{dg} = \langle V\varphi_g, \varphi_g \rangle, \qquad (15.3)$$

$$(H_0 + gV - E(g))\,\frac{d\varphi_g}{dg} = (\langle V\varphi_g, \varphi_g \rangle - V)\,\varphi_g. \qquad (15.4)$$

Обычно предполагают, что вектор φ_g аналитически зависит от g в окрестности точки $g = 0$, и ищут разложения вектора φ_g и собственного значения $E(g)$ в ряд по степеням g (стационарная теория возмущений). Формулы (15.3) и (15.4) при $g = 0$ дают линейные по g члены в этих рядах (первые поправки); именно,

$$E(g) = E(0) + g\,\langle V\varphi_0, \varphi_0 \rangle + \ldots,$$

$$\varphi_g = \varphi_0 + g\psi + \ldots,$$

где ψ удовлетворяет условию

$$(H_0 - E(0))\,\psi = (\langle V\varphi_0, \varphi_0 \rangle - V)\,\varphi_0. \qquad (15.5)$$

Считая, что вектор φ_g удовлетворяет требованию $\left\langle \varphi_g, \frac{d\varphi_g}{dg} \right\rangle = 0$, получаем еще одно условие на вектор ψ:

$$\langle \psi, \varphi_0 \rangle = 0. \qquad (15.6)$$

Если $E(0)$ — простое собственное значение гамильтониана H_0, условия (15.5) и (15.6) однозначно определяют вектор ψ. Указанный выше вывод соотношений (15.3), (15.4) имеет четкий смысл, если все операторы $H_0 + gV$ имеют одну и ту же область определения.

Был оставлен в стороне более тонкий вопрос о существовании собственных векторов φ_g, дифференцируемо зависящих от параметра. В достаточно широких предположениях на этот вопрос отвечает следующая теорема [45].

Пусть H_0 — самосопряженный оператор; V — эрмитов оператор, область определения которого содержит область определения оператора H_0; E_0 — простое изолированное собственное значение оператора H_0; φ_0 — соответствующий собственный вектор. Тогда для достаточно малых g: 1) оператор $H(g) = H_0 + gV$ является самосопряженным оператором с той же областью определения, что и оператор H_0; 2) существует собственный вектор φ_g оператора $H(g)$, аналитически зависящий от g и переходящий при $g = 0$ в вектор φ_0; 3) соответствующее собственное значение $E(g)$ также аналитически зависит от g и является простым; 4) имеют место соотношения (15.3), (15.4).

Не будем заниматься прямым вычислением членов более высокого порядка по g в рядах для φ_g и $E(g)$. Вместо этого докажем формулу, позволяющую получать разложения собственных векторов и собственных значений в ряд по степеням g из нестационарной теории возмущений. Пусть при $0 \leqslant g \leqslant g_0$ самосопряженные операторы $H(g) = H_0 + gV$ имеют одну и ту же область определения, $E(g)$ — простое изолированное собственное значение оператора $H(g)$, непрерывно зависящее от параметра g в интервале $0 \leqslant g \leqslant g_0$, φ_g — отвечающий этому собственному значению собственный вектор, для которого $\left\langle \varphi_g, \frac{d\varphi_g}{dg} \right\rangle = 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \varphi_g &= \lim_{\alpha\to 0} \exp\left(i\,\frac{C(g)}{\alpha}\right) S_\alpha(0, -\infty\,|\,g)\,\varphi_0; \\ \varphi_g &= \lim_{\alpha\to 0} \exp\left(i\,\frac{C(g)}{\alpha}\right) S_\alpha(0, +\infty\,|\,g)\,\varphi_0, \end{aligned}\right\} \tag{15.7}$$

где $C(g) = \int\limits_0^g \frac{E(\lambda) - E(0)}{\lambda}\, d\lambda$, а $S_\alpha(0, \mp\infty\,|\,g)$ — адиабатические матрицы Мёллера, построенные по паре операторов $H(g)$, H_0. Это утверждение доказано в следующем параграфе.

§ 16. Адиабатическое изменение стационарного состояния

Пусть гамильтониан $H(t)$ медленно (адиабатически) меняется с течением времени.

Покажем при некоторых условиях, что решение уравнения Шредингера (2.2) с начальным условием $\psi_{t_0} = \varphi_0$, где φ_0 — стационарное состояние гамильтониана $H(t_0)$, отвечающее невырожденному уровню энергии, в каждый момент времени t мало отличается от стационарного состояния гамильтониана $H(t)$. (Когда говорим о стационарном состоянии гамильтониана $H(t)$, всегда считаем, что речь идет о собственном векторе оператора $H(t)$ при фиксированном t.) Ради определенности ограничимся случаем, когда имеется семейство гамильтонианов H_g, зависящее от параметра g, и гамильтониан $H(t)$ определяется формулой $H(t) = H_{\alpha t}$, где α — малое положительное число. Тогда уравнение (2.2) с помощью замены переменной $g = \alpha t$ сводится к уравнению

$$i\alpha\,\frac{d\psi(g)}{dg} = H_g\,\psi(g), \tag{16.1}$$

которое и будем рассматривать в дальнейшем.

Итак, пусть H_g — семейство самосопряженных операторов с одной и той же областью определения D, гладко зависящее от параметра g в интервале $g_0 \leqslant g \leqslant g_1$ (т. е. для любого $x \in D$ вектор $H_g x$ гладко зависит от g). Предположим, что каждому g в интервале $g_0 \leqslant g \leqslant g_1$ соответствует стационарное состояние φ_g гамильтониана H_g, гладко зависящее от параметра g. Уровень энергии $E(g)$, соответствующий состоянию φ_g, будем считать изолированным и невырожденным. Состояние φ_g будем предполагать нормированным и удовлетворяющим условию $\left\langle \varphi_g, \frac{d\varphi_g}{dg} \right\rangle = 0$. Наконец, предположим, что $\left.\frac{d^n\varphi_g}{dg^n}\right|_{g=g_0} = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$

Лемма 1. *При перечисленных условиях решение уравнения (16.1), совпадающее с φ_{g_0} при $g = g_0$, может быть записано в виде*

$$\psi(g) = \exp\left[-\frac{i}{\alpha}\,C(g)\right](\varphi_g + \alpha s_g + \alpha^2 r(g, \alpha)),$$

где $C(g)=\int\limits_0^g E(\lambda)\,d\lambda$, s_g *определяется соотношениями*

$$i\frac{d\varphi_g}{dg}=(H_g-E(g))\,s_g,\ \left\langle\frac{ds_g}{dg},\ \varphi_g\right\rangle=0,\ s_{g_0}=0,$$

а норма вектора $r(g,\alpha)$ *ограничена сверху константой, не зависящей от* g *и* α (g *меняется в конечном промежутке* $g_0\leqslant g\leqslant g_1$).

Переходя к доказательству леммы, сделаем прежде всего замену $\psi(g)=\exp\left[\frac{i}{\alpha}C(g)\right]\sigma(g)$, которая приводит уравнение (16.1) к виду

$$i\alpha\frac{d\sigma(g)}{dg}=(H_g-E(g))\,\sigma(g). \tag{16.2}$$

Решение уравнения (16.2) будем искать в форме

$$\sigma(g)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sigma_n(g). \tag{16.3}$$

Приравнивая члены с одинаковыми степенями α, получаем соотношения

$$(H_g-E(g))\,\sigma_0(g)=0; \tag{16.4}$$

$$i\frac{d\sigma_0(g)}{dg}=(H_g-E(g))\,\sigma_1(g); \tag{16.5}$$

. . . .

$$i\frac{d\sigma_{n-1}(g)}{dg}=(H_g-E(g))\,\sigma_n(g), \tag{16.6}$$

$$\sigma_n(g_0)=0 \text{ при } n\geqslant 1.$$

Умножая эти соотношения скалярно на φ_g, убеждаемся, что

$$\left\langle\frac{d\sigma_0}{dg},\ \varphi_g\right\rangle=0; \tag{16.7}$$

$$\left\langle\frac{d\sigma_1}{dg},\ \varphi_g\right\rangle=0; \tag{16.8}$$

. . . .

$$\left\langle\frac{d\sigma_n}{dg},\ \varphi_g\right\rangle=0. \tag{16.9}$$

Уравнению (16.4) и соотношению (16.7) можно удовлетворить, положив $\sigma_0(g)=\varphi_g$. Тогда $\sigma_1(g)$ находится из соотношений (16.5) и (16.8); видим, что $\sigma_1(g)=s_g$. Рекуррентным образом из соотношений (16.6), (16.9) можно найти следующие $\sigma_n(g)$. Существенно отметить, что $\sigma_n(g)$ находятся из этих соотношений однозначно [это следует из невырожденности и изолированности собственного значения $E(g)$] и оказываются гладкими функциями от g. Из условия $\left.\frac{d^n\varphi_g}{dg^n}\right|_{g=g_0}=0$ вытекает, что все выписанные соотношения могут быть удовлетворены.

Покажем теперь, что

$$\sigma(g)=\sum_{n=0}^{N}\alpha^n\sigma_n(g)+\alpha^{N+1}r_N(g,\alpha), \tag{16.10}$$

где $|r_N(g,\alpha)|\leqslant K$. В самом деле, подставляя (16.10) в (16.3), видим, что $r_N(g,\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$i\alpha\frac{\partial r_N(g,\alpha)}{\partial g}=(H_g-E(g))\,r_N(g,\alpha)-i\frac{d\sigma_N(g)}{dg} \tag{16.11}$$

с начальным условием $r_N(g_0,\alpha)=0$. Обозначив $V(g)$ унитарный оператор, определяемый соотношениями

$$i\alpha\frac{dV(g)}{dg}=(H_g-E(g))\,V(g),$$

$$V(g_0)=1,$$

сделаем в уравнении (16.11) замену $r_N(g,\alpha)=V(g)\,\rho_N(g,\alpha)$. Получаем уравнение

$$i\alpha\frac{\partial\rho_N(g,\alpha)}{\partial g}=-iV^{-1}(g)\frac{d\sigma_N(g)}{dg},$$

из которого видно, что

$$\|r_N(g,\alpha)\|=\|\rho_N(g,\alpha)\|\leqslant\int\limits_{g_0}^{g}\left\|\frac{d\rho_N(g',\alpha)}{dg'}\right\|dg'\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}\int\limits_{g_0}^{g}\left\|\frac{d\sigma_N(g')}{dg'}\right\|dg'\leqslant\frac{\text{const}}{\alpha}. \tag{16.12}$$

Замечая, что

$$r_N(g, \alpha) = \sigma_N(g) + \alpha r_{N+1}(g, \alpha),$$

и применяя оценку (16.12) к r_{N+1}, убеждаемся в справедливости нужной оценки для r_N:

$$\| r_N(g, \alpha) \| \leqslant \| \sigma_N(g) \| + \alpha \frac{\text{const}}{\alpha} \leqslant \text{const}.$$

Поскольку $r(g, \alpha) = r_1(g, \alpha)$, из этой оценки при $N = 1$ получается утверждение леммы 1.

Замечание 1. Анализ проведенного выше рассуждения показывает, что вместо гладкой (бесконечно дифференцируемой) зависимости H_g и φ_g от g для доказательства леммы достаточно потребовать трехкратной дифференцируемости; условие $\left.\frac{d^n \varphi_g}{dg^n}\right|_{g=g_0} = 0$ достаточно наложить при $n = 1$.

Замечание 2. Если не требовать, чтобы $\left.\frac{d\varphi_g}{dg}\right|_{g=g_0} = 0$, то из указанного выше доказательства видно, что утверждение леммы 1 справедливо для решения уравнения (16.1), удовлетворяющего начальному условию $\psi_{g_0} = \varphi_{g_0} + \alpha s_{g_0}$.

Покажем теперь, каким образом с помощью леммы 1 можно получить соотношение (15.7). Будем считать, что для семейства гамильтонианов H_g выполнены условия леммы 1, за исключением требования $\left.\frac{d^n \varphi_g}{dg^n}\right|_{g=g_0} = 0$ при $n \geqslant 1$, и рассмотрим оператор эволюции $U_\alpha(t, T)$, построенный по гамильтониану $H_\alpha(t) = H_{h(\alpha t)}$, где $h(\tau)$ — гладкая функция, заданная при $\tau \leqslant 0$ и принимающая значения в интервале $[g_0, g_1]$. Предположим, что функция $h(\tau) = g_0$ при $\tau \leqslant a$. Тогда для семейства гамильтонианов $\tilde{H}_\lambda = H_{h(\lambda)}$ при λ из отрезка $[a, 0]$ и векторов $\tilde{\varphi}_\lambda = \varphi_{h(\lambda)}$ выполнены уже все условия леммы 1, включая требование $\left.\frac{d^n \tilde{\varphi}_\lambda}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=a} = 0$ (последнее вытекает из соотношения $\left.\frac{d^n h(\lambda)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=a} = 0$). Применяя утверждение этой леммы, видим, что

$$\left\| U_\alpha\left(0, \frac{a}{\alpha}\right) \tilde{\varphi}_a - \exp\left(-\frac{i}{\alpha} C\right) \tilde{\varphi}_0 \right\| \to 0,$$

где $C = \int\limits_a^0 E(h(\lambda))\, d\lambda$. Таким образом,

$$\varphi_{h(0)} = \tilde{\varphi}_0 = \lim_{\alpha \to 0} \exp\left(\frac{i}{\alpha} C\right) U_\alpha\left(0, \frac{a}{\alpha}\right) \varphi_{h(a)}. \quad (16.13)$$

Вводя оператор

$$S_\alpha(t, T) = \exp(i H_{g_0} t)\, U_\alpha(t, T) \exp(-i H_{g_0} T),$$

можно переписать равенство (16.13) в виде

$$\varphi_{h(0)} = \lim_{\alpha \to 0} \exp\left\{\frac{i}{\alpha} \int\limits_a^0 [E(h(\lambda)) - E(h(a))]\, d\lambda\right\} \times \\ \times S_\alpha\left(0, \frac{a}{\alpha}\right) \varphi_{h(a)}. \quad (16.14)$$

Поскольку $S_\alpha\left(\frac{a}{\alpha}, T\right) = 1$ при $T < \frac{a}{\alpha}$ и $h(\lambda) = h(a)$ при $\lambda < a$, пользуясь соотношением (16.14), можно заключить, что

$$\varphi_{h(0)} = \lim_{\alpha \to 0} \exp\left\{\frac{i}{\alpha} \int\limits_{-\infty}^0 [E(h(\lambda)) - E(h(-\infty))]\, d\lambda\right\} \times \\ \times S_\alpha(0, -\infty)\, \varphi_{h(-\infty)}. \quad (16.15)$$

Для того чтобы из (16.15) получить равенства (15.7), следует взять в качестве семейства гамильтонианов H_g семейство $H_0 + gV$, где $0 \leqslant g \leqslant g_1$, а в качестве $h(\tau)$ — функцию $g \exp(-\alpha |\tau|)$. Функция $\exp(-\alpha|\tau|)$ не удовлетворяет условию финитности, наложенному на функцию $h(\tau)$, поэтому, строго говоря, не имеем права применять равенство (16.15). Однако, пользуясь сделанным выше замечанием 2, нетрудно провести аккуратное доказательство равенства (15.7).

Замечание 3. Если семейство гамильтонианов H_g зависит еще от параметра Ω, то нетрудно указать условия, при которых предельный переход в (16.15) равномерен по Ω (для этого следует провести равномерные по Ω оценки в рассуждениях леммы). В частности, если $H_g^\Omega = H_0^\Omega + gV^\Omega$ $(0 \leqslant g \leqslant g_1,\ \Omega \in \mathcal{O})$, то предельный переход в (16.15) будет равномерным по g и Ω, если нормы операторов V^Ω ограничены константой, не зависящей от Ω, и можно найти такое δ, что в интервале $(E^\Omega(g) - \delta,\ E^\Omega(g) + \delta)$ при любых Ω и g нет собственных значений оператора H_g^Ω, кроме $E^\Omega(g)$ (см. [46]).

ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

§ 17. Формальная теория рассеяния

Пусть H и H_0 — два самосопряженных оператора в пространстве R. *Матрицы Мёллера* S_+ и S_- пары операторов (H, H_0) определим как сильные пределы:

$$S_- = \operatorname*{slim}_{t\to-\infty} \exp(\mathrm{i}\, tH)\exp(-\mathrm{i}\, tH_0) = \operatorname*{slim}_{t\to-\infty} S(0,t); \quad (17.1)$$

$$S_+ = \operatorname*{slim}_{t\to+\infty} \exp(\mathrm{i}\, tH)\exp(-\mathrm{i}\, tH_0) = \operatorname*{slim}_{t\to+\infty} S(0,t). \quad (17.2)$$

Операторы S_- и S_+ изометричны как сильные пределы унитарных операторов, но не обязательно унитарны. Если они унитарны, то можно утверждать, что

$$S_-^* = \operatorname*{slim}_{t\to-\infty} \exp(\mathrm{i}\, tH_0)\exp(-\mathrm{i}\, tH);$$

$$S_+^* = \operatorname*{slim}_{t\to+\infty} \exp(\mathrm{i}\, tH_0)\exp(-\mathrm{i}\, tH)$$

(см. дополнение, § Д.5).

S-матрицу пары операторов (H, H_0) определим соотношением

$$S = S_+^* S_-.$$

Если операторы S_+ и S_- унитарны, то S-матрица тоже является унитарным оператором, и ее можно записать в виде

$$S = \operatorname*{slim}_{t\to\infty,\ t_0\to-\infty} S(t, t_0), \quad (17.3)$$

где

$$S(t, t_0) = \exp(\mathrm{i}\, H_0 t)\exp(-\mathrm{i}\, H(t-t_0))\exp(-\mathrm{i}\, H_0 t_0).$$

Однако S-матрица может оказаться унитарным оператором и в случае, когда матрицы Мёллера неунитарны. Именно, для унитарности S-матрицы достаточно (и необходимо), чтобы множества значений операторов S_- и S_+ совпадали: $S_-R = S_+R$.

В дальнейшем увидим, что при некоторых условиях с помощью S-матрицы можно описывать процесс рассеяния частиц; в этих условиях удается, как правило, доказать унитарность S-матрицы.

Будем считать, что операторы H и H_0 имеют одну и ту же область определения; обозначим символом V оператор $H - H_0$. Укажем простое достаточное условие (условие Кука) существования матриц Мёллера.

Если интеграл $\int_0^{\pm\infty} \|V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x\|\, dt$ *сходится для векторов x из всюду плотного множества $T\subset R$, то матрицы Мёллера S_+ и S_- существуют.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $\Phi_x(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)\times\exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x$ и заметим, что

$$\left\|\frac{d\Phi_x(t)}{dt}\right\| = \|\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\, Ht)\, V\exp(-\mathrm{i}\, H_0 t)\, x\| =$$

$$= \|V\exp(-\mathrm{i}\, H_0 t)\, x\|.$$

Таким образом,

$$\|\Phi_x(t_1) - \Phi_x(t_2)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi_x(t)}{dt}\, dt\right\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\left\|\frac{d\Phi_x(t)}{dt}\right\| dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \|V\exp(-\mathrm{i}\, H_0 t)\, x\|\, dt$$

и, в силу сделанного предположения, для $x\in T$ имеем

$$\lim \|\Phi_x(t_1) - \Phi_x(t_2)\| = 0,$$

когда t_1 и t_2 оба стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$. Отсюда следует существование пределов $\Phi_x(t)$ при $t\to\pm\infty$ для $x\in T$ и, следовательно, существование этих пределов для любого $x\in R$ (см. дополнение, § Д.5).

Рассмотрим связь матриц Мёллера $S_\pm$ и S-матрицы S с построенными в § 14 адиабатическими матрицами Мёллера $S_{\alpha\pm}$ и адиабатической S-матрицей S_α. Сделаем предположение, что при конечных t и t_0

$$\operatorname*{slim}_{\alpha\to0} S_\alpha(t, t_0) = S(t, t_0).$$

Легко проверить, что это предположение выполнено, если оператор V ограничен (тогда предельный переход имеет место даже по норме); оно справедливо и во много более общей ситуации.

Докажем теперь, что из условия Кука вытекают соотношения

$$\operatorname*{slim}_{\alpha\to 0} S_{\alpha+} = S_+; \tag{17.4}$$

$$\operatorname*{slim}_{\alpha\to 0} S_{\alpha-} = S_-. \tag{17.5}$$

При условии унитарности оператора S_+ из соотношений (17.4) и (17.5) следует равенство

$$\operatorname*{slim}_{\alpha\to 0} S_\alpha = S. \tag{17.6}$$

Рассмотрим для доказательства векторы

$$\Phi_x^\alpha(t) = S_\alpha(0, t)\,x = S_\alpha^*(t, 0)\,x,$$

где $x \in T$. Очевидно, что

$$\left\|\frac{d\Phi_x^\alpha(t)}{dt}\right\| = \|\mathrm{i}\,U_\alpha(0,t)\,V\exp(-\alpha|t|)\exp(-\mathrm{i}\,H_0 t)\,x\| = \exp(-\alpha|t|)\,\|V\exp(-\mathrm{i}\,H_0 t)\,x\|,$$

откуда

$$\|\Phi_x^\alpha(t_1) - \Phi_x^\alpha(t_2)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|V\exp(-\mathrm{i}\,H_0 t)\,x\|\exp(-\alpha|t|)\,dt \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|V\exp(-\mathrm{i}\,H_0 t)\,x\|\,dt.$$

Из полученного неравенства вытекает существование пределов $\Phi_x^\alpha(\pm\infty)$ и, значит, операторов $S_{\alpha\pm}$. Более того, оно показывает, что предельный переход

$$\lim_{t\to\pm\infty} \Phi_x^\alpha(t) = \Phi_x^\alpha(\pm\infty)$$

равномерен по α, и, значит, под знаком этого предельного перехода можно устремить α к нулю. Сделав это, получаем для $x \in T$ соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0} S_{\alpha\pm}\,x = \lim_{\alpha\to 0}\lim_{t\to\pm\infty} \Phi_x^\alpha(t) = \lim_{t\to\pm\infty}\lim_{\alpha\to 0} S_\alpha(0\ t)\,x = \lim_{t\to\pm\infty} S(0, t)\,x = S_\pm\,x,$$

откуда уже вытекает, что сильный предел $S_{\alpha\pm}$ при $\alpha\to 0$ равен $S_\pm$.

Если V — ограниченный оператор, то

$$\|\Phi_x^\alpha(t_1) - \Phi_x^\alpha(t_2)\| \leqslant \|V\|\cdot\|x\|\cdot\left|\int_{t_1}^{t_2}\exp(-\alpha|t|)\,dt\right|.$$

Это неравенство доказывает, что в соотношениях (17.4)—(17.6) имеет место сходимость по норме, поэтому операторы $S_{\alpha+}$, $S_{\alpha-}$, S_α являются унитарными операторами.

Устремляя t к $\pm\infty$ в легко проверяемом тождестве

$$\exp(\mathrm{i}\,H\tau)\,S(0, t) = S(0, t+\tau)\exp(\mathrm{i}\,H_0\tau),$$

получаем важное соотношение

$$\exp(\mathrm{i}\,H\tau)\,S_\pm = S_\pm\exp(\mathrm{i}\,H_0\tau),$$

откуда

$$HS_\pm = S_\pm H_0;\quad H_0 S = SH_0. \tag{17.7}$$

Если $S_\pm$ — унитарные операторы, то это соотношение устанавливает *унитарную эквивалентность* между операторами H и H_0. Отсюда ясно, что, если, например, H_0 не имеет дискретного спектра, а H имеет, операторы S_+ и S_- не унитарны (легко видеть, что области значений операторов S_+ и S_- ортогональны тогда собственным функциям дискретного спектра).

Пусть φ_λ — полная система обобщенных собственных функций оператора H_0, нормированная на δ-функцию, E_λ — соответствующие уровни энергии (ради простоты обозначений предполагаем, что у оператора H_0 нет дискретного спектра). Тогда функции $\psi_\lambda^\pm = S_\pm\varphi_\lambda$ — обобщенные собственные функции оператора H с теми же собственными значениями E_λ, поскольку

$$H\psi_\lambda^\pm = HS_\pm\,\varphi_\lambda = S_\pm\,H_0\,\varphi_\lambda = E_\lambda\,S_\pm\,\varphi_\lambda = E_\lambda\,\psi_\lambda^\pm.$$

Матричные элементы S-матрицы в базисе φ_λ легко выражаются через функции $\psi_\lambda^\pm$. Именно,

$$\langle S\varphi_\lambda, \varphi_\mu\rangle = \langle S_+^* S_- \varphi_\lambda, \varphi_\mu\rangle = \langle S_- \varphi_\lambda, S_+ \varphi_\mu\rangle = \langle \psi_\lambda^-, \psi_\mu^+\rangle.$$

Поэтому интересно получить уравнения для определения функций $\psi_\lambda^\pm$. С этой целью рассмотрим операторы

$$\Sigma_{\pm\varepsilon} = \pm\varepsilon \int_0^{\pm\infty} \exp(-\varepsilon|t|)\, S(0, t)\, dt.$$

Легко видеть, что в случае, если операторы S_+ и S_- существуют,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \Sigma_{\pm\varepsilon} = S_\pm.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \pm\varepsilon \int_0^{\pm\infty} \exp(-\varepsilon|t|)\, f(t)\, dt = f(\pm\infty), \tag{17.8}$$

справедливым, если векторная функция $f(t)$ ограничена и имеет пределы $f(\pm\infty) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)$*. Очевидно, что $\psi_\lambda^\pm = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \psi_\lambda^{\pm\varepsilon}$, где

$$\psi_\lambda^{\pm\varepsilon} = \Sigma_{\pm\varepsilon}\varphi_\lambda = \pm\varepsilon \int_0^{\pm\infty} \exp(-\varepsilon|t|) \exp(iHt) \exp(-iE_\lambda t)\, \varphi_\lambda\, dt =$$

$$= \frac{\pm i\varepsilon}{H - E_\lambda \pm i\varepsilon}\varphi_\lambda.$$

Таким образом, $\psi_\lambda^{\pm\varepsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$(H - E_\lambda \pm i\varepsilon)\, \psi_\lambda^{\pm\varepsilon} = \pm i\varepsilon\varphi_\lambda,$$

которое можно переписать в виде

$$\varphi_\lambda^{\pm\,\varepsilon} = \varphi_\lambda + (E_\lambda - H_0 \mp i\varepsilon)^{-1} V\psi_\lambda^{\pm\,\varepsilon}; \tag{17.9}$$

---

* Если $\|f(t)\| \leqslant A$ и при $t \geqslant T$ имеем $\|f(t) - f(+\infty)\| \leqslant \delta$, то
$$\left\| \varepsilon \int_0^\infty \exp(-\varepsilon t)\, f(t)\, dt - f(+\infty) \right\| = \varepsilon \left\| \int_0^\infty \exp(-\varepsilon t)\, (f(t) - f(+\infty))\, dt \right\| \leqslant 2\varepsilon TA + \delta.$$

Если существует в подходящем смысле предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}(E_\lambda - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1} = (E_\lambda - H_0 \pm i0)^{-1}$, то в уравнении (17.9) можно устремить ε к нулю и получить уравнение для $\psi_\lambda^\pm$:

$$\psi_\lambda^\pm = \varphi_\lambda + (E_\lambda - H_0 \mp i0)^{-1} V\psi_\lambda^\pm.$$

Это уравнение называется уравнением Липпмана—Швингера*. Можно указать также выражение матричных элементов S-матрицы через одни только функции ψ_λ^+ (или одни только функции ψ_λ^-). Именно,

$$\langle S\varphi_\lambda, \varphi_\mu\rangle = \langle \psi_\lambda^-, \psi_\mu^+\rangle = \delta(\lambda-\mu) - 2\pi i\delta(E_\lambda - E_\mu)\langle \varphi_\lambda, V\psi_\mu^+\rangle =$$
$$= \delta(\lambda-\mu) - 2\pi i\delta(E_\lambda - E_\mu)\langle V\psi_\lambda^-, \varphi_\mu\rangle. \tag{17.10}$$

В самом деле, с помощью уравнений Липпмана—Швингера убеждаемся, что

$$\langle \psi_\lambda^-, \psi_\mu^+\rangle = \langle \varphi_\lambda, \varphi_\mu\rangle + \langle (E_\lambda - H_0 + i0)^{-1} V\psi_\lambda^-, \varphi_\mu\rangle +$$
$$+ \langle \varphi_\lambda, (E_\mu - H_0 - i0)^{-1} V\psi_\mu^+\rangle + \langle V\psi_\lambda^-, (E_\lambda - H_0 - i0)^{-1} \times$$
$$\times (E_\mu - H_0 - i0)^{-1} V\psi_\mu^+\rangle = \delta(\lambda-\mu) + \langle V\psi_\lambda^-, (E_\lambda - iH_0 - i0)^{-1}\varphi_\mu\rangle +$$
$$+ \langle (E_\mu - H_0 + i0)^{-1}\varphi_\lambda, V\psi_\mu^+\rangle - \frac{1}{E_\lambda - E_\mu}(\langle \psi_\lambda^- - \varphi_\lambda, V\psi_\mu^+\rangle -$$
$$- \langle V\psi_\lambda^-, \psi_\mu^+ - \varphi_\mu\rangle) = \delta(\lambda-\mu) + \left(\frac{1}{E_\lambda - E_\mu + i0} - \frac{1}{E_\lambda - E_\mu}\right) \times$$
$$\times \langle V\psi_\lambda^-, \varphi_\mu\rangle + \left(\frac{1}{E_\mu - E_\lambda + i0} + \frac{1}{E_\lambda - E_\mu}\right)\langle \varphi_\lambda, V\psi_\mu^+\rangle. \tag{17.11}$$

Здесь была использована формула

$$(E_\lambda - H_0 - i0)^{-1}(E_\mu - H_0 - i0)^{-1} = -\frac{1}{E_\lambda - E_\mu} \times$$
$$\times [(E_\lambda - H_0 - i0)^{-1} - (E_\mu - H_0 - i0)^{-1}]. \tag{17.12}$$

Обе части этой формулы рассматриваем как обобщенные операторные функции от λ и μ. Под числовой обобщенной функцией $\frac{1}{E_\lambda - E_\mu}$ можно с равным успехом понимать функции $(E_\lambda - E_\mu + i0)^{-1}$, $(E_\lambda - E_\mu - i0)^{-1}$ или $P\frac{1}{E_\lambda - E_\mu}$, отличающиеся друг

---

* Не будем здесь останавливаться на деликатном вопросе о придании точного смысла уравнению Липпмана—Швингера. Дальнейшие рассуждения в этом параграфе также носят формальный характер.

от друга на $c\delta(E_\lambda - E_\mu)$,—формула (17.12) останется справедливой в любом случае, поскольку

$$\delta(E_\lambda - E_\mu)[(E_\lambda - H_0 - i0)^{-1} - (E_\mu - H_0 - i0)^{-1}] = 0.$$

Заменяя в равенстве (17.11) $\frac{1}{E_\lambda - E_\mu}$ на $\frac{1}{E_\lambda - E_\mu + i0}$ или на $\frac{1}{E_\lambda - E_\mu - i0}$, получаем нужные соотношения.

§ 18. Одночастичная задача рассеяния

Рассмотрим рассеяние нерелятивистской бесспиновой частицы в потенциальном поле $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, достаточно быстро убывающем на бесконечности. Пространство состояний R в этом случае является пространством $L^2(E^3)$, а гамильтониан частицы имеет вид $H = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + \mathcal{V}(\mathbf{x})$. Когда частица находится далеко от рассеивающего центра, потенциальную энергию можно считать равной нулю и описывать движение частицы гамильтонианом $H_0 = \hat{\mathbf{p}}^2/2m$. В соответствии с этим рассеяние частицы в поле $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ можно описывать матрицей рассеяния S, построенной по паре операторов (H, H_0).

Проверим, что в случае, когда потенциал $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ квадратично интегрируем, выполнено условие Кука и, следовательно, существуют матрицы Мёллера. Для этого заметим, что для плотного множества функций $f \in R$ имеет место неравенство $|f_t(\mathbf{x})| \leqslant C|t|^{-3/2}$, где $f_t = \exp(-\mathrm{i}H_0 t) f$ (доказательство этого неравенства см. в § 38, лемма 2). Отсюда следует, что норма функции $\psi_t = V \exp(-\mathrm{i}H_0 t) f$ не превышает $C|t|^{-3/2}\sqrt{\int |\mathcal{V}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}$, поскольку $\psi_t(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) f_t(\mathbf{x})$. Это доказывает условие Кука. Более сложные рассуждения позволяют ослабить условие квадратичной интегрируемости.

Если потенциал $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ одновременно квадратично интегрируем и абсолютно интегрируем ($\mathcal{V} \in L^2 \cap L^1$), то можно доказать, что S-матрица унитарна. Не будем приводить доказательство этого совсем не тривиального факта. Укажем лишь, что установлению унитарности S-матрицы в различных предположениях посвящено много работ. Для потенциального рассеяния унитарность S-матрицы была впервые установлена А. Я. Повзнером [47]. В приведенной выше формулировке теорема доказана в [48].

Введем обозначение

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \langle S\varphi_{\mathbf{q}}, \varphi_{\mathbf{p}}\rangle,$$

где $\varphi_{\mathbf{p}} = (2\pi)^{-3/2}\exp(\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x})$ — обобщенная собственная функция оператора импульса [$S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ можно назвать ядром оператора S в импульсном представлении].

Поскольку оператор S коммутирует с H_0, функция $S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ имеет вид

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\delta(p^2 - q^2) = \frac{S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{2p}\,\delta(p - q).$$

Величина

$$d\sigma = \pi^2 |S_1(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2 d\omega, \tag{18.1}$$

где $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ — элемент телесного угла, а $\mathbf{k}$ — вектор, по длине равный $\mathbf{p}$ и направленный в угол $d\omega$, имеет физический смысл *дифференциального эффективного сечения* (т. е. смысл числа частиц, отклоняющихся за единицу времени в телесный угол $d\omega$ при условии, что на рассеивающий центр падает поток частиц с импульсом $\mathbf{p}$, имеющий единичную плотность)*.

В силу формулы (17.10)

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \langle S\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{k}}\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - 2\pi\mathrm{i}\delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k^2}{2m}\right)\langle V\psi_{\mathbf{p}}^-, \varphi_{\mathbf{k}}\rangle,$$

поэтому формула для дифференциального эффективного сечения может быть записана также в виде

$$d\sigma = 16m^2\pi^4 |\langle V\psi_{\mathbf{p}}^-, \varphi_{\mathbf{k}}\rangle|^2 d\omega.$$

Для того чтобы выяснить физический смысл величины (18.1), предположим, что рассеиваемая частица при $t \to -\infty$ описывается волновой функцией $\exp(-\mathrm{i}H_0 t)\varphi$ (иными словами, предположим, что без учета взаимодействия с полем частица описывалась бы в момент времени $t = 0$ волновой функцией φ). Из определения S-матрицы вытекает, что при $t \to +\infty$ волновая функция частицы будет тогда иметь вид $\exp(-\mathrm{i}H_0 t) S\varphi$. В импульсном представлении

$$(S\varphi)(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}) = \int S(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\varphi(q)\,dq;$$

$$(\exp(-\mathrm{i}H_0 t) S\varphi)(\mathbf{p}) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t\right)\psi(\mathbf{p}),$$

* Рассматриваем только отклонения на ненулевой угол.

и, стало быть, вероятность того, что импульс рассеянной частицы направлен в телесный угол Ω, равна

$$\int_{\Omega} |\psi(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = \int_{\Omega} d\mathbf{p} \int d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}'\, S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \overline{S}(\mathbf{p}, \mathbf{q}') \varphi(\mathbf{q}) \varphi(\mathbf{q}').$$

В реальных экспериментах по рассеянию никогда не бывает известна волновая функция рассеиваемой частицы в системе отсчета, связанной с центром рассеяния. В классической механике это соответствует тому, что известен начальный импульс $\mathbf{p}_{\text{нач}}$ рассеиваемой частицы, но неизвестен ее прицельный параметр (т. е. расстояние, на котором пролетела бы частица от рассеивающего центра, если бы она все время двигалась по прямой линии). Поэтому в классической механике рассматривается поток частиц с одним и тем же начальным импульсом $\mathbf{p}_{\text{нач}}$ и с разными прицельными параметрами; предполагается, что этот поток имеет единичную плотность (т. е. считается, что через единичную площадку, ортогональную к $\mathbf{p}_{\text{нач}}$, за единицу времени проходит одна частица). Дифференциальным эффективиым сечением рассеяния в телесный угол $d\Omega$ называют число частиц из этого потока, которые отклоняются за единицу времени в телесный угол $d\Omega$.

В квантовой механике понятие прицельного параметра не имеет прямого смысла. Можно, однако, рассмотреть семейство волновых функций

$$\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{a}),$$

где $\alpha(\mathbf{p})$ — нормированная волновая функция, отличная от нуля лишь в малой окрестности $\mathbf{p}_{\text{нач}}$, в вектор $\mathbf{a}$ ортогонален $\mathbf{p}_{\text{нач}}$, и считать, что вектор $\mathbf{a}$ является аналогом прицельного параметра (напомним, что умножение на $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{a})$ в импульсном представлении равносильно сдвигу на вектор $\mathbf{a}$ в координатном представлении). Эффективное сечение рассеяния в угол Ω частицы с начальным импульсом $\mathbf{p}_{\text{нач}}$ естественно определить как

$$\sigma_{\Omega} = \int_{\mathbf{a} \perp \mathbf{p}_{\text{нач}}} d\mathbf{a} \int_{\Omega} d\mathbf{p} \, |\psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{p})|^2,$$

где $\psi_{\mathbf{a}} = S\rho_{\mathbf{a}}$. Поскольку

$$\psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{p}) = \int S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} = \int S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\delta(p-q)}{2p} \alpha(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{a})\, d\mathbf{q},$$

можно написать, что

$$\sigma_{\Omega} = \int_{\mathbf{a} \perp \mathbf{p}_{\text{нач}}} d\mathbf{a} \int_{\Omega} d\mathbf{p} \int d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}'\, S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \overline{S_1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}') \times$$
$$\times \frac{\delta(p-q)}{2p} \cdot \frac{\delta(p-q')}{2p} \alpha(\mathbf{q}) \overline{\alpha}(\mathbf{q}') \exp(i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{a}).$$

Интегрируя по $\mathbf{a}$, получаем

$$\sigma_{\Omega} = (2\pi)^2 \int_{\Omega} d\mathbf{p} \int d\mathbf{q}\, d\mathbf{q}'\, S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \overline{S_1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}') \frac{\delta(p-q)}{4p^2} \times$$
$$\times \alpha(\mathbf{q}) \overline{\alpha}(\mathbf{q}')\, \delta(q-q')\, \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}})$$

[здесь $\mathbf{q}_{\text{т}}$, $\mathbf{q}'_{\text{т}}$ — проекции векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{p}_{\text{нач}}$; мы воспользовались тем, что

$$\int_{\mathbf{a} \perp \mathbf{p}_{\text{нач}}} \exp(i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{a})\, d\mathbf{a} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}})].$$

Легко проверить, что

$$\delta(q-q')\, \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}}) = 2q\delta(q^2 - q'^2)\, \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}}) =$$

$$= 2q\delta(q_n^2 - q_n'^2)\, \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}}) = \frac{q}{q_n} \delta(q_n - q'_n)\, \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}}) +$$

$$+ \frac{q}{q_n} \delta(q_n + q'_n)\, \delta(\mathbf{q}_{\text{т}} - \mathbf{q}'_{\text{т}}) = \frac{q}{q_n} [\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \delta(I\mathbf{q} - \mathbf{q}')]$$

(здесь q_n, q'_n — проекции векторов $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ на вектор $\mathbf{p}_{\text{нач}}$, I — симметрия относительно плоскости, ортогональной $\mathbf{p}_{\text{нач}}$). Пользуясь содержащимися в подынтегральном выражении δ-функциями, можно взять интеграл по $d\mathbf{q}'$, а также, перейдя к сферическим координатам в интеграле по $d\mathbf{p}$, проинтегрировать по dp. Получаем

$$\sigma_{\Omega} = \pi^2 \int_{\omega} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int d\mathbf{q} \left| S_1(q, \theta, \varphi \mid \mathbf{q}) \right|^2 \frac{q}{q_n} |\alpha(\mathbf{q})|^2 +$$

$$+ \pi^2 \int_{\omega} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \int d\mathbf{q}\, S_1(q, \theta, \varphi \mid \mathbf{q}) \overline{S_1}(q, \theta, \varphi \mid I\mathbf{q}) \times$$

$$\times \left(-\frac{q}{q_n} \right) \alpha(\mathbf{q}) \overline{\alpha}(I\mathbf{q})$$

[здесь ω — область, в которой меняются сферические координаты θ, φ, когда $\mathbf{p}$ пробегает Ω; если $\mathbf{p}$ — вектор со сферическими координатами (p, θ, φ), пишем $S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = S_1(p, \theta, \varphi \mid \mathbf{q})$]. Если функция $S_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ непрерывна, когда $\mathbf{q}$ меняется в окрестности точки $\mathbf{p}_{\text{нач}}$, а $\mathbf{p}$ в угле Ω, то при условии $\mathbf{p}_{\text{нач}} \in \Omega$ отсюда следует, что

$$\sigma_{\Omega} \approx \pi^2 \int_{\omega} |S_1(p_{\text{нач}}, \theta, \varphi \mid \mathbf{p}_{\text{нач}})|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Это согласуется с написанным выше выражением для дифференциального эффективного сечения [было использовано то, что для нормированной функции $\alpha(\mathbf{q})$ с носителем в малой окрестности точки $\mathbf{p}_{\text{нач}}$ и непрерывной функции $f(\mathbf{q})$

$$\int f(\mathbf{q}) |\alpha(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q} \approx f(\mathbf{p}_{\text{нач}}),$$

если к тому же $\mathbf{p}_{\text{нач}} \neq 0$, то

$$\int f(\mathbf{q})\, \alpha(\mathbf{q}) \overline{\alpha(I\mathbf{q})}\, d\mathbf{q} \approx 0]^*.$$

Посмотрим, как выглядят в рассматриваемом случае уравнения Липпмана—Швингера. За полную систему обобщенных собственных функций гамильтониана H_0 выберем функции $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$. В импульсном представлении гамильтониан H_0 сводится к умножению на $\frac{p^2}{2m}$, оператор $(E_{\mathbf{q}} - H_0 \pm i\varepsilon)^{-1}$ — к умножению на $\left(\frac{q^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \pm i\varepsilon\right)^{-1}$, а оператор $(E_{\mathbf{q}} - H_0 \pm i0)^{-1}$ — к умножению на обобщенную функцию $\left(\frac{q^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \pm i0\right)^{-1}$. Таким образом, в импульсном представлении уравнения Липпмана—Швингера имеют вид

$$\psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + \frac{\int \tilde{\mathscr{V}}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\, \psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{p}')\, d\mathbf{p}'}{\frac{q^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \mp i0}, \tag{18.2}$$

где

$$\tilde{\mathscr{V}}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathscr{V}(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Учитывая, что

$$\int \frac{\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})\, d\mathbf{p}}{\frac{q^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \pm i0} = -4m\pi^2 \frac{\exp(\pm iqx)}{x},$$

можем написать уравнение Липпмана—Швингера в координатном представлении:

$$\psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) - \frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\exp(\mp iq|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathscr{V}(\mathbf{x}') \psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x}'). \tag{18.3}$$

Вычислим асимптотику функции $\psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \infty$. Поскольку потенциал $\mathscr{V}(\mathbf{x})$ достаточно быстро убывает на бесконечности, при $\mathbf{x} \to \infty$ можно считать, что в интеграле, входящем в формулу (18.3), $x \gg x'$, и заменить в показателе экспоненты $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$

* Не представляет труда превратить изложенные рассуждения в строгое доказательство. Для этого надо рассмотреть последовательность нормированных функций α_n, носители которых стягиваются к точке $\mathbf{p}_{\text{нач}} \neq 0$, и заметить, что для такой последовательности и непрерывной функции $f(q)$ имеют место соотношения

$$\int f(\mathbf{q}) |\alpha_n(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q} \to f(\mathbf{p}_{\text{нач}}),$$
$$\int f(\mathbf{q})\, \alpha_n(\mathbf{q}) \overline{\alpha_n}(I\mathbf{q})\, d\mathbf{q} \to 0.$$

на $x - \frac{\mathbf{x}}{x}\mathbf{x}'$, а в знаменателе $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ — на x. Получаем, что при больших x

$$\psi^{\pm}(\mathbf{x}) \approx \varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{q}}^{\pm}\left(\mp \frac{\mathbf{x}}{x}\right) \frac{\exp(\mp iqx)}{x},$$

где

$$f_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{e}) = -\frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{x}' \exp(-iq\mathbf{e}\mathbf{x}') \mathscr{V}(\mathbf{x}') \psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x}').$$

Отсюда видно, что

$$f_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{e}) = -m\sqrt{2\pi} \langle V\psi_{\mathbf{q}}^{\pm}, \varphi_{\mathbf{k}} \rangle, \tag{18.4}$$

где $\mathbf{k} = q\mathbf{e}$. Формула (18.4) вместе с соотношениями (17.10) и (18.1) позволяет выразить матричные элементы S-матрицы и эффективное сечение через функцию $f_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{e})$, определяемую асимптотическим поведением на бесконечности функции $\psi_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{x})$. Например, дифференциальное эффективное сечение рассеяния в телесный угол $d\omega$ равно,

$$d\sigma = (2\pi)^3 |f_{\mathbf{p}}^{-}(\mathbf{e})|^2 d\omega \tag{18.5}$$

здесь $\mathbf{p}$ — импульс падающих частиц, $\mathbf{e}$ — единичный вектор направленный в угол $d\omega$). Функция $\psi_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{1}{2m}\Delta + \mathscr{V}(\mathbf{x})\right) \psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{q^2}{2m} \psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x}) \tag{18.6}$$

и граничному условию на бесконечности

$$\psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x}) \approx \varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{q}}^{\pm}\left(\mp \frac{\mathbf{x}}{x}\right) \frac{\exp(\mp iqx)}{x}. \tag{18.7}$$

Нетрудно проверить, что эти два свойства характеризуют функцию $\psi_{\mathbf{q}}^{\pm}(\mathbf{x})$. Иными словами, функция $\psi_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{x})$ может быть описана как решение стационарного уравнения Шредингера, которое на бесконечности представляется в виде суммы плоской волны и расходящейся сферической волны. Функция $\psi_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{x})$ описывается аналогично (с заменой расходящейся сферической волны на сходящуюся).

Таким образом, приходим к стационарной постановке задачи о рассеянии нерелятивистской частицы. В этой постановке нахождение сечения рассеяния сводится к отысканию решения стационарного уравнения Шредингера с граничным условием (18.7). Полезно отметить, что в случае, если $\mathscr{V}(\mathbf{x}) = \mathscr{V}(-\mathbf{x})$,

$$\psi_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{x}) = \overline{\psi_{\mathbf{q}}^{-}(-\mathbf{x})}$$

(это вытекает из замечания, что при комплексном сопряжении сходящаяся сферическая волна переходит в расходящуюся, а уравнение (18.6) остается инвариантным). Отсюда ясно, что $\overline{f_{\mathbf{q}}^{+}(\mathbf{e})} = f_{\mathbf{q}}^{-}(\mathbf{e})$, и, следовательно, сечение рассеяния может быть записано также в виде

$$d\sigma = (2\pi)^3 \left| f_{\mathbf{p}}^{+}(\mathbf{e}) \right|^2 d\omega.$$

§ 19. Многочастичная задача рассеяния

Многочастичную задачу рассеяния будем рассматривать в фоковском пространстве F, построенном по пространству с мерой $E^3 \times B$, где B — конечное множество. Оператор импульса $\mathbf{P}$ в этом пространстве определяется формулой (13.14). Рассмотрим трансляционно инвариантный гамильтониан H в пространстве F (т. е. самосопряженный оператор H, коммутирующий с оператором импульса $\mathbf{P}$).

При рассмотрении задачи рассеяния в системе из n частиц данное в § 17 определение матрицы рассеяния оказывается не всегда пригодным, поскольку в процессе столкновения возможно образование составных частиц. Например, если исходными частицами были протоны и нейтроны, то в конце процесса может образоваться дейтрон (связанное состояние протона и нейтрона) или α-частица (связанное состояние двух протонов и двух нейтронов). Поэтому следует прежде всего обобщить понятие частицы, чтобы оно включало в себя объекты, которые естественно называть составными частицами.

Вектор $\Phi(\mathbf{k})$, описывающий одночастичное состояние с импульсом $\mathbf{k}$, должен быть собственным вектором операторов $\mathbf{P}$ и H [в одночастичном состоянии, имеющем определенный импульс $\mathbf{k}$, энергия имеет определенное значение $\omega(\mathbf{k})$]. Поскольку у оператора $\mathbf{P}$ есть лишь один нормированный собственный вектор (фоковский вакуум), векторная функция $\Phi(\mathbf{k})$ должна быть обобщенной. Высказанные соображения позволяют дать следующее определение частицы.

Под частицей, соответствующей гамильтониану H, будем понимать обобщенную векторную функцию $\Phi(\mathbf{k})$, удовлетворяющую условиям

$$H\Phi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\, \Phi(\mathbf{k}); \tag{19.1}$$

$$\mathbf{P}\Phi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\Phi(\mathbf{k}); \tag{19.2}$$

$$\langle \Phi(\mathbf{k}),\ \Phi(\mathbf{k}')\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{19.3}$$

Функция $\omega(\mathbf{k})$ называется *энергией одночастичного состояния* (законом дисперсии).

Например, частицами, соответствующими гамильтониану

$$H_0 = \sum_{s=1}^{n} \int \varepsilon_s(\mathbf{k})\, a_s^{+}(\mathbf{k})\, a_s(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}, \tag{19.4}$$

являются обобщенные векторные функции

$$\Phi_s(\mathbf{k}) = a_s^{+}(\mathbf{k})\, \theta. \tag{19.5}$$

Те же обобщенные векторные функции можно рассматривать также как частицы, соответствующие гамильтониану

$$H = H_0 + W, \tag{19.6}$$

где

$$W = \sum_{\substack{m \geq 2 \\ n \geq 2}} \int W_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)\, a^{+}(\mathbf{k}_1) \ldots$$

$$\ldots a^{+}(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{l}_1) \ldots a(\mathbf{l}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{l}. \tag{19.7}$$

Они называются элементарными частицами. Для трансляционно инвариантного гамильтониана вида $H_0 + V$, где V — произвольный оператор, частица называется элементарной, если она получается из частицы $a_s^{+}(\mathbf{k})\theta$, соответствующей гамильтониану H_0, по теории возмущений (иными словами, если гамильтониану $H_0 + gV$ можно сопоставить частицу $\Psi_g(\mathbf{k})$, непрерывно зависящую от параметра g из отрезка $[0;\ 1]$, и при этом $\Psi_0(\mathbf{k}) = a_s^{+}(\mathbf{k})\theta$, то частица $\Psi_1(\mathbf{k})$ называется элементарной частицей гамильтониана $H_0 + V$).

Частицы $\Phi(\mathbf{k})$, $\Phi'(\mathbf{k})$ называются ортогональными, если $\langle \Phi(\mathbf{k}), \Phi'(\mathbf{k})\rangle = 0$; система частиц $\{\Phi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Phi_N(\mathbf{k})\}$ называется полной, если не существует частицы, ортогональной ко всем частицам $\Phi_i(\mathbf{k})$.

Например, для гамильтониана $H_0 = \int \varepsilon(\mathbf{k}) a^{+}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, где $\varepsilon(\mathbf{k})$ — строго выпуклая функция, система частиц, состоящая из единственной частицы $\Phi(\mathbf{k}) = a^{+}(\mathbf{k})\theta$ (элементарной частицы), является полной. В самом деле, пусть

$$\Psi(\mathbf{k}) = \sum_n \int \psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, a^{+}(\mathbf{k}_1) \ldots a^{+}(\mathbf{k}_n)\, \theta$$

есть частица, соответствующая этому гамильтониану. Из условия $\mathbf{P}\,\Psi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\Psi(\mathbf{k})$ вытекает, что

$$(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n)\,\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) = \mathbf{k}\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n),$$

откуда

$$\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \cdots - \mathbf{k}_n)\,\varphi_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n).$$

Условие $H\Psi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\Psi(\mathbf{k})$ дает соотношение

$$(\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \cdots + \varepsilon(\mathbf{k}_n))\,\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) = \omega(\mathbf{k})\,\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n),$$

из которого ясно, что

$$(\omega(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_n) - \varepsilon(\mathbf{k}_1) - \ldots - \varepsilon(\mathbf{k}_n))\varphi_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) = 0. \qquad (19.8)$$

Равенство (19.8) позволяет заключить, что $\varphi_n \equiv 0$ при $n > 1$ (для того чтобы сделать такое заключение, следует заметить, что строго выпуклая функция не равна постоянной величине на множестве положительной меры и что функция $\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ — строго выпуклая функция переменной $\mathbf{p}$). Таким образом, $\Psi(\mathbf{k}) = \varphi_1(\mathbf{k})a^+(\mathbf{k})\theta$; это доказывает нужное утверждение.

Полная система частиц не всегда может быть составлена из одних только элементарных частиц. Возможна ситуация, когда существуют частицы, ортогональные к любой элементарной частице (составные частицы).

Рассмотрим, например, гамильтониан

$$H = \int \frac{\mathbf{k}^2}{2m} a^+(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} + \frac{1}{2}\int \tilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)\,a^+(\mathbf{k}_1) \times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_3)\,a(\mathbf{k}_4)\,\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4)\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,d\mathbf{k}_4, \qquad (19.9)$$

описывающий систему тождественных бесспиновых бозонов (см. § 13). Этот гамильтониан коммутирует с оператором числа частиц N, поэтому достаточно ограничиться отысканием частиц, лежащих в n-частичном пространстве F_n, которое, как говорилось выше, представляет собой пространство симметричных функций $\varphi(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$, где $\mathbf{k}_i \in E^3$. Введем новые переменные

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n}{n},$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_n \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

и определим пространство F_n' как пространство таких функций $\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$, что функции $f(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$, где $f(\mathbf{p}) \in L^2(E^3)$, принадлежат пространству F_n. Функции из пространства F_n' можно рассматривать как волновые функции относительного движения n частиц; переход к описанию движения n частиц с помощью функций из пространства F_n' соответствует отделению движения центра инерции. Математически возможность отделить движение центра инерции для гамильтониана H_n означает, что существует такой гамильтониан H_n' в пространстве F_n', что для любой функции

$$f(\mathbf{p})\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}) \in F_n,$$

где $f \in L^2(E^3)$, $\psi \in F_n$, имеет место соотношение

$$H_n(f(\mathbf{p})\,\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})) = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2nm} f(\mathbf{p})\right)\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}) +$$
$$+ f(\mathbf{p})\,(H_n'\psi)(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}).$$

Пусть $\psi \in F_n'$ — (нормированная) собственная функция оператора H_n' с собственным значением E. Легко убедиться, что обобщенная векторная функция

$$\Phi(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$$

является частицей в смысле данного выше определения; при этом

$$H\Phi(\mathbf{k}) = \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2nm} + E\right)\Phi(\mathbf{k}).$$

При $n > 1$ частица $\Phi(\mathbf{k})$ представляет собой составную частицу (связанное состояние системы из n частиц).

Займемся теперь вопросом о том, что следует называть матрицей рассеяния гамильтониана вида (19.6) (для более общих трансляционно инвариантных гамильтонианов определение матрицы рассеяния будет дано в гл. 9). Естественно попытаться определить матрицу рассеяния гамильтониана (19.6) как S-матрицу, построенную по паре операторов (H, H_0). Это оказывается, однако, разумным лишь в случае, когда элементарные частицы $\Phi_s(\mathbf{k}) = a_s^+(\mathbf{k})\theta$ образуют полную систему частиц (не существует составных частиц). С физической точки зрения понятно, что S-матрица пары операторов (H, H_0) не может описывать актов рассеяния, в которых участвуют составные частицы. Если такие акты рассеяния могут иметь место, то S-матрица, построенная по паре операторов (H, H_0), не будет унитарным оператором.

Формулируя определение матрицы рассеяния, ограничимся ради простоты бозевским случаем.

Заметим прежде всего, что всякую частицу $\Phi(\mathbf{k})$ можно записать в форме

$$\Phi(\mathbf{k})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_n}\int\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\cdots-\mathbf{k}_n)\times$$
$$\times\varphi_n(\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)a_{i_1}^{+}(\mathbf{k}_1)\ldots a_{i_n}^{+}(\mathbf{k}_n)\theta d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n.$$

Сопоставим частице $\Phi(\mathbf{k})$ операторную обобщенную функцию $A(\mathbf{k})$, положив

$$A(\mathbf{k})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_n}\int\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\cdots-\mathbf{k}_n)\times$$
$$\times\bar{\varphi}_n(\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)a_{i_1}(\mathbf{k}_1)\ldots a_{i_n}(\mathbf{k}_n)d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n.$$

Операторная обобщенная функция $A(\mathbf{k})$ однозначно определяется условиями: 1) $A^{+}(\mathbf{k})\theta=\Phi(\mathbf{k})$ (оператор $A^{+}(\mathbf{k})$ рождает частицу $\Phi(\mathbf{k})$ из вакуума), 2) $A(\mathbf{k})$ является суперпозицией операторов вида $a_{i_1}(\mathbf{k}_1)\ldots a_{i_n}(\mathbf{k}_n)$, т. е. может быть представлен в форме

$$A(\mathbf{k})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_n}\int\lambda_n(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)\times$$
$$\times a_{i_1}(\mathbf{k}_1)\ldots a_{i_n}(\mathbf{k}_n)d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n.$$

Определим теперь in- и out-*операторы* $A_{\mathrm{in}}(\mathbf{k},\tau)$ и $A_{\mathrm{out}}(\mathbf{k},\tau)$, соответствующие частице $\Phi(\mathbf{k})$, как пределы

$$A_{\mathrm{in}}(\mathbf{k},\tau)=\lim_{t\to-\infty}\exp(i\omega(\mathbf{k})(t-\tau))A(\mathbf{k},t),\qquad(19.10)$$

$$A_{\mathrm{out}}(\mathbf{k},\tau)=\lim_{t\to+\infty}\exp(i\omega(\mathbf{k})(t-\tau))A(\mathbf{k},t),\qquad(19.11)$$

где $A(\mathbf{k},t)=\exp(iHt)A(\mathbf{k})\exp(-iHt)$, $\omega(\mathbf{k})$ — закон дисперсии частицы $\Phi(\mathbf{k})$, предел понимается в смысле обобщенных функций (точнее, для всякой функции $f(\mathbf{k})\in\in\mathcal{S}(E^3)$

$$\int f(\mathbf{k})A_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k},\tau)d\mathbf{k}=\lim_{t\to\mp\infty}\int f(\mathbf{k})\exp(i\omega(\mathbf{k})(t-\tau))A(\mathbf{k},t)d\mathbf{k}$$

в смысле сильного операторного предела на линейном многообразии D — наименьшем линейном многообразии, содержащем все F_n). Говоря одновременно об операторах A_{in} и A_{out}, будем пользоваться обозначением A_{ex}.

При некоторых условиях на гамильтониан H (в частности, для гамильтонианов вида (19.9), если потенциал взаимодействия квадратично интегрируем) можно доказать, что: 1) пределы (19.10), (19.11) существуют; 2) если частицы $\Phi_1(\mathbf{k}),\ldots$ $\ldots,\Phi_m(\mathbf{k})$ ортогональны, то соответствующие им операторы $A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i,\tau)$, $A_{\mathrm{ex}}^{+}(\mathbf{k},i,\tau)$, где $i=1,\ldots,m$, при фиксированном τ подчинены каноническим коммутационным соотношениям (CCR)

$$[A_{\mathrm{ex}}^{+}(\mathbf{k},i,\tau),A_{\mathrm{ex}}^{+}(\mathbf{k}',i',\tau)]=[A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i,\tau),A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k}',i',\tau)]=0;$$
$$[A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i,\tau),A_{\mathrm{ex}}^{+}(\mathbf{k}',i',\tau)]=\delta_{i'}^{i}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}');$$

3) $A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i,\tau)=\exp(iH\tau)A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i)\exp(-iH\tau)=$
$=\exp(-i\omega_i(\mathbf{k})\tau)A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i)$,

где $A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i)=A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i,0)$;

4) $A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},i)\theta=0$, $A_{\mathrm{ex}}^{+}(\mathbf{k},i)\theta=\Phi_i(\mathbf{k})$.

Доказательства этих утверждений приведены, например, в [32] (последние два доказываются тривиально).

Обобщенные векторные функции

$$\Psi_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)=A_{\mathrm{in}}^{+}(\mathbf{k}_1,i_1)\ldots A_{\mathrm{in}}^{+}(\mathbf{k}_n,i_n)\theta;$$
$$\Psi_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)=A_{\mathrm{out}}^{+}(\mathbf{k}_1,i_1)\ldots A_{\mathrm{out}}^{+}(\mathbf{k}_n,i_n)\theta$$

называются in- и out-*состояниями*.

Нередко оказывается полезным то, что векторы Ψ_{in} и Ψ_{out} можно, раскрыв определение операторов A_{in}^{+} и A_{out}^{+}, представить также в виде

$$\Psi_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)=\lim_{t\to\pm\infty}\exp\left(-i(\omega_{i_1}(\mathbf{k}_1)+\ldots+\omega_{i_n}(\mathbf{k}_n))t\right)\times$$
$$\times A^{+}(\mathbf{k}_1,i_1,t)\ldots A^{+}(\mathbf{k}_n,i_n,t)\theta.\qquad(19.12)$$

Применяя формулу (17.8), можно получить из (19.12) следующее представление in- и out-состояний:

$$\Psi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}_1,i_1,\ldots,\mathbf{k}_n,i_n)=\pm\lim_{\alpha\to0}i\alpha\left(H-(\omega_{i_1}(\mathbf{k}_1)+\right.$$
$$\left.+\ldots+\omega_{i_n}(\mathbf{k}_n))\pm i\alpha\right)^{-1}A^{+}(\mathbf{k}_1,i_1)\ldots A^{+}(\mathbf{k}_n,i_n)\theta.$$

Будем считать, что фиксирована полная ортогональная система частиц $\Phi_1(\mathbf{k}),\ldots,\Phi_N(\mathbf{k})$ и операторы $A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},1),\ldots$ $\ldots,A_{\mathrm{ex}}(\mathbf{k},N)$ построены по частицам этой системы.

Матричными элементами S-матрицы (или амплитудами рассеяния) условимся называть функции

$$S_{m,n}(\mathbf{k}_1, i_1, \ldots, \mathbf{k}_m, i_m | \mathbf{l}_1, j_1, \ldots, \mathbf{l}_n, j_n) = \\ = \langle A_{\text{in}}^+(\mathbf{l}_1, j_1) \ldots A_{\text{in}}^+(\mathbf{l}_n, j_n)\theta, \quad A_{\text{out}}^+(\mathbf{k}_1, i_1) \ldots A_{\text{out}}^+(\mathbf{k}_m, i_m)\theta\rangle.$$

Через эти матричные элементы можно выразить вероятность того, что при столкновении n частиц с квантовыми числами $\mathbf{l}_1, j_1, \ldots, \mathbf{l}_n, j_n$ получатся частицы с квантовыми числами $\mathbf{k}_1, i_1, \ldots, \mathbf{k}_m, i_m$ (в более общей ситуации об этом говорится в гл. 10.)

Рассмотрим связь аппарата in- и out-операторов с определением S-матрицы, данным в § 17. Предположим, что матрицы Мёллера $S_\mp$, построенные по паре операторов (H, H_0), унитарны (вероятно, это предположение выполнено всегда, когда нет связанных состояний). Операторы $A(\mathbf{k}, s)$, соответствующие элементарным частицам $\Phi_s(\mathbf{k}) = a_s^+(\mathbf{k})\theta$, равны, очевидно, $a_s(\mathbf{k})$. Покажем, что

$$A_{\text{in}}(\mathbf{k}, s) = a_{\text{in}}(\mathbf{k}, s) = S_- a_s(\mathbf{k}) S_-^*; \tag{19.13}$$

$$A_{\text{out}}(\mathbf{k}, s) = a_{\text{out}}(\mathbf{k}, s) = S_+ a_s(\mathbf{k}) S_+^*. \tag{19.14}$$

В самом деле, используя соотношения (17.1) и (17.2), видим, что

$$S_\mp a_s(\mathbf{k}) S_\mp^* = \operatorname*{slim}_{t \to \mp\infty} \exp(\mathrm{i}Ht)\exp(-\mathrm{i}H_0 t) a_s(\mathbf{k}) \times \\ \times \exp(\mathrm{i}H_0 t)\exp(-\mathrm{i}Ht) = \\ = \operatorname*{slim}_{t \to \mp\infty} \exp(\mathrm{i}\varepsilon_s(\mathbf{k})t) a_s(\mathbf{k}, t) = a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, s).$$

Из соотношений (19.13), (19.14) следует

$$\langle a_{\text{in}}^+(\mathbf{l}, \sigma_1) \ldots a_{\text{in}}^+(\mathbf{l}_n, \sigma_n)\theta, \quad a_{\text{out}}^+(\mathbf{k}_1, s_1) \ldots a_{\text{out}}^+(\mathbf{k}_m, s_m)\theta\rangle = \\ = \langle S_- a_{\sigma_1}^+(\mathbf{l}_1) \ldots a_{\sigma_n}^+(\mathbf{l}_n)\theta, \quad S_+ a_{s_1}^+(\mathbf{k}_1) \ldots a_{s_m}^+(\mathbf{k}_m)\theta\rangle = \\ = \langle S a_{\sigma_1}^+(\mathbf{l}_1) \ldots a_{\sigma_n}^+(\mathbf{l}_n)\theta, \quad a_{s_1}^+(\mathbf{k}_1) \ldots a_{s_m}^+(\mathbf{k}_m)\theta\rangle$$

(было использовано то, что $S_-^*\theta = S_+^*\theta = \theta$). Иными словами, величины, названные в этом параграфе матричными элементами S-матрицы, при сделанных предположениях совпадают с матричными элементами оператора S в обобщенном базисе $a_{s_1}^+(\mathbf{k}_1) \ldots a_{s_m}^+(\mathbf{k}_m)\theta$.

В случае, когда связанные состояния существуют, также можно построить оператор S, матричными элементами которого являются функции $S_{m,n}$. Для этого нужно ввести пространство F_{as} — пространство асимптотических состояний — как фоковское пространство, построенное по пространству с мерой $E^3 \times N$, где N — множество, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с типами частиц. (Напомним, что фиксирована полная ортогональная система частиц.) Операторы рождения и уничтожения в F_{as} обозначим $b^+(\mathbf{k}, i)$ и $b(\mathbf{k}, i)$ (здесь $i \in N$). Векторы из пространства F_{as} изображают начальные и конечные состояния процесса рассеяния (например, вектор $b_{i_1}^+(f_1) \ldots b_{i_n}^+(f_n)\theta$, где $b_i(f) = \int f(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k}, i)\, d\mathbf{k}$, соответствует состоянию, в котором присутствуют частицы типов $i_1, \ldots, i_n$ с волновыми функциями $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$). Определим изометричные операторы S_- и S_+, действующие из пространства F_{as} в пространство F, с помощью соотношений

$$A_{\text{in}}(\mathbf{k}, i) S_- = S_- b(\mathbf{k}, i), \quad S_-\theta = \theta; \tag{19.15}$$

$$A_{\text{out}}(\mathbf{k}, i) S_+ = S_+ b(\mathbf{k}, i), \quad S_+\theta = \theta. \tag{19.16}$$

(Такие операторы существуют и определяются соотношениями (19.15), (19.16) однозначно; доказательство этого факта проведено в § 20.) *Матрицей рассеяния* назовем оператор $S = S_+^* S_-$, действующий в пространстве F_{as}. Очевидно,

$$S_{m,n}(\mathbf{k}_1, i_1, \ldots, \mathbf{k}_m, i_m | \mathbf{l}_1, j_1, \ldots, \mathbf{l}_n, j_n) = \\ = \langle A_{\text{in}}^+(\mathbf{l}_1, j_1) \ldots A_{\text{in}}^+(\mathbf{l}_n, j_n)\theta, A_{\text{out}}^+(\mathbf{k}_1, i_1) \ldots A_{\text{out}}^+(\mathbf{k}_m, i_m)\theta\rangle = \\ = \langle S_- b^+(\mathbf{l}_1, j_1) \ldots b^+(\mathbf{l}_n, j_n)\theta, S_+ b^+(\mathbf{k}_1, i_1) \ldots b^+(\mathbf{k}_m, i_m)\theta\rangle = \\ = \langle S b^+(\mathbf{l}_1, j_1) \ldots b^+(\mathbf{l}_n, j_n)\theta, b^+(\mathbf{k}_1, i_1) \ldots b^+(\mathbf{k}_m, i_m)\theta\rangle.$$

Иными словами, матричные элементы оператора S в обобщенном базисе $b^+(\mathbf{k}_1, i_1) \ldots b^+(\mathbf{k}_m, i_m)\theta$ совпадают с функциями $S_{m,n}$.

Благодаря тому, что гамильтонианы вида (19.9) коммутируют с оператором числа частиц, можно исследовать отдельно n-частичную задачу рассеяния при $n = 2, 3, \ldots$ При $n = 2$ эта задача сводится к рассмотренной в предыдущем параграфе задаче о потенциальном рассеянии. Доказательство унитарности матрицы рассеяния для трехчастичной задачи было получено Л. Д. Фаддеевым [49]; метод Фаддеева основан на указании и исследовании уравнений для in- и out-состояний. Уравнения Фаддеева оказались полезными и в вычислительном отношении; они были обобщены различными способами также на случай n-частичной задачи рассеяния при $n > 3$. По-видимому, методом Фаддеева можно доказать унитарность матрицы рассеяния для любого числа частиц, но попытки сделать это натолкнулись на большие технические затруднения. Вопрос об унитарности матрицы рассеяния для n-частичной задачи при $n > 3$ остается до сих пор открытым.

В заключение представим данное в этом параграфе определение матриц Мёллера $S_{\pm}$ и матрицы рассеяния S в форме, удобной для переноса на существенно более общую ситуацию (гл. 10). Назовем оператор B правильным, если он может быть представлен в виде

$$\sum_m \sum_{s_1,\ldots,s_m} \int f(\mathbf{k}_1, s_1, \ldots, \mathbf{k}_m, s_m) \times$$
$$\times a^+_{s_1}(\mathbf{k}_1) \ldots a^+_{s_m}(\mathbf{k}_m)\, d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_m$$

и удовлетворяет условию

$$B\theta = \int \varphi(\mathbf{k})\, \Phi_i(\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

где $\Phi_i(\mathbf{k})$ — одна из частиц, содержащихся в фиксированной полной системе частиц $\Phi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Phi_n(\mathbf{k})$. Изометрический оператор S_- (S_+), действующий из пространства F_{as} в пространство F, назовем матрицей Мёллера, если для любых правильных операторов $B_1, \ldots, B_m$ и гладких финитных функций $f_1(\mathbf{p}), \ldots, f_m(\mathbf{p})$

$$\lim_{t \to \mp\infty} B_1(f_1, t) \ldots B_m(f_m, t)\, \theta =$$
$$= S_{\mp}\, b^+(\bar{\varphi}_1 \bar{f}_1, i_1) \ldots b^+(\bar{\varphi}_m \bar{f}_m, i_m)\, \theta.$$

Здесь операторы $B_\alpha(f_\alpha, t)$ задаются формулой

$$B_\alpha(f_\alpha, t) = \int \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t)\, B_\alpha(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x},$$

где

$$B_\alpha(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt - i\mathbf{P}\mathbf{x})\, B_\alpha \exp(-iHt + i\mathbf{P}\mathbf{x});$$
$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int \exp(-i\omega_{i_\alpha}(\mathbf{p})\, t + i\mathbf{p}\mathbf{x})\, f_\alpha(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3};$$

числа i_α и функции $\varphi_\alpha(\mathbf{p})$, $\omega_{i_\alpha}(\mathbf{p})$ определяются соотношениями

$$B_\alpha \theta = \int \varphi_\alpha(\mathbf{p})\, \Phi_{i_\alpha}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p};$$
$$H\Phi_{i_\alpha}(\mathbf{p}) = \omega_{i_\alpha}(\mathbf{p})\, \Phi_{i_\alpha}(\mathbf{p}).$$

Матрица рассеяния S, как всегда, определяется через матрицы Мёллера формулой $S = S^*_+ S_-$.

Для того чтобы установить, что приведенное только что определение матрицы Мёллера эквивалентно сформулированному ранее, заметим, что правильный оператор B_α может быть, очевидно, представлен в виде

$$B_\alpha = \int \varphi_\alpha(\mathbf{p})\, A^+_{i_\alpha}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p},$$

где $A_i(\mathbf{p})$ — операторная обобщенная функция, сопоставленная выше частице $\Phi_i(\mathbf{p})$. Воспользовавшись очевидным равенством

$$\exp(-i\mathbf{P}\mathbf{x})\, A^+_i(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{P}\mathbf{x}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})\, A^+_i(\mathbf{k}),$$

убеждаемся, что

$$B_\alpha(f_\alpha, t) = \int \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})\, \varphi_\alpha(\mathbf{k})\, A^+_{i_\alpha}(\mathbf{k}, t)\, d\mathbf{k} =$$
$$= \int \exp(-i\omega_{i_\alpha}(\mathbf{k})\, t)\, f_\alpha(\mathbf{k})\, \varphi_\alpha(\mathbf{k})\, A^+_{i_\alpha}(\mathbf{k}, t)\, d\mathbf{k},$$

откуда

$$\operatorname*{slim}_{t \to \mp\infty} B_\alpha(f_\alpha, t) = \int f_\alpha(\mathbf{k})\, \varphi_\alpha(\mathbf{k})\, A^+_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, i_\alpha)\, d\mathbf{k}. \qquad (19.17)$$

Чтобы доказать эквивалентность двух определений матриц Мёллера, осталось отметить, что в силу соотношений (19.17), (19.15), (19.16) имеет место равенство

$$\lim_{t \to \mp\infty} B_1(f_1, t) \cdots B_n(f_n, t)\, \theta = \int f_1(\mathbf{k}_1)\, \varphi_1(\mathbf{k}_1)\, A^+_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}_1, i_1) \ldots$$
$$\ldots f_n(\mathbf{k}_n)\, \varphi_n(\mathbf{k}_n)\, A^+_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}_n, i_n)\, d^n\mathbf{k}\, \theta = S_{\mp}\, b^+(\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1, i_1) \ldots$$
$$\ldots b^+(\bar{f}_n \bar{\varphi}_n, i_n)\, \theta.$$

ГЛАВА 6

ОПЕРАТОРЫ В ФОКОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 20. Представления соотношений коммутации и антикоммутации. Фоковское представление

Если каждому вектору f предгильбертова пространства $\mathcal{B}$ поставлены в соответствие операторы $a(f)$ и $a^+(f) = (a(f))^+$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ так, что $a(f)$ линейно зависит от f [т. е. $a(\lambda f + \mu g) = \lambda a(f) + \mu a(g)$], и при этом выполнены соотношения

$$[a(f), a(g)] = [a^+(f), a^+(g)] = 0, \quad [a(f), a^+(g)] = \langle f, g\rangle \qquad (20.1)$$

или соотношения

$$[a(f), a(g)]_+ = [a^+(f), a^+(g)]_+ = 0, \ [a(f), a^+(g)]_+ = \langle f, g\rangle \qquad (20.2)$$

($f, g \in \mathcal{B}$, λ, μ — комплексные числа), то говорят, что в пространстве $\mathcal{H}$ задано *представление канонических соотношений коммутации* — CCR (соответственно, *представление канонических соотношений антикоммутации* — CAR)*.

Будем употреблять также обозначения $a(f, -1) = a(f)$, $a(f, +1) = a^+(f)$; пользуясь этими обозначениями, CCR и CAR можно записать в следующей форме:

$$[a(f, \varepsilon), \quad a(g, \varepsilon')]_{\mp} = A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}\langle f, g\rangle, \qquad (20.3)$$

где $A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}$ — матрица с элементами $A^1_1 = A^{-1}_{-1} = 0$, $A^{-1}_1 = 1$, $A^1_{-1} = \mp 1$ (верхний знак в случае CCR, нижний — в случае CAR).

В случае CAR операторы $a(f)$ и $a^+(f)$ ограничены (из равенства $a(f)a^+(f) + a^+(f)a(f) = \langle f, f\rangle$ вытекает, что

* В определении представления CCR и CAR считаем, что все операторы $a(f)$, $a^+(f)$ заданы на одном и том же линейном многообразии D, всюду плотном в пространстве $\mathcal{H}$, и переводят многообразие D в себя; операторы $a(f)$ и $a^+(f)$ сопряжены друг с другом (т. е. $\langle a(f)x, y\rangle = \langle x, a^+(f)y\rangle$ для всех $x, y \in D$).

$\langle a(f)x, \ a(f)x\rangle + \langle a^+(f)x, \ a^+(f)x\rangle = \langle f, f\rangle\langle x, x\rangle$, откуда ясно, что $\|a(f)\| \leqslant \|f\|$, $\|a^+(f)\| \leqslant \|f\|$. Поэтому можно считать, что операторы $a(f)$, $a^+(f)$ определены на всем $\mathcal{H}$. В случае CCR операторы $a(f)$, $a^+(f)$ неограничены.

Говоря одновременно о CCR и CAR, будем применять термин «канонические соотношения» и сокращение CR. Когда нужно отметить, что CR построены по предгильбертову пространству $\mathcal{B}$, будем использовать обозначение CR ($\mathcal{B}$). Если в пространстве $\mathcal{B}$ выбран ортонормированный базис φ_n, то операторы $a_n = a(\varphi_n)$ и $a_n^+ = a^+(\varphi_n)$ удовлетворяют соотношениям

$$[a_m, a_n] = [a_m^+, a_n^+] = 0; \quad [a_m, a_n^+] = \delta_{m, n} \qquad (20.4)$$

в случае CCR и

$$[a_m, a_n]_+ = [a_m^+, a_n^+]_+ = 0; \quad [a_m, a_n^+]_+ = \delta_{m\ n} \qquad (20.5)$$

в случае CAR (эти соотношения также носят название CR).

Важнейшим примером операторов, удовлетворяющих CR, являются операторы рождения $a^+(f)$ и уничтожения $a(f)$, определенные в § 13. (Они задают представление CCR в бозевском случае и представление CAR в фермиевском случае.) Операторы $a^+(f)$, $a(f)$ по аналогии называют операторами рождения и уничтожения также в других случаях, хотя это не всегда соответствует их физическому смыслу.

Еще одно важное представление CCR задается операторами

$$a(f) = \sum_{n=1}^{N} f_n a_n;$$

$$a^+(f) = \sum_{n=1}^{N} \bar{f}_n a_n^+,$$

где a_n^+, a_n — удовлетворяющие соотношениям (20.4) операторы, построенные в § 11 при исследовании системы связанных осцилляторов (здесь $f = (f_1, \ldots, f_N)$ пробегает комплексное N-мерное пространство).

Представление CR назовем *фоковским*, если в его пространстве $\mathcal{H}$ существует вектор θ, удовлетворяющий условию $a(f)\theta = 0$ и циклический относительно операторов

$a^+(f)$, $a(f)$. Вектор θ называется *вакуумным вектором** (см. § 13).

Докажем, что *два фоковских представления эквивалентны друг другу* в том смысле, что существует унитарный оператор α, отображающий пространство $\mathcal{H}_1$ на пространство $\mathcal{H}_2$ и удовлетворяющий условиям $\alpha a_1(f) = a_2(f)\alpha$, $\alpha\theta_1 = \theta_2$ (здесь $a_i(f)$ — фоковское представление CR в пространстве $\mathcal{H}_i$ с вакуумным вектором θ_i). В случае CCR равенство $\alpha a_1(f) = a_2(f)\alpha$ должно выполняться на всюду плотном подмножестве пространства $\mathcal{H}_1$ [не обязательно на всей области определения операторов $a_1(f)$].

Приступим к построению оператора α. На векторах вида

$$a_1(f_1, \varepsilon_1) \ldots a_1(f_n, \varepsilon_n)\theta_1 \tag{20.6}$$

определим оператор α, положив

$$\alpha a_1(f_1, \varepsilon_1) \ldots a_1(f_n, \varepsilon_n)\theta_1 = a_2(f_1, \varepsilon_1) \ldots a_2(f_n, \varepsilon_n)\theta_2.$$

Если x и y — два вектора вида (20.6), то $\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, \alpha y\rangle$; это следует из того, что скалярное произведение векторов вида (20.6) можно вычислить, пользуясь лишь CR и соотношением $a_i(f)\theta_i = 0$. Обозначим S_1 линейное многообразие, состоящее из линейных комбинаций векторов вида (20.6); оператор α по линейности продолжается на S_1 и удовлетворяет условию $\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, \alpha y\rangle$ для любых $x, y \in S_1$. Из цикличности вектора θ_i относительно операторов $a_i(f, \varepsilon)$ вытекает, что множество S_1 плотно в $\mathcal{H}_1$, а множество $S_2 = \alpha S_1$ плотно в $\mathcal{H}_2$. Оператор α продолжается на $\bar{S}_1 = \mathcal{H}_1$ по непрерывности; плотность множества S_2 в $\mathcal{H}_2$ влечет за собой соотношение $\alpha\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. Ясно, что на множестве S_1 имеем $\alpha a_1(f, \varepsilon) = a_2(f, \varepsilon)\alpha$; это завершает доказательство эквивалентности двух фоковских представлений**.

Таким образом, достаточно описать одно фоковское представление; это сделано в § 13 (и будет еще раз сделано в несколько иных терминах позже).

* Пользуясь CR, легко проверить, что всякий вектор вида $a(f_1, \varepsilon_1) \ldots a(f_n, \varepsilon_n)\theta$ представим в виде линейной комбинации векторов вида $a^+(\varphi_1) \ldots a^+(\varphi_m)\theta$ и, значит, θ является циклическим вектором также относительно семейства $a^+(f)$.

** Если первое представление CR является фоковским, а про второе известно лишь, что в его пространстве R_2 существует вектор θ_2, удовлетворяющий условию $a_2(f)\theta_2 = 0$, то точно так же можно построить оператор α, удовлетворяющий условиям $\alpha a_1(f) = a_2(f)\alpha$, $\alpha\theta_1 = \theta_2$, но он будет, вообще говоря, не унитарным, а изометричным (это утверждение использовано в § 19 для построения операторов S_- и S_+).

Пространство фоковского представления CR ($\mathcal{B}$) будем называть *фоковским пространством* и обозначать $F(\mathcal{B})$.

Пусть теперь предгильбертово пространство $\mathcal{B}$ реализовано как всюду плотное подмножество квадратично интегрируемых функций на евклидовом пространстве E^r [т.е. $\mathcal{B} \subset L^2(E^r)$]. Тогда наряду с операторами $a^+(f)$), $a(f)$ удобно ввести операторные обобщенные функции $a^+(x)$, $a(x)$ на E^r, полагая

$$a(f) = \int f(x) a(x) dx; \quad a^+(\bar{f}) = \int f(x) a^+(x) dx.$$

Функции $a^+(x)$, $a(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &[a(x), a(y)]_\mp = [a^+(x), a^+(y)]_\mp = 0; \\ &[a(x), a^+(y)]_\mp = \delta(x, y); \ a(x)\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20.7}$$

Данное определение обобщенных операторных функций $a^+(x)$, $a(x)$ буквально переносится на случай, когда $\mathcal{B}$ — всюду плотное подмножество пространства $L^2(X)$, где $X = E^r \times B$ — совокупность пар (e, s), $e \in E^r$ — точка евклидова пространства, а $s \in B$ — элемент конечного множества B (тогда интегрирование по X понимается как интегрирование по евклидову пространству и суммирование по конечному множеству). Оно применимо и в еще более общем случае, когда X— произвольное пространство с мерой, но в такой общности оно здесь не понадобится. В дальнейшей части этого параграфа под X следует понимать пространство с мерой, но при желании читатель может считать просто, что $X = E^r$ или $X = E^r \times B$.

Операторные обобщенные функции $a^+(x)$, $a(x)$ в случае фоковского представления CR уже рассматривались в § 13. В этом параграфе было показано, в частности, как выражениям вида (13.3) можно придать смысл операторов, действующих в фоковском пространстве. Для произвольного представления CR выражению (13.3) легко придать смысл в случае, когда фигурирующая в нем функция имеет вид (13.4). Если f — произвольная функция, то ее можно представить как предел функций f_k вида (13.4) и оператор A, соответствующий функции f, определить как предел операторов A_k, отвечающих функциям f_k. Разумеется, это определение оператора A нуждается в уточнении, поскольку не указано, в каком смысле понимается предел функций f_k и операторов A_k. Не будем заниматься этими уточнениями; заметим только, что в случае, когда $\mathcal{B} = \mathcal{S}(E^3)$ и для любых векторов $u, v \in D$ функционал $\langle a(f, \varepsilon)u, v\rangle$ непрерывно зависит от f в топологии пространства $\mathscr{S}(E^3)$, пользуясь операторным аналогом теоремы о ядре (см. дополнение, § Д.5), можно определить оператор (13.3) для функций $f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \| \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ из пространства $\mathscr{S}(E^{3(m+n)})$.

В случае, когда $\mathscr{B} = L^2(X)$, всякий элемент Φ фоковского пространства можно единственным способом записать в виде

$$\Phi = \sum_n \int f_n(x_1, \ldots, x_n)\, a^+(x_1) \ldots a^+(x_n)\, \theta\, dx_1 \ldots dx_n, \quad (20.8)$$

где функции $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ — симметричные в случае CCR или антисимметричные в случае CAR функции аргументов $x_1, \ldots, x_n \in X$; норма вектора Φ равна

$$\sum_n n! \int |f_n(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n;$$

обратно, всякой последовательности $f_0, f_1(x), \ldots, f_n(x_1, \ldots \ldots, x_n), \ldots$ симметричных (антисимметричных) функций, удовлетворяющей условию

$$\sum_n n! \int |f_n(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant \infty,$$

соответствует вектор фоковского пространства. Это описание фоковского пространства проще всего получить, воспользовавшись указанной в § 13 конструкцией фоковского пространства в виде фоковских столбиков; достаточно убедиться, что фоковский столбик

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \atop \vdots$$

представляется в форме

$$\Phi = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)\, a^+(x_1) \ldots$$
$$\ldots a^+(x_n)\, \theta\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Доказанное утверждение можно сформулировать также в несколько иных терминах. Именно, можно сказать, что векторные обобщенные функции $a^+(x_1) \ldots a^+(x_n)\theta$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют обобщенный базис пространства

$F(L^2(X))$ в следующем смысле: каждый вектор из $F(L^2(X))$ может быть разложен по этим векторным обобщенным функциям [т. е. представлен в виде (20.8)], и если коэффициентные функции f_n предположить симметричными (антисимметричными), то такое разложение единственно. (Позволяя себе некоторую вольность, употребляем здесь слова «обобщенный базис» не совсем в том смысле, который указан в дополнении, § Д.7.) Обобщенные функции

$$A_{kl}(x_1, \ldots, x_k \,|\, y_1, \ldots, y_l) =$$
$$= \langle A a^+(y_1) \ldots a^+(y_l)\, \theta, \quad a^+(x_1) \ldots a^+(x_k)\, \theta \rangle$$

носят название матричных элементов оператора A в обобщенном базисе $a^+(x_1) \ldots a^+(x_n)\theta$.

В заключение приведем пример нефоковского представления CCR. Рассмотрим в пространстве $F(L^2(E^n))$ операторные обобщенные функции $b(x) = a(x) + \varphi(x)$, $b^+(x) = a^+(x) + \overline{\varphi(x)}$, где $\varphi \in \mathscr{S}'$ — числовая обобщенная функция. Операторы $b(x)$, $b^+(x)$ определяют, очевидно, представление CCR (каждой функции $f \in \mathscr{S}$ сопоставляются операторы

$$b(f) = \int f(x)\, b(x)\, dx = a(f) + \int f(x)\, \varphi(x)\, dx;$$
$$b^+(f) = \int \overline{f(x)}\, b^+(x)\, dx = a^+(f) + \int \overline{f(x)}\; \overline{\varphi(x)}\, dx).$$

Легко видеть, что это представление CCR может быть фоковским лишь в случае, если функция φ квадратично интегрируема. В самом деле, пусть вектор $\xi \in F(L^2(E^n))$ удовлетворяет условию

$$b(x)\xi = a(x)\xi + \varphi(x)\xi = 0. \quad (20.9)$$

Тогда

$$\langle \xi, a^+(x)\, \theta \rangle = \langle a(x)\, \xi, \theta \rangle = -\varphi(x) \langle \xi, \theta \rangle.$$

Для всякого вектора $\xi \in F(L^2(E^n))$ функция $\langle \xi, a^+(x)\, \theta \rangle$ квадратично интегрируема, поскольку эта функция входит в фоковский столбик, отвечающий вектору ξ*. Это означает, что в случае, когда функция $\varphi \notin L^2(E^n)$, уравнение (20.9) не имеет решений.

* Здесь было использовано то, что $\langle \xi, \theta \rangle \neq 0$. Если $\langle \xi, \theta \rangle = 0$, то из соотношения $\langle \xi, a^+(x_1)\, a^+(x_2) \ldots a^+(x_n)\, \theta \rangle = -\varphi(x_1) \langle \xi, a^+(x_2) \ldots a^+(x_n)\, \theta \rangle$ с помощью индукции по n можно вывести, что $\langle \xi, a^+(x_1) \ldots a^+(x_n)\, \theta \rangle = 0$ и, значит, $\xi = 0$.

Более широкий класс представлений CCR описывается формулами

$$\left.\begin{aligned} b(f) &= a(\Phi f) + a^+(\overline{\Psi \bar f}) + \int f(x)\,\varphi(x)\,dx; \\ b^+(f) &= a(\overline{\Psi \bar f}) + a^+(\Phi f) + \int \overline{f(x)}\,\overline{\varphi(x)}\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (20.10)$$

[ради определенности будем считать, что $f \in \mathscr{S}(E^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}'(E^n)$, Φ и Ψ — операторы, действующие из пространства $\mathscr{S}(E^n)$ в пространство $L^2(E^n)$].

Легко видеть, что соотношения (20.10) определяют представление CCR в случае, если выполнены условия

$$\Phi^*\Phi - \Psi^*\Psi = 1;$$

$$\Phi^*\overline{\Psi} - \Psi^*\overline{\Phi} = 0,$$

где операторы $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ определены формулами $\overline{\Phi} f = \overline{\Phi \bar f}$, $\overline{\Psi} f = \overline{\Psi \bar f}$. Соотношения (20.10) можно записать также в виде

$$\left.\begin{aligned} b(x) &= \int \Phi(y, x)\,a(y)\,dy + \int \Psi(y, x)\,a^+(y)\,dy + f(x); \\ b^+(x) &= \int \overline{\Psi(y, x)}\,a(y)\,dy + \int \overline{\Phi(y, x)}\,a^+(y)\,dy + \overline{f}(x), \end{aligned}\right\} (20.11)$$

где $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — ядра операторов Φ и Ψ.

Можно доказать, что определяемое формулами (20.10) представление CCR будет фоковским в том и только в том случае, если функции $\Psi(x, y)$ и $f(x)$ квадратично интегрируемы (см. [50], где доказано также аналогичное утверждение для случая CAR).

Описываемый формулами (20.11) переход от операторов $a^+(x)$, $a(x)$ к операторам $b^+(x)$, $b(x)$, удовлетворяющим тем же коммутационным соотношениям, называется линейным каноническим преобразованием. Если операторы $b^+(f)$, $b(f)$ порождают фоковское представление CCR, то по доказанному выше можно найти унитарный оператор U, удовлетворяющий условию

$$Ua(f)U^{-1} = b(f),$$

$$Ua^+(f)U^{-1} = b^+(f),$$

в противном случае такого унитарного оператора не существует.

§ 21. Простейшие операторы в фоковском пространстве

Выберем в пространстве $\mathscr{B}$ ортонормированный базис φ_k, где индекс k пробегает множество M, и операторы $a^+(\varphi_k)$, $a(\varphi_k)$ в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$ обозначим a_k^+, a_k. Будем употреблять также обозначение $a(k, \varepsilon) = a_k^\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$, считая, что $a_k^1 = a(k, 1) = a_k^+$, $a_k^{-1} = a(k, -1) = a_k$.

Рассмотрим в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$ операторы $N_k = a_k^+ a_k$.

Легко видеть, что все операторы N_k коммутируют между собой. Найдем их общие собственные функции. Рассмотрим сначала случай CCR. Тогда коммутационные соотношения N_k с операторами a_l^+, a_l имеют вид

$$[N_k, a_l^+] = \delta_{k,l}\, a_l^+, \quad [N_k, a_l] = -\delta_{k,l}\, a_l.$$

Если φ — общий собственный вектор операторов N_k, т. е. $N_k\varphi = n_k\varphi$, то $N_k a_l^+\varphi = a_l^+ N_k\varphi = n_k a_l^+\varphi$ при $l \neq k$, $N_k a_k^+\varphi = a_k^+(N_k + 1)\varphi = (n_k + 1)a_k^+\varphi$. Аналогично $N_k a_l\varphi = n_k a_l\varphi$ при $l \neq k$, $N_k a_k\varphi = (n_k - 1)a_k\varphi$. Из этого сразу видно, что векторы вида $a_{k_1}^{+n_1} \dots a_{k_r}^{+n_r}\theta$, где n_i — целые неотрицательные числа, $k_i \neq k_j$, образуют *полную ортогональную** (но не нормированиую) *систему общих собственных векторов* операторов N_k, причем собственное значение оператора N_k в состоянии $a_{k_1}^{+n_1} \dots a_{k_r}^{+n_r}\theta$ равно n_i, если $k = k_i$, и нулю, если k не совпадает ни с одним из k_i.

Обратимся теперь к случаю CAR. Для операторов N_k тогда выполнено соотношение $N_k^2 = N_k$, из которого сразу вытекает, что собственные значения N_k равны 0 или 1. Далее, пользуясь равенствами $N_k a_l^+ = a_l^+ N_k$, $N_k a_l = a_l N_k$ при $l \neq k$, $a_k^+ N_k = 0$, $N_k a_k = 0$ и $N_k a_k^+ = a_k^+(1 - N_k)$, $a_k N_k = (1 - N_k)a_k$, можно рассмотреть действие операторов a_k^+, a_k на общий собственный вектор φ операторов N_k. Именно, если $N_k\varphi = n_k\varphi$ и $n_l = 1$, то $a_l^+\varphi = 0$, если же $n_l = 0$, то $a_l^+\varphi$ — собственный вектор операторов N_k, причем $N_k a_l^+\varphi = n_k a_l^+\varphi$ при $l \neq k$, $N_k a_k^+\varphi = a_k^+\varphi$. Аналогично при $n_l = 0$ имеем $a_l\varphi = 0$, а при $n_l = 1$ $a_l\varphi$ — собственный вектор операторов N_k, причем $N_k a_l\varphi = n_k a_l\varphi$ для $l \neq k$,

* Точнее говоря, два вектора такого вида либо совпадают, либо ортогональны. Полнота построенной системы векторов вытекает из цикличности вектора θ относительно семейства операторов $a^+(f)$.

$N_k a_k \varphi = 0$. Отсюда ясно, что векторы $a_{k_1}^+ \ldots a_{k_n}^+ \theta$, где все k_i различны, образуют *полную ортогональную** (не нормированную) *систему общих собственных векторов* операторов N_k, причем $N_{k_i} a_{k_1}^+ \ldots a_{k_r}\theta = a_{k_1}^+ \ldots a_{k_r}\theta$ и $N_k a_{k_1}^+ \ldots a_{k_r}\theta = 0$, если k не равно ни одному из k_i. В целях единообразия со случаем CCR будем векторы построенной полной системы обозначать $a_{k_1}^{+n_1} \ldots a_{k_s}^{+n_s}\theta$, помня, что в случае CAR числа n_i не могут быть больше единицы (т. е. $n_i = 0, 1$).

Оператор N_k называется оператором числа частиц в состоянии φ_k, а операторы a_k^+ и a_k — соответственно операторами рождения и уничтожения частицы в состоянии φ_k. Перечисленные свойства операторов N_k, a_k^+, a_k согласуются с этим названием. Оператор $N = \sum N_k = \sum a_k^+ a_k$ называется оператором числа частиц, состояние $x \in F(\mathscr{B})$, удовлетворяющее условию $Nx = nx$, называется n-частичным.

Легко видеть, что эти определения согласуются с определениями § 13; в частности, множество n-частичных состояний совпадает с подпространством F_n. Отсюда следует, что оператор числа частиц N не зависит от выбора ортонормированного базиса φ_k.

Рассмотрим теперь гамильтониан

$$H_0 = \sum \omega_k a_k^+ a_k = \sum \omega_k N_k, \tag{21.1}$$

где ω_k — действительные числа**. Заметим прежде всего, что для этого гамильтониана гейзенберговские операторы $a_k(t) = \exp(\mathrm{i}H_0 t)\, a_k \exp(-\mathrm{i}H_0 t)$ и $a_k^+(t) = \exp(\mathrm{i}H_0 t)\, a_k^+ \times \exp(-\mathrm{i}H_0 t)$ легко могут быть вычислены; в самом деле, ясно, что операторы $a_k(t) = a_k \exp(-\mathrm{i}\omega_k t)$ и $a_k^+(t) = a_k^+ \exp(\mathrm{i}\omega_k t)$ удовлетворяют гейзенберговским уравнениям

$$\frac{da_k(t)}{dt} = \mathrm{i}[H_0, a_k(t)] = -\mathrm{i}\,\omega_k a_k(t);$$
$$\frac{da_k^+(t)}{dt} = \mathrm{i}[H_0, a_k^+(t)] = \mathrm{i}\,\omega_k a_k^+(t).$$

* Точнее, два таких вектора либо пропорциональны, либо ортогональны.

** Оператор H_0 является существенно самосопряженным оператором при любом выборе действительных чисел ω_k (это вытекает, например, из того, что у оператора H_0 имеется полная система собственных векторов). В частности, существенно самосопряженным является оператор числа частиц N. Как всегда, отождествляем существенно самосопряженный оператор с его самосопряженным расширением.

Оператор H_0 коммутирует с операторами N_k, поэтому построенная выше система векторов $a_{k_1}^{+n_1} \ldots a_{k_r}^{+n_r}\theta$ является полной системой собственных векторов оператора H_0 с собственными значениями $\sum_{i=1}^{r} \omega_{k_i} n_i$.

Найдем основное состояние гамильтониана H_0. В случае CCR, если хотя бы одно $\omega_k < 0$, спектр энергий не ограничен снизу и основного состояния нет. Если же все $\omega_k \geqslant 0$, то все уровни энергии $\geqslant 0$ и основным состоянием является вакуумный вектор θ. В случае CAR низший уровень энергии равен $E_0 = \sum_{k \in L} \omega_k$, где сумма берется по множеству L тех k, для которых $\omega_k < 0$. Основное состояние Φ получается из вакуумного вектора θ применением всех операторов a_k^+, для которых $k \in L$ [т. е. $\Phi = (\prod_{k \in L} a_k^+)\theta$]. Если множество L бесконечно, то основного состояния не существует. Введем операторы b_k формулами $b_k = a_k^+$ при $k \in L$, $b_k = a_k$ при $k \notin L$. Операторы b_k^+, b_k удовлетворяют соотношениям (20.5). Чтобы проверить, что они порождают представление CAR, строго говоря, нужно определить операторы $b^+(f)$, $b(f)$ для всех $f \in \mathscr{B}$; это нетрудно сделать, положив $b(f) = a^+(Pf) + a((1-P)f)$, где $Pf = \sum_{k \in L} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Гамильтониан H_0 обычно бывает удобно выражать именно через операторы b_k^+, b_k. Если множество L конечно, то

$$H_0 = \sum |\omega_k|\, b_k^+ b_k + \sum_{k \in L} \omega_k,$$

а основное состояние гамильтониана H_0 является вакуумным вектором для операторов b_k, т. е. удовлетворяет условию $b_k \Phi = 0$. Если множество L бесконечно, то вектора, удовлетворяющего условию $b_k\Phi = 0$, в пространстве $F(\mathscr{B})$ не существует. Иными словами, операторы $b^+(f)$, $b(f)$ реализуют нефоковское представление CAR.

Операторы, действующие в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B} = L^2(X)$, удобно выражать через операторные обобщенные функции $a^+(x)$, $a(x)$, удовлетворяющие соотношениям (20.7). Утверждения этого параграфа могут быть перенесены на операторы в пространстве $F(\mathscr{B})$, выраженные через $a^+(x)$, $a(x)$. В частности, можно ввести коммутирующие друг с другом операторы (операторные обобщенные функции) $N(x)=a^+(x)a(x)$. Оператор числа частиц N выражается через операторы $N(x)$ формулой

$$N=\int N(x)\,dx$$

(подробнее об операторе числа частиц см. в § 13). Полную систему обобщенных собственных векторов (обобщенный собственный базис) оператора

$$H_0=\int\omega(x)\,a^+(x)\,a(x)\,dx=\int\omega(x)\,N(x)\,dx \qquad (21.2)$$

образуют векторы (векторные обобщенные функции) $a^+(x_1)\ldots a^+(x_n)\,\theta$.

Операторы вида (21.1), (21.2) принадлежат к числу простейших в фоковском пространстве. Чуть более общие операторы (13.8) рассматривались в § 13. Несколько сложнее анализируются гамильтонианы вида

$$\begin{aligned}H=\int A(x,y)\,a^+(x)\,a(y)\,dx\,dy+\int B(x,y)\,a^+(x)\,a^+(y)\,dx\,dy+\\+\int\overline{B(x,y)}\,a(y)\,a(x)\,dx\,dy+\\+\int C(x)\,a^+(x)\,dx+\int\overline{C(x)}\,a(x)\,dx\end{aligned} \qquad (21.3)$$

(квадратичные гамильтонианы). Они при некоторых условиях могут быть приведены к виду (21.2) с помощью линейного канонического преобразования (20.11). Весьма полное исследование гамильтонианов (21.3) содержится в книге [50]. Много тяжелее ситуация для гамильтонианов степени более высокой, чем вторая, по операторам рождения и уничтожения. Для них очень редко удается точно вычислить собственные значения и собственные векторы, поэтому приходится прибегать к приближенным методам. В гл. 11 будет изложен способ получения оператора эволюции и собственных значений гамильтониана $H=H_0+gV$, где $H_0=\sum\omega_k a_k^+a_k$, в виде степенных рядов по параметру g (теория возмущений).

В этом параграфе коснемся лишь вопроса, при каких условиях формальное выражение

$$H=\sum_m\sum_{k_i,\,\varepsilon_i}\Gamma^m_{k_1,\,\varepsilon_1,\,\ldots,\,k_m,\,\varepsilon_m}\,a_{k_1}^{\varepsilon_1}\ldots a_{k_m}^{\varepsilon_m} \qquad (21.4)$$

определяет оператор в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$ (здесь, как всегда, $a_k^1=a_k^+=a^+(\varphi_k)$, $a_k^{-1}=a_k=a(\varphi_k)$, где φ_k — ортонормированный базис в $\mathscr{B}$, k_i пробегают множество M, $\varepsilon_i=\pm1$). В случае CAR имеет место следующее утверждение: *если числовой ряд*

$$\sum_m\sum_{k_i,\,\varepsilon_i}\Gamma^m_{k_1,\,\varepsilon_1,\,\ldots,\,k_m,\,\varepsilon_m} \qquad (21.5)$$

абсолютно сходится, то операторный ряд (21.4) также абсолютно сходится (в смысле сходимости по норме) *и определяет ограниченный оператор в $F(\mathscr{B})$*. Доказательство сразу получается, если заметить, что в случае CAR $\|a_k^\varepsilon\|\leqslant\|\varphi_k\|=1$ и, следовательно, $\|a_{k_1}^{\varepsilon_1}\ldots a_{k_m}^{\varepsilon_m}\|\leqslant 1$.

Если к тому же выполнено условие

$$\overline{\Gamma^m_{k_1,\,\varepsilon_1,\,\ldots,\,k_m,\,\varepsilon_m}}=\Gamma^m_{k_m,\,-\varepsilon_m,\,\ldots,\,k_1,\,-\varepsilon_1} \qquad (21.6)$$

(условие формальной эрмитовости), то оператор H, определяемый формулой (21.4), — самосопряженный (поскольку ограниченный эрмитов оператор самосопряжен).

В случае CCR можно воспользоваться тем, что для n-частичного состояния x имеют место оценки

$$\|a_k^\varepsilon x\|\leqslant\sqrt{n}\,\|x\|,$$

$$\|a_{k_1}^{\varepsilon_1}\ldots a_{k_m}^{\varepsilon_m}x\|\leqslant\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}\ldots\sqrt{n+m-1}\,\|x\| \qquad (21.7)$$

(первая из них может быть получена из соотношения

$$\|a_k x\|^2=\langle a_k^+a_kx,\,x\rangle\leqslant\langle\sum_k a_k^+a_k x,\,x\rangle=\langle Nx,\,x\rangle=n\|x\|^2,$$

вторая вытекает из первой).

Пользуясь оценкой (21.7), без труда убеждаемся, что *выражение* (21.4) *задает оператор с всюду плотной в $F(\mathscr{B})$ областью определения, если это выражение полиноминально* ($\Gamma^m_{k_1,\,\varepsilon_1,\,\ldots,\,k_m,\,\varepsilon_m}=0$ при $m>s$) *и числовой ряд* (21.5) *абсолютно сходится*. В самом деле, очевидно, что ряд

$$\sum_{m=1}^{s}\sum_{k_i,\,\varepsilon_i}\Gamma^m_{k_1,\,\varepsilon_1,\,\ldots,\,k_m,\,\varepsilon_m}\,a_{k_1}^{\varepsilon_1}\ldots a_{k_m}^{\varepsilon_m}x$$

сходится при $x\in F_n$ и, значит, в область определения оператора H входит D — наименьшее линейное многообразие, содержащее все пространства F_n. Если выполнено к тому же условие формальной эрмитовости (21.6), то оператор H будет на многообразии D эрмитовым. Однако вопрос о том, будет ли этот оператор существенно самосопряженным на D, оказывается нетривиальным; результаты в этом направлении см., например, в [22]. Впрочем, интересные для физики операторы оказываются ограниченными снизу и, следовательно, определяют самосопряженный оператор с помощью фридрихсовского расширения (см. дополнение, § Д.5). Изучение оператора H, определяемого выражением (21.4), резко упрощается, когда $\Gamma^m_{k_1, \varepsilon_1, \dots, k_m, \varepsilon_m} \neq 0$ лишь при условии $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m = 0$ (т. е. оператор H коммутирует с оператором числа частиц N). Дело в том, что тогда можно рассматривать оператор H отдельно в каждом из пространств F_n. Дальнейшее расширение класса выражений вида (21.4), которые определяют самосопряженные операторы, получается из замечания, что, прибавив к самосопряженному оператору (например, к H_0) ограниченный самосопряженный оператор, вновь получим самосопряженный оператор.

Не будем останавливаться на вопросе об условиях, при которых выражение вида

$$H = \sum_m \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m} \int \Gamma^m (x_1, \varepsilon_1, \dots, x_n, \varepsilon_n)\, a(x_1, \varepsilon_1) \dots \\ \dots a(x_n, \varepsilon_n)\, dx_1 \dots dx_n \tag{21.8}$$

определяет оператор в пространстве $F(\mathscr{B}) = F(L^2(X))$; отметим лишь, что для случая $X = E^r$ некоторые результаты в этом направлении содержатся в § 13.

В случае CAR оператор, задаваемый выражением (21.4) или (21.8), называется *ферми-четным*, если $\Gamma^m \equiv 0$ для нечетных m. (Более общее определение ферми-четного оператора см. в § 13.)

Оператор, соответствующий физической величине (в частности, гамильтониан), всегда должен быть ферми-четным оператором.

§ 22. Нормальная форма оператора. Теорема Вика

Будем говорить, что оператор C в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$ представлен в *нормальной форме*, если он записан в виде

$$C = \sum_{m, n} \Gamma_{m, n} (k_1, \dots, k_m \mid l_1, \dots, l_n)\, a^+_{k_1} \dots a^+_{k_m} a_{l_1} \dots a_{l_n} \tag{22.1}$$

(здесь $a_k = a(\varphi_k)$, где φ_k — ортонормированный базис в $\mathscr{B}$, операторы рождения стоят левее операторов уничтожения, по повторяющимся индексам k_i, l_j, как обычно, подразумевается суммирование). Сумма в написанной выше формуле может быть бесконечной, тогда сходимость ряда понимается как сильная операторная сходимость. Множество индексов у операторов a_k обозначим символом M. Поскольку M счетно, можно отождествить M с множеством натуральных чисел; однако это не всегда удобно.

Разумеется, произведение любого числа операторов a^+_k, a_l, взятых в любом порядке, так же, как и всякая конечная сумма таких произведений, легко записывается в нормальной форме с помощью последовательного применения CR. Можно показать, что всякий ограниченный оператор записывается в нормальной форме, если только сходимость в (22.1) понимать в слабом смысле.

Представление оператора в нормальной форме особенно удобно при вычислении вакуумного среднего $\langle C\theta, \theta\rangle$ оператора C: очевидно, что $\langle C\theta, \theta\rangle = \Gamma_{0,0}$ (свободному члену представления оператора C в нормальной форме).

Пусть $C_1, \dots, C_k$ — операторы, записанные в нормальной форме. Поставим вопрос: как записать в нормальной форме произведение $C_1 \dots C_k$ этих операторов?

Прежде чем отвечать на этот вопрос, займемся более простой (но в некотором смысле более общей) ситуацией. Пусть $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ — операторы, обладающие тем свойством, что коммутаторы $[A_\alpha, B_\beta]$ являются числами (т. е. кратны тождественному оператору). Число $\underbrace{B_\beta A_\alpha} = [A_\alpha, B_\beta]$ назовем *связкой* операторов A_α и B_β. *Произведением* $B_1 \dots B_n A_1 \dots A_m$ *с одной связкой* $\underbrace{B_\beta A_\alpha}$ будем называть это произведение с исключенными из него операторами B_β и A_α и включенным в него сомножителем $\underbrace{B_\beta A_\alpha}$; обозначать произведение со связкой $\underbrace{B_\beta A_\alpha}$, будем так: $B_1 \dots \underbrace{B_\beta \dots B_n A_1 \dots A_\alpha} \dots A_m$. Под *произведением* $B_1 \dots B_n A_1 \dots A_m$ *с* k *связками* $\underbrace{B_{\beta_1} A_{\alpha_1}}, \dots, \underbrace{B_{\beta_k} A_{\alpha_k}}$ будем понимать произведение, из которого исключены операторы $B_{\beta_1}, \dots, B_{\beta_k}$, $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_k}$ и вместо них включены связки $\underbrace{B_{\beta_1} A_{\alpha_1}}, \dots, \underbrace{B_{\beta_k} A_{\alpha_k}}$. Таким образом, для того, чтобы задать произведение с k связками, необходимо выбрать k операторов $B_{\beta_1}, \dots, B_{\beta_k}$ (порядок, в котором они записаны, не играет роли) и каждому из этих операторов поставить в соответствие один из операторов $A_1, \ldots, A_n$, следя за тем, чтобы разным индексам $\beta_1, \ldots, \beta_k$ соответствовали разные индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Имеет место следующее утверждение, которое будем называть теоремой Вика, хотя оно представляет собой лишь простейшую форму этой теоремы:

Произведение $A_1 \ldots A_m B_1 \ldots B_n$ равно произведению $B_1 \ldots B_n A_1 \ldots A_m$, к которому прибавлены слагаемые, равные произведению $B_1 \ldots B_n A_1 \ldots A_m$ со всевозможными наборами связок.

Например,

$$A_1A_2B_1B_2 = B_1B_2A_1A_2 + \underbrace{B_1B_2A_1}_{}A_2 + \underbrace{B_1B_2A_1A_2}_{} +$$

$$+ B_1\underbrace{B_2A_1}_{}A_2 + B_1\underbrace{B_2A_1A_2}_{} + B_1B_2A_1A_2 + \underbrace{B_1\underbrace{B_2A_1}_{}A_2}_{}.$$

Это утверждение интуитивно очевидно: при «перетаскивании» операторов B_β налево пользуемся соотношением $A_\alpha B_\beta = B_\beta A_\alpha + \underbrace{B_\beta A_\alpha}_{}$, поэтому при каждом перетаскивании оператора B_β через один из операторов A_α из каждого слагаемого возникает два: одно с тем же количеством коммутаторов, что и в исходном слагаемом, а другое с количеством коммутаторов на единицу большим. В результате получаем нужный ответ.

Для того чтобы провести формальное доказательство, надо сначала убедиться (непосредственно или с помощью метода индукции по m), что

$$A_1 \ldots A_m B = BA_1 \ldots A_m + \underbrace{BA_1}_{} \ldots A_m + \underbrace{BA_1A_2}_{} \ldots A_m + \ldots + \underbrace{BA_1 \ldots A_m}_{}, \tag{22.2}$$

т. е. проверить теорему Вика для $n = 1$. Далее можно воспользоваться методом математической индукции по числу операторов B_β; совершая шаг индукции, нужно использовать формулу (22.2).

Рассмотрим теперь приведение к нормальной форме произведения двух операторов K и L, записанных в нормальной форме; без ограничения общности можно считать, что

$$K = K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, a^+_{k_1} \ldots a^+_{k_m} a_{l_1} \ldots a_{l_n};$$

$$L = L(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)\, a^+_{p_1} \ldots a^+_{p_r} a_{q_1} \ldots a_{q_s}$$

(по повторяющимся индексам здесь и в дальнейшем производится суммирование по множеству M).

Займемся сначала случаем CCR. Тогда, применяя к произведению $a_{l_1} \ldots a_{l_n} a^+_{p_1} \ldots a^+_{p_r}$ теорему Вика, можно сказать, что KL равно выражению

$$K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, L(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s) \times$$

$$\times a^+_{k_1} \ldots a^+_{k_m} a^+_{p_1} \ldots a^+_{p_r} a_{l_1} \ldots a_{l_n} a_{q_1} \ldots a_{q_s},$$

к которому прибавлены слагаемые, получающиеся из этого выражения с помощью всевозможных связок между операторами $a^+_{p_i}$ и a_{l_j} (напомним, что $\underbrace{a^+_p a_l}_{} = [a_l, a^+_p] = \delta_{pl}$).

Например, если $K = K(k|l)a^+_k a_l$; $L = L(p_1, p_2 | q_1, q_2)\, a^+_{p_1} a^+_{p_2} a_{q_1} a_{q_2}$, то

$$KL = K(k|l)\, L(p_1, p_2 | q_1, q_2)\, a^+_k a^+_{p_1} a^+_{p_2} a_l a_{q_1} a_{q_2} +$$

$$+ K(k|l)\, L(p_1, p_2 | q_1, q_2)\, a^+_k \underbrace{a^+_{p_1} a^+_{p_2} a_l}_{} a_{q_1} a_{q_2} +$$

$$+ K(k|l)\, L(p_1, p_2 | q_1, q_2)\, a^+_k a^+_{p_1} \underbrace{a^+_{p_2} a_l}_{} a_{q_1} a_{q_2} =$$

$$= K(k|l)\, L(p_1, p_2 | q_1, q_2)\, a^+_k a^+_{p_1} a^+_{p_2} a_l a_{q_1} a_{q_2} +$$

$$+ K(k|l)\, L(l, p_2 | q_1, q_2)\, a^+_k a^+_{p_2} a_{q_1} a_{q_2} +$$

$$+ K(k|l)\, L(p_1, l | q_1, q_2)\, a^+_k a^+_{p_1} a_{q_1} a_{q_2}.$$

Функции $K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)$ и $L(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)$ можно считать симметричными по каждой группе индексов. В дальнейшем это предположение будем считать всегда выполненным. Воспользовавшись этим, можно существенно сократить число слагаемых в выражении для KL, поскольку слагаемые, соответствующие одному и тому же числу связок, одинаковы. В рассмотренном примере, пользуясь высказанным только что соображением, можно объединить одинаковые второе и третье слагаемые.

Приведение к нормальной форме удобно производить, пользуясь графическим изображением операторов, предложенным Фейнманом. Оператор $K = K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, a^+_{k_1} \ldots a^+_{k_m} a_{l_1} \ldots a_{l_n}$ будем изображать диаграммой, состоящей из одной вершины, в которую входит m пунктирных линий и выходит n пунктирных линий (под линией понимаем топологический отрезок, на котором выбрано определенное направление). Такую диаграмму будем называть *звездой* (рис. 1). Начало входящей линии будем называть входным концом, конец выходящей линии — выходным концом. На входных концах поставим индексы $k_1, \ldots, k_m \in M$, на выходных концах — индексы $l_1, \ldots, l_n \in M$, в вершине напишем функцию $K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)$. Оператор L изображается аналогичной диаграммой.

Нормальную форму оператора KL можно тогда изобразить совокупностью всех различных диаграмм, состоящих из диаграмм операторов K и L, в которых некоторые из выходных концов диаграммы оператора K соединены (сплошными) линиями с входными концами диаграммы оператора L; на этих линиях напишем связки $\underbrace{a_p^+ a_l}_{} = [a_l, a_p^+] = \delta_{lp}$, где l — индекс выходного конца, а p — индекс входного конца, соединенных рассматриваемой линией. Направление на линии всегда будем считать от выходного конца к входному. Каждой такой диаграмме сопоставим произведение, в котором вершинам диаграммы соответствуют написанные в них множители $K(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)$ и $L(p_1, \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)$, где $k_1, \ldots, k_m, p_1, \ldots, p_r$ — индексы концов линий, входящих в эти вершины, а $l_1, \ldots, l_n, q_1, \ldots, q_s$ — индексы концов линий, выходящих из них, всякой сплошной линии соответствует написанная на ней связка $\underbrace{a_p^+ a_l}_{} = \delta_{lp}$ и, наконец, пунктирным линиям со свободным концом соответствуют операторы a_k^+ или a_k в зависимости от того, будет ли рассматриваемая линия входящей или выходящей. По индексам всех концов подразумевается суммирование по множеству M. Операторы a_k^+; a_l считаются расставленными в нормальном порядке.

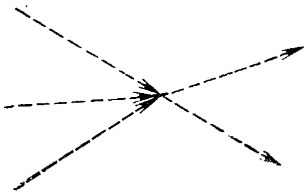

Рис. 1

В самом деле, нетрудно проверить, что оператор, сопоставленный диаграмме по описанному рецепту, совпадает с одним из слагаемых, фигурирующих в данном ранее представлении произведения операторов K и L в нормальной форме. Поэтому *оператор KL равен сумме операторов, сопоставленных всем возможным диаграммам* (или, как говорят коротко, сумме диаграмм).

По индукции без труда получаем теперь рецепт для приведения к нормальной форме произведения r операторов $K_1, \ldots, K_r$, где $K_i = K_i(k_1, \ldots, k_{m_i} | l_1, \ldots, l_{n_i}) a_{k_1}^+ \ldots$

$\ldots a_{k_{m_i}}^+ a_{l_1} \ldots a_{l_{n_i}}$. Нормальная форма оператора $K_1 \ldots K$ изображается суммой диаграмм, состоящих из диаграмм операторов $K_1, \ldots, K_r$ и некоторого числа линий, каждая из которых соединяет выходной конец диаграммы оператора K_i с входным концом диаграммы одного из операторов K_j (здесь $i, j = 1; \ldots, r$; $i < j$). Рецепт, по которому каждой диаграмме ставится в соответствие оператор, остается прежним.

Если оператор $K_i = \sum\limits_{m, n} K_i^{m, n}$, где $K_i^{m, n} = K_i^{m, n}(k_1, \ldots \ldots k_m | l_1, \ldots, l_n) a_{k_1}^+ \ldots a_{k_m}^+ a_{l_1} \ldots a_{l_n}$, то диаграммой оператора K_i называется совокупность нескольких звезд-диаграмм операторов $K_i^{m, n}$.

Нормальная форма оператора $K_1 \ldots K_r$ представляется тогда, очевидно, совокупностью диаграмм, состоящих из r звезд—по одной звезде из диаграммы каждого из операторов $K_1, \ldots, K_r$— и нескольких линий, соединяющих выходной конец звезды из диаграммы какого-либо оператора K_i с входным концом звезды из диаграммы какого-либо из следующих операторов K_j.

Описанная диаграммная техника применима для приведения к нормальной форме произведения операторов в случае CCR. Совершенно аналогичная диаграммная техника может быть построена и в случае CAR; единственное отличие заключается в появлении перед диаграммами знаковых множителей. Не будем подробно останавливаться на правилах, по которым пишутся эти знаковые множители; сформулируем аккуратно лишь аналог теоремы Вика для рассматриваемого случая.

Пусть $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ — операторы, обладающие тем свойством, что антикоммутаторы $[A_\alpha, B_\beta]_+$ являются числами. Число $\underbrace{B_\beta A_\alpha}_{} = [B_\beta, A_\alpha]_+$ назовем связкой операторов B_β и A_α. Произведение $B_1 \ldots B_n A_1 \ldots A_m$ с k связками $\underbrace{B_{\beta_1} A_{\alpha_1}}_{}, \ldots, \underbrace{B_{\beta_k} A_{\alpha_k}}_{}$ определяется как оператор, получающийся, если исключить из произведения $B_1 \ldots B_n A_1 \ldots A_m$ операторы $B_{\beta_1}, \ldots, B_{\beta_k}, A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_k}$, вместо них включить связки $\underbrace{B_{\beta_1} A_{\alpha_1}}_{}, \ldots, \underbrace{B_{\beta_k} A_{\alpha_k}}_{}$ и умножить результат на знаковый множитель $(-1)^{mn+\lambda+\mu}$, где λ — сумма длин всех связок, μ — число пар пересекающихся связок (длиной связки $\underbrace{B_\beta A_\alpha}_{}$ называем число $n - \beta + \alpha$, две связки $\underbrace{B_\beta A_\alpha}_{}$

и $\underbrace{B_{\beta'}A_{\alpha'}}$ называются пересекающимися, если $(\beta'-\beta)(\alpha'-\alpha)>0$).

Введя такое определение, можно сформулировать теорему Вика в форме, пригодной в обеих рассматриваемых нами ситуациях.

Произведение $A_1 \ldots A_m B_1 \ldots B_n$ равно сумме произведений $B_1 \ldots B_n A_1 \ldots A_m$ со всеми возможными наборами связок (здесь не исключается случай, когда число связок равно нулю).

Например, в случае, если антикоммутаторы $[A_\alpha, B_\beta]_+$ являются числами,

$$A_1A_2B_1B_2=(-1)^{2\cdot 2}B_1B_2A_1A_2+(-1)^{2\cdot 2+2}\underbrace{B_1B_2}A_1A_2+$$

$$+(-1)^{2\cdot 2+3}\underbrace{B_1B_2A_1}A_2+(-1)^{2\cdot 2}B_1\underbrace{B_2A_1}A_2+$$

$$+(-1)^{2\cdot 2+2}\underbrace{B_1B_2}A_1A_2+(-1)^{2\cdot 2+4}\underbrace{B_1\underbrace{B_2A_1}}A_2+$$

$$+(-1)^{2\cdot 2+4+1}\underbrace{B_1B_2}\underbrace{\vphantom{B}A_1}A_2.$$

Для оператора, действующего в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B}=L^2(X)$, под *представлением в нормальной форме* понимается представление в виде

$$A=\sum_{m,n}\int k_{m,n}(x_1,\ldots,x_m\,|\,y_1,\ldots,y_n)\,a^+(x_1)\ldots a^+(x_m)\times$$

$$\times a(y_1)\ldots a(y_n)\,d^mx\,d^ny \qquad (22.3)$$

[здесь X — пространство с мерой, $a^+(x)$, $a(x)$ — операторные обобщенные функции, удовлетворяющие условиям (20.7)]. Развитая выше диаграммная техника применима также для того, чтобы представить в нормальной форме произведение операторов, записанных в виде (22.3). Единственное изменение, необходимое в рассматриваемом случае, состоит в том, что роль индексов $k\in M$ теперь играют элементы пространства X, соответственно суммирование по

множеству M заменяется интегрированием по пространству X*.

Применим доказанные выше результаты для того, чтобы получить некоторые полезные соотношения. Определенности ради будем рассматривать случай CCR.

Прежде всего вычислим скалярное произведение

$$\langle a^+(f_1)\ldots a^+(f_m)\,\theta,\ a^+(g_1)\ldots a^+(g_n)\,\theta\rangle=$$

$$=\langle a(g_n)\ldots a(g_1)\,a^+(f_1)\ldots a^+(f_m)\,\theta,\ \theta\rangle.$$

Оператор $a(g_n)\ldots a(g_1)a^+(f_1)\ldots a^+(f_m)$ можно привести к нормальной форме с помощью теоремы Вика; он равен сумме произведений $a^+(f_1)\ldots a^+(f_m)a(g_n)\ldots a(g_1)$ со всеми возможными наборами связок. Вспоминая, что вакуумное среднее оператора равно свободному члену представления этого оператора в нормальной форме, видим, что рассматриваемая величина равна сумме таких произведений $a^+(f_1)\ldots$ $\ldots a^+(f_m)a(g_n)\ldots a(g_1)$ со связками, в которых все операторы связаны (т. е. $m=n$ равно числу связок). Заметив, что

$$\underbrace{a^+(f_i)\,a(g_j)}=[a(g_j),a^+(f_i)]=\langle g_j,f_i\rangle=\overline{\langle f_i,g_j\rangle},$$

получаем нужную нам формулу

$$\langle a^+(f_1)\ \ldots\ a^+(f_m)\,\theta,\ a^+(g_1)\ \ldots\ a^+(g_n)\theta\rangle=$$

$$=\delta_m^n\sum_P\overline{\langle f_1,g_{i_1}\rangle}\,\overline{\langle f_2,g_{i_2}\rangle}\ldots\overline{\langle f_m,g_{i_m}\rangle} \qquad (22.4)$$

[сумма берется по всем перестановкам $P=(i_1,\ \ldots,\ i_m)$]. Из формулы (22.4) вытекает равенство

$$\langle a^+(x_1)\ldots a^+(x_m)\,\theta,\ a^+(y_1)\ldots a^+(y_n)\,\theta\rangle=$$

$$=\delta_m^n\sum_P\delta(x_1,y_{i_1})\ldots\delta(x_m,y_{i_m}), \qquad (22.5)$$

* Полезно отметить, что в случае, когда в пространстве $\mathscr{B}$ выбран ортонормированный базис φ_k, где $k\in M$, естественно строится изоморфизм пространств $\mathscr{B}$ и $L^2(M)$ [множество M превращаем в пространство с мерой, считая, что мера подмножества равна числу его элементов; тогда интеграл от функции $f(k)$ по множеству равен $\sum_{k\in M}f(k)$]. Это замечание позволяет утверждать, что запись оператора в виде (22.1) представляет собой частный случай записи оператора в виде (22.3); соответственно, описанная только что диаграммная техника — обобщение развитой выше техники.

где $a^+(x)$, $a(y)$ — операторные обобщенные функции, удовлетворяющие соотношениям (20.7).

Пользуясь соображениями, высказанными в этом параграфе, можно найти связь между коэффициентными функциями $K_{m,n}(x_1, \ldots, x_m| y_1, \ldots, y_n)$, фигурирующими в представлении оператора A в виде (22.3) (в нормальной форме) и матричными элементами оператора A в обобщенном базисе $a^+(x_1) \ldots a^+(x_m)\theta$. Для этого можно, например, привести оператор $Aa^+(y_1) \ldots a^+(y_n)\theta$ к нормальной форме с помощью теоремы Вика, а затем вычислить матричный элемент

$$A_{m,n}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) = \langle Aa^+(y_1) \ldots a^+(y_n)\theta,\ a^+(x_1) \ldots \ldots a^+(x_m)\theta\rangle,$$

пользуясь формулой (22.5). В результате получается следующая формула:

$$A_{m,n}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_n) = K_{m,n}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots \ldots, y_n)\, m!\, n! + \sum_{i,j} K_{m-1,n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\,\delta(x_i - y_j)\,(m-1)!\,(n-1)! + \ldots \ldots + \sum_{A,B,\alpha} K_{m-r,n-r}(x_i, i \bar{\in} A | y_j, j \bar{\in} B) \times \times \prod_{i \in A} \delta(x_i - y_{\alpha(i)})\,(m-r)!\,(n-r)! + \ldots$$

(здесь A и B состоят из r элементов, $A \subset \{1, \ldots, m\}$, $B \subset \{1, \ldots, n\}$, α — взаимно однозначное соответствие между A и B, суммирование производится по всевозможным A, B, α; $K_{m-r,n-r}(x_i, i \bar{\in} A | y_j, j \bar{\in} B)$ обозначает функцию $K_{m-r,n-r}$ аргументов x_i и y_j, подчиненных условию $i \bar{\in} A$, $j \bar{\in} B$).

В заключение этого параграфа приведем некоторые полезные определения. Пусть K и L — операторы, записанные в нормальной форме:

$$K = \sum_{m,n} \int K_{m,n}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, a^+(k_1) \ldots \ldots a^+(k_m)\, a(l_1) \ldots a(l_n)\, d^m k d^n l;$$

$$L = \sum_{m,n} \int L_{m,n}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, a^+(k_1) \ldots \ldots a^+(k_m)\, a(l_1) \ldots a(l_n)\, d^m k d^n l.$$

Нормальным произведением операторов K и L в случае CCR называется оператор

$$N(KL) = \sum_{m,n,r,s} \int K_{m,n}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, L_{r,s}(p_1, \ldots \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)\, a^+(k_1) \ldots a^+(k_m)\, a^+(p_1) \ldots a^+(p_r)\, a(l_1) \ldots \ldots a(l_n)\, a(q_1) \ldots a(q_s)\, d^m k d^n l d^r p d^s q,$$

а в случае CAR — оператор

$$N(KL) = \sum_{m,n,r,s} (-1)^{nr} \int K_{m,n}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, L_{r,s}(p_1, \ldots \ldots, p_r | q_1, \ldots, q_s)\, a^+(k_1) \ldots a^+(k_m)\, a^+(p_1) \ldots a^+(p_r)\, a(l_1) \ldots \ldots a(l_n)\, a(q_1) \ldots a(q_s)\, d^m k d^n l d^r p d^s q$$

(вместо символа $N(KL)$ для нормального произведения применяется также символ $:KL:$). Иначе говоря, нормальное произведение получается, если привести произведение KL к нормальной форме по описанным выше правилам и отбросить все слагаемые, содержащие хотя бы одну связку (т. е. отбросить все диаграммы, содержащие хотя бы одну сплошную линию). Нормальное произведение n операторов $K_1, \ldots, K_n$ можно определить по индукции:

$$N(K_1 \ldots K_n) = N(N(K_1, \ldots, K_{n-1})K_n).$$

Нормальной экспонентой оператора K называется оператор

$$N(\exp K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N(K^n).$$

§ 23. Диаграммная техника

Рассмотрим гамильтониан $H = H_0 + gV(t)$, где

$$H_0 = \sum \varepsilon(k)\, a_k^+ a_k; \tag{23.1}$$

$$V(t) = \sum_{m,n} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \\ p_1, \ldots, p_n}} v_{m,n}(k_1, \ldots, k_m | p_1, \ldots, p_n | t)\, a_{k_1}^+ \ldots a_{k_m}^+ \times \times a_{p_1} \ldots a_{p_n}$$

(здесь $a_k^+ = a^+(\varphi_k)$, $a_k = a(\varphi_k)$ — операторы в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$, соответствующие полному ортонормированному базису $\varphi_k \in \mathscr{B}$, индекс k пробегает множество M). Все рассуждения в этом параграфе проводятся ради определенности для случая CCR; однако они без труда переносятся на случай CAR (в случае CAR гамильтониан H, как всегда, предполагается ферми-четным, т. е. считается, что каждое слагаемое в операторе H содержит четное число операторов a^+ и a ($m + n$ четно)).

Используя представление оператора $S(t, t_0)$ в виде T-экспоненты (14.4) и теорему Вика (§ 22), построим диаграммную технику, с помощью которой можно написать в нормальной форме разложение оператора $S(t, t_0)$ по степеням g.

Напомним, что звездой называем диаграмму, состоящую из точки, в которую входит m линий и из которой выходит n линий. Линии, принадлежащие звезде, изображаются пунктиром (на рис. 1 изображена звезда с тремя входящими и двумя выходящими линиями).

Диаграммой оператора $S(t, t_0)$ будем называть совокупность нескольких звезд и нескольких ребер (направленных сплошных линий, каждая из которых начинается в выходной вершине какой-либо звезды и кончается во входной вершине другой звезды). Условимся считать, что две линии, принадлежащие диаграмме, могут иметь только одну общую вершину и не могут иметь общих внутренних точек. Две вершины, принадлежащие одному ребру, не могут принадлежать одной и той же звезде.

Вершины, принадлежащие ребрам, будем называть внутренними, остальные вершины внешними.

Все вершины диаграммы будем считать перенумерованными таким образом, что вершины, принадлежащие одной и той же звезде, нумеруются соседними числами. Две диаграммы считаем одинаковыми, если существует топологическая эквивалентность между этими диаграммами, при которой вершины с одинаковыми номерами соответствуют друг другу.

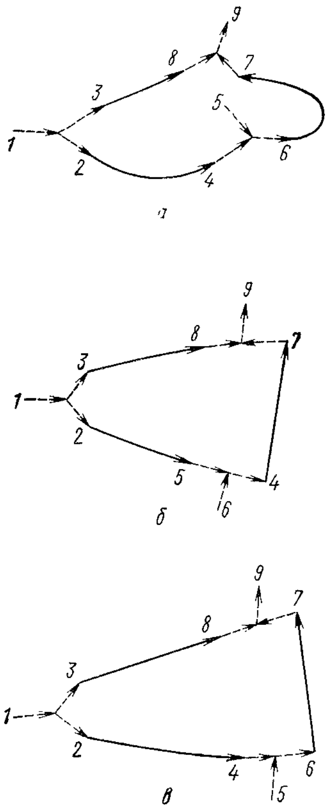

Рис. 2

На рис. 2 изображены примеры диаграмм. Диаграммы *а* и *б* топологически эквивалентны, но различны, диаграммы *а* и *в* одинаковы.

Каждой диаграмме поставим в соответствие оператор с помощью следующей конструкции. Будем считать, что

каждой вершине диаграммы соответствуют индекс $k_i \in M$ и действительное число t_i (время), причем вершинам одной звезды соответствует одно и то же время (время этой звезды). Каждой звезде сопоставим функцию $v_{m,n}(k_1, \ldots, k_m | p_1, \ldots, p_n | t)$, где t — время этой звезды, $k_1, \ldots, k_m$ — индексы входных вершин этой звезды, $p_1, \ldots, p_n$ — индексы выходных вершин, каждому ребру сопоставим функцию

$$\exp(-i\varepsilon(k_1)(t_1 - t_2))\,\delta_{k_1}^{k_2}\,\theta(t_1 - t_2),$$

где индекс $k_1 \in M$ и время t_1 соответствуют началу ребра, $k_2 \in M$ и t_2 — концу ребра, каждой свободной входной вершине сопоставим оператор $\tilde{a}_k^+(t) = \exp(i\varepsilon(k)t)a_k^+$, свободной выходной вершине — оператор $\tilde{a}_k(t) = a_k \exp(-i\varepsilon(k)t)$ (k и t — индекс и время, соответствующие вершине).

Всей диаграмме сопоставим оператор, получающийся из произведения функций, соответствующих звездам и ребрам диаграммы, и операторов, соответствующих внешним вершинам, суммированием по индексам всех вершин по множеству M и интегрированием по временам всех звезд по интервалу $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. (Операторы считаем расположенными в нормальном порядке.) Кроме того, в оператор, сопоставленный диаграмме, условимся включать множитель $\frac{1}{n!}$, где n — число звезд.

Запишем, например, оператор, соответствующий диаграмме *а* рис. 2:

$$\frac{1}{3!}\sum_{k_1, \ldots, k_9}\int dt_1\,dt_2\,dt_3\,v_{1,2}(k_1 | k_2, k_3 | t_1)\,v_{2,1}(k_4, k_5 | k_6 | t_2) \times$$
$$\times v_{2,1}(k_8, k_7 | k_9 | t_3)\exp(-i\varepsilon(k_3)(t_1 - t_3))\,\delta_{k_3}^{k_8}\,\theta(t_1 - t_3) \times$$
$$\times \exp(-i\varepsilon(k_2)(t_1 - t_2))\,\delta_{k_2}^{k_4}\,\theta(t_1 - t_2)\exp(-i\varepsilon(k_6)(t_2 - t_3)) \times$$
$$\times \delta_{k_6}^{k_7}\,\theta(t_2 - t_3)\exp(i\varepsilon(k_1)t_1 + i\varepsilon(k_5)t_2 -$$
$$- i\varepsilon(k_9)t_3)\,a_{k_1}^+ a_{k_5}^+ a_{k_9}.$$

Покажем, что *оператор $S(t, t_0)$ может быть представлен в виде суммы всех различных диаграмм* (т. е. в виде суммы операторов, соответствующих этим диаграммам). Разумеется, это высказывание (и другие аналогичные высказывания) означает лишь, что сумма диаграмм дает разложение оператора $S(t, t_0)$ в ряд по g (без всяких утверждений о сходимости этого ряда).

Перед тем, как переходить к доказательству этого утверждения, сделаем несколько замечаний о структуре диаграммного представления оператора $S(t, t_0)$ и рассмотрим пример. Отметим прежде всего, что можно не рассматривать диаграммы, содержащие n звезд, соединенных в циклическом порядке ребрами. (Говорят, что n звезд соединены в циклическом порядке ребрами, если их можно перенумеровать так, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует ребро, начинающееся в вершине i-й звезды и кончающееся в вершине $(i+1)$-й звезды; при этом $(n+1)$-я звезда отождествляется с первой.) В самом деле, пусть времена этих звезд обозначены $\tau_1, \ldots, \tau_n$; тогда сплошные линии вносят множитель $\theta(\tau_1 - \tau_2) \ldots \theta(\tau_{n-1} - \tau_n)\,\theta(\tau_n - \tau_1)$, и, следовательно, в интеграле, определяющем нашу диаграмму, подынтегральное выражение не равно нулю лишь при $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n$, что обеспечивает равенство нулю интеграла.

Легко убедиться, что двум топологически эквивалентным диаграммам соответствует один и тот же оператор, поэтому обычно рисуют лишь одну из класса эквивалентных диаграмм и умножают ее на число эквивалентных ей диаграмм.

Рассмотрим в качестве примера гамильтониан системы нерелятивистских тождественных бозонов в ящике объема L^3: $H = H_0 + V$, где

$$H_0 = \sum \frac{\mathbf{k}^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}};$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \widetilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)\, \delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}^{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \times$$

$$\times\, a_{\mathbf{k}_1}^+ a_{\mathbf{k}_2}^+ a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2},$$

$\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ пробегают решетку в трехмерном пространстве с шагом $2\pi/L$.

Напишем слагаемые, соответствующие в разложении адиабатической S-матрицы S_α диаграммам рис. 3. Первой из этих диаграмм отвечает оператор

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \widetilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)\, \delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}^{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \exp(-\alpha|\tau|) \times$$

$$\times\, \widetilde{a}_{\mathbf{k}_1}^+(\tau)\, \widetilde{a}_{\mathbf{k}_2}^+(\tau)\, \widetilde{a}_{\mathbf{p}_1}(\tau)\, \widetilde{a}_{\mathbf{p}_2}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \widetilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2)\, \delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}^{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \times$$

$$\times \frac{2\alpha}{\left(\dfrac{\mathbf{k}_1^2}{2m} + \dfrac{\mathbf{k}_2^2}{2m} - \dfrac{\mathbf{p}_1^2}{2m} - \dfrac{\mathbf{p}_2^2}{2m}\right)^2 + \alpha^2}\, a_{\mathbf{k}_1}^+ a_{\mathbf{k}_2}^+ a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2}.$$

Оператор, соответствующий второй диаграмме, имеет вид

$$\frac{1}{2!}\int d\tau_1\, d\tau_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \sum_{\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'} \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^6 \widetilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_2) \times$$

$$\times\, \delta_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}^{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \exp(-\alpha|\tau_1|) \exp\left(-i\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}(\tau_1 - \tau_2)\right) \delta_{\mathbf{k}_1'}^{\mathbf{p}_1}\, \theta(\tau_1 - \tau_2) \times$$

$$\times \exp\left(-i\frac{\mathbf{p}_2^2}{2m}(\tau_1 - \tau_2)\right) \theta(\tau_1 - \tau_2)\, \delta_{\mathbf{k}_2'}^{\mathbf{p}_2}\, \widetilde{\mathscr{W}}(\mathbf{k}_1' - \mathbf{p}_2')\, \delta_{\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'}^{\mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2'} \times$$

$$\times \exp(-\alpha|\tau_2|)\, \widetilde{a}_{\mathbf{k}_1}^+(\tau_1)\, \widetilde{a}_{\mathbf{k}_2}^+(\tau_1)\, \widetilde{a}_{\mathbf{p}_1'}(\tau_2)\, \widetilde{a}_{\mathbf{p}_2'}(\tau_2)$$

(по $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{k}_i'$, $\mathbf{p}_i'$ производится суммирование по решетке).

Третья диаграмма эквивалентна второй; ее можно, следовательно, учесть, просто поставив множитель 2 при второй диаграмме.

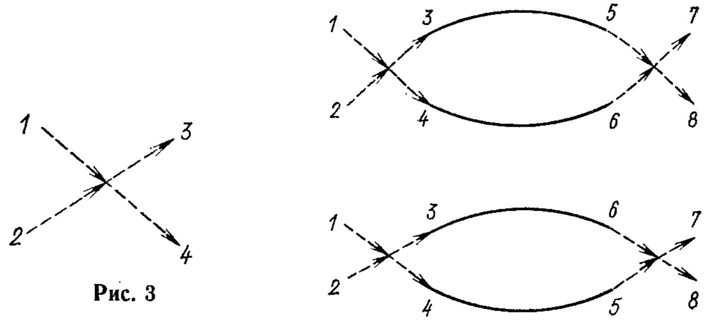

Рис. 3

Дальнейшее сокращение числа диаграмм, которые необходимо вычислять, может быть достигнуто, если заметить, что оператор, соответствующий несвязной диаграмме, равен нормальному произведению операторов, отвечающих ее связным компонентам.

Приступим теперь к выводу диаграммного представления оператора $S(t, t_0)$. Прежде всего заметим, что для представления в нормальной форме оператора $\widetilde{V}(\tau_1) \ldots \widetilde{V}(\tau_n)$ может быть использована диаграммная техника, развитая в § 22, с небольшими изменениями. (Для того чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться формулой

$$\widetilde{V}(\tau)=\exp(\mathrm{i}\,H_0\tau)\,V(\tau)\exp(-\mathrm{i}\,H_0\tau)=$$

$$=\sum_{m,\,n}\sum_{\substack{k_1,\,\ldots,\,k_m\\ p_1,\,\ldots,\,p_n}} v_{m,\,n}(k_1,\,\ldots,\,k_m\,|\,p_1,\,\ldots,\,p_n\,|\,\tau)\,\widetilde{a}^+_{k_1}(\tau)\ldots$$

$$\ldots\widetilde{a}^+_{k_m}(\tau)\,\widetilde{a}_{p_1}(\tau)\ldots\widetilde{a}_{p_n}(\tau)=$$

$$=\sum_{m,\,n}\sum_{\substack{k_1,\,\ldots,\,k_m\\ p_1,\,\ldots,\,p_n}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varepsilon(k_j)-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon(p_j)\right)\tau\right]\times$$

$$\times\, v_{m,\,n}(k_1,\,\ldots,\,k_m\,|\,p_1,\,\ldots,\,p_n\,|\,\tau)\,a^+_{k_1}\ldots a^+_{k_m}a_{p_1}\ldots a_{p_n}.)$$

Опишем подробнее диаграммное представление оператора $\widetilde{V}(\tau_1)\ldots\widetilde{V}(\tau_n)$. Оно состоит из диаграмм, каждая из которых представляет собой совокупность n звезд и нескольких ребер, направленных в сторону возрастания номера вершины (напомним, что вершины диаграммы считаем пронумерованными).

Каждой вершине диаграммы сопоставляется индекс $k\in M$. Каждой входной (выходной) свободной вершине соответствует оператор $a^+_k(\tau_i)$ [соответственно, $a_k(\tau_i)$], где k — индекс, сопоставленный вершине; i — номер звезды, которой принадлежит вершина; i-й звезде соответствует функция $v_{m,\,n}(k_1,\,\ldots,\,k_m\,|\,p_1,\,\ldots,\,p_n\,|\,\tau_i)$, где $k_1,\,\ldots,\,k_m(p_1,\,\ldots$ $\ldots,\,p_n)$ — индексы входных (выходных) вершин звезды; ребру отвечает функция $\exp(-\mathrm{i}\varepsilon(k)(\tau_i-\tau_j))\,\delta^k_l$, где $k,\,l$ — индексы начала и конца ребра; $i,\,j$ — номера звезд, которым принадлежат начало и конец ребра. Оператор, соответствующий диаграмме, получается из произведения операторов и функций, сопоставленных свободным вершинам, звездам и ребрам, суммированием по индексам всех вершин. (Операторы располагаем в нормальном порядке.)

Соображения, высказанные в § 22, показывают, что оператор $\widetilde{V}(\tau_1)\ldots\widetilde{V}(\tau_n)$ равен сумме операторов, соответствующих всем различным диаграммам.

Из указанной только что диаграммной техники для приведения к нормальной форме оператора $\widetilde{V}(\tau_1)\ldots\widetilde{V}(\tau_n)$ без труда получается диаграммная техника для приведения к нормальной форме оператора $T(\widetilde{V}(\tau_1)\ldots\widetilde{V}(\tau_n))$, где все времена различны. Она отличается от диаграммной техники для оператора $\widetilde{V}(\tau_1)\ldots\widetilde{V}(\tau_n)$ тем, что в ней рассматриваются произвольные диаграммы с n звездами (без ограничения на направление ребер), а ребру сопоставляется функция $\exp(-\mathrm{i}\varepsilon(k)(\tau_i-\tau_j))\,\delta^k_l\,\theta(\tau_i-\tau_j)$. В самом деле, множители $\theta(\tau_i-\tau_j)$, дополнительно включенные в функции, сопоставленные ребрам, равны 1 для диаграмм, в которых ребра идут в направлении убывания времени, и обращают в нуль все остальные диаграммы. Это означает, что те из описанных диаграмм, которые не равны нулю, совпадают с диаграммами из диаграммного представления для $\widetilde{V}(\tau_{i_1})\ldots$ $\ldots\widetilde{V}(\tau_{i_n})$, где $i_1,\,\ldots,\,i_n$ — перестановка, для которой $\tau_{i_1}>\ldots>\tau_{i_n}$. Поскольку $\widetilde{V}(\tau_{i_1})\ldots\widetilde{V}(\tau_{i_n})=T(\widetilde{V}(\tau_1)\ldots$ $\ldots\widetilde{V}(\tau_n))$, это доказывает нужное нам представление.

Для того чтобы получить диаграммное представление оператора $S(t,\,t_0)$, достаточно теперь сослаться на выражение этого оператора в виде T-экспоненты (14.4) и отметить, что в интеграле по $\tau_1,\,\ldots,\,\tau_n$ несущественно значение подынтегральной функции на множестве, где хотя бы две из переменных $\tau_1,\,\ldots,\,\tau_n$ совпадают.

Диаграммное представление оператора $S(t,\,t_0)$ легко обобщить на случай, когда индекс k пробегает произвольное пространство с мерой X. Точнее говоря, рассмотрим фоковское пространство $F(L^2(X))$, где X — пространство с мерой, и в этом пространстве операторные обобщенные функции $a^+(k),\ a(k)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[a(k),\ a(k')]=[a^+(k),\ a^+(k')]=0;$$

$$[a(k),\ a^+(k')]=\delta(k,\,k');\ a(k)\theta=0.$$

Фиксируем гамильтониан $H=H_0+gV(t)$, где

$$H_0=\int\varepsilon(k)\,a^+(k)a(k)dk;$$

$$V(t)=\sum_{m,\,n}\int v_{m,\,n}(k_1,\,\ldots,\,k_m\,|\,p_1,\,\ldots,\,p_n\,|\,t)\,a^+(k_1)\ldots$$

$$\ldots a(p_n)\,d^mk\,d^np, \tag{23.2}$$

и поставим задачу о приведении к нормальной форме оператора $S(t,\,t_0)$. Для решения этой задачи строится диаграммная техника, совершенно аналогичная описанной выше. Единственное отличие состоит в том, что каждой вершине диаграммы вместо индекса $k\in M$ сопоставляется точка $k\in X$ и суммирование по M заменяется интегрированием по X.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ УАЙТМАНА И ГРИНА

§ 24. Функции Уайтмана

В этой главе будем считать, что в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ заданы гамильтониан H с основным состоянием Φ и семейство операторов $\{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, замкнутое относительно операции эрмитова сопряжения (точнее, будем считать, что все операторы $a(\lambda)$ определены на всюду плотном множестве $D\subset\mathscr{H}$ и для каждого оператора $a(\lambda)$ существует оператор $a(\hat\lambda)$, удовлетворяющий условию $\langle a(\lambda)x, y\rangle=\langle x, a(\hat\lambda)y\rangle$ при любых $x, y\in D$). Символом $a(\lambda, t)$ обозначены гейзенберговские операторы $a(\lambda, t)=\exp(\mathrm{i}Ht)a(\lambda)\exp(-\mathrm{i}Ht)$.

Будем считать, что операторы $a(\lambda)$ и $\exp(\mathrm{i}Ht)$ переводят множество D в себя. Отметим, что при сделанных предположениях операторы $a(\lambda_1, t_1)\dots a(\lambda_n, t_n)$ также переводят множество D в себя и

$$(a(\lambda_1, t_1)\dots a(\lambda_n, t_n))^+=a^+(\lambda_n, t_n)\dots a^+(\lambda_1, t_1)=$$
$$=a(\hat\lambda_n, t_n)\dots a(\hat\lambda_1, t_1).$$

Будем предполагать, что основное состояние Φ принадлежит множеству D; его энергию обозначим через E_0.

Определение. Функцией Уайтмана $w_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n)$ гамильтониана H называется среднее значение оператора

$$a(\lambda_1, t_1)\dots a(\lambda_n, t_n)$$

по основному состоянию Φ гамильтониана H:

$$w_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n)=\langle a(\lambda_1, t_1)\dots a(\lambda_n, t_n)\Phi, \Phi\rangle.$$

Все дальнейшее содержание этой главы без труда переносится на случай, когда $a(\lambda)$ — обобщенная операторная функция параметра λ. Тогда, естественно, функция Уайтмана будет обобщенной функцией переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Нетрудно доказать следующие свойства функций Уайтмана:

1. Инвариантность при сдвиге по времени

$$w_n(\lambda_1, t_1+\tau, \dots, \lambda_n, t_n+\tau)=w_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n). \quad (24.1)$$

2. Эрмитовость

$$\bar w_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n)=w_n(\hat\lambda_n, t_n, \dots, \hat\lambda_1, t_1). \quad (24.2)$$

3. Положительная определенность. Пусть $f_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n)$ — отличная от нуля лишь для конечного числа значений n последовательность функций, каждая из которых равна нулю для всех, кроме конечного числа, значений $\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{m,n,\lambda_i,\mu_j,t_i,\tau_j} f_m(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m)\bar f_n(\mu_1, \tau_1, \dots, \mu_n, \tau_n)\times$$
$$\times w_{m+n}(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m, \hat\mu_n, \tau_n, \dots, \hat\mu_1, \tau_1)\geqslant 0 \quad (24.3)$$

(сумма по $\lambda_i, \mu_j\in\Lambda$ и по $m, n=0, 1, \dots; -\infty<t_i, \tau_j<\infty$).

4. Спектральность

$$\int\exp(-\mathrm{i}\omega a)w_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_k, t_k, \lambda_{k+1}, t_{k+1}+$$
$$+a, \dots, \lambda_n, t_n+a)\,da=0, \quad (24.4)$$

если число $\omega+E_0$ не принадлежит спектру гамильтониана H (в частности, соотношение (24.4) выполнено для любого $\omega<0$).

Доказательство свойства 1 получается сразу, если заметить, что $\exp(-\mathrm{i}Ht)\Phi=\exp(-\mathrm{i}E_0t)\Phi$. Второе свойство вытекает из соотношения $\langle a(\lambda_1, t_1)\dots a(\lambda_n, t_n)\Phi, \Phi\rangle=$ $=\langle\Phi, a(\hat\lambda_n, t_n)\dots a(\hat\lambda_1, t_1)\Phi\rangle$. Свойство 3 представляет собой неравенство $\langle AA^+\Phi, \Phi\rangle\geqslant 0$, примененное к оператору

$$A=\sum_{m,\lambda_i,t_i} f_m(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m)a(\lambda_1, t_1)\dots a(\lambda_m, t_m)$$

(сумма по $m=0, 1, \dots; \lambda_i\in\Lambda; -\infty<t_i<\infty$).

Свойство 4 следует из соотношения

$$\int\exp(-\mathrm{i}\beta a)\langle\exp(\mathrm{i}Ba)\Psi_1, \Psi_2\rangle\,da=0,$$

справедливого, если число β не принадлежит спектру самосопряженного оператора B (см. дополнение, § Д.5) (нужно положить $B = H$, $\Psi_1 = U\Phi$, $\Psi_2 = V^+\Phi$, где

$$U = a(\lambda_{k+1}, t_{k+1}) \ldots a(\lambda_n, t_n),\ V = a(\lambda_1, t_1) \ldots a(\lambda_k, t_k)).$$

Если гамильтониан H действует в пространстве некоторого представления CR [например, в фоковском пространстве $F(\mathscr{B})$], в качестве семейства операторов $a(\lambda)$ естественно выбрать семейство $a(k, \varepsilon)$ операторов рождения и уничтожения, построенных по некоторому ортонормированному базису $\varphi_k \in \mathscr{B}$ [здесь $k \in M$, $\varepsilon = \pm 1$, $a(k, \varepsilon) = a(\varphi_k, \varepsilon)$].

Таким образом, функциями Уайтмана гамильтониана H, действующего в пространстве некоторого представления CR относительно ортонормированного базиса φ_k пространства $\mathscr{B}$, называются функции

$$w_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \langle a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n)\Phi, \Phi\rangle.$$

В случае CAR операторы $a(k, \varepsilon, t)$ ограничены, и, следовательно, определение функций Уайтмана всегда имеет смысл. В случае CCR будем всегда считать, что основное состояние Φ принадлежит области D определения операторов $a(k, \varepsilon)$ и что область D инвариантна относительно операторов $\exp(iHt)$.

Для гамильтонианов, действующих в пространстве представления CR, укажем еще одно свойство функций Уайтмана.

5. Перестановка аргументов. Пусть функция $w_n^{(i)}$ получается из w_n перестановкой $(k_i, \varepsilon_i, t_i)$ и $(k_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, t_{i+1})$ с изменением знака в случае CAR. Если $t_i = t_{i+1}$, то

$$w_n^{(i)}(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= w_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) + A^{\varepsilon_i}_{\varepsilon_{i+1}} \delta_{k_i, k_{i+1}} \times$$
$$\times w_{n-2}(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_{i-1}, \varepsilon_{i-1}, t_{i-1}, k_{i+2}, \varepsilon_{i+2}, t_{i+2}, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) \qquad (24.5)$$

[здесь $A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}$ — матрица, фигурирующая в формуле (20.3)].

В самом деле, из коммутационных соотношений в форме (20.3) получаем

$$[a(k, \varepsilon, t), a(k', \varepsilon', t)]_\mp = [a(k, \varepsilon), a(k', \varepsilon')]_\mp = A^{\varepsilon}_{\varepsilon'} \delta_{kk'},$$

откуда сразу следует (24.5).

Функции Уайтмана без труда могут быть вычислены для гамильтониана $H_0 = \sum \omega(k) a^+(k) a(k)$ в фоковском пространстве, поскольку для этого гамильтониана $a(k, \varepsilon, t) = \exp(i\varepsilon\omega(k)t) a(k, \varepsilon)$, и, следовательно,

$$w_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \exp(i(\varepsilon_1\omega(k_1)t_1 + \ldots + \varepsilon_n\omega(k_n)t_n)) \langle a(k_1, \varepsilon_1) \ldots$$
$$\ldots a(k_n, \varepsilon_n)\Phi, \Phi\rangle.$$

В случае CCR оператор H_0 ограничен снизу при условии $\omega_k \geqslant 0$; тогда $\Phi = \theta$ (см. § 21) и функция $w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2)$ лишь в случае $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$ может быть не равной нулю; в этом случае

$$w_2(k_1 - 1, t_1, k_2 - 1, t_2) =$$
$$= \delta_{k_1, k_2} \exp(-i\omega(k_1)t_1 + i\omega(k_2)t_2).$$

В случае CAR основное состояние $\Phi = \prod_{\omega(k)<0} a^+(k)\theta$; в этом случае функция $w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2)$ не равна нулю, лишь если выполнены условия $\varepsilon_2\omega(k_2) > 0$, $\varepsilon_1\omega(k_1) < 0$; тогда

$$w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) = \delta_{k_1 k_2} \exp(i\varepsilon_1\omega(k_1)t_1 + i\varepsilon_2\omega(k_2)t_2).$$

Иначе говоря,

$$w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) =$$
$$= \theta(\varepsilon_2\omega(k_2))\,\theta(-\varepsilon_1\omega(k_1))\,\delta_{k_1 k_2} \times$$
$$\times \exp(i(\varepsilon_1\omega(k_1)t_1 + \varepsilon_2\omega(k_2)t_2)).$$

Для гамильтонианов, действующих в пространстве представления CR $(\mathscr{B})$, можно дать и более инвариантное определение функций Уайтмана, не зависящее от выбора базиса в пространстве $\mathscr{B}$. Именно, функцию Уайтмана $w_n(f_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, f_n, \varepsilon_n, t_n)$, где $f_i \in \mathscr{B}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $-\infty < t_i < \infty$, определим как среднее значение оператора $a(f_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots$ $\ldots a(f_n, \varepsilon_n, t_n)$ по основному состоянию Φ гамильтониана H (w_n — линейный функционал от $f_1, \ldots, f_n$). Если пространство $\mathscr{B} = L^2(X)$, то оператор $a(f, \varepsilon)$ можно записать в виде $a(f, \varepsilon) = \int f(x) a(x, \varepsilon) dx$, где $a(x, \varepsilon)$ — обобщенная операторная функция ($x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$). Легко видеть, что

$$w_n(f_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, f_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \int f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)\, w_n(x_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, x_n, \varepsilon_n, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $w_n(x_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, x_n, \varepsilon_n, t_n)$ — функция Уайтмана, построенная по обобщенной операторной функции $a(x, \varepsilon)$ и гамильтониану H.

§ 25. Функции Грина

Функции Грина определим для гамильтонианов, действующих в пространстве представления CR. Как и в § 24, пусть $a(k, \varepsilon) = a(\varphi_k, \varepsilon)$, где φ_k — ортонормированный базис в $\mathcal{B}$.

Введем $T(a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n))$ [T-произведение гейзенберговских операторов $a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n)$] как произведение операторов $a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n)$, расставленных в хронологическом порядке (в порядке убывания времен). В случае CAR это произведение берется со знаком минус, если для расстановки операторов в хронологическом порядке требуется нечетная перестановка, и со знаком плюс, если для этого нужна четная перестановка. Иными словами:

$$T(a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n)) =$$
$$= (-1)^{\gamma} a(k_{i_1}, \varepsilon_{i_1}, t_{i_1}) \ldots a(k_{i_n}, \varepsilon_{i_n}, t_{i_n}), \qquad (25.1)$$

где $P = (i_1, \ldots, i_n)$ — перестановка, для которой $t_{i_1} > \ldots \ldots > t_{i_n}$, $\gamma = 0$ в случае CCR и γ равняется четности перестановки P в случае CAR (здесь $k_i \in M$, $\varepsilon_i = \pm 1$, все времена t_i различны).

Для $n = 2$ можно написать

$$T(a(k_1, \varepsilon_1, t_1) a(k_2, \varepsilon_2, t_2)) =$$
$$= \theta(t_1 - t_2) a(k_1, \varepsilon_1, t_1) a(k_2, \varepsilon_2, t_2) \pm$$
$$\pm \theta(t_2 - t_1) a(k_2, \varepsilon_2, t_2) a(k_1, \varepsilon_1, t_1)$$

(верхний знак всюду в этой главе относится к случаю CCR, нижний — к случаю CAR).

Функцией Грина гамильтониана H назовем среднее значение T-произведения $T(a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n))$ по основному состоянию Φ гамильтониана H:

$$G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \langle T(a(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(k_n, \varepsilon_n, t_n))\Phi, \Phi \rangle.$$

Функции Грина легко выражаются через функции Уайтмана. Например,

$$G_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) = \theta(t_1 - t_2) w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) \pm$$
$$\pm \theta(t_2 - t_1) w_2(k_2, \varepsilon_2, t_2, k_1, \varepsilon_1, t_1).$$

Общее выражение функций Грина через функции Уайтмана может быть записано следующим образом:

$$G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \sum_{\pi} (-1)^{\gamma(\pi)} \theta_\pi(t) w_n^\pi(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n), \quad (25.2)$$

где сумма берется по всем перестановкам $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $\theta_\pi(t) = \theta(t_{i_1} - t_{i_2}) \theta(t_{i_2} - t_{i_3}) \ldots \theta(t_{i_{n-1}} - t_{i_n})$, функция w_n^π определяется равенством

$$w_n^\pi(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= w(k_{i_1}, \varepsilon_{i_1}, t_{i_1}, \ldots, k_{i_n}, \varepsilon_{i_n}, t_{i_n}),$$

а $\gamma(\pi) = 0$ в случае CCR и четности перестановки π в случае CAR.

Данное определение функций $G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n)$ имеет смысл только в случае, когда все времена $t_1, \ldots, t_n$ различны. Множество, на котором функция Грина не задана, имеет меру нуль, поэтому интегралы от функции Грина, умноженной на обычную (не обобщенную) функцию от $t_1, \ldots, t_n$, вполне осмысленны. Это означает, в частности, что функцию G_n можно рассматривать как вполне определенную обобщенную функцию переменных $t_1, \ldots, t_n$. В единственном месте (в § 27) потребуется доопределить функции Грина в случае, когда некоторые из аргументов $t_1, \ldots, t_n$ совпадают. Сделаем, это, потребовав, чтобы в случае, когда некоторые из времен совпадают, соответствующие множители в T-произведении располагались в нормальном порядке (т. е. T-произведение определим с помощью такой перестановки индексов $(i_1, \ldots, i_n)$, что $t_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant t_{i_n}$ и в случае $t_{i_k} = t_{i_l}$ выполнено неравенство $\varepsilon_{i_k} \geqslant \varepsilon_{i_l}$).

Укажем следующие простые свойства функций Грина:

1. Симметричность.

Функции Грина $G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n)$ в случае CCR не меняются, а в случае CAR меняют только знак при перестановке $(k_i, \varepsilon_i, t_i)$ и $(k_j, \varepsilon_j, t_j)$.

2. Инвариантность при сдвиге по времени.

$$G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1 + a, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n + a) = G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n).$$

3. $G_n(k_1, \varepsilon_1, t + 0, k_2, \varepsilon_2, t, k_3, \varepsilon_3, t_3, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) \mp \mp G_n(k_1, \varepsilon_1, t, k_2, \varepsilon_2, t + 0, k_3, \varepsilon_3, t_3, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) = \delta_{k_1, k_2} A^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2} G_{n-2}(k_3, \varepsilon_3, t_3, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n)$.

Первое из перечисленных свойств следует из того, что под знаком T-произведения можно переставлять сомножители, третье — из коммутационных соотношений. Как и для функций Уайтмана, можно дать определение функций Грина, не зависящее от выбора базиса φ_k. Именно, следует положить

$$G_n(f_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, f_n, \varepsilon_n, t_n) = \langle T(a(f_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(f_n, \varepsilon_n, t_n)) \Phi, \Phi \rangle$$

(здесь $f_i \in \mathcal{B}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $-\infty < t_i < \infty$). Если $\mathcal{B} = L^2(X)$, то

$$G_n(f_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, f_n, \varepsilon_n, t_n) = \int f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) G_n(x_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, x_n, \varepsilon_n, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $G_n(x_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, x_n, \varepsilon_n, t_n)$ — функция Грина, построенная по обобщенной операторной функции $a(x, \varepsilon)$.

Для функций Грина легко построить разложение в ряд теории возмущений и диаграммное представление ряда теории возмущеий. Наметим сейчас способ, которым это можно сделать.

Пусть гамильтониан H, по которому строятся функции Грина, представлен в виде $H = H_0 + gV$. Основные состояния гамильтонианов H и H_0 обозначим соответственно Φ и Φ_0. Воспользуемся вытекающим из (15.7) соотношением

$$\Phi = \lim_{\alpha \to 0} C_1(\alpha) S_\alpha(0, -\infty) \Phi_0 = \lim_{\alpha \to 0} C_2(\alpha) S_\alpha(0, +\infty) \Phi_0 \tag{25.3}$$

(поскольку целью является разложение в ряд теории возмущений функций Грина, достаточно знать, что соотношение (25.3) справедливо в рамках теории возмущений в случае, если основное состояние Φ_0 гамильтониана H_0 невырожденно). Если $(i_1, \ldots, i_n)$ — перестановка, для которой $t_{i_1} > \ldots > t_{i_n}$, то

$$G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) = \lim_{\alpha \to 0} C_1(\alpha) \overline{C_2(\alpha)} \times$$
$$\times \langle a(k_{i_1}, \varepsilon_{i_1}, t_{i_1}) \ldots a(k_{i_n}, \varepsilon_{i_n}, t_{i_n}) S_\alpha(0, -\infty) \Phi_0, S_\alpha(0, +\infty) \Phi_0 \rangle.$$

Введем операторы

$$\tilde{a}(k, \varepsilon, t) = \exp(\mathrm{i} H_0 t) a(k, \varepsilon) \exp(-\mathrm{i} H_0 t).$$

Легко видеть, что

$$a(k, \varepsilon, t) = \exp(\mathrm{i} Ht) \exp(-\mathrm{i} H_0 t) \tilde{a}(k, \varepsilon, t) \exp(\mathrm{i} H_0 t) \times$$
$$\times \exp(-\mathrm{i} Ht) = S(0, t) \tilde{a}(k, \varepsilon, t) S(t, 0).$$

При фиксированном t и $\alpha \to 0$ можно написать приближенные равенства:

$$S(t, 0) \approx S_\alpha(t, 0); \quad S(0, t) \approx S_\alpha(0, t);$$
$$a(k, \varepsilon, t) = S_\alpha(0, t) \tilde{a}(k, \varepsilon, t) S_\alpha(t, 0).$$

Воспользовавшись этими равенствами, видим, что

$$G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, k_n, \varepsilon_n, t_n) = \lim_{\alpha \to 0} C_1(\alpha) \overline{C_2(\alpha)} \times$$
$$\times \langle S_\alpha(0, t_{i_1}) \tilde{a}(k_{i_1}, \varepsilon_{i_1}, t_{i_1}) S_\alpha(t_{i_1}, 0) S_\alpha(0, t_{i_2}) \ldots \times$$
$$\times \tilde{a}(k_{i_n}, \varepsilon_{i_n}, t_{i_n}) S_\alpha(t_{i_n}, 0) S_\alpha(0, -\infty) \Phi_0, S_\alpha(0, +\infty) \Phi_0 \rangle =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\langle A_\alpha \Phi_0, \Phi_0 \rangle}{\langle S_\alpha(\infty, -\infty) \Phi_0, \Phi_0 \rangle},$$

где

$$A_\alpha = S_\alpha(\infty, t_{i_1}) \tilde{a}(k_{i_1}, \varepsilon_{i_1}, t_{i_1}) S_\alpha(t_{i_1}, t_{i_2}) \ldots \ldots \tilde{a}(k_{i_n}, \varepsilon_{i_n}, t_{i_n}) S_\alpha(t_{i_n}, -\infty). \tag{25.4}$$

При преобразованиях было использовано групповое свойство

$$S_\alpha(t'', t) = S_\alpha(t'', t') S_\alpha(t', t),$$

а также соотношение

$$1 = \langle \Phi, \Phi \rangle = \lim_{\alpha \to 0} C_1(\alpha) \overline{C_2(\alpha)} \langle S_\alpha(0, -\infty) \Phi_0, S_\alpha(0, +\infty) \Phi_0 \rangle =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} C_1(\alpha) \overline{C_2(\alpha)} \langle S_\alpha(\infty, -\infty) \Phi_0, \Phi_0 \rangle.$$

Равенство (25.4) можно переписать следующим образом:

$$A_\alpha = T\Bigg(\tilde{a}(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots \tilde{a}(k_n, \varepsilon_n, t_n) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} g \exp(-\alpha|\tau|) \tilde{V}(\tau)\, d\tau\right)\Bigg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{g}{\mathrm{i}}\right)^n \times$$
$$\times \int T(\tilde{a}(k_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots \tilde{a}(k_n, \varepsilon_n, t_n) \exp(-\alpha|\tau_1| - \ldots$$
$$\ldots - \alpha|\tau_n|) \tilde{V}(\tau_1) \ldots \tilde{V}(\tau_n))\, d^n\tau.$$

Оператор A_α принято коротко записывать в виде

$$A_\alpha = T(\tilde{a}(k_1, \varepsilon_1, t_1)\dots\tilde{a}(k_n, \varepsilon_n, t_n) S_\alpha(\infty, -\infty)).$$

Пусть теперь гамильтониан $H = H_0 + gV$ записан в виде (23.2) с функциями $V_{m,n}$, не зависящими от времени. Для оператора $S_\alpha(\infty, -\infty)$, построенного по этому гамильтониану, можно построить диаграммное представление с помощью результатов § 22. Пользуясь этим представлением, нетрудно построить также диаграммное представление для оператора A_α. Диаграммное представление для чисел $\langle A_\alpha \Phi_0, \Phi_0\rangle$ и $\langle S_\alpha(\infty, -\infty)\Phi_0, \Phi_0\rangle$ получается, очевидно, если из диаграмм операторов A_α и $S_\alpha(\infty, -\infty)$ выбрать диаграммы, в которых каждая вершина принадлежит одному из ребер. Пользуясь тем, что несвязная диаграмма разлагается в произведение диаграмм, соответствующих ее компонентам, нетрудно построить диаграммное представление для выражения

$$\frac{\langle A_\alpha \Phi_0, \Phi_0\rangle}{\langle S_\alpha(\infty, -\infty)\Phi_0, \Phi_0\rangle} \tag{25.5}$$

(оно состоит из тех диаграмм для $\langle A_\alpha \Phi_0, \Phi_0\rangle$, которые не содержат в качестве компоненты диаграмму для $\langle S_\alpha(\infty, -\infty)\Phi_0, \Phi_0\rangle$). Для того чтобы построить диаграммное представление для функции Грина $G_n(k_1, \varepsilon_1, t_1, \dots, k_n, \varepsilon_n, t_n)$, остается устремить α к нулю в диаграммах для выражения (25.5).

§ 26. Представление Челлена—Лемана

Функцию Уайтмана w_n гамильтониана H относительно семейства операторов $a(\lambda)$ легко выразить через матричные элементы операторов $a(\lambda)$ в базисе из собственных векторов гамильтониана H. Получим сейчас такое выражение для функции w_2; оно называется представлением Челлена—Лемана. Предположим сначала, что у оператора H дискретный спектр, т. е. существует ортонормированный базис Φ_n из собственных векторов оператора H; соответствующие собственные значения обозначим E_n. Тогда

$$\begin{aligned} w_2(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) &= \langle a(\lambda_1, t_1)\, a(\lambda_2, t_2)\Phi, \Phi\rangle = \\ &= \langle a(\lambda_2, t_2)\Phi, a(\hat{\lambda}_1, t_1)\Phi\rangle = \\ &= \sum_n \langle a(\lambda_2, t_2)\Phi, \Phi_n\rangle \langle \Phi_n, a(\hat{\lambda}_1, t_1)\Phi\rangle = \\ &= \sum_n \langle \exp(\mathrm{i}Ht_2)\, a(\lambda_2) \exp(-\mathrm{i}Ht_2)\Phi, \Phi_n\rangle \times \\ &\quad\times \langle \Phi_n, \exp(\mathrm{i}Ht_1)\, a(\hat{\lambda}_1)\exp(-\mathrm{i}Ht_1)\Phi\rangle = \\ &= \sum_n \exp(\mathrm{i}(E_n - E_0)t_2)\langle a(\lambda_2)\Phi, \Phi_n\rangle \times \\ &\quad\times \exp(\mathrm{i}(E_0 - E_n)t_1)\langle \Phi_n, a(\hat{\lambda}_1)\Phi\rangle. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $\rho_n^\lambda = \langle \Phi_n, a(\lambda)\Phi\rangle$, получаем нужное представление

$$w_2(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) = \sum_n \exp[-\mathrm{i}(E_n - E_0)(t_1 - t_2)]\, \rho_n^{\hat{\lambda}_1} \bar{\rho}_n^{\lambda_2}.$$

Если у оператора H имеется также непрерывный спектр, то полная система собственных векторов состоит из нормированных собственных векторов Φ_n и обобщенных собственных векторов Φ_γ (считаем векторы Φ_n ортонормированными, Φ_γ — нормированными на δ-функцию; соответствующие собственные значения обозначаем E_n и E_γ). Повторяя проведенные только что преобразования и пользуясь соотношением

$$\langle x, y\rangle = \sum_n \langle x, \Phi_n\rangle \langle \Phi_n, y\rangle + \int \langle x, \Phi_\gamma\rangle \langle \Phi_\gamma, y\rangle\, d\gamma,$$

убеждаемся, что

$$\begin{aligned} w_2(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) = &\sum_n \exp[-\mathrm{i}(E_n - E_0)(t_1 - t_2)]\, \rho_n^{\hat{\lambda}_1} \bar{\rho}_n^{\lambda_2} + \\ &+ \int \exp[-\mathrm{i}(E_\gamma - E_0)(t_1 - t_2)]\, \rho_\gamma^{\hat{\lambda}_1} \bar{\rho}_\gamma^{\lambda_2}\, d\gamma, \end{aligned} \tag{26.1}$$

где

$$\rho_n^\lambda = \langle \Phi_n, a(\lambda)\Phi\rangle, \quad \rho_\gamma^\lambda = \langle \Phi_\gamma, a(\lambda)\Phi\rangle.$$

Из полученных формул видно, что асимптотика функции w_2 при $t_1 - t_2 \to \infty$ определяется только дискретным спектром, поскольку вклад от непрерывного спектра при $t_1 - t_2 \to \infty$ изображается интегралом от быстро осциллирующей функции*.

Отметим, что утверждение об асимптотике функции w_2 в отличие от всех остальных утверждений этой главы не переносится прямо на случай, когда $a(\lambda)$ — обобщенная операторная функция.

Функцию w_2 можно выразить также через величины

$$\sigma^{\lambda_1, \lambda_2}(\mu) = \langle a(\lambda_1) E_\mu a(\lambda)\Phi, \Phi\rangle,$$

где $E_\mu = e_\mu(H)$ — спектральное разложение оператора H (напомним, что $e_\mu(x) = 1$ при $x \leqslant \mu$, $e_\mu(x) = 0$ при $x > \mu$). Именно,

$$w_2(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) = \int \exp(\mathrm{i}(\mu - E_0)(t_2 - t_1))\, d\sigma^{\lambda_1, \lambda_2}(\mu).$$

* Строгое доказательство этого факта требует предположения об абсолютной непрерывности непрерывного спектра (определение абсолютной непрерывности см., например, в [51]).

В самом деле,

$$w_2(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) = \langle a(\lambda_2, t_2)\Phi,\ a(\hat{\lambda}_1, t_1)\Phi\rangle =$$
$$= \langle \exp(\mathrm{i}Ht_2)\, a(\lambda_2)\exp(-\mathrm{i}E_0 t_2)\Phi,\ \exp(\mathrm{i}Ht_1)\times$$
$$\times a(\hat{\lambda}_1)\exp(-\mathrm{i}E_0 t_1)\Phi\rangle =$$
$$= \langle \exp[\mathrm{i}(H-E_0)(t_2-t_1)]\, a(\lambda_2)\Phi,\ a(\hat{\lambda}_1)\Phi\rangle =$$
$$= \int \exp[\mathrm{i}(\mu-E_0)(t_2-t_1)]\, d\langle E_\mu a(\lambda_2)\Phi,\ a(\hat{\lambda}_1)\Phi\rangle =$$
$$= \int \exp[\mathrm{i}(\mu-E_0)(t_2-t_1)]\, d\sigma^{\lambda_1, \lambda_2}(\mu).$$

Поскольку функция Грина G_2 оператора, действующего в пространстве представления CR, простой формулой

$$G_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) = \theta(t_1-t_2) w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) \pm$$
$$\pm\, \theta(t_2-t_1) w_2(k_2, \varepsilon_2, t_2, k_1, \varepsilon_1, t_1)$$

выражается через функцию w_2, из полученных представлений для w_2 вытекают представления для функции G_2. Например, для операторов с дискретным спектром

$$G_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2) =$$
$$= \theta(t_1-t_2)\sum_n \exp[-\mathrm{i}(E_n-E_0)(t_1-t_2)]\,\rho_n^{k_1, -\varepsilon_1}\bar{\rho}_n^{k_2, \varepsilon_2} \pm$$
$$\pm\, \theta(t_2-t_1)\sum_n \exp[-\mathrm{i}(E_n-E_0)(t_2-t_1)]\,\rho_n^{k_2, -\varepsilon_2}\bar{\rho}_n^{k_1, \varepsilon_1}$$

(здесь $\rho_n^{k, \varepsilon} = \langle \Phi_n, a(k, \varepsilon)\Phi\rangle$, Φ_n — стационарные состояния гамильтониана H, E_n — соответствующие собственные значения).

Рассмотрим еще функции

$$\tilde{w}_2(k_1, \varepsilon_1, \omega_1, k_2, \varepsilon_2, \omega_2) =$$
$$= (2\pi)^{-1}\int \exp[\mathrm{i}(\varepsilon_1\omega_1 t_1 + \varepsilon_2\omega_2 t_2)]$$
$$w_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2)\times dt_1\, dt_2;$$
$$\tilde{G}_2(k_1, \varepsilon_1, \omega_1, k_2, \varepsilon_2, \omega_2) =$$
$$= (2\pi)^{-1}\int \exp[\mathrm{i}(\varepsilon_1\omega_1 t_1 + \varepsilon_2\omega_2 t_2)]\times$$
$$\times G_2(k_1, \varepsilon_1, t_1, k_2, \varepsilon_2, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

(функции Уайтмана и Грина в энергетическом представлении).

Полученные выше представления функции w_2 и G_2 дают, конечно, представления функций $\tilde{w}_2$ и $\tilde{G}_2$. В частности, для операторов с дискретным спектром

$$\tilde{G}_2(k_1, 1, \omega_1, k_2, -1, \omega_2) = \mathrm{G}(k_1, k_2, \omega_1)\,\delta(\omega_1-\omega_2),$$

где

$$\mathrm{G}(k_1, k_2, \omega) = \int \exp(\mathrm{i}\omega\tau)\, G_2(k_1, 1, \tau, k_2, -1, 0)\, d\tau =$$
$$= \mathrm{i}\sum_n \frac{\rho_n^{k_1, -1}\bar{\rho}_n^{k_2, -1}}{\omega-(E_n-E_0)+\mathrm{i}0} \mp \sum_n \frac{\rho_n^{k_2, 1}\bar{\rho}_n^{k_1, -1}}{\omega+(E_n-E_0)-\mathrm{i}0}. \quad (26.2)$$

Таким образом, точкам дискретного спектра соответствуют полюса функции G по переменной ω. При наличии непрерывного спектра к выражению (26.2) прибавляется еще интеграл по непрерывному спектру, который оказывается во всех физических примерах непрерывной функцией ω.

§ 27. Уравнения для функций Уайтмана и Грина

Пусть гамильтониан H, действующий в пространстве представления CR ($\mathscr{B}$), записан в нормальной форме:

$$H = \sum_{m, n}\sum_{k_i, l_j} \Gamma^{m, n}(k_1, \ldots, k_m | l_1, \ldots, l_n)\, a_{k_1}^+ \ldots$$
$$\ldots a_{k_m}^+ a_{l_1} \ldots a_{l_n},$$

где $a_k^+ = a^+(\varphi_k)$, $a_k = a(\varphi_k)$, φ_k — ортонормированный базис в $\mathscr{B}$, функции $\Gamma^{m, n}$ симметричны по переменным k_i и по переменным l_j в случае CCR и антисимметричны по этим переменным в случае CAR. Тогда гейзенберговские уравнения для операторов $a_k(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)a_k\exp(-\mathrm{i}Ht)$, $a_k^+(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)\,a_k^+\exp(-\mathrm{i}Ht)$ можно записать в виде

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{da_k(t)}{dt} = [H, a_k(t)] =$$
$$= -\sum_{m, n}\ \sum_{k_1, \ldots, k_{m-1}, l_1, \ldots, l_n} m\,\Gamma^{m, n}(k, k_1, \ldots, k_{m-1} | l_1, \ldots, l_n)\times$$
$$\times a_{k_1}^+(t) \ldots a_{k_{m-1}}^+(t)\, a_{l_1}(t) \ldots a_{l_n}(t);$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{da_k^+(t)}{dt}=[H,\ a_k^+(t)]=$$

$$=\sum_{m,\,n}\ \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_m,\,l_1,\,\ldots,\,l_{n-1}} n\,\Gamma^{m,\,n}(k_1,\ \ldots,\ k_m\,|\,l_1,\ldots,l_{n-1},\ k)\times$$
$$\times\, a_{k_1}^+(t)\ \ldots\ a_{k_m}^+(t)\,a_{l_1}(t)\ \ldots\ a_{l_{n-1}}(t).$$

Из этих уравнений сразу получаются уравнения для функций Уайтмана

$$w_n(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ \ldots,\ k_n,\ \varepsilon_n,\ t_n).$$

Выпишем, например, выражение производной функции w_n по переменной t_1 через функции Уайтмана (выражения для производных w_n по t_i записываются аналогично). Легко видеть, что

$$\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_1}w_r(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ \ldots,\ k_r,\ \varepsilon_r,\ t_r)=$$
$$=-\delta_{-1}^{\varepsilon_1}\sum_{m,\,n}\ \sum_{p_i,\,q_j} m\,\Gamma^{m,\,n}(k_1,\ p_1,\ \ldots,\ p_{m-1}\,|\,q_1,\ \ldots,\ q_n)\times$$
$$\times\, w_{r+m+n-1}(p_1,\ 1,\ t_1,\ \ldots,\ p_{m-1},\ 1,\ t_1,\ q_1,\ -1,\ t_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_n,\ -1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2,\ \ldots,\ k_r,\ \varepsilon_r,\ t_r)+$$
$$+\,\delta_{+1}^{\varepsilon_1}\sum_{m,\,n}\ \sum_{p_i,\,q_j} n\,\Gamma^{m,\,n}(p_1,\ \ldots,\ p_m\,|\,q_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_{n-1},\ k_1)\,w_{r+m+n-1}(p_1,\ 1,\ t_1,\ \ldots,\ p_m,\ 1,\ t_1,\ q_1,\ -1,\ t_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_{n-1},\ -1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2,\ \ldots,\ k_r,\ \varepsilon_r,\ t_r). \tag{27.1}$$

Из полученных уравнений для функций Уайтмана (или непосредственно из гейзенберговских уравнений) нетрудно вывести уравнения для функций Грина. Вычислим, например,

$$\frac{\partial}{\partial t_1}G_2(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t_1}[w_2(k_1,\varepsilon_1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)\,\theta(t_1-t_2)\pm$$
$$\pm\, w_2(k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2,\ k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1)\,\theta(t_2-t_1)]=$$
$$=\theta(t_1-t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}w_2(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)\pm$$
$$\pm\,\theta(t_2-t_1)\frac{\partial}{\partial t_1}w_2(k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2,\ k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1)+$$
$$+\,\delta(t_1-t_2)\,[w_2(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)\mp$$
$$\mp\, w_2(k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2,\ k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1)].$$

Из CR (или из свойства 5 функций Уайтмана) следует, что

$$\delta(t_1-t_2)(w_2(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)\mp w_2(k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2,\ k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1))=$$
$$=A_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\,\delta(t_1-t_2)\,\delta_{k_1,\,k_2},$$

а первые два слагаемых в формуле для $\frac{\partial G_2}{\partial t_1}$ с помощью уравнений (27.1) выражаются через функции Грина. В результате получаем

$$\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_1}G_2(k_1,\ \varepsilon_1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)=\frac{1}{i}\,\delta(t_1-t_2)\,A_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\,\delta_{k_1,\,k_2}-$$
$$-\,\delta_{-1}^{\varepsilon_1}\sum_{m,\,n}\ \sum_{p_i,\,q_j} m\,\Gamma^{m,\,n}(k_1,\ p_1,\ \ldots,\ p_{m-1}\,|\,q_1,\ \ldots,\ q_n)\times$$
$$\times\, G_{m+n}(p_1,\ 1,\ t_1,\ \ldots,\ p_{m-1},\ 1,\ t_1,\ q_1,\ -1,\ t_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_n,\ -1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2)+$$
$$+\,\delta_{+1}^{\varepsilon_1}\sum_{m,\,n}\ \sum_{p_i,\,q_j} n\,\Gamma^{m,\,n}(p_1,\ \ldots,\ p_m\,|\,q_1,\ \ldots,\ q_{n-1},\ k_1)\times$$
$$\times\, G_{m+n}(p_1,\ 1,\ t_1,\ \ldots,\ p_m,\ 1,\ t_1,\ q_1,\ -1,\ t_1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_{n-1},\ -1,\ t_1,\ k_2,\ \varepsilon_2,\ t_2).$$

Аналогично можно написать и уравнения для функций Грина G_n. Не будем их сейчас выписывать ввиду того, что в рассматриваемой общей ситуации они имеют весьма громоздкий вид.

ГЛАВА 8

ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ

§ 28. Трансляционно инвариантные гамильтонианы в фоковском пространстве

Рассмотрим операторы, действующие в фоковском пространстве $F(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B} = L^2(E^3)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $\psi(\mathbf{k})$ на евклидовом пространстве E^3. Переменную $\mathbf{k}$ будем называть импульсной переменной*.

Эти операторы бывает удобно выражать через определенные в § 13 операторы (точнее, обобщенные операторные функции) $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, удовлетворяющие соотношениям

$$[a(\mathbf{k}),\ a(\mathbf{k}')]_{\mp} = [a^+(\mathbf{k}),\ a^+(\mathbf{k}')]_{\mp} = 0;$$

$$[a(\mathbf{k}),\ a^+(\mathbf{k}')]_{\mp} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Гамильтониан H называется *трансляционно инвариантным*, если он коммутирует с оператором импульса $\mathbf{P} = \int \mathbf{k}a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k})d\mathbf{k}$. Примером трансляционно инвариантного гамильтониана может служить гамильтониан системы взаимодействующих нерелятивистских тождественных частиц, рассмотренный в § 13.

Имеет место следующее утверждение: вакуумный вектор θ является собственным вектором трансляционно инвариантного гамильтониана H.

* Рассматриваемый случай $\mathcal{B} = L^2(E^3)$ отвечает тождественным частицам без спина. Если частицы имеют спин или имеется несколько сортов частиц, следует в качестве пространства $\mathcal{B}$ рассматривать пространство $L^2(E^3 \times B)$, где B — конечное множество. Все результаты настоящей главы и последующих глав без труда обобщаются на случай $\mathcal{B} = L^2(E^3 \times B)$; нет необходимости подробно останавливаться на этом обобщении. Следует отметить, что реально существующие фермионы всегда имеют спин, поэтому в случае CAR рассматриваемая в тексте ситуация $\mathcal{B} = L^2(E^3)$ не реализуется в природе.

Для доказательства заметим, что у оператора импульса $\mathbf{P}$ существует единственный (с точностью до множителя) собственный вектор θ, отвечающий нулевому собственному значению (здесь речь идет об обычных — нормированных — собственных векторах; разумеется, обобщенные собственные векторы у оператора $\mathbf{P}$ есть). По предположению, оператор H коммутирует с оператором $\mathbf{P}$ и, значит, переводит собственный вектор оператора $\mathbf{P}$ снова в собственный вектор этого оператора. Таким образом, $H\theta = \lambda\theta$, что доказывает нужное утверждение.

Пусть гамильтониан H записан в нормальной форме

$$H = \sum_{m,\,n} \int \Gamma_{m,\,n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)\, a^+(\mathbf{p}_1) \ldots$$
$$\ldots a^+(\mathbf{p}_m)\, a(\mathbf{q}_1) \ldots a(\mathbf{q}_n)\, d^m\mathbf{p}\, d^n\mathbf{q}. \qquad (28.1)$$

Легко проверить, что он будет трансляционно инвариантным в том и только в том случае, если функции $\Gamma_{m,\,n}$ имеют вид

$$\Gamma_{m,\,n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) =$$
$$= \Lambda_{m,\,n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)\, \delta(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_m - \mathbf{q}_1 - \ldots - \mathbf{q}_n).$$

Доказанное выше утверждение означает, что *выражение* (28.1) *не может определять самосопряженного оператора в фоковском пространстве в случае, если для некоторого m функция* $\Gamma_{m,\,0} \not\equiv 0$ (физики говорят в этом случае, что гамильтониан H порождает поляризацию вакуума)*.

Это утверждение не мешает, однако, рассматривать трансляционно инвариантные гамильтонианы с поляризацией вакуума вне рамок теории операторов в фоковском пространстве; можно сказать, что не эти гамильтонианы плохи, а фоковское пространство тесно для этих гамильтонианов**.

Будем рассматривать трансляционно инвариантные гамильтонианы как формальные выражения вида (28.1), составленные из символов $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, и покажем, каким образом трансляционно инвариантному гамильтониану сопоставляются различные физические величины. В частности,

* На самом деле, в случае, если есть поляризация вакуума, выражение (28.1) вообще не определяет оператора в фоковском пространстве (подробнее см. в § 13).

** Для того чтобы построить по трансляционно инвариантному гамильтониану с поляризацией вакуума оператор в фоковском пространстве, следует сделать обрезание по объему (см. ниже).

в гл. 9 дано определение матрицы рассеяния для трансляционно инвариантного гамильтониана.

Пойдем при этом по следующему пути. Пусть H — трансляционно инвариантный гамильтониан, т. е. формальное выражение вида

$$H=\sum_{m,n}\int \Lambda_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)\times$$
$$\times\delta(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{l}_1-\ldots-\mathbf{l}_n)\times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{l}_1)\ldots a(\mathbf{l}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{l}. \tag{28.2}$$

Выражение H будем считать формально эрмитовым [т. е. предполагать, что $\Lambda_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)=\overline{\Lambda}_{n,m}(\mathbf{l}_n \ldots \ldots, \mathbf{l}_1 \mid \mathbf{k}_m, \ldots, \mathbf{k}_1)$]. Определим гамильтониан H, обрезанный по объему Ω. Пусть Ω — куб с ребром L в координатном пространстве $(0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant y\leqslant L,\ 0\leqslant z\leqslant L)$, $B_\Omega=L^2(\Omega)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $\psi(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}\in\Omega$, $F_\Omega=F(B_\Omega)$ — фоковское пространство, построенное по пространству B_Ω. В пространстве B_Ω выберем ортонормированный базис из функций $\varphi_\mathbf{k}=L^{-3/2}\exp(-i\mathbf{kr})$, где $\mathbf{k}$ пробегает решетку T_Ω с шагом $\frac{2\pi}{L}$ $\left(\text{т. е. } \mathbf{k}=\frac{2\pi}{L}\mathbf{n}, \text{ где } \mathbf{n} \text{ — целочисленный вектор}\right)$. Операторы $a^+(\varphi_\mathbf{k})$, $a(\varphi_\mathbf{k})$ в F_Ω, построенные по этому базису, будем обозначать $a_\mathbf{k}^+$, $a_\mathbf{k}$.

Оператор H_Ω в пространстве F_Ω зададим формулой

$$H_\Omega=\sum_{m,n}\sum_{\mathbf{k}_i,\mathbf{l}_j}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}(m+n-2)}\Lambda_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)\times$$
$$\times\delta_{\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m,\ \mathbf{l}_1+\ldots+\mathbf{l}_n}\,a_{\mathbf{k}_1}^+\ldots a_{\mathbf{k}_m}^+a_{\mathbf{l}_1}\ldots a_{\mathbf{l}_n} \tag{28.3}$$

[иными словами, выражение для H_Ω получается из выражения для H, если заменить $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ на $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{3/2}a_\mathbf{k}^+$, $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{3/2}a_\mathbf{k}$, интегрирование — на суммирование по решетке T_Ω и умножение на $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$, функцию $\delta(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{l}_1-\ldots-\mathbf{l}_n)$ — на $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\delta_{\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m,\ \mathbf{l}_1+\ldots+\mathbf{l}_n}$].

Сделаем предположение, что формула (28.3) определяет самосопряженный оператор в пространстве F_Ω. Есть все основания считать, что если функции $\Lambda_{m,n}$ достаточно хорошие, это будет так. Например, в случае CAR имеют место следующие утверждения.

Если коэффициентные функции $\Lambda_{m,n}$ достаточно быстро убывают на бесконечности (быстрее, чем $q^{-3(m+n)-\varepsilon}$, где $q=(k_1^2+\ldots+k_m^2+l_1^2+\ldots+l_n^2)^{1/2}$, $\varepsilon>0$) и $\Lambda_{m,n}=0$ при $m+n\geqslant s$, то формула (28.3) определяет ограниченный самосопряженный оператор в пространстве F_Ω. Если гамильтониан H представлен в виде H_0+V, где $H_0=\int\omega(\mathbf{k})a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k})d\mathbf{k}$, а коэффициентные функции выражения V достаточно быстро убывают на бесконечности, то формула (28.3) определяет самосопряженный оператор* в пространстве F_Ω.

Доказательство этих утверждений вытекает из соображений, высказанных в конце § 21.

Отметим, что оператор H_Ω коммутирует с оператором $\mathbf{P}_\Omega=\sum_{\mathbf{k}\in T_\Omega}\mathbf{k}a_\mathbf{k}^+a_\mathbf{k}$ (оператором импульса).

Физические величины, связанные с формальным гамильтонианом H, будем определять с помощью предельного перехода $\Omega\to\infty$.

Например, будем говорить, что число E принадлежит спектру (является уровнем энергии) формального гамильтониана H, если можно найти такие собственные значения E_Ω гамильтонианов H_Ω, что $\lim_{\Omega\to\infty}(E_\Omega-E_\Omega^0)=E$ (здесь E_Ω^0 обозначает энергию основного состояния Φ_Ω гамильтониана H). Будем говорить, что у гамильтониана H существует уровень энергии E с импульсом $\mathbf{k}$, если существуют векторы $\Psi_\Omega\in F_\Omega$, удовлетворяющие условиям $H_\Omega\Psi_\Omega=E_\Omega\Psi_\Omega$; $\mathbf{P}_\Omega\Psi_\Omega=\mathbf{k}_\Omega\Psi_\Omega$; $\lim_{\Omega\to\infty}(E_\Omega-E_\Omega^0)=E$; $\lim_{\Omega\to\infty}\mathbf{k}_\Omega=\mathbf{k}$.

Другой возможный путь исследования трансляционно инвариантного гамильтониана состоит в построении операторной реализации этого гамильтониана.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действуют коммутирующие самосопряженные операторы $\hat{H}$ и $\hat{\mathbf{P}}=(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ (оператор энергии и оператор импульса) и операторные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, обобщенные по переменной $\mathbf{k}$ [здесь $\mathbf{k}\in E^3$, $\varepsilon=\pm1$, $a(\mathbf{k}, 1, t)=a^+(\mathbf{k}, -1, t)$].

Будем говорить, что операторы $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ и вектор $\Phi\in\mathcal{H}$ образуют *опе-*

* В случае CCR при наложенных на коэффициентные функции условиях можно утверждать лишь, что выражение (28.3) определяет эрмитов оператор.

раторную реализацию ($\mathscr{H}$, $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, Φ) формального гамильтониана (28.2), если:

1. Операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ удовлетворяют гейзенберговским уравнениям, формально написанным по гамильтониану (28.2):

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial a(\mathbf{k}, -1, t)}{\partial t} = \sum_{m,n} m \int \Lambda_{m,n}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{m-1} | \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n) \times$$
$$\times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_{m-1}-\mathbf{l}_1-\ldots-\mathbf{l}_n)\, a(\mathbf{k}_1, 1, t) \ldots$$
$$\ldots a(\mathbf{k}_{m-1}, 1, t)\, a(\mathbf{l}_1, -1, t) \ldots (\mathbf{l}_n, -1, t)\, d^{m-1}\mathbf{k}\, d^n \mathbf{l};$$
$$\mathrm{i}\,\frac{\partial a(\mathbf{k}, 1, t)}{\partial t} = -\sum_{m,n} n \int \Lambda_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_{n-1}, \mathbf{k}) \times$$
$$\times \delta(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{l}_1-\ldots-\mathbf{l}_{n-1}-\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}_1, 1, t) \ldots$$
$$\ldots a(\mathbf{k}_m, 1, t)\, a(\mathbf{l}_1, -1, t) \ldots a(\mathbf{l}_{n-1}, 1, t)\, d^m\mathbf{k}\, d^{n-1}\mathbf{l}. \quad (28.4)$$

2. $$\exp(\mathrm{i}\,\tau\hat{H})\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t) \exp(-\mathrm{i}\,\tau\hat{H}) = a(\mathbf{k}, \varepsilon, t+\tau);$$
$$\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}})\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t) \exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}}) = \exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}\varepsilon)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t).$$

3. Операторы $a(f, \varepsilon, t) = \int f(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}, \varepsilon, t) d\mathbf{k}$, где $f \in \mathscr{S}(E^3)$, определены на всюду плотном подмножестве D пространства $\mathscr{H}$ и переводят это подмножество в себя; если $\Psi_1, \Psi_2 \in D$, то $\langle a(f, \varepsilon, t)\Psi_1, \Psi_2\rangle$ непрерывно зависит от $f \in \mathscr{S}(E^3)$. Операторы $a(f, \varepsilon, t)$ при фиксированном t задают представление CCR.

4. Вектор Φ является основным состоянием оператора энергии $\hat{H}$ и удовлетворяет условию $\hat{H}\Phi = \hat{\mathbf{P}}\Phi = 0$.

5. Вектор Φ является циклическим вектором семейства операторов $a(f, \varepsilon, t)$.

Отметим, что в силу условия 3 выражениям вида

$$\int f(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\, d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n,$$

где $f \in \mathscr{S}(E^{3n})$, можно придать смысл оператора, определенного на множестве D, с помощью операторного аналога теоремы о ядре (см. дополнение, § Д.7). Это замечание позволяет придать точный смысл правой части равенств (28.4) в случае, если функция $\Lambda_{1,1}(\mathbf{k})$ — гладкая и все производные ее имеют не более чем степенной рост, а остальные функции $\Lambda_{m,n}$ принадлежат пространству $\mathscr{S}$. Производная $\dfrac{\partial a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)}{\partial t}$ в левой части равенств понимается в слабом смысле.

Функции Уайтмана и Грина операторной реализации трансляционно инвариантного гамильтониана определим формулами

$$\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \langle a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\Phi, \Phi\rangle;$$
$$\check{G}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \langle T(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\Phi, \Phi\rangle.$$

Функции $\check{w}_n$ точнее следовало бы назвать функциями Уайтмана в $(\mathbf{k}, t)$-представлении. Их преобразования Фурье по переменным $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$ — функции

$$w_n(\mathbf{x}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{3}{2}n} \int \exp(\mathrm{i} \sum \varepsilon_j \mathbf{x}_j \mathbf{k}_j)\, \check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\, d^n\mathbf{k}$$

будем называть функциями Уайтмана в $(\mathbf{x}, t)$-представлении, а преобразования Фурье по переменным $t_1, \ldots, t_n$

$$\tilde{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \omega_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, \omega_n) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int \exp(\mathrm{i} \sum \varepsilon_j \omega_j t_j)\, \check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\, d^n t$$

— функциями Уайтмана в $(\mathbf{x}, \omega)$-представлении. Аналогично определяются функции Грина в $(\mathbf{x}, t)$- и $(\mathbf{k}, \omega)$-представлениях; они обозначаются G_n и $\tilde{G}_n$.

В следующих параграфах этой главы будут определены функции Уайтмана и Грина трансляционно инвариантного гамильтониана предельным переходом от конечного объема и установлена их связь с определенными выше функциями Уайтмана и Грина операторной реализации трансляционно инвариантного гамильтониана. Будет показано также, каким образом операторную реализацию можно построить предельным переходом от конечного объема. В главе 11 рассмотрен вопрос о построении операторной реализации по теории возмущений.

Здесь же ограничимся тем, что напишем представление Челлена—Лемана для функций $\check{w}_2(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)$ и $\check{G}_2(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)$.

Для этого фиксируем полную систему обобщенных собственных функций Ψ_λ операторов $\hat{H}$ и $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\hat{H}\Psi_\lambda = E(\lambda)\Psi_\lambda;$$
$$\hat{\mathbf{P}}\Psi_\lambda = \mathbf{k}(\lambda)\Psi_\lambda.$$

Докажем прежде всего, что обобщенная функция $\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\Phi, \Psi_\lambda\rangle$ имеет вид

$$\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\Phi, \Psi_\lambda\rangle = \exp(\mathrm{i}\,E(\lambda)\,t)\,\delta(\varepsilon\mathbf{k} - \mathbf{k}(\lambda))\,\rho(\varepsilon, \lambda). \quad (28.5)$$

В самом деле,

$$\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\Phi, \Psi_\lambda\rangle = \langle \exp(\mathrm{i}\,\hat{H}t)\,a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle =$$
$$= \langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \exp(-\mathrm{i}\hat{H}t)\Psi_\lambda\rangle =$$
$$= \exp(\mathrm{i}\,E(\lambda)\,t)\,\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle.$$

Функция $\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle$ удовлетворяет соотношению

$$\exp(\mathrm{i}\,\varepsilon\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k})\,\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle =$$
$$= \exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}(\lambda))\,\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle, \quad (28.6)$$

доказываемому преобразованиями

$$\langle \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle =$$
$$= \langle \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}})\,a(\mathbf{k}, \varepsilon)\exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}})\Phi, \Psi_\lambda\rangle =$$
$$= \langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}})\Psi_\lambda\rangle =$$
$$= \exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}(\lambda))\,\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle.$$

Из соотношения (28.6) вытекает, что функция $\langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi, \Psi_\lambda\rangle$ имеет вид $\rho(\varepsilon, \lambda)\delta(\varepsilon\mathbf{k} - \mathbf{k}(\lambda))$; это и доказывает нужное утверждение.

С помощью равенства (28.5) можно написать представление функции Уайтмана

$$\check{w}_2(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2) = \langle a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\,a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\Phi, \Phi\rangle =$$
$$= \langle a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\Phi, a(\mathbf{k}_1, -\varepsilon_1, t_1)\Phi\rangle =$$
$$= \int \langle a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\Phi, \Psi_\lambda\rangle\,\overline{\langle a(\mathbf{k}_1, -\varepsilon_1, t_1)\Phi, \Psi_\lambda\rangle}\,d\lambda =$$
$$= \int \exp(\mathrm{i}\,E(\lambda)(t_2 - t_1))\,\delta(\varepsilon_1\mathbf{k}_1 + \varepsilon_2\mathbf{k}_2)\,\delta(\varepsilon_1\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}(\lambda))\times$$
$$\times\rho(\varepsilon_2, \lambda)\,\overline{\rho(-\varepsilon_1, \lambda)}\,d\lambda. \quad (28.7)$$

Поскольку

$$\check{G}_2(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2) = \theta(t_1 - t_2)\,\check{w}_2(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2) \pm$$
$$\pm\,\theta(t_2 - t_1)\,\check{w}(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2, \mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1),$$

исходя из соотношения (28.7), получаем представление функций G_2 через функции $\rho(\varepsilon, \lambda)$ (представление Челлена—Лемана). В частности,

$$\check{G}_2(\mathbf{k}_1, 1, t_1, \mathbf{k}_2, -1, t_2) = \check{\mathrm{G}}(\mathbf{k}_1, t_1 - t_2)\,\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

где

$$\check{\mathrm{G}}(\mathbf{k}, t) = \theta(t)\int \exp(-\mathrm{i}\,E(\lambda)\,t)\,\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}(\lambda))\,|\rho(-1, \lambda)|^2\,d\lambda \pm$$
$$\pm\,\theta(-t)\int \exp(\mathrm{i}\,E(\lambda)\,t)\,\delta(-\mathbf{k} + \mathbf{k}(\lambda))\,|\rho(1, \lambda)|^2\,d\lambda. \quad (28.8)$$

Переходя к $(\mathbf{k}, \omega)$-представлению, можно написать

$$\tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, 1, \omega_1, \mathbf{k}_2, -1, \omega_2) = \mathrm{G}(\mathbf{k}_1, \omega_1)\,\delta(\omega_1 - \omega_2)\,\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

где

$$\mathrm{G}(\mathbf{k}, \omega) = \int \exp(\mathrm{i}\,\omega t)\,\check{\mathrm{G}}(\mathbf{k}, t)\,dt =$$
$$= \mathrm{i}\int \frac{|\rho(-1, \lambda)|^2}{\omega - E(\lambda) + \mathrm{i}\,0}\,\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}(\lambda))\,d\lambda \mp$$
$$\mp\,\mathrm{i}\int \frac{|\rho(+1, \lambda)|^2}{\omega + E(\lambda) - \mathrm{i}\,0}\,\delta(-\mathbf{k} + \mathbf{k}(\lambda))\,d\lambda. \quad (28.9)$$

§ 29. Теорема реконструкции

Функции Уайтмана $\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$ трансляционно инвариантного гамильтониана H определим соотношением

$$\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \lim_{\Omega\to\infty}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}n} w_n^\Omega(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) \quad (29.1)$$

(здесь $w_n^\Omega(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) = \langle a_{\mathbf{k}_1}^{\varepsilon_1}(t_1)\ldots$
$\ldots a_{\mathbf{k}_n}^{\varepsilon_n}(t_n)\Phi_\Omega, \Phi_\Omega\rangle -$

функции Уайтмана гамильтониана H_Ω, построенные по базису $\varphi_{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k} \in T_\Omega$). Соотношение (29.1) требует некоторых пояснений, поскольку в нем функция непрерывного аргумента определяется как предел функций аргумента, пробегающего решетку. Этот предел будем понимать в смысле обобщенных функций: для всякой основной функции $\varphi(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ должно выполняться соотношение

$$\int \varphi(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\, d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n =$$

$$= \lim_{\Omega \to \infty} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3n}{2}} \sum_{\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n \in T_\Omega} \varphi(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) w_n^\Omega(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n). \tag{29.2}$$

Будем предполагать, что предел (29.1) существует (существование этого предела может быть проверено в рамках теории возмущений).

Функции $\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$ считаем обобщенными функциями по переменным $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$ и обычными функциями по переменным $t_1, \ldots, t_n$.

Функции Грина $\check{G}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$ трансляционно инвариантного гамильтониана H определим так же, как и функции Уайтмана, с помощью предельного перехода от конечного объема Ω. Именно, положим

$$\check{G}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$

$$= \lim_{\Omega \to \infty} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{3n}{2}} G_n^\Omega(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n),$$

где $G_n^\Omega(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) = \langle T(a_{\mathbf{k}_1}^{\varepsilon_1}(t_1) \ldots a_{\mathbf{k}_n}^{\varepsilon_n}(t_n))\Phi_\Omega, \Phi_\Omega\rangle$ — функции Грина гамильтониана H_Ω, построенные по базису $\varphi_{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k} \in T_\Omega$. Предельный переход понимается так же, как соответствующий предельный переход в определении функций Уайтмана.

Функции Грина $\check{G}_n$ легко выразить через функции Уайтмана $\check{w}_n$ трансляционно инвариантного гамильтониана.

Именно, предельным переходом в соотношении (25.2), примененном к функциям G_n^Ω и w_n^Ω, получим равенство

$$\check{G}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$

$$= \sum_\pi (-1)^{\nu(\pi)} \theta_\pi(t) \check{w}_n^\pi(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) \tag{29.3}$$

(обозначения такие же, как в § 25).

Определение функций Грина в (x, t)-представлении G_n и в $(\mathbf{k}, \omega)$-представлении $\tilde{G}_n$ аналогично соответствующему определению для функций Уайтмана.

Легко видеть, что определенные в этом параграфе функции Уайтмана $\check{w}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$ трансляционно инвариантного гамильтониана H имеют следующие свойства.

1. Инвариантность при сдвиге по времени:

$$\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$

$$= \check{w}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1 + \tau, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n + \tau).$$

2. Эрмитовость:

$$\bar{\check{w}}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) = \check{w}(\mathbf{k}_n, -\varepsilon_n, t_n, \ldots, \mathbf{k}_1, -\varepsilon_1, t_1).$$

3. Положительная определенность.

Для любой последовательности основных функций $f_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$, отличных от нуля лишь для конечного числа индексов n, имеет место неравенство

$$\sum_{m, n} \sum_{\varepsilon_\alpha, \sigma_\beta} \int f_m(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \varepsilon_m, t_m) \bar{f}_n(\mathbf{q}_n, -\sigma_n, \tau_n, \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{q}_1, -\sigma_1, \tau_1) \check{w}_{m+n}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \varepsilon_m, t_m, \mathbf{q}_1, \sigma_1, \tau_1, \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{q}_n, \sigma_n, \tau_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{q}\, d^m t\, d^n\tau \geqslant 0.$$

4. Спектральность:

$$\int \exp(-i\omega a) \check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_r, \varepsilon_r, t_r, \mathbf{k}_{r+1}, \varepsilon_{r+1}, t_{r+1} + a, \ldots$$

$$\ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n + a)\, da = 0, \tag{29.4}$$

если $\omega < 0$. Соотношение (29.4) имеет место и при более слабом условии: ω не принадлежит спектру гамильтониана H.

5. Перестановка аргументов.

Введем обозначение

$$\check{w}_n^{(i)}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_i, \varepsilon_i, t_i, \mathbf{k}_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, t_{i+1}, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \pm \check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, t_{i+1}, \mathbf{k}_i, \varepsilon_i, t_i, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$$

(знак плюс — в случае CCR, минус — в случае CAR). Иными словами, $\check{w}_n^{(i)}$ получается из $\check{w}_n$ перестановкой $\mathbf{k}_i$, ε_i, t_i с $\mathbf{k}_{i+1}$, ε_{i+1}, t_{i+1} с изменением знака в случае CAR.

Если $t_i = t_{i+1}$, то

$$\check{w}_n^{(i)}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) = \check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) +$$
$$+ A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}\,\delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i')\,\check{w}_{n-2}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_{i-1}, \varepsilon_{i-1}, t_{i-1},$$
$$\mathbf{k}_{i+2}, \varepsilon_{i+2}, t_{i+2}, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) \qquad (29.5)$$

(определение матрицы $A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}$ см. в § 20).

6. Трансляционная инвариантность:

$$\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= v_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\,\delta\left(\sum \varepsilon_j \mathbf{k}_j\right)$$

[в $(\mathbf{x}, t)$-представлении это свойство записывается равенством $w_n(\mathbf{x}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \varepsilon_n, t_n) = w_n(\mathbf{x}_1 + a, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n + a, \varepsilon_n, t_n)$].

Все перечисленные свойства (за исключением свойства 6) без труда устанавливаются, если вспомнить, что функции $\check{w}_n$ получаются предельным переходом из функций $\check{w}_n^{\Omega}$, для которых аналогичные утверждения доказаны в § 24.

Теорема реконструкции. Существование. *По семейству функций $\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \ldots, t_n)$, обладающих свойствами 1—6, можно построить гильбертово пространство $\mathcal{H}$, 4 коммутирующих самосопряженных оператора $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, операторные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, обобщенные* по переменной $\mathbf{k}$, действующие в $\mathcal{H}$, и вектор $\Phi \in \mathcal{H}$ так, что будут выполнены следующие требования:*

а) $\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) = \langle a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\Phi, \Phi\rangle$;

б) $\exp(i\tau H)\; a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\exp(-i\tau H) = a(\mathbf{k}, \varepsilon, t+\tau)$, $\exp(i\alpha\mathbf{P})\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, \exp(-i\alpha\mathbf{P}) = \exp(i\varepsilon\alpha\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$;

* Пространством основных функций считаем пространство $\mathcal{S}(E^3)$ [т. е. всюду в формулировке теоремы функция $f \in \mathcal{S}(E^3)$].

в) *операторы $a(f, \varepsilon, t) = \int f(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, d\mathbf{k}$ определены на всюду плотном подмножестве D пространства $\mathcal{H}$ и переводят это подмножество в себя; операторы $a(f, \varepsilon, t)$ при фиксированном t задают представление* CR; *выражение $\langle a(f, \varepsilon, t)\Psi_1, \Psi_2\rangle$ непрерывно зависит от f в топологии пространства $\mathcal{S}$ для всех $\Psi_1, \Psi_2 \in D$;*

г) *вектор Φ является основным состоянием оператора энергии $\hat{H}$ и удовлетворяет условиям $H\Phi = 0$ и $\mathbf{P}\Phi = 0$;*

д) *вектор Φ является циклическим относительно операторов $a(f, \varepsilon, t)$.*

Единственность. *Если $\mathcal{H}_i$, H_i, $\mathbf{P}_i$, $a_i(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, Φ_i — два набора ($i = 1, 2$) объектов, удовлетворяющих условиям* а), б) *и* в) *теоремы реконструкции, то существует унитарный оператор U, отображающий пространство $\mathcal{H}_1$ на пространство $\mathcal{H}_2$ и удовлетворяющий условиям: $U\Phi_1 = \Phi_2$, $U\hat{H}_1 = \hat{H}_2 U$, $U\hat{\mathbf{P}}_1 = \hat{\mathbf{P}}_2 U$, а также соотношению $Ua_1(f, \varepsilon, t) = a_2(f, \varepsilon, t)U$ на некотором всюду плотном подмножестве пространства $\mathcal{H}_1$ (иными словами, оба набора изоморфны).*

Доказательство начнем со второй части теоремы. Рассмотрим множество $\mathcal{N}$ таких последовательностей функций $f = \{f_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\}$, что: 1) каждая из функций f_n является линейной комбинацией функций вида

$$\lambda_1(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)\delta(t_1 - \tau_1) \ldots \lambda_m(\mathbf{k}_m, \varepsilon_m)\delta(t_m - \tau_m),$$

где $\lambda_i(\mathbf{k}_i, \varepsilon_i)$ — основные функции; 2) только конечное число функций f_n отлично от нуля. Каждой последовательности $f \in \mathcal{N}$ сопоставим векторы Ψ_f^i, где $i = 1, 2$, по формуле

$$\Psi_f^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} \int f_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\, a_i(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1) \ldots$$
$$\ldots a_i(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)\, d^n\mathbf{k}\, d^n t.$$

Совокупность векторов Ψ_f^i, где $f \in \mathcal{N}$, обозначим D_i. Скалярное произведение $\langle \Psi_f^i, \Psi_g^i\rangle$ двух векторов из совокупности D_i легко выразить через последовательности f, g и функции Уайтмана:

$$\langle \Psi_f^i, \Psi_g^i\rangle = \sum_{m,\, n} \sum_{\varepsilon_\alpha, \sigma_\alpha} \int f_m(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \varepsilon_m, t_m) \times$$
$$\times \bar{f}_n(\mathbf{q}_1, \sigma_1, \tau_1, \ldots, \mathbf{q}_n, \sigma_n, \tau_n)\, \check{w}_{m+n}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{k}_m, \varepsilon_m, t_m, \mathbf{q}_n, -\sigma_n, \tau_n, \ldots, \mathbf{q}_1, -\sigma_1, \tau_1)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{q}\, d^m t\, d^n\tau. \qquad (29.6)$$

Без труда проверяется, что

$$a_i(\varphi)\Psi_f^i = \Psi_{\varphi f}^i \qquad (29.7)$$

[здесь $\varphi = \varphi(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = \lambda(\mathbf{k}, \varepsilon)\delta(t - \tau)$, где $\lambda(\mathbf{k}, \varepsilon)$ — основная функция, $a_i(\varphi) = \sum_{\varepsilon}\int \varphi(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, a_i(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, d\mathbf{k}\, dt = \sum_{\varepsilon}\int \lambda(\mathbf{k}, \varepsilon)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, \tau)\, d\mathbf{k}$, $\varphi f \in \mathcal{N}$ — последовательность, n-й член которой равен $\varphi(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1) f_{n-1}(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)$]. Из условия б) вытекает, что

$$\exp(-i\hat{H}_i\tau)\Psi_f^i = \Psi_{V_\tau f}^i; \quad \exp(-i\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}})\Psi_f^i = \Psi_{W_\alpha f}^i, \qquad (29.8)$$

где $V_\tau f \in \mathcal{N}$ и $W_\alpha f \in \mathcal{N}$ задаются соответственно последовательностями функций с n-ми членами

$$f_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1 - \tau, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n - \tau),$$
$$\exp\left(-i\sum \alpha\mathbf{k}_j\varepsilon_j\right) f_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n).$$

Построим теперь оператор U на множестве D_1, положив

$$U\Psi_f^1 = \Psi_f^2.$$

В силу соотношения (29.6) этот оператор сохраняет скалярное произведение, поэтому его можно по непрерывности продолжить в унитарный оператор, отображающий $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Из соотношений (29.7) и (29.8) следует, что построенный оператор удовлетворяет нужным требованиям.

Проведенное доказательство второй части теоремы указывает путь к доказательству первой ее части.

Итак, пусть задана система функций Уайтмана $\check{w}$. Введем в множестве $\mathcal{N}$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \sum_{m,n}\sum_{\varepsilon_\alpha, \sigma_\beta}\int f_m(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \varepsilon_m, t_m)\, \bar{f}_n(\mathbf{q}_1, \sigma_1, \tau_1, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{q}_n, \sigma_n, \tau_n)\, \check{w}_{m+n}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \varepsilon_m, t_m, \mathbf{q}_n, -\sigma_n, \tau_n, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{q}_1, -\sigma_1, \tau_1)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{q}\, d^m t\, d^n\tau.$$

В силу свойства 3 $\langle f, f\rangle \geqslant 0$. Элементы $f, g \in \mathcal{N}$ назовем эквивалентными ($f \sim g$), если $\langle f - g, f - g\rangle = 0$. Множество классов эквивалентности обозначим через D, класс эквивалентности элемента $f \in \mathcal{N}$ обозначим через Ψ_f. Иными словами, множество D состоит из символов Ψ_f, где $f \in \mathcal{N}$, причем символы Ψ_f и Ψ_g задают один и тот же элемент множества D, если $f \sim g$. Скалярное произведение элементов $\Psi_f, \Psi_g \in D$ определим формулой $\langle\Psi_f, \Psi_g\rangle = \langle f, g\rangle$. Один и тот же элемент множества D может быть разными способами представлен в виде Ψ_f, однако скалярное произведение в D не зависит от выбора представления, поскольку из соотношений $f \sim f'$, $g \sim g'$ следует, что $\langle f, g\rangle = \langle f', g'\rangle$. (Аналогичные рассуждения — проверку корректности определения — приходится проводить и для других операций в D.) Линейную комбинацию элементов из D определяем формулой

$$\lambda\Psi_f + \mu\Psi_g = \Psi_{\lambda f + \mu g};$$

при этом линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ последовательностей f и g определяется обычным образом (почленно). Таким образом, множество D стало предгильбертовым пространством.

В пространстве D определим операторную обобщенную функцию $a(f, \varepsilon, t) = \int f(\mathbf{k}) a(k, \varepsilon, t)\, d\mathbf{k}$, положив $a(f, \varepsilon, t)\Psi_g = \Psi_{\varphi g}$, где $\varphi(\mathbf{k}, \sigma, \tau) = f(\mathbf{k})\delta_{\sigma,\varepsilon}\delta(t - \tau)$, и семейства операторов $\tilde{V}_\tau$, $\tilde{W}_\alpha$, положив $\tilde{V}_\tau\Psi_g = \Psi_{V_\tau g}$, $\tilde{W}_\alpha\Psi_g = \Psi_{W_\alpha g}$.

Определим теперь гильбертово пространство $\mathcal{H}$ как пополнение предгильбертова пространства D.

Операторы $\tilde{V}_\tau$, $\tilde{W}_\alpha$, как легко проверить, отображают множество D на себя и сохраняют скалярное произведение, поэтому их можно по непрерывности продолжить в унитарные операторы в пространстве $\mathcal{H}$. Получим соответственно однопараметрическую и трехпараметрическую группы унитарных операторов в $\mathcal{H}$; их производящие операторы обозначим через $\hat{H}$ и $\hat{\mathbf{P}}$ [иными словами, $\tilde{V}_\tau = \exp(-iH\tau)$, $\tilde{W}_\alpha = \exp(-i\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{P}})$]. Символом Φ будем обозначать вектор Ψ_θ, где θ — последовательность, у которой $f_0 = 1$, $f_n = 0$ при $n > 0$. Операторные обобщенные функции $a(f, t, \varepsilon)$ уже определены на плотном множестве $D \subset \mathcal{H}$.

Таким образом, по функциям Уайтмана построены все объекты, существование которых утверждается в теореме реконструкции. Тривиально проверяется, что они обладают всеми нужными свойствами. Единственный пункт, требующий некоторых разъяснений, — это доказательство того, что вектор Φ является основным состоянием гамильтониана $\hat{H}$. Выведем этот факт из следующей леммы.

Число ω не принадлежит к спектру оператора $\hat{H}$, в том и только в том случае, если для всех функций Уайтмана

$$\int \exp(-i\omega\tau)\,\check{w}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_i, \varepsilon_i, \tau_i, \mathbf{k}_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, t_{i+1}+\tau, \ldots \\ \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n+\tau)\,d\tau = 0. \qquad (29.9)$$

В силу свойства 4 функций Уайтмана из леммы следует неотрицательность оператора $\hat{H}$. Поскольку $\hat{H}\Phi = 0$, ясно, что Φ — основное состояние.

Для доказательства леммы заметим прежде всего, что функции $\check{w}_n$ являются функциями Уайтмана оператора $\hat{H}$ относительно операторной обобщенной функций $a(\mathbf{k}, \cdot, t)$ в смысле § 24 и, следовательно, в силу свойства 4 (§ 24), если ω не принадлежит спектру оператора $\hat{H}$, выполняется соотношение (29.9). Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно проверить, что для гладкой финитной функции $\chi(\omega)$, не равной нулю лишь при ω, удовлетворяющих соотношению (29.9), выполнено равенство $\int \tilde{\chi}(t)\exp(i\hat{H}t)dt = 0$, где $\tilde{\chi}(t) = \int \exp(-i\omega t)\chi(\omega)d\omega$ (см. дополнение, § Д.5). Легко убедиться, что

$$\int \tilde{\chi}(t)\langle \exp(i\hat{H}t)\Psi_1, \Psi_2\rangle\,dt = 0,$$

если $\Psi_i = a(f_1^{(i)}, \varepsilon_1^{(i)}, t_1^{(i)}) \ldots a(f_{n_i}^{(i)}, \varepsilon_{n_i}^{(i)}, t_{n_i}^{(i)})\,\Phi$; для этого достаточно выразить

$$\int \tilde{\chi}(t)\langle \exp(iHt)\Psi_1, \Psi_2\rangle\,dt = \\ = \int \chi(\omega)\langle \exp(i(\hat{H}-\omega)t)\Psi_1, \Psi_2\rangle\,d\omega\,dt$$

через функции Уайтмана. В силу цикличности вектора Φ из доказанного соотношения вытекает, что $\int \tilde{\chi}(t) \times \exp(i\hat{H}t)\,dt = 0$.

Таким образом теорема реконструкции доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что всякая точка спектра оператора $\hat{H}$ принадлежит спектру трансляционно инвариантного гамильтониана H в смысле § 28. Аналогично доказывается следующее утверждение: если точка $(\mathbf{k}, E)$ принадлежит спектру семейства коммутирующих операторов $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{H})$, то у гамильтониана H существует уровень энергии E с импульсом $\mathbf{k}$.

В заключение убедимся, что при некоторых условиях пространство $\mathscr{H}$, операторы $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ и вектор Φ, построенные при доказательстве теоремы реконструкции, образуют операторную реализацию трансляционно инвариантного гамильтониана H в смысле § 28. Именно докажем, что это утверждение имеет место, если в формуле (28.2), задающей гамильтониан H, функция $\Lambda_{1,1}(\mathbf{k})$ — гладкая, все производные ее имеют не более чем степенной рост, а остальные функции $\Lambda_{m,n}$ принадлежат пространству $\mathscr{S}$ (как замечено в § 28, при этих условиях уравнения (28.4) имеют точный смысл). Для того чтобы провести доказательство, достаточно проверить, что операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, фигурирующие в теореме реконструкции, удовлетворяют гейзенберговским уравнениям (28.4), формально написанным по гамильтониану H (остальные условия определения операторной реализации выполнены в силу теоремы реконструкции). Эту проверку легко осуществить, заметив, что функции Уайтмана, построенные по гамильтониану H, подчиняются уравнениям

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1}\check{w}_r(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_r, \varepsilon_r, t_r) = \\ = \delta_1^{\varepsilon_1}\sum_{m,n} n\int \Lambda_{m,n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{k}_1)\,\delta(\mathbf{p}_1+\ldots+ \\ +\mathbf{p}_m-\mathbf{q}_1-\ldots-\mathbf{q}_{n-1}-\mathbf{k}_1)\,\check{w}_{r+m+n-2}(\mathbf{p}_1, 1, t_1, \ldots \\ \ldots, \mathbf{p}_m, 1, t_1, \mathbf{q}_1, -1, t_1, \ldots, \mathbf{q}_{n-1}, -1, t_1, \\ \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2, \ldots, \mathbf{k}_r, \varepsilon_r, t_r)\,d^m\mathbf{p}\,d^{n-1}\mathbf{q} - \\ -\delta_{-1}^{\varepsilon_1}\sum_{m,n} m\int \Lambda_{m,n}(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{m-1} \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) \times \\ \times\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{p}_1+\ldots+\mathbf{p}_{m-1}-\mathbf{q}_1-\ldots-\mathbf{q}_n)\,\check{w}_{r+m+n-2}(\mathbf{p}_1, 1, t_1, \ldots \\ \ldots, \mathbf{p}_{m-1}, 1, t_1, \mathbf{q}_1, -1, t_1, \ldots, \mathbf{q}_n, -1, t_1, \mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2, \ldots \\ \ldots, \mathbf{k}_r, \varepsilon_r, t_r)\,d^{m-1}\mathbf{p}\,d^n\mathbf{q} \qquad (29.10)$$

и аналогичным уравнениям для производных по другим временным аргументам. (Уравнения (29.10) получаются, если, следуя рассуждениям § 27, написать уравнения для функций w_r^{Ω} и перейти в них к пределу $\Omega \to \infty$; условия, наложенные на функции $\Lambda_{m,n}$, обеспечивают возможность перехода к пределу, поскольку предполагается, что w_r^{Ω} стремится к $\check{w}_r$ в смысле обобщенных функций.) Из уравнений

(29.10) без труда выводятся гейзенберговские уравнения (28.4); для вывода достаточно выразить через функции Уайтмана величину

$$\left\langle \frac{d}{dt}\, a(f,\, t)\, \Psi_\alpha,\ \Psi_\beta \right\rangle,$$

где $\alpha,\ \beta \in \mathcal{N}$, воспользовавшись при этом уравнениями типа (29.10).

Из доказанного утверждения вытекает, что функции Уайтмана трансляционно инвариантного гамильтониана, определенные в § 29, являются функциями Уайтмана операторной реализации этого гамильтониана в смысле, указанном в § 28. Аналогичное утверждение справедливо для функций Грина. В дальнейшем будем пользоваться определением § 28, но употреблять более короткий термин § 29.

Кроме функций Уайтмана и Грина в квантовой теории поля важную роль играют функции Швингера, определение которых будет сейчас дано.

Рассмотрим операторы $\exp(iH\tau)$, где τ — комплексное число. В силу неотрицательности оператора H эти операторы ограничены, если τ лежит в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$). Поэтому естественно сделать предположение, что при условии $\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$ оператор $\exp(iH\tau)$ переводит множество D в себя; тогда, в частности, этим свойством обладает оператор $\exp(-H\sigma)$, где $\sigma \geqslant 0$. При этом предположении можно определить функции Швингера соотношением

$$S_n(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, t_1,\, \ldots,\, \mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, t_n) = \langle a(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, 0)\exp(-H(t_1-t_2)) \times$$
$$\times\, a(\mathbf{k}_2,\, \varepsilon_2,\, 0)\ldots \exp(-H(t_{n-1}-t_n))\, a(\mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, 0)\,\Phi,\ \Phi\rangle$$

(считаем, что $t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_n$). Впрочем, функции Швингера можно определить и без дополнительных предположений. В самом деле, в силу инвариантности при сдвиге по времени функцию Уайтмана $\check{w}_n$ можно записать в виде

$$\check{w}_n(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, t_1,\, \ldots,\, \mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, t_n) = \check{v}_n(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, \ldots,$$
$$\mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, t_2-t_1,\, \ldots,\, t_n-t_{n-1}).$$

Функция $\check{v}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ аналитически продолжается по переменным $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ в область $\operatorname{Im}\tau_1 \geqslant 0, \ldots, \operatorname{Im}\tau_{n-1} \geqslant 0$ (чтобы убедиться в этом, следует представить $\check{v}_n$ в форме

$$\check{v}_n(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, \ldots,\, \mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, \tau_1,\, \ldots,\, \tau_{n-1}) =$$
$$= \int \exp\left(i \sum_j \omega_j \tau_j \right) \tilde{v}_n(\mathbf{k}_1,\, \ldots,\, \varepsilon_n,\, \omega_1,\, \ldots,\, \omega_{n-1})\, d^{n-1}\omega$$

и заметить, что в силу условия спектральности носитель функции v_n содержится в множестве $\omega_1 \geqslant 0, \ldots, \omega_{n-1} \geqslant 0$). Аналитическое продолжение функции $\tilde{v}_n$ будем обозначать тем же символом, что и саму функцию.

Функции Швингера определяются теперь равенством

$$S_n(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, t_1,\, \ldots,\, \mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, t_n) =$$
$$= \check{v}_n(\mathbf{k}_1,\, \varepsilon_1,\, \ldots,\, \mathbf{k}_n,\, \varepsilon_n,\, i(t_1-t_2),\, \ldots,\, i(t_{n-1}-t_n))$$

(это определение имеет смысл при $t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_n$).

Легко указать свойства функций Швингера, аналогичные перечисленным выше свойствам функций Уайтмана, и доказать аналог теоремы реконструкции для функций Швингера; не будем на этом останавливаться.

§ 30. Взаимодействия вида $V(\varphi)$

В этом параграфе рассмотрен важный класс трансляционно инвариантных гамильтонианов. Гамильтонианы этого класса возникают при квантовании классических систем с бесконечным числом степеней свободы; они могут быть приведены к виду (28.2), что позволяет применить для их изучения результаты исследования гамильтонианов вида (28.2).

В настоящем параграфе будет удобно отказаться от принятого в книге условия $\hbar = 1$.

Напомним, что при квантовании классической механической системы с функцией Гамильтона вида

$$\mathscr{H}(p,\, q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^2}{2} + U(q_1,\, \ldots,\, q_n), \tag{30.1}$$

где p_k — обобщенные импульсы, q_k — обобщенные координаты, возникает квантовомеханическая система, описываемая гамильтонианом

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\, \hat{p}_k^2 + U(\hat{q}_1,\, \ldots,\, \hat{q}_n), \tag{30.2}$$

где $\hat{p}_k$, $\hat{q}_k$ — самосопряженные операторы, подчиненные коммутационным соотношениям

$$[\hat{p}_k,\, \hat{p}_l] = [\hat{q}_k,\, \hat{q}_l] = 0; \quad [\hat{p}_k,\, \hat{q}_l] = \frac{\hbar}{i}\, \delta_{kl}$$

(в качестве операторов $\hat{p}_k, \hat{q}_k$ можно выбрать операторы в пространстве квадратично интегрируемых функций $\psi(q_1, \ldots, q_n)$, определяемые формулами $\hat{p}_k\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_k}\psi$; $\hat{q}_k\psi = q_k\psi$).

Гейзенберговские операторы $\hat{p}_k(t) = \exp(iHt)\hat{p}_k\exp(-iHt)$, $\hat{q}_k(t) = \exp(iHt)\hat{q}_k\exp(-iHt)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}(\hat{q}_1(t), \ldots, \hat{q}_n(t));$$

$$\frac{d\hat{q}_k(t)}{dt} = \hat{p}_k(t).$$

Рассмотрим теперь аналог классической системы с функцией Гамильтона (30.1) для случая бесконечного числа степеней свободы. Именно, пусть классическая система описывается функционалом Гамильтона

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\int \pi^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + V(\varphi);$$

$$V(\varphi) = \sum_n \int V_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)\,\varphi(\mathbf{x}_1)\ldots\varphi(\mathbf{x}_n)\,d\mathbf{x}_1, \ldots, d\mathbf{x}_n$$

где $\pi(\mathbf{x})$ — обобщенные импульсы; $\varphi(\mathbf{x})$ — обобщенные координаты. Ради определенности будем считать, что $\mathbf{x}$ пробегает трехмерное евклидово пространство, и рассматривать только трансляционно инвариантный случай [т. е. будем полагать, что функции $V_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ имеют вид $v_n(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n, \ldots, \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n)$]. Естественно предположить, что при квантовании такой системы возникает квантовая система, описываемая гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \sum_n \int V_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}_1)\ldots\hat{\varphi}(\mathbf{x}_n)\,d\mathbf{x}_1\ldots d\mathbf{x}_n, \tag{30.3}$$

где $\hat{\pi}(\mathbf{x})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ — эрмитовы операторы (точнее, операторные обобщенные функции), удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{x}')] = [\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x}')] = 0;$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x}')] = \frac{\hbar}{i}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{30.4}$$

Однако, пытаясь корректно описать эту квантовую систему, сталкиваемся с трудностями, уже встретившимися при изучении гамильтонианов вида (28.2): имеется много существенно различных систем операторов, удовлетворяющих соотношениям (30.4); при наиболее простых конструкциях операторов $\hat{\pi}(\mathbf{x})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ выражение (30.3), как правило, не определяет оператора. Эти трудности могут быть преодолены аналогичными способами. Здесь остановимся только на способе, основанном на решении гейзенберговских уравнений, формально написанных по гамильтониану (30.3).

Именно, будем рассматривать гамильтониан H вида (30.3) как формальное выражение и определим *операторную реализацию* гамильтониана H как совокупность гильбертова пространства $\mathscr{H}$, оператора энергии $\hat{H}$, оператора импульса $\hat{\mathbf{P}}$, вектора Φ и операторных функций $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, обобщенных по переменной $\mathbf{x}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $$\frac{\partial^2\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\sum_n n\int V_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \times \hat{\varphi}(\mathbf{x}_1, t)\ldots\hat{\varphi}(\mathbf{x}_{n-1}, t)\,d\mathbf{x}_1\ldots d\mathbf{x}_{n-1}. \tag{30.5}$$

2. $$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}\right)\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\tau\hat{H}\right) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t+\tau);$$

$$\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\mathbf{a}\hat{\mathbf{P}}\right)\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\hat{\mathbf{P}}\right) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}+\mathbf{a}, t).$$

3. Операторы $\hat{\varphi}(f, t) = \int f(\mathbf{x})\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x}$ и $\hat{\pi}(f, t) = \frac{d}{dt}\varphi(f, t) = \int f(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x}$, где $f \in \mathscr{S}(E^3)$, определены на всюду плотном подмножестве D пространства $\mathscr{H}$ и переводят это подмножество в себя; если функция f действительна, то эти операторы эрмитовы. Выражения $\langle\hat{\varphi}(f, t)\Psi_1, \Psi_2\rangle$ и $\langle\hat{\pi}(f, t)\Psi_1, \Psi_2\rangle$ непрерывно зависят от функции $f \in \mathscr{S}(E^3)$ в топологии пространства $\mathscr{S}(E^3)$ для любых $\Psi_1, \Psi_2 \in D$. При всех t выполнены соотношения

$$[\hat{\pi}(f, t), \hat{\pi}(f', t)] = [\hat{\varphi}(f, t), \hat{\varphi}(f', t)] = 0;$$

$$[\hat{\pi}(f, t), \hat{\varphi}(f', t)] = \frac{\hbar}{i}\int f(\mathbf{x})f'(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

4. Операторы $\hat{H}$, $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$ коммутируют. Вектор Φ является основным состоянием оператора энергии $\hat{H}$ и удовлетворяет условиям $H\Phi = 0$, $\hat{\mathbf{P}}\Phi = 0$.

5. Вектор Φ является циклическим вектором семейства операторов $\hat{\varphi}(f, t)$.

Вопрос о придании точного смысла уравнениям (30.5) в наиболее простых случаях может быть разрешен так же, как и в § 28, с помощью операторного аналога теоремы о ядре.

Для гамильтонианов вида

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int v(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\hat{\varphi}(\mathbf{x})\,\hat{\varphi}(\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} \quad (30.6)$$

(свободных гамильтонианов) операторную реализацию легко построить. В самом деле, предположим, что функция $\check{v}(\mathbf{k}) = \int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ почти везде положительна (если это условие не выполнено, то операторной реализации гамильтониана H_0 не существует; см. § 2 в [23]). Пусть $\mathscr{H}$, $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, Φ, $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ — операторная реализация гамильтониана H_0. Построим операторные обобщенные функции

$$a(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = \hbar^{-1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega(\mathbf{k})}\,\check{\varphi}(\varepsilon\mathbf{k}, t) + \frac{i\varepsilon}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}}\check{\pi}(\varepsilon\mathbf{k}, t)\right],$$

где $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\check{v}(\mathbf{k})}$; $\check{\varphi}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x})\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$; $\check{\pi}(\mathbf{k}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\check{\varphi}(\mathbf{k}, t)$. Легко проверить, что эти операторные обобщенные функции вместе с операторами $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ и вектором Φ образуют операторную реализацию гамильтониана $\hbar\int \omega(\mathbf{k})a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k})d\mathbf{k}$ в смысле § 28. Это подсказывает следующую конструкцию операторной реализации гамильтониана (30.6). В качестве пространства $\mathscr{H}$ следует взять фоковское пространство $F(L^2(E^3))$, операторы энергии $\hat{H}$ и импульса $\hat{\mathbf{P}}$ определить формулами

$$\hat{H} = \hbar\int \omega(\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})\,d\mathbf{k};$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \hbar\int \mathbf{k}a^+(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})\,d\mathbf{k},$$

а операторную обобщенную функцию $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ — соотношением

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2}\hbar^{1/2}\int (a^+(\mathbf{k})\exp(i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\mathbf{x}) + a(\mathbf{k})\exp(-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{x}))\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}}.$$

Основное состояние Φ совпадает с фоковским вакуумом θ. Легко видеть, что перечисленные объекты действительно удовлетворяют условиям определения операторной реализации и что любая другая операторная реализация унитарно эквивалентна описанной (подробнее см. [23]).

Рассмотрим теперь произвольный гамильтониан H вида (30.3) и выразим его через символы $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, удовлетворяющие CCR, полагая

$$\left.\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\hbar^{1/2}\int (a^+(\mathbf{k})\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) + a(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}))\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}};\\ \hat{\pi}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\hbar^{1/2}\int \frac{i\sqrt{\omega(\mathbf{k})}}{\sqrt{2}}(a^+(\mathbf{k})\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) - a(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}))\,d\mathbf{k}, \end{aligned}\right\} \quad (30.7)$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — почти везде положительная функция. Найденное выражение приведем к нормальной форме с помощью CCR; получающуюся при этом константу (вообще говоря, бесконечную) отбросим. В результате имеем формальное выражение $\tilde{H}$ вида (28.2).

Легко видеть, что задача о построении операторной реализации гамильтониана H эквивалентна задаче о построении операторной реализации гамильтониана $\tilde{H}$. Например, если $\mathscr{H}$, $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, Φ, $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ — операторная реализация гамильтониана $\tilde{H}$, то операторную реализацию гамильтониана H можно получить, оставив прежними гильбертово пространство $\mathscr{H}$, операторы $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, вектор Φ и определив операторные обобщенные функции $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ формулой

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2}\hbar^{1/2}\int (a(\mathbf{k}, 1, t)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) + a(\mathbf{k}, -1, t)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}))\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}}.$$

Это замечание позволяет перенести на гамильтониан вида (30.3) все, что известно для гамильтонианов вида (28.2).

ГЛАВА 9

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА (ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ)

§ 31. Матрица рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана в фоковском пространстве

В этой главе изложены основные положения теории рассеяния для трансляционно инвариантного гамильтониана; часть из них приведена с доказательствами, не претендующими на полную математическую строгость (§ 32, 35), другие сообщены почти без доказательств (§ 31, 33, 34). В дальнейшем на базе аксиоматической теории рассеяния доказано большинство результатов этой главы (см. гл. 11).

Для того чтобы построить матрицу рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана, нельзя прямо применить общую конструкцию формальной теории рассеяния (§ 17). Первым препятствием для применения этой конструкции является то, что такой гамильтониан может определять самосопряженный оператор в фоковском пространстве лишь при отсутствии поляризации вакуума (§ 28); однако даже для трансляционно инвариантных гамильтонианов, определяющих оператор в фоковском пространстве, трудности остаются. Эти трудности связаны с тем, что в рассматриваемом случае, как правило, не существует естественного деления гамильтониана H на «свободный» гамильтониан H_0 и «взаимодействие» V.

В качестве гамильтониана H_0 разумно выбрать гамильтониан вида $\int \varepsilon(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, поскольку такой гамильтониан описывает систему невзаимодействующих тождественных частиц. Будем считать поэтому, что трансляционно инвариантный гамильтониан H, определяющий оператор в фоковском пространстве $F(L^2(E^3))$, представлен в виде $H = H_0 + V$, где

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \int \varepsilon(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};\\ V &= \sum_{m,n\geqslant 1} \int V_{m,n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)\, a^+(\mathbf{k}_1)\ldots\\ &\qquad \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{p}_1)\ldots a(\mathbf{p}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p} \end{aligned}\right\} \quad (31.1)$$

[здесь $V_{m,n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n) = v_{m,n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)\, \delta(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{p}_1-\ldots-\mathbf{p}_n)$].

Однако деление гамильтониана H на слагаемые H_0 и V, как мы увидим, имеет физический смысл лишь при условии $v_{m,1} \equiv 0$; в противном случае такое деление диктуется лишь соображениями удобства и может быть произведено разными способами.

Имеет место следующее утверждение: *если* $V_{m,1} \not\equiv 0$ (т. е. во «взаимодействии» есть слагаемые, содержащие только один оператор уничтожения), *то матрицы Мёллера* $S_\pm$ *не могут быть определены соотношениями формальной теории рассеяния* (17.1), (17.2). В самом деле, если существует предел, фигурирующий в соотношениях (17.1), (17.2), то для любого вектора $x \in F$

$$\lim_{\substack{t_1,\, t_2 \to -\infty\\ (t_1,\, t_2 \to +\infty)}} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \exp(\mathrm{i}Ht)\, V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x\, dt \right\| = 0.$$

[Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться соотношением

$$\exp(\mathrm{i}tH)\, V \exp(-\mathrm{i}tH_0)\, x = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{d\xi(t)}{dt},$$

где $\xi(t) = \exp(\mathrm{i}Ht)\exp(\mathrm{i}H_0 t)\, x$, и, следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} \exp(\mathrm{i}Ht)\, V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x\, dt = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\xi(t_2) - \xi(t_1)\right).]$$

Заметим, однако, что при $x = \int f(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\theta$

$$\left\| \frac{d\xi}{dt} \right\| = \| \exp(\mathrm{i}Ht)\, V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x \| = \| V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x \|$$

не зависит от t. Действительно, в этом случае

$$\exp(\mathrm{i}H_0 t)\, x = \int \exp(\mathrm{i}\varepsilon(\mathbf{k})\, t)\, f(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\theta;$$

$$V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)\, x = \sum_n \int f_n(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n \mid t)\, a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_n)\, d^n\mathbf{k}\theta,$$

где

$$\begin{aligned} f_n(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n \mid t) &= \\ = v_{n,1}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n \mid \mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n)\, f(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n) &\exp(-\mathrm{i}t\varepsilon(\mathbf{k}_1+\\ &+\ldots+\mathbf{k}_n)). \end{aligned}$$

Если заметить, что

$$\| V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)x\| = \sum_n n! \int |f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n | t)|^2 d^n\mathbf{k},$$

независимость $\left\| \frac{d\xi}{dt} \right\|$ от t становится очевидной. Те же самые рассуждения показывают, что $\left\| \frac{d^2\xi}{dt^2} \right\| = \left\| \frac{d}{dt} (\exp(\mathrm{i}Ht) \times \times V \exp(-\mathrm{i}H_0 t)x) \right\| = \| \exp(-\mathrm{i}Ht)(HV - VH_0) \times \times \exp(-\mathrm{i}H_0 t)x\| = \|(HV - VH_0)\exp(-\mathrm{i}H_0 t)x\|$ не зависит от t. Теперь для проверки нужного утверждения достаточно применить к вектору $\eta(t) = \frac{d\xi}{dt}$ следующую лемму: *если* $\|\eta(t)\|$ *не зависит от* t *и* $\left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|$ *ограничена сверху, то* $\int_{t_1}^{t_2} \eta(t)\, dt$ *не может стремиться к нулю при* $t_1, t_2 \to \infty$.

Математический факт — невозможность дать определение матриц Мёллера таким же образом, как в теории потенциального рассеяния, — имеет ясную физическую основу. Дело в том, что состояния $a^+(\mathbf{k})\theta$ — одночастичные состояния — в рассматриваемом случае собственные для гамильтониана H_0, но не для полного гамильтониана H. В § 19 введено понятие частицы (одночастичного состояния) для гамильтониана H как обобщенной векторной функции $\Phi(\mathbf{k})$, удовлетворяющей условиям (19.1)—(19.3).

С помощью этого понятия высказанное утверждение можно переформулировать следующим образом: обобщенная векторная функция $a^+(\mathbf{k})\theta$ является одночастичным состоянием гамильтониана H_0 (голым одночастичным состоянием), но не является одночастичным состоянием гамильтониана H (одетым одночастичным состоянием). В несовпадении голых и одетых частиц и лежит физическая причина необходимости модифицировать определение матрицы рассеяния.

Отметим, что в случае $v_{m,0} \equiv v_{m,1} \equiv 0$ голые частицы совпадают с одетыми, и необходимости в изменении определения матрицы рассеяния не возникает.

Укажем вкратце, каким образом можно произвести необходимые видоизменения определения матрицы рассеяния для трансляционно инвариантного гамильтониана, определяющего оператор в фоковском пространстве.

Сформулируем три определения матриц Мёллера $S_\pm$, пригодные в ситуации, когда нет различия между голыми и одетыми частицами (т. е. когда гамильтониан имеет вид (31.1) и $v_{m,1} \equiv 0$), и укажем, как каждое из этих определений переносится на рассматриваемый случай (если определены матрицы Мёллера $S_\pm$, то матрица рассеяния определяется формулой $S = S_+^* S_-$).

Первое из этих определений — то, из которого исходили в формальной теории рассеяния [см. (17.1), (17.2)]. Далее, можно определить матрицы Мёллера как сильные пределы адиабатических матриц Мёллера $S_{\alpha\pm}$ при $\alpha \to 0$. В § 17 указаны условия, при которых второе определение эквивалентно первому [см. (17.4), (17.5)]. Наконец, третье определение основано на предварительном введении in- и out-операторов с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}) &= \operatorname*{slim}_{t\to\mp\infty} \exp(\mathrm{i}\varepsilon(\mathbf{k})t)\, a(\mathbf{k}, t); \\ a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}) &= \operatorname*{slim}_{t\to\mp\infty} \exp(-\mathrm{i}\varepsilon(\mathbf{k})t)\, a^+(\mathbf{k}, t). \end{aligned}\right\} \qquad (31.2)$$

Если известны in- и out-операторы, то матрицы Мёллера могут быть определены соотношениями

$$\left.\begin{aligned} S_- a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}) &= a(\mathbf{k}) S_-, \quad S_-\theta = \theta; \\ S_+ a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}) &= a(\mathbf{k}) S_+, \quad S_+\theta = \theta \end{aligned}\right\} \qquad (31.3)$$

(об эквивалентности этого определения первому определению говорилось в § 19).

Начнем с переноса на рассматриваемый случай третьего определения. Предел, фигурирующий в (31.2), не существует при $v_{m,1} \not\equiv 0$; это становится ясным из выше доказанного отсутствия предела при $t \to \pm\infty$ у выражения

$$\exp(\mathrm{i}Ht)\exp(-\mathrm{i}H_0 t)\int f(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, \theta d\mathbf{k} =$$

$$= \int f(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\varepsilon(\mathbf{k})t)\, a^+(\mathbf{k}, t)\, \theta d\mathbf{k}.$$

Однако высказанные соображения не мешают существованию слабого предела у выражений вида $\exp(\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)\, a(\mathbf{k}, t)$. Поэтому in- и out-*операторы* (операторные обобщенные функции) $a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$, $a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$, $a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$, $a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$ определим соотношениями

$$a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}) = \operatorname*{wlim}_{t\to-\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)\, a(\mathbf{k}, t);$$

$$a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}) = \operatorname*{wlim}_{t\to-\infty} \overline{\Lambda(\mathbf{k})} \exp(-\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)\, a^+(\mathbf{k}, t);$$

$$a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}) = \operatorname*{wlim}_{t\to+\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)\, a(\mathbf{k}, t);$$

$$a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}) = \operatorname*{wlim}_{t\to+\infty} \overline{\Lambda(\mathbf{k})} \exp(-\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})t)\, a^+(\mathbf{k}, t),$$

где положительная функция $\omega(\mathbf{k})$ подбирается из условия существования предела, а функция $\Lambda(\mathbf{k})$ — из условия, чтобы операторы $a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$, $a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$ и $a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$, $a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$ удовлетворяли CR:

$$\left[a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}), a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}')\right]_{\mp} = \left[a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}), a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}')\right] = 0;$$

$$\left[a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}), a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}')\right]_{\mp} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Легко убедиться (см. § 32) в том, что векторные обобщенные функции $a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})\,\theta$ и $a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})\,\theta$ — одночастичные состояния гамильтониана H, и вывести из этого заключение, что функция $\omega(\mathbf{k})$ имеет смысл энергии одночастичного состояния:

$$Ha^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k})\,\theta = \omega(\mathbf{k})\, a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k})\,\theta.$$

Матрицы Мёллера по-прежнему определяются через in- и out-операторы соотношениями (31.3).

Второе определение может быть обобщено следующим образом. *Матрицами Мёллера* $S_{\pm}$ называются унитарные операторы, которые можно представить в виде

$$S_+ = \operatorname*{slim}_{\alpha\to 0} S_{\alpha+} U^*_{\alpha}; \qquad (31.4)$$

$$S_- = \operatorname*{slim}_{\alpha\to 0} S_{\alpha-} U_{\alpha}, \qquad (31.5)$$

где U_α — оператор вида

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\alpha}\int r(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\right), \qquad (31.6)$$

функция $r(\mathbf{k})$ подбирается из условия существования пределов (31.4), (31.5).

Если хотим определить непосредственно матрицу рассеяния, то можем воспользоваться соотношением

$$S = \operatorname*{slim}_{\alpha\to 0} U_\alpha S_\alpha U_\alpha, \qquad (31.7)$$

где S_α — адиабатическая S матрица, оператор U_α имеет вид (31.6) и функция $r(\mathbf{k})$ подбирается из условия существования предела (31.7).

Наконец, для первого определения можно указать следующее обобщение.

Матрицами Мёллера $S_{\pm}$ называются операторы вида

$$S_{\pm} = \operatorname*{slim}_{t\to\pm\infty} \exp(\mathrm{i}\, Ht)\, T \exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t), \qquad (31.8)$$

где T — оператор, удовлетворяющий условиям

$$T\theta = \theta,$$
$$Ta^+(\mathbf{k})\,\theta = \Phi(\mathbf{k})$$

и имеющий вид $T = N(\exp B)$, где

$$B = \sum_n \int b_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, \delta\left(\sum_i \mathbf{k}_i - \mathbf{k}\right) a^+(\mathbf{k}_1) \ldots$$
$$\ldots a^+(\mathbf{k}_n)\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_n$$

[$\Phi(\mathbf{k})$ обозначает одночастичное состояние гамильтониана H, $H_{\mathrm{as}} = \int \omega(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$, где $\omega(\mathbf{k})$ — энергия одночастичного состояния: $H\Phi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\,\Phi(\mathbf{k})$]*.

В соотношении (31.8) можно заменить описанный выше оператор T различными другими операторами. Все операторы D, для которых имеет место соотношение

$$S_{\pm} = \operatorname*{slim}_{t\to\pm\infty} \exp(\mathrm{i}tH)\, D \exp(-\mathrm{i}tH_{\mathrm{as}}),$$

назовем *одевающими операторами* [название связано с тем, что они должны переводить голое одночастичное состояние $a^+(\mathbf{k})\,\theta$ в одетое одночастичное $\Phi(\mathbf{k})$]. Можно указать широкий класс операторов, являющихся одевающими операторами (см. § 34 и § 45).

Все три определения матриц Мёллера оказываются (при некоторых предположениях) эквивалентными. Они допускают дальнейшее обобщение на трансляционно инвариантные гамильтонианы, порождающие поляризацию вакуума.

* Определение матриц Мёллера с помощью соотношения (31.8) было предложено И. Я. Арефьевой.

При этом, естественно, возникают дополнительные осложнения, связанные с тем, что гамильтониан не задает оператора в фоковском пространстве.

Для определения с помощью in- и out-операторов эти осложнения преодолеваются, если рассматривать операторную реализацию гамильтониана H. Остальные определения следует модифицировать, включив в них обрезание гамильтониана H по объему Ω и предельный переход $\Omega \to \infty$ (при этом нужно определять уже не матрицы Мёллера, а сразу матрицу рассеяния). Подробнее различные определения матрицы рассеяния для трансляционно инвариантного гамильтониана будут изучены в следующих параграфах этой главы и в гл. 11.

В § 19 указано, что при наличии связанных состояний определение матрицы рассеяния требует видоизменений даже для простейших гамильтонианов. Аналогичные видоизменения необходимы при наличии связанных состояний и в рассматриваемой ситуации; определение матрицы рассеяния, пригодное и в случае, когда есть связанные состояния, дано в § 42.

§ 32. Определение матрицы рассеяния с помощью операторной реализации трансляционно инвариантного гамильтониана

Пусть H — трансляционно инвариантный гамильтониан, $(\mathcal{H}, \hat{H}, \hat{\mathbf{P}}, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t), \Phi)$ — его операторная реализация (см. § 28).

Определим in-*операторы* $a_{\text{in}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ и out-*операторы* $a_{\text{out}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ как пределы

$$a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, t) = a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, -1, t) = \operatorname*{wlim}_{\tau \to \mp\infty} \Lambda_{\mp}(\mathbf{k}) \times \exp(i\omega(\mathbf{k})\tau)\, a(\mathbf{k}, -1, t+\tau); \tag{32.1}$$

$$a^{+}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, t) = a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, 1, t) = \operatorname*{wlim}_{\tau \to \mp\infty} \overline{\Lambda_{\mp}(\mathbf{k})} \times \exp(-i\omega(\mathbf{k})\tau)\, a(\mathbf{k}, 1, t+\tau),$$

где $\omega(\mathbf{k})$ подбирается из условия существования предела, а $\Lambda_{\mp}(\mathbf{k})$ — из условия, чтобы операторы $a^{+}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t)$ и $a_{\text{in}}(\mathbf{k}, t)$ [соответственно, $a^{+}_{\text{out}}(\mathbf{k}, t)$, $a_{\text{out}}(\mathbf{k}, t)$] при фиксированном t удовлетворяли CR. (Здесь $\omega(\mathbf{k})$ — положительная почти везде функция, предел понимается как слабый предел операторных обобщенных функций, $\varepsilon = \pm 1$. Введя обозначение $\Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, -1) = \Lambda_{\mp}(\mathbf{k})$, $\Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, 1) = \overline{\Lambda_{\mp}(\mathbf{k})}$, можем написать, что для всякой функции $f \in \mathcal{S}$

$$a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(f, \varepsilon, t) = \int f(\mathbf{k})\, a_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, d\mathbf{k} =$$

$$= \operatorname*{wlim}_{\tau \to \mp\infty} \int f(\mathbf{k})\, \Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(-i\varepsilon\omega(\mathbf{k})\tau)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t+\tau)\, d\mathbf{k}$$

в смысле слабого предела операторов.)

Данное определение in- и out-операторов отличается от определения, принятого в теории потенциального рассеяния (§ 19), заменой сильного предела на слабый. Появление множителя $\Lambda_{\mp}(\mathbf{k})$ связано с этой заменой: сильный предел сохраняет CR, а слабый — не сохраняет.

Вопрос о существовании in- и out-операторов (т. е. вопрос, найдутся ли такие функции $\omega(\mathbf{k})$ и $\Lambda_{\mp}(\mathbf{k})$, что пределы (32.1) существуют и удовлетворяют CR) сейчас обсуждать не будем (см. гл. 10, 11). Говоря одновременно об in- и out-операторах, будем употреблять обозначение $a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$.

Установим простые свойства in- и out-операторов. *Покажем, что*:

1) $a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = \exp(i\hat{H}t)\, a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \varepsilon, 0) \exp(-i\hat{H}t) =$

$$= \exp(i\varepsilon\omega(\mathbf{k})t)\, a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \varepsilon, 0);$$

2) $\exp(i\hat{\mathbf{P}}\alpha)\, a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t) \exp(-i\hat{\mathbf{P}}\alpha) = \exp(i\varepsilon\mathbf{k}\alpha)\, a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$;

3) $a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t)\, \Phi = 0$;

4) *обобщенная векторная функция* $\Phi_{\mp}(\mathbf{k}) = a^{+}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, 0)\, \Phi$ *нормирована на δ-функцию и является обобщенной собственной функцией операторов* H *и* $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\hat{H}\Phi_{\mp}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\, \Phi_{\mp}(\mathbf{k});$$

$$\hat{\mathbf{P}}\, \Phi_{\mp}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\Phi_{\mp}(\mathbf{k})$$

(функция $\Phi_{\mp}(\mathbf{k})$, удовлетворяющая этим требованиям, описывает одночастичное состояние; см. § 19).

Заметим прежде всего, что свойство 2) вытекает из соотношения

$$\exp(i\hat{\mathbf{P}}\alpha)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t) \exp(i\hat{\mathbf{P}}\alpha) = \exp(i\varepsilon\mathbf{k}\alpha)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t).$$

Далее,

$$a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = \underset{\tau\to\mp\infty}{\mathrm{wlim}}\, \Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(i\varepsilon\omega(\mathbf{k})\tau)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t+\tau) =$$

$$= \underset{\tau\to\mp\infty}{\mathrm{wlim}} \exp(i\hat{H}t)\Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(i\varepsilon\omega(\mathbf{k})\tau)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, \tau) \exp(-i\hat{H}t) =$$

$$= \exp(i\hat{H}t)\,(\underset{\tau\to\mp\infty}{\mathrm{wlim}}\, \Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(i\varepsilon\omega(\mathbf{k})\tau)\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, \tau)) \times$$

$$\times \exp(-i\hat{H}t) = \exp(i\hat{H}t)\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, 0) \exp(-i\hat{H}t).$$

С другой стороны, подставив в соотношения (32.1) ρ вместо $t+\tau$, получим

$$a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = \underset{\rho\to\mp\infty}{\mathrm{wlim}}\, \Lambda_{\mp}(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(i\varepsilon\omega(\mathbf{k})(\rho - t))\, a(\mathbf{k}, \varepsilon, \rho) =$$

$$= \exp(-i\varepsilon\omega(\mathbf{k})t)\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, 0).$$

Из свойства 1) следует, что

$$\exp(i\hat{H}t)\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi = \exp(i\hat{H}t)\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(-i\hat{H}t)\Phi =$$

$$= a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\Phi = \exp(i\varepsilon\omega(\mathbf{k})t)\Phi,$$

откуда

$$\hat{H}a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi = \varepsilon\omega(\mathbf{k})\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon)\Phi. \qquad (32.2)$$

Из равенства (32.2) вытекает, что $a_{ex}(\mathbf{k}, -1)\Phi = 0$ (если это соотношение не выполнено, то для $\mathbf{k}$ из множества K, имеющего ненулевую меру, обобщенная векторная функция $a_{ex}(\mathbf{k}, -1)\Phi$ является обобщенной собственной функцией оператора $\hat{H}$ и, следовательно, число $-\omega(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k} \in K$, принадлежит спектру оператора $\hat{H}$, что невозможно в силу положительности оператора $\hat{H}$).

Применяя CR и свойство 3), видим, что обобщенная векторная функция $\Phi_{\mp}(\mathbf{k}) = a_{ex}(\mathbf{k}, 1)\Phi$ нормирована на δ-функцию $(\langle\Phi_{\mp}(\mathbf{k}), \Phi_{\mp}(\mathbf{k}')\rangle = \langle a_{ex}(\mathbf{k}', -1)\, a_{ex}(\mathbf{k}, 1)\Phi, \Phi\rangle = \langle[a_{ex}(\mathbf{k}'), a^+_{ex}(\mathbf{k})]_{\mp}\Phi, \Phi\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'))$. Формула (32.2) показывает, что $\Phi_{\mp}(\mathbf{k})$ — обобщенная собственная функция оператора $\hat{H}$. Чтобы, убедиться, что $\Phi_{\mp}(\mathbf{k})$ является обобщенной собственной функцией оператора $\hat{\mathbf{P}}$, достаточно вспомнить, что в силу свойства 2)

$$\exp(i\hat{\mathbf{P}}\alpha)\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, t) \exp(-i\hat{\mathbf{P}}\alpha) = \exp(i\varepsilon\mathbf{k}\alpha)\, a_{ex}(\mathbf{k}, \varepsilon, t),$$

откуда

$$\exp(i\hat{\mathbf{P}}\alpha)\Phi_{\mp}(\mathbf{k}) = \exp(i\hat{\mathbf{P}}\alpha)\, a^+_{ex}(\mathbf{k}, 0) \exp(-i\hat{\mathbf{P}}\alpha)\Phi =$$

$$= \exp(\varepsilon\mathbf{k}\alpha)\Phi_{\mp}(\mathbf{k})$$

и, стало быть, $\hat{\mathbf{P}}\Phi_{\mp}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\Phi_{\mp}(\mathbf{k})$.

Замечание. Выше было сделано предположение, что фигурирующая в определении in- и out-операторов функция $\omega(\mathbf{k})$ почти везде положительна. От этого предположения можно отказаться, заменив его условием, что у оператора $\hat{H}$ существует единственное основное состояние. Тогда в случае CCR легкая модификация проведенных выше рассуждений позволяет убедиться в том, что функция $\omega(\mathbf{k})$ автоматически почти везде положительна. В случае CAR можно ввести новые операторы $\tilde{a}^+(\mathbf{k}, t)$, $\tilde{a}(\mathbf{k}, t)$, $\tilde{a}^+_{ex}(\mathbf{k}, t)$, $\tilde{a}_{ex}(\mathbf{k}, t)$, также удовлетворяющие CAR по формулам

$$\tilde{a}(\mathbf{k}, t) = \theta(\omega(\mathbf{k}))\, a(\mathbf{k}, t) + \theta(-\omega(\mathbf{k}))\, a^+(-\mathbf{k}, t);$$

$$\tilde{a}_{ex}(\mathbf{k}, t) = \theta(\omega(\mathbf{k}))\, a_{ex}(\mathbf{k}, t) + \theta(-\omega(\mathbf{k}))\, a^+_{ex}(-\mathbf{k}, t).$$

Тогда, очевидно,

$$\tilde{a}_{ex}(\mathbf{k}, t) = \underset{\tau\to\mp\infty}{\mathrm{wlim}}\, \Lambda'_{\mp}(\mathbf{k}) \exp(i|\omega(\mathbf{k})|\tau)\, \tilde{a}(\mathbf{k}, t+\tau),$$

где функция $|\omega(\mathbf{k})|$ уже почти везде положительна.

Введем *пространство асимптотических состояний* $\mathcal{H}_a$ как пространство фоковского представления CR $(L^2(E^3))$. Символом $b(\mathbf{k}, \varepsilon)$ обозначим операторные обобщенные функции в нем, удовлетворяющие условиям

$$[b(\mathbf{k}, \varepsilon), b(\mathbf{k}', \varepsilon')]_{\mp} = A^{\varepsilon}_{\varepsilon'}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}');$$

$$b(\mathbf{k}, -1)\theta = 0; \quad b^+(\mathbf{k}, -1) = b(\mathbf{k}, 1).$$

Матрицы Мёллера S_- и S_+ определим как изометричные операторы, отображающие пространство $\mathcal{H}_{as}$ в пространство $\mathcal{H}$ и удовлетворяющие условиям

$$a_{in}(\mathbf{k}, \varepsilon) S_- = S_- b(\mathbf{k}, \varepsilon), \quad S_-\theta = \Phi; \qquad (32.3)$$

$$a_{out}(\mathbf{k}, \varepsilon) S_+ = S_+ b(\mathbf{k}, \varepsilon), \quad S_+\theta = \Phi \qquad (32.4)$$

(из результатов, полученных в § 20, вытекает, что такие операторы существуют и определяются условиями (32.3), (32.4) однозначно).

Матрица рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана H определяется теперь как оператор $S = S_+^* S_-$.

Легко видеть, что матрица рассеяния S будет унитарным оператором тогда и только тогда, когда пространства $\mathscr{H}_{\text{in}} = S_-\mathscr{H}_{\text{as}}$ и $\mathscr{H}_{\text{out}} = S_+\mathscr{H}_{\text{as}}$ совпадают между собой.

Сделаем предположение, что $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{in}} = \mathscr{H}_{\text{out}}$ (т. е. что унитарным оператором является не только S-матрица, но и матрицы Мёллера S_- и S_+).

Впрочем, некоторые из доказываемых ниже соотношений, в частности равенство (32.12), верны и без этого предположения.

В пространстве $\mathscr{H}_{\text{as}}$ определим оператор $\hat{H}_{\text{as}}$ (*асимптотический гамильтониан*) и оператор импульса $\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}}$ формулами

$$\hat{H}_{\text{as}} = \int \omega(\mathbf{k})\, b^+(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} = \int \mathbf{k} b^+(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$$

[как всегда, $b^+(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}, 1)$, $b(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}, -1)$].

Легко видеть, что

$$b(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = \exp(\mathrm{i}\hat{H}_{\text{as}} t)\, b(\mathbf{k}, \varepsilon) \exp(-\mathrm{i}\hat{H}_{\text{as}} t) =$$

$$= \exp(\mathrm{i}\varepsilon\omega(\mathbf{k})\, t)\, b(\mathbf{k}, \varepsilon);$$

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} \boldsymbol{\alpha})\, b(\mathbf{k}, \varepsilon, t) \exp(-\mathrm{i}\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} \boldsymbol{\alpha}) = \exp(\mathrm{i}\varepsilon\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k})\, b(\mathbf{k}, \varepsilon, t).$$

Используя это соотношение и свойства 1), 2) операторов a_{ex}, убеждаемся, что

$$\hat{H} S_\pm = S_\pm \hat{H}_{\text{as}}; \quad \hat{\mathbf{P}} S_\pm = S_\pm \hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} \tag{32.5}$$

(т. е. операторы S_+ и S_- осуществляют унитарную эквивалентность операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}_{\text{as}}$, $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}}$). Из (32.5) следует, что *матрица рассеяния коммутирует с операторами* $\hat{H}_{\text{as}}$ *и* $\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}}$:

$$S\hat{H}_{\text{as}} = \hat{H}_{\text{as}} S;$$

$$S\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} S.$$

Докажем, что определенная выше матрица рассеяния обладает следующими свойствами:

1) $S\theta = \theta$ (*устойчивость вакуума*),

2) $Sb^+(\mathbf{k})\,\theta = c(\mathbf{k})\, b^+(\mathbf{k})\,\theta$,

где $|c(\mathbf{k})| = 1$ (*устойчивость одночастичных состояний*). Второе из этих свойств будет доказано лишь при некоторых условиях на функцию $\omega(\mathbf{k})$; достаточно потребовать строгой выпуклости этой функции.

Устойчивость вакуума сразу вытекает из соотношений $S_-\theta = \Phi$, $S_+\theta = \Phi$. Для того чтобы доказать устойчивость одночастичных состояний, заметим, что

$$\hat{H}_{\text{as}} Sb^+(\mathbf{k})\,\theta = S\hat{H}_{\text{as}} b^+(\mathbf{k})\,\theta = \omega(\mathbf{k})\, Sb^+(\mathbf{k})\,\theta;$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} Sb^+(\mathbf{k})\,\theta = S\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}} b^+(\mathbf{k})\,\theta = \mathbf{k}Sb^+(\mathbf{k})\,\theta.$$

Таким образом, обобщенная векторная функция $\Psi(\mathbf{k}) = Sb^+(\mathbf{k})\,\theta$ удовлетворяет условиям $\hat{H}_{\text{as}}\Psi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\,\Psi(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{P}}_{\text{as}}\Psi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\Psi(\mathbf{k})$; легко видеть, что эта обобщенная векторная функция нормирована на δ-функцию. Зная это, уже нетрудно установить, что $\Psi(\mathbf{k}) = c(\mathbf{k})\, b^+(\mathbf{k})\,\theta$, где $|c(\mathbf{k})| = 1$ (см. § 19).

Остановимся теперь на произволе, имеющемся в определении in- и out-операторов. Нетрудно видеть, что функции $\Lambda_-(\mathbf{k})$ и $\Lambda_+(\mathbf{k})$ не фиксируются однозначно условием, чтобы операторы $a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t)$ удовлетворяли CR. Именно, заменив функции $\Lambda_-(\mathbf{k})$ и $\Lambda_+(\mathbf{k})$ на функции $\Lambda'_-(\mathbf{k})$ и $\Lambda'_+(\mathbf{k})$, совпадающие по модулю с функциями $\Lambda_-(\mathbf{k})$ и $\Lambda_+(\mathbf{k})$, получим новые in- и out-операторы $a'_{\text{in}}(\mathbf{k}, t)$ и $a'_{\text{out}}(\mathbf{k}, t)$:

$$\left.\begin{aligned} a'_{\text{in}}(\mathbf{k}, t) &= \exp(\mathrm{i}\varphi_-(\mathbf{k}))\, a_{\text{in}}(\mathbf{k}, t); \\ a'_{\text{out}}(\mathbf{k}, t) &= \exp(\mathrm{i}\varphi_+(\mathbf{k}))\, a_{\text{out}}(\mathbf{k}, t) \end{aligned}\right\} \tag{32.6}$$

(здесь $\exp(\mathrm{i}\varphi_\mp(\mathbf{k})) = \Lambda'_\mp(\mathbf{k})\,\Lambda_\pm^{-1}(\mathbf{k})$, $\varphi_\mp(\mathbf{k})$— действительные функции).

Можно проверить, что при сделанных предположениях все возможные in- и out-операторы исчерпываются операторами вида $a'_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t)$.

Легко убедиться, что матрицы Мёллера S'_- и S'_+, построенные по операторам $a'_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t)$, выражаются через матрицы Мёллера S_- и S_+, построенные по операторам $a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t)$, формулами

$$S'_\mp = S_\mp U_\mp,$$

где $U_\mp = \exp(i\int \varphi_\mp(\mathbf{k})\, b^+(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k})\, d\mathbf{k})$ [это следует из соотношения $U_\mp\, b(\mathbf{k})\, U_\mp^{-1} = \exp(i\varphi_\mp(\mathbf{k}))\, b(\mathbf{k})$].

Таким образом, матрица рассеяния $S' = S_+'^* S_-'$, построенная по новым ex-операторам, связана со старой матрицей рассеяния $S = S_+^* S_-$ соотношением $S' = U_+^{-1} S U_-$.

Пользуясь описанным произволом в определении in- и out-операторов, можно добиться того, чтобы условие стабильности одночастичных состояний выполнялось в следующей усиленной форме:

$$Sb^+(\mathbf{k})\,\theta = b^+(\mathbf{k})\,\theta. \tag{32.7}$$

В дальнейшем всегда будем предполагать, что in- и out-операторы выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие (32.7).

Произвол в определении in- и out-операторов при этом сужается: переход от старых ex-операторов к новым будет задаваться теперь формулами (32.6), в которых $\varphi_-(\mathbf{k}) = \varphi_+(\mathbf{k})$; соответственно, в формулах преобразования для матриц Мёллера и матрицы рассеяния $U_- = U_+$.

Покажем, что *условие* (32.7) *выполняется в том и только в том случае, когда функции* $\Lambda_-(\mathbf{k})$ и $\Lambda_+(\mathbf{k})$ *выбраны одинаковыми*: $\Lambda_-(\mathbf{k}) = \Lambda_+(\mathbf{k}) = \Lambda(\mathbf{k})$. Для этого напишем разложение обобщенной векторной функции $a^+(\mathbf{k})\,\Phi$ по обобщенному базису $a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_1) \ldots a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_n)\,\Phi = \Phi_-(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$. Это разложение имеет вид

$$a_+(\mathbf{k})\,\Phi = \rho(1, \mathbf{k})\,\Phi_-(\mathbf{k}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \rho(1, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \times$$
$$\times\, \delta\left(\mathbf{k} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i\right) \Phi_-(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, d^n\mathbf{k}, \tag{32.8}$$

где функция $\rho(\varepsilon, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ определяется равенством

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \langle a(\mathbf{k}, \varepsilon)\,\Phi,\ \Phi_-(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\rangle =$$
$$= \rho(\varepsilon, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, \delta\left(\varepsilon\,\mathbf{k} - \sum_i \mathbf{k}_i\right).$$

Из равенства (32.8) заключаем, что

$$\int f(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})\,t)\, a^+(\mathbf{k}, t)\,\Phi d\mathbf{k} =$$
$$= \int f(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})\,t) \exp(i\hat{H}t)\, a^+(\mathbf{k})\,\Phi d\mathbf{k} =$$
$$= \int f(\mathbf{k})\,\rho(1, \mathbf{k})\,\Phi_-(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \rho(1, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \times$$
$$\times\, \delta\left(\mathbf{k} - \sum_i \mathbf{k}_i\right) \exp(i(\omega(\mathbf{k}_1) + \ldots + \omega(\mathbf{k}_n) -$$
$$- \omega(\mathbf{k}))\,t)\, \Phi_-(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, d^n\mathbf{k}.$$

При больших t второе слагаемое содержит быстро осциллирующий множитель и поэтому слабо сходится к нулю при $t \to \pm\infty$. Таким образом,

$$\operatorname*{wlim}_{t \to \pm\infty} \int f(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})\,t)\, a^+(\mathbf{k}, t)\,\Phi d\mathbf{k} =$$
$$= \int f(\mathbf{k})\,\rho(1, \mathbf{k})\,\Phi_+(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \tag{32.9}$$

С другой стороны, из (32.1) получаем

$$\operatorname*{wlim}_{t \to \mp\infty} \int f(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})\,t)\, \overline{\Lambda_\mp(\mathbf{k})}\, a^+(\mathbf{k}, t)\,\Phi d\mathbf{k} =$$
$$= \int f(\mathbf{k})\, a^+_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\mathbf{k})\,\Phi d\mathbf{k} = \int f(\mathbf{k})\,\Phi_\mp(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \tag{32.10}$$

Сравнивая равенства (32.9) и (32.10) и замечая, что в силу условия (32.7) $\Phi_-(\mathbf{k}) = \Phi_+(\mathbf{k})$, получаем

$$\Lambda_-(\mathbf{k}) = \Lambda_+(\mathbf{k}) = \Lambda(\mathbf{k}) = \left(\overline{\rho(1, \mathbf{k})}\right)^{-1}. \tag{32.11}$$

Таким образом, доказано нужное соотношение $\Lambda_-(\mathbf{k}) = \Lambda_+(\mathbf{k})$, а также установлена связь этих величин с функцией $\rho(1, \mathbf{k})$. Воспользовавшись этой связью и представлением Челлена — Лемана, докажем сейчас, что функции $\omega(\mathbf{k})$ и $|\Lambda(\mathbf{k})|$ могут быть выражены через функцию Грина

$$\tilde{G}_2(\mathbf{p}_1, 1, \omega_1, \mathbf{p}_2, -1, \omega_2) = G(\mathbf{p}_1, \omega_1)\,\delta(\omega_1 - \omega_2)\,\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2).$$

Именно, *функция* $\omega(\mathbf{p})$ *определяет положение полюсов функции* $G(\mathbf{p}, \omega)$ (полюса функции $G(\mathbf{p}, \omega)$ по переменной ω при фиксированном $\mathbf{p}$ расположены в точках $\omega(\mathbf{p})$ и $-\omega(\mathbf{p})$), *а функция* $|\Lambda(\mathbf{p})|$ *равна* $Z(\mathbf{p})^{-1/2}$, где $iZ(\mathbf{p})$ — вычет функции $G(\mathbf{p}, \omega)$ в полюсе $\omega(\mathbf{p})$.

В самом деле, выбирая в качестве обобщенного собственного базиса операторов $\hat{H}$ и $\hat{\mathbf{P}}$ базис из векторов $a_{\text{in}}^{+}(\mathbf{k}_1)\ldots a_{\text{in}}^{+}(\mathbf{k}_n)\Phi=\Phi_-(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)$ и записывая в этом базисе представление Челлена — Лемана для функции $G(\mathbf{p},\omega)$ (28.9), видим, что

$$G(\mathbf{p},\omega)=\frac{i\,|\rho(-1,-\mathbf{p})|^2}{\omega-\omega(-\mathbf{p})+i0}\mp\frac{i\,|\rho(+1,\mathbf{p})|^2}{\omega+\omega(\mathbf{p})-i0}+$$
$$+i\sum_{n\geqslant 2}\int\frac{|\rho(-1,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)|^2}{\omega-(\omega(\mathbf{k}_1)+\ldots+\omega(\mathbf{k}_n))+i0}\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n)\times$$
$$\times d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n\mp i\sum_{n\geqslant 2}\int\frac{|\rho(+1,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)|^2}{\omega+\omega(\mathbf{k}_1)+\ldots+\omega(\mathbf{k}_n)-i0}\times$$
$$\times\delta(-\mathbf{p}+\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_n.$$

В комбинации с формулой (32.11) это соотношение доказывает сформулированные утверждения.

Обобщенные функции

$$S_{m,n}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\,|\,\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)=$$
$$=\langle Sb^{+}(\mathbf{q}_1)\ldots b^{+}(\mathbf{q}_n)\theta,\ \ b^{+}(\mathbf{p}_1)\ldots b^{+}(\mathbf{p}_m)\theta\rangle$$

[матричные элементы оператора S в обобщенном базисе $b^{+}(\mathbf{p}_1)\ldots b^{+}(\mathbf{p}_m)\,\theta$] называются *амплитудами рассеяния*. Они легко выражаются через обобщенные векторные функции $a_{\text{ex}}^{+}(\mathbf{p}_1)\ldots a_{\text{ex}}^{+}(\mathbf{p}_m)\theta$ (через in- и out-состояния). Именно,

$$S_{m,n}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\,|\,\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)=$$
$$=\langle S_-\,b^{+}(\mathbf{q}_1)\ldots b^{+}(\mathbf{q}_n)\theta,\ S_+\,b^{+}(\mathbf{p}_1)\ldots b^{+}(\mathbf{p}_m)\theta\rangle=$$
$$=\langle a_{\text{in}}^{+}(\mathbf{q}_1)\ldots a_{\text{in}}^{+}(\mathbf{q}_n)\Phi,\ a_{\text{out}}^{+}(\mathbf{p}_1)\ldots a_{\text{out}}^{+}(\mathbf{p}_n)\Phi\rangle.$$

Знание амплитуд рассеяния $S_{m,n}$ позволяет вычислить дифференциальные эффективные сечения рассеяния (см. об этом в § 40). Оператор S обычно удобно представлять в нормальной форме:

$$S=\sum_{m,n}\frac{1}{m!\,n!}\int\sigma_{m,n}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\,|\,\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)\,b^{+}(\mathbf{p}_1)\ldots$$
$$\ldots b(\mathbf{q}_n)\,d^m\mathbf{p}\,d^n\mathbf{q}.$$

Функции $\sigma_{m,n}$ тесно связаны с амплитудами рассеяния. Эту связь легко проследить с помощью теоремы Вика (см. § 22); отметим здесь лишь, что при условии $\mathbf{p}_i\neq\mathbf{q}_j$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$

$$S_{m,n}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\,|\,\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)=\sigma_{m,n}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\,|\,\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n).$$

Покажем, каким образом функции $\sigma_{m,n}$ выражаются через функции Грина трансляционно инвариантного гамильтониана H.

Имеет место следующая *формула Лемана — Симанчика — Циммермана* (LSZ):

$$\sigma_{m,n}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\,|\,\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)=\left(i\sqrt{2\pi}\right)^{m+n}\prod_{i=1}^{m}\Lambda(\mathbf{p}_i)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}\overline{\Lambda}(\mathbf{q}_j)\lim_{\omega_i\to\omega(\mathbf{p}_i)}\ \lim_{\sigma_j\to\omega(\mathbf{q}_j)}\prod_{i=1}^{m}(\omega_i-\omega(\mathbf{p}_i))\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}(\sigma_j-\omega(\mathbf{q}_j))\,\tilde{G}_{m+n}(\mathbf{q}_1,1,\sigma_1,\ldots,\mathbf{q}_n,1,\sigma_n\,|\,\mathbf{p}_1,-1,\omega_1,\ldots$$
$$\ldots,\mathbf{p}_m,-1,\ \omega_m),\tag{32.12}$$

где $\tilde{G}_{m+n}$ — функции Грина трансляционно инвариантного гамильтониана H в $(\mathbf{k},\omega)$-представлении.

Доказательство формулы LSZ проведем для случая CCR (случай CAR отличается лишь знаками). Заметим прежде всего, что

$$a_{\text{out}}(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)\,T\,(a(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2,t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n))=$$
$$=\underset{t_1\to+\infty}{\text{wlim}}\ a(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1,t_1)\exp(-i\varepsilon_1\omega(\mathbf{k}_1)t_1)\Lambda(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)\times$$
$$\times T\,(a(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2,t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n))=\underset{t_1\to+\infty}{\text{wlim}}\ \exp(-i\varepsilon_1\omega(\mathbf{k}_1)t_1)\times$$
$$\times\Lambda(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)\,T\,(a(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1\,t_1)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n)).\tag{32.13}$$

В самом деле, если $t_1>t_2,\ldots,t_n$, то

$$a(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1,t_1)\,T\,(a(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2,t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n))=$$
$$=T\,(a(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1,t_1)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n)).$$

Точно так же убеждаемся, что

$$T\,(a(\mathbf{k}_2,\varepsilon_2,t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n))\,a_{\text{in}}(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)=$$
$$=\lim_{t_1\to-\infty}\Lambda(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1)\exp(-i\varepsilon_1\omega(\mathbf{k}_1)t_1)T(a(\mathbf{k}_1,\varepsilon_1,t_1)\ldots a(\mathbf{k}_n,\varepsilon_n,t_n)).$$
$$\tag{32.14}$$

Комбинируя соотношения (32.13) и (32.14), получаем равенстно

$$a_{\text{out}}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)\, T\,(a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)) -$$
$$- T\,(a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\, a_{\text{in}}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) =$$
$$= \Lambda(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\exp(-i\varepsilon_1\omega(\mathbf{k}_1)t_1)\, T\,(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots$$
$$\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\Big)\, dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} L_1 T\,(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\, dt_1. \tag{32.15}$$

Здесь использовано обозначение

$$L_i f(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) = \Lambda(\mathbf{k}_i, \varepsilon_i)\times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial t_i}\,(\exp(-i\varepsilon_i\,\omega(\mathbf{k}_i)\,t)\, f(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)).$$

Полезно отметить простейшую форму равенства (32.15)

$$a_{\text{out}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - a_{\text{in}}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\mathbf{k}, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\,(\exp(-i\varepsilon\omega(\mathbf{k})\,t)\times$$
$$\times a(\mathbf{k}, \varepsilon, t))\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} La(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, dt$$

(уравнение Янга — Фельдмана).

В случае CAR аналогично убеждаемся, что

$$a_{\text{out}}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)\, T\,(a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)) -$$
$$-(-1)^{n-1}\, T\,(a(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\, a_{\text{in}}(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)\frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\exp(-i\varepsilon_1\,\omega(\mathbf{k}_1)\,t_1)\, T\,(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots$$
$$\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\Big)\, dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} L_1 T\,(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots$$
$$\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\, dt_1.$$

С помощью последовательного применения соотношения (32.15) можно выразить матричные элементы матрицы рассеяния через функции Грина. Проведем другое, более короткое рассуждение. Введем операторы $c(\mathbf{k}, \varepsilon, t) =$

$= S_-^* a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, S_-$, через которые просто выражаются функции Грина гамильтониана H:

$$\check{G}_n(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n) =$$
$$= \langle T\,(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\, S_-\theta,\ S_-\theta\rangle =$$
$$= \langle T\,(c(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots c(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\,\theta,\ \theta\rangle.$$

Умножая равенство (32.15) слева на $S_+^* = SS_-^*$, справа на S_- и используя соотношения (32.3), (32.4), получаем

$$[S\cdot T\,(c(\mathbf{k}_2, \varepsilon_2, t_2)\ldots c(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n)),\ b(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)] =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} L_1 S\cdot T\,(c(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots c(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\, dt_1. \tag{32.16}$$

Применяя несколько раз эту формулу, убеждаемся, что

$$[\ldots[S, b(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1)]\ldots b(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n)] = (-1)^n \int L_n \ldots L_1 \times$$
$$\times \big(S\cdot T\,(c(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1, t_1)\ldots c(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n, t_n))\big)\, dt_1 \ldots dt_n. \tag{32.17}$$

Выражение для функций $\sigma_{m,n}$ получаем, замечая, что

$$\sigma_{m,n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = (-1)^n\times$$
$$\times\langle[\ldots[[\ldots[S, b^+(\mathbf{q}_1)]\ldots b^+(\mathbf{q}_n)]\, b(\mathbf{p}_1)]\ldots b(\mathbf{p}_m)]\,\theta,\ \theta\rangle. \tag{32.18}$$

Именно, из формул (32.17), (32.18) и соотношения $S\theta = \theta$ следует, что

$$\sigma_{m,n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = (-1)^m \int L_{m+n}\ldots L_1\times$$
$$\times \check{G}_{m+n}(\mathbf{q}_1, 1, t_1, \ldots, \mathbf{q}_n, 1, t_n, \mathbf{p}_1, -1, t_{n+1}, \ldots, \mathbf{p}_m, -1, t_{m+n})\times$$
$$\times dt_1\ldots dt_{m+n}.$$

Для того чтобы от полученной формулы перейти к соотношению (32.12), остается только проделать преобразование Фурье по переменным $t_1, \ldots, t_{m+n}$, воспользовавшись тем, что

$$\int Lf(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\mathbf{k}, \varepsilon)\frac{d}{dt}\,(\exp(-i\varepsilon\omega(\mathbf{k})\,t)\times$$
$$\times f(\mathbf{k}, \varepsilon, t))\, dt = i\varepsilon\Lambda(\mathbf{k}, \varepsilon)\lim_{\omega\to\omega(\mathbf{k})}(\omega - \omega(\mathbf{k}))\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\varepsilon\omega t)\, f(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\, dt.$$

Строгий вывод (32.12) см. в [32].

§ 33. Адиабатическое определение матрицы рассеяния

Укажем сейчас определение матрицы рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана, не использующее построения операторной реализации. Пусть трансляционно инвариантный гамильтониан H представлен в виде $H = H_0 + V$, где $H_0 = \int \varepsilon(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$.

Рассмотрим адиабатическую S-матрицу $S_\alpha^\Omega = S_\alpha^\Omega(\infty, -\infty)$, построенную по паре операторов $(H_\Omega, H_{0\Omega})$ (определение гамильтониана H_Ω, получающегося из гамильтониана H обрезанием по объему Ω, см. в § 28).

Определение 1. Матрицей рассеяния гамильтониана H назовем оператор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$, имеющий в обобщенном базисе $b^+(\mathbf{p}_1) \ldots b^+(\mathbf{p}_n)\,\theta$ матричные элементы

$$\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m \rangle = \lim_{\alpha \to 0} \lim_{\Omega \to \infty} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}(m+n)} \times$$
$$\times \frac{\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m \rangle \langle \theta | S_\alpha^\Omega | \theta \rangle^{\frac{m+n}{2}-1}}{\sqrt{\prod_{i=1}^m \langle \mathbf{p}_i | S_\alpha^\Omega | \mathbf{p}_i \rangle \prod_{j=1}^n \langle \mathbf{q}_j | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_j \rangle}}. \quad (33.1)$$

Здесь $\mathcal{H}_{as}$, как и в § 32, обозначает пространство фоковского представления CR $(L^2(E^3))$ (в $\mathcal{H}_{as}$ действуют операторные обобщенные функции $b^+(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, удовлетворяющие CR, $\mathbf{k}$ пробегает E^3). Используются обозначения

$$\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle =$$
$$= \langle S b^+(\mathbf{q}_1) \ldots b^+(\mathbf{q}_n)\,\theta,\ b^+(\mathbf{p}_1) \ldots b^+(\mathbf{p}_m)\,\theta \rangle;$$
$$\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle = \langle S_\alpha^\Omega a_{\mathbf{q}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{q}_n}^+ \theta,\ a_{\mathbf{p}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{p}_m}^+ \theta \rangle$$

(напомним, что оператор S_α^Ω так же, как и оператор H_Ω, действует в фоковском пространстве F_Ω, а символами $a_\mathbf{p}^+$, $a_\mathbf{p}$ обозначены операторы $a^+(\varphi_\mathbf{p})$, $a(\varphi_\mathbf{p})$, где $\varphi_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = L^{-3/2} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$ и $\mathbf{p}$ пробегает решетку T_Ω, состоящую из векторов $\frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$).

Смысл предельного перехода в соотношении (33.1) нуждается в разъяснении, поскольку функция непрерывного аргумента рассматривается в нем как предел функций, заданных на решетках. С такой же ситуацией имели дело в § 29; здесь и в дальнейшем будем расшифровывать пределы такого типа аналогичным способом (т. е. в смысле обобщенных функций). В частности, соотношение (33.1) означает, что для любой основной функции $\varphi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$

$$\int \varphi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) \langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle\, d^m\mathbf{p}\, d^n\mathbf{q} =$$
$$= \lim_{\alpha \to \infty} \lim_{\Omega \to \infty} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-\frac{3}{2}(m+n)} \sum_{\substack{\mathbf{p}_i \in T_\Omega \\ \mathbf{q}_j \in T_\Omega}} \varphi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) \times$$
$$\times \frac{\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle \langle \theta | S_\alpha^\Omega | \theta \rangle^{\frac{m+n}{2}-1}}{\sqrt{\prod_{i=1}^m \langle \mathbf{p}_i | S_\alpha^\Omega | \mathbf{p}_i \rangle \prod_{j=1}^n \langle \mathbf{q}_j | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_j \rangle}}.$$

Приведенное выше определение матрицы рассеяния представим в несколько иной форме, заметив, что

$$\frac{\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle \langle \theta | S_\alpha^\Omega | \theta \rangle^{\frac{m+n}{2}-1}}{\sqrt{\prod_{i=1}^m \langle \mathbf{p}_i | S_\alpha^\Omega | \mathbf{p}_i \rangle \prod_{j=1}^n \langle \mathbf{q}_j | S_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_j \rangle}} =$$
$$= \langle \mathbf{p}_1 \ldots, \mathbf{p}_m | U_\alpha^\Omega S_\alpha^\Omega U_\alpha^\Omega | \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle, \quad (33.2)$$

где $U_\alpha^\Omega = \exp\left[i\left(C + \sum_\mathbf{k} r_\alpha^\Omega(\mathbf{k})\, a_\mathbf{k}^+ a_\mathbf{k}\right)\right]$ (сумма берется по решетке T_Ω), $C = \frac{i}{2} \ln \langle \theta | S_\alpha^\Omega | \theta \rangle$, $r_\alpha^\Omega(\mathbf{k}) = \frac{i}{2} \ln \frac{\langle \mathbf{k} | S_\alpha^\Omega | \mathbf{k} \rangle}{\langle \theta | S_\alpha^\Omega | \theta \rangle}$ (соотношение (33.2) следует из того, что $U_\alpha^\Omega a_{\mathbf{k}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{k}_n}^+ \theta = \exp\left[i\left(C + r_\alpha^\Omega(\mathbf{k}_1) + \ldots + r_\alpha^\Omega(\mathbf{k}_n)\right)\right] a_{\mathbf{k}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{k}_n}^+ \theta$).

Таким образом, можно написать, что

$$S = \lim_{\alpha \to 0} \lim_{\Omega \to \infty} U_\alpha^\Omega S_\alpha^\Omega U_\alpha^\Omega,$$

причем сходимость операторов понимается в смысле сходимости матричных элементов в базисе $a_{\mathbf{k}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{k}_n}^+ \theta$ к матричным элементам в обобщенном базисе $b^+(\mathbf{k}_1) \ldots b^+(\mathbf{k}_n)\,\theta$ (дальше в аналогичных ситуациях сходимость операторов, действующих в пространствах F_Ω, к оператору в пространстве $\mathcal{H}_{as}$ будем определять таким же способом).

Пользуясь результатами главы 4 (см. § 15 и § 16), можно доказать, что определенная соотношением (33.1) S-матрица удовлетворяет условиям $S\theta = \theta$, $Sb^+(\mathbf{k})\theta = b^+(\mathbf{k})\theta$ (устойчивость вакуума и одночастичных состояний).

В самом деле, пусть $\varphi^\Omega(\lambda)$ (соответственно, $\varphi^\Omega_\mathbf{k}(\lambda)$) — стационарное состояние гамильтониана $H_\Omega(\lambda) = H_{0\Omega} + \lambda V_\Omega$, непрерывно зависящее от параметра и переходящее при $\lambda = 0$ в θ (соответственно $a^+_\mathbf{k}\theta$), $\varepsilon_\Omega(\lambda)$ и $\varepsilon_\Omega(\mathbf{k}, \lambda)$ — соответствующие уровни энергии гамильтониана $H_\Omega(\lambda)$,

$$\rho_\Omega = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{1}{\mu}\left(\varepsilon_\Omega(\mu) - \varepsilon_\Omega(0)\right) d\mu,$$

$$\rho_\Omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{1}{\lambda}\left(\varepsilon_\Omega(\mathbf{k}, \lambda) - \varepsilon_\Omega(\mathbf{k}, 0)\right) d\lambda.$$

Из формул (15.7) следует, что

$$\theta = \lim_{\alpha\to 0} \exp(2i\rho_\Omega) S^\Omega_\alpha \theta;$$

$$a^+_\mathbf{k}\theta = \lim_{\alpha\to 0} \exp(2i\rho_\Omega(\mathbf{k})) S^\Omega_\alpha a^+_\mathbf{k}\theta.$$

Отсюда заключаем, что при $\alpha \to 0$

$$\langle \mathbf{k} | S^\Omega_\alpha | \mathbf{k}' \rangle \approx \exp(2i\rho_\Omega(\mathbf{k}))\delta^\mathbf{k}_{\mathbf{k}'}; \tag{33.3}$$

$$\langle \theta | S^\Omega_\alpha | \theta \rangle \approx \exp(2i\rho_\Omega) \tag{33.4}$$

и, следовательно,

$$U^\Omega_\alpha \approx \widetilde{U}^\Omega_\alpha = \exp\left(-i\rho_\alpha - i\sum_\mathbf{k}(\rho_\Omega(\mathbf{k}) - \rho_\Omega)\, a^+_\mathbf{k} a_\mathbf{k}\right). \tag{33.5}$$

Применяя равенства (33.3) и (33.4), видим, что

$$\lim_{\alpha\to 0} U^\Omega_\alpha S^\Omega_\alpha U^\Omega_\alpha \theta = \theta; \tag{33.6}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} U^\Omega_\alpha S^\Omega_\alpha U^\Omega_\alpha a^+_\mathbf{k}\theta = a^+_\mathbf{k}\theta. \tag{33.7}$$

Умножив соотношения (33.6) и (33.7) скалярно на векторы $a^+_{\mathbf{k}_1} \ldots a^+_{\mathbf{k}_n}\theta$ и перейдя к пределу $\Omega \to \infty$ в получившихся матричных элементах оператора $U^\Omega_\alpha S^\Omega_\alpha U^\Omega_\alpha$, получаем (после перестановки предельных переходов $\Omega \to \infty$, $\alpha \to 0$) доказательство устойчивости вакуума и одночастичных состояний.

Отметим, что из проведенного рассуждения вытекает, «почти унитарность» операторов U^Ω_α при $\alpha \to 0$. Точнее говоря, матрица рассеяния может быть представлена также в виде

$$S = \lim_{\alpha\to 0}\lim_{\Omega\to\infty} \widetilde{U}^\Omega_\alpha S^\Omega_\alpha \widetilde{U}^\Omega_\alpha, \tag{33.8}$$

где $\widetilde{U}^\Omega_\alpha = \exp\left(-i\rho_\Omega - i\sum_\mathbf{k}(\rho_\Omega(\mathbf{k}) - \rho_\Omega)\, a^+_\mathbf{k} a_\mathbf{k}\right)$ — унитарные операторы.

Разумеется, проведенные рассуждения далеки от строгости.

Данное выше определение матрицы рассеяния можно несколько видоизменить, введя понятия N-эквивалентности и S-эквивалентности операторов, действующих в фоковском пространстве.

Два оператора S и S' в фоковском пространстве T_{as} назовем *N-эквивалентными*, если существуют такие унитарные операторы U и V вида $\exp[i(\int \nu(\mathbf{k})\, b^+(\mathbf{k})\, b(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} + C)]$, что $S' = USV$. Если в этом определении считать, что $U = V^{-1}$, получим определение *S-эквивалентности* операторов S и S'. Определения N-эквивалентности и S-эквивалентности операторов, действующих в фоковском пространстве F_Ω, отличаются только тем, что операторы U и V нужно считать имеющими вид $\exp[i(\sum_\mathbf{k} \nu_\mathbf{k} a^+_\mathbf{k} a_\mathbf{k} + C)]$.

Определение 2. Оператор S в пространстве $\mathcal{H}_{as}$ назовем *матрицей рассеяния гамильтониана* H, если он удовлетворяет условиям $S\theta = \theta$, $Sb^+(\mathbf{k})\theta = b^+(\mathbf{k})\theta$ и может быть представлен в виде

$$S = \lim_{\alpha\to 0}\lim_{\Omega\to\infty} \widetilde{S}^\Omega_\alpha, \tag{33.9}$$

где $\widetilde{S}^\Omega_\alpha$ — операторы, N-эквивалентные операторам S^Ω_α.

Напомним, что предельный переход в выражениях типа (33.9) понимается как сходимость матричных элементов операторов $\widetilde{S}^\Omega_\alpha$ в базисе $a^+_{\mathbf{k}_1} \ldots a^+_{\mathbf{k}_n}\theta$ к матричным элементам оператора S в обобщенном базисе $b^+(\mathbf{k}_1) \ldots b^+(\mathbf{k}_n)\theta$.

Из соотношения (33.8) видно, что матрица рассеяния в смысле определения 1 является матрицей рассеяния в смысле сформулированного только что определения. Однако в отличие от определения 1 определение 2 задает матрицу рассеяния неоднозначно: используя произвол в выборе операторов S_α^Ω, легко убедиться, что оператор, S-эквивалентный матрице рассеяния, сам является матрицей рассеяния в смысле определения 2. Верно и обратное утверждение: две матрицы рассеяния гамильтониана H S-эквивалентны. Обратим внимание на то, что в § 32 матрица рассеяния также была определена с точностью до S-эквивалентности.

В рамках теории возмущений можно доказать, что *определение 2 эквивалентно данному в § 32 определению матрицы рассеяния**. При этом на гамильтониан H нужно наложить некоторые требования [достаточно потребовать, чтобы этот гамильтониан относился к классу $\mathcal{M}$, описанному в § 42, а функция $\varepsilon(\mathbf{k})$, фигурирующая в определении гамильтониана H_0, удовлетворяла условию $\varepsilon(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)<\varepsilon(\mathbf{k}_1)+\varepsilon(\mathbf{k}_2)$].

Связь между адиабатической S-матрицей и матрицей рассеяния рассматривается в § 41 (в рамках аксиоматической теории рассеяния) и в § 46 (для гамильтонианов, не порождающих поляризации вакуума). Доказательство эквивалентности определения 2 другим определениям матрицы рассеяния в рамках теории возмущений с частичным суммированием может быть получено с помощью модификации рассуждений § 41. Другое, менее строгое доказательство содержится в [42].

§ 34. Фаддеевское преобразование. Теорема эквивалентности

Рассмотрим гамильтониан $H=H_0+V$ вида (33.1). В случае $v_{m,0}\equiv v_{m,1}\equiv 0$ матрицу рассеяния гамильтониана H можно определить с помощью обычного соотношения формальной теории рассеяния (17.3) (см. § 31). Если имеем дело с произвольным гамильтонианом H, то при некоторых условиях можно заменить гамильтониан H на эквивалентный ему в некотором смысле гамильтониан $H'=H_0'+V'$, для которого матрица рассеяния определяется соотношением

$$S=\operatorname*{slim}_{t\to\infty,\ t_0\to-\infty}\exp(\mathrm{i}H_0't)\exp(-\mathrm{i}H'(t-t_0))\exp(-\mathrm{i}H_0't_0). \tag{34.1}$$

* Точнее говоря, для того чтобы доказать эту эквивалентность, нужно провести частичное суммирование ряда теории возмущений для S_α^Ω.

Эта матрица рассеяния может рассматриваться также как матрица рассеяния гамильтониана H.

Рассуждения будут проводиться в рамках теории возмущений. Это означает, что гамильтониан H_0+V будет включен в семейство гамильтонианов H_0+gV, зависящих от параметра g (константы связи), и гамильтониан H' будет строиться в виде ряда по степеням g.

Прежде всего докажем некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим уравнение

$$[h_0, x]=r, \tag{34.2}$$

где h_0, x, r — операторы в фоковском пространстве $F_\Omega = F(L^2(\Omega))$, соответствующем конечному объему Ω:

$$h_0=\sum_{\mathbf{k}\in T_\Omega}\varepsilon(\mathbf{k})a_\mathbf{k}^+a_\mathbf{k}, \tag{34.3}$$

положительная функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)<\varepsilon(\mathbf{k}_1)+\varepsilon(\mathbf{k}_2). \tag{34.4}$$

Запишем неизвестный оператор x и известный оператор r в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned}x&=\sum_{m,n}\sum_{\mathbf{k}_i,\mathbf{p}_j}\xi_{m,n}(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_m|\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n)a_{\mathbf{k}_1}^+\dots\\&\qquad\dots a_{\mathbf{k}_m}^+a_{\mathbf{p}_1}\dots a_{\mathbf{p}_n};\\r&=\sum_{m,n}\sum_{\mathbf{k}_i,\mathbf{p}_j}\rho_{m,n}(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_m|\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n)a_{\mathbf{k}_1}^+\dots\\&\qquad\dots a_{\mathbf{k}_m}^+a_{\mathbf{p}_1}\dots a_{\mathbf{p}_n}\end{aligned}\right\} \tag{34.5}$$

(в этих формулах, так же как и в аналогичных формулах ниже, подразумевается суммирование по $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{p}_j\in T_\Omega$). Вычисляя коммутатор $[h_0, x]$, получаем связь между неизвестными функциями $\xi_{m,n}$ и известными функциями $\rho_{m,n}$:

$$\begin{aligned}&(\varepsilon(\mathbf{k}_1)+\dots+\varepsilon(\mathbf{k}_m)-\varepsilon(\mathbf{p}_1)-\dots-\\&-\varepsilon(\mathbf{p}_n))\xi_{m,n}(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_m|\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n)=\\&=\rho_{m,n}(\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_m|\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n).\end{aligned} \tag{34.6}$$

Если оператор представлен в нормальной форме, то слагаемое, содержащее m операторов рождения и n операторов уничтожения, будем называть слагаемым типа (m, n). Слагаемые типа $(m, 0)$, $(0, m)$, $(n, 1)$ и $(1, n)$, где $m\geqslant 1$, $n\geqslant 2$, условимся называть плохими.

Докажем следующую лемму.

Если оператор r коммутирует с оператором импульса $\mathbf{P}_\Omega = \sum \mathbf{k} a_\mathbf{k}^+ a_\mathbf{k}$ и содержит только плохие слагаемые, то уравнение (34.2) разрешимо. Условие, чтобы оператор x также коммутировал с оператором импульса и содержал только плохие слагаемые, выделяет единственное решение уравнения (34.2), которое будем обозначать $\Gamma(r)$. Если оператор r эрмитов, то оператор $\Gamma(r)$ также эрмитов.

Для того чтобы доказать сформулированное утверждение, заметим прежде всего, что из соотношения (34.6) можно по функции $\rho_{m,n}$ найти функцию $\xi_{m,n}$ в том и только в том случае, когда для всех значений аргументов $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, удовлетворяющих условию $\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{k}_m) = \varepsilon(\mathbf{p}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{p}_n)$, имеет место равенство $\rho_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = 0$. В силу неравенства $\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{k}_m) > 0$ по функциям $\rho_{m,0}$ и $\rho_{0,m}$ можно найти функции $\xi_{m,0}$ и $\xi_{0,m}$. Далее, из предположения, что оператор r коммутирует с оператором импульса, вытекает, что число $\rho_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ может быть отлично от нуля только при условии $\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m = \mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n$. Это позволяет утверждать, что неравенство

$$\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{k}_m) > \varepsilon(\mathbf{p}),$$

справедливое при $\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m = \mathbf{p}$, $m > 1$, в силу предположения (34.4) гарантирует разрешимость уравнения (34.6) при $m > 1$, $n = 1$ и при $n > 1$, $m = 1$. Таким образом, в условиях леммы уравнение (34.2) разрешимо. Остальные утверждения леммы доказываются тривиально [например, единственность при наложенных на решение ограничениях вытекает из того, что при условии $\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{k}_m) \neq \varepsilon(\mathbf{p}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{p}_n)$ по числу $\rho_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ однозначно восстанавливается число $\xi_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$].

Рассмотрим теперь в пространстве F_Ω эрмитов оператор h, коммутирующий с оператором импульса $\mathbf{P}_\Omega$, и поставим задачу об отыскании такого унитарного оператора w, что оператор $h' = whw^{-1}$ не содержит плохих слагаемых. Покажем, что в рамках теории возмущений такой оператор w может быть построен. Точнее говоря, убедимся, что для оператора вида $h = h_0 + gv$, где h_0 — рассматривавшийся выше оператор (34.3), g — числовой параметр (константа связи), операторы h' и w могут быть построены в виде формальных рядов по степеням g. Операторы h' и w, которые мы сконструируем, будут коммутировать с оператором импульса $\mathbf{P}_\Omega$; из этого, в частности, следует, что оператор h' может быть представлен в виде $h' = c + h'_0 + v'$, где c — константа [слагаемое типа (0,0)], $h'_0 = \sum \omega_\mathbf{k} a_\mathbf{k}^+ a_\mathbf{k}$ [слагаемое типа (1,1)], $v' = \sum_{m,n\geq 2} \sum v'_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)\, \delta_{\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m}^{\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n} a_{\mathbf{k}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{k}_m}^+ a_{\mathbf{p}_1} \ldots a_{\mathbf{p}_n}$ (сумма слагаемых типа (m, n) с $m \geq 2$, $n \geq 2$). Оператор w будем искать в виде

$$w = \exp(-\mathrm{i}\alpha),$$

где α — эрмитов оператор, представленный в виде ряда по степеням g:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \alpha_n.$$

Воспользуемся формулой*

$$h' = \exp(-\mathrm{i}\,\alpha)\, h \exp(\mathrm{i}\,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} [\ldots [h, \alpha] \ldots, \alpha].$$

Приравнивая члены, имеющие n-й порядок по константе связи g, получаем равенство

$$h'_n = \mathrm{i}\,[h_0, \alpha_n] + q_n, \tag{34.7}$$

где q_n обозначает оператор, выражающийся через h_0, v и α_k с $k \leqslant n-1$, а $h'_n g^n$ обозначает член порядка n в разложении оператора h' по степеням g. Покажем, что с помощью индукции по n можно подобрать эрмитовы операторы α_n и h'_n таким образом, чтобы оператор h'_n не содержал плохих слагаемых. Для этого в качестве оператора h'_n следует взять сумму хороших слагаемых из нормальной формы оператора q_n. Тогда оператор $h'_n - q_n$ содержит только плохие слагаемые и, стало быть, удовлетворяет условиям, наложенным в лемме на оператор r. Поэтому оператор α_n, удовлетворяющий равенству (34.7), существует; определим его формулой $\alpha_n = \Gamma(h'_n - q_n)$. Легко проверить,

* Легко видеть, что операторы $C(t) = \exp(-\mathrm{i}t\alpha)\, b \exp(\mathrm{i}t\alpha)$ и $D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} [\ldots [b, \alpha] \ldots, \alpha]$ удовлетворяют одинаковым уравнениям $\mathrm{i}\frac{dC(t)}{dt} = [\alpha, C(t)]$, $\mathrm{i}\frac{dD(t)}{dt} = [\alpha, D(t)]$ с одним и тем же начальным условием: $C(0) = D(0) = b$, поэтому $C(t) = D(t)$.

что операторы q_n — эрмитовы; из эрмитовости операторов q_n вытекает эрмитовость построенных операторов h'_n и α_n.

Таким образом, указана индуктивная конструкция таких операторов h'_n и α_n, что оператор $h' = \sum h'_n g^n$ не содержит плохих слагаемых, а оператор $w = \exp(-i\alpha) = \exp(-i\sum \alpha_n g^n)$ осуществляет унитарную эквивалентность между операторами h и h' (т. е. $h' = w h w^{-1}$).

Отметим, что указанная конструкция операторов h' и w вполне однозначна; будем называть эту конструкцию *фаддеевской*, а унитарный оператор w *фаддеевским преобразованием*.

Построение операторов h' и w произведено выше в рамках теории возмущений; иными словами, эти операторы построены в виде формальных рядов по степеням g. Неизвестно, сходятся ли эти ряды.

Более того, как при доказательстве леммы, так и при построении фаддеевского преобразования под оператором понимали формальное выражение вида (34.5), не останавливаясь на вопросе, определяет ли такое выражение действительно оператор в фоковском пространстве. В ситуации, в которой будем применять фаддеевскую конструкцию, легко проверить, что формальным выражениям h_n и α_n соответствуют эрмитовы операторы; доказательство основано на соображениях, приведенных в § 21.

На построенное преобразование можно взглянуть с другой стороны.

Рассмотрим операторы

$$b_{\mathbf{k}}^{+} = w^{-1} a_{\mathbf{k}}^{+} w; \; b_{\mathbf{k}} = w^{-1} a_{\mathbf{k}} w. \tag{34.8}$$

Эти операторы удовлетворяют, очевидно, тем же коммутационным соотношениям, что и операторы $a_{\mathbf{k}}^{+}$, $a_{\mathbf{k}}$:

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}]_{\mp} = [b_{\mathbf{k}}^{+}, b_{\mathbf{k}'}^{+}]_{\mp} = 0; \quad [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^{+}]_{\mp} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}.$$

Переход от операторов $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^{+}$ к операторам $b_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}^{+}$, удовлетворяющим тем же коммутационным соотношениям, называется *каноническим преобразованием*. Из соотношения $h = w^{-1} h' w$ вытекает, что оператор h выражается через операторы $b_{\mathbf{k}}^{+}$, $b_{\mathbf{k}}$ так же, как h' через $a_{\mathbf{k}}^{+}$, $a_{\mathbf{k}}$; таким образом, представив оператор h через операторы $b_{\mathbf{k}}^{+}$, $b_{\mathbf{k}}$ в нормальной форме, не получим плохих слагаемых.

Вернемся теперь к трансляционно инвариантному гамильтониану $H = H_0 + gV$, где H_0 и V определяются формулой (31.1). Предположим, что $\varepsilon(\mathbf{k})$ — гладкая функция, любая производная которой имеет не более чем степенной рост, а функции $w_{m,n}$ принадлежат пространству $\mathscr{S}$. Потребуем также, чтобы функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ удовлетворяла неравенству (34.4).

Применим фаддеевскую конструкцию к гамильтонианам H_Ω, получающимся из H с помощью обрезания по объему. Полученный с помощью этой конструкции гамильтониан, не содержащий плохих слагаемых, обозначим H'^Ω, а оператор, устанавливающий унитарную эквивалентность между H'^Ω и H_Ω, обозначим $W^\Omega = \exp(-i A^\Omega)$. Нетрудно проследить, как ведут себя операторы H'^Ω и A^Ω при $\Omega \to \infty$. Именно, оказывается, что оператор H'^Ω может быть представлен в виде $H'^\Omega = C^\Omega + H_0'^\Omega + V'^\Omega$, где C^Ω — константа, линейно растущая при $\Omega \to \infty$;

$$H_0'^\Omega = \sum \omega_{\mathbf{k}}^\Omega a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}};$$

$$V'^\Omega = \sum_{m,n} \sum \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-3\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} v_{m,n}'^\Omega(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$

$$\times \delta_{\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m}^{\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n} a_{\mathbf{k}_1}^{+} \ldots a_{\mathbf{k}_m}^{+} a_{\mathbf{p}_1} \ldots a_{\mathbf{p}_n};$$

функции $\omega_{\mathbf{k}}^\Omega$, $v_{m,n}'^\Omega$ имеют предел при $\Omega \to \infty$*. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\lim \omega_{\mathbf{k}}^\Omega = \omega(\mathbf{k}); \\ &\lim v_{m,n}'^\Omega(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \\ &= v_{m,n}'(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n), \end{aligned}\right\} \tag{34.9}$$

$$H_0' = \int \omega(\mathbf{k}) a^{+}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k};$$

$$V' = \sum_{m,n} \int v_{m,n}'(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$

$$\times \delta(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m - \mathbf{p}_1 - \ldots - \mathbf{p}_n) a^{+}(\mathbf{k}_1) \ldots$$

$$\ldots a^{+}(\mathbf{k}_m) a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n) d^m\mathbf{k} d^n\mathbf{p}.$$

---

* Функции $\omega_{\mathbf{k}}^\Omega$, $v_{m,n}'^\Omega$ представлены в виде рядов по степеням g; под сходимостью здесь понимаем поточечную сходимость в каждом порядке по g. Полезно отметить, что можно найти функции $\mathrm{v}_{m,n}^r \in \mathscr{S}$ и функции $\sigma^r(\mathbf{k})$, имеющие не более чем степенной рост, таким образом, чтобы удовлетворить неравенствам $|(v_{m,n}'^\Omega)^r| \leqslant \mathrm{v}_{m,n}^r$, $|(\omega_{\mathbf{k}}^\Omega)^r| \leqslant \sigma^r(\mathbf{k})$ (символом f^r здесь обозначены члены порядка r по g в разложении функции f).

Трансляционно инвариантный гамильтониан $H' = H'_0 + V'$ не содержит плохих слагаемых; будем говорить, что этот гамильтониан получается фаддеевским преобразованием из гамильтониана H. Можно сказать, что

$$H' = \lim_{\Omega \to \infty} \left(H'^{\Omega} - C^{\Omega}\right) \tag{34.10}$$

[соотношение (34.10) следует понимать как краткую запись формул (34.9)].

Оператор A^{Ω} ведет себя при $\Omega \to \infty$ таким же образом. Иными словами, он может быть записан в виде

$$A^{\Omega} = \sum_{m,\,n} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{-3\left(\frac{m+n}{2}-1\right)} \sum \alpha^{\Omega}_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \delta^{\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n}_{\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m} a^+_{\mathbf{k}_1} \ldots a^+_{\mathbf{k}_m} a_{\mathbf{p}_1} \ldots a_{\mathbf{p}_n},$$

где функции $\alpha^{\Omega}_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ имеют предел при $\Omega \to \infty$:

$$\alpha_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \lim_{\Omega \to \infty} \alpha^{\Omega}_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \tag{34.11}$$

в каждом порядке по g. Введя формальное трансляционно инвариантное выражение

$$A = \sum_{m,\,n} \int \alpha_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \delta(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m - \mathbf{p}_1 - \ldots - \mathbf{p}_n) a^+(\mathbf{k}_1) \ldots$$
$$\ldots a^+(\mathbf{k}_m) a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n) d^m\mathbf{k} d^n\mathbf{p},$$

соотношения (34.11) можно записать в виде $A = \lim\limits_{\Omega \to \infty} A^{\Omega}$.

Поведение оператора W^{Ω} при больших Ω более сложно; этому оператору не удается сопоставить в пределе $\Omega \to \infty$ даже формального трансляционно инвариантного выражения. По построению в выражении V' нет слагаемых типа $(m, 0)$ и $(m, 1)$, поэтому не существует препятствий для того, чтобы формальное выражение H' определяло оператор $\hat{H}'$ в фоковском пространстве и чтобы матрицу рассеяния для гамильтониана H' можно было построить как S-матрицу пары операторов $(\hat{H}', \hat{H}'_0)$ (см. § 31). В гл. 11 доказано, что построение S-матрицы пары операторов $(\hat{H}', \hat{H}'_0)$ во всяком случае можно произвести в рамках теории возмущений.

Л. Д. Фаддеев предложил называть *матрицей рассеяния гамильтониана* H S-матрицу, построенную по паре операторов $(\hat{H}', \hat{H}'_0)$. Можно доказать, что фаддеевское определение матрицы рассеяния эквивалентно другим рассмотренным определениям (доказательство, естественно, проводится по теории возмущений, поскольку само фаддеевское определение основано на теории возмущений). Доказательство этого утверждения приведено в § 44, а здесь укажем некоторые обобщения фаддеевской конструкции. Прежде всего представим эту конструкцию в несколько ином виде. Нетрудно убедиться, что S-матрицу (34.1) можно записать также в виде

$$S = \lim_{\substack{t \to \infty \\ t_0 \to -\infty}} \lim_{\Omega \to \infty} \exp\left(\mathrm{i} H'^{\Omega}_0 t\right) \exp\left(-\mathrm{i}\left(H'^{\Omega} - C^{\Omega}\right)(t - t_0)\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\mathrm{i} H'^{\Omega}_0 t_0\right)$$

(предел понимается в смысле, объясненном в § 33).

Пользуясь соотношением $H'^{\Omega} = W^{\Omega} H_{\Omega} (W^{\Omega})^{-1}$, можем написать, что

$$S = \lim_{\substack{t \to \infty \\ t_0 \to -\infty}} \lim_{\Omega \to \infty} \exp\left(\mathrm{i}\left(H'^{\Omega}_0 + C^{\Omega}\right) t\right) W^{\Omega} \exp\left(-\mathrm{i} H_{\Omega}(t - t_0)\right) \times$$
$$\times \left(W^{\Omega}\right)^{-1} \exp\left(-\mathrm{i}\left(H'^{\Omega}_0 + C^{\Omega}\right) t_0\right). \tag{34.12}$$

Оператор $(W^{\Omega})^{-1}$ естественно назвать одевающим оператором, поскольку он переводит голый вакуум θ и голое одночастичное состояние $a^+_{\mathbf{k}}\theta$ в стационарные состояния гамильтониана H_{Ω}, которые естественно назвать одетым вакуумом и одетым одночастичным состоянием (действительно, оператор $(W^{\Omega})^{-1}$ переводит стационарные состояния гамильтониана H'^{Ω} в стационарные состояния гамильтониана H_{Ω}, а θ и $a^+_{\mathbf{k}}\theta$ — очевидно, стационарные состояния гамильтониана H'^{Ω}).

Формула (34.12) наводит на мысль дать следующее общее определение одевающего оператора (точнее, семейства одевающих операторов D^{Ω}, зависящих от параметра Ω).

Семейство операторов D^{Ω}, действующих в пространствах F_{Ω}, будем называть *семейством одевающих операторов для гамильтониана* H, если найдется гамильтониан $H^{\Omega}_{\text{кв}}$ вида

$\gamma^{\Omega}+\sum_{\mathbf{k}} \nu_{\mathbf{k}}^{\Omega} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}}$, такой, что матрица рассеяния S, построенная по гамильтониану H, может быть представлена в форме

$$S=\lim_{\substack{t\to\infty\\ t_0\to-\infty}} \lim_{\Omega\to\infty} \exp\left(\mathrm{i} H_{\text{кв}}^{\Omega} t\right)\left(D^{\Omega}\right)^{-1} \times$$
$$\times \exp\left(-\mathrm{i} H_{\Omega}\left(t-t_0\right)\right) D^{\Omega} \exp\left(-\mathrm{i} H_{\text{кв}}^{\Omega} t_0\right).$$

Формула (34.12) показывает, что семейство операторов $(W_{\Omega})^{-1}$ является семейством одевающих операторов в смысле данного выше определения.

В § 45 описан широкий класс семейств одевающих операторов, включающий в себя семейство операторов $(W^{\Omega})^{-1}$.

Теорема о равносильности фаддеевского определения другим определениям матрицы рассеяния — частный случай теоремы об инвариантности матрицы рассеяния при канонических преобразованиях (теоремы такого типа называются теоремами эквивалентности).

Дадим общее определение канонического преобразования.

Пусть символы $b^{+}(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ выражаются через символы $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ с помощью формул

$$\left.\begin{aligned}
b(\mathbf{k})=&\sum_{m,n}\int \sigma_{m,n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_m|\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{p}_1-\ldots-\mathbf{p}_n)\,a^{+}(\mathbf{k}_1)\ldots\\
&\ldots a^{+}(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{p}_1)\ldots a(\mathbf{p}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p};\\
b^{+}(\mathbf{k})=&\sum_{m,n}\int \overline{\sigma_{m,n}}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_m|\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n)\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{p}_1-\ldots-\mathbf{p}_n)\,a^{+}(\mathbf{p}_n)\ldots\\
&\ldots a^{+}(\mathbf{p}_1)\,a(\mathbf{k}_m)\ldots a(\mathbf{k}_1)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p},
\end{aligned}\right\} \qquad (34.13)$$

где $\sigma_{m,n}$ — гладкие функции, все производные которых имеют не более чем степенной рост.

Переход от символов $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ к символам $b^{+}(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ называется *каноническим преобразованием*, если символы $b^{+}(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ подчиняются тем же коммутационным (или антикоммутационным) соотношениям, что и символы $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ (т. е. подчиняются CR). При этом в случае CCR вычисление коммутаторов для символов $b^{+}(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$ следует производить, пользуясь CCR для операторов $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, дистрибутивностью и соотношением $[A\,B, C]=[A, C]B+A\,[B, C]$ (вычисление антикоммутаторов в случае CAR производится с помощью аналогичных соображений).

Упоминавшуюся выше теорему эквивалентности можно (не вполне строго) сформулировать следующим образом.

При каноническом преобразовании (34.13) трансляционно инвариантный гамильтониан H вида (31.1) переходит в трансляционно инвариантный гамильтониан $\tilde{H}$, имеющий ту же самую матрицу рассеяния.

(Гамильтониан $\tilde{H}$ строится по гамильтониану H и каноническому преобразованию (34.13) следующим образом: в выражение гамильтониана H через символы $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ подставляем вместо этих символов $b^{+}(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, выраженные через $a^{+}(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ с помощью формулы (34.13); далее приводим получившееся выражение к нормальной форме с помощью CR, отбрасывая появляющиеся при этом бесконечные константы.)

Легко видеть, что гамильтониан H', получающийся из трансляционно инвариантного гамильтониана H применением фаддеевской конструкции, связан с гамильтонианом H каноническим преобразованием (это каноническое преобразование получается предельным переходом $\Omega\to\infty$ из описываемого формулой (34.8) канонического преобразования, связывающего операторы $b_{\mathbf{k}}^{+}$, $b_{\mathbf{k}}$ с операторами $a_{\mathbf{k}}^{+}$, $a_{\mathbf{k}}$).

Таким образом, из теоремы эквивалентности ясно, что матрицы рассеяния, построенные по операторам H и H', совпадают; это показывает, что фаддеевская конструкция приводит к обычной матрице рассеяния.

Доказательство теоремы эквивалентности в рамках теории возмущений приведено в § 44.

Отметим, что для линейных канонических преобразований рассуждения, проведенные в § 44, доказывают теорему эквивалентности и вне рамок теории возмущений.

§ 35. Квазиклассическое приближение

Уже говорилось, что гамильтонианы квантовой теории поля получаются с помощью квантования классических механических систем с бесконечным числом степеней свободы. Это обстоятельство будет сейчас использовано для того, чтобы получить приближенное решение задач квантовой теории поля. Как и в § 30, откажемся здесь от принятого в этой книге условия $\hbar=1$.

Рассмотрим прежде всего квантовомеханическую систему с конечным числом степеней свободы, описываемую гамильтонианом (30.2). Для того чтобы найти слабо возбужденные состояния (стационарные состояния, мало отличающиеся по энергии от основного состояния), можно поступить следующим образом. Найдем минимум функции $U(q_1, \ldots, q_n)$ (потенциальной энергии); пусть он достигается в точке $(q_1^0, \ldots, q_n^0)$. Введем новые переменные $x_i = q_i - q_i^0$ (отклонения от классического положения равновесия) и разложим функцию U в ряд по степеням x_i:

$$U(q_1, \ldots, q_n) = U(q_1^0, \ldots, q_n^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j + \\ + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k} c_{ijk} x_i x_j x_k + \ldots .$$

Если матрица c_{ij} положительно определена, то энергии слабо возбужденных уровней определяются приближенным выражением

$$U(q_1^0, \ldots, q_n^0) + \frac{\hbar}{2}\sum \omega_i + \hbar \sum n_i \omega_i, \tag{35.1}$$

где $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$ — собственные значения матрицы c_{ij}, $n_i = 0, 1, 2, \ldots$ — неотрицательные целые числа.

Для того чтобы в этом убедиться, перепишем гамильтониан (30.2) через операторы $\hat{p}_i$ и $\hat{x}_i = \hat{q}_i - q_i^0$, удовлетворяющие условиям $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$, $[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ij}$; получим

$$H = H_0 + V;$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum \hat{p}_i^2 + \frac{1}{2}\sum c_{ij}\hat{x}_i \hat{x}_j + U(q_1^0, \ldots, q_n^0);$$

$$V = \frac{1}{3!}\sum c_{ijk}\hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k + \ldots .$$

Операторы $\hat{p}_i$, $\hat{x}_i$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и $\hat{p}_i$, $\hat{q}_i$, т. е. переход к этим операторам можно рассматривать как каноническое преобразование.

Собственные значения оператора H_0 определяются выражением (35.1) (см. § 11). Собственные значения оператора $H = H_0 + V$ можно вычислять по теории возмущений, рассматривая оператор V как возмущение; легко видеть, что поправки к энергиям слабо возбужденных уровней малы. Это становится очевидным, если, пользуясь соображениями

§ 11, выразить H_0 и V через операторы a_i^+, a_i, удовлетворяющие CCR:

$$H_0 = U(q_1^0, \ldots, q_n^0) + \frac{1}{2}\hbar\sum \omega_i + \hbar\sum \omega_i a_i^+ a_i;$$

$$V = \sum_{m+n \geqslant 3} \hbar^{(1/2)(m+n)} \times \\ \times \sum_{i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_n} \Gamma^{m,n}_{i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_n} a_{i_1}^+ \ldots a_{j_n}$$

(ряд теории возмущений легко перестроить в ряд по степеням $\hbar^{1/2}$, причем наименьшая степень $\hbar^{1/2}$ в выражении для поправки к энергии равна $\hbar^{3/2}$).

Таким образом, для того чтобы исследовать слабо возбужденные уровни гамильтониана H, следует сделать каноническое преобразование (перейти к операторам $\hat{p}_i$, $\hat{x}_i$), выделить квадратичную часть H_0 и рассмотреть V как возмущение.

Обратимся теперь к рассмотрению классической механической системы, описываемой функционалом Гамильтона

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\sum_i \int \pi_i^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \\ + \sum_m \sum_{i_1, \ldots, i_m} \int V_{i_1, \ldots, i_m}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)\,\varphi_{i_1}(\mathbf{x}_1) \ldots \varphi_{i_m}(\mathbf{x}_m)\,d^m\mathbf{x}; \tag{35.2}$$

$$V_{i_1, \ldots, i_m}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = v_{i_1, \ldots, i_m}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m, \ldots, \mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_m).$$

При квантовании этой системы получается гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \int \hat{\pi}_i^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \\ + \sum_m \sum_{i_1, \ldots, i_m} \int V_{i_1, \ldots, i_m}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)\,\hat{\varphi}_{i_1}(\mathbf{x}_1) \ldots \\ \ldots \hat{\varphi}_{i_m}(\mathbf{x}_m)\,d^m\mathbf{x}, \tag{35.3}$$

где

$$[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{\pi}_j(\mathbf{x}')] = [\hat{\varphi}_i(\mathbf{x}), \hat{\varphi}_j(\mathbf{x}')] = 0;$$

$$[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{\varphi}_j(\mathbf{x}')] = \frac{\hbar}{i}\delta_{i,j}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

[несколько менее общий гамильтониан (30.3) исследовался в § 30; все, что известно для гамильтониана (30.3), без труда переносится на гамильтониан (35.3)].

По аналогии со случаем конечного числа степеней свободы изучение гамильтониана (35.3) разумно проводить с помощью канонического преобразования: вместо символов $\hat{\varphi}_i(\mathrm{x})$ следует ввести символы $\hat{\xi}_i(\mathrm{x}) = \hat{\varphi}_i(\mathrm{x}) - \alpha_i$, где α_i — действительные числа; символы $\hat{\pi}_i(\mathrm{x})$, $\hat{\xi}_i(\mathrm{x})$ удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, как $\hat{\pi}_i(\mathrm{x})$, $\hat{\varphi}_j(\mathrm{x})$ (можно было бы ввести символы $\hat{\xi}_i(\mathrm{x})$ более общей формулой $\hat{\xi}_i(\mathrm{x}) = \hat{\varphi}_i(\mathrm{x}) - \alpha_i(\mathrm{x})$, но, поскольку рассматриваемый гамильтониан трансляционно инвариантен, естественно считать, что $\alpha_i(\mathrm{x})$ не зависит от x). Рассмотрим функцию n переменных

$$\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_m \sum_{i_1, \ldots, i_m} \nu_{i_1, \ldots, i_m} \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_m},$$

где

$$\nu_{i_1, \ldots, i_m} = \int v_{i_1, \ldots, i_m}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{m-1})\, d^{m-1}(\mathrm{x})$$

[функция ν имеет физический смысл плотности энергии классической системы в состоянии $\pi_1(\mathrm{x}) = \ldots = \pi_n(\mathrm{x}) \equiv 0$, $\varphi_1(\mathrm{x}) \equiv \varphi_1, \ldots, \varphi_n(\mathrm{x}) \equiv \varphi_n$]. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, определяющие рассматриваемое каноническое преобразование, будем искать из условия

$$\min_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Точку n-мерного пространства $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, доставляющую минимум функции $\nu(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, будем называть классическим вакуумом.

При некоторых условиях нетрудно проверить, что сделанный выбор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ диктуется предельным переходом от конечного числа степеней свободы (о представлении гамильтониана (35.2) в виде предела гамильтонианов с конечным числом степеней свободы см. § 15 в [23]).

Заменив в гамильтониане (35.3) $\hat{\varphi}_i(\mathrm{x})$ на $\hat{\xi}_i(\mathrm{x}) + \alpha_i$, получим гамильтониан H', имеющий по теореме эквивалентности ту же матрицу рассеяния. Выделив из H' квадратич-

ные члены H_0, представим H' в виде $H_0 + V$, где

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_i \int \hat{\pi}_i^2(\mathrm{x})\, dx + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \int c_{ij}(\mathrm{x} - \mathrm{y}) \times \\ \times \hat{\xi}_i(\mathrm{x}) \hat{\xi}_j(\mathrm{y})\, dx\, d\mathrm{y};$$

$$V = \sum_{m \geqslant 3} \sum_{i_1, \ldots, i_m} \int c_{i_1, \ldots, i_m}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_m, \ldots, \mathrm{x}_{m-1} - \mathrm{x}_m) \times \\ \times \hat{\xi}_{i_1}(\mathrm{x}_1) \ldots \hat{\xi}_{i_m}(\mathrm{x}_m)\, d^m \mathrm{x}.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 30, позволяют построить операторную реализацию гамильтониана H_0 и установить, что H_0 описывает n типов частиц с зависимостью энергии от импульса, определяемой формулой $E_j(\mathbf{p}) = \hbar\omega_j\left(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\right)$, где $\omega_1^2(\mathbf{k}), \ldots, \omega_n^2(\mathbf{k})$ — собственные значения матрицы $\tilde{c}_{ij}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int c_{ij}(\mathrm{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$. Учитывая V как возмущение, получим поправки к энергии одночастичных состояний. По теории возмущений можно вычислить также матрицу рассеяния, соответствующую гамильтониану H' и, значит, гамильтониану H (см. подробнее в [23]).

Таким образом, квазиклассическое приближение, как оно здесь описано, диктует лишь разумный выбор начального приближения в теории возмущений. Однако оказывается, что оно позволяет сделать важные качественные выводы. Рассмотрим, например, гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \int \hat{\pi}^2(\mathrm{x})\, dx + \frac{1}{2} \int \left(\nabla \hat{\varphi}\right)^2 d\mathrm{x} + \int U\left(\hat{\varphi}(\mathrm{x})\right) d\mathrm{x}, \qquad (35.4)$$

где $U(\varphi) = a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4$. (Этот гамильтониан описывает лоренц-инвариантную теорию (см. § 49). Он приводит к ультрафиолетовым расходимостям, которые устраняются перенормировкой; мы здесь отвлекаемся от них.) Легко видеть, что для гамильтониана (35.4) $\nu(\varphi) = U(\varphi)$. Если $U(\varphi) = a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4$, $a_2 > 0$, $a_4 > 0$, как обычно считают, то $\min \nu(\varphi)$ достигается при $\varphi = 0$. Это значит, что при исследовании гамильтониана (35.4) следует пользоваться теорией возмущений, выделяя H_0 обычным образом:

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \hat{\pi}^2(\mathrm{x})\, dx + \frac{1}{2} \int \left(\nabla\hat{\varphi}\right)^2 dx + \int a_2 \hat{\varphi}^2(\mathrm{x})\, dx. \qquad (35.5)$$

В общем случае выделение H_0 с помощью формулы (35.5) оказывается неразумным (это, впрочем, очевидно уже потому, что гамильтониан (35.5) при $a_2 < 0$ описывал бы частицы с мнимой массой; его операторную реализацию нельзя было бы построить (см. § 2 в [23])). Чтобы прийти к правильному выбору начального приближения теории возмущений, нужно найти

$$\min v(\varphi) = \min U(\varphi) = \min(a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + a_3 \varphi^3 + a_4 \varphi^4).$$

Если этот минимум достигается при $\varphi = \alpha$, то, используя описанное выше каноническое преобразование, приходим к гамильтониану $H' = H_0 + V$, где

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int (\nabla\hat{\xi})^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mu^2 \int \hat{\xi}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$
$$\mu^2 = U''(\alpha).$$

К гамильтониану H' уже можно применять теорию возмущений, считая V возмущением. В частном случае, когда $U(\varphi) = a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4$, $a_2 < 0$, $a_4 > 0$, минимум функции $U(\varphi)$ достигается в двух точках $\alpha = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}}$ (существует два различных классических вакуума). Таким образом, нужное каноническое преобразование и гамильтониан H' можно построить двумя способами: $H'_\pm = H_0 + V_\pm$, где

$$V_\pm = a_4 \int \hat{\xi}^4(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \pm 2\sqrt{2a_2 a_4}\int \hat{\xi}^3(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Это позволяет предполагать, что в рассматриваемом случае могут быть построены различные операторные реализации гамильтониана H. В самом деле, пусть операторную реализацию гамильтониана H'_+ можно получить по теории возмущений, считая V_+ возмущением. Это означает, что

$$\lim_{\hbar\to 0}\langle\hat{\xi}(\mathbf{x}, t)\Phi, \Phi\rangle = 0.$$

Исходя из операторной реализации гамильтониана H'_+, можно построить операторную реализацию гамильтониана H, для которой

$$\lim_{\hbar\to 0}\langle\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)\Phi, \Phi\rangle = \sqrt{\frac{a_2}{2a_4}} + \lim_{\hbar\to 0}\langle\hat{\xi}(\mathbf{x}, t)\Phi, \Phi\rangle = \sqrt{\frac{a_2}{2a_4}} > 0.$$

Для операторной реализации гамильтониана H, построенной аналогичным образом с помощью H'_-, очевидно,

$$\lim_{\hbar\to 0}\langle\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)\Phi, \Phi\rangle = -\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}} < 0;$$

таким образом, построены две существенно различные операторные реализации.

Отметим, что мы столкнулись здесь с важным явлением, которое носит название нарушения симметрии. Исходная функция Гамильтона инвариантна относительно преобразования $\varphi(\mathbf{x}) \to -\varphi(\mathbf{x})$; в то же время классический вакуум не инвариантен относительно этого преобразования (оно переводит один классический вакуум в другой). Аналогичная ситуация наблюдается и в квантовом случае: гамильтониан H инвариантен относительно замены $\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \to -\hat{\varphi}(\mathbf{x})$, поэтому из одной операторной реализации гамильтониана H можно получить другую, заменив операторы $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ операторами $-\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. Если $\langle\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)\Phi, \Phi\rangle \neq 0$, то при этой замене получается операторная реализация, не эквивалентная исходной.

Рассмотрим еще один поучительный пример — гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\sum\int \hat{\pi}_i^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\Big(\sum\hat{\varphi}_i^2(\mathbf{x}) - a^2\Big)^2 d\mathbf{x}. \tag{35.6}$$

Здесь

$$v(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2 - a^2)^2$$

и, значит, минимум функции v достигается на точках $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющих условию $\sum\alpha_i^2 = a^2$ [классические вакуумы заполняют $(n-1)$-мерную сферу]. Гамильтониан (35.6) так же, как и соответствующий классический функционал Гамильтона, инвариантен относительно преобразований

$$\hat{\varphi}'_i(\mathbf{x}) = \sum a_{ij}\hat{\varphi}_j(\mathbf{x}); \quad \hat{\pi}'_i(\mathbf{x}) = \sum a_{ij}\hat{\pi}_j(\mathbf{x}),$$

где $a_{ij} \in O(n)$ (здесь $O(n)$ — группа ортогональных матриц). Однако в операторной реализации гамильтониана H сохраняется меньшая группа симметрии — группа $O(n-1)$.

Это становится понятным, если заметить, что операторная реализация гамильтониана H строится по классическому вакууму, а для каждого классического вакуума преобразования $g \in O(n)$, переводящие этот вакуум в себя (удовлетворяющие условию $g\alpha = \alpha$), образуют подгруппу, изоморфную $O(n-1)$. Преобразования, не входящие в эту подгруппу, переводят операторную реализацию в другую, не эквивалентную исходной.

В рассмотренном примере происходит нарушение непрерывной группы симметрии. В подобной ситуации всегда возникают частицы, энергия которых стремится к нулю, если импульс стремится к нулю (голдстоуновские частицы); в этом нетрудно убедиться в случае, когда применимы квазиклассические рассуждения, использованные в настоящем параграфе. В самом деле, в нулевом приближении энергия частиц определяется собственными значениями матрицы $\tilde{c}_{ij}(\mathbf{k})$. Поскольку эта матрица непрерывно зависит от $\mathbf{k}$, достаточно исследовать матрицу $\tilde{c}_{ij}(0)$, которая, как легко видеть, совпадает с матрицей вторых производных $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_j}$ функции $\mathbf{v}$ в точке минимума. Эта матрица обязательно вырождена, поскольку при сделанных предположениях минимум не может достигаться в изолированной точке. Таким образом, в нулевом приближении голдстоуновские частицы существуют; легко видеть, что учет высших приближений теории возмущений по V не меняет этого утверждения. В лоренц-инвариантной теории энергия частицы с импульсом $\mathbf{p}$ равна $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, где m — масса частицы, поэтому голдстоуновские частицы имеют нулевую массу.

Таким образом, гамильтониан (35.3) описывает частицы, энергия которых при $\hbar \to 0$ имеет вид $\hbar\omega_j(\hbar^{-1}\mathbf{p})$. Однако, кроме этих частиц, которые можно назвать элементарными, гамильтониан (35.3) описывает также частицы, энергия которых при $\hbar \to 0$ имеет конечный предел; эти частицы соответствуют частицеподобным решениям классических уравнений. Простейшими частицеподобными решениями являются *солитоны*. Решение $\pi_i(\mathbf{x}, t)$, $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ уравнений Гамильтона называется солитоном, если функция $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ может быть представлена в виде $s_i(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$. Предполагается, что энергия этого решения конечна. (Условимся считать, что энергия отсчитывается от энергии классического вакуума, т. е. $\mathscr{H}(\pi, \varphi) = 0$, если $\pi_i(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\varphi_i(\mathbf{x}) = \alpha_i$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — классический вакуум. Если это условие

не выполнено, следует заменить функционал Гамильтона (35.2) функционалом

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\sum_i \int \pi_i^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \sum_m \sum_{i_1, \ldots, i_m} \int V_{i_1, \ldots, i_m}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \times (\varphi_{i_1}(\mathbf{x}_1)\ldots\varphi_{i_m}(\mathbf{x}_m) - \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_m})\,d^m\mathbf{x},$$

приводящим к тем же уравнениям движения.)

Солитон с нулевой скоростью ($\mathbf{v} = 0$) представляет собой не зависящее от времени решение уравнений движения. Отметим, что в силу трансляционной инвариантности функционала Гамильтона (35.2) импульс $\mathbf{P} = \sum_i \int \pi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}$ является интегралом движения системы уравнений Гамильтона; солитон с нулевой скоростью имеет нулевой импульс. В лоренц-инвариантном случае из солитона с нулевой скоростью можно с помощью преобразования Лоренца получить солитон с любым импульсом (и с любой скоростью, меньшей скорости света).

Оказывается, что устойчивому солитону соответствует квантовая частица (решение $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, $\pi_i(\mathbf{x}, t)$ называется устойчивым, если каждое решение $\varphi_i'(\mathbf{x}, t)$, $\pi_i'(\mathbf{x}, t)$, мало отличающееся от исходного при $t = 0$, мало отличается от него также в любой другой момент времени t). Точнее, если каждому трехмерному вектору $\mathbf{p}$ соответствует устойчивый солитон уравнений Гамильтона, имеющий импульс $\mathbf{p}$ и энергию $\varepsilon(\mathbf{p})$, то при некоторых условиях среди частиц, описываемых гамильтонианом (35.3), есть частица, энергия которой стремится к $\varepsilon(\mathbf{p})$ при $\hbar \to 0$ [т. е. в пространстве операторной реализации гамильтониана (35.3) найдется векторная обобщенная функция $\Phi_\hbar(\mathbf{p})$, нормированная на δ-функцию и удовлетворяющая условиям $H\Phi_\hbar(\mathbf{p}) = E_\hbar(\mathbf{p})\,\Phi_\hbar(\mathbf{p})$, $\mathbf{P}\Phi_\hbar(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Phi_\hbar(\mathbf{p})$, причем $\lim E_\hbar(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})$] [62—66].

В качестве примера рассмотрим классическую систему с функционалом Гамильтона

$$\mathscr{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\int \pi^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx + \int(\varphi^2(x) - a^2)^2\,dx,$$

где $x \in E^1$. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t)=\pi(x, t);$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x, t)-4\varphi(x, t)(\varphi^2(x, t)-a^2).$$

Если $\varphi(x, t)=s(x)$, то функция $s(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 s}{dx^2}=4s(s^2-a^2). \qquad (35.7)$$

Из условия конечности энергии вытекает, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|s(x)|=a$; пользуясь этим соотношением и уравнением (35.7), получаем в рассматриваемом случае солитоны с нулевой скоростью

$$s(x)=\pm a \operatorname{th}\sqrt{2}\,ax;$$

они имеют энергию $\mu=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$. Солитон с импульсом p можно найти непосредственно или получить с помощью преобразований Лоренца; энергия такого солитона равна $\sqrt{p^2+\mu^2}$. Этим солитонам отвечают квантовые частицы.

Отметим в заключение, что с помощью квазиклассического приближения можно исследовать также более общие гамильтонианы (28.2). Для того чтобы убедиться в этом, введем вместо обобщенных импульсов $\pi(\mathrm{x})$ и обобщенных координат $\varphi(\mathrm{x})$ комплексные функци $\psi(\mathrm{x})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(\mathrm{x})+\mathrm{i}\pi(\mathrm{x}))$, $\overline{\psi}(\mathrm{x})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(\mathrm{x})-\mathrm{i}\pi(\mathrm{x}))$. Произвольный функционал Гамильтона $\mathscr{H}(\pi, \varphi)$ можно выразить через $\overline{\psi}(\mathrm{x})$, $\psi(\mathrm{x})$; будем считать, что

$$\mathscr{H}(\overline{\psi}, \psi)=\sum_{m, n}\int H_{m, n}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m|\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\times$$
$$\times\overline{\psi}(\mathbf{x}_1)\ldots\overline{\psi}(\mathbf{x}_m)\psi(\mathbf{y}_1)\ldots\psi(\mathbf{y}_n)\,d^m\mathbf{x}\,d^n\mathbf{y}.$$

При квантовании функциям $\overline{\psi}(\mathrm{x})$, $\psi(\mathrm{x})$ будут соответствовать операторы $\hat{\psi}^+(\mathrm{x})$, $\hat{\psi}(\mathrm{x})$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{\psi}(\mathrm{x}), \hat{\psi}(\mathrm{x}')]=[\hat{\psi}^+(\mathrm{x}), \hat{\psi}^+(\mathrm{x}')]=0;$$
$$[\hat{\psi}(\mathrm{x}), \hat{\psi}^+(\mathrm{x}')]=\hbar\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}'),$$

а функционалу Гамильтона $\mathscr{H}$ — квантовый гамильтониан

$$H=\sum_{m, n}\int H_{m, n}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m|\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\times$$
$$\times\hat{\psi}^+(\mathbf{x}_1)\ldots\hat{\psi}^+(\mathbf{x}_m)\hat{\psi}(\mathbf{y}_1)\ldots\hat{\psi}(\mathbf{y}_n)\,d^m\mathbf{x}\,d^n\mathbf{y} \qquad (35.8)$$

(при переходе от функционала Гамильтона $\mathscr{H}$ к квантовому гамильтониану H возникает вопрос о расстановке операторов $\hat{\psi}^+$, $\hat{\psi}$ в выражении для H; сделанный выбор отвечает так называемому виковскому квантованию). Если функционал Гамильтона $\mathscr{H}$ трансляционно инвариантен, то с помощью замены

$$\hat{\psi}^+(\mathrm{x})=(2\pi)^{-3/2}\hbar^{1/2}\int\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x})\,a^+(\mathbf{k})\,d\mathbf{k};$$
$$\hat{\psi}(\mathrm{x})=(2\pi)^{-3/2}\hbar^{1/2}\int\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x})\,a(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$$

гамильтониан (35.8) приводится к виду (28.2). Это позволяет применить для исследования гамильтонианов (28.2) изложенные в настоящем параграфе соображения.

ГЛАВА 10

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

§ 36. Основные предположения. Построение матрицы рассеяния

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ заданы четыре коммутирующих самосопряженных оператора H и $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ — оператор энергии и (векторный) оператор импульса. Оператор $\exp(i\mathbf{Pa})$ называется *оператором параллельного переноса*, оператор $\exp(-iHt)$ — *оператором временнóго сдвига*. Будем считать, что у оператора энергии существует единственное основное состояние Φ и это состояние инвариантно относительно временных сдвигов и параллельных переносов: $H\Phi = \mathbf{P}\Phi = 0$. Вектор Φ называется *физическим вакуумом*.

В рассматриваемой ситуации можно применять указанное в § 19 определение частицы. Сформулируем это определение в несколько иной форме.

Предположим, что каждой функции $f \in L^2(E^3)$ поставлен в соответствие вектор $\Phi(f) \in \mathscr{H}$, линейно зависящий от функции f. Такое соответствие можно рассматривать, очевидно, как линейный оператор, действующий из $L^2(E^3)$ в $\mathscr{H}$; предпочтем, однако, рассматривать его как векторную обобщенную функцию $\Phi(\mathbf{k})$, записывая вектор $\Phi(f)$ символически в виде $\Phi(f) = \int f(\mathbf{k})\,\Phi(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$. Векторная обобщенная функция $\Phi(\mathbf{k})$ называется *частицей* (одночастичным состоянием), если для любых функций $f, g \in L^2(E^3)$ имеют место соотношения

$$H\Phi(f) = \Phi(\hat{h} f);$$

$$\mathbf{P}\Phi(f) = \Phi(\hat{\mathbf{p}} f);$$

$$\langle\Phi(f),\ \Phi(g)\rangle = \langle f, g\rangle,$$

где

$$(\hat{h} f)(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})\, f(\mathbf{k});$$

$$(\hat{\mathbf{p}} f)(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\, f(\mathbf{k}).$$

Вектор $\Phi(f)$ имеет физический смысл вектора состояния частицы с волновой функцией f, функция $\omega(\mathbf{k})$ — смысл энергии одночастичного состояния (закона дисперсии). Перечисленные условия эквивалентны соотношениям (19.1) — (19.3). Последнее из них означает изометричность оператора, сопоставляющего функции f вектор $\Phi(f)$; оно эквивалентно соотношению (19.3), показывающему, что функция $\Phi(\mathbf{k})$ нормирована на δ-функцию. Разумеется, может существовать несколько типов частиц [несколько обобщенных функций $\Phi(\mathbf{k})$], удовлетворяющих требованиям (19.1) — (19.3). Систему частиц $\Phi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Phi_s(\mathbf{k})$ будем называть *полной*, если все частицы ортогональны друг другу (т. е. $\langle\Phi_i(\mathbf{k}), \Phi_j(\mathbf{k}')\rangle = 0$ при $i \neq j$) и не существует частицы, ортогональной всем частицам из этой системы.

Можно доказать, что *всякая частица* $\Phi(\mathbf{k})$ *выражается через частицы полной системы* [т. е. найдутся такие функции $f_i(\mathbf{k})$, что $\Phi(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{s} f_i(\mathbf{k})\,\Phi_i(\mathbf{k})$].

Будем считать, что фиксирована полная система частиц $\Phi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Phi_s(\mathbf{k})$ с законами дисперсии $\omega_1(\mathbf{k}), \ldots, \omega_s(\mathbf{k})$ и что функции $\omega_i(\mathbf{k})$ являются гладкими строго выпуклыми функциями. (Предположим ради определенности, что в теории конечное число s типов частиц, хотя случай бесконечного числа типов частиц ничуть не сложнее.) *Одночастичным подпространством* $\mathscr{H}_1$ пространства $\mathscr{H}$ будем называть наименьшее из подпространств, содержащих все векторы вида $\Phi_i(f) = \int f(\mathbf{k})\,\Phi_i(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$. *Многочастичным подпространством* $\mathscr{M}$ назовем ортогональное дополнение в $\mathscr{H}$ прямой суммы $\mathscr{H}_0 \dot{+} \mathscr{H}_1$, где $\mathscr{H}_0$ — одномерное подпространство, порожденное физическим вакуумом Φ.

Пространства $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{M}$ являются, очевидно, инвариантными подпространствами операторов H, $\mathbf{P}$. Совместный спектр системы коммутирующих операторов H, $\mathbf{P}$ в пространстве $\mathscr{H}_1$ (в пространстве $\mathscr{M}$) назовем одночастичным (соответственно, многочастичным) спектром и обозначим Σ_1 (соответственно, $\Sigma_{\mathscr{M}}$). Множество Σ_1 является, очевидно, объединением множеств $\Sigma_1^{(i)}$, где $\Sigma_1^{(i)}$ обозначает множество точек вида $(\mathbf{k}, \omega_i(\mathbf{k}))$.

Предположим, что *одночастичный спектр не пересекается с многочастичным и что существует такое* $\delta > 0$, *что весь спектр оператора* H, *за исключением точки* 0, *соответствующей физическому вакууму, лежит на луче* $[\delta, +\infty)$.

Позднее будет указано, как эти требования можно ослабить.

Рассмотрим наряду с пространством $\mathscr{H}$ *пространство асимптотических состояний* $\mathscr{H}_{as}^{*}$, которое определим как фоковское пространство $F(L^2(E^3 \times N))$, где N — конечное множество, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с частицами из полной системы. В пространстве $\mathscr{H}_{as}$ действуют операторные обобщенные функции $a_i^+(\mathbf{k})$, $a_i(\mathbf{k})$, подчиненные CCR (см. § 13); они интерпретируются как операторы рождения и уничтожения частицы i-го типа с импульсом $\mathbf{k} \in E^3$. *Асимптотический гамильтониан* H_{as} и оператор импульса $\mathbf{P}_{as}$ определим формулами

$$H_{as} = \sum_{i=1}^{s} \int \omega_i(\mathbf{k})\, a_i^+(\mathbf{k})\, a_i(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};$$

$$\mathbf{P}_{as} = \sum_{i=1}^{s} \int \mathbf{k} a_i^+(\mathbf{k})\, a_i(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Если A — оператор в пространстве $\mathscr{H}$, то $A(\mathbf{x}, t)$ обозначает оператор $\exp(\mathrm{i}(Ht - \mathbf{Px}))\, A \exp(-\mathrm{i}(Ht - \mathbf{Px}))$. Ограниченные операторы A и B, действующие в пространстве $\mathscr{H}$, назовем *асимптотически коммутирующими*, если для всякого натурального числа n найдутся такие числа C и r, что

$$\| [A, B(\mathbf{x}, t)] \| \leqslant C \frac{1 + |t|^r}{1 + |\mathbf{x}|^n},$$

Семейство $\mathcal{A}$ ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, содержащее вместе со всяким оператором A сопряженный оператор A^*, назовем *асимптотически абелевым*, если два любых оператора из $\mathcal{A}$ асимптотически коммутируют.

Асимптотически абелево семейство, содержащее тождественный оператор, будем называть *асимптотически абелевой алгеброй*, если вместе с операторами A, B к этому же семейству принадлежат операторы

$$\lambda A + \mu B,\ AB,\ A(\mathbf{x}, t), \int f(\mathbf{x}, t)\, A(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}\, dt$$

* Отметим, что пространство $\mathscr{H}_{as}$ можно записать в виде $\mathscr{H}_{as} = F(\mathscr{H}_1) = \sum_{n \geqslant 0} \mathscr{H}_n$, где $\mathscr{H}_n$ — n-я симметричная тензорная степень пространства $\mathscr{H}_1$. Из этой записи следует, что пространство $\mathscr{H}_{as}$ не зависит от выбора полной системы частиц; точнее говоря, между пространствами $\mathscr{H}_{as}$, соответствующими разным выборам полной системы частиц, имеется естественный изоморфизм.

(здесь λ, μ — комплексные числа, $\mathbf{x} \in E^3$, $-\infty < t < \infty$, $f(\mathbf{x}, t)$ — функция из пространства $\mathscr{S}$ быстро убывающих гладких функций). Нетрудно показать, что каждое асимптотически абелево семейство содержится в асимптотически абелевой алгебре. (Доказательство основано на том факте, что присоединение любого из перечисленных операторов вместе с сопряженным с ним оператором к асимптотически абелеву семейству не нарушает асимптотической абелевости.) Поэтому, не ограничивая общности, можем рассматривать вместо асимптотически абелевых семейств асимптотически абелевы алгебры.

Будем считать, что *фиксирована определенная асимптотически абелева алгебра $\mathcal{A}$ операторов в пространстве $\mathscr{H}$ и что физический вакуум Φ является циклическим вектором алгебры $\mathcal{A}$.*

Покажем, что при сделанных предположениях может быть построена матрица рассеяния (S-матрица), соответствующая асимптотически абелевой алгебре $\mathcal{A}$ (можно говорить также о матрице рассеяния, отвечающей асимптотически абелеву семейству, понимая под ней матрицу рассеяния, соответствующую асимптотически абелевой алгебре, содержащей это семейство). Ради простоты обозначений предположим, что полная система частиц состоит из одной частицы $\Phi(\mathbf{k})$.

Приведем несколько предварительных определений.

Оператор B назовем *гладким*, если он может быть представлен в виде $B = \int f(\mathbf{x}, t)\, A(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} dt$, где $A \in \mathcal{A}$ и функция f принадлежит пространству $\mathscr{S}$. (Это название связано с тем, что оператор $B(\mathbf{x}, t)$, где B — гладкий оператор, бесконечно дифференцируем по $\mathbf{x}$ и t в смысле дифференцируемости по норме.) Гладкий оператор B будем называть *правильным*, если: 1) $B^*\Phi = 0$; 2) найдется такая функция φ, что $B\Phi = \int \varphi(\mathbf{k})\, \Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$.

Определение 1. Изометрический оператор S_- (S_+), действующий из пространства $\mathscr{H}_{as}$ в пространство $\mathscr{H}$, назовем матрицей Мёллера, если для любых правильных операторов $B_1, \ldots, B_n$ и гладких финитных функций $f_1(\mathbf{p}), \ldots, f_n(\mathbf{p})$

$$\lim_{\substack{t \to -\infty \\ (+\infty)}} B_1(f_1, t) \ldots B_n(f_n, t)\, \Phi = \underset{(+)}{S_-}\, a^+(\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1) \ldots a^+(\bar{f}_n \bar{\varphi}_n)\, \theta \tag{36.1}$$

[здесь θ — вакуумный вектор в фоковском пространстве $\mathcal{H}_{as}$, $\varphi_j(\mathbf{k}) = \langle B_j\Phi, \Phi(\mathbf{k})\rangle$, функции $\tilde{f}_j(\mathbf{x}\,|\,t)$ определяются соотношением

$$\tilde{f}_j(\mathbf{x}\,|\,t) = \int \exp(-i\omega(\mathbf{p})\,t + i\mathbf{p}\mathbf{x})\, f_j(\mathbf{p})\, \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \qquad (36.2)$$

операторы $B_j(f_j, t)$ задаются формулой

$$B_j(f_j, t) = \int \tilde{f}_j(\mathbf{x}\,|\,t)\, B_j(\mathbf{x}, t)\, d\,\mathbf{x}]. \qquad (36.3)$$

Вектор $B_1(f_1, t) \dots B_n(f_n, t)\,\Phi$, построенный по правильным операторам $B_1, \dots, B_n$ и гладким финитным функциям $f_1, \dots, f_n$, будем обозначать $\Psi(B_1, \dots, B_n\,|\,f_1, \dots, f_n\,|\,t)$, а его пределы при $t \to \pm\infty$ будем обозначать $\Psi_\pm(B_1, \dots$ $\dots, B_n\,|\,f_1, \dots, f_n)$.

Определение 2. Оператор $S = S_+^* S_-$, действующий в пространстве $\mathcal{H}_{as}$, будем называть матрицей рассеяния, соответствующей асимптотически абелевой алгебре $\mathcal{A}$.

Докажем следующие утверждения.

При сделанных предположениях *операторы S_- и S_+, удовлетворяющие условиям определения* 1, *существуют и определяются этими условиями однозначно. Имеют место соотношения*

$$S_\mp\theta = \Phi, \ S_\pm a^+(\mathbf{k})\,\theta = \Phi(\mathbf{k}); \qquad (36.4)$$

$$HS_\mp = S_\mp H_{as}, \ \mathbf{P}S_\mp = S_\mp \mathbf{P}_{as}. \qquad (36.5)$$

Из соотношений (36.5) вытекает, что *матрица рассеяния $S = S_+^* S_-$ коммутирует с гамильтонианом и оператором импульса*:

$$SH_{as} = H_{as}S, \ S\mathbf{P}_{as} = \mathbf{P}_{as}S;$$

соотношения (36.4) влекут за собой *устойчивость вакуума и одночастичных состояний*:

$$S\theta = \theta;$$

$$Sa^+(\mathbf{k})\,\theta = a^+(\mathbf{k})\,\theta.$$

При совпадении областей значений операторов S_- и S_+ ($S_-\mathcal{H}_{as} = S_+\mathcal{H}_{as}$) матрица рассеяния оказывается унитарным оператором и может быть записана также в виде

$$S = S_+^{-1} S_-.$$

Если кроме алгебры $\mathcal{A}$ задана другая асимптотически абелева алгебра $\mathcal{A}'$, для которой вектор Φ является циклическим, и алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ асимптотически коммутируют, то матрицы Мёллера $S_\mp$ и матрица рассеяния S, построенные по алгебре $\mathcal{A}$, совпадают с матрицами Мёллера $S'_\mp$ и матрицей рассеяния S', построенными по алгебре $\mathcal{A}'$.*

Доказательство перечисленных утверждений основано на ряде лемм. Сформулируем сейчас необходимые леммы и выведем из них указанные утверждения. Доказательство лемм проведено в § 37.

Лемма 1. *Множество векторов вида $B\Phi$, где B пробегает все правильные операторы из алгебры $\mathcal{A}$, всюду плотно в одночастичном пространстве $\mathcal{H}_1$.*

Лемма 2. *Пусть $\omega(\mathbf{p})$ — гладкая строго выпуклая функция, $f(\mathbf{p})$ — гладкая финитная функция,*

$$\tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t) = \int \exp(-i\omega(\mathbf{p})\,t + i\mathbf{p}\mathbf{x})\, f(\mathbf{p})\, \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \qquad (36.6)$$

тогда

$$\sup_{\mathbf{x}} |\tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t)| \leqslant C_1 |t|^{-3/2}; \qquad (36.7)$$

$$\int |\tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t)|\, d\mathbf{x} \leqslant C_2(|t|^{3/2} + 1). \qquad (36.8)$$

Если U — множество векторов вида $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla\omega(\mathbf{p})$, где $\mathbf{p} \in \operatorname{supp} f$, а U_ε — ε-окрестность множества U, то для любых n и *ε найдется такая константа D, что*

$$|\tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t)| \leqslant D(1 + x^2 + t^2)^{-n} \qquad (36.9)$$

при условии $\frac{\mathbf{x}}{t} \notin U_\varepsilon$.

[Символ $\operatorname{supp} f$, как обычно, обозначает замыкание множества точек, где $f(\mathbf{p}) \neq 0$.]

Прежде чем переходить к формулировке леммы 3, введем понятие усеченного вакуумного среднего.

Вакуумным средним $\langle A\rangle$ оператора A назовем число $\langle A\Phi, \Phi\rangle$. Усеченное вакуумное среднее $\langle A_1 \dots A_n\rangle^T$ про-

* Алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ асимптотически коммутируют, если каждый оператор из алгебры $\mathcal{A}$ асимптотически коммутирует с каждым оператором из алгебры $\mathcal{A}'$.

изведения n операторов $A_1, \ldots, A_n$ определим при $n = 1, 2, 3$ следующими формулами:

$$\langle A_1 \rangle^T = \langle A_1 \rangle;$$

$$\langle A_1 A_2 \rangle^T = \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle^T \langle A_2 \rangle^T = \langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle;$$

$$\langle A_1 A_2 A_3 \rangle^T = \langle A_1 A_2 A_3 \rangle - \langle A_1 A_2 \rangle^T \langle A_3 \rangle^T - \langle A_1 \rangle^T \langle A_2 A_3 \rangle^T - \langle A_2 \rangle^T \langle A_1 A_3 \rangle^T - \langle A_1 \rangle^T \langle A_2 \rangle^T \langle A_3 \rangle^T.$$

При произвольном n *усеченное вакуумное среднее* определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$\langle A_1 \ldots A_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho \in R_k} \langle A(\pi_1) \rangle^T \ldots \langle A(\pi_k) \rangle^T, \quad (36.10)$$

где R_k — совокупность всех разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ на k подмножеств; $\pi_1, \ldots, \pi_k$ — подмножества, из которых состоит разбиение $\rho \in R_k$; $\langle A(\pi) \rangle^T$ — усеченное вакуумное среднее произведения операторов A_i с индексами из множества π (порядок следования операторов по возрастанию индекса i).

Пусть каждому λ из (конечного или бесконечного) множества Λ поставлен в соответствие оператор A_λ из алгебры $\mathcal{A}$.

Среднее значение

$$w_n(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \lambda_n, \mathbf{x}_n, t_n) = \langle A_{\lambda_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_{\lambda_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle$$

произведения $A_{\lambda_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_{\lambda_n}(\mathbf{x}_n, t_n)$ по основному состоянию Φ назовем (n-точечной) функцией Уайтмана (см. § 24). *Усеченную функцию Уайтмана* $w_n^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \lambda_n, \mathbf{x}_n, t_n)$ определим как усеченное вакуумное среднее этого произведения:

$$w_n^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \lambda_n, \mathbf{x}_n, t_n) = \langle A_{\lambda_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_{\lambda_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle^T.$$

Иными словами,

$$w_n(\lambda_1, \mathbf{x}, t_1, \ldots, \lambda_n, \mathbf{x}_n, t_x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho \in R_k} w_{\alpha_1}^T(\pi_1) \ldots w_{\alpha_k}^T(\pi_k). \quad (36.11)$$

Здесь α_r обозначает количество элементов в подмножестве π_r; $w_{\alpha_r}^T(\pi_r)$ — усеченная функция Уайтмана с аргументами $\lambda_{i_1}, \mathbf{x}_{i_1}, t_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{\alpha_r}}, \mathbf{x}_{i_{\alpha_r}}, t_{i_{\alpha_r}}$, где $i_1, \ldots, i_{\alpha_r} \in \pi_r$ (порядок следования аргументов по возрастанию индекса i). При $n = 1, 2, 3$ соотношения, связывающие функции Уайтмана с усеченными функциями Уайтмана, приобретают вид

$$w_1(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1) = w_1^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1);$$

$$w_2(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2) = w_2^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2) + w_1^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1) w_1^T(\lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2);$$

$$\begin{aligned} w_3(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2, \lambda_3, \mathbf{x}_3, t_3) = {} & w_3^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2, \lambda_3, \mathbf{x}_3, t_3) + \\ & + w_1^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1) w_2^T(\lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2, \lambda_3, \mathbf{x}_3, t_3) + \\ & + w_1^T(\lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2) w_2^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \lambda_3, \mathbf{x}_3, t_3) + \\ & + w_1^T(\lambda_3, \mathbf{x}_3, t_3) w_2^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2) + \\ & + w_1^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1) w_1^T(\lambda_2, \mathbf{x}_2, t_2) w_1^T(\lambda_3, \mathbf{x}_3, t_3). \end{aligned}$$

Лемма 3. *Если все операторы A_{λ_i} — гладкие, то усеченная функция Уайтмана*

$$w_n^T(\lambda_1, \mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \lambda_n, \mathbf{x}_n, t_n) = \langle A_{\lambda_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_{\lambda_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle^T$$

при фиксированных $t_1, \ldots, t_n$ убывает быстрее любой степени $D = \max\limits_{1 \leq i, j \leq n} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ при $D \to \infty$.

Лемма 4. *Пусть $f_0, \ldots, f_n$ — финитные гладкие функции; $A_0, \ldots, A_n$ — гладкие операторы, принадлежащие алгебре $\mathcal{A}$. Тогда при $n \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$|\langle A_0(f_0, t) \ldots A_n(f_n, t) \rangle^T| \leqslant C(1 + |t|)^{-\frac{3}{2}(n-1)}, \quad (36.12)$$

где $A_j(f_j, t) = \int \tilde{f}_j(\mathbf{x}|t) A_j(\mathbf{x}|t) d\mathbf{x}$. Эта оценка остается справедливой, если в выражении $\langle A_0(f_0, t) \ldots A_n(f_n, t) \rangle^T$ некоторые из операторов $A_j(f_j, t)$ заменить их производными по времени $\dot{A}_j(f_j, t)$, операторами $(A_j(f_j, t))^*$ или $(\dot{A}_j(f_j, t))^*$.

Приступим к выводу из перечисленных лемм нужных утверждений. Прежде всего убедимся в справедливости соотношений (36.4). Первое из этих соотношений очевидно; для того чтобы доказать второе, заметим, что

$$\begin{aligned} \Psi(B|f|t) = B(f, t)\Phi = \int \tilde{f}(\mathbf{x}|t) B(\mathbf{x}, t) \Phi d\mathbf{x} = \\ = \int \tilde{f}(\mathbf{x}|t) \exp(itH - i\mathbf{P}\mathbf{x}) B\Phi d\mathbf{x} = \int \tilde{f}(\mathbf{x}|t) \times \\ \times \exp(it\omega(\mathbf{p}) - i\mathbf{p}\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}) d\mathbf{x}\, d\mathbf{p} = \int f(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) \Phi(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (36.13)$$

т. е. $\Psi\ (B|f|t)$ не зависит от t:

$$\frac{d}{dt}\Psi(B|f|t)=\frac{d}{dt}B(f,t)\Phi=0. \qquad (36.14)$$

Видим, таким образом, что

$$\Psi_{\pm}(B,\ f) = \int f\ (\mathbf{p})\,\varphi\,(\mathbf{p})\,\Phi\,(\mathbf{p})\ d\mathbf{p},$$

т. е.

$$S_{\mp}\left(\int f\,(\mathbf{p})\,\varphi\,(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}\,\theta\right) = \int f\,(\mathbf{p})\,\varphi\,(\mathbf{p})\,\Phi\,(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}. \qquad (36.15)$$

Лемма 1 утверждает, что векторы

$$B\Phi = \int \varphi_B(\mathbf{p})\,\Phi\,(\mathbf{p})\ d\mathbf{p},$$

где B пробегает множество правильных операторов, образуют всюду плотное множество в одночастичном пространстве. Это означает, что функции $\varphi_B(\mathbf{p})$, соответствующие всевозможным правильным операторам B, образуют всюду плотное множество в $L^2(E^3)$, поскольку, ставя функции $\varphi\,(\mathbf{p})$ в соответствие вектор $\int \varphi\,(\mathbf{p})\ \Phi\ (\mathbf{p})\ d\mathbf{p}$, получаем изометрию между пространством $L^2\ (E^3)$ и одночастичным пространством. Функции $f\,(\mathbf{p})\ \varphi_B\ (\mathbf{p})$, где $f\,(\mathbf{p})$ — пладкая финитная функция, также, очевидно, образуют плотное множество в $L^2\ (E^3)$, поэтому из равенства (36.15) вытекает нужное соотношение.

Далее, покажем, что предел, фигурирующий в соотношении (36.1), существует. Для этого докажем оценку

$$\left\langle\frac{d\Psi}{dt},\ \frac{d\Psi}{dt}\right\rangle\leqslant C\,|t|^{-3}, \qquad (36.16)$$

где $\Psi(t)=\Psi(B_1,\ \ldots,\ B_n|f_1,\ \ldots,\ f_n|t)$. Из этой оценки сразу следует существование предела (36.1), поскольку

$$\|\Psi(t_2)-\Psi(t_1)\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\left\|\frac{d\Psi}{dt}\right\|dt\leqslant\int_{t_1}^{t_2}C\,|t|^{-3/2}\,dt\to 0,$$

если $t_1\leqslant t_2$ и $t_1\to+\infty$ или $t_2\to-\infty$.

Для доказательства нужной оценки разложим

$$\left\langle\frac{d\Psi}{dt},\ \frac{d\Psi}{dt}\right\rangle=\sum_{i,\ j}\langle B_1(f_1,\ t)\ldots B_i(f_i,\ t)\ldots$$

$$\ldots B_n(f_n,\ t)\,\Phi,\ B_1(f_1,\ t)\ldots\dot{B}_j(f_j,\ t)\ldots B_n(f_n,\ t)\,\Phi\rangle=$$

$$=\sum_{i,\ j}\langle(B_n(f_n,\ t))^*\ldots(\dot{B}_j(f_j,\ t))^*\ldots(B_1(f_1,\ t))^*\times$$

$$\times B_1(f_1,\ t)\ldots\dot{B}_i(f_i,\ t)\ldots B_n(f_n,\ t)\,\Phi,\ \Phi\rangle$$

в сумму произведений усеченных вакуумных средних, воспользовавшись соотношением (36.10).

Каждый множитель в любом члене этого разложения имеет вид

$$I_{k,\ l}(t)=\left\langle\left(\dot{B}_{i_1}(f_{i_1},t)\right)^*\ldots\left(\dot{B}_{i_k}(f_{i_k},\ t)\right)^*\times\right.$$

$$\left.\times\,\dot{B}_{j_1}(f_{j_1},\ t)\ldots\dot{B}_{j_l}(f_{j_l},\ t)\right\rangle^T,$$

где точки над операторами обозначают дифференцирование по времени, которое может встретиться для одного из первых k операторов и для одного из последних l операторов. Можно считать без ограничения общности, что $k\geqslant 1$, $l\geqslant 1$ (в противном случае $I_{k,\ l}=0$ в силу соотношения $B\Phi\ =\ 0$). Если для всех множителей в данном члене $k\ =\ l\ =\ 1$, то этот член равен нулю, поскольку тогда один из множителей имеет вид или

$$\langle(\dot{B}_i(f_i,\ t))^*\,B_j(f_j,\ t)\rangle^T=\langle(\dot{B}_i\ (f_i,\ t))^*\,B_j(f_j,\ t)\,\Phi,\ \Phi\rangle,$$

или

$$\langle(B_i(f_i,\ t))^*\,\dot{B}_j(f_j,\ t)\rangle^T=\langle(B_i(f_i,\ t))^*\,\dot{B}_j(f_j,\ t)\,\Phi,\ \Phi\rangle,$$

а оба эти выражения равны нулю в силу соотношения (36.14). Таким образом, все ненулевые члены в изучаемой сумме содержат либо хотя бы один сомножитель $I_{k,\ l}$, для которого $k+l\geqslant 4$, либо по крайней мере два сомножителя $I_{k,\ l}$ с $k+l=3$ (члена, в котором для всех сомножителей, кроме одного, $k\ +\ l\ =\ 2$, а для одного сомножителя $k\ +\ l\ =\ 3$ не может быть, поскольку общее число операторов четно).

Из леммы 4 вытекает неравенство

$$|I_{k,\ l}(t)|<C\,|t|^{-\frac{3}{2}(k+l-2)},$$

в частности

$$|I_{1,\ 1}\ (t)|<C,$$

$$|I_{k,\ l}\ (t)|<Ct^{-3/2}$$

при $k\ +\ l\ =\ 3$,

$$|I_{k,\ l}\ (t)|<Ct^{-3}$$

при $k + l \geqslant 4$. Из этих неравенств и из высказанных выше утверждений вытекает оценка (36.16) для $\left\langle \frac{d\Psi}{dt}, \frac{d\Psi}{dt} \right\rangle$ и, следовательно, существование предела в соотношении (36.1).

Поскольку предел в (36.1) существует, соотношение (36.1) определяет операторы $S_{\mp}$ на некотором подмножестве L пространства $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$. Однако неясно, будет ли действие операторов $S_{\mp}$ определено однозначно, т. е. будет ли вектор $S_{\mp}\xi = \Psi_{\mp}(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n)$ одним и тем же, если вектор ξ двумя разными способами представлен в виде

$$\xi = a^+(\overline{\varphi}_1 \overline{f}_1) \ldots a^+(\overline{\varphi}_n \overline{f}_n)\,\theta,$$

где f_i — гладкие финитные функции, функции φ_i соответствуют правильным операторам.

Покажем, что соотношение (36.1) определяет $S_{\mp}$ как однозначный оператор и, более того, этот оператор может быть единственным образом продолжен в линейный изометрический оператор, заданный на всем пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$. Используем для этого следующее общее утверждение.

Пусть на тотальном* подмножестве L гильбертова пространства $\mathcal{H}$ задано многозначное изометричное отображение α со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}'$ (т. е. каждой точке $\xi \in L$ сопоставлено множество точек $\alpha(\xi) \subset \mathcal{H}'$ таким образом, что для точек $\xi_1, \xi_2 \in L$, $x_1, x_2 \in \mathcal{H}'$, удовлетворяющих условиям $x_1 \in \alpha(\xi_1)$, $x_2 \in \alpha(\xi_2)$, имеет место соотношение $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$). Тогда отображение f на самом деле однозначно (т. е. каждое множество $\alpha(\xi)$ состоит из одной точки) и может быть единственным образом продолжено в линейный изометрический оператор, заданный на всем пространстве $\mathcal{H}$.

Для того чтобы доказать это утверждение, прежде всего по линейности продолжим отображение α в многозначное отображение $\widetilde{\alpha}$, заданное на множестве $\widetilde{L}$ линейных комбинаций точек множества L. Точнее говоря, будем считать, что $x \in \widetilde{\alpha}(\xi)$, если можно представить ξ и x в виде $\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ таким образом, что $x_i \in \alpha(\xi_i)$. Легко видеть, что отображение $\widetilde{\alpha}$ обладает свойством линейности: если $\xi = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2$, $x_1 \in \widetilde{\alpha}(\xi_1)$, $x_2 \in \widetilde{\alpha}(\xi_2)$, то $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \widetilde{\alpha}(\xi)$.

* Подмножество называется тотальным, если линейные комбинации его точек плотны в $\mathcal{H}$.

Отображение $\widetilde{\alpha}$ также является многозначным изометрическим отображением (если $x^{(1)} \in \widetilde{\alpha}(\xi^{(1)})$, $x^{(2)} \in \widetilde{\alpha}(\xi^{(2)})$, то $\xi^{(1)} = \sum \lambda_i \xi_i^{(1)}$, $x^{(1)} = \sum \lambda_i x_i^{(1)}$, $\xi^{(2)} = \sum \mu_j \xi_j^{(2)}$, $x^{(2)} = \sum \mu_j x_j^{(2)}$, где $x_i^{(1)} = \alpha(\xi_i^{(1)})$, $x_j^{(2)} = \alpha(\xi_j^{(2)})$, и, значит,

$$\langle x^{(1)}, x^{(2)} \rangle = \sum \lambda_i \overline{\mu}_j \langle x_i^{(1)}, x_j^{(2)} \rangle = \sum \lambda_i \overline{\mu}_j \langle \xi_i^{(1)}, \xi_j^{(2)} \rangle =$$
$$= \langle \xi^{(1)}, \xi^{(2)} \rangle).$$

Покажем теперь, что отображение $\widetilde{\alpha}$ на самом деле однозначно. Действительно, пусть $x_1 \in \widetilde{\alpha}(\xi)$, $x_2 \in \widetilde{\alpha}(\xi)$. Тогда из изометричности

$$\langle x_1, x_1 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \xi, \xi \rangle.$$

Из этого равенства вытекает, что $x_1 = x_2$.

Таким образом, $\widetilde{\alpha}$ — однозначное линейное изометрическое отображение, заданное на множестве $\widetilde{L}$. В силу тотальности множества L множество $\widetilde{L}$ всюду плотно в $\mathcal{H}$, и можем по непрерывности продолжить $\widetilde{\alpha}$ в линейный изометрический оператор, заданный на всем $\mathcal{H}$.

Для того чтобы применить доказанное утверждение к установлению нужных свойств матриц Мёллера, нужно проверить, что множество L векторов вида $a^+(\overline{\varphi}_1 \overline{f}_1) \ldots a^+(\overline{\varphi}_n \overline{f}_n)\,\theta$, на которых операторы $S_{\mp}$ определены в силу соотношения (36.1), тотально в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$, и доказать, что для правильных операторов $B_1, \ldots, B_n, B_1', \ldots, B_m'$ и гладких финитных функций $f_1, \ldots, f_n, f_1', \ldots, f_m'$ имеет место равенство

$$\langle \Psi_{\mp}(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n), \Psi_{\mp}(B_1', \ldots, B_m' | f_1', \ldots, f_m') \rangle =$$
$$= \langle a^+(\overline{\varphi}_1 \overline{f}_1) \ldots a^+(\overline{\varphi}_n \overline{f}_n)\,\theta, a^+(\overline{\varphi}_1' \overline{f}_1') \ldots a^+(\overline{\varphi}_m' \overline{f}_m')\,\theta \rangle. \tag{36.17}$$

Тотальность множества L вытекает из того, что функции вида $\varphi_B(\mathbf{k}) f(\mathbf{k})$, где $f(\mathbf{k})$ — гладкая финитная функция, B — правильный оператор, всюду плотны в $L^2(E^3)$ (выше уже было замечено, что этот факт следует из леммы 1).

Для того чтобы доказать соотношение (36.17), представим левую часть этого соотношения в виде

$$\langle \Psi_{\mp}(B_1, \ldots, B_n \,|\, f_1, \ldots, f_n),\ \Psi_{\mp}(B'_1, \ldots, B'_m \,|\, f'_1, \ldots, f'_m)\rangle =$$
$$= \lim_{t\to\mp\infty} \langle \Psi(B_1, \ldots, B_n \,|\, f_1, \ldots, f_n \,|\, t),\ \Psi(B'_1, \ldots, B'_m \,|\, f'_1, \ldots, f'_m | t)\rangle =$$
$$= \lim_{t\to\mp\infty} \langle (B'_m(f'_m, t))^* \ldots (B'_1(f'_1, t))^* B_1(f_1, t) \ldots B_n(f_n, t)\rangle \tag{36.18}$$

и разложим выражение, стоящее под знаком предела, по усеченным функциям Уайтмана. Каждый член получившегося разложения состоит из произведения множителей вида

$$R_{k,\,l}(t) = \langle (B'_{i_1}(f'_{i_1}, t))^* \ldots (B'_{i_k}(f'_{i_k}, t))^* B_{j_1}(f_{j_1}, t) \ldots B_{j_l}(f_{j_l}, t)\rangle^T.$$

Из леммы 4 вытекает, что при $k + l \geqslant 3$ множители $R_{k,\,l}(t)$ стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$. С другой стороны, множители $R_{k,\,l}$ равны нулю, если $k = 0$ или $l = 0$, в силу соотношения $B\Phi = 0$. Таким образом, в пределе $t \to \mp\infty$ отличны от нуля лишь слагаемые, в которых все множители имеют вид $R_{1,1}(t)$. Легко убедиться, что

$$R_{1,1}(t) = \langle (B'_i(f'_i, t))^* B_j(f_j, t)\rangle^T = \langle (B'_i(f'_i, t))^* B_j(f_j, t)\rangle =$$
$$= \langle B_j(f_j, t)\,\Phi,\ B'_i(f'_i, t)\,\Phi\rangle =$$
$$= \langle \int f_j(\mathbf{k})\,\varphi_j(\mathbf{k})\,\Phi(\mathbf{k})\,d\mathbf{k},\ \int f'_i(\mathbf{k})\,\varphi'_i(\mathbf{k})\,\Phi(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}\rangle =$$
$$= \langle f_j\varphi_j,\ f'_i\varphi'_i\rangle = \langle a^+(\bar f_j\bar\varphi_j)\,\theta,\ a^+(\bar f'_i\bar\varphi'_i)\,\theta\rangle$$

и, стало быть, $R_{1,\,1}$ на самом деле не зависит от t [при преобразованиях была использована формула (36.13)].

Из доказанных только что утверждений вытекает, что выражение (36.18) равно $\delta^n_m \sum \prod_{s=1}^{n} \langle \varphi_s f_s,\ \varphi'_{i_s} f'_{i_s}\rangle$ [сумма берется по всем перестановкам $(i_1, \ldots, i_n)$]. Это означает справедливость равенства (36.17).

Таким образом, проверено, что соотношение (36.1) задает $S_{\mp}$ как изометрические отображения на тотальном множестве, и, следовательно, в силу доказанного, можно единственным образом доопределить $S_{\mp}$ до изометрических операторов, заданных на всем пространстве $\mathcal{H}_{\text{as}}$.

Для того чтобы доказать соотношения (36.5), заметим, что справедливо равенство

$$\exp(-iH\tau)\,B(f, t)\exp(iH\tau) =$$
$$= \int \exp(-iH\tau)\,\tilde f(\mathbf{x}\,|\,t)\,B(\mathbf{x}, t)\exp(iH\tau)\,d\mathbf{x} =$$
$$= \int \tilde f(\mathbf{x}\,|\,t)\,B(\mathbf{x}, t-\tau)\,d\mathbf{x} = \int\Big(\int \exp(-i\omega(\mathbf{p})t + i\mathbf{p}\mathbf{x}) f(\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\Big) \times$$
$$\times B(\mathbf{x}, t-\tau)\,d\mathbf{x} = \int\Big(\int \exp(-i\omega(\mathbf{p})(t-\tau) + i\mathbf{p}\mathbf{x}) f(\mathbf{p}) \times$$
$$\times \exp(-i\omega(\mathbf{p})\tau)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\Big) B(\mathbf{x}, t-\tau)\,d\mathbf{x},$$

откуда

$$\exp(-iH\tau)\,B(f, t)\exp(iH\tau) = B(f^\tau, t-\tau), \tag{36.19}$$

где f^τ обозначает функцию $f^\tau(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\exp(-i\omega(\mathbf{p})\tau)$. Из равенства (36.19) вытекает, что

$$\exp(-iH\tau)\,\Psi(B_1, \ldots, B_n \,|\, f_1, \ldots, f_n \,|\, t) =$$
$$= \Psi(B_1, \ldots, B_n \,|\, f_1^\tau, \ldots, f_n^\tau \,|\, t-\tau). \tag{36.20}$$

Переходя в (36.20) к пределу $t \to \mp\infty$ и пользуясь тем, что

$$\exp(-iH_{\text{as}}\tau)\,a^+(\bar\varphi_1\bar f_1) \ldots a^+(\bar\varphi_n\bar f_n)\,\theta =$$
$$= a^+(\bar\varphi_1\overline{f_1^\tau}) \ldots a^+(\bar\varphi_n\overline{f_n^\tau})\,\theta,$$

убеждаемся, что

$$\exp(-iH\tau)\,S_{\mp}\,\xi = S_{\mp}\exp(-iH_{\text{as}}\tau)\,\xi$$

для всякого вектора $\xi \in L$. В силу тотальности множества L получаем отсюда, что

$$\exp(-iH\tau)\,S_{\mp} = S_{\mp}\exp(-iH_{\text{as}}\tau)$$

и, значит, первое из соотношений (36.5) справедливо (второе доказывается тем же способом, но еще проще).

Таким образом, из лемм выведены все сформулированные выше утверждения, кроме теоремы о совпадении матриц Мёллера, построенных по асимптотически коммутирующим алгебрам.

Для того чтобы проверить это последнее утверждение, заметим, что при расширении асимптотически абелевой алгебры матрицы Мёллера не меняются. В самом деле, если алгебра $\mathcal{A}$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, содержится в асимптотически абелевой алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$, то при вычислении операторов $S_{\mp}$, соответствующих алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$, можем пользоваться лишь такими правильными операторами, которые принадлежат алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$; из этого видно, что алгебрам $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ соответствуют одни и те же матрицы Мёллера. Если алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ асимптотически коммутируют, то семейство $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ является асимптотически абелевым и может быть включено в асимптотически абелеву алгебру $\tilde{\mathcal{A}}$. Поскольку $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}' \subset \tilde{\mathcal{A}}$, матрицы Мёллера $S_{\mp}$ и $S'_{\mp}$, построенные по алгебрам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, совпадают с матрицами Мёллера, построенными по алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$, и, значит, совпадают между собой. Совпадение матриц Мёллера влечет за собой, очевидно, и совпадение матриц рассеяния, построенных по алгебрам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$.

В заключение отметим, что матрицы Мёллера и матрица рассеяния не зависят от выбора полной системы частиц (напомним, что между пространствами $\mathcal{H}_{as}$, соответствующими разным выборам полной системы частиц, существует естественный изоморфизм; поэтому имеет смысл говорить о совпадении матриц рассеяния, построенных по разным системам частиц). Для того чтобы проверить это в рассматриваемом случае, когда полная система состоит из единственной частицы $\Phi(\mathbf{k})$, учтем, что всякая другая частица может быть записана в виде

$$\Phi'(\mathbf{k}) = \exp(i\,\alpha(\mathbf{k}))\,\Phi(\mathbf{k}),$$

где $\alpha(\mathbf{k})$ — действительная функция.

Операторы $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ в пространстве $\mathcal{H}_{as}$, соответствующие частице $\Phi(\mathbf{k})$, связаны с операторами $a'^+(\mathbf{k})$, $a'(\mathbf{k})$ в $\mathcal{H}_{as}$, построенными по $\Phi'(\mathbf{k})$, равенствами

$$a'(\mathbf{k}) = \exp(-i\,\alpha(\mathbf{k}))\,a(\mathbf{k});$$

$$a'^+(\mathbf{k}) = \exp(i\,\alpha(\mathbf{k}))\,a^+(\mathbf{k}).$$

Пользуясь этими соотношениями, без труда проверяем, что для всякого оператора B_j

$$a'^+(\bar{f}_j\,\bar{\varphi}'_j) = a^+(\bar{f}_j\,\bar{\varphi}_j), \tag{36.21}$$

где

$$\varphi'_j(\mathbf{k}) = \langle B_j\Phi, \Phi'(\mathbf{k})\rangle,\quad \varphi_j(\mathbf{k}) = \langle B_j\Phi, \Phi(\mathbf{k})\rangle.$$

Используя (36.21) и замечая, что левая часть (36.1) не зависит от выбора частицы, убеждаемся, что матрицы Мёллера $S_{\pm}$ также не зависят от выбора частицы.

§ 37. Доказательство лемм

Доказательство леммы 1. Пусть $\lambda(\omega, \mathbf{p})$ — функция четырех переменных с носителем в множестве Δ. Рассмотрим оператор $\lambda(H, \mathbf{P})$ — функцию коммутирующих самосопряженных операторов H, $\mathbf{P}$. Легко видеть, что, если множество Δ не пересекается со спектром семейства операторов $(H, \mathbf{P})$, оператор $\lambda(H, \mathbf{P}) = 0$, а если множество Δ не содержит точек, принадлежащих многочастичному спектру $\Sigma_{\mathcal{M}}$, а также начала координат 0, множество значений оператора $\lambda(H, \mathbf{P})$ принадлежит одночастичному подпространству.

Используя это замечание, можно построить правильные операторы с помощью следующей конструкции.

Рассмотрим функцию $\alpha(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}(E^4)$, такую, что ее преобразование Фурье

$$\hat{\alpha}(\omega, \mathbf{p}) = \int \alpha(t, \mathbf{x}) \exp(i(\omega t - \mathbf{p}\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,dt$$

имеет носитель, не пересекающийся с многочастичным спектром и с полупространством $\omega \leqslant 0$. Тогда *оператор*

$$B = \int \alpha(t, \mathbf{x})\,A(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x}dt,$$

где $A \in \mathcal{A}$, *является правильным.*

В самом деле, по построению оператор B является гладким. Вектор

$$B\Phi = \int \alpha(t, \mathbf{x})\,A(\mathbf{x}, t)\,\Phi d\mathbf{x}\,dt =$$

$$= \int \alpha(t, \mathbf{x}) \exp(i\,Ht - i\mathbf{P}\mathbf{x})\,A \exp(-iHt + i\mathbf{P}\mathbf{x})\,\Phi d\mathbf{x}\,dt =$$

$$= \int \alpha(t, \mathbf{x}) \exp(i(Ht - \mathbf{P}\mathbf{x}))\,A\Phi d\mathbf{x}\,dt = \hat{\alpha}(H, \mathbf{P})\,A\Phi$$

по сделанному выше замечанию принадлежит одночастичному подпространству. Вектор

$$B^*\Phi = \int \overline{\alpha(t, x)} \exp(i(Ht - \mathbf{P}\mathbf{x}))\,A^*\Phi\,d\mathbf{x}\,dt =$$

$$= \bar{\hat{\alpha}}(-H, -\mathbf{P})\,A^*\Phi = 0,$$

поскольку носитель функции $\bar{\hat{\alpha}}(-\omega, -\mathbf{p})$ не пересекается со спектром операторов H, $\mathbf{P}$.

Покажем теперь, что векторы $B\Phi$, где B пробегает правильные операторы, построенные описанным только что способом, плотны в одночастичном подпространстве.

Для этого рассмотрим в $\mathcal{H}_1$ вектор $\Phi(\lambda) = \int \lambda(\mathbf{k}) \times \Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$, где $\lambda(\mathbf{k})$ — гладкая финитная функция, и построим такую последовательность правильных операторов B_n, что $B_n\Phi \to \Phi(\lambda)$ (этого достаточно для доказательства нужного утверждения, поскольку гладкие финитные функции $\lambda(\mathbf{k})$ плотны в $L^2(E^3)$ и, значит, соответствующие им векторы $\Phi(\lambda) = \int \lambda(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$ плотны в $\mathcal{H}_1$).

В силу цикличности вакуума относительно алгебры $\mathcal{A}$ существует последовательность операторов $A_n \in \mathcal{A}$, для которой $A_n\Phi \to \Phi(\lambda)$. Нужную последовательность правильных операторов можно построить, взяв $B_n = \int \alpha(t, \mathbf{x}) A_n(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}dt$, где

$$\alpha(t, \mathbf{x}) = \int \hat{\alpha}(\omega, \mathbf{p}) \exp[-\mathrm{i}(\omega t - \mathbf{p}\mathbf{x})] \frac{d\omega\, d\mathbf{p}}{(2\pi)^4},$$

свойства носителя функции $\hat{\alpha}$ обеспечивают правильность операторов B_n и функция $\hat{\alpha}$ удовлетворяет условию $\hat{\alpha}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = 1$ для всех $\mathbf{k}$, принадлежащих носителю функции $\lambda(\mathbf{k})$. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} B_n\Phi = \lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}(H, \mathbf{P}) A_n\Phi = \hat{\alpha}(H, \mathbf{P})\Phi(\lambda) =$$

$$= \int \lambda(\mathbf{k})\, \hat{\alpha}(H, \mathbf{P})\Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} = \int \lambda(\mathbf{k})\, \hat{\alpha}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) \times$$

$$\times \Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} = \int \lambda(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} = \Phi(\lambda).$$

Это завершает доказательство леммы 1.

Прежде чем доказывать лемму 2, проведем некоторые нестрогие, но наглядные рассуждения. Интеграл (36.6) при больших t можно приближенно вычислить методом стационарной фазы. Стационарная точка $\mathbf{p}_0$ фазы $\omega(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\mathbf{x}$ определяется уравнением $\mathbf{v}(\mathbf{p}_0)t = \mathbf{x}$; обозначая $\mathbf{w}(\xi)$ решение уравнения $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \xi$, можно записать стационарную точку в виде $\mathbf{p}_0 = \mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)$. Метод стационарной

фазы дает для $\tilde{f}(\mathbf{x} \mid t)$ при больших t выражение

$$\tilde{f}(\mathbf{x}|t) \approx Ct^{-3/2} f\left(\mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right) \exp\left(-\mathrm{i}\,\omega\left(\mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right)t + \mathrm{i}\mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\mathbf{x}\right),$$

где

$$C = (2\pi i)^{-3/2} |\det \gamma_{ik}|^{-1/2};$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial p_i\, \partial p_k} \omega(\mathbf{p})\Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)}.$$

Таким образом, $\tilde{f}(\mathbf{x}|t)$ при больших t убывает как $t^{-3/2}$. Если $\frac{\mathbf{x}}{t} \notin U_\varepsilon$, то $f\left(\mathbf{w}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right) = 0$ и стационарная точка не содержится в носителе функции $f(\mathbf{p})$; в этом случае следует ожидать, что значение функции $\tilde{f}(\mathbf{x}|t)$ будет очень мало. К сожалению, приведенные сейчас простые соображения не позволяют получить необходимых равномерных по $\mathbf{x}$ оценок для функции $\tilde{f}(\mathbf{x}|t)$; укажем аккуратное, но довольно громоздкое доказательство этих оценок.

Доказательство леммы 2. Оценим прежде всего $\tilde{f}(\mathbf{x}|t)$ при $\frac{\mathbf{x}}{t} \notin U_\varepsilon$.

Для этого воспользуемся формулой

$$\int \exp(-\mathrm{i}\,\sigma(\mathbf{p}))\chi(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = \int \exp(-\mathrm{i}\,\sigma(\mathbf{p}))(L^n\chi)(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}, \quad (37.1)$$

где $\chi(\mathbf{p})$ — гладкая финитная функция; $(L\chi)(\mathbf{p}) = -\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathbf{p})\chi(\mathbf{p}))$; $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \frac{\nabla\sigma(\mathbf{p})}{|\nabla\sigma(\mathbf{p})|^2}$ (см., например, [52]).

В рассматриваемой ситуации

$$\sigma(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\mathbf{x};\quad \chi(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p});$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{p})t - x}{|\mathbf{v}(\mathbf{p})t - \mathbf{x}|^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}}{\left|\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right|^2}.$$

Если $\frac{\mathbf{x}}{t} \notin U_\varepsilon$, нетрудно проверить, что

$$\sup_{\mathbf{p}\in \mathrm{supp}\, f} |D^{(\alpha)}\mathbf{u}(\mathbf{p})| \leqslant \frac{C}{|t|}$$

(здесь $D^{(\alpha)} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial p_1^{\alpha_1}\,\partial p_2^{\alpha_2}\,\partial p_3^{\alpha_3}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, C здесь и дальше обозначает величину, не зависящую от $\mathbf{x}$ и t, но, возможно, зависящую от других параметров, например в данном случае от α и ε). Отсюда получаем оценку

$$\sup_{\mathbf{p}\in \operatorname{supp} f} |(L^n \chi)(\mathbf{p})| \leqslant C|t|^{-n}. \tag{37.2}$$

Формула (37.1) вместе с оценкой (37.2) приводит к неравенству $|\tilde{f}(\mathbf{x}|t)| \leqslant \frac{C}{1+|t|^n}$, где $\frac{\mathbf{x}}{t} \notin U_\varepsilon$; n — произвольное число. Для того чтобы убедиться в справедливости неравенства (36.9), следует отдельно рассмотреть случаи $|\mathbf{x}| \leqslant at$ и $|\mathbf{x}| > at$, где $a = 2 \sup\limits_{\mathbf{p}\in \operatorname{supp} f} |\mathbf{v}(\mathbf{p})|$. В первом из них неравенство (36.9) вытекает из (37.2); во втором случае можно воспользоваться тем, что

$$\sup_{\substack{\mathbf{p}\in \operatorname{supp} f\\ |\mathbf{x}|>at}} |D^{(\alpha)}\mathbf{u}(\mathbf{p})| \leqslant \frac{C}{|\mathbf{x}|}.$$

Для того чтобы доказать неравенство (36.7), возьмем гладкую функцию $\mu(\mathbf{x})$, равную нулю при $|\mathbf{x}| \leqslant \nu_1$ и единице при $|\mathbf{x}| \geqslant \nu_2$.

Разобьем интеграл, представляющий функцию $\tilde{f}(\mathbf{x}|t)$, на два:

$$I_1 = \int \exp(-i\omega(\mathbf{p})t + i\mathbf{p}\mathbf{x})\,\mu\left(t^\rho\left(\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right) f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}; \tag{37.3}$$

$$I_2 = \int \exp(-i\omega(\mathbf{p})t + i\mathbf{p}\mathbf{x})\left(1 - \mu\left(t^\rho\left(\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right)\right) f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}, \tag{37.4}$$

выбрав число ρ в промежутке $\frac{5}{12} < \rho < \frac{1}{2}$. Интеграл I_1 оценим с помощью формулы (37.1). Введем обозначение

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{\mathbf{p}\in\Gamma\\ |\alpha|\leqslant n}} |D^{(\alpha)}_\varphi(\mathbf{p})|,$$

где под Γ понимается множество точек $\mathbf{p}$, для которых $\left|\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right| \geqslant \nu_1 |t|^{-\rho}$ (вне множества Γ подынтегральная функция интеграла I_1 равна нулю). Нетрудно проверить, что $\|\mathbf{u}\|_n \leqslant C|t|^{-1+(n+1)\rho}$.

Далее,

$$\|L\chi\|_n \leqslant C\|\mathbf{u}\chi\|_{n+1} \leqslant C\sum_{\alpha+\beta=n+1} \|\mathbf{u}\|_\alpha \|\chi\|_\beta,$$

откуда

$$\|L^r\chi\|_n \leqslant C\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_r+\beta=n+r} \|\mathbf{u}\|_{\alpha_1}\dots\|\mathbf{u}\|_{\alpha_r}\|\chi\|_\beta \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_\beta |t|^{-r+(n+2r-\beta)\rho}\|\chi\|_\beta.$$

Чтобы оценить интеграл I_1, следует положить в формуле (37.1)

$$\chi(\mathbf{p}) = \mu\left(t^\rho\left(\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right).$$

Тогда $\|\chi\|_\beta \leqslant C|t|^{\beta\rho}$, значит,

$$|I_1| \leqslant C\|L^r\chi\|_0 \leqslant \sum_\beta C|t|^{-r+(2r-\beta)\rho}\|\chi\|_\beta \leqslant$$
$$\leqslant C|t|^{-r+2r\rho}.$$

Взяв $r \geqslant \frac{1{,}5}{-2\rho+1}$, убеждаемся, что $|I_1| \leqslant C|t|^{-3/2}$.

В интеграле I_2 заменим в показателе экспоненты $\omega(\mathbf{p})$ на

$$\omega_1(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}_0) + \mathbf{v}(\mathbf{p}_0)(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0) + \sum_{i=1}\sum_{j=1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega(\mathbf{p}_0)}{\partial p_i\,\partial p_j}\times$$
$$\times(p_i - p_{0i})(p_j - p_{0j}),$$

где $\mathbf{p}_0$ — произвольная точка, для которой $\left|\mathbf{v}(\mathbf{p}_0) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right| \leqslant \nu_2|t|^{-\rho}$, и покажем, что ошибка Δ при этой замене не превышает $C|t|^{-3/2}$. Для этого сделаем в интеграле

$$\Delta = \int(\exp(-i\omega(\mathbf{p})t + i\mathbf{p}\mathbf{x}) - \exp(-i\omega_1(\mathbf{p})t + i\mathbf{p}\mathbf{x}))\times$$
$$\times\left(1 - \mu\left(t^{-\rho}\left(\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right)\right) f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$$

замену переменных по формуле $\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}$. Из строгой выпуклости функции $\omega(\mathbf{p})$ и финитности функции $f(\mathbf{p})$ вытекает, что якобиан этой замены ограничен сверху и снизу положительными константами.

В силу свойств функции μ можно считать, что интеграл Δ берется по области Γ_1, где $|\mathbf{w}| \leqslant \nu_2 |t|^{-\rho}$; объем этой области равен $C|t|^{-3\rho}$. В области Γ_1 можно воспользоваться оценкой

$|(\exp(-i\omega(\mathbf{p})t + i\mathbf{px}) - \exp(-i\omega_1(\mathbf{p})t + i\mathbf{px}))f(\mathbf{p})| \leqslant$ $\leqslant C|t|\,|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0|^3 \leqslant C_1|t|\,|\mathbf{w}|^3 \leqslant C_2|t|^{-3\rho+1}$; в результате $|\Delta| \leqslant C|t|^{1-6\rho} \leqslant C|t|^{1-6\cdot\frac{5}{12}} = C|t|^{-3/2}$.

Осталось оценить выражение

$$I_2 - \Delta = \int \exp(-i\omega_1(\mathbf{p})t + i\mathbf{px}) f(\mathbf{p})\,d\mathbf{p} -$$
$$-\int \exp(-i\omega_1(\mathbf{p}) + i\mathbf{px})\,\mu\left(t^{-\rho}\left(\mathbf{v}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{x}}{t}\right)\right)d\mathbf{p}.$$

Второе слагаемое в этом выражении оценивается точно так же, как интеграл I_1. Оценка для первого слагаемого получается, если переписать его с помощью преобразования Фурье в виде

$$\int G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)\,\tilde{f}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$

где

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{px}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3};$$

$$G(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2\pi}{it}\right)^{3/2} |\det \gamma_{jk}|^{-1/2} \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j,k} \lambda_{jk}\, x_j\, x_k\right);$$

$$\gamma_{jk} = \frac{\partial^2 \omega(\mathbf{p}_0)}{\partial p_j\, \partial p_k};$$

λ_{jk} — матрица, обратная к γ_{jk}.

Неравенство (36.8) получаем, применяя для $\mathbf{x} \in U_\varepsilon t$ оценку (36.7), а для $\mathbf{x} \notin U_\varepsilon t$ — оценку (36.9).

Замечание. Наложив некоторые условия на поведение функции $\omega(\mathbf{p})$ на бесконечности, можно доказать лемму 2 для любой гладкой быстро убывающей функции $f(\mathbf{p})$.

Доказательство леммы 3. Установим прежде всего простое, но важное тождество, связывающее усеченное вакуумное среднее

$$\langle AB(t)\rangle^T = \langle AB(t)\Phi, \Phi\rangle - \langle A\Phi, \Phi\rangle\langle B\Phi, \Phi\rangle$$

с вакуумным средним от коммутатора $[A, B(t)]$. Для этого рассмотрим гладкую функцию $h(\omega)$, удовлетворяющую условиям $h(\omega) = 0$ при $\omega \leqslant 0$, $h(\omega) = 1$ при $\omega \geqslant \delta$ [число $\delta > 0$ таково, что все точки спектра оператора H, кроме точки 0, лежат на луче $(\delta, +\infty)$]. Заметим, что

$$\left.\begin{aligned} h(H) &= 1 - P_0; \\ h(-H) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{37.5}$$

где P_0 — оператор проектирования на вакуумный вектор Φ (эти равенства легко проверить, если воспользоваться существованием изоморфизма пространства $\mathscr{H}$ и пространства $L^2(M)$, при котором H переходит в оператор умножения на функцию). Всякой функции $f(t) \in \mathscr{S}$ сопоставим функцию

$$f_h(t) = \int h(\omega) \exp(i\omega(\tau - t)) f(\tau) \frac{d\omega\, d\tau}{2\pi}.$$

Легко видеть, что функция $f_h(t)$ также принадлежит пространству $\mathscr{S}$ (оператор, сопоставляющий функции f функцию f_h, является произведением преобразования Фурье по t, оператора умножения на $h(\omega)$ и обратного преобразования Фурье; каждый из перечисленных операторов переводит пространство $\mathscr{S}$ в себя). Если функция f зависит не только от t, но и от других переменных, функцию f_h строим с помощью преобразования Фурье только по t (другие переменные рассматриваются как параметры). Если функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}(E^{n+1})$, то функция f_h принадлежит тому же пространству.

Докажем, что для любой функции $f \in \mathscr{S}$

$$\int f(t)\langle AB(t)\rangle^T dt = \int f_h(t)\langle [A, B(t)]\rangle dt. \tag{37.6}$$

В самом деле,

$$\int f_h(t)\langle AB(t)\rangle dt = \int f_h(t)\langle A\exp(iHt)B\rangle dt =$$
$$= \langle Ah(H)\tilde{f}(H)B\rangle = \langle A(1-P_0)\tilde{f}(H)B\rangle =$$
$$= \int f(t)\langle A(1-P_0)\exp(iHt)B\rangle dt = \int f(t)\langle AB(t)\rangle^T dt; \tag{37.7}$$

$$\int f_h(t)\langle B(t)A\rangle dt = \int f_h(t)\langle B\exp(-iHt)A\rangle dt =$$
$$= \langle Bh(-H)\tilde{f}(-H)A\rangle = 0. \tag{37.8}$$

Здесь были использованы соотношения (37.5) и равенства

$$\int f_h(t)\exp(\mathrm{i}\,\omega t)\,dt = h(\omega)\,\tilde{f}(\omega);$$

$$\int f(t)\exp(\mathrm{i}\,\omega t)\,dt = \tilde{f}(\omega).$$

Комбинируя (37.7), (37.8), получаем (37.6).

Теперь можно доказать утверждение леммы при $n = 2$. Пусть $A_1, A_2, C \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathcal{S}$, $A_2 = \int \alpha(\mathrm{x}, t)\,C(\mathrm{x}, t)\,d\mathrm{x}\,dt$. Введем обозначение $D = \int \alpha_h(\mathrm{x}, t)\,C(\mathrm{x}, t)\,d\mathrm{x}dt$. Из соотношения (37.6) легко получить

$$\langle A_1 A_2(\mathrm{x}, t)\rangle^T = \langle [A_1, D(\mathrm{x}, t)]\rangle.$$

Пользуясь тем, что $D \in \mathcal{A}$, и асимптотической абелевостью, видим, что

$$|w_2^T(\mathrm{x}_1, t_1, \mathrm{x}_2, t_2)| = |\langle A_1(\mathrm{x}_1, t_1)\,A_2(\mathrm{x}_2, t_2)\rangle^T| =$$
$$= |\langle [A_1, D(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, t_2 - t_1)]\rangle| \leqslant \frac{C(1+|t_2-t_1|^r)}{1+|\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1|^n}.$$

Перейдем к случаю произвольной функции Уайтмана. Рассмотрим функцию

$$w_n(\mathrm{x}_1, t_1, \ldots, \mathrm{x}_n, t_n) = \langle A_1(\mathrm{x}_1, t_1) \ldots A_n(\mathrm{x}_n, t_n)\rangle$$

и две функции

$$w_k^{(1)}(\mathrm{x}_{i_1}, t_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_k}, t_{i_k}) = \langle A_{i_1}(\mathrm{x}_{i_1}, t_{i_1}) \ldots A_{i_k}(\mathrm{x}_{i_k}, t_{i_k})\rangle;$$
$$w_l^{(1)}(\mathrm{x}_{j_1}, t_{j_1}, \ldots, \mathrm{x}_{j_l}, t_{j_l}) = \langle A_{j_1}(\mathrm{x}_{j_1}, t_{j_1}) \ldots A_{j_l}(\mathrm{x}_{j_l}, t_{j_l})\rangle,$$

получающиеся, если операторы $A_1, \ldots, A_n$, фигурирующие в определении функции w_n, разбить на две группы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ и $A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}$ (здесь $k + l = n$, индексы $i_1, \ldots, i_k$, а также индексы $j_1, \ldots, j_l$ расположены в порядке возрастания, все операторы A_i считаем гладкими).

Множество индексов $i_1, \ldots, i_k$, относящихся к операторам первой группы, будем обозначать K; множество индексов $j_1, \ldots, j_l$ операторов второй группы — L; очевидно, $K \cup L = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Оказывается, что, когда все точки x_i, где $i \in K$, расположены далеко от точек x_j, где $j \in L$, имеет место приближенное равенство

$$w_n(\mathrm{x}_1, t_1, \ldots, \mathrm{x}_n, t_n) \approx$$
$$\approx w_k^{(1)}(\mathrm{x}_{i_1}, t_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_k}, t_{i_k})\,w_l^{(2)}(\mathrm{x}_{j_1}, t_{j_1}, \ldots, \mathrm{x}_{j_l}, t_{j_l}).$$

Точнее говоря, при фиксированных $t_1, \ldots, t_n$ *функция*

$$w_n(\mathrm{x}_1, t_1, \ldots, \mathrm{x}_n, t_n) -$$
$$- w_k^{(1)}(\mathrm{x}_{i_1}, t_{i_1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_k}, t_{i_k})\,w_l^{(2)}(\mathrm{x}_{j_1}, t_{j_1}, \ldots, \mathrm{x}_{j_l}, t_{j_l})$$

не превышает по модулю Cd^{-p}, где $d = \min\limits_{i\in K,\, j\in L} |\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j|$; p — произвольное число; C — константа, зависящая от p, но не зависящая от $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$. (Сформулированное свойство функций Уайтмана носит название свойства *асимптотической факторизации* или кластерного свойства.)

Доказательство свойства асимптотической факторизации проведем сначала для случая, когда множество K состоит из чисел $(1, 2, \ldots, k)$, а множество L — из чисел $(k + 1, \ldots, n)$. Тогда оцениваемую разность можно записать в виде

$$\langle RU\rangle^T = \langle RU\rangle - \langle R\rangle\langle U\rangle,$$

где

$$R = A_1(\mathrm{x}_1, t_1) \ldots A_k(\mathrm{x}_k, t_k);$$
$$U = A_{k+1}(\mathrm{x}_{k+1}, t_{k+1}) \ldots A_n(\mathrm{x}_n, t_n).$$

Далее, вспомним, что операторы $A_1, \ldots, A_n$ — гладкие и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$A_i = \int f_i(\mathrm{x}, t)\,B_i(\mathrm{x}, t)\,d\mathrm{x}\,dt,$$

где $f_i \in \mathcal{S}$, $B_i \in \mathcal{A}$. Замечая, что

$$U = \int f_{k+1}(\xi_1, \tau_1) \ldots f_n(\xi_{n-k}, \tau_{n-k})\,B_{k+1}(\mathrm{x}_{k+1} + \xi_1, t_{k+1} + \tau_1) \ldots$$
$$\ldots B_n(\mathrm{x}_n + \xi_{n-k}, t_n + \tau_{n-k})\,d^{n-k}\xi d^{n-k}\tau =$$
$$= \int \alpha(t, \xi_1 - \mathrm{x}_{k+1}, \ldots, \xi_{n-k} - \mathrm{x}_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-k-1}) \times$$
$$\times \exp(\mathrm{i}\,Ht)\,B_{k+1}(\xi_1, t_{k+1})\,B_{k+2}(\xi_2, t_{k+2} + \sigma_1) \ldots$$
$$\ldots B_n(\xi_{n-k}, t_n + \sigma_{n-k-1})\exp(-\mathrm{i}\,Ht)\,dt\,d^{n-k}\xi d^{n-k-1}\sigma,$$

где

$$\alpha(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n-k}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-k-1}) = f_{k+1}(\xi_1, t)\,f_{k+2}(\xi_2, t + \sigma_1) \ldots$$
$$\ldots f_n(\xi_{n-k}, t + \sigma_{n-k-1}),$$ можем применить соотношение (37.6).

Получаем

$$\langle R, U\rangle^T = \int \alpha_h(t, \xi_1 - \mathrm{x}_{n+1}, \ldots, \xi_{n-k} - \mathrm{x}_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-k-1}) \times$$
$$\times \langle [R, B_{k+1}(\xi_1, t + t_{k+1})\,B_{k+2}(\xi_2, t + t_{k+2} + \sigma_1) \ldots$$
$$\ldots B_n(\xi_{n-k}, t + t_n + \sigma_{n-k-1})]\rangle\,dt d^{n-k}\xi d^{n-k-1}\sigma, \tag{37.9}$$

Коммутатор, стоящий в правой части равенства (37.9), может быть с помощью соотношения $[KL, M] = [K, M] L + K [L, M]$ переписан в форме

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ k+1\leqslant j\leqslant n}} C_{ij} [A_i (\mathbf{x}_i, t_i), B_j (\xi_{j-k}, t+t_j+\sigma_{j-k-1})] D_{ij},$$

где C_{ij}, D_{ij} — операторы, ограниченные по норме константой, не зависящей от $\mathbf{x}_i$, t_i, ξ_i, σ_i. Из этого факта, асимптотической коммутативности и формулы (37.9) вытекает свойство асимптотической факторизации для случая $K = \{1, \ldots, k\}$, $L = \{k+1, \ldots, n\}$. Общий случай сводится к этому, уже исчерпанному частному случаю. Пусть множество K состоит из чисел $(i_1, \ldots, i_k)$, множество L — из чисел $(j_1, \ldots, j_l)$, причем $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$. Если число $d = \min\limits_{i\in K,\ j\in L} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ велико, имеет место приближенное равенство

$$\langle A_1 (\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_n (\mathbf{x}_n, t_n)\rangle \approx \langle A_{i_1} (\mathbf{x}_{i_1}, t_{i_1}) \ldots A_{i_k} (\mathbf{x}_{i_k}, t_{i_k}) \times \\ \times A_{j_1}(\mathbf{x}_{j_1}, t_{j_1}) \ldots A_{j_l} (\mathbf{x}_{j_l}, t_{j_l})\rangle, \tag{37.10}$$

причем ошибка этого равенства не превышает Cd^{-m}, где m — произвольное число; C — константа, зависящая от m, n, $t_1, \ldots, t_n$. Доказательство этого равенства получается, если воспользоваться тем, что для $i \in K$, $j \in L$ имеет место приближенное равенство

$$\langle EA_i (\mathbf{x}_i, t_i)\, A_j (\mathbf{x}_j, t_j)\, F\rangle \approx \langle EA_j (\mathbf{x}_j, t_j)\, A_i (\mathbf{x}_i, t_i)\, F\rangle$$

с указанной только что оценкой для ошибки (здесь E, F — произведения операторов $A_\alpha (\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha)$, где $\alpha \in K \cup L$).

Из соотношения (37.10) и свойства асимптотической факторизации в рассмотренном ранее частном случае очевидным образом вытекает свойство асимптотической факторизации в общем случае.

Покажем теперь, каким образом из свойства асимптотической факторизации функций Уайтмана можно вывести утверждение леммы 3. Предположим, что утверждение леммы справедливо для функций w^T_{n-1}, и докажем его для функций w^T_n. Прежде всего убедимся в справедливости следующей геометрической леммы.

Пусть N — состоящее из n точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ множество в евклидовом пространстве, D — диаметр множества N (т. е. $D = \max\limits_{\mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}_j\in N} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$). *Тогда можно разбить это множество на два подмножества P и Q таким образом, что* $\rho (P, Q) = \min\limits_{\mathbf{x}_i\in P,\ \mathbf{x}_j\in Q} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \geqslant \frac{D}{2^n}$.

Доказательство этого факта проведем индукцией по n. Пусть $D = |\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|$. Удалив из множества N точку $\mathbf{x}_\gamma$, не совпадающую ни с $\mathbf{x}_\alpha$, ни с $\mathbf{x}_\beta$, получим множество N', состоящее из $n-1$ точек и имеющее тот же диаметр D. По предположению индукции можно разбить множество N' на два подмножества P' и Q' таким образом, что $\rho (P', Q') = \min\limits_{\mathbf{x}_i\in P',\ \mathbf{x}_j\in Q'} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \geqslant \frac{D}{2^{n-1}}$. Точка $\mathbf{x}_\gamma$ не может в силу неравенства треугольника удовлетворять одновременно неравенствам $\rho (P', \mathbf{x}_\gamma) = \min\limits_{\mathbf{x}_i\in P'} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\gamma| < \frac{D}{2^n}$ и $\rho (Q', \mathbf{x}_\gamma) = \min\limits_{\mathbf{x}_j\in Q'} |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_\gamma| < \frac{D}{2^n}$; предположим определенности ради, что $\rho (P', \mathbf{x}_\gamma) \geqslant \frac{D}{2^n}$. Тогда нужное разбиение можно, очевидно, построить, считая, что множество P совпадает с P', а множество Q получается из Q' присоединением точки $\mathbf{x}_\gamma$.

Предположим, что утверждение леммы 3 уже доказано для функций w^T_k при $k < n$. Чтобы доказать утверждение этой леммы для функции w^T_n, нужно оценить $w^T_n (\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t_n)$ при условии $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = D$ (времена $t_1, \ldots, t_n$ считаем фиксированными). Пользуясь только что доказанной геометрической леммой, разбиваем множество $\{1, \ldots, n\}$ на два подмножества K и L таким образом, что $\min\limits_{i\in K,\ j\in L} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \geqslant \frac{D}{2^n}$. Для оценки функции w^T_n заметим, что в правой части соотношения (36.11) (рекуррентного соотношения, определяющего функции w^T_n) все множители вида $w_{\alpha_r} (\pi_r)$, где $\alpha_r < n$, а множество π_r имеет общие элементы и с K и с L, по предположению индукции допускают оценку вида CD^{-m}, где m — любое, а C зависит от m. Отсюда вытекает, что каждое слагаемое в правой части (36.11), содержащее хотя бы один множитель описанного только что вида, также допускает оценку вида CD^{-m}, поскольку все множители $w^T_{\alpha_i} (\pi_i)$ можно оценить сверху константой, зависящей только от чисел $\|A_1\|, \ldots, \|A_n\|$

и числа n (существование такой оценки становится очевидным, если заметить, что

$$|\langle A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots A_n(\mathbf{x}_n, t_n)\rangle| \leqslant \|A_1\| \dots \|A_n\|).$$

Таким образом, с ошибкой, не превышающей CD^{-m}, можно написать приближенное равенство

$$w_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \approx w_n^T(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) + \\ + \sum_{k=2}^{n} \sum_{\rho} w_{\alpha_1}^T(\pi_1) \dots w_{\alpha_k}^T(\pi_k), \tag{37.11}$$

где сумма берется только по таким разбиениям ρ множества $\{1, \dots, n\}$ на подмножества π_j, для которых каждое из подмножеств π_j целиком содержится либо в K, либо в L.

Легко видеть, что сумма, фигурирующая в (37.11), равна произведению $w_k(\mathbf{x}_{i_1}, t_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}, t_{i_k})\, w_l(\mathbf{x}_{j_1}, t_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_l}, t_{j_l})$, где $(i_1, \dots, i_k)$ — элементы множества K, $(j_1, \dots, j_l)$ — элементы множества L.

Видим, таким образом, что

$$w_n^T(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \approx w_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) - \\ - w_k(\mathbf{x}_{i_1}, t_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}, t_{i_k})\, w_l(\mathbf{x}_{j_1}, t_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_l}, t_{j_l}).$$

Для того чтобы доказать утверждение леммы 3, осталось сослаться на свойство асимптотической факторизации функций Уайтмана.

Замечание. Из гладкости операторов A_i вытекает, что функция Уайтмана $w_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n)$ и усеченные функции Уайтмана $w_n^T(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n)$ являются гладкими функциями, причем производные этих функций можно рассматривать снова как функции Уайтмана или усеченные функции Уайтмана, но построенные по другим гладким операторам. (Это становится очевидным, если заметить, что для гладкого оператора $A = \int f(\tau, \xi)\, B(\xi, \tau)\, d\xi d\tau$, где $f \in \mathscr{S}(E^4)$, имеет место соотношение

$$D^{(\alpha)} A(\mathbf{x}, t) = D^{(\alpha)} \int f(\tau - t, \xi - \mathbf{x})\, B(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \\ = \int g(\tau - t, \xi - \mathbf{x})\, B(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = C(\mathbf{x}, t),$$

где $D^{(\alpha)}$ — дифференциальный оператор: $D^{(\alpha)} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{\alpha_0}\, \partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}\, \partial x_3^{\alpha_3}}$; $g(t, \mathbf{x}) = (-1)^{|\alpha|} D^{(\alpha)} f(t, \mathbf{x})$; C — гладкий оператор, определяемый формулой $C = \int g(\tau, \xi) \times B(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$; производная оператора понимается в смысле дифференцирования но норме.) Воспользовавшись этим фактом и утверждением леммы 3, можем сказать, что при фиксированных $t_1, \dots, t_n$ и фиксированном $\mathbf{x}_n$ функция $w_n^T(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n)$, построенная по гладким операторам, принадлежит пространству $\mathscr{S}(E^{3(n-1)})$.

Требование гладкости операторов $A_1, \dots, A_n$, фигурирующее в лемме 3, может быть ослаблено. Однако если это требование совсем отбросить, то приходится ослабить утверждение леммы. Именно, без условия гладкости операторов $A_1, \dots, A_n$ можно утверждать, что функция

$$\nu(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \\ = \int \gamma(\mathbf{x}_1 - \xi_1, t_1 - \tau_1, \dots, \mathbf{x}_n - \xi_n, t_n - \tau_n)\, w_n^T(\xi_1, \tau_1, \dots, \xi_n, \tau_n)\, d^n\xi\, d^n\tau,$$

где $\gamma \in \mathscr{S}(E^{4n})$, при фиксированных $t_1, \dots, t_n$ и фиксированном $\mathbf{x}_n$ принадлежит пространству $\mathscr{S}(E^{3(n-1)})$.

Доказательство леммы 4. Чтобы доказать лемму, нужно оценить величину

$$I = \langle A_0(f_0, t) \dots A_n(f_n, t)\rangle^T = \int \tilde{f}_0(\mathbf{x}_0 | t) \dots \\ \dots \tilde{f}_n(\mathbf{x}_n | t) \langle A_0(\mathbf{x}_0, t) \dots A_n(\mathbf{x}_n, t)\rangle^T d\mathbf{x}_0 \dots d\mathbf{x}_n. \tag{37.12}$$

Перейдем в интеграле (37.12) к новым переменным $\mathbf{x}_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, где $\xi_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0$, и воспользуемся оценкой

$$|\langle A_0(\mathbf{x}_0, t) \dots A_n(\mathbf{x}_n, t)\rangle^T| \leqslant \frac{C}{1 + \|\xi\|^m} = \\ = \frac{C}{1 + (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{m/2}},$$

вытекающей из леммы 3 (здесь m — произвольное число, C зависит от m). Применяя эту оценку, получаем

$$|I| \leqslant \int |\tilde{f}_0(\mathbf{x}_0 | t)| \left(\frac{C}{1 + |t|^{3/2}}\right)^n \frac{C}{1 + \|\xi\|^m}\, d\mathbf{x}_0\, d^m\xi \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\,(1 + |t|)^{-\frac{3}{2}n} \int |\tilde{f}_0(\mathbf{x}_0 | t)|\, d\mathbf{x}_0 \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\,(1 + |t|)^{-\frac{3}{2}(n-1)}. \tag{37.13}$$

При преобразованиях использованы неравенства $|f_j(\mathbf{x}|t)| \leqslant \leqslant C(1+|t|^{3/2})^{-1}$ при $j \geqslant 1$, $\int |\widetilde{f}_0(\mathbf{x}|t)|\,d\mathbf{x} \leqslant \leqslant C(1+|t|)^{3/2}$, следующие из леммы 2, число m выбрано настолько большим, чтобы интеграл $\int (1+\|\xi\|)^{-m}\,d^n\xi$ сходился.

Неравенство (37.13) дает нужную нам оценку величины I. Для того чтобы завершить доказательство леммы 4, следует получить аналогичную оценку в случае, если в выражении $\langle A_1(f_1, t) \ldots A_n(f_n, t)\rangle^T$ некоторые из операторов $A_j(f_j, t)$ заменены операторами $\dot{A}_j(f_j, t) = \frac{d}{dt} A_j(f_j, t)$.

Заметим, что

$$\dot{A}_j(f_j, t) = \frac{d}{dt}\int \widetilde{f}_j(\mathbf{x}|t)\,A_j(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int\left(\frac{d}{dt}\widetilde{f}_j(\mathbf{x}|t)\right)A_j(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} + \int \widetilde{f}_j(\mathbf{x}|t)\frac{d}{dt}A_j(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int \widetilde{g}_j(\mathbf{x}|t)\,A_j(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} + \int \widetilde{f}_j(\mathbf{x}|t)\,K_j(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x},$$

где введены обозначения

$$K = \mathrm{i}\,[H, A];$$

$$\widetilde{g}_j(\mathbf{x}|t) = \frac{d}{dt}\widetilde{f}_j(\mathbf{x}|t) =$$

$$= \int \exp(-\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{p})\,t + \mathrm{i}\,\mathbf{p}\mathbf{x})\,g_j(\mathbf{p})\,\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3};$$

$$g_j(\mathbf{p}) = -\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{p})\,f_j(\mathbf{p}).$$

Таким образом, оператор $\dot{A}_j(f_j, t)$ может быть представлен в виде

$$\dot{A}_j(f_j, t) = A_j(g_j, t) + K_j(f_j, t), \qquad (37.14)$$

где g_j — гладкая финитная функция; K_j — гладкий оператор. [В гладкости оператора K_j легко убедиться, заметив, что, когда оператор A_j представлен в виде $A_j = \int \varphi_j(\tau, \xi)\,B_j(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau$, оператор K_j равен $-\int\left(\frac{d}{d\tau}\varphi_j(\tau, \xi)\right)B_j(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau$.]

С помощью формулы (37.14) доказательство леммы в случае, когда некоторые из операторов $A_j(f_j, t)$ заменены операторами $\dot{A}_j(f_j, t)$, очевидным образом сводится к уже рассмотренному случаю. Доказательство леммы в случае замены некоторых операторов $A_j(f_j, t)$ на операторы $(A_j(f_j, t))^*$ или $(\dot{A}_j(f_j, t))^*$ не требует каких-либо новых идей.

§ 38. Асимптотические поля (in- и out-операторы)

В § 36 было дано определение матриц Мёллера $S_\mp$, соответствующих асимптотически абелевой алгебре $\mathcal{A}$. С помощью матриц Мёллера можно определить in- и out-*операторы* (*асимптотические поля*) $a^+_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k})$ и $a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k})$ соотношениями

$$S_- a^+(\mathbf{k}) = a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})\,S_-;$$
$$S_- a(\mathbf{k}) = a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})\,S_-;$$
$$S_+ a^+(\mathbf{k}) = a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})\,S_+;$$
$$S_+ a(\mathbf{k}) = a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})\,S_+.$$

Эти равенства определяют, очевидно, $a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$, $a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})$ как операторные обобщенные функции в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{in}} = S_-\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$ и $a^+_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$, $a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})$ — как операторные обобщенные функции в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{out}} = S_+\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$.

В этом параграфе показано, что in- и out-операторы описывают асимптотическое поведение операторов $A(\mathbf{x}, t)$, где $A \in \mathcal{A}$, при $t \to \pm\infty$ (это и является основанием для того, чтобы называть их асимптотическими полями).

Прежде чем переходить к точным формулировкам, введем следующие определения.

Каждой функции $f \in \mathcal{S}(E^3)$ сопоставим множество $U(f) \in E^3$, состоящее из точек вида $\frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k} \in \operatorname{supp} f$ (т. е. $\mathbf{k}$ принадлежит носителю функции f).

Семейство функций $f_1, \ldots, f_n$ назовем *неперекрывающимся*, если $f_j \in \mathcal{S}(E^3)$ и множества $U(f_j)$ попарно не пересекаются*.

* При наложенном на функции $\omega(\mathbf{k})$ условии строгой выпуклости семейство функций $f_1, \ldots, f_n$ будет неперекрывающимся в том и только в том случае, когда носители этих функций $\operatorname{supp} f_j$ попарно не пересекаются. Таким образом, в рассматриваемом случае определение неперекрывающегося семейства может быть упрощено. Однако для того, чтобы ослабить условие строгой выпуклости или рассмотреть случай, когда имеется несколько частиц, необходимо исходить из данного в основном тексте определения.

Следующее замечание проясняет физический смысл введенного понятия.

Если $f_1, \ldots, f_n$ — неперекрывающееся семейство функций, то динамика в пространстве $\mathscr{H}_{as}$ при $t \to \pm\infty$ превращает вектор $a^+(\bar{f}_1) \ldots a^+(\bar{f}_n)\,\theta$ в совокупность далеких друг от друга частиц. В самом деле,

$$\exp(-\mathrm{i}\, H_{as}\, t)\, a^+(\bar{f}_1) \ldots a^+(\bar{f}_n)\,\theta = a^+(\overline{f_1^t}) \ldots a^+(\overline{f_n^t})\,\theta =$$

$$= (2\pi)^{\frac{3}{2}n} \int \tilde{f}_1(\mathbf{x}_1 \mid t) \ldots \tilde{f}_n(\mathbf{x}_n \mid t)\, a^+(\mathbf{x}_1) \ldots a^+(\mathbf{x}_n)\, d\mathbf{x}_1 \ldots d\mathbf{x}_n\, \theta,$$

где

$$f_j^t(\mathbf{k}) = f_j(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{k})\, t);$$

$$\tilde{f}_j(\mathbf{x} \mid t) = \int f_j^t(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} =$$

$$= \int f_j(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{k})\, t + \mathrm{i}\,\mathbf{kx}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Из леммы 2 следует, что функция $\tilde{f}_j(\mathbf{x} \mid t)$ при больших t мала вне множества $tU_\varepsilon(f_j)$, где символом $U_\varepsilon(f_j)$ обозначена ε-окрестность множества $U(f_j)$. Но при сделанных предположениях для достаточно малого ε при больших t множества $tU_\varepsilon(f_j)$ далеки друг от друга.

Вектор вида $\Psi_-(B_1, \ldots, B_n \mid f_1, \ldots, f_n)$ [соответственно, вида $\Psi_+(B_1, \ldots, B_n \mid f_1, \ldots, f_n)$], где $B_1, \ldots, B_n$ — правильные операторы, $f_1, \ldots, f_n$ — финитные гладкие функции, назовем *неперекрывающимся* in-*вектором* (out-*вектором*), если $f_1, \ldots, f_n$ — неперекрывающееся семейство функций. Множество линейных комбинаций неперекрывающихся in-векторов (out-векторов) обозначим $\mathscr{D}_{in}$ (соответственно, $\mathscr{D}_{out}$); $\mathscr{D}_{in}$, $\mathscr{D}_{out}$ представляют собой линейные многообразия, плотные соответственно в $\mathscr{H}_{in}$ и $\mathscr{H}_{out}$.

Докажем сейчас теоремы, позволяющие охарактеризовать in- и out-операторы с помощью асимптотики операторов $A(\mathbf{x}, t)$, где $A \in \mathcal{A}$. Ради определенности будем формулировать и доказывать их для случая in-операторов, помня, что перенос на случай out-операторов совершается с помощью замены предельного перехода $t \to -\infty$ на предельный переход $t \to +\infty$.

Если $A_1, \ldots, A_n$ — правильные операторы, $\Psi_1 \in \mathscr{D}_{in}$, то

$$\lim_{t \to -\infty} A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n)\, \Psi_1 =$$

$$= a_{in}(\bar{\varphi}_1 \bar{f}_1, \sigma_1) \ldots a_{in}(\bar{\varphi}_n \bar{f}_n, \sigma_n)\, \Psi_1. \tag{38.1}$$

Если $A_1, \ldots, A_n$ — гладкие операторы из алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющие требованию $\langle A_j\, \Phi, \Phi \rangle = 0$, $\Psi_1 \in \mathscr{D}_{in}$, $\Psi_2 \in \mathscr{D}_{in}$, то

$$\lim_{t \to -\infty} \langle A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n)\, \Psi_1, \Psi_2 \rangle =$$

$$= \langle a_{in}(\bar{\varphi}_1 \bar{f}_1, \sigma_1) \ldots a_{in}(\bar{\varphi}_n \bar{f}_n, \sigma_n)\, \Psi_1, \Psi_2 \rangle \tag{38.2}$$

при условии, что σ_j, отвечающие тем из операторов A_j, которые не являются правильными, равны друг другу. В (38.1) и (38.2) f_j — гладкие финитные функции, функции. φ_j задаются соотношением $\varphi_j(\mathbf{k}) = \langle A_j \Phi, \Phi(\mathbf{k}) \rangle$, выражения $A(f, t, \sigma)$ определяются формулами

$$A(f, t, 1) = A(f, t) = \int \tilde{f}(\mathbf{x} \mid t)\, A(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x};$$

$$A(f, t, -1) = A^*(f, t) = \int \overline{\tilde{f}(\mathbf{x} \mid t)}\, A^*(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}.$$

(Иначе можно сказать, что для произвольных гладких операторов $A_1, \ldots, A_n$ имеет место слабая сходимость оператора $A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n)$ при $t \to -\infty$ к оператору $a_{in}(\varphi_1 \bar{f}_1, \sigma_1) \ldots a_{in}(\varphi_n \bar{f}_n, \sigma_n)$ на множестве $\mathscr{D}_{in}$ при условии $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n$; для правильных операторов $A_1, \ldots, A_n$ можно утверждать, что имеет место сильная сходимость на $\mathscr{D}_{in}$.)

Приступим к доказательству сформулированных теорем.

Лемма 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $f_1, \ldots, f_n$ — гладкие финитные функции, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n = \pm 1$. Если хотя бы для одной пары индексов i, j, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, множества $U(f_i)$ и $U(f_j)$ не пересекаются и $\sigma_i = \sigma_j$, то для любого m найдется такое C, что*

$$|\langle A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n) \rangle^T| \leqslant C(1 + |t|^m)^{-1}.$$

Это утверждение остается справедливым, если в выражении $\langle A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n) \rangle^T$ заменить некоторые из операторов $A_i(f_i, t, \sigma_i)$ их производными по времени $\frac{d}{dt} A_i(f_i, t, \sigma_i)$.

Доказательство. Запишем рассматриваемое выражение

$$\langle A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n) \rangle^T \tag{38.3}$$

в виде

$$\int f_1(\mathbf{p}_1, \sigma_1) \exp(-\mathrm{i}\,\sigma_1\, \omega(\mathbf{p}_1)\, t) \ldots f_n(\mathbf{p}_n, \sigma_n) \times$$

$$\times \exp(-\mathrm{i}\,\sigma_n\, \omega(\mathbf{p}_n)\, t)\, \tilde{\omega}_n^T(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \ldots, \mathbf{p}_n, \sigma_n)\, d^n\mathbf{p}.$$

[Здесь введены обозначения

$$\widetilde{w}_n^T(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \ldots, \mathbf{p}_n, \sigma_n) =$$

$$= \int \exp\left(i \sum \mathbf{p}_j \mathbf{x}_j\right) \langle A_1(\mathbf{x}_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(\mathbf{x}_n, t, \sigma_n)\rangle^T d^n \mathbf{x};$$

$$A(\mathbf{x}, t, 1) = A(\mathbf{x}, t); \quad A(\mathbf{x}, t, -1) = A^*(\mathbf{x}, t).]$$

Из леммы 3 § 36 вытекает, что функция $\widetilde{w}_n^T$ имеет вид $\widetilde{w}_n^T(\mathbf{p}_1, \sigma_1, \ldots, \mathbf{p}_n, \sigma_n) = \nu_n(\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\, \delta(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n)$, где ν_n — гладкая функция [можно утверждать, что $\nu_n \in \mathcal{S}(E^{3(n-1)})$].

Будем считать ради определенности, что $\sigma_1 = \sigma_2$ и $U(f_1)$ не пересекаются с $U(f_2)$. Тогда удобно переписать (38.3) в виде

$$\int \exp(-i\,\Omega(\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)\, t)\, \chi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)\, d\mathbf{p}_2 \ldots d\mathbf{p}_n,$$

где χ — гладкая финитная функция;

$$\Omega(\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n) = \sigma_1 \omega(-\mathbf{p}_2 - \cdots - \mathbf{p}_n) + \\ + \sigma_2 \omega(\mathbf{p}_2) + \sigma_3 \omega(\mathbf{p}_3) + \cdots + \sigma_n \omega(\mathbf{p}_n).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}_2} = -\sigma_1 \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}}\Big|_{\mathbf{p} = -\mathbf{p}_2 - \cdots - \mathbf{p}_n} + \sigma_2 \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}}\Big|_{\mathbf{p} = \mathbf{p}_2} =$$

$$= \sigma_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}}\Big|_{\mathbf{p} = \mathbf{p}_2} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}}\Big|_{\mathbf{p} = \mathbf{p}_1} \right),$$

откуда ясно, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}_2} \neq 0$$

на носителе функции χ.

Можно поэтому воспользоваться формулой (36.1), считая все переменные, кроме $\mathbf{p}_2$, фиксированными. В рассматриваемом случае

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \frac{1}{t} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \left| \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}_2} \right|^{-2},$$

поэтому

$$|(L^r \chi)(\mathbf{p})| \leqslant C |t|^{-r}. \tag{38.4}$$

Неравенство (38.4) приводит к нужной нам оценке.

Случай, когда некоторые операторы $A_i(f_i, t, \sigma_i)$ заменены их производными по времени, исчерпывается так же, как при доказательстве леммы 4 § 36.

Лемма 2. *Если $f_1, \ldots, f_n$ — неперекрывающиеся гладкие финитные функции, $B_1, \ldots, B_n$ — правильные операторы, то для любого m*

$$\lim_{t \to -\infty} t^m \| \Psi_-(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n) - \Psi(B_1, \ldots \\ \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n | t) \| = 0.$$

Для доказательства этой леммы достаточно показать, что для любого m имеет место оценка

$$\left| \left\langle \frac{d}{dt} \Psi(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n | t), \; \frac{d}{dt} \Psi(B_1, \ldots \right.\right. \\ \left.\left. \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n | t) \right\rangle \right| \leqslant C(1 + |t|^m)^{-1}.$$

Эта оценка может быть получена точно так же, как аналогичная оценка с $m = 3$ в § 36, если применение леммы 4 § 36 заменить использованием только что доказанной леммы 1.

Лемма 3. *Соотношения* (38.1) и (38.2) *справедливы в случае, если* $\Psi_1 = \Phi$.

Для того чтобы доказать эту лемму, заметим прежде всего, что норма вектора $\xi(t)$, определяемого формулой

$$\xi(t) = A_1(f_1, t, \sigma_1) \ldots A_n(f_n, t, \sigma_n)\, \Phi,$$

ограничена сверху константой, не зависящей от t. В самом деле, $\langle \xi(t), \xi(t) \rangle$ можно разложить по усеченным функциям Уайтмана и воспользоваться тем, что все получающиеся усеченные функции Уайтмана в силу леммы 4 § 36 ограничены. При доказательстве леммы достаточно рассмотреть случай, когда вектор Ψ_2 имеет вид

$$\Psi_2 = \Psi_-(B_1, \ldots, B_m | g_1, \ldots, g_m) = \lim_{t \to -\infty} \Psi_2(t),$$

где

$$\Psi_2(t) = \Psi(B_1, \ldots, B_m | g_1, \ldots, g_m | t).$$

Можно в силу ограниченности $\|\xi(t)\|$ и $\|\Psi_2(t)\|$ утверждать, что

$$\lim_{t \to -\infty} \langle \xi(t), \Psi_2 \rangle = \lim_{t \to -\infty} \langle \xi(t), \Psi_2(t) \rangle.$$

Скалярное произведение

$$\langle \xi (t), \Psi_2 (t)\rangle =$$

$$= \langle A_1 (f_1, t, \sigma_1) \dots A_n (f_n, t, \sigma_n)\ \Phi, B_1 (g_1, t) \dots B_m (g_m, t)\,\Phi\rangle$$

можно разложить по усеченным функциям Уайтмана. В силу леммы 4 § 36 при $t \to -\infty$ отличны от нуля произведения, содержащие лишь двухточечные усеченные функции Уайтмана. Отсюда легко вывести, что

$$\lim_{t \to +\infty} \langle \xi (t), \Psi_2 (t)\rangle = \langle a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_1 \overline{f}_1, \sigma_1) \dots$$

$$\dots a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_n \overline{f}_n, \sigma_n)\,\Phi, a^{+}_{\text{in}} (\overline{\psi}_1 \overline{g}_1) \dots a^{+}_{\text{in}} (\overline{\psi}_m \overline{g}_m)\,\Phi\rangle =$$

$$= \langle a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_1 \overline{f}_1, \sigma_1) \dots a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_n \overline{f}_n, \sigma_n)\,\Phi, \Psi_- (B_1, \dots, B_m | g_1, \dots, g_m)\rangle \tag{38.5}$$

(здесь символом ψ_i обозначена функция, определяемая формулой $B_i\Phi = \int \psi_i (\mathbf{k})\ \Phi (\mathbf{k})\ d\mathbf{k}$).

При выводе соотношения (38.5) следует использовать формулу

$$\lim_{t \to \infty} \langle A_i (f_i, t, \sigma_i)\ A_j (f_j, t, \sigma_j)\rangle^T =$$

$$= \langle a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_i \overline{f}_i, \sigma_i)\ a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_j \overline{f}_j, \sigma_j)\rangle,$$

справедливую, если хотя бы один из операторов A_i, A_j правилен или сопряжен с правильным, а также без этого предположения при условии $\sigma_i = \sigma_j$ (в частности, эта формула может быть применена в случае $A_j = B_j$, $f_j = g_j$; тогда $\varphi_j = \psi_j$).

Соотношение (38.5) доказывает равенство (38.2) при $\Psi_1 = \Phi$.

В случае, если $A_1, \dots, A_n$ — правильные операторы, точно так же, как и в § 36, доказывается, что вектор $\xi\ (t)$ имеет предел при $t \to -\infty$.

Из доказанного уже утверждения вытекает, что вектор $\xi - \eta$, где $\xi = \lim\limits_{t \to -\infty} \xi\ (t)$, $\eta = a_{\text{in}}\ (\overline{\varphi}_1\ \overline{f}_1,\ \sigma_1) \dots$ $\dots a_{\text{in}} (\overline{\varphi}_n \overline{f}_n,\ \sigma_n)\,\Phi$, ортогонален пространству $\mathcal{H}_{\text{in}}$. С другой стороны, простой подсчет, основанный на разложении по усеченным функциям Уайтмана, показывает, что $\langle \xi, \xi\rangle = \langle \eta, \eta\rangle$. Поскольку $\eta \in \mathcal{H}_{\text{in}}$, это доказывает, что $\xi = \eta$. Таким образом, соотношение (38.1) справедливо при $\Psi_1 = \Phi$, что полностью доказывает лемму 3.

Приступим теперь к доказательству равенств (38.1), (38.2) в общем случае.

Пусть $\Psi_1 = \Psi_- (E_1, \dots, E_r | h_1, \dots, h_r)$, $E_1, \dots, E_r$ — правильные операторы, $h_1, \dots, h_r$ — неперекрывающиеся функции, $\Psi_1\ (t) = \Psi\ (E_1, \dots, E_r | h_1, \dots, h_r | t)$.

Из неравенства (36.8) вытекает, что $\| A_i\ (f,\ t,\ \sigma) \| \leqslant C\ (1 + |t|^{3/2})$, поэтому из леммы 3 следует, что при $t \to \infty$

$$\| A_1 (f_1, t, \sigma_1) \dots A_n (f_n, t, \sigma_n) (\Psi_1 - \Psi_1 (t)) \| \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{t \to -\infty} A_1 (f_1, t, \sigma_1) \dots A_n (f_n, t, \sigma_n)\ \Psi_1 =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} A_1 (f_1, t, \sigma_1) \dots A_n (f_n, t, \sigma_n)\ \Psi_1 (t) =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} A_1 (f_1, t, \sigma_1) \dots A_n (f_n, t, \sigma_n)\ E_1 (h_1, t, 1) \dots$$

$$\dots E_r (h_r, t, 1)\,\Phi.$$

Для того чтобы завершить доказательство, остается сослаться на лемму 3.

Замечание. Соотношение (38.2) остается справедливым, если Ψ_2 — произвольный вектор из $\mathcal{H}_{\text{in}}$.

§ 39. Одевающие операторы

В этом параграфе убедимся, что конструкция матрицы рассеяния, указанная в § 36, эквивалентна другой конструкции, более тесно связанной с наглядной картиной рассеяния.

Прежде всего введем понятие одевающего оператора.

Оператор D, действующий из пространства $\mathcal{H}_{\text{as}}$ в пространство $\mathcal{H}$, назовем in-*одевающим* (out-*одевающим*), если

$$S_- = \underset{t \to -\infty}{\text{s lim}}\ \exp (\mathrm{i}\, Ht)\, D \exp (-\mathrm{i}\, H_{\text{as}}\, t) \tag{39.1}$$

$$\left(S_+ = \underset{t \to +\infty}{\text{s lim}} \exp (\mathrm{i}\, Ht)\, D \exp (-\mathrm{i}\, H_{\text{as}}\, t)\right). \tag{39.2}$$

Если выполнены оба эти соотношения, оператор D назовем *одевающим оператором*.

Полезно отметить, что из соотношений (36.4) вытекает, что как in-одевающие, так и out-одевающие операторы удовлетворяют условиям

$$D\theta = \Phi; \tag{39.3}$$

$$Da^{+} (\mathbf{k})\, \theta = \Phi (\mathbf{k}). \tag{39.4}$$

Эти условия, однако, не являются достаточными для того, чтобы оператор был одевающим. Заметим, что примером in-одевающего оператора является сам оператор S_-, а примером out-одевающего оператора — оператор S_+.

Укажем сейчас достаточные условия для того, чтобы оператор D был in-одевающим. Именно, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* а) *оператор* D *имеет норму 1,* б) *для всякого неперекрывающегося семейства финитных гладких функций* $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_n(\mathbf{k})$ *и для любых гладких операторов* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *при* $t<0$ *выполняется приближенное равенство*

$$\langle Da^+(\overline{f_1^t}) \ldots a^+(\overline{f_n^t})\,\theta,\ A_1(g_1) \ldots A_n(g_n)\,\Phi\rangle \approx$$

$$\approx \sum_{\pi\in P} \langle \Phi(f_1^t), A_{i_1}(g_{i_1})\,\Phi\rangle \ldots \langle \Phi(f_n^t), A_{i_n}(g_{i_n})\,\Phi\rangle \quad (39.5)$$

с ошибкой, не превышающей $Cv^n(g)\,|t|^{-N}$ (здесь $f_i^t(\mathbf{k}) = f_i(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})\,t)$, P — *множество перестановок* $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ *индексов* $(1, \ldots, n)$, $\nu(g) = \max\limits_i (\sup|g_i(x)| + \int |g_i(x)|\,dx)$; $g_i \in \mathcal{S}(E^3)$; N — *произвольное число;* C — *константа, зависящая от* N, *но не зависящая от функций* g_i). *Тогда оператор* D — in-*одевающий.*

Условия для того, чтобы оператор был out-одевающим, получаются из перечисленных выше, если заменить соотношение $t<0$ соотношением $t>0$.

Чтобы доказать сформулированное утверждение, рассмотрим вектор $x = S_- y$, где $x = \Psi_-(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n)$; $y = a^+(\overline{\varphi_1 f_1}) \ldots a^+(\overline{\varphi_n f_n})\,\theta$; $B_1, \ldots, B_n$ — правильные операторы, $f_1, \ldots, f_n$ — неперекрывающиеся функции, и векторы

$$x(t) = \Psi_-(B_1, \ldots, B_n | f_1^t, \ldots, f_n^t) =$$

$$= S_- a^+(\overline{\varphi_1 f_1^t}) \ldots a^+(\overline{\varphi_n f_n^t})\,\theta.$$

Очевидно, что

$$\exp(-i H_{as} t)\, y = a^+(\overline{\varphi_1 f_1^t}) \ldots a^+(\overline{\varphi_n f_n^t})\,\theta \quad (39.6)$$

и, значит, в силу соотношения (36.5)

$$x(t) = \exp(-iHt)\,x. \quad (39.7)$$

При больших t вектор $x(t)$ мало отличается от вектора

$$\xi(t) = \Psi(B_1, \ldots, B_n | f_1^t, \ldots, f_n^t | 0) = B_1(f_1^t, 0) \ldots B_n(f_n^t, 0)\,\Phi$$

(для того чтобы доказать это утверждение, проще всего заметить, что при $t \to \pm\infty$

$$\|x(t) - \xi(t)\| = \|\exp(iHt)(x(t) - \xi(t))\| =$$
$$= \|\Psi_-(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n) -$$
$$- \Psi(B_1, \ldots, B_n | f_1, \ldots, f_n | t)\| \to 0). \quad (39.8)$$

С другой стороны, пользуясь соотношением (39.6), видим, что

$$\lim_{t\to-\infty} \langle D \exp(-i H_{as} t)\, y,\ \xi(t)\rangle =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \langle Da^+(\overline{\varphi_1 f_1^t}) \ldots a^+(\overline{\varphi_n f_n^t})\,\theta,\ B_1(f_1^t, 0) \ldots B_n(f_n^t, 0)\,\Phi\rangle =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \sum_{\pi\in P} \langle \Phi(\varphi_1 f_1^t),\ B_{i_1}(f_{i_1}^t, 0)\,\Phi\rangle \ldots$$
$$\ldots \langle \Phi(\varphi_n f_n^t),\ B_{i_n}(f_{i_n}^t, 0)\,\Phi\rangle = \langle y, y\rangle. \quad (39.9)$$

Вспоминая, что $\|D \exp(-iH_{as} t)\, y\| \leqslant \|y\|$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\xi(t) - x(t)\| = 0$, получаем из (39.9) соотношение

$$\lim_{t\to-\infty} \langle D \exp(-i H_{as} t)\, y,\ x(t)\rangle = \langle y, y\rangle, \quad (39.10)$$

откуда в силу (39.7)

$$\lim_{t\to-\infty} \langle \exp(iHt)\, D \exp(-i H_{as} t)\, y,\ S_- y\rangle =$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \langle \exp(iHt)\, D \exp(-i H_{as} t)\, y,\ x\rangle =$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \langle D \exp(-i H_{as} t)\, y,\ x(t)\rangle = \langle y, y\rangle = \langle S_- y, S_- y\rangle.$$

Теперь можно использовать следующую простую лемму. *Если* $\lim \langle \beta_t, \eta\rangle = \langle \eta, \eta\rangle$ и $\|\beta_t\| \leqslant \|\eta\|$, *то* $\lim \beta_t$ *существует и равен* η (утверждение леммы становится очевидным, если записать $\langle \beta_t, \eta\rangle$ в виде

$$\langle \beta_t, \eta\rangle = \|\beta_t\| \cdot \|\eta\| \cos\varphi_t,$$

где φ_t — угол между β_t и η, и заметить, что из неравенств $\|\beta_t\| \leqslant \|\eta\|$, $|\cos\varphi_t| \leqslant 1$ вытекает, что $\|\beta_t\| \cos\varphi_t$ может стремиться к $\|\eta\|$ лишь в случае, если $\lim \|\beta_t\| = \|\eta\|$, $\lim \cos\varphi_t = 1$).

Применяя лемму к векторам $\beta_t = \exp(iHt) D \times \times \exp(-iH_{as}t)\, y$, $\eta = S_- y$, убеждаемся, что $\lim\limits_{t\to-\infty} \exp(iHt) \times \times D \exp(-iH_{as}t)\, y$ существует и равен $S_- y$.

Поскольку векторы $y = a^+(\varphi_1 \bar{f}_1) \ldots a^+(\varphi_n \bar{f}_n)\,\theta$, для которых соотношение

$$\lim_{t\to-\infty} \exp(iHt) D \exp(-iH_{as}t)\, y = S_- y$$

уже доказано, образуют тотальное множество в пространстве $\mathcal{H}_{as}$, видим, что это соотношение имеет место для всюду плотного множества векторов и, следовательно, для любого вектора $y \in \mathcal{H}_{as}$ (см. дополнение, § Д.5).

Таким образом, получили достаточные условия для того, чтобы оператор D был in-одевающим или out-одевающим. Эти условия можно ослабить, заменив требование $\|D\| = 1$ предположением, что

$$\lim_{\substack{t\to-\infty \\ (t\to+\infty)}} \|Da^+(\tilde{f}_1^t) \ldots a^+(\tilde{f}_n^t)\,\theta\| = \|a^+(\tilde{f}_1) \ldots a^+(\tilde{f}_n)\,\theta\| \quad (39.11)$$

(доказательство при этом не меняется).

Можно указать, стало быть, также условия для того, чтобы оператор D был одевающим (поскольку оператор является одевающим, если он одновременно in- и out-одевающий). Эти условия легко сформулировать в несколько иной форме. Именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть оператор D имеет норму 1 и для всяких функций $\tilde{f}_1(\mathbf{x}), \ldots, \tilde{f}_n(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(E^3)$, носители которых далеки друг от друга, и гладких операторов $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ имеет место приближенное равенство*

$$\langle Da^+(\tilde{f}_1) \ldots a^+(\tilde{f}_n)\,\theta, A_1(g_1) \ldots A_n(g_n)\,\Phi\rangle \approx$$
$$\approx \sum_{\pi\in P} \langle \Phi(f_1), A_{i_1}(g_{i_1})\,\Phi\rangle \ldots \langle \Phi(f_n), A_{i_n}(g_{i_n})\,\Phi\rangle \quad (39.12)$$

с ошибкой, не превышающей $C\nu^n(f)\,\nu^n(g)\,d^{-N}$.

[Здесь $\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = \int f_i(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{kx}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$; функции $g_i \in \mathcal{S}(E^3)$; d — минимальное расстояние между носителями функций $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$; N — произвольное число; C — константа, зависящая от N, но не зависящая от функций $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$; сумма берется по всем перестановкам $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$.]

В самом деле, из соотношения (39.12) можно получить соотношение (39.5) как при $t \leqslant 0$, так и при $t \geqslant 0$. Для

этого следует только заметить, что в силу леммы 2 из § 36 «существенные носители» функций $\tilde{f}_i(\mathbf{x}\,|\,t) = \int \exp(i\mathbf{kx}) \times \times f_i^t(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$ далеки друг от друга при $t \to \pm\infty$. (По этой лемме функция $\tilde{f}_i(\mathbf{x}\,|\,t)$ мала вне множества $tU_\varepsilon^{(i)}$, где $U_\varepsilon^{(i)}$ — ε-окрестность множества $U^{(i)}$, состоящего из точек вида $\frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}$ пробегает $\operatorname{supp} f_i$. Множество $tU_\varepsilon^{(i)}$ естественно назвать «существенным носителем» функции $f_i(\mathbf{x}\,|\,t)$.)

Для того чтобы провести строгое рассуждение, следует ввести гладкие функции $h_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}$, равные 1 на множестве $U_\varepsilon^{(i)}$ и нулю вне множества $U_{2\varepsilon}^{(i)}$. Тогда функции $\tilde{^tr_i} = h_i(t\mathbf{x})\,\tilde{f}_i(\mathbf{x}\,|\,t)$ будут иметь далекие друг от друга носители при $t \to \pm\infty$, и величину $\langle Da^+(\tilde{^tr_1}) \ldots a^+(\tilde{^tr_n})\,\theta, A_1(g_1) \ldots A_n(g_n)\,\Phi\rangle$ можно приближенно вычислить с помощью соотношения (39.12). С другой стороны,

$$a^+(\tilde{f}_1^t) \ldots a^+(\tilde{f}_n^t)\,\theta \approx a^+(\tilde{^tr_1}) \ldots a^+(\tilde{^tr_n})\,\theta$$

в силу леммы 2 § 36. Пользуясь этим замечанием, получаем из соотношения (39.12) соотношение (39.5).

Заметим, что условие $\|D\| = 1$ и здесь можно ослабить, заменив требованием (39.11) или приближенным равенством

$$\|Da^+(\tilde{f}_1) \ldots a^+(\tilde{f}_n)\,\theta\| \approx \|a^+(\tilde{f}_1) \ldots a^+(\tilde{f}_n)\,\theta\|; \quad (39.13)$$

это равенство должно выполняться для любых функций $\tilde{f}_1(\mathbf{x}), \ldots, \tilde{f}_n(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}$, носители которых далеки друг от друга, с ошибкой, не превышающей

$$C\nu^n(f)\, d^{-N}$$

(N — произвольное число, d — минимальное расстояние между носителями, C зависит от N).

Следующее утверждение используется в § 46.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{S}$ и S — матрицы рассеяния, построенные по операторам энергии $\tilde{H}$ и H, оператору импульса $\mathbf{P}$ и семейству операторов $\mathcal{A}$ (это семейство должно быть асимптотически абелевым как относительно операторов $\tilde{H}$, $\mathbf{P}$, так и относительно операторов H, $\mathbf{P}$). Предположим, что T — унитарный оператор, удовлетворяющий условиям:*

а) $T\Phi = \tilde{\Phi}$, б) $T\Phi(\mathbf{k}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{k})$, в) *если* $A \in \mathcal{A}$, *то* $T^{-1}AT \in \mathcal{A}$ (*здесь* Φ *и* $\widetilde{\Phi}$ — *основные состояния*, $\Phi(\mathbf{k})$ *и* $\widetilde{\Phi}(\mathbf{k})$ — *одночастичные состояния соответственно для операторов энергии* H *и* $\widetilde{H}$). *Если* D — *одевающий оператор для оператора энергии* H, *удовлетворяющий условиям теоремы 2, то оператор* $\widetilde{D} = TD$ *является одевающим оператором для оператора энергии* $\widetilde{H}$.

Доказательство этой теоремы состоит в проверке условий теоремы 2 для оператора $\widetilde{D}$. Эта проверка производится с помощью следующих преобразований:

$$\langle \widetilde{D}a^+(\overline{f_1}) \ldots a^+(\overline{f_n})\theta,\ A_1(g_1) \ldots A_n(g_n)\widetilde{\Phi}\rangle =$$
$$= \langle Da^+(\overline{f_1}) \ldots a^+(\overline{f_n})\theta,\ T^{-1}A_1(g_1) \ldots A_n(g_n)TT^{-1}\widetilde{\Phi}\rangle =$$
$$= \langle Da^+(\overline{f_1}) \ldots a^+(\overline{f_n})\theta,\ A_1^T(g_1) \ldots A_n^T(g_n)\Phi\rangle \approx$$
$$\approx \sum_{\pi} \langle \Phi(f_1),\ A_{i_1}^T(g_{i_1})\Phi\rangle \ldots \langle \Phi(f_n),\ A_{i_n}^T(g_{i_n})\Phi\rangle =$$
$$= \sum_{\pi} \langle T\Phi(f_1),\ A_{i_1}(g_{i_1})T\Phi\rangle \ldots \langle T\Phi(f_n),\ A_{i_n}(g_{i_n})T\Phi\rangle =$$
$$= \sum \langle \widetilde{\Phi}(f_1),\ A_{i_1}(g_{i_1})\widetilde{\Phi}\rangle \ldots \langle \widetilde{\Phi}(f_n),\ A_{i_n}(g_{i_n})\widetilde{\Phi}\rangle$$

(здесь использовано обозначение $T^{-1}A_iT = A_i^T$).

Доказанные в этом параграфе утверждения позволяют дать новое определение матриц Мёллера и матрицы рассеяния. Именно, если оператор D удовлетворяет условиям (39.12), (39.13), то матрицы Мёллера можно определить равенствами (39.1), (39.2). Матрица рассеяния, как всегда, может быть определена соотношением $S = S_+^* S_-$; в случае, если матрица рассеяния унитарна, это определение эквивалентно формуле

$$S = S_+^{-1} S_- = \operatorname*{slim}_{\substack{t \to +\infty,\\ t_0 \to -\infty}} \exp(\mathrm{i}\, H_{\mathrm{as}}\, t) D^{-1} \times$$
$$\times \exp(-\mathrm{i}\, H(t - t_0)) D \exp(-\mathrm{i}\, H_{\mathrm{as}}\, t_0). \qquad (39.14)$$

Посмотрим, каким образом формулы (39.1), (39.2), (39.14) связаны с наглядной картиной рассеяния частиц. Будем считать при этом фиксированным оператор D, удовлетворяющий условиям (39.12), (39.13).

Рассмотрим сначала столкновение двух частиц. Одна частица с волновой функцией f описывается вектором

$$\Phi(f) = \int f(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} = Da^+(\overline{f})\theta.$$

Поставим вопрос: какой вектор пространства $\mathcal{H}$ следует сопоставить состоянию, в котором имеются две частицы с волновыми функциями f_1 и f_2?

Прежде чем ответить на этот вопрос, заметим, что постановка его в такой общей форме физически бессмысленна: всегда, когда наблюдаются две (или несколько) частиц и можно найти волновые функции каждой отдельной частицы, мы имеем дело с пространственно разделенными частицами. Поэтому следует установить только, какой вектор пространства нужно сопоставить состоянию, в котором имеются две частицы с такими волновыми функциями $f_1(\mathbf{k})$, $f_2(\mathbf{k})$, что носители функций $\widetilde{f}_1(\mathbf{x})$, $\widetilde{f}_2(\mathbf{x})$ (волновых функций этих частиц в координатном пространстве) далеки друг от друга. При этой суженной постановке вопроса на него можно дать естественный ответ. Именно, такому состоянию разумно сопоставить вектор $Da^+(\overline{f_1})\, a^+(\overline{f_2})\, \theta$. В самом деле, условие (39.12), наложенное на оператор D, как раз соответствует наглядному представлению о состоянии из двух далеких частиц $\Phi(f_1)$ и $\Phi(f_2)$.

Аналогично, вектор $Da^+(\overline{f_1}) \ldots a^+(\overline{f_n})\, \theta$ в случае, если носители функций $\widetilde{f}_1(\mathbf{x}), \ldots, \widetilde{f}_n(\mathbf{x})$ далеки друг от друга, описывает состояние из n пространственно разделенных частиц.

Теперь нетрудно понять, что процесс столкновения двух частиц можно описывать вектором

$$x(t) = \exp(-\mathrm{i}\, Ht)\, S_-\, a^+(\overline{f_1})\, a^+(\overline{f_2})\, \theta,$$

где f_1, f_2 — неперекрывающиеся функции. В самом деле, из соотношения (39.1) видно, что при $t \to -\infty$

$$x(t) \approx D\exp(-\mathrm{i}\, H_{\mathrm{as}}\, t)\, a^+(\overline{f_1})\, a^+(\overline{f_2})\, \theta = Da^+(\overline{f_1^t})\, a^+(\overline{f_2^t})\, \theta,$$

поэтому при $t \to -\infty$ $x(t)$ изображает состояние из двух пространственно разделенных частиц $\Phi(f_1^t)$ и $\Phi(f_2^t)$ (нельзя, правда, сказать, что носители функций $\widetilde{f}_1^t$, $\widetilde{f}_2^t$ далеки друг от друга, но можно утверждать, как уже говорилось выше, что далеки их существенные носители).

В частности, вектор $x(0) = S_- a^+(\overline{f_1})\, a^+(\overline{f_2})\, \theta$ изображает состояние, в котором находится при $t = 0$ система из двух частиц, описываемых при $t \to -\infty$ волновыми функциями f_1^t, f_2^t (если бы каждая из частиц двигалась свободно, они описывались бы при $t = 0$ волновыми функциями f_1 и f_2). Аналогично можно истолковать смысл других векторов вида $S_-\xi$ и $S_+\eta$.

Теперь ясно, что оператор S действительно определяет переход от начального состояния к конечному в процессе рассеяния частиц. В самом деле, если $\eta = S\xi$, то вектор

$$x(t) = \exp(-\mathrm{i}\,Ht)\,S_-\,\xi = \exp(-\mathrm{i}\,Ht)\,S_+\,\eta$$

изображает процесс столкновения, в начале которого (при $t \to -\infty$) имеем дело с состоянием

$$x(t) \approx D\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t)\,\xi,$$

а в конце (при $t \to +\infty$) — с состоянием

$$x(t) \approx D\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t)\,\eta.$$

Посмотрим теперь, каким образом связаны матричные элементы матрицы рассеяния (амплитуды рассеяния) с наблюдаемыми на опыте величинами.

Будем рассматривать ради простоты столкновение двух частиц. Точнее говоря, будем считать, что поток частиц с импульсом $\mathbf{q}$, имеющий единичную плотность, налетает на покоящуюся частицу. В классической механике результат такого процесса рассеяния описывается следующим образом: области G в $3n$-мерном пространстве E^{3n} ставится в соответствие число σ_G — эффективное сечение того, что в конце процесса будет n частиц, импульсы которых $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ образуют $3n$-мерный вектор $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, принадлежащий области G [считаем все получившиеся частицы тождественными; в соответствии с этим область G предполагаем симметричной относительно перестановок, т. е. предполагаем, что вместе с каждым вектором $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ она содержит вектор $(\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_n})$]. Это число показывает, сколько столкновений в секунду завершается образованием n частиц, импульсы которых $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ образуют вектор из области G. В рассматриваемой ситуации также может быть определено эффективное сечение σ_G, обладающее тем же физическим смыслом (с той лишь разницей, что в квантовом случае действуют вероятностные законы и под числом столкновений следует понимать среднее число столкновений).

Покажем, что эффективное сечение σ_G может быть выражено через амплитуды рассеяния следующей формулой:

$$\sigma_G = \frac{1}{n!}\,\frac{1}{|\mathbf{v}(\mathbf{q})|}\int_G |s_{n,2}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{q}, 0)|^2\,\delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{q}) \times$$
$$\times\,\delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{q}) - \omega(0))\,d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n. \qquad (35.15)$$

Здесь $s_{n,k}$ — функции, связанные с матричными элементами $S_{n,k}$ матрицы рассеяния соотношением

$$S_{n,k}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k) = \langle Sa^+(\mathbf{q}_1) \ldots a^+(\mathbf{q}_k)\,\theta,\ a^+(\mathbf{p}_1) \ldots$$
$$\ldots a^+(\mathbf{p}_n)\,\theta\rangle = s_{n,k}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k)\,\delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n -$$
$$-\mathbf{q}_1 - \cdots - \mathbf{q}_k)\,\delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \ldots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{q}_1) - \cdots - \omega(\mathbf{q}_k)) \qquad (39.16)$$

(иногда амплитудами рассеяния называют именно функции $s_{n,k}$). Символом $\mathbf{v}(\mathbf{k})$, как всегда, обозначается функция $\frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}$; считаем, что $\mathbf{v}(0) = 0$. Формула (39.15) доказана ниже в предположении, что $\mathbf{q} \neq 0$ и функция $s_{n,2}$ непрерывна в точках $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{q}, 0)$, где $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \in G$.

Для того чтобы перенести понятие эффективного сечения на рассматриваемый случай, воспользуемся конструкцией, аналогичной построениям, описанным в § 18*.

Именно, будем считать, что процесс столкновения описывается при $t \to -\infty$ вектором $D\exp(-\mathrm{i}H_0t)\,\xi_\alpha$, где

$$\xi_\alpha = \left(\int \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\alpha)\,f(\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}\right)\left(\int g(\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}\right)\theta, \qquad (39.17)$$

$f(\mathbf{k})$ и $g(\mathbf{k})$ — нормированные волновые функции, отличные от нуля лишь в малой окрестности точек $\mathbf{q}$ и 0 соответственно; α — вектор, ортогональный к вектору $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ (введение целого семейства начальных состояний, зависящего от вектора α, отвечает тому, что рассматривается поток частиц с импульсом $\mathbf{q}$).

В соответствии со сказанным выше весь процесс столкновения изображается вектором

$$x_\alpha(t) = \exp(-\mathrm{i}\,Ht)\,S_-\,\xi_\alpha;$$

в конце процесса (при $t \to +\infty$) получаем состояние

$$D\exp(-\mathrm{i}\,H_0\,t)\,(S\xi_\alpha).$$

Вероятность того, что при начальном состоянии (39.17) получим в конечном состоянии $S\xi_\alpha n$ частиц и $3n$-мерный вектор $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, образованный импульсами этих частиц, принадлежащий области G, может быть, очевидно, записана в виде

$$w_\alpha(G) = \frac{1}{n!}\int_G \left|\int d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,S_{n,2}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times\right.$$
$$\left.\times f(\mathbf{k}_1)\exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}_1\alpha)\,g(\mathbf{k}_2)\right|^2 d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n \qquad (39.18)$$

[следует воспользоваться соотношением

$$S\xi_\alpha = \sum_m \frac{1}{m!}\int S_{m,2}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m \mid \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,f(\mathbf{k}_1) \times$$
$$\times \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}_1\alpha)\,g(\mathbf{k}_2)\,a^+(\mathbf{p}_1) \ldots a^+(\mathbf{p}_m)\,\theta\,d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_m\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2].$$

* Вообще, дальнейшие рассуждения во многом близки к проведенным в § 18.

Эффективное сечение σ_G того, что в конечном состоянии будет n частиц с импульсами $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, образующими вектор $(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \in G$, естественно определить формулой*

$$\sigma_G = \int\limits_{\alpha \perp \mathbf{v}(\mathbf{q})} d\alpha w_\alpha (G). \tag{39.19}$$

Подставляя в (39.19) выражение (39.18) и интегрируя по α, видим, что

$$\sigma_G = \frac{1}{n!} \int\limits_G d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n \int d\mathbf{k}_1 \, d\mathbf{k}'_1 \, d\mathbf{k}_2 \, d\mathbf{k}'_2 \, (s_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \bar{s}_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) f(\mathbf{k}_1) \bar{f}(\mathbf{k}'_1) \times$$
$$\times g(\mathbf{k}_2) \bar{g}(\mathbf{k}'_2) \, \delta(\mathbf{k}_1^T - \mathbf{k}_1'^T)) = \frac{1}{n!} \int\limits_G d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n \times$$
$$\times \int d\mathbf{k}_1 \, d\mathbf{k}'_1 \, d\mathbf{k}_2 \, d\mathbf{k}'_2 \, (s_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times$$
$$\times \bar{s}_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2) f(\mathbf{k}_1) \bar{f}(\mathbf{k}'_1) g(\mathbf{k}_2) \bar{g}(\mathbf{k}'_2) \times$$
$$\times \delta(\mathbf{k}_1^T - \mathbf{k}_1'^T) \, \delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \, \delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n -$$
$$- \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2) \, \delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)) \times$$
$$\times \delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{k}'_1) - \omega(\mathbf{k}'_2)) \tag{39.20}$$

[здесь символами $\mathbf{k}_1^T$, $\mathbf{k}_1'^T$ обозначены проекции векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}'_1$ на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{v}(\mathbf{q})$].

Дальнейшие преобразования проведем с помощью следующих соотношений:

$$\delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \, \delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2) =$$
$$= \delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \, \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2);$$
$$\delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)) \, \delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots$$
$$\cdots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{k}'_1) - \omega(\mathbf{k}'_2)) = \delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) -$$
$$- \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)) \, \delta(\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}'_1) - \omega(\mathbf{k}'_2));$$
$$\delta(\mathbf{k}_1^T - \mathbf{k}_1'^T) \, \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2) \, \delta(\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}'_1) - \omega(\mathbf{k}'_2)) =$$
$$= \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{q})|}{(\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{k}_2)) \, \mathbf{v}(\mathbf{q})} \, \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) \, \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2) +$$
$$+ \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \, \delta(\mathbf{k}'_1 - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)) \, \delta(\mathbf{k}'_2 - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)),$$

* Строго говоря, эта формула содержит еще предельный переход: вероятности $w_\alpha(G)$ следует определять с помощью функций $f_\nu(\mathbf{k})$, $g_\nu(\mathbf{k})$, носители которых стягиваются соответственно к точкам $\mathbf{q}$, 0 при $\nu \to \infty$.

где $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ — нетривиальное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\boldsymbol{\beta}) - \omega(\boldsymbol{\gamma}) = 0; \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} = 0; \\ \mathbf{k}_1^T - \boldsymbol{\beta}^T = 0 \end{cases}$$

(т. е. решение, отличное от $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}_1$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{k}_2$).

Пользуясь написанными формулами, преобразуем выражение (39.20) к виду

$$\sigma_G = \frac{1}{n!} \int\limits_G d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n \int d\mathbf{k}_1 \, d\mathbf{k}_2 \left(\frac{|\mathbf{v}(\mathbf{q})|}{(\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{k}_2)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q})} \times \right.$$
$$\times |s_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 \, |f(\mathbf{k}_1)|^2 \, |g(\mathbf{k}_2)|^2 \times$$
$$\times \delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \, \delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) -$$
$$\left. - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)) \right) + \frac{1}{n!} \int\limits_G d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_n \int d\mathbf{k}_1 \, d\mathbf{k}_2 \, (s_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{p}_n \mid \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \bar{s}_{n,2} (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \mid \boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)) \times$$
$$\times f(\mathbf{k}_1) \bar{f}(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)) g(\mathbf{k}_2) \bar{g}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)) \, \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times$$
$$\times \delta(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \, \delta(\omega(\mathbf{p}_1) + \cdots + \omega(\mathbf{p}_n) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2))).$$

Чтобы получить окончательное выражение для σ_G, достаточно воспользоваться тем, что для нормированной функции $f(\mathbf{k})$ с носителем в малой окрестности точки $\mathbf{q}$ и функции $\lambda(\mathbf{k})$, непрерывной в точке $\mathbf{q}$, имеют место соотношения

$$\int \lambda(\mathbf{k}) \, |f(\mathbf{k})|^2 \, d\mathbf{k} = \lambda(\mathbf{q}); \qquad \int \lambda(\mathbf{k}) \, f(\mathbf{k}) \bar{f}(\rho(\mathbf{k})) \, d\mathbf{k} = 0 \tag{39.21}$$

(в формулах (39.21) подразумевается предельный переход, в процессе которого носитель функции $f(\mathbf{k})$ стягивается к точке $\mathbf{q}$; $\rho(\mathbf{k})$ — функция, непрерывная в точке $\mathbf{q}$ и удовлетворяющая условию $\rho(\mathbf{q}) \neq \mathbf{q}$).

§ 40. Обобщения

n° 1. Прежде всего укажем обобщение понятия асимптотически абелевой алгебры, позволяющее рассматривать асимптотически абелевы алгебры, содержащие неограниченные операторы.

Предположим, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действуют оператор энергии H и оператор импульса $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$. Будем считать, как всегда, что H, P_1, P_2, P_3 —

коммутирующие самосопряженные операторы, спектр которых удовлетворяет условиям, перечисленным в § 36.

Фиксируем линейное многообразие D, всюду плотное в $\mathscr{H}$, содержащее основное состояние Φ оператора энергии H и инвариантное относительно операторов вида $\exp(iHt - iPx)$. (В настоящем параграфе эти условия на операторы H, $\mathbf{P}$ и множество D все время предполагаются выполненными.) Семейство $\mathcal{A}$, состоящее из операторов, определенных на множестве D и переводящих это множество в себя, будем называть *асимптотически абелевой алгеброй*, если:

C1. Вместе с каждым оператором $A \in \mathcal{A}$ семейству $\mathcal{A}$ принадлежат операторы A^+ и $A(\mathbf{x}, t)$; вместе с каждыми двумя операторами $A, B \in \mathcal{A}$ семейству $\mathcal{A}$ принадлежат их линейные комбинации $\lambda A + \mu B$ и произведение AB.

C2. Для любых операторов $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ и произвольной функции $f \in \mathscr{S}(E^{4r})$ оператор

$$\int f(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r) A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_r(\mathbf{x}_r, t_r) d^r\mathbf{x}\, d^r t \tag{40.1}$$

принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ и число

$$\left\langle \int f(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r) A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_r(\mathbf{x}_r, t_r) d^r\mathbf{x}\, d^r t\, \Phi, \Phi \right\rangle \tag{40.2}$$

непрерывно зависит от функции $f \in \mathscr{S}$ (интеграл в (40.1) понимается в слабом смысле)*.

C3. Для любых операторов $A, B, A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ и произвольного n найдутся такие числа C и s, что

$$\begin{gathered} |\langle [A(\mathbf{x}, t), B] A_1(\xi_1, \tau_1) \ldots A_j(\xi_j, \tau_j) \Phi, \\ A_{j+1}(\xi_{j+1}, \tau_{j+1}) \ldots A_r(\xi_r, \tau_r) \Phi\rangle| \leqslant \\ \leqslant \frac{C(1+|t|^s)}{1+|\mathbf{x}|^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{r} |\xi_i| + \sum_{i=1}^{r} |\tau_i|\right)^k, \end{gathered} \tag{40.3}$$

где k — число, не зависящее от n.

Предположим, что вектор Φ является циклическим вектором асимптотически абелевой алгебры $\mathcal{A}$. Тогда с помощью рассуждений предыдущих параграфов этой главы можно дать определение матриц Мёллера и матрицы рассеяния, соответствующих операторам H, $\mathbf{P}$ и алгебре $\mathcal{A}$,

---

* Вторая часть условия C2 означает, что функция $\langle A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_r(\mathbf{x}_r, t_r)\Phi, \Phi\rangle$ является локально суммируемой функцией, имеющей не более чем степенной рост.

доказать их существование и перенести на рассматриваемый случай все результаты этих параграфов. (Практически все определения, теоремы и доказательства не требуют сколько-нибудь существенных модификаций.)

Дополним эти результаты следующим утверждением, которое используется в § 45.

Пусть $B(\mathbf{k}|t)$ — операторная функция, обобщенная по переменной $\mathbf{k}$ и удовлетворяющая условиям:

а) $\exp(iH\tau - i\mathbf{Pa}) B(\mathbf{k} \mid t) \exp(-iH\tau + i\mathbf{Pa}) = \exp(-i\mathbf{ka}) \times B(\mathbf{k} \mid t + \tau)$;

б) $B^+(\mathbf{k} \mid t)\Phi = 0$;

в) векторы вида $\int f(\mathbf{k}) B(\mathbf{k} \mid t) d\mathbf{k}\, \Phi$ принадлежат одночастичному подпространству;

г) функция $\rho_{m,n}$, определяемая равенством

$$\begin{gathered} \rho_{m,n}(\mathbf{k}_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_m, t_m | \mathbf{k}'_1, t'_1, \ldots, \mathbf{k}'_{n-1}, t'_{n-1}) \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_m - \varepsilon_1 \mathbf{k}'_1 - \cdots - \varepsilon_n \mathbf{k}'_n) = \\ = \langle A_1(\mathbf{k}_1 \mid t_1) \ldots A_m(\mathbf{k}_m \mid t_m) B(\mathbf{k}'_1, \varepsilon_1 \mid t'_1) \ldots B(\mathbf{k}'_n, \varepsilon_n \mid 0)\rangle^T, \end{gathered}$$

где $A_i(\mathbf{k} \mid t) = (2\pi)^{-3} \int A_i(\mathbf{x}, t) \exp(i\mathbf{kx}) d\mathbf{x}$; $A_i \in \mathcal{A}$; $B(\mathbf{k}, 1|t) = B^+(\mathbf{k}|t)$; $B(\mathbf{k}, -1|t) = B(\mathbf{k}|t)$, принадлежит пространству $\mathscr{S}(E^{3(m+n-1)})$ по переменным $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_1, \ldots, \mathbf{k}'_{n-1}$ при фиксированных $t_1, \ldots, t_m, t'_1, \ldots, t'_{n-1}$. [Такие обобщенные функции будем называть правильными; это название мотивируется тем, что по каждому правильному оператору B можно построить правильную операторную обобщенную функцию $B(\mathbf{k}|t) = (2\pi)^{-3} \int B(\mathbf{x}, t) \times \exp(i\mathbf{kx}) d\mathbf{x}$.] Тогда для любой системы гладких финитных функций $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_m(\mathbf{k})$

$$\lim_{t \to \pm\infty} B(f_1^t \mid t) \ldots B(f_n^t \mid t)\Phi = S_\pm a^+(\bar{\varphi} \bar{f}_1) \ldots a^+(\bar{\varphi} \bar{f}_n)\theta,$$

где

$$\begin{gathered} f_i^t(\mathbf{k}) = f_i(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})t); \\ B(f_i^t \mid t) = \int f_i^t(\mathbf{k}) B(\mathbf{k} \mid t) d\mathbf{k}; \\ B(\mathbf{k} \mid 0)\Phi = \varphi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}). \end{gathered}$$

Доказательство этого утверждения повторяет рассуждения, высказанные в § 36.

Дадим теперь определение асимптотически абелева семейства операторных обобщенных функций.

Семейство $\mathscr{B}$ операторных обобщенных функций $A(\mathbf{x}, t)$ называется асимптотически абелевым, если существует асимптотически абелева алгебра $\mathcal{A}$, содержащая все операторы вида $A(f) = \int f(\mathbf{x}, t) A(\mathbf{x}, t)\,dxdt$, где $A(\mathbf{x}, t)$ принадлежит семейству $\mathscr{B}$, $f \in \mathscr{S}(E^4)$. (Предполагаем, что вектор Φ является циклическим вектором семейства операторов $A(f)$. Операторы $A(f)$ должны иметь общую область определения D и переводить ее в себя; область определения D' операторов, принадлежащих алгебре $\mathscr{A}$, может не совпадать с множеством D, но должна содержать это множество. Говоря, что алгебра $\mathscr{A}$ содержит оператор $A(f)$, имеем в виду, что в этой алгебре можно найти оператор, совпадающий с $A(f)$ на множестве D.)

Матрица рассеяния, соответствующая операторам H, $\mathbf{P}$ и асимптотически абелеву семейству операторных обобщенных функций $\mathscr{B}$, может быть определена как матрица рассеяния, построенная по H, $\mathbf{P}$ и асимптотически абелевой алгебре $\mathscr{A}$, содержащей все операторы $A(f)$. (Легко видеть, что эта матрица рассеяния не зависит от выбора алгебры $\mathscr{A}$.) Аналогично определяются матрицы Мёллера.

Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы семейство операторных обобщенных функций было асимптотически абелевым.

Пусть семейство $\mathscr{B}$ операторных обобщенных функций удовлетворят условиям:

Д1. Для любой операторной обобщенной функции $A(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{B}$ операторы $A(f) = \int f(\mathbf{x}, t) A(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}dt$, где $f \in \mathscr{S}(E^4)$, определены на множестве D и переводят это множество в себя.

Д2. Функционал $\langle A(f)\psi_1, \psi_2\rangle$, где $A \in \mathscr{B}$, ψ_1, $\psi_2 \in D$, $f \in \mathscr{S}(E^4)$, непрерывно зависит от функции $f \in \mathscr{S}(E^4)$ (т. е. числовая обобщенная функция $\langle A(\mathbf{x}, t)\psi_1, \psi_2\rangle$ является обобщенной функцией умеренного роста).

Д3. Если $A \in \mathscr{B}$, то

$$\exp(\mathrm{i}H\tau - \mathrm{i}\mathbf{Pa}) A(\mathbf{x}, t) \exp(-\mathrm{i}H\tau + \mathrm{i}\mathbf{Pa}) = A(\mathbf{x}+\mathbf{a}, t+\tau).$$

Д4. Вместе с каждой функцией $A(\mathbf{x}, t)$ в семействе $\mathscr{B}$ содержится сопряженная обобщенная операторная функция $A^+(\mathbf{x}, t)$.

Д5. Для любых обобщенных операторных функций $A_1(\mathbf{x}, t)$, ..., $A_r(\mathbf{x}, t)$, $A(\mathbf{x}, t)$, $\mathscr{B}(\mathbf{x}, t)$ из семейства $\mathscr{B}$ найдется такое $\delta > 0$, что числовая обобщенная функция

$$T(\mathbf{x}, t, \xi_1, \tau_1, \ldots, \xi_r, \tau_r) = \langle [A(\mathbf{x}+\mathbf{a}, t+\alpha), B(\mathbf{a}, \alpha)] A_1(\xi_1, \tau_1)\ldots$$
$$\ldots A_j(\xi_j, \tau_j)\Phi,\ A_{j+1}(\xi_{j+1}, \tau_{j+1})\ldots A_r(\xi_r, \tau_r)\Phi\rangle$$

в области, выделяемой неравенством $|t| < \delta\,|\mathbf{x}|$, может быть представлена в виде

$$T(\mathbf{x}, t, \xi_1, \tau_1, \ldots, \xi_n, \tau_n) = \sum_{|\alpha| \leqslant N(n)} D^{(\alpha)}\left[\left(1 + \sum_i |\xi_i|^2 + \sum_i |\tau_i|^2\right)^k \times \right.$$
$$\left. \times (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-n} \sigma_{\alpha, n}(\mathbf{x}, t, \xi_1, \tau_1, \ldots, \xi_n, \tau_n)\right]$$

(здесь n — произвольное натуральное число; $\sigma_{\alpha, n}$ — ограниченная непрерывная функция; $D^{(\alpha)}$ — дифференциальный оператор порядка $|\alpha|$ с постоянными коэффициентами; k — число, не зависящее от n).

Д6. Вектор Φ — циклический вектор семейства операторов $A(f)$, где $A(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{B}$, $f \in \mathscr{S}(E^4)$.

Тогда семейство $\mathscr{B}$ асимптотически абелево.

Для того чтобы доказать эту теорему, рассмотрим семейство $\mathscr{A}$, состоящее из линейных комбинаций операторов вида

$$\int f(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t_n) A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_n(\mathbf{x}_n, t_n)\, d^n\mathbf{x} d^n t, \quad (40.4)$$

где $f \in \mathscr{S}(E^{4n})$, $A_i(\mathbf{x}, t) \in \mathscr{B}$. Как показано в дополнении (§ Д.7), выражения вида (40.4) можно рассматривать как операторы, определенные на некотором линейном многообразии D' и переводящие D' в себя (в качестве многообразия D' следует взять множество всех векторов вида $A\Psi$, где $A \in \mathscr{A}$; $\Psi \in D$; на множестве D выражение вида (40.4) определяет оператор в силу операторного аналога теоремы о ядре). Легко видеть, что множество D' содержит множество D и инвариантно относительно операторов $\exp(\mathrm{i}Ht - \mathrm{i}\mathbf{Pa})$.

Нетрудно проверить, что семейство $\mathscr{A}$, рассматриваемое как семейство операторов, определенных на множестве D', асимптотически абелево. Условия С1 и С2 с помощью доказанных в § Д.7 дополнения утверждений проверяются без труда. Например, если $A \in \mathscr{A}$ — оператор вида (40.4), то операторы

$$A^+ = \int \bar{f}(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t_n) A_n^+(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_1^+(\mathbf{x}_n, t_n)\, d^n\mathbf{x} d^n t;$$

$$A(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, t_1 - t, \ldots, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}, t_n - t) \times$$
$$\times A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_n(\mathbf{x}_n, t_n)\, d^n\mathbf{x}\, d^n t$$

также содержатся в множестве $\mathscr{A}$. Неравенство (40.3) вытекает из условия Д5.

Приведем простейший пример объектов, удовлетворяющих условиям аксиоматической теории рассеяния.

Рассмотрим в фоковском пространстве $\mathscr{H} = F(L^2(E^3))$ свободный гамильтониан $H_0 = \int \varepsilon(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$ и оператор импульса $\mathbf{p} = \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$. Если $\varepsilon(\mathbf{k})$ — гладкая строго выпуклая функция, удовлетворяющая требованию $\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2) > \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$, то спектр этих операторов удовлетворяет условиям, наложенным в § 36. [Основным состоянием является фоковский вакуум θ, а одночастичное состояние определяется формулой $\Phi(\mathbf{k}) = a^+(\mathbf{k})\,\theta$.] Пространство $\mathscr{H}_{\mathrm{as}}$ можно здесь отождествить с пространством $\mathscr{H}$; гамильтониан H_{as} при этом отождествлении переходит в гамильтониан H_0.

Операторные обобщенные функции

$$a^+(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, a^+(\mathbf{k}, t)\, d\mathbf{k};$$

$$a(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, a(\mathbf{k}, t)\, d\mathbf{k},$$

где

$$a^+(\mathbf{k}, t) = \exp(\mathrm{i}\, H_0 t)\, a^+(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\, H_0 t) = \\ = \exp(\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{k})\, t)\, a^+(\mathbf{k});$$

$$a(\mathbf{k}, t) = \exp(\mathrm{i}\, H_0 t)\, a(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\, H_0 t) = \exp(-\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})\, t)\; a(\mathbf{k}),$$

образуют асимптотически абелево семейство $\mathcal{B}_0$ обобщенных функций (как обычно, считаем, что эти операторные обобщенные функции действуют в линейном многообразии $\mathcal{S}_\infty$, составленном из векторов вида

$$\sum_n \int \varphi_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)\, a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_n)\, \theta d^n\mathbf{k},$$

где функции φ_n принадлежат пространству $\mathcal{S}$ и лишь конечное число этих функций отлично от нуля). Асимптотическую абелевость семейства $\mathcal{B}_0$ можно проверить с помощью доказанной выше теоремы. Другое доказательство асимптотической абелевости семейства $\mathcal{B}_0$ можно получить, если заметить, что операторы вида

$$\int f(\mathbf{x}, t)\, a^+(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}\, dt \text{ и } \int f(\mathbf{x}, t)\, a(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}\, dt,$$

где $f \in \mathcal{S}(E^4)$, содержатся в асимптотически абелевой алгебре $\mathcal{A}_0$, состоящей из операторов вида

$$\sum_{m,n} \int f_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)\, a^+(\mathbf{k}_1) \ldots \\ \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p}, \tag{40.5}$$

где $f_{m,n} \in \mathcal{S}(E^{3(m+n)})$, сумма в (40.5) конечна, операторы вида (40.5) рассматриваются как операторы, определенные на множестве $\mathcal{S}_\infty$. Асимптотическая абелевость алгебры $\mathcal{A}_0$ легко проверяется непосредственно; она будет следовать также из результатов, которые сформулированы ниже. Без труда можно убедиться, что матрицы Мёллера $S_\pm$ и матрица рассеяния S, построенные по операторам H_0, $\mathbf{P}$ и семейству $\mathcal{A}_0$, тривиальны (являются тождественными операторами).

Иногда удобно бывает считать, что асимптотически абелева алгебра снабжена топологией (это будет полезно в § 41 и 46). Укажем сейчас требования, которые следует предъявить к топологической алгебре операторов, чтобы она оказалась асимптотически абелевой.

Будем считать, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы по-прежнему оператор энергии H, оператор импульса $\mathbf{P}$ и линейное многообразие D, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, и рассмотрим множество операторов $\mathcal{A}$, подчиненное следующим требованиям.

Т1. Множество $\mathcal{A}$ состоит из операторов, определенных на множестве D и переводящих это множество в себя.

Т2. Множество $\mathcal{A}$ содержит вместе с двумя любыми операторами A, B их линейные комбинации $\lambda A + \mu B$ (т. е. может рассматриваться как линейное пространство), их произведение AB (это означает, что $\mathcal{A}$ является алгеброй операторов) и сопряженные операторы A^+, B^+.

Т3. Линейное пространство $\mathcal{A}$ снабжено локально выпуклой топологией; пространство $\mathcal{A}$ должно быть полным, а произведение операторов и переход к сопряженному оператору должны быть непрерывны в топологии $\mathcal{A}$*.

Т4. Вектор $A\Phi \in \mathcal{H}$ непрерывно зависит от $A \in \mathcal{A}$ в топологии алгебры $\mathcal{A}$ [т. е. найдется такая полунорма $p(A)$ в $\mathcal{A}$, что

$$\|A\Phi\| \leqslant p(A)].$$

Т5. Если $A \in \mathcal{A}$, то оператор $A(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{A}$ и непрерывно зависит от $\mathbf{x}$, t в топологии $\mathcal{A}$; для любой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$ и любого компактного множества $F \subset \mathcal{A}$ должна найтись такая полунорма $q(A)$ и такое число k, что для $A \in F$, $\mathbf{x} \in E^3$, $-\infty < t < \infty$

$$p(A(\mathbf{x}, t)) \leqslant (1 + |\mathbf{x}|^k + |t|^k)\, q(A).$$

Т6. Для любой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$, любого компактного множества $F \subset \mathcal{A}$ и произвольного натурального числа n существует такая полунорма $q(A)$, что

$$p([A(\mathbf{x}), B]) \leqslant \frac{q(A)\, q(B)}{1 + |\mathbf{x}|^n}$$

для всех A, $B \in F$, $\mathbf{x} \in E^3$.

(Если локально выпуклая топология в $\mathcal{A}$ задана фундаментальной системой полунорм $\|A\|_\alpha$, то условия Т5 и Т6 можно переформулировать, сказав, что для всякой полунор-

* Условия Т1—Т3 можно кратко сформулировать, сказав, что множество $\mathcal{A}$ должно быть полной локально выпуклой топологической алгеброй с инволюцией.

мы $\| A \|_\alpha$, компакта $F \subset \mathcal{A}$ и натурального n должны существовать полунорма $\| A \|_\lambda$ из этой фундаментальной системы и числа k, C, для которых

$$\| A(\mathbf{x}, t) \|_\alpha \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|^k + |t|^k) \| A \|_\lambda,$$

$$\| [A(\mathbf{x}), B] \|_\alpha \leqslant \frac{C \| A \|_\lambda \| B \|_\lambda}{1 + |\mathbf{x}|^n}$$

при A, $B \in F$.)

T7. Вектор Φ — циклический вектор семейства операторов $\mathcal{A}$.

Имеет место следующее утверждение:

Семейство операторов $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям T1—T6, является асимптотически абелевой алгеброй.

В самом деле, из условий T1, T2 вытекает условие C1. Чтобы проверить условие C2, заметим, что для любых $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ оператор $A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_n(\mathbf{x}_n, t_n)$ непрерывно зависит от $\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t_n$ в топологии и для всякой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$ найдется такое число k, что

$$p(A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_n(\mathbf{x}_n, t_n)) \leqslant 1 + |\mathbf{x}|^k + |t|^k \qquad (40.6)$$

(это следует из условий T3 и T5). Сделанные замечания и полнота алгебры $\mathcal{A}$ позволяют утверждать, что интеграл (40.1) сходится в топологии $\mathcal{A}$ и определяет элемент алгебры $\mathcal{A}$. Из условия T4 и оценки (40.6) вытекает, что

$$\langle A_1(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots A_n(\mathbf{x}_n, t_n) \Phi, \Phi \rangle$$

— непрерывная функция от $\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t_n$, растущая не быстрее некоторой степени. Это доказывает вторую часть условия C2. Наконец, с помощью условий T3—T6 без труда проверяем условие C3.

Доказанное утверждение позволяет сказать, что условия T1—T7 достаточны для того, чтобы по операторам H, $\mathbf{P}$ и алгебре $\mathcal{A}$ построить теорию рассеяния.

Вернемся теперь к рассмотрению операторов $H_0 = \int \varepsilon(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$, $\mathbf{P} = \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$ и алгебры $\mathcal{A}_0$, состоящей из операторов вида (40.5). Покажем, что алгебру можно снабдить топологией таким образом, чтобы были выполнены условия T1—T7. Алгебра $\mathcal{A}_0$ может быть

представлена как объединение линейных пространств $\mathcal{A}_{(m, n)}$, состоящих из операторов вида

$$A = \int f_{m, n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m) a(\mathbf{p}_1) \ldots$$
$$\ldots a(\mathbf{p}_n) d^m \mathbf{k}\, d^n \mathbf{p}.$$

Элементы пространства $\mathcal{A}_{(m, n)}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями из пространства $\mathcal{S}(E^{3(m+n)})$; это позволяет перенести в пространство $\mathcal{A}_{(m, n)}$ топологию пространства $\mathcal{S}(E^{3(m+n)})$. Таким образом, $\mathcal{A}_{(m, n)}$ можно рассматривать как полное локально выпуклое пространство.

В алгебре $\mathcal{A}_0$ рассмотрим систему полунорм, которые являются непрерывными функциями на каждом из пространств $\mathcal{A}_{(m, n)} \subset \mathcal{A}_0$. Эта система полунорм определяет в $\mathcal{A}_0$ топологию, которая носит название *топологии индуктивного предела*; алгебра $\mathcal{A}_0$ полна в этой топологии (см., например, [53]).

Нетрудно проверить, что алгебра $\mathcal{A}_0$ с введенной только что топологией удовлетворяет условиям T1—T7. Проверка условий T5 и T6 производится с помощью следующих аналитических лемм.

Лемма 1. Для всякой нормы $\| f \|_{\alpha, \beta}$ в пространстве $\mathcal{S}(E^{3(m+n)})$ можно найти такую норму $\| f \|_{\gamma, \delta}$ в $\mathcal{S}$ и такие числа C, k, что для любой функции $f \in \mathcal{S}(E^{3(m+n)})$

$$\| U_t V_{\mathbf{x}} f \|_{\alpha, \beta} \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|^k + |t|^k) \| f \|_{\gamma, \delta}$$

[здесь $V_{\mathbf{x}}$ и U_t обозначают операторы в $\mathcal{S}(E^{3(m+n)})$, переводящие функцию $f(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ соответственно в функции

$$\exp\left(\left(i \sum_{j=1}^{m} \mathbf{k}_j - t \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j\right) \mathbf{x}\right) f(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n);$$

$$\left. \exp\left(-i\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon(\mathbf{k}_j) - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(\mathbf{p}_j)\right) t\right) f(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \right].$$

Лемма 2. Для всякой нормы $\| f \|_{\alpha, \beta}$ в пространстве $\mathcal{S}(E^{3(m+m'+n+n'-2r)})$ и любого N найдутся такие нормы $\| f \|_{\gamma, \delta}$ и $\| f \|_{\gamma', \delta'}$ в пространствах $\mathcal{S}(E^{3(m+n)})$ и $\mathcal{S}(E^{3(m'+n')})$ и такое число C, что

$$\| \lambda_r(V_{\mathbf{x}} f, g) \|_{\alpha, \beta} \leqslant \frac{C}{1 + |\mathbf{x}|^N} \| f \|_{\gamma, \delta} \| g \|_{\gamma', \delta'}.$$

[Здесь $r > 0$, $\lambda_r(f, g)$ обозначает функцию

$$\int f(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-r}, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r) \times$$

$$\times g(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r, \mathbf{k}'_1, \ldots \mathbf{k}'_{m'-r} \mid \mathbf{p}'_1, \ldots, \mathbf{p}'_{n'})\, d\mathbf{q}_1 \ldots d\mathbf{q}_r.]$$

Из леммы 1 вытекает, очевидно, что для любой полунормы $p(A)$ в пространстве $\mathscr{A}_{(m,n)}$ найдется такая полунорма $q(A)$ в $\mathscr{A}_{(m,n)}$ и такое число k, что для любого оператора $A \in \mathscr{A}_{m,n}$ выполнено соотношение

$$p(A(\mathbf{x}, t)) \leqslant (1 + |\mathbf{x}|^k + |t|^k) q(A).$$

Из леммы 2 следует, что для любой полунормы $p(A)$ в пространстве $\mathscr{A}_0$ и любого N найдутся такие полунормы $q(A)$ и $q'(A)$ в пространствах $\mathscr{A}_{(m,n)}$ и $\mathscr{A}_{(m',n')}$, что для любых $A \in \mathscr{A}_{(m,n)}$, $B \in \mathscr{A}_{(m',n')}$, будет выполнено неравенство

$$p([A(\mathbf{x}), B]) \leqslant \frac{q(A)\, q'(B)}{1 + |\mathbf{x}|^N}.$$

Для того чтобы завершить проверку условий T5 и T6, остается теперь заметить, что каждое компактное подмножество алгебры $\mathscr{A}_0$ содержится в прямой сумме конечного числа подпространств $\mathscr{A}_{(m,n)}$ (см. [53]).

Таким образом, алгебра $\mathcal{A}_0$ удовлетворяет условиям T1—T7; как было замечено выше, из этого вытекает ее асимптотическая абелевость.

n° 2. До сих пор рассматривалась ситуация, когда имеется только одно одночастичное состояние. Обобщение на случай любого числа одночастичных состояний производится без труда.

Правильный оператор B можно тогда определить как такой гладкий оператор, что: 1) $B^*\Phi = 0$; 2) найдется частица $\Phi_i(\mathbf{k})$ и функция $\varphi_B(\mathbf{k})$, для которых $B\Phi = \Phi_i(\varphi_B) = \int \varphi_B(\mathbf{k})\, \Phi_i(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$. [Напомним, что в § 36 условились фиксировать полную ортогональную систему частиц $\Phi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Phi_s(\mathbf{k})$.]

Изменения в формулировках и доказательствах сводятся в основном к появлению некоторого количества дополнительных индексов; пожалуй, наиболее существенным изменением является необходимость заменить в формулировке леммы 1 слова «всюду плотным» на слово «тотальным».

Легко убедиться, что матрицы Мёллера и матрицы рассеяния не зависят от выбора полной системы частиц (т. е. определяются только операторами H, $\mathbf{P}$ и алгеброй $\mathcal{A}$).

n° 3. Все построения этой главы можно с соответствующими видоизменениями перенести на случай, когда на семейство операторов $\mathcal{A}$, действующих в пространстве $\mathscr{H}$, наложено вместо требования асимптотической коммутативности требование асимптотической антикоммутативности (т. е. для двух любых операторов A, $B \in \mathcal{A}$ и любого n найдутся такие C и r, что

$$\|[A, B(\mathbf{x}, t)]_+\| \leqslant C\, \frac{1 + |t|^r}{1 + |\mathbf{x}|^n}\Big).$$

Если рассматривается асимптотически антикоммутативное семейство $\mathcal{A}$, наложим еще дополнительное условие, что всякий вектор вида $A_1 \ldots A_{2k+1}\Phi$, где $A_i \in \mathcal{A}$, ортогонален вакууму Φ (это условие не является необходимым для построения матрицы рассеяния). Пространство $\mathscr{H}$ можно разбить тогда в прямую сумму двух подпространств $\mathscr{H}_g$ и $\mathscr{H}_u$ таким образом, что вектор $A_1 \ldots A_n\Phi$ принадлежит к пространству $\mathscr{H}_g$, если n четно, и к пространству $\mathscr{H}_u$, если n нечетно. Векторы из пространств $\mathscr{H}_g$ и $\mathscr{H}_u$ будем называть соответственно четными и нечетными.

Обозначим символом $\tilde{\mathcal{A}}$ наименьшую алгебру операторов, содержащую семейство $\mathcal{A}$. Алгебра $\tilde{\mathcal{A}}$ как линейное пространство может быть представлена в виде прямой суммы $\tilde{\mathcal{A}}_g + \tilde{\mathcal{A}}_u$, причем всякий оператор $A \in \tilde{\mathcal{A}}_g$ асимптотически коммутирует с любым оператором $B \in \tilde{\mathcal{A}}$, а всякий оператор $A \in \tilde{\mathcal{A}}_u$ асимптотически антикоммутирует с любым оператором $B \in \tilde{\mathcal{A}}_u$ (в этом нетрудно убедиться, если заметить, что оператор $A_1 \ldots A_m$ и оператор $B_1 \ldots B_n$, где $A_i \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{A}$, асимптотически коммутируют в случае, когда одно из чисел m, n четно, и асимптотически антикоммутируют в случае, если оба числа m и n нечетны). Операторы из семейства $\tilde{\mathcal{A}}_g$ будем называть четными, операторы из семейства $\tilde{\mathcal{A}}_u$ — нечетными. Легко видеть, что четный оператор сохраняет четность векторов (т. е. переводит пространства $\mathscr{H}_g$ и $\mathscr{H}_u$ в себя), а нечетный оператор переводит четный вектор в нечетный и нечетный вектор — в четный.

Полную систему частиц $\Phi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Phi_s(\mathbf{k})$ будем считать выбранной таким образом, чтобы каждая из частиц имела определенную четность. Иными словами, частицы делятся на четные, для которых векторы $\Phi_i(f) \in \mathcal{H}_g$, и нечетные, для которых векторы $\Phi_i(f) \in \mathcal{H}_u$. Четные частицы следует считать бозонами, нечетные — фермионами. Это означает, что пространство $\mathcal{H}_{\text{as}}$ следует сконструировать как пространство фоковского представления соотношений

$$[a_i(\mathbf{k}), a_j(\mathbf{k}')]_{\mp} = [a_i^+(\mathbf{k}), a_j^+(\mathbf{k}')]_{\mp} = 0;$$

$$[a_i(\mathbf{k}), a_j^+(\mathbf{k}')]_{\mp} = \delta_j^i \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

где антикоммутаторы берутся в случае, когда обе частицы $\Phi_i(\mathbf{k})$, $\Phi_j(\mathbf{k})$ нечетны, а коммутаторы — в остальных случаях. Можно сказать, что

$$\mathcal{H}_{\text{as}} = F^s(L^2(E^3 \times N_1)) \otimes F^a(L^2(E^3 \times N_2)),$$

где N_1 — множество четных частиц, N_2 — множество нечетных частиц.

При данных в этом пункте определениях построение матрицы рассеяния происходит практически так же, как и в случае, когда семейство $\mathcal{A}$ асимптотически коммутативно.

Описанная ситуация соответствует случаю, когда элементарными частицами являются фермионы, а бозоны появляются только как составные частицы. Если элементарными частицами могут быть как фермионы, так и бозоны, семейство $\mathcal{A}$ должно быть объединением асимптотически коммутативного семейства $\mathcal{A}_1$ и асимптотически антикоммутативного семейства $\mathcal{A}_2$, причем любой оператор из $\mathcal{A}_1$ должен асимптотически коммутировать с любым оператором из $\mathcal{A}_2$.

Все результаты гл. 10 так же, как и результаты следующих глав, без труда переносятся на случай, когда среди рассматриваемых частиц есть фермионы. Не будем останавливаться на необходимых при этом изменениях формулировок.

n° 4. Выше предполагалось, что одночастичный спектр не пересекается с многочастичным (иными словами, что законы сохранения энергии и импульса запрещают распад частицы). Это требование выполнено не всегда. Однако в теории элементарных частиц если частица стабильна, то ее распад во всех известных случаях запрещен либо одними законами сохранения энергии и импульса, либо этими законами в комбинации с какими-либо другими законами сохранения. В этой ситуации можно доказать тем же способом все сформулированные выше результаты. Точнее, в аксиоматической теории рассеяния достаточно считать, что пространство $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму инвариантных относительно операторов H, $\mathbf{P}$ подпространств $\mathcal{N}_i$ таким образом, что при каждом i спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в подпространстве $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{N}_i$ не пересекается со спектром этих операторов в подпространстве $M \cap \mathcal{N}_i$ (здесь M — многочастичное подпространство). При этом, однако, нужно усилить требование цикличности, предположив, что векторы вида $A\Phi$, где $A \in \mathcal{A}$, плотны в каждом из пространств $\mathcal{N}_i$.

n° 5. Требование строгой выпуклости, наложенное на закон дисперсии $\omega(\mathbf{p})$, можно существенно ослабить. Именно, достаточно потребовать, чтобы ни на каком открытом множестве $G \subset E^3$ функция $\omega(\mathbf{p})$ не была линейной (т. е. чтобы в любой окрестности всякой точки $\mathbf{p}_0 \in E^3$ нашлась такая точка $\mathbf{p}_1 \in E^3$, что $\left.\frac{\partial\omega(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_1} \neq \left.\frac{\partial\omega(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0}$).

При этом определение матриц Мёллера должно быть несколько изменено: в формуле (36.1) нужно рассматривать только неперекрывающиеся семейства функций $f_1, \ldots, f_n$. Изменения, которые при этом следует внести в доказательства, сводятся в основном к тому, что вместо леммы 2 § 36 нужно использовать лемму 1 § 38.

Те же самые изменения в определениях и доказательствах позволяют построить теорию рассеяния в одномерном и двумерном мире (т. е. в случае, когда оператор импульса $\mathbf{P}$ имеет одну или две компоненты вместо трех).

§ 41. Адиабатическая теорема в аксиоматической теории рассеяния

Покажем, каким образом в аксиоматической квантовой теории поля можно выразить матрицы Мёллера и матрицу рассеяния через их адиабатические аналоги.

Прежде всего определим адиабатические матрицы Мёллера и адиабатическую матрицу рассеяния в несколько более общей ситуации, чем это было сделано в § 14.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действуют самосопряженные операторы $H(g)$, где параметр g пробегает отрезок [0; 1]. Фиксируем непрерывную функцию $h(\tau)$ действительного переменного τ, быстро убывающую на бесконечности и равную 1 при $\tau = 0$. Символом $U_\alpha(t, t_0)$ будем обозначать оператор эволюции, построенный по зависящему от времени гамильтониану $H(h(\alpha\tau))$, а символом $S_\alpha(t, t_0)$ — оператор $\exp(iH(0)t)\, U_\alpha(t, t_0) \exp(-iH(0)t_0)$. Иначе можно определить оператор $S_\alpha(t, t_0)$ как решение уравнения

$$i \frac{dS_\alpha(t, t_0)}{dt} = \exp(iH(0)t)(H(h(\alpha t)) - H(0)) \times$$
$$\times \exp(-iH(0)t)\, S_\alpha(t, t_0)$$

с начальным условием $S_\alpha(t_0, t_0) = 1$.

Будем применять также обозначение $U(t, t_0 | g(\tau))$ для оператора эволюции, соответствующего зависящему от времени гамильтониану $H(g(\tau))$, где $g(\tau)$ — функция со значениями в отрезке [0; 1]; пользуясь этим обозначением, можно написать, что $U_\alpha(t, t_0) = U(t, t_0 | h(\alpha\tau))$.

Операторы $S_\alpha(0, \pm\infty) = \operatorname{slim}_{t \to \pm\infty} S_\alpha(0, t)$ будем называть адиабатическими матрицами Мёллера, а оператор $S_\alpha = S_\alpha(\infty, -\infty) = \operatorname{slim}_{t \to \infty,\ t_0 \to -\infty} S_\alpha(t, t_0)$ — адиабатической S-матрицей. Указанная в § 14 конструкция адиабатической S-матрицы и адиабатических матриц Мёллера, соответствующих паре операторов H, H_0, является, очевидно, частным случаем описанной только что конструкции при $H(g) = H_0 + g(H - H_0)$ и $h(\tau) = \exp(-|\tau|)$.

В дальнейшем ради упрощения доказательства будем считать, что функция $h(\tau)$ удовлетворяет несколько более сильным условиям, чем перечисленные выше. Именно, эта функция будет предполагаться гладкой четной финитной функцией, удовлетворяющей условию $h(0) = 1$ в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. Радиус этой окрестности будем обозначать символом δ, а радиус носителя функции $h(\tau)$ — символом Δ (т. е. $h(\tau) = 1$ при $|\tau| < \delta$ и $h(\tau) = 0$ при $|\tau| > \Delta$).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в аксиоматической теории рассеяния оператор энергии зависит от параметра g. Точнее говоря, предположим, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действуют операторы энергии $H(g)$, где параметр g пробегает отрезок [0; 1], оператор импульса $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ и семейство операторов $\mathcal{A}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Самосопряженные операторы $H(g)$, P_1, P_2, P_3 коммутируют при каждом g. В пространстве $\mathcal{H}$ существуют вектор Φ (основное состояние оператора энергии $H(g)$, не зависящее от параметра g) и векторная функция $\Phi(\mathbf{k}|g)$, обобщенная по переменной g и непрерывная по g [одночастичное состояние оператора $H(g)$], для которых:

а) $H(g)\Phi = \mathbf{P}\Phi = 0$;

б) $H(g)\Phi(\mathbf{k}|g) = \omega(\mathbf{k}|g)\Phi(\mathbf{k}|g)$,

где $\omega(\mathbf{k}|g)$ — положительная функция, бесконечно дифференцируемая по $\mathbf{k}$, g и строго выпуклая по $\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{P}\Phi(\mathbf{k}|g) = \mathbf{k}\Phi(\mathbf{k}|g)$;

г) $\langle \Phi(\mathbf{k}|g), \Phi(\mathbf{k}'|g) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$;

д) для произвольных $\mathbf{k}_0 \in E^3$, $0 \leqslant g_0 \leqslant 1$ можно найти такой оператор $A \in \mathcal{A}$, что $\langle \Phi(\mathbf{k}_0|g_0), A\Phi \rangle \neq 0$;

е) для любых $\mathbf{k}_0 \in E^3$, $0 \leqslant g_0 \leqslant 1$ существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, что для всякой точки $(\omega, \mathbf{k})$, принадлежащей многочастичному спектру операторов $(H(g), \mathbf{P})$ и удовлетворяющей условию $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| < \delta$, $|g - g_0| < \delta$, выполнено неравенство $\omega > \omega(\mathbf{k}_0|g_0) + \varepsilon$.

2. Семейство $\mathcal{A}$ состоит из операторов, определенных на линейном многообразии D и переводящих это многообразие в себя. Множество D инвариантно относительно операторов $\exp(i\mathbf{P}\mathbf{x})$ и $U(t, t_0|g(\tau))$, где $g(\tau)$ — гладкая функция со значениями в отрезке [0; 1], и содержит вектор Φ. Вместе с каждыми двумя операторами $A, B \in \mathcal{A}$ к семейству $\mathcal{A}$ должны принадлежать их линейные комбинации $\lambda A + \mu B$ и произведение AB, а также сопряженные операторы A^+, B^+ (иными словами, семейство $\mathcal{A}$ является алгеброй операторов, в которой действует инволюция, сопоставляющая оператору A оператор A^+). Будем считать, что в $\mathcal{A}$ введена локально выпуклая топология, причем $\mathcal{A}$ полно в этой топологии, а умножение операторов и инволюция $A \to A^+$ непрерывны.

Топология в $\mathcal{A}$ должна удовлетворять также следующим требованиям:

а) $\langle A\Phi, \Phi \rangle$ непрерывно зависит от $A \in \mathcal{A}$;

б) если $A \in \mathcal{A}$, $g(\tau)$ — гладкая функция со значениями в $[0;\ 1]$, $\mathbf{x} \in E^3$, $-\infty < t_0,\ t_1 < \infty$, то оператор

$$U(t_1, t_0 | g(\tau))\, A(\mathbf{x})\, U(t_0, t_1 | g(\tau)) \in \mathcal{A};$$

для каждой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$ и для каждого компакта $F \subset \mathcal{A}$ можно найти такую полунорму $q(A)$ в $\mathcal{A}$ и такое число k, что для $A \in F$

$$p(U(t_1, t_0 | g(\tau))\, A(\mathbf{x})\, U(t_0, t_1 | g(\tau)) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |t_1 - t_0|^k + |\mathbf{x}|^k)\, q(A). \qquad (41.1)$$

В частности, оператор $A(\mathbf{x},\ t | g) \in \mathcal{A}$; предположим, что этот оператор является гладкой функцией от g в топологии $\mathcal{A}$, оператор $\frac{\partial^m}{\partial g^m} A(\mathbf{x},\ t|g)$ непрерывно зависит от $\mathbf{x},\ t,\ g$ и

$$p\left(\frac{\partial^m}{\partial g^m} A(\mathbf{x}, t | g)\right) \leqslant (1 + |\mathbf{x}|^k + |t|^k)\, q(A), \qquad (41.2)$$

где $p(A)$ — произвольная полунорма в $\mathcal{A}$; m — произвольное целое число; полунорма $q(A)$ в $\mathcal{A}$ и число k зависят от полунормы p, числа m и компакта F. [Здесь и далее $A(\mathbf{x})$ обозначает оператор $\exp(-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x})\, A \exp(\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x})$, а $A(\mathbf{x}, t | g)$ — оператор $\exp(\mathrm{i}H(g)\,t)\, A(\mathbf{x}) \exp(-\mathrm{i}H(g)\,t)$];

в) для любой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$, любого числа n и компакта $F \subset \mathcal{A}$ можно найти такую полунорму $q(A)$ в $\mathcal{A}$, что для всех $A,\ B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{x} \in E^3$, $A \in F$

$$p([A(\mathbf{x}), B]) \leqslant \frac{q(A)\, q(B)}{1 + |\mathbf{x}|^n}. \qquad (41.3)$$

Перечисленные условия достаточны для того, чтобы по операторам $H(g)$, $\mathbf{P}$ в алгебре $\mathcal{A}$ можно было построить матрицы Мёллера $S_{\pm}(g)$ и матрицу рассеяния $S(g) = S_+^*(g) S_-(g)$ (несколько неточно можно сказать, что требуется, чтобы для операторов $H(g)$, $\mathbf{P}$ и алгебры $\mathcal{A}$ были выполнены указанные в § 40 условия T1—T7, обеспечивающие существование матриц Мёллера, и притом равномерно по g).

Покажем, что из этих условий можно вывести соотношения

$$S_-(1) = \operatorname*{slim}_{\alpha \to 0} S_\alpha(0, -\infty) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\alpha} \int \rho(\mathbf{k})\, a_{\mathrm{in}}^+(\mathbf{k})\, a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\right); \qquad (41.4)$$

$$S_+(1) = \operatorname*{slim}_{\alpha \to 0} S_\alpha(0, +\infty) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\alpha} \int \rho(\mathbf{k})\, a_{\mathrm{out}}^+(\mathbf{k})\, a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\right), \qquad (41.5)$$

где

$$\rho(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{0} (\omega(\mathbf{k} | h(\sigma)) - \omega(\mathbf{k} | 0))\, d\sigma;$$

$$a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}) = S_-(0)\, a(\mathbf{k})\, S_-^{-1}(0);$$

$$a_{\mathrm{out}}(\mathbf{k}) = S_+(0)\, a(\mathbf{k})\, S_+^{-1}(0)$$

— in- и out-операторы, построенные по оператору энергии $H(0)$. Доказательство этих соотношений (доказательство *адиабатической теоремы*, как будем говорить) является основным результатом этого параграфа. Разумеется, без труда можно написать аналоги соотношений (41.4), (41.5) для операторов $S_{\pm}(g)$, где $0 \leqslant g \leqslant 1$; не будем останавливаться на этом.

Соотношения (41.4), (41.5) очевидным образом эквивалентны соотношениям

$$S_-(1) = \operatorname*{slim}_{\alpha \to 0} \operatorname*{slim}_{t \to -\infty} U_\alpha(0, t)\, S_-(0)\, W_\alpha(t); \qquad (41.6)$$

$$S_+(1) = \operatorname*{slim}_{\alpha \to 0} \operatorname*{slim}_{t \to +\infty} U_\alpha(0, t)\, S_+(0)\, W_\alpha(t), \qquad (41.7)$$

где $W_\alpha(t)$ — оператор в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$, определяемый формулой

$$W_\alpha(t) = \exp\left(\mathrm{i} \int r_\alpha(\mathbf{k} | t)\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\right),$$

$$r_\alpha(\mathbf{k} | t) = \int_t^0 \omega(\mathbf{k} | h(\alpha\tau))\, d\tau$$

(для доказательства эквивалентности достаточно заметить, что

$$\exp(-iH(0)t)\,S_-(0) =$$
$$= S_-(0)\exp\left(-i\int \omega(\mathbf{k}\,|\,0)\,t\,a^+(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}\right);$$
$$\frac{1}{\alpha}\,\rho(\mathbf{k}) = \lim_{t\to-\infty}\,(r_\alpha(\mathbf{k}\,|\,t) - t\,\omega(\mathbf{k}\,|\,0))).$$

Будем доказывать адиабатическую теорему в форме равенств (41.6), (41.7). Доказательство будет основано на ряде лемм.

Лемма 1. *Для любой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$, любого компакта $F \subset \mathcal{A}$ и любого числа n можно найти такую полунорму $g(A)$ в A и такое число k, что*

$$p([U(t_1, t_0\,|\,g(\tau))\,A(\mathbf{x})\,U(t_0, t_1\,|\,g(\tau)), B]) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1 + |t_1 - t_0|^k}{1 + |\mathbf{x}|^n}\,q(A)\,q(B)$$

(здесь $A, B \in F$, $g(\tau)$ — гладкая функция со значениями в $[0;\ 1]$, $-\infty < t_1,\ t_0 < \infty$, $\mathbf{x} \in E^3$).

Утверждение этой леммы немедленно вытекает из неравенств (41.1) (41.3) и замечания, что оператор $U(t_1, t_0\,|\,g(\tau))$ коммутирует с $\exp(i\mathbf{P}\mathbf{x})$.

Лемма 3. *Если $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — кусочно-непрерывная функция, убывающая на бесконечности быстрее любой степени, то оператор*

$$\int \varphi(\mathbf{x}, t)\,A(\mathbf{x}, t\,|\,g)\,d\mathbf{x}\,dt,$$

где $A \in \mathcal{A}$, $0 \leqslant g \leqslant 1$, принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ и дифференцируем бесконечное число раз по g в топологии алгебры $\mathcal{A}$, причем оператор

$$\frac{d^k}{dg^k}\int \varphi(\mathbf{x}, t)\,A(\mathbf{x}, t\,|\,g)\,d\mathbf{x}\,dt$$

непрерывно зависит от $\varphi \in T$, $A \in \mathcal{A}$, $g \in [0;\ 1]$ в топологии алгебры $\mathcal{A}$.

[Считаем, что пространство T кусочно-непрерывных убывающих быстрее любой степени функций снабжено топологией с помощью системы норм

$$\|\varphi\|_\lambda = \sup_{\mathbf{x}\in E^3,\,-\infty<t<\infty}(1 + |\mathbf{x}|^\lambda + |t|^\lambda)\,\varphi(\mathbf{x}, t).]$$

Доказательство этой леммы основано на полноте алгебры $\mathcal{A}$ и условии 2б).

Лемма 3. *Пусть $A_g, B_g \in \mathcal{A}$ — два семейства операторов, бесконечно дифференцируемых по g в топологии $\mathcal{A}$. Предположим, что $B_g^*\Phi = 0$ для всех g (это требование выполнено, например, если B_g — правильные операторы). Тогда функция*

$$\rho(\mathbf{k}\,|\,g) = \int \langle A_g(\mathbf{x})\,\Phi, B_g\,\Phi\rangle \exp(i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

бесконечно дифференцируема по $\mathbf{k}$, g.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$\tilde\rho(\mathbf{x}\,|\,g) = \langle A_g(\mathbf{x})\,\Phi, B_g\,\Phi\rangle = \langle B_g^* A_g(\mathbf{x})\,\Phi, \Phi\rangle.$$

Функция

$$\frac{\partial^m}{\partial g^m}\tilde\rho(\mathbf{x}\,|\,g) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left\langle \frac{\partial^k B_g^*}{\partial g^k}\,\frac{\partial^{m-k} A_g(\mathbf{x})}{\partial g^{m-k}}\,\Phi, \Phi\right\rangle =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left\langle \left[\frac{\partial^k B_g^*}{\partial g^k}, \frac{\partial^{m-k} A_g(\mathbf{x})}{\partial g^{m-k}}\right]\Phi, \Phi\right\rangle$$

в силу леммы 1 допускает оценку

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial g^m}\tilde\rho(\mathbf{x}\,|\,g)\right| \leqslant \frac{C}{1 + |\mathbf{x}|^n}$$

(здесь m и n — произвольные натуральные числа). Из этой оценки вытекает, очевидно, бесконечная дифференцируемость функции $\rho(\mathbf{k}\,|\,g) = \int \tilde\rho(\mathbf{x}\,|\,g)\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Перед тем как перейти к формулировке следующей леммы, заметим, что векторная обобщенная функция $\Phi(\mathbf{k}\,|\,g)$ определяется условиями 1 б), в), г) неоднозначно: векторная обобщенная функция $\Phi'(\mathbf{k}\,|\,g) = \exp(i\lambda(\mathbf{k}\,|\,g))\,\Phi(\mathbf{k}\,|\,g)$, где $\lambda(\mathbf{k}\,|\,g)$ — действительная измеримая функция, будет удовлетворять тем же условиям.

Лемма 4. *Можно подобрать такую действительную измеримую функцию $\lambda(\mathbf{k}\,|\,g)$, что для всякого оператора $A \in \mathcal{A}$ функция*

$$\langle A\,\Phi, \Phi'(\mathbf{k}\,|\,g)\rangle = \langle A\,\Phi, \exp(i\,\lambda(\mathbf{k}\,|\,g))\,\Phi(\mathbf{k}\,|\,g)\rangle$$

бесконечно дифференцируема по $\mathbf{k}$, g.

Пусть B_g^1, B_g^2 — два семейства правильных операторов, бесконечное число раз дифференцируемые по g в топологии алгебры $\mathcal{A}$; $r_1(\mathbf{k}|g)$ и $r_2(\mathbf{k}|g)$ — функции, определяемые соотношением

$$B_g^i \Phi = \int r_i(\mathbf{k}|g)\, \Phi(\mathbf{k}|g)\, d\mathbf{k}.$$

Рассмотрим функцию

$$\nu(\mathbf{x}|g) = \langle B_g^1(\mathbf{x})\, \Phi,\ B_g^2 \Phi\rangle$$

и заметим, что

$$\nu(\mathbf{x}|g) = \langle \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{Px}) \int r_1(\mathbf{k}|g)\, \Phi(\mathbf{k}|g)\, d\mathbf{k},$$
$$\int r_2(\mathbf{k}|g)\, \Phi(\mathbf{k}|g)\, d\mathbf{k}\rangle =$$
$$= \int \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, r_1(\mathbf{k}|g)\, \overline{r_2(\mathbf{k}|g)}\, d\mathbf{k}. \tag{41.8}$$

Из соотношения (41.8) и леммы 3 вытекает бесконечная дифференцируемость функции $r_1(\mathbf{k}|g)\, \overline{r_2(\mathbf{k}|g)}$ по $\mathbf{k}$, g.

Докажем теперь, что для всякой точки $(\mathbf{k}_0, g_0)$ найдется такое бесконечно дифференцируемое семейство правильных операторов B_g, что

$$\langle B_{g_0} \Phi,\ \Phi(\mathbf{k}_0|g_0)\rangle \neq 0.$$

Воспользуемся тем, что по каждому оператору $A \in \mathcal{A}$ и гладкой финитной функции $\sigma(\mathbf{k}, \omega|g)$, равной 0 при $\omega \leqslant 0$ и при $(\omega, \mathbf{k})$, принадлежащем многочастичному спектру операторов $H(g)$, $\mathbf{P}$, можно построить семейство правильных операторов $B_g^{\sigma, A}$ по формуле

$$B_g^{\sigma, A} = \int \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t|g)\, A(\mathbf{x}, t|g)\, d\mathbf{x}\, dt,$$

где

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t|g) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx} - \mathrm{i}\,\omega t)\, \sigma(\mathbf{k}, \omega|g)\, d\mathbf{k}\, d\omega$$

(см. лемму 1 из § 36). В силу леммы 2 это семейство бесконечно дифференцируемо по g. Легко видеть, что

$$\langle B_g^{\sigma, A} \Phi,\ \Phi(\mathbf{k}|g)\rangle = \sigma(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}|g)|g)\, \langle A\Phi,\ \Phi(\mathbf{k}|g)\rangle. \tag{41.9}$$

Для каждой точки $\mathbf{k}_0$, g_0 можно подобрать функцию σ таким образом, что $\sigma(\mathbf{k}_0,\ \omega(\mathbf{k}_0|g_0)|g_0) \neq 0$. Это замечание вместе с условием 1д) позволяет проверить, что для каждой точки $\mathbf{k}_0$, g_0 найдется такой оператор $A \in \mathcal{A}$, что

$$\langle B_{g_0}^{\sigma, A} \Phi,\ \Phi(\mathbf{k}_0|g_0)\rangle \neq 0.$$

Теперь можно воспользоваться следующим утверждением.

Пусть $\mathcal{F} = \{\varphi_\gamma(k)\}$ — такое семейство измеримых комплексных функций на выпуклом подмножестве M евклидова пространства E^n, что: а) для любых двух функций $\varphi_\gamma \in \mathcal{F}$, $\varphi_\delta \in \mathcal{F}$ функция $\overline{\varphi_\gamma}(k)\, \varphi_\delta(k)$ бесконечно дифференцируема; б) для всякой точки $k \in M$ найдется функция $\varphi_\gamma \in \mathcal{F}$, не равная нулю в точке k. Тогда найдется такая измеримая действительная функция $\lambda(k)$, что произведение любой функции $\varphi_\gamma \in \mathcal{F}$ и $\exp(\mathrm{i}\lambda(k))$ — гладкая функция.

(Доказательство этого утверждения, основанное на некоторых теоремах из топологии расслоенных пространств, содержится в приложении к работе [43].)

Применяя это утверждение, можно найти такую действительную функцию $\lambda(\mathbf{k}|g)$, что для всякого семейства правильных операторов $B_g \in \mathcal{A}$, бесконечное число раз дифференцируемого по g в топологии $\mathcal{A}$, функция

$$\exp(\mathrm{i}\,\lambda(\mathbf{k}|g))\, r(\mathbf{k}|g) = \exp(\mathrm{i}\,\lambda(\mathbf{k}|g))\, \langle B_g \Phi,\ \Phi(\mathbf{k}|g)\rangle$$

бесконечно дифференцируема.

Из соотношения (41.9) вытекает, что при том же выборе функции $\lambda(\mathbf{k}|g)$ будут дифференцируемы все функции вида $\exp(\mathrm{i}\lambda(\mathbf{k}|g))\, \langle A\Phi,\ \Phi(\mathbf{k}|g)\rangle$, где $A \in \mathcal{A}$; это доказывает утверждение леммы.

Замечание. С помощью рассуждений, используемых при доказательстве этой леммы, можно проверить, не налагая условия 1д), что для любого оператора $A \in \mathcal{A}$ функция $|\langle \Phi(\mathbf{k}|g),\ A\Phi\rangle|^2$ бесконечно дифференцируема. Это позволяет говорить о значениях функции $|\langle \Phi(\mathbf{k}|g),\ A\Phi\rangle|$ в отдельных точках. Таким образом, условие 1д) имеет четкий смысл.

В дальнейшем всегда будем считать, что одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k}|g)$ выбрано таким способом, что для любого оператора $A \in \mathcal{A}$ функция $\langle A\Phi,\ \Phi(\mathbf{k}|g)\rangle$ бесконечно дифференцируема по $\mathbf{k}$, g [по лемме 4 этого всегда можно добиться, заменив, в случае необходимости, $\Phi(\mathbf{k}|g)$ на $\Phi'(\mathbf{k}|g) = \exp(\mathrm{i}\lambda(\mathbf{k}|g))\, \Phi(\mathbf{k}|g)$].

Лемма 5. *Для всякой гладкой финитной функции $f(\mathbf{k}|g)$ можно найти такое семейство правильных операторов B_g^f, бесконечно дифференцируемое по g в топологии $\mathcal{A}$, что*

$$B_g^f \Phi = \int f(\mathbf{k}|g)\, \Phi(\mathbf{k}|g)\, d\mathbf{k}.$$

При доказательстве этой леммы удобно воспользоваться соотношением

$$B_g^{\psi\varphi} = \int \tilde{\varphi}(\mathbf{x} \mid g) B_g^{\psi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{41.10}$$

[точнее говоря, если семейство правильных операторов $B_g^{\psi} \in \mathcal{A}$ бесконечно дифференцируемо по g и

$$B_g^{\psi}\Phi = \int \psi(\mathbf{k} \mid g)\, \Phi(\mathbf{k} \mid g)\, d\mathbf{k},$$

$\varphi(\mathbf{k} \mid g)$ — финитная гладкая функция,

$$\tilde{\varphi}(\mathrm{x} \mid g) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{k} \mid g) \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, d\mathbf{k},$$

то формула (41.10) определяет бесконечное дифференцируемое по g семейство правильных операторов, удовлетворяющее условию

$$B_g^{\psi\varphi}\Phi = \int \psi(\mathbf{k} \mid g)\, \varphi(\mathbf{k} \mid g)\, \Phi(\mathbf{k} \mid g)\, d\mathbf{k}].$$

Заметим, что для каждой точки $(\mathbf{k}_0, g_0)$ существует такая окрестность U, оператор $A \in \mathcal{A}$ и функция σ, что функция $\langle B_g^{\sigma, A}, \Phi, \Phi(\mathbf{k} \mid g)\rangle$ не обращается в нуль в окрестности U (здесь $B_g^{\sigma, A}$ — семейство правильных операторов, построенное при доказательстве леммы 3). Если носитель функции $f(\mathbf{k} \mid g)$ содержится в окрестности U, то нужное семейство B_g^f можно получить с помощью соотношения (41.10), положив в этом соотношении $B_g^{\psi} = B_g^{\sigma, A}$, $B_g^{\psi\varphi} = B_g^f$. Иначе говоря, в качестве функции $\psi(\mathbf{k} \mid g)$ следует выбрать функцию (41.9), а в качестве функции $\varphi(\mathbf{k} \mid g)$ — функцию

$$\frac{f(\mathbf{k} \mid g)}{\langle B_g^{\sigma, A}\Phi, \Phi(\mathbf{k} \mid g)\rangle}$$

(эта функция, очевидно, становится гладкой финитной функцией, если доопределить ее нулем там, где и числитель, и знаменатель обращаются в нуль).

Произвольную функцию f можно представить в виде конечной суммы функций f_i, для которых семейство $B_g^{f_i}$ может быть построено с помощью указанной выше конструкции. Операторы

$$B_g^f = \sum B_g^{f_i},$$

очевидно, бесконечно дифференцируемы по g и удовлетворяют условиям

$$B_g^f \Phi = \int f(\mathbf{k} \mid g)\, \Phi(\mathbf{k} \mid g)\, d\mathbf{k};$$

$$(B_g^f)^* \Phi = 0.$$

Они, однако, a priori, могут не удовлетворять входящему в определение правильного оператора требованию гладкости. Добиться выполнения также и этого требования можно, заменив операторы B_g^f операторами

$$\tilde{B}_g^f = \int \tilde{\mu}(\mathrm{x}, t \mid g)\, B(\mathrm{x}, t \mid g)\, d\mathrm{x}\, dt,$$

где

$$\tilde{\mu}(\mathrm{x}, t \mid g) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mu(\mathbf{k}, \omega \mid g) \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{k}\mathrm{x} - \mathrm{i}\,\omega t)\, d\mathbf{k}\, d\omega;$$

$\mu(\mathbf{k}, \omega \mid g)$ — гладкая финитная функция, равная 1, если $(\mathbf{k}, g) \in \operatorname{supp} f$, $\omega = \omega(\mathbf{k} \mid g)$.

Лемма 6. *Функция* $\nu(\mathbf{k} \mid g)$, *определяемая формулой*

$$\left\langle \frac{d\Phi(f \mid g)}{dg}, \Phi(f' \mid g) \right\rangle = \int \nu(\mathbf{k} \mid g)\, f(\mathbf{k})\, \overline{f'(\mathbf{k})}\, d\mathbf{k}, \tag{41.11}$$

где $f(\mathbf{k})$, $f'(\mathbf{k})$ — *гладкие финитные функции, является гладкой функцией от* $\mathbf{k}$, g.

Заметим прежде всего, что по лемме 5 вектор $\Phi(f \mid g)$ может быть представлен в виде $B_g^f \Phi$, где оператор B_g^f бесконечно дифференцируем по g; поэтому производная $\frac{d\Phi(f \mid g)}{dg}$ существует. Далее, форма

$$A(f, f') = \left\langle \frac{d\Phi(f \mid g)}{dg}, \Phi(f' \mid g) \right\rangle$$

трансляционно инвариантна [т. е. $A(f, f') = A(f_{\mathrm{x}}, f'_{\mathrm{x}})$, где $f_{\mathrm{x}}(\mathbf{k}) = \exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\mathrm{x}) f(\mathbf{k})$] и, следовательно, может быть записана в виде (41.11).

Рассмотрим функцию

$$\zeta(\mathrm{x} \mid g) = \left\langle \frac{d\Phi(f \mid g)}{dg}, \Phi(f'_{\mathrm{x}} \mid g) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{d\Phi(f \mid g)}{dg}, \exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{P}\mathrm{x})\, \Phi(f' \mid g) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{dB_g^f}{dg}\Phi, B_g^{f'}(\mathbf{x})\, \Phi \right\rangle.$$

Очевидно, что

$$\zeta(\mathbf{x}\,|\,g)=\int \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\,\nu(\mathbf{k}\,|\,g)\,f(\mathbf{k})\,\overline{f'(\mathbf{k})}\,d\mathbf{k}. \qquad (41.12)$$

Из соотношения (41.12) и леммы 3 следует, что функция $\nu(\mathbf{k}\,|\,g)\,f(\mathbf{k})\,\overline{f'(\mathbf{k})}$ — гладкая. Поскольку $f(\mathbf{k}), f'(\mathbf{k})$ — произвольные гладкие функции, отсюда вытекает утверждение леммы.

Из леммы 6 вытекает, что одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k}\,|\,g)$ может быть выбрано таким способом, что для любых f, f'

$$\left\langle \frac{d\Phi(f\,|\,g)}{dg},\ \Phi(f'\,|\,g)\right\rangle=0. \qquad (41.13)$$

[Если равенство (41.13) не выполнено, то добиться его выполнения можно, заменив $\Phi(\mathbf{k}\,|\,g)$ на обобщенную векторную функцию

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{k}\,|\,g)=\exp(\mathrm{i}\,\tau(\mathbf{k}\,|\,g))\,\Phi(\mathbf{k}\,|\,g),$$

где $\tau(\mathbf{k}\,|\,g)$ определяется как решение уравнения

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\tau(\mathbf{k}\,|\,g)}{\partial g}=-\nu(\mathbf{k}\,|\,g).\Big]$$

В силу леммы 6 $\tau(\mathbf{k}\,|\,g)$ — гладкая функция, поэтому после указанной замены функции $\langle A\Phi,\ \widetilde{\Phi}(\mathbf{k}\,|\,g)\rangle$ также являются гладкими для всех $A\in\mathcal{A}$.

В дальнейшем будем считать, что одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k}\,|\,g)$ выбрано так, что выполняется условие (41.13).

Обозначим t_0 момент времени, удовлетворяющий соотношению $t_0\leqslant-\frac{\Delta}{\alpha}$ (напомним, что символом Δ обозначен радиус носителя фиксированной функции $h(\tau)$, так что $h(\tau)=0$ при $\tau\leqslant\alpha t_0$).

Лемма 7. *Для любой гладкой финитной функции* $f(\mathbf{k})$

$$U_\alpha(t,t_0)\,\Phi(f\,|\,0)=$$
$$=\exp(\mathrm{i}\,r_\alpha(\mathbf{P}\,|\,t)-\mathrm{i}\,r_\alpha(\mathbf{P}\,|\,t_0))\,(\Phi(f\,|\,h(\alpha t))+\alpha\xi_1(f\,|\,\alpha t)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha^n\,\xi_n(f\,|\,\alpha t)+\alpha^{n+1}\,\eta_{n+1}(f,\alpha,t,t_0)),$$

где $\xi_i(f\,|\,\sigma)$ *определяется уравнениями*

$$\mathrm{i}\,\frac{d\xi_{i-1}(f\,|\,\sigma)}{d\sigma}=(H(h(\sigma))-\omega(\mathbf{P}\,|\,h(\sigma)))\,\xi_i(f\,|\,\sigma); \qquad (41.14)$$

$$\left\langle\frac{d\xi_i(f\,|\,\sigma)}{d\sigma},\ \Phi(f'\,|\,h(\sigma))\right\rangle=0; \qquad (41.15)$$

$$\xi_0(f\,|\,\sigma)=\Phi(f\,|\,h(\sigma)); \qquad (41.16)$$

$$\xi_0(f\,|\,\sigma_0)=0 \quad \text{при} \quad j>0 \qquad (41.17)$$

и $\|\eta_{n+1}(f,\alpha,t,t_0)\|\leqslant C$ *(C не зависит от* α, t, t_0, *но может зависеть от* f *и* n*).*

Доказательство этой леммы проводится с помощью рассуждений, вполне аналогичных рассуждениям в § 16. Вектор $\Psi(t)=U_\alpha(t,t_0)\,\Phi(f\,|\,0)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{i}\,\frac{d\Psi}{dt}=H(h(\alpha t))\,\Psi(t).$$

Заменой переменной $\sigma=\alpha t$ это уравнение может быть приведено к виду

$$\mathrm{i}\,\alpha\,\frac{d\Psi}{d\sigma}=H(h(\sigma))\,\Psi(\sigma). \qquad (41.18)$$

Будем искать решение уравнения (41.18) в виде

$$\Psi(\sigma)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\alpha}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\omega(\mathbf{P}\,|\,h(\sigma'))\,d\sigma'\right)(\xi_0(f\,|\,\sigma)+\alpha\xi_1(f\,|\,\sigma)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha^n\,\xi_n(f\,|\,\sigma)+\alpha^{n+1}\,\eta_{n+1}(f,\alpha,\sigma)).$$

Заметим, что равенство (41.14) определяет вектор $\xi_i(f\,|\,\sigma)$ с точностью до слагаемого, обращающегося в нуль при действии на него оператора $H(h(\sigma))-\omega(\mathbf{P}\,|\,h(\sigma))$ (т. е. с точностью до вектора из одночастичного подпространства). Равенства (41.15)—(41.17) фиксируют это слагаемое однозначно. Несколько позже будет показано (см. лемму 8), что вектор $\xi_i(f\,|\,\sigma)$ бесконечно дифференцируем по σ.

Функция $\eta_{n+1}(f,\alpha\,|\,\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{i}\,\alpha\,\frac{d\eta_{n+1}(f,\alpha\,|\,\sigma)}{d\sigma}=$$
$$=(H(h(\sigma))-\omega(\mathbf{P}\,|\,h(\sigma)))\,\eta_{n+1}(f,\alpha\,|\,\sigma)-\mathrm{i}\,\frac{d\xi_n(f\,|\,\sigma)}{d\sigma} \qquad (41.19)$$

с начальным условием $\eta_{n+1}(f, \dot{\alpha}|\sigma_0)=0$. Из этого уравнения и из замечания, что $\left\|\frac{d\xi_n(f|\sigma)}{d\sigma}\right\|$ оценивается сверху константой, не зависящей от σ, легко получить неравенство

$$\|\eta_{n+1}(f, \alpha|\sigma)\| \leqslant \frac{C}{\alpha}$$

(константа C зависит от f). Замечая, что

$$\eta_n(f, \alpha|\sigma)=\xi_n(f|\sigma)+\alpha\eta_{n+1}(f, \alpha|\sigma),$$

убеждаемся, что

$$\|\eta_n(f, \alpha|\sigma)\| \leqslant \mathrm{const}.$$

Это доказывает лемму.

Лемма 8. *Вектор $\xi_i(f|\sigma)$, фигурирующий в формулировке леммы 7, может быть представлен в виде*

$$\xi_i(f|\sigma)=D_i^{f,\sigma}\Phi,$$

где $D_i^{f,\sigma}$ — семейство операторов, бесконечно дифференцируемое по σ в топологии $\mathcal{A}$, и, следовательно, этот вектор бесконечно дифференцируем по σ.

Будем доказывать лемму по индукции. Пусть операторы $D_{i-1}^{f,\sigma}$ уже построены. Рассмотрим вектор $\zeta_i(f|\sigma)$, определенный соотношениями

$$\mathrm{i}\frac{d\xi_{i-1}(f|\sigma)}{d\sigma}=(H(h(\sigma))-\omega(\mathbf{P}|h(\sigma)))\zeta_i(f|\sigma);$$
$$\langle\zeta_i(f|\sigma), \Phi(f'|h(\sigma))\rangle=0,$$

где f, f' — произвольные финитные гладкие функции. Этот вектор может быть представлен в форме

$$\zeta_i(f|\sigma)=\gamma(H(h(\sigma)), \mathbf{P}|h(\sigma))\frac{d\xi_{i-1}(f|\sigma)}{d\sigma}. \quad (41.20)$$

Здесь

$$\gamma(\omega, \mathbf{p}|g)=\mathrm{i}(\omega-\omega(\mathbf{p}|g))^{-1},$$

если $\mathbf{p}\in\operatorname{supp} f$, $(\omega, \mathbf{p})$ принадлежит спектру операторов $H(g)$, $\mathbf{P}$, но $\omega\neq\omega(\mathbf{p}|g)$; если $\omega=\omega(\mathbf{p}|g)$, то $\gamma(\omega, \mathbf{p}|g)$ обращается в нуль. Функция $\gamma(\omega, \mathbf{p}|g)$ может быть выбрана гладкой и обращающейся в нуль для $\mathbf{p}$, находящихся вне некоторого шара.

Пользуясь соотношением (41.20), можно написать, что

$$\zeta_i(f|\sigma)=\int\tilde{\gamma}(t, \mathbf{x}|h(\sigma))E_{i-1}^{f,\sigma}(\mathbf{x}, t|\sigma)\Phi\,d\mathbf{x}\,dt, \quad (41.21)$$

где $\tilde{\gamma}(t, \mathbf{x}|g)$ — преобразование Фурье функции $\gamma(\omega, \mathbf{p}|g)$ по переменным ω, $\mathbf{p}$, $E_{i-1}^{f,\sigma}=(d/d\sigma)D_{i-1}^{f,\sigma}$. Равенство (41.21) показывает, что $\zeta_i(f|\sigma)=F_i^{f,\sigma}$, где $F_i^{f,\sigma}=\int\tilde{\gamma}(t, \mathbf{x}|h(\sigma))E_{i-1}^{f,\sigma}(\mathbf{x}, t|\sigma)\,d\mathbf{x}dt$ (этот оператор бесконечно дифференцируем по σ в силу леммы 2). Вектор $\xi_i(f|g)$ может быть выражен через вектор $\zeta_i(f|\sigma)$ с помощью соотношения

$$\xi_i(f|\sigma)=\zeta_i(f|\sigma)+\Phi(\lambda_i^\sigma f|h(\sigma)), \quad (41.22)$$

где $\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\int\frac{\partial\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})}{\partial\sigma}f(\mathbf{k})\overline{f'(\mathbf{k})}\,d\mathbf{k}=-\left\langle\frac{d\zeta_i(f|\sigma)}{d\sigma}, \Phi(f'|h(\sigma))\right\rangle \quad (41.23)$$

с начальным условием $\lambda_i^{\sigma_0}(\mathbf{k})=0$ при $\sigma_0<-\Delta$. Если ввести векторные обобщенные функции $\xi_i(\mathbf{k}|\sigma)$ и $\zeta_i(\mathbf{k}|\sigma)$ соотношениями $\xi_i(f|\sigma)=\int f(\mathbf{k})\,\xi_i(\mathbf{k}|\sigma)\,d\mathbf{k}$, $\zeta_i(f|\sigma)=\int f(\mathbf{k})\,\zeta_i(\mathbf{k}|\sigma)\,d\mathbf{k}$, то формулы (41.22), (41.23) можно переписать в виде

$$\xi_i(\mathbf{k}|\sigma)=\zeta_i(\mathbf{k}|\sigma)+\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}|h(\sigma));$$
$$\frac{\partial\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})}{\partial\sigma}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')=-\left\langle\frac{\partial\zeta_i(\mathbf{k}|\sigma)}{\partial\sigma}, \Phi(\mathbf{k}'|h(\sigma))\right\rangle.$$

Функция $\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})$ бесконечно дифференцируема по σ; это доказывается точно так же, как утверждение леммы 6. Можем поэтому выбрать оператор $D_i^{f,\sigma}$ в виде

$$D_i^{f,\sigma}=F_i^{f,\sigma}+B_{h(\sigma)}^{\lambda_i^\sigma f}.$$

Легко видеть, что оператор $D_i^{f,\sigma}$ бесконечно дифференцируем по σ и, стало быть, удовлетворяет условию леммы (дифференцируемость оператора $F_i^{f,\sigma}$ уже проверена, а оператор $B_{h(\sigma)}^{\lambda_i^\sigma f}$ можно представить в виде

$$B_{h(\sigma)}^{\lambda_i^\sigma f}=B_{h(\sigma)}^{\mu_i^\sigma f}=\int\tilde{\mu}_i^\sigma(\mathbf{x})\,B_{h(\sigma)}^f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

где $\mu_i^\sigma(\mathbf{k})=\beta(\mathbf{k})\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})$, а символом $\beta(\mathbf{k})$ обозначена финитная гладкая функция, равная 1 при $\mathbf{k}\in\operatorname{supp} f$).

Замечание. Для всех σ из отрезка $[-\delta, \delta]$, на котором функция h равна 1, по индукции можно доказать равенства

$$\frac{d\xi_i(f|\sigma)}{d\sigma}=0; \quad \zeta_i(f|\sigma)=0; \quad F_i^{f,\sigma}=0;$$
$$\frac{\partial\lambda_i^\sigma(\mathbf{k})}{\partial\sigma}=0; \quad D_i^{f,\sigma}=B_1^{\lambda_i^\sigma f}.$$

Определим функции $\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})$, $\varphi^{t,\alpha}(\mathbf{k})$ формулами

$$\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})=(2\pi)^{-3}\int\varphi^{t,\alpha}(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\,d\mathbf{k};$$
$$\varphi^{t,\alpha}(\mathbf{k})=\varphi(\mathbf{k})\exp(\mathrm{i}\,r_\alpha(\mathbf{k}|t)).$$

Лемма 9. *Пусть $\varphi(\mathbf{k})$ — гладкая финитная функция. Для любого целого числа n и любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $C_{n,\varepsilon}$, не зависящее от $\mathbf{x}$, t и α, что*

$$|\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})|\leqslant\frac{C_{n,\varepsilon}}{1+(\rho(\mathbf{x},\ V_\alpha^t(\varphi))-\varepsilon|t|)^n}$$

(здесь $V_\alpha^t(\varphi)$ — множество точек, которые могут быть представлены в виде $-\nabla r_\alpha(\mathbf{k}|t)$, где $\mathbf{k}\in\operatorname{supp}\varphi$, $\rho(\mathbf{x}, A)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества A). Существует такая константа C, не зависящая от $\mathbf{x}$, t, α, что

$$|\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})|\leqslant C|t|^{-3/2};$$
$$\int|\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\leqslant C(1+|t|^{3/2}). \tag{41.24}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 § 36.

Лемма 10. *Если $f(\mathbf{k})$, $\varphi(\mathbf{k})$ — гладкие финитные функции, то вектор*

$$\Gamma(t)=U_\alpha(t,\ t_0)\,S_-(0)\,W_\alpha(t_0)\,a^+(\overline{f}\,\overline{\varphi})\,\theta,$$

где $t_0\leqslant-\dfrac{\Delta}{\alpha}$, может быть представлен в форме

$$\Gamma(t)=Q_s^t\Phi+R_s(t),$$

где

$$Q_s^t=Q_s^t(f,\varphi,\alpha)=\int\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})\,N_s^{t,\alpha}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}; \tag{41.25}$$
$$N_s^{t,\alpha}=\sum_{i=0}^{s}D_i^{f,\alpha t},$$
$$\|R_s(t)\|\leqslant C_s(f,\varphi)\,\alpha^{s+1}(1+|t|^{3/2}).$$

В самом деле,

$$W_\alpha(t_0)\,a^+(\overline{f}\,\overline{\varphi})\,\theta=a^+(\overline{f\varphi^{t_0,\alpha}})\,\theta.$$

Поэтому

$$\Gamma(t)=U_\alpha(t,t_0)\,\Phi(f\varphi^{t_0,\alpha}|0)=$$
$$=U_\alpha(t,t_0)\,\varphi^{t_0,\alpha}(\mathbf{P})\,\Phi(f|0)=$$
$$=\varphi^{t_0,\alpha}(\mathbf{P})\,U_\alpha(t,t_0)\,\Phi(f|0).$$

Из лемм 7, 8 и 9 заключаем, что

$$\Gamma(t)=\varphi^{t_0,\alpha}(\mathbf{P})\exp(\mathrm{i}\,r_\alpha(\mathbf{P}|t)-\mathrm{i}\,r_\alpha(\mathbf{P}|t_0))\times$$
$$\times\left(\sum_{i=0}^{s}\alpha^i\xi_i(f|\alpha t)+\alpha^{s+1}\eta_{s+1}(f,\alpha,t,t_0)\right)=$$
$$=\varphi^{t,\alpha}(\mathbf{P})\left(\sum_{i=0}^{s}D_i^{f,\alpha t}\Phi\right)+R_s(t)=$$
$$=\varphi^{t,\alpha}(\mathbf{P})\,N_s^{t,\alpha}\Phi+R_s(t)=\int\widetilde{\varphi}^{t,\alpha}(\mathbf{x})\,N_s^{t,\alpha}(\mathbf{x})\,\Phi\,d\mathbf{x}+R_s(t),$$

что доказывает нужное утверждение [при выводе оценки для R_s следует воспользоваться оценкой $\|\eta_{s+1}\|$, указанной в лемме 7, и неравенством (41.24)].

Замечание. Из соотношения

$$U_\alpha(t',\ t)\,U_\alpha(t,\ t_0)=U_\alpha(t',\ t_0)$$

вытекает, что

$$U_\alpha(t',\ t)\,\Gamma(t)=\Gamma(t'). \tag{41.26}$$

Пользуясь равенством (41.26) и леммой 9, можем заключить, что

$$U_\alpha(t',\ t)\,Q_s^t\Phi=Q_s^{t'}\Phi+R_s(t,\ t'), \tag{41.27}$$

где $\|R_s(t,\ t')\|\leqslant C\alpha^{s+1}$, константа C зависит от f и φ (но не зависит от t, t', α). Соотношение (41.27) будет существенно использовано далее.

Лемма 11. *Пусть $\varphi_1(\mathbf{k})$, $\varphi_2(\mathbf{k})$ — финитные гладкие функции, носители которых не пересекаются. Тогда существует такое число $c>0$, что расстояние между множествами $V_\alpha^t(\varphi_1)$ и $V_\alpha^t(\varphi_2)$ больше, чем $c|t|$.*

Из строгой выпуклости функции $\omega(\mathbf{k}|g)$ вытекает, что

$$d^2\omega(\mathbf{k}|g)\geqslant\lambda d\mathbf{k}^2 \tag{41.28}$$

(здесь λ положительно и не зависит от $\mathbf{k}$, g, если $\mathbf{k}$ пробегает ограниченное множество; второй дифференциал берется только по переменной $\mathbf{k}$).

Неравенство (41.28) влечет за собой неравенство $d^2 r_\alpha(\mathbf{k}|t) \geqslant \lambda |t| d\mathbf{k}^2$, из которого можно заключить, что вторая производная функция $r_\alpha(\mathbf{k}|t)$ по любому направлению не может быть меньше, чем $\lambda|t|$. В частности, можно положить

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}, \quad \nu(\zeta) = r_\alpha(\mathbf{k}_2 + \zeta \mathbf{e} | t)$$

и заключить, что $\nu''(\zeta) \geqslant \lambda |t|$. Теперь ясно, что

$$|\nabla r_\alpha(\mathbf{k}_1|t) - \nabla r_\alpha(\mathbf{k}_2|t)| \geqslant$$
$$\geqslant |\nu'(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) - \nu'(0)| \geqslant \lambda |t| \, |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|.$$

Таким образом, если расстояние между множествами $\operatorname{supp}\varphi_1$ и $\operatorname{supp}\varphi_2$ больше, чем ε, то расстояние между множествами $V_\alpha^t(\varphi_1)$ и $V_\alpha^t(\varphi_2)$ больше, чем $\lambda|t|\varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть* $f_1(\mathbf{k})$, $f_2(\mathbf{k})$, $\varphi_1(\mathbf{k})$, $\varphi_2(\mathbf{k})$ — *гладкие финитные функции и носители функций* φ_1, φ_2 *не пересекаются. Тогда*

$$p\left([U_\alpha(t+\tau, t) Q_s^{1,t} U_\alpha(t, t+\tau), \; Q_s^{2,t}]\right) \leqslant \frac{C|\tau|^r}{1+|t|^n}$$

[здесь $p(A)$ — произвольная полунорма в алгебре $\mathcal{A}$; n — произвольное число; $-\infty < \tau$, $t < \infty$, $|\tau| \leqslant |t|$; C и r не зависят от t, τ и α; символ $Q_s^{i,t}$ обозначает операторы

$$Q_s^{i,t} = Q_s^t(f_i, \varphi_i, \alpha),$$

определенные соотношением (41.25)].

Доказательство этой леммы без труда получается с помощью лемм 1, 9 и 11.

Лемма 13. *Пусть* $\varphi_1(\mathbf{k}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{k})$ — *гладкие финитные функции с непересекающимися носителями,* $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_n(\mathbf{k})$ — *гладкие финитные функции,* $t \leqslant -a\alpha^{-\varepsilon}$, $t_0 \leqslant -\frac{\Delta}{\alpha}$, $a > 0$, $\varepsilon > 0$, $s \geqslant \frac{3}{2} n + 1$. *Тогда вектор*

$$\Psi_n(t) = U_\alpha(t, t_0) S_-(0) W_\alpha(t_0) b^+(\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1) \ldots b^+(\bar{f}_n \bar{\varphi}_n) \theta$$

может быть представлен в виде

$$\Psi_n(t) = Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n,t} \Phi + \pi(t), \tag{41.29}$$

где

$$Q_s^{i,t} = Q_s^t(f_i, \varphi_i, \alpha);$$
$$\|\pi(t)\| \leqslant C|t - t_0|\alpha^2;$$

число C не зависит от t, t_0 и α.

Легко видеть, что вектор $\Psi_n(t)$ не зависит от t_0, если t_0 остается меньше, чем $-\Delta/\alpha$, поэтому можно считать, что $t_0 = [-\Delta/\alpha]$. Предположим, что t — целое число, и дадим доказательство соотношения (41.29) с помощью индукции по t; переход к случаю нецелого t не вызывает затруднений.

Итак, пусть

$$\Psi_n(t) \approx Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n,t} \Phi. \tag{41.30}$$

Используя равенство (41.27), заключаем, что

$$\begin{aligned}
\Psi_n(t+1) &= U_\alpha(t+1, t) \Psi_n(t) \approx \\
&\approx U_\alpha(t+1, t) Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n,t} \Phi = \\
&= U_\alpha(t+1, t) Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n-1,t} U_\alpha(t, t+1) U_\alpha(t+1, t) Q_s^{n,t} \Phi \approx \\
&\approx U_\alpha(t+1, t) Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n-2,t} U_\alpha(t, t+1) U_\alpha(t+1, t) Q_s^{n-1,t} \times \\
&\times U_\alpha(t, t+1) Q_s^{n,t+1} \Phi.
\end{aligned} \tag{41.31}$$

Дополнительная ошибка, которая возникает при переходе от приближенного равенства (41.30) к приближенному равенству (41.31) в силу (41.27), может быть записана в форме

$$U_\alpha(t+1, t) Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n-1,t} U_\alpha(t, t+1) R_s(t, t+1),$$

где $\|R_s(t, t+1)\| \leqslant C\alpha^{s+1}(1 + |t|^{3/2})$ и всякая полунорма оператора $Q_s^{i,t}$ в $\mathcal{A}$ не превышает $C(1 + |t|^{3/2})$ [последнее утверждение вытекает из (41.24)]. Используя эти замечания и неравенства $|t| \leqslant |t_0| = \left|\left[-\frac{\Delta}{\alpha}\right]\right|$, $s \geqslant \frac{3}{2} n + 1$, можно доказать, что при переходе от (41.30) к (41.31) ошибка увеличилась не более чем на $\mathrm{const}\,\alpha^2$.

Далее с помощью леммы 12 убеждаемся, что

$$\begin{aligned}
\Psi_n(t+1) &\approx U_\alpha(t+1, t) Q_s^{1,t} \ldots Q_s^{n-2,t} \times \\
&\times U_\alpha(t, t+1) Q_s^{n,t+1} U_\alpha(t+1, t) Q_s^{n-1,t} \Phi.
\end{aligned} \tag{41.32}$$

Дополнительная ошибка при переходе от (41.31) к (41.32) также не превышает $\mathrm{const}\,\alpha^2$ (более того, эта ошибка не превышает $\mathrm{const}\,\alpha^r$, где r — любое). Чтобы установить это, следует привлечь кроме леммы 12 неравенство $t < -a\alpha^{-\varepsilon}$ и указанную выше оценку для $Q_s^{l,t}$.

Снова пользуясь равенством (41.27), получаем

$$\Psi_n(t+1) \approx U_\alpha(t+1, t)\, Q_s^{1,t} \ldots$$
$$\ldots Q_s^{n-2,t}\, U_\alpha(t, t+1)\, Q_s^{n,t+1}\, Q_s^{n-1,t+1}\, \Phi.$$

Используя несколько раз равенство (41.27) и лемму 12, приходим к выводу, что

$$\Psi_n(t+1) \approx Q_s^{n,t+1} \ldots Q_s^{1,t+1}\, \Phi \approx$$
$$\approx Q_s^{1,t+1} \ldots Q_s^{n,t+1}\, \Phi. \qquad (41.33)$$

Ошибка, сделанная при каждом из преобразований, не превышает const α^2. Поэтому ошибка при переходе от приближенного равенства (41.30) к приближенному равенству (41.33) увеличивается не более чем на const α^2. Таким образом, совершен шаг индукции. Поскольку при $t = t_0$ равенство (41.29) очевидно, лемма 13 доказана.

Теперь нетрудно доказать основной результат этого параграфа.

Возьмем в формулировке леммы 13 $t = -\frac{\delta}{\alpha}$, где число δ таково, что $h(\tau) \equiv 1$ при $-\delta \leqslant \tau \leqslant \delta$. Тогда можно утверждать, что

$$\tilde{\varphi}_i^{t,\alpha}(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}, t) =$$
$$= (2\pi)^{-3} \int \varphi_i(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\,\omega(\mathbf{k}\,|\,1)\, t)\, d\mathbf{k}; \qquad (41.34)$$

$$\Psi_n(t) \approx \prod_{i=1}^{n} \left(\int \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}, t) \left(\sum_{j=0}^{s} \alpha^j D_j^{f_i, -\delta}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \right) \Phi;$$
$$D_0^{f_i, -\delta} = B_1^{f_i};$$
$$D_j^{f_i, -\delta} = B_1^{\lambda_j^{-\delta} f_i}. \qquad (41.35)$$

Ошибка в (41.34) не превышает const $\left(-\frac{\delta}{\alpha} - \left[-\frac{\Delta}{\alpha}\right]\right)\alpha^2 =$ $=$ const α, равенство (41.35) вытекает из замечания к лемме 8.

Из определения матрицы Мёллера S_- и из соотношений (41.34), (41.35) получаем

$$S_-(1)\, b^+(\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1) \ldots b^+(\bar{f}_n \bar{\varphi}_n)\, \theta =$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}, t)\, B_1^{f_i}(\mathbf{x}, t\,|\,1)\, d\mathbf{x} \right) \Phi =$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \exp(i H(1)\, t) \prod_{i=1}^{n} \left(\int \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}, t)\, B_1^{f_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right) \Phi =$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \exp(-i H(1)\, t) \prod_{i=1}^{n} \left(\int \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}, t)\, D_0^{f_i, -\delta}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right) \Phi =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \exp\left(-i H(1) \frac{\delta}{\alpha}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(\int \tilde{\varphi}_i\left(\mathbf{x}, -\frac{\delta}{\alpha}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{j=0}^{s} \alpha^j D_j^{f_i, -\delta}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \right) \Phi =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \exp\left(-i H(1) \frac{\delta}{\alpha}\right) \Psi_n\left(-\frac{\delta}{\alpha}\right) =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} U_\alpha(0, t_0)\, S_-(0)\, W_\alpha(t_0)\, b^+(\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1) \ldots b^+(\bar{f}_n \bar{\varphi}_n)\, \theta. \qquad (41.36)$$

Для того чтобы вывести равенство (41.6) из соотношения (41.36), достаточно вспомнить, что в случае, если $\lim A_n x = Ax$ для всюду плотного множества векторов x и нормы операторов A_n равномерно ограничены, можно утверждать, что $\operatorname{slim} A_n = A$. Соотношение (41.7) доказывается совершенно аналогично.

ГЛАВА 11

ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ (ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)

§ 42. Связь аксиоматической теории с гамильтоновым формализмом

Пусть H — трансляционно инвариантный формальный гамильтониан вида (28.3). Предположим, что существует операторная реализация $(\mathscr{H}, \hat{H}, \hat{\mathbf{P}}, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t), \Phi)$ гамильтониана H (напомним, что здесь $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство; $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ — операторы энергии и импульса; $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ — операторные обобщенные функции; Φ — основное состояние).

Рассмотрим семейство $\mathscr{A}$, состоящее из двух операторных обобщенных функций

$$a(\mathbf{x}, 1, t) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, a(\mathbf{k}, 1, t)\, d\mathbf{k};$$

$$a(\mathbf{x}, -1, t) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, a(\mathbf{k}, -1, t)\, d\mathbf{k}.$$

Под *матрицей рассеяния формального гамильтониана* H будем понимать матрицу рассеяния, построенную по операторам $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ и семейству $\mathscr{A}$ (при этом предполагается, что семейство $\mathscr{A}$ и операторы $\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}$ удовлетворяют перечисленным в § 40 требованиям, гарантирующим существование матрицы рассеяния).

Вопросом о связи этого определения с определениями матрицы рассеяния, предложенными в гл. 9, займемся позднее. Сейчас заметим только, что в случае, если для гамильтониана H выполнены предположения § 32, то из результатов § 38 вытекает совпадение матрицы рассеяния, построенной в § 32, с определенной только что матрицей рассеяния.

В самом деле, пусть $\lambda(\mathbf{k}) \in \mathscr{S}(E^3)$, $f(\mathbf{k})$ и $\mu(\tau)$ — гладкие финитные функции, $B = \int \lambda(\mathbf{k})\, \mu(\tau)\, a^+(\mathbf{k}, \tau)\, d\mathbf{k} d\tau$. Очевидно, что

$$\int \tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t)\, B(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int \tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t) \exp(-\mathrm{i}\,\mathbf{kx})\, \lambda(\mathbf{k})\, \mu(\tau)\, a^+(\mathbf{k}, t+\tau)\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{x}\, d\tau =$$
$$= \int f(\mathbf{k})\, \lambda(\mathbf{k})\, \mu(\tau)\, a^+(\mathbf{k}, t+\tau)\, d\mathbf{k}\, d\tau$$

и, стало быть, в условиях § 32

$$\operatorname*{wlim}_{t\to-\infty} \int \tilde{f}(\mathbf{x}\,|\,t)\, B(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int f(\mathbf{k})\, \lambda(\mathbf{k})\, \mu(\tau)\, \overline{\Lambda}^{-1}(\mathbf{k})\, a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}, \tau)\, d\mathbf{k}\, d\tau =$$
$$= \int f(\mathbf{k})\, \lambda(\mathbf{k})\, \tilde{\mu}(\omega(\mathbf{k}))\, \overline{\Lambda}^{-1}(\mathbf{k})\, a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}, \qquad (42.1)$$

где $a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}, \tau)$, $a_{\mathrm{in}}(\mathbf{k}, \tau)$ — in-операторы, определенные в § 32; $\tilde{\mu}(\omega(\mathbf{k})) = \int \mu(\tau) \exp(\mathrm{i}\omega(\mathbf{k})\tau)\, d\tau$.

С помощью соотношений (32.8) и (32.11) убеждаемся, что

$$\langle B\Phi, a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{p})\Phi\rangle =$$
$$= \int \lambda(\mathbf{k})\, \mu(\tau) \langle a^+(\mathbf{k}, \tau)\Phi, a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{p})\Phi\rangle\, d\mathbf{k}\, d\tau =$$
$$= \int \lambda(\mathbf{k})\, \tilde{\mu}(\omega(\mathbf{k})) \langle a^+(\mathbf{k})\Phi, a^+_{\mathrm{in}}(\mathbf{p})\Phi\rangle\, d\mathbf{k} =$$
$$= \lambda(\mathbf{p})\, \tilde{\mu}(\omega(\mathbf{p}))\, \rho(1, \mathbf{p}) = \lambda(\mathbf{p})\, \tilde{\mu}(\omega(\mathbf{p}))\, \overline{\Lambda}^{-1}(\mathbf{p}). \qquad (42.2)$$

Сравнивая равенства (42.1), (42.2) с соотношением (38.2), убеждаемся, что in-операторы, определенные в § 32, совпадают с in-операторами, определенными в § 38; аналогичное утверждение справедливо для out-операторов и, стало быть, для матрицы рассеяния.

Существенно отметить, однако, что данное сейчас определение матрицы рассеяния в отличие от определения § 32 пригодно и при наличии связанных состояний (под связанным состоянием здесь понимаем одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k})$, удовлетворяющее условию $\langle \Phi(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}', t)\Phi\rangle = 0$).

Выяснить, существует ли операторная реализация формального гамильтониана H и удовлетворяют ли операторы $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ и семейство $\mathscr{A}$ требованиям § 40, оказывается нелегкой задачей.

В настоящей главе покажем, что на эти вопросы можно получить ответ в рамках теории возмущений; точнее, будем строить интересующие объекты как формальные степенные ряды по константе связи*.

Рассмотрим формальные эрмитовы трансляционно инвариантные выражения вида

$$H=H_0+V=\int \varepsilon(\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}+$$
$$+\sum_{r\geqslant 1} g^r \sum_{m,n}\int v^{(r)}_{m,n}(\mathbf{k}_1,\ \dots,\ \mathbf{k}_m\,|\,\mathbf{p}_1,\ \dots,\ \mathbf{p}_n)\times$$
$$\times\,\delta(\mathbf{k}_1+\ \dots\ +\mathbf{k}_m-\mathbf{p}_1-\dots-\mathbf{p}_n)\times$$
$$\times\,a^+(\mathbf{k}_1)\dots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{p}_1)\dots a(\mathbf{p}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p}. \qquad (42.3)$$

$a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ — как всегда, символы, удовлетворяющие CCR. Будем считать, что $\varepsilon(\mathbf{k})$ — гладкая функция, все производные которой имеют не более чем степенной рост, а функции $v^{(r)}_{m,n}$ принадлежат пространству $\mathcal{S}$ и для каждого r только конечное число функции $v^{(r)}_{m,n}$ отлично от тождественного нуля. Число g будем называть константой связи. В случае, если сумма в (42.3) бесконечна, будем понимать ее просто как формальный ряд, не делая никаких предположений о его сходимости. *Совокупность формальных выражений, обладающих описанными свойствами, обозначим буквой* $\mathcal{M}$.

Выражение $H\in\mathcal{M}$ можно рассматривать как формальный трансляционно инвариантный гамильтониан (наиболее интересными являются те гамильтонианы из множества $\mathcal{M}$, которые могут быть записаны в виде $H=H_0+gW$, где W уже не содержит константы связи g; однако будет удобно рассматривать сразу общий случай).

Операторной реализацией гамильтониана $H\in\mathcal{M}$ будем называть гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором действуют оператор энергии $\hat{H}=\sum H_r g^r$, оператор импульса $\hat{\mathbf{P}}$, обобщенные операторные функции $a(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)=\sum g^r a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)$ и вектор Φ, удовлетворяющие в каждом порядке по g условиям определения операторной реализации (ряды $\sum H_r g^r$ и $\sum g^r a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)$ понимаем как формальные степенные ряды по g, не делая никаких предположений относительно сходимости). Предполагается, что по оператору $\hat{H}=\sum g^r H_r$ можно построить операторы $\exp(i\hat{H}t)=\sum g^r U_r(t)$, образующие группу унитарных операторов*. Операторы $U_r(t)$ и операторы $\int f(\mathbf{k})\,a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)\,d\mathbf{k}$ должны быть определены на одном и том же множестве D и переводить это множество в себя; множество D должно содержать вектор Φ.

В § 44 будет показано, что *для любого гамильтониана $H\in\mathcal{M}$ может быть построена операторная реализация в описанном выше смысле* (для гамильтонианов, порождающих поляризацию вакуума, предположим, что функция $\varepsilon(\mathbf{k})$, фигурирующая в определении гамильтониана H_0, удовлетворяет требованию $\varepsilon(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)<\varepsilon(\mathbf{k}_1)+\varepsilon(\mathbf{k}_2)$, однако это требование не является необходимым).

Произвольный трансляционно инвариантный гамильтониан $H=H_0+W$ можно включить в семейство гамильтонианов H_0+gW, зависящее от параметра g. Если гамильтониан H_0+W удовлетворяет указанным в § 28 условиям, при которых гейзенберговские уравнения (28.4) имеют смысл, то выражение $H_0+gW\in\mathcal{M}$; поэтому для таких гамильтонианов операторная реализация может быть построена в рамках теории возмущений.

Далее, в § 44 будет доказано, что *операторы* $\hat{H}=\sum g^r H_r$, $\hat{\mathbf{P}}$ *и семейство операторных обобщенных функций, состоящее из двух функций* $a(\mathrm{x},\ \varepsilon,\ t)=\sum g^r a_r(\mathrm{x},\ \varepsilon,\ t)=\sum g^r\times\times\int\exp(i\varepsilon\mathbf{kx})\,a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)\,d\mathbf{k}$, $\varepsilon=\pm 1$, *удовлетворяют в каждом порядке теории возмущений предположениям* § 40. При этом будет предполагаться, что рассматриваемый гамильтониан принадлежит подмножеству $\widetilde{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$, которое характеризуется тем, что для входящих в него гамильтонианов функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ удовлетворяет условию $\varepsilon(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)<$

---

* Иначе говоря, будем рассматривать формальные выражения вида $\sum_n A_n g^n$, где A_n — числа, векторы или операторы; если A_n — операторы, то будем считать их определенными на одном и том же множестве. Под суммой и произведением двух (числовых или операторных) формальных рядов $\sum_n A_n g^n$ и $\sum_n B_n g^n$ понимаем ряды $\sum_n(A_n+B_n)\,g^n$ и $\sum_n(\sum_{k+l=n}A_k B_l)\,g^n$. В дальнейшем в этой главе все рассуждения будем проводить в рамках теории возмущений (не всегда оговаривая это явно). Для того чтобы придать точный математический смысл результатам настоящей главы и их доказательствам, все доказываемые соотношения следует понимать как равенства формальных степенных рядов.

* Естественно говорить, что операторы $\sum g^r U_r(t)$ образуют группу унитарных операторов, если

$$\sum_{k+l=r} U_k(t)\,U_l(t')=U_r(t+t');$$
$$U_k(0)=0 \text{ при } k>0;$$
$$U_0(t)=1.$$

$< \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$ и не является линейной ни на каком открытом множестве (требование $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$ здесь уже оказывается существенным).

Отсюда можно вывести, что матрицы Мёллера и матрица рассеяния существуют в рамках теории возмущений (точнее говоря, матрицы Мёллера $S_\pm$ и матрица рассеяния S могут быть построены как формальные степенные ряды $S_\pm = \sum g^r S_\pm^{(r)}$, $S = \sum g^r S^{(r)}$). Для того чтобы сделать этот вывод, следует проанализировать построение матриц Мёллера, указанное в гл. 10, и убедиться, что утверждения, высказанные в этой главе, сохраняют свою силу, если фигурирующие в них объекты понимать как формальные ряды по g. При этом, однако, следует модифицировать построение матрицы Мёллера, считая, что функции $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_n(\mathbf{k})$, фигурирующие в формуле (36.1), образуют неперекрывающееся семейство функций* (см. подробнее в § 46).

§ 43. Гейзенберговские уравнения. Канонические преобразования

Рассмотрим формальный трансляционно инвариантный гамильтониан H, принадлежащий описанному в § 42 классу $\mathcal{M}_1$. Как отмечалось в § 28, если $v_{m,0}^{(r)} \not\equiv 0$ (гамильтониан порождает поляризацию вакуума), выражение H не определяет самосопряженного оператора в фоковском пространстве. Более того, оператор $\exp(\mathrm{i}Ht)$ в этом случае нельзя построить даже в рамках теории возмущений (в качестве формального степенного ряда по g).

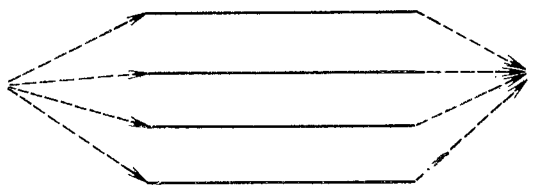

Рис. 4

В этом легко убедиться, например, вычисляя оператор $S(t, t_0) = \exp(\mathrm{i}H_0t)\exp(-\mathrm{i}H(t-t_0))\exp(-\mathrm{i}H_0t_0)$ с помощью развитой в § 23 диаграммной техники. В самом деле, например, при вычислении диаграммы, изображенной на рис. 4, сталкиваемся с бессмысленным выражением

$$\delta(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{m+1}) \ldots \delta(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_{2m})\,\delta(\mathbf{k}_{m+1} + \ldots + \mathbf{k}_{2m}) = \delta^2(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{m+1}) \ldots \delta(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_{2m}).$$

Аналогичная ситуация имеет место для любой диаграммы, не имеющей внешних вершин (вакуумной петли): в ее подынтегральном выражении содержится произведение δ-функций, аргументы которых связаны линейной зависимостью, что делает рассматриваемое выражение бессмысленным.

Таким образом, даже по теории возмущений нельзя написать решение уравнения Шредингера $\mathrm{i}\frac{d\psi}{dt} = H\psi$.

Однако по выражению (42.3) можно формально написать уравнения Гейзенберга, и они оказываются уже вполне осмысленными, во всяком случае в рамках теории возмущений.

В самом деле, уравнения Гейзенберга

$$\frac{\partial a(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \mathrm{i}[H, a(\mathbf{k}, t)]; \tag{43.1}$$

$$\frac{\partial a^+(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \mathrm{i}[H, a^+(\mathbf{k}, t)] \tag{43.2}$$

можно записать в виде

$$\mathrm{i}\frac{\partial a(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}, t) = I(\mathbf{k}, t); \tag{43.3}$$

$$-\mathrm{i}\frac{\partial a^+(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{k}, t) = I^+(\mathbf{k}, t), \tag{43.4}$$

где

$$I(\mathbf{k}, t) = \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m, n} m \int v_{m,n}^{(r)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{m-1} \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times\, \delta\left(\mathbf{k} + \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j\right) a^+(\mathbf{k}_1, t) \ldots$$
$$\ldots a^+(\mathbf{k}_{m-1}, t)\, a(\mathbf{p}_1, t) \ldots a(\mathbf{p}_n, t)\, d^{m-1}\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p}.$$

(Эти уравнения получаются, если вычислить коммутаторы в правой части уравнений (43.1), (43.2) с помощью CCR, закона дистрибутивности и соотношения

$$[AB, C] = [A, C]\,B + A\,[B, C].)$$

Вместе с начальными условиями $a^+(\mathbf{k}, 0) = a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k}, 0) = a(\mathbf{k})$ уравнения (43.3), (43.4) могут быть переписаны в форме

$$a(\mathbf{k}, t) = \exp(-\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\,a(\mathbf{k}) + \int_0^t \exp(-\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})(t - \tau))\,I(\mathbf{k}, \tau)\,d\tau; \tag{43.5}$$

* Эта модификация определения матрицы Мёллера использована с другой целью в n° 5 § 40.

$$a^+(\mathbf{k}, t) = \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\,a^+(\mathbf{k}) + \\ + \int_0^t \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})(t-\tau))\,I^+(\mathbf{k}, \tau)\,d\tau. \qquad (43.6)$$

Решения уравнений (43.5), (43.6) следует искать в виде

$$a(\mathbf{k}, t) = \exp(-\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\,a(\mathbf{k}) + \\ + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m,\,n} \int f^{r,\,t}_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{p}_1) \ldots \\ \ldots a(\mathbf{p}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p}; \qquad (43.7)$$

$$a^+(\mathbf{k}, t) = \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\,a^+(\mathbf{k}) + \\ + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m,\,n} \int \overline{f^{r,\,t}_{m,\,n}}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) a^+(\mathbf{p}_1) \ldots a^+(\mathbf{p}_n)\,a(\mathbf{k}_1) \ldots \\ \ldots a(\mathbf{k}_m)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p}. \qquad (43.8)$$

Подставляя эти выражения для $a(\mathbf{k}, t)$, $a^+(\mathbf{k}, t)$ в (43.5), (43.6) и приравнивая члены при одинаковых степенях g, получим рекуррентные формулы для $f^{r,\,t}_{m,\,n}$, из которых видно, что функции $f^{r,\,s}_{m,\,n}$ принадлежат пространству $\mathscr{S}$ и в каждом порядке по g (т. е. для каждого r) лишь конечное число функций $f^{r,\,t}_{m,\,n}$ отлично от тождественного нуля.

(Здесь рассматриваются $a(\mathbf{k}, t)$ как формальные выражения, составленные из символов $a(\mathbf{k})$, $a^+(\mathbf{k})$, подчиненных CCR; все возникающие при решении выражения приводятся к нормальной форме с помощью CCR. Ряды по g рассматриваются как формальные.)

Нетрудно проверить, что $\|f^{r,\,t}_{m,\,n}\|_{\alpha,\,\beta}$ *возрастает не быстрее, чем некоторая степень* t, т. е.

$$\|f^{r,\,t}_{m,\,n}\|_{\alpha,\,\beta} \leqslant C(1 + |t|^k) \qquad (43.9)$$

(здесь $\|\,\|_{\alpha,\,\beta}$ — норма в пространстве $\mathscr{S}$; C и k зависят от r, α, β).

Оценка (43.9) вытекает из следующего утверждения: *Пусть $\sigma(k_1, \ldots, k_n)$ — гладкая действительная функция, все производные которой имеют не более чем степенной рост. Тогда для любой нормы $\|\,\|_{\alpha,\,\beta}$ в пространстве $\mathscr{S}$ найдутся такая норма $\|\,\|_{\gamma,\,\delta}$ в пространстве $\mathscr{S}$ и такие числа C, r, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$*

$$\|\exp(\mathrm{i}\,\sigma(k_1, \ldots, k_n)\,t)\,\varphi(k_1, \ldots, k_n)\|_{\alpha,\,\beta} \leqslant \\ \leqslant C(1 + |t|^r)\,\|\varphi(k_1, \ldots, k_n)\|_{\gamma,\,\delta}. \qquad (43.10)$$

В самом деле, применяя неравенство (43.10), видим, что норма функции

$$g_t(k_1, \ldots, k_n) = \int_0^t \exp(\mathrm{i}\,\sigma(k_1, \ldots, k_n)(t-\tau))\,h_\tau(k_1, \ldots, k_n)\,d\tau$$

удовлетворяют неравенству

$$\|g_t\|_{\alpha,\,\beta} \leqslant C\,|t|\,(1 + |t|^r) \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|h_\tau\|_{\gamma,\,\delta},$$

с помощью которого оценка (43.9) получается по индукции. Нетрудно показать, что при фиксированном t выражения $a^+(\mathbf{k}, t)$, $a(\mathbf{k}, t)$ удовлетворяют CCR:

$$[a(\mathbf{k}, t), a(\mathbf{k}', t)] = [a^+(\mathbf{k}, t), a^+(\mathbf{k}', t)] = 0; \\ [a(\mathbf{k}, t), a^+(\mathbf{k}', t)] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \qquad (43.11)$$

(существенно отметить, что при вычислении фигурирующих в (43.11) коммутаторов не возникает никаких математически неопределенных выражений: в каждом порядке имеем дело с конечными суммами сходящихся интегралов). Для того чтобы проверить соотношения (43.11), проще всего продифференцировать их по t; например:

$$\frac{\partial}{\partial t}[a(\mathbf{k}, t), a^+(\mathbf{k}', t)] = \mathrm{i}\,[[H, a(\mathbf{k}, t)], a^+(\mathbf{k}', t)] + \\ + \mathrm{i}\,[a(\mathbf{k}, t), [H, a^+(\mathbf{k}', t)]] = i\,[H, [a(\mathbf{k}, t), a^+(\mathbf{k}', t)]],$$

что вместе с начальным условием $[a(\mathbf{k}, 0), a^+(\mathbf{k}', 0)] = [a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ позволяет заключить, что $[a(\mathbf{k}, t), a^+(\mathbf{k}', t)] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

Будем говорить, что формулы

$$b(\mathbf{k}) = \alpha(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}) + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m,\,n} \int h^{(r)}_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) a^+(\mathbf{k}_1) \ldots \\ \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p}; \qquad (43.12)$$

$$b^+(\mathbf{k}) = \overline{\alpha}(\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{k}) + \\ + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m,\,n} \int \overline{h}^{(r)}_{m,\,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \\ \times \delta\left(\mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j\right) a^+(\mathbf{p}_1) \ldots a^+(\mathbf{p}_n) \times \\ \times a(\mathbf{k}_1) \ldots a(\mathbf{k}_m)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p}, \qquad (43.13)$$

где $\alpha(\mathbf{k})$ — гладкая функция, все производные которой растут не быстрее степени $|\mathbf{k}|$, $h_{m,n}^{(r)} \in \mathscr{S}$ и для каждого r все функции $h_{m,n}^{(r)}$, кроме конечного числа, тождественно равны нулю, задают *каноническое преобразование*, если выполнены соотношения

$$[b(\mathbf{k}),\ b(\mathbf{k}')] = [b^+(\mathbf{k}),\ b^+(\mathbf{k}')] = 0;$$

$$[b(\mathbf{k}),\ b^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Грубо говоря, каноническое преобразование — это переход от символов $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, удовлетворяющих CCR, к новым символам $b^+(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, также удовлетворяющим CCR.

Нетрудно убедиться, что *канонические преобразования образуют группу*. Это значит, что в результате последовательного выполнения двух канонических преобразований λ и μ получаем снова каноническое преобразование $\lambda\mu$ и что преобразование, обратное к каноническому, снова является каноническим.

Выше было показано, что переход от $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ к гейзенберговским операторам $a^+(\mathbf{k}, t)$, $a(\mathbf{k}, t)$ является каноническим преобразованием; таким образом, *всякое выражение $H \in \mathscr{M}$ определяет однопараметрическое семейство канонических преобразований*, эти преобразования будем обозначать σ_H^t.

Полезно отметить, что канонические преобразования σ_H^t можно получить предельным переходом от конечного объема. Именно, пользуясь гамильтонианом H_Ω, получающимся при обрезании H по объему, введем операторы $a_\mathbf{k}(t)$, $a_\mathbf{k}^+(t)$, где $\mathbf{k} \in T_\Omega$, формулами

$$a_\mathbf{k}(t) = \exp(\mathrm{i}\, H_\Omega t)\, a_\mathbf{k} \exp(-\mathrm{i}\, H_\Omega t);$$

$$a_\mathbf{k}^+(t) = \exp(\mathrm{i}\, H_\Omega t)\, a_\mathbf{k}^+ \exp(-\mathrm{i}\, H_\Omega t).$$

Операторы $a_\mathbf{k}^+(t)$, $a_\mathbf{k}(t)$ при фиксированном t удовлетворяют, очевидно, CCR; переход от операторов $a_\mathbf{k}^+$, $a_\mathbf{k}$ к операторам $a_\mathbf{k}^+(t)$, $a_\mathbf{k}(t)$ может быть назван каноническим преобразованием в объеме Ω. Запишем операторы $a_\mathbf{k}^+(t)$, $a_\mathbf{k}(t)$ в нормальной форме:

$$a_\mathbf{k}(t) = \exp(-\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\, t)\, a_\mathbf{k} + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{\substack{\mathbf{k}_i \in T_\Omega \\ \mathbf{p}_j \in T_\Omega}} {}^{\Omega}f_{m,n}^{r,t}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times\, \delta^{\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m}_{\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}(m+n-2)} a_{\mathbf{k}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{k}_m}^+ a_{\mathbf{p}_1} \ldots a_{\mathbf{p}_n};$$

$$a_\mathbf{k}^+(t) = \exp(\mathrm{i}\,\varepsilon(\mathbf{k})\, t)\, a_\mathbf{k}^+ + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{\substack{\mathbf{k}_i \in T_\Omega \\ \mathbf{p}_j \in T_\Omega}} {}^{\Omega}\bar{f}_{m,n}^{r,t}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \,|\, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times\, \delta^{\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m}_{\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_n} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}(m+n-2)} a_{\mathbf{p}_1}^+ \ldots a_{\mathbf{p}_n}^+ a_{\mathbf{k}_1} \ldots a_{\mathbf{k}_m}.$$

Для функций ${}^{\Omega}f_{m,n}^{r,t}$ так же, как и для введенных выше функций $f_{m,n}^{r,t}$, из гейзенберговских уравнений можно получить рекуррентные формулы. Легко убедиться, что рекуррентные формулы допускают предельный переход $\Omega \to \infty$, и получить отсюда, что

$$\lim_{\Omega \to \infty} {}^{\Omega}f_{m,n}^{r,t} = f_{m,n}^{r,t}.$$

Это равенство мы имели в виду говоря, что каноническое преобразование σ_H^t получается предельным переходом от конечного объема.

Пусть заданы гамильтониан $H \in \mathscr{M}$ с помощью формулы (42.3) и каноническое преобразование λ соотношениями (43.12), (43.13).

Подставим в H вместо символов $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ выражения $b^+(\mathbf{k})$, $b(\mathbf{k})$, определяемые формулами (43.12), (43.13), и приведем полученное формальное выражение к нормальной форме, пользуясь CCR, отбрасывая получающиеся при этом бесконечные константы.

Легко видеть, что мы придем к выражению $\widetilde{H} \in \mathscr{M}$; будем говорить, что гамильтониан $\widetilde{H}$ получается из гамильтониана H с помощью канонического преобразования λ, и писать $\widetilde{H} = \lambda(H)$.

Заметим, что если каноническое преобразование λ может быть записано в виде $\lambda = \sigma_A^t$, где $A \in \mathscr{M}$, то

$$\widetilde{H} = \lambda(H) = \lim_{\Omega \to \infty} \lambda_\Omega (H),$$

где

$$\lambda_\Omega (H) = \exp(\mathrm{i}\, tA_\Omega) H_\Omega \exp(-\mathrm{i}\, tA_\Omega) - c_\Omega$$

[предел понимается в смысле стремления коэффициентных функций в нормальной форме оператора $\lambda_\Omega (H)$ к коэффициентным функциям выражения $\lambda (H)$]. Справедливость этого замечания вытекает из того, что, как сказано выше, каноническое преобразование σ_A^t можно получить предельным переходом от конечного объема; константа c_Ω возникает благодаря тому, что условились отбрасывать бесконечные константы при проведении канонического преобразования; можно считать, что

$$c_\Omega = \langle \exp(\mathrm{i}\, tA_\Omega) H_\Omega \exp(-\mathrm{i}\, tA_\Omega)\theta,\ \theta\rangle.$$

Если формально вычислить коммутатор $[A, B]$ двух выражеиий $A, B \in \mathscr{M}$, то снова получится выражение, принадлежащее множеству $\mathscr{M}$. Легко проверить, что множество $\mathscr{M}$ с введенной только что операцией $[A, B]$ и естественным образом определенными операциями сложения и умножения на число представляет собой алгебру Ли. Группу канонических преобразований $\mathscr{G}$ можно рассматривать как бесконечномерную группу Ли. Можно проверить, что $\mathscr{M}$ является алгеброй Ли группы канонических преобразований. Канонические преобразования σ_H^t образуют, очевидно, однопараметрическую подгруппу группы $\mathscr{G}$, соответствующую элементу H алгебры Ли $\mathscr{M}$; сопоставляя элементу $H \in \mathscr{M}$ каноническое преобразование σ_H^1, получаем экспоненциальное отображение $\mathscr{M}$ в $\mathscr{G}$. Всякий элемент группы Ли определяет, как известно, автоморфизм соответствующей алгебры Ли; в интересующем нас случае каждому каноническому преобразованию λ сопоставляется автоморфизм алгебры Ли $\mathscr{M}$, при котором выражение H переходит в выражение $\lambda (H)$.

§ 44. Построение операторной реализации

Рассмотрим прежде всего гамильтониан $H = \sum H_r g^r \in \mathscr{M}$, не порождающий поляризации вакуума. Формальные выражения H_r определяют тогда эрмитовы операторы H_r в фоковском пространстве с областью определения $\mathscr{S}_\infty$ (см. § 13, в котором показано также, что в случае наличия поляризации вакуума это утверждение перестает быть справедливым). В рамках теории возмущений можно построить

оператор $\exp(\mathrm{i}Ht) = \sum g^r U_r(t)$, причем операторы $U_r(t)$ определены на $\mathscr{S}_\infty$ и переводят $\mathscr{S}_\infty$ в себя. Доказательство может быть основано на диаграммной технике, описанной в § 23; грубо говоря, оно сводится к замечанию, что в рассматриваемом случае все диаграммы представляют собой математически осмысленные выражения. (При построении ряда теории возмущений для $\exp(\mathrm{i}Ht)$ следует представить гамильтониан H в виде $H_0' + V'$, где

$$H_0' = H_0 + \sum_{r \geqslant 1} g^r \int v_{1,1}^{(r)} (\mathbf{k})\, a^+ (\mathbf{k})\, a (\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

и воспользоваться диаграммной техникой для оператора $S(0,\ t) = \exp(-\mathrm{i}H_0't) \exp(\mathrm{i}Ht)$.) Другое доказательство изложено в § 46.

Операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t) = \sum g^r a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)$ определим формулой

$$a(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t) = \exp(\mathrm{i}\, Ht)\, a(\mathbf{k},\ \varepsilon) \exp(-\mathrm{i}\, Ht),$$

где $a(\mathbf{k},\ 1) = a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k},\ -1) = a(\mathbf{k})$ — операторы рождения и уничтожения в фоковском пространстве. Поскольку операторы $U_r(t)$ и $\int f(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k},\ \varepsilon)\, d\mathbf{k}$ переводят множество $\mathscr{S}_\infty$ в себя, операторы

$$\int f(\mathbf{k})\, a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)\, d\mathbf{k} = \sum_{s=0}^{r} U_s(t) \left(\int f(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k},\ \varepsilon)\, d\mathbf{k}\right) U_{r-s}(-t)$$

обладают тем же свойством для любой функции $f \in \mathscr{S}$.

Очевидно, что оператор энергии $H = \sum H_r g^r$, оператор импульса $\mathbf{P} = \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$, операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t) = \sum g^r a_r(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t)$ и вектор $\Phi = \theta$ образуют *операторную реализацию* гамильтониана $H \in \mathscr{M}$.

Построение операторной реализации гамильтониана, порождающего поляризацию вакуума, проведем с помощью следующего утверждения.

Пусть λ — каноническое преобразование, $\widetilde{H} = \lambda(H) \in \mathscr{M}$ — гамильтониан, получающийся из гамильтониана H с помощью канонического преобразования λ. Тогда операторную реализацию гамильтониана H можно получить из операторной реализации $(\mathscr{H},\ \hat{H},\ \hat{\mathbf{P}},\ \tilde{a}(\mathbf{k},\ \varepsilon,\ t),\ \Phi)$ гамильтониана $\widetilde{H}$, оставив пространство $\mathscr{H}$, операторы энергии и импульса $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ и вектор Φ теми же самыми и заменив опера-

торные обобщенные функции $\widetilde{a}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ операторными обобщенными функциями

$$a(\mathbf{k}, -1, t) = a(\mathbf{k}, t) = \alpha(\mathbf{k})\widetilde{a}(\mathbf{k}, t) + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m, n} \int h_{m, n}^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \delta\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j - \mathbf{k}\right) \widetilde{a}^+(\mathbf{k}_1, t) \ldots \widetilde{a}^+(\mathbf{k}_m, t)\widetilde{a}(\mathbf{p}_1, t) \ldots \widetilde{a}(\mathbf{p}_n, t)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p}; \tag{44.1}$$

$$a(\mathbf{k}, 1, t) = a^+(\mathbf{k}, t) = \bar{\alpha}(\mathbf{k})\widetilde{a}^+(\mathbf{k}, t) + \sum_{r \geqslant 1} g^r \sum_{m, n} \int \bar{h}_{m, n}^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \delta\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j - \mathbf{k}\right) \widetilde{a}^+(\mathbf{p}_1, t) \ldots \widetilde{a}^+(\mathbf{p}_n, t)\widetilde{a}(\mathbf{k}_1, t) \ldots \widetilde{a}(\mathbf{k}_m, t)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p}$$

[считаем, что каноническое преобразование λ задается формулами (43.12), (43.13)].

Для того чтобы доказать сформулированное утверждение, заметим, что единственным зависящим от конкретного вида трансляционно инвариантного гамильтониана условием в определении операторной реализации является требование, чтобы операторная обобщенная функция $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ удовлетворяла гейзенберговским уравнениям.

Чтобы проверить, что это требование действительно выполнено, следует продифференцировать равенства (44.1) по t, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial \widetilde{a}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)}{\partial t} = \mathrm{i}\left[\widetilde{H}, \widetilde{a}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\right]$$

в силу определения операторной реализации гамильтониана $\widetilde{H}$. Выражая $\widetilde{a}$ через a с помощью канонического преобразования λ^{-1}, получаем уравнения, которые удовлетворяют $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$; простые, но громоздкие вычисления позволяют привести полученные уравнения к виду

$$\frac{\partial a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)}{\partial t} = \mathrm{i}\,[H, a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)].$$

Будем далее рассматривать гамильтониан $H = H_0 + V \in \mathscr{M}$, считая, что функция $\varepsilon(\mathbf{k})$, фигурирующая в определении гамильтониана H_0, удовлетворяет неравенству $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$. С помощью доказанного выше утверждения можно без труда свести построение операторной реализации этого гамильтониана к уже решенной задаче о построении операторной реализации гамильтониана, не порождающего поляризацию вакуума, если воспользоваться следующим утверждением, доказанным (в других терминах) в § 34.

Пусть гамильтониан $H = H_0 + V \in \mathscr{M}$ и функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ — удовлетворяет условию $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$. Тогда существует такое каноническое преобразование λ, что гамильтониан $H = \lambda(H) \in \mathscr{M}$ может быть представлен в виде

$$\widetilde{H} = H_0 + \widetilde{V}, \tag{44.2}$$

где

$$\widetilde{V} = \sum_{r} g^r \sum_{m, n} \int \widetilde{v}_{m, n}^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m | \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times \delta\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{k}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j\right) a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p},$$

$\widetilde{V}$ не содержит слагаемых типа $(m, 0)$, а также слагаемых типа $(m', 1)$ с $m' \neq 1$ (т. е. $\widetilde{v}_{m, 0}^{(r)} = 0$, $\widetilde{v}_{m', 1}^{(r)} = 0$ при $m' \neq 1$).

Преобразование λ было названо фаддеевским преобразованием; напомним, что оно строилось в виде σ_A^1, где $A \in \mathscr{M}$.

Можно сказать, что *фаддеевское каноническое преобразование гамильтониан H переводит в гамильтониан $\widetilde{H}$, для которого голый вакуум совпадает с одетым вакуумом, голое одночастичное состояние — с одетым одночастичным состоянием.*

Докажем теперь, что *две любые операторные реализации гамильтониана $H \in \mathscr{M}$ унитарно эквивалентны.* С помощью фаддеевского преобразования можно свести задачу к случаю, когда гамильтониан не порождает поляризации вакуума [напомним, что выше было наложено условие $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$]. В самом деле, из двух унитарно неэквивалентных операторных реализаций гамильтониана H с помощью фаддеевского преобразования можно получить две унитарно неэквивалентные операторные реализации гамильтониана, не порождающего поляризации вакуума.

Для того чтобы доказать единственность операторной реализации в случае, если гамильтониан $H \in \mathscr{M}$ не порождает поляризации вакуума, достаточно проверить, что для любой операторной реализации ($\mathscr{H}'$, H', $\mathbf{P}'$, $a'(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, Φ') гамильтониана H выполнено соотношение $a'(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' = 0$ (тогда унитарный оператор U, устанавливающий унитарную эквивалентность этой операторной реализации и реализации, построенной выше, может быть определен как оператор, удовлетворяющий требованиям $Ua(\mathbf{k}, \varepsilon, 0) = a'(\mathbf{k}, \varepsilon, 0)\,U$, $U\Phi = \Phi'$)*. Займемся проверкой соотношения $a'(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' = \left(\sum g^r a'_r(\mathbf{k}, -1, t)\right)\Phi' = 0$. Рассмотрим уравнения для $a'_r(\mathbf{k}, -1, t)$, вытекающие из уравнений Гейзенберга. Легко убедиться, что они имеют вид

$$i\,\frac{\partial a'_r(\mathbf{k}, -1, t)}{\partial t} - \varepsilon(\mathbf{k})\, a'_r(\mathbf{k}, -1, t) = F_r, \qquad (44.3)$$

где F_r — выражение, составленное из $a'_s(\mathbf{k}, 1, t)$ и $a'_s(\mathbf{k}, -1, t)$ с $s < r$. Для того чтобы доказать нужное соотношение, следует убедиться, что $a'_r(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' = 0$; будем проводить доказательство индукцией по r. Предположим, что $a'_s(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' = 0$ при $s < r$. В силу отсутствия поляризации вакуума в каждом слагаемом из выражения F_r справа будет стоять по крайней мере один оператор вида $a'_s(\mathbf{k}, -1, t)$, поэтому $F_r\Phi' = 0$. Применяя равенство (44.3) к вектору Φ, убеждаемся, что

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\, a'_r(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' = \varepsilon(\mathbf{k})\, a'_r(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi',$$

откуда

$$a'_r(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' = \exp(-i\,\varepsilon(\mathbf{k})\,t)\, a'_r(\mathbf{k}, -1, 0)\,\Phi'.$$

* Существование оператора U, удовлетворяющего этим требованиям, вытекает из результатов § 20 (точнее, из их аналогов, касающихся унитарной эквивалентности фоковских представлений CCR, записанных в виде формальных рядов по g). Пользуясь уравнениями Гейзенберга, убеждаемся, что $Ua(\mathbf{k}, \varepsilon, t) = a'(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\,U$. Из условия б) в определении операторной реализации получаем $UH = H'U$, $U\mathbf{P} = \mathbf{P}'U$.

Вычислим теперь среднее значение энергии в состоянии $\int f(\mathbf{k})\, a'(\mathbf{k}, -1, t)\, d\mathbf{k}\Phi'$:

$$\left\langle H' \int f(\mathbf{k})\, a'(\mathbf{k}, -1, t)\, d\mathbf{k}\,\Phi',\ \int f(\mathbf{k})\, a'(\mathbf{k}, -1, t)\, d\mathbf{k}\,\Phi' \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{i} \int f(\mathbf{k})\, \frac{\partial}{\partial t}\, a'(\mathbf{k}, -1, t)\, d\mathbf{k}\Phi',\ \int f(\mathbf{k})\, a'(\mathbf{k}, -1, t)\, d\mathbf{k}\Phi' \right\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{s \geqslant r \\ s' \geqslant r}} \frac{1}{i} \int f(\mathbf{k})\, \overline{f(\mathbf{k}')} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\, a'_s(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi',\right.$$

$$\left. a'_{s'}(\mathbf{k}', -1, t)\,\Phi' \right\rangle d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' = C_{2r}\, g^{2r} + C_{2r+1}\, g^{2r+1} + \ldots,$$

где

$$C_{2r} = \frac{1}{i} \int f(\mathbf{k})\, \overline{f(\mathbf{k}')} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\, a'_r(\mathbf{k}, 1, t)\,\Phi',\ a'_r(\mathbf{k}', -1, t)\,\Phi' \right\rangle \times$$

$$\times\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' = -\int \varepsilon(\mathbf{k})\, f(\mathbf{k})\, \overline{f(\mathbf{k}')}\, \exp\left(-i\,(\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}'))\,t\right) \times$$

$$\times \langle a'_r(\mathbf{k}, -1, 0)\,\Phi',\ a'_r(\mathbf{k}', -1, 0)\,\Phi' \rangle\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'.$$

Поскольку

$$\langle a'_r(\mathbf{k}, -1, 0)\,\Phi',\ a'_r(\mathbf{k}', -1, 0)\,\Phi' \rangle = \sigma(\mathbf{k})\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

где $\sigma(\mathbf{k}) \geqslant 0$, видим, что

$$C_{2r} = -\int \varepsilon(\mathbf{k})\, |f(\mathbf{k})|^2\, \sigma\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \leqslant 0.$$

Если $a'_r(\mathbf{k}, -1, t)\,\Phi' \not\equiv 0$, то $\sigma(\mathbf{k}) \not\equiv 0$, поэтому найдется такая функция $f(\mathbf{k})$, что $C_{2n} < 0$. Это противоречит неотрицательной определенности оператора H'.

Займемся теперь проверкой условий применимости аксиоматической теории рассеяния в каждом порядке по g. Рассмотрим прежде всего спектр операторов $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ в операторной реализации ($\mathscr{H}$, $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$, $\tilde{a}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, Φ) гамильтониана вида (44.2). Для такого гамильтониана фоковский (голый) вакуум θ и голое одночастичное состояние $a^+(\mathbf{k})\,\theta$ удовлетворяют условиям

$$\hat{H}\theta = \hat{\mathbf{P}}\theta = 0;$$

$$\hat{H} a^+(\mathbf{k})\,\theta = \left(\varepsilon(\mathbf{k}) + \sum g^r\, \tilde{v}^{(r)}_{11}(\mathbf{k})\right) a^+(\mathbf{k})\,\theta;$$

$$\mathbf{P} a^+(\mathbf{k})\,\theta = \mathbf{k}\, a^+(\mathbf{k})\,\theta.$$

Таким образом, θ можно рассматривать также как основное состояние оператора $\hat{H}$ (одетый вакуум), а $a^+(\mathbf{k})\,\theta$ — как одночастичное состояние операторов $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ (одетое одночастичное состояние). Спектр операторов $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ состоит из точки 0, отвечающей основному состоянию, множества точек $(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = (\varepsilon(\mathbf{k}) + \sum g^r \tilde{v}_{1,1}^r(\mathbf{k}), \mathbf{k})$ (одночастичного спектра) и многочастичного спектра, точки которого имеют вид $(\omega + \sum_{r\geqslant 1} g^r\omega_r,\ \mathbf{k} + \sum_{r\geqslant 1} g^r\mathbf{k}_r)$, где точка $(\omega, \mathbf{k})$ принадлежит многочастичному спектру операторов $\hat{H}_0$, $\hat{\mathbf{P}}$ (т. е. может быть представлена в виде $(\varepsilon(\mathbf{k}_1) + \ldots + \varepsilon(\mathbf{k}_m),\ \mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m)$.

Если гамильтониан H принадлежит классу $\tilde{\mathscr{M}}$ [т. е. функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ ни на каком открытом множестве не является линейной функцией и выполнено условие $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$], *то спектр операторов $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{P}}$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в* n° *5 § 40.*

Для того чтобы закончить исследование рассматриваемого случая, осталось проверить, что семейство $\tilde{\mathscr{B}}$ операторных обобщенных функций, состоящее из двух функций

$$\tilde{a}(x, \varepsilon, t) = (2\pi)^{-3/2}\int \exp(i\,\varepsilon\,\mathbf{k}\mathbf{x})\,\tilde{a}(\mathbf{k}, \varepsilon, t)\,d\mathbf{k},\quad \varepsilon = \pm 1,$$

асимптотически абелево в смысле § 40 в каждом порядке по g. Чтобы убедиться в асимптотической абелевости семейства $\mathscr{B}$, заметим, что по доказанному в предыдущем параграфе операторы вида $\int f(\mathbf{x})\,\tilde{a}(\mathbf{x}, \varepsilon, t)\,d\mathbf{x}$ содержатся в алгебре $\mathscr{A}$, состоящей из операторов вида

$$\sum g^r \sum_{m,\,n}\int f_{m,\,n}^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)\,a^+(\mathbf{k})\ldots$$
$$\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{p}_1)\ldots a(\mathbf{p}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p},$$

где функции $f_{m,n}^{(r)} \in \mathscr{S}$ и для каждого r лишь конечное число функций $f_{m,n}^{(r)}$ отлично от нуля. Нетрудно проверить [снова используя результаты § 43, в частности оценку (43.9)], что алгебра $\mathscr{A}$ асимптотически абелева в каждом порядке по g. (Это утверждение следует также из результатов § 46.)

Итак, семейство $\tilde{\mathscr{B}}$ асимптотически абелево.

Обратимся теперь к рассмотрению произвольного гамильтониана $H = H_0 + V \in \tilde{\mathscr{M}}$. С помощью фаддеевского преобразования построение операторной реализации такого гамильтониана сводится к построению операторной реализации гамильтониана $\tilde{H}$ вида (44.2). При этом операторы энергии и импульса в операторной реализации гамильтониана H совпадают с операторами энергии и импульса в операторной реализации гамильтониана $\tilde{H}$; это замечание показывает, что они удовлетворяют нужным условиям на спектр. Операторные обобщенные функции $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$, фигурирующие в операторной реализации гамильтониана H, связаны с операторными обобщенными функциями $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$ из операторной реализации гамильтониана $\tilde{H}$ каноническим преобразованием [см. соотношение (44.1)]. Отсюда следует, что семейство $\mathscr{B}$ из двух операторных обобщенных функций $a(\mathbf{x}, \varepsilon, t)$, $\varepsilon = \pm 1$, по которому следует строить матрицу рассеяния гамильтониана H, является асимптотически абелевым в каждом порядке по g, поскольку операторы $\int f(\mathbf{x})\,a(\mathbf{x}, \varepsilon, t)\,d\mathbf{x}$ содержатся в асимптотически абелевом семействе $\mathscr{A}$.

Таким образом, *матрица рассеяния гамильтониана $H \in \tilde{\mathscr{M}}$ может быть построена с помощью аксиоматической теории рассеяния как формальный ряд по g.*

Теперь можно применить теоремы аксиоматической теории рассеяния к изучению (в рамках теории возмущений) матрицы рассеяния в гамильтоновом формализме.

Прежде всего заметим, что из проведенных выше рассуждений вытекает, что *матрица рассеяния гамильтониана H совпадает с матрицей рассеяния гамильтониана $\tilde{H}$, полученного из H с помощью фаддеевского канонического преобразования**. В самом деле, эти две матрицы рассеяния строятся по асимптотически абелевым семействам $\mathscr{B}$ и $\tilde{\mathscr{B}}$, содержащимся в одной и той же асимптотически абелевой алгебре $\mathscr{A}$; в силу результатов гл. 10 построенные по ним матрицы Мёллера и матрица рассеяния совпадают.

Из доказанного только что утверждения вытекает теорема эквивалентности.

Если гамильтонианы $H_1 \in \tilde{\mathscr{M}}$ и $H_2 \in \tilde{\mathscr{M}}$ связаны каноническим преобразованием, то построенные по ним матрицы Мёллера и матрицы рассеяния совпадают.

* Существенно отметить, что в этом утверждении под фаддеевским каноническим преобразованием можно понимать любое каноническое преобразование, переводящее гамильтониан H в гамильтониан вида (44.2), а не обязательно конкретное преобразование, построенное в § 34.

В самом деле, пусть α — каноническое преобразование, переводящее гамильтониан H_1 в гамильтониан H_2; β — фаддеевское каноническое преобразование, переводящее гамильтониан H_2 в гамильтониан $\tilde{H}$ вида (44.2). Тогда каноническое преобразование $\alpha\beta$ переводит гамильтониан H_1 в гамильтониан $\tilde{H}$.

По доказанному выше матрицы рассеяния гамильтонианов H_1 и H_2 совпадают с матрицей рассеяния гамильтониана $\tilde{H}$ и, значит, совпадают между собой. Аналогичное рассуждение справедливо для матриц Мёллера.

§ 45. Одевающие операторы для трансляционно инвариантных гамильтонианов

Будем рассматривать в этом параграфе трансляционно инвариантные гамильтонианы из класса $\mathscr{M}$.

Исследуем сначала случай, когда гамильтониан $H \in \mathscr{M}$ не порождает поляризации вакуума. Одевающий оператор для такого гамильтониана определяется как оператор, удовлетворяющий условию

$$S_{\pm} = \operatorname*{slim}_{t \to \pm\infty} \exp(\mathrm{i}Ht) D \exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t). \qquad (45.1)$$

(Рассматриваемый гамильтониан определяет оператор H в фоковском пространстве $\mathscr{H} = F(L^2(E^3))$, асимптотическое пространство $\mathscr{H}_{\mathrm{as}} = F(L^2(E^3))$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathscr{H}$, поэтому матрицы Мёллера $S_{\pm}$ действуют в пространстве $\mathscr{H}$. Символом H_{as} обозначен асимптотический гамильтониан, также рассматриваемый как оператор в $\mathscr{H}$:

$$H_{\mathrm{as}} = \int \omega(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — энергия одночастичного состояния гамильтониана H. Все операторы в формуле (45.1), как и всюду в настоящей главе, рассматриваются как формальные ряды по g. Предел в (45.1) понимается как сильный предел в каждом порядке возмущений на множестве линейных комбинаций векторов вида $a^+(f_1) \ldots a^+(f_n)\,\theta$, где $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_n(\mathbf{k})$ — неперекрывающиеся гладкие финитные функции.)

Следующая теорема дает описание широкого класса одевающих операторов для не порождающего поляризации вакуума гамильтониана $H \in \tilde{\mathscr{M}}$.

Пусть D — оператор в фоковском пространстве $\mathscr{H} = F(L^2(E^3))$, удовлетворяющий условиям:

1) $D\theta = \theta$; (45.2)

2) *векторная обобщенная функция $Da^+(\mathbf{k})\,\theta$ нормирована на δ-функцию и является собственной для оператора H;*

3) *оператор D может быть представлен в виде произведения операторов вида* $\exp A$ *или* $N(\exp A)$, *где* $A = A_1 + \mathrm{i}A_2$, $A_1 \in \mathscr{M}$, $A_2 \in \mathscr{M}$.

Тогда оператор D является одевающим оператором для гамильтониана H. (Символ $N(\exp A)$ обозначает нормальную экспоненту; см. § 22.)

Доказательство теоремы можно провести с помощью содержащегося в § 39 описания одевающих операторов в аксиоматической теории рассеяния. В следующем параграфе проведено такое доказательство для случая, когда оператор D представлен в виде произведения операторов вида $\exp A$, где $A \in \mathscr{M}$. Сейчас наметим другое доказательство сформулированной теоремы.

Рассмотрим сначала случай, когда $D = N(\exp A)$, где

$$A = \sum_m \int A_{m,1}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m - \mathbf{p}) \times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{p})\, d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_m\, d\mathbf{p}.$$

Заметим прежде всего, что в этом случае имеет место соотношение

$$[D, a^+(\mathbf{k})] = B(\mathbf{k})\, D, \qquad (45.3)$$

где $B(\mathbf{k})$ — обобщенная операторная функция, определенная формулой

$$B(\mathbf{k}) = \sum_m \int A_{m,1}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \ldots - \mathbf{k}_m) \times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, d^m\mathbf{k}$$

(соотношение (45.3) сразу следует из равенства

$$[N(A^n),\ a^+(\mathbf{k})] = B(\mathbf{k}) \cdot nN(A^{n-1}),$$

которое можно получить, пользуясь формулой

$$[R_1 \ldots R_m, R] = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} R_1 \ldots R_{i-1} [R_i, R]\, R_{i+1} \ldots R_m).$$

Соотношение (45.3) перепишем в виде

$$Da^+(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k})\, D, \qquad (45.4)$$

где $E(\mathbf{k}) = a^+(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k})$. Используя формулы (45.4) и (45.2), видим, что

$$Da^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_n)\,\theta = E(\mathbf{k}_1) \ldots E(\mathbf{k}_n)\,\theta,$$

в частности

$$Da^+(\mathbf{k})\,\theta = E(\mathbf{k})\,\theta = a^+(\mathbf{k}) + \sum_m \int A_{m,1}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\ldots-\mathbf{k}_m)\,a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,d^m\mathbf{k}. \tag{45.5}$$

Из соотношения (45.5) вытекает, что

$$\exp(\mathrm{i}\,Ht)\,D\exp(-\mathrm{i}\,H_0 t)\,a^+(\bar f_1)\ldots a^+(\bar f_n)\,\theta = \exp(\mathrm{i}\,Ht)\,Da^+(\overline{f_1^t})\ldots a^+(\overline{f_n^t})\,\theta =$$
$$= \exp(\mathrm{i}\,Ht)\Big(\int f_1^t(\mathbf{k}_1)\,E(\mathbf{k}_1)\,d\mathbf{k}_1\Big)\ldots\Big(\int f_n^t(\mathbf{k}_n)\,E(\mathbf{k}_n)\,d\mathbf{k}_n\Big)\,\theta =$$
$$= \Big(\int f_1^t(\mathbf{k}_1)\,E(\mathbf{k}_1, t)\,d\mathbf{k}_1\Big)\ldots\Big(\int f_n^t(\mathbf{k}_n)\,E(\mathbf{k}_n, t)\,d\mathbf{k}_n\Big)\,\theta$$

[здесь $f^t(\mathbf{k}) = \exp(-\mathrm{i}t\omega(\mathbf{k}))\,f(\mathbf{k})$].

Для того чтобы проверить, что D — одевающий оператор, достаточно теперь установить, что E — правильная операторная обобщенная функция в смысле § 40; это легко сделать с помощью проведенного в § 43 исследования гейзенберговских операторов $a(\mathbf{k}, \varepsilon, t)$.

Отметим, что, зная одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k}) = Da^+(\mathbf{k})\,\theta$, можно с помощью формулы (45.5) найти функции $A_{m,1}$ и, стало быть, весь одевающий оператор рассматриваемого типа. Из этого нетрудно вывести, что требование, чтобы оператор A принадлежал классу $\mathscr{M} + \mathrm{i}\mathscr{M}$, в рассматриваемом случае оказывается излишним (следует воспользоваться тем, что, вычисляя одночастичное состояние по теории возмущений, получаем его в виде

$$\Phi(\mathbf{k}) = \Phi(\mathbf{k}\,|\,g) = \exp(\mathrm{i}\,\sigma(\mathbf{k}\,|\,g))\Big(a^+(\mathbf{k}) + \sum_m \int \varphi_m(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\ldots-\mathbf{k}_m)\,a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,d^m\mathbf{k}\Big)\,\theta,$$

где $\exp(\mathrm{i}\sigma(\mathbf{k}\,|\,g))$ — произвольный фазовый множитель; $\varphi_m(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m) = \sum_m \varphi_m^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m)\,g^r$; функции $\varphi_m^{(r)}$ принадлежат пространству $\mathscr{S}$, и для каждого r только конечное число этих функций отлично от нуля).

Доказанное утверждение позволяет заключить, что определение матрицы рассеяния с помощью формулы (31.8), данное в § 31, эквивалентно другим определениям.

Обратимся теперь к несколько более общему случаю, когда $D = N(\exp A)$, где $A \in \mathscr{M} + \mathrm{i}\mathscr{M}$ (т. е. $A = A_1 + \mathrm{i}A_2$, $A_1 \in \mathscr{M}$, $A_2 \in \mathscr{M}$). Запишем A в виде $A = \sum A_{m,n}$, где $A_{m,n} = \sum_r A_{m,n}^{(r)}\,g^r$,

$$A_{m,n}^{(r)} = \int A_{m,n}^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m\,|\,\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)\times$$
$$\times\,\delta(\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_m-\mathbf{p}_1-\ldots-\mathbf{p}_n)\,a^+(\mathbf{k}_1)\ldots a^+(\mathbf{k}_m)\,a(\mathbf{p}_1)\ldots a(\mathbf{p}_n)\,d^m\mathbf{k}\,d^n\mathbf{p},$$

и определим оператор A', оставив в формуле для оператора A только члены типа $(m, 1)$ (т. е. положим $A' = \sum_m A_{m,1}$).

Оператор $D' = N(\exp A')$ удовлетворяет требованиям

$$D'\theta = \theta;$$
$$D'a^+(\mathbf{k})\,\theta = Da^+(\mathbf{k})\,\theta$$

[члены, содержащие не менее двух операторов уничтожения, дают нуль при действии на $a^+(\mathbf{k})\,\theta$].

Как было доказано выше, оператор $D' = N(\exp A')$ является одевающим оператором, т. е.

$$\operatorname*{slim}_{t\to\pm\infty} \exp(\mathrm{i}Ht)\,D'\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t) = S_\pm. \tag{45.6}$$

Для того чтобы вывести из формулы (45.6) нужное соотношение

$$\operatorname*{slim}_{t\to\pm\infty} \exp(\mathrm{i}Ht)\,D\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t) = S_\pm,$$

достаточно доказать, что

$$\operatorname*{slim}_{t\to\pm\infty} \exp(\mathrm{i}Ht)\,(D-D')\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t) = 0. \tag{45.7}$$

Доказательство равенства (45.7) в каждом порядке теории возмущений сразу вытекает из соотношения

$$\lim_{t\to\pm\infty} N\big(A_{m_1 n_1}^{(r_1)}\ldots A_{m_s n_s}^{(r_s)}\big)\,a^+(\overline{f_1^t})\ldots a^+(\overline{f_s^t})\,\theta = 0,$$

где по крайней мере один из операторов $A^{(r_i)}_{m_i n_i}$ удовлетворяет условию $n_i \geqslant 2$ (т. е. содержит не менее двух операторов уничтожения), а функции $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_s(\mathbf{k})$ образуют неперекрывающееся семейство гладких финитных функций. Таким образом, доказано утверждение теоремы в случае, когда оператор D имеет вид $N(\exp A)$. Доказательство теоремы в общем случае может быть сведено к уже рассмотренному с помощью следующих двух лемм.

Лемма 1. *Всякий оператор вида* $\exp(A_1 + \mathrm{i}A_2)$, *где* $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, *может быть представлен в виде* $N(\exp(A_1' + \mathrm{i}A_2'))$, *где* $A_1', A_2' \in \mathcal{M}$.

Лемма 2. *Всякий оператор вида* $N(\exp(A_1 + \mathrm{i}A_2)) \times N(\exp(A_1' + \mathrm{i}A_2'))$, *где* $A_1, A_2, A_1', A_2' \in \mathcal{M}$, *может быть представлен в виде* $N(\exp(A_1'' + \mathrm{i}A_2''))$, *где* $A_1'', A_2'' \in \mathcal{M}$.

Не будем приводить доказательства этих лемм.

Обратимся теперь к случаю произвольного гамильтониана $H \in \mathcal{M}$. Символ H_Ω, как обычно, обозначает оператор H, обрезанный по объему (см. § 28); оператор H_Ω действует в фоковском пространстве $F_\Omega = F(L^2(\Omega))$. По теории возмущений можно вычислить оператор $\exp(\mathrm{i}H_\Omega t)$ (иначе говоря, H_Ω может рассматриваться в рамках теории возмущений как самосопряженный оператор).

Семейство операторов D^Ω будем называть *семейством одевающих операторов* для гамильтониана H, если матрица рассеяния S гамильтониана H может быть представлена в виде

$$S = \lim_{t\to\infty,\ t_0\to-\infty}\ \lim_{\Omega\to\infty} \exp(\mathrm{i}(c_\Omega + H_{\mathrm{as}\Omega})t)(D^\Omega)^{-1} \times \\ \times \exp(-\mathrm{i}H_\Omega(t-t_0))D^\Omega \exp(-\mathrm{i}(c_\Omega + H_{\mathrm{as}\Omega})t_0). \quad (45.8)$$

[Операторы D^Ω действуют в пространствах F_Ω, символом $H_{\mathrm{as}\Omega}$ обозначен асимптотический гамильтониан H_{as}, обрезанный по объему, c_Ω — константа, зависящая от объема. Предел в (45.8) может пониматься в смысле сходимости матричных элементов (см. § 33) или как соотношение

$$S = \operatorname*{slim}_{t\to\infty,\ t_0\to-\infty}\ \operatorname*{slim}_{\Omega\to\infty} i_\Omega \exp(\mathrm{i}(c_\Omega + H_{\mathrm{as}\Omega})t)(D^\Omega)^{-1} \times \\ \times \exp(\mathrm{i}H_\Omega(t-t_0))D^\Omega \exp(-\mathrm{i}(c_\Omega + H_{\mathrm{as}\Omega})t_0)\, i_\Omega^*,$$

где i_Ω — естественное вложение фоковского пространства $F_\Omega = F(L^2(\Omega))$ в фоковское пространство $F(L^2(E^3))$.]

Имеет место теорема.

Пусть семейство операторов D^Ω удовлетворяет следующим требованиям:

1. *Оператор D^Ω переводит фоковский вектор θ и голое одночастичное состояние $a_\mathbf{k}^+\theta$ в нормированные векторы, являющиеся собственными векторами оператора H_Ω.*

2. *Оператор D^Ω может быть представлен как произведение операторов вида* $N(\exp A_\Omega)$ *и* $\exp A_\Omega$, *где A_Ω — операторы, получающиеся с помощью обрезания по объему из операторов вида* $A = A_1 + \mathrm{i}A_2$, A_1, A_2 — *формальные выражения из класса $\mathcal{M}$, не зависящие от Ω.*

Тогда D^Ω является семейством одевающих операторов. (Точнее говоря, можно утверждать, что имеет место формула (45.8), где c_Ω определяется формулой $H_\Omega D^\Omega\theta = c_\Omega D^\Omega\theta$.)

Начнем с замечания, что с помощью аналогов лемм 1 и 2 для операторов в пространстве F_Ω можно свести доказательство к случаю, когда оператор D^Ω имеет вид $N(\exp A_\Omega)$, где $A = A_1 + \mathrm{i}A_2$, $A_1 \in \mathcal{M}$, $A_2 \in \mathcal{M}$. Рассмотрим прежде всего гамильтониан H, не порождающий поляризации вакуума. Для такого гамильтониана операторы $\exp(\mathrm{i}H_\Omega t)$, $D^\Omega = N(\exp A_\Omega)$, $\exp(\mathrm{i}H_{\mathrm{as}\Omega}t)$ имеют по отдельности предел при $\Omega \to \infty$; они стремятся соответственно к операторам $\exp(\mathrm{i}Ht)$, $N(\exp A) = D$, $\exp(\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t)$. В этом легко убедиться, используя соотношения $H\theta = 0$, $H_{\mathrm{as}}\theta = 0$, $A\theta = 0$ (последнее из этих соотношений вытекает из равенства $D_\Omega\theta = \theta$). Нетрудно проверить, что в правой части равенства (45.8) можно заменить предел произведения произведением пределов. Учитывая, что константа c_Ω в рассматриваемом случае равна 0, убеждаемся, что равенство (45.8) эквивалентно соотношению

$$S = \operatorname*{slim}_{t\to\infty,\ t_0\to-\infty} \exp(\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t)D^{-1}\exp(-\mathrm{i}H(t-t_0)) \times \\ \times D\exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{as}}t_0),$$

которое вытекает из уже доказанных соотношений (45.1) и формулы $S = S_+^* S_-$. Таким образом, нужное утверждение доказано для гамильтонианов, не порождающих поляризации вакуума. Случай произвольного гамильтониана $H \in \widetilde{\mathcal{M}}$ сводится к уже рассмотренному с помощью фаддеевского преобразования. В самом деле, в силу результатов § 34 существует такое формальное выражение $W \in \mathcal{M}$, что при $\Omega \to \infty$

$$\exp(\mathrm{i}W_\Omega)H_\Omega\exp(-\mathrm{i}W_\Omega) \approx H_\Omega' + c_\Omega$$

и, стало быть,

$$\exp(iW_\Omega)\exp(iH_\Omega t)\exp(-iW_\Omega)\approx\exp(i(H'_\Omega+c_\Omega)t),\quad (45.9)$$

где H'_Ω — не порождающий поляризации вакуума гамильтониан H', обрезанный по объему; c_Ω — энергия основного состояния оператора H_Ω. Пользуясь формулой (45.9), заключаем, что

$$\lim_{\Omega\to\infty}\exp(i(c_\Omega+H_{as\Omega})t)(D^\Omega)^{-1}\exp(-iH_\Omega(t-t_0))\times$$
$$\times D^\Omega\exp(-i(c_\Omega+H_{as\Omega})t_0)=$$
$$=\lim_{\Omega\to\infty}\exp(iH'_{as\Omega}t)(D'^\Omega)^{-1}\exp(-iH'_\Omega(t-t_0))\times$$
$$\times D'^\Omega\exp(-iH'_{as\Omega}t_0),\quad (45.10)$$

где

$$D'^\Omega=\exp(iW_\Omega)D^\Omega$$

(при выводе равенства (45.10) использовалось также совпадение асимптотических гамильтонианов H_{as} и H'_{as}, построенных по гамильтонианам H и H'). Применяя утверждение теоремы к не порождающему поляризации вакуума гамильтониану H', можно убедиться, что операторы D'^Ω образуют семейство одевающих операторов для гамильтониана H'. Это означает, что правая часть равенства (45.10) в пределе $t\to\infty$, $t_0\to-\infty$ равна матрице рассеяния гамильтониана H'. Поскольку матрицы рассеяния гамильтонианов H и H' совпадают, из равенства (45.10) вытекает утверждение теоремы в общем случае.

§ 46. Теория возмущений в аксиоматическом подходе

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы оператор энергии H_0, оператор импульса $\mathbf{P}$, линейное многообразие D, всюду плотное в $\mathcal{H}$, и полная локально выпуклая топологическая алгебра с инволюцией $\mathcal{A}$, состоящая из операторов, действующих в D. Будем предполагать, что эти объекты удовлетворяют перечисленным в § 40 требованиям Т1—Т7.

Пусть W — оператор из алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $W\Phi=0$. Покажем сейчас, что *семейство операторов*

$$H(g)=H_0+gV=H_0+g\int W(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

вместе с оператором импульса $\mathbf{P}$ *и алгеброй* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям Т1—Т7 § 40 в каждом порядке по параметру* g (интеграл понимается в сильном смысле). Наложив соответствующие условия на спектр операторов H_0, $\mathbf{P}$, сделаем отсюда вывод, что матрицы Мёллера $S_\pm(g)$ и матрицу рассеяния $S(g)$, отвечающие операторам $H(g)$, $\mathbf{P}$ и алгебре $\mathcal{A}$, можно построить по крайней мере как формальные степенные ряды по g*.

Заметим прежде всего, что оператор $V=\int W(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ определен на множестве $\mathcal{A}\Phi$ (т. е. на множестве векторов вида $A\Phi$, где $A\in\mathcal{A}$) и переводит это множество в себя. В самом деле,

$$\left(\int W(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right)A\Phi=\int[W(\mathbf{x}),A]\,\Phi\,d\mathbf{x}.$$

С помощью условия Т6 убеждаемся, что для любой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$ и любого n

$$p([W(\mathbf{x}),A])\leqslant\frac{C}{1+|\mathbf{x}|^n}.\quad (46.1)$$

В силу полноты алгебры $\mathcal{A}$ и неравенства (46.1) интеграл $\int[W(\mathbf{x}),A]\,d\mathbf{x}$ сходится в топологии $\mathcal{A}$ и определяет элемент алгебры $\mathcal{A}$. Это доказывает нужное утверждение.

Далее, убедимся, что при вычислении оператора $\exp(-iH(g)t)=\exp(-i(H_0+gV)t)$ по теории возмущений в каждом порядке по g получаем оператор, определенный на множестве $\mathcal{A}\Phi$ и переводящий это множество в себя (это означает, что оператор $H(g)$ можно рассматривать как самосопряженный оператор по крайней мере в рамках теории возмущений). В самом деле, из результатов § 14 вытекает, что

$$\exp(-iH(g)t)=\sum\left(\frac{g}{i}\right)^r U_r(t),$$

* Это утверждение, как и остальные утверждения этого параграфа, применимо также к более общим гамильтонианам вида $H_0+\sum_{r\geqslant1}g^r\int W_r(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, где $W_r\in\mathcal{A}$, $W_r\Phi=0$, ряд по g понимается как формальный.

где

$$U_r(t) = \frac{1}{r!}\exp(-\mathrm{i}H_0 t)\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} d\tau_2\ldots\int_0^{\tau_{r-1}} d\tau_r\, V(\tau_1)\ldots V(\tau_r) =$$

$$= \frac{1}{r!}\exp(-\mathrm{i}H_0 t)\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} d\tau_2\ldots\int_0^{\tau_{r-1}} d\tau_r\int d^r\mathbf{x}\, W(\mathbf{x}_1,\tau_1)\ldots$$

$$\ldots W(\mathbf{x}_r,\tau_r);$$

$$V(\tau) = \exp(\mathrm{i}H_0\tau)\, V\exp(-\mathrm{i}H_0\tau) = \int W(\mathbf{x},\tau)\, d\mathbf{x};$$

$$W(\mathbf{x},\tau) = \exp(\mathrm{i}(H_0\tau - \mathbf{P}\mathbf{x}))\, W\exp(-\mathrm{i}(H_0\tau - \mathbf{P}\mathbf{x})).$$

Определим оператор $R_r(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r \mid A)$, где $A \in \mathcal{A}$, по индукции с помощью соотношений

$$R_0(A) = A;$$

$$R_r(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r \mid A) =$$

$$= [W(\mathbf{x}_1, t_1), R_{r-1}(\mathbf{x}_2, t_2, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r \mid A)].$$

Нетрудно убедиться, что оператор R_r непрерывно зависит от $\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r$ в топологии алгебры $\mathcal{A}$ и

$$p(R_r(\mathbf{x}_1, t_1\ldots, \mathbf{x}_r, t_r \mid A) \leqslant \frac{C(1+|t_1|^s+\ldots+|t_r|^s)}{1+|\mathbf{x}_1|^n+\ldots+|\mathbf{x}_r|^n} \quad (46.2)$$

(здесь $p(A)$ — любая полунорма в $\mathcal{A}$; n — любое число; числа s и C зависят от полунормы p и числа n). Доказательство оценки (46.2) легко провести по индукции с помощью условий Т5 и Т6.

Заметим теперь, что

$$W(\mathbf{x}_1, t_1)\ldots W(\mathbf{x}_r, t_r)\, A\Phi = R_r(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_r, t_r \mid A)\,\Phi$$

(это также легко проверить по индукции). Таким образом,

$$U_r(t)\, A\Phi = B_r(t)\,\Phi,$$

где

$$B_r(t) = \frac{1}{r!}\int_0^t d\tau_1\int_0^{\tau_1} d\tau_2\ldots\int_0^{\tau_{r-1}} d\tau_r\int d^r\mathbf{x}\exp(-\mathrm{i}H_0 t)\times$$

$$\times R_r(\mathbf{x}_1, \tau_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \tau_r \mid A)\exp(\mathrm{i}H_0 t).$$

Из оценки (46.2) и полноты алгебры $\mathcal{A}$ заключаем, что для любого $A \in \mathcal{A}$ интеграл, определяющий оператор $B_r(t)$, сходится в топологии алгебры $\mathcal{A}$ и, следовательно, $B_r(t) \in \mathcal{A}$. Таким образом, оператор $U_r(t)$ определен на

множестве $\mathcal{A}\Phi$ и переводит это множество в себя. Из доказанного вытекает, что оператор $A(\mathbf{x}, t \mid g) = \exp(\mathrm{i}H(g)t - \mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x})\, A\exp(-\mathrm{i}H(g)t + \mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x})$ также в каждом порядке теории возмущений определен на множестве $\mathcal{A}\Phi$ и переводит его в себя (т. е.

$$A(\mathbf{x}, t \mid g) = \sum g^r A_r(\mathbf{x}, t),$$

где оператор

$$A_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=0}^{r} U_\alpha(-t)\, A(\mathbf{x})\, U_{r-\alpha}(t)\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^r$$

действует в множестве $\mathcal{A}\Phi$).

Покажем, что оператор $A_r(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{A}$ непрерывен по $\mathbf{x}$, t в топологии $\mathcal{A}$ и для каждой полунормы $p(A)$ в $\mathcal{A}$

$$p(A_r(\mathbf{x}, t)) \leqslant (1 + |\mathbf{x}|^s + |t|^s)\, q(A), \quad (46.3)$$

где число s и полунорма $q(A)$ в $\mathcal{A}$ зависят от полунормы p и числа r, A пробегает компактное множество $F \subset \mathcal{A}$ (иными словами, убедимся, что условие Т5 § 40 выполнено для операторов $H(g)$, $\mathbf{P}$ и алгебры $\mathcal{A}$ в каждом порядке теории возмущений по g). Для этого заметим, что из гейзенберговского уравнения

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial A(\mathbf{x}, t \mid g)}{\partial t} = [H_0 + gV, A(\mathbf{x}, t \mid g)]$$

вытекает соотношение

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial A_r(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [H_0, A_r(\mathbf{x}, t)] + [V, A_{r-1}(\mathbf{x}, t)]. \quad (46.4)$$

С помощью соотношения (46.4) и начального условия $A_r(\mathbf{x}, 0) = 0$ при $r \geqslant 1$ выражаем $A_r(\mathbf{x}, t)$ через $A_{r-1}(\mathbf{x}, t)$:

$$A_r(\mathbf{x}, t) = \exp(\mathrm{i}H_0 t)\,\tilde{A}_r(\mathbf{x}, t)\exp(-\mathrm{i}H_0 t);$$

$$\tilde{A}_r(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\int_0^t \exp(-\mathrm{i}H\tau)\,[V, A_{r-1}(\mathbf{x}, \tau)]\exp(\mathrm{i}H\tau)\, d\tau =$$

$$= \mathrm{i}\int_0^t d\tau\int d\xi\exp(-\mathrm{i}H\tau)[W(\xi), A_{r-1}(\mathbf{x}, \tau)]\exp(\mathrm{i}H\tau). \quad (46.5)$$

Пользуясь этим выражением, нужные утверждения получаем по индукции. Из предположения индукции вытекает, что

$$p(\exp(-\mathrm{i}H\tau)[W(\xi), A_{r-1}(\mathbf{x}, \tau)]\exp(\mathrm{i}H\tau)) \leqslant \leqslant \frac{p_1(A)(1+|\mathbf{x}|^s+|t|^s)}{1+|\xi|^n}, \qquad (46.6)$$

где $A \in F$; p — любая полунорма; n — любое число; полунорма p_1 и число s зависят от p и n.

С помощью оценки (46.6) убеждаемся, что интеграл в (46.5) сходится в топологии $\mathcal{A}$ равномерно по $\mathbf{x}$, t, если $\mathbf{x}$, t меняются в ограниченной области. Из этого замечания следует, что $A_r(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{A}$ и непрерывно зависит от x, t; из оценки (46.6) следует сразу также неравенство (46.3).

Теперь нетрудно установить, что операторы $H(g)$, $\mathbf{P}$ и алгебра $\mathcal{A}$, операторы которой рассматриваются как операторы в $D' = \mathcal{A}\Phi$, удовлетворяют условиям T1—T7 в § 40 в каждом порядке теории возмущений по g. В самом деле, уже доказано, что множество D' инвариантно в каждом порядке теории возмущений относительно операторов $\exp(\mathrm{i}H(g)t)$. Его инвариантность относительно операторов $\exp(\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x})$ вытекает из соотношения $\exp(-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x})A\Phi = A(\mathbf{x})\Phi$. Условия T1—T4, T6, T7 не зависят от выбора оператора энергии $H(g)$ и, стало быть, выполнены и в рассматриваемой ситуации. Условие T5 только что проверено по теории возмущений.

Покажем сейчас, что *спектр операторов* $H(g)$, $\mathbf{P}$ *удовлетворяет условиям на спектр операторов энергии и импульса, сформулированным в* § 35 (по крайней мере, в рамках теории возмущений).

Будем предполагать при этом, что нужные условия* выполнены при $g = 0$, и потребуем дополнительно, чтобы для всякой точки $\mathbf{k} \in E^3$ можно было найти такой оператор $A \in \mathcal{A}$, что $|\langle\Phi_0(\mathbf{k}), A\Phi\rangle| \neq 0$ (символом $\Phi_0(\mathbf{k})$ обозначается одночастичное состояние оператора H_0). С помощью рассуждений, примененных в несколько более сложной ситуации при доказательстве лемм 3, 4 и 5 § 41, доказывается, что одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k})$ можно выбрать так, что функции $\langle\Phi(\mathbf{k}), A\Phi\rangle$ для всех $A \in \mathcal{A}$ будут бесконечно

* Для того чтобы доказать существование матриц Мёллера и матриц рассеяния, построенных по операторам $H(g)$, $\mathbf{P}$ и алгебре $\mathcal{A}$, достаточно наложить на спектр операторов H_0, $\mathbf{P}$ условия n° 4 и 5 § 40.

дифференцируемыми; если одночастичное состояние $\Phi(\mathbf{k})$ выбрано таким образом, то для всякой гладкой финитной функции найдется такой правильный оператор B_f, что $B_f\Phi = \int f(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$ (более того, эти утверждения можно вывести из указанных лемм, если применить их к случаю $H(g) \equiv H_0$). Основное состояние Φ оператора H_0 в силу условия $W\Phi = 0$ является стационарным состоянием оператора $H(g)$ при любом g; это значит, что при вычислении основного состояния оператора $H(g)$ по теории возмущений получаем вектор Φ. Одночастичные состояния оператора $H(g)$ будем искать по теории возмущений в виде

$$\Phi(\mathbf{k}\,|\,g) = \sum_{r=0}^{\infty} g^r \Phi_r(\mathbf{k}),$$

пользуясь соотношениями

$$(H_0 + gV)\left(\sum g^r \Phi_r(\mathbf{k})\right) = \left(\sum g^r \omega_r(\mathbf{k})\right)\left(\sum g^r \Phi_r(\mathbf{k})\right); \quad (46.7)$$

$$\mathbf{P}\left(\sum g^r \Phi_r(\mathbf{k})\right) = \mathbf{k}\left(\sum g^r \Phi_r(\mathbf{k})\right); \qquad (46.8)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial g}\sum g^r \Phi_r(\mathbf{k}),\ \sum g^r \Phi_r(\mathbf{k}')\right\rangle = 0. \qquad (46.9)$$

С помощью соотношений (46.7), (46.8) получаем, что

$$\int \omega_r(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \overline{f'(\mathbf{k})}\,d\mathbf{k} = \langle V\Phi_{r-1}(f),\ \Phi_0(f')\rangle - -\langle \Phi_{r-1}(\omega_1 f),\ \Phi_0(f')\rangle - \ldots - \langle \Phi_1(\omega_{r-1} f),\ \Phi_0(f')\rangle; \quad (46.10)$$

$$\Phi_r(f) = \gamma(H_0, \mathbf{P})\left(-V\Phi_{r-1}(f) + \Phi_{r-1}(\omega_1 f) + \ldots + \Phi_0(\omega_r f)\right) + + \Phi_0(\lambda_r f), \qquad (46.11)$$

где $f(\mathbf{k})$ — гладкая финитная функция; $\Phi_r(f) = \int f(\mathbf{k})\Phi_r(\mathbf{k})$; $\gamma(\omega, \mathbf{k})$ — гладкая финитная функция, равная $(\omega - \omega_0(\mathbf{k}))^{-1}$, если $\mathbf{k} \in \operatorname{supp} f$ и $(\omega, \mathbf{k})$ принадлежит многочастичному спектру операторов H, $\mathbf{P}$, а также если $\mathbf{k} = 0$, $\omega = 0$, и равная нулю при $\omega = \omega_0(\mathbf{k})$. Пользуясь соотношениями (46.9), (46.10) и (46.11), можно найти функции $\lambda_r(\mathbf{k})$, $\omega_r(\mathbf{k})$ и векторы $\Phi_r(\mathbf{k})$ и одновременной индукцией по r доказать, что $\omega_r(\mathbf{k})$ и $\lambda_r(\mathbf{k})$ — гладкие функции, а вектор $\Phi_r(f)$ может быть представлен в виде

$$\Phi_r(f) = B_f^{(r)}\Phi, \qquad (46.12)$$

где $B_f^{(r)} \in \mathcal{A}$. (Представление (46.12) получается из равенства (46.11) с помощью рассуждений, примененных при доказательстве леммы 8 § 41; бесконечную дифференцируемость функций $\omega_r(\mathbf{k})$ и $\lambda_r(\mathbf{k})$ доказываем, слегка модифицируя рассуждения леммы 6 § 41.)

Покажем теперь, что *матрицы Мёллера* $S_\pm(g)$, *соответствующие операторам* $H(g)$, $\mathbf{P}$ *и алгебре* $\mathcal{A}$, *могут быть построены по крайней мере в рамках теории возмущений*. Точнее говоря, построим матрицы Мёллера как формальные ряды

$$S_\pm(g) = \sum g^r S_\pm^{(r)},$$

где $S_\pm^{(r)}$ — операторы, определенные на множестве $D \subset \mathcal{H}_{as}$, состоящем из линейных комбинаций векторов вида $a^+(f_1) \ldots a^+(f_n)\theta$ (здесь $f_1(\mathbf{k}), \ldots, f_n(\mathbf{k})$ — неперекрывающееся семейство гладких финитных функций, т. е. такое семейство, что для любых $\mathbf{k} \in \operatorname{supp} f_i$, $\mathbf{k}' \in \operatorname{supp} f_j$, $i \neq j$, градиенты функции $\omega_0(\mathbf{k})$ в точках $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ не совпадают).

Для того чтобы провести это построение, воспользуемся конструкцией § 36, рассматривая все объекты, фигурирующие в формуле (36.1), как формальные ряды по степеням g. Доказательство корректности этого определения проходит почти так же, как в гл. 10. Следует отметить, однако, что оценка (36.7) не может быть доказана в каждом порядке по g [иными словами, если $f(\mathbf{k})$ — гладкая финитная функция

$$\tilde{f}(\mathrm{x} \mid t) = (2\pi)^{-3} \int \exp\Big(-\mathrm{i}\,t \sum_{r \geqslant 0} g^r \omega_r(\mathbf{k}) + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\mathrm{x}\Big) f(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} = \sum_{r \geqslant 0} g^r \tilde{f}_r(\mathrm{x} \mid t),$$

то нельзя доказать неравенство

$$|\tilde{f}_r(\mathrm{x} \mid t)| \leqslant C |t|^{-3/2}].$$

Нельзя поэтому утверждать также, что справедлива в каждом порядке теории возмущений лемма 4 § 36. Однако при доказательстве корректности определения матрицы Мёллера с помощью формулы (36.1) можно заменить эту лемму леммой 1 из § 38, которая остается справедливой в каждом порядке по g (при этом функции $f_1, \ldots, f_n$ в формуле (36.1) следует считать неперекрывающимися гладкими финитными функциями).

Матрица рассеяния S определяется, как всегда, соотношением $S = S_+^* S_-$. (Из доказанного не следует, что S имеет

вид $\hat{S} = \sum g^r \hat{S}^{(r)}$, где $\hat{S}^{(r)}$ — операторы с общей областью определения, однако матричные элементы

$$\langle S a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\theta,\quad a^+(\mathbf{p}_1) \ldots a^+(\mathbf{p}_n)\theta \rangle =$$
$$= \langle S_- a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\theta,\quad S_+ a^+(\mathbf{p}_1) \ldots a^+(\mathbf{p}_n)\theta \rangle \quad (46.13)$$

при $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{k}_j$, $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_j$ можно рассматривать как формальные ряды по g. Точнее, эти матричные элементы можно представить в виде $\sum_{r \geqslant 0} g^r S^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$, где $S^{(r)}$ — обобщенные функции, определенные на классе основных функций $\varphi(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \in \mathcal{S}$, имеющих носитель, для всех точек которого $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{k}_j$, $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_j$. Под матрицей рассеяния будем понимать поэтому именно совокупность матричных элементов (46.13).)

Теперь можно использовать результаты гл. 10 для исследования матриц Мёллера $S_\pm(g)$ и матрицы рассеяния $S(g)$, построенных по операторам $H(g)$, $\mathbf{P}$ и алгебре $\mathcal{A}$. Отметим, в частности, что с помощью доказанных выше утверждений без труда проверяются в каждом порядке по g предположения, сделанные в § 41 при доказательстве адиабатической теоремы. К сожалению, этого еще недостаточно для того, чтобы утверждать, что доказанные в § 41 соотношения, выражающие матрицы Мёллера $S_\pm(g)$ через адиабатические матрицы Мёллера $S_\alpha(0, \pm\infty \mid g)$, верны в каждом порядке теории возмущений. Анализ доказательства адиабатической теоремы показывает, что при доказательстве используются соотношения типа

$$\Big| \exp\Big(\frac{\mathrm{i}}{\alpha} \nu(\mathbf{k} \mid g)\Big) \Big| \leqslant \mathrm{const},$$

где $\nu(\mathbf{k} \mid g) = \sum_{r \geqslant 0} g^r \nu_r(\mathbf{k})$ — действительная функция; такие соотношения очевидным образом неверны в каждом порядке по g. В частности, при доказательстве леммы 13 § 41 существенно, что

$$p(Q^t(f_i, \varphi_i, \alpha)) = p(Q_i^t) \leqslant C(1 + |t|^n),$$

где C — константа, не зависящая от α; эта оценка с $n = \frac{3}{2}$ получается из неравенства

$$\int |\tilde{\varphi}_i^{t,\alpha}(\mathrm{x})|\, d\mathrm{x} \leqslant C(1 + |t|^{3/2}),$$

которое не имеет места в рамках теории возмущений. Однако нетрудно убедиться, что все рассуждения § 41 сохраняют силу в рамках теории возмущений, если разрешается использовать частичное суммирование ряда теории возмущений. Это позволяет сделать вывод, что адиабатическая теорема, доказанная в § 41, справедлива в рассматриваемом случае в рамках теории возмущений с частичным суммированием.

Рассмотрим теперь с помощью полученных результатов гамильтонианы, не порождающие поляризации вакуума.

Выберем в качестве гильбертова пространства $\mathscr{H}$ фоковское пространство $F(L^2(E^3))$, операторы энергии H_0 и импульса $\mathbf{P}$ определим формулами

$$H_0 = \int \varepsilon(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};$$
$$\mathbf{P} = \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

(Функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ предполагается гладкой функцией, все производные которой имеют не более чем степенной рост. Считаем также, что функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ удовлетворяет условию $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$ и не совпадает с линейной функцией ни на каком открытом множестве.) В качестве алгебры $\mathscr{A}$ выберем алгебру операторов вида

$$\sum_{m,n}^{\infty} \int f_{m,n}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p}, \qquad (46.14)$$

где $f_{m,n} \in \mathscr{S}$, сумма в (46.14) предполагается конечной (операторы вида (46.14) рассматриваются как операторы, определенные на множестве $\mathscr{S}_\infty$). В § 40 показано, что операторы H_0, $\mathbf{P}$ и алгебра $\mathscr{A}$ удовлетворяют условиям Т1—Т7. Это позволяет применить к ним все доказанные в настоящем параграфе утверждения.

Заметим прежде всего, что оператор

$$H_0 + \sum_{r \geqslant 1} \int W_r(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad (46.15)$$

где $W_r \in \mathscr{A}$, $W_r\theta = 0$, может быть записан в виде

$$H_0 + \sum_{r \geqslant 1} g^r \int_{m,n} w_{m,n}^{(r)}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times \delta(\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_m - \mathbf{p}_1 - \ldots - \mathbf{p}_n) \times$$
$$\times a^+(\mathbf{k}_1) \ldots a^+(\mathbf{k}_m)\, a(\mathbf{p}_1) \ldots a(\mathbf{p}_n)\, d^m\mathbf{k}\, d^n\mathbf{p},$$

т. е. представляет собой трансляционно инвариантный гамильтониан, не порождающий поляризации вакуума. (Легко видеть, что гамильтониан (46.15) принадлежит описанному в § 42 классу $\widetilde{\mathscr{M}}$.)

Как доказано в настоящем параграфе, гамильтониану (46.15) можно сопоставить матрицы Мёллера и матрицу рассеяния как формальные ряды по степеням g (об этом уже говорилось в § 44, где намечено другое доказательство этого утверждения).

Теперь можно применить результаты гл. 10 для получения информации о матрице рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана, не порождающего поляризации вакуума.

Например, следующее утверждение сразу вытекает из теоремы 3 § 39, если заметить, что для свободного гамильтониана H_0 тождественный оператор является одевающим и удовлетворяет условиям теоремы 2 § 39.

Пусть $H \in \widetilde{\mathscr{M}}$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{M}$ — гамильтонианы, не порождающие поляризации вакуума, и оператор $D = \exp(iB_1) \ldots \exp(iB_n)$ переводит голое одночастичное состояние $a^+(\mathbf{k})\,\theta$ в одночастичное состояние гамильтониана H. Тогда оператор D является одевающим оператором для гамильтониана H.

Далее, пусть $H = H_0 + V \in \widetilde{\mathscr{M}}$ — гамильтониан, не порождающий поляризации вакуума, и функция $\varepsilon(\mathbf{k})$ строго выпукла. Тогда из результатов § 41 можно заключить, что *данное в § 31 определение матриц Мёллера через адиабатические матрицы Мёллера эквивалентно другим определениям.* Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае *определение 2 матрицы рассеяния из § 33 также равносильно другим определениям* (оба эти утверждения, как было замечено выше, имеют место в рамках теории возмущений с частичным суммированием).

ГЛАВА 12

АКСИОМАТИКА ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 47. Аксиомы, обеспечивающие лоренц-инвариантность матрицы рассеяния

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство состояний. Чтобы говорить о лоренц-инвариантности теории, необходимо прежде всего предположить, что в пространстве $\mathcal{H}$ задано унитарное представление неоднородной группы Лоренца P. Унитарный оператор, соответствующий элементу $g \in P$, будем обозначать $U(g)$. Группа P содержит в качестве подгруппы группу пространственно-временных трансляций T; определим операторы энергии H и импульса $\mathbf{P}$ соотношением

$$\exp(-\mathrm{i}(Ha_0 - \mathbf{Pa})) = U(1, a), \qquad (47.1)$$

где символом $(1, a)$ обозначен сдвиг $x' = x + a$ (вообще, (Λ, a) обозначает элемент группы P, определяемый преобразованием $x' = \Lambda x + a$).

Однако по одному только представлению неоднородной группы Лоренца нельзя построить матрицу рассеяния. Будем считать, как и в аксиоматическом подходе к теории рассеяния, описанном в гл. 10, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задана еще асимптотически абелева алгебра $\mathcal{A}$, и укажем, какие условия гарантируют лоренц-инвариантность матрицы рассеяния.

Прежде всего предположим, что представление $U(g)$ и алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяют следующим аксиомам.

A1. Спектральность. Оператор энергии H имеет единственное основное состояние Φ; вектор Φ лоренц-инвариантен (т. е. $U(g)\Phi = \Phi$ для любого преобразования $g \in P$).

Вектор Φ называется физическим вакуумом.

A2. Цикличность. Вектор Φ — циклический вектор алгебры $\mathcal{A}$.

A3. Лоренц-инвариантность алгебры $\mathcal{A}$. Если оператор $A \in \mathcal{A}$, то для любого преобразования $g \in P$ оператор $U(g) A U^{-1}(g)$ также принадлежит алгебре $\mathcal{A}$.

Во всем дальнейшем аксиома 3 может быть заменена следующим более слабым условием.

A3′. Для любого преобразования $g \in P$ алгебра $\mathcal{A}$ асимптотически коммутирует с алгеброй $U(g)\mathcal{A}U^{-1}(g)$ (т. е. с алгеброй, состоящей из операторов вида $U(g) A U^{-1}(g)$, где $A \in \mathcal{A}$).

Проанализируем на основе аксиомы A1, как устроен спектр операторов H, $\mathbf{P}$.

Из лоренц-инвариантности вектора Φ вытекает, в частности, что $\exp(-\mathrm{i}Ht)\Phi = \Phi$ и $\exp(\mathrm{i}\mathbf{Pa})\Phi = \Phi$, откуда

$$H\Phi = \mathbf{P}\Phi = 0. \qquad (47.2)$$

Нетрудно проверить, что и, наоборот, из равенства (47.2) и единственности основного состояния вытекает лоренц-инвариантность вектора Φ.

Поскольку основное состояние Φ оператора энергии H в силу равенства (47.2) имеет нулевую энергию, оператор H неотрицательно определен. Это означает, что спектр оператора H расположен на полуоси $\omega \geqslant 0$, а совместный спектр операторов H, $\mathbf{P}$ расположен в полупространстве, состоящем из точек $(\omega, \mathbf{p})$, для которых $\omega \geqslant 0$. Однако совместный спектр операторов H, $\mathbf{P}$ должен быть множеством, инвариантным относительно однородных преобразований Лоренца (см. дополнение, § Д. 9), поэтому можно утверждать, что спектр операторов H, $\mathbf{P}$ расположен в конусе W, состоящем из точек $(\omega, \mathbf{p})$, удовлетворяющих неравенству $\omega^2 \geqslant \mathbf{p}^2$ (всякую точку, для которой $\omega^2 < \mathbf{p}^2$, однородным преобразованием Лоренца можно перевести в точку $(\omega', \mathbf{p}')$ с $\omega' < 0$). Физическому вакууму Φ соответствует точка спектра $0 = (0, 0, 0, 0) \in W$.

Рассмотрим неприводимое инвариантное подпространство K пространства $\mathcal{H}$ [т. е. подпространство, инвариантное относительно операторов $U(g)$ и не содержащее нетривиальных подпространств, также инвариантных относительно операторов $U(g)$]. Примером такого подпространства является подпространство A, образованное векторами вида $\lambda\Phi$ (вакуумное подпространство). Всякое другое неприводимое инвариантное подпространство не может содержать вектора Φ (иначе оно содержало бы подпространство A и было бы приводимым). Будем поэтому считать, что рассматриваемое пространство K не содержит вектора Φ.

Представление неоднородной группы Лоренца P операторами $U(g)$, рассматриваемыми как операторы в пространстве K, неприводимо. Оператор энергии H в подпространстве K не может быть равен нулю, поскольку иначе всякий вектор $x \in K$ был бы основным состоянием оператора H, что противоречит единственности основного состояния (аксиома А1). С другой стороны, в силу той же аксиомы оператор H в подпространстве K (как и во всем пространстве) неотрицательно определен.

В силу известных фактов о неприводимых представлениях группы P (см. дополнение, § Д.9) спектр операторов H и $\mathbf{P}$ в пространстве K заполняет множество U_μ, состоящее из точек $(\omega, \mathbf{p}) \in E^4$, для которых $\omega^2 - \mathbf{p}^2 = \mu^2$, $\omega \geqslant 0$ (здесь μ — некоторое неотрицательное число). Далее, можно утверждать, что существует унитарное отображение (изоморфизм) Ψ пространства $L^2(E^3 \times N)$, где N — конечное множество, на пространство K, обладающее свойством

$$U(g)\,\Psi(f) = \Psi(V(g)\,f), \tag{47.3}$$

где $V(g)$ — неприводимое представление типа (μ, n), описанное в дополнении, § Д.9. Из соотношения (47.3) вытекает, в частности, что

$$\begin{aligned} H\Psi(f) &= \Psi(\hat{h}f); \\ \mathbf{P}\Psi(f) &= \Psi(\hat{\mathbf{p}}f), \end{aligned} \tag{47.4}$$

где $\hat{h}$ и $\hat{\mathbf{p}}$ — операторы в пространстве $L^2(E^3 \times N)$, определенные формулами

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{p}} f)(\mathbf{k}, \alpha) &= \mathbf{k} f(\mathbf{k}, \alpha); \\ (\hat{h}f)(\mathbf{k}, \alpha) &= \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\, f(\mathbf{k}, \alpha). \end{aligned} \tag{47.5}$$

Отображение Ψ можно рассматривать как n обобщенных векторных функций $\Psi_\alpha(\mathbf{k})$, связанных с Ψ формулой

$$\Psi(f) = \sum_{\alpha \in N} \int f(\mathbf{k}, \alpha)\, \Psi_\alpha(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$$

(здесь n — число элементов в множестве N, α пробегает множество N). Из унитарности отображения Ψ вытекает, что обобщенные векторные функции $\Psi_\alpha(\mathbf{k})$ удовлетворяют условиям

$$\langle \Psi_\alpha(\mathbf{k}),\ \Psi_{\alpha'}(\mathbf{k}') \rangle = \delta_\alpha^{\alpha'}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

(ортогональность и нормированность на δ-функцию); из равенств (47.4), (47.5) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Psi_\alpha(\mathbf{k}) &= \mathbf{k}\Psi_\alpha(\mathbf{k}); \\ H\Psi_\alpha(\mathbf{k}) &= \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\,\Psi_\alpha(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Это означает, что функции $\Psi_\alpha(\mathbf{k})$ можно рассматривать как одночастичные состояния в смысле принятого в этой книге определения. В обычной терминологии совокупность функций $\Psi_1(\mathbf{k}), \ldots, \Psi_n(\mathbf{k})$ (т. е. отображение Ψ) отождествляется с частицей, имеющей массу μ и спин $s = \frac{n-1}{2}$. Частица, имеющая спин 0, называется *скалярной*.

Наименьшее из подпространств, содержащих все неприводимые инвариантные подпространства, отличные от A, будем называть *одночастичным подпространством* и обозначать B.

Легко видеть, что пространство B может быть представлено в виде прямой суммы ортогональных друг другу неприводимых инвариантных подпространств K_i; с помощью описанных выше изоморфизмов Ψ_i пространств $L^2(E^3 \times N_i)$ и пространств K_i можно построить изоморфизм $\Psi = \sum_i \Psi_i$ пространства $L^2(E^3 \times N) = \dot{\sum_i} L^2(E^3 \times N_i)$ и пространства B (N — объединение множеств N_i).

Из сделанных выше замечаний ясно, что определенное только что одночастичное подпространство B содержится в одночастичном подпространстве в смысле определения, данного в § 36.

Многочастичным подпространством M назовем ортогональное дополнение к прямой сумме $A \dot{+} B$ (пространство $A + B$ может быть описано как сумма всех неприводимых инвариантных подпространств).

Пространство $\mathcal{H}_{as}$ определим как фоковское пространство $F(B)$.

Воспользовавшись построенным выше изоморфизмом пространства B и пространства $L^2(E^3 \times N)$, можно ввести в $\mathcal{H}_{as}$ операторные обобщенные функции $a^+(\mathbf{k}, s)$, $a(\mathbf{k}, s)$, где $\mathbf{k} \in L^3$, $s \in N$, удовлетворяющие соотношениям

$$[a(\mathbf{k}, s),\ a(\mathbf{k}', s')] = [a^+(\mathbf{k}, s),\ a^+(\mathbf{k}', s')] = 0;$$

$$[a(\mathbf{k}, s),\ a^+(\mathbf{k}', s')] = \delta_{s'}^{s}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Пространство B инвариантно относительно операторов $U(g)$. Представление группы P операторами $U(g)$ в пространстве B индуцирует, очевидно, представление группы P в пространстве $\mathcal{H}_{as}$; операторы этого представления будем обозначать $U_{as}(g)$. *Асимптотический гамильтониан*

H_{as} *и асимптотический оператор импульса* $\mathbf{P}_{as}$ определяются, естественно, соотношением

$$\exp(-i(H_{as}a_0 - \mathbf{P}_{as}\mathbf{a})) = U_{as}(1, a),$$

где $(1, a)$ — преобразование сдвига.

Легко видеть, что через операторы $a^+(\mathbf{k}, s)$, $a(\mathbf{k}, s)$ асимптотический гамильтониан и асимптотический оператор импульса выражаются формулами

$$\mathcal{H}_{as} = \sum_i \sum_{s\in N_i} \int \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu_i^2}\, a^+(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s)\, d\mathbf{k};$$

$$\mathbf{P}_{as} = \sum_{s\in N} \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s)\, d\mathbf{k}.$$

Сформулируем теперь дополнительную аксиому, позволяющую построить теорию рассеяния в рассматриваемой ситуации (*усиленное условие спектральности*).

A4. Совместный спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в наименьшем подпространстве C пространства $\mathcal{H}$, содержащем все неприводимые инвариантные подпространства операторов $U(g)$, не пересекается с совместным спектром этих операторов в ортогональном дополнении к пространству C. В спектре оператора энергии H имеется щель (т. е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что единственной точкой спектра оператора H на луче $(-\infty, \varepsilon)$ является точка 0, соответствующая физическому вакууму).

Ясно, что пространство C равно прямой сумме вакуумного подпространства A и одночастичного подпространства B, поэтому совместный спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в пространстве C является объединением *вакуумного спектра* (т. е. спектра операторов H, $\mathbf{P}$ в пространстве A) и *одночастичного спектра* (т. е. спектра операторов H, $\mathbf{P}$ в пространстве B). Из сделанных выше утверждений следует, что вакуумный спектр состоит из единственной точки 0, а одночастичный спектр является объединением нескольких множеств U_{μ_i}, выделяемых соотношениями $\omega^2 - \mathbf{k}^2 = \mu_i^2$, $\omega \geqslant 0$.

Ортогональное дополнение к пространству $C = A + B$ было названо выше многочастичным пространством и обозначено символом M, совместный спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в M назовем *многочастичным спектром*.

С помощью введенных сейчас определений можно следующим образом переформулировать аксиому 4.

A4'. Вакуумный спектр, одночастичный спектр и многочастичный спектр представляют собой три попарно непересекающихся множества.

Таким образом, спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в пространстве $\mathcal{H}$ устроен следующим образом. В него входят точка 0, соответствующая вектору Φ, несколько множеств U_{μ_i} с $\mu_i > 0$, образующих одночастичный спектр (множество U_{μ_i} с $\mu_i > 0$ представляет собой верхнюю полу гиперболоида), и многочастичный спектр, который не содержит точки 0 и не пересекается ни с одним из множеств U_{μ_i}.

Имеет место следующее утверждение.

В случае, если выполнены аксиомы 1, 2, 3, 4, матрицы Мёллера $S_\pm$ и матрица рассеяния S могут быть определены так же, как в § 36; с помощью рассуждений § 36 можно доказать существование матриц Мёллера и матрицы рассеяния. Определенные таким образом матрицы Мёллера и матрица рассеяния лоренц-инвариантны (т. е. выполнены равенства

$$\begin{aligned} U(g)\ S_\pm &= S_\pm\ U_{as}(g); \\ U_{as}(g)\ S &= S U_{as}(g) \end{aligned} \tag{47.6}$$

для любого преобразования $g \in P$).

В самом деле, применимость определений и рассуждений § 36 к рассматриваемому случаю не вызывает сомнений. (Нельзя сказать, что все предположения § 36 выполнены, поскольку принятое в § 36 определение одночастичного подпространства отличается от принятого в настоящем параграфе; это влечет за собой также различие в определениях пространства $\mathcal{H}_{as}$. Однако ввиду того, что одночастичное пространство B, определенное в настоящем параграфе, содержится в одночастичном пространстве в смысле § 36, это не мешает применять рассуждения гл. 10 в рассматриваемой ситуации.) Лоренц-инвариантность матриц Мёллера и матрицы рассеяния можно доказать с помощью рассуждений, использованных для той же цели в § 6 гл. 6 книги [30]; не будем здесь останавливаться на этом доказательстве.

Отметим, что результаты настоящего параграфа остаются справедливыми, если асимптотически абелево семейство операторов заменить асимптотически абелевым семейством операторных обобщенных функций (в смысле § 40). Область определения этих операторных обобщенных функций предполагается инвариантной относительно операторов $U(g)$, где $g \in P$. Условия A2 и A3 должны быть, конечно, соответствующим образом модифицированы (следует потребовать, чтобы вектор Φ был циклическим вектором этого семейства и чтобы с каждой обобщенной операторной функцией $A(\mathbf{x}, t)$ к рассматриваемому семейству принадлежала также обобщенная операторная функция $A_g(\mathbf{x}, t) = U_g A(\mathbf{x}, t) U_g^{-1}$, где g — любой элемент группы P).

§ 48. Аксиоматика локальной квантовой теории поля

В § 47 при формулировке системы аксиом мы исходили из аксиоматической теории рассеяния, построенной в гл. 10, и добавили к предположениям этой теории аксиомы, обеспечивающие лоренц-инвариантность матрицы рассеяния.

Сейчас изложим другую систему аксиом, принадлежащую Хаагу и Араки.

Пусть снова в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ действует представление U_g неоднородной группы Лоренца P, так же, как в предыдущем параграфе, потребуем, чтобы было выполнено условие спектральности (аксиома A1).

Будем считать, что каждой ограниченной области $\mathscr{O} \subset E^4$ сопоставлена совокупность $R(\mathscr{O})$ ограниченных операторов в пространстве $\mathscr{H}$, замкнутая относительно сложения и умножения операторов, умножения на число, перехода к сопряженному оператору и перехода к слабому пределу (такая совокупность операторов носит название W^*-алгебры).

Будем считать, что алгебры $R(\mathscr{O})$ обладают следующими свойствами.

R1. Если $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$, то $R(\mathscr{O}_1) \subset R(\mathscr{O}_2)$ (*изотония*).

R2. *Ковариантность относительно неоднородной группы Лоренца*:

$$U_g R(\mathscr{O}) U_g^{-1} = R(g\mathscr{O}).$$

R3. *Локальная коммутативность*: если любая точка области $\mathscr{O}_1$ отделена пространственно-подобным интервалом от любой точки области $\mathscr{O}_2$, то $R(\mathscr{O}_1)$ и $R(\mathscr{O}_2)$ коммутируют между собой.

R4. *Цикличность*: физический вакуум Φ цикличен относительно объединения алгебр $R(\mathscr{O})$.

Легко видеть, что объединение $\mathscr{R}$ алгебр $R(\mathscr{O})$ асимптотически абелево. В самом деле, пусть $A \in R(\mathscr{O}_1) \subset \mathscr{R}$, $B \in R(\mathscr{O}_2) \subset \mathscr{R}$. Тогда по условию R2 $A(\mathbf{x}, t) = \exp(iHt - i\mathbf{P}\mathbf{x}) A \exp(-iHt + i\mathbf{P}\mathbf{x}) \in R(\mathscr{O}_1 - x)$, где $x = (\mathbf{x}, t)$. Поскольку области $\mathscr{O}_1$ и $\mathscr{O}_2$ ограничены, найдется такое a, что при $|\mathbf{x}|^2 - |t|^2 \geqslant a^2$ любая точка области $\mathscr{O}_1 - x$ отделена от любой точки области $\mathscr{O}_2$ пространственно-подобным интервалом. Пользуясь условием R3, получаем, что при $|\mathbf{x}|^2 - |t|^2 \geqslant a^2$

$$[A(\mathbf{x}, t), B] = 0.$$

С другой стороны, $\|A(\mathbf{x}, t)\| = \|A\|$, поэтому

$$\|[A(\mathbf{x}, t), B]\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|B\|.$$

Комбинируя эти соотношения, видим, что

$$\|[A(\mathbf{x}, t), B]\| \leqslant C \frac{1 + |t|^n}{1 + |\mathbf{x}|^n}$$

для любого n (чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\frac{1 + |t|^n}{1 + |\mathbf{x}|^n} > c > 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}|^2 - |t|^2 \geqslant a^2).$$

Далее, алгебра $\mathscr{R}$ очевидным образом инвариантна при преобразованиях Лоренца.

Таким образом, алгебра $\mathscr{R}$ и представление U_g удовлетворяют всем требованиям § 47, кроме аксиомы A4.

Если потребуем дополнительно выполнения аксиомы A4, то соображения, изложенные в § 47, позволяют утверждать, что *существует лоренц-инвариантная матрица рассеяния*.

Другая важная система аксиом принадлежит Уайтману. В этой системе аксиом также предполагается, что в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ действует представление неоднородной группы Лоренца, удовлетворяющее условию спектральности A1.

Сделаем предположение, что в пространстве $\mathscr{H}$ действует операторная обобщенная функция $\varphi(x)$, где $x \in E^4$. Точнее говоря, предположим, что каждой функции $f \in \mathscr{S}(E^4)$ сопоставлен оператор $\varphi(f)$; все операторы $\varphi(f)$ определены на одном и том же линейном многообразии D и переводят D в себя; оператор $\varphi(f)$ должен линейно зависеть от f и для любых векторов $\xi, \eta \in D$ функционал $\langle \varphi(f)\xi, \eta \rangle$ должен непрерывно зависеть от f в топологии пространства $\mathscr{S}$ [т. е. он должен определять обобщенную функцию из пространства $\mathscr{S}'(E^4)$].

Как всегда, будем писать $\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x)\, dx$, операторную обобщенную функцию $\varphi(x)$ будем называть *квантованным полем.*

Будем считать, что квантованное поле $\varphi(x)$ эрмитово (т. е. операторы $\varphi(f)$ и $\varphi(\bar{f})$ сопряжены друг с другом).

Будем говорить, что представление $U(g)$ неоднородной группы Лоренца P и операторная обобщенная функция $\varphi(x)$ (квантованное поле) удовлетворяют аксиомам Уайтмана*, если выполнены следующие требования:

W1. *Закон преобразования квантованного поля.* Операторы U_g оставляют инвариантным многообразие D: $U_g D = D$. Квантованное поле $\varphi(x)$ преобразуется по закону

$$U(g)\,\varphi(x)\,U^{-1}(g) = \varphi(gx). \tag{48.1}$$

Более подробно равенство (48.1) означает, что

$$U(g)\,\varphi(f)\,U^{-1}(g) = \varphi(f_g),$$

где

$$f_g(x) = f(g^{-1}x).$$

W2. *Локальность* (локальная коммутативность). Если точки $x, y \in E^4$ разделены пространственно-подобным интервалом, то $\varphi(x)$ коммутирует с $\varphi(y)$.

Точнее говоря, требуется, чтобы операторы $\varphi(f)$ и $\varphi(g)$ коммутировали в случае, когда носители функций f и g разделены пространственно-подобным интервалом.

W3. *Цикличность.* Вектор Φ (основное состояние оператора энергии) является циклическим вектором семейства операторов $\varphi(f)$.

Функции Уайтмана $w_m(x_1, \ldots, x_m)$ определим соотношением

$$w_m(x_1, \ldots, x_m) = \langle \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m)\,\Phi, \Phi \rangle.$$

В силу теоремы о ядре (см. дополнение, § Д. 7) функцию w_n можно рассматривать как обобщенную функцию из $\mathcal{S}'(E^{4m})$.

С помощью рассуждений, примененных в § 29 при доказательстве теоремы реконструкции, по функциям Уайтмана w_m можно с точностью до изоморфизма восстановить гильбертово пространство $\mathcal{H}$, представление группы Лоренца и квантованное поле $\varphi(x)$. Легко перечислить семейства, необходимые и достаточные для того, чтобы функции $w_m(x_1, \ldots, x_m)$ могли служить функциями Уайтмана квантованного поля, удовлетворяющего аксиомам Уайтмана (эти условия аналогичны условиям 1—6 из § 29)*.

Покажем теперь, что, прибавив к аксиомам Уайтмана аксиому А4 § 47, *можно дать определение матриц Мёллера и матрицы рассеяния, доказать их существование и лоренц-инвариантность.* Для этого достаточно рассмотреть семейство операторных обобщенных функций $\varphi(gx)$, где g пробегает неоднородную группу Лоренца P, и заметить, что это семейство асимптотически абелево в смысле § 40 и удовлетворяет условиям А1 — А4 § 47. (Аксиома А3 сразу следует из аксиомы W1, аксиома А2 — из аксиомы W3, условие Д5 § 40 вытекает из локальной коммутативности, если положить $\delta < 1$.)**

Таким образом, видим, что все утверждения, которые могут быть получены из аксиом § 47, можно доказать и в аксиоматической теории Уайтмана. Однако есть теоремы, выведенные из аксиом Уайтмана, которые не доказаны (и, видимо, не могут быть доказаны) в рамках аксиоматики § 47.

Наиболее важным утверждением такого типа являются дисперсионные соотношения, полученные впервые в [13] и выведенные из аксиом Уайтмана в [32]. Отметим, еще TCP-теорему, в силу которой из аксиом Уайтмана может быть выведена TCP-инвариантность теории (т. е. существование некоторой дополнительной симметрии). Следующая теорема Борхерса обычно выводится из TCP-теоремы:

Если два квантованных поля $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ в гильбертовом пространстве удовлетворяют аксиомам Уайтмана и локальны по отношению друг к другу (т. е. $[\varphi_1(x), \varphi_2(y)] = 0$ для точек x, y, разделенных пространственно-подобным интервалом), то они определяют одну и ту же матрицу рассеяния.

---

* Здесь формулируются аксиомы Уайтмана для случая скалярного эрмитова поля; формулировку аксиом Уайтмана в более общем случае см., например, в [31].

* Подробнее об этом см., например, в [29 — 31].

** Ясио, что аксиомы Уайтмана можно ослабить, сохранив лоренц-инвариантность матрицы рассеяния. Именно, выполнения закона преобразования (48.1) достаточно потребовать лишь для случая, когда g — трансляция, а условие W2 можно заменить требованием асимптотической абелевости семейства обобщенных операторных функций $U_g \varphi(x) U_g^{-1}$.

Однако эта теорема допускает и независимый вывод, позволяющий перенести ее в ситуацию § 47. Именно, ее естественным обобщением является теорема о том, что две асимптотически коммутирующие асимптотически абелевы алгебры определяют одну и ту же матрицу рассеяния (см. § 36).

Остановимся на связи аксиоматики Уайтмана с аксиоматикой Хаага — Араки. Предположим, что операторы $\varphi(f) = \int f(x)\varphi(x)\,dx$, фигурирующие в аксиоматике Уайтмана, не только эрмитовы, но и существенно самосопряжены для любой действительной гладкой финитной функции f. Тогда каждой такой функции f можем сопоставить семейство $\mathcal{T}_f$ ограниченных операторов, являющихся функциями от оператора $\varphi(f)$ (т. е. имеющих вид $\alpha(\varphi(f))$, где α — ограниченная функция). Символом $R(\mathcal{O})$ обозначим наименьшую W^*-алгебру, содержащую все семейства $\mathcal{T}_f$, где f — гладкая действительная функция с носителем в множестве $\mathcal{O}$. Можно проверить, что алгебры $R(\mathcal{O})$ удовлетворяют аксиомам Хаага — Араки.

§ 49. Проблема построения нетривиального примера

Построение лоренц-инвариантной квантовой теории естественно пытаться осуществить с помощью квантования лоренц-инвариантной классической теории. Напомним, что в § 30 обсуждался вопрос о квантовании классической теории, описываемой функционалом Гамильтона

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\int \pi^2(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} + V(\varphi).$$

Легко видеть, что такая классическая система лоренц-инвариантна, если

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2}\int \pi^2(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} - \frac{1}{2}\int \varphi(\mathrm{x})\,\Delta\varphi(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} + \int U(\varphi(\mathrm{x}))\,d\mathrm{x}. \qquad (49.1)$$

В самом деле, уравнения Гамильтона для системы, описываемой функционалом Гамильтона (49.1), имеют вид

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x}, t)}{\partial t} = \pi(\mathrm{x}, t);$$

$$\frac{\partial\pi(\mathrm{x}, t)}{\partial t} = \Delta\varphi(\mathrm{x}, t) - F(\varphi(\mathrm{x}, t)),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{\partial U(\varphi)}{\partial\varphi}.$$

Таким образом, функция $\varphi(x) = \varphi(\mathrm{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box\varphi(x) + F(\varphi(x)) = 0,$$

которое очевидным образом лоренц-инвариантно (не меняет своего вида при замене $\varphi(x)$ на $\varphi(\Lambda x)$, где Λ — преобразование Лоренца).

В лоренц-инвариантности классической системы, описываемой функционалом Гамильтона (49.1), можно убедиться также, рассмотрев интеграл действия для этой системы. Этот интеграл может быть представлен в форме

$$S = \int\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\varphi)^2\right)dx - \int U(\varphi(x))\,dx$$

и, стало быть, инвариантен при преобразованиях Лоренца.

Рассмотрим прежде всего простейшую систему с функционалом Гамильтона вида (49.1) — систему, у которой

$$U(\varphi(\mathrm{x})) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2(\mathrm{x}). \qquad (49.2)$$

При квантовании этой системы приходим к гамильтониану

$$H = \frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} - \frac{1}{2}\int\hat{\varphi}(\mathrm{x})\,\Delta\hat{\varphi}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} + \frac{1}{2}m^2\int\hat{\varphi}^2(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}, \qquad (49.3)$$

где $\hat{\pi}(\mathrm{x})$, $\hat{\varphi}(\mathrm{x})$ — символы, удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{\pi}^+(\mathrm{x}) = \hat{\pi}(\mathrm{x}); \quad \hat{\varphi}^+(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x});$$

$$[\hat{\pi}(\mathrm{x}), \hat{\pi}(\mathrm{y})] = [\hat{\varphi}(\mathrm{x}), \hat{\varphi}(\mathrm{y})] = 0;$$

$$[\hat{\pi}(\mathrm{x}), \hat{\varphi}(\mathrm{y})] = \frac{1}{i}\delta(\mathrm{x}-\mathrm{y}).$$

Гамильтониан (49.3) может быть записан в виде (30.6), где $v(\mathrm{x}) = -\Delta\delta(\mathrm{x}) + m^2\delta(\mathrm{x})$. Операторная реализация гамильтонианов вида (30.6) (свободных гамильтонианов) описана в § 30. Пользуясь результатами § 30, убеждаемся, что операторная реализация гамильтониана (49.3) может быть построена в фоковском пространстве $\mathcal{H} = F(L^2(E^3))$; в качестве операторов энергии и импульса следует выбрать операторы

$$\hat{H} = \int \omega(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};$$
$$\hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

где $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$; операторы (операторные обобщенные функции) $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ определяются формулой

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int (a^+(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{k})\, t - \mathrm{i}\,\mathbf{k}\mathbf{x}) + a(\mathbf{k}) \exp(-\mathrm{i}\,\omega(\mathbf{k})\, t + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\mathbf{x})) \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}}. \tag{49.4}$$

Основное состояние Φ совпадает с фоковским вакуумом θ.

Операторы $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют лоренц-инвариантному уравнению

$$\square\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0;$$

естественно думать поэтому, что описанная квантовомеханическая система лоренц-инвариантна. Действительно, представление группы трансляций в пространстве $F(L^2(E^3))$, порожденное операторами H и $\mathbf{P}$, можно дополнить до унитарного представления неоднородной группы Лоренца таким образом, что

$$U(g)\ \varphi(x)\ U^{-1}(g) = \varphi(gx)$$

(здесь g — преобразование Лоренца, $U(g)$ — соответствующий ему унитарный оператор). Нужное представление группы Лоренца можно получить, рассмотрев в пространстве $L^2(E^3)$ представление типа $(m, 1)$, описанное в дополнении, § Д.9, и заметив, что представление группы в пространстве $L^2(E^3)$ определяет представление в пространстве $F(L^2(E^3))$ (это уже было использовано в § 47).

Без труда проверяется, что определяемая формулой (49.4) операторная обобщенная функция $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ и построенное представление неоднородной группы Лоренца удовлетворяют всем аксиомам Уайтмана.

Описанная квантовомеханическая система носит название свободного скалярного поля массы m. Определяемые ею частицы представляют собой невзаимодействующие бозоны со спином 0. Отсутствие взаимодействия между этими частицами проявляется, в частности, в том, что матрица рассеяния оказывается тривиальной. Для того чтобы получить нетривиальную лоренц-инвариантную матрицу рассеяния, естественно попытаться проквантовать классическую теорию с функционалом Гамильтона вида (49.1), где функция $U(\varphi)$ уже не является квадратичной. К сожалению, такая попытка наталкивается на многочисленные затруднения, связанные с тем, что при этом на каждом шагу приходится сталкиваться с сингулярными выражениями, которым нелегко придать точный смысл. Например, из-за того, что $\varphi(x)$ — обобщенная операторная функция, выражения вида $\varphi^n(x)$, где $n \geqslant 2$, а также более общие выражения $v(\varphi(x))$, где $v(\varphi)$ — функция, отличная от линейной, не определены; поэтому уравнение

$$\square\varphi(x) + F(\varphi(x)) = 0,$$

которому должны удовлетворять полевые операторы $\varphi(x)$, нельзя считать математически осмысленным.

Предположим, что функционал Гамильтона (49.1) представлен в форме $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$, где $\mathcal{H}_0$ — функционал Гамильтона вида (49.2), $V = \int v(\varphi(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$. Получающийся при квантовании формальный гамильтониан записывается в виде

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int \hat{\varphi}(\mathbf{x})\, \Delta\hat{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} m^2 \int \hat{\varphi}^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int v(\hat{\varphi}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{49.5}$$

Если попытаться выразить этот гамильтониан через символы $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$, как это описано в § 30, и затем привести полученное выражение к нормальной форме с помощью CCR, то кроме обычной бесконечной константы, которую условились отбрасывать, получим и другие бесконечные слагаемые. Поэтому обычно рассматривают формальный гамильтониан

$$H = H_0 + N \int v(\hat{\varphi}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{49.6}$$

где N — знак нормального произведения (т. е. выражают $\int v(\hat{\varphi}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$ через $a^+(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ по формулам (30.7), а затем расставляют эти символы в нормальном порядке, считая их коммутирующими). Однако переход от формального гамильтониана (49.5) к формальному гамильтониану (49.6) позволяет избавиться лишь от наименее существенных бесконечностей из числа встречающихся в теории. В частности, при вычислении по теории возмущений функций Грина гамильтониана (49.6) сталкиваемся с расходящимися интегралами*.

К сожалению, до сих пор не существует достаточно последовательного способа преодоления упомянутых затруднений для случая произвольной функции $v(\varphi)$ и даже для случая, когда функция $v(\varphi)$ является полиномом. Однако, если функция $v(\varphi)$ является полиномом порядка $\leqslant 4$ (т. е. $v(\varphi) = a\varphi^3 + b\varphi^4$), в рамках теории возмущений может быть указан способ построения семейства лоренц-инвариантных частиц рассеяния, которые можно считать соответствующими семейству гамильтонианов вида $H_0 + N\int v(\hat{\varphi}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$. Этот способ был предложен Фейнманом; он носит название ковариантной перенормировки.

Остановимся ради определенности на случае, когда $v(\varphi) = b\varphi^4$. Рассмотрим семейство гамильтонианов вида

$$H = H_0(w) + bV_\Lambda = \frac{1}{2}\int \hat{\pi}^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \\ + \frac{1}{2}\int w(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\hat{\varphi}(\mathbf{x})\,\hat{\varphi}(\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} + \\ + b\int f_\Lambda(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_4,\ \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_4,\ \mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4) + \\ + \hat{\varphi}(\mathbf{x}_1)\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}_2)\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}_3)\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}_4)\,d^4\mathbf{x}.$$

Здесь $w(\mathbf{x})$ — произвольная функция, $f_\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \Lambda^3 f(\Lambda\mathbf{x}_1, \Lambda\mathbf{x}_2, \Lambda\mathbf{x}_3)$, где функция $f \in \mathscr{S}$ и удовлетворяет условию $\int f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\,d^3\mathbf{x} = 1$. Легко видеть, что $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} f_\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \delta(\mathbf{x}_1)\,\delta(\mathbf{x}_2)\,\delta(\mathbf{x}_3)$, поэтому в пределе $\Lambda \to \infty$ взаимодействие V_Λ переходит в $V = \int \varphi^4(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$; замена V на V_Λ называется обрезанием по импульсам. (При определении выражения V_Λ можно использовать вместо обычного произведения нормальное; рассматриваемый класс гамильтонианов при этом не изменится.) Функцию $w(\mathbf{x})$ подберем из условия, чтобы энергия частиц, определяемых гамильтонианом $H_0(w) + bV_\Lambda$, равнялась $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$; полученный при этом гамильтониан обозначим $H(m, b, \Lambda)$ (в рамках теории возмущений такую функцию $w(\mathbf{x})$ нетрудно найти). Переход к гамильтониану $H(m, b, \Lambda)$ называется перенормировкой массы (число m имеет смысл массы частиц, определяемых гамильтонианом). Матрицу рассеяния, соответствующую гамильтониану $H(m, b, \Lambda)$, обозначим $S(m, b, \Lambda)$. Для того чтобы прийти к лоренц-инвариантной теории, естественно перейти к пределу $\Lambda \to \infty$ (снять обрезание по импульсам). Однако, устремляя Λ к бесконечности в членах ряда теории возмущений, сталкиваемся с расходящимися выражениями (возможно, впрочем, что, производя точное вычисление матрицы рассеяния — без помощи теории возмущений, — с этой трудностью не встретимся). Для того чтобы получить нетривиальную лоренц-инвариантную матрицу рассеяния в рамках теории возмущений, оказывается необходимым считать, что величина b (голый заряд) в процессе снятия обрезания по импульсам меняется. По теории возмущений удается доказать следующее утверждение: можно подобрать такую функцию $b(m, \Lambda, g)$, что матрицы рассеяния $S(m, b(m, \Lambda, g), \Lambda)$ при $\Lambda\to\infty$ имеют конечный нетривиальный лоренц-инвариантный предел $S(m, g)$. (Для того чтобы найти такую функцию $b(m, \Lambda, g)$, следует считать, что в процессе снятия обрезания остается фиксированной некоторая физическая величина g, и выражать голый заряд через параметр обрезания и эту величину. В качестве величины g обычно выбирают так называемый физический заряд.) Этот результат (высказываемый обычно в несколько иной форме) представляет собой содержание теории перенормировок. Функции Грина $G_n(x_1, \ldots, x_n \mid m, \Lambda, g)$ гамильтониана $H(m, b(m, \Lambda, g), \Lambda)$ не имеют конечного предела при $\Lambda\to\infty$, однако можно подобрать такую функцию $Z(m, \Lambda, g)$, что функции $Z^{-n/2}(m, \Lambda, g)\,G_n(x_1, \ldots, x_n \mid m, \Lambda, g)$ имеют при $\Lambda\to\infty$ конечный лоренц-инвариантный предел.

Перечисленные утверждения подсказывают следующий путь построения объектов, удовлетворяющих аксиомам Уайтмана и приводящих к нетривиальной матрице рассеяния. Нужно найти такие функции $b(m, \Lambda, g)$ и $Z(m, \Lambda, g)$, чтобы при $\Lambda \to \infty$ существовал конечный нетривиальный предел

$$\lim_{\Lambda\to\infty} Z^{-n/2}(m, \Lambda, g)\,w_n(x_1, \ldots, x_n \mid m, \Lambda, g) = \\ = w_n(x_1, \ldots, x_n \mid m, g),$$

* Следует заметить, что в одномерном пространстве (т. е. в случае, когда в гамильтониане (49.6) интегрирование ведется по одномерному пространству) вычисление по теории возмущений функций Грина гамильтониана (49.6) не приводит к расходимостям.

11 Зак. 82

где $w_n(x_1, \ldots, x_n | m, \Lambda, g)$ — функции Уайтмана гамильтониана $H(m, b(m, \Lambda, g), \Lambda)$. Можно надеяться, что предельные функции $w_n(x_1, \ldots, x_n | m, g)$ удовлетворяют требованиям, позволяющим восстановить по ним объекты, для которых выполнены аксиомы Уайтмана, и что матрица рассеяния, построенная по этим объектам, окажется нетривиальной. К сожалению, в настоящее время высказанная выше гипотеза остается недоказанной. Более того, не существует примеров объектов, удовлетворяющих аксиомам Уайтмана и приводящих к нетривиальной матрице рассеяния.

Разумеется, построив нетривиальную матрицу рассеяния в аксиоматике Уайтмана, получим пример нетривиальной матрицы рассеяния в аксиоматике § 47. Однако обратное неверно — построение нетривиального примера в аксиоматике § 47 может оказаться более легким.

Для того чтобы проиллюстрировать это, заметим, что Хааг доказал следующую теорему:

Пусть в пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ заданы представления $U_1(g)$ и $U_2(g)$ неоднородной группы Лоренца и два квантованных поля $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, удовлетворяющих аксиомам Уайтмана, причем одно из этих полей является свободным эрмитовым полем. Если существует такой изоморфизм α пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, что $\alpha\varphi_1(x) = \varphi_2(x)\alpha$, то второе из этих полей также является свободным эрмитовым полем.

Эта теорема исключает, в частности, возможность построить нетривиальный пример уайтмановской теории с помощью обычного гамильтонова формализма в фоковском пространстве. В то же время естественно ожидать, что в фоковском пространстве $\mathcal{H} = F(L^2(E^3))$ можно построить представление неоднородной группы Лоренца таким образом, что:

а) представление $U(g)$ вместе с семейством $\mathcal{A}$ операторов вида $\int f(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} + \int g(\mathbf{k})\, a^+(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}$, где $f, g \in \mathcal{S}(E^3)$, удовлетворяет аксиомам § 47;

б) матрица рассеяния S, определяемая представлением $U(g)$ и асимптотически абелевым семейством $\mathcal{A}$, нетривиальна и может быть получена с помощью обычного соотношения формальной теории рассеяния (17.3). (Это предположение подсказывается соображениями, основанными на теории возмущений.)

Сейчас интенсивно разрабатывается направление, ставящее своей целью построение объектов, удовлетворяющих аксиомам Уайтмана, исходя из гамильтонианов вида (49.6) (конструктивная квантовая теория поля). Уже получены весьма тонкие результаты, относящиеся, однако, только к частицам в одномерном и двумерном пространствах. (Все определения выше формулировались для теорий в реальном трехмерном пространстве; но эти определения без труда переносятся на пространства произвольной размерности.)

В одномерном случае вопрос можно считать полностью решенным, поскольку в этом случае построены операторные реализации широкого класса гамильтонианов вида (49.6); с помощью этих операторных реализаций строятся примеры теорий, удовлетворяющих аксиомам Уайтмана и приводящих к нетривиальной матрице рассеяния. (Определение операторной реализации гамильтониана (49.6) можно дать с помощью соображений, изложенных в § 29, вводя в гамильтониан обрезание по объему и по импульсам и снимая затем это обрезание. Определение, указанное в § 28, для гамильтонианов (49.6) оказывается неудобным, поскольку придать точный смысл гейзенберговским уравнениям для этих гамильтонианов затруднительно.) Сформулируем некоторые из результатов, полученные для одномерных гамильтонианов вида (49.6) в последнее время. Прежде всего, если $v(\varphi)$ — четный полином*, доказано существование операторной реализации гамильтониана (49.6), удовлетворяющей всем аксиомам Уайтмана, кроме единственности вакуума Φ (точнее, в пространстве операторной реализации можно определить действие группы Лоренца так, чтобы были выполнены аксиомы Уайтмана) [22]. Если $v(\varphi) = \lambda P(\varphi)$, где $P(\varphi)$ — полином четной степени, $\lambda > 0$, константа связи λ достаточно мала (случай слабой связи), то существует единственная операторная реализация гамильтониана (49.6); она удовлетворяет всем аксиомам Уайтмана. При тех же условиях можно проанализировать совместный спектр операторов H и $\mathbf{P}$ в пространстве операторной реализации. Оказывается, что в этом пространстве существует скалярная частица массы μ (т. е. имеется инвариантное относительно преобразований Лоренца подпространство K, в котором реализуется представление типа $(\mu, 1)$). Все точки $(\omega, \mathbf{k})$, принадлежащие спектру операторов H, $\mathbf{P}$ в подпространстве, ортогональном вакуумному вектору Φ и подпространству K, удовлетворяют условию $\omega^2 - \mathbf{k}^2 > 2\mu - \varepsilon$ (если $\lambda \to 0$, то $\mu \to m$, $\varepsilon \to 0$) [54].

В теории могут a priori существовать и другие частицы; например, существование частиц, имеющих массу в интервале $(\mu, 2\mu)$, доказано при малых λ в случае $P(\varphi) = \varphi^6 - \varphi^4$ (эти частицы можно интерпретировать как связанные состояния двух частиц массы μ). Это не позволяет утверждать,

* Считаем, что все рассматриваемые полиномы имеют положительный коэффициент при старшей степени.

что выполнена аксиома А4. Однако, пользуясь рассуждениями § 36, можно доказать существование матрицы рассеяния частиц массы μ (если в теории есть другие частицы, то следует ожидать, что эта матрица рассеяния не будет унитарной).

В случае, если $v(\varphi) = \lambda P(\varphi)$, где $P(\varphi)$ — четный полином, а константа связи λ достаточно велика, доказано существование различных операторных реализаций гамильтониана (49.6) [55] (в этих операторных реализациях $\langle \varphi(x, t)\,\Phi, \Phi\rangle \neq 0$, т. е. нарушена симметрия $\varphi \to -\varphi$).

Для одномерных гамильтонианов проанализирован также вопрос о связи точных решений с теорией возмущений. Именно, для гамильтонианов (49.6) с $v(\varphi) = \lambda P(\varphi)$, где $P(\varphi)$ — полином четной степени, рассмотрен ряд теории возмущений по λ для функций Швингера (функций Уайтмана от мнимого времени; точное определение см. в § 29) и показано, что этот ряд является асимптотическим при $\lambda \to +0$ (иначе говоря, функции Швингера имеют правые производные любого порядка при $\lambda = 0$ и эти производные могут быть получены с помощью формального дифференцирования ряда теории возмущений) [56]. Для $P(\varphi) = \varphi^4$ доказано, что при достаточно малых $\lambda > 0$ ряд теории возмущений суммируется по Борелю и его сумма совпадает с точным решением [57].

Построение операторной реализации и проверка аксиом Уайтмана проведены и для некоторых других одномерных гамильтонианов, например когда $v(\varphi) = \lambda\varphi^4 - \mu\varphi$, $\mu \neq 0$, а также в случае $v(\varphi) = P(\varphi) - \mu\varphi$, где $P(\varphi)$ — полином четной степени, μ достаточно велико (последний случай исследован столь же подробно, как и случай слабой связи). Отметим, что среди исследованных гамильтонианов имеются также гамильтонианы, описывающие взаимодействие фермионов и бозонов (взаимодействия типа Юкавы).

В двумерном случае получены существенные результаты, касающиеся гамильтониана (49.6) с $v(\varphi) = \lambda\varphi^4$. В этом случае теория возмущений приводит к ультрафиолетовым расходимостям, которые могут быть устранены с помощью перенормировки массы. Это означает, что конечные результаты в рамках теории возмущений получаются, если рассмотреть гамильтониан $H_\Lambda(m, \lambda)$, построенный с помощью обрезания исходного гамильтониана по импульсам, и устремить параметр обрезания по импульсам Λ к бесконечности, считая массу m зависящей от Λ (зависимость m от Λ подбирается из условия конечности предела при $\Lambda \to \infty$). Вне рамок теории возмущений доказано аналогичное утверждеие в случае слабой связи [58].

Точнее, в работе [58] построена операторная реализация рассматриваемого гамильтониана, удовлетворяющая всем аксиомам Уайтмана, доказано, что в пространстве операторной реализации существует скалярная частица, и показано, что ряд теории возмущений для функций Швингера является асимптотическим при $\lambda \to +0$.

Мы не будем приводить весьма тонких доказательств сформулированных выше теорем. Заметим только, что большая часть этих теорем доказана с помощью перехода к евклидовой формулировке квантовой теории поля. Точнее говоря, во многих из упоминавшихся работ исходным пунктом является представление функций Швингера в виде континуального интеграла. С помощью этого представления строятся функции Швингера и доказываются их свойства, позволяющие реконструировать по этим функциям операторную реализацию рассматриваемого гамильтониана и проверить выполнение аксиом Уайтмана.

Проведем нестрогие рассуждения, позволяющие прийти к континуальному интегралу для функций Швингера. Рассмотрим прежде всего функции Швингера гамильтониана (30.2):

$$S_m(\alpha_1, t_1, \ldots, \alpha_m, t_m) = \langle \hat q_{\alpha_1} \exp(-(H-E_0)(t_1-t_2)) \times \\ \times \hat q_{\alpha_2} \ldots \exp(-(H-E_0)(t_{m-1}-t_m))\, \hat q_{\alpha_m} \Phi, \Phi\rangle$$

(здесь Φ — основное состояние, E_0 — энергия этого состояния, $t_1 > t_2 > \ldots > t_m$). Матричные элементы оператора $\exp(-Ht)$ в координатном представлении могут быть записаны с помощью континуального интеграла (см., например, [23] или [59]); используя этот факт и соотношение

$$\langle A\Phi, \Phi\rangle = \lim_{T\to+\infty} \mathrm{Sp}\,(A \exp(-HT))/\mathrm{Sp}\exp(-HT),$$

нетрудно увидеть, что $S_m = \lim\limits_{T\to\infty} S_m^T$, где

$$S_m^T(\alpha_1, t_1, \ldots, \alpha_m, t_m) = \sigma_m^T(\alpha_1, t_1 \ldots, \alpha_m, t_m)/\sigma_0^T;$$

$$\sigma_m^T(\alpha_1, t_1, \ldots, \alpha_m, t_m) = \int q_{\alpha_1}(t_1) \ldots q_{\alpha_m}(t_m) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n}\int_0^T \dot q_\alpha^2\, dt - \int_0^T U(q_1(t), \ldots, q_n(t))\, dt\right) \prod dq_\alpha(t)$$

(континуальный интеграл берется по функциям $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, определенным на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющим периодическим граничным условиям: $q(0) = q(T)$; впрочем, при $T \to \infty$ выбор граничных условий становится несущественным). Переход от S_m к S_m^T можно рассматривать как обрезание по (мнимому) времени. Гамильтонианы вида (30.3) могут быть получены из гамильтонианов вида (30.2) с помощью предельного перехода (см., например, [23]). Это позволяет написать выражение функций Швингера

$$S_m(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \hat\varphi(\mathbf{x}_1) \exp(-\hat H(t_1 - t_2)) \ldots$$
$$\ldots \exp(-\hat H(t_{m-1} - t_m)) \hat\varphi(\mathbf{x}_m) \Phi, \Phi\rangle,$$

где $\hat H$ — оператор энергии в операторной реализации гамильтониана H, $\hat\varphi(\mathbf{x}) = \hat\varphi(\mathbf{x}, 0)$, $t_1 > \ldots > t_m$, в форме

$$S_m(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_m, t_m) = \lim_{V\to\infty} \sigma_m^V(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_m, t_m)/\sigma_0^V;$$

$$\sigma_m^V(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_m, t_m) = \int \varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots \varphi(\mathbf{x}_m, t_m) \times$$
$$\times \exp(-E_V(\varphi)) \prod_{(\mathbf{x}, t)\in V} d\varphi(\mathbf{x}, t).$$

Здесь V — параллелепипед в E^4, выделяемый условиями $\mathbf{x} \in \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant T$;

$$E_V(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_\Omega d\mathbf{x} \dot\varphi^2(\mathbf{x}, t) + \sum_n \int_0^T dt \int_\Omega d^n\mathbf{x} V_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \times$$
$$\times \varphi(\mathbf{x}_1, t) \ldots \varphi(\mathbf{x}_n, t);$$

интеграл берется по функциям, определенным в V; граничные условия можно считать нулевыми. (В случае, если $V_n \in \mathscr{S}$, существует конечный предел σ_m^T функций σ_m^V при T фиксированном, $\Omega \to \infty$, и можно написать континуальный интеграл для функций σ_m^T; однако для трансляционно инвариантных гамильтонианов введение обрезания по пространственным координатам при определении функций σ_m^V необходимо.) Если гамильтониан (30.3) представлен в виде $H = H_0 + W$, где H_0 — гамильтониан вида (30.6) (свободный гамильтониан), то можно считать, что

$$\sigma_m^V(\mathbf{x}_1, t_1, \ldots, \mathbf{x}_m, t_m) = \int \varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots \varphi(\mathbf{x}_m, t_m) \exp(-E_V'(\varphi))\, d\mu_0;$$

$$E_V'(\varphi) = \sum_n \int_0^T dt \int_\Omega d^n\mathbf{x} W_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \varphi(\mathbf{x}_1, t) \ldots \varphi(\mathbf{x}_n, t);$$

μ_0 — гауссова мера, моменты которой $\int \varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots \varphi(\mathbf{x}_m, t_m) d\mu_0$ при $t_1 > \ldots > t_m$ совпадают с функциями Швингера гамильтониана H_0.

Разумеется, изложенные выше соображения сохраняют силу в случае, когда рассматриваются гамильтонианы в евклидовом пространстве любой размерности. При попытке применить их к гамильтонианам вида (49.5) возникают затруднения, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями; в частности, гауссова мера множества, на котором определен функционал $E_V'(\varphi) = \int_V v(\varphi(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} dt$, оказывается равной нулю. В одномерном случае эти затруднения преодолеваются с помощью перехода к гамильтониану (49.6). Указанные выше эвристические соображения позволяют написать континуальный интеграл для функций Швингера гамильтониана (49.6). Нет необходимости строго обосновывать эти соображения; удобнее изменить определение функций Швингера, приняв представление с помощью континуального интеграла за определение.

Рассмотрим гауссову меру μ_0 с ковариацией $(-\Delta + m^2)^{-1}$ в пространстве $\mathscr{S}'(E^2)$. (Напомним, что под гауссовой мерой в пространстве $\mathscr{S}'(E^n)$ понимается мера μ с характеристическим функционалом

$$\int \exp\left(i \int \lambda(x) \varphi(x)\, dx\right) d\mu = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle B\lambda, \lambda\rangle\right).$$

Здесь $\lambda \in \mathscr{S}(E^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}'(E^n)$, оператор B называется ковариацией меры μ.) Легко видеть, что моменты меры μ_0 есть функции Швингера гамильтониана (49.3). В гильбертовом пространстве L^2 функционалов $F(\varphi)$ на $\mathscr{S}'(E^2)$, квадратично интегрируемых по мере μ_0, построим операторные обобщенные функции $\hat\varphi(x)$, $\hat\pi(x)$, $a(k)$ с помощью формул

$$\hat\varphi(f) F(\varphi) = \left(\int f(x) \varphi(x)\, dx\right) F(\varphi);$$

$$\hat\pi(f) F(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} (F(\varphi + \varepsilon f) - F(\varphi));$$

$$a(k) = 2^{-1/2} (2\pi)^{-3/2} \int \exp(ikx) \left(\sqrt{\omega(k)}\, \hat\varphi(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}} \hat\pi(x)\right) dx.$$

(Здесь $x \in E^2$, $k \in E^2$, $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, $f \in \mathscr{S}(E^2)$, $\hat\varphi(f) = \int f(x) \hat\varphi(x)\, dx$, $\hat\pi(f) = \int f(x) \hat\pi(x)\, dx$.) Менее аккуратно можно сказать, что $\hat\varphi(x)$ — оператор умножения на $\varphi(x)$, а $\hat\pi(x)$ — вариационная производная $\delta/\delta\varphi(x)$. Легко видеть, что $\hat\varphi(x)$, $\hat\pi(x)$ удовлетворяют соотношениям (30.4), а $a^+(k)$, $a(k)$ задают фоковское представление CCR. Оператор

$$N\left(\int_V v(\hat\varphi(x))\, dx\right), \tag{49.7}$$

где v — полином, N — знак нормального произведения, коммутирует со всеми операторами вида $\hat\varphi(f)$, где $f \in \mathscr{S}(E^2)$. Отсюда можно вывести, что (49.7) представляет собой оператор умножения на некоторый функционал; этот функционал обозначается символом $N\left(\int_V v(\varphi(x))\, dx\right)$.

Определим теперь функции Швингера одномерного гамильтониана вида (49.6) с помощью соотношения

$$S_m(x_1, \ldots, x_m) = \lim_{V \to \infty} \int \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m) \times$$
$$\times \exp\left(-N\left(\int_V v(\varphi(x))\,dx\right)\right) d\mu_0.$$

Если $v(\varphi) = \lambda P(\varphi)$ — полином четной степени, $\lambda > 0$, то фигурирующий в этом соотношении интеграл существует; основная трудность состоит в изучении предельного перехода $V \to \infty$. При малых λ удается доказать существование нужного предела; в общем случае можно гарантировать лишь, что найдется последовательность $V_k \to \infty$, для которой предел существует. Зная функции Швингера, с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы реконструкции в § 29, можно построить операторную реализацию рассматриваемого гамильтониана. Проверка того, что в построенной операторной реализации выполнены аксиомы Уайтмана, основана на работе [60]. (В этой работе перечислены требования, которые нужно предъявить к функциям Швингера, для того чтобы гарантировать выполнение аксиом Уайтмана.)

Разумеется, изложенные выше соображения представляют собой только грубую схему длинных и тонких рассуждений, приводящих к построению объектов, удовлетворяющих аксиомам Уайтмана по одномерным гамильтонианам. Анализ двумерного взаимодействия $v(\varphi) = \lambda\varphi^4$ проводится по той же схеме, но при определении функций Швингера следует учесть необходимость перенормировки массы. Очень близкий подход к рассматриваемым проблемам основан на понятии обобщенного марковского поля [61, 55].

ДОПОЛНЕНИЕ

§ Д. 1. Гильбертово пространство

Пространство $\mathcal{H}$ называется линейным пространством, если в нем определены операции сложения двух элементов и умножения элемента на комплексное число таким образом, что выполняются требования: 1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; 4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (здесь $x, y, z \in \mathcal{H}$; λ, μ — комплексные числа). Элементы линейного пространства будем называть векторами. Размерностью линейного пространства называется минимальное число векторов, линейные комбинации которых исчерпывают все пространство; если это число бесконечно, то говорят, что пространство бесконечномерно. Символом 0 обозначается вектор, удовлетворяющий условию $x + 0 = x$ для всех $x \in \mathcal{H}$.

Линейный функционал f на линейном пространстве $\mathcal{H}$ определяется законом, по которому каждому вектору $x \in \mathcal{H}$ ставится в соответствие комплексное число $f(x)$ таким образом, что $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Линейное пространство называется предгильбертовым, если в нем задано скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, удовлетворяющее аксиомам: 1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; 2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$; 3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$; 4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, причем $\langle x, x\rangle = 0$ лишь при $x = 0$ (здесь $x, y, z \in \mathcal{H}$, $\langle x, y\rangle$ и λ — комплексные числа).

Число $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ называется нормой вектора x. Вектор x называется нормированным, если $\|x\| = 1$. Два вектора x, y ортогональны, если $\langle x, y\rangle = 0$.

Говорят, что последовательность $x_n \in \mathcal{H}$ сходится к элементу $x \in \mathcal{H}$ (пишем $x = \lim x_n$), если $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0$, и что последовательность $x_n \in \mathscr{H}$ слабо сходится к вектору $x \in \mathscr{H}$ (обозначаем $x = \mathrm{wlim}\, x_n$), если для любого элемента $y \in \mathscr{H}$ числовая последовательность $\langle x_n, y\rangle$ стремится к $\langle x, y\rangle$.

Последовательность $x_n \in \mathscr{H}$ называется фундаментальной, если $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$.

Множество $M \in \mathscr{H}$ называется замкнутым, если всякая точка $x \in \mathscr{H}$, которую можно представить в виде предела последовательности $x_n \in M$, сама принадлежит M. Множество M всюду плотно в $\mathscr{H}$, если всякий вектор из $\mathscr{H}$ может быть представлен как предел последовательности элементов из M.

Предгильбертово пространство $\mathscr{H}$ называется гильбертовым, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится. Всякое предгильбертово пространство $\mathscr{H}$ можно вложить в гильбертово (пополнить). Точнее говоря, для всякого предгильбертова пространства $\mathscr{H}$ можно построить гильбертово пространство $\tilde{\mathscr{H}}$ (пополнение $\mathscr{H}$) и изоморфное отображение α пространства $\mathscr{H}$ на всюду плотное подмножество пространства $\tilde{\mathscr{H}}$ (изоморфным называется взаимно однозначное отображение, сохраняющее все операции, имеющиеся в предгильбертовом пространстве). Пополнение пространства $\mathscr{H}$ единственно в следующем смысле: если $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ — два пополнения, α_1 и α_2 — соответствующие изоморфные отображения $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, то существует изоморфное отображение α пространства $\mathscr{H}_1$ на $\mathscr{H}_2$, обладающее свойством $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$.

Предгильбертово пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Будем рассматривать только сепарабельные пространства.

§ Д.2. Системы векторов в предгильбертовом пространстве

Множество векторов $M \in \mathscr{H}$ называется линейным многообразием, если линейная комбинация $\lambda x + \mu y$ двух векторов x, $y \in M$ также содержится в M. Линейное многообразие называется подпространством, если оно замкнуто.

Множество векторов A из $\mathscr{H}$ называется полным (или тотальным), если всякий вектор из $\mathscr{H}$ может быть представлен как предел последовательности векторов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, где $a_i \in M$, λ_i — числа (т. е. если наименьшее подпространство, содержащее A, совпадает с $\mathscr{H}$).

Система векторов $\xi_\alpha \in \mathscr{H}$ называется ортонормированной, если $\langle \xi_\alpha, \xi_\beta\rangle = \delta_\beta^\alpha$ (т. е. каждый ее вектор нормирован и два различных вектора ортогональны). Поскольку рассматриваем лишь сепарабельные пространства, всякая ортонормированная система конечна или счетна. Полная ортонормированная система носит название ортонормированного базиса.

Числа $\langle x, \xi_\alpha\rangle$ называются коэффициентами Фурье вектора x в ортонормированном базисе ξ_α. Для любого вектора $x \in \mathscr{H}$ ряд $\sum\limits_\alpha \langle x, \xi_\alpha\rangle \xi_\alpha$ (ряд Фурье вектора x в ортонормированном базисе ξ_α) сходится к вектору x. Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ выражается через коэффициенты Фурье формулой

$$\langle x, y\rangle = \sum_\alpha \langle x, \xi_\alpha\rangle \langle \xi_\alpha, y\rangle = \sum_\alpha \langle x, \xi_\alpha\rangle \overline{\langle y, \xi_\alpha\rangle}.$$

В частности, $\langle x, x\rangle = \sum\limits_\alpha |\langle x, \xi_\alpha\rangle|^2$.

Если $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, то для того чтобы последовательность c_α была последовательностью коэффициентов Фурье вектора $x \in \mathscr{H}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_\alpha |c_\alpha|^2 < \infty$.

§ Д. 3. Конкретные пространства

1. Пространство l_n^2 — это n-мерное пространство C^n (пространство строк из n комплексных чисел), наделенное скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

(здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n$).

2. Пространство l^2 состоит из последовательностей комплексных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Сложение и умножение на число определяются покоординатно, скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ равно $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} + \ldots$.

Пространства l_n^2 и l^2 гильбертовы.

Если $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, ξ_α — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$, то, сопоставляя вектору x коэффициенты Фурье $\langle x, \xi_\alpha \rangle$ этого вектора в базисе ξ_α, получаем изоморфное отображение этого пространства на l_n^2 (если $\mathscr{H}$ конечномерно) или на l^2 (если $\mathscr{H}$ бесконечномерно).

3. Пространство $C^2(E^r)$ состоит из функций на r-мерном пространстве E^r, непрерывных и квадратично интегрируемых (т. е. удовлетворяющих условию $\int |f(\xi_1, \ldots, \xi_r)|^2 \, d\xi_1 \ldots d\xi_r < \infty$). Сложение функций и умножение на число определяются обычным образом, скалярное произведение двух функций f и g из $C^2(E^r)$ равно

$$\langle f, g\rangle = \int f(\xi_1, \ldots, \xi_r)\overline{g(\xi_1, \ldots, \xi_r)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_r = $$
$$= \int f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi.$$

Пространство $C^2(E^r)$ является предгильбертовым пространством; его пополнение обозначается $L^2(E^r)$.

4. Пространство $C^2(E_r \times S)$, где S обозначает конечное множество, состоит из функций $f(\xi, s)$, непрерывных по переменной ξ и квадратично интегрируемых (т. е. удовлетворяющих условию $\sum\limits_s \int |f(\xi, s)|^2 \, d\xi < \infty$). Здесь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in E^r$; $s \in S$; $d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_r$. Скалярное произведение определяется формулой

$$\langle f, g\rangle = \sum_s \int f(\xi, s)\overline{g(\xi, s)}\, d\xi.$$

Функцию $f(\xi, s)$ можно рассматривать как столбец из k функций $f_s(\xi) = f(\xi, s)$, зависящих от переменной $\xi \in E^r$ (k — число элементов в множестве S).

Пополнение пространства $C^2(E^r \times S)$ обозначается символом $L^2(E^r \times S)$.

5. Пусть в множестве M выделено семейство подмножеств $\mathscr{B}$, содержащее вместе с каждыми двумя множествами A, B множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$ (кольцо подмножеств). Предположим также, что множество M является объединением счетной совокупности подмножеств, принадлежащих семейству $\mathscr{B}$. Говорят, что на семействе $\mathscr{B}$ определена счетно-аддитивная мера, если каждому множеству $A \in \mathscr{B}$ сопоставлено неотрицательное число $\mu(A)$ таким образом, что для всякой счетной совокупности $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ множеств из семейства $\mathscr{B}$, удовлетворяющих условиям:

1) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

2) множества $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ попарно не пересекаются,

имеет место равенство $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Множество M, в котором заданы семейство $\mathscr{B}$ и счетно-аддитивная мера μ, называется пространством с мерой.

Множество $R \subset M$ (не обязательно принадлежащее семейству $\mathscr{B}$) называется множеством меры нуль, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $A \in \mathscr{B}$, что $R \subset A$, $\mu(A) < \varepsilon$. Говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на множестве M, если множество точек $x \in M$, для которых последовательность $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$, имеет меру нуль (вообще, если какое-либо соотношение выполнено всюду, за исключением множества меры нуль, говорят, что оно выполнено почти всюду или почти везде).

Для функций, заданных в пространстве с мерой, можно определить понятие интеграла Лебега. Функция f, определенная на множестве $A \in \mathscr{B}$, называется ступенчатой, если она принимает конечное число значений $y_1, \ldots, y_r$ и множество A_i, состоящее из точек, в которых функция f принимает значение y_i, принадлежит семейству $\mathscr{B}$. Интеграл Лебега* от ступенчатой функции f определяется соотношением

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{r} y_i \mu(A_i).$$

Функция $f(x)$, которая может быть представлена в виде предела сходящейся почти всюду последовательности ступенчатых функций, называется измеримой. *В дальнейшем будем рассматривать только измеримые функции.* Будем называть эквивалентными измеримые функции, разность которых равна нулю всюду, за исключением множества меры нуль. Эквивалентные измеримые функции условимся не различать.

Если измеримая функция f ограничена, то ее можно представить в виде предела сходящейся почти всюду последовательности ступенчатых функций $f_n(x)$, ограниченных свер-

* В основном тексте книги для интеграла Лебега употребляется обозначение $\int f(x)\, dx$.

ху одной константой: $|f_n(x)| \leqslant C$; интеграл Лебега от функции f по множеству $A \in \mathscr{B}$ можно в этом случае определить формулой

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu$$

(доказывается, что этот предел всегда существует и не зависит от выбора последовательности f_n).

Если функция f неограничена и неотрицательна, можно определить ее интеграл Лебега соотношением

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu,$$

где $f_n(x) = f(x)$ при $f(x) \leqslant n$, $f_n(x) = 0$ при $f(x) \geqslant n$.

Если множество A не принадлежит семейству $\mathscr{B}$, но может быть представлено в виде $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathscr{B}$, то интеграл Лебега по множеству A от неотрицательной функции f определяется формулой

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} f(x)\, d\mu.$$

(Для любой неотрицательной измеримой функции интеграл Лебега существует, но он не обязательно конечен.)

Измеримая функция f называется суммируемой по Лебегу на множестве $A \subset M$, если интеграл Лебега от функции $|f(x)|$ конечен. Для действительной суммируемой функции интеграл Лебега определяется соотношением

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_A |f(x)|\, d\mu - \int_A (|f(x)| - f(x))\, d\mu.$$

Если функция $f(x)$ комплексна, то ее интеграл Лебега определяется как $\int\limits_A \operatorname{Re} f(x)\, d\mu + i \int\limits_A \operatorname{Im} f(x)\, d\mu$.

Отметим следующие важные свойства интеграла Лебега:

1. Пусть последовательность $f_n(x)$ сходится почти везде к функции $f(x)$ и существует суммируемая функция $g(x)$, мажорирующая функции $f_n(x)$ [т. е. такая, что $|f_n(x)| \leqslant g(x)$]. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\, d\mu = \int\limits_A f(x)\, d\mu$ (теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

2. Пусть M_1 и M_2 — пространства с мерой. Тогда в множестве $M_1 \times M_2$, состоящем из пар (x_1, x_2), где $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, можно ввести счетно-аддитивную меру μ, положив $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2)$ (здесь μ_i обозначает меру в M_i; мера μ называется произведением мер μ_1 и μ_2).

Если $f(x_1, x_2)$ — функция на множестве $M_1 \times M_2$, суммируемая относительно меры μ, то при почти всех x_2 функция $f(x_1, x_2)$ является суммируемой функцией от $x_1 \in M_1$; двойной интеграл от функции f (т. е. интеграл по мере μ) сводится к повторному:

$$\int_{A_1 \times A_2} f(x_1, x_2)\, d\mu = \int_{A_2} d\mu_2 \int_{A_1} f(x, x_2)\, d\mu_1$$

(теорема Фубини).

Пользуясь интегралом Лебега, можно ввести понятие меры для некоторых множеств, не входящих в совокупность $\mathscr{B}$; именно, по множеству $A \subset M$ можно построить функцию $\chi_A(x)$, равную 1 при $x \in A$ и нулю при $x \notin A$, и положить $\mu_L(A) = \int\limits_M \chi_A(x)\, d\mu$. Эта мера μ_L называется мерой Лебега; она определена для множества A, если функция χ_A измерима (тогда и множество A называется измеримым).

Пространству с мерой M сопоставляется пространство $L^2(M)$ квадратично интегрируемых функций* (т. е. таких измеримых функций, что интеграл Лебега от функции $|f^2(x)|$ по множеству M конечен). Скалярное произведение в пространстве $L^2(M)$ определяется с помощью интеграла Лебега**:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, d\mu.$$

Можно доказать, что пространство $L^2(M)$ является гильбертовым пространством.

В евклидовом пространстве E^r в качестве меры будем всегда брать обыкновенный объем; тогда для функций, интегрируемых в обычном смысле (по Риману), обычный интеграл совпадает с интегралом Лебега. Пространство $L^2(E^r)$ является пополнением пространства $C^2(E^r)$. Если S — ко-

* Считаем, что две эквивалентные измеримые функции определяют один и тот же вектор пространства $L^2(M)$.

** Если интегрирование ведется по всему пространству с мерой M, употребляем вместо обозначения $\int\limits_M \varphi(x)\, d\mu$ обозначение $\int \varphi(x)\, d\mu$.

нечное множество, то мерой его подмножества A будем считать число точек в A; пространство $L^2(S)$ в этом случае изоморфно пространству l_k^2, где k — число точек в S. В множестве $E^r \times S$ определяем меру как произведение мер в E^r и S; пространство $L^2(E^r \times S)$, построенное по этой мере, является пополнением пространства $C^2(E^2 \times S)$.

§ Д. 4. Операции с гильбертовыми пространствами

Прямой суммой $\mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2$ гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называется гильбертово пространство, элементами которого являются пары (h_1, h_2), где $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $h_2 \in \mathcal{H}_2$, сложение пар, умножение пары на число и скалярное произведение пар определяются соотношениями

$$(h_1, h_2) + (h_1', h_2') = (h_1 + h_1', h_2 + h_2');$$

$$\lambda(h_1, h_2) = (\lambda h_1, \lambda h_2);$$

$$\langle (h_1, h_2), (h_1', h_2') \rangle = \langle h_1, h_1' \rangle + \langle h_2, h_2' \rangle.$$

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ выделены два подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, такие, что два любых вектора $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $h_2 \in \mathcal{H}_2$ ортогональны, и любой вектор $h \in \mathcal{H}$ может быть представлен в виде суммы $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $h_2 \in \mathcal{H}_2$. Тогда говорят, что пространство представлено в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$; эта терминология объясняется тем, что в рассматриваемом случае можно построить естественный изоморфизм прямой суммы $\mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2$ и пространства $\mathcal{H}$, сопоставив паре $(h_1, h_2) \in \in \mathcal{H}_1 \dotplus \mathcal{H}_2$ вектор $h_1 + h_2 \in \mathcal{H}$.

Прямая сумма $\sum_n \mathcal{H}_n$ последовательности гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n, \ldots$ определяется как пространство последовательностей $(h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_n \|h_n\|^2 < \infty$ (h_n — вектор из пространства $\mathcal{H}_n$). Линейная комбинация и скалярное произведение последовательностей определяются формулами

$$\lambda(h_1, \ldots, h_n, \ldots) + \lambda'(h_1', \ldots, h_n', \ldots) =$$
$$= (\lambda h_1 + \lambda' h_1', \ldots, \lambda h_n + \lambda' h_n', \ldots);$$
$$\langle (h_1, \ldots, h_n, \ldots), (h_1', \ldots, h_n', \ldots) \rangle = \sum \langle h_i, h_i' \rangle.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется тензорным произведением гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, если задано билинейное отображение $\alpha(h_1, h_2)$ пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}$, обладающее следующими свойствами:

1) $\langle \alpha(h_1, h_2), \alpha(h_1', h_2') \rangle = \langle h_1, h_1' \rangle \cdot \langle h_2, h_2' \rangle$;

2) множество векторов вида $\alpha(h_1, h_2)$ тотально в $\mathcal{H}$ (говорят, что задано билинейное отображение, если каждой паре векторов $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $h_2 \in \mathcal{H}_2$ сопоставлен вектор $h \in \mathcal{H}$, линейно зависящий от h_1 при фиксированном h_2 и от h_2 при фиксированном h_1).

Тензорное произведение определяется указанными выше условиями с точностью до естественного изоморфизма: если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ — два тензорных произведения, α и α' — соответствующие билинейные отображения, то существует такой изоморфизм λ гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$, что $\lambda\alpha = \alpha'$.

Тензорное произведение пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ будет обозначаться символом $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, а вектор $\alpha(h_1, h_2)$ — символом $h_1 \otimes h_2$.

Легко видеть, что тензорное произведение пространств l_m^2 и l_n^2 изоморфно пространству l_{mn}^2. Пространство l_{mn}^2 можно реализовать как пространство матриц порядка $m \times n$; тогда билинейное отображение α сопоставляет векторам $(x_1, \ldots, x_m) \in l_m^2$ и $(y_1, \ldots, y_n) \in l_n^2$ матрицу с матричными элементами $x_i y_j$.

Тензорное произведение n экземпляров пространства $\mathcal{H}$ называется n-й тензорной степенью и обозначается $\bigotimes \mathcal{H}^n$:

$$\bigotimes \mathcal{H}^n = (\ldots((\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \otimes \mathcal{H}) \ldots \otimes \mathcal{H}).$$

Каждой перестановке π индексов $(1, \ldots, n)$ естественно сопоставляется изоморфное отображение ρ_π пространства $\bigotimes \mathcal{H}^n$ на себя.

Подпространство $\mathcal{H}_n^s$ пространства $\bigotimes \mathcal{H}^n$, образованное векторами, удовлетворяющими условию $\rho_\pi x = x$ для всех перестановок π, называется n-й симметричной степенью пространства $\mathcal{H}$; n-я антисимметричная степень $\mathcal{H}_n^a$ пространства $\mathcal{H}$ определяется как подпространство, состоящее из векторов, для которых $\rho_\pi x = (-1)^{\gamma(\pi)} x$, где $\gamma(\pi)$ — четность перестановки π.

Отметим важное соотношение

$$L^2(M_1) \otimes L^2(M_2) = L^2(M_1 \times M_2)$$

(мера в пространстве $M_1 \times M_2$ определяется как произведение мер в M_1 и M_2). Билинейное отображение α, фигурирующее в определении тензорного произведения, сопоставляет паре функций $f_1 \in L^2(M_1)$, $f_2 \in L^2(M_2)$ функцию $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \in L^2(M_1 \times M_2)$. Симметричная (антисимметричная) тензорная степень пространства $L^2(M)$ может быть реализована как пространство симметричных (антисимметричных) квадратично интегрируемых функций n переменных $x_1, \ldots, x_n \in M$.

§ Д. 5. Операторы в гильбертовом пространстве

Под оператором, действующим из пространства $\mathcal{H}_1$ в пространство $\mathcal{H}_2$, всегда будем понимать линейный оператор, определенный на всюду плотном линейном многообразии $D \subset \mathcal{H}_1$ и принимающий значения в $\mathcal{H}_2$ [т. е. оператор A ставит каждому вектору $x \in D$ вектор $Ax \in \mathcal{H}_2$, причем $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$]. Область определения оператора A обозначаем D_A. Совокупность векторов, которые могут быть представлены в виде Ax, называется множеством значений оператора A.

Оператор A называется ограниченным, если найдется такое число K, что $\|Ax\| \leqslant K\|x\|$ для всех $x \in D_A$. Число $\sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ называется нормой оператора A. Если оператор A ограничен, то он может быть продолжен по непрерывности на все пространство $\mathcal{H}_1$ (т. е. существует единственный ограниченный оператор в $\mathcal{H}_1$, совпадающий с A на множестве D_A).

Оператор умножения на число λ будем обозначать так же, как это число. В частности, тождественный оператор, переводящий всякий вектор в себя, можно рассматривать как оператор умножения на 1, поэтому он обозначается символом 1.

Линейная комбинация $C = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ операторов A_1 и A_2 определяется формулой $Cx = \lambda_1 A_1 x + \lambda_2 A_2 x$, произведение $F = A_1 A_2$ операторов A_1 и A_2 задается как результат их последовательного применения: $Fx = A_1(A_2 x)$. При этом линейная комбинация операторов A_1 и A_2 имеет смысл, если оба оператора A_1 и A_2 действуют из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ и пересечение их областей определения D_{A_1} и D_{A_2} всюду плотно в $\mathcal{H}_1$. Произведение операторов A_1 и A_2 можно определить, если оператор A_2 действует из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$, оператор

A_1 — из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ и множество тех $x \in D_{A_2}$, для которых $A_2 x \in D_{A_1}$ плотно в $\mathcal{H}_0$.

Если множество значений оператора A, действующего из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, всюду плотно в $\mathcal{H}_2$ и этот оператор переводит в нуль только нуль, то можно определить обратный оператор A^{-1}, полагая $A^{-1} y = x$, если $y = Ax$.

Если оператор A действует из пространства $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, а оператор B — из пространства $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}_1$, то они называются сопряженными, если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ для любого x из области определения D_A оператора A и любого y из области определения D_B оператора B.

Если операторы B_1 и B_2 сопряжены с одним и тем же оператором A и оба определены на векторе $y \in \mathcal{H}_2$, то $B_1 y = B_2 y$ (это следует из плотности в $\mathcal{H}_1$ множества D_A). Символом A^* будем обозначать оператор, сопряженный с оператором A и определенный на всех $y \in \mathcal{H}_2$, для которых существует $z \in \mathcal{H}_1$, удовлетворяющий условию $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$ (иными словами, A^* является тем из сопряженных операторов, который имеет максимальную область определения). Заметим, что, поскольку требуем от оператора, чтобы он был определен на всюду плотном множестве, оператор A^* не всегда существует.

Если оператор A ограничен, то оператор A^* всегда существует и ограничен, причем $\|A^*\| = \|A\|$.

Оператор U, отображающий $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, называется изометрическим, если он сохраняет скалярное произведение: $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$; для изометричности оператора необходимо и достаточно выполнение соотношения $U^*U = 1$. Изометричный оператор называется унитарным, если он отображает $\mathcal{H}_1$ на все $\mathcal{H}_2$; условие унитарности может быть записано в виде $UU^* = U^*U = 1$. Иначе можно сказать, что унитарный оператор осуществляет изоморфизм между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, а изометричный оператор — изоморфизм между $\mathcal{H}_1$ и подпространством пространства $\mathcal{H}_2$.

Если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, то сопряженные друг с другом операторы действуют в одном и том же пространстве $\mathcal{H}$. В этом случае введем следующие определения.

Оператор A называется эрмитовым, если он сопряжен сам с собой (т. е. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для всех $x, y \in D_A$).

Оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$.

Если A — эрмитов оператор, B — самосопряженный оператор, $D_A \subset D_B$ и $Ax = Bx$ для всякого вектора $x \in D_A$, то оператор B называется самосопряженным расширением оператора A. Если у эрмитова оператора имеется ровно одно самосопряженное расширение, то он называется существенно самосопряженным.

Самосопряженные операторы являются важнейшими для квантовой механики, поскольку именно они соответствуют физическим величинам. В физических книгах говорят обычно не о самосопряженных, а об эрмитовых операторах и проверяют для операторов физических величин свойство эрмитовости. Это не приводит к особым затруднениям, поскольку встречающиеся в физике эрмитовы операторы оказываются в большинстве случаев существенно самосопряженными. Отметим, что если эрмитов оператор не является существенно самосопряженным, выбор различных самосопряженных расширений в физических задачах, как правило, соответствует выбору различных граничных условий.

Оператор A называется ограниченным снизу, если найдется такая константа K, что $\langle Ax, x\rangle \geqslant K\langle x, x\rangle$ для любого вектора $x \in D_A$. Если константу K можно выбрать равной нулю, то оператор A называют неотрицательно определенным (или просто неотрицательным), если константу K можно выбрать положительной, то оператор A называют положительно определенным.

Ограниченный снизу эрмитов оператор всегда имеет самосопряженные расширения. Среди этих расширений естественно выделяется так называемое фридрихсово (или жесткое) расширение (фридрихсово расширение A_μ можно выделить среди других самосопряженных расширений оператора A, например, следующим экстремальным свойством: если B — самосопряженное расширение оператора A, λ — такое число, что оператор $B+\lambda$ положителен, то $\langle (A_\mu + \lambda)^{-1} x, x\rangle \leqslant \langle (B+\lambda)^{-1} x, x\rangle$). Фридрихсово расширение A_μ ограниченного снизу оператора A само является ограниченным снизу оператором; при этом константа K, фигурирующая в определении ограниченности снизу, может быть выбрана для оператора A_μ такой же, как для оператора A.

Конкретные операторы, рассматривающиеся в книге, обычно задаются с помощью формальных выражений, составленных из более простых операторов (например, из операторов умножения на независимую переменную и дифференцирования в пространстве $L^2(E^n)$ или из операторов рождения и уничтожения в фоковском пространстве). Строго говоря, следовало бы каждый раз описывать область определения рассматриваемого оператора. Вместо этого раз навсегда условимся для определяемых формальными выражениями операторов в пространстве $L^2(E^n)$, что их областью определения является пространство $\mathscr{S}(E^n)$ гладких быстро убывающих функций (точное определение пространства $\mathscr{S}(E^n)$ см. в § Д.6), а для операторов в фоковском пространстве $F(L^2(E^n))$ областью определения будем считать совокупность фоковских столбиков, состоящих из функций $f_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) \in \mathscr{S}(E^{nk})$, лишь конечное число которых отлично от нуля.

Говоря, что формальное операторное выражение определяет самосопряженный оператор, имеем в виду, что этому выражению соответствует эрмитов оператор, который либо существенно самосопряжен, либо ограничен снизу (в последнем случае под самосопряженным оператором, определяемым рассматриваемым выражением, понимается фридрихсово расширение соответствующего эрмитова оператора).

В случае, если формальное операторное выражение не определяет эрмитова оператора или определяет эрмитов оператор, не имеющий самосопряженных расширений, говорим, что данному формальному выражению нельзя придать смысл самосопряженного оператора.

Оператор P называется проектором (оператором ортогонального проектирования), если $P = P^*$ и $P^2 = P$. Проекторы в гильбертовом пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии с подпространствами (каждому проектору ставится в соответствие его множество значений).

В качестве примера рассмотрим оператор $\hat{a}(x)$ умножения на измеримую функцию $a(x)$ в пространстве $L^2(M)$, где M — пространство с мерой (оператор $\hat{a}(x)$ переводит функцию $f(x)$ в функцию $a(x)f(x)$ и определен на тех функциях $f(x) \in \mathscr{L}^2(M)$, для которых функция $a(x)f(x)$ квадратично интегрируема). Легко проверить, что $(\hat{a}(x))^* = \widehat{\overline{a}(x)}$. Отсюда следует, что оператор $\hat{a}(x)$ будет самосопряженным, если функция $a(x)$ действительна, унитарным, если $|a(x)| = 1$, и проектором, если функция $a(x)$ принимает значения 0 и 1.

Этот пример в некотором смысле универсален. Имеет место следующее важное утверждение.

Для всякого самосопряженного или унитарного оператора A в пространстве $\mathscr{H}$ можно найти пространство с мерой M и изоморфизм α пространства $\mathscr{H}$ и пространства $L^2(M)$, при котором оператор A переходит в оператор умножения на функцию [т. е. $\alpha A \alpha^{-1} = \hat{a}(x)$]; функция

$a(x)$ действительна, если A — самосопряженный оператор, и равна по модулю 1, если A — унитарный оператор.

Сформулированное утверждение позволяет определить функции от самосопряженного или унитарного оператора. Именно, если $\varphi(\lambda)$ — измеримая функция действительного переменного, то оператор $\varphi(A)$, где A — самосопряженный оператор, определяется как оператор, переходящий при описанном выше изоморфизме α в оператор умножения на функцию $\varphi(a(x))$ [т. е. если $\alpha A\alpha^{-1}=\hat{a}(x)$, то $\alpha\varphi(A)\alpha^{-1}=\hat{\varphi}(a(x))$].

Отметим очевидные соотношения.

1. Если $h(\lambda)=\gamma f(\lambda)+\mu g(\lambda)$; $r(\lambda)=f(\lambda)\ g(\lambda)$; $s(\lambda)=f(g(\lambda))$, то $h(A)=\gamma f(A)+\mu g(A)$; $r(A)=f(A)\ g(A)$; $s(A)=f(g(A))$.

2. Если $B=U^{-1}AU$, где U — унитарный оператор в пространстве $\mathscr{H}$, то $\varphi(B)=U^{-1}\varphi(A)\ U$.

3. Если $\varphi(\lambda)$ — ограниченная функция и $|\varphi(\lambda)|\leqslant M$, то $\varphi(A)$ — ограниченный оператор, причем $\|\varphi(A)\|\leqslant M$.

4. $[\varphi(A)]^*=\bar{\varphi}(A)$; если функция $\varphi(\lambda)$ действительна, то оператор $\varphi(A)$ самосопряжен, если $|\varphi(\lambda)|=1$, то $\varphi(A)$ — унитарный оператор. В частности, унитарным будет оператор $\exp(\mathrm{i}\,tA)$.

Если φ — измеримая функция на окружности $|z|=1$, а оператор A унитарен, то совершенно так же определяется оператор $\varphi(A)$, обладающий аналогичными свойствами.

Если A — самосопряженный оператор, то нередко удобно рассматривать проекторы $E_\mu=e_\mu(A)$, где $e_\mu(\lambda)$ — функция, равная 1 при $\lambda\leqslant\mu$ и 0 при $\lambda>\mu$. Проекторы E_μ носят название спектральных проекторов (спектрального разложения) оператора A. Из соотношения $1=\int de_\mu$ вытекает соотношение

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\mu dE_\mu$$

(эта формула носит название спектрального разложения оператора A; при конечных a и b интеграл $\int_a^b \mu dE_\mu$ определяется как предел по норме интегральных сумм:

$$\sum \mu_k\left(E_{\mu_{k+1}}-E_{\mu_k}\right),$$

где $\mu_0=a<\mu_1<\ldots<\mu_n=b$; $\Delta\mu_k=\mu_{k+1}-\mu_k\to 0$; интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\mu dE_\mu$ определяется как сильный предел $\int_a^b\mu dE_\mu$ при $a\to\infty$, $b\to-\infty$).

Будем говорить, что действительное число λ не принадлежит спектру самосопряженного оператора A, если найдется такое число $\varepsilon>0$, что $E_{\lambda+\varepsilon}=E_{\lambda-\varepsilon}$. Легко проверить, что спектр оператора $\hat{a}(x)$ умножения на функцию $a(x)$ в пространстве $L^2(M)$ совпадает с множеством значений функции $a(x)$. (Напомним, что условились не различать эквивалентные измеримые функции; в связи с этим множество значений измеримой функции следует определить так, чтобы это множество не менялось при замене функции на эквивалентную. Будем говорить, что число λ принадлележит множеству значений функции $a(x)$, если для всякой функции $b(x)$, отличающейся от $a(x)$ только на множестве меры 0, и для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $x\in M$, что $\lambda-\varepsilon<b(x)<\lambda+\varepsilon$).

Используя это утверждение и упоминавшийся выше изоморфизм, при котором самосопряженный оператор переходит в оператор умножения на функцию, легко доказать следующие утверждения:

1. Если число β не принадлежит спектру самосопряженного оператора H, то имеет место равенство

$$\int\exp(-\mathrm{i}\beta a)\exp(\mathrm{i}Ha)\,da=0.$$

Точнее говоря, для любых x, $y\in\mathscr{H}$

$$\int\exp(-\mathrm{i}\beta a)\langle\exp(\mathrm{i}Ha)\,x,\ y\rangle\,da=0.$$

2. Если для всякой гладкой финитной функции $\chi(\omega)$, носитель которой содержится в интервале (a,b), выполнено равенство

$$\int\tilde{\chi}(t)\exp(\mathrm{i}Ht)\,dt=0,$$

где

$$\tilde{\chi}(t)=\int\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,\chi(\omega)\,d\omega,$$

то спектр оператора H находится вне интервала (a,b).

Два оператора A и B, определенных на всем пространстве $\mathscr{H}$, называется коммутирующими, если $AB=BA$. Это же определение пригодно в случае, когда операторы A и B заданы на одном и том же множестве D и переводят его в себя. Однако для самосопряженных операторов следует пользоваться другим определением коммутирующих операторов: говорят, что два самосопряженных оператора A и B в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ коммутируют, если $\varphi(A)\,\psi(B) = \psi(B)\,\varphi(A)$ для любых ограниченных функций $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ (только в этом случае будем писать, что $AB = BA$). Отметим, что операторы $\varphi_1(A)$ и $\varphi_2(A)$, где $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ — произвольные действительные функции, A — самосопряженный оператор, коммутируют между собой.

Имеет место следующая теорема.

Для произвольного семейства коммутирующих между собой самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ можно найти пространство с мерой M и изоморфизм α пространства $\mathscr{H}$ и пространства $L^2(M)$, при котором каждый из этих операторов переходит в оператор умножения на функцию [т. е. $\alpha A_i \alpha^{-1} = \hat{a}_i(x)$].

Так же как и в случае одного оператора, эта теорема позволяет определить функции от семейства операторов. Именно, если $A_1, \ldots, A_n$ — коммутирующие между собой самосопряженные операторы, $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — измеримая функция n действительных переменных, то $f(A_1, \ldots, A_n)$ определяется как оператор, переходящий в оператор умножения на функцию $f(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ при изоморфизме α.

Пусть Δ — открытое множество в n-мерном пространстве. Символом $e_\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ условимся обозначать функцию, равную 1, если $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, и нулю в противном случае.

Проекторы $E_\Delta = e_\Delta(A_1, \ldots, A_n)$ называются спектральными проекторами семейства коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_n$.

Говорят, что точка n-мерного пространства $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ принадлежит спектру (точнее, совместному спектру) семейства коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_n$, если для любой окрестности U точки $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ спектральный проектор $E_U = e_U(A_1, \ldots, A_n)$ не равен нулю.

Если операторы $A_1, \ldots, A_n$ реализованы в пространстве $L^2(M)$ как операторы умножения на функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, то совместный спектр этих операторов состоит из всех точек вида $(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ (точнее, точка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ принадлежит спектру тогда и только тогда, когда для любых функций $b_i(x)$, эквивалентных функциям $a_i(x)$, и любой окрестности U точки $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ найдется такая точка $x \in M$, что $(b_1(x), \ldots, b_n(x)) \in U$).

Остановимся на вопросе о сходимости последовательности операторов. Определим три вида сходимости, предполагая, чтобы не делать лишних оговорок, что все операторы ограничены.

Последовательность операторов A_n сходится к оператору A равномерно (по норме), если $\|A - A_n\| \to 0$.

Последовательность операторов A_n сходится сильно к оператору A, если $\lim A_n x = Ax$ для любого вектора x.

Последовательность операторов A_n сходится к оператору A слабо, если $\lim \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ для любых векторов x, y.

Равномерную сходимость операторов будем обозначать символом $A = \operatorname{n\,lim} A_n$ или $A_n \Rightarrow A$, сильную сходимость — символом $A = \operatorname{s\,lim} A_n$ или $A_n \to A$ и слабую — $A = \operatorname{w\,lim} A_n$ или $A_n \rightharpoonup A$.

Ясно, что из равномерной сходимости операторов вытекает сильная, а из сильной — слабая.

Отметим следующие утверждения:

а) если для всюду плотного множества векторов x существует предел $\lim A_n x$ и последовательность $\|A_n\|$ ограничена, то последовательность A_n сильно сходится;

б) если $\lim \langle A_n x, y\rangle$ существует для x из всюду плотного множества X и y из всюду плотного множества Y, а последовательность $\|A_n\|$ ограничена, то последовательность A_n слабо сходится;

в) если $A_n \to A$, $B_n \to B$ и последовательность $\|A_n\|$ ограничена, то $A_n B_n \to AB$ (аналог этого утверждения для слабой сходимости несправедлив); если $A_n \to A$ и последовательность $\|A_n^{-1}\|$ ограничена, то $A_n^{-1} \to A^{-1}$;

г) пусть A_n — последовательность унитарных операторов; если $A_n \Rightarrow A$, то оператор A унитарен, если $A_n \to A$, то оператор A изометричен, если $A_n \rightharpoonup A$, то можно утверждать лишь, что $\|A\| \leqslant 1$;

д) если $A_n \rightharpoonup A$, то $A_n^* \rightharpoonup A^*$ (для сильной сходимости аналог этого утверждения не имеет места; однако если A_n — унитарные операторы, сильно сходящиеся к унитарному оператору A, то $A_n^* = A_n^{-1} \to A^* = A^{-1}$).

Часто приходится рассматривать семейства операторов, переводящих в себя фиксированное линейное многообразие D, плотное в гильбертовом пространстве (т. е. операторов с областью определения D и с множеством значений, содержавшимся в D); это семейство операторов будем обозначать $\mathcal{N}_D$. Линейная комбинация и произведение операторов, принадлежащих семейству $\mathcal{N}_D$, также принадлежат этому семейству. Если для оператора $A \in \mathcal{N}_D$ существует оператор $B \in \mathcal{N}_D$, удовлетворяющий условию $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ для всех $x \in D$, $y \in D$, то будем говорить, что оператор B является D-сопряженным с оператором A, и обозначать его A^+.

Сильный предел $A = \operatorname{slim} A_n$ последовательности операторов $A_n \in \mathcal{N}_D$ определяется как оператор, удовлетворяющий условию $Ax = \lim A_n x$ для любого $x \in D$; слабый предел $A = \operatorname{wlim} A_n$ определяется условием $\langle Ax, y\rangle = \lim \langle A_n x, y\rangle$ для любых $x, y \in D$.

§ Д. 6. Локально выпуклые пространства

Неотрицательная функция $p(x)$ на линейном пространстве R называется полунормой, если $p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x)$, $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in R$ и произвольного действительного числа λ. Нормой называется полунорма, обращающаяся в нуль лишь при условии $x = 0$.

Говорят, что в линейном пространстве R задана локально выпуклая топология, если в нем фиксирована система A полунорм $p_\alpha(x)$, удовлетворяющая условиям: 1) для всяких двух полунорм p_α, $p_\beta \in A$ найдется такая полунорма $p_\gamma \in A$, что $p_\gamma \geqslant p_\alpha$, $p_\gamma \geqslant p_\beta$; 2) для всякой точки $x \in R$ найдется полунорма $p_\alpha \in A$, не обращающаяся в нуль в точке x. Пространство, в котором задана локально выпуклая топология, называется локально выпуклым топологическим линейным пространством или просто локально выпуклым пространством, система A — определяющей системой полунорм. Если определяющая система состоит из единственной полунормы (тогда она автоматически оказывается нормой), то пространство называется нормированным.

Функция $f(x)$ на локально выпуклом пространстве R называется непрерывной в топологии этого пространства, если для всякого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x_0 \in R$ найдется такая полунорма p_α из определяющей системы полунорм в R и такое $\delta > 0$, что для каждой точки x, удовлетворяющей неравенству $p_\alpha(x - x_0) < \delta$, выполнено соотношение $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В качестве примера локально выпуклого пространства рассмотрим пространство $\mathcal{S}(E^r)$ бесконечно дифференцируемых функций r переменных, все производные которых на бесконечности убывают быстрее любой степени. Топология в пространстве $\mathcal{S}(E^r)$ задается системой норм

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in E^r} |x^{(\alpha)} D^{(\beta)} \varphi(x)|$$

(здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ — произвольные наборы неотрицательных целых чисел, $x^{(\alpha)} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}$, $D^{(\beta)} = \dfrac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_r}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_r^{\beta_r}}$).

Будем говорить, что две системы полунорм в линейном пространстве R эквивалентны (задают одну и ту же топологию), если всякая функция, непрерывная относительно одной из этих систем полунорм, непрерывна также относительно другой системы. Таким образом, в одном и том же локально выпуклом пространстве можно рассматривать различные определяющие системы полунорм; среди этих систем полунорм имеется максимальная, состоящая из всех непрерывных полунорм. Вместо термина «полунорма, непрерывная в топологии локально выпуклого пространства R» будем обычно использовать более короткий термин «полунорма в R».

Последовательность ξ_n элементов локально выпуклого пространства R называется сходящейся к элементу ξ, если для любой полунормы p в R последовательность $p(\xi_n - \xi)$ стремится к нулю. Последовательность ξ_n называется фундаментальной, если для любой полунормы p в R $\lim\limits_{m\to\infty,\, n\to\infty} p(\xi_m - \xi_n) = 0$. В полном локально выпуклом пространстве всякая фундаментальная последовательность сходится (не приводим определения полноты, поскольку для нас существенно только сформулированное свойство полного пространства).

§ Д. 7. Обобщенные функции

Физики определяют обобщенную функцию $f(x)$ как символ, который имеет смысл лишь под знаком интеграла $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ — «хорошая» функция. Математическая формализация этого определения такова.

Пусть M — пространство с мерой, R — некоторое подпространство линейного пространства измеримых функций на M (элементы пространства R носят название основных функций). Тогда обобщенной функцией (точнее, обобщенной функцией с числовыми значениями) на M называется линейный функционал $f(\varphi)$ на пространстве R. Обобщенная функция на пространстве M обозначается $f(x)$; при этом вводится обозначение $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\varphi)$. Отметим, что $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ здесь нужно понимать чисто условно — как другую запись числа $f(\varphi)$*. Часто бывает удобно считать, что пространство основных функций R наделено топологией, и называть обобщенными функциями лишь непрерывные линейные функционалы на R. Будем рассматривать топологию в пространстве основных функций только в одном месте — при определении обобщенных функций умеренного роста.

Разумеется, определение обобщенной функции зависит от выбора пространства основных функций R. Множество обобщенных функций, соответствующих данному пространству основных функций R, обозначаем R'; множество R', естественно, снабжается структурой линейного пространства. Если $R \subset L^2(M)$, то всякая функция $g \in R$ [и даже всякая функция $g \in L^2(M)$] определяет линейный функционал на R по формуле $g(\varphi) = \int_M g(x)\,\varphi(x)\,d\mu$; иными словами, всякая основная функция порождает обобщенную функцию, которую будем обозначать тем же символом.

Обобщенную функцию n переменных $x_1, \ldots, x_n \in M$ определим как функционал $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, зависящий от n функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in R$, линейный по каждому из аргументов (иначе говоря, это линейный функционал на тензорном произведении n экземпляров пространства R). Для обобщенной функции n переменных будем использовать символ $f(x_1, \ldots, x_n)$ и писать, что $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \int f(x_1, \ldots, x_n) \times \times \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$. Множество обобщенных функций n переменных обозначаем R'_n.

Рассмотрим некоторые примеры обобщенных функций.

1. Пусть $C(E^r)$ — пространство непрерывных функций на евклидовом пространстве E^r. Символом $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ или $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ будем обозначать обобщенную функцию — функционал на пространстве $C(E^r)$, сопоставляющий функции $\varphi(\mathbf{x}) \in C(E^r)$ ее значение $\varphi(\mathbf{a})$ в точке $\mathbf{a}$ (точка $\mathbf{a} \in E^r$ играет роль параметра). Иными словами, функция $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ (δ-функция) определяется соотношением $\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{a})$. Ясно, что для любого пространства $R \subset C(E^r)$ δ-функция может рассматриваться как обобщенная функция из R'.

2. Пусть $C_n(E^r)$ — пространство n раз непрерывно дифференцируемых функций на E^r. Обобщенную функцию $\delta^{(\alpha)}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in (C_n(E^r))'$ определим соотношением

$$\int \delta^{(\alpha)}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \left(D^{(\alpha)}(\varphi)\right)(\mathbf{a})$$

$\Bigl($здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — набор целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$, удовлетворяющий условию $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \leqslant n$, $D^{(\alpha)}(\varphi) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,\varphi\Bigr)$.

3. Если пространство R содержится в пространстве $L^2(M)$, то обобщенная функция двух переменных $\delta(x, y) \in R'_2$ определяется соотношением

$$\int \delta(x, y)\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = \int \varphi(x)\,\psi(x)\,d\mu.$$

4. Всякий оператор A в пространстве $L^2(M)$ определяет обобщенную функцию двух переменных $A(x, y) \in (D_A)'_2$ по формуле

$$\int A(x, y)\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = \langle A\psi, \bar{\varphi}\rangle,$$

функция $A(x, y)$ называется ядром оператора A.

Оператор A можно записать как интегральный оператор с ядром $A(x, y)$, иными словами,

$$(A\psi)(x) = \int A(x, y)\,\psi(y)\,dy. \tag{Д.1}$$

Равенство (Д.1) следует понимать как сокращенную запись соотношения

$$\int (A\psi)(x)\,\varphi(x)\,d\mu = \int A(x, y)\,\psi(y)\,\varphi(x)\,dx\,dy.$$

5. Рассматривая числовые обобщенные функции на пространстве E_r, всюду в этой книге ограничиваемся обобщенными функциями «умеренного роста» — функционала-

* Подчеркнем, что в то время как $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ понимается как условная запись числа $f(\varphi)$ и имеет смысл в случае, если φ — основная, а f — обобщенная функция, $\int f(x)\,\varphi(x)\,d\mu$ понимается как интеграл Лебега от обычной функции $f(x)\,\varphi(x)$ и имеет смысл, если функция $f(x)\,\varphi(x)$ суммируема. (Это соглашение не относится к основному тексту книги.) Для интегралов по евклидову пространству E^r в обеих ситуациях употребляем обозначение $\int f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

ми на пространстве $\mathcal{S}(E^r)$ бесконечно дифференцируемых функций, все производные которых на бесконечности убывают быстрее любой степени. Топология в этом пространстве описана в § Д.6.

Обобщенная функция умеренного роста определяется как непрерывный линейный функционал $f(\varphi)$ на пространстве $\mathcal{S}$. Линейное пространство обобщенных функций умеренного роста обозначается $\mathcal{S}'(E^r)$.

Всякая числовая функция $a(\mathbf{x})$, растущая на бесконечности не быстрее полинома (т. е. допускающая для достаточно больших $\mathbf{x}$ оценку $|a(\mathbf{x})| \leqslant C\|\mathbf{x}\|^n$) и суммируемая в любой ограниченной области, определяет обобщенную функцию $a(\varphi)$, принадлежащую пространству $\mathcal{S}'$, по формуле

$$a(\varphi) = \int a(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

(интеграл понимается в смысле Лебега).

Определим простейшие операции с обобщенными функциями.

Обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$ называется пределом последовательности $f_n \in \mathcal{S}'$ обобщенных функций, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}$ предел последовательности $f_n(\varphi)$ равен $f(\varphi)$ (иными словами, $\lim \int f_n(\mathbf{x})\ \varphi(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x})\ \varphi(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$).

Производная $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ определяется формулой

$$f_i(\varphi) = f\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

или, в других обозначениях, формулой

$$\int \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = -\int f(\mathbf{x})\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,d\mathbf{x}.$$

Преобразование Фурье $\tilde{f}$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ определяется соотношением

$$\tilde{f}(\varphi) = f(\tilde{\varphi}), \text{ где } \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \int \exp(i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}\rangle)\,\varphi(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}.$$

Отметим, что производная функция $f \in \mathcal{S}'$ и ее преобразование Фурье всегда существуют и принадлежат пространству $\mathcal{S}'$ (это становится очевидным, если заметить, что вместе с функцией $\varphi \in \mathcal{S}$ функции $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ и $\tilde{\varphi}$ принадлежат $\mathcal{S}$).

Следующее важное утверждение называется теоремой о ядре.

Пусть $f(\varphi, \psi)$ — функционал от $\varphi \in \mathcal{S}(E^r)$, $\psi \in \mathcal{S}(E^n)$, принадлежащий пространству $\mathcal{S}'(E^r)$ при фиксированном ψ и пространству $\mathcal{S}'(E^n)$ при фиксированном φ. Тогда существует один и только один функционал $\hat{f} \in \mathcal{S}'(E^{r+n})$, для которого

$$\hat{f}(\varphi\psi) = f(\varphi, \psi)$$

[символом $\varphi\psi$ обозначена функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r)\,\psi(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}(E^{r+n})].$$

Совершенно аналогично числовым обобщенным функциям определяются векторные обобщенные функции и операторные обобщенные функции.

Именно, говорят, что задана векторная обобщенная функция, если каждой функции φ из пространства основных функций R поставлен в соответствие вектор $f(\varphi)$ из линейного пространства F, линейно зависящий от φ. (Иначе говоря, векторная обобщенная функция — это оператор, заданный на пространстве R, со значениями в линейном пространстве F.)

Если каждой функции φ из пространства основных функций R поставлен в соответствие линейно зависящий от φ оператор $A(\varphi)$ из пространства $\mathcal{H}_1$ в пространство $\mathcal{H}_2$, то говорят, что задана операторная обобщенная функция (будем считать, что все операторы $A(\varphi)$ имеют одну и ту же область определения D). Можно сказать, что операторная обобщенная функция — это оператор, заданный на пространстве основных функций R и принимающий значения в линейном пространстве операторов с областью определения $D \subset \mathcal{H}_1$ и со значениями в $\mathcal{H}_2$.

Так же как и для числовых обобщенных функций, для векторных и операторных обобщенных функций будем пользоваться условной записью

$$f(\varphi) = \int f(x)\ \varphi(x)\ dx.$$

Приведем примеры векторных обобщенных функций, воспользовавшись при этом следующей общей конструкцией.

Пусть линейное пространство L вложено в линейное пространство K и на пространстве с мерой M задана функция $f(x)$ со значениями в K, обладающая тем свойством, что для любой функции $\varphi \in R$ существует $\int f(x)\,\varphi(x)\,d\mu$ и этот интеграл* является элементом пространства L. Тогда, очевидно, соответствие $f(\varphi)=\int f(x)\,\varphi(x)\,d\mu$ можно рассматривать как обобщенную функцию со значениями в L, порождаемую обычной функцией $f(x)$ со значениями в K. Для этой обобщенной функции будем применять то же обозначение $f(x)$.

Пусть, например, $x \in E^r$, $R=L^2(E^r)=L$, $K=\mathcal{S}'(E^r)$. Рассмотрим функции $\delta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ и $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})=(2\pi)^{-r/2}\exp(i\langle \mathbf{a},\mathbf{x}\rangle)$ из $K=\mathcal{S}'(E^r)$, зависящие от параметра $\mathbf{a}\in E^r$ [т. е. функции на E^r со значениями в $\mathcal{S}'(E^r)$]. Если $f(\mathbf{a})\in R=L^2(E^r)$, то $\int f(\mathbf{a})\,\delta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\,da=f(\mathbf{x})\in L=L^2(E^r)$ и $\int f(\mathbf{a})\,\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\,da=\tilde{f}(\mathbf{x})\in L=L^2(E^r)$. Таким образом, построены векторные обобщенные функции $\delta_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$, $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ со значениями в $L^2(E^r)$.

Если D — линейное многообразие в $\mathcal{H}_1$, пространство $\mathcal{H}_2$ вложено в пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$, а каждой точке x пространства с мерой M поставлен в соответствие оператор $A(x)$ с областью определения D и со значениями в $\tilde{\mathcal{H}}_2$ таким образом, что для всякой функции $\varphi\in R$ оператор $A(\varphi)=\int A(x)\,\varphi(x)\,d\mu$ переводит множество D в $\mathcal{H}_2$, то обычной операторной функции $A(x)$ соответствует, очевидно, обобщенная операторная функция $A(\varphi)$ со значениями в множестве операторов, переводящих D в $\mathcal{H}_2$.

В частности, если $M=E^r$, $R=L^2(E^r)$, $D=\mathcal{H}_1=F_n$, $\mathcal{H}_2=F_{n+1}$, где F_n обозначено пространство симметричных (антисимметричных) квадратично интегрируемых функций $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ переменных $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\in E^r$, а $\tilde{\mathcal{H}}_2=\mathcal{S}'(E^{r(n+1)})$ — пространство обобщенных функций умеренного роста, зависящих от переменных $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n+1}\in E^r$, то операторная функция $a_n^+(\mathbf{x})$ на E^n, где $a_n^+(\mathbf{x})$ — оператор переводящий функцию $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\in F_n$ в функцию $\sqrt{n+1}\,P\,[f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\,\delta(\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x})]\in\tilde{\mathcal{H}}_2$ определяет операторную обобщенную функцию, действующую из F_n в F_{n+1}, поскольку оператор $\int\varphi(\mathbf{x})\,a^+(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ переводит F_n в F_{n+1} (P здесь обозначает оператор симметризации или антисимметризации). Об этой операторной обобщенной функции идет речь в § 13.

* Интеграл здесь можно понимать в любом смысле, лишь бы он обладал свойством линейности по φ.

Обобщенную векторную функцию f со значениями в $\mathcal{H}$ будем называть полной, если линейные комбинации векторов $f(\varphi)$ всюду плотны в $\mathcal{H}$.

Если пространство основных функций R является всюду плотным подмножеством пространства $L^2(M)$, то обобщенную векторную функцию $f(x)$ со значениями в $\mathcal{H}$ будем называть нормированной на δ-функцию при условии

$$\langle f(x),\ f(y)\rangle=\delta(x,\ y)$$

(точный смысл это равенство приобретает, если проинтегрировать его, умножив на основные функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$, т. е. переписать его в виде

$$\left\langle\int f(x)\,\varphi(x)\,dx,\ \int f(y)\,\psi(y)\,dy\right\rangle=$$
$$=\int\delta(x,y)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(y)}\,dx\,dy=\int\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,d\mu$$

или короче: $\langle f(\varphi),\ f(\psi)\rangle=\langle\varphi,\ \psi\rangle$).

Таким образом, если обобщенная функция f нормирована на δ-функцию, то, ставя в соответствие функции $\varphi\in R$ вектор $f(\varphi)\in\mathcal{H}$, получаем изометрическое отображение пространства R в $\mathcal{H}$; это отображение можно по непрерывности продолжить в изометрическое отображение пространства $L^2(M)$ в $\mathcal{H}$; продолженное отображение также обозначим символом f. Если векторная функция f является полной, то изометрическое отображение $L^2(M)$ в $\mathcal{H}$ оказывается изоморфизмом (т. е. отображением на $\mathcal{H}$).

Полную нормированную на δ-функцию обобщенную векторную функцию f будем называть обобщенным базисом. Сформулированные выше утверждения означают, что всякий вектор $a\in\mathcal{H}$ можно разложить по обобщенному базису (т. е. единственным образом представить в виде

$$a=f(\varphi)=\int\varphi(x)\ f(x)\ dx,$$

где $\varphi\in L^2(M)$). Если $a=f(\varphi)$, то функция $\varphi(x)$ может быть записана в виде

$$\varphi(x)=\langle a,\ f(x)\rangle.$$

Примерами обобщенных базисов являются введенные выше векторные обобщенные функции $\delta_{\mathbf{a}}$ и $\varphi_{\mathbf{a}}$.

Если A — оператор в пространстве $\mathscr{H}$, то обобщенная функция

$$\langle x | A | y \rangle = \langle Af(y), f(x) \rangle$$

называется матрицей оператора в обобщенном базисе $f(x)$.

Отметим следующее полезное утверждение: если A_n — последовательность операторов, нормы которых $\|A_n\|$ образуют ограниченную последовательность, и матрицы $\langle x | A_n | y \rangle$ сходятся к матрице $\langle x | A | y \rangle$, то операторы A_n слабо сходятся к оператору A [говоря, что матрицы $\langle x | A_n | y \rangle$ сходятся к $\langle x | A | y \rangle$, имеем в виду, что для любых функций $\varphi, \psi \in R$, где R — плотное подмножество $L^2(M)$,

$$\lim \int \langle x | A_n | y \rangle \varphi(x) \psi(y)\, dx\, dy = \int \langle x | A | y \rangle \varphi(x) \psi(y)\, dx\, dy].$$

Фиксируем пространство основных функций R и всюду плотное линейное многообразие D в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и будем рассматривать только такие операторные обобщенные функции, которые переводят многообразие D в себя (т. е. будем считать, что область определения оператора $A(\varphi)$, где φ — основная функция, совпадает с D и все векторы $A(\varphi)\, a$, где $a \in D$, содержатся в D).

Множество таких функций обозначим $\mathscr{M}_D$.

Операторные обобщенные функции $A \in \mathscr{M}_D$, $B \in \mathscr{M}_D$ называются сопряженными друг с другом, если для любых $a \in D$, $b \in D$

$$\langle A(x)\, a, b \rangle = \langle a, B(x)\, b \rangle$$

(точнее, если $\langle A(\varphi)\, a, b \rangle = \langle a, B(\bar{\varphi})\, b \rangle$). Будем в этом случае применять обозначение $B = A^+$.

Произведением операторных обобщенных функций $A \in \mathscr{M}_D$, $B \in \mathscr{M}_D$ называется операторная обобщенная функция

$$C(x, y) = A(x)\, B(y).$$

Точнее, операторная обобщенная функция C сопоставляет функции $\alpha(x, y)$ вида

$$\alpha(x, y) = \sum_{\nu} \varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y), \tag{Д.2}$$

где φ_ν, $\psi_\nu \in R$, оператор

$$C(\alpha) = \int \alpha(x, y)\, A(x)\, B(y)\, dx\, dy = \sum_{\nu} A(\varphi_\nu)\, B(\psi_\nu).$$

В некоторых случаях операторную обобщенную функцию $C(x, y)$ можно определить на более широком классе основных функций, чем функции вида (Д.2). Например, имеет место следующее утверждение (операторный аналог теоремы о ядре).

Пусть пространством основных функций является пространство $\mathscr{S}(E^r)$. Выделим в множестве $\mathscr{M}_D$ множество $\mathscr{R}_D$, состоящее из таких операторных обобщенных функций $A \in \mathscr{M}_D$, что: а) функционал $\langle A(\varphi)\, a, b \rangle$ при любых $a, b \in D$ непрерывен в топологии пространства $\mathscr{S}$ (т. е. числовые обобщенные функции $\langle A(x)\, a, b \rangle$ принадлежат пространству $\mathscr{S}'$); б) существует операторная обобщенная функция $A^+ \in \mathscr{M}_D$, сопряженная с A. Если $A_1, \ldots, A_p \in \mathscr{R}_D$, то любой функции $\psi \in \mathscr{S}^{pr}$ можно сопоставить оператор

$$C(\psi) = \int \psi(x_1, \ldots, x_p)\, A_1(x_1) \ldots A_p(x_n)\, d^p x, \tag{Д.3}$$

определенный на множестве D, положив

$$C(\psi) = \sum_{k=1}^{s} A_1(\varphi_1^{(k)}) \ldots A_p(\varphi_p^{(k)})$$

в случае, когда

$$\psi = \sum_{k=1}^{s} \varphi_1^{(k)}(x_1) \ldots \varphi_p^{(k)}(x_p) \tag{Д.4}$$

и

$$C(\psi) = \operatorname{slim} C(\psi_n), \tag{Д.5}$$

где ψ_n — последовательность функции вида (Д.4), сходящаяся к ψ в топологии пространства $\mathscr{S}$, в случае, когда ψ — произвольная функция из пространства $\mathscr{S}$.

Для того чтобы доказать это утверждение, рассмотрим выражение

$$\| C(\psi_m)\, a - C(\psi_n)\, a \|^2 = \langle C(\psi_m)\, a - C(\psi_n)\, a, C(\psi_m)\, a - C(\psi_n)\, a \rangle = \langle (C^+(\psi_m)\, C(\psi_m) + C^+(\psi_n)\, C(\psi_n) - C^+(\psi_m)\, C(\psi_n) - C^+(\psi_n)\, C(\psi_m))\, a, a \rangle =$$

$$= \int \rho_{m,n}(x_1, \ldots, x_p | y_1, \ldots, y_p) \langle A_p^+(x_p) \ldots A_1^+(x_1)\, A_1(y_1) \ldots A_p(y_p)\, a, a \rangle\, d^p x\, d^p y, \tag{Д.6}$$

где

$$\rho_{m,n}(x_1, \ldots, x_p \mid y_1, \ldots, y_p) = \overline{\psi}_m(x_1, \ldots, x_p)\,\psi_m(y_1, \ldots, y_p) + \overline{\psi}_n(x_1, \ldots, x_p)\,\psi_n(y_1, \ldots, y_p) - \overline{\psi}_n(x_1, \ldots, x_p)\,\psi_m(y_1, \ldots, y_p) - \overline{\psi}_m(x_1, \ldots, x_p)\,\psi_n(y_1, \ldots, y_p).$$

Легко видеть, что при $m \to \infty$, $n \to \infty$ функция $\rho_{m,n}$ стремится к нулю в топологии пространства $\mathcal{S}(E^{2pr})$. Из этого факта с помощью теоремы о ядре можно заключить, что выражение (Д.6) стремится к нулю при $m \to \infty$, $n \to \infty$; таким образом, последовательность $C(\psi_n)\,a$ является фундаментальной и, следовательно, сходится для всякого $a \in D$. Тем самым доказана сильная сходимость последовательности операторов $C(\psi_n)$ и возможность определить оператор $C(\psi)$ с помощью формулы (Д.5).

Рассмотрим теперь множество D', состоящее из линейных комбинаций векторов вида $C(\psi)\,a$, где $a \in D$, $C(\psi)$ — оператор вида (Д.3), построенный с помощью операторного аналога теоремы о ядре, и покажем, что выражению вида (Д.3) можно сопоставить также оператор, определенный на множестве D' с помощью формулы

$$C(\psi)\,(C'(\psi')\,a) = (C(\psi)\,C'(\psi'))\,a,$$

где

$$C'(\psi') = \int \psi'(x_1, \ldots, x_q)\,A_1'(x_1) \ldots A_q'(x_q)\,d^q x;$$

$$C(\psi)\,C'(\psi') = \int \psi(x_1, \ldots, x_p)\,\psi'(x_1', \ldots, x_q')\,A_1(x_1) \ldots A_p(x_p)\,A_1'(x_1') \ldots A_q'(x_q')\,d^p x\,d^q x',$$

Для того чтобы убедиться в законности этого определения, следует проверить, что вектор $C(\psi)\,d$ не зависит от способа представления вектора d в форме $d = C'(\psi')\,a$, и установить линейность построенного оператора. Проверка основана на замечании, что если вектор ξ_n имеет вид

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{s(n)} C_n^{(i)}(\varphi_n^{(i)})\,a_i,$$

$\xi_n \to 0$ и последовательность

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{s(n)} \left(C(\psi_n)\,C_n^{(i)}(\varphi_n^{(i)})\right)a_i$$

имеет предел, то этот предел равен нулю. [Здесь $a_i \in D$; $\varphi_n^{(i)} \in \mathcal{S}$; $\psi_n \in \mathcal{S}$; $\psi_n \to \psi$ в топологии $\mathcal{S}$; $A_k^{(i)} \in \mathcal{R}_D$;

$$C_n^{(i)}(\varphi_n^{(i)}) = \int \varphi_n^{(i)}(y_1, \ldots, y_{p(i)})\,A_1^{(i)}(y_1) \ldots A_{p(i)}^{(i)}(y_{p(i)})\,d^{p(i)} y.]$$

Справедливость сделанного замечания вытекает из того, что для любого вектора $\zeta \in D$

$$|\langle \eta_n, \zeta \rangle| = |\langle \xi_n, C^+(\psi_n)\,\zeta \rangle| \leqslant \|\xi_n\|\,\|C^+(\psi_n)\,\zeta\| \to 0.$$

§ Д. 8. Собственные и обобщенные собственные векторы

Вектор $\varphi \in \mathcal{H}$ называется собственным вектором оператора A, действующего в пространстве $\mathcal{H}$, если $A\varphi = \lambda\varphi$ и $\varphi \neq 0$; число λ называется собственным значением, соответствующим собственному вектору φ. Множество $\mathcal{H}_\lambda$ собственных векторов, отвечающих данному собственному значению λ, является линейным пространством; размерность этого пространства носит название кратности собственного значения. Собственное значение кратности 1 называется невырожденным.

Оператор A называется оператором с дискретным спектром, если его собственные векторы образуют тотальное множество в пространстве $\mathcal{H}$.

Собственные значения самосопряженного оператора действительны; собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны друг другу.

Если самосопряженный оператор имеет дискретный спектр, то спектр этого оператора представляет собой замыкание множества его собственных значений, а спектральный проектор E_μ равен сумме проекторов на линейные подпространства $\mathcal{H}_\lambda$, где $\lambda \leqslant \mu$.

Пусть теперь M — пространство с мерой; R — пространство основных функций, определенных на M; $f \in R'$ — обобщенная векторная функция переменной $x \in M$ со значениями в $\mathcal{H}$. Функция f называется обобщенной собственной функцией оператора A, действующего в $\mathcal{H}$, если

$$Af(x) = a(x)\,f(x).$$

Более точно это равенство означает, что

$$A \int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int f(x)\,a(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

т. е. $A\,f(\varphi) = f(a\varphi)$; последнее равенство должно выполняться всегда, когда оно имеет смысл (т. е. когда $\varphi \in R$ и $a\varphi \in R$).

В частном случае, когда M состоит из конечного числа n точек, а R — пространство всех функций на M, обобщенная собственная функция представляет собой совокупность обычных собственных функций.

Обобщенная векторная функция $\varphi_{\mathbf{a}} = (2\pi)^{-r/2} \exp(\mathrm{i}\mathbf{a}\mathbf{x})$, определенная в § Д.6, является обобщенной собственной функцией для операторов $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_r}$ (и вообще для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами):

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{\mathbf{a}} = a_i\,\varphi_{\mathbf{a}}.$$

Имеет место следующее важное утверждение.

Для любых коммутирующих самосопряженных операторов $A_1, \ldots, A_n$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, найдется обобщенный базис, собственный для всех этих операторов (т. е. найдется полная обобщенная векторная функция f, нормированная на δ-функцию ($\langle f(x), f(y)\rangle = \delta(x, y)$) и удовлетворяющая условиям $A_i f(x) = a_i(x)\,f(x)$ при $i = 1, \ldots, n$).

Доказательство этого утверждения легко получить, если вспомнить, что существует изоморфизм α пространства $\mathscr{H}$ и пространства $L^2(M)$, при котором операторы A_i переходят в операторы умножения на функции $a_i(x)$; в самом деле, обобщенную векторную функцию f можно определить формулой

$$f(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \alpha^{-1}\varphi,$$

где $\varphi \in L^2(M)$.

§ Д. 9. Представления групп

Пусть каждому элементу g группы G сопоставлен унитарный оператор T_g в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, причем единице группы соответствует единичный оператор и произведению элементов группы — произведение операторов:

$$T_e = 1,\ T_{gh} = T_g T_h. \tag{Д.7}$$

Тогда говорят, что задано унитарное представление группы G.

Подпространство $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ называется инвариантным, если каждый оператор представления T_g переводит $\mathscr{H}_1$ в себя. Унитарное представление $\mathscr{H}$ называется неприводимым, если в пространстве $\mathscr{H}$ нет нетривиального (отличного от нулевого подпространства и от всего $\mathscr{H}$) инвариантного подпространства.

Два унитарных представления T_g и T'_g в пространствах $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм α пространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$, удовлетворяющий условию

$$T'_g\alpha = \alpha T_g.$$

По всякому самосопряженному оператору A можно построить унитарное представление группы действительных чисел E^1, сопоставив каждому числу $t \in E^1$ оператор $T_t = \exp(\mathrm{i}At)$ (в качестве групповой операции в E^1 рассматривается сложение, так что равенства (Д.7) принимают вид

$$T_0 = 1,\ T_{t+\tau} = T_t T_\tau).$$

Обратно, если задано унитарное представление T_t группы E^1, такое, что для любых двух векторов $a, b \in \mathscr{H}$ функция $\langle T_t a, b\rangle$ непрерывна или хотя бы измерима, то найдется такой самосопряженный оператор A, что $T_t = \exp(\mathrm{i}At)$; этот оператор может быть определен формулой $A = \frac{1}{\mathrm{i}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{T_t - 1}{t}$ (теорема Стоуна).

Семейство операторов, удовлетворяющих условиям теоремы Стоуна, называется однопараметрической группой унитарных операторов, а оператор A — генератором (или инфинитезимальным оператором) этой группы.

Неоднородной группой Лоренца P называется группа линейных неоднородных преобразований пространства Минковского

$$x' = \Lambda x + a, \tag{Д.8}$$

сохраняющих пространственно-временной интервал:

$$(x - y,\ x - y) = (x' - y',\ x' - y').$$

(Под пространством Минковского понимается четырехмерное пространство с неположительно определенным скалярным произведением $(x, y) = x_0 y_0 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$. Пространственно-временной интервал определяется как $\sqrt{(x - y, x - y)}$. Вектор из пространства Минковского записываем в виде $x = (x_0, \mathbf{x})$, где $x_0 \in E^1$, $\mathbf{x} \in E^3$.)

Преобразование (Д.8), рассматриваемое как элемент группы P, будем обозначать (Λ, a).

Пусть T_g — унитарное представление группы P, такое, что для любых векторов $a, b \in \mathcal{H}$ функция $\langle T_g a, b\rangle$ является непрерывной функцией переменной g (будем рассматривать только унитарные представления, удовлетворяющие этому условию непрерывности). В группе P содержится подгруппа трансляций $(1, a)$, состоящая из преобразований $x' = x + a$. Эта подгруппа коммутативна.

В силу теоремы Стоуна унитарные операторы $T_{(1, a)}$, соответствующие трансляциям $(1, a)$, можно представить в виде

$$T_{(1, a)} = \exp\left[-\mathrm{i}\,(a_0 H - a_1 P_1 - a_2 P_2 - a_3 P_3)\right] = \exp\left[-\mathrm{i}\,(a_0 H - \mathbf{aP})\right],$$

где H, P_1, P_2, P_3 — коммутирующие самосопряженные операторы.

Оператор H называется оператором энергии, векторный оператор $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ — оператором импульса.

Легко проверить, что совместный спектр операторов $H, \mathbf{P}$ является множеством, инвариантным относительно однородных преобразований Лоренца.

Одно из простейших представлений группы P может быть описано следующим образом.

Рассмотрим в четырехмерном пространстве множество U_m, выделяемое соотношениями $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, $p_0 \geqslant 0$. Поставим в соответствие каждой функции $f \in L^2(E^3)$ функцию $\check{f}$ на множестве U_m, определяемую формулой $\check{f}(p_0, \mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\sqrt{p_0}$. Это соответствие можно рассматривать как изоморфизм между пространством $L^2(E^3)$ и некоторым пространством функций на U_m. Это пространство функций на U_m обозначим $L^2(U_m)$; скалярное произведение в $L^2(U_m)$ определяется формулой

$$\langle \check{f}, \check{g}\rangle = \int \check{f}(p_0, \mathbf{p})\,\overline{\check{g}(p_0, \mathbf{p})}\,\frac{d\mathbf{p}}{p_0}.$$

В пространстве $L^2(U_m)$ определим унитарное представление группы P с помощью формулы

$$(U(\Lambda, a)\check{f})(p) = \exp(\mathrm{i}\,(a, p))\,\check{f}(\Lambda^{-1} p) \qquad (\text{Д}.9)$$

(проверка того, что формула (Д.9) действительно задает унитарное представление, основана на замечании, что выражение $p_0^{-1}\,d\mathbf{p}$ определяет меру на U_m, инвариантную относительно преобразований Лоренца). Построенное представление неприводимо; спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в пространстве $L^2(U_m)$ совпадает с множеством U_m.

В силу указанного выше изоморфизма между пространствами $L^2(E^3)$ и $L^2(U_m)$ построенное унитарное представление эквивалентно представлению $V(\Lambda, a)$ в $L^2(E^3)$:

$$\widecheck{V(\Lambda, a) f} = U(\Lambda, a)\check{f}.$$

Опишем (с точностью до эквивалентности) все неприводимые представления группы P, в которых оператор энергии H неотрицательно определен и не равен нулю.

Для каждого неотрицательного m существует бесконечная серия унитарных неприводимых представлений, причем совместный спектр операторов H, $\mathbf{P}$ в этих представлениях есть множество U_m. Представления этой серии будем обозначать символом (m, σ), где σ — неотрицательное нечетное число.

Представление типа (m, σ) можно реализовать унитарными операторами в пространстве $L^2(E^3 \times S)$, где S — множество, состоящее из σ элементов. При этом операторы энергии и импульса в $L^2(E^3 \times S)$ задаются формулами

$$Hf(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\, f(\mathbf{p}, s);$$

$$\mathbf{P}f(\mathbf{p}, s) = \mathbf{p}f(\mathbf{p}, s).$$

Описанное выше неприводимое представление является представлением типа $(m, 1)$.

Отметим, что кроме однозначных унитарных представлений группы P, которые здесь рассматривались, существуют двузначные унитарные представления. Неприводимые двузначные представления, в которых оператор энергии не равен нулю и неотрицателен, описываются аналогично однозначным (с той лишь разницей, что σ — число элементов в множестве S — должно быть четным).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
2. **Хепп К.** Теория перенормировок. Пер. с англ. М., «Наука», 1974.
3. **Вайтман А.** Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. Пер. с англ. М., «Наука», 1968.
4. **Friedrichs K. O.** Mathematical aspects of quantum theory of field. N. Y., Interscience, 1953.
5. **Фридрихс К.** Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
6. **Сигал П.** Математические проблемы релятивистской физики. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
7. **Bethe H. A.** Electromagnetic shift of energy levels. — «Phys. Rev.», 1947, v. 72, p. 339.
8. **Schwinger J.** Quantum electrodynamics: I. A covariant formulation. — «Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 1439; II. Vacuum polarisation and self-energy. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 651; III. Electromagnetic properties of the electron-radiative correction to scattering. — «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 790.
9. **Tomonaga S.** On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. — «Progr. Theoret. Phys.», 1946, v. 1, p. 27.
10. **Feynman R. P.** Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. — «Rev. Mod. Phys.», 1948, v. 20, p. 367; Relativistic cut-off for classical electrodynamics. — «Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 1430; Theory of positrons. — «Phys. Rev»., 1949, v. 76, p. 749; Space-time approach to quantum electrodynamics.— «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 769.
11. **Dyson F. J.** Radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 486; S-matrix in quantum electrodunamics. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, p. 1736.
12. **Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.** К теории умножения причинных сингулярных функций. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, с. 25; О вычитательном формализме при умножении причинных функций. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, с. 429; «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, с. 585.
13. **Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.** Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
14. **Lehmann H., Symanzik K., Zimmerman W.** Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien. — «Nuovo cimento» 1955, v. 1, p. 205; Zur Vertexfunction in quantisierten Feldtheorien. — «Nuovo cimento», 1955, v. 2, p. 425.
15. **Wightman A. S.** Quantum field theory in terms of vacuum expectation values. — «Phys. Rev.», 1956, v. 101, p. 860.
16. **Haag R.** On quantum field theories. — «Mat. fys. medd. dan. vid. selsk.», 1955, v. 29, N 12, p. 1; Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions. — «Phys. Rev.», 1958, v. 112, p. 669; The framework of quantum field theorie. — «Nuovo cimento. Suppl.», 1959, v. 14, p. 131.
17. **Araki H., Haag R.** Collision cross sections in terms of local observables. — «Comm. Math. Phys.», 1967, v. 4, p. 77.
18. **Haag R., Kastler D.** An algebraic approach to quantum field theory. — «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 848.
19. **Ruelle D.** On the asymptotic condition in quantum field theory. — «Helv. phys. acta», 1962, v. 35, p. 147.
20. **Hepp K.** On the connection between the LSZ and Wightman quantum field theory. — «Comm. Math. Phys.», 1965, v. 1, p. 95.
21. **Метод** расширенной S-матрицы в квантовой теории поля. — «Теор. и матем. физ.», 1972, т. 13, с. 3. (Авт.: Б. В. Медведев, В. П. Павлов, М. К. Поливанов, А. Д. Суханов.)
22. **Glimm J., Jaffe A.** Boson quantum field models. In: Mathematics of Contemporary Physics. N. Y., Academic Press, 1972.
23. **Шварц А. С.** Элементы квантовой теории поля (бозонные взаимодействия). М., Атомиздат, 1975.
24. **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
25. **Швебер С.** Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., «Мир», 1969.
26. **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. М., «Наука», 1968.
27. **Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Релятивистская квантовая теория. Ч. 2. М., «Наука», 1971.
28. **Новожилов Ю. В.** Введение в теорию элементарных частиц. М., «Наука», 1972.
29. **Стритер Р., Вайтман А.** РСТ, спин и статистика и все такое. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
30. **Йост Р.** Основы теории квантовых полей. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
31. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.
32. **Хепп К., Эпштейн А.** Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля. М., Атомиздат, 1971.
33. **Segal I. E.** Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 88, p. 1.
34. **Hove L. Van.** Les diffucultes de divergences pour un modéle particulier de champ quantifié. — «Physica», 1952, v. 18, p. 145.
35. **Källen G.** On the definition of the renormalisation constants in quantum electrodynamics. — «Helv. phys. acta», 1952, v. 25, p. 417.
36. **Lehmann H.** Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunctionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder. — «Nuovo cimento», 1954 v. 11, p. 342.

37. **Chisholm J. S. R.** Changes of variable in quantum field theories. — «Nucl. Phys.», 1961, v. 26, p. 469.
38. **Greenberg O. W., Schweber S. S.** Clothed particle operators in simple models of quantum field theorie. — «Nuovo cimento», 1958, v. 8, p. 378.
39. **Фаддеев Л. Д.** О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 152, с. 573.
40. **Арефьева И. Я.** Перенормированная теория рассеяния для модели Юкавы. I. Построение одевающих операторов. — «Теор. и матем. физ.», 1973, т. 14, с. 3.
41. **Фатеев В. А., Шварц А. С.** Одевающий оператор в квантовой теории поля. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, с. 66.
42. **Лихачев В. Н., Тюпкин Ю. С., Шварц А. С.** Адиабатическая S-матрица и квазичастицы. — «Теор. и матем. физ.», 1970, т. 2, с. 3; Адиабатическая теорема в квантовой теории поля.— «Теор. и матем. физ.», 1972, т. 10, с. 63.
43. **Фатеев В. А., Шварц А. С.** К аксиоматической теории рассеяния. — «Теор. и матем. физ.», 1973, т. 14, с. 152.
44. **Schwarz A. S.** Adiabatic theorem in axiomatic quantum field theory. — «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 39, p. 33.
45. **Като Т.** Теория возмущений. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
46. **Тюпкин Ю. С., Шварц А. С.** Об адиабатическом изменении стационарного состояния. — «Теор. и матем. физ.», 1972, т. 10, с. 259.
47. **Повзнер А. Я.** О разложениях по функциям, являющимся решениями задачи рессеяния. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, с. 360.
48. **Kuroda S. T.** On the existence and the unitary property of the scattering operator. — «Nuovo cimento», 1959, v. 12, p. 431.
49. **Фаддеев Л. Д.** Математические вопросы квантовой теории рассеяния для систем трех частиц. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
50. **Березин Ф. А.** Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1965.
51. **Ахиезер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.
52. **Федорюк М. В.** Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы. «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, вып. 1, с. 67.
53. **Робертсон А., Робертсон В.** Топологические аекторные пространства. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
54. **Glimm J., Jaffe A., Spencer T.** The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$ model and other applications of high-temperature expansion. — In: Constructive quantum field theory. Springer-Verlag, 1973.
55. **Добрушин Р., Минлос Р.** Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля. — «Функц. анализ и приложения», 1973, т. 7, с. 324.
56. **Dimock J.** Asymptotic perturbation expansion in the $P(\varphi)_2$ quantum field theory. — «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 35, p. 347.
57. **Eckmann J.-P., Magnen J., Seneor R.** Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\varphi)_2$ theories, Ecole Polytechnique preprint.
58. **Feldman J. S., Osterwalder K.** The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled $(\varphi_4)^3$ quantum field theories. — Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Kyoto, 1975; Harvard preprint.
59. **Кац М.** Вероятность и смежные вопросы в физике. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
60. **Osterwalder K., Schrader R.** Axioms for Euclidean Green's functions. — «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 31, p. 83; II, — to appear in «Comm. Math. Phys.», Harvard preprint.
61. **Nelson E.** Construction of quantum fields from Markoff fields.— «J. Funct. Analysis», 1973, v. 12, p. 97.
62. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.** Существенно нелинейная одномерная модель классической теории поля. — «Теор. и матем. физ.», 1974, с. 21, с. 160.
63. **Фаддеев Л. Д.** Адроны из лептонов? — «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 141.
64. **Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Шварц А. С.** О классическом пределе матрицы рассеяния в квантовой теории поля. — «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, с.70.
65. **Поляков А. М.** Спектр частиц в квантовой теории поля. — «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 20, с. 430.
66. **Тюпкин Ю. С. Фатеев В. А., Шварц А. С.** О существовании тяжелых частиц в калибровочных теориях поля. —«Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 91.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 8
Условные обозначения 18

Глава 1. Осиовные прииципы кваитовой теории

§ 1. Состояния квантовомеханической системы 20
§ 2. Эволюция вектора состояния 20
§ 3. Вычисление вероятностей значений измеряемой величнны 21
§ 4. Гейзенберговские операторы 24
§ 5. Интегралы движения. Стационарные состояния 25

Глава 2. Кваитовая механика одиой частицы и системы иетождествеииых частиц

§ 6. Квантовая механика одной скалярной частицы 27
§ 7. Квантовая механика частицы со спииом . . 29
§ 8. Квантовое описание системы нетождественных частиц. 31
§ 9. Частица в ящике с периодическими граничными условиями 34
§ 10. Одномерный гармонический осциллятор . . 35
§ 11. Система связанных осцилляторов 38

Глава 3. Кваитовая механика системы тождествеииых частиц

§ 12. Система n тождественных частиц 40
§ 13. Фоковское пространство. 44

Глава 4. Оператор эволюции. Операторы $S(t, t_0)$ и $S_\alpha(t, t_0)$

§ 14. Нестационарная теория возмущений 54
§ 15. Стационарные состояния гамильтоииаиа, зависящего от параметра 58
§ 16. Адиабатическое изменение стационарного состояния 61

Глава 5. Теория потеициальиого рассеяния

§ 17. Формальная теория рассеяния 66
§ 18. Одночастичная задача рассеяния 72
§ 19. Многочастичная задача рассеяния 78

Глава 6. Операторы в фоковском пространстве

§ 20. Представления соотношений коммутации и антикоммутации. Фоковское представление . . . 88
§ 21. Простейшие операторы в фоковском пространстве 95
§ 22. Нормальная форма оператора. Теорема Вика 100
§ 23. Диаграммная техника 109

Глава 7. Функции Уайтмана и Гриил

§ 24. Функции Уайтмана 116
§ 25. Функции Грина 120
§ 26. Представление Челлена—Лемана 124
§ 27. Уравнения для функций Уайтмана и Грина 127

Глава 8. Траисляциоиио иивариаитиые гамильтоииаиы

§ 28. Трансляционно инвариантные гамильтонианы в фоковском пространстве 130
§ 29. Теорема реконструкции 137
§ 30. Взаимодействия вида $V(\varphi)$ 147

Глава 9. Матрица рассеяиия траисляциоиио иивариаитиого гамильтоииаиа (осиовиые факты)

§ 31. Матрица рассеяния трансляционно инвариантного гамильтониана в фоковском пространстве 152
§ 32. Определение матрицы рассения с помощью операторной реализации трансляционно инвариантного гамильтониана 158
§ 33. Адиабатическое определение матрицы рассеяния 170
§ 34. Фаддеевское преобразование. Теорема эквивалентиости 174
§ 35. Квазиклассическое приближение 183

Глава 10. Аксиоматическая теория рассеяиия

§ 36. Основные предположения. Построение матрицы рассеяния 194
§ 37. Доказательство лемм 209
§ 38. Асимптотические поля (in- и out-операторы) 223
§ 39. Одевающие операторы. 229
§ 40. Обобщения 239
§ 41. Аднабатическая теорема в аксиоматической теории рассеяния 251

Глава 11. Траисляциоиио иивариаитиые гамильтоииаиы (дальиейшее исследоваиие)

§ 42. Связь аксиоматической теории с гамильтоновым формализмом 272
§ 43. Гейзенберговские уравнения. Канонические преобразования 276

§ 44. Построение операторной реализации 282
§ 45. Одевающие операторы для трансляционно инвариантных гамильтонианов 290
§ 46. Теория возмущений в аксиоматическом подходе 296

Глава 12. Аксиоматика лоренц-инвариантной квантовой теории поля

§ 47. Аксиомы, обеспечивающие лоренц-инвариантность матрицы рассеяния 306
§ 48. Аксиоматика локальной квантовой теории поля 312
§ 49. Проблема построения нетривиального примера 316

Дополнение

§ Д.1. Гильбертово пространство 329
§ Д.2. Система векторов в предгильбертовом пространстве 330
§ Д.3. Конкретные пространства. 331
§ Д.4. Операции с гильбертовыми пространствами 336
§ Д.5. Операторы в гильбертовом пространстве . . . 338
§ Д.6. Локально выпуклые пространства 346
§ Д.7. Обобщенные функции 347
§ Д.8. Собственные и обобщенные собственные векторы 357
§ Д.9. Представления групп 358

Список литературы 362

Альберт Соломонович Шварц

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редактор *А. И. Новик*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Художник *А. И. Шавард*
Технический редактор *А. Л. Гулина*
Корректор *О. Р. Харламова*

Сдано в набор 17/II 1975 г. Подп. к печати 30/X 1975 г.
Т-19110 Формат $84\times108^1/_{32}$ Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 19,32 Уч.-изд. л. 19,94
Тираж 5800 экз. Цена 2 р. 20 к. Зак. изд. 73062
Зак тип. 82
Атомиздат 103031 Москва, К-31, ул. Жданова, 5.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Москва, И-41, Б. Переяславская ул., дом 46