Notes taken at the lectures of

LAURENT SCHWARTZ

APPLICATION OF DISTRIBUTIONS TO THE STUDY OF ELEMENTARY PARTICLES IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA

March 1961

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“

ЛОРАН ШВАРЦ

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ИЗУЧЕНИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Перевод с английского
И. Б. АЛЕКСАНДРОВА
и
А. Н. СТАРОСТИНА

Под редакцией
А. А. КИРИЛЛОВА

С предисловием
Н. Н. Боголюбова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1964

Настоящая квига является переводом лекций Л. Шварца, в которых кратко, в доступной форме излагаются основы теории обобщенных функций применительио к квантовой механике.

Эта теория, с помощью которой за последние годы был революционизирован ряд отраслей математического анализа, уже нашла и в ближайшее время, безусловно, найдет новые важные приложения в механике и физике.

Книга Л. Шварца представляет интерес как для математиков, механиков и физиков-теоретиков, так и для инженеров-исследователей, применяющих аппарат математики и физики, а также для студентов старших курсов указанных специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый русский перевод лекций Лорана Шварца — одного из крупнейших современных математиков — посвящен получению основных уравнений теории поля методом обобщенных функций. Лоран Шварц является одним из создателей теории обобщенных функций, которая возникла в связи с задачами физики и находит в ней все более широкое применение.

Обобщенные функции по существу использовались еще в работах Хевисайда и Дирака, хотя предложенный ими аппарат был далек от строгого математического обоснования. Следует отметить, что первые строгие математические исследования по обобщенным функциям принадлежат С. Л. Соболеву (см. его работы в *ДАН СССР* и в *Матем. сборнике*).

Математическое обоснование применяемого в физике аппарата имеет принципиальное значение, так как зачастую нуждаются в обосновании сами построения, возникающие в современной теоретической физике. Например, весьма актуален вопрос о внутренней непротиворечивости электродинамики, возникший в связи с использованием теории возмущений, и этот вопрос еще не получил своего разрешения.

Рассматривая задачу построения матрицы рассеяния при помощи явно сформулированных физических условий — причинности, релятивистской инвариантности и унитарности, — мы получаем возможность обосновать вычислительный процесс в рамках теории возмущений без обращения к псевдонаглядным ренормировочным представлениям. Вычитание бесконечностей при этом выступает как составной элемент процедуры получения конечных выражений из произведений некоторого числа несобственных сингулярных функций. Рассмотрение этой процедуры облегчается, как известно, использованием аппарата теории обобщенных функций.

В настоящих лекциях Лоран Шварц не рассматривает взаимодействия полей, при описании которого как раз и проявляются вышеупомянутые трудности. Все изложение проводится для единственной свободной частицы. Тем не менее книга представляет значительный интерес, и ее ценность состоит в следующем. Во-первых, в книге вводятся как раз те классы обобщенных функций, которые используются в аппарате теории квантованных полей. Поэтому можно надеяться на дальнейшее развитие идей, которые здесь излагаются. Во-вторых, четкое и корректное в математическом смысле построение позволяет получить строгий вывод уравнения Дирака на основе предположений самого общего характера. В-третьих, проводимая на основе обобщенных функций классификация элементарных частиц и данные автором определения этих частиц, несомненно, полезны, так что можно надеяться на распространение описываемых методов на случай взаимодействия.

Кроме того, книга полезна в чисто математическом отношении, так как является прекрасным введением в теорию обобщенных функций для лиц, занимающихся проблемами теоретической физики. В процессе изложения автор не приводит доказательства всех теорем, а иногда отсылает читателя к оригинальной литературе и учебникам. В этом отношении можно рекомендовать серию книг И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова и Н. Я. Виленкина „Обобщенные функции“ (вып. 1—5), которая содержит все последние достижения в этой области.

Встречающиеся иногда повторения нельзя рассматривать как недостаток книги. Введение различных классов обобщенных функций по единой схеме представляется полезным для понимания математической теории обобщенных функций и уяснения приложений, используемых в физике.

Следует указать, что оригинал книги Шварца представляет собой запись лекций автора, прочитанных в Калифорнийском университете в 1961 году. Эта запись содержит большое количество опечаток и неточностей, которые были исправлены в процессе подготовки русского издания; при этом последовательность изложения нисколько не изменена.

В заключение выражаю надежду, что предлагаемая книга будет с пользой прочитана специалистами и студентами, как математиками, так и физиками.

Н. Н. Боголюбов

Глава 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

§ 1. Введение

Квантовая механика занимается описанием движения частиц. Вся информация, необходимая для полного описания движения некоторой частицы, содержится в ее волновой функции $\psi(x, y, z, t)$, являющейся комплексной функцией координат $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$ (R^3 — трехмерное евклидово пространство) и времени t. В нерелятивистской квантовой механике величина $|\psi(x, y, z, t)|^2$ представляет собой плотность вероятности положения частицы. Вероятность того, что частица находится в произвольный момент времени t в некоторой области $A \subset \mathrm{R}^3$, определяется выражением $\iiint\limits_A |\psi(x, y, z, t)|^2 \, dx\, dy\, dz$.

Заметим, что функция ψ при любом t должна быть функцией с интегрируемым квадратом модуля; предположим, кроме того, что $\iiint\limits_{\mathrm{R}^3} |\psi(x, y, z, t)|^2 \, dx\, dy\, dz = 1$ для любого t. Если мы определим скалярное произведение волновых функций с помощью интеграла

$$\iiint\limits_{\mathrm{R}^3} \psi_1(x, y, z, t)\overline{\psi_2(x, y, z, t)}\, dx\, dy\, dz,$$

то функция ψ будет принадлежать гильбертову пространству для любого t.

В нерелятивистской квантовой механике ψ удовлетворяет волновому уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π, а H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве L^2 функций на R^3 с интегрируемым квадратом модуля. Из уравнения Шредингера следует, что скалярное произведение двух волновых функций остается постоянным во времени. В случае свободной частицы имеем

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta,$$

где m — масса частицы, а Δ — оператор Лапласа.

В релятивистской квантовой механике пространство и время неразделимы, поэтому нельзя говорить, что ψ есть функция четырех переменных, если не выбрана лоренцова система координат. Для одновременного рассмотрения времени и пространства вводится четырехмерное аффинное пространство E_4, и функция ψ определяется на E_4. Определение аффинного пространства будет дано позднее.

Определение. ***Частицей*** $\mathscr{H}$ называется гильбертово пространство функций, определенных на E_4.

Определение. ***Движением*** ψ называется элемент $\mathscr{H}$ с нормой $\|\psi\|_{\mathscr{H}} = 1$.

Пусть σ — произвольное преобразование Лоренца в E_4 и G — группа Лоренца. При преобразовании σ функция ψ переходит в функцию $\sigma\psi$.

Определение. Если для любого $\sigma \in G$ имеем

$$\psi \in \mathscr{H} \Rightarrow \sigma\psi \in \mathscr{H},$$
$$\|\sigma\psi\|_{\mathscr{H}} = \|\psi\|_{\mathscr{H}},$$

то частица $\mathscr{H}$ называется ***мировой*** частицей. Короче говоря, мировая частица — это частица, которая не изменяется при лоренцевых преобразованиях.

Определение. Мировая частица $\mathscr{H}$ называется ***элементарной***, если $\mathscr{H}$ не содержит подпространств, которые переходят в себя при всех преобразованиях $\sigma \in G$, т. е. когда пространство $\mathscr{H}$ минимально[1]).

Позднее мы покажем, что пространство $\mathscr{H}$ зависит от параметра $m_0 \geqslant 0$ и некоторого параметра, который может принимать два значения: „$+$“ и „$-$“. Последний интерпретируется как заряд частицы, а m_0 — как масса покоя частицы.

---

[1]) В теории представлений групп такие пространства называются неприводимыми. — *Прим. ред.*

Определение. *Мезоном* называется *скалярная* элементарная частица (ей соответствует скалярная волновая функция ψ).

Для системы двух частиц гильбертово пространство определяется теми же самыми аксиомами, что и выше; однако его элементы теперь являются функциями на произведении $E_4 \times E_4$. В этой книге мы будем рассматривать только случай одной *свободной* частицы.

Ради общности мы будем считать, что наше гильбертово пространство есть пространство обобщенных функций.

Поэтому мы начнем с краткого введения в теорию обобщенных функций.

§ 2. Элементы теории обобщенных функций

Пусть R^n означает n-мерное евклидово пространство, и пусть $\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$ (или просто $\mathscr{D}$) — пространство всех комплексных функций φ, определенных в R^n, имеющих производные всех порядков и обращающихся тождественно в нуль вне некоторой ограниченной области в R^n. Функции φ будем называть *основными функциями*. Заметим, что $\mathscr{D}(\mathrm{R}^n)$ — линейное пространство.

Введем топологию в пространство $\mathscr{D}$.

Определение. Последовательность основных функций $\{\varphi_j(x)\}$ *стремится к нулю* в $\mathscr{D}$ (обозначается $\varphi_j \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$), если все функции $\varphi_j(x)$ обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области в R^n и если функции $\varphi_j(x)$ вместе со своими производными любого порядка равномерно сходятся к нулю.

Определение. *Обобщенной функцией* T называется непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathscr{D}$, т. е. правило, согласно которому каждому элементу $\varphi \in \mathscr{D}$ ставится в соответствие комплексное число $\langle T, \varphi\rangle$, такое, что

$$\langle T, (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)\rangle = c_1\langle T, \varphi_1\rangle + c_2\langle T, \varphi_2\rangle$$

и сходимость $\varphi_j \xrightarrow[\mathscr{D}]{} 0$ влечет за собой сходимость

$$\langle T, \varphi_j\rangle \to 0.$$

Пусть $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ (или просто $\mathscr{D}'$) обозначает пространство обобщенных функций на $\mathbf{R}^n$.

Пример. Пусть f — локально интегрируемая функция в $\mathbf{R}^n$ [1]). Тогда равенство

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_A f(x)\varphi(x)\,dx \quad (*)$$

определяет обобщенную функцию. Здесь A — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, вне которой φ обращается в нуль (носитель φ). Таким образом, каждая локально интегрируемая функция однозначно определяет обобщенную функцию, заданную равенством (*). Очевидно, что f_1 и f_2 определяют одну и ту же обобщенную функцию тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$ почти всюду. Рассматривая соответствующие классы Лебега (т. е. отождествляя функции, которые равны между собой почти всюду), мы заключаем, что классы локально интегрируемых функций образуют подпространство пространства обобщенных функций.

Другими важными примерами обобщенных функций являются *дельта-функция* Дирака, определенная соотношениями

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$

или

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a),$$

и *диполь* ζ, определенный равенством

$$\langle \zeta, \varphi\rangle = -\varphi'(0).$$

Определение. *Производная обобщенной функции T* определяется формулой

$$\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle.$$

Из этой формулы следует, что

$$\langle T^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^m\rangle,$$
$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi\right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\rangle,$$
$$\langle D^p T, \varphi\rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p\varphi\rangle,$$

[1]) То есть функция, абсолютно интегрируемая в каждой ограниченной области из $\mathbf{R}^n$. — *Прим. перев.*

где p обозначает набор из n целых чисел $p=(p_1, \ldots, p_n)$,

$$|p| = p_1 + \ldots + p_n \quad \text{и} \quad D^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}.$$

Таким образом, любая обобщенная функция имеет производные всех порядков.

Пример. Рассмотрим *функцию Хевисайда* $Y(x)$, определяемую равенством

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\langle Y', \varphi\rangle = -\langle Y, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle.$$

Поэтому $Y' = \delta$.

Определение. Пусть f — непрерывная функция и пусть

$$A = \{x\colon f(x) \neq 0\}.$$

Замыкание $\bar{A}$ множества A называется *носителем* функции f.

Определение. Пусть Ω — открытое множество в R^n и пусть $T \in \mathscr{D}'$. Мы говорим, что обобщенная функция T *равна нулю в* Ω, если $\langle T, \varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$, носители которых содержатся в Ω.

Например, $\delta = 0$ в $\mathrm{R} - \{0\}$.

Теорема. *Пусть* $\{\Omega_i\}$ — *некоторая система открытых подмножеств в* R^n; *предположим, что* $T = 0$ *в каждом* Ω_i. *Тогда* $T = 0$ *в* $\bigcup\limits_i \Omega_i$.

Доказательство. Мы должны показать, что $\langle T, \varphi\rangle = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$, носитель которой содержится в $\bigcup\limits_i \Omega_i$. Пусть A — носитель некоторого φ.

Так как множество A компактно и покрыто системой $\{\Omega_i\}$, существует конечное подпокрытие $\{\Omega_{i_k}\}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Пусть $\{\psi_k\}$, $k=1, 2, \ldots, n$, — бесконечно дифференцируемое разбиение единицы в A, соответствующее покрытию $\{\Omega_{i_k}\}$, т. е. для $k=1, 2, \ldots, n$ выполняются следующие условия:

1) $\psi_k \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$;
2) носитель ψ_k содержится в Ω_{i_k};
3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \psi_k = 1$ на A.

Тогда

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle T, \sum_{k=1}^{n} \psi_k\varphi\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle T, \psi_k\varphi\rangle = 0.$$

Следствие: *Для каждой обобщенной функции T существует в точности одно максимальное открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, в котором эта функция равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим все Ω_i, в которых $T=0$. Тогда $\bigcup\limits_i \Omega_i$ представляет собой требуемое множество.

Определение. *Носителем* обобщенной функции T называется *дополнение* в $\mathbf{R}^n$ к максимальному открытому подмножеству Ω, в котором $T=0$.

Введем теперь топологию в пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'$. Так как $\mathscr{D}'$ — линейное пространство, то достаточно определить сходимость к нулю.

Определение. *Слабая сходимость*: пусть $\{T_j\}$ — произвольная последовательность в $\mathscr{D}'$. Будем говорить, что T_j сходится к нулю в смысле обобщенных функций, или $T_j \to 0$ в $\mathscr{D}'$, если $\langle T_j, \varphi\rangle \to 0$ для каждой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}$.

Понятие *сильной сходимости* включает требование типа равномерности; соответствующее определение будет дано позже, когда оно потребуется.

Теорема. *Дифференцирование является непрерывной операцией в $\mathcal{D}'$, т. е. $T_j \to 0$ в $\mathcal{D}'$ влечет за собой $T'_j \to 0$ в $\mathcal{D}'$.*

(Из слабой сходимости обобщенных функций следует слабая сходимость их производных.)

Доказательство.

$\langle T'_j, \varphi \rangle = -\langle T_j, \varphi' \rangle \to 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$.

Замечание. Многие последовательности, расходящиеся в обычном смысле, становятся сходящимися в смысле введенной здесь слабой топологии. Ряд, сходящийся в смысле обобщенных функций, можно дифференцировать почленно, т. е. если $T = \sum_j T_j$, то $T' = \sum_j T'_j$.

Теорема: *Пусть $f_j \to 0$ почти всюду; пусть, далее, $|f_j| \leqslant g$, где g — фиксированная положительная локально интегрируемая функция. Тогда $f_j \to 0$ в смысле обобщенных функций.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла.

Примеры. *Тригонометрический ряд* $\sum_k a_k e^{2\pi ikx}$ сходится в смысле обобщенных функций тогда и только тогда, когда $|a_k| \leqslant Ak^\alpha$, где A — константа, α — некоторое целое положительное число. Таким образом, многие тригонометрические ряды становятся сходящимися в смысле обобщенных функций. Чтобы убедиться в достаточности приведенного выше условия, рассмотрим ряд

$$\sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(2\pi ik)^{\alpha+2}} e^{2\pi ikx}.$$

Этот ряд сходится равномерно, так как $\frac{|a_k|}{|2\pi ik|^{\alpha+2}} \leqslant \leqslant \frac{A}{(2\pi)^{\alpha+2}} \frac{1}{k^2}$; значит, он сходится и в смысле обобщенных функций. Дифференцируя этот ряд почленно $\alpha + 2$ раз, получаем исходный ряд, который, следовательно, сходится в смысле обобщенных функций.

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ikx}$ в обычном смысле расходится. Однако в смысле обобщенных функций он сходится к обобщенной функции $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k)$:

$$\begin{array}{ccccc} \delta & \delta & \delta & \delta & \delta \\ \hline -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Дифференцируя почленно, убеждаемся, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (2\pi ik)\, e^{2\pi ikx}$ сходится к $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(x-k)$:

$$\begin{array}{ccccc} \delta' & \delta' & \delta' & \delta' & \delta' \\ \hline -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

§ 3. Аффинные пространства. Преобразования Лоренца

В предыдущем параграфе мы определили пространство $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ обобщенных функций на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Аналогично можно определить пространство $\mathscr{D}'(\vec{E}_n)$ обобщенных функций на n-мерном векторном пространстве $\vec{E}_n$. Однако в физическом пространстве не существует выделенного начала отсчета, поэтому здесь у нас нет исходного векторного пространства. По этой причине мы вводим понятие аффинного пространства.

Определение. *Аффинным пространством* называется множество E и связанное с ним векторное пространство $\vec{E}$. Связь между E и $\vec{E}$ определяется отображением $E \times E$ в $\vec{E}$, которое переводит пару элементов a, b из E в вектор $\overrightarrow{ab}$ из $\vec{E}$, причем выполняются следующие два условия.

(1) Соотношение Шаля. Если a, b, c — любые три элемента из E, то $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = 0$.

(2) Пусть o — фиксированный элемент из E. Отображение $a \to \overrightarrow{oa}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между E и $\vec{E}$.

Следует отметить, что соотношение (1) можно обобщить более чем на три элемента. Кроме того, тройка элементов a, a, a, согласно (1), дает $3\overrightarrow{aa} = 0$, или $\overrightarrow{aa} = 0$, а тройка a, a, b дает $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = 0$.

По очевидным причинам весьма удобно обозначение

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{b - a}.$$

Таким образом, операция вычитания задает отображение пары a, b из E на вектор $\overrightarrow{ab}$ из $\vec{E}$, удовлетворяющее приведенным условиям. Если a — данный элемент из E, а $\vec{x}$ — данный элемент из $\vec{E}$, то существует единственный элемент $b \in E$, такой, что $a + \vec{x} = b$, причем последнее эквивалентно равенству $\vec{x} = \overrightarrow{b - a}$.

Определение. Пусть E и F — два аффинных пространства. Отображение

$$\sigma : E \to F$$

называется *аффинным оператором*, переводящим E в F, если существует связанный с ним линейный оператор

$$\vec{\sigma} : \vec{E} \to \vec{F},$$

такой, что

$$\overrightarrow{\sigma b - \sigma a} = \vec{\sigma}\,(\overrightarrow{b - a}).$$

Заметим, что линейный оператор $\vec{\sigma}$ однозначно определяется оператором σ. Далее, произведение двух аффинных операторов является аффинным оператором, и обратимые аффинные операторы образуют группу.

Пример. Оператор сдвига $U : x \to x + \vec{u}$ — аффинный оператор, переводящий аффинное пространство E в себя. Связанный с ним линейный оператор сдвига является единичным оператором

$$\overrightarrow{(b+u)-(a+u)}=\overrightarrow{b-a}.$$

Обратно, каждый аффинный оператор является *единичным*, если связанный с ним линейный оператор представляет собой оператор сдвига.

Пусть $\vec{E}$ — векторное пространство над полем действительных чисел и пусть на $\vec{E}$ определена квадратичная форма $(\vec{x}\mid\vec{y})$. Мы предположим, что форма $(\vec{x}\mid\vec{y})$ билинейна, симметрична [т. е. $(\vec{x}\mid\vec{y})=(\vec{y}\mid\vec{x})$] и невырожденна (не существует отличного от нуля элемента, ортогонального ко всему пространству).

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — ортонормированный базис в $\vec{E}$, т. е. $(\vec{e}_i\mid\vec{e}_j)=0$ для $i\neq j$ и $(\vec{e}_i\mid\vec{e}_i)=\pm 1$. Любое конечномерное векторное пространство, в котором задана невырожденная квадратичная форма, имеет бесконечное число ортонормированных базисов. Однако число базисных элементов $\vec{e}$, таких, что $(\vec{e}\mid\vec{e})=1$, и число базисных элементов $\vec{e}$, таких, что $(\vec{e}\mid\vec{e})=-1$, не зависит от конкретного выбора базиса.

Определение. *Сигнатурой* n-мерного векторного пространства по отношению к данной квадратичной форме $(\vec{x}\mid\vec{y})$ называется пара целых чисел (p, q), где $p+q=n$, p — число элементов ортонормированного базиса $\vec{e}$, таких, что $(\vec{e}\mid\vec{e})=1$, а q — число элементов ортонормированного базиса $\vec{e}$, таких, что $(\vec{e}\mid\vec{e})=-1$.

Определения. *Четырехмерным векторным пространством Лоренца* называется векторное пространство с квадратичной формой, которое имеет сигнатуру (3,1). Соответствующий ортонормированный базис мы обозначим $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_0$, где $(\vec{e}_i\mid\vec{e}_i)=1$ при $i=1, 2, 3$ и $(\vec{e}_0\mid\vec{e}_0)=-1$.

Четырехмерным аффинным пространством Лоренца называется такое аффинное пространство E_4, для которого соответствующее векторное пространство $\vec{E}_4$ имеет сигнатуру (3,1).

Под *галилеевой системой отсчета* мы понимаем выделенную начальную точку 0 в E_4 и выделенный ортонормированный базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_0$ в $\vec{E}_4$ (выделенная система координат).

Каждая мировая точка имеет четыре координаты x_1, x_2, x_3, $x_0 = ct$ (три пространственных и одну временну́ю).

Определение: *Преобразованием Лоренца* σ называется аффинный обратимый оператор в лоренцевом аффинном пространстве, сохраняющий его лоренцеву структуру; это значит, что связанный с ним линейный оператор сохраняет квадратичную форму

$$(\vec{\sigma}\vec{x}\,|\,\vec{\sigma}\vec{y}) = (\vec{x}\,|\,\vec{y}).$$

Преобразования Лоренца образуют группу. Группа G, содержащая все преобразования Лоренца σ, называется *неоднородной группой Лоренца*, тогда как группа $\vec{G}$, образованная соответствующими линейными операторами $\vec{\sigma}$, называется *однородной группой Лоренца.*

Пример. *Сдвиги* являются преобразованиями Лоренца.

Теперь можно определить пространство $\mathscr{D}'(E)$ обобщенных функций на аффинном пространстве E просто с помощью выбора начальной точки в E: этот выбор превращает E в векторное пространство (изоморфное $\vec{E}$) и позволяет определить обобщенные функции на E, исходя из уже имеющегося определения обобщенных функций на векторном пространстве $\vec{E}$. Легко видеть, что построенное таким образом пространство обобщенных функций не зависит от выбора начала координат. В общем случае можно определить пространство $\mathscr{D}'(V)$ обобщенных функций (или потоков) на любом многообразии V класса C^∞[1]) (частным случаем которого является аффинное пространство).

---

[1]) Определение многообразия класса C^∞ см., например, в книге Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, М., ИЛ, 1956. — *Прим. ред.*

§ 4. Мировые скалярные частицы

Теперь мы уточним определения скалярной частицы и мировой частицы.

Определение. *Скалярной частицей* в мире E_4 называется множество $\mathscr{H}$, удовлетворяющее следующим постулатам.

(1) $\mathscr{H}$ есть векторное подпространство пространства $\mathscr{D}'(E_4)$.

(2) $\mathscr{H}$ снабжено структурой гильбертова пространства, т. е. в $\mathscr{H}$ существует линейно-антилинейная форма $(\psi_1 \mid \psi_2)_{\mathscr{H}}$ (линейная по ψ_1 и антилинейная по ψ_2), которая является эрмитовой, положительно определенной и такой, что $\mathscr{H}$ полно по норме $\|\psi\|_{\mathscr{H}} = (\psi \mid \psi)^{1/2}_{\mathscr{H}}$.

(3) Каноническое вложение $\mathscr{H}$ в $\mathscr{D}'$ непрерывно, т. е.

$$\psi_j \to 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{H} \Rightarrow \psi_j \to 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'.$$

Мы увидим, что $\mathscr{H}$ представляет *заряженные частицы*. Если обобщенные функции в E_4 принимают только действительные значения, то $\mathscr{H}$ описывает *нейтральные частицы*.

Определение. *Движением* частицы называется элемент $\psi \in \mathscr{H}$, такой, что $\|\psi\|_{\mathscr{H}} = 1$.

Мировая частица одинаково наблюдается различными наблюдателями. Наблюдатель производит свои наблюдения в некоторой системе отсчета, так что частица $\mathscr{H}$ рассматривается им как некоторое пространство обобщенных функций, определенных в $\mathbf{R}^4$, а не в E_4. Если все наблюдатели *наблюдают* $\mathscr{H}$ как одно и то же пространство обобщенных функций, определенных в $\mathbf{R}^4$, то $\mathscr{H}$ является *мировой частицей*. Более точное определение можно дать, если описать действие оператора $\sigma \in G$ на обобщенные функции.

Преобразование Лоренца $\sigma \in G$ действует не только в E_4, но также в любой другой структуре, определенной над E_4. Если $\varphi(x)$, $x \in E_4$, — комплексная функция на E_4, то преобразование $\varphi \to \sigma\varphi$ определяется равенством

$$\sigma\varphi(\sigma x) = \varphi(x), \qquad x \in E_4,$$

или, что то же самое,

$$\sigma\varphi(y) = \varphi(\sigma^{-1}y), \quad y \in E_4.$$

Из того, что $\vec{\sigma} \in \vec{G}$ — линейный оператор, следует

Теорема. $\varphi \in \mathscr{D}(E_4) \Rightarrow \sigma\varphi \in \mathscr{D}(E_4)$.

Из определения $\sigma\varphi$ следует

Теорема. $\varphi_n \to 0 \Rightarrow \sigma\varphi_n \to 0$.

Таким образом, σ осуществляет автоморфизм $\mathscr{D}$.

Действие оператора σ на обобщенные функции определяется равенством

$$\langle \sigma T, \sigma\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

или, что то же самое,

$$\langle \sigma T, \varphi \rangle = \langle T, \sigma^{-1}\varphi \rangle = \langle T_y, \varphi(\sigma y) \rangle.$$

Теорема. *Оператор σ действует на обобщенные функции линейно и непрерывно.*

Доказательство. *Линейность*:

$$\langle \sigma(a_1 T_1 + a_2 T_2), \varphi \rangle = \langle a_1 T_1 + a_2 T_2, \sigma^{-1}\varphi \rangle = \\ = a_1 \langle T_1, \sigma^{-1}\varphi \rangle + a_2 \langle T_2, \sigma^{-1}\varphi \rangle = \\ = a_1 \langle \sigma T_1, \varphi \rangle + a_2 \langle \sigma T_2, \varphi \rangle = \langle a_1 \sigma T_1 + a_2 \sigma T_2, \varphi \rangle.$$

Непрерывность. Если $T_n \to 0$, то для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ имеем $\sigma^{-1}\varphi \in \mathscr{D}$ и

$$\langle \sigma T_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \sigma^{-1}\varphi \rangle \to 0;$$

следовательно, $\sigma T_n \to 0$.

Легко показать, что последовательное применение операторов σ и τ в $\mathscr{D}'$ равносильно оператору $\tau\sigma$ в $\mathscr{D}'$. Отсюда следует, что σ является автоморфизмом $\mathscr{D}'$.

Если задано аффинное пространство E и положительная мера в $\vec{E}$, инвариантная относительно сдвигов, то тем самым однозначно определена мера в E. Тогда любая локально интегрируемая функция f в E определяет обобщенную функцию

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Если задана квадратичная форма над $\vec{E}$, то ей соответствуют ортонормированный базис и определенным образом нормированная мера Хаара. Ввиду того что любой оператор $\vec{\sigma} \in \vec{G}$ сохраняет квадратичную форму, он сохраняет также и выбранную меру Хаара. Следовательно, σ сохраняет установленное с помощью этой меры соответствие между обычными локально интегрируемыми функциями и обобщенными функциями.

Если заданы скалярная частица $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(E_4)$ и любой оператор $\sigma \in G$, мы можем построить пространство $\sigma\mathscr{H}$ как совокупность всех $\sigma\psi$ для $\psi \in \mathscr{H}$. Определив в $\sigma\mathscr{H}$ *скалярное произведение*

$$(\sigma\psi_1 \mid \sigma\psi_2)_{\sigma\mathscr{H}} = (\psi_1 \mid \psi_2)_{\mathscr{H}},$$

получим, что $\sigma\mathscr{H}$ — также гильбертово пространство.

Определение. Скалярная частица $\mathscr{H}$ называется *мировой*, если для всех $\sigma \in G$ справедливы соотношения:

(1) $\sigma\mathscr{H} = \mathscr{H}$;

(2) $\|\sigma\psi\|_{\mathscr{H}} = \|\psi\|_{\mathscr{H}}$ для любого $\psi \in \mathscr{H}$.

Следовательно, $\mathscr{H}$ является *мировой* частицей тогда и только тогда, когда любой оператор $\sigma \in G$ является *унитарным оператором*, отображающим $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$.

§ 5. Скалярные и векторные частицы в произвольном мире

Определение. *Миром* V называется многообразие класса C^∞ конечного числа измерений n. Группу G, элементы которой действуют в мире V, назовем *структурной группой* мира.

Определение. *Скалярной частицей в мире* V называется множество $\mathscr{H}$, удовлетворяющее следующим постулатам:

(1) $\mathscr{H}$ — векторное подпространство пространства $\mathscr{D}'(V)$ обобщенных функций, определенных в мире V;

(2) $\mathscr{H}$ снабжено гильбертовой структурой;

(3) $\psi_j \to 0$ в $\mathscr{H} \Rightarrow \psi \to 0$ в $\mathscr{D}'(V)$.

Определение. Скалярная частица $\mathscr{H}$ в мире V называется *универсальной относительно* G, если для всех операторов $\sigma \in G$ справедливы соотношения:

(1) $\sigma\mathscr{H} = \mathscr{H}$;

(2) $\|\sigma\psi\|_{\mathscr{H}} = \|\psi\|_{\mathscr{H}}$ для всех $\psi \in \mathscr{H}$.

Отметим, что ранее данное определение мировой частицы совпадает с определением частицы, *универсальной относительно группы Лоренца.*

Пример. Для одной скалярной частицы можно взять в качестве мира V аффинное лоренцево пространство E_4 с заданной лоренцевой квадратичной формой и в качестве структурной группы соответствующую группу Лоренца.

Пример. Для двух частиц можно взять $V = E_4 \times E_4$. Структурной группой G вновь будет группа Лоренца, действующая на $E_4 \times E_4$ по следующему закону: для $(x, y) \in E_4 \times E_4$ и $\sigma \in G$

$$(x, y) \to \sigma(x, y) = (\sigma x, \sigma y).$$

Для изучения таких частиц, как электрон, протон и т. д. мы должны ввести понятие *векторных обобщенных функций.* Пусть $\vec{F}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{C}$[1]).

Определение. *Обобщенной функцией* $\vec{T}$, *определенной в мире* V *и принимающей значения из* $\vec{F}$, называется непрерывное линейное отображение $\vec{T} : \varphi \to \langle \vec{T}, \varphi \rangle$ пространства $\mathscr{D}(V)$ в $\vec{F}$.

Пространство $\mathscr{D}'(V; \vec{F})$ обобщенных функций, определенных в мире V и принимающих значения из $\vec{F}$, пространство $\mathscr{L}(\mathscr{D}(V); \vec{F})$ непрерывных линейных отображений $\mathscr{D}(V)$ в $\vec{F}$, а также тензорное произведение $\mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}$ пространств $\mathscr{D}'(V)$ и $\vec{F}$ тождественны между собой:

$$\mathscr{D}'(V; \vec{F}) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(V); \vec{F}) = \mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}.$$

---

[1]) $\mathbf{C}$ обозначает поле комплексных чисел.— *Прим. ред.*

Пример. Пусть $V = \mathbf{R}^n$ — аффинное пространство с мерой Лебега. Если $\vec{f}(x)$ — локально интегрируемая функция, определенная в $\mathbf{R}^n$ и принимающая значения из $\vec{F}$, то функции $\vec{f}$ соответствует обобщенная функция

$$\varphi \to \langle \vec{f}, \varphi \rangle = \int \vec{f}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Если $S \in \mathscr{D}'(V)$ и $\vec{f} \in \vec{F}$, то *векторную обобщенную функцию* $S\vec{f} \in \mathscr{D}'(V; \vec{F})$ можно определить равенством

$$(S\vec{f}, \varphi) = \langle S, \varphi \rangle \vec{f}.$$

Обобщенная функция $S\vec{f}$ отождествляется с тензорным произведением $S \otimes \vec{f} \in \mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}$.

Если $\vec{F}$ имеет базис

$$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n,$$

то обобщенную функцию $\vec{T} \in \mathscr{D}'(V; \vec{F})$ можно записать в виде

$$\vec{T} = T_1\vec{f}_1 + T_2\vec{f}_2 + \ldots + T_n\vec{f}_n,$$

где $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathscr{D}'(V)$. Таким образом, для $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ имеем

$$\langle \vec{T}, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T_i, \varphi \rangle \vec{f}_i.$$

Определение. *$\vec{F}$-векторной частицей в мире V* называется множество $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V; \vec{F})$, удовлетворяющее постулатам, сформулированным в определении скалярной частицы в мире V, если заменить в них пространство $\mathscr{D}'(V)$ пространством $\mathscr{D}'(V; \vec{F})$, и, кроме того, следующим дополнительным постулатам.

(1) Каждый оператор $\sigma \in G$ действует не только на V, но и на $\vec{F}$, так что $x \in V \Rightarrow \sigma x \in V$ и $\vec{f} \in \vec{F} \Rightarrow \sigma\vec{f} \in \vec{F}$.

(2) Если σ определяет тождественную операцию как в V, так и в $\vec{F}$, то σ — единичный оператор группы G.

Таким образом, группа G действует эффективно[1]) на произведении $V \otimes \vec{F}$, но необязательно на V или $\vec{F}$ в отдельности.

Пример. Для электрона G представляет собой собственную спинорную группу, $V \doteq E_4$ и $\vec{F}$ — двумерное векторное пространство над С. Существует отображение $G \ni \sigma \to \sigma_0$, где σ_0 принадлежит собственной неоднородной группе Лоренца, такое, что каждому элементу лоренцевой группы соответствуют два элемента группы G и действие каждого σ на любой элемент E_4 такое же, как действие соответствующего оператора σ_0, заданного этим отображением. Существует также отображение $\sigma \to \tau$ группы G в некоторое множество унимодулярных операторов в $\vec{F}$, при котором бесконечное число элементов группы G переходит в один и тот же оператор в $\vec{F}$, и действие любого оператора σ на произвольный элемент из пространства $\vec{F}$ такое же, как действие соответствующего оператора τ, заданного этим отображением.

Определение. Действие оператора σ на $\vec{T} \in \mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}$ определяется равенством

$$\sigma(\langle \vec{T}, \varphi \rangle) = \langle \sigma\vec{T}, \sigma\varphi \rangle,$$

или эквивалентным равенством

$$\langle \sigma\vec{T}, \varphi \rangle = \sigma(\langle \vec{T}, \sigma^{-1}\varphi \rangle) = \sigma(\langle \vec{T}, \varphi(\sigma x) \rangle).$$

Определение. *Универсальная $\vec{F}$-векторная частица* в мире V определяется точно так же, как мировая скалярная частица в мире V.

§ 6. Слабая и сильная сходимость

Определение. Пусть E — топологическое векторное пространство. Множество $A \subset E$ называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in A$ элементы $ax + (1 - a)y$,

[1]) Говорят, что группа G действует эффективно на пространстве X, если каждому элементу группы, отличному от единицы, соответствует нетождественное преобразование пространства X. — *Прим. ред.*

$0 \leqslant a \leqslant 1$, также принадлежат A. Множество E называется *локально выпуклым* пространством, если его топология может быть определена *базой*, состоящей из выпуклых множеств[1]).

Пусть E — локально выпуклое топологическое векторное пространство, и пусть E' — дуальное к нему пространство непрерывных линейных форм на E. Определим слабую и сильную сходимость в E'.

Определение. Последовательность $\{e'_j\} \subset E'$ *слабо сходится к нулю* ($e'_j \to 0$ слабо), если $\langle e'_j, e\rangle \to 0$ для любого $e \in E$. Скалярное произведение определяется здесь естественным образом, как значение функционала e'_j на элементе e.

Сильная сходимость требует некоторой равномерности на ограниченных подмножествах пространства E.

Определение. Подмножество A из E называется *ограниченным*, если его можно отобразить в любую окрестность нуля подобным преобразованием с ненулевым коэффициентом подобия. Например, если E — банахово пространство, то подмножество из E ограничено в том случае, когда его можно отобразить внутрь любой сферы при помощи сжатия с ненулевым коэффициентом.

Определение. Последовательность $\{e'_j\} \subset E'$ *сильно сходится к нулю* ($e'_j \to 0$ сильно), если $\langle e'_j, e\rangle \to 0$ для любого $e \in E$, и эта сходимость равномерна на любом ограниченном подмножестве из E.

Вернемся теперь к пространствам $\mathscr{D}(V)$ и $\mathscr{D}'(V)$. Пространство $\mathscr{D}(V)$ — это пространство основных функций, определенных в мире V. Если K — компактное подмножество из V, то пусть $\mathscr{D}_K(V)$ обозначает пространство основных функций, носители которых содержатся в K. В $\mathscr{D}_K(V)$ можно ввести норму

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{x \in K \\ |p| \leqslant m}} |D^p \varphi(x)|,$$

[1]) Базой топологического пространства называется такой набор открытых множеств, что любое открытое множество получается объединением некоторого числа элементов из этого набора. — *Прим. ред.*

где D^p обозначает дифференцирование, определенное в § 2. Как и ранее, определим сходимость к нулю последовательности $\{\varphi_n\}$ в $\mathscr{D}_K(V)$, потребовав, чтобы для всех m выполнялось соотношение $\|\varphi_n\|_m \xrightarrow{n} 0$.

Элемент T из $\mathscr{D}'(V)$ представляет собой линейную форму на $\mathscr{D}(V)$, непрерывную на любом $\mathscr{D}_K(V)$. Последовательность $\{T_j\} \subset \mathscr{D}'(V)$ *слабо сходится к нулю* ($T_j \to 0$ слабо), если $\langle T_j, \varphi \rangle \to 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Эта последовательность *сходится к нулю сильно* ($T_j \to 0$ сильно), если $\langle T_j, \varphi \rangle \to 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ и эта сходимость равномерна на ограниченных подмножествах $\mathscr{D}_K(V)$ для любого K.

Приведем без доказательства следующую важную теорему.

Теорема. *Пространство $\mathscr{D}'(V; \vec{F})$ обобщенных функций, определенных на V и принимающих значения из пространства $\vec{F}$, является локально выпуклым топологическим векторным пространством, которое полно в сильной топологии.*

Далее нашей основной задачей будет отыскание всех подпространств $\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{D}'(V, \vec{F})$, таких, что $\mathscr{H}$ может быть снабжено структурой гильбертова пространства, так что сходимость в $\mathscr{H}$ влечет за собой сходимость в $\mathscr{D}'(V; \vec{F})$.

Глава 2

МНОЖЕСТВО $\mathfrak{H}$ МИРОВЫХ ЧАСТИЦ И ЕГО СТРУКТУРА

§ 1. Пространство $\mathfrak{H}$

Пусть E — полное локально выпуклое топологическое векторное пространство. В изучаемом случае E является пространством $\mathscr{D}'(V; \vec{F})$. Пусть $\mathfrak{H}$ обозначает множество пар $\{\mathscr{H}, (\ldots|\ldots)_{\mathscr{H}}\}$, состоящих из линейного подпространства $\mathscr{H}$ пространства E и скалярного произведения в $\mathscr{H}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

(а) $\mathscr{H}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(\ldots|\ldots)_{\mathscr{H}}$;

(б) вложение $\mathscr{H}$ в E непрерывно, т. е. сходимость в $\mathscr{H}$ влечет за собой сходимость в E.

В множестве $\mathfrak{H}$ мы можем определить следующие операции:

(1) *Умножение на неотрицательный скаляр* $\lambda \geqslant 0$; множество $\lambda\mathscr{H}$ определяется формулой

$$\lambda\mathscr{H} = \begin{cases} \mathscr{H}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Если $T \in \mathscr{H}$ и, следовательно, $T \in \lambda\mathscr{H}$, то $\|T\|_{\lambda\mathscr{H}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|T\|_{\mathscr{H}}$.

(2) *Сложение*. Множество $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ определяется формулой

$$\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 = \{T : T = T_1 + T_2,\ T_1 \in \mathscr{H}_1,\ T_2 \in \mathscr{H}_2\}.$$

Норма в $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ задается равенством

$$\|T\|_{\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2} = \inf \sqrt{\|T_1\|^2_{\mathscr{H}_1} + \|T_2\|^2_{\mathscr{H}_2}},$$

где нижняя грань берется по всем разложениям T в сумму $T_1 + T_2$; $T_1 \in \mathscr{H}_1$, $T_2 \in \mathscr{H}_2$.

(3) *Порядок.* Частичное упорядочение определяется в $\mathfrak{H}$ соотношением

$\mathcal{H}_1 \leqslant \mathcal{H}_2$, если $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ и норма в $\mathcal{H}_1$ не меньше нормы в $\mathcal{H}_2$.

(4) *Топология.* Будет показано, что $\mathfrak{H}$ представляет собой замкнутый выпуклый конус в топологическом векторном пространстве, которое мы построим.

Определение. *Антиядром* L называется антилинейное непрерывное отображение дуального пространства E' в E [т. е. $E' \xrightarrow{L} E$, L непрерывно и $L(\lambda e') = \bar{\lambda} L(e')$]. Антиядро L называется *положительным*, если $\langle e', L(e')\rangle \geqslant 0$ для всех $e' \in E'$.

Произведение, устанавливающее дуальность пространств E и E', определяется выражением

$$\langle e', f\rangle = e'(f) \text{ (значение } e' \text{ на } f) \text{ для } f \in E,\ e' \in E'.$$

Пример. Пусть $E = \mathbf{C}^n$ (n-мерное комплексное векторное пространство), тогда $E' = \mathbf{C}^n$. В этом случае антиядро является положительно определенной эрмитовой матрицей L:

$$L : (\xi_1, \ldots, \xi_n) \to (\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

где

$$\eta_i = \sum_j L_{ij} \bar{\xi}_j$$

и

$$\langle \xi, L\xi\rangle = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n = \sum_{i,j} L_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j.$$

В пространстве положительных антиядер очевидным образом определяются сложение и умножение на скаляр. Кроме того, задается отношение порядка:

$$L_1 \leqslant L_2, \text{ если } \langle e', L_1 e'\rangle \leqslant \langle e', L_2 e'\rangle \text{ для всех } e' \in E'.$$

Докажем теперь следующий важный результат.

Теорема. ***Существует взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathcal{H}$ пространства $\mathfrak{H}$ и положительными антиядрами L.***

Каждому $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$ соответствует ядро[1] $J \circ l_{\mathscr{H}} \circ {}^tJ$, *где J — естественное вложение $\mathscr{H} \to E$, ${}^tJ$ — сопряженное отображение $E' \to \mathscr{H}'$ и $l_{\mathscr{H}}$ — канонический антиизоморфизм $\mathscr{H}' \to \mathscr{H}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что данному $\mathscr{H}$ соответствует положительное антиядро L. Пусть $e' \in E'$. Так как e' — непрерывный линейный функционал на E и вложение $\mathscr{H}$ в E непрерывно, отсюда следует, что e' — непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}$. По теореме Рисса о линейных функционалах в гильбертовом пространстве существует однозначно определенный элемент из $\mathscr{H}$, который мы обозначим Le', такой, что

$$\langle e', h\rangle = (h \mid Le')_{\mathscr{H}}, \quad h \in \mathscr{H}, \quad e' \in E'. \tag{1}$$

Очевидно, что отображение $L: E' \to \mathscr{H} \subset E$, определенное соотношением (1), антилинейно. Для того чтобы доказать, что L непрерывно, предположим, что $e'_j \to 0$ в E' (в смысле сильной топологии), т. е. $\langle e'_j, h\rangle \to 0$ для любого $h \in E$, равномерно по h на ограниченных подмножествах из E. Из непрерывности вложения $\mathscr{H}$ в E следует, что ограниченные подмножества из $\mathscr{H}$ ограничены в E.

Следовательно, $\langle e'_j, h\rangle = (h \mid Le'_j)_{\mathscr{H}} \to 0$ равномерно на единичной сфере в $\mathscr{H}$. Поэтому $\|Le'_j\|_{\mathscr{H}} \to 0$ и L непрерывно. Наконец, полагая в (1) $h = Lf'$, получаем

$$\langle e', Lf'\rangle = (Lf' \mid Le')_{\mathscr{H}}; \quad e', f' \in E', \tag{2}$$

и если $e' = f'$, то

$$\langle e', Le'\rangle = (Le' \mid Le')_{\mathscr{H}} \geqslant 0, \quad e' \in E',$$

что доказывает положительность L.

Теперь мы должны показать, что данному положительному антиядру L соответствует элемент $\mathscr{H}$ из $\mathfrak{H}$. Пусть

$$\mathscr{H}_0 = LE' = \{Le' : e' \in E'\}.$$

Если требуемое $\mathscr{H}$ существует, то должно иметь место включение $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$. Согласно равенству (2), определим

---

[1]) Знак $\circ$ — знак композиции. — *Прим. ред.*

в $\mathscr{H}_0$ скалярное произведение

$$(u\,|\,v)_{\mathscr{H}_0}=(Le'\,|\,Lf')_{\mathscr{H}_1}=\langle f',\ Le'\rangle, \qquad (3)$$

где $u,\ v\in\mathscr{H}_0$ и $u=Le',\ v=Lf'$. Докажем теперь для $\mathscr{H}_0$ следующие утверждения.

(а) Скалярное произведение $(u\,|\,v)_{\mathscr{H}_0}$ определяется формулой (3) однозначно, т. е. не зависит от выбора e' и f', таких, что $u=Le'$ и $v=Lf'$. Это немедленно следует из (3), если заметить, что $(u\,|\,v)_{\mathscr{H}_1}=0$, когда либо u, либо v равно нулю.

(б) Форма $(u\,|\,v)_{\mathscr{H}_0}$ положительно определена. Так как L положительно, имеем

$$(u\,|\,u)_{\mathscr{H}_1}=\langle e',\ Le'\rangle\geqslant 0,\quad u\in\mathscr{H}_0.$$

Если $\langle e',\ Le'\rangle=0$, то, согласно неравенству Шварца,

$$|\langle f',\ Le'\rangle|\leqslant\langle f',\ Lf'\rangle^{1/2}\langle e',\ Le'\rangle^{1/2}=0$$

для всех $f'\in E'$. Поэтому $Le'=u=0$ и $(u\,|\,u)_{\mathscr{H}_0}=0$ тогда и только тогда, когда $u=0$.

(в) Топология в $\mathscr{H}_0$ сильнее, чем топология в E, т. е. вложение $\mathscr{H}_0$ в E непрерывно. Для этого достаточно показать, что единичная сфера в $\mathscr{H}_0$, $\{Le':\langle e',\ Le'\rangle\leqslant 1\}$, является ограниченным подмножеством множества E. Из неравенства Шварца

$$|\langle f',\ Le'\rangle|\leqslant\langle f',\ Lf'\rangle^{1/2}\langle e',\ Le'\rangle^{1/2}\leqslant\langle f',\ Lf'\rangle^{1/2}$$

следует, что множество $\{\langle f',\ Le'\rangle:\langle e',\ Le'\rangle\leqslant 1,\ e'\in E\}$ ограничено в $\mathbf{C}$ для любого $f'\in E'$, или что единичная сфера в $\mathscr{H}_0$ слабо ограничена в E. Используя теперь теорему Макки, которая утверждает, что подмножество локально выпуклого топологического векторного пространства сильно ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено, получаем, что единичная сфера в $\mathscr{H}_0$ ограничена в E.

Итак, мы показали, что $\mathscr{H}_0=LE'$ — предгильбертово пространство, вложение которого в пространство E непрерывно. Мы ожидаем получить нужное пространство $\mathscr{H}$, соответствующее L, пополняя $\mathscr{H}_0$. Поэтому необходимо доказать следующее.

(I) Если существует $\mathscr{H}$, соответствующее антиядру L, такое, что выполняется равенство (1), то $\mathscr{H}_0$ плотно в $\mathscr{H}$. Пусть элемент $h \in \mathscr{H}$ таков, что $(h \mid Le')_{\mathscr{H}} = 0$ для всех $e' \in E'$. Тогда $(h \mid Le')_{\mathscr{H}} = \langle e', h\rangle = 0$ для всех $e' \in E'$, и по теореме Хана — Банаха $h = 0$. Таким образом, элемент из $\mathscr{H}$, ортогональный к любому элементу из $\mathscr{H}_0$, является нулевым и, следовательно, $\mathscr{H}_0$ плотно в $\mathscr{H}$.

(II) Пополнение $\hat{\mathscr{H}}_0$ множества $\mathscr{H}_0$ может быть вложено в E. Рассмотрим (непрерывное) вложение

$$J\colon \mathscr{H}_0 \to E$$

и его однозначно определенное расширение

$$\hat{J}\colon \hat{\mathscr{H}}_0 \to E (= \hat{E}).$$

Мы должны показать, что $\hat{J}$ по-прежнему является вложением. Пусть $h \in \hat{\mathscr{H}}_0$ и пусть $\dot{h} = \hat{J}h \in E$. Мы утверждаем, что для любого $e' \in E'$ справедливо равенство

$$\langle e', \dot{h}\rangle = \langle h \mid Le'\rangle_{\hat{\mathscr{H}}_0}. \tag{4}$$

Если $h \in \mathscr{H}_0$, то $h = \dot{h} = Lf'$, и равенство (4) просто сводится к определению (3) скалярного произведения в $\mathscr{H}_0$. Рассмотрим теперь последовательность $\{h_\nu\} \subset \mathscr{H}_0$, такую, что $h_\nu \to h$. Тогда

$$\langle e', h_\nu\rangle = (h_\nu \mid Le')_{\mathscr{H}_0}.$$

Переходя к пределу и используя непрерывность скалярного произведения в $\hat{\mathscr{H}}_0$, а также непрерывность линейной формы e', получаем равенство (4). Предположим теперь, что $\dot{h} = \hat{J}h = 0$. Тогда в силу (4) $(h \mid Le')_{\hat{\mathscr{H}}_0} = 0$ для всех $Le' \in \mathscr{H}_0$, и, поскольку $\mathscr{H}_0$ плотно в $\hat{\mathscr{H}}_0$, имеем $h = 0$. Поэтому операция $\hat{J}$ взаимно однозначна.

(III) Наконец, положим $\mathscr{H} = \hat{J}\hat{\mathscr{H}}_0$ и перенесем гильбертову структуру из $\hat{\mathscr{H}}_0$ в $\mathscr{H}$. Мы должны показать, что $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, соответствующее антиядру L. Если $k \in \mathscr{H}$, то существует некоторое $h \in \hat{\mathscr{H}}_0$, такое, что $\hat{J}h = \dot{h} = k$, и равенство (4) дает

$$\langle e', k\rangle = \langle e', \dot{h}\rangle = (h \mid Le')_{\hat{\mathscr{H}}_0} = (k \mid Le')_{\mathscr{H}},$$

откуда следует, что L является антиядром, соответствующим $\mathscr{H}$.

Приведем теперь другое построение гильбертова пространства $\mathscr{H}$, соответствующего данному положительному антиядру L. Это будет построение „сверху", в отличие от приведенного в доказательстве предыдущей теоремы построения „снизу".

Теорема. *Пусть L — положительное антиядро. Элемент $h \in E$ принадлежит гильбертову пространству $\mathscr{H}$, соответствующему антиядру L, тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{e' \in E'} \frac{|\langle e', h\rangle|}{\langle e', Le'\rangle^{1/2}} < \infty, \tag{5}$$

и если это условие выполнено, то

$$\|h\|_{\mathscr{H}} = \sup_{e' \in E'} \frac{|\langle e', h\rangle|}{\langle e', Le'\rangle^{1/2}}.$$

Доказательство. Если $h \in \mathscr{H}$, то, используя (1) и неравенство Шварца, получаем

$$|\langle e', h\rangle| = |(h\,|\,Le')_{\mathscr{H}}| \leqslant (h\,|\,h)^{1/2}_{\mathscr{H}} \cdot (Le'\,|\,Le')^{1/2}_{\mathscr{H}} = \|h\|_{\mathscr{H}} \langle e', Le'\rangle^{1/2}$$

для всех $e' \in E'$.

Обратно, предположим, что справедливо условие (5), и рассмотрим отображение

$$Le' \to \langle e', h\rangle.$$

Легко убедиться в том, что это отображение является антилинейным функционалом на $\mathscr{H}_0$, который непрерывен, так как он ограничен на единичном шаре из $\mathscr{H}_0$. Поэтому его можно продолжить до непрерывного антилинейного функционала на пополнении $\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{H}_0$. Следовательно, по теореме Рисса, существует элемент $k \in \mathscr{H}$, такой, что

$$Le' \to \langle e', h\rangle = (k\,|\,Le')_{\mathscr{H}} = \langle e', k\rangle$$

для всех $e' \in E'$. По теореме Хана — Банаха, $h = k \in \mathscr{H}$.

§ 2. Структура $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$

Пусть $\mathscr{L}(E', E)$ обозначает множество непрерывных линейных отображений из E' в E, $\overline{\mathscr{L}}(E', E)$ — множество непрерывных антилинейных отображений, или антиядер, из E' в E, и $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$ — множество положительных антиядер. В предыдущем параграфе было показано, что существует взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$, $\mathfrak{H} \approx \overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$. Упоминалось также, что как в $\mathfrak{H}$, так и в $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$ можно определить естественную структуру (сложение, умножение на скаляр и т. д.). В этом параграфе будет дано более точное определение структуры $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$, а также установлено соответствие между ними.

Определение. Определим в $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$ следующие понятия.

(1) *Отношение порядка*: $L_1 \leqslant L_2$, если $L_2 - L_1 \geqslant 0$, т. е. если $L_2 - L_1$ — положительное антиядро.

(2) *Умножение на неотрицательный скаляр* λ:

$$(\lambda L)(e') = L(\lambda e').$$

(3) *Сложение*: $(L_1 + L_2)e' = L_1 e' + L_2 e'$.

Соответственно определим в $\mathfrak{H}$ следующие понятия.

(1′) *Отношение порядка*: $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$, если $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$ и норма в $\mathscr{H}_1$ не меньше нормы в $\mathscr{H}_2$, $\|h\|_{\mathscr{H}_1} \geqslant \|h\|_{\mathscr{H}_2}$.

(2′) *Умножение на неотрицательный скаляр* λ. Пространству $\mathscr{H}$ и неотрицательному числу λ соответствует пространство

$$\lambda\mathscr{H} = \begin{cases} \{0\}, & \lambda = 0, \\ \mathscr{H}, & \lambda > 0 \end{cases}$$

с нормой

$$\|h\|_{\lambda\mathscr{H}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|h\|_{\mathscr{H}}.$$

(3′) *Сложение*: пространствам $(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ соответствует пространство

$$\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 = \{h\colon\ h \in E,\ h = h_1 + h_2,\ h_1 \in \mathscr{H}_1,\ h_2 \in \mathscr{H}_2\}$$

с нормой

$$\|h\|_{\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2} = \inf \sqrt{\|h_1\|^2_{\mathscr{H}_1} + \|h_2\|^2_{\mathscr{H}_2}}.$$

Следует отметить, что (1) и (1′) в самом деле определяют отношения порядка, так как

(а) из $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_2 \leqslant \mathscr{H}_1$ следует, что $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$;

(б) из $L_1 \leqslant L_2$ и $L_2 \leqslant L_1$ следует, что $L_1 = L_2$.

Первое тривиально вытекает из того, что в гильбертовом пространстве скалярное произведение однозначно определяется нормой. Второе предположение означает по определению, что

$$\begin{aligned} &\langle e', (L_2 - L_1) e' \rangle \geqslant 0, \\ &\langle e', (L_1 - L_2) e' \rangle \geqslant 0, \end{aligned} \quad e' \in E',$$

или

$$\langle e', L_1 e' \rangle = \langle e', L_2 e' \rangle, \quad e' \in E'.$$

Используя формулу

$$\begin{gathered} 4 \langle e', Lf' \rangle = \langle e' + f', L(e' + f') \rangle - \langle e' - f', L(e' - f') \rangle + \\ + i \langle e' + if', L(e' + if') \rangle - i \langle e' - if', L(e' - if') \rangle, \end{gathered}$$

заключаем, что

$\langle e', L_1 f' \rangle = \langle e', L_2 f' \rangle$ для любых $e', f' \in E'$, откуда по теореме Хана — Банаха вытекает, что

$$L_1 f' = L_2 f', \quad f' \in E'.$$

Следует отметить также, что из требования $\|h\|_{\mathscr{H}_1} \geqslant \|h\|_{\mathscr{H}_2}$ в определении отношения $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$ следует, что сходимость в пространстве $\mathscr{H}_1$ влечет за собой сходимость в пространстве $\mathscr{H}_2$.

Установим теперь соответствие между структурами $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathscr{L}}_+ (E', E)$.

Теорема. (а) *Если $\mathscr{H}_1$ соответствует антиядру L_1, а $\mathscr{H}_2$ соответствует антиядру L_2, то $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$ тогда и только тогда, когда $L_1 \leqslant L_2$.*

(б) *Если $\mathscr{H}$ соответствует антиядру L, то $\lambda\mathscr{H}$ соответствует λL $(\lambda \geqslant 0)$.*

(в) *Если $\mathscr{H}_1$ соответствует антиядру L_1, а $\mathscr{H}_2$ соответствует антиядру L_2, то $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ соответствует $L_1 + L_2$.*

Доказательство.

(а) Предположим сначала, что $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$. Тогда

$$L_1 e' \in \mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$$

и

$$\langle e',\ L_1e'\rangle^{1/2} = \|L_1e'\|_{\mathscr{H}_1} \geqslant$$

$$\geqslant \|L_1e'\|_{\mathscr{H}_2} \geqslant \frac{|\langle f',\ L_1e'\rangle|}{\langle f',\ L_2f'\rangle^{1/2}}, \quad e',\ f' \in E';$$

выбирая $f' = e'$, получаем

$$\langle e',\ L_1e'\rangle^{1/2} \geqslant \frac{\langle e',\ L_1e'\rangle}{\langle e',\ L_2e'\rangle^{1/2}},$$

или

$$(e',\ L_2e')^{1/2} \geqslant \langle e',\ L_1e'\rangle^{1/2},$$

или

$$\langle e',\ (L_2 - L_1)\, e'\rangle \geqslant 0,$$

или

$$L_1 \leqslant L_2.$$

Обратно, предположим, что $L_1 \leqslant L_2$. Тогда для любого элемента $h \in E$ имеем

$$\frac{|\langle e',\ h\rangle|}{\langle e',\ L_1e'\rangle^{1/2}} \geqslant \frac{|\langle e',\ h\rangle|}{\langle e',\ L_2e'\rangle^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$, и если $h \in \mathscr{H}_1$, то

$$\|h\|_{\mathscr{H}_1} \geqslant \|h\|_{\mathscr{H}_2}.$$

(б) Утверждение следует непосредственно из выбора нормы в $\lambda\mathscr{H}$:

$$\|h\|_{\lambda\mathscr{H}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sup \frac{|\langle e',\ h\rangle|}{\langle e',\ Le'\rangle^{1/2}} = \sup \frac{|\langle e',\ h\rangle|}{\langle e',\ \lambda Le'\rangle^{1/2}}.$$

(в) Прежде всего следует оговорить, чтó мы понимаем под гильбертовым пространством $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$. *Множество* $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ состоит из всех элементов h из E, которые можно записать в виде $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathscr{H}_1$ и $h_2 \in \mathscr{H}_2$. Если $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$, то норму в $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ можно определить формулой

$$\|h\|^2_{\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2} = \|h_1\|^2_{\mathscr{H}_1} = \|h_2\|^2_{\mathscr{H}_2},$$

где $h = h_1 + h_2$ — единственное представление h в требуемом виде. Если, однако, $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 \neq \{0\}$, то любой элемент $h \in \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ имеет бесконечное число представлений, поскольку нулевой элемент бесконечным числом способов можно представить в виде $a - a$, где

$$a \in \mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2.$$

Поэтому мы определяем норму равенством

$$\|h\|^2_{\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2} = \inf\left(\|h_1\|^2_{\mathscr{H}_1} + \|h_2\|^2_{\mathscr{H}_2}\right),$$

где нижняя грань берется по всем возможным представлениям

$$h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in \mathscr{H}_1, \quad h_2 \in \mathscr{H}_2.$$

Нужно показать, что это выражение действительно задает *норму*, т. е. что ее можно определить скалярным произведением в $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$, причем $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ полно и топология пространства $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ сильнее, чем топология пространства E. Так как это довольно утомительная процедура, мы построим гильбертово пространство $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ другим способом.

Пусть $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ обозначает абстрактную (прямую) гильбертову сумму пространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Элементом $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ является пара (h_1, h_2), где $h_1 \in \mathscr{H}_1$ и $h_2 \in \mathscr{H}_2$. Сложение и умножение на скаляр определяются соотношениями

$$(h_1, h_2) + (k_1, k_2) = (h_1 + k_1, h_2 + k_2),$$
$$\lambda(h_1, h_2) = (\lambda h_1, \lambda h_2);$$

скалярное произведение в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ определяется соотношением

$$((h_1, h_2) \mid (k_1, k_2))_{\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2} = (h_1 \mid k_1)_{\mathscr{H}_1} + (h_2 \mid k_2)_{\mathscr{H}_2}.$$

Заметим, что $\mathscr{H}_1 \approx \mathscr{H}_1 \oplus \{0\}$ и $\mathscr{H}_2 \approx \{0\} \oplus \mathscr{H}_2$. Отобразим абстрактное гильбертово пространство $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ в пространство E:

$$(h_1, h_2) \to h_1 + h_2 \in E.$$

Пусть $\eta = \{(h_1, h_2) \colon h_1 + h_2 = \{0\}\}$ — нулевое пространство этого отображения. Очевидно, что η замкнуто в прямой сумме $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Следовательно, факторпространство $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2/\eta$ стандартным образом превращается в гильбертово пространство, которое отождествляется с ортогональным дополнением к η в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$.

Рассмотрим теперь отображения

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \overbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2/\eta} & \end{array}$$

Отображение $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2/\eta \to E$ является вложением, образ которого — пространство $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Мы можем перенести структуру гильбертова пространства из $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2/\eta$ на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$; сразу же видно, что факторнорма на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2/\eta$ — это норма, определенная выше в $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ с помощью нижней грани. Этим построением доказано, что пространство $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ является гильбертовым пространством, содержащимся в E, топология которого сильнее, чем топология пространства E.

Нам нужно еще показать, что $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ соответствует антиядру $L_1 + L_2$. Пусть $L = L_1 + L_2$ и пусть $\mathcal{K}$ — гильбертово пространство, соответствующее антиядру L. Мы должны показать, что

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2.$$

Так как $L \geqslant L_1$ и $L \geqslant L_2$, отсюда следует, что $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}_2$, а значит, и $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Кроме того,

$$\mathcal{K}_0 = \{Le' \colon e' \in E'\}$$

содержится в $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, так как $Le' = L_1 e' + L_2 e'$. Таким образом, получаем

$$\mathcal{K} \supset \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{K}_0,$$

где $\mathcal{K}_0$ — плотное подмножество множества $\mathcal{K}$.

Так как и $\mathcal{K}$, и $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ — полные гильбертовы пространства, достаточно показать, что норма в $\mathcal{K}_0$ равна норме в $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Пусть $h = Le' = L_1 e' + L_2 e' = h_1 + h_2$, где $h_1 = L_1 e' \in \mathcal{H}_1$ и $h_2 = L_2 e' \in \mathcal{H}_2$. Имеем

$$\langle e', Le' \rangle = \langle e', L_1 e' \rangle + \langle e', L_2 e' \rangle$$

или

$$\|h\|^2_{\mathcal{K}_0} = \|h_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|h_2\|^2_{\mathcal{H}_2} \geqslant \|h\|^2_{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2}.$$

Для того чтобы показать, что в этой формуле имеет место равенство, достаточно показать, что элемент (h_1, h_2)

прямой суммы $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ ортогонален нулевому пространству η, потому что в этом случае при переходе от $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ к $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ норма не уменьшается. Если $(n_1, n_2) \in \eta$, то имеем

$$\begin{aligned}&(h_1 \mid n_1)_{\mathscr{H}_1} + (h_2 \mid n_2)_{\mathscr{H}_2} = \\ &= (L_1 e' \mid n_1)_{\mathscr{H}_1} + (L_2 e' \mid n_2)_{\mathscr{H}_2} = \\ &= \overline{\langle e', n_1 \rangle} + \overline{\langle e', n_2 \rangle} = \\ &= \overline{\langle e', n_1 + n_2 \rangle} = \overline{\langle e', 0 \rangle} = 0.\end{aligned}$$

Замечание. Если $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}$, то существует единственное гильбертово пространство $\mathscr{H}_2$, такое, что $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}$. Это следует из того, что $L_2 = L - L_1$ является положительным антиядром.

Определение. Антиядра L_1 и L_2 называются *дизъюнктными*, если единственное антиядро, которое не больше каждого из антиядер L_1 и L_2, есть нуль, т. е. из $L \leqslant L_1$ и $L \leqslant L_2$ следует, что $L = 0$.

Аналогично, гильбертовы пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ называются *дизъюнктными*, если из неравенств

$$\mathscr{H} \leqslant \mathscr{H}_1 \quad \text{и} \quad \mathscr{H} \leqslant \mathscr{H}_2$$

следует, что $\mathscr{H} = \{0\}$.

Теорема. *$\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ дизъюнктны* (в смысле данного выше определения).

Доказательство. Если $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$, то отсюда немедленно следует, что $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ дизъюнктны. Обратно, если $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ дизъюнктны, то $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$. В самом деле, предположим противное, т. е. что

$$\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \mathscr{K}.$$

Пусть норма в $\mathscr{K}$ задается формулой

$$\|h\|^2_{\mathscr{K}} = \|h\|^2_{\mathscr{H}_1} + \|h\|^2_{\mathscr{H}_2}.$$

Эта норма больше, чем норма в каждом из пространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Используя это, легко показать, что $\mathscr{K}$ — полное гильбертово пространство, топология которого сильнее, чем топология пространства E, и что $\mathscr{K} \leqslant \mathscr{H}_1$, $\mathscr{K} \leqslant \mathscr{H}_2$. Поэтому $\mathscr{K} = \{0\}$.

Следствие. *$\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$ тогда и только тогда, когда соответствующие антиядра L_1 и L_2 дизъюнктны.*

Данное выше определение дизъюнктности можно распространить на случай более чем двух антиядер или гильбертовых пространств, причем будут справедливы результаты, аналогичные доказанным выше.

В дополнение к уже введенной структуре в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$ можно определить топологии в этих пространствах. Топология в $\mathfrak{H}$ довольно неинтересна. Однако мы определим два типа сходимости в $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$.

Определение. Сходимость последовательности антиядер

$$\{L_n\} \subset \overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$$

к некоторому антиядру L называется

(а) *поточечной сходимостью*, если $L_n e' \to L e'$ для всех $e' \in E'$;

(б) *ограниченной сходимостью*, если $L_n e' \to L e'$ для всех $e' \in E'$, и эта сходимость равномерна на ограниченных подмножествах пространства E'.

Следует заметить, что $\overline{\mathscr{L}}_+(E', E)$ является замкнутым подмножеством множества $\overline{\mathscr{L}}(E', E)$ относительно обеих определенных выше сходимостей.

Далее, это множество является выпуклым конусом. В самом деле, это конус с вершиной в начале координат, так как tL — положительное антиядро, если $t \geqslant 0$ и L положительно; этот конус — выпуклый, так как при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в предположении, что антиядра L_1 и L_2 положительны, $tL_1 + (1-t)L_2$ представляет собой положительное антиядро. Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathfrak{H}$ и замкнутым выпуклым конусом в топологическом векторном пространстве. Этот конус не содержит векторных подпространств, кроме нулевого.*

Последнее утверждение этой теоремы выражает тот факт, что отношение $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}_2$ действительно является отношением порядка, а не только частичной упорядоченности.

Перейдем теперь к следующему вопросу. Если дана система $\{e_i\}$ элементов пространства E, то каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы эта система была полной ортонормированной системой некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$?

Отметим сначала, что элемент $e \in E$ определяет следующие отображения:

(а) линейный функционал на E':

$$f' \to \langle f', e \rangle, \quad f' \in E';$$

(б) антилинейный функционал на E':

$$f' \to \overline{\langle f', e \rangle}, \quad f' \in E';$$

(в) эрмитову форму на $E' \times E'$:

$$(f', g') \to \langle f', e \rangle \overline{\langle g', e \rangle};$$

(г) отображение E' в E, обозначаемое через $e\bar{e}$:

$$f' \xrightarrow{e\bar{e}} \overline{\langle f', e \rangle} e.$$

Легко показать, что $e\bar{e}$ является положительным антиядром. Соответствующим гильбертовым пространством является $\mathscr{H} = \{\lambda e: \lambda \in \mathbf{C}\}$ с нормой $\|\lambda e\| = |\lambda|$ и скалярным произведением $(\lambda e | \mu e) = \lambda\bar{\mu}$.

Теорема. *Для того чтобы данное множество $\{e_i\}_{i \in I}$ элементов пространства E было гильбертовым базисом, т. е. полной ортонормированной системой гильбертова пространства $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы*

(1) *ряд антиядер $\sum_{i \in I} e_i\bar{e}_i$ был поточечно сходящимся или чтобы конечные частичные суммы этого ряда были поточечно ограниченными,*

(2) *множество $\{e_i\}_{i \in I}$ было линейно независимо в гильбертовом смысле, т. е. если $\{c_i\}_{i \in I}$ — любое*

множество комплексных чисел, таких, что $\sum_{i \in I} |c_i|^2 < \infty$, *и если* $\sum_i c_i e_i = 0$, то $c_i = 0$ *для всех* $i \in I$.

Доказательство. Допустим, что $\{e_i\}_{i \in I}$ — гильбертов базис в $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$ и L — соответствующее антиядро. Тогда для любого $f' \in E'$ имеем

$$\sum_{i \in I} e_i \bar{e}_i f' = \sum_{i \in I} e_i \langle \overline{f', e_i} \rangle = \sum_{i \in I} e_i (Lf' \mid e_i)_{\mathscr{H}} = Lf',$$

так что $\sum_{i \in I} e_i \bar{e}_i$ сходится в смысле поточечной сходимости.

Далее, так как $\{e_i\}_{i \in I}$ — гильбертов базис, то отсюда немедленно следует, что он линейно независим в гильбертовом смысле.

Обратно, допуская, что выполняются условия (1) и (2), покажем, что $\{e_i\}_{i \in I}$ — гильбертов базис некоторого $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$. Прежде всего заметим, что условие (1) означает, что для любого $f' \in E'$ частичные суммы ряда $\sum_{i \in I} \langle \overline{e_i, f'} \rangle e_i$ сильно ограничены в E, и для любых f' и g' из E' частичные суммы ряда $\sum_{i \in I} \langle \overline{e_i, f'} \rangle \langle e_i, g' \rangle$ ограничены.

Полагая $f' = g'$ и используя элементарные свойства рядов с неотрицательными членами, заключаем, что

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i, f' \rangle|^2 < \infty, \quad f' \in E'.$$

Попытаемся теперь построить гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Рассмотрим гильбертово пространство l^2, элементами которого являются наборы $\{x_i\}_{i \in I}$ комплексных чисел, таких, что $\sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty$, и пусть l_0^2 обозначает подмножество пространства l^2, элементы которого имеют лишь конечное число координат, отличных от нуля. Существует естественное отображение из l_0^2 в E, определяемое формулой

$$\{x_i\}_{i \in I} \to \sum_{i \in I} x_i e_i.$$

Для того чтобы показать, что это отображение непрерывно, достаточно показать, что образ единичной сферы ограничен или, по теореме Макки, что он слабо ограничен. Это следует из неравенства Шварца. Пусть $\{x_i\}_{i\in I}\in l_0^2$ и $\sum_{i\in I}|x_i|^2\leqslant 1$. Тогда для любого $f'\in E'$ имеем

$$\left|\left\langle \sum_{i\in I} x_i e_i,\ f'\right\rangle\right| = \left|\sum_i x_i \langle e_i,\ f'\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_i |\langle e_i f'\rangle|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_i |\langle e_i,\ f'\rangle|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Расширим теперь описанное выше отображение на пополнение l_0^2, которое можно отождествить с l^2

$$l^2 \to E$$

при помощи формулы

$$\{x_i\}_{i\in I} \to \sum_{i\in I} x_i \bar{e}_i.$$

Используя предположение (2) о линейной независимости в гильбертовом смысле, можно показать, что это отображение является вложением. Пусть $\mathscr{H}$ — образ этого вложения со структурой, перенесенной из l^2. Множество $\{e_i\}_{i\in I}$ является образом канонического базиса из l^2 и, следовательно, гильбертовым базисом для $\mathscr{H}$.

Следствие. Если L — положительное антиядро, то L можно бесконечным числом способов представить в виде

$$L = \sum_i e_i \bar{e}_i.$$

§ 3. Скалярные частицы

Вернемся теперь к изучению скалярных частиц в мире V. Напомним, что мир является многообразием класса C^∞ размерности n и что скалярная частица представляет собой гильбертово пространство $\mathscr{H}$, непрерывно вложенное в пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'(V)$, определенных на мире V. Локально выпуклое топологическое векторное пространство $\mathscr{D}'(V)$ дуально пространству $\mathscr{D}(V)$ бесконечно дифференцируемых функций на V с компактными носителями. Элемент T пространства $\mathscr{D}'(V)$ является обобщенной функцией, значение которой на элементе φ пространства $\mathscr{D}(V)$ обозначается через $\langle T, \varphi\rangle$; $\mathscr{D}(V)$ — рефлексивное пространство [это означает, что дуальное пространство к пространству $\mathscr{D}'(V)$ совпадает с пространством $\mathscr{D}(V)$]. Пространства $\mathscr{D}(V)$ и $\mathscr{D}'(V)$ имеют сильную дуальную топологию по отношению друг к другу. Применим теперь результаты последних двух параграфов к случаю, когда $E=\mathscr{D}'(V)$ и $E'=\mathscr{D}(V)$.

Для того чтобы определить в $\mathscr{D}'(V)$ гильбертово пространство, мы должны найти антиядро L: $\mathscr{D}(V)\to\mathscr{D}'(V)$. Мы начнем с отыскания непрерывных линейных отображений из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(W)$, где V и W — два многообразия класса C^{∞} (например, два евклидовых пространства). Пусть y — общая точка многообразия V, а x — общая точка многообразия W. Для удобства можно обозначить $\mathscr{D}(V)$ через $\mathscr{D}_y$, а $\mathscr{D}'(W)$ через $\mathscr{D}'_x$. Пусть $\mathscr{D}'(W\times V)$ или $\mathscr{D}'_{x,y}$ обозначает пространство обобщенных функций на произведении $W\times V$ (обобщенные функции двух переменных).

Теорема о ядрах. *Топологическое векторное пространство $\mathscr{L}_b(\mathscr{D}(V);\mathscr{D}'(W))$ непрерывных линейных отображений из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(W)$ с топологией ограниченной сходимости канонически изоморфно топологическому векторному пространству $\mathscr{D}'(W\times V)$.*

Доказательство. Пусть K — данный элемент пространства $\mathscr{D}'(W\times V)$. Он определяет непрерывное линейное отображение $v\to Kv$ из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(W)$ по формуле

$$\langle Kv,\ w\rangle=\langle K,\ w\otimes v\rangle,\quad w\in\mathscr{D}(W), \tag{1}$$

где $w\otimes v=w(x)\,v(y)$. Прежде всего мы должны убедиться в том, что $Kv\in\mathscr{D}'(W)$. Очевидно, что Kv — линейный функционал от w. Если $w\to 0$ в $\mathscr{D}(W)$, то $w\otimes v\to 0$ в $\mathscr{D}(W\times V)$, и так как $K\in\mathscr{D}'(W\times V)$, то

$$\langle Kv,\ w\rangle=\langle K,\ w\otimes v\rangle\to 0.$$

Нужно также показать, что $v\to Kv$—непрерывное линейное отображение. Линейность этого отображения очевидна. Если $v\to 0$ в $\mathscr{D}(V)$, то, как легко видеть, $\langle Kv,\ w\rangle\to 0$ для любой функции $w\in\mathscr{D}(W)$, и эта сходимость равномерна, когда w остается ограниченной в $\mathscr{D}(W)$.

Для большей ясности перепишем этот результат, используя обозначения $\mathscr{D}_y$, $\mathscr{D}'_x$, $\mathscr{D}'_{x,y}$, и приведем пример из теории интегральных уравнений, откуда эти обозначения заимствованы. Пусть $K_{x,\,y} \in \mathscr{D}'_{x,\,y}$ — данная обобщенная функция двух переменных x и y. Она определяет непрерывное линейное отображение из $\mathscr{D}_y$ в $\mathscr{D}'_x$:

$$v(y) \to K_{x,\,y} v(y) = (Kv)(x), \qquad v(y) \in \mathscr{D}_y,$$

где $(Kv)(x) \in \mathscr{D}'_x$ определяется формулой

$$\langle (Kv)(x),\ w(x)\rangle = \langle K_{x,\,y},\ w(x)\,v(y)\rangle, \qquad w(x) \in \mathscr{D}_x.$$

Пример. Пусть V_y и W_x — два евклидовых пространства, снабженных мерой Лебега, и пусть $K(x,\ y)$ — локально интегрируемая функция, определенная на произведении $W \times V$. Тогда $K(x,\ y) \in \mathscr{D}'_{x,\,y}$ — обобщенная функция двух переменных x и y. Пусть

$$\langle T,\ \varphi\rangle = \int T\varphi$$

— значение обобщенной функции T на основной функции φ.

Обобщенная функция $K(x,\ y)$ определяет непрерывное линейное отображение из $\mathscr{D}_y$ в $\mathscr{D}'_x$:

$$K : v(y) \to (Kv)(x), \qquad v \in \mathscr{D}_y,$$

где $(Kv)(x) \in \mathscr{D}'_x$ определяется в соответствии с нашей формулой следующим равенством:

$$\begin{aligned}\langle K,\ w \otimes v\rangle &= \int\int K(x,\ y)\,w(x)\,v(y)\,dx\,dy = \\ &= \int\left[\int K(x,\ y)\,v(y)\,dy\right] w(x)\,dx = \\ &= \langle Kv,\ w\rangle,\end{aligned}$$

в котором мы использовали теорему Фубини. Таким образом,

$$(K \cdot v)(x) = \int K(x,\ y)\,v(y)\,dy.$$

Вторая часть теоремы о ядрах утверждает, что любое непрерывное линейное отображение из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(W)$ однозначно определяет обобщенную функцию, заданную на произведении $W \times V$. Доказательство этого утверждения значительно более сложно и будет опущено. Вместо этого мы обратимся к доказательству эквивалентности топологий изоморфных пространств $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_x)$ и $\mathcal{D}'_{x, y}$. В этих двух пространствах существует естественная топология. Рассмотрим сначала в пространстве $\mathcal{D}'_{x, y}$ сильную топологию (равномерную сходимость на ограниченных подмножествах $\mathcal{D}_{x, y}$). В пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_x)$ мы имеем ограниченную сходимость и поточечную сходимость. Пусть $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_x)$—топологическое векторное пространство, полученное из векторного пространства $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_x)$ при введении топологии ограниченной сходимости. В топологическом векторном пространстве $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_x)$ последовательность непрерывных линейных отображений из $\mathcal{D}_y$ в $\mathcal{D}'_x$ сходится к нулю в смысле ограниченной сходимости, если последовательность образов любого элемента из $\mathcal{D}_y$ сходится к нулю в $\mathcal{D}'_x$ и эта сходимость равномерна на ограниченных подмножествах пространства $\mathcal{D}_y$. Мы докажем только, что сходимость в $\mathcal{D}'_{x, y}$, влечет за собой сходимость в $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_y, \mathcal{D}'_x)$. Пусть $\{K_j\}$ — последовательность в $\mathcal{D}'_{x, y}$, такая, что $K_j \to 0$ сильно, т. е. $\langle K_j, \varphi(x, y)\rangle \to 0$ для любой функции $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}_{x, y}$, и эта сходимость равномерна на ограниченных подмножествах пространства $\mathcal{D}_{x, y}$. Нужно показать, что при фиксированном $v(y) \in \mathcal{D}_y$ имеем $\langle K_j v, w\rangle \to 0$ для любого $w(x) \in \mathcal{D}_x$ и что эта сходимость равномерна, когда $w(x)$ пробегает ограниченные подмножества из $\mathcal{D}_x$. По определению

$$\langle K_j v, w\rangle = \langle K_j(x, y), w(x) v(y)\rangle \to 0,$$

причем сходимость равномерна, когда $w(x)$ остается ограниченным, так как в этом случае остается ограниченным $w(x) v(y)$. Доказательство обратного утверждения мы вновь опускаем.

Замечание. Из теоремы Банаха — Штейнгауза следует, что любая слабо сходящаяся последовательность в $\mathcal{D}'$ сходится сильно.

Теперь, когда мы установили, что пространство $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}(V); \mathcal{D}'(V))$ непрерывных линейных отображений из $\mathcal{D}(V)$ в $\mathcal{D}'(V)$ совпадает с пространством $\mathcal{D}'(V \times V)$ обобщенных функций двух переменных, легко получить пространство $\overline{\mathscr{L}}_+(\mathscr{D}(V);\ \mathscr{D}'(V))$ положительных антиядер из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(V)$ и пространство $\mathfrak{H}$ гильбертовых пространств $\mathscr{H}$ с непрерывным вложением в $\mathscr{D}'(V)$. Обобщенная функция двух переменных $K_{x,\,y} \in \mathscr{D}'(V \times V)$ определяет непрерывное линейное отображение из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(V)$:

$$v \to Kv.$$

Поскольку мы хотим получить антилинейное отображение, мы должны вместо этого взять отображение

$$v \to K\bar{v},$$

где $\bar{v}$ — комплексно сопряженная функция скалярной функции $v \in \mathscr{D}(V)$. Положительность этого антиядра естественно определить следующим образом.

Определение. Антиядро $v \to K\bar{v}$, определенное обобщенной функцией $K_{x,\,y} \in \mathscr{D}'(V \times V)$, называется *положительным*, если

$$\langle K_{x,\,y},\ \varphi(x) \otimes \overline{\varphi(x)} \rangle \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$.

Согласно нашей основной теореме, соотношение между положительным E-антиядром L и соответствующим гильбертовым пространством $\mathscr{H}$ зиписывается в виде

$$\langle h,\ e' \rangle = (h \mid Le')_{\mathscr{H}}$$

для любого элемента $h \in \mathscr{H}$ и любого $e' \in E$. В нашем случае связь между положительным антиядром K из $\mathscr{D}(V)$ в $\mathscr{D}'(V)$ и соответствующим гильбертовым пространством $\mathscr{H}$ имеет вид

$$\langle T,\ \varphi \rangle = (T \mid K\bar{\varphi})_{\mathscr{H}} \tag{2}$$

для любой обобщенной функции $T \in \mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V)$ и любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Если мы положим в предыдущей формуле $T = K\bar{\psi}$, то получим

$$\langle K\bar{\psi},\ \varphi \rangle = \langle K,\ \varphi \otimes \bar{\psi} \rangle = (K\bar{\psi} \mid K\bar{\varphi})_{\mathscr{H}} \tag{3}$$

для любых φ и ψ, принадлежащих пространству $\mathscr{D}(V)$.

Замечание. Не совершая ошибки, можно поставить черту над T в формуле (2). Пространство $\mathscr{H}$ *не инвариантно* относительно комплексного сопряжения. Пространство $\overline{\mathscr{H}} = \{T\colon \overline{T} \in \mathscr{H}\}$ представляет ту же самую частицу, что и $\mathscr{H}$, но с противоположным зарядом.

Определение положительности антиядра, заданного с помощью $K_{x,y}$, берется из теории интегральных уравнений. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на произведении $V \times V$. Ядро $K(x, y)$ называется положительным, если для любого множества элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ в l-мерном пространстве V и любого множества комплексных чисел $\{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i, j=1}^{l} K(x_i, x_j) z_i \overline{z}_j \geqslant 0.$$

Можно показать, что определение положительности антиядра, заданного при помощи $K_{x,y} \in \mathscr{D}'(V \times V)$, совпадает с приведенным выше определением в случае, когда $K_{x,y}$ — непрерывная функция $K(x, y)$ двух переменных x и y.

Мы объединим окончательные результаты этого параграфа в следующей теореме.

Теорема. *Пусть V — многообразие класса C^∞. Пространство $\mathfrak{H}$ гильбертовых пространств $\mathscr{H}$ с непрерывным вложением в $\mathscr{D}'(V)$ канонически изоморфно подпространству пространства $\mathscr{D}'(V \times V)$, состоящему из таких обобщенных функций $K_{x,y}$ двух переменных, что*

$$\langle K, \varphi \otimes \overline{\varphi} \rangle \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Связь такого антиядра K с соответствующим пространством $\mathscr{H}$ дается формулой

$$\langle T, \varphi \rangle = (T \mid K\overline{\varphi})_{\mathscr{H}}, \qquad T \in \mathscr{H}, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(V),$$

где обобщенная функция $K\overline{\varphi} \in \mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V)$ определяется выражением

$$\langle K\overline{\varphi}, \psi \rangle = \langle K, \psi \otimes \overline{\varphi} \rangle, \qquad \psi \in \mathscr{D}(V).$$

§ 4. Тензорные произведения

Чтобы обобщить результаты предыдущего параграфа на векторные частицы, нужно ввести понятие тензорного произведения. Мы приведем только основное определение и основные свойства без доказательств.

Пусть E и F — два векторных пространства. Для наших целей нет необходимости давать полное определение тензорного произведения. Тензорным произведением пространств E и F мы назовем новое векторное пространство $E \otimes F$ с заданным каноническим билинейным отображением из $E \times F$ в $E \otimes F$:

$$\vec{e} \times \vec{f} \to \vec{e} \otimes \vec{f}.$$

Отметим, что $E \otimes F$ *не является* образом декартова произведения $E \times F$ при этом отображении. Однако $E \otimes F$ порождается элементами вида $\vec{e} \otimes \vec{f}$, т. е. любой элемент $\vec{x}$ из $E \otimes F$ можно записать следующим образом:

$$\vec{x} = \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{f}_2 + \ldots + \vec{e}_k \otimes \vec{f}_k.$$

Сформулируем теперь некоторые свойства.

Если E и F имеют конечные размерности соответственно m и n, то размерность пространства $E \otimes F$ равна mn.

Если $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_j\}$ являются базисами соответственно пространств E и F, то $\{\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j\}$ есть базис пространства $E \otimes F$, т. е. любой элемент $\vec{x}$ из $E \otimes F$ может быть единственным образом записан в виде

$$\vec{x} = \sum_{i,j} x_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j.$$

Если F — конечномерное пространство с базисом $\{f_i\}$, то каждый элемент $\vec{x} \in E \otimes F$ можно единственным образом записать в виде

$$\vec{x} = \sum_j \vec{\xi}_j \otimes \vec{f}_j, \quad \vec{\xi}_j \in E.$$

Если G — любое векторное пространство над полем скаляров $\mathbf{C}$, то $G \approx G \otimes \mathbf{C}$. В этом случае изоморфизмом является отображение $g \to g \otimes 1$, так как $\{1\}$ — базис векторного пространства $\mathbf{C}$ над $\mathbf{C}$.

Допустим теперь, что E и F — топологические векторные пространства. Мы хотим определить топологию в $E \otimes F$. Вообще говоря, в $E \otimes F$ имеется несколько различных топологий. Однако если F — конечномерно, то существует единственная топология, определенная в $E \otimes F$ — *топология покоординатной сходимости*: пусть $\{\vec{f}_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, — базис пространства F. Любой элемент $\vec{x} \in E \otimes F$ может быть записан в виде

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\xi}_j \otimes \vec{f}_j, \quad \vec{\xi}_j \in E.$$

Последовательность $\{\vec{x}_k\}$ сходится в $E \otimes F$ к нулю,

$$x_k \xrightarrow[k]{} 0,$$

если $\vec{\xi}_j^{\,k} \xrightarrow[k]{} 0$ для всех j. Эта топология не зависит от базиса в F. Все „хорошие" свойства пространства E сохраняются также и в $E \otimes F$. Если E локально выпукло, рефлексивно или полно, то $E \otimes F$ соответственно локально выпукло, рефлексивно или полно.

Пусть G — данное векторное пространство. Если β: $E \times F \to G$ — заданное билинейное отображение, то существует единственное линейное отображение u: $E \otimes F \to G$, такое, что

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = u(\vec{x} \otimes \vec{y})$$

для любых $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$. Наоборот, если u: $E \otimes F \to G$ — данное линейное отображение, то существует единственное билинейное отображение β: $E \times F \to G$, такое, что справедливо указанное выше соотношение:

$$\begin{array}{ccc} & \underbrace{E \times F} & \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ E \otimes F & \xrightarrow[u]{} & G \end{array}$$

Если задано u, то β определяется приведенной выше формулой. Если задано β, то указанная формула определяет u

на элементах вида $\vec{x} \otimes \vec{y}$, а так как любой элемент пространства $E \otimes F$ можно представить в виде конечной линейной комбинации элементов такого вида, то тем самым u определяется на $E \otimes F$. Этот важный результат показывает, что основное назначение тензорного произведения состоит в линеаризации билинейных отображений: любое билинейное отображение β: $E \times F \to G$ может быть заменено линейным отображением $u : E \otimes F \to G$. Если E и F — топологические векторные пространства, и пространство F конечномерно, то отображение u непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно β.

Предположим, что E и F — топологические векторные пространства, причем F конечномерно. Тогда имеем

$$(E \otimes F)' \approx E' \otimes F',$$

т. е. пространство, дуальное к $E \otimes F$, канонически изоморфно и топологически эквивалентно тензорному произведению пространств, дуальных к E и F.

Топология понимается здесь в смысле сильной дуальной топологии. Любой элемент $\vec{z} \in E \otimes F$ можно записать в виде

$$\vec{z} = \sum_i c_i \vec{e}_i \otimes \vec{f}_i,$$

а любой элемент $\overleftarrow{z'} \in (E \otimes F)'$ — в виде

$$\overleftarrow{z'} = \sum_j d'_j \overleftarrow{e'_j} \otimes \overleftarrow{f'_j}.$$

Дуальное произведение $\langle \vec{z}, \overleftarrow{z'} \rangle$ задается формулой

$$\langle \vec{z}, \overleftarrow{z'} \rangle = \sum_{i, j} c_i d'_j \langle \vec{e}_i, \overleftarrow{e'_j} \rangle \langle \vec{f}_i, \overleftarrow{f'_j} \rangle.$$

Если $\{\vec{e}_\alpha\}$ и $\{\vec{f}_\beta\}$ — базисы пространств соответственно E и F, а $\{\overleftarrow{e'_\alpha}\}$, $\{\overleftarrow{f'_\beta}\}$ — соответствующие дуальные базисы, то

$$\vec{z} = \sum c_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{f}_\beta,$$

$$\overleftarrow{z'} = \sum c'_{\alpha\beta} \overleftarrow{e'_\alpha} \otimes \overleftarrow{f'_\beta}$$

и

$$\langle \vec{z}, \overleftarrow{z'} \rangle = \sum c_{\alpha\beta} c'_{\alpha\beta}.$$

Здесь использовано соотношение Кронекера $\langle \vec{e}_i, \overleftarrow{e'_j} \rangle = \delta_{ij}$.

Предположим, что E и F — топологические векторные пространства и что пространство F конечномерно. Тогда

$$\mathscr{L}_b(E;\ F) \approx E' \otimes F,$$

где $\mathscr{L}_b(E;\ F)$ — пространство всех непрерывных линейных отображений из E в F с топологией ограниченной сходимости. В частности,

$$\mathscr{L}(E;\ \mathbf{C}) \approx E' \otimes \mathbf{C} \approx E'.$$

Любой элемент $\overleftarrow{e'} \otimes \vec{f}$ определяет непрерывно линейное отображение из E в F:

$$\vec{x} \to \langle \vec{x}, \overleftarrow{e'} \rangle \vec{f}, \qquad \vec{x} \in E.$$

Если $z = \sum c_i \overleftarrow{e'_i} \otimes \vec{f}_i$ — элемент из $E' \otimes F$, то он определяет отображение

$$\vec{x} \to \sum c_i \langle \vec{x}, \overleftarrow{e'_i} \rangle \vec{f}_i.$$

Подобным же образом можно определить тензорные произведения более чем двух векторных пространств, обладающие теми же самыми свойствами. Для того чтобы ввести топологию в $E \otimes F \otimes G$, нужно предположить, что два из этих трех пространств конечномерны. Далее,

$$E \otimes F \otimes G \approx E \otimes (F \otimes G) \approx (E \otimes F) \otimes G.$$

Если E и H конечномерны, то

$$\mathscr{L}(E \otimes F;\ G \otimes H) \approx \mathscr{L}(E;\ G) \otimes F' \otimes H;$$

если, кроме того, G также конечномерно, то

$$\mathscr{L}(E \otimes F;\ G \otimes H) \approx E' \otimes G \otimes F' \otimes H \approx E' \otimes F' \otimes G \otimes H.$$

§ 5. Векторные частицы

Пусть $\vec{F}$ — конечномерное векторное пространство. В этом параграфе мы попытаемся найти все $\vec{F}$-векторные частицы, т. е. все гильбертовы пространства $\mathscr{H}$, непрерывно вложенные в пространство $\mathscr{D}'(V; \vec{F})$ $\vec{F}$-векторных обобщенных функций, определенных в мире V. Мы будем следовать тому же плану, что и в случае скалярных частиц, используя результаты предыдущего параграфа о тензорном произведении.

Локально выпуклое топологическое векторное пространство E определяется в данном случае так:

$$E = \mathscr{D}'(V; \vec{F}) = \mathscr{L}_b(\mathscr{D}(V); \vec{F}) \approx \mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}.$$

Любой элемент пространства E имеет вид $\sum c_i T_i \vec{f}_i$, где $T_i \in \mathscr{D}'(V)$ — скалярные обобщенные функции и $\vec{f}_i \in \vec{F}$. Значение этой обобщенной функции на элементе $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ равно

$$\sum c_i \langle T_i, \varphi \rangle \vec{f}_i \in \vec{F}.$$

В соответствии со свойствами тензорного произведения, дуальное к E пространство E' определяется выражением

$$E' = \mathscr{D}(V) \otimes \overleftarrow{F}' \approx \mathscr{D}(V; \overleftarrow{F}'),$$

т. е. E' — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на V, принимающих значения в дуальном к $\vec{F}$ пространстве $\overleftarrow{F}'$. Пусть $\{\vec{f}_i\}$ — базис пространства $\vec{F}$, а $\{\overleftarrow{f}'_i\}$ — соответствующий дуальный базис пространства $\overleftarrow{F}'$. Элемент $\overleftarrow{\varphi}$ пространства E' имеет вид

$$\overleftarrow{\varphi} = \sum \varphi_i \overleftarrow{f}'_i,$$

где $\varphi_i \in \mathscr{D}(V)$ — скалярные основные функции, а элемент $\vec{T}$ пространства E имеет вид

$$\vec{T} = \sum T_j \vec{f}_j,$$

где $T_j \in \mathscr{D}'(V)$ — скалярные обобщенные функции. Значение обобщенной функции $\vec{T}$ на основной функции $\overleftarrow{\varphi}$ равно

$$\langle \vec{T}, \overleftarrow{\varphi} \rangle = \sum \langle T_i, \varphi_i \rangle.$$

Здесь мы использовали соотношение Кронекера $\langle \vec{f}_i, \overleftarrow{f}'_j \rangle = \delta_{ij}$.

Для того чтобы определить пространство $\mathfrak{H}$ гильбертовых пространств $\mathscr{H}$ с непрерывным вложением в E', мы должны найти канонически изоморфное пространство $\overline{\mathscr{L}}_+(E'; E)$ положительных антиядер из E' в E. Прежде всего найдем пространство $\mathscr{L}_b(E'; E)$ непрерывных линейных отображений из E' в E. Используя теорему о ядрах и свойства тензорного произведения, получаем

$$\mathscr{L}_b(E'; E) \approx \mathscr{L}_b(\mathscr{D} \otimes F'; \mathscr{D}' \otimes F) \approx$$
$$\approx \mathscr{L}_b(\mathscr{D}; \mathscr{D}') \otimes F \otimes F \approx \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes F.$$

Элемент $\vec{\vec{K}}$ пространства $\mathscr{L}_b(E'; E)$ выражается через элементы базиса $\{\vec{f}_i\}$ пространства F при помощи равенства

$$\vec{\vec{K}} = \sum K_{ij} \vec{f}_i \otimes \vec{f}_j,$$

где (K_{ij}) — квадратная матрица скалярных обобщенных функций двух переменных. Значением $\vec{\vec{K}}$ на элементе $\overleftarrow{\varphi} = \sum \varphi_i \overleftarrow{f}'_i$ пространства $E' = \mathscr{D} \otimes F'$ является элемент $\vec{\vec{K}} \cdot \overleftarrow{\varphi}$ пространства $E = \mathscr{D}' \otimes F$, определяемый равенством

$$\vec{\vec{K}} \cdot \overleftarrow{\varphi} = \sum T_i \vec{f}_i \in \mathscr{D}' \otimes F,$$

где

$$T_i = \sum_j K_{ij} \cdot \varphi_j \in \mathscr{D}'.$$

Таким образом, элементы $\vec{\vec{K}}$ пространства $\mathscr{L}_b(E'; E)$ взаимно однозначно соответствуют квадратным матрицам скалярных обобщенных функций двух переменных.

Теперь из линейного отображения $\varphi \to K \cdot \varphi$ нам нужно получить антилинейное отображение. В случае скалярных частиц это делалось при помощи замены $\varphi \to K \cdot \bar{\varphi}$, так как $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ — скалярная функция, для которой имеет смысл комплексно сопряженная к ней функция $\bar{\varphi}$. Однако в случае векторных частиц элемент $\overleftarrow{\varphi} \in \mathscr{D}(V; F')$ имеет вид $\overleftarrow{\varphi} = \sum \varphi_i \overleftarrow{f}'_i$, где $\overleftarrow{f}'_i \in F'$, и комплексное сопряжение не имеет смысла. Для того чтобы обойти эту трудность, введем понятие антипространства.

Определение. Пусть F — топологическое векторное пространство над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. *Антипространством* $\overline{F}$ пространства F называется любое топологическое векторное пространство, *антиизоморфное* и *топологически эквивалентное пространству* F. Это значит, что существует операция надчеркивания $f \to \overline{f}$, переводящая F в $\overline{F}$ и представляющая собой взаимно однозначное взаимно непрерывное отображение, такое, что для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ имеем

$$\lambda f \to \overline{\lambda f} = \overline{\lambda}\overline{f}$$

и

$$f_1 + f_2 \to \overline{f_1 + f_2} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2.$$

Антипространство $\overline{F}$ пространства F единственно с точностью до изоморфизма. Не существует никаких преимуществ, связанных с использованием какой-нибудь конкретной реализации пространства $\overline{F}$. Мы приведем несколько примеров таких реализаций.

1) Пусть F — данное топологическое векторное пространство. Антипространство $\overline{F}$ совпадает с F как с множеством, имеет ту же самую топологию, тот же самый закон сложения, однако операция умножения на скаляр у них различна:

$$(\lambda f)_{\overline{F}} = (\overline{\lambda} f)_F \quad \text{для любого} \quad \lambda \in \mathbf{C} \text{ и } f \in F.$$

Операция надчеркивания в этом случае является тождественным преобразованием.

2) Пусть G' — дуальное пространство к данному топологическому векторному пространству G. Антипространство $\overline{G}'$ пространства G' является антидуальным к пространству G, т. е. пространством непрерывных антилинейных функционалов на G. Если $g' \in G'$ и g' задает линейный функционал $g' : g \to \langle g', g \rangle$, то $\overline{g}'$ задает антилинейный функционал $\overline{g}' : g \to \overline{\langle g', g \rangle}$ для любого $g \in G$.

3) В пространствах L^2, $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}'$ существует внутреннее сопряжение. Соответствующие антипространства совпадают с исходными пространствами, а операция

надчеркивания является обычным комплексным сопряжением:

$$f \to \bar{f}, \quad f \in L^2,$$
$$\varphi \to \bar{\varphi}, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$
$$T \to \bar{T}, \quad T \in \mathscr{D}'.$$

4) Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Дуальное пространство $\mathscr{H}'$ является реализацией антипространства $\bar{\mathscr{H}}$. Если $h \in \mathscr{H}$, то $\bar{h} \in \mathscr{H}' = \bar{\mathscr{H}}$, причем $\langle \bar{h}, k \rangle = (k|h)_{\mathscr{H}}$ для любого $k \in \mathscr{H}$. Заметим, что

$$\langle \overline{\lambda h}, k \rangle = (k|\lambda h)_{\mathscr{H}} = \bar{\lambda}(k|h)_{\mathscr{H}} = \bar{\lambda}\langle \bar{h}, k \rangle,$$

так что $\overline{\lambda h} = \bar{\lambda}\bar{h}$.

Приведем некоторые свойства антипространств:

(а) $\overline{E \otimes F} \approx \bar{E} \otimes \bar{F}$ с соответствием

$$\overline{\sum c_l e_l \otimes f_l} \in \overline{E \otimes F} \leftrightarrow \sum \bar{c}_l \bar{e}_l \otimes \bar{f}_l \in \bar{E} \otimes \bar{F};$$

(б) $(\bar{F})' \approx \overline{F'}$;

(в) $\bar{\bar{F}} \approx F$.

Вернемся теперь к задаче нахождения непрерывных антилинейных отображений из $E' = \mathscr{D}(V; F')$ в $E = \mathscr{D}'(V; F)$. После введения понятия антипространства эта задача становится простой, если заметить, что отображение из E' в E антилинейно тогда и только тогда, когда соответствующее отображение из $\overline{E'}$ в E линейно. Таким образом, $\bar{\mathscr{L}}_b(E'; E) \approx \mathscr{L}_b(\overline{E'}; E)$. Используя свойства антипространств, получаем:

$$\overline{E'} \approx \overline{\mathscr{D}(V) \otimes F'} \approx \overline{\mathscr{D}(V)} \otimes \overline{F'} \approx \mathscr{D}(V) \otimes \overline{F'} \approx \mathscr{D}(V; \overline{F'}).$$

В терминах базиса $\{f_l\}$ в пространстве F и соответствующих базисов в пространствах F' и $\overline{F'}$ имеем:

если

$$\varphi = \sum \varphi_l f'_l \in E' = \mathscr{D}(V; F'), \quad \varphi_l \in \mathscr{D}(V),$$

то

$$\bar{\varphi} = \sum \bar{\varphi}_l \bar{f}'_l \in \overline{E'} = \mathscr{D}(V; \overline{F'}), \quad \bar{\varphi}_l \in \overline{\mathscr{D}(V)} = \mathscr{D}(V).$$

Используя вновь теорему о ядрах и свойства тензорных произведений, получаем

$$\mathscr{L}_b(\overline{E}'; E) \approx \mathscr{L}_b(\mathscr{D} \otimes \overline{F}'; \mathscr{D}' \otimes F) \approx$$
$$\approx \mathscr{L}_b(\mathscr{D}; \mathscr{D}') \otimes F \otimes \overline{F} \approx \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \overline{F},$$

и, окончательно, пространство $\overline{\mathscr{L}}_b(E'; E)$ непрерывных антилинейных отображений из E' в E определяется выражением

$$\overline{\mathscr{L}}_b(E'; E) \approx \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \overline{F}.$$

Теперь нам осталось найти подпространство $\overline{\mathscr{L}}_+(E'; E)$ пространства $\overline{\mathscr{L}}_b(E'; E)$, состоящее из положительных элементов.

Определение. Антиядро $\varphi \to K\overline{\varphi}$ в $\overline{\mathscr{L}}_b(E'; E)$, определяемое обобщенной функцией

$$\overset{\rightarrow\rightarrow}{K}_{x, y} \in \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \overline{F},$$

называется *суперположительным*, если

$$\langle K, \varphi \otimes \overline{\varphi} \rangle \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V; F')$. Переходя к базису $\{f_i\}$ в пространстве F, получаем

$$\varphi = \sum \varphi_i f'_i, \quad K = \sum K_{ij} f_i \otimes \overline{f}_j, \quad K_{ij} \in \mathscr{D}'(V \times V)$$

и

$$\langle K, \varphi \otimes \overline{\varphi} \rangle = \sum_{ij} \langle K_{ij}, \varphi_i \otimes \overline{\varphi}_j \rangle \geqslant 0.$$

Таким образом, понятие суперположительности представляет собой комбинацию понятий положительности для матриц и для ядер.

Мы можем теперь сформулировать основной результат этого параграфа в следующей теореме.

Теорема. *Пространство* $\mathfrak{H}$ *гильбертовых пространств* $\mathscr{H}$, *непрерывно вложенных в* $\mathscr{D}'(V; F)$, *канонически изоморфно подпространству простран-*

ства $\mathcal{D}'(V\times V)\otimes F\otimes\overline{F}$, *состоящему из обобщенных функций* K, *определенных на* $V\times V$ *и принимающих значения в* $F\otimes\overline{F}$, *таких, что*

$$\langle K,\ \varphi\otimes\overline{\varphi}\rangle\geqslant 0$$

для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(V;\ F')$. *Связь между обобщенной функцией* K *и соответствующим пространством* $\mathcal{H}$ *дается формулой*

$$\langle T,\ \varphi\rangle=(T|K\overline{\varphi})_{\mathcal{H}}$$

для любой обобщенной функции $T\in\mathcal{H}\subset\mathcal{D}'(V;\ F)$ *и любой функции* $\varphi\in\mathcal{D}(V;\ F')$. *Элемент* $K\overline{\varphi}$ *пространства* $\mathcal{H}$ *определяется формулой*

$$\langle K\overline{\varphi},\ \psi\rangle=\langle K,\ \psi\otimes\overline{\varphi}\rangle,\quad \psi\in\mathcal{D}(V;\ F').$$

Положив $T=K\overline{\psi}$, получим

$$\langle K,\ \varphi\otimes\overline{\psi}\rangle=(K\overline{\psi}|K\overline{\varphi})_{\mathcal{H}},\quad \varphi,\ \psi\subset\mathcal{D}(V;\ F').$$

Эти формулы в точности соответствуют формулам, полученным для скалярных частиц. Для удобства мы представим здесь сводку формул, выраженных в терминах базиса $\{f_i\}\in F$:

$$\varphi=\sum_i\varphi_i f_i'\in E'=\mathcal{D}(V;\ F'),\quad \varphi_i\in\mathcal{D}(V),$$

$$T=\sum_i T_i f_i\in E=\mathcal{D}'(V;\ F),\quad T_i\in\mathcal{D}'(V),$$

$$\langle T,\ \varphi\rangle=\sum\langle T_i',\ \varphi_i\rangle,$$

$$K=\sum_{i,j}K_{ij}f_i\otimes\overline{f}_j\in\mathcal{D}'(V\otimes V)\otimes F\otimes\overline{F},$$

$$K_{ij}\subset\mathcal{D}'(V\times V),$$

$$K\overline{\varphi}=\sum_i S_i f_i\in\mathcal{D}'(V;\ F),$$

$$S_i=\sum_j K_{ij}\cdot\overline{\varphi}_j\in\mathcal{D}'(V),$$

$$\langle K,\ \varphi\otimes\overline{\psi}\rangle=\sum_{i,j}\langle K_{ij},\ \varphi_i\otimes\overline{\psi}_j\rangle.$$

§ 6. Отношения порядка в векторных пространствах и положительность антиядер

Пусть E — векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Мы хотим определить отношение порядка $\geqslant$ в пространстве E, совместимое с векторной структурой пространства E. Это означает, что отношение порядка должно быть инвариантно относительно сдвигов и положительных преобразований подобия, так что

$$\vec{x} \geqslant \vec{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - \vec{a} \geqslant \vec{y} - \vec{a} & \text{для всех} \quad \vec{a} \in E, \\ \lambda\vec{x} \geqslant \lambda\vec{y} & \text{для всех} \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Для того чтобы определить отношение порядка в E, достаточно определить множество „положительных" элементов $\{\vec{x} : \vec{x} \geqslant 0\}$, так как в этом случае можно положить

$$\vec{x} \geqslant \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \geqslant 0.$$

Напомним, что множество $\Gamma \subset E$ называется ***выпуклым конусом***, если

$$\vec{x},\ \vec{y} \in \Gamma \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \Gamma,$$
$$\vec{x} \in \Gamma \Rightarrow \lambda\vec{x} \in \Gamma \quad \text{для всех} \quad \lambda > 0.$$

Легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема. *Множество выпуклых конусов* $\Gamma \subset E$, *таких, что* $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$, *взаимно однозначно соответствует множеству отношений порядка, совместимых с векторной структурой пространства* E. *Это соответствие задается выражением*

$$\vec{x} \geqslant \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \Gamma.$$

Отношение порядка замкнуто[1]) *тогда и только тогда, когда замкнут соответствующий конус* Γ.

Условие $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$ означает, что если $x \in \Gamma$, $-x \in \Gamma$, то $x = 0$.

---

[1]) Отношение порядка замкнуто, если из $x_k \geqslant y$ и $x_k \to x$ следует, что $x \geqslant y$ (т. е. если можно переходить к пределу под знаком неравенства). — *Прим. ред.*

Отношение порядка в аффинном пространстве естественным образом определяется отношением порядка в соответствующем векторном пространстве: $x \geqslant y \Longleftrightarrow \overrightarrow{x-y} \in \Gamma$.

Замкнутый выпуклый конус Γ при определенных условиях задает дуальное отношение порядка в дуальном к E пространстве E': элемент $e' \in E'$ *положителен*, если $\langle e', e \rangle \geqslant 0$ для всех $e \in \Gamma$. Пусть

$$\Gamma' = \{e' : \langle e', e \rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \Gamma\}.$$

Очевидно, что Γ' является выпуклым конусом, который слабо замкнут. По теореме Макки конус Γ' сильно замкнут и поэтому является замкнутым выпуклым конусом. Следовательно, Γ' определяет отношение порядка в E', если выполняется условие $\Gamma' \cap (-\Gamma') = \{0\}$. Для того чтобы найти соответствующее условие для Γ, нужно ввести понятие *полярных множеств*.

Определение. Пусть $A \subset E$. *Полярное множество*, или *поляра*, $A^0 \subset E'$ множества A определяется формулой

$$A^0 = \{e' : e' \in E', \quad \langle e', e \rangle \geqslant -1 \quad \text{для всех} \quad e \in A\}.$$

Заметим, что поляра любого множества всегда выпукла и слабо замкнута; кроме того, $(A_1 \cup A_2)^0 = A_1^0 \cap A_2^0$. Если A — выпуклый конус, то условие $\langle e', e \rangle \geqslant -1$ для всех $e \in A$ влечет за собой $\langle e', e \rangle \geqslant 0$ для всех $e \in A$. Таким образом, для нашего выпуклого конуса Γ имеем $\Gamma' = \Gamma^0$.

Теорема. *Условие* $\Gamma^0 \cap (-\Gamma^0) = \{0\}$ *выполняется тогда и только тогда, когда пространство, натянутое на* Γ, *плотно в* E.

Мы докажем только, что если пространство, натянутое на Γ, плотно в E, то $\Gamma^0 \cap (-\Gamma^0) = \{0\}$. Допустим, что $e' \in \Gamma^0 \cap (-\Gamma^0)$. Тогда e' одновременно неотрицательно и неположительно на Γ и, следовательно, равно нулю на Γ. Так как e' — непрерывный линейный функционал на E и пространство, натянутое на Γ, плотно в E, то e' на E равно нулю. Отсюда $e' = 0$.

Следствие. *Если пространство, натянутое на* Γ, *плотно в* E, *то* Γ^0 *определяет дуальное отношение порядка в* E'.

Так как Γ — замкнутый выпуклый конус, то $\Gamma^{00}=\Gamma$. Следовательно, отношение порядка в E можно определить через отношение порядка в E': элемент $\vec{e}\in E$ положителен тогда и только тогда, когда $\langle \overleftarrow{e'}, \vec{e}\rangle \geqslant 0$ для всех $e'\in\Gamma^0$.

В дальнейшем мы предположим, что Γ — замкнутый выпуклый конус в E, такой, что $\Gamma\cap(-\Gamma)=\{0\}$ и пространство, натянутое на Γ, плотно в E. Таким образом, Γ определяет отношение порядка в E, а Γ^0 определяет дуальное отношение порядка в E'.

Вернемся теперь к комплексным векторным пространствам. Пусть E — векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Мы будем считать, что E является комплексификацией векторного пространства E_0 над полем вещественных чисел, т. е.

$$E=E_0+iE_0=\{x+iy : x,\ y\in E_0\},$$

так что E — прямая сумма пространств E_0 и iE_0. Если задано пространство E и вещественное подпространство $E_0\subset E$, то существует операция надчеркивания $z\to\bar{z}$ (комплексное сопряжение), определенная в E и обладающая свойством $\bar{\bar{z}}=z$. Эта операция является каноническим антиизоморфизмом, т. е. антилинейным взаимно непрерывным взаимно однозначным отображением из E на E.

Подпространство E_0 состоит из всех самосопряженных элементов пространства E, т. е. $E_0=\{z : z\in E,\ \bar{z}=z\}$. Любой элемент $z\in E$ может быть единственным образом записан в виде

$$z=\frac{z+\bar{z}}{2}+i\,\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

где $\frac{z+\bar{z}}{2}$ и $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ принадлежат E_0. Таким образом, структура операции надчеркивания в E определяет вещественное подпространство E_0 (и в свою очередь определяется этим подпространством).

Дуальное к E пространство E' также имеет структуру операции надчеркивания. В самом деле, соотношение

$$\langle\overline{z'},\ z\rangle=\langle\bar{z}',\ \bar{z}\rangle$$

или

$$\overline{\langle z', \bar{u} \rangle} = \langle \bar{z}', u \rangle, \quad z' \in E, \quad u \in E,$$

определяет $\bar{z}'$: элемент z' пространства E' *вещественен*, если он самосопряжен, т. е. если он принимает вещественные значения на E_0. Вещественное подпространство пространства E' (состоящее из вещественных элементов) канонически изоморфно (вещественному) дуальному к E_0 пространству E'_0. Итак,

$$E' = E'_0 + iE'_0.$$

Пусть Γ — конус положительных элементов пространства E_0, т. е. Γ — замкнутый выпуклый конус в E_0, такой, что $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$, и (вещественное) пространство, натянутое на Γ, плотно в E_0. Тогда $\Gamma' \subset E'_0$ определяется формулой

$$\Gamma' = \{z' : z' \in E'_0, \ \langle z', z \rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \Gamma\},$$

и элемент пространства E' *положителен*, если он принимает положительные значения на положительных элементах пространства E_0.

Применим эти результаты к пространствам, которые мы изучаем. Рассмотрим сначала пространства $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$. Сопряженная к T обобщенная функция $\bar{T}$ определяется соотношением

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \bar{\varphi} \rangle}.$$

Определение. Обобщенная функция $T \in \mathscr{D}'$ называется *вещественной*, если $\langle T, \varphi \rangle$ *вещественно* для любой вещественной функции $\varphi \in \mathscr{D}$. Обобщенная функция T называется *положительной*, если $\langle T, \varphi \rangle \geqslant 0$ для любой положительной функции $\varphi \in \mathscr{D}$.

Рассмотрим теперь пространство $F \otimes \bar{F}$, где F — конечномерное векторное пространство. Структура операции надчеркивания в $F \otimes \bar{F}$ определяется так: *образом* элемента $\sum c_\nu f_\nu \otimes \bar{g}_\nu \in F \otimes \bar{F}$ при надчеркивании является элемент $\sum \bar{c}_\nu \bar{f}_\nu \otimes g_\nu$. Таким образом

$$\overline{F \otimes \bar{F}} = \bar{F} \otimes F = F \otimes \bar{F}.$$

Переходя к базису $\{f_i\}$ в F, убеждаемся, что сопряженным к элементу $\sum c_{ij} f_i \otimes \overline{f}_j \in F \otimes \overline{F}$ является элемент $\sum \overline{c}_{ij} \overline{f}_i \otimes f_j$. Этот элемент инвариантен по отношению к операции надчеркивания, т. е.

$$\sum c_{ij} f_i \otimes \overline{f}_j = \sum \overline{c}_{ij} \overline{f}_i \otimes f_j = \sum \overline{c}_{ji} f_i \otimes \overline{f}_j$$

тогда и только тогда, когда $c_{ij} = \overline{c}_{ji}$. Таким образом, самосопряженные элементы представляются эрмитовыми матрицами.

Определение. Элемент пространства $F \otimes \overline{F}$ называется *вещественным*, если для любого базиса пространства F он представим эрмитовой матрицей.

Можно дать следующее эквивалентное определение: элемент пространства $F \otimes \overline{F}$ вещественен, если он является линейной комбинацией квадратов с вещественными коэффициентами, т. е. если он имеет вид $\sum \lambda_\nu g_\nu \otimes \overline{g}_\nu$ с вещественными λ_ν.

В самом деле, пусть

$$\sum c_{ij} f_i \otimes \overline{f}_j = \sum \lambda_\nu g_\nu \otimes \overline{g}_\nu,$$

где λ_ν вещественны и

$$g_\nu = \sum_i d_{\nu i} f_i.$$

Тогда

$$c_{ij} = \sum_\nu \lambda_\nu d_{\nu i} \overline{d}_{\nu j},$$

откуда следует, что $c_{ij} = \overline{c}_{ji}$. Если же $c_{ij} = \overline{c}_{ji}$, то теорема о приведении эрмитовой формы к диагональному виду обеспечивает существование требуемого представления.

Определение. Элемент пространства $F \otimes \overline{F}$ называется *положительным*, если для любого базиса пространства F он представим положительно определенной эрмитовой матрицей. Или, что то же самое, элемент пространства $F \otimes \overline{F}$ положителен, если он представим в виде линейной комбинации квадратов с положительными коэффициентами.

Возможно и другое эквивалентное определение положительности. Элемент $A = \sum c_\nu f_\nu \otimes \overline{g}_\nu \in F \otimes \overline{F}$ определяет эрмитову форму на $F' \times F'$ по следующему правилу:

$$A(u', v') = \sum c_\nu \langle u', f_\nu \rangle \langle \overline{v', g_\nu} \rangle.$$

Эта форма является положительной эрмитовой формой тогда и только тогда, когда положителен элемент $\sum c_\nu f_\nu \otimes \overline{g}_\nu$.

Приведенное выше определение положительного элемента устанавливает отношение порядка в пространстве $F \otimes \overline{F}$, так как такое отношение существует для эрмитовых матриц. Наконец, мы имеем следующее определение положительных элементов в дуальном к $F \otimes \overline{F}$ пространстве $F' \otimes \overline{F'}$.

Определение. Элемент пространства $F' \otimes \overline{F'}$ *положителен*, если он принимает положительные значения на всех положительных элементах пространства $F \otimes \overline{F}$.

Обсудим теперь понятие положительности для антиядер, определяемых элементами $K_{x, y} \in \mathscr{D}' (V \times V) \otimes F \otimes \overline{F}$. Возможны два определения положительности, причем оба представляются вполне естественными.

Определение. Антиядро, определенное элементом

$$K \in \mathscr{D}' (V \times V) \otimes F \otimes \overline{F},$$

называется

(а) *положительным*, если для любого $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ имеем $\langle K, \varphi \otimes \overline{\varphi} \rangle \geqslant 0$ в естественном порядке пространства $F \otimes \overline{F}$ (здесь $\langle K, \varphi \otimes \overline{\varphi} \rangle \in F \otimes \overline{F}$);

(б) *суперположительным*, если для любого $\psi \in \mathscr{D}(V; F')$ имеем $\langle K, \psi \otimes \overline{\psi} \rangle \geqslant 0$ в $\mathbf{C}$ (здесь $\langle K, \psi \otimes \overline{\psi} \rangle \in \mathbf{C}$).

В предыдущем параграфе мы потребовали, чтобы антиядро K, соответствующее гильбертову пространству $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}' (V; F)$, было суперположительным (там, однако, мы называли K просто положительным). Может показаться странным, что в определении суперположительности не участвует естественное отношение порядка в пространстве $F \otimes \overline{F}$.

В терминах базиса $\{f_i\}$ пространства F элемент $K \in \mathcal{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \bar{F}$ записывается в виде $K = \sum K_{ij} f_i \otimes \bar{f}_j$, где $K_{ij} \in \mathcal{D}'(V \times V)$, а элемент $\psi \in \mathcal{D}(V; F')$ задается выражением $\psi = \sum \varphi_i f'_i$, где $\varphi_i \in \mathcal{D}(V)$. Теперь данные выше определения можно сформулировать так:

(а) K ***положительно***, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ матрица

$$(\langle K_{ij}, \varphi \otimes \bar{\varphi} \rangle)$$

является эрмитовой и положительно определенной;

(б) K ***суперположительно***, если для любого набора функций

$$\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}(V)$$

справедливо соотношение

$$\sum \langle K_{ij}, \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_j \rangle \geqslant 0 \text{ в } \mathbf{C}.$$

Легко видеть, что суперположительность *влечет за собой* положительность. Однако эти понятия, по-видимому, не эквивалентны, и хотелось бы получить противоречащий пример [1]). До сих пор понятия отношения порядка

[1]) Эти понятия действительно не эквивалентны. Простейший пример положительного ядра, которое не является суперположительным, можно построить следующим образом. Пусть пространство F двумерно. Тогда антиядро K задается матрицей второго порядка с элементами из $\mathcal{D}'(V \times V)$. Пусть φ_1 и φ_2 — ортогональные функции из $L^2(V)$, нормы которых равны 1. Тогда ядро

$$K = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \otimes \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \otimes \bar{\varphi}_2 & 2\varphi_1 \otimes \bar{\varphi}_2 \\ 2\varphi_2 \otimes \bar{\varphi}_1 & \varphi_1 \otimes \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \otimes \bar{\varphi}_2 \end{Vmatrix}$$

дает требуемый пример. В самом деле, если φ — любая функция из $\mathcal{D}(V)$, то

$$\langle K, \varphi \otimes \bar{\varphi} \rangle = \begin{Vmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 2a\bar{b} \\ 2\bar{a}b & |a|^2 + |b|^2 \end{Vmatrix},$$

в векторном пространстве и (простой) положительности антиядер не использовались, однако позднее они нам понадобятся. Будет показано, что для некоторых антиядер введенные выше два понятия положительности эквивалентны.

где $a = \langle \varphi_1, \varphi \rangle$, $b = \langle \varphi_2, \varphi \rangle$. Так как эта матрица положительио определена, ядро K является положительным. С другой стороиы, если взять в качестве ψ вектор-функцию $(\overline{\varphi}_1, -\overline{\varphi}_2)$, то несложиый подсчет показывает, что $\langle K, \psi \otimes \overline{\psi} \rangle = -2$. Поэтому ядро K не является суперположительным. — *Прим. ред.*

Глава 3

МИРОВЫЕ ЧАСТИЦЫ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ. УПРОЩЕНИЕ ПО ЯДРУ

§ 1. Тензорные произведения обобщенных функций

Пусть X и Y — многообразия класса C^∞, и пусть $\mathscr{D}_x$ и $\mathscr{D}_y$ — пространства основных функций, определенных соответственно на X и Y. Для любых функций $u(x) \in \mathscr{D}_x$ и $v(y) \in \mathscr{D}_y$ функция $u(x)v(y)$ бесконечно дифференцируема по x и y и носитель функции $u(x)v(y)$ компактен, так как декартово произведение компактных множеств компактно. Таким образом, $u(x)v(y)$ является элементом $\mathscr{D}_{x,y}$ пространства основных функций, определенных на $X \times Y$. Следовательно,

$$\mathscr{D}_x \otimes \mathscr{D}_y \subset \mathscr{D}_{x,y}.$$

Кроме того, можно показать, что $\mathscr{D}_x \otimes \mathscr{D}_y$ является плотным собственным подмножеством пространства $\mathscr{D}_{x,y}$.

Тот же результат справедлив для пространств обобщенных функций: $\mathscr{D}'_x \otimes \mathscr{D}'_y$ является собственным плотным подмножеством пространства $\mathscr{D}'_{x,y}$. Мы не будем здесь этого доказывать. Мы покажем только, что тензорное произведение двух обобщенных функций, принадлежащих $\mathscr{D}'_x$ и $\mathscr{D}'_y$, определяет элемент, принадлежащий $\mathscr{D}'_{x,y}$.

Теорема: *Если $S_x \in \mathscr{D}'_x$ и $T_y \in \mathscr{D}'_y$, то существует единственная обобщенная функция $S_x \otimes T_y \in \mathscr{D}'_{x,y}$, такая, что*

$$\langle S_x \otimes T_y,\ u(x) \otimes v(z)\rangle = \langle S_x,\ u(x)\rangle \langle T_y,\ v(y)\rangle$$

для всех $u(x) \in \mathscr{D}_x$, $v(y) \in \mathscr{D}_y$.

Доказательство. Единственность. Допустим, что существуют две различные обобщенные функции

U_1, $U_2 \in \mathscr{D}'_{x,y}$, такие, что

$$\langle U_1,\ u(x)\otimes v(y)\rangle = \langle S_x,\ u(x)\rangle\langle T_y,\ v(y)\rangle,$$
$$\langle U_2,\ u(x)\otimes v(y)\rangle = \langle S_x,\ u(x)\rangle\langle T_y,\ v(y)\rangle.$$

Очевидно, что тогда U_1 и U_2 совпадают на $\mathscr{D}_x\otimes\mathscr{D}_y$. Но так как $\mathscr{D}_x\otimes\mathscr{D}_y$ плотно в $\mathscr{D}_{x,y}$ и дуальные произведения непрерывны, значения U_1 и U_2 совпадают на всем $\mathscr{D}_{x,y}$. Таким образом, $U_1 = U_2$.

Существование. Для любой функции $\varphi(x, y)\in\mathscr{D}_{x,y}$ мы хотим выяснить, имеет ли смысл выражение

$$\langle S_x\otimes T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle.$$

Для всякого фиксированного значения x имеем $\varphi(x, y)\in\mathscr{D}_y$, и $\langle T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle$ является функцией от x, которая, очевидно, имеет компактный носитель. Можно показать, что эта функция от x бесконечно дифференцируема по x. Следовательно,

$$\langle T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle\in\mathscr{D}_x.$$

Теперь можно вычислить

$$\langle S_x,\ \langle T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle;$$

таким образом, для любой функции $\varphi\in\mathscr{D}_{x,y}$ мы получаем некоторое число.

Положим, по определению,

$$\langle S_x\otimes T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle = \langle S_x,\ \langle T_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle.$$

Эта формула задает непрерывный линейный функционал на $\mathscr{D}_{x,y}$, но здесь мы не будем доказывать его непрерывность. Если теперь

$$\varphi(x,\ y) = u(x)v(y),\quad \text{где}\quad u(x)\in\mathscr{D}_x,\quad v(y)\in\mathscr{D}_y,$$

то мы имеем

$$\langle T_y,\ u(x)\otimes v(y)\rangle = u(x)\langle T_y,\ v(y)\rangle\in\mathscr{D}_x,$$

и применение оператора S_x дает

$$\langle S_x\otimes T_y,\ u(x)\otimes v(y)\rangle = \langle S_x,\ \langle T_y,\ u(x)\otimes v(y)\rangle\rangle =$$
$$= \langle S_x,\ u(x)\rangle\langle T_y,\ v(y)\rangle.$$

Тем самым доказательство существования закончено. Можно было определить $S_x \otimes T_y$ другим способом:

$$\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x, y)\rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y)\rangle\rangle,$$

но в силу единственности эти определения эквивалентны, т. е.

$$\langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y)\rangle\rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y)\rangle\rangle.$$

Та же самая теорема справедлива для векторных обобщенных функций в случае, когда пространство значений одной из этих функций конечномерно.

Теорема. *Если даны обобщенные функции*

$$\vec{S}_x \in \mathscr{D}'(X; \vec{E}), \quad \vec{T}_y \in \mathscr{D}'(Y; \vec{F})$$

и хотя бы одно из пространств $\vec{E}$, $\vec{F}$ конечномерно, то существует одна и только одна обобщенная функция

$$\vec{S}_x \otimes \vec{T}_y \in \mathscr{D}'(X \otimes Y; \vec{E} \otimes \vec{F}),$$

такая, что

$$\langle \vec{S}_x \otimes \vec{T}_y, u(x) \otimes v(y)\rangle = \langle \vec{S}_x, u(x)\rangle \otimes \langle \vec{T}_y, v(y)\rangle.$$

Доказательство. Единственность доказывается так же, как и раньше.

Существование. Если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ конечномерны, то существование доказывается просто. В самом деле, пусть

$$\vec{S}_x \in \mathscr{D}'_x \otimes \vec{E}, \quad \vec{T}_y \in \mathscr{D}'_y \otimes \vec{F};$$

тогда, очевидно, $\vec{S}_x \otimes \vec{T}_y$ можно определить как элемент пространства $\mathscr{D}'_x \otimes \mathscr{D}'_y \otimes \vec{E} \otimes \vec{F}$. Из предыдущей теоремы мы знаем, что $\mathscr{D}'_x \otimes \mathscr{D}'_y \subset \mathscr{D}'_{x, y}$; поэтому

$$\mathscr{D}'_x \otimes \mathscr{D}'_y \otimes \vec{E} \otimes \vec{F} \subset \mathscr{D}'_{x, y} \otimes \vec{E} \otimes \vec{F}.$$

Таким образом, тензорное произведение $\vec{S}_x \otimes \vec{T}_y$ определено в $\mathscr{D}'(X \times Y, \vec{E} \otimes \vec{F})$ благодаря каноническому изоморфизму этого пространства и пространства $\mathscr{D}'_{x,\,y} \otimes \vec{E} \otimes \vec{F}$.

Допустим теперь, что $\vec{E}$ конечномерно, а пространство $\vec{F}$ — не обязательно конечномерно. Тогда $\vec{S}_x \otimes \vec{T}_y$ определяется равенством

$$\langle \vec{S}_x \otimes \vec{T}_y,\ \varphi(x,\ y)\rangle = \langle \vec{T}_y,\ \langle \vec{S}_x,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle.$$

Для фиксированного y имеем $\langle \vec{S}_x,\ \varphi(x,\ y)\rangle \in \vec{E}$, и так как $\vec{E}$ конечномерно, то $\langle \vec{S}_x,\ \varphi(x,\ y)\rangle \in \mathscr{D}_y \otimes \vec{E}$. Далее, $\vec{T}_y \in \mathscr{D}'(Y;\ \vec{F})$, т. е. $\vec{T}_y$ определяет отображение $\mathscr{D}_y \to \vec{F}$ и, следовательно, отображение $\mathscr{D}_y \otimes \vec{E} \to \vec{F} \otimes \vec{E}$. Поэтому мы можем определить $\langle \vec{T}_y,\ \langle \vec{S}_x,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle \in \vec{E} \otimes \vec{F}$.

Таким образом, $\vec{S}_x \otimes \vec{T}_y$ можно определить отображением $\varphi(x,\ y) \to \langle \vec{T}_y,\ \langle \vec{S}_x,\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle$, которое линейно и непрерывно.

Замечания. Если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ оба бесконечномерны, то тензорное произведение $\vec{S} \otimes \vec{T}$ нельзя определить таким образом.

Носитель тензорного произведения $\vec{S} \otimes \vec{T}$ является декартовым произведением $A \times B$ носителя A обобщенной функции $\vec{S}$ и носителя B обобщенной функции $\vec{T}$.

Это тензорное произведение непрерывно, т. е. если $\vec{S} \to \vec{S}_0$ и $\vec{T} \to \vec{T}_0$, то $\vec{S} \otimes \vec{T} \to \vec{S}_0 \otimes \vec{T}_0$. Доказательство мы опускаем.

Выбрав базис $\vec{e}_i \in \vec{E}$, $\vec{f}_j \in \vec{F}$, можно записать тензорное произведение обобщенных функций $\vec{S} = \sum_i S_i \vec{e}_i$ и $\vec{T} = \sum_j T_j \vec{f}_j$ в виде

$$\vec{S} \otimes \vec{T} = \sum_{i,\,j} S_i \otimes T_j \cdot \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j.$$

§ 2. Свертка

Пусть V — многообразие, на котором задан внутренний закон композиции $(x, y) \to xy$, т. е. отображение из $V \times V$ в V. Допустим также, что этот закон композиции бесконечно дифференцируем. Тогда в пространстве обобщенных функций $\mathscr{D}'(V)$, определенных на V, можно определить закон композиции, называемый *сверткой.*

Определение. Если S и T — две обобщенные функции из $\mathscr{D}'(V)$, то их *свертка* $S * T \in \mathscr{D}'(V)$ *определяется равенством*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi\eta) \rangle$$

для $\varphi \in \mathscr{D}(V)$.

Замечание. Свертка существует не всегда. Мы скоро обсудим условия, при которых она действительно существует.

Функция $\varphi(\xi\eta)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменных $(\xi, \eta) \in V \times V$. Однако множество $\{(\xi, \eta) : \xi\eta$ принадлежит носителю функции φ в $V\}$, являющееся носителем функции $\varphi(\xi\eta)$ в $V \times V$, не компактно (за исключением случая, когда $\varphi \equiv 0$), поэтому пока еще нельзя определить свертку написанным выше равенством.

Пример. Пусть $V = \mathbf{R}$ — вещественная прямая, и пусть законом композиции является сложение. Если $\varphi(x_0) \neq 0$, то $\varphi(\xi + \eta) \neq 0$ для $\xi + \eta = x_0$, т. е. диагональ $\xi + \eta = x_0$ принадлежит носителю функции $\varphi(\xi + \eta)$ в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Таким образом, этот носитель не может быть компактным (за исключением случая, когда $\varphi \equiv 0$).

Для того чтобы определить свертку, необходимо распространить определение величины $\langle T, \varphi \rangle$ на некоторые случаи, когда T — обобщенная функция, а φ — бесконечно дифференцируемая функция с некомпактным носителем.

Теорема. *Пусть T — обобщенная функция с носителем A и φ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем B. Если пересечение $A \cap B$ компактно, то можно определить $\langle T, \varphi \rangle$.*

Доказательство. Возьмем функцию $\alpha \in \mathscr{D}(V)$, такую, что $\alpha = 1$ в окрестности множества $A \cap B$. Тогда $\langle T, \alpha\varphi\rangle$ имеет смысл, так как $\alpha\varphi$ является основной функцией. Нужно показать, что результат не зависит от выбора α. Допустим, что β — другая функция, обладающая тем же свойством, что и α. Тогда $\alpha - \beta = 0$ в окрестности пересечения $A \cap B$, и носитель функции $(\alpha - \beta)\varphi$ содержится в дополнении к $A \cap B$. Из определения носителя обобщенной функции T следует, что $\langle T, (\alpha - \beta)\varphi\rangle = 0$. Следовательно, можно положить

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle,$$

и это значение не зависит от выбора α.

Определение. Пусть заданы обобщенные функции S, $T \in \mathscr{D}'(V)$ с носителями соответственно A, $B \subset V$. Говорят, что носители A и B *допускают свертку*, если пересечение множества $A \times B$ (носителя тензорного произведения $S \otimes T$) с носителем функции $\varphi(\xi\eta)$ в $V \times V$ компактно для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$.

Определение. Если E и F — локально компактные топологические пространства, то отображение $E \to F$ называется *собственным*, когда выполняется любое из следующих эквивалентных условий.

(1) Прообраз любого компактного множества компактен.

(2) Образ любого замкнутого множества замкнут, и прообраз любой точки компактен.

(3) Если E и F компактифицированы добавлением бесконечно удаленной точки (компактное расширение Александрова), то расширенное отображение, при котором ∞ переводится в ∞, непрерывно.

Дадим теперь другое определение двух носителей, допускающих свертку. Это определение эквивалентно сформулированному выше.

Определение. Пусть множества A и B являются носителями двух обобщенных функций. Мы говорим, что A и B *допускают свертку*, если выполняется любое из следующих эквивалентных условий.

(1) Для любого компактного множества $K \subset V$ множество $(A \times B) \cap \{(\xi, \eta) : \xi\eta \in K\}$ компактно.

(2) Отображение $(\xi, \eta) \to \xi\eta$, рассматриваемое только на множестве $A * B$, является *собственным*.

Пример.

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle (\delta_a)_\xi \otimes (\delta_b)_\eta, \varphi(\xi\eta) \rangle = \\ &= \langle (\delta_a)_\xi, \langle (\delta_b)_\eta, \varphi(\xi\eta) \rangle \rangle = \\ &= \langle (\delta_a)_\xi, \varphi(\xi b) \rangle = \varphi(ab).\end{aligned}$$

Таким образом, $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Если имеются две сходящиеся последовательности обобщенных функций*

$$S \to S_0, \quad T \to T_0,$$

причем

(1) *носители всех обобщенных функций S содержатся в одном и том же компактном множестве A, а носители всех T содержатся в одном и том же множестве B,*

(2) *множества A и B допускают свертку,*

то

$$\text{(I)} \qquad S * T \to S_0 * T_0,$$

(II) *носитель функции $S_0 * T_0$ содержится в множестве*

$$AB = \{\xi\eta : (\xi, \eta) \in A \times B\}.$$

Пусть V — группа Ли с групповой операцией — произведением: $(\xi, \eta) \to \xi\eta$.

Определение. *Внутренняя свертка трех обобщенных функций R, S, $T \in \mathscr{D}'(V)$* определяется равенством

$$\langle R * S * T, \varphi \rangle = \langle R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta, \varphi(\xi\eta\zeta) \rangle$$

для $\varphi \in \mathscr{D}(V)$.

Определение. Носители A, B, C трех обобщенных функций R, S, $T \in \mathscr{D}'(V)$ *допускают внутреннюю свертку*, если отображение $(\xi, \eta, \zeta) \to \xi\eta\zeta$, рассматриваемое на $A \times B \times C$, является собственным.

Возможны и другие эквивалентные определения.

Теорема. *Пусть R, S, $T \in \mathscr{D}'(V)$ имеют носителями множества A, B и C. Если $(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta)$ и A, B и C допускают внутреннюю свертку, то*

$$(R * S) * T = R * (S * T) = R * S * T.$$

Доказательства мы не приводим.

Теорема. *Пусть e — единичный элемент группы Ли V. Тогда*

$$\delta_e * T = T * \delta_e = T.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\langle \delta_e * T, \varphi\rangle &= \langle (\delta_e)_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi\eta)\rangle = \\ &= \langle T_\eta, \langle (\delta_e)_\xi, \varphi(\xi\eta)\rangle\rangle = \\ &= \langle T_\eta, \varphi(e\eta)\rangle = \langle T_\eta, \varphi(\eta)\rangle.\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть $\Lambda_a T$ — левый сдвиг, определенный элементом $a \in V$, обобщенной функции $T \in \mathscr{D}'(V)$ на группе Ли V. Тогда*

$$\delta_a * T = \Lambda_a T.$$

Аналогично для правого сдвига R_a справедливо равенство

$$T * \delta_a = R_a T.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_a T, \varphi\rangle = \langle T, \Lambda_{a^{-1}}\varphi\rangle &= \langle T_\eta, \varphi(a\eta)\rangle = \\ &= \langle (\delta_a)_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi\eta)\rangle = \\ &= \langle \delta_a * T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть V — векторное пространство (сложение в нем, разумеется, коммутативно). Операция свертки обобщенных функций S, $T \in \mathscr{D}'(V)$ коммутативна.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}\langle S_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta)\rangle &= \langle S_\eta \otimes T_\xi, \varphi(\eta + \xi)\rangle = \\ &= \langle S_\eta, \langle T_\xi, \varphi(\eta + \xi)\rangle\rangle = \langle T_\xi, \langle S_\eta, \varphi(\eta + \xi)\rangle\rangle = \\ &= \langle T_\xi \otimes S_\eta, \varphi(\eta + \xi)\rangle = \langle T_\xi \otimes S_\eta, \varphi(\xi + \eta)\rangle.\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *вещественная прямая. Тогда для обобщенной функции* $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ *имеем*

$$\delta' * T = T * \delta' = T'.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\langle \delta' * T,\ \varphi \rangle &= \langle \delta'_\xi \otimes T_\eta,\ \varphi(\xi+\eta) \rangle = \\ &= \langle T_\eta,\ \langle \delta'_\xi,\ \varphi(\xi+\eta) \rangle \rangle = \\ &= \langle T_\eta, -\varphi'(0+\eta) \rangle = -\langle T_\eta,\ \varphi'(\eta) \rangle = \\ &= -\langle T,\ \varphi' \rangle = \langle T',\ \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\langle T * \delta',\ \varphi \rangle = \langle T',\ \varphi \rangle.$$

Справедливы также следующие равенства:

$$\delta^{(m)} * T = T^{(m)},$$
$$D^p \delta * T = D^p T,$$

где D^p — дифференциальный оператор порядка p с постоянными коэффициентами. В случае более чем одного измерения имеем

$$\Delta \delta * T = \Delta T,$$

где Δ — оператор Лапласа или Даламбера.

Теорема. *Для* S, $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ *имеем*

$$(S * T)' = S' * T = S * T'.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(S * T)' &= \delta' * (S * T) = \\ &= (\delta' * S) * T = S' * T.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}(S * T)' &= (S * T) * \delta' = \\ &= S * (T * \delta') = S * T'.\end{aligned}$$

Следовательно, для обобщенных функций S, $T \in \mathscr{D}'(V)$, где V — векторное пространство над полем вещественных чисел размерности не меньше 2, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(S * T) = \frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial y} * T = \frac{\partial S}{\partial x} * \frac{\partial T}{\partial y} =$$
$$= S * \frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial y} = \ldots .$$

Теорема. *Пусть $T \in \mathscr{D}'(V)$ и $\alpha \in \mathscr{D}(V)$ заданы на векторном пространстве V с мерой Лебега dx. Если носитель обобщенной функции T и носитель функции α допускают свертку, то положим*

$$T * \alpha = \beta$$ [1].

Тогда β — бесконечно дифференцируемая функция, определяемая равенством

$$\beta(x) = \langle T_t, \ \alpha(x - t)\rangle.$$

Доказательство.

Для любого $\varphi \in \mathscr{D}$ имеем

$$\langle T * \alpha, \ \varphi\rangle = \langle T_\xi \otimes \alpha(\eta), \ \varphi(\xi + \eta)\rangle =$$

$$= \langle T_\xi, \int \alpha(\eta)\varphi(\xi + \eta)\,d\eta\rangle = \langle T_\xi, \int \alpha(x - \xi)\varphi(x)\,dx\rangle =$$

$$= \langle T_\xi \otimes \varphi(x), \ \alpha(x - \xi)\rangle = \int \varphi(x)\langle T_\xi, \ \alpha(x - \xi)\rangle\,dx =$$

$$= \int \varphi(x)\beta(x)\,dx = \langle \beta, \ \varphi\rangle.$$

Таким образом, $\beta(x) = \langle T_t, \ \alpha(x - t)\rangle$.
Согласно предыдущей теореме,

$$\beta^{(m)} = (T * \alpha)^{(m)} = T * \alpha^{(m)}.$$

Так как функция α бесконечно дифференцируема, $\beta^{(m)} = T * \alpha^{(m)}$ также является обычной функцией, и, следовательно, $\beta(x)$ — бесконечно дифференцируема.

Теорема. *Пусть $V = \vec{E}$ — векторное пространство с мерой Лебега. Если f и g — локально интегрируемые функции на $\vec{E}$ и носители функций f и g допускают свертку, то*

$$f * g = h,$$

где

$$h(x) = \int f(t)\,g(x - t)\,dt,$$

[1]) Любая основная функция φ является также и обобщенной, и свертку $T * \varphi$ можно понимать в смысле определенной выше свертки обобщенных функций. — *Прим. перев.*

причем $h(x)$ локально интегрируема и определяется этим равенством для почти всех x.

Доказательство.

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle=\langle f_\xi\otimes g_\eta,\ \varphi(\xi+\eta)\rangle=$$
$$=\int\int f(\xi)\,g(\eta)\,\varphi(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Делая замену переменных $\xi=t$, $\eta=x-t$ (при этом якобиан равен 1) и применяя теорему Фубини, получаем

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle=\int\int f(t)\,g(x-t)\,\varphi(x)\,dx\,dt=$$
$$=\int\varphi(x)\,dx\int f(t)\,g(x-t)\,dt.$$

Пусть

$$h(x)=\int f(t)\,g(x-t)\,dt;$$

тогда

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle=\langle h,\ \varphi\rangle.$$

Теорема. *В группе Ли V свертка $S*T$ имеет смысл (т. е. носители допускают свертку), если хотя бы одна из обобщенных функций S и T имеет компактный носитель.*

Доказательство. Нужно показать, что отображение $(\xi,\ \eta)\to\xi\eta$ является собственным для $\xi\in A$, $\eta\in B$. Допустим, что S имеет компактный носитель A и T имеет носитель B. Пусть $\mathscr{D}$ — компактное подмножество множества V. Множество

$$H=\{(\xi,\ \eta):\xi\in A,\ \eta\in B,\ \xi\eta\in\mathscr{D}\}$$

является ограниченным, так как ξ содержится в компактном множестве A, а элемент $\eta=\xi^{-1}(\xi\eta)$ для $\xi\in A$, $\xi\eta\in\mathscr{D}$ также ограничен. Следовательно, H компактно, и поэтому отображение является собственным.

Замечание. Аналогично, свертка $R*S*T$ имеет смысл, если две из этих трех обобщенных функций имеют компактный носитель.

Пример. Рассмотрим свертку $Y*\delta'*1$, где Y — функция Хевисайда:

$$Y_x=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Носителями функций Y, δ' и 1 являются соответственно $[0, \infty]$, $\{0\}$ и R. Отображение $(\xi, \eta, \zeta) \to \xi + \eta + \zeta$ не является собственным, и поэтому внутренняя свертка не допустима. Однако выражения $(Y * \delta') * 1$ и $Y * (\delta' * 1)$ имеют смысл каждое в отдельности, хотя они и не равны по величине, т. е. свертка в этом случае не ассоциативна:

$$(Y * \delta') * 1 = \delta * 1 = 1,$$

$$Y * (\delta' * 1) = Y * 0 = 0.$$

§ 3. Инвариантность относительно группы сдвигов

В этом параграфе мы попытаемся найти гильбертовы пространства $\mathscr{H}$, которые остаются инвариантными относительно данной группы и, в частности, относительно группы сдвигов.

Пусть G — группа топологических алгебраических автоморфизмов локально выпуклого топологического векторного пространства E. Как и ранее, $\mathfrak{H}$ обозначает пространство гильбертовых пространств $\mathscr{H}$ с непрерывным вложением в E, а $\overline{\mathscr{L}_+}(E'; E)$ — замкнутый выпуклый конус положительных антиядер из E' в E. Мы видели, что $\mathfrak{H} \approx \overline{\mathscr{L}_+}(E'; E)$.

Элемент $\sigma \in G$ определяет переход из $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$ в гильбертово пространство $\sigma\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$ следующим образом:

$$\sigma : \mathscr{H} \to \sigma\mathscr{H} = \{\sigma h : h \in \mathscr{H}\},$$

где $\sigma\mathscr{H}$ имеет гильбертову структуру, перенесенную из $\mathscr{H}$:

$$(\sigma h \mid \sigma k)_{\sigma\mathscr{H}} = (h \mid k)_{\mathscr{H}}.$$

Так как σ действует на E, этот оператор действует и на дуальном пространстве E'. В самом деле,

$$\langle \sigma e', \sigma e \rangle = \langle e', e \rangle, \quad e \in E, \quad e' \in E',$$

и автоморфизм $e' \to \sigma e'$ на E' задается выражением

$$\langle \sigma e', f \rangle = \langle e', \sigma^{-1} f \rangle, \quad f \in E, \ e' \in E'.$$

Следовательно, σ действует также и на $\mathscr{L}(E'; E)$. В самом деле,

$$\sigma L \cdot \sigma e' = \sigma(Le'), \quad e' \in E', \quad L \in \mathscr{L}(E'; E)$$

и автоморфизм $L \to \sigma L$ множества $\mathscr{L}(E'; E)$ определяется выражением вида

$$\sigma L \cdot f' = \sigma(L(\sigma^{-1} f')), \quad f' \in E, \quad L \in \mathscr{L}(E'; E).$$

Очевидно, что если антиядро L положительно, то антиядро σL также положительно. Используя перенос структуры, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если гильбертово пространство $\mathscr{H} \in \mathfrak{H}$ соответствует антиядру $L \in \mathscr{L}_+(E'; E)$, то пространство $\sigma\mathscr{H}$ соответствует антиядру σL для любого оператора $\sigma \in G$.*

Таким образом, если $\mathscr{H} = \sigma\mathscr{H}$ для всех $\sigma \in G$, то $L = \sigma L$ для всех $\sigma \in G$, и для того чтобы найти гильбертовы пространства $\mathscr{H}$, инвариантные относительно группы G, можно искать антиядра L, инвариантные относительно группы G.

Обратимся теперь к случаю векторных частиц. Пусть G — группа автоморфизмов σ, которые действуют на мире V и на конечномерном векторном пространстве F. В этом случае оператор σ действует также и на $\mathscr{D}'(V)$ и, следовательно, он действует на $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V) \otimes F$.

С другой стороны, так как оператор σ действует на V, он действует также на $V \times V$ $(\sigma(v, w) = (\sigma v, \sigma w))$ и на $\mathscr{D}'(V \times V)$, а так как σ действует на F, он действует также на $\overline{F}$ $(\sigma\overline{f} = \overline{\sigma f})$. Следовательно, σ действует на антиядра $K_{x, y} \in \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \overline{F}$. В терминах базиса $\{f_i\}$ пространства F имеем $K = \sum K_{ij} f_i \otimes \overline{f}_j$, где $K_{ij} \in \mathscr{D}'(V \times V)$, и

$$\sigma K = \sum \sigma K_{ij} \sigma f_i \otimes \overline{\sigma f}_j,$$

где σK_{ij} — обобщенная функция, определяемая формулой

$$\langle \sigma K_{ij}, \varphi(x, y) \rangle = \langle K_{ij}, \varphi(\sigma x, \sigma y) \rangle.$$

Используя опять перенос структуры, можно показать, что если гильбертово пространство $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V) \otimes F$ соответствует антиядру $K \in \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \overline{F}$, то $\sigma\mathscr{H}$ соответствует σK для любого оператора $\sigma \in G$, и вместо того чтобы искать пространства $\mathscr{H}$, инвариантные относительно группы G, можно искать суперположительные антиядра K, инвариантные относительно G.

Будем теперь искать антиядра

$$K_{x, y} \in \mathscr{D}'(V \times V) \otimes F \otimes \overline{F},$$

инвариантные относительно группы сдвигов на мире V. Пусть, в частности, V — аффинное пространство E_4 (или E). Тогда группа сдвигов G изоморфна векторному пространству $\vec{E}_4$ (или $\vec{E}$), связанному с аффинным пространством E_4 (или E). Мы предполагаем, что элемент группы G действует на E как аффинный оператор и что он действует на конечномерном векторном пространстве F как единичный оператор.

Допустим сначала, что мы имеем функцию $K(x, y)$. Для того чтобы $K(x, y)$ была инвариантна относительно любого сдвига, должно выполняться равенство

$$K(x-a,\ y-a) = K(x, y) \text{ для всех } a.$$

В частности, если положить a равным y, то

$$K(x, y) = K(x-y,\ 0) = H(x-y),$$

где H — функция одной переменной $x-y$. Итак, в этом случае, для того чтобы получить функцию K, инвариантную относительно сдвигов, мы можем взять функцию H одной переменной и подставить в качестве аргумента $x-y$.

Обобщим теперь этот способ на случай, когда $K_{x, y}$ — обобщенная функция, определенная на $E \times E$. Рассмотрим изоморфизм класса C^∞

$$E \times E \leftrightarrow E \times \vec{E},$$

определенный формулой $(x, y) \leftrightarrow (x, \vec{u})$, где $\vec{u} = \overrightarrow{x-y}$, $y = x - \vec{u}$. С помощью переноса структуры этот изоморфизм определяет взаимно однозначное соответствие между обобщенными функциями

$$K_{x, y} \in \mathscr{D}'(E \times E) \leftrightarrow H_{x, \vec{u}} \in \mathscr{D}'(E \times \vec{E}),$$

определенное соотношениями

$$\langle H_{x, \vec{u}},\ \psi(x, \vec{u})\rangle = \langle K_{x, y},\ \psi(x, \overrightarrow{x-y})\rangle,\quad \psi \in \mathscr{D}(E, \vec{E}),$$

$$\langle K_{x, y},\ \varphi(x, y)\rangle = \langle H_{x, \vec{u}},\ \varphi(x, x-\vec{u})\rangle,\quad \varphi \in \mathscr{D}(E, E).$$

Для удобства мы используем следующее обозначение: если задано $K_{x,y}$, то $H_{x,\vec{u}} = K_{x,x-\vec{u}}$, а если задано $H_{x,\vec{u}}$, то $K_{x,y} = H_{x,\overrightarrow{x-y}}$. Для того чтобы описать те обобщенные функции H, которым соответствуют инвариантные относительно сдвигов функции K, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
\underset{(x,\,y)}{E \times E} & \longrightarrow & \underset{(x,\,\vec{u})}{E \times \vec{E}} \\
\text{Сдвиг при помощи } \vec{a} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\underset{(x',\,y') = (x+\vec{a},\,y+\vec{a})}{E \times E} & \longrightarrow & \underset{(x',\,\vec{u}') = (x+\vec{a},\,\vec{u})}{E \times \vec{E}}
\end{array}$$

Эта диаграмма порождает коммутативную диаграмму для обобщенных функций, определенных на соответствующих пространствах:

$$\begin{array}{ccc}
K_{x,y} & \longrightarrow & H_{x,\vec{u}} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\sigma K & \longrightarrow & \tau H
\end{array}$$

где σ — оператор сдвига, действующий на две переменные x и y функции K, а τ — соответствующий оператор сдвига, действующий только на первую переменную x функции H. Таким образом, вместо того чтобы искать обобщенные функции $K \in \mathcal{D}'(E \times E) \otimes F \otimes \overline{F}$, инвариантные относительно всех сдвигов, действующих на две переменные, мы должны найти функции $H \in \mathcal{D}'(E \times \vec{E}) \otimes F \otimes \overline{F}$, инвариантные относительно всех сдвигов, действующих только на первую переменную.

Воспользовавшись теперь теоремой о ядрах:

$$\mathcal{D}'(E \times \vec{E}) \approx \mathcal{L}_b(\mathcal{D}(E);\ \mathcal{D}'(\vec{E})) = \mathcal{D}'(E;\ \mathcal{D}'(\vec{E})),$$

мы видим, что

$$\mathcal{D}'(E \times \vec{E}) \otimes F \otimes \overline{F} \approx \mathcal{D}'(E;\ \mathcal{D}'(\vec{E}) \otimes F \otimes \overline{F}).$$

Таким образом, $H_{x,\vec{u}}$ является обобщенной функцией, определенной на E, принимающей значения в бесконечномерном локально выпуклом топологическом векторном пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{D}'(E) \otimes F \otimes \overline{F}$, и мы должны искать такие H, которые инвариантны относительно всех сдвигов, действующих только на E. Мы будем рассматривать $H_{x, \vec{u}}$ как элемент пространства $\mathcal{D}'(E, \mathcal{F})$.

Выберем в E меру Лебега dx. Ответ на наш вопрос заключен в следующей теореме.

Теорема. *Всякая обобщенная функция $T \in \mathcal{D}'(E, \mathcal{F})$, инвариантная относительно всех сдвигов, действующих на E, является константой, т. е. $T = 1_x \otimes \vec{\lambda}$, где $\vec{\lambda} \in \mathcal{F}$ (или $T = dx \otimes \vec{\lambda}$).*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{D}(E)$—бесконечно дифференцируемая функция, такая, что $\int \alpha(x)\, dx = 1$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(E)$ имеем

$$\langle T * \alpha, \varphi \rangle = \langle T_\xi \otimes \alpha(\eta);\ \varphi(\xi + \eta) \rangle =$$
$$= \int \alpha(\eta)\, d\eta\, \langle T_\xi, \varphi(\xi + \eta) \rangle =$$
$$= \int \alpha(\eta)\, d\eta\, \langle T_t,\ \varphi(t) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Здесь мы воспользовались инвариантностью T относительно сдвигов. Таким образом, $T * \alpha = T$. Согласно теореме, приведенной в предыдущем параграфе, T является бесконечно дифференцируемой функцией, и из инвариантности T относительно всех сдвигов следует, что T — константа.

В рассматриваемом случае если $H_{x, \vec{u}}$ инвариантно относительно всех сдвигов, действующих на $x \in E$, то

$$H_{x, \vec{u}} = 1_x \otimes H_{\vec{u}} \quad \left(\text{или } H_{x, \vec{u}} = dx \otimes H_{\vec{u}}\right),$$

где

$$H_{\vec{u}} \in \mathcal{F} = \mathcal{D}'(\vec{E}) \otimes F \otimes \overline{F}.$$

Мы показали, что антиядра $K_{x, y} \in \mathcal{D}'(E \times E) \otimes F \otimes \overline{F}$, инвариантные относительно группы сдвигов, действующей в пространстве $E \times E$, взаимно однозначно соответствуют обобщенным функциям $H_{\vec{u}} \in \mathcal{D}'(\vec{E}) \otimes F \otimes \overline{F}$, определенным на E и принимающим значения в $F \otimes \bar{F}$. Если задана обобщенная функция $H_{\vec{u}}$, то соответствующая инвариантная функция K задается формулой

$$K_{x,y} = H_{x, \overrightarrow{x-y}} = 1_x \otimes H_{\overrightarrow{x-y}} = H_{\overrightarrow{x-y}},$$

т. е. для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(E \times E)$ имеем

$$\langle K_{x,y}, \varphi(x, y)\rangle = \langle 1_x \otimes H_{\vec{u}}, \varphi(x, x - \vec{u})\rangle =$$
$$= \left\langle H_{\vec{u}}, \int \varphi(x, x - \vec{u})\, dx\right\rangle = \int dx \,\langle H_{\vec{u}}, \varphi(x, x - \vec{u})\rangle.$$

(При вычислении $\langle H_{\vec{u}}, \varphi(x, x - \vec{u})\rangle$ переменная x считается фиксированной.)

Найдем теперь условия на функцию $H_{\vec{u}}$, которые соответствуют положительности или суперположительности $K_{x,y}$. Напомним, что обобщенная функция $K_{x,y}$ называется положительной, если

$$\langle K_{x,y}, \varphi(x) \otimes \overline{\varphi(y)}\rangle \geqslant 0 \text{ в } F \otimes \bar{F}$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. Для функции $H_{\vec{u}}$ это условие принимает вид

$$\left\langle H_{\vec{u}}, \int \varphi(x) \bar{\varphi}(x - \vec{u})\, dx\right\rangle \geqslant 0 \text{ в } F \otimes \bar{F}$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(E)$. Для того чтобы исключить из рассмотрения аффинное пространство E, мы можем выбрать в E начальную точку, и тогда (если вспомнить, что существует взаимно однозначное соответствие между E и $\vec{E}$) условие положительности примет вид

$$\left\langle H_{\vec{u}}, \int \varphi(\vec{x})\, \bar{\varphi}(\vec{x} - \vec{u})\, d\vec{x}\right\rangle \geqslant 0 \text{ в } F \otimes \bar{F}$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\vec{E})$. Интеграл в этом неравенстве означал бы свертку, если бы вместо $\vec{x} - \vec{u}$ стояло $\vec{u} - \vec{x}$. Введем обозначения

$$\check{\psi}(x) = \psi(-x),$$
$$\tilde{\psi}(x) = \bar{\psi}(-x);$$

тогда условие на H, соответствующее положительности для K, имеет вид

$$\langle H, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle \geqslant 0 \text{ в } F \otimes \bar{F}$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\vec{E})$. Аналогично условие на H, соответствующее суперположительности для K, принимает вид

$$\langle H, \psi * \tilde{\psi} \rangle \geqslant 0 \text{ в } \mathbf{C}$$

для любой функции $\psi \in \mathscr{D}(\vec{E}; F')$.

Результаты настоящего параграфа объединены в следующей теореме.

Теорема. *Пусть E — (конечномерное) аффинное пространство и F — конечномерное векторное пространство. Гильбертовы пространства $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(E; F)$ или соответствующие суперположительные антиядра $K_{x, y} \in \mathscr{D}'(E \times E) \otimes F \otimes \bar{F}$, инвариантные относительно группы сдвигов, действующей аффинно на E и тождественно на F, взаимно однозначно соответствуют обобщенным функциям $H_{\vec{u}} \in \mathscr{D}'(\vec{E}) \otimes F \otimes \bar{F}$ суперположительного типа. Условие положительности функции H имеет вид*

$\langle H, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle \geqslant 0$ в $F \otimes \bar{F}$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\vec{E})$, а условие суперположительности имеет вид

$\langle H, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle \geqslant 0$ в $\mathbf{C}$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\vec{E}; F')$.

Вышеприведенные определения положительности в $\mathscr{D}'(\vec{E}) \otimes F \otimes \bar{F}$ являются естественными обобщениями понятия положительности функций в смысле Бохнера.

Определение. Функция f, определенная в l-мерном векторном пространстве $\vec{E}$, называется *положительной в смысле Бохнера* [1]), если для любого множества элементов $\{x_1, \ldots, x_l\}$ из $\vec{E}$ и любого множества комплекс-

[1]) Обычно такие функции называют положительно определенными. — *Прим. ред.*

ных чисел $\{z_1, \ldots, z_l\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i, j} f(x_i - x_j) z_i \bar{z}_j \geqslant 0.$$

В том случае, когда скалярное антиядро $K_{x, y}$ задается непрерывной функцией $K(x, y)$, мы видели, что классическое определение положительности совпадает с определением положительности антиядер ($\langle K, \varphi \otimes \bar{\varphi} \rangle \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{D}$).

Аналогично в данном случае, если f — непрерывная функция, то условие *положительности в смысле Бохнера* эквивалентно условию

$$\int\int f(x-y)\varphi(x)\bar{\varphi}(y)\,dx\,dy \geqslant 0$$

или

$$\int f(u)\,du \int \varphi(x)\bar{\varphi}(x-u)\,dx \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$. Заметим, что если обобщенная функция $H_{\vec{u}} \in D'(\vec{E}) \otimes F \otimes \vec{F}$ является обычной непрерывной функцией $H(\vec{u})$, то $H_{\overrightarrow{x-y}} = H(\overrightarrow{x-y})$, и мы можем обобщить понятие положительности в смысле Бохнера на пространство $\mathscr{D}'(\vec{E}) \otimes F \otimes \bar{F}$. К сожалению, здесь возможны два определения.

Определение. Обобщенная функция $H \in \mathscr{D}'(\vec{E}) \otimes \otimes F \otimes \bar{F}$ называется

(а) *положительной в смысле Бохнера*, или *Б-положительной*, если

$$\langle H, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle \geqslant 0 \text{ в } F \otimes \bar{F}$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(E)$,

(б) *суперположительной в смысле Бохнера*, или *Б-суперположительной, если*

$$\langle H, \psi * \tilde{\psi} \rangle \geqslant 0 \text{ в } \mathbf{C}$$

для любой функции $\psi \in \mathscr{D}(\vec{E}, F')$.

Мы обсудим вопрос об эквивалентности этих двух определений в одном из последующих параграфов (см. § 5 этой главы).

§ 4. Преобразования Фурье

Пусть $\vec{E}$ — конечномерное вещественное векторное пространство с мерой Лебега $d\vec{x}$. *Преобразование Фурье* $\mathcal{F}f$ функции $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \vec{E}$, определяется равенством [1])

$$\mathcal{F}f = g(\overleftarrow{p}) = \int e^{-2i\pi\langle\vec{x},\, \overleftarrow{p}\rangle} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{1}$$

где $\overleftarrow{p}$ принадлежит дуальному к $\vec{E}$ пространству $\overleftarrow{E}'$ и $\langle\vec{x}, \overleftarrow{p}\rangle$ является дуальным произведением. В пространстве $\vec{E}$ можно выбрать базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ таким образом, чтобы мера Лебега равнялась $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$. Вектор $\vec{x} = \sum\limits_i x_i \vec{e}_i$ определяется своими координатами $\{x_i\}$, а вектор $\overleftarrow{p} = \sum\limits_i p_i \overleftarrow{e}'_i$ определяется координатами $\{p_i\}$. В этом случае равенство (1) принимает вид

$$\mathcal{F}f = g(p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$
$$= \int e^{-2i\pi(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Если в $\vec{E}$ задано скалярное произведение $(\vec{x}\,|\,\vec{y})$, то преобразование Фурье можно определить формулой

$$\gamma(\vec{y}) = \int e^{-2i\pi(\vec{x}\,|\,\vec{y})} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Однако мы будем придерживаться определения, выраженного равенством (1).

---

[1]) В нашей литературе принято другое определение преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}f = \int e^{i\langle\vec{x},\, \overleftarrow{p}\rangle} f(\vec{x})\, d\vec{x},$$

поэтому преобразование Фурье обобщенных функций определяется равенством

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = 2\pi \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle.$$

В своих лекциях Лоран Шварц придерживается обозначений, принятых в его книге: Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1, 2, Hermann, Paris, 1950—1951. — *Прим. перев.*

Если $f \in L^1$, то интеграл (1) существует и функция $g(\overleftarrow{p})$ непрерывна и ограничена; в самом деле,

$$|g(\overleftarrow{p})| \leqslant \|f\|_1.$$

Если $\mathcal{F} f = g$ и функция $x_j f$ интегрируема для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$, то существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial g}{\partial p_j}$, причем

$$\mathcal{F}(-2i\pi x_j f) = \frac{\partial g}{\partial p_j}.$$

Если f быстро убывает на бесконечности, т. е. если для любого полинома P произведение Pf интегрируемо, то все производные g существуют и ограничены.

Проинтегрируем равенство (1) по частям. Получим

$$g(\overleftarrow{p}) = \int dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n \times$$
$$\times \left\{ \left[\frac{1}{-2i\pi p_j} e^{-2i\pi\langle\overrightarrow{x}, \overleftarrow{p}\rangle} f \right]_{-\infty}^{\infty} - \right.$$
$$\left. - \int \frac{1}{-2i\pi p_j} e^{-2i\pi\langle\overrightarrow{x}, \overleftarrow{p}\rangle} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \right\}.$$

Допустим, что $f \in L^1$ и что первые производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ непрерывны и интегрируемы; тогда, как легко видеть, f должна стремиться к нулю на бесконечности. Следовательно,

$$2i\pi p_j g(\overleftarrow{p}) = \int e^{-2i\pi\langle\overrightarrow{x}, \overleftarrow{p}\rangle} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, d\overrightarrow{x} \qquad (2)$$

и функция $p_j g(\overleftarrow{p})$ непрерывна и ограничена.

Если f бесконечно дифференцируема и все ее производные принадлежат L^1, то произведение g на любой полином остается непрерывным и ограниченным.

Определение. Пространством $\mathcal{S}(\overrightarrow{E})$ называется пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, у которых все производные быстро убывают на бесконечности, т. е. для произвольных полиномов P и Q

произведение $P(x)Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f$ *существует и ограничено*, или (эквивалентно) $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P(x)f$ *существует и ограничено.*

Легко доказать следующую теорему.

Теорема.

$$\varphi \in \mathscr{S}(\vec{E}) \Rightarrow \mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\overleftarrow{E}').$$

Распространим теперь понятие преобразования Фурье на обобщенные функции. Прежде всего заметим, что если мера Лебега задана в $\vec{E}$, то она тем самым задана и в $\overleftarrow{E}'$, потому что если в пространстве $\vec{E}$ выбрать базис так, чтобы по отношению к нему заданная мера Лебега равнялась $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, то дуальный базис в $\overleftarrow{E}'$ определит меру Лебега $dp_1\, dp_2 \ldots dp_n$.

Для $f \in L^1$, $\varphi \in \mathscr{D}_p(\overleftarrow{E}')$ рассмотрим дуальное произведение φ на Фурье-образ $g(\overleftarrow{p})$ функции f:

$$(g, \varphi) = \langle \mathscr{F}f, \varphi\rangle = \int \varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p} \int e^{-2i\pi\langle\vec{x}, \overleftarrow{p}\rangle} f(\vec{x})\, d\vec{x} =$$

$$= \int f(\vec{x})\, d\vec{x} \int e^{-2i\pi\langle\vec{x}, \overleftarrow{p}\rangle}\varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p} = \langle f, \psi\rangle,$$

где

$$\psi = \int e^{-2i\pi\langle\vec{x}, \overleftarrow{p}\rangle}\varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p} = \mathscr{F}\varphi.$$

Таким образом, имеем

$$\langle \mathscr{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathscr{F}\varphi\rangle.$$

Ввиду этого можно попытаться определить преобразование Фурье обобщенных функций следующим равенством:

$$\langle \mathscr{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathscr{F}\varphi\rangle,$$

где $\varphi \in \mathscr{D}_p$, $T \in \mathscr{D}'_x$. Хотелось бы, чтобы $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{D}_x$, но, к сожалению, $\mathscr{F}\varphi \notin \mathscr{D}_x$, за исключением случая $\varphi \equiv 0$.

В этот момент на помощь приходит пространство $\mathscr{S}(\vec{E})$. Топология в $\mathscr{S}$ определяется следующим образом.

Определение. $f_j \to 0$ *в смысле пространства* $\mathscr{S}$, если $P(x)\,Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f_j$ равномерно сходится к нулю для произвольных полиномов P и Q.

Пространство $\mathscr{S}'(\vec{E})$ непрерывных линейных функционалов над $\mathscr{S}(\vec{E})$ называется *пространством обобщенных функций медленного роста*. Заметим, что

$$\mathscr{D}(\vec{E}) \subset \mathscr{S}(\vec{E})$$

и

$$f_j \to 0 \text{ в } \mathscr{D} \Rightarrow f_j \to 0 \text{ в } \mathscr{S},$$

так что всякий непрерывный линейный функционал над $\mathscr{S}$ является непрерывным линейным функционалом над $\mathscr{D}$. Таким образом, существует непрерывное линейное отображение пространства $\mathscr{S}'(\vec{E})$ на подпространство пространства $\mathscr{D}'(\vec{E})$. В действительности это отображение является вложением, так как $\mathscr{D}(\vec{E})$ плотно в $\mathscr{S}(\vec{E})$. Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Пространство* $\mathscr{D}(\vec{E})$ *всюду плотно в* $\mathscr{S}(\vec{E})$.

Примеры.

(1) $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел.

(2) Любая локально интегрируемая и измеримая функция f, такая, что $|f(x)| \leqslant P(x)$ для некоторого полинома $P(x)$, является обобщенной функцией медленного роста.

(3) e^x не является обобщенной функцией медленного роста.

Доказательство. Возьмем $\varphi(x) = e^{-\sqrt[4]{x^2+1}}$, тогда

$$\langle e^x, \varphi \rangle = \int e^x e^{-\sqrt[4]{x^2+1}}\, dx,$$

а этот интеграл расходится.

Определение. *Преобразование Фурье* $\mathscr{F}T$ *обобщенной функции* $T \in \mathscr{S}'_x$ определяется равенством

$$\langle \mathscr{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathscr{F}\varphi \rangle,$$

где $\varphi \in \mathscr{S}_p$.

Так как $\varphi \in \mathscr{S}_p \Rightarrow \mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}_x$, то преобразование Фурье существует для всех $T \in \mathscr{S}'_x$. Если $\varphi \to 0$ в $\mathscr{S}_p$, то $\mathscr{F}\varphi \to 0$ в $\mathscr{S}_x$ и

$$\langle \mathscr{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathscr{F}\varphi \rangle \to 0,$$

так что $\mathscr{F}T$ — непрерывный линейный функционал и $\mathscr{F}T \in \mathscr{S}'_p$.

Замечание. Если обобщенная функция T совпадает с обычной функцией $f \in L^1$, то T — обобщенная функция медленного роста, и определенное выше преобразование Фурье функции T совпадает с преобразованием Фурье функции f, определенным формулой (1):

$$\mathscr{F}T = \mathscr{F}f.$$

Приведем теперь некоторые основные свойства преобразований Фурье обобщенных функций медленного роста; доказательство многих из этих свойств мы опускаем.

(1) $\mathscr{F}\delta = 1$.

Доказательство.

$$\langle \mathscr{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathscr{F}\varphi \rangle = \left\langle \delta, \int e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} \varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p} \right\rangle =$$
$$= \int \varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p} = \langle 1, \varphi \rangle.$$

(2) $\mathscr{F}\dfrac{\partial \delta}{\partial x_j} = 2i\pi p_j$

и аналогично для полиномов P имеем

$$\mathscr{F}P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta = P(2i\pi p).$$

(3) *Формула обращения.* Если преобразование $\overline{\mathscr{F}}$ определить заменой i на $-i$ в определении $\mathscr{F}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F} = 1,$$

$V = \mathscr{F} U \Longleftrightarrow U = \overline{\mathscr{F}} V$. (Если одна из обобщенных функций U или V является обобщенной функцией медленного роста, то и другая будет функцией медленного роста и формула обращения имеет смысл.)

(4) $\overline{\mathscr{F}} \delta = 1$.

(5) $\mathscr{F} 1 = \overline{\mathscr{F}} 1 = \delta$.

(6) $\mathscr{F}(-2i\pi x_j) = \frac{\partial \delta}{\partial p_j}$

и аналогично для полиномов P имеем

$$\mathscr{F} P(-2\pi i x) = P\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)\delta.$$

Замечание. Пусть $g = \mathscr{F} f$ для $f \in L^1$. Тогда функция g непрерывна и ограничена, но не обязательно интегрируема. В этом случае обратное преобразование Фурье $f(\vec{x}) = \int e^{2\pi i \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} g(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p}$ *не существует в классическом смысле*, однако *в смысле обобщенных функций* обратное преобразование Фурье *всегда существует.*

(7) $f \in L^2 \Longleftrightarrow \mathscr{F} f \in L^2$ (здесь функции из L^2 рассматриваются как обобщенные функции).

(8) $\|\mathscr{F} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

(9) Если $f,\ g \in L^2$ и $F = \mathscr{F} f$, $G = \mathscr{F} g$, то

$$\int f(\vec{x})\, \overline{g(\vec{x})}\, d\vec{x} = \int F(\overleftarrow{p})\, \overline{G(\overleftarrow{p})}\, d\overleftarrow{p},$$

т. е. *$\mathscr{F}$ является унитарным оператором.*

(10) Если $T \in \mathscr{S}'$ и T имеет компактный носитель, то $V(\overleftarrow{p}) = \langle T_x,\ e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} \rangle$ является бесконечно дифференцируемой функцией от $\overleftarrow{p}$ и $V(\overleftarrow{p}) = \mathscr{F} T$.

Доказательство. Доказательство *дифференцируемости* обсуждалось в параграфе о тензорном произведении (см. § 1, гл. III). Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F} T,\ \varphi \rangle &= \langle T,\ \mathscr{F} \varphi \rangle = \\
&= \left\langle T_x,\ \int e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} \varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p} \right\rangle = \\
&= \langle T_x \otimes \varphi(\overleftarrow{p}),\ e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} \rangle = \\
&= \int \varphi(\overleftarrow{p})\, d\overleftarrow{p}\, \langle T_x e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} \rangle = \langle V,\ \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Если разрешить переменной $\overleftarrow{p}$ принимать комплексные значения, то $V(\overleftarrow{p})$ будет голоморфной функцией.

(11) Если S, $T \in \mathscr{S}'$, T имеет компактный носитель (так что свертка $S * T$ имеет смысл) и $U = \mathscr{F}S$, $V = \mathscr{F}T$, то произведение UV имеет смысл, $UV \in \mathscr{S}'$ и $UV = \mathscr{F}(S * T)$. Таким образом, преобразование Фурье переводит свертку в произведение, а произведение—в свертку.

§ 5. Теорема Бохнера

Теорема Бохнера для скалярных обобщенных функций. *Обобщенная функция T на $\vec{E}_n$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда T — обобщенная функция медленного роста и ее преобразование Фурье является положительной мерой степенного роста*[1]).

Напомним, что обобщенная функция T называется положительно определенной, если $\langle T, \varphi * \tilde{\varphi}\rangle \geqslant 0$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\vec{E}_n)$.

Определение. Пусть $\vec{M}$ — упорядоченное векторное пространство. Мы говорим, что обобщенная функция $\vec{T} \in \mathscr{D}'(\vec{E}_n) \otimes \vec{M}$ является Б-*положительной*, если $\langle \vec{T}, \varphi * \tilde{\varphi}\rangle$ — положительный элемент пространства $\vec{M}$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\vec{E}_n)$.

Теорема Бохнера для векторных обобщенных функций. *Пусть $\vec{M}$—конечномерное векторное пространство. Обобщенная функция $\vec{T} \in \mathscr{D}'(\vec{E}_n) \otimes \vec{M}$ является* Б-*положительной тогда и только тогда, когда $\vec{T}$ — обобщенная функция медленного роста и*

[1]) Доказательство теоремы Бохнера можно найти в книге Л. Шварца (Schwartz L., Théorie des distributions, т. 2, p. 132), или в книге И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина, Обобщенные функции, вып. 4, Физматгиз, М., 1961, гл. 2, § 3. — *Прим. ред.*

ее преобразование Фурье $\mathscr{F}\vec{T} \in \mathscr{D}'(\overleftarrow{E}'_n) \otimes \vec{M}$ *является положительной мерой степенного роста.*

Доказательство. Необходимость. Докажем сначала, что $\vec{T}$ является обобщенной функцией медленного роста. Пусть Γ—замкнутый выпуклый конус, определяющий порядок в $\vec{M}$, Γ'—дуальный конус в $\overleftarrow{M}'$. Обобщенная функция $\vec{T}$, принимающая значения в пространстве $\vec{M}$, является непрерывным линейным отображением $\mathscr{D}(\vec{E}_n) \to \vec{M}$; любой элемент $\overleftarrow{m}' \in \Gamma'$ определяет отображение $\vec{M} \to \mathbf{C}$. Таким образом, отображение $\vec{T}$ с последующим отображением $\overleftarrow{m}'$ является скалярной обобщенной функцией $\overleftarrow{m}' \circ \vec{T}$[1]):

$$\langle \overleftarrow{m}' \circ \vec{T}, \varphi \rangle = \overleftarrow{m}'(\langle \vec{T}, \varphi \rangle).$$

Так как обобщенная функция $\vec{T}$ является Б-положительной, имеем

$$\langle \overleftarrow{m}' \circ \vec{T}, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle = \overleftarrow{m}'(\langle \vec{T}, \varphi * \tilde{\varphi} \rangle) \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\vec{E})$ и любого вектора $\overleftarrow{m}' \in \Gamma'$. Следовательно, для любого вектора $\overleftarrow{m}' \in \Gamma'$ выражение $\overleftarrow{m}' \circ \vec{T}$ является положительно определенной скалярной обобщенной функцией. По теореме Бохнера для скалярных обобщенных функций, $\overleftarrow{m}' \circ \vec{T}$ является обобщенной функцией медленного роста. Так как конечные линейные комбинации обобщенных функций медленного роста являются также обобщенными функциями медленного роста и так как пространство $\overleftarrow{M}'$ порождается векторами из дуального конуса Γ', то выражение $\overleftarrow{m}' \circ \vec{T}$ является обобщенной функцией медленного роста для любого вектора $\overleftarrow{m}' \in \overleftarrow{M}'$.

---

[1]) Знак $\circ$ — зиак композиции двух отображеиий (или суперпозиции двух функций) $(f \circ g) \cdot (x) = f(g(x))$.— *Прим. перев.*

Отсюда следует, что $\vec{T}$ — обобщенная функция медленного роста.

Чтобы доказать, что $\vec{\mu} = \mathcal{F}\vec{T}$ является положительной мерой степенного роста, заметим прежде всего, что при любом $\overleftarrow{m}' \in \Gamma'$ композиция

$$\overleftarrow{m}' \circ \vec{\mu} = \overleftarrow{m}' \circ \mathcal{F}\vec{T} = \mathcal{F}(\overleftarrow{m}' \circ \vec{T})$$

является положительной мерой степенного роста, согласно теореме Бохнера для скалярных обобщенных функций. Так как пространство $\overleftarrow{M}'$ порождается векторами из Γ', то $\overleftarrow{m}' \circ \vec{\mu}$ — мера степенного роста для любого вектора $\overleftarrow{m}' \in \overleftarrow{M}'$. Следовательно, $\vec{\mu}$ является мерой степенного роста.

Для того чтобы доказать, что мера $\vec{\mu}$ положительна, нужно показать, что $\langle \vec{\mu}, \varphi \rangle \in \Gamma$ для всякой непрерывной функции $\varphi \geqslant 0$ с компактным носителем. Достаточно показать, что $\overleftarrow{m}'(\langle \vec{\mu}, \varphi \rangle) \geqslant 0$ для произвольного вектора $\overleftarrow{m}' \in \Gamma'$. Но так как композиция $\overleftarrow{m}' \circ \vec{\mu}$ — положительная скалярная мера, то

$$\overleftarrow{m}'(\langle \vec{\mu}, \varphi \rangle) = \langle \overleftarrow{m}' \circ \vec{\mu}, \varphi \rangle \geqslant 0.$$

Достаточность. Любая функция $\psi \in \mathcal{S}(\overleftarrow{E}'_n)$, $\psi \geqslant 0$, является пределом в $\mathcal{S}$ последовательности функций $a_\nu \psi$, где функции a_ν можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:

(I) $a_\nu \in \mathcal{D}(\overleftarrow{E}'_n)$;

(II) $0 \leqslant a_\nu \leqslant 1$;

(III) $a_\nu - 1 \to 0$ равномерно вместе со всеми производными на любом компактном множестве.

Так как функции $a_\nu \psi$ непрерывны и имеют компактный носитель, а $\vec{\mu} = \mathcal{F}\vec{T}$ — положительная мера, то $\langle \vec{\mu}, a_\nu \psi \rangle \geqslant 0$ в пространстве $\vec{M}$. Переходя к пределу (что возможно, так как $\vec{\mu}$ имеет степенной рост), получаем

$$\langle \vec{\mu}, \psi \rangle \geqslant 0 \quad \text{в пространстве } \vec{M}.$$

Это неравенство справедливо для любой функции $\psi \in \mathscr{S}(\overleftarrow{E}')$, $\psi \geqslant 0$. Положим $\psi = \varphi\overline{\varphi}$, $\varphi \in \mathscr{S}$. Тогда

$$0 \leqslant \langle \vec{\mu}, \varphi\overline{\varphi} \rangle = \langle \mathscr{F}\vec{T}, \varphi\overline{\varphi} \rangle = \langle \vec{T}, \mathscr{F}(\varphi\overline{\varphi}) \rangle = \langle \vec{T}, \mathscr{F}\varphi * \mathscr{F}\overline{\varphi} \rangle.$$

Но $\mathscr{F}\varphi$ может быть любой функцией θ из пространства $\mathscr{S}(\vec{E}_n)$ и тогда $\mathscr{F}\overline{\varphi} = \widetilde{\theta}$. Следовательно, для любой функции $\theta \in \mathscr{S}$ имеет место неравенство

$$\langle \vec{T}, \theta * \widetilde{\theta} \rangle \geqslant 0 \quad \text{в пространстве } \vec{M}.$$

Исследуем теперь Б-суперположительность.

Л е м м а 1. *Пусть $\vec{\psi}$ — непрерывная функция с компактным носителем, принимающая значения в конечномерном упорядоченном векторном пространстве $\vec{N}$, такая, что $\vec{\psi} \geqslant 0$. Тогда $\vec{\psi}$ можно равномерно аппроксимировать конечными суммами вида $\sum \alpha_i \vec{\psi}_i$, где $\vec{\psi}_i$ — неотрицательные векторы в пространстве $\vec{N}$, а α_i — непрерывные неотрицательные скалярные функции с компактным носителем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{\psi}$ имеет носитель K. Выберем любое $\varepsilon > 0$. Так как носитель K компактен, а $\vec{\psi}$ — непрерывная функция, существует конечное открытое покрытие $\{\Omega_i\}$ носителя K, такое, что колебание функции $\vec{\psi}$ на каждом из множеств Ω_i не превосходит ε. Пусть $\{\alpha_i\}$ — разбиение единицы на K, отвечающее покрытию $\{\Omega_i\}$. Пусть $\vec{\psi}_i$ является значением функции $\vec{\psi}$ в произвольной точке множества Ω_i. Имеем $\vec{\psi}_i \geqslant 0$, и, кроме того,

$$\| \vec{\psi} - \sum \alpha_i \vec{\psi}_i \| = \| \sum \alpha_i \vec{\psi} - \sum \alpha_i \vec{\psi}_i \| \leqslant \sum \alpha_i \varepsilon = \varepsilon.$$

Л е м м а 2. *Если $\vec{\mu}$ является положительной мерой на $\overleftarrow{E}'_n$, принимающей значения в конечномерном упорядоченном векторном пространстве $\vec{M}$, то $\langle \vec{\mu}, \overleftarrow{\psi} \rangle \geqslant$*

$\geqslant 0$, *какова бы ни была непрерывная функция* $\overleftarrow{\psi}$ *с компактным носителем, принимающая положительные значения в* $\overleftarrow{M}'$ *(в смысле дуального отношения порядка).*

Доказательство. В силу леммы 1 любая данная функция $\overleftarrow{\psi} \in \mathscr{D}(\overleftarrow{E}'_n) \otimes \overleftarrow{M}'$, такая, что $\overleftarrow{\psi} \geqslant 0$, может быть равномерно аппроксимирована конечными суммами вида $\sum \overleftarrow{m}'_i \alpha_i$, где $\overleftarrow{m}'_i \geqslant 0$ (в $\overleftarrow{M}'$), $\alpha_i \geqslant 0$ и α_i — непрерывные скалярные функции с компактным носителем. Имеем

$$\langle \vec{\mu}, \sum \overleftarrow{m}'_i \alpha_i \rangle = \sum \langle \langle \vec{\mu}, \alpha_i \rangle, \overleftarrow{m}'_i \rangle \geqslant 0,$$

так как

$$\langle \vec{\mu}, \alpha_i \rangle \geqslant 0 \quad \text{в пространстве } \vec{M} \text{ и}$$

$$\overleftarrow{m}'_i \geqslant 0 \text{ в дуальном пространстве } \overleftarrow{M}'.$$

Пусть F — конечномерное векторное пространство.

Теорема. *Если* $\vec{\mu}$ — *положительная мера степенного роста на* $\overleftarrow{E}'$, *принимающая значения в пространстве* $F \otimes \overline{F}$, *то ее преобразование Фурье* $\vec{T} = \overline{\mathscr{F}} \vec{\mu}$ *является* Б-*суперположительной обобщенной функцией.*

В этом утверждении $\vec{\mu}$ положительна в смысле „естественного“ отношения порядка в $F \otimes \overline{F}$.

Доказательство. Рассмотрим любую функцию $\overleftarrow{\varphi} \in \mathscr{S}(\overleftarrow{E}'_n) \otimes F'$ (F' — пространство дуальное к F). Тогда $\overline{\varphi} \otimes \overleftarrow{\overline{\varphi}} \geqslant 0$ в $F' \otimes \overline{F}'$. По лемме 2, а также в силу того, что $\overleftarrow{\varphi}$ является пределом в $\mathscr{S}(\overleftarrow{E}'_n)$ последовательности функций из $\mathscr{D}(\overleftarrow{E}'_n) \otimes \overleftarrow{F}'$, имеем

$$\langle \vec{\mu}, \overleftarrow{\varphi} \otimes \overleftarrow{\overline{\varphi}} \rangle \geqslant 0.$$

Тогда

$$0 \leqslant \langle \overrightarrow{\mu}, \overleftarrow{\varphi} \otimes \overline{\overleftarrow{\varphi}} \rangle = \langle \mathscr{F} \overrightarrow{T}, \overleftarrow{\varphi} \otimes \overline{\overleftarrow{\varphi}} \rangle =$$
$$= \langle \overrightarrow{T}, \mathscr{F} (\overleftarrow{\varphi} \otimes \overline{\overleftarrow{\varphi}}) \rangle = \langle \overrightarrow{T}, \mathscr{F} \overleftarrow{\varphi} * \mathscr{F} \overline{\overleftarrow{\varphi}} \rangle =$$
$$= \langle \overrightarrow{T}, \overleftarrow{\theta} * \tilde{\overline{\overleftarrow{\theta}}} \rangle,$$

где $\overleftarrow{\theta} = \mathscr{F} \overleftarrow{\varphi}$ может быть любым элементом пространства

$$\mathscr{S} (\overleftarrow{E}'_n) \otimes \overleftarrow{F}'.$$

Следствие. *Для любой обобщенной функции* $\overrightarrow{T} \in \mathscr{D}' (\overrightarrow{E}_n) \otimes F \otimes \overline{F}$ *следующие два свойства эквивалентны:*

(а) $\overrightarrow{T}$ *является Б-положительной;*

(б) $\overrightarrow{T}$ *является Б-суперположительной.*

§ 6. Свойства „упрощенного" ядра

Подытожим коротко наши предыдущие рассмотрения. Мы имели дело с многообразием класса C^∞, так называемым миром V, и конечномерным векторным пространством $\overrightarrow{F}$ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Мы занимались определением $\overrightarrow{F}$-частиц в мире V. Каждая частица является гильбертовым пространством $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}' (V) \otimes \overrightarrow{F}$ (вложение непрерывно). *Движение* частицы определяется в этом случае обобщенной функцией $\overrightarrow{\psi} \in \mathscr{H}$, такой, что $\| \overrightarrow{\psi} \|_{\mathscr{H}} = 1$.

Мы видели, что

(а) существует взаимно однозначное соответствие между $\overrightarrow{F}$-частицами $\mathscr{H}$ и положительными антиядрами, т. е. непрерывными положительными антилинейными отображениями

$$\mathscr{D} (V) \otimes \overleftarrow{F}' \to \mathscr{D}' (V) \otimes \overrightarrow{F}.$$

Это соответствие сохраняет алгебраическую структуру и отношение порядка.

(б) Положительным антиядрам взаимно однозначно соответствуют суперположительные обобщенные функции $K_{x,y} \in \mathscr{D}'(V \otimes V) \otimes \vec{F} \otimes \vec{\bar{F}}$ ($\vec{\bar{F}}$ — пространство, комплексно сопряженное к пространству $\vec{F}$), т. е. такие обобщенные функции $K_{x,y}$, что

$$\langle K_{x,y},\ \varphi(x) \otimes \overline{\varphi(y)} \rangle \geqslant 0,$$

какова бы ни была функция $\varphi \in \mathscr{D}(V) \otimes \overleftarrow{F}'$.

Если задана обобщенная функция $K_{x,y}$, то соответствующее ей антиядро K определяется формулой

$$\langle K \cdot \bar{\varphi},\ \psi \rangle = \langle K,\ \psi(x) \otimes \varphi(y) \rangle$$

для любых φ, $\psi \in \mathscr{D}(V) \otimes \overleftarrow{F}'$; здесь $\bar{\varphi}$ — элемент, комплексно сопряженный к φ в смысле сопряжения $\vec{F} \to \vec{\bar{F}}$, или точнее, в смысле транспонированного сопряжения $\overleftarrow{F}' \to \overleftarrow{\bar{F}}'$. Опять-таки это соответствие сохраняет различные алгебраические операции и отношение порядка.

Если, кроме того, нам дана структурная группа G, действующая соответствующим образом на мире V и на пространстве $\vec{F}$, то гильбертово пространство $\mathscr{H}$ является G-инвариантным, если обобщенная функция $K_{x,y}$ G-инвариантна.

(в) Мы ограничились затем частным случаем, когда $V = E_n$, где E_n — n-мерное аффинное пространство, а $G = \vec{E}_n$ является группой сдвигов на E_n, действующей тождественно в пространстве $\vec{F}$.

Мы рассматривали отображение

$$E_n \times E_n \to E_n \times \vec{E}_n, \qquad (x,\ y) \to (x,\ \vec{u}),$$

где $\vec{u} = \overrightarrow{x - y}$, и образ $H_{x,\vec{u}}$ обобщенной функции $K_{x,y}$ при этом отображении. Обратно, если задана обобщенная функция

$$H_{x,\vec{u}} \in \mathscr{D}'(E_n \times \vec{E}_n) \otimes \vec{F} \otimes \vec{\bar{F}},$$

то можно определить $K_{x,y}$ при помощи равенства $K_{x,y}=H_{x,\overrightarrow{x-y}}$.

Если обобщенная функция $K_{x,y}$ инвариантна относительно сдвигов

$$(x,\ y)\to(x+\vec{\alpha},\ y+\vec{\alpha}),\qquad \vec{\alpha}\in\vec{E}_n,$$

то $H_{x,\vec{u}}$ должна быть инвариантной относительно сдвигов

$$(x,\ \vec{u})\to(x+\vec{\alpha},\ \vec{u}).$$

Из инвариантности следует, что $H_{x,\vec{u}}=1_x\otimes H_{\vec{u}}$, где 1_x — единичная функция переменной x (т. е. функция, тождественно равная 1 на E_n) и $H_{\vec{u}}\in\mathscr{D}'(\vec{E}_n)\otimes\vec{F}\otimes\vec{\vec{F}}$.

Суперположительность обобщенной функции $K_{x,y}$ эквивалентна Б-суперположительности обобщенной функции $H_{\vec{u}}$. Но мы видели, что это эквивалентно Б-положительности.

Это в свою очередь означает, что $H_{\vec{u}}$ является обобщенной функцией медленного роста и ее преобразование Фурье является положительной мерой μ степенного роста со значениями в пространстве $\vec{F}\otimes\vec{\vec{F}}$. Обратно, любой такой мере соответствует Б-положительная обобщенная функция $H_{\vec{u}}$.

Замечание. Пусть K — антиядро, соответствующее частице $\mathscr{H}$. Тогда

$$K\bar{\varphi}=H*\bar{\varphi},\qquad \varphi\in\mathscr{D}(E_n)\otimes\overleftarrow{F}'.$$

Доказательство. Для любой функции $\Psi\in\mathscr{D}(E_n)\otimes\overleftarrow{F}'$ имеем

$$\begin{aligned}\langle K\bar{\varphi},\ \psi\rangle&=\langle K_{x,y},\ \psi(x)\otimes\bar{\varphi}(y)\rangle=\\&=\langle K_{x,y},\psi(x)\bar{\varphi}(y)\rangle=\langle 1_x\otimes H_{\vec{u}},\ \psi(x)\bar{\varphi}(x-\vec{u})\rangle=\\&=\int\psi(x)\,dx\,\langle H_{\vec{u}},\ \bar{\varphi}(x-\vec{u})\rangle=\\&=\langle (H*\bar{\varphi})(x),\ \psi(x)\rangle,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что $H*\bar{\varphi}$ — свертка обобщенной функции, определенной на векторном пространстве, с обобщенной функцией, определенной на аффинном пространстве, связанном с этим векторным пространством. Пусть E — аффинное пространство, $\vec{E}$ — связанное с ним векторное пространство, S_x — обобщенная функция на E, $T_{\vec{x}}$ — обобщенная функция на $\vec{E}$ (причем по крайней мере одна из них имеет компактный носитель).

Тогда общее определение свертки $S_x * T_{\vec{x}}$ задается выражением

$$\langle S_x * T_{\vec{x}}, \varphi(x)\rangle = \langle S_\xi \otimes T_{\vec{\eta}}, \varphi(\xi + \vec{\eta})\rangle.$$

Таким образом, $S_\xi * T_{\vec{\eta}}$ — обобщенная функция на аффинном пространстве E. Имеем также:

$$\|H*\bar{\varphi}\|_{\mathscr{H}} = \langle H*\bar{\varphi}, \varphi\rangle^{1/2} = \langle H, \varphi*\tilde{\varphi}\rangle^{1/2}.$$

В последнем члене для определения свертки $\varphi*\tilde{\varphi}$ необходим выбор начала координат, так как φ задана в аффинном пространстве. Заметим, что выбор начала координат необходимо сделать также для того, чтобы перенести понятие преобразования Фурье обобщенных функций на аффинное пространство.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, отметим, что если E — полное локально выпуклое топологическое векторное пространство, то утверждение «$\mathscr{H} \subset E$ соответствует антиядру L» означает, что L задается при помощи следующей композиции отображений:

$$E' \to \mathscr{H}' \to \mathscr{H} \to E,$$

где $\mathscr{H} \to E$ — каноническое вложение, $E' \to \mathscr{H}'$ — транспонированное к нему отображение и $\mathscr{H}' \to \mathscr{H}$ — канонический антиизоморфизм гильбертовых пространств.

В дальнейшем нам встретится случай, когда $\mathscr{H} \subset E_1 \subset E$, причем все вложения непрерывны. В частности, пространству $\mathscr{H}$ будет соответствовать антиядро $L_1 : E_1' \to E_1$, а также антиядро $L : E' \to E$. Для того чтобы различать эти два случая, антиядро L_1 мы будем называть E_1-антиядром, а антиядро L — E-антиядром.

Теорема. *Пусть E, E_1 — два полных локально выпуклых пространства, $E_1 \subset E$, и топология в E_1 сильнее, чем топология, индуцированная топологией пространства E. Пусть $\mathscr{H} \subset E$ — гильбертово пространство с более сильной топологией, чем топология, индуцированная из E, L — соответствующее $\mathscr{H}$ E-антиядро.*

Тогда для того чтобы имело место непрерывное вложение $\mathscr{H} \subset E_1$, необходимо и достаточно, чтобы L можно было разложить в композицаю отображений:

$$E' \to E_1' \to E_1 \to E, \tag{1}$$

где $E_1 \to E$ — естественное вложение, $E' \to E_1'$ — транспонированное к нему отображение, $E_1' \to E_1$ — непрерывное антилинейное отображение L_1. Если L можно разложить таким образом, то L_1 является E_1-антиядром, соответствующим пространству $\mathscr{H} \subset E_1$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[rrr, "L"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & & E \\
& \mathscr{H}' \arrow[r] & \mathscr{H} \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] & \\
E_1' \arrow[ur, dashed] \arrow[rrr, dashed, "L_1"'] & & & E_1 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

где $\mathscr{H} \to E$, $E_1 \to E$ — естественные вложения, $E' \to \mathscr{H}'$, $E' \to E_1'$ соответствующие транспонированные отображения и $\mathscr{H}' \to \mathscr{H}$ — канонический антиизоморфизм пространства $\mathscr{H}$ и дуального к нему гильбертова пространства $\mathscr{H}'$. Допустим теперь, что $\mathscr{H} \subset E_1$, причем вложение непрерывно. Тогда можно считать, что пунктирная стрелка $\mathscr{H} \dashrightarrow E_1$ обозначает естественное вложение $\mathscr{H}$ в E_1, $E_1' \dashrightarrow \mathscr{H}'$ означает отображение, транспонированное к этому вложению, а L_1 определяется композицией отображений:

$$E_1' \dashrightarrow \mathscr{H}' \to \mathscr{H} \dashrightarrow E_1.$$

Разложение (1) следует из коммутативности диаграммы (2) (т. е. из того, что при движении слева направо по любому возможному пути, указанному стрелками, получается один и тот же результат). Обратно, предположим, что имеет место разложение (1). Тогда E_1-антиядру соответствует гильбертово пространство $\mathscr{H}_1 \subset E_1$ с непрерывным вложением и L_1 можно разложить следующим образом:

$$E_1' \to \mathscr{H}_1' \to \mathscr{H}_1 \to E_1.$$

Отсюда следует, что диаграмма (2), в которой $\mathscr{H}$ нужно заменить на $\mathscr{H}_1$, коммутативна. Следовательно, $\mathscr{H}_1$ является гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в E и соответствующим E-антиядру L. Но в силу взаимно однозначного соответствия между E-антиядрами и гильбертовыми пространствами, непрерывно вложенными в E, имеем

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}.$$

Следовательно, мы получаем опять коммутативную диаграмму (2).

Эта теорема упрощает наши поиски частиц $\mathscr{H} \subset \subset \mathscr{D}'(E) \otimes \vec{F}$. Частице $\mathscr{H}$ соответствует отображение $K\bar{\varphi} = H * \bar{\varphi}$:

$$\varphi \in \mathscr{D}(E) \otimes \overleftarrow{F}' \to H * \bar{\varphi} \in \mathscr{D}'(E) \otimes \vec{F}.$$

Но H является обобщенной функцией медленного роста и, следовательно, $H * \bar{\varphi}$ не только определяет отображение из $\mathscr{D}(E) \otimes \overleftarrow{F}'$ в $\mathscr{D}(E) \otimes \vec{F}$, но также определяет отображение из $\mathscr{S}(E) \otimes \overleftarrow{F}'$ в $\mathscr{S}'(E) \otimes \vec{F}$. Таким образом, отображение $H * \bar{\varphi}$ можно разложить следующим образом:

$$\mathscr{D}(E) \otimes \overleftarrow{F}' \to \mathscr{S}(E) \otimes \overleftarrow{F}' \to \mathscr{S}'(E) \otimes \vec{F} \to \mathscr{D}'(E) \otimes \vec{F}.$$

Согласно доказанной выше теореме, если $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(F) \otimes \vec{F}$ (вложение непрерывно), то $\mathscr{H} \subset \mathscr{S}'(E) \otimes \vec{F}$ (вложение непрерывно).

Следовательно, наша задача сводится теперь к отысканию частиц в пространстве $\mathscr{S}'(E) \otimes \vec{F}$.

§ 7. Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ для скалярных частиц

Случай скалярных частиц выделяется тем, что $\vec{F} = \mathbf{C}$. В силу теоремы Бохнера мы можем теперь рассматривать положительные меры μ степенного роста на $\overleftarrow{E}'$ вместо Б-положительных обобщенных функций $\mathscr{H} \in \mathscr{D}'(\vec{E})$. Если на $\overleftarrow{E}'$ задана такая мера μ, то можно ввести пространство L^2 относительно меры μ. Каждый элемент $\dot{f}$ пространства L^2_μ является классом μ-измеримых функций f на $\overleftarrow{E}'$, совпадающих почти всюду в смысле меры μ и таких, что

$$\int\limits_{\overleftarrow{E}'} \| f(p \|^2 d\mu(p) < +\infty.$$

Скалярное произведение в L^2_μ определяется равенством

$$(\dot{f} \mid \dot{g})_{L^2_\mu} = \int f \bar{g} \, d\mu,$$

где f и g — любые представители классов соответственно $\dot{f}$ и $\dot{g}$.

Мы можем связать с пространством L^2_μ пространство Λ^2_μ обобщенных функций, определенных на $\overleftarrow{E}'$, вида $f\mu$, где $f \in L^2_\mu$ (заметим, что f — локально интегрируемая функция относительно меры μ).

Обобщенная функция $f\mu$ определяется равенством

$$\langle f\mu, \varphi \rangle = \int f\varphi \, d\mu, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\overleftarrow{E}').$$

Мы видим, что $f\mu$ определяет новую меру, одинаковую для всех f из одного и того же класса $\dot{f}$. Положим

$$(f\mu \mid g\mu)_{\Lambda^2_\mu} = \int f \bar{g} \, d\mu.$$

Это скалярное произведение превращает Λ^2_μ в гильбертово пространство; Λ^2_μ непрерывно вложено в $\mathscr{D}'(\overleftarrow{E}')$.

Теорема. *Если μ — положительная мера степенного роста на $\overleftarrow{E}'$, то пространство Λ^2_μ непрерывно вложено в $\mathscr{S}'(\overleftarrow{E}')$.*

Доказательство.

Для $\varphi \in \mathscr{D}$, $f \in L^2_\mu$ имеем

$$|\langle f\mu, \varphi\rangle| = \left|\int f\varphi\, d\mu\right| \leqslant \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int |\varphi|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

Так как мера μ имеет степенной рост, любое множество, ограниченное в $\mathscr{S}$, ограничено в пространстве L^2_μ. Если $\varphi \in \mathscr{S}$, то существует последовательность функций φ_j из пространства $\mathscr{D}$, сходящаяся к φ в смысле топологии пространства $\mathscr{S}$ и поэтому ограниченная в $\mathscr{S}$. Это означает, что приведенное выше неравенство остается справедливым для любой функции φ, принадлежащей $\mathscr{S}$, и когда φ пробегает ограниченное множество из $\mathscr{S}$, а f — единичную сферу в L^2_μ, величина $|\langle f\mu, \varphi\rangle|$ остается ограниченной. Это доказывает теорему.

Пространство Λ^2_μ можно рассматривать как пополнение векторного пространства обобщенных функций вида $f\mu$, где f пробегает пространство $\mathscr{S}$, по норме

$$\|f\|_{\Lambda^2_\mu} = \int |f|^2 d\mu.$$

Здесь мы имеем в виду конкретное пополнение в $\mathscr{S}'$.

С другой стороны, частица $\mathscr{H}$ является пополнением в $\mathscr{D}'(\vec{E})$ пространства элементов вида $H * \varphi$, где φ пробегает пространство $\mathscr{S}$, по норме

$$\|H * \varphi\|_{\mathscr{H}} = \left(\int |\mathscr{F}\varphi|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

Это означает, что пространство Λ^2_μ является *преобразованием Фурье гильбертова пространства* $\mathscr{H}$:

$$\Lambda^2_\mu = \mathscr{F}\mathscr{H},$$

Глава 4

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ

§ 1. Элементарные частицы

Пусть $V = E_n$ и пусть $\vec{F}$ — конечномерное векторное пространство над полем C. Структурная группа G действует на E_n и на $\vec{F}$. Допустим, что G удовлетворяет следующим условиям (кроме условий, данных в определении структурной группы):

(1) G содержит всю группу сдвигов, т. е. для любого сдвига $\vec{a} \in \vec{E}_n$ существует элемент $g_{\vec{a}} \in G$, такой, что действие элемента $g_{\vec{a}}$ на E_n является сдвигом $\vec{a}$ и $g_{\vec{a}}$ действует тождественно на $\vec{F}$.

(2) Любой оператор $\sigma \in G$ сохраняет меру Лебега на E_n. Это эквивалентно утверждению, что любой оператор σ на E_n задается матрицей с определителем ± 1.

Пусть $G_0 \subset G$ — подмножество элементов группы G, действующих как сдвиги на E_n и как единичные операторы на $\vec{F}$; G_0 является нормальным делителем группы G.

Для того чтобы понять, как σ действует на обобщенную функцию $K_{x, y}$, мы используем обычную „замену переменных" $\vec{u} = \overrightarrow{x - y}$ и напишем

$$K_{x, y} = H_{x, \vec{u}}.$$

Мы уже показали, что если обобщенная функция $K_{x, y}$ инвариантна при преобразовании

$$(x, y) \to \sigma(x, y) = (\sigma x, \sigma y)$$

(причем σ действует тождественно на $\vec{F}$) для $\sigma \in G_0$, то обобщенная функция $H_{x, \vec{u}}$ инвариантна при преобразовании

$$(x, \vec{u}) \to (\sigma x, \vec{u}).$$

Следовательно, $H_{x, \vec{u}} = 1_x \otimes H_{\vec{u}}$; заметим, что $\sigma \in G_0$ тождественно действует на $H_{\vec{u}}$. Любой оператор $\sigma \in G$ действует, с одной стороны, на $\vec{F}$, с другой стороны, — на E_n по закону $x \to \sigma x$ и на $\vec{E}_n$ по закону $\vec{x} \to \vec{\sigma}\vec{x}$.

Операция $\vec{\sigma}$ определяется следующим образом: если $\xi, \eta \in E_n$ таковы, что $\overrightarrow{\xi - \eta} = \vec{x}$, то

$$\vec{\sigma}\vec{x} = \overrightarrow{\sigma\xi - \sigma\eta}.$$

Это определение не зависит от выбора $\xi, \eta \in E_n$. В самом деле, пусть ξ', η' — другие элементы E_n, такие, что разность

$$\overrightarrow{\xi' - \eta'}$$

также равна $\vec{x}$. Тогда

$$\overrightarrow{\xi - \xi'} = \overrightarrow{\eta - \eta'} = \vec{\alpha},$$

или

$$\xi' = \xi - \vec{\alpha}, \quad \eta' = \eta - \vec{\alpha}.$$

Обозначим через τ_α сдвиг $x \to x - \vec{\alpha}$ в E_n. Мы видим, что

$$\sigma\xi' = \sigma\tau_\alpha\xi, \quad \sigma\eta' = \sigma\tau_\alpha\eta.$$

Но так как G_0 — нормальный делитель, то существует элемент $\vec{\beta} \in \vec{E}_n$, такой что $\sigma\tau_\alpha = \tau_\beta\sigma$; следовательно, для такого $\vec{\beta}$ имеем

$$\sigma\xi' = \tau_\beta\sigma\xi = \sigma\xi - \vec{\beta}, \quad \sigma\eta' = \tau_\beta\sigma\eta = \sigma\eta - \vec{\beta}$$

и

$$\overrightarrow{\sigma\xi' - \sigma\eta'} = \overrightarrow{\sigma\xi - \sigma\eta},$$

что и доказывает справедливость нашего замечания.

Оператор $\sigma \in G$ действует также на пространстве $E_n \times E_n$ по закону

$$(\xi, \eta) \to (\sigma\xi, \sigma\eta)$$

и на пространстве $E_n \times \vec{E}_n$ по закону

$$(\xi, \vec{x}) \to (\sigma\xi, \vec{\sigma}\vec{x}).$$

Далее, так как σ сохраняет меру Лебега на E_n, этот оператор сохраняет константы (рассматриваемые как обобщенные функции) и, следовательно, преобразует $1_x \otimes H_{\vec{u}}$ в $1_x \otimes \sigma H_{\vec{u}}$. Инвариантность обобщенной функции $K_{x,y}$ относительно оператора σ эквивалентна инвариантности $H_{\vec{u}}$ относительно σ (действующего на $\vec{F}$ и на $\vec{E}_n$). В действительности мы можем заменить инвариантность обобщенной функции $H_{\vec{u}}$ относительно группы G инвариантностью этой обобщенной функции относительно факторгруппы G/G_0, потому что G_0 действует тождественно как на $\vec{E}_n$, так и на $\vec{F}$.

Например, если G — неоднородная группа Лоренца и G_0 — группа сдвигов, то G/G_0 является однородной группой Лоренца.

Мы хотим найти свойства инвариантности преобразования Фурье $\mu = \mathcal{F}H$. Действие оператора $\sigma \in G$ на μ определяется его действием, с одной стороны, на $\vec{F}$ и, с другой стороны, на $\overleftarrow{E}'_n$ как контраградиентного оператора к оператору

$$\vec{u} \to \vec{\sigma}\vec{u}, \quad \vec{u} \in \vec{E}.$$

Каждая $\vec{F}$-частица на E_n соответствует положительной мере степенного роста μ на $\overleftarrow{E}'_n$, принимающей значения в пространстве $\vec{F} \otimes \overline{\vec{F}}$ и инвариантной относительно факторгруппы G/G_0 (или группы G).

Возвратимся вновь к общему случаю, когда заданы мир V, комплексное векторное пространство $\vec{F}$ и структурная группа G. Пусть гильбертово пространство $\mathscr{H}$ является G-инвариантной $\vec{F}$-частицей

$$\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F},$$

или, другими словами, *универсальной* $\vec{F}$-частицей (или еще $G - \vec{F}$-частицей).

Определение. Универсальная $\vec{F}$-частица $\mathscr{H}$ называется *элементарной*, если любое G-инвариантное гильбертово пространство $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}$ (т. е. такое, что $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ и норма в $\mathscr{H}$ не меньше нормы в $\mathscr{H}_1$) имеет вид $\lambda \mathscr{H}$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Теорема. *Следующие три свойства универсальной частицы $\mathscr{H}$ эквивалентны:*

(а) $\mathscr{H}$ — *элементарная частица,*

(б) $\mathscr{H}$ *не имеет замкнутых G-инвариантных линейных подпространств, за исключением* $\{0\}$ *и самого* $\mathscr{H}$,

(в) *если G-инвариантное гильбертово пространство $\mathscr{H}_1$, непрерывно вложенное в $\mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}$, содержится в $\mathscr{H}$, то $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$ и нормы в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ пропорциональны.*

Условие (б) можно перефразировать следующим образом: представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (т. е. в группе унитарных операторов пространства $\mathscr{H}$) неприводимо.

Справедливость соотношений (а)$\Rightarrow$(б) и (в)$\Rightarrow$(а) проверяется тривиально.

Мы докажем, что из (б) следует (а) и из (а) следует (в).

(б)$\Rightarrow$(а). Пусть гильбертово пространство $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}$, $\mathscr{H}_1 \neq \{0\}$, является G-инвариантным. Пространству $\mathscr{H}_1$ соответствует (однозначно) антиядро $L_1 : \mathscr{H}_1' \to \mathscr{H}_1$. Пусть L — канонический антиизоморфизм $\mathscr{H}' \to \mathscr{H}$. Для $x \in \mathscr{H}$ положим $x' = L^{-1}x$. Для $y \in \mathscr{H}_1$ получаем

$$(y \mid x)_{\mathscr{H}} = (y \mid Lx')_{\mathscr{H}} = \langle y, x' \rangle = (y \mid L_1 x')_{\mathscr{H}_1}.$$

Положим

$$Ax = L_1 L^{-1} x.$$

Тогда

$$(y\,|\,x)_{\mathscr{H}} = (y\,|\,Ax)_{\mathscr{H}_1}, \quad x \in \mathscr{H}, \quad y \in \mathscr{H}_1.$$

Так как всякий оператор $\sigma \in G$ действует унитарно и на $\mathscr{H}$ и на $\mathscr{H}_1$, то

$$(y\,|\,\sigma Ax)_{\mathscr{H}_1} = (\sigma^{-1}y\,|\,Ax)_{\mathscr{H}_1} = (\sigma^{-1}y\,|\,x)_{\mathscr{H}} = \\ = (y\,|\,\sigma x)_{\mathscr{H}} = (y\,|\,A\sigma x)_{\mathscr{H}_1}.$$

Таким образом, оператор A коммутирует с G. Следовательно, любое спектральное подпространство оператора A инвариантно относительно группы G; заметим, что A — ограниченный оператор, действующий в $\mathscr{H}$, и $A \geqslant 0$, так как

$$(Ax\,|\,x)_{\mathscr{H}} = (Ax\,|\,Ax)_{\mathscr{H}_1} \geqslant 0.$$

Но, согласно (б), не существует нетривиального замкнутого подпространства пространства $\mathscr{H}$, которое было бы G-инвариантным.

Поэтому оператор A должен иметь только одно спектральное подпространство — само пространство $\mathscr{H}$. Значит, существует число $\lambda \in \mathbf{C}$, такое, что

$$Ax = \lambda x$$

для любого вектора $x \in \mathscr{H}$ и

$$(y|x)_{\mathscr{H}} = \bar{\lambda}\,(y|x)_{\mathscr{H}_1}.$$

Возьмем $x = y \in \mathscr{H}_1$; тогда число

$$\bar{\lambda} = (y|y)_{\mathscr{H}_1}^{-1}(y|y)_{\mathscr{H}}$$

должно быть положительным; следовательно,

$$\|y\|_{\mathscr{H}_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|y\|_{\mathscr{H}}.$$

(а) $\Longrightarrow$ (в). Допустим, что $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ — другое G-инвариантное гильбертово пространство с непрерывным вложением в $\mathscr{D}'(V) \otimes \vec{F}$. Тогда естественное вложение пространства $\mathscr{H}_1$ в пространство $\mathscr{H}$ должно быть непрерывным, согласно теореме о замкнутом графике[1]). Это означает, что существует константа $M < +\infty$, такая, что для любого элемента $x \in \mathscr{H}_1$ справедливо неравенство

$$\|x\|_{\mathscr{H}} \leqslant M \|x\|_{\mathscr{H}_1}.$$

Определим новое гильбертово пространство $\mathscr{H}_2$ следующим образом: $\mathscr{H}_2$ совпадает с $\mathscr{H}_1$ как множество, а норма в $\mathscr{H}_2$ определяется равенством

$$\|x\|_{\mathscr{H}_2} = M \|x\|_{\mathscr{H}_1}.$$

Тогда $\mathscr{H}_2 \leqslant \mathscr{H}$; в самом деле, $\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}$ и $\|x\|_{\mathscr{H}} \leqslant \leqslant \|x\|_{\mathscr{H}_2}$ для $x \in \mathscr{H}_2$. Согласно (а), $\mathscr{H}_2$ совпадает с $\mathscr{H}$ как множество и существует константа $\lambda \geqslant 0$, такая, что для любого элемента $x \in \mathscr{H}$ имеем

$$\|x\|_{\mathscr{H}_2} = \lambda \|x\|_{\mathscr{H}}.$$

Следовательно, $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$ и

$$\|x\|_{\mathscr{H}_1} = \frac{\lambda}{M} \|x\|_{\mathscr{H}},$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к частному случаю, когда $V = E_n$ и G удовлетворяет условиям, приведенным в начале этого параграфа. Тот факт, что $\mathscr{H}$ является элементарной частицей, можно выразить по-разному.

1. В терминах антиядра K, соответствующего пространству $\mathscr{H}$.

   Если $K_1 \leqslant K$ — другое положительное G-инвариантное антиядро, то $K_1 = \lambda K$ для некоторого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

2. В терминах обобщенной функции $H_{\vec{u}}$.

   Если H_1 — другая Б-положительная (или Б-суперположительная) G-инвариантная обобщенная функция и $H_1 \leqslant H$ в смысле положительности по Бохнеру, то $H_1 = \lambda H$.

[1]) По поводу этой теоремы см., например, книгу Данфорда Н. и Шварца Дж. Т., Линейные операторы, ч. I, М., ИЛ, 1962, стр. 70. — *Прим. ред.*

3. В терминах меры μ.

Если μ_1 — другая положительная G-инвариантная мера степенного роста и $\mu_1 \leqslant \mu$, то $\mu_1 = \lambda\mu$.

Совокупность всех $\vec{F}$-частиц образует замкнутый выпуклый конус. Набор G-инвариантных частиц образует подконус. Элементарные частицы являются крайними образующими этого подконуса[1]).

§ 2. Носители экстремальных мер

Рассмотрим случай, когда многообразие V представляет собой n-мерное аффинное пространство E_n над полем вещественных чисел (F, как обычно, является конечномерным векторным пространством над полем комплексных чисел). Мы будем рассматривать группу G, действующую на E_n как аффинная группа и на F как линейная группа, обладающую следующими свойствами:

(1) все элементы группы G сохраняют меру Лебега в пространстве E_n, т. е. для любого оператора из G как оператора, действующего на пространстве $\vec{E}_n$, справедливо равенство $\det = \pm 1$;

(2) группа G содержит все сдвиги, т. е. для любого сдвига $\vec{a} \in \vec{E}_n$ существует элемент $g_{\vec{a}} \in G$, который действует как сдвиг $\vec{a}$ на пространстве E_n и тождественно на F.

Пусть G_0 — подмножество группы G, состоящее из всех элементов, которые действуют как сдвиги на E_n и как единичные операторы на F; G_0 является нормальным делителем.

Мы ищем G-инвариантные гильбертовы пространства $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(E_n) \otimes F$, непрерывно вложенные в $\mathscr{D}'(E_n) \otimes F$; это эквивалентно отысканию всех мер μ степенного роста

---

[1]) Образующая выпуклого замкнутого конуса называется крайней, если ее направляющий вектор $\vec{x}$ нельзя представить в виде $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ принадлежат конусу и не пропорциональны $\vec{x}$. По поводу общего понятия крайней точки выпуклого множества см., например, книгу Данфорда Н. и Шварца Дж. Т., Линейные операторы, ч. I, М., ИЛ, 1962, гл. V, § 8 — *Прим. ред.*

на E'_n, принимающих значения в пространстве $F \otimes \vec{F}$, положительных и G-инвариантных. Если мы хотим найти *элементарные частицы*, то нам необходимо, чтобы пространство $\mathscr{H}$ было экстремальным, т. е. чтобы для любого другого G-инвариантного пространства $\mathscr{H}_1$, непрерывно вложенного в $\mathscr{H}$, было справедливо равенство

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$$

и нормы в этих пространствах были пропорциональны; или, эквивалентно, если $\mathscr{H}_1 \leqslant \mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ G-инвариантно, то

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$$

с пропорциональной нормой. Наконец, условие на меру μ означает, что эта мера является экстремальной, т. е. если μ_1 — другая G-инвариантная положительная мера степенного роста, такая, что $\mu_1 \leqslant \mu$, то μ_1 пропорциональна μ [1]).

Приведем теперь необходимое условие экстремальности меры.

Определение. Пусть G — группа, действующая на топологическом пространстве. *G-орбитой* называется множество всех образов одной и той же точки пространства под действием группы G.

Теорема. *Пусть μ — мера, определенная в локально компактном пространстве X со счетной базой открытых множеств, и пусть значения меры μ лежат в конечномерном упорядоченном векторном пространстве $\mathscr{F}$. Если μ положительна, G-инвариантна (или G/G_0-инвариантна) и экстремальна среди всех мер с теми же свойствами, то носитель меры μ является замыканием одной из G-орбит.*

Замечания. В интересующем нас случае $X = \overleftarrow{E}'_4$, $\mathscr{F} = F \otimes \overline{F}$ и G/G_0 действует в пространстве E_4 как однородная группа Лоренца. Орбиты в этом случае являются гиперболоидами, так как группа Лоренца сохраняет квадратичную форму

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2.$$

[1]) Такие меры обычно называются крайними (см. предыдущее примечание). — *Прим. ред.*

Таким образом, мы знаем, что носитель экстремальной меры обязательно является одним из гиперболоидов[1]). Это дает нам существенное ограничение, налагаемое на носители экстремальных мер; нахождение таких мер теперь не представляет трудности. В действительности мы покажем, что на каждом гиперболоиде существует только одна с точностью до константы инвариантная мера.

Заметим, что мы по необходимости должны рассматривать *замыкание* орбиты, так как носитель всегда замкнут. Существуют, однако, и не замкнутые G-орбиты. Например, верхняя часть поверхности светового конуса без вершины (начала) является такой G-орбитой. Замыканием этой орбиты является верхняя часть конуса с присоединенной вершиной, и она может быть носителем меры. Однако бывают меры, *сосредоточенные* на конусе без вершины в следующем смысле.

Определение. Мы говорим, что мера *сосредоточена* на некотором подмножестве, если дополнение к этому подмножеству имеет меру нуль.

В нашем примере мера, носителем которой является конус *с вершиной*, сосредоточена на конусе *без вершины* всякий раз, когда мера вершины равна нулю.

Более сильным, чем приведенная выше теорема, было бы утверждение о том, что экстремальная мера сосредоточена на одной из G-орбит. Однако такое утверждение сделать нельзя.

Прежде всего понятие сосредоточенности не носит однозначного характера. Например, мера Лебега на прямой линии сосредоточена на дополнении к *любому* счетному подмножеству. Кроме того, теорема была бы неверна, если бы мы утверждали, что мера всегда сосредоточена на одной из орбит; это показывает следующий пример. Пусть X — окружность, а G — группа вращений, порождаемая поворотом на угол, несоизмеримый с π. Любая орбита является плотным счетным множеством, и единственной мерой, инвариантной относительно группы G, является мера Лебега на окружности, так как если мера инвариантна относительно некоторой группы, то она инвариантна также

[1]) Особый случай, когда гиперболоид вырождается в конус, рассмотрен ниже. — *Прим. ред.*

относительно замыкания этой группы, которым в данном случае является группа всех вращений. Таким образом, в данном случае не существует инвариантной меры, сосредоточенной на G-орбите[1]).

Доказательство теоремы. Достаточно предположить, что X является носителем меры μ, поскольку если μ инвариантна, то ее носитель также инвариантен. Мы должны доказать, что существует одна орбита, плотная в X. Возьмем некоторую точку $a \in X$, и пусть V — открытая окрестность точки a. Возьмем насыщение $\widetilde{V}$ окрестности V, т. е. объединение образов окрестности V под действием всех элементов группы G. Множество $\widetilde{V}$ открыто и имеет положительную меру, поскольку всякое непустое открытое множество имеет положительную меру (в противном случае носитель меры μ не был бы равен X). Дополнение к $\widetilde{V}$ имеет меру нуль; иначе мы могли бы умножить меру μ на характеристическую функцию множества $\widetilde{V}$ и получить положительную G-инвариантную меру, не превосходящую μ и не пропорциональную μ. Таким образом, $\widetilde{V}$ содержит почти все множество X. Точка a имеет счетную фундаментальную систему окрестностей V_n. Каждое множество $\widetilde{V}_n$ содержит почти все множество X. Тогда $\bigcap \widetilde{V}_n$ также содержит почти все множество X. Другими словами, $b \in \bigcap \widetilde{V}_n$ для почти всех $b \in X$.

Если $b \in \bigcap \widetilde{V}_n$, то $b \in \widetilde{V}_n$ для всех n; таким образом, орбита $\widetilde{b}$ элемента b пересекает все V_n, т. е. $\widetilde{b}$ пересекает все окрестности точки a.

Следовательно, a принадлежит $\overline{\widetilde{b}}$ (замыканию орбиты $\widetilde{b}$) для почти всех b. Возьмем счетное множество $\{a_k\}$, плот-

[1]) Это утверждение справедливо только для регулярных мер (т. е. таких мер μ, что для любого множества A имеем $\mu(A) = \inf \mu(G) = \sup \mu(F)$, где нижняя грань берется по всем открытым множествам $G \supset A$, а верхняя грань — по всем замкнутым $F \subset A$). Нерегулярные инвариантные меры, сосредоточенные на G-орбите, в данном случае существуют. Например, мера, определенная следующим образом: $\mu(A)$ равно числу точек G-орбиты, лежащих в A. Отметим, что меры, о которых идет речь в теореме Бохнера, всегда регулярны. — *Прим. ред.*

ное в X. При любом фиксированном k имеем $a_k \in \overline{\overline{b}}$ для почти всех b. Так как множество $\{a_k\}$ счетно, то отсюда следует, что $a_k \in \overline{\overline{b}}$ при любом k для почти всех b. Следовательно, $\overline{\overline{b}} = X$ для почти всех $b \in X$.

§ 3. Мезоны

Мы собираемся теперь применить предыдущие результаты к теории мезонов. В этом случае $V = E_4$ и $F = \mathbf{C}$; группа G действует тождественно на F и как *собственная неоднородная группа Лоренца* на пространстве E_4.

Напомним, что неоднородная группа Лоренца имеет четыре связные компоненты. То же самое справедливо для *однородной* группы Лоренца $\mathfrak{L}$, которая состоит из следующих четырех связных множеств:

(1) преобразования, сохраняющие направление времени, с определителем, равным $+1$;

(2) преобразования, сохраняющие направление времени, с определителем, равным -1;

(1′) преобразования, которые обращают направление времени, с определителем, равным $+1$.

(2′) преобразования, которые обращают направление времени, с определителем, равным -1.

Так как $\mathfrak{L}$ является факторгруппой неоднородной группы Лоренца по коммутативному нормальному делителю, состоящему из сдвигов, то связные компоненты неоднородной группы Лоренца являются прообразами связных компонент группы $\mathfrak{L}$. Мы берем в качестве группы G прообраз множества (1). (Это множество образует группу, которая называется *собственной однородной группой Лоренца.*) Заметим, что множество (1) является единственной связной компонентой группы $\mathfrak{L}$, которая сама является группой; это — связная компонента единицы.

Чтó означает сохранение или обращение направления времени, можно объяснить с помощью светового конуса. Пусть ось времени направлена вверх.

Световой конус отображается на себя любым оператором $\sigma \in \mathfrak{L}$. Имеются две возможности:

(1) σ отображает верхнюю часть светового конуса на верхнюю, а нижнюю часть — на нижнюю. В этом случае

говорят, что оператор σ сохраняет направление времени.

(2) σ отображает верхнюю часть светового конуса на нижнюю, а нижнюю часть — на верхнюю. В этом случае говорят, что оператор σ обращает направление времени.

Вопрос о том, сохраняется ли направление времени, можно решить, выбирая некоторую систему координат и представляя оператор σ при помощи матрицы. Тогда преобразованная временная компонента примет вид

$$x'_0 = c_{01}x_1 + c_{02}x_2 + c_{03}x_3 + c_{00}x_0,$$

где коэффициент c_{00} всегда отличен от нуля. Если $c_{00} > 0$, то σ сохраняет направление времени, если $c_{00} < 0$, то σ обращает направление времени.

Выбор группы O чрезвычайно важен, так как он определяет, с какими элементарными частицами мы имеем дело. С математической точки зрения здесь имеется много возможностей, однако существуют физические соображения в пользу выбора неоднородной собственной группы Лоренца. Прежде всего физически оправдано задание ориентации пространства и направления времени, по крайней мере, локально. Это делает естественным выбор собственной неоднородной группы Лоренца вместо полной неоднородной. Далее, если бы мы взяли в качестве O полную группу Лоренца (или только ее часть, состоящую из прообразов преобразований типа (1) и (2′)), то мы получили бы заряженные частицы с неопределенным зарядом, т. е. частицы, имеющие с некоторой вероятностью тот или иной заряд.

Однако это не дает еще достаточных оснований для выбора собственной неоднородной группы Лоренца. Заметим, что это не та группа, которая используется в специальной теории относительности, где не задана основная единица длины. В пространстве E_4 нам задана не одна фиксированная квадратичная форма, а целое семейство пропорциональных квадратичных форм. Поэтому казалось бы, что правильно выбранная группа должна включать в себя все растяжения (в дополнение к собственной группе Лоренца). Если бы это было так, то элементарные частицы были бы совсем другими. Существовали бы типы частиц, у которых масса не фиксирована, а вероятностно распределена (т. е. известна лишь вероятность того, что при измерении массы получится результат в заданных пределах).

Оказывается, что физика микромира дает нам основания для исключения растяжений. Физические частицы, такие, как электрон или протон, в действительности не имеют всех возможных масс, и не все длины волн обнаружены в атомных спектрах элементов. Но если в мире существуют привилегированные массы или длины, мы должны выбрать в качестве группы собственную неоднородную группу Лоренца.

Пусть G_0 — группа сдвигов. Факторгруппа G/G_0 действует на $\overleftarrow{E}'_4$, и каждая орбита содержится в одном из гиперболоидов

$$p^2 = a, \quad a = \text{const},$$

так как величина p^2 инвариантна относительно группы G/G_0.

Имеется три типа гиперболоидов

(1) однополостный;

(2) двуполостный;

(3) световой конус.

G/G_0-орбита содержится в одном из этих гиперболоидов, но не обязательно совпадает с ним.

Однако любая орбита, лежащая на гиперболоиде типа (1), т. е. однополостном (или связном) гиперболоиде, обязательно совпадает с самим гиперболоидом. В самом деле, возьмем любую точку $\vec{a}$ этого гиперболоида; выбирая подходящую систему координат, мы можем считать, что эта точка имеет координаты $(a_1, 0, 0, a_0)$. Если взята любая другая точка $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_0)$, то существует пространственное вращение ρ, которое отображает ее в точку вида $(b'_1, 0, 0, b_0)$. Но в этом случае существует вещественное число θ, такое, что

$$a_1 = b'_1 \operatorname{ch} \theta + b_0 \operatorname{sh} \theta,$$
$$a_0 = b'_1 \operatorname{sh} \theta + b_0 \operatorname{ch} \theta.$$

Обозначим это преобразование через σ_θ; мы видим, что $\sigma_\theta\rho$ отображает $\vec{b}$ на $\vec{a}$, и очевидно, что $\sigma_\theta\rho \in G/G_0$.

Таким же образом можно показать, что существуют два типа орбит на гиперболоиде (2): верхняя ветвь гиперболоида (2) и нижняя ветвь гиперболоида (2).

С другой стороны, если бы группа G содержала преобразования, не сохраняющие направление времени (например, если бы G была полной группой Лоренца), то на гиперболоиде (2) лежала бы только одна орбита, ибо обе ветви вместе были бы одной орбитой. Для светового конуса (3) существуют три типа орбит: верхняя часть без вершины, нижняя часть без вершины и сама вершина.

Прежде всего изучим гильбертово пространство, соответствующее простейшему типу орбит — вершине светового конуса. Все положительные меры степенного роста, сосредоточенные в вершине и экстремальные, пропорциональны δ-функции:

$$\mu = c\delta, \quad c > 0.$$

Пропорциональные гильбертовы пространства определяют одну и ту же частицу, т. е. частица является классом пропорциональных гильбертовых пространств или целой образующей замкнутого выпуклого конуса. Поэтому мы можем положить $\mu = \delta$, поскольку все другие меры пропорциональны этой. Функция $H = 1$ является Фурье-образом меры μ. Пространство L^2_μ в данном случае можно отождествить с пространством всех констант. Пространство $\Lambda^2_\mu = \mathscr{F}\mathscr{H}$ — пространство всех обобщенных функций вида $f\delta$ с произвольной константой f $\left(\text{т. е. } f \in L^2_\mu\right)$ и со скалярным произведением

$$(f\delta | g\delta)_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = f\bar{g}.$$

Обратное преобразование Фурье этого пространства дает нам пространство $\mathscr{H}$, которое в данном случае состоит из постоянных функций. Скалярное произведение в $\mathscr{H}$ задается формулой

$$(\alpha | \beta)_{\mathscr{H}} = \alpha\bar{\beta}.$$

Физическая интерпретация этого пространства $\mathscr{H}$ не вполне ясна. Мы будем называть его *мезонным вакуумом*.

§ 4. Лоренц-инвариантные скалярные обобщенные функции.

Для отыскания положительных мер степенного роста, имеющих носители на заданной орбите и экстремальных, мы используем некоторые результаты П. Д. Метэ. Метэ нашел общий вид обобщенных функций, инвариантных относительно однородной расширенной группы Лоренца $\mathfrak{L}$.

Первая теорема Метэ. *Отображение* $f(u) \to f(p^2)$ *пространства непрерывных функций, определенных на* $\mathbf{R}^1$, *в пространство непрерывных функций, определенных на* E_4 *и инвариантных относительно* $\mathfrak{L}$, *можно единственным образом продолжить до линейного топологического изоморфизма* $T_u \to T_{p^2}$ *из* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$ *в* $D'(\overleftarrow{E}'_4 - \{0\})$. *Образ пространства* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$ *при этом отображении состоит из обобщенных функций, определенных на* $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$ *и инвариантных относительно группы* $\mathfrak{L}$.

Замечания. Здесь мы не будем приводить доказательство существования указанного отображения. Единственность следует из того, что функции, непрерывные на $\mathbf{R}^1$, плотны в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$.

Эта теорема определяет понятие прообраза обобщенной функции при отображении $\overleftarrow{p} \to p^2$ из $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$ в $\mathbf{R}^1$: T_{p^2} — прообраз обобщенной функции T_u. Легко найти носитель любой обобщенной функции T_{p^2}: он является прообразом носителя обобщенной функции T_u при отображении $\overleftarrow{p} \to p^2$.

Пример. На множестве $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$ можно определить обобщенную функцию δ_{p^2} [1]). Носителем δ_{p^2} является поверхность светового конуса, за исключением вершины.

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы, которая утверждает, что если бесконечно

---

[1]) Определение обобщенной функции δ_{p^2} приведено в книге И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, Обобщенные функции, вып. 1, изд. 2, М., 1961. — *Прим. ред.*

дифференцируемое отображение из одного многообразия V в другое W является отображением постоянного ранга, то всегда можно определить прообраз обобщенной функции на W; этот прообраз является обобщенной функцией на V.

Вторая теорема Метэ. *Любая обобщенная функция в* $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$, *инвариантная относительно группы* $\mathfrak{L}$, *имеет вид* T_{p^2}, *где* $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ (т. е. изоморфизм, указанный в первой теореме, отображает $\mathcal{D}'(\mathbf{R}')$ *на все пространство инвариантных обобщенных функций, определенных на* $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$).

Замечания. Если мы рассмотрим все пространство $\overleftarrow{E}'_4$ вместо пространства $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$, то эта теорема несправедлива.

Для данной обобщенной функции T_u эта теорема не позволяет утверждать, что ей обязательно соответствует обобщенная функция T_{p^2} во всем пространстве $\overleftarrow{E}'_4$. Более того, даже если такое соответствие существует, мы не можем найти никаким определенным способом все лоренц-инвариантные обобщенные функции на $\overleftarrow{E}'_4$. Например, нельзя получить этим путем ни одной лоренц-инвариантной обобщенной функции с носителем в начале координат. Вот почему мы рассматриваем не все $\overleftarrow{E}'_4$, а только дополнительное к началу координат множество $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$.

Теперь мы хотим найти обобщенные функции на $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$, инвариантные относительно собственной однородной группы Лоренца $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ (вместо расширенной однородной группы Лоренца $\mathfrak{L}$).

Прежде всего мы должны сформулировать частный случай первой теоремы Метэ и усиленную форму второй теоремы Метэ. Пусть Ω_+ — открытое множество, получаемое выбрасыванием из $\overleftarrow{E}'_4$ нижней части светового конуса вместе с вершиной.

Теорема. *Отображение* $f(u) \to f(p^2)$ *пространства непрерывных функций на* $\mathbf{R}^1$ *в пространство непрерывных функций на* E_4, *рассматриваемых* *только на* Ω_+ *и инвариантных относительно* $\mathfrak{L}$, *может быть единственным образом продолжено до линейного топологического изоморфизма* $T_u \to T_{p^2}$ *из* $\mathcal{D}'(\mathrm{R}^1)$ *в* $\mathcal{D}'(\Omega_+)$. *Образ пространства* $\mathcal{D}'(\mathrm{R}^1)$ *при этом отображении содержит все обобщенные функции на* Ω_+, *инвариантные относительно собственной однородной группы Лоренца.*

Замечания. В этом частном случае мы объединили утверждения, разделенные в случае пространства $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$ на две части (первая и вторая теоремы Метэ). Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим. Справедливы также соответствующие теоремы, в которых вместо Ω_+ берется Ω_- — открытое множество, получаемое вычитанием из $\overleftarrow{E}'_4$ верхней части светового конуса вместе с вершиной.

Заметим, что Ω_+ и Ω_- инвариантны относительно собственной однородной группы Лоренца.

Теорема. *Пусть* T — *обобщенная функция, определенная на* $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$ *и инвариантная относительно собственной однородной группы Лоренца* $\mathfrak{L}_+^\uparrow$. *Тогда в* Ω_+ *обобщенная функция* T *является прообразом* $T_{p^2}^+$ *обобщенной функции* T_u^+ *на* R^1, *а в* Ω_- — *прообразом* $T_{p^2}^-$ *обобщенной функции* T_u^- *на* R^1, *причем функции* T_u^+ *и* T_u^- *совпадают в области* $u > 0$ *в* R^1.

Обратное утверждение. *Если даны две обобщенные функции* T_u^+, T_u^- *на прямой* R^1, *которые совпадают при* $u > 0$, *то их прообразы* $T_{p^2}^+$ *и* $T_{p^2}^-$ *совпадают на* $\Omega_+ \cap \Omega_-$ *и пара* $(T_{p^2}^+, T_{p^2}^-)$ *определяет обобщенную функцию на* $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$, *инвариантную относительно собственной однородной группы Лоренца* $\mathfrak{L}_+^\uparrow$.

Доказательство теоремы. Пусть T — любая обобщенная функция на $\overleftarrow{E}'_4 - \{0\}$, инвариантная относительно $\mathfrak{L}_+^\uparrow$; T определяет обобщенную функцию на Ω_+, которая также инвариантна относительно $\mathfrak{L}_{+}^{\uparrow}$. Согласно частному случаю второй теоремы Метэ, обобщенная функция T на Ω_{+} является прообразом $T_{p^2}^{+}$ обобщенной функции T_u^{+} на $\mathbf{R}^1$. Аналогично T определяет обобщенную функцию на Ω_{-}, инвариантную относительно $\mathfrak{L}_{+}^{\uparrow}$. Поэтому T является прообразом $T_{p^2}^{-}$ на Ω_{-} обобщенной функции T_u^{-} на $\mathbf{R}^1$. В области $\Omega_{+} \cap \Omega_{-}$ прообразы $T_{p^2}^{+}$ и $T_{p^2}^{-}$ должны совпадать. Так как $\Omega_{+} \cap \Omega_{-}$ является прообразом области $u > 0$ в $\mathbf{R}^1$, то обобщенные функции T_u^{+} и T_u^{-} должны совпадать при $u > 0$ в $\mathbf{R}^1$.

Доказательство обратного утверждения. Возьмем две произвольные обобщенные функции T_u^{+} и T_u^{-}, совпадающие при $u > 0$ в $\mathbf{R}^1$. Согласно первой теореме Метэ (частный случай), T_u^{+} определяет обобщенную функцию $T_{p^2}^{+}$ на Ω_{+}, инвариантную относительно $\mathfrak{L}_{+}^{\uparrow}$. Подобным же образом T_u^{-} определяет обобщенную функцию $T_{p^2}^{-}$ на Ω_{-}, инвариантную относительно $\mathfrak{L}_{+}^{\uparrow}$. Так как T_u^{+} и T_u^{-} совпадают при $u > 0$ в $\mathbf{R}^1$, то их прообразы $T_{p^2}^{+}$ и $T_{p^2}^{-}$ совпадают на $\Omega_{+} \cap \Omega_{-}$ (прообразе области $u > 0$). Таким образом, $(T_{p^2}^{+},\ T_{p^2}^{-})$ определяют обобщенную функцию на $\overleftarrow{E}_4' - \{0\} = \Omega_{+} \cup \Omega_{-}$, инвариантную относительно группы $\mathfrak{L}_{+}^{\uparrow}$.

Мы видим, что нахождение всех обобщенных функций на $\overleftarrow{E}_4' - \{0\}$, инвариантных относительно собственной однородной группы Лоренца, эквивалентно нахождению всех пар обобщенных функций на $\mathbf{R}^1$, которые совпадают при $u > 0$.

§ 5. Описание всех мезонов

Рассмотрим однополостный гиперболоид (1). Он определяется уравнением $p^2 = k^2$, где k^2 — положительная константа. Мы ищем меру с носителем на гиперболоиде (1), инвариантную относительно собственной однородной группы Лоренца. Согласно результатам, вытекающим из теорем Метэ, она определяется двумя обобщенными функциями $T_{p^2}^{+}$, $T_{p^2}^{-}$, являющимися прообразами двух обобщенных функций T_u^+, T_u^-, которые совпадают при $u > 0$ в $\mathbf{R}^1$. Согласно сделанному выше замечанию, носители обобщенных функций T_u^+ и T_u^- состоят из одной точки k^2 в $\mathbf{R}^1$. Таким образом, мы получаем две меры T_u^+, T_u^- с носителями в точке k^2, совпадающие при $u > 0$ и, следовательно, на всей вещественной прямой.

Изоморфизмы, фигурирующие в теоремах Метэ, сохраняют порядок в пространстве обобщенных функций, поэтому, чтобы получить меру на $\overleftarrow{E}_4' - \{0\}$, мы должны взять меру на $\mathbf{R}^1$. Единственной с точностью до постоянного множителя положительной мерой с носителем в точке k^2 является обобщенная функция δ_{u-k^2}. Окончательно мера на $\overleftarrow{E}_4' - \{0\}$ определяется двумя обобщенными функциями Метэ $\delta_{p^2-k^2}$, $\delta_{p^2-k^2}$, а так как они совпадают, то достаточно только одной обобщенной функции $\delta_{p^2-k^2}$ для определения нашей положительной меры на $\overleftarrow{E}_4' - \{0\}$. Так как носитель этой меры является гиперболоидом (1), не содержащим начало координат, то существует только одна инвариантная обобщенная функция в пространстве $\overleftarrow{E}_4'$, для которой гиперболоид (1) является носителем. Эта обобщенная функция определяется двумя обобщенными функциями

$$\delta_{p^2-k^2} \quad \text{на} \quad \overleftarrow{E}_4' - \{0\} \quad \text{и} \quad 0 \quad \text{на} \quad \overleftarrow{E}_4' - \{\overleftarrow{p} : p^2 = k^2\},$$

которые определены на открытых множествах и совпадают на их пересечении, причем $\overleftarrow{E}_4'$ является объединением этих открытых множеств. Таким образом, мы определили в пространстве $\overleftarrow{E}_4'$ обобщенную функцию, которую мы будем обозначать просто через $\delta_{p^2-k^2}$.

Из теоремы, доказанной Метэ, следует, что изоморфизм $T_u \to T_{p^2}$ сохраняет также степенной порядок роста. Таким образом, обобщенная функция, инвариантная относительно собственной или полной группы Лоренца, является обобщенной функцией степенного роста тогда и только тогда, когда соответствующая обобщенная функция (или пара обобщенных функций) на прямой линии является обобщенной функцией степенного роста. Поэтому

$\delta_{p^2-k^2}$ — обобщенная функция степенного роста, так как δ_{u-k^2} — обобщенная функция степенного роста.

Итак, мы знаем теперь, что существует единственная с точностью до постоянного множителя положительная мера, а именно $\delta_{p^2-k^2}$ в пространстве $\overleftarrow{E}'_4$, с носителем на гиперболоиде (1), инвариантная относительно собственной однородной группы Лоренца. Эта мера экстремальна, потому что она единственна с точностью до постоянного множителя. Взяв соответствующий класс гильбертовых пространств, мы увидим, что любой однополостный гиперболоид определяет одну и только одну частицу.

Эти частицы физически не приемлемы, если принять постулат о положительной определенности энергии.

Рассмотрим теперь двуполостный гиперболоид (2). В этом случае существуют две орбиты: нижняя ветвь и верхняя ветвь. По тем же соображениям, что и ранее, находим, что любая обобщенная функция, инвариантная относительно собственной группы Лоренца и имеющая носителем верхнюю ветвь гиперболоида (2), определяется в смысле Метэ двумя обобщенными функциями

$$\delta_{p^2+k^2}, \; 0.$$

Аналогично любая обобщенная функция, инвариантная относительно собственной группы Лоренца и имеющая носителем нижнюю ветвь, определяется парой функций

$$0, \; \delta_{p^2+k^2}.$$

В силу сохранения порядка роста при соответствии в смысле Метэ эти обобщенные функции имеют степенной рост. Таким образом, каждая ветвь двуполостного гиперболоида (2) определяет частицу, т. е. мы получаем частицы, зависящие от параметра $k^2 > 0$ и знака $\pm$, причем считают, что минус соответствует верхней ветви, а плюс — нижней.

Такие частицы изучаются в физике. Физики полагают

$$k^2 = \frac{m_0^2 c^2}{h^2},$$

где m_0 называется *массой покоя* частицы, c — *скорость света*, h — *постоянная Планка*. Параметр $\pm$ соответствует *заряду* частицы.

Для нулевой массы, т. е. когда $k^2=0$, задача несколько усложняется. Верхняя часть поверхности светового конуса без вершины является одной из орбит. Аналогично, нижняя часть без вершины является другой орбитой. Мера μ на $\overleftarrow{E}'_4-\{0\}$ с носителем в верхней части конуса задается обобщенными функциями Метэ

$$\delta_{p^2},\ 0.$$

Мы хотим теперь распространить эту меру на $\overleftarrow{E}'_4$. Носитель этой продолженной меры, если он существует, является поверхностью верхней части светового конуса включая вершину. Продолжение этой меры на $\overleftarrow{E}'_4$ существует только в том случае, когда мера любого компактного множества, содержащего начало координат, конечна.

Оказывается, что мера может быть конечной в том и только в том случае, когда размерность пространства не меньше трех. Так как в нашем случае размерность равна четырем, то рассматриваемую меру можно продолжить на $\overleftarrow{E}'_4$. Однако это можно сделать бесконечным числом способов, так как можно добавить в вершине меру Дирака δ, умноженную на любую константу. Заметим, что если $n=2$, то не существует частицы нулевой массы.

Меру μ можно единственным способом продолжить на $\overleftarrow{E}'_4$, если мы условимся считать, что начало координат $\{0\}$ имеет нулевую меру. Это продолжение определяется формулой

$$\mu(\varphi)=\int\varphi\,d\mu,$$

где интеграл берется по $\overleftarrow{E}'_4-\{0\}$; здесь φ — любая непрерывная на $\overleftarrow{E}'_4$ функция с компактным носителем. К этой мере можно добавить меру Дирака, умноженную на произвольную константу. Однако, если мы потребуем, чтобы мера была экстремальной, мы увидим, что вершина должна иметь нулевую меру, так как

$$\lambda\delta\leqslant\mu+\lambda\delta$$

и, следовательно, мера $\mu+\lambda\delta$ не экстремальна при $\lambda>0$.

Аналогично может быть продолжена на $\overleftarrow{E}'_4$ мера с носителем в нижней части конуса.

Подводя итог, подчеркнем, что существуют три типа частиц:

1) особая частица — *вакуум*;

2) частицы, определяемые уравнением $p^2 = k^2$, $k^2 > 0$;

3) частицы, определяемые уравнением $p^2 = -k^2$, $k^2 \geqslant 0$, и знаком $\pm$.

Частицы (3) физически приемлемы. Заметим, что эти частицы могут иметь любую положительную массу. Однако до сих пор известны только мезоны, массы которых принадлежат дискретному множеству положительных чисел. Следовательно, либо требуется дополнительный принцип отбора масс, либо следует ожидать, что будет открыто все большее число мезонов с произвольными массами.

§ 6. Описание пространства $\mathscr{H}$ в случае мезона

Рассмотрим теперь более детально пространство $\mathscr{H}_{m_0}$, $\pm$. Это гильбертово пространство представляет частицу с массой покоя m_0 и зарядом $+$ или $-$. Мы рассматривали гиперболоид в $\overleftarrow{E}'_4$, определяемый уравнением

$$p^2 + m^2 = 0,$$

где

$$m = \frac{m_0 c}{h}.$$

Верхняя и нижняя ветви отвечают соответственно отрицательному и положительному зарядам. На каждой ветви этого гиперболоида существует единственная с точностью до постоянного множителя положительная лоренц-инвариантная мера. Например, на положительной ветви мера определяется по теореме Метэ прообразом пары обобщенных функций

$$(0,\ \delta_{u+m^2})$$

на $\mathbb{R}^1$, т. е. парой

$$(0,\ \delta_{p^2+m^2}).$$

Эту меру можно записать в классических обозначениях в виде

$$\mu = Y(-p_0)\,\delta(p^2 + m^2),$$

где Y — функция Хевисайда.

Если мы выберем начало координат в E_4, то имеет смысл преобразование Фурье $\mathscr{F}\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{H}$; $\mathscr{F}\mathscr{H}$ представляет собой гильбертово пространство Λ^2_μ обобщенных функций на E_4 вида $f\mu$, где f — квадратично интегрируемая функция по отношению к мере μ.

Скалярное произведение в Λ^2_μ записывается в виде

$$(f\mu \mid g\mu)_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \int f\bar{g}\,d\mu.$$

Обобщенная функция $H \in \mathscr{S}'(\vec{E}_4)$ задается выражением

$$H = \bar{\mathscr{F}}\mu,$$

и соответствующее антиядро K определяется формулой

$$K_{x,y} = H_{\overrightarrow{x-y}}.$$

Метэ вычислил некоторые прообразы Фурье, которые можно использовать при нахождении явного выражения для H[1]). Введем обобщенную функцию

$$2\pi\Delta'_{2\pi m_0 c/h}(x) = \bar{\mathscr{F}}\delta\left(p^2 + \frac{m_0^2c^2}{h^2}\right) =$$
$$= \text{p. v.}\left[\frac{m_0 c\pi}{h}\,\frac{N_1\left(2\pi\frac{m_0 c}{h}\sqrt{-x^2}\right)}{\sqrt{-x^2}}\,Y(-x^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{2m_0 c}{h}\,\frac{K_1\left(2\pi\frac{m_0 c}{h}\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2}}\,Y(x^2)\right],$$

где p. v. — главное значение в смысле Коши, N_1 — функция Неймана, K_1 — функция Кельвина.

По определению главного значения, обобщенная функция p. v. f, где f — приведенное выше выражение в

[1]) Преобразование Фурье функций вида $\delta_{p^2+c^2}$ вычислены также в книге И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, Обобщенные функции, вып. 1, изд. 2, М., 1961. — *Прим. ред.*

квадратных скобках, задается формулой

$$\langle \mathrm{p.\,v.}\, f,\ \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x^2|>\varepsilon} f\varphi\,dx,$$

где φ — основная функция.

Точно так же

$$2\pi i\Delta_{2\pi m_0 c/h}(x) = \mathcal{F}\left(\varepsilon(p_0)\,\delta\left(p^2+\frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)\right) =$$

$$= i\varepsilon(x_0)\left[-\frac{m_0 c\pi}{h}\,\frac{J_1\left(2\pi\frac{m_0 c}{h}\sqrt{-x^2}\right)}{\sqrt{-x^2}}\,Y(-x^2)+\delta(x^2)\right],$$

где

$$\varepsilon(p_0)=\begin{cases}1, & p_0>0,\\ -1, & p_0<0\end{cases}$$

и J_1 — функция Бесселя. Тогда можно доказать, что

$$H_{m_0,+} = 2\pi\Delta^{+}_{2\pi m_0 c/h}(x),$$

где

$$\Delta^{+} = \frac{\Delta' - i\Delta}{2}.$$

Преобразования Фурье сохраняют четную и нечетную симметрию относительно начала координат и заменяют черту (комплексное сопряжение) на тильду: $\tilde{\varphi}(x)=\overline{\varphi(-x)}$. Далее, функция $\delta_{p^2+m_0^2c^2/h^2}$ четна, и так как эта функция вещественна, то она инварианта по отношению к операции тильда. Поэтому Δ' является четной обобщенной функцией, инвариантной относительно комплексного сопряжения, т. е. вещественной. Аналогично получаем, что $i\Delta$ — нечетная чисто мнимая обобщенная функция.

Все элементы $\psi\in\mathcal{H}$ оказываются обычными функциями; напротив, H — обобщенная функция. Любой элемент $\psi\in\mathcal{H}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Клейна — Гордона[1]).

$$\Box\psi - \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2}\psi = 0.$$

[1]) Здесь $\Box$ — дифференциальный оператор Даламбера:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{dx_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$ — *Прим. ред.*

Это уравнение выводится с помощью преобразования Фурье

$$\mathscr{F}\psi = f\mu,$$

где $f\mu$ — мера с носителем на гиперболоиде

$$p^2 + \frac{m_0^2c^2}{h^2} = 0.$$

Эта мера аннулируется при умножении на $p^2 + \frac{m_0^2c^2}{h^2}$, т. е.

$$\left(p^2 + \frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)(f\mu) = 0.$$

Обратное преобразование Фурье этого уравнения дает уравнение Клейна — Гордона. Поскольку мы получили оператор Даламбера с помощью преобразования Фурье, его следует понимать в смысле обобщенных функций; поэтому функция ψ не имеет, вообще говоря, вторых производных в обычном смысле.

Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ состоит не из всех решений уравнения Клейна — Гордона. Во-первых, существуют решения, не являющиеся обобщенными функциями степенного роста и поэтому не принадлежащие $\mathscr{H}$.

Далее, рассмотрим произвольное решение уравнения Клейна — Гордона, имеющее степенной рост. Преобразование Фурье этого решения имеет носитель на объединении двух ветвей двуполостного гиперболоида. Только в специальных случаях носителем является одна ветвь, поэтому не все решения уравнения Клейна — Гордона степенного роста принадлежат $\mathscr{H}$. Существует, кроме того, еще дополнительное ограничение на Фурье-образы элементов пространства $\mathscr{H}$: они должны быть мерой вида $f\mu$, где функция f квадратично интегрируема по отношению к μ.

Глава 5

ВЕКТОРНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ИХ СВОЙСТВА

§ 1. Векторные частицы

Пусть $V = E_4$, а F — конечномерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Пусть структурная группа G удовлетворяет следующим условиям.

(1) G действует на E_4 как неоднородная собственная группа Лоренца, т. е. задано представление группы G в аффинной группе пространства E_4, образом которого является неоднородная собственная группа Лоренца.

(2) Для любого сдвига $\vec{\alpha} \in \vec{E}_4$ существует элемент $g_{\vec{\alpha}} \in G$, который действует как сдвиг $\vec{\alpha}$ на аффинном пространстве E_4 и тождественно на F.

Заметим, что в силу условия (1) группа G сохраняет меру Лебега.

Рассмотрим элементарную частицу $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(V;\ F)$. Говоря, что G действует на F, мы подразумеваем, что в пространстве F задано линейное представление группы G. Обычно говорят, что обобщенная функция $\vec{T} \in \mathscr{D}'(V;\ F)$ принимает значения в подпространстве F_1 пространства F, если для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ имеем

$$\langle \vec{T},\ \varphi \rangle \in F_1.$$

Теорема. *Пусть $\mathscr{H}$ — элементарная F-частица. Сделаем два следующих предположения.*

(I) *Не существует подпространства F_0 пространства F, $F_0 \neq F$, такого, что все элементы $\psi \in \mathscr{H}$ принимают значения в F_0.*

(II) *Представление группы G в пространстве F приводимо.*

Тогда существует линейное подпространство F_1 пространства F, G-инвариантное и обладающее следующими свойствами.

(а) *Существует изометрия пространства $\mathscr{H}$ на F^0-частицу $\mathscr{H}^0$, где $F^0 = F/F_1$.*

(б) *Факторпредставление группы G в F^0 неприводимо.*

Доказательство. Пусть F_1 является G-инвариантным собственным подпространством пространства F. Пусть $\mathscr{H}_1$ — подпространство всех элементов $\psi \in \mathscr{H}$, принимающих значения в F_1; $\mathscr{H}_1$ — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathscr{H}$. Так как пространство F_1 G-инвариантно, $\mathscr{H}_1$ также G-инвариантно. Частица $\mathscr{H}$ является элементарной, поэтому либо $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$, либо $\mathscr{H}_1 = \{0\}$. Но, согласно (I), равенство $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$ не выполняется. Следовательно, $\mathscr{H}_1 = \{0\}$.

Пусть π — каноническая проекция пространства F на $F^0 = F/F_1$. Каждая обобщенная функция ψ со значениями в F канонически определяет обобщенную функцию $\dot{\psi}$ со значениями в F^0 по формуле

$$\langle \dot{\psi}, \varphi \rangle = \pi(\langle \psi, \varphi \rangle), \quad \varphi \in \mathscr{D}(V).$$

Для $\sigma \in G$, $\dot{f} \in F^0$ положим

$$\sigma \dot{f} = (\sigma f)^{\cdot};$$

правая часть равенства не зависит от выбора $f \in \dot{f}$, так как F_1 инвариантно относительно σ. Пусть $\mathscr{H}^0$ — множество всех обобщенных функций $\dot{\psi}$ для ψ, принадлежащих пространству $\mathscr{H}$. Разумеется, $\mathscr{H}^0 \subset \mathscr{D}'(V; F^0)$ и в $\mathscr{H}^0$ действует группа G. Если $\dot{\psi} = 0$, то ψ принимает значения в F_1 и, следовательно, $\psi = 0$, так как $\mathscr{H}_1 = \{0\}$. Поэтому отображение $\psi \to \dot{\psi}$ из $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}^0$ взаимно однозначно.

Можно перенести структуру гильбертова пространства из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}^0$. Если представление группы G в F^0 приводимо, мы можем продолжать таким же образом и применять предыдущие соображения к F^0 вместо F. Так как размерность пространства F конечна, этот процесс приведет после конечного числа шагов к пространству F^0, обладающему свойством (б).

Эта теорема показывает, что можно ограничиться элементарными F-частицами, для которых представление структурной группы G в F неприводимо. Точнее, теорема показывает, что если это условие не выполняется, то изучаемую F-частицу можно рассматривать как F^0-частицу, где F^0 — некоторое векторное пространство, на котором группа G неприводима. Следует, однако, отметить, что в общем случае не существует способа *канонического* определения пространства F^0.

Мы предположили, что для любого сдвига $\vec{a} \in \vec{E}_4$ существует элемент $g_{\vec{a}}$ структурной группы G, действующий как сдвиг $\vec{a}$ на E_4 и тождественно на F. Следующая теорема показывает, что это верно в широком классе случаев (примером этого является случай электрона, для которого G — собственная спинорная группа).

Теорема. *Пусть F — конечномерное векторное пространство над полем комплексных чисел* C *и G — топологическая группа, действующая неприводимо на F. Пусть G действует на F непрерывно, т. е. отображение*

$$(g, x) \in G \times F \to gx \in F$$

непрерывно. Пусть G_0 — подгруппа группы G, обладающая следующими свойствами:

(1) G_0 — *коммутативная группа, являющаяся нормальным делителем группы G;*

(2) *единственным характером группы G_0, инвариантным относительно связной компоненты единицы группы G, является характер $\chi \equiv 1$.*

Тогда G_0 действует тождественно на F.

Замечания. Элементы $\sigma \in G$ действуют на G_0 как внутренние автоморфизмы

$$g_0 \in G_0 \to \sigma g_0 \sigma^{-1} \in G_0.$$

Действие оператора σ на характеры нормального делителя G_0 определяется с помощью переноса структуры, т. е. если χ — характер подгруппы G_0, то $\sigma\chi$ — новый характер подгруппы G_0, определяемый равенством

$$\sigma\chi(\sigma g_0 \sigma^{-1}) = \chi(g_0), \quad g_0 \in G_0.$$

Покажем, что для электрона условия теоремы выполняются. В этом случае G — собственная спинорная группа, двукратно накрывающая собственную неоднородную группу Лоренца. Образом группы G в аффинной группе пространства E_4 является собственная неоднородная группа Лоренца, причем любой элемент группы Лоренца является образом двух различных элементов группы G. Подгруппой G_0 в этом случае является связная компонента единицы прообраза в G группы сдвигов.

Для того чтобы проверить для электрона условие (1), заметим сначала, что группа сдвигов коммутативна и является нормальным делителем в собственной неоднородной группе Лоренца. Прообраз нормального делителя также является нормальным делителем. Кроме того, если подгруппа является нормальным делителем, то тем же свойством обладает связная компонента единицы. Следовательно, G_0 — нормальный делитель группы G. С другой стороны, подгруппа G_0 коммутативна, так как она изоморфна группе сдвигов.

Чтобы проверить второе условие для электрона, мы должны сначала доказать, что единственным характером группы сдвигов $\vec{E}_4$, инвариантным относительно собственной неоднородной группы Лоренца, является характер $\chi \equiv 1$. Дуальное пространство $\overleftarrow{E}'_4$ канонически изоморфно пространству характеров на $\vec{E}_4$. Собственная неоднородная группа Лоренца связна. Ее действие на $\vec{E}_4$ с помощью внутренних автоморфизмов совпадает с обычным действием собственной однородной группы Лоренца. Поэтому она действует на характеры так, как собственная однородная группа Лоренца действует обыкновенно на дуальном пространстве $\overleftarrow{E}'_4$. Нам нужно только найти те точки пространства $\overleftarrow{E}'_4$, которые являются лоренц-инвариантными.

Но такой точкой является лишь начало координат, а начало координат определяет характер $\chi \equiv 1$. Отсюда следует, что условие (2) выполняется для электрона, ибо подгруппа G_0 изоморфна группе сдвигов, и элементы $\sigma \in G$ действуют на G_0 так же, как элементы собственной неоднородной группы Лоренца действуют на $\vec{E}_4$.

Доказательство теоремы. Для любого конечномерного комплексного представления абелевой группы существует по крайней мере один собственный вектор, общий для всех операторов представления, поэтому для G_0 существует собственный вектор $\vec{f}$:

$$g_0\vec{f}=\chi(g_0)\vec{f} \text{ для любого элемента } g_0\in G_0,$$

где $\chi(g_0)$ — комплексная функция от $g_0\in G_0$.

Так как представление группы G непрерывно, скаляр $\chi(g_0)$ определяет непрерывную функцию на G_0, которая является характером, поскольку

$$\chi(g_0g_1)=\chi(g_0)\chi(g_1).$$

Таким образом, для любого собственного вектора $\vec{f}$ мы получаем соответствующий характер χ. Несколько собственных векторов могут соответствовать одному и тому же характеру χ. Пусть $F_\chi\subset F$ — максимальное подпространство, образованное собственными векторами, такое, что G_0 действует на F_χ как умножение на характер χ. Пусть $\{F_i\}$ — набор таких подпространств F_χ, где χ пробегает множество характеров подгруппы G_0. Число таких подпространств F_i конечно. В самом деле, достаточно показать, что для любой минимальной линейно зависимой системы векторов (эта система конечна, поскольку пространство F конечномерно), каждый из которых отвечает своему характеру, эти характеры тождественны между собой.

Пусть

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k$$

— минимальная линейно зависимая система векторов, каждый из которых соответствует своему характеру χ_i. Любая система $k-1$ векторов e_i линейно независима, и мы имеем

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\ \ldots\ +\lambda_ke_k=0$$

для некоторого набора ненулевых комплексных чисел $\{\lambda_i\}$. Применяя операцию $g_0\in G_0$, получаем

$$\chi_1(g_0)\lambda_1e_1+\chi_2(g_0)\lambda_2e_2+\ \ldots\ +\chi_k(g_0)\lambda_ke_k=0.$$

Если бы числа $\chi_i(g_0)$ не все совпадали, можно было бы скомбинировать эти два равенства и получить в результате зависимость между меньшим количеством векторов. Но это невозможно. Следовательно, характеры

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$$

принимают одно и то же значение на g_0, и, так как это верно для любого g_0, эти характеры тождественны.

Любой оператор $\sigma \in G$ действует на F и на G_0. Так как G_0 — нормальный делитель группы G, то σ оставляет инвариантным действие G_0 на F. Следовательно, оператор σ должен оставлять инвариантной совокупность подпространств $\{F_i\}$ (но соответствующие характеры χ_i могут при этом переставляться). Если элемент группы G остается в связной компоненте единицы и действует непрерывно на этом конечном множестве характеров χ_i, то он не может переставить их и оставляет все χ_i инвариантными.

Но мы предположили, что единственный характер в подгруппе, инвариантный относительно связной компоненты единицы, — это характер $\chi \equiv 1$. Поэтому существует только одно максимальное подпространство F_1, такое, что группа G действует на F_1 как умножение на характер χ_1, и этот характер χ_1 должен быть равен 1. Поэтому группа G оставляет пространство F_1 инвариантным.

Так как представление группы G в F неприводимо, то $F_1 = F$, и, следовательно, G_0 действует на F тождественно, что и требовалось доказать.

§ 2. Описание всех векторных частиц

Сформулируем более точно нашу задачу. Нам заданы многообразие $V = E_4$, конечномерное векторное пространство F над $\mathbf{C}$ и группа Ли G, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) G сохраняет меру Лебега на E_4, т. е. любой оператор $\sigma \in G$ имеет определитель ± 1 как оператор на $\vec{E}_4$;

(2) для любого сдвига в аффинном пространстве E_4 существует по крайней мере один элемент группы G, который действует как этот сдвиг на E_4 и тождественно на F.

Мы ищем экстремальные G-инвариантные гильбертовы пространства $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'(E_4; F)$ с непрерывным вложением в $\mathcal{D}'(E_4; F)$. Как мы видели, это эквивалентно отысканию положительной G-инвариантной экстремальной меры $\vec{\mu}$ степенного роста в $\overleftarrow{E}'_4$ со значениями в пространстве $F \otimes \overline{F}$. Мы нашли необходимое условие экстремальности меры $\vec{\mu}$, которое заключается в том, что носитель меры $\vec{\mu}$ должен лежать в замыкании одной из G-орбит. В случае мезона мы взяли в качестве G собственную неоднородную группу Лоренца и положили $F = \mathbf{C}$. Мы описали положительные G-инвариантные экстремальные скалярные меры μ степенного роста.

Те меры, которые соответствуют физически приемлемым частицам, имеют носителями одну из ветвей двуполостного гиперболоида (или одну из ветвей конуса в случае нулевой массы), и, таким образом, носители зависят от параметров m_0 и $\pm$. Векторная мера $\vec{\mu}$ также будет зависеть от параметров m_0, $\pm$ и некоторых других. Мы покажем, что для векторных частиц (когда G является собственной спинорной группой), если оставаться на двуполостном гиперболоиде (т. е. $m_0 \neq 0$), то мера $\vec{\mu}$ должна иметь вид $\vec{\mu} = \vec{M}\mu$, где μ — найденная для мезона мера, а $\vec{M}$ — бесконечно дифференцируемая медленно растущая на бесконечности G-инвариантная экстремальная функция на гиперболоиде, принимающая значения в пространстве $F \otimes \overline{F}$.

Пусть W — многообразие класса C^∞, а G — группа Ли, действующая на W. Предположим, что $(g, x) \to gx$ — отображение класса C^∞ из $G \times W$ на W. Мы покажем, что любая G-орбита является многообразием в некотором локальном смысле, который мы сейчас уточним. Позднее нам понадобится предположение о том, что рассматриваемые G-орбиты являются замкнутыми многообразиями.

Рассмотрим отображение $s \to sa$, где $s \in G$, $a \in W$, $sa \in W$. Это отображение принадлежит классу C^∞, и, следовательно, определено касательное отображение $\vec{X} \to \vec{X}a$, где $\vec{X}$ — касательный вектор в точке s группы G, а $\vec{X}a$ — касательный вектор в точке sa многообразия W. В частности, если $\vec{X}$ — элемент алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (т. е. касательного пространства к рассматриваемой группе в единице), то $\vec{X}a$ — касательный вектор в самой точке a. Таким образом, мы видим, что любой элемент алгебры Ли $\mathfrak{G}$ определяет посредством этого отображения векторное поле на W (где a пробегает все многообразие W).

Стало быть, мы имеем линейное отображение из алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в векторное пространство всех векторных полей на W.

Для данной точки $a \in W$ область значений отображения $s \to sa$ является в точности орбитой точки a.

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — два многообразия класса C^∞, u — отображение класса C^∞ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$, t_u — касательное отображение. Для любой точки m многообразия $\mathfrak{M}$ сужение отображения t_u на касательное пространство $T(m)$ к $\mathfrak{M}$ в точке m является линейным отображением из $T(m)$ в касательное пространство $T'(m')$ к многообразию $\mathfrak{M}'$ в точке $m' = u(m)$. Размерность образа пространства $T(m)$ при этом отображении называется *рангом отображения u в точке m.*

Применим это определение к $\mathfrak{M} = G$, $\mathfrak{M}' = W$ и к отображению $s \to sa$, когда точка $a \in W$ фиксирована.

Теорема. *Отображение $s \to sa$ является отображением постоянного ранга.*

Доказательство. Любая точка $s_0 \in G$ определяет левый сдвиг на G, который является изоморфизмом группы G на себя. Следовательно, касательное отображение, соответствующее такому сдвигу, является в каждой точке линейным изоморфизмом (на) соответствующих касательных пространств. В частности, отображение

$$\vec{Y} \to s_0\vec{Y}$$

представляет собой линейный изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}$ на касательное пространство группы G в точке s_0. Любой элемент $\vec{X}$ в касательном пространстве к G в точке s_0 может быть записан в виде

$$\vec{X} = s_0\vec{Y},$$

где $\vec{Y}$ — элемент алгебры Ли. Так как G действует на многообразии W как группа, мы можем написать

$$(s_0 y)\, a = s_0 (ya)$$

для s_0, $y \in G$. Дифференцируя это равенство, получаем, что этот ассоциативный закон выполняется также и для касательных векторов

$$(s_0\vec{Y})\, a = s_0 (\vec{Y} a).$$

Таким образом, имеем

$$\vec{X} a = (s_0\vec{Y})\, a = s_0 (\vec{Y} a).$$

Ранг отображения $s \to sa$ в точке s_0 равен размерности векторного подпространства $A_{s_0} = \{\vec{X} a : \vec{X}$ принадлежит касательному пространству к G в точке $s_0\} = \{s_0(\vec{Y} a) : \vec{Y} \in \mathfrak{G}\}$.

Размерность подпространства

$$A_e = \{\vec{Y} a : \vec{Y} \in \mathfrak{G}\}$$

равна рангу отображения $s \to sa$ в точке $s = e$ (e — единичный элемент группы G). Пространство A_{s_0} получается из A_e с помощью отображения t_{s_0} (касательного отображения, соответствующего преобразованию $s_0 : W \to W$). Так как s_0 — автоморфизм многообразия W, то t_{s_0} определяет линейные изоморфизмы (на) касательных пространств. Следовательно,

$$\dim A_{s_0} = \dim A_e.$$

Множество G_a элементов $s \in G$, таких, что $sa = a$ (точка $a \in W$ фиксирована), является подгруппой группы G и называется *стабилизатором* (или *стационарной подгруппой*) точки a.

Пусть точка $a \in W$ фиксирована, и пусть p — ранг отображения $s \to sa$. Касательное отображение $\vec{X} \to \vec{X} a$, рассматриваемое на касательном пространстве к G в произвольной точке s_0, является, как показано выше, линейным отображением ранга p. Возьмем в качестве s_0 точку e — единичный элемент группы G. Согласно классической теореме об отображении постоянного ранга, существует окрестность $\mathfrak{E}$ точки e в G, такая, что множество $\{sa : s \in \mathfrak{E}\}$ само является многообразием класса C^∞ размерности p. Более того, $G_a \cap \mathfrak{E}$ — также многообразие, размерность которого равна разности между размерностями группы G и орбиты. Стабилизатор G_a представляет собой многообразие как локально, так и в целом. В самом деле, так как G_a — замкнутая группа, такая, что ее пересечение с окрестностью единичного элемента является многообразием, то легко видеть, что G_a — группа Ли, а следовательно, и многообразие.

Касательное векторное пространство к пересечению $G_a \cap \mathfrak{E}$ в точке e, которое является алгеброй Ли $\mathfrak{G}_a$ стабилизатора G_a, представляет собой множество всех векторов $\vec{X}$, для которых $\vec{X}a = 0$.

Любая точка орбиты обладает окрестностью *в самой орбите*, которая является многообразием класса C^∞. Но может случиться, что орбита бесконечное число раз проходит вблизи точки a, каждый раз все ближе и ближе, таким образом, что пересечение любой достаточно малой окрестности точки a в многообразии W с орбитой всегда имеет бесконечное число компонент. В этом случае орбита не может быть подмногообразием многообразия W.

Для того чтобы избежать такой неприятности, мы будем предполагать, что орбита является *замкнутым подмногообразием* многообразия W. Тогда размерность этого подмногообразия равна постоянной p, потому что оно является объединением не более чем счетного числа многообразий размерности p, а, согласно теореме Бэра, объединение счетного числа многообразий размерности p также имеет размерность p. Когда G — группа Лоренца или спинорная группа, а $W = E_4'$, рассматриваемые орбиты будут настоящими гиперболоидами; световой конус исключается, так как, согласно нашему предположению, орбиты должны быть замкнутыми.

Чтобы получить дальнейшие результаты, используем теорему о неявных функциях. Рассмотрим трансверсальное многообразие Σ, проходящее через единичный элемент $e \in G$, т. е. многообразие класса C^{∞}, касательное пространство к которому дополнительно к касательному пространству стабилизатора G_a.

(Два векторных подпространства называются дополнительными, если любой вектор пространства представим единственным образом в виде суммы двух векторов, принадлежащих этим подпространствам[1].)

Это трансверсальное многообрааие Σ определяется выбором подпространства в $\mathfrak{G}$, дополнительного к $\mathfrak{G}_a$. Мы можем ограничить наши рассмотрения многообразием Σ, поскольку точка $a \in W$ инвариантна относительно всех $s \in G_a$. Все пересечение орбиты с окрестностью точки a можно получить, рассматривая действие на a только операторов $s \in \Sigma$.

Пусть Ω — орбита точки a; рассмотрим уравнение

$$y = sx, \quad x, y \in \Omega, \quad s \in \Sigma.$$

Рассматривая y как функцию от s, мы видим, что матрица Якоби функции y по отношению к s (в допустимых локальных координатах для s вблизи e и для x, y вблизи a в Ω) является не чем иным как матрицей касательного отображения (в базисе, определенном этими локальными координатами). Для $s = e$, $x = a$ это касательное отображение является изоморфизмом касательного пространства к Σ в точке e на касательное пространство к Ω в точке a. Поэтому якобиан не может быть равен нулю. Ввиду этого мы можем применить следующий результат.

Теорема о неявной функции. *Существуют окрестность X' точки a в орбите Ω и окрестность Σ' точки e в многообразии Σ, такие, что для всех $x \in X'$, $y \in X'$ уравнение*

$$y = sx$$

имеет единственное решение $s \in \Sigma'$. Это решение можно записать в виде $s = S(x, y)$, где S — функция класса C^{∞} на $X' \times X'$ со значениями в Σ'. Более того,

[1]) То есть если все пространство является прямой суммой этих двух подпространств. — *Прим. ред.*

в силу непрерывности операции $(s, x) \to sx$ *существуют окрестность* X'' *точки* a *и окрестность* Σ'' *точки* s, *где* $\bar{X}'' \subset X'$, *такие, что для* $x \in X''$, $s \in \Sigma''$ *мы имеем* $sx \in X'$. (Мы можем пойти еще дальше и найти окрестность $X_0 \subset X''$ точки a и окрестность Σ_0 точки e, такие, что для $x \in X_0$, $s \in \Sigma_0$ выполняется соотношение $s^{-1}x \in X''$.)

Теорема. *Пусть* $\vec{T}$ — *обобщенная функция на многообразии* Ω *со значениями в пространстве* $F \otimes \bar{F}$. *Если* $\vec{T}$ *G-инвариантна, то* $\vec{T}$ — *бесконечно дифференцируемая функция.*

Замечания. В этом утверждении пространство $F \otimes \bar{F}$ можно заменить любым конечномерным векторным пространством.

Напомним, что́ имеют в виду, когда говорят, что $\vec{T}$ — функция класса C^∞ на Ω. Возьмем любое открытое подмножество U многообразия Ω, в котором заданы локальные координаты. По определению эти координаты задают бесконечно дифференцируемый гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество U' пространства $\mathbf{R}^p$ (p — размерность многообразия Ω). Следовательно, сужение $\vec{T}$ на U определяет обобщенную функцию $\vec{T}'$ в U' (по-прежнему принимающую значения в пространстве $F \otimes \bar{F}$). Эта обобщенная функция $\vec{T}'$ на U' должна быть функцией класса C^∞ на U'. Иначе говоря, если мы выберем в $\mathbf{R}^p$ меру Лебега dx, то найдется функция $\vec{f}(x)$ класса C^∞ на U', принимающая значения в $F \otimes \bar{F}$ и такая, что

$$\langle \vec{T}', \varphi \rangle = \int \vec{f}(x) \varphi(x) \, dx$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^p)$ с носителем в U'. Описанное свойство обобщенной функции $\vec{T}$ не зависит ни от выбора подмножества U и локальных координат на U, ни от меры Лебега dx.

Доказательство теоремы. Пусть Φ — представление группы G в пространстве $F \otimes \bar{F}$. Из инвариантности обобщенной функции $\vec{T}$ следует, что

$$\langle\vec{T},\ \varphi\rangle = \Phi(s)\langle\vec{T},\ \varphi(s\,x)\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

Мы должны доказать, что для любой точки $a\in\Omega$ обобщенная функция $\vec{T}$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a. Мы можем считать, что эта окрестность совпадает с окрестностью X_0, которую мы выбрали в теореме о неявной функции. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(X_0)$, $\alpha\in\mathscr{D}(\Sigma_0)$. Положим $ds = ds_1\,ds_2\,\ldots\,ds_p$, где s_i — канонические координаты на Σ_0. Если

$$\int\alpha(s)\,ds = 1,$$

то

$$\langle T,\ \varphi\rangle = \int\alpha(s)\,ds\Phi(s)\langle T,\ \varphi(sx)\rangle.$$

По определению тензорного произведения обобщенных функций имеем

$$\langle T,\ \varphi\rangle = \langle\alpha(s)\,\Phi(s)\otimes T_x,\ \varphi(sx)\rangle =$$
$$= \left\langle T_x,\ \int\alpha(s)\,\Phi(s)\,\varphi(sx)\,ds\right\rangle.$$

Для вычисления интеграла достаточно рассмотреть только те значения x, в которых подинтегральная функция отлична от нуля, т. е. множество

$\{x : sx$ принадлежит носителю функции φ,

s принадлежит носителю функции $\alpha\}$.

Но носитель функции φ содержится в X_0, а носитель функции α содержится в Σ_0. Полагая $sx = y$, находим, что достаточно рассматривать x в множестве

$$\{x = s^{-1}y : y\in X_0,\ s\in\Sigma_0\}.$$

По теореме о неявной функции это множество содержится в X'', так что достаточно рассмотреть $x\in X''$; для $x\notin X''$ подинтегральное выражение равно нулю. Используем выражение $s = S(x,\ y)$ для перехода от переменной s к новой переменной y (при фиксированном x). Мы должны проверить, что области интегрирования правильно определены как в старых, так и в новых переменных, и что замена переменных определяет изоморфизм между этими областями с отличным от нуля якобианом. Отображение $y \to s = S(x, y)$ при фиксированном $x \in X''$ является отображением из X' в Σ'. Так как это отображение обращается с помощью равенства

$$y = sx,$$

образом X' является открытое подмножество окрестности Σ'. Таким образом, это отображение определяет гомеоморфизм класса C^∞ из X' в открытое подмножество окрестности Σ'.

Теперь мы должны показать, что образ окрестности X' покрывает всю область интегрирования по переменной s, т. е. мы должны показать, что носитель функции $\alpha(s)$ содержится в образе окрестности X'. Если s принадлежит носителю функции $\alpha(s)$, то $s \in \Sigma_0$. Но $x \in X''$, следовательно, $sx \in X'$, а это означает, что образ окрестности X' при отображении $s = S(x, y)$ при фиксированном $x \in X''$ покрывает Σ_0, а значит, и носитель функции $\alpha(s)$. Замена переменных приводит к равенству

$$\langle T, \varphi\rangle =$$
$$= \left\langle T_x, \int \alpha(S(x, y))\, \Phi(S(x, y))\, \varphi(y) \left|\det \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)\right| dy \right\rangle =$$
$$= \int \varphi(y)\, dy \left\langle T_x, \alpha(S(x, y))\, \Phi(S(x, y)) \left|\det \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)\right| \right\rangle.$$

Далее, произведение

$$\alpha(S(x, y))\, \Phi(S(x, y)) \left|\det \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)\right|$$

является бесконечно дифференцируемой функцией переменной y в X'. Следовательно,

$$\tau(y) = \left\langle T_x, \alpha(S(x, y))\, \Phi(S(x, y)) \left|\det \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)\right| \right\rangle$$

— также бесконечно дифференцируемая функция переменной y. Мы получаем

$$\langle T, \varphi\rangle = \int \varphi(y)\, \tau(y)\, dy = \langle \tau, \varphi\rangle;$$

следовательно, $T = \tau$ — бесконечно дифференцируемая функция переменной y.

Применим эту теорему к нашей задаче. Рассмотрим в многообразии Ω G-орбиту, которая является гиперболоидом, и меру $\vec{\mu}$ с носителем Ω, которая определяет обобщенную функцию на Ω. По доказанной теореме, $\vec{\mu}$ — бесконечно дифференцируемая функция на Ω. Тот же самый результат справедлив для скалярной меры μ, т. е. она является бесконечно дифференцируемой функцией.

Из инвариантности меры μ следует, что она не обращается в нуль, так как в противном случае она была бы равна нулю тождественно. Поэтому мы можем определить отношение $\vec{\mu}|\mu = \vec{M}$, которое должно быть бесконечно дифференцируемой функцией на Ω. Таким образом, мы получаем, что $\vec{\mu}$ можно записать в виде

$$\vec{\mu} = \vec{M}\mu,$$

где $\vec{M}$ — бесконечно дифференцируемая функция. Более того, $\vec{M}$ инвариантна относительно группы G, так как $\vec{M}\mu$ преобразуется под действием оператора $\sigma \in G$ в другую обобщенную функцию, которая определяет ту же самую меру. Таким образом, $\vec{M}$ должна переходить в другую функцию, которая почти всюду (в смысле меры μ) равна функции $\vec{M}$, но так как $\vec{M}$ непрерывна, то $\vec{M}$ должна всюду совпадать с преобразованной функцией. Если $\vec{\mu}$ положительна, то и $\vec{M}$ должна быть положительной почти всюду (в смысле меры μ), а так как она непрерывна, то она всюду положительна.

Таким образом, наша задача свелась к отысканию на гиперболоиде Ω бесконечно дифференцируемой функции $\vec{M}$, принимающей значения в пространстве $F \otimes \bar{F}$, которая была бы G-инвариантной, положительной, экстремальной и имела степенной порядок роста на бесконечности. Возьмем точку $a \in \Omega$. Мы уже знаем, что $\vec{M}(a)$ — положительный G_a-инвариантный элемент множества $F \otimes \bar{F}$. Обратно, если положить $\vec{M}(a)$ равным любому положительному G_a-инвариантному элементу множества $F \otimes \bar{F}$, то можно однозначным образом восстановить бесконечно дифференцируемую функцию $\vec{M}$ на Ω, которая принимает значения в $F \otimes \bar{F}$, является G-инвариантной, положительной, экстремальной и имеет степенной рост на бесконечности. Эта функция определяется формулой

$$\vec{M}(p) = \sigma \vec{M}(a),$$

где $p = \sigma a$; $\vec{M}(p)$ не зависит от выбора σ, так как если имеется другой элемент σ', переводящий точку a в точку p, то он должен иметь вид $\sigma' = \sigma\gamma$, где $\gamma \in G_a$, а отсюда следует, что

$$\sigma' \vec{M}(a) = \sigma\gamma \vec{M}(a) = \sigma \vec{M}(a)$$

в силу того, что элемент $\vec{M}(a)$ инвариантен относительно подгруппы G_a. Покажем теперь, что $\vec{M}(p)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Будем считать, что окрестность N_a точки a в Ω достаточно мала для того, чтобы можно было применить теорему о неявной функции. В этом случае можно взять в качестве σ элемент $S(a, p)$, где S определяется теоремой о неявной функции. Таким образом,

$$\vec{M}(p) = S(a, p)\, \vec{M}(a),$$

а так как $S(a, p)$ является функцией класса C^∞, мы видим, что $\vec{M}(p)$ — функция класса C^∞ в окрестности N_a точки a. Если мы возьмем теперь любую точку b, то существует элемент σ_0, такой, что $b = \sigma_0 a$. Множество

$$N_b = \{\sigma_0 p : p \in N_a\}$$

является окрестностью точки b. Так как любую точку $p \in N_a$ можно записать в виде $p = \sigma a$, где $\sigma = S(a, p)$, то отсюда следует, что любую точку $q \in N_b$ можно записать в виде

$$q = \sigma_0 S(a, p)\, a = \sigma_0 S\left(a, \sigma_0^{-1} q\right) a;$$

тогда для $q \in N_b$ имеем

$$\vec{M}(q) = \sigma_0 S\left(a,\ \sigma_0^{-1} q\right) \vec{M}(a).$$

Поэтому $\vec{M}(q)$ является функцией класса C^∞ в окрестности N_b. Мы доказали тем самым, что $\vec{M}$ является бесконечно дифференцируемой функцией на всем множестве Ω.

Нам осталось доказать, что определенная таким образом функция $\vec{M}$ имеет степенной рост на бесконечности. Предположим сначала, что G — собственная однородная группа Лоренца. Рассмотрим систему координат в пространстве $\overleftarrow{E}_4$, в которой точка a имеет вид $a = (0, 0, 0, a_0)$. В равенстве

$$\vec{M}(p) = \sigma \vec{M}(a), \quad p = \sigma a,$$

действие оператора σ на $\vec{M}(a)$ определяется с помощью представления Φ группы G. Поэтому для большей ясности лучше писать

$$\vec{M}(p) = \Phi(\sigma) \vec{M}(a), \quad p = \sigma a.$$

Выберем какую-нибудь норму в пространстве $F \otimes \bar{F}$. Тогда

$$\|\vec{M}(p)\| \leqslant \|\Phi(\sigma)\| \, \|\vec{M}(a)\|, \quad p = \sigma a.$$

Теперь достаточно показать, что $\|\Phi(\sigma)\|$ медленно возрастает по отношению к p, где $p = \sigma a$. Допустим, что p имеет вид

$$p = (p_1,\ 0,\ 0,\ p_0),$$

и рассмотрим преобразования Лоренца (θ), зависящие от параметра θ, на плоскости P первой пространственной оси и оси времени

$$(\theta): \begin{cases} p_1 = q_1 \operatorname{ch} \theta + q_0 \operatorname{sh} \theta, \\ p_0 = q_1 \operatorname{sh} \theta + q_0 \operatorname{ch} \theta. \end{cases}$$

Так как за исходную точку принята точка $(0, 0, 0, a_0)$, мы получаем

$$p_1 = a_0 \operatorname{sh} \theta,$$

$$p_0 = a_0 \operatorname{ch} \theta.$$

Следовательно,

$$p_1 \sim \frac{1}{2} a_0 e^{\theta},$$

$$p_0 \sim \frac{1}{2} a_0 e^{\theta},$$

и поэтому для некоторой постоянной C_1 имеем

$$|\theta| \leqslant \log C_1 \| p \|.$$

Пусть теперь p — произвольная точка гиперболоида. Мы можем перейти от точки a к точке p при помощи двух последовательных преобразований Лоренца. Пусть τ — пространственное вращение (которое принадлежит стабилизатору G_a точки a), переводящее p в плоскость P; положим $p' = \tau p$. Пусть (θ) — описанное выше преобразование в плоскости P, переводящее a в p'. Имеем:

$$\sigma = \tau^{-1} \cdot (\theta)$$

и

$$\| \Phi(\sigma) \| \leqslant \| \Phi(\tau^{-1}) \| \, \| \Phi((\theta)) \|.$$

Но пространственные вращения образуют компактную группу линейных операторов в пространстве $F \otimes \bar{F}$, поэтому все их нормы ограничены некоторой фиксированной константой. Тогда для некоторой константы C_2

$$\| \Phi(\sigma) \| \leqslant C_2 \| \Phi((\theta)) \|.$$

Согласно общей теореме о представлении любой однопараметрической группы в нормированном пространстве, которая утверждает, что норма оператора представления ограничена некоторой экспонентой от параметра, справедлива следующая оценка:

$$\| \Phi((\theta)) \| \leqslant e^{k|\theta|},$$

где k — некоторое число. Так как $|\theta| \leqslant \log C_1 \| p' \|$, то можно записать

$$\| \Phi((\theta)) \| \leqslant C_3 e^{k \log C_1 \| p' \|} = C_4 \| p' \|^k.$$

Используя еще раз тот факт, что пространственные вращения образуют компактную группу, получаем оценку

$\|p'\| \leqslant C_5 \|p\|$ и, наконец, для некоторой константы C_6 находим

$$\|\Phi((\theta))\| \leqslant C_6 \|p\|^k,$$

откуда следует, что $\|\Phi(\sigma)\|$ имеет степенной рост, а значит, тем же свойством обладает и мера $\vec{M}$.

Если G — любая группа, образ которой в линейной группе пространства $\overleftarrow{E}'_4$ является собственной однородной группой Лоренца, то однопараметрическую группу (θ) в этом образе можно „поднять" в группу G. Для этого достаточно „поднять" соответствующий инфинитезимальный оператор, и он породит в G однопараметрическую группу, имеющую (θ) своей проекцией. Таким образом, доказательство степенного роста функции $\vec{M}$, приведенное выше, остается справедливым и для группы G.

Тем самым мы показали, что все G-инвариантные гильбертовы пространства $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'(E_4;\ F)$ (с непрерывным вложением), связанные с орбитой Ω, т. е. с параметрами $m_0 > 0$ и $\pm$, взаимно однозначно соответствуют положительным G_a-инвариантным элементам $\vec{M}(a) \in F \otimes \overline{F}$ для фиксированной точки $a \in \Omega$. Кроме того, гильбертово пространство $\mathscr{H}$ экстремально тогда и только тогда, когда соответствующий элемент $\vec{M}(a)$ экстремален.

Применим теперь теорию ядер. Положительный G_a-инвариантный элемент пространства $F \otimes \overline{F}$ является положительным G_a-инвариантным антиядром для F, т. е. положительным антилинейным отображением $F' \to F$, которое G_a-инвариантно. Нахождение этого антиядра эквивалентно нахождению G_a-инвариантного подпространства $F_a \subset F$, снабженного эрмитовой структурой. Это подпространство экстремально тогда и только тогда, когда соответствующий элемент пространства $F \otimes \overline{F}$ экстремален.

Методы отыскания всех G_a-инвариантных неприводимых подпространств F_a пространства F известны. Допустим, что найдено такое подпространство F_a; мы должны, если это возможно, наделить F_a G_a-инвариантной эрмитовой структурой. Пусть Γ_a — образ G_a в линейной группе подпространства F_a. Заметим, что

$$\Gamma_a = G_a / G_1,$$

где G_1 — подгруппа группы G_a, которая действует тождественно на подпространстве F_a. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать Γ_a-инвариантную эрмитову структуру на F_a. Необходимое и достаточное условие для существования такой структуры заключается в том, чтобы группа Γ_a была относительно компактной[1]). Для того чтобы доказать это, предположим сначала, что Γ_a оставляет инвариантной эрмитову форму над F_a. Тогда Γ_a должна содержаться в унитарной группе, соответствующей этой эрмитовой структуре.

Так как унитарная группа компактна, то группа Γ_a относительно компактна. Обратно, если Γ_a относительно компактна, мы можем выбрать на F_a любую эрмитову форму и, усреднив ее по мере Хаара подгруппы $\overline{\Gamma}_a$, получить Γ_a-инвариантную эрмитову форму. Эта Γ_a-инвариантная эрмитова форма единственна с точностью до постоянного множителя.

Итак, мы нашли все возможные решения нашей задачи, соответствующие данной орбите Ω. Повторим кратко этот процесс. Мы отыскиваем в пространстве F все возможные G_a-инвариантные и G_a-неприводимые подпространства F_a. Для любого такого F_a, если образ Γ_a группы G_a в линейной группе подпространства F_a относительно компактен, существует единственная с точностью до постоянного множителя эрмитова форма, которая является G_a-инвариантной и определяет векторную частицу. Если же образ Γ_a не является относительно компактным, это значит, что мы не нашли никакой частицы.

В качестве примера предположим, что G — собственная неоднородная группа Лоренца, $V = E_4$ и F — любое конечномерное векторное пространство. Пусть Ω — любая ветвь двуполостного гиперболоида (но не конуса) в $\overleftarrow{E}'_4$. Выберем точку $a \in \Omega$ и систему координат такую, что в ней точка a имеет координаты $(0, 0, 0, a_0)$. Стабилизатор G_a является просто ортогональной группой в трехмерной пространственно-подобной плоскости, определяемой тремя пространственными осями выбранной координатной системы. Известно, что пространство F вполне приво-

---

[1]) Множество Γ называется относительно компактным, если его замыкание $\overline{\Gamma}$ компактно. — *Прим. ред.*

димо [1]). Любому неприводимому подпространству пространства F соответствует F-частица, поскольку ортогональная группа компактна. Если в этих неприводимых подпространствах представления группы G_a не эквивалентны, то такое разложение пространства F на неприводимые компоненты единственно. Но некоторые представления могут оказаться эквивалентными, и в этом случае мы имеем бесконечное число возможных неприводимых подпространств. Каждое из них определяет F-частицу. Мы не будем здесь касаться вопроса, определяют ли одну и ту же частицу два эквивалентных неприводимых представления. Мы ищем только F-частицы для одного данного представления. Наша задача отыскания всех F-частиц решена теперь для случая, когда G — собственная неоднородная группа Лоренца, и легко видеть, что подобным же образом эта проблема решается, когда G — собственная спинорная группа.

Совершенно иная задача возникает, если рассматривать однополостный гиперболоид. Если на этом гиперболоиде задана точка a, то выберем систему координат так, чтобы координаты точки a имели вид $(a_1, 0, 0, 0)$. Стабилизатор G_a является группой Лоренца по отношению к двум последним пространственным и временно́й координатам. Мы должны проверить, имеет ли пространство F неприводимые компоненты F_a, на которых G_a действует компактно (т. е. образ стабилизатора G_a в линейной группе подпространства F_a является компактной группой). Например, может случиться, что G_a тождественно действует на F_a. Это как раз происходит в случае мезона, когда $F = \mathrm{C}$ и вся группа G тождественно действует на C (и, конечно, G_a также тождественно действует на C). Оказывается, что, исходя из однополостного гиперболоида, мы можем получить только такие F-частицы, для которых G_a действует тождественно на F_a, поскольку единственная компактная факторгруппа группы Лоренца — это группа, состоящая из одной единицы.

---

[1]) Пространство называется вполне приводимым (относительно некоторой совокупности операторов), если всякое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение. — *Прим. ред.*

Пространство $\vec{F}_a$ в случае $m=0$

В случае $m=0$ гиперболоид заменяется световым конусом. Для любой точки a светового конуса (исключая вершину) стабилизатор G_a является группой Лоренца касательной плоскости, которая изоморфна группе вращений и сдвигов в двумерной евклидовой плоскости. Эта группа имеет компактную факторгруппу — ортогональную группу двумерной плоскости. Таким образом, для некоторых представлений можно получить инвариантную функцию $M(a)$, а для других — нельзя. Например, для фотона и нейтрино этого нельзя сделать. В физике известно, что фотоны и нейтрино нельзя представить гильбертовыми пространствами функций, но можно представить неотделимыми предгильбертовыми полными пространствами (см. ниже § 5). В таком пространстве движение задается классом φ функций, эквивалентных в смысле так называемой калибровочной инвариантности.

§ 3. Полное описание преобразования Фурье гильбертова пространства для векторных частиц

Мы сначала опишем функциональное пространство, а потом покажем, что оно является преобразованием Фурье гильбертова пространства $\mathscr{H}$. Пусть a — заданная точка на одной из ветвей Ω двуполостного гиперболоида. Нам задана скалярная мера μ с носителем Ω и функция $M(p)$, определенная на Ω. Для любой данной точки $p \in \Omega$ величина $M(p)$ представляет собой положительный элемент пространства $F \otimes \bar{F}$, т. е. положительное антилинейное отображение (положительное антиядро):

$$F' \to F_p \subset F,$$

где подпространство F_p имеет G_p-инвариантную эрмитову структуру, является G_p-неприводимым и соответствует антиядру $M(p)$ по теореме об антиядрах. Так как

$$M(p) = \sigma M(a)$$

для любого оператора σ, такого, что $p = \sigma a$, то $F_p = \sigma F_a$ для любого такого σ, где σF_a означает действие оператора σ на F_a в представлении группы G в пространстве F.

Квадратичная форма на F_p под действием оператора σ переходит в квадратичную форму на подпространстве F_a. Таким образом, для любой точки $p \in \Omega$ мы получаем подпространство $F_p \subset F$, которое зависит от p и в котором задана положительно определенная эрмитова форма, также зависящая от p.

Определение. Пространством $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$ называется пространство, которое состоит из классов эквивалентных функций f (т. е. совпадающих почти всюду в смысле меры μ), заданных на Ω, принимающих значения в F и обладающих следующими свойствами:

(1) для любого $p \in \Omega$ имеем $f(p) \in F_p$;

(2) как вектор-функция f является μ-измеримой;

(3) $\|f(p)\|_p$ квадратично μ-интегрируема.

Обозначим эрмитову форму в F_p символом $(\ ,\ )_p$ и положим

$$\|\vec{f}(p)\|_p = (\vec{f}, \vec{f})_p^{1/2}, \quad \vec{f} \in F_p.$$

Введем в $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$ скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} (f(p), g(p))_p \, d\mu(p), \qquad f, g \in L^2(\Omega, \mu, F_p, F).$$

Соответствующая норма определяется выражением

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int\limits_{\Omega} \|f(p\|_p^2 \, d\mu(p) \right)^{1/2}.$$

Лемма. *Если f является $\Omega \to F$-функцией, удовлетворяющей условиям* (1) *и* (2) *приведенного выше определения, то неотрицательная функция $\|f(p)\|_p$ μ-измерима.*

Фиксируем $a \in \Omega$. Существует окрестность Ω_a точки a в Ω, такая, что для $p \in \Omega_a$ можно рассмотреть функцию $S(a, p)$ переменной p, принимающую значения в G и определенную по теореме о неявной функции; $S(a, p)$ является бесконечно дифференцируемой функцией $\Omega_a \to G$. Имеем

$$\|f(p)\|_p = \|S^{-1}(a, p) f(p)\|_a, \quad p \in \Omega_a.$$

Если $f(p)$ μ-измерима как функция $\Omega_a \to F$, то функция $S^{-1}(a, p) f(p)$ μ-измерима как функция $\Omega_a \to F$ и как функция $\Omega_a \to F_a$. Отсюда следует справедливость леммы, поскольку норма измеримой векторной функции (принимающей значения в конечномерном пространстве) измерима и измеримость является локальным свойством.

Теорема. *$L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$ — гильбертово пространство.*

Нам нужно показать лишь полноту этого пространства. Пусть $\{f_k\}$ — последовательность Коши элементов пространства $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$. Можно найти подпоследовательность $\{f_{k_\alpha}\}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$), такую, что

$$\|f_{k_{\alpha+1}} - f_{k_\alpha}\|_{L^2}^2 \leqslant 2^{-\alpha}.$$

Положим,

$$g_\alpha = f_{k_{\alpha+1}} - f_{k_\alpha}.$$

Если мы докажем, что ряд $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} g_\alpha$ сходится в $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$ к элементу g этого пространства, то $f = g + f_{k_1}$ будет пределом последовательности $\{f_k\}$.

Ряд

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \int_\Omega \|g_\alpha(p)\|_p^2 \, d\mu(p)$$

сходится. Из свойств скалярных функций вытекает, что существует множество $N \subset \Omega$ меры нуль, такое, что ряд

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \|g_\alpha(p)\|_p$$

сходится, если $p \notin N$.

Но отсюда вытекает, что для $p \notin N$ ряд $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} g_\alpha(p)$ сходится в F_p; пусть $g(p)$ — его сумма. Для $p \in N$ положим $g(p) = 0$. Ряд $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} g_\alpha$ сходится почти всюду (в смысле меры μ) к классу функций, эквивалентных g (который мы также обозначим через g). Так как g_α — измеримые функции из Ω в F, то по теореме Егорова то же верно для g. Согласно лемме, норма $\|g(p)\|_p$ в этом случае измерима;

применяя классический результат для неотрицательных функций, находим, что

$$\left(\int_{\Omega} \|g(p)\|_p^2 \, d\mu(p)\right)^{1/2} \leqslant \sum_{a=1}^{\infty}\left(\int_{\Omega} \|g_a(p)\|_p^2 \, d\mu(p)\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что g удовлетворяет условиям (1), (2), (3) определения. Теорема доказана.

Определение. Пространством $\Lambda^2(\Omega, \mu, F_p, F)$ называется пространство всех мер $f\mu$ на $\overleftarrow{E}'_4$, где $f \in L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$. Пространство $\Lambda^2(\Omega, \mu, F_p, F)$ снабжено нормой

$$\|f\mu\|_{\Lambda^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Пусть $\mathscr{D}(\Omega, F_p, F)$ — пространство функций $\varphi: \Omega \to F$ со следующими свойствами:

(I) для любого $p \in \Omega$ имеем $\varphi(p) \in F_p$;

(II) φ как функция $\Omega \to F$ является функцией класса C^∞ с компактным носителем.

Теорема. $\mathscr{D}(\Omega, F_p, F)$ *является плотным подпространством пространства* $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$. *Аналогично множество* $\{\varphi\mu : \varphi \in \mathscr{D}(\Omega, F_p, F)\}$ *является плотным подпространством пространства* $\Lambda^2(\Omega, \mu, F_p, F)$.

Доказательство. Любая функция

$$f \in L^2 = L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$$

является пределом „срезанных“ функций, т. е. функций, равных f на некотором компактном подмножестве множества Ω и нулю на дополнении к этому подмножеству (можно взять возрастающую последовательность таких компактных подмножеств, исчерпывающую Ω). Поэтому достаточно доказать, что любая функция $f \in L^2$ с компактным носителем является пределом функций из $\mathscr{D}(\Omega, \mu, F_p, F)$.

В действительности достаточно доказать, что для любой точки $a \in \Omega$ существует окрестность, такая, что любая функция с компактным носителем, содержащимся в этой окрестности, является пределом функций из $\mathscr{D}(\Omega, \mu, F_p, F)$. Если это доказано, то любой компактный носитель можно покрыть конечным числом таких окрестностей, и из разложения единицы немедленно вытекает, что любая функция с компактным носителем, принадлежащая L^2, является пределом функций из $\mathscr{D}(\Omega, \mu, F_p, F)$. Далее, если задана точка $a \in \Omega$, то можно выбрать открытую окрестность Ω_a в соответствии с теоремой о неявной функции так, что для любой функции f на Ω_a можно рассмотреть функцию $g(p) = S^{-1}(a, p) f(p)$. Таким образом, в множестве Ω_a мы снова приходим к фиксированному гильбертову пространству F_a с фиксированной нормой $\|\cdot\|_a$. Однако известно, что функции

$$\psi \in \mathscr{D}(\Omega_a, F_a)$$

плотны в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega_a, \mu, F_a)$.

Следовательно, функции $\varphi(p) = S(a, p)\psi(p)$ плотны в $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$. Кроме того, φ является функцией класса C^∞, поскольку ψ и S принадлежат этому классу, и имеет компактный носитель, так как этим свойством обладает ψ. Теорема доказана.

Пространство $\mathscr{H}$ является пополнением пространства всех элементов вида $H * \overline{\varphi}$, где $\varphi \in \mathscr{D}(E_4) \otimes F'$, по норме

$$\|H * \overline{\varphi}\|_{\mathscr{H}} = \langle H * \overline{\varphi}, \varphi \rangle^{1/2}.$$

Мы можем также взять $\varphi \in \mathscr{S}(E_4) \otimes F'$. Преобразованием Фурье (см. стр. 90) тогда будет

$$\mathscr{F}(H * \overline{\varphi}) = M\mu\overline{\psi},$$

где $\psi = \mathscr{F}\varphi$ и $\mathscr{F}H = M\mu$. Так как $\check{\psi} = \overline{\mathscr{F}}\varphi$, то из определения преобразования Фурье обобщенных функций следует, что

$$\|H * \overline{\varphi}\|^2_{\mathscr{H}} = \langle H * \overline{\varphi}, \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi \rangle = \langle \mathscr{F}(H * \overline{\varphi}), \overline{\mathscr{F}}\varphi \rangle =$$

$$= \langle M\mu\overline{\psi}, \check{\psi} \rangle = \int_{\Omega} M\tilde{\psi}\check{\psi}\, d\mu.$$

Но $M(p)$ определяет антилинейное отображение

$$\mathscr{M}(p): F' \to F_p,$$

задаваемое равенством

$$\mathscr{M}(p)\overleftarrow{g} = M(p)\overline{\overleftarrow{g}},$$

так что

$$M\mu\tilde{\psi} = (\mathscr{M}(p)\cdot\check{\psi}(p))\,\mu.$$

Положим

$$f(p) = \mathscr{M}(p)\check{\psi}(p) \quad \text{для} \quad p \in \Omega.$$

Мы видим, что $f(p) \in F_p$ для любой точки $p \in \Omega$. Если вместо произвольной функции $\varphi \in \mathscr{S}$ взять функцию $\varphi \in \mathscr{S}(E_4) \otimes F'$, такую, что ее преобразованием Фурье является функция $\psi \in \mathscr{D}(E_4') \otimes F'$, то мы получим функцию $f\mu$, где f — бесконечно дифференцируемая функция $\Omega \to F$ с компактным носителем, принимающая значения в пространстве F_p; следовательно, $f\mu \in \Lambda^2(\Omega, \mu, F_p, F)$. Норма функции $f\mu$ в $\mathscr{F}\mathscr{H}$ определяется равенством

$$\|f\mu\|_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \|H * \bar{\varphi}\|_{\mathscr{H}},$$

поэтому

$$\|f\mu\|^2_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \int_\Omega M(p)\,\tilde{\psi}\check{\psi}\,d\mu(p) =$$

$$= \int_\Omega (\mathscr{M}(p)\check{\psi}(p))\,\check{\psi}(p)\,d\mu(p).$$

Но это последнее выражение имеет вид $\langle e', Le'\rangle$, и из того, что $\langle e', Le'\rangle = \|Le'\|_{\mathscr{H}_1}$, где $\mathscr{H}_1$ — гильбертово пространство, соответствующее антиядру L, следует, что интеграл

$$\int (\mathscr{M}(p)\check{\psi}(p))\,\check{\psi}(p)\,d\mu(p)$$

равен норме функции f в пространстве $L^2(\Omega, \mu, F_p, F)$. Отсюда мы заключаем, что

$$\|f\mu\|^2_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \int \|f(p)\|^2_p\,d\mu(p);$$

таким образом, доказана

Теорема. *Если $f(p) = \mathscr{M}(p)\check{\psi}(p)$ для $\psi \in \mathscr{D}(E_4') \otimes F'$, то $f(p) \in \mathscr{D}(\Omega, F_p, F)$ и*

$$\|f\mu\|_{\mathscr{F}\mathscr{H}} = \|f\mu\|_{\Lambda^2}.$$

Пространство

$$\{f(p)\mu : f(p) = \mathcal{M}(p)\check{\psi}(p), \quad \psi \in \mathcal{D}(E_4')\otimes F'\}$$

является плотным подпространством пространства $\mathcal{F}\mathcal{H}$ по норме Λ^2. Если теперь показать, что это подпространство совпадает с пространством

$$\{f(p)\mu : f(p)\mu \in \Lambda^2, \quad f(p) \in \mathcal{D}(\Omega, F_p, F)\},$$

которое плотно в $\Lambda^2 = \Lambda^2(\Omega, \mu, F_p, F)$, то мы получим, что $\mathcal{F}\mathcal{H} = \Lambda^2$, так как $\mathcal{F}\mathcal{H}$ будет тогда конкретным пополнением (т. е. пополнением, вложенным в Λ^2) плотного подпространства пространства Λ^2. Для того чтобы доказать совпадение этих двух множеств, мы докажем следующую лемму.

Лемма. *Какова бы ни была функция* $f \in \mathcal{D}(\Omega, F_p, F)$, *существует функция* $g \in \mathcal{D}(\Omega)\otimes F'$, *такая, что*

$$f(p) = \mathcal{M}(p)\, g(p)$$

для любого $p \in \Omega$.

Доказательство леммы. Пусть a — любая точка пространства Ω. Выберем базис в пространстве F'

$$\{e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_l\},$$

такой, что

$$\{\mathcal{M}(a)e_1, \ldots, \mathcal{M}(a)e_k\}$$

является базисом пространства F_a. Тогда

$$\{\mathcal{M}(p)e_1, \ldots, \mathcal{M}(p)e_k\}$$

является базисом пространства F_p для любого $p \in \Omega$. Можно записать

$$f(p) = \sum_{i=1}^{k} f^i(p)\,\mathcal{M}(p)\,e_i.$$

Компоненты $f^i(p)$ функции $f(p)$ являются функциями класса C^∞ на Ω с компактными носителями. Полагая

$$g(p) = \sum_{i=1}^{k} f^i(p)\,e_i \quad p \in \Omega,$$

убеждаемся в справедливости леммы.

Если теперь g — бесконечно дифференцируемая функция на Ω с компактным носителем (принимающая значения в пространстве F'), то легко видеть, что на Ω существует функция $\psi \in \mathscr{D}(E_4') \otimes F'$, такая, что $\psi(p) = g(p)$ для любого $p \in \Omega$. Вместе с леммой это доказывает, что какова бы ни была функция

$$f \in \mathscr{D}(\Omega, F_p, F),$$

существует такая функция $\psi \in \mathscr{D}(E_4') \otimes F'$, что $f(p) = \mathscr{M}(p)\check{\psi}(p)$ для любого $p \in \Omega$. Тем самым доказана

Теорема. *$\mathscr{F}\mathscr{H}$ совпадает (как гильбертово пространство) с пространством* $\Lambda^2(\Omega, \mu, F_p, F)$.

§ 4. Электрон

Дадим краткое описание случая электрона. В этом случае $F = C^2$, а G представляет собой накрывающую группу собственной неоднородной группы Лоренца. Можно показать, что существует изоморфизм класса C^∞ двукратно накрывающей группы для собственной однородной группы Лоренца (т. е. собственной спинорной группы) на унимодулярную группу в C^2 [1]). Двум элементам группы спиноров, имеющим одну и ту же проекцию в группе Лоренца, соответствуют два преобразования в C^2, которые отличаются только знаком. Образ группы G в аффинной группе пространства E_4 представляет собой собственную неоднородную группу Лоренца. Прообраз подгруппы сдвигов имеет две связные компоненты. Одна из этих связных компонент, содержащая единицу, действует в пространстве F тождественно, другая действует как оператор умножения на -1. Таким образом, группа G действует не эффективно в пространстве E_4, ибо два элемента, имеющие одну и ту же проекцию в собственной неоднородной группе Лоренца, дают на E_4 один и тот же оператор;

---

[1]) Этот изоморфизм подробно описан в книге Гельфанда И. М., Минлоса Р. А. и Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958, ч. 2, гл. I, § 1. — *Прим. ред.*

кроме того, G действует не эффективно и в пространстве F, поскольку сдвигам соответствуют тождественные преобразования. Тем не менее G действует эффективно на произведении $E_4 \times F$[1]).

Возьмем точку a на гиперболоиде в $\overleftarrow{E}'_4$, соответствующем массе m, и рассмотрим лоренцеву координатную систему, в которой пространственные компоненты точки a равны нулю. Тогда стабилизатором точки a в группе Лоренца будет ортогональная группа в трехмерном подпространстве, определяемом пространственными координатными осями; G_a является накрывающей группой этой ортогональной группы; группа G_a компактна, и пространство F G_a-неприводимо. Поэтому на F существует единственная с точностью до постоянного множителя G_a-инвариантная эрмитова форма, так что можно, как и выше, построить пространства F_p и получить две компоненты ψ_j, преобразования Фурье которых имеют вид

$$\mathscr{F}\psi_j = f_j\mu, \quad j = 1,\ 2;$$

мы напоминаем, что

$$\vec{\psi} = (\psi_1,\ \psi_2),\ \vec{f} = (f_1,\ f_2).$$

Далее, можно доказать, что существует единственный (с точностью до постоянного множителя) однородный G-инвариантный дифференциальный оператор D первого порядка с постоянными коэффициентами, принадлежащими $\mathscr{L}(F;\ \bar{F})$. В нашей системе координат можно написать[2])

$$D = \sigma_\mu \partial_\mu.$$

Аналогично существует единственный (с точностью до постоянного множителя) однородный G-инвариантный линейный дифференциальный оператор $\bar{D}$ первого порядка с постоянными коэффициентами, принадлежащими $\mathscr{L}(\bar{F};\ F)$.

---

[1]) См. примечание редактора на стр. 23. — *Прим. ред.*

[2]) Символ ∂_μ означает $\partial/\partial x_\mu$; σ_μ — матрица Дирака. — *Прим. перев.*

Рассмотрим произведения $D\bar{D}$ и $\bar{D}D$. Их можно нормировать так, чтобы для волновых функций F-частиц выполнялось соотношение

$$\bar{D}D = \bar{J}D\bar{D}J = \square = m^2,$$

где J—канонический антиизоморфизм $F \to \bar{F}$, а $\bar{J}: \bar{F} \to F$—обратный к нему антиизоморфизм.

Если ψ — волновая функция некоторой F-частицы, то $D\psi$ является волновой функцией $\bar{F}$-частицы (т. е. античастицы). Точно так же, если ψ описывает $\bar{F}$-частицу, то $\bar{D}\psi$ описывает F-частицу. Введем в рассмотрение пару

$$\left(\psi, \frac{1}{m} D\psi\right),$$

которая представляет собой обобщенную функцию со значениями в прямой сумме $F \oplus \bar{F}$, и определим оператор $(D, \bar{D})$ следующим образом:

$$(D, \bar{D})(\psi_1, \psi_2) = (\bar{D}\psi_2, D\psi_1).$$

Тогда мы получим соотношение

$$(D, \bar{D})\left(\psi, \frac{1}{m} D\psi\right) = m\left(\psi, \frac{1}{m} D\psi\right),$$

известное под названием *уравнения Дирака*.

Если мы интересуемся только представлениями собственной неоднородной группы Лоренца, то достаточно взять $F = \mathbf{C}^2$, и пространство F „лучше“, чем $F \oplus \bar{F}$, так как оно проще. Заметим, что пространство $F \oplus \bar{F}$ неприводимо относительно расширенной спинорной группы, а относительно собственной спинорной группы оно распадается на два неприводимых подпространства.

Однако, если мы хотим получить дифференциальное уравнение в частных производных, в котором участвуют допускающие внутреннее определение операторы D и $\bar{D}$, и использовать представления накрывающей группы для расширенной неоднородной группы Лоренца, то мы должны взять вместо F пространство $F \oplus \bar{F}$.

§ 5. Векторные частицы с нулевой массой

Для фотона и нейтрино миром является аффинное пространство E_4, а пространством F — соответствующее векторное пространство $\vec{E}_4$. Допустим, что мы определили функцию $M(x)$, выбрав значение $M(a)$ для некоторой точки a светового конуса. Но в этом случае M обращается в бесконечность в вершине и выражение $M\mu$ не интегрируемо. Таким образом, $M\mu$ не является мерой, и для фотонов и нейтрино не существует гильбертова пространства. Вместо этого можно поступить следующим образом. Рассмотрим гильбертово пространство для малой массы $m \neq 0$, затем перейдем к пределу при $m \to 0$, и возьмем то, что получится, в качестве пространства для нулевой массы.

Опишем кратко частицы малой массы $m \neq 0$ со спином 1, а затем устремим m к нулю.

Для незаряженных частиц $V = E_4$ и $F = \vec{E}_4$. Описание фотона получается при $m \to 0$. Рассмотрим соответствующий случай для заряженных частиц, т. е. комплексифицируем F; тогда $F = \vec{E}_4 + i\vec{E}_4$.

Для данной точки a на гиперболоиде выберем лоренцеву систему координат, в которой $a = (0, 0, 0, a_0)$. Стабилизатор точки a является ортогональной группой на трехмерной пространственно-подобной гиперплоскости P, проходящей через начало координат 0 перпендикулярно вектору a. Существуют два независимых подпространства, инвариантных относительно этого стабилизатора:

(1) одномерное подпространство Q, натянутое на вектор a;

(2) пространственно-подобная гиперплоскость P.

Рассмотрим сначала случай, когда $F_a = Q + iQ$. Тогда пространство F_x для любого x одномерно, а частицы соответствуют мезонам. Устремляя m к нулю, получаем, что для любого $x \neq 0$ пространство F_x остается одномерным, а частица соответствует мезону нулевой массы.

Рассмотрим теперь случай, когда $F_a = P + iP$. Пространство F_x для любого x является касательным пространством к гиперболоиду в точке x и имеет размерность 3. В пространстве F фиксирована квадратичная форма, являющаяся расширением лоренцевой формы, заданной на $\vec{E}_4$. Квадратичная форма на F порождает квадратичную форму в пространстве F_x, положительно определенную, поскольку на пространственно-подобном подпространстве лоренцева квадратичная форма всегда положительно определена. Пусть $m \to 0$. При этом гиперболоид переходит в конус. Для любой точки $x \neq 0$ пространство F_x является касательной к конусу трехмерной гиперплоскостью, а квадратичная форма на F_x является вырожденной с сигнатурой (2, 0), поскольку она обращается в нуль на образующей конуса. Полученное в результате пространство не является гильбертовым, потому что норма для ненулевого элемента f может обратиться в нуль. В самом деле, если значение вектор-функции $f(x)$ в каждой точке x пропорционально вектору x, то норма функции $f(x)$ равна нулю. Возьмем теперь обратное преобразование Фурье этого пространства. Оно является предгильбертовым пространством, неотделимым и полным. Так как это пространство неотделимо, то наша норма является на самом деле полунормой. Движение такой частицы определяется классом эквивалентности из соответствующего фактор-пространства, т. е. бесконечным числом элементов, эквивалентных относительно полунормы. Тот факт, что φ-функции, эквивалентные относительно этой полунормы, описывают одно и то же движение, называется принципом калибровочной инвариантности.

Глава 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ. СЛУЧАЙ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 1. Оператор эволюции

Пусть $p=(p_0, q)$ (где $q=(q_1, q_2, q_3)$ — совокупность пространственных координат) — переменный вектор пространства E'_4, а Ω — *нижняя* ветвь двуполостного гиперболоида $p^2+m^2=0$.

Напомним, каким образом для обобщенных функций T, определенных на Ω, делается замена переменных

$$q=q; \quad u=p^2=q^2-p_0^2.$$

Выше мы установили справедливость равенства

$$\langle T(p^2), \varphi(p)\rangle=\int T(p^2)\varphi(p)\,dp,$$

так что мы можем использовать обычные правила замены переменных. Вычислим якобиан

$$\frac{\partial(u, q)}{\partial(p_0, q)}=\begin{vmatrix} -2p_0 & 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2p_0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2|p_0|}\,du\,dq=dp_0\,dq$$

и

$$\int T(p^2)\varphi(p)\,dp=\int T(u)\varphi\left(-\sqrt{q^2-u},\ q\right)\frac{du\,dq}{2\sqrt{q^2-u}},$$

так как $|p_0|=\sqrt{q^2-u}$ и $p_0<0$.

Вернемся теперь к случаю скалярных частиц; пусть $\mathscr{H}$ — такая частица.

Если $\psi\in\mathscr{H}$, то преобразованием Фурье этой функции будет

$$\mathscr{F}\psi=\hat{\psi}=f(q)\,\mu,$$

где μ — единичная плотность, сосредоточенная на Ω, т. е.

$$\mu = \delta(p^2 + m^2)\, Y(-p_0),$$

где $Y(-p_0)$ — функция Хевисайда, соответствующая нижней части пространства E_4'. Тогда

$$\langle\widehat{\psi}, \varphi\rangle = \int\limits_{E_4'} f(q)\,\delta(u + m^2)\, Y(-p_0)\,\varphi\left(q, -\sqrt{q^2 - u}\right) \times$$

$$\times \frac{du\, dq}{2\sqrt{q^2 - u}} = \int\limits_{R^3} f(q)\,\varphi\left(q, -\sqrt{q^2 + m^2}\right) \frac{dq}{2\sqrt{q^2 + m^2}},$$

так что мы можем сказать, что *на* Ω функция $\widehat{\psi}$ задается следующим выражением:

$$\widehat{\psi} = f(q)\,\frac{dq}{2\sqrt{q^2 + m^2}}.$$

Предложение 1. *Пусть $x = (x_0, y)$ — набор четырех переменных пространства E_4 и пусть $\mathscr{D}'_{x_0}(\mathscr{D}'_y)$ — множество обобщенных функций от x_0 со значениями в $\mathscr{D}'_y$.*

По определению, $\mathscr{H} \subset \mathscr{D}'_{x_0}(\mathscr{D}'_y)$. В самом деле, имеем:

$$\mathscr{H} \subset \mathscr{E}_{x_0}(\mathscr{S}'_y),$$

где $\mathscr{E}_{x_0}(\mathscr{S}'_y)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций от x_0, принимающих значения в $\mathscr{S}'_y$.

Доказательство. В соответствии с общим методом достаточно доказать справедливость этого утверждения для функций φ вида $\varphi = \alpha(x_0)\,\beta(y)$, где $\alpha(x_0) \in \mathscr{D}_{x_0}$ и $\beta(y) = \mathscr{D}(y)$. Имеем:

$$\langle\psi, \alpha(x_0)\,\beta(y)\rangle = \langle\psi, \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}(\alpha(x_0)\,\beta(y))\rangle =$$

$$= \langle\widehat{\psi}, \overline{\mathscr{F}}(\alpha(x_0)\,\beta(y))\rangle.$$

Обозначим через $\overline{\mathscr{F}}_y$ преобразование Фурье, действующее только на три пространственных переменных. Тогда

$$\langle\psi, \alpha(x_0)\,\beta(y)\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^3} \overline{\mathscr{F}}_y(\beta(y))(q)\, f(q)\,\frac{dq}{2\sqrt{q^2 + m^2}} \int\limits_{\mathbf{R}^1} \alpha(x_0)\, e^{-2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}\, dx_0.$$

Пусть $\psi_{x_0}(y)$ — обобщенная функция от переменной y, зависящая от параметра x_0 и равная $\psi(x_0, y)$. Из равенства

$$\langle \psi_{x_0}(y), \beta(y)\rangle = \int_{R^3} \bar{\mathscr{F}}_y(\beta(y))(q) f(q) \frac{e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}}}{2\sqrt{q^2+m^2}}\, dq = \\ = \left\langle \frac{e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}}}{2\sqrt{q^2+m^2}} f(q), \ \bar{\mathscr{F}}_y(\beta)(q)\right\rangle$$

мы получаем, что

$$\mathscr{F}_y \psi_{x_0} = f(q) \frac{e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}}}{2\sqrt{q^2+m^2}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^k (\mathscr{F}_y \psi_{x_0}) = f(q)(-2i\pi)^k \left(\sqrt{q^2+m^2}\right)^{k-1} \frac{e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}}}{2}.$$

Следовательно,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^k (\mathscr{F}_y \psi_{x_0})\right| \leqslant M_k \left(\sqrt{q^2+m^2}\right)^{k-1} |f(q)|.$$

Таким образом, преобразование Фурье $(\mathscr{F}_y \psi_{x_0}(y))(q)$ принадлежит $\mathscr{S}'_q$ и отображение

$$x_0 \to (\mathscr{F}_y \psi_{x_0}(y))(q)$$

является бесконечно дифференцируемой функцией со значениями в $\mathscr{S}'_q$. Поэтому

$$\psi_{x_0} = \bar{\mathscr{F}}_q \mathscr{F}_y \psi_{x_0} \in \mathscr{E}_{x_0}(\mathscr{S}'(y)),$$

что и требовалось доказать.

Следствие.

$$\psi_{x_0} = \psi_0 *_q \bar{\mathscr{F}}\left(e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}}\right),$$

где ψ_0 — значение обобщенной функции ψ_{x_0} при $x_0 = 0$, а $*_q$ означает, что свертка действует только на пространственно-подобные переменные q, или, что то же самое, y.

Доказательство. Рассмотрим опять предыдущее выражение

$$(\mathscr{F}_y\psi_{x_0}(y))(q) = f(q)\frac{e^{-2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}}{2\sqrt{q^2+m^2}} = \\ = (\mathscr{F}_y\psi_0(y))\, e^{-2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}.$$

Применяя оператор $\overline{\mathscr{F}}_q$ к обеим частям этого равенства, получаем

$$\psi_{x_0}(y) = \psi_0(y) *_q \overline{\mathscr{F}}\left(e^{-2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Замечания. Для того чтобы однозначно определить общее решение уравнения Клейна — Гордона

$$(\Box - m^2)\psi = 0,$$

требуются два дополнительных условия: начальные значения волновой функции и ее производной по времени

$$\psi(0,\ y),\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_0}(0,\ y).$$

У нас же движение ψ полностью восстанавливается по известному значению $\psi(0,\ y)$. Мы вновь приходим к тому, что движения представляют собой весьма частный случай общего решения уравнения Клейна — Гордона (ср. гл. 4, § 6).

Определение. Оператор

$$\overline{\mathscr{F}}\left(e^{-2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}\right) *_q,$$

восстанавливающий ψ по $\psi(0,\ y)$, называется *оператором эволюции*.

§ 2. Пространство $\mathscr{H}_0$ представления Гейзенберга

Пусть $\mathscr{H}_0$ — совокупность начальных значений $\psi_0(y)$ движений ψ. Тогда из следствия предложения 1 мы заключаем, что формула

$$\psi(x_0,\ y) \to \psi_0(y)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_0$ (так как из $\psi_0(y) \equiv 0$ вытекает, что $\psi(x_0,\ y) \equiv 0$).

С другой стороны, из самого предложения 1 следует, что

$$\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{S}'(y).$$

Предложение 2. *Гильбертова структура в пространстве $\mathscr{H}_0$, перенесенная из $\mathscr{H}$ с помощью соответствия $\psi(x_0, y) \to \psi_0(y)$, определяет в $\mathscr{H}_0$ более сильную топологию, чем топология, индуцированная пространством $\mathscr{S}'_y$.*

Доказательство. Достаточно выписать определения этих двух топологий.

Определение пространства H^s. Говорят, что обобщенная функция $T(y)$ на $\mathbf{R}^3$ принадлежит пространству H^s, где s — любое вещественное число, если

(I) $T(y)$ является обобщенной функцией степенного роста,

(II) $\hat{T}(y)$ — *квадратично суммируемая функция* относительно меры $(1+|q|^2)^s\,dq$.

Норма в пространстве H^s определяется равенством

$$\|T\|^2_{H^s} = \int |\hat{T}(q)|^2 (1+|q|^2)^s\,dq.$$

Предложение 3. *Пространство $\mathscr{H}_0$ совпадает с $H^{1/2}$.* (Это, в частности, означает, что нормы этих пространств эквивалентны, т. е. существуют два фиксированных положительных числа A и B, таких, что для любой функции $\psi_0 \in \mathscr{H}_0$ имеем

$$B\,\|\psi_0\|_{H^{1/2}} \leqslant \|\psi_0\|_{\mathscr{H}_0} \leqslant A\,\|\psi_0\|_{H^{1/2}}.)$$

Доказательство. Условие $\psi_0 \in \mathscr{H}_0$ эквивалентно условию

$$\|\psi_0\|^2_{\mathscr{H}_0} < +\infty,$$

а это в свою очередь означает, что

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\hat{\psi}_0(q)|^2\, 2\sqrt{q^2+m^2}\,dq < +\infty$$

(ср. доказательство предложения 2) и ψ_0 является обобщенной функцией степенного роста. Таким образом, условие $\psi_0 \in \mathscr{H}_0$ эквивалентно условию $\psi_0 \in H^{1/2}$.

Тогда эквивалентность обеих норм очевидна, так как

$$\|\psi_0\|^2_{\mathcal{H}_0} = 2\int_{\mathbf{R}^3} |\widehat{\psi}_0(q)|^2 \sqrt{q^2+m^2}\,dq.$$

Итак, *пространство* $\mathcal{H}$ *является множеством решений уравнения Клейна — Гордона, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *частоты этих решений отрицательны;*
2) *начальное значение* ψ_0 *принадлежит* $H^{1/2}$;
3) $\psi(x_0, y) \in \mathcal{E}_{x_0}(\mathcal{S}'_y)$.

§ 3. Плотности вероятности координат и скоростей

Предыдущее выражение для квадрата нормы $\|\psi_0\|^2_{\mathcal{H}}$, позволяет написать следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{q^2+m^2}\,\widehat{\psi}_0(q) \in L^2\,dq}} \\ \downarrow\uparrow & & \mathcal{F}\uparrow\ \downarrow\overline{\mathcal{F}} \\ \psi_0 \in \mathcal{H}_0 & \underset{(U_0 *)^{-1}}{\overset{U_0 *}{\rightleftarrows}} & U_0 * \psi_0 \in L^2\,dq, \end{array}$$

где

$$U_0 = \overline{\mathcal{F}}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{q^2+m^2}\right).$$

В самом деле,

$$\|\psi_0\|_{\mathcal{H}_0} = \left\|\sqrt{2}\sqrt[4]{q^2+m^2}\,\widehat{\psi}_0(q)\right\|_{L^2} = \|U_0 * \psi_0\|_{L^2}$$

($\overline{\mathcal{F}}$, разумеется, представляет собой унитарный оператор), следовательно, оператор свертки $U_0 *$ унитарен.

Определим оператор $U_{x_0} *$ как произведение следующих изоморфизмов:

$$\mathcal{H}_{x_0} \to \mathcal{H}_0 \xrightarrow{U_0 *} L^2.$$

Так как эти изоморфизмы унитарны, оператор $U_{x_0} *$ тоже унитарен.

Определение. Назовем вероятностью нахождения частицы с движением ψ в момент времени x_0 в области A_q

следующее выражение:

$$\mathrm{P}_\psi(A,\ x_0) = \int\limits_A |U_{x_0} * \psi_{x_0}|^2\, dy.$$

Предложение 4. *Оператор $U_{x_0}*$ является оператором свертки с функцией*

$$U_{x_0} = \mathcal{F}\left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{q^2+m^2}\, e^{+2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}\right).$$

Следствие предложения 1 дает

$$\hat{\psi}_0 = \hat{\psi}_{x_0} e^{+2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}};$$

с другой стороны, из предыдущей диаграммы и определения $U_{x_0}*$ следует, что

$$\mathcal{F}(U_{x_0} * \psi_{x_0}) = \sqrt{2}\,\sqrt[4]{q^2+m^2}\,\hat{\psi}_0(q) =$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[4]{q^2+m^2}\,\hat{\psi}_{x_0}(q)\, e^{+2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}},$$

что и требовалось доказать.

Предложение 5. (Закон сохранения частиц.) *Величина* $\mathrm{P}_\psi(\mathrm{R}^3,\ x_0)$ *не зависит от* x_0.

В самом деле,

$$\mathrm{P}_\psi(\mathrm{R}^3,\ x_0) = \int\limits_{\mathrm{R}^3} |U_{x_0} * \psi_{x_0}|^2\, dy = \int\limits_{\mathrm{R}^3} |\mathcal{F}U_{x_0}\hat{\psi}_{x_0}|^2\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{R}^3} 2\sqrt{q^2+m^2}\,|\hat{\psi}_{x_0}(q)|^2\, dq = \|\psi_0\|^2_{\mathcal{H}_3}.$$

Замечания. 1. Функция $U_{x_0}(y)$ выражается через функции Кельвина и поэтому очень быстро убывает на бесконечности. Таким образом, $\mathrm{P}_\psi(A,\ x_0)$ зависит главным образом от значений функции ψ вблизи A, но не только от значений на самом множестве A.

2. Функция U_{x_0} определяется из физических соображений неоднозначно: выражение в круглых скобках можно умножить на $e^{il(|q|)}$, где l — любая вещественная измеримая функция. Если мы потребуем, чтобы выполнялось дополнительное условие: комплексное сопряжение $\psi \to \bar{\psi}$ переводит частицу с параметрами $(m,\ —)$ в частицу

с параметрами $(m, +)$, то и тогда функция $l(|q|)$ не определяется однозначно; она может принимать любые значения вида $k\pi$, где k — целое число.

Определение. Назовем вероятностью того, что частица с движением $\widehat{\psi}_{x_0}$ имеет в момент времени x_0 скорость q, заключенную в области $\widehat{A} \subset \overset{\leftarrow}{E}{}'_3$, выражение

$$\mathscr{P}_{\widehat{\psi}}(\widehat{A}, x_0) = \int_{\widehat{A}} |\widehat{\psi}_{x_0}(q)|^2 \, 2\sqrt{q^2+m^2}\, dq.$$

Следовательно,

$$\mathscr{P}_{\widehat{\psi}}(\widehat{A}, x_0) = \int_{\widehat{A}} \left| e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}} \widehat{\psi}_0(q) \right|^2 2\sqrt{q^2+m^2}\, dq = \int_{\widehat{A}} \frac{|f(q)|^2}{2\sqrt{q^2+m^2}}\, dq.$$

Отсюда вытекает, что

$\mathscr{P}_{\widehat{\psi}}(\widehat{A}, x_0)$ не зависит от x_0 (скорость постоянна);

$\mathscr{P}_{\widehat{\psi}}(\widehat{A}, x_0)$ зависит *только* от значений функции $f(q)$ в $\widehat{A}$.

Глава 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ. СЛУЧАЙ ВЕКТОРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 1. Постановка задачи

Так же, как и в случае скалярных частиц, мы получаем, что

1) движение $\psi \in \mathscr{D}'_{x_0}(\mathscr{D}'_y(\vec{F}))$ на самом деле принадлежит пространству $\mathscr{E}_{x_0}(\mathscr{S}'_y)(\vec{F}))$;

2) $\mathscr{F}_y \psi_{x_0}(y) = \vec{f}(q)\, e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}} \dfrac{1}{2\sqrt{q^2+m^2}}$,

$$\psi_0(y) = \overline{\mathscr{F}}_q \frac{\vec{f}(q)}{2\sqrt{q^2+m^2}},$$

где $\vec{f}(q)$ обладает следующими свойствами:

(I) $\vec{f}(q) \in \vec{F}_q$,

(II) $\vec{f}(q) \dfrac{dq}{2\sqrt{q^2+m^2}}$ является dq-измеримой,

(III) $\displaystyle\int_{\overleftarrow{E}_3'} \|\vec{f}(q)\|_q^2 \frac{dq}{2\sqrt{q^2+m^2}} < +\infty.$

Напомним, что совокупность таких функций, снабженную гильбертовой структурой, определяемой нормой

$$\|\vec{f}\|^2 = \int_{\overleftarrow{E}_3'} \|\vec{f}(q)\|_q^2\, d\mu(q),$$

где

$$d\mu(q) = \frac{dq}{2\sqrt{q^2+m^2}},$$

мы обозначаем символом $L^2(d\mu, \mathbf{R}^3, \{F_q\}_q, F)$; здесь $\mathbf{R}^3$ появилось вместо Ω в результате замены переменных.

Таким образом, величина $\|\vec{f}\|^2$ возникает как непрерывная сумма норм, каждая из которых берется в своем пространстве F_q, тогда как в случае скалярных частиц величина $\|f\|^2$ подсчитывалась только в одном пространстве. Поэтому определения $\mathscr{P}_{\hat{\psi}}(\hat{A}, x_0)$ и $\mathrm{P}_{\psi}(A, x_0)$ нельзя непосредственно распространить на рассматриваемый случай.

Вторая трудность заключается в том, что пространство $\mathscr{H}_0$ в этом случае уже не является инвариантным относительно операторов $\sigma \in G$; в самом деле,

$$\sigma\psi_0 = (\sigma\psi_{x_0})_h,$$

где h — гиперплоскость, которая получается из гиперплоскости $x_0 = 0$ под действием оператора $\sigma \in G$; таким образом,

$$\sigma\psi_0 \notin \mathscr{H}_0,$$

где $\mathscr{H}_0$ — множество всех начальных значений движений. Сечение, которое дает коммутативную диаграмму, зависит от σ:

$$\begin{tikzcd}
\psi_{x_0} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\substack{\text{Сечение}\\ x_0=0}"'] & \sigma\psi_{x_0} \arrow[d, "\substack{\text{Сечение } h:\\ \sigma x_0=0}"] \\
\psi_0 \arrow[r, "\sigma"] & (\sigma\psi)_h
\end{tikzcd}$$

(гиперплоскость h проходит через начало координат в пространстве $\vec{F}$, так как сдвиги группы G действуют тождественно на $\vec{F}$).

Следовательно, для того чтобы в рассматриваемом случае для наших операторов были справедливы те же формулы, что и в случае скалярных частиц, необходимо вычислять норму функции $\vec{f}(q)$ в одном и том же пространстве $\vec{F}_W$, не зависящем от q и инвариантном относительно любого оператора $\sigma \in G$. Для этого нужно, чтобы векторный аналог преобразования $\mathscr{F}(U_0)$ был оператором вида

$$\mathscr{F}(U_0)(q) = \sqrt{2}\sqrt[4]{q^2+m^2}\,V,$$

где $f(q) \to Vf(q)$ — унитарное отображение пространства

$$L^2(\mu, \mathbf{R}^3, \{F_q\}, F) \text{ в } L^2(\mu, \mathbf{R}^3, F_W).$$

Вместо одного оператора V можно рассматривать набор операторов $V_q \in \mathscr{L}(F_q, F_W)$, $q \in \mathbf{R}^3$, связанный с V равенством $(Vf)(q) = V_q(f(q))$. Операторы V_q обладают следующими свойствами:

(I) V_q — унитарный оператор из F_q на F_W;

(II) диаграмма

$$\begin{tikzcd} F_q \arrow[r, "V_q"] \arrow[d, "\sigma"'] & F_W \arrow[d, "\sigma"] \\ \sigma F_q = F_{\sigma q} \arrow[r, "V_{\sigma q}"] & F_W \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Отсюда вытекает, что пространство F_W инвариантно относительно оператора σ, унитарно действующего в F_W.

Из этой диаграммы легко определить V_q, если бы мы могли определить оператор $\sigma(a, p)$, принадлежащий группе G и действующий на F, такой, что

(I) выбор оператора σ зависит только от точек a и p множества Ω (и не зависит, например, от гиперплоскости $x_0 = 0$);

(II) $\sigma(a, p)\,M(a) = M(p)$;

(III) $\sigma(a, p)$ — всюду регулярная (т. е. аналитическая) функция переменной p и $\sigma(a, a) = 1$ (1 — единичный оператор).

Если такой оператор σ построен, то V_q определяется при помощи следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "M(q)"] \arrow[d, "\check{\sigma}(a,\, p)"'] & F_q \arrow[r, "\text{Каноническое вложение}"] \arrow[d, "V_q"] & F \\ F' \arrow[r, "M(a)"] & F_a \arrow[r, "\text{Каноническое вложение}"] & F \arrow[u, "\sigma(a,\, p)"'] \end{tikzcd}$$

где $\check{\sigma}(a, p)$ — оператор, контраградиентный к $\sigma(a, p)$.

§ 2. Построение оператора $\sigma(a, p)$ в случае, когда G/G_0 является группой Лоренца или ее иакрывающей группой

В этом случае известно, что G/G_0, как множество операторов в $\overleftarrow{E}'_4$, содержит только один элемент $\sigma_{a,\,p}$, такой, что

(I) $\sigma_{a,\,p}$ переводит точку a в точку p;

(II) $\sigma_{a,\,p}$ оставляет инвариантной двумерную плоскость, проходящую через точки 0, a и p;

(III) $\sigma_{a,\,p}$ действует тождественно в плоскости, которая лоренц-ортогональна к плоскости $(0, a, p)$.

Возьмем теперь в качестве $\sigma(a, p)$ оператор в пространстве F, который соответствует элементу $\sigma_{a,\,p}$, согласно определению действия группы G/G_0 в F. Это соответствие аналитическое; поэтому для доказательства аналитичности отображения $p \to \sigma(a, p)$ достаточно доказать аналитичность отображения

$$p \to \sigma_{a,\,p}.$$

Напомним, что вектор $\vec{p} \in E'_4$ можно записать в виде $\vec{p} = (p_0, \vec{q})$, где $\vec{q} \in \mathbf{R}^3$, или $\vec{p} = p_0\vec{e}_0 + \vec{q}$. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{p}$ — два элемента орбиты Ω, а $\vec{y}$ — любой элемент пространства E'_4.

Так как $\vec{a}$ — времени-подобный вектор (в самом деле, он принадлежит Ω), то в качестве $\vec{e}_0$ можно взять вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Теперь доказательство состоит в применении $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}$ к вектору $\vec{y}$ и в проверке того, что координаты этого вектора преобразуются аналитически. Оператор $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}$ переводит единичный вектор, пропорциональный $\vec{a}$, в единичный вектор, пропорциональный $\vec{p}$:

$$\sigma_{\vec{a}\vec{p}}\vec{e}_0 = \frac{\vec{p}}{\mu} = \frac{p_0\vec{e}_0}{\mu} + \frac{\vec{q}}{\mu} = \vec{e}_0 \operatorname{ch}\varphi + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\operatorname{sh}\varphi,$$

где

$$\mu = |\vec{p}| = \sqrt{p_0^2 - \vec{q}^{\,2}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{p_0}{\mu}; \quad \operatorname{sh}\varphi = \frac{|\vec{q}|}{\mu}.$$

Отсюда вытекает, что в базисе $\left(\vec{e}_0, \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\right)$ оператор $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}$ записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} p_0 & |\vec{q}| \\ |\vec{q}| & p_0 \end{pmatrix},$$

так что

$$\sigma_{\vec{a},\vec{p}}\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \vec{e}_0\frac{|\vec{q}|}{\mu} + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\frac{p_0}{\mu}.$$

Теперь разложим вектор $\vec{y}$ на две компоненты, одна из которых лежит в плоскости $(0, \vec{a}, \vec{p})$, т. е. в плоскости $\left(0, \vec{e}_0\ \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\right)$, а другая — в ортогональной к ней плоскости

$$\vec{y}=\left[-(\vec{y}\,|\,\vec{e}_0)\,\vec{e}_0+(\vec{y}\,|\,\vec{q})\frac{\vec{q}}{|\vec{q}\,|^2}\right]+$$
$$+\left[\vec{y}+(\vec{y}\,|\,\vec{e}_0)\,\vec{e}_0-(\vec{y}\,|\,\vec{q})\frac{\vec{q}}{|\vec{q}\,|^2}\right].$$

Вычислим $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}\vec{y}$.

По определению $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}$, вторая скобка остается инвариантной. Используя приведенные выше формулы для $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}\vec{q}$ и $\sigma_{\vec{a},\vec{p}}\vec{e}_0$, получаем

$$\sigma_{\vec{a},\vec{p}}\vec{y}=\frac{1}{\mu}\left[-(\vec{y}\,|\,\vec{e}_0)\,p_0\vec{e}_0-(\vec{y}\,|\,\vec{e}_0)\,\vec{q}+(\vec{y}\,|\,\vec{q})\,\vec{e}_0+\right.$$
$$\left.+(\vec{y}\,|\,\vec{q})\frac{p_0}{|\vec{q}\,|^2}\vec{q}\right]+\left[\vec{y}+(\vec{y}\,|\,\vec{e}_0)\,\vec{e}_0-(\vec{y}\,|\,\vec{q})\frac{\vec{q}}{|\vec{q}\,|^2}\right]=$$
$$=\vec{y}+\left[(\vec{y}\,|\,\vec{e}_0)\left(\vec{e}_0-\frac{\vec{p}}{\mu}\right)+(\vec{y}\,|\,\vec{q})\left(\frac{\vec{e}_0}{\mu}+\frac{\vec{q}}{|\vec{q}\,|^2}\left(\frac{p_0}{\mu}-1\right)\right)\right].$$

Для доказательства аналитичности преобразования такого вида достаточно проверить, что выражение $\frac{1}{|\vec{q}\,|^2}\left(\frac{p_0}{\mu}-1\right)$ не имеет особенности при $\vec{q}=0$.

Вспомним, что $p_0=\sqrt{|\vec{q}\,|^2+\mu^2}$, так что

$$\frac{1}{|\vec{q}\,|^2}\left(\frac{p_0}{\mu}-1\right)=\frac{1}{\mu\,|\vec{q}\,|^2}\left(\sqrt{|\vec{q}\,|^2+\mu^2}-\mu\right);$$

для $|\vec{q}\,|\to 0$ получаем

$$\frac{1}{|\vec{q}\,|^2}\left(\frac{p_0}{\mu}-1\right)\approx\frac{1}{\mu\,|\vec{q}\,|^2}\left(\mu+\frac{1}{2}\frac{|q\,|^2}{\mu}-\mu\right)=\frac{1}{2\mu^2}.$$

§ 3. Построение некоторых операторов и плотностей вероятности

Из сказанного в начале § 1 вытекает, что, вводя обозначение

$$\chi_0(q) = \sqrt{2}\sqrt[4]{\vec{q}^2 + m^2}\,\hat{\psi}_0(\vec{q}),$$

мы получаем следующее:

(I) $\chi_0(q)$ является dq-измеримой;

(II) $\chi_0(q) \in F_q$;

(III) $\int\limits_{\mathrm{R}^3} \|\chi_0(q)\|_q^2\, dq < +\infty.$

Поэтому

$$\chi_0(q) \in L^2(dq, \mathrm{R}^3, \{F_q\}_q, F),$$

что в точности эквивалентно соотношению

$$f(q) \in L^2(d\mu, \mathrm{R}^3, \{F_q\}_q, F),$$

где

$$d\mu(q) = \frac{dq}{2\sqrt{q^2 + m^2}}.$$

Положим теперь

$$\mathcal{F}(U_0)(q) = \sqrt{2}\sqrt[4]{q^2 + m^2}\, V,$$

где оператор V определяется набором операторов V_q, удовлетворяющих коммутативной диаграмме, приведенной на стр. 171.

Так как оператор $\sigma(a, p)$ аналитичен, он измерим; следовательно, $\sigma^{-1}(a, p)$ определяет оператор V_q, аналитический по q и унитарно отображающий F_p на F_a; преобразование

$$\chi_0(q) \to V\chi_0(q)$$

из $L^2(dq, \mathrm{R}^3, \{F_q\}_q, F)$ на $L^2(dq, \mathrm{R}^3, F_a)$ унитарно.

Теперь мы получаем искомое обобщение формул для скалярных частиц, заменяя $\hat{\psi}_0(q)$ на $V\hat{\psi}_0(q)$.

Фурье-образ оператора эволюции задается формулой

$$\hat{\psi}_{x_0} = e^{-2i\pi x_0\sqrt{q^2+m^2}}\, V\hat{\psi}_0(q).$$

плотность вероятности скорости частицы принимает вид

$$\mathcal{P}_{\hat{\psi}}(\hat{A}, x_0) = \int\limits_{\hat{A}} \|V_q \vec{f}(q)\|^2_{F_a} \frac{dq}{2\sqrt{q^2 + m^2}},$$

а плотность вероятности нахождения частицы в области A_q определяется выражением

$$P_\psi(A, x_0) = \int\limits_A \|U_{x_0} * \psi_{x_0}\|^2_{F_a} dy,$$

где

$$\mathcal{F} U_{x_0} = \mathcal{F} U_0 e^{+2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}} =$$

$$= \sqrt{2} \sqrt[4]{q^2 + m^2} e^{+2i\pi x_0 \sqrt{q^2+m^2}} V.$$

Найдем выражение для оператора энергии, или гамильтониана, H.

По определению, оператор Гамильтона является Фурье-прообразом величины

$$p_0 = \sqrt{q^2 + m^2}.$$

В самом деле, применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям равенства

$$p_0 \hat{\psi} = \sqrt{q^2 + m^2} \hat{\psi},$$

получаем

$$\bar{\mathcal{F}} p_0 * \psi = \bar{\mathcal{F}} (\sqrt{q^2 + m^2}) * \psi.$$

Так как

$$\bar{\mathcal{F}} p_0 = i \frac{d}{dx_0} \delta(x_0),$$

то в результате находим уравнение

$$i \frac{\partial}{\partial t} \cdot \psi = \bar{\mathcal{F}} (\sqrt{q^2 + m^2}) * \psi.$$

Отсюда для гамильтониана H получается выражение

$$H = \bar{\mathcal{F}} (\sqrt{q^2 + m^2}) *.$$

§ 4. Переход к более общим группам

До сих пор (кроме § 1, гл. 7) от группы G требовалось только, чтобы она была группой Ли, обладающей коммутативным нормальным делителем G_0, таким, что G/G_0

является однородной группой Лоренца $\mathfrak{L}$ или ее накрывающей группой. Поэтому желательно распространить результаты § 1 этой главы на следующий несколько более общий случай. Пусть $G=\mathfrak{L}\times A$, где A — произвольная группа Ли. Пусть $\Phi^{-1}(1)$ — ядро представления группы G в $\mathfrak{L}(\vec{F};\ \vec{F})$. Обозначим через Γ факторгруппу $G/\Phi^{-1}(1)$. В наших рассмотрениях участвует, по существу, только эта факторгруппа Γ и, в частности, отсутствуют сдвиги.

Так как группа $\mathfrak{L}$ не имеет ни одного нетривиального нормального делителя, проекцией $\pi_{\mathfrak{L}}[\Phi^{-1}(1)]$ ядра $\Phi^{-1}(1)$ на $\mathfrak{L}$ является либо сама $\mathfrak{L}$, либо единичный элемент e. Рассмотрим отдельно два случая.

(I) $$\pi_{\mathfrak{L}}[\Phi^{-1}(1)]=\mathfrak{L}.$$

В этом случае группа $\mathfrak{L}$ тривиально действует в пространстве $\vec{F}$, а так как $\vec{F}_p$ является образом $\vec{F}_a$ при преобразовании, переводящем a в p, то $\vec{F}_p$ совпадает с $\vec{F}_a$.

Тогда можно считать, что $\vec{F}=\vec{F}_a$ и пространство $\vec{F}$ неприводимо, так как $\vec{F}_a$ неприводимо относительно стабилизатора точки a, который в нашем случае совпадает со всей группой Γ.

Это показывает, что в данном случае справедливы те же самые формулы, что и в случае скалярных частиц.

(II) $$\pi_{\mathfrak{L}}[\Phi^{-1}(1)]=e.$$

В этом случае группа $\mathfrak{L}$ эффективно действует в пространстве $\vec{F}$, и

$$\pi_{\mathfrak{L}}(\Gamma)=\pi_{\mathfrak{L}}(G/\Phi^{-1}(1))=\pi_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{L})/\pi_{\mathfrak{L}}[\Phi^{-1}(1)]\,\pi_{\mathfrak{L}}\Gamma=\mathfrak{L}/1=\mathfrak{L}.$$

Пусть N — ядро гомоморфизма $\Gamma\xrightarrow{\pi_{\mathfrak{L}}}\mathfrak{L}$; ядро N является нормальным делителем, и по теореме Леви — Мальцева существует подгруппа $\mathfrak{L}'$ группы Γ (которая не обязательно является нормальным делителем), такая, что

$$\Gamma=\mathfrak{L}'\,\underline{\times}\,N \quad \text{(полупрямое произведение).}$$

Согласно той же теореме, $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}$ имеют одну и ту же алгебру Ли, откуда вытекают две возможности.

(а) $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.

Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования плотности вероятности для координат частицы является равенство

$$\Gamma = \mathfrak{L}' \times N \quad \text{(прямое произведение).}$$

(б) $\mathfrak{L}'$ — однородная спинорная группа группы $\mathfrak{L}$.

В этом случае можно доказать, что необходимым и достаточным условием существования плотности вероятности координат частицы является равенство

$\Gamma = (\mathfrak{L}' \times N)/\gamma$ (знак $\times$ означает прямое произведение),

где γ — подгруппа группы $\mathfrak{L}' \times N$, состоящая из двух элементов (e, ε) и (e', ε). Здесь ε — единичный элемент ядра N, а e и e' — два элемента в $\mathfrak{L}'$, соответствующие единичному элементу в $\mathfrak{L}$ при канонической проекции $\mathfrak{L}'$ на $\mathfrak{L}$. Из этого условия вытекает, что $\mathfrak{L}'$ и N коммутируют.

Следовательно, эта коммутативность необходима в обоих случаях (а) и (б). Это справедливо и в том случае, когда ядро N конечно.

Достаточность приведенных условий тривиальна.

§ 5. Структурная четность частиц

Пусть G — структурная группа рассматриваемой $\vec{F}$-частицы — является подгруппой неоднородной группы Лоренца, сохраняющей направление времени, но не обязательно сохраняющей пространственную ориентацию. Пусть Ω — ветвь гиперболоида, соответствующая этой частице; обозначим через G_a стабилизатор точки $a \in \Omega$. Он является максимальной компактной подгруппой группы G, т. е. полной ортогональной группой подпространства $\vec{E}_3$, ортогонального к $\vec{a}$. Тогда подпространство $\vec{F}_a$ пространства $\vec{F}$ является неприводимой компонентой представления группы G_a в $\vec{F}$.

Пусть s — оператор симметрии относительно начала координат в пространстве $\vec{E}_3$. Тогда

(I) $s \in G_a$; $s^2 = 1$ и s принадлежит центру группы G_a;

(II) G_a определяет (с точностью до постоянного множителя) положительно определенную квадратичную форму в пространстве $\vec{F}_a$, для которой G_a является ортогональной группой.

Из (I) и (II) следует (согласно лемме Шура), что оператор s в $\vec{F}_a$ является скалярным оператором, квадрат которого равен 1. Таким образом, $s = +1$ или -1 во всем пространстве $\vec{F}_a$. По определению, этот знак называется четностью частицы. Разумеется (в силу непрерывности), этот знак не зависит от выбранной точки a на Ω.

Рассмотрим теперь вместо группы G, с которой нам приходилось иметь дело до сих пор, ее накрывающую группу, которую обозначим также через G. Тогда новая подгруппа G_a будет накрывающей прежней группы G_a. Таким образом, в новой группе G_a существует один или несколько различных операторов, действующих в пространстве $\vec{E}_3$ как s. Но они не принадлежат центру группы G_a, поэтому понятие четности теряет смысл. С таким положением мы встречаемся в случае электрона.

Напомним, что все изложенное относится только к случаю отсутствия взаимодействия.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 5
Глава 1. **Постановка задачи** 7
§ 1. Введение 7
§ 2. Элементы теории обобщенных функций 9
§ 3. Аффинные пространства. Преобразования Лоренца 14
§ 4. Мировые скалярные частицы 18
§ 5. Скалярные и векторные частицы в произвольном мире 20
§ 6. Слабая и сильная сходимость 23
Глава 2. **Множество $\mathfrak{H}$ мировых частиц и его структура** 26
§ 1. Пространство $\mathfrak{H}$ 26
§ 2. Структура $\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathscr{P}}_+(E', E)$ 32
§ 3. Скалярные частицы 41
§ 4. Тензорные произведения 47
§ 5. Векторные частицы 50
§ 6. Отношения порядка в векторных пространствах и положительность антиядер 57
Глава 3. **Мировые частицы и инвариантность относительно сдвигов. Упрощение по ядру** 65
§ 1. Тензорные произведения обобщенных функций 65
§ 2. Свертка 69
§ 3. Инвариантность относительно группы сдвигов 76
§ 4. Преобразования Фурье 84
§ 5. Теорема Бохнера 90
§ 6. Свойства „упрощенного“ ядра 95
§ 7. Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ для скалярных частиц 101
Глава 4. **Элементарные частицы и инвариантность относительно вращений** 103
§ 1. Элементарные частицы 103
§ 2. Носители экстремальных мер 109
§ 3. Мезоны 113

§ 4. Лоренц-инвариантные скалярные обобщенные функции 117
§ 5. Описание всех мезонов 120
§ 6. Описание пространства $\mathscr{H}$ в случае мезона . . 124

Глава 5. **Векторные элементарные частицы и их свойства** 128
§ 1. Векторные частицы 128
§ 2. Описание всех векторных частиц 133
§ 3. Полное описание преобразования Фурье гильбертова пространства для векторных частиц 149
§ 4. Электрон 156
§ 5. Векторные частицы с нулевой массой 159

Глава 6. **Определение некоторых физических понятий. Случай скалярных частиц** 161
§ 1. Оператор эволюции 161
§ 2. Пространство $\mathscr{H}_0$ представления Гейзенберга 164
§ 3. Плотности вероятности координат и скоростей 166

Глава 7. **Определение некоторых физических понятий. Случай векторных частиц** 169
§ 1. Постановка задачи 169
§ 2. Построение оператора $\sigma(a,p)$ в случае, когда G/G_0 является группой Лоренца или ее накрывающей группой 172
§ 3. Построение некоторых операторов и плотностей вероятности 175
§ 4. Переход к более общим группам 176
§ 5. Структурная четность частиц 178

Лоран Шварц

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ИЗУЧЕНИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Редактор *Н. И. Плужникова* Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Художник *И. А. Литвишко* Технический редактор *А. В. Грушин*
Корректор *Н. И. Казарина*

Сдано в производство 21/X-1963 г. Подписано к печати 7/III-1964 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$=2,9 бум. л., 9,4 печ. л. Уч.-изд. л. 7,5. Изд. № 1/2323
Цена 53 к. Зак. 1783. (Тем. план 1964 г. изд-ва „ИЛ" пор. № 26)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Главполиграфпрома» Государственного комитета Совета Министров СССР по печати. Измайловский проспект, 29.