

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. Хангулян, И.С. Шапиро

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ ЯДРА

Часть 1

Проблема двух тел в ядерной физике

Учебное пособие

Москва 2009

УДК 539.1(075)
ББК 22.383я7
Х19

Хангулян В.А., Шапиро И.С. **Избранные вопросы теории ядра. Часть 1 Проблема двух тел в ядерной физике:** Учебное пособие. М. МИФИ, 2009. – 156 с.

В пособии, являющимся первой частью лекций по курсу «Теории ядра», изложены проблема двух тел в ядерной физике (потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия, дейтрон, *np*-рассеяние при низких энергиях), а также вопросы разложения амплитуд процессов по инвариантным амплитудам и понятие полного опыта.

Пособие предназначено для студентов четвертого курса, обучающихся по направлению «Прикладная математика и физика» и по специальности «Физика атомного ядра и элементарных частиц», а также для аспирантов.

Рецензент

д.ф.-м.н. профессор Далькаров О.Д. (ФИ РАН им. П.Н. Лебедева)

Рекомендовано редсоветом МИФИ
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7262-1121-3

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет) 2009

Редактор Е.Н. Кочубей

Подписано в печать 16.03.2009. Формат 60×84 1/16
Печ.л. 9.75 Изд. №028–1. Тираж 100 экз. Заказ №

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
Типография МИФИ. Москва, Каширское ш. 31

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Введение.....	6
1. Общие замечания.....	6
2. Характеристика ядерных сил.....	8
Глава 1. Общая структура гамильтониана взаимодействия двух нуклонов.....	11
1.1. Спиновая структура потенциала взаимодействия двух нуклонов.....	11
1.2. Интегралы движения гамильтониана двух взаимодействующих нуклонов.....	21
1.3. Изотопический спин. Зарядовая независимость ядерных сил.....	27
Контрольные вопросы к главе 1.....	40
Глава 2. Взаимодействие двух нуклонов.....	42
2.1. Классификация состояний системы двух нуклонов.....	42
2.2. Дейтрон как чистое S -состояние.....	43
2.3. Рассеяние нейтрона на протоне. Синглетное состояние дейтрона.....	50
2.4. Рассеяние нейтрона на орто- и параводороде.....	61
2.5. Дейтрон как смесь S - и D -состояний. Структура волновой функции дейтрона.....	67
2.6. Магнитный момент дейтрона.....	76
2.7. Электрический квадрупольный момент дейтрона.....	82
Контрольные вопросы к главе 2.....	88
Глава 3. Инвариантные амплитуды.....	89
3.1. Определение инвариантных амплитуд.....	89
3.2. Разложение по инвариантным амплитудам амплитуды упругого рассеяния частицы со спином $\frac{1}{2}$ на частице со спином нуль.....	95
3.3. Разложение по инвариантным амплитудам амплитуды упругого рассеяния нуклона на нуклоне.....	103
3.4. Разложение амплитуды треххвостки по инвариантным амплитудам.....	112
3.5. Разложение амплитуды произвольной четыреххвостки по инвариантным амплитудам.....	124
Контрольные вопросы к главе 3.....	133
Глава 4. Поляризационные эффекты в упругом рассеянии. Полный опыт.....	134
4.1. Общие замечания. Постановка задачи.....	134
4.2. Вектор поляризации. Спиновая матрица плотности	

частицы со спином $1/2$	135
4.3. Восстановление из эксперимента амплитуды упругого рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль.....	148
Контрольные вопросы к главе 4.....	156
Рекомендуемая литература.....	157

Предисловие

Данное учебное пособие представляет собой обработанный курс лекций по теории ядра, читаемый студентам теоретикам 8 семестра МИФИ. Курс был разработан И.С. Шапиро и читался им в течение 1967 – 1984 гг. Далее курс читался мною, однако все изменения, вносимые в курс, обсуждались с ним вплоть до его болезни.

Поскольку у значительной части студентов-теоретиков МИФИ в дальнейшем интересы находятся вне области ядерной физики, то при создании курса И.С. Шапиро включил в него те избранные вопросы ядерной физики, которые имеют общетеоретическое значения и не входят в иные курсы. Этим и определяется содержание данного курса. И.С. Шапиро неоднократно высказывал пожелания включить в курс уравнения Фаддеева и глауберовское или эйкональное приближение в теории рассеяния. Однако это не было сделано из-за нехватки лекционного времени. По этой причине, включая И.С. Шапиро в соавторы, я подчеркиваю связь данного учебного пособия с его идеями.

Ввиду того, что настоящий курс читается после курса квантовой теории поля (7-8 семестр) многие вопросы, которые рассматриваются там, используются в данном курсе без подробного обсуждения (дискретные преобразования C, P, T , унитарность S -матрицы, и т.д.).

В заключение хочу подчеркнуть, что все недостатки данного издания полностью лежат на мне.

В.А. Хангулян

ВВЕДЕНИЕ

1. Общие замечания

Современная теоретическая ядерная физика возникла в 1932 г., когда Дж. Чедвиком был экспериментально обнаружен нейтрон. В том же году В. Гейзенберг и Д. Иваненко независимо друг от друга высказали предположение, что атомные ядра состоят из нейтронов и протонов. В работе В. Гейзенберга была введена зарядовая переменная, в зависимости от которой некая частица, названная нуклоном, может быть либо протоном, либо нейтроном. Таким образом, согласно В. Гейзенбергу ядро состоит из A нуклонов. Число A называется массовым числом. Каждое ядро характеризуется зарядом Ze (где e – заряд протона). Число Z – атомный номер, т. е. число протонов в ядре. Атомный номер характеризует химические свойства вещества. Следующей характеристикой ядра является его масса M . Отношение массы ядра к массе протона весьма близко к целому числу, которое и есть массовое число A .

В настоящее время атомный номер Z принимает значения от нуля (нейтрон) до 112. В то же время массовое число A меняется от единицы (нейтрон, протон) до 261 (ядро с атомным номером 107). Ядра с $Z > 92$ в природе не встречаются и получают искусственно либо на нейтронных пучках из реактора (ядра с Z до 100), либо на пучках тяжелых ионов (ядра с $Z > 100$). В частности, элемент с $Z = 107$ получен на пучке ионов хрома Cr_{24}^{54} , который падал на мишень из висмута Bi_{83}^{209} . В результате ядерной реакции $\text{Cr}_{24}^{54} + \text{Bi}_{83}^{209} \rightarrow \text{A}_{107}^{261} + 2n$ получался элемент с $Z=107$ и массовым числом 261 с вылетом двух нейтронов.

Поскольку отношение кинетической энергии нуклона в ядре к энергии покоя нуклона

$$\frac{E_{\text{кин}}}{mc^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{R} \right)^2 \approx 10^{-2} \div 10^{-4} \quad (\text{B.1})$$

где $\tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{mc}$ – комптоновская длина волны нуклона, а R – радиус ядра ($R = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = (1,2 \div 1,4) \cdot 10^{-13}$ см), поэтому релятиви-

стскими эффектами можно пренебречь. Следовательно, задача о нахождении характеристик ядра, состоящего из A нуклонов, или задача об описании ядерной реакции (в частности, реакции синтеза трансурановых элементов), в которой участвуют A нуклонов, сводится к решению нерелятивистского уравнения Шредингера для системы A частиц:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A, t) &= H\Psi(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A, t) = \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + V(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A) \right] \Psi(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A, t), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где $\tilde{r}_i = (\vec{r}_i, \mu_i, t_i)$ – пространственные, спиновые и изоспиновые координаты i -го нуклона. Отклонение от этой простой протон-нейтронной модели, связанные с составной природой нуклонов и кварк-глюонной плазмой невелики (порядка 1–2%). В частности, находясь внутри ядра, нуклон может деформироваться или поляризоваться и уже не будет представлять собой физический нуклон, а будет вести себя как некоторая суперпозиция состояний $|N\rangle$, $|N\pi\rangle$, и т. д. В первом приближении спектр возбужденных состояний нуклона можно аппроксимировать Δ -изобарой. Вклад этих ненуклонных степеней свободы мал, так как нуклоны в ядрах слабо связаны, и вероятность найти нуклонный резонанс в ядре мала. Поэтому простая протон-нейтронная модель хорошо работает при низких энергиях.

Следовательно, для ответа на большинство вопросов, возникающих в ядерной физике, необходимо решить уравнение Шредингера (B.2). Для его решения необходимо два пункта:

- 1) знание конкретного вида ядерной потенциальной энергии для записи самого уравнения Шредингера;
- 2) нужны методы, которые позволили, хотя бы приблизительно решить уравнение Шредингера для A тел.

Рассмотрению этих двух вопросов будет посвящен данный курс.

2. Характеристика ядерных сил

Рассмотрим вид ядерной потенциальной энергии, действительная форма которой точно не известна. Точный ядерный потенциал возникает в результате цветного взаимодействия между составными частицами (кварки и глюоны), которые образуют нуклоны, не обладающие цветом. Теория ядерных сил на основе кварковых представлений до сих пор не построена. То взаимодействие, которое вводится в уравнение Шредингера, является бесцветным и рассматривается как косвенное проявления основного цветного взаимодействия. Здесь имеется полная аналогия с силами Ван-дер-Ваальса, действующими между электронейтральными атомами и молекулами, но возникающими за счет электромагнитного взаимодействия составных частиц атомов и молекул.

Будем предполагать, что в ядерном потенциале многочастичные силы несущественны, и ими можно пренебречь. Иными словами, силы, действующие на нуклон, не обязательно совпадают с векторной суммой элементарных двухнуклонных сил, но могут содержать члены, которые возникают только в присутствии третьей, четвертой и т.д. частиц, и характерны только для систем из трех, четырех и т.д. нуклонов. Такие силы называются многочастичными. Следовательно, пренебрегая этими силами, ядерный потенциал для A нуклонов имеет вид

$$V(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A) = \sum_{i < j} \sum_{j=1}^A V_{ij}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j). \quad (\text{B.3})$$

Таким образом, в этом предположении потенциал уравнения (B.2) полностью определяется двухчастичным нуклон-нуклонным потенциалом. При выборе нуклон-нуклонного потенциала будем придерживаться феноменологической точки зрения, т.е. потребуем, чтобы двухчастичный нуклон-нуклонный потенциал удовлетворительно согласовывался с данными по рассеянию двух нуклонов, давал правильные характеристики дейтрона и правильно воспроизводил эффекты насыщения.

Прежде всего, оценим радиус действия ядерных сил. Согласно специальной теории относительности не может существовать взаимодействие, которое мгновенно передавалось бы на расстояние. В частности, взаимодействие между двумя электронами передается фотоном, и он некоторое время находится в пути между

электронами. Именно безмассовость фотона приводит к кулоновскому закону $1/r$. В 1935г. Х. Юкава предположил, что силы между двумя нуклонами аналогичны электромагнитным, но осуществляются за счет обмена мезонами, которые имеют массу покоя μc^2 . Рассмотрим процесс обмена мезоном между двумя нуклонами (рис. 1). Будем рассматривать этот процесс в Ц-системе сталкивающихся нуклонов, где $E_1 = E_1'$, $E_2 = E_2'$, тогда до испускания мезона энергия системы двух нуклонов равна $E = E_1 + E_2$, а после испускания мезона $E' = E_1 + E_2 + E_\pi$, т.е. энергия не сохраняется на величину $\Delta E = E_\pi$. Это возможно в течение времени Δt (соотношение неопределенности):

$$\Delta t = \frac{\hbar}{E_\pi},$$

и поэтому расстояние, на которое может распространиться такой виртуальный мезон (точнее π -мезон):

$$r = c\Delta t = \frac{c\hbar}{E_\pi} \leq \frac{c\hbar}{\mu c^2} = \frac{\hbar}{\mu c} = \lambda_\pi = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

где λ_π – комптоновская длина волны π -мезона. Таким образом, расстояние, на которое может быть передано взаимодействие между нуклонами легчайшим мезоном (π -мезоном) не может превышать комптоновскую длину волны π -мезоном.

Получим в рамках модели Х. Юкавы радиальную зависимость нуклон-нуклонного потенциала $V(r)$. С этой целью вспомним, что лагранжиан взаимодействующих спинорного (нуклонного) и псевдоскалярного (пионного) полей имеет вид

$$L = L_0(\psi) + L_0(\varphi) - g\bar{\psi}\gamma_5\psi(\varphi + \varphi^+), \quad (\text{B.4})$$

где $L_0(\psi)$, $L_0(\varphi)$ – лагранжианы свободных спинорного и псевдоскалярного полей. Этот лагранжиан приводит к уравнению Клейна–Гордона с источником [7]

$$(\square + \mu^2)\varphi(\vec{x}, t) = -g\bar{\psi}\gamma_5\psi^* \quad (\text{B.5})$$

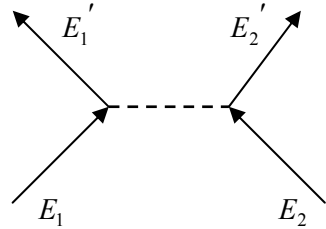


Рис. 1

(здесь $\square \equiv \partial_i \partial^i$, а μ – масса частицы). В правой части этого уравнения стоит источник псевдоскалярного поля подобно тому, как в уравнении Максвелла

$$\square A_k(x) = -4\pi j_k,$$

ток j_k является источником вектор-потенциала электромагнитного поля A_k .

Будем искать стационарное решение уравнения (B.5), т.е. $\varphi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x})$. Кроме того, предположим, что источник псевдоскалярного поля бесконечно тяжелый и находится в начале координат, т.е. $g\psi\gamma_5\psi \rightarrow g\delta(\vec{x})$, тогда уравнение (B.5) примет вид

$$(\nabla^2 - \mu^2)\varphi(\vec{x}) = g\delta(\vec{x}). \quad (\text{B.6})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (\text{B.7})$$

Таким образом, комптоновская длина волны пиона характеризует экспоненциальное затухание потенциала (B.7), который называется потенциалом Юкавы. Потенциал Юкавы определяет радиальную зависимость ядерных сил.

*) В этой и последующих формулах релятивистской квантовой теории этого пособия $\hbar = \hbar = 1$.

Глава 1. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ГАМИЛЬТониАНА ДВУХ НУКЛОНОВ

1.1. Спиновая структура потенциала взаимодействия двух нуклонов

Необходимо построить потенциал взаимодействия двух нуклонов – частиц со спинами $1/2$. Такой потенциал, в общем случае, может зависеть от координат нуклонов \vec{r}_1, \vec{r}_2 , их скоростей или импульсов \vec{p}_1, \vec{p}_2 , а также от их спинов \vec{S}_1, \vec{S}_2 , т.е.

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{S}_1, \vec{S}_2). \quad (1.1)$$

Начнем рассмотрение со спиновой зависимости потенциала. Волновая функция двух невзаимодействующих частиц представляется в виде прямого произведения волновой функции каждой частицы [5]

$$\Psi_{\mu_1 \mu_2}(1, 2) = \Psi_{\mu_1}(1) \otimes \Psi_{\mu_2}(2) \quad (1.2)$$

(если частицы бесспиновые, то имеет место обычное произведение), где μ_1, μ_2 – проекции спинов частиц 1 и 2 на ось 3 соответственно. Волновая функция $\Psi_{\mu_1 \mu_2}(1, 2)$ имеет размерность $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ (где j_1 , и j_2 спины частиц 1 и 2 соответственно). Поэтому в случае двух нуклонов ($j_1 = j_2 = 1/2$) функция $\Psi_{\mu_1 \mu_2}(1, 2)$ должна быть в нерелятивистском приближении 4-рядным столбцом, а $\Psi_{\mu_1}(1)$ и $\Psi_{\mu_2}(2)$ обычными спинорами.

Если теперь две частицы взаимодействуют, то волновая функция, вообще говоря, не распадается на прямое произведение, однако число компонент волновой функции не меняется и в случае двух взаимодействующих нуклонов. Волновая функция двух нуклонов должна быть 4-рядным столбцом. В соответствии с этим гамильтониан двух взаимодействующих нуклонов и, соответственно, их потенциальная энергия должны быть матрицами 4×4 в спиновом пространстве.

Матрица 4×4 содержит 16 элементов, поэтому необходимо построить 16 независимых матриц в спиновом пространстве. Обозначим через $S_i^{(1)}$ и $S_i^{(2)}$ спиновые матрицы первого и второго

нуклона. Как хорошо известно, квадрат каждой из этих матриц, которые связаны с матрицами Паули σ_i , равен

$$\vec{S}^{(k)^2} = 3/4, \quad (k = 1, 2),$$

а их коммутаторы определяются соотношением

$$[S_i^{(k)} S_j^{(k)}] = i \varepsilon_{ijl} S_l^{(k)}.$$

Следовательно, каждая из матриц $S_i^{(k)}$ (где $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$) может входить только один раз в сконструированные 4×4 матрицы в спиновом пространстве. После сказанного сконструировать 16 независимых матриц 4×4 легко, а именно

- 1) I – единичная матрица 4×4 ,
- 2) $\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)}$ – три матрицы 4×4 , получаемые в результате прямого перемножения спиновых матриц $\vec{S}^{(1)}$ первого нуклона на единичную матрицу 2×2 в спиновом пространстве второго нуклона – $I^{(2)}$,
- 3) $I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}$ – три матрицы 4×4 , получаемые с использованием матриц $\vec{S}^{(2)}$ и $I^{(1)}$,
- 4) $S_i^{(1)} \otimes S_j^{(2)}$ – девять матриц 4×4 , получаемые в результате прямого перемножения матриц $S_i^{(1)}$ на $S_j^{(2)}$.

Все перечисленные выше матрицы 4×4 независимы по построению и, следовательно, любую матрицу 4×4 можно разложить по этим матрицам. Преобразуем эти матрицы. Во-первых, вместо шести матриц $\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)}$, $I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}$ введем суммарный спин системы и разность спинов нуклонов

$$\vec{S} = \vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)} \quad (1.3)$$

и

$$\vec{\Sigma} = \vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)} - I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)} \quad (1.4)$$

Во-вторых, тензор второго ранга $S_i^{(1)} \otimes S_j^{(2)}$ разложим на неприводимые величины

а) скаляр

$$\vec{S}^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}, \quad (1.5)$$

б) антисимметричный тензор второго ранга $S_i^{(1)} \otimes S_j^{(2)} - S_j^{(1)} \otimes S_i^{(2)}$, который в результате свертки с тензором ε_{ijk} дает вектор

$$[\vec{S}^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}], \quad (1.6)$$

в) симметричный тензор второго ранга со шпуром равным нулю

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(S_i^{(1)} \otimes S_j^{(2)} + S_j^{(1)} \otimes S_i^{(2)}) - \frac{1}{3}(\vec{S}^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)})\delta_{ij}. \quad (1.7)$$

Полученные 16 матриц 4×4 (единичная матрица и спиновые матрицы (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7)) независимы, и любую матрицу 4×4 , в частности, и потенциальную энергию взаимодействия двух нуклонов можно разложить по этим матрицам в спиновом пространстве.

Потенциальная энергия двух взаимодействующих нуклонов должна быть инвариантной относительно:

а) пространственных трансляций (из-за однородности пространства),

б) преобразований Галилея (из-за принципа относительности),

в) вращений (из-за изотропии пространства).

Рассмотрим требование инвариантности относительно трансляций в пространстве. С этой целью перейдем от радиусов \vec{r}_1 и \vec{r}_2 к радиусу-вектору центра инерции \vec{R} и относительному радиусу \vec{r} :

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Тогда для удовлетворения требованию однородности пространства потенциальная энергия должна зависеть только от относительного радиуса \vec{r} .

Требование инвариантности относительно преобразований Галилея означает эквивалентность инерциальных систем отсчета. В соответствии с этим потенциальная энергия должна быть инвариантна относительно этих преобразований. Это означает, что потенциальная энергия должна зависеть от вектора относительной скорости $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, которая инвариантна относительно преобразований Галилея. В случае, если предполагать, что m масса нуклона ($m_1 = m_2 = m$), то потенциальная энергия зависит от относительного импульса $\vec{p} = m\vec{v}$. Если же ($m_1 \neq m_2$), то

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2} = \frac{1}{m_1} \left(\vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_2} \vec{p}_2 \right) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{p}$$

где $(\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p})$ – импульс в Ц-системе.

Таким образом, получили два вектора \vec{r} и \vec{p} , из которых можно построить:

а) три скаляра

$$\vec{r}^2, \vec{p}^2, (\vec{r}\vec{p}), \quad (1.8)$$

б) три вектора

$$\vec{r}, \vec{p}, [\vec{r}\vec{p}], \quad (1.9)$$

в) три тензора второго ранга со шпуром, равным нулю

$$r_{ij} = r_i r_j - \frac{1}{3} \vec{r}^2 \delta_{ij}, \quad (1.10a)$$

$$p_{ij} = p_i p_j - \frac{1}{3} \vec{p}^2 \delta_{ij}, \quad (1.10б)$$

$$X_{ij} = \frac{1}{3} (r_i p_j + r_j p_i) - \frac{1}{2} (\vec{r}\vec{p}) \delta_{ij} \quad (1.10в)$$

Для построения скалярных матриц 4×4 , которые инвариантны относительно вращений (т.е. учет изотропии пространства), необходимо свернуть тензоры, построенные из спиновых матриц ((1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7)) с тензорами, построенными из векторов r_i и p_i ((1.8), (1.9), (1.10)). Умножая каждую из этих комбинаций на некоторую функцию $V_k(r)$, получим наиболее общую форму спиновой структуры потенциала взаимодействия двух частиц со спинами 1/2

$$\begin{aligned} V(r) = & V_0(r) + V_1(r)(\vec{S}_1 \vec{S}_2) + V_2(r)(\vec{S}_1 \vec{S}_2) \vec{p}^2 + V_3(r)(\vec{S}_1 \vec{S}_2)(\vec{r}\vec{p}) + \\ & (1.11) \\ & + V_4(r)(\vec{S}\vec{r}) + V_5(r)(\vec{S}\vec{p}) + V_6(r)(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}]) + V_7(r)(\vec{\Sigma}\vec{r}) + V_8(r)(\vec{\Sigma}\vec{p}) + \\ & + V_9(r)(\vec{\Sigma}[\vec{r}\vec{p}]) + V_{10}(r)[\vec{S}_1 \vec{S}_2] \vec{r} + V_{11}(r)[\vec{S}_1 \vec{S}_2] \vec{p} + V_{12}(r)[\vec{S}_1 \vec{S}_2][\vec{r}\vec{p}] + \\ & + V_{13}(r) S_{ij} r_{ij} + V_{14}(r) S_{ij} p_{ij} + V_{15}(r) S_{ij} X_{ij}. \end{aligned}$$

В выражении (1.11) (и далее) опущен знак прямого произведения в произведениях матриц. Например, в произведении $\vec{S}^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}$, которое в дальнейшем записывается в виде $\vec{S}_1 \vec{S}_2$. В соответствии с этим в прямых произведениях $\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)}$, $I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}$

опускаются единичные матрицы, как это делается обычно. Это не вызывает недоразумений, так как операторы с индексом k ($k = 1, 2$) действуют на соответствующие переменные.

Величины $V_k(r)$, вообще говоря, могут быть функциями всех трех скаляров $\vec{r}^2, \vec{p}^2, (\vec{r}\vec{p})$. Однако требование сохранения уравнения Шредингера как динамического уравнения для ядерных процессов ограничивает гамильтониан квадратом оператора импульса. Поэтому в выражении (1.11) величины $V_k(r)$ зависят лишь от r .

В случае взаимодействия двух нуклонов эксперимент показывает, что имеются дополнительные требования инвариантности. Гамильтониан должен быть инвариантен относительно инверсии пространства:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}, \quad t \rightarrow t' = t, \quad (1.12)$$

и обращения времени

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = -t. \quad (1.13)$$

Следовательно, и потенциал $V(r)$ должен быть инвариантен относительно этих преобразований.

Рассмотрим, как ведет себя волновая функция двух нуклонов при инверсии пространства. Напомним, что волновая функция одного нуклона при инверсии пространства преобразуется следующим образом [6]:

$$\psi_{\mu}(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'_{\mu}(\vec{x}', t') = (U_p)_{\mu\mu'} \psi_{\mu'}(\vec{x}, t), \quad (1.14)$$

где унитарный оператор U_p является произведением оператора \hat{I} , который действует только на координаты волновой функции

$$\hat{I}F(\vec{r}, t) = F(-\vec{r}, t) \quad (1.15)$$

и оператора

$$t_g = \eta_p I, \quad (1.16)$$

который действует на спиновую волновую функцию нуклона. В выражении (1.16) I – единичная матрица. Эти два оператора коммутируют между собой. Соответственно, волновая функция двух нуклонов, компоненты которой определяются равенством $\Psi_{\mu_1\mu_2}(1, 2) = \psi_{\mu_1}(1)\psi_{\mu_2}(2)$, при инверсии пространства преобразуется следующим образом:

$$\Psi_{\mu_1\mu_2}(1,2) \rightarrow \Psi'_{\mu_1}(1)\Psi'_{\mu_2}(2) = (U_p(1))_{\mu_1\mu'_1}\Psi_{\mu'_1}(1)(U_p(2))_{\mu_2\mu'_2}\Psi_{\mu'_2} = \\ (U_p(1))_{\mu_1\mu'_1}(U_p(2))_{\mu_2\mu'_2}\Psi_{\mu'_1}(1)\Psi_{\mu'_2}(2) = (U_p(1)\otimes U_p(2))_{\mu_1\mu_2,\mu'_1\mu'_2}\Psi_{\mu'_1}\Psi_{\mu'_2}.$$

Таким образом, матрица $U_p(1,2)$, преобразующая волновую функцию двух нуклонов при инверсии пространства, является прямым произведением матриц $U_p(1)$ и $U_p(2)$

$$U_p(1,2) = U_p(1) \otimes U_p(2). \quad (1.17)$$

Как известно, при унитарном преобразовании волновой функции (1.14), операторы физических величин преобразуются следующим образом

$$A \rightarrow A' = U_p A U_p^+. \quad (1.18)$$

Следовательно, инвариантность потенциальной энергии относительно инверсии пространства выражается условием

$$V(\vec{r}) \rightarrow V'(\vec{r}') = U_p V(\vec{r}) U_p^+ = V(\vec{r}), \quad (1.19)$$

где оператор U_p определяется выражением (1.17). Поскольку функции $V_k(r)$ ($k=0,\dots,15$) зависят от \vec{r}^2 и, следовательно, инвариантны относительно инверсии пространства, то поведение потенциала определяется скалярными величинами, сконструированными из спиновых матриц ((1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7)) и тензоров ((1.8), (1.9), (1.10)). Рассмотрим, как они ведут себя при таком преобразовании. Легко убедиться, что каждая скалярная величина в результате инверсии пространства умножается либо на $+1$, либо на -1 , т.е.

$$Z \rightarrow Z' = U_p Z U_p^+ = \eta_p Z, \quad (1.20)$$

где Z – какая-либо скалярная величина, а $\eta_p = \pm 1$. В результате получим, что величины $(\vec{S}_1\vec{S}_2)$, $(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2$, $(\vec{S}_1\vec{S}_2)(\vec{r}\vec{p})$, $(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}])$, $(\vec{\Sigma}[\vec{r}\vec{p}])$, $[\vec{S}_1\vec{S}_2][\vec{r}\vec{p}]$, $S_{ij}r_{ij}$, $S_{ij}p_{ij}$, $S_{ij}X_{ij}$ при инверсии пространства умножаются на $\eta_p = +1$, а величины $(\vec{S}\vec{r})$, $(\vec{S}\vec{p})$, $(\vec{\Sigma}\vec{r})$, $(\vec{\Sigma}\vec{p})$, $[\vec{S}_1\vec{S}_2]\vec{r}$, $[\vec{S}_1\vec{S}_2]\vec{p}$ на $\eta_p = -1$.

Таким образом, шесть величин не инвариантны относительно инверсии пространства, и они не могут входить в потенциальную энергию, т.е.

$$V_4(r) = V_5(r) = V_7(r) = V_8(r) = V_{10}(r) = V_{11}(r) = 0. \quad (1.21)$$

Поэтому потенциальная энергия принимает вид:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) = & V_0(r) + V_1(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2) + V_2(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2 + \\ & + V_3(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)(\vec{r}\vec{p}) + V_6(r)(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}]) + V_9(r)(\vec{\Sigma}[\vec{r}\vec{p}]) + \\ & + V_{12}(r)[\vec{S}_1\vec{S}_2][\vec{r}\vec{p}] + V_{13}(r)S_{ij}r_{ij} + V_{14}(r)S_{ij}p_{ij} + \\ & + V_{15}(r)S_{ij}X_{ij}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Рассмотрим обращение времени. При обращении времени волновая функция частицы преобразуется по антиунитарному закону [6]:

$$\Psi_\mu(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\Psi}_\mu(\vec{x}', t') = (U_t)_{\mu\mu'} \Psi_{\mu'}^*(\vec{x}, -t), \quad (1.23)$$

где оператор U_t имеет вид

$$U_t = \exp(-iI_2\pi), \quad (1.24)$$

а I_2 – генератор группы вращений. В случае нуклонов, частиц со спином $1/2$, $I_2 = \frac{1}{2}\sigma_2$, следовательно,

$$U_t = -i\sigma_2 \quad (1.25)$$

Соответственно, волновая функция двух нуклонов, являющаяся прямым произведением нуклонных волновых функций, при обращении времени преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu_1\mu_2}(1, 2) & \rightarrow \bar{\Psi}_{\mu_1\mu_2}(1, 2) = \bar{\Psi}_{\mu_1}(1)\bar{\Psi}_{\mu_2}(2) = \\ & = (U_t^{(1)})_{\mu_1\mu_1'} \Psi_{\mu_1'}^*(1) (U_t^{(2)})_{\mu_2\mu_2'} \Psi_{\mu_2'}^*(2) = \\ & = (U_t^{(1)})_{\mu_1\mu_1'} (U_t^{(2)})_{\mu_2\mu_2'} \Psi_{\mu_1'}^*(1) \Psi_{\mu_2'}^*(2) = \\ & = (U_t^{(1)} \otimes U_t^{(2)})_{\mu_1\mu_2, \mu_1'\mu_2'} (\Psi_{\mu_1'}(1) \Psi_{\mu_2'}(2))^*. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Из цепочки равенств (1.26) следует, что при обращении времени волновая функция двух нуклонов преобразуется с помощью матрицы

$$U_t(1, 2) = i\sigma_2^{(1)} \otimes i\sigma_2^{(2)}. \quad (1.27)$$

Следовательно, любой оператор A , в частности, и потенциальная энергия, при таком преобразовании волновой функции должен преобразовываться по закону [6]:

$$A \rightarrow \bar{A} = U_t A^T U_t^{-1}. \quad (1.28)$$

Требование инвариантности гамильтониана двух нуклонов относительно обращения времени означает следующее условие на потенциальную энергию:

$$V(\vec{r}) \rightarrow \bar{V}(\vec{r}) = U_t V^T(\vec{r}) U_t^{-1} = V(\vec{r}), \quad (1.29)$$

где оператор U_t определяется выражением (1.27). Поскольку функции $V_k(r)$ ($k = 0, \dots, 15$) зависят от \vec{r}^2 и, следовательно, инвариантны относительно обращения времени, то рассмотрим, как ведут себя скалярные величины, составленные из спиновых матриц ((1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7)) и тензоров ((1.8), (1.9), (1.10)) при таком преобразовании. Легко убедиться, что каждая скалярная величина в результате обращения времени умножается либо на $+1$, либо на -1 . Действительно, в качестве примера рассмотрим преобразование матрицы $\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)}$ при обращении времени:

$$\begin{aligned} (\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)}) &\rightarrow \overline{(\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)})} = \\ &= (i\sigma_2^{(1)} \otimes i\sigma_2^{(2)}) (\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)})^T (i\sigma_2^{(1)} \otimes i\sigma_2^{(2)})^+ = \\ &= (i\sigma_2^{(1)} \otimes i\sigma_2^{(2)}) (\bar{S}^{(1)T} \otimes \bar{S}^{(2)T}) (i\sigma_2^{(1)} \otimes i\sigma_2^{(2)})^+ = \\ &= (i\sigma_2^{(1)} \bar{S}^{(1)T} i\sigma_2^{(1)}) \otimes (i\sigma_2^{(2)} \bar{S}^{(2)T} i\sigma_2^{(2)}) = ((-\bar{S}^{(1)}) \otimes (-\bar{S}^{(2)})) = \\ &= (\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)}) = \eta_T (\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)}), \end{aligned} \quad (1.30)$$

т.е. для величины $(\bar{S}^{(1)} \otimes \bar{S}^{(2)})$ $\eta_T = +1$.

Проведя аналогичные вычисления со всеми 4×4 матрицами, входящими в потенциальную энергию взаимодействия двух нуклонов (1.22), получим, что три матрицы $(\bar{S}_1 \bar{S}_2)(\vec{r}\vec{p})$, $[\bar{S}_1 \bar{S}_2][\vec{r}\vec{p}]$, $S_{ij} X_{ij}$ приобретают $\eta_T = -1$, в то время как все остальные приобретают $\eta_T = +1$. При получении этого результата необходимо учитывать, что при обращении времени вектор \vec{r} не меняется, а оператор импульса преобразуется по закону:

$$\vec{p} \rightarrow \bar{\vec{p}} = U_t \vec{p}^T U_t^+ = -\vec{p}.$$

Поэтому требование инвариантности потенциальной энергии относительно обращения времени, а следовательно, и инвариантности гамильтониана двух нуклонов относительно этого преобразования, приводит к следующим условиям:

$$V_8(r) = V_{12}(r) = V_{15}(r) = 0. \quad (1.31)$$

Таким образом, потенциальная энергия, инвариантная относительно инверсии пространства и обращения времени, имеет вид:

$$V(\vec{r}) = V_0(r) + V_1(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2) + V_2(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2 + \\ + V_6(r)(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}]) + V_9(r)(\vec{\Sigma}[\vec{r}\vec{p}]) + V_{13}(r)S_{ij}r_{ij} + V_{14}(r)S_{ij}p_{ij}. \quad (1.32)$$

В п. 1.3 будет показано, что нуклоны имеют зарядовую переменную, которая определяет, является нуклон протоном или нейтроном. В соответствии с этим, два нуклона можно рассматривать как два тождественных фермиона. Следовательно, гамильтониан, а соответственно, и потенциальная энергия должны быть симметричны относительно перестановки 1 и 2, т.е.

$$H(1,2) = H(2,1). \quad (1.33)$$

Единственным членом в потенциальной энергии двух нуклонов, который не удовлетворяет этому требованию, это – член, содержащий $\vec{\Sigma}$, т.е. $V_9(r)(\vec{\Sigma}[\vec{r}\vec{p}])$, поскольку при перестановке частиц 1 и 2 $\vec{\Sigma}$ меняет знак. В соответствии с этим потребуем, чтобы

$$V_9(r) = 0. \quad (1.34)$$

Таким образом, требования инвариантности потенциальной энергии взаимодействия двух нуклонов относительно инверсии пространства, обращения времени и перестановки двух частиц оставляют в ней из 16 членов только шесть, и потенциальную энергию можно записать в виде:

$$V(\vec{r}) = V_0(r) + V_1(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2) + V_2(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2 + \\ + V_6(r)(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}]) + V_{13}(r)S_{ij}r_{ij} + V_{14}(r)S_{ij}p_{ij}. \quad (1.35)$$

В заключение этого параграфа получим спиновую структуру потенциала взаимодействия частицы со спином нуль с частицей со спином 1/2. Для получения этого потенциала положим в выражение (1.35) $\vec{S}_2 = 0$, тогда в выражении для потенциала отличными от нуля остаются лишь два члена, и потенциал принимает вид

$$V(\vec{r}) = V_0(r) + V_{LS}(r)(\vec{\sigma}[\vec{r}\vec{p}]). \quad (1.36)$$

В выражение (1.36) учтено, что в этом случае $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$. Это выражение легко понять. Действительно, такой потенциал должен быть 2×2 матрицей и может зависеть от $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{S} = (1/2)\vec{\sigma}$. Требование однородности пространства и принципа относительно-

сти приводят к ограничению: в потенциал могут входить лишь относительный радиус \vec{r} и относительная скорость \vec{v} , которая связана с импульсом \vec{p} . Кроме того, из векторов \vec{r} и \vec{p} можно сконструировать еще один вектор $[\vec{r}\vec{p}]$. Следовательно, для удовлетворения требованию изотропии пространства необходимо свернуть три указанных вектора с матрицей $\vec{\sigma}$. В результате получим четыре 2×2 матрицы: I – единичная матрица и матрицы $(\vec{r}\vec{\sigma}), (\vec{\sigma}\vec{p}), (\vec{\sigma}[\vec{r}\vec{p}])$. Поэтому потенциал должен иметь вид:

$$V(\vec{r}) = V_0(r) + V_1(r)(\vec{\sigma}\vec{r}) + V_2(\vec{\sigma}\vec{p}) + V_{LS}(r)(\vec{\sigma}[\vec{r}\vec{p}]).$$

Однако, как было показано выше, требование инвариантности относительно инверсии пространства приводит к условию

$$V_1(r) = V_2(r) = 0,$$

поскольку матрицы $(\vec{r}\vec{\sigma}), (\vec{\sigma}\vec{p})$ меняют знак при инверсии пространства. Тогда полученный потенциал сводится к выражению (1.36). Отметим, что требование инвариантности относительно обращения времени никаких новых ограничений не накладывает, поскольку потенциал (1.36) автоматически ему удовлетворяет.

1.2. Интегралы движения гамильтониана двух взаимодействующих нуклонов

В предыдущем параграфе была получена потенциальная энергия взаимодействия двух нуклонов, которая содержала шесть членов. Рассмотрим каждый из этих членов.

Первый член в выражении (1.35), содержащий $V_0(r)$, – обычный центральный потенциал, независимый от спина. Он хорошо известен из курса квантовой механики.

Второй член $V_1(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)$ – спин-спиновые силы. Это центральные силы, зависящие от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. В дальнейшем вместо потенциала $V_1(r)$ будем писать $V_S(r)$, отмечая его зависимость от взаимной ориентации спинов. Преобразуем спиновую часть потенциала. Используя (1.3), можно написать:

$$\begin{aligned}
\vec{S}^2 &= (\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)})^2 = (\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)})^2 + \\
&+ (I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)})^2 + (\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)})(I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}) + \\
&+ (I^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)})(\vec{S}^{(1)} \otimes I^{(2)}) = (\vec{S}^{(1)})^2 \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes (\vec{S}^{(2)})^2 + \\
&+ 2(\vec{S}^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}) = \frac{3}{2}I^{(1)} \otimes I^{(2)} + 2(\vec{S}^{(1)} \otimes \vec{S}^{(2)}).
\end{aligned}$$

Следовательно, имеем:

$$(\vec{S}_1 \vec{S}_2) = \frac{1}{2} \vec{S}^2 - \frac{3}{4} \quad (1.37)$$

Соответственно, спин-спиновый член в потенциальной энергии двух нуклонов примет вид:

$$V_S(r) \left(\frac{1}{2} \vec{S}^2 - \frac{3}{4} \right) \quad (1.38)$$

Поэтому центральные силы между двумя нуклонами различны, если система находится либо в триплетном ($S = 1$), либо в синглетном ($S = 0$) состояниях

$$\begin{aligned}
V(r) &= V_0(r) + V_S(r) \left(\frac{1}{2} \vec{S}^2 - \frac{3}{4} \right) = \\
&= \begin{cases} V_0(r) + \frac{1}{4} V_S(r) \equiv V_{\text{трип}}(r), \\ V_0(r) - \frac{3}{4} V_S(r) \equiv V_{\text{синг}}(r). \end{cases} \quad (1.39)
\end{aligned}$$

где $V_{\text{трип}}(r)$ и $V_{\text{синг}}(r)$ – центральные потенциалы в триплетном и синглетном состояниях соответственно.

Перейдем к рассмотрению пятого члена в выражении (1.35). Используя соотношения (1.7) и (1.10а), определяющие S_{ij} и r_{ij} соответственно, легко получить:

$$\begin{aligned}
V_{13}(r) S_{ij} r_{ij} &= V_{13}(r) ((\vec{S}^{(1)} \vec{r})(\vec{S}^{(2)} \vec{r}) - \frac{r^2}{3} (\vec{S}^{(1)} \vec{S}^{(2)})) = \\
&= V_{13}(r) \frac{\vec{r}^2}{12} (3(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)) = V_T(r) \mathcal{S}_{12}.
\end{aligned} \quad (1.40)$$

В последнем равенстве цепочки (1.40) введены следующие обозначения:

$$\hat{S}_{12} \equiv 3(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2), \quad V_T(r) \equiv \frac{\vec{r}^2}{12} V_{13}(r) \quad (1.41)$$

Эти силы в потенциале взаимодействия двух нуклонов называются тензорными. Они являются нецентральными. Действительно, воспользуемся соотношением (1.3), которое представим в виде

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2). \quad (1.42)$$

Умножив это соотношение на единичный вектор \vec{n} (где $\vec{n} = \vec{r}/r$), и возведя затем его в квадрат, получим

$$(\vec{S}\vec{n})^2 = \frac{1}{2}(1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})),$$

откуда следует

$$(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) = 2(\vec{S}\vec{n})^2 - 1. \quad (1.43)$$

С другой стороны, из соотношения (1.37) следует, что

$$(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) = 2\vec{S}^2 - 3. \quad (1.44)$$

Подставляя (1.43) и (1.44) в (1.40), получим для тензорных сил следующее выражение:

$$V_{13}(r)S_{ij}r_{ij} = V_T(r)(6(\vec{S}\vec{n})^2 - 2\vec{S}^2). \quad (1.45)$$

Из этого соотношения видно, что тензорные силы зависят от ориентации полного спина системы двух нуклонов \vec{S} относительно единичного вектора \vec{n} , который определяется относительным радиусом \vec{r} , т.е. от угла θ между этими векторами.

Объединяя выражения (1.39) и (1.45) получим потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия $\tilde{V}(r)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}(r) &= V_0(r) + V_S(r)(\vec{S}_1 \vec{S}_2) + V_T(r)\hat{S}_{12} = \\ &= V_0(r) + V_S(r)\left(\frac{1}{2}\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\right) + V_T(r)(6(\vec{S}\vec{n})^2 - 2\vec{S}^2). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Три члена, входящие в потенциал (1.46), исчерпывают все силы между двумя нуклонами независимые от скорости.

Перейдем к рассмотрению сил, которые зависят от скорости. Член потенциальной энергии $V_6(r)(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}])$ можно представить в виде

$$V_6(r)(\vec{S}[\vec{r}\vec{p}]) = V_{LS}(r)(\vec{S}\vec{l}). \quad (1.47)$$

В выражении (1.47) введен орбитальный момент $\hbar\vec{l} = [\vec{r}\vec{p}]$ и обозначена функция $V_6(r)$ как $V_{LS}(r)$. Этот член называется спин-орбитальным взаимодействием двух нуклонов или спин-орбитальными силами. Он зависит от взаимной ориентации полного спина системы \vec{S} и его относительного орбитального момента \vec{l} . Как известно [6], спин-орбитальное взаимодействие можно рассматривать как взаимодействие магнитного момента нуклона с магнитным полем в сопутствующей системе, т.е. в системе, движущейся с нуклоном.

Член $V_3(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2$ в потенциальной энергии взаимодействия двух нуклонов описывает центральные спин-спиновые силы, зависящие от скорости. Используя соотношение (1.37) и обозначая функцию $V_3(r)$ как $V'_S(r)$, представим его в виде

$$V_3(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2 = V'_S(r)\left(\frac{1}{2}\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\right)\vec{p}^2. \quad (1.48)$$

Член $V_{14}(r)S_{ij}p_{ij}$ в потенциальной энергии взаимодействия двух нуклонов описывает тензорные силы, зависящие от скорости. Аналогично обычным тензорным силам, используя соотношения (1.7) и (1.10б), этот член можно представить в виде

$$V_{14}(r)S_{ij}p_{ij} = V'_T(r)\hat{S}_{12}^{(p)}, \quad (1.49)$$

где введены обозначения

$$\hat{S}_{12}^{(p)} \equiv 3(\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{p}) - (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\vec{p}^2, \quad (1.50)$$

$$V'_T(r) \equiv \frac{1}{12}V_{14}(r). \quad (1.51)$$

Для оператора $\hat{S}_{12}^{(p)}$ можно получить выражение через полный спин системы так же, как для оператора \hat{S}_{12} . Используя выражение для полного спина системы (1.3) легко показать, что

$$\hat{S}_{12}^{(p)} = 6(\vec{S}\vec{p})^2 - 2\vec{S}^2\vec{p}^2. \quad (1.52)$$

Окончательно потенциальная энергия взаимодействия двух нуклонов запишется в виде:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= V_0(r) + V_s(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2) + V_T(r)\hat{S}_{12} + \\
&+ V_{LS}(r)(\vec{S}\vec{l}) + V'_s(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2)\vec{p}^2 + V'_T(r)\hat{S}_{12}^{(p)} = \\
&= V_0(r) + V_s(r)\left(\frac{1}{2}\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\right) + V_T(r)(6(\vec{S}\vec{n})^2 - 2\vec{S}^2) + \\
&+ V_{LS}(r)(\vec{S}\vec{l}) + V'_s(r)\left(\frac{1}{2}\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\right)\vec{p}^2 + V'_T(r)(6(\vec{S}\vec{p})^2 - 2\vec{S}^2\vec{p}^2).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

В соответствии с этим гамильтониан системы двух нуклонов запишется в виде

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 + V(\vec{r}), \tag{1.54}$$

где $V(\vec{r})$ определяется соотношением (1.53). Кроме того, в (1.54) предполагается, что $m_p = m_n = m$. Рассмотрим интегралы движения этого гамильтониана. В соответствии с требованиями, заложенными при построении потенциала взаимодействия двух нуклонов, этот гамильтониан, кроме закона сохранения энергии и импульса, инвариантен относительно вращения в пространстве, т.е. сохраняется полный момент количества движения. Таким образом, гамильтониан H коммутирует с компонентами J_i , ($\vec{J} = \vec{l} + \vec{S}$) и его квадратом:

$$[H, J_i] = 0, (i = 1, 2, 3), [H\vec{J}^2] = 0. \tag{1.55}$$

Однако, кроме указанных выше интегралов движения, имеется еще один интеграл движения – сохраняется суммарный спин системы двух нуклонов:

$$[H, \vec{S}^2] = 0. \tag{1.56}$$

При этом величина \vec{l}^2 не сохраняется, т.е.

$$[H, \vec{l}^2] \neq 0. \tag{1.57}$$

Действительно, из выражений (1.45) и (1.62) следует, что

$$[\hat{S}_{12}, \vec{S}^2] = [\hat{S}_{12}^{(p)}, \vec{S}^2] = 0, \tag{1.58}$$

поэтому, учитывая, что \vec{S}^2 коммутирует с S_i , имеет место соотношение (1.56). Однако легко проверить, что

$$[\hat{S}_{12}, \vec{l}^2] \neq 0,$$

поэтому \vec{l}^2 не является интегралом движения. Отметим, что существование дополнительного интеграла движения у гамильтониана двух взаимодействующих нуклонов связано с двумя условиями:

а) рассматриваются частицы со спином $1/2$ и

б) частицы тождественны, ибо коммутатор $\vec{\Sigma}$ с \vec{S}^2 отличен от нуля:

$$[\vec{\Sigma}, \vec{S}^2] \neq 0.$$

Следовательно, присутствие члена $V_9(r)(\vec{\Sigma}[\vec{r}\vec{p}])$ в потенциальной энергии привело бы к нарушению соотношения (1.56).

Отметим, что требование инвариантности гамильтониан относительно инверсии пространства приводит к сохранению четности, т.е. оператор четности P коммутирует с H :

$$[H, P] = 0 \quad (1.59)$$

Таким образом, волновая функция двух нуклонов обладает следующими квантовыми числами: полным угловым моментом (или спином систем) J , его проекцией на ось z J_z , суммарным спином двух нуклонов S , который принимает значения $0, 1$, и четность системы π .

В качестве примера, рассмотрим связанное состояние двух нуклонов. Нейтрон и протон образуют связанное состояние – дейтрон. Основное состояние дейтрона характеризуется спином, равным единице, и положительной четностью, т.е. 1^+ состояние. Поскольку, как упоминалось выше, система двух нуклонов характеризуется также суммарным спином, то при заданных J и S значения орбитального момента l определяются неравенствами

$$|J - S| \leq l \leq J + S$$

Следовательно, если $S = 0$, то $J = l = 1$. Однако, поскольку шаровая функция $Y_{lm}(\vec{n})$, описывающая движение с орбитальным моментом l , при инверсии пространства приобретает множитель $(-1)^l$, то состояние с орбитальным моментом $l = 1$ нечетно (внутренняя четность нейтрона и протона одинакова). Поэтому дейтрон может находиться только в состоянии с $S = 1$ и, следовательно, $l = 0$ или 2 и, соответственно, волновая функция дейтрона является суперпозицией состояний с $l = 0$ и 2 :

между нейтроном и протоном играют второстепенную роль в формировании сильного взаимодействия.

В соответствии с этим нуклон может существовать в двух состояниях: нейтронном и протонном. Следовательно, волновая функция нуклона зависит от некоторой переменной, которая принимает два значения. Это зарядовая переменная, которую обозначают через t_3 . При этом, если $t_3 = +1/2$, то нуклон находится в протонном состоянии, а если $t_3 = -1/2$, то в нейтронном. Поэтому можно утверждать, что волновая функция нуклона зависит от пяти переменных: пространственных \vec{r} , спиновой μ и зарядовой (или изоспиновой) t_3 .

Зарядовая переменная, так же как и спиновая переменная, для нуклона принимает два значения, поэтому по аналогии со спином волновая функция нуклона записывается в виде столбца, содержащего две компоненты:

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}, \quad (1.60)$$

где Ψ_p и Ψ_n – в нерелятивистском приближении двухкомпонентные функции, описывающие протон и нейтрон соответственно. В частности, если нуклон находится в протонном состоянии, то

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

если же в нейтронном, то

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \Psi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зарядовую переменную обычно называют изоспином, и можно сказать, что волновая функция нуклона есть прямое произведение спиновой функции на изоспиновую:

$$\Psi_N = \Psi_\mu \otimes \chi_{t_3}. \quad (1.61)$$

Следовательно, в нерелятивистском приближении волновая функция нуклона – 4-компонентный столбец. Приведем волновую функцию протона в состоянии с проекцией на ось z $\mu = \pm 1/2$:

$$\Psi_{p,+1/2} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{p,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\vec{r}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и волновую функцию нейтрона в состоянии с $\mu = \pm 1/2$:

$$\Psi_{n,+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{n,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

В релятивистском случае, когда волновая функция частицы со спином $1/2$ является биспинором Дирака, волновая функция нуклона – 8-компонентный столбец.

Так же, как и в нерелятивистской квантовой механике, где льюбые операторы в спиновом пространстве (в случае частиц со спином $1/2$) записываются через единичную матрицу и матрицы Паули, в пространстве изотопического спина, в котором изменяется зарядовая переменная, имеется всего четыре независимых линейных оператора:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Следовательно, имеется группа из четырех линейных операторов, обладающая следующим свойством: сами эти операторы и их линейные комбинации представляют все возможные линейные операторы в рассматриваемом изоспиновом пространстве.

Рассмотрим несколько примеров. Оператор τ_1 переводит протонное состояние нуклона в нейтронное и наоборот:

$$\tau_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем операторы:

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2), \quad (1.63)$$

т.е.

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор τ_+ переводит нейтронное состояние в протонное, а оператор τ_- – протонное состояние в нейтронное:

$$\tau_- |p\rangle = |n\rangle, \quad \tau_+ |n\rangle = |p\rangle, \quad (1.64)$$

где введены обозначения:

$$|p\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |n\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Отметим, что

$$\tau_+ |p\rangle = 0, \quad \tau_- |n\rangle = 0. \quad (1.66)$$

Введем операторы проектирования протонного и нейтронного состояния. Оператор проектирования протонного состояния P_p , действуя на протонное состояние, оставляет его неизменным, а нейтронное обращает в нуль, т.е.

$$P_p |p\rangle = |p\rangle, \quad P_p |n\rangle = 0 \quad (1.67)$$

и, соответственно, действие оператора проектирования нейтронного состояния P_n определяется как

$$P_n |p\rangle = 0, \quad P_n |n\rangle = |n\rangle. \quad (1.68)$$

Эти операторы имеют вид

$$P_p = \frac{1}{2}(1 + \tau_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_n = \frac{1}{2}(1 - \tau_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

В частности, если имеется волновая функция нуклона Ψ_N (1.60), то

$$P_p \Psi_N = \psi_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_n \Psi_N = \psi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя операторы P_p и P_n , можно записать гамильтониан нуклона так, чтобы он правильно действовал вне зависимости от того, является эта функция нейтронной или протонной. Действительно, пусть гамильтониан протона имеет вид

$$H_p = \frac{P^2}{2m_p} + U_p(\vec{r}),$$

а гамильтониан нейтрона

$$H_n = \frac{p^2}{2m_n} + U_n(\vec{r}),$$

где $U_p(\vec{r})$ и $U_n(\vec{r})$ – потенциальная энергия протона и нейтрона соответственно. Тогда искомым гамильтониан имеет вид

$$H = H_p P_p + H_n P_n = \frac{1}{2}(H_p + H_n) + \frac{1}{2}(H_p - H_n)\tau_3. \quad (1.70)$$

Этот гамильтониан действительно удовлетворяет тем требованиям, которые сформулированы выше, поскольку

$$\begin{aligned} H\Psi_N &= (H_p P_p + H_n P_n)(\psi_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \\ &= H_p \psi_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + H_n \psi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т.е. правильный гамильтониан.

Можно ввести оператор заряда нуклона, который запишется в виде

$$q = eP_p = \frac{1}{2}e(1 + \tau_3), \quad (1.71)$$

тогда

$$q|p\rangle = e|p\rangle, \quad q|n\rangle = 0.$$

Таким образом, из чисто формального рассмотрения можно прийти к выводу, что нуклон обладает изотопическим спином \vec{t} равным $1/2$. Компоненты вектора \vec{t} в изотопическом пространстве определяются операторами

$$t_i = \frac{1}{2}\tau_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.72)$$

Оператор квадрата изотопического спина \vec{t}^2 равен

$$\vec{t}^2 = \frac{3}{4}I, \quad (1.73)$$

где I – единичная матрица. В соответствии с общими правилами можно написать

$$[\vec{t}^2, t_i] = 0, \quad [t_i, t_j] = i\varepsilon_{ijk}t_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.74)$$

Построенные выше волновые функции, описывающие зарядовую переменную нуклона (1.60), являются собственными функ-

циями операторов \vec{t}^2 и t_3 соответствующими собственным значениям $t = 1/2$ и $t_3 = \pm 1/2$ соответственно для протона и нейтрона, т.е.

$$|p\rangle = |1/2, +1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

Перейдем к рассмотрению системы двух нуклонов, координаты которых обозначаются (\vec{r}_i, μ_i, t_i) $i = 1, 2$ для первого и второго нуклона соответственно. Обозначим волновую функцию двух нуклонов через $\Psi(\vec{r}_1, \mu_1, t_1; \vec{r}_2, \mu_2, t_2)$. Два нуклона могут находиться в четырех зарядовых состояниях, так как прямое произведение двух изоспиновых волновых функций нуклонов дает 4-компонентную величину. Этими состояниями являются $|p_1\rangle|p_2\rangle$, $|p_1\rangle|n_2\rangle$, $|n_1\rangle|p_2\rangle$, $|n_1\rangle|n_2\rangle$. Тогда волновую функцию двух нуклонов можно представить в виде суперпозиции

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}_1, \mu_1, t_1; \vec{r}_2, \mu_2, t_2) = & |p_1\rangle|p_2\rangle \Psi_1(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + \\ & + |n_1\rangle|n_2\rangle \Psi_2(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + |p_1\rangle|n_2\rangle \Psi_3(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + \\ & + |n_1\rangle|p_2\rangle \Psi_4(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) \end{aligned} \quad (1.76)$$

Волновая функция двух нуклонов согласно принципу Паули должна быть антисимметричной относительно перестановки частиц, т.е.

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}_1, \mu_1, t_1; \vec{r}_2, \mu_2, t_2) = & -\Psi(\vec{r}_2, \mu_2, t_2; \vec{r}_1, \mu_1, t_1) = \\ = & -|p_2\rangle|p_1\rangle \Psi_1(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) - |n_2\rangle|n_1\rangle \Psi_2(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) - \\ & -|p_2\rangle|n_1\rangle \Psi_3(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) - |n_2\rangle|p_1\rangle \Psi_4(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Приравнивая это выражение для волновой функции двух нуклонов к выражению (1.76), получаем:

$$\Psi_1(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) = -\Psi_1(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) \quad (1.78a)$$

для зарядового состояния $|p_1\rangle|p_2\rangle$,

$$\Psi_2(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) = -\Psi_2(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) \quad (1.78б)$$

для зарядового состояния $|n_1\rangle|n_2\rangle$,

$$\Psi_3(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) = -\Psi_4(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) \quad (1.78в)$$

для зарядового состояния $|p_1\rangle|n_2\rangle$,

$$\Psi_4(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) = -\Psi_3(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1) \quad (1.78\text{г})$$

для зарядового состояния $|n_1\rangle|p_2\rangle$. Из соотношений (1.78а) и (1.78б) видно, что если зарядовые состояния являются состояниями двух протонов или двух нейтронов, то спиново-координатные волновые функции антисимметричны, как и должно быть для двух тождественных фермионов. Однако для состояний $|p_1\rangle|n_2\rangle$ и $|n_1\rangle|p_2\rangle$ такого утверждения сделать нельзя. Чтобы устранить это, введем волновые функции следующего вида

$$\begin{aligned} \Psi_a(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + \Psi_4(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2)), \\ \Psi_s(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_3(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) - \Psi_4(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2)), \end{aligned} \quad (1.78\text{д})$$

при этом

$$\begin{aligned} \Psi_a(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) &= -\Psi_a(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1), \\ \Psi_s(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) &= \Psi_s(\vec{r}_2, \mu_2; \vec{r}_1, \mu_1). \end{aligned} \quad (1.78\text{е})$$

Выражая Ψ_3 и Ψ_4 через Ψ_a и Ψ_s :

$$\begin{aligned} \Psi_3(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_a(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + \Psi_s(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2)), \\ \Psi_4(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_a(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) - \Psi_s(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2)) \end{aligned}$$

и подставляя их в волновую функцию двух нуклонов, получим для $\Psi(\vec{r}_1, \mu_1, t_1; \vec{r}_2, \mu_2, t_2)$ следующее выражение

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}_1, \mu_1, t_1; \vec{r}_2, \mu_2, t_2) &= \\ &|p_1\rangle|p_2\rangle\Psi_1(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + |n_1\rangle|n_2\rangle\Psi_2(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}(|p_1\rangle|n_2\rangle + |n_1\rangle|p_2\rangle)\Psi_a(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}(|p_1\rangle|n_2\rangle - |n_1\rangle|p_2\rangle)\Psi_s(\vec{r}_1, \mu_1; \vec{r}_2, \mu_2). \end{aligned} \quad (1.79)$$

В этой записи координатно-спиновые волновые функции Ψ_1, Ψ_2, Ψ_a антисимметричны и умножаются на симметричные изоспиновые волновые функции, в то время как Ψ_s – симметрична, и умножается на антисимметричную изоспиновую волновую

функцию. В случае, когда изоспиновые функции двух нуклонов описываются выражениями $|p_1\rangle|p_2\rangle$, $|n_1\rangle|n_2\rangle$, $|p_1\rangle|n_2\rangle$ и $|n_1\rangle|p_2\rangle$, зарядовые состояния двух нуклонов характеризуются собственными значениями: $t_3^{(1)} = +\frac{1}{2}$, $t_3^{(2)} = +\frac{1}{2}$; $t_3^{(1)} = -\frac{1}{2}$, $t_3^{(2)} = -\frac{1}{2}$; $t_3^{(1)} = +\frac{1}{2}$, $t_3^{(2)} = -\frac{1}{2}$; $t_3^{(1)} = -\frac{1}{2}$, $t_3^{(2)} = +\frac{1}{2}$ соответственно. В выражении (1.79) изоспиновые волновые функции характеризуются суммарным изоспином T двух нуклонов и его проекцией T_3 . При этом получили изотриплет

	Q	T_3	T
$ p_1\rangle p_2\rangle$	+2	1	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1\rangle n_2\rangle + n_1\rangle p_2\rangle)$	+1	0	1
$ n_1\rangle n_2\rangle$	0	-1	1

и изосинглет

$\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1\rangle n_2\rangle - n_1\rangle p_2\rangle)$	+1	0	0
---	----	---	---

В этом случае оператор заряда двух нуклонов Q равен

$$Q = e \sum_{i=1}^2 (1 + \tau_3^{(i)}) = e \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \tau_3^{(i)} \right), \quad (1.80)$$

где e – заряд протона. Подействовав этим оператором на состояние $|T, T_3\rangle$, получим, что заряд системы двух нуклонов

$$Q = e(1 + T_3), \quad (1.81)$$

где $T_3 = \pm 1, 0$.

Обобщая выше изложенное, можно сказать, что сложение изоспина совершенно аналогично сложению обычного спина. Следовательно, для системы из A нуклонов оператор изоспина имеет вид

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \vec{\tau}^{(i)}, \quad (1.82)$$

а его собственные значения равны $T^2 = T(T+1)$, где $0 \leq T \leq A/2$. Для каждого значения T существует $2T+1$ значений T_3 , которые являются целыми или полуцелыми числами в интервале:

$$-T \leq T_3 \leq T. \quad (1.83)$$

Поскольку собственные значения оператора проекции спина на ось 3 для нейтрона и протона равны $-1/2$ и $+1/2$, то собственные значения оператора T_3 системы из A нуклонов равны

$$T_3 = \sum_{i=1}^A t_3^{(i)} = \frac{1}{2}(Z - N), \quad (1.84)$$

где Z – число протонов, а N – число нейтронов. В соответствии с этим оператор заряда Q имеет вид:

$$Q = \frac{e}{2} \sum_{i=1}^A (1 + \tau_3^{(i)}) = e \left(\frac{A}{2} + T_3 \right), \quad (1.85)$$

а его собственные значения равны Ze , т.е. получили правильный заряд ядра.

Введем гамильтонианы H_{pp}, H_{nn}, H_a, H_s , которые описывают систему двух протонов, двух нейтронов, систему протон-нейтрон в антисимметричном состоянии и систему протон-нейтрон в симметричном состоянии соответственно. Введем также операторы проектирования, P_{pp}, P_{nn}, P_a, P_s , которые оставляют неизменным одно зарядовое состояние двух нуклонов, а остальные приравнивают к нулю. В соответствии с этим имеем

$$\begin{aligned} P_{pp} |p_1\rangle |p_2\rangle &= |p_1\rangle |p_2\rangle, \\ P_{pp} &= \frac{1}{4} (1 + \tau_3^{(1)}) (1 + \tau_3^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.86a)$$

для системы двух протонов;

$$\begin{aligned} P_{nn} |n_1\rangle |n_2\rangle &= |n_1\rangle |n_2\rangle, \\ P_{nn} &= \frac{1}{4} (1 - \tau_3^{(1)}) (1 - \tau_3^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.86b)$$

для системы двух нейтронов;

$$\begin{aligned} P_a \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1\rangle |n_2\rangle + |n_1\rangle |p_2\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1\rangle |n_2\rangle + |n_1\rangle |p_2\rangle), \\ P_a &= \frac{1}{4} (1 + \tau_1^{(1)} \tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)} \tau_2^{(2)} - \tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.86b)$$

для системы протон-нейтрон в антисимметричном состоянии;

$$P_s \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1\rangle|n_2\rangle - |n_1\rangle|p_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1\rangle|n_2\rangle - |n_1\rangle|p_2\rangle), \quad (1.86г)$$

$$P_s = \frac{1}{4} (1 - \bar{\tau}^{(1)} \bar{\tau}^{(2)})$$

для системы протон-нейтрон в симметричном состоянии.

Можно ввести также как в случае одного нуклона (1.70), правильный гамильтониан двух нуклонов:

$$H = H_{pp} P_{pp} + H_{nn} P_{nn} + H_a P_a + H_s P_s. \quad (1.87)$$

Сформулируем еще один физический принцип – зарядовую независимость ядерных сил: силы, действующие между двумя нуклонами, не зависят от T_3 , а определяются только T , т.е.

$$H_{pp} = H_{nn} = H_a. \quad (1.88)$$

Таким образом, силы между двумя протонами, двумя нейтронами и протоном и нейтроном в состоянии с $T = 1$ равны. Следовательно, гамильтониан взаимодействия двух нуклонов имеет вид:

$$H = H_a (P_{pp} + P_{nn} + P_a) + H_s P_s. \quad (1.89)$$

Поскольку

$$P_{pp} + P_{nn} + P_a = \frac{1}{4} (3 + \bar{\tau}^{(1)} \bar{\tau}^{(2)}), \quad (1.90)$$

учитывая соотношение (1.86г), окончательно получим для гамильтониана двух нуклонов выражение

$$H = \frac{1}{4} (3H_a + H_s) + \frac{1}{4} (H_a - H_s) \bar{\tau}^{(1)} \bar{\tau}^{(2)}. \quad (1.91)$$

В соответствии с этим потенциальная энергия двух нуклонов должна иметь вид

$$V(\vec{r}) = V^{(0)}(\vec{r}) + V^{(1)}(\vec{r}) \bar{\tau}^{(1)} \bar{\tau}^{(2)}, \quad (1.92)$$

где

$$V^{(k)}(\vec{r}) = V_0^{(k)}(r) + V_S^{(k)}(r) (\vec{S}_1 \vec{S}_2) + V_T^{(k)}(r) \widehat{S}_{12} + V_{LS}^{(k)}(r) (\vec{S} \vec{l}) + V_S^{\prime(k)}(r) (\vec{S}_1 \vec{S}_2) \vec{p}^2 + V_T^{\prime(k)}(r) \widehat{S}_{12}^{(p)} \quad (1.93)$$

при этом $k = 0, 1$.

Таким образом, гамильтониан взаимодействия двух нуклонов

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 + V(\vec{r}), \quad (1.94)$$

где m – масса нуклона, а $V(\vec{r})$ – потенциальная энергия, определяемая выражением (1.93), коммутирует с компонентами T_i суммарного изотопического спина двух нуклонов:

$$T_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \tau_i^{(k)} \quad (1.95)$$

и, соответственно, с \vec{T}^2 , т.е.

$$[H, T_i] = 0, \quad [H, \vec{T}^2] = 0. \quad (1.96)$$

Это означает, что гамильтониан двух нуклонов (1.94) инвариантен относительно вращений в изотопическом пространстве. Действительно, оператор вращения в изотопическом пространстве вокруг оси \vec{n} на угол θ записывается как

$$U_{\vec{n}}(\theta) = \exp(-i\vec{T}\vec{n}\theta) \quad (1.97)$$

и, соответственно,

$$[H, U_{\vec{n}}(\theta)] = 0. \quad (1.98)$$

Таким образом, зарядовая независимость ядерных сил означает инвариантность гамильтониана двух нуклонов относительно вращений в изотопическом пространстве.

Отметим, что принцип зарядовой независимости ядерных сил – приближенный принцип. Он применим лишь к сильным взаимодействиям. В случае электромагнитных и слабых взаимодействий он нарушается. Включение электромагнитных взаимодействий приводит к поправкам двух типов: учет разности масс m_p и m_n , а также в потенциальной энергии появляется кулоновское взаимодействие протонов.

Рассмотрим поправки, возникающие в кинетической энергии. С учетом разности масс протона и нейтрона оператор кинетической энергии двух нуклонов запишется как

$$T_{\text{кин}} = -\frac{\hbar^2}{4} \sum_{u=1}^2 \left[\frac{\nabla_u^2}{m_p} (1 + \tau_3^{(u)}) + \frac{\nabla_u^2}{m_n} (1 - \tau_3^{(u)}) \right]$$

или

$$T_{\text{кин}} = -\frac{\hbar^2(m_p + m_n)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 - \frac{\hbar^2(m_n - m_p)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 \tau_3^{(i)}. \quad (1.99)$$

Кулоновское взаимодействие действует между двумя протонами, следовательно, в случае взаимодействия двух нуклонов ее можно представить:

$$V_{\text{кул}}(r) = \frac{e^2}{r} P_{pp} = \frac{e^2}{4r} (1 + 2T_3 + \tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)}) \quad (1.100)$$

где P_{pp} определяется выражением (1.86а), а T_3 - оператор проекции третьей компоненты изоспина двух нуклонов (1.82).

Следовательно, с учетом поправок на электромагнитное взаимодействие, гамильтониан двух взаимодействующих нуклонов можно представить в виде

$$H = H_0 + H', \quad (1.101)$$

где

$$H_0 = -\frac{\hbar^2(m_p + m_n)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 + V(\vec{r}), \quad (1.101a)$$

$$H' = -\frac{\hbar^2(m_n - m_p)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^2 \nabla_i^2 \tau_3^{(i)} + \frac{e^2}{4r} (1 + 2T_3 + \tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)}). \quad (1.101b)$$

В выражении (1.101а) $V(\vec{r})$ ядерный потенциал взаимодействия двух нуклонов (1.92). Потенциал H_0 коммутирует с \vec{T}^2 и T_i ($i = 1, 2, 3$). Следовательно, он инвариантен относительно вращений в изотопическом пространстве. В гамильтониане H' имеется выделенное направление T_3 , и поэтому он не коммутирует с T_1 и T_2 :

$$[H', T_i] \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Однако он коммутирует с T_3

$$[H', T_3] = 0.$$

Значит, T_3 коммутирует с H . Коммутацию T_3 с H легко понять. Действительно, оператор T_3 связан с оператором заряда Q (1.58), поэтому сохранение заряда эквивалентно коммутации T_3 и H .

Таким образом, включение электромагнитного взаимодействия приводит к появлению члена H' , который не коммутирует \vec{T}^2 и, следовательно, \vec{T}^2 не является точным квантовым числом для системы двух нуклонов. Однако следует отметить, что, во-первых, если $e^2 \rightarrow 0$ и $m_n - m_p \rightarrow 0$, то \vec{T}^2 становится точным квантовым

числом; во-вторых, нарушение \bar{T}^2 связано с H' , который содержит два члена. Однако эти два члена входят в H' с разными знаками и, следовательно, в результате эффект компенсируется. Для оценки эффекта нарушения изотопического спина кулоновским взаимодействием сравним кулоновскую энергию с потенциалом Юкавы (В.7), т.е.

$$\left| \frac{(e^2/r)}{(g^2 e^{-\mu r}/r)} \right| = \frac{e^2}{g^2 e} \sim \frac{1}{137}.$$

Поэтому эффекты кулоновского взаимодействия могут проявиться в тяжелых ядрах, в то время как в нуклон-нуклонных взаимодействиях они малы.

В заключение этого параграфа построим гамильтониан A взаимодействующих нуклонов. В соответствии сказанному выше, оператор кинетической энергии A нуклонов можно записать как

$$\begin{aligned} T_{\text{кин}} &= -\frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^A \left[\frac{\nabla_i^2}{m_p} (1 + \tau_3^{(i)}) + \frac{\nabla_i^2}{m_n} (1 - \tau_3^{(i)}) \right] = \\ &= -\frac{\hbar^2(m_p + m_n)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 - \frac{\hbar^2(m_n - m_p)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 \tau_3^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Потенциальная энергия состоит из двух членов. Ядерной потенциальной энергии

$$V(\vec{r}) = \sum_{i < j=1}^A V_{ij}(\vec{r}), \quad (1.103)$$

где $V_{ij}(\vec{r})$ – потенциальная энергия взаимодействия двух нуклонов (1.92), и кулоновской энергии взаимодействия протонов:

$$V_{\text{эост}}(r) = \sum_{i < j=1}^A \frac{e^2}{4r_{ij}} (1 + \tau_3^{(i)})(1 + \tau_3^{(j)}). \quad (1.104)$$

Тогда гамильтониан A взаимодействующих нуклонов запишется в виде

$$H = H_0 + H', \quad (1.105)$$

где

$$H_0 = -\frac{\hbar^2(m_p + m_n)}{4m_p m_n} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + V(\vec{r}). \quad (1.105a)$$

Член H_0 гамильтониана (1.105) инвариантен относительно вращения в изотопическом пространстве и, следовательно, коммутирует с T_i ($i = 1, 2, 3$) и \vec{T}^2 . В то же время в H' , который имеет вид

$$H' = -\frac{\hbar^2(m_n - m_p)}{4m_p m_n} \sum_{i < j=1}^A \nabla_i^2 \tau_3^{(i)} + \sum_{i < j=1}^A \frac{e^2}{4r_{ij}} (1 + \tau_3^{(i)})(1 + \tau_3^{(j)}), \quad (1.1056)$$

имеется выделенное направление (ось 3). Следовательно, присутствие слагаемого H' в гамильтониане H приводит к неинвариантности гамильтониана относительно вращений в изотопическом пространстве. При этом H и T_3 коммутируют.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Вычислить радиус сил, зависящих от скорости.
2. Пусть гамильтониан взаимодействия частицы со спином $1/2$ с частицей со спином нуль инвариантен относительно обращения времени, но не инвариантен относительно инверсии пространства. Написать потенциальную энергию взаимодействия таких частиц.
3. Перечислить интегралы движения системы частиц, рассмотренных в вопросе 2.
4. Пусть гамильтониан взаимодействия двух тождественных частиц со спинами $1/2$ инвариантен относительно обращения времени, но не инвариантен относительно инверсии пространства. Написать потенциальную энергию их взаимодействия.
5. Перечислить интегралы движения системы частиц, рассмотренных в вопросе 4.

Глава 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ НУКЛОНОВ

2.1. Классификация состояний системы двух нуклонов

В предыдущей главе было показано, что система двух нуклонов обладает следующими интегралами движения: J – момент количества движения (спин системы), J_3 – его проекция на ось 3, S –

суммарный спиновой момент, π – четность системы, T – изотопический спин системы, T_3 – его проекция. При этом суммарный спиновой момент системы $S = 1, 0$, и спиновая волновая функция системы симметрична ($S = 1$), или антисимметрична ($S = 0$). В соответствии с этим при данном моменте количества движения J (спине системы двух нуклонов) и данном суммарном спиновом моменте системы двух нуклонов S угловой момент l лежит в пределах

$$|J - S| \leq l \leq J + S. \quad (2.1)$$

Аналогично, полный изотопический спин двух нуклонов T равен либо нулю, либо единице. В случае $T = 1$ изоспиновая волновая функция симметрична, а при $T = 0$ – антисимметрична.

Полная волновая функция системы двух нуклонов является прямым произведением координатной, спиновой и изоспиновой волновых функций:

$$\Psi(1,2) = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \chi_S(1,2) \otimes \chi_T(1,2). \quad (2.2)$$

С другой стороны, полная волновая функция двух нуклонов, как любая волновая функция двух тождественных фермионов, должна быть антисимметричной. Следовательно, если координатная волновая функция $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ симметрична, тогда если спиновая волновая функция симметрична ($S = 1$), то изоспиновая – антисимметрична ($T = 0$), и наоборот. В случае, если координатная волновая функция антисимметрична, то она должна умножаться либо на симметричные спиновые и изоспиновые волновые функции ($S = 1, T = 1$), либо на антисимметричные спиновые и изоспиновые волновые функции ($S = 0, T = 0$). Поскольку симметрия координатной волновой функции определяется относительным орбитальным моментом и равна $(-1)^l$ и поскольку допустимые значения l определяются соотношением (2.1), возможны следующие состояния двух нуклонов, которые приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Классификация состояний двух нуклонов для $J = 0, 1, 2$

J	T=0		T=1	
	S = 0	S = 1	S = 0	S = 1
0	-	-	1S_0	3P_0

1	1P_1	${}^3S_1 + {}^3D_1$	-	3P_1
2	-	3D_2	1D_2	${}^3P_2 + {}^3F_2$

2.2 Дейтрон как чистое S-состояние

Как уже упоминалось, система из нейтрона и протона может находиться в связанном состоянии. Связанное состояние нейтрона и протона называется дейтроном, который является простейшим атомным ядром.

Важнейшей характеристикой дейтрона является его энергия связи, которая определяется как разность масс, образующих его частиц и дейтрона:

$$\varepsilon = m_p + m_n - m_d = 2,226 \pm 0,003 \text{ МэВ} \quad (2.3)$$

Другой важнейшей характеристикой дейтрона является его спин и четность. Спин дейтрона равен единице, а четность положительна, т.е. основное состояние дейтрона есть состояние 1^+ .

Дейтрон обладает магнитным и электрическим квадрупольным моментом. Его магнитный момент, измеренный в ядерных магнетонах,

$$\mu_d = 0,8574.$$

Эта величина близка к сумме магнитных моментов протона и нейтрона, которые в ядерных магнетонах равны

$$\mu_p = 2,79270 \quad \mu_n = -1,91316.$$

Электрический квадрупольный момент дейтрона

$$Q = 2,82 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$$

Эта величина мала по сравнению с поперечным размером системы. Действительно, если считать, что размер системы определяется радиусом ядерных сил, т.е. $r_0 = \lambda_\pi = \frac{\hbar}{\mu_\pi c}$, то поперечные раз-

меры дейтрона имеют порядок $Q_0 \approx \pi r_0^2 \approx \pi \lambda_\pi^2 \approx 6,3 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$. Следовательно, $Q / Q_0 \approx 5 \cdot 10^{-2}$.

Рассмотрение этих экспериментальных фактов приводит к следующим выводам. Во-первых, поскольку не существует связанных состояний двух нейтронов (бинейтрон) и двух протонов (бипрото-

на), то изотопический спин дейтрона равен нулю ($T = 0$) и, следовательно, его изотопическая волновая функция антисимметрична:

$$\chi_{T=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1\rangle|n_2\rangle - |n_1\rangle|p_2\rangle). \quad (2.4)$$

В соответствии с этим спиново-координатная волновая функция дейтрона должна быть симметричной.

Во-вторых, малость электрического квадрупольного момента дейтрона и приближенная аддитивность магнитных моментов протона и нейтрона в дейтроне означают, что основное состояние дейтрона сферически симметрично. Согласно квантовой механике, это возможно в том случае, если взаимодействие центрально. Поэтому в первом приближении будем считать, что ядерное взаимодействие между протоном и нейтроном в дейтроне центральное.

В предыдущей главе был получен потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия (1.92), который записывался в виде:

$$V(\vec{r}) = V^{(0)}(\vec{r}) + V^{(1)}(\vec{r})(\vec{\tau}^{(1)}\vec{\tau}^{(2)}), \quad (2.5)$$

где $V^{(k)}(\vec{r})$ ($k=0,1$) определяется выражением (1.93). В дальнейшем, как упоминалось на с. 26, спин-спиновые и тензорные силы, зависящие от скорости, рассматриваться не будут. Следовательно, каждый из потенциалов $V^{(0)}(\vec{r})$ и $V^{(1)}(\vec{r})$ содержит два центральных потенциала: потенциал $V_0(r)$ и спин-спиновый потенциал $V_S(r)$, а также тензорный потенциал $V_T(r)$ и спин-орбитальный потенциал $V_{LS}(r)$. В соответствии с этим потенциал взаимодействия двух нуклонов при данном изотопическом спине T примет вид

$$V^{(T)}(\vec{r}) = (V_0^{(0)}(r) + \gamma V_0^{(1)}(r)) + (V_S^{(0)}(r) + \gamma V_S^{(1)}(r))(\vec{S}_1\vec{S}_2) + (V_T^{(0)}(r) + \gamma V_T^{(1)}(r))\hat{S}_{12} + (V_{LS}^{(0)}(r) + \gamma V_{LS}^{(1)}(r))(\vec{L}\vec{S}). \quad (2.6)$$

где γ определяется значением T и принимает значение либо -3 , либо $+1$ в зависимости от того находится система двух нуклонов в изотриплетном или в изосинглетном состоянии, поскольку

$$\vec{\tau}^{(1)}\vec{\tau}^{(2)} = 2T(T+1) - 3 = \begin{cases} -3 & \text{при } T=0 \\ +1 & \text{при } T=1 \end{cases}$$

Таким образом, центральный потенциал, который описывает систему нейтрон-протон в изосинглетном состоянии, имеет вид

$$V^{(T=0)}(r) = V_0^{(T=0)}(r) + V_S^{(T=0)}(r)(\vec{S}_1\vec{S}_2), \quad (2.7)$$

где $V_0^{(T=0)}(r)$ и $V_S^{(T=0)}(r)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} V_0^{(T=0)} &= V_0^{(0)}(r) - 3V_0^{(1)}(r), \\ V_S^{(T=0)} &= V_S^{(0)}(r) - 3V_S^{(1)}(r). \end{aligned} \quad (2.7a)$$

Из табл. 2.1 следует, что при изотопическом спине системы равно нулю S -состояние может присутствовать, если система нейтрон-протон находятся в триплетном спиновом состоянии ($S = 1$). При этом орбитальный момент относительного движения равен либо нулю, либо двум ($L = 0, 2$), а спин и четность равны 1^+ , так как четность такой системы есть $(-1)^l$. Следовательно, центральный потенциал, описывающий взаимодействие нейтрона и протона в основном состоянии дейтрона, имеет вид

$$V^{(T=0, S=1)}(r) = V_0^{(T=0)}(r) + \frac{1}{4}V_S^{(T=0)}(r) \equiv U(r) \quad (2.8)$$

где $V_0^{(T=0)}(r)$ и $V_S^{(T=0)}(r)$ определяются соотношением (2.7a). При получении потенциала $U(r)$ использовалось соотношение (1.39).

Следовательно, для описания свойств дейтрона необходимо использовать решение уравнения Шредингера:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(r) - E \right) \Psi_d(\vec{r}) = 0. \quad (2.9)$$

Учитывая, что для описания дейтрона оставлена только S -волна, будем искать его волновую функцию в виде

$$\Psi_d(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{00}(\vec{n}) = \frac{u(r)}{r\sqrt{4\pi}}. \quad (2.10)$$

Тогда для радиальной волновой функции основного состояния $u(r)$ получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2}(U(r) + \varepsilon)u(r) = 0. \quad (2.11)$$

В выражение (2.11) подставлена приведенная масса двух нуклонов $\mu = (1/2)m$ (где m - масса нуклона), а также энергия основного состояния дейтрона $E_0 = -\varepsilon$. При этом радиальная волновая функция $u(r)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$u(0) = u(\infty) = 0. \quad (2.12)$$

Ядерное взаимодействие двух нуклонов характеризуется радиусом r_0 , т.е. при $r > r_0$, $U(r) = 0$. Следовательно, в этой области уравнение (2.11) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \alpha_T^2 u = 0, \quad (2.13)$$

где

$$\alpha_T^2 \equiv \frac{m\varepsilon}{\hbar^2}. \quad (2.13a)$$

Тогда при $r > r_0$ решение уравнения (2.13) с учетом граничных условий (2.12) имеет вид:

$$u(r) = Ce^{-\alpha_T r} \quad (r > r_0). \quad (2.14)$$

Волновая функция и ее производная должны быть непрерывными. Значит, решение уравнения (2.13), описывающее волновую функцию во внешней области ($r > r_0$), должно быть сшито с решением уравнения (2.11) во внутренней области ($r \leq r_0$). Это означает равенство логарифмических производных при $r = r_0$. Логарифмическая производная во внешней области равна:

$$\left. \frac{u'_{\text{внеш}}}{u_{\text{внеш}}} \right|_{r=r_0} = -\alpha_T \quad (2.15)$$

Следовательно, из-за непрерывности логарифмической производной для волновой функции во внутренней области имеем:

$$\left. \frac{u'_{\text{внут}}}{u_{\text{внут}}} \right|_{r=r_0} = -\alpha_T \quad (2.15a)$$

Однако логарифмическая производная волновой функции во внутренней области при $r = r_0$ определяется потенциальной энергией $U(r)$ и, таким образом, является основным параметром, характеризующим систему нейтрон-протон (Г. Бете, Р. Пайерлс 1937 г.).

Волновая функция основного состояния дейтрона вне области действия ядерных сил убывает по экспоненциальному закону. Следовательно, величину $1/\alpha_T$ можно рассматривать как параметр, характеризующий пространственные размеры дейтрона, т.е. радиус дейтрона равен $R_d = 1/\alpha_T$. Сравним эту величину с радиусом действия ядерных сил r_0 :

$$\frac{R_d}{r_0} = \frac{1}{\alpha_T \tilde{\lambda}_\pi} = \frac{\mu_\pi}{m} \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon}} \approx 3. \quad (2.16)$$

В этой оценке учтено, что $r_0 \approx \tilde{\lambda}_\pi = \hbar / \mu_\pi c$ (где μ_π – масса пиона). Видно, что радиус дейтрона R_d заметно превосходит r_0 радиус действия ядерных сил. Таким образом, можно сказать, что дейтрон слабо связанная система, в которой нейтрон и протон значительную часть времени проводит вне области действия ядерных сил.

Поскольку радиальная зависимость волновой функции дейтрона вне области действия ядерных сил ($r > r_0$) полностью определяется заданием энергии связи ε или параметром α_T , то, учитывая слабо связанность дейтрона, возникает возможность построить приближенную волновую функцию основного состояния дейтрона в приближении нулевого радиуса действия сил. Эта волновая функция совершенно не зависит от вида ядерного потенциала и имеет вид

$$\Psi_d = \sqrt{\frac{\alpha_T}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha_T r}}{r} \quad (r_0 \rightarrow 0). \quad (2.17)$$

Нормировочная константа этой волновой функции выбирается из условия

$$\int |\Psi_d|^2 d^3r = 1. \quad (2.17a)$$

Пусть ядерный потенциал $U(r)$ имеет форму прямоугольной ямы радиуса r_0 и глубиной U_0 , т.е.

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & \text{при } r \leq r_0, \\ 0, & \text{при } r > r_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

тогда во внутренней области радиальное уравнение Шредингера запишется как

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} (U_0 - \varepsilon) u = 0, \quad (2.19)$$

а его решение имеет вид

$$u(r) = C \sin k_0 r, \quad (2.20)$$

где

$$k_0 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(U_0 - \varepsilon)}. \quad (2.20a)$$

Соответственно, логарифмическая производная волновой функции дейтрона во внутренней области равна

$$\left. \frac{u'_{\text{внут}}}{u_{\text{внут}}} \right|_{r=r_0} = k_0 \text{ctg}(k_0 r_0), \quad (2.21)$$

и, приравнявая ее к логарифмической производной во внешней области, получим

$$k_0 \text{ctg}(k_0 r_0) = -\alpha_T = -\frac{1}{R_d}, \quad (2.22)$$

тогда

$$k_0 r_0 \text{ctg}(k_0 r_0) = -\frac{r_0}{R_d} \ll 1 \quad (2.23)$$

При написании последнего неравенства в выражении (2.23) учтено соотношение (2.16). Тогда немедленно имеем

$$k_0 r_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя в это соотношение выражение k_0 (2.20a) и пренебрегая ε по сравнению с U_0 , получим

$$U_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4mr_0^2}. \quad (2.24)$$

Таким образом, получили связь между глубиной и шириной ямы. Если принять, что ширина ямы $r_0 \approx \tilde{\lambda}_\pi = \hbar / \mu_\pi c \approx 1.4 \cdot 10^{-13}$ см, то $U_0 \approx 50$ МэВ. Следовательно, глубина ямы U_0 много больше энергии связи дейтрона ε , и поэтому сделанное выше предположение о пренебрежении ε по сравнению с U_0 законно.

Этот результат можно получить более наглядно. Поскольку в основном состоянии функция $u(r)$ не имеет нулей (за исключением $u(0) = 0$), то в области $0 < r \leq r_0$ может укладываться не более половины длины волны. С другой стороны, для возможности сшивки решения внутри ямы с экспоненциально затухающим решением (2.14) вне ямы необходимо, чтобы в области $0 < r \leq r_0$ укладывалось не менее четверти длины волны. Следовательно, для r_0 имеем неравенства:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{k_0} \right) \leq r_0 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{k_0} \right).$$

Тогда, пренебрегая в определении k_0 (2.20а) энергией связи дейтрона по сравнению с глубиной ямы, имеем

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{4m} \leq U_0 r_0^2 \leq \frac{\pi^2 \hbar^2}{m} \quad (2.25)$$

Эта оценка совпадает с ранее приведенной оценкой.

В заключение покажем, что у дейтрона нет возбужденных состояний. Действительно, рассмотрим случай, когда возбужденное состояние имеет орбитальный момент, равный нулю, т.е. $l = 0$. В этом случае радиальная волновая функция должна иметь нуль в области $0 < r \leq r_0$. Это означает, что в этой области должно укладываться более трех четвертей длины волны, т.е.

$$\frac{3}{4} \lambda = \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{k} \right) \leq r_0.$$

Тогда, пренебрегая энергией связи в возбужденном состоянии по сравнению с U_0 , имеем следующее соотношение

$$U_0 r_0^2 \geq \frac{9\pi^2 \hbar^2}{4m}. \quad (2.26)$$

Это соотношение противоречит соотношению (2.25), что означает, что такого возбужденного состояния не существует.

Рассмотрим случай возбужденного состояния с орбитальным моментом, не равным нулю ($l \neq 0$). В этом случае появляется дополнительная энергия, равная $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr^2}$. Оценить эту энергию

можно, заменив в ней r на радиус дейтрона, т.е. на $\frac{1}{\alpha_T^2}$. Тогда

получим для энергии возбуждения величину

$$E' = \frac{\hbar^2 l(l+1) \alpha_T^2}{m} = l(l+1) \epsilon. \quad (2.27)$$

В последнем равенстве цепочки (2.27) использовано соотношение (2.13а). Таким образом, уже при $l = 1$, $E' = 2\epsilon$. Это означает, что возбужденный уровень E' в непрерывном спектре.

Следует отметить, что сделанный вывод об отсутствии возбужденных состояний у дейтрона основан на предположении о цен-

тральном характере ядерных сил. Однако, как показано в первой главе, ядерные силы не являются центральными, ибо они содержат тензорный потенциал.

2.3. Рассеяние нейтрона на протоне. Синглетное состояние дейтрона

Изучение рассеяния нейтрона на протоне является другим важным источником получения сведений о взаимодействии нейтрона и протона. Будем рассматривать рассеяние нейтронов на протонах, когда длина волны нейтрона в системе покоя центра инерции значительно больше радиуса действия ядерных сил, т.е. $\lambda_n \gg r_0$. Поскольку волновой вектор нейтрона в системе координат, где покоится центр инерции сталкивающихся частиц, равен

$$k = \frac{\sqrt{mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{mE_{\text{Л}}}}{\sqrt{2}\hbar}, \quad (2.28)$$

где E – энергия относительного движения нейтрона и протона в Ц-системе, а $E_{\text{Л}}$ – энергия нейтрона в Л-системе, где до столкновения протон покоился, Следовательно,

$$\lambda_n = \frac{\hbar}{\sqrt{mE}} > \frac{\hbar}{\mu_{\pi}c} = \lambda_{\pi} = r_0. \quad (2.29)$$

Поэтому, учитывая, что $r_0 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ см, получим для энергии E следующее неравенство:

$$E < \frac{\mu_{\pi}^2 c^2}{m} = 20 \text{ МэВ} \quad (2.30)$$

В дальнейшем будем предполагать, что нейтроны в Л-системе имеют энергию меньше 10 МэВ ($E_{\text{Л}} < 10 \text{ МэВ}$).

Покажем, что для таких нейтронов имеет место S -рассеяние, т.е. в разложении амплитуды рассеяния по парциальным волнам

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta) \quad (2.31)$$

все члены, кроме первого с $l = 0$, равны нулю. Напомним, что в выражении (2.31) $f_l(k)$ – парциальная амплитуда, $P_l(z)$ – полиномы Лежандра ($z = \cos \theta$), а θ – угол рассеяния:

$$\cos \theta = \frac{\vec{k}\vec{r}}{kr}. \quad (2.31a)$$

С этой целью оценим параметр соударения b . В классической механике b равен:

$$b = \frac{L}{mv_\infty},$$

где L – относительный момент количества движения сталкивающихся частиц, а v_∞ – их относительная скорость на бесконечном расстоянии между ними. Учитывая, что в квазиклассическом приближении $L = \hbar l$, то можно написать, что $b = l\tilde{\lambda}$ (где $\tilde{\lambda} = \hbar/mv_\infty$ – длина волны). Ясно, что взаимодействие между частицами может произойти, если параметр соударения не превышает радиуса действия ядерных сил, т.е. $b < r_0 = \tilde{\lambda}_\pi$, тогда

$$l < \frac{\tilde{\lambda}_\pi}{\tilde{\lambda}} = \frac{r_0}{\tilde{\lambda}} < 1. \quad (2.32)$$

Учитывая соотношение (2.29), из соотношения (2.32) следует, что $l = 0$ и имеет место S -рассеяние.

Следовательно, возникает задача о рассеянии нейтрона на протоне с орбитальным моментом $l = 0$. Будем исходить из уравнения Шредингера (2.9) с потенциалом, определенным соотношением (2.8):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m} + U(r)\right)u(r) = Eu(r), \quad (2.33)$$

где энергия сталкивающихся частиц положительна и равна

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{m}.$$

Волновая функция $\Psi(\vec{r})$ на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) удовлетворяет граничному условию

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{f(k, \theta)}{r} e^{ikr}. \quad (2.34)$$

Амплитуда рассеяния $f(k, \theta)$, определяющаяся выражением (2.31), связана с сечением рассеяния соотношением

$$d\sigma = |f(k, \theta)|^2 d\theta = |f_0(k)|^2 d\theta. \quad (2.35)$$

В последнем равенстве соотношений (2.35) учтено, что рассматривается S -рассеяние. Следовательно, необходимо найти $f_0(k)$.

Для нахождения $f_0(k)$ разложим $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ по полиномам Лежандра:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \psi_l(r) P_l(z),$$

где $\psi_l(r)$ – волновая функция с относительным орбитальным моментом l . Подставляя это разложение и разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам (2.31) в соотношение (2.34), а также учитывая разложение плоской волны по сферическим волнам

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

(где $j_l(kr)$ – сферическая функция Бесселя), получим граничное условие для волновой функции с относительным орбитальным моментом l , которое запишется в виде

$$\psi_l(r) = i^l j_l(kr) + \frac{f_l(k)}{r} e^{ikr}. \quad (2.36)$$

Поскольку в случае рассеяния нейтронов с энергией $E_{\text{д}} < 10$ МэВ возможно только S -рассеяние, то рассмотрим $\psi_0(r)$. Так как $j_0(kr)$ определяется соотношением

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr},$$

то учетом, что $u(r) = r\psi_0(r)$, получим для радиальной волновой функции S -волны следующее граничное условие

$$u(r) = r\psi_0(r) = \frac{\sin kr}{k} + f_0(k) e^{ikr}. \quad (2.37)$$

Логарифмическая производная радиальной волновой функции в точке $r = r_0$ ($r_0 \rightarrow 0$), т.е. в приближении нулевого радиуса действия сил, имеет вид

$$\left. \frac{u'}{u} \right|_{r=r_0} \Big|_{r_0 \rightarrow 0} = \frac{\cos kr_0 + ikf_0(k) e^{ikr}}{\frac{\sin kr_0}{k} + f_0(k) e^{ikr}} \Big|_{r_0 \rightarrow 0} = \frac{1 + ikf_0(k)}{f_0(k)} = F_T(k). \quad (2.38)$$

Логарифмическая производная $F_T(k)$ является функцией k . Однако, поскольку энергия налетающих нейтронов мала по сравнению с глубиной потенциальной ямы, т.е. $E \ll |U(r)|$, то в уравнении Шредингера (2.33) можно пренебречь энергией и рассматривать уравнение с нулевой энергией:

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + U(r)u(r) = 0. \quad (2.39)$$

В этом случае $F_T(k)$ становится некоторой константой $F_T(0)$. С другой стороны, уравнение (2.39) совпадает с уравнением, описывающим связанное состояние нейтрона и протона, если в нем пренебречь энергией связи ε по сравнению с потенциалом. В случае связанного состояния, как было показано в предыдущем параграфе, логарифмическая производная является константой, которая определяется энергией связи дейтрона ε и равна $-\alpha_T$. В связи с этим положим:

$$F_T(0) = -\alpha_T \quad (2.40)$$

Тогда нулевая парциальная амплитуда запишется:

$$f_0^{(T)} = \frac{i}{k - i\alpha_T}. \quad (2.41)$$

Отметим, что полученная амплитуда рассеяния имеет полюс в комплексной плоскости k . Этот полюс лежит на мнимой оси в верхней полуплоскости k (рис. 2.1). Это есть следствие общего утверждения. Далее будет показано, что парциальная амплитуда рассеяния должна иметь полюса, которые определяются связанными состояниями в данном потенциале, и они должны лежать в верхней полуплоскости k на мнимой оси. Индекс « T » у амплитуды рассеяния означает, что она определяется потенциалом $U(r)$. Именно, этот потенциал определяет энергию связи и, соответственно, логарифмическую производную $-\alpha_T$, характеризующую ней-

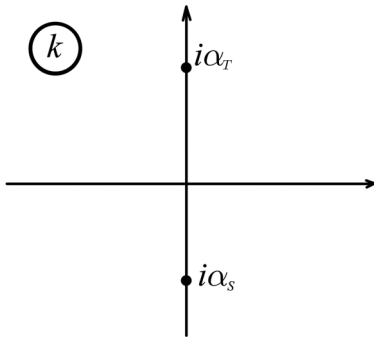


Рис. 2.1

ми состояниями в данном потенциале, и они должны лежать в верхней полуплоскости k на мнимой оси. Индекс « T » у амплитуды рассеяния означает, что она определяется потенциалом $U(r)$. Именно, этот потенциал определяет энергию связи и, соответственно, логарифмическую производную $-\alpha_T$, характеризующую ней-

трон и протон в связанном состоянии (дейтроне).

Используя соотношение (2.35), получим дифференциальное сечение рассеяния нейтронов на протонах в триплетном состоянии ($S = 1$) и с изоспином равным нулю ($T = 0$):

$$d\sigma_T = \frac{1}{k^2 + \alpha_T^2} d\sigma = \frac{\hbar^2}{m} \frac{d\sigma}{E + \varepsilon}, \quad (2.42)$$

где ε – энергия связи дейтрона. Тогда полное сечение рассеяния в данном состоянии равно

$$\sigma_T = \frac{4\pi\hbar^2}{m(E + \varepsilon)}. \quad (2.42a)$$

Соответственно, при нулевой энергии налетающего нейтрона имеем

$$\frac{\sigma_T}{4\pi} = \frac{\hbar^2}{m\varepsilon} = \frac{1}{\alpha_T^2} = R_d^2 = 20 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 = 0,2 \text{ барн}. \quad (2.43)$$

Эксперимент же дает для сечения рассеяния неполяризованных нейтронов на неполяризованных протонах при нулевой энергии следующее значение:

$$\sigma_{\text{эк}} = (20,44 \pm 0,02) \text{ барн} \quad (2.44)$$

или

$$\frac{\sigma_T}{4\pi} = 1,63 \text{ барн}. \quad (2.44a)$$

Чем вызвано такое расхождение? В основном состоянии дейтрона система нейтрон-протон, как уже упоминалось, находится в состоянии с $T = 0$ и $S = 1$. Однако при $E > 0$ и $l = 0$ система нейтрон-протон может находиться также и в состоянии с $T = 1$ и $S = 0$ (см. табл. 2 1). Поэтому рассеяние нейтрона происходит как в триплетном ($S = 1$), так и в синглетном ($S = 0$) состояниях. Следовательно, сечение, измеряемое на эксперименте, является усредненным по спиновым состояниям сечением рассеяния, и оно определяется соотношением

$$\sigma = \frac{1}{4}\sigma_S + \frac{3}{4}\sigma_T, \quad (2.45)$$

где σ_S – сечение рассеяния в синглетном состоянии. При получении соотношения (2.45) предполагается, что падающий нейтрон-

ный пучок и протонная мишень неполяризованны, поэтому все спиновые состояния равновероятны.

Следовательно, необходимо рассмотреть рассеяние нейтрона на протоне, когда потенциал взаимодействия двух нуклонов имеет вид (2.6):

$$V^{(T=1, S=0)}(r) = V_0^{(T=1)}(r) - \frac{3}{4}V_S^{(T=1)}(r) \equiv U'(r), \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned} V_0^{(T=1)}(r) &= V_0^{(0)}(r) + V_0^{(1)}(r), \\ V_S^{(T=1)}(r) &= V_S^{(0)}(r) + V_S^{(1)}(r). \end{aligned} \quad (2.46a)$$

В соответствии с этим необходимо найти решение уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2 u}{dr^2} + U'(r)u(r) = Eu(r) \quad (2.47)$$

с граничным условием (2.34) на волновую функцию при $r \rightarrow \infty$. Аналогично рассмотрению уравнения (2.33), можно получить граничное условие на радиальную волновую функцию, описывающую движение с орбитальным моментом $l = 0$:

$$u(r) = \frac{\sin kr}{k} + f_0^{(S)} e^{ikr}, \quad (2.48)$$

где $f_0^{(S)}$ – синглетная парциальная амплитуда рассеяния с $l = 0$ нейтрона на протоне в потенциале $U'(r)$, т.е. в состоянии с $T = 1$ и $S = 0$. Следует отметить, что связанных состояний с такими квантовыми числами нет, следовательно, имеет место неравенство

$$|U'(r)| < |U(r)|. \quad (2.49)$$

Логарифмическая производная радиальной волновой функции в приближении нулевого радиуса действия сил в таком состоянии равна

$$\left. \frac{u'(r)}{u(r)} \right|_{r \rightarrow r_0(r_0=0)} = \frac{1 + ikf_0^{(S)}}{f_0^{(S)}} = F_S(k). \quad (2.50)$$

Так же как и в случае триплетного состояния, пользуясь малостью энергии E по сравнению с потенциальной энергией $U'(r)$, можно перейти от уравнения (2.47) к рассмотрению уравнения Шредингера с нулевой энергией:

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2 u}{dr^2} + U'(r)u(r) = 0. \quad (2.51)$$

Значит, логарифмическая производная $F_S(k)$ заменится на некоторую константу:

$$F_S(0) = -\alpha_S. \quad (2.52)$$

Однако, учитывая неравенство (2.49), при переходе от потенциала $U(r)$ к потенциалу $U'(r)$ эта константа может изменить знак. Поэтому в отличие от рассеяния в триплетном состоянии, когда в системе нейтрон-протон имеется связанное состояние и $F(0) = -\alpha_T$ отрицательна, константа $F_S(0)$ может оказаться положительной, т.е. величина α_S отрицательна.

Из соотношения (2.50) следует, что амплитуда рассеяния в синглетном состоянии имеет вид

$$f_0^{(S)} = \frac{i}{k - i\alpha_S}. \quad (2.53)$$

В этом случае полюс амплитуды $f_0^{(S)}$ может лежать на мнимой оси в нижней полуплоскости комплексной плоскости k (рис. 2.1). Знак α_S экспериментально определяется из рассеяния нейтрона на молекулярном водороде, и он отрицателен. Такие состояния называются виртуальными состояниями или вигнеровскими резонансами. В следующем параграфе будет показано, как из рассеяния нейтрона на молекулярном водороде можно определить знак α_S .

Используя соотношение (2.53), можно написать сечение рассеяния нейтрона на протоне в синглетном состоянии:

$$d\sigma_S = \frac{1}{k^2 + \alpha_S^2} = \frac{\hbar^2}{m} \frac{d\sigma}{E + \varepsilon'}. \quad (2.54)$$

Здесь по аналогии с рассеянием в триплетном состоянии, введена некоторая энергия ε' , которая связана с α_S соотношением

$$\alpha_S^2 = \frac{m\varepsilon'}{\hbar^2}. \quad (2.55)$$

Эта величина называется виртуальным или вигнеровским уровнем. Говорят, что дейтрон имеет синглетное состояние. Определим величину этого уровня. Сечение рассеяния нейтрона на протоне в синглетном состоянии при нулевой энергии запишется:

$$\sigma_S(E=0) = \frac{4\pi}{\alpha_S^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{m\varepsilon'}. \quad (2.56)$$

Используя соотношения (2.43), (2.45) и (2.56) получим значение энергии ε' . Она оказывается равной 72кэВ. Следовательно, у дейтрона имеется синглетное состояние с энергией ε' , лежащее в непрерывном спектре.

Введем понятие длины рассеяния. По определению длина рассеяния a равна амплитуде рассеяния при нулевой энергии взятой с обратным знаком:

$$a = \lim_{k \rightarrow 0} (-f(k)) = \lim_{k \rightarrow 0} (-f_0(k)), \quad (2.57)$$

В последнем равенстве данной цепочки равенств учтено, что при малых энергиях имеет место S -рассеяние.

Следуя этому определению в случае нуклон-нуклонного рассеяния можно ввести синглетную (a_S) и триплетную (a_T) длины рассеяния. Используя определение длины рассеяния и соотношение (2.41), получим для триплетной длины рассеяния значение:

$$a_T = \frac{1}{\alpha_T} = R_d = 4,4 \cdot 10^{-13} \text{ м} \quad (2.58)$$

В то время как эксперимент дает для триплетной длины рассеяния значение

$$(a_T)_{\text{экс}} = (5,42 \pm 0,01) \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (2.58a)$$

Знак триплетной длины рассеяния положительный.

Совершенно аналогично получаем для синглетной длины рассеяния:

$$a_S = 24 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (2.59)$$

В то же время эксперимент дает для синглетной длины рассеяния значение

$$(a_S)_{\text{экс}} = -(23,71 \pm 0,01) \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (2.59a)$$

Подчеркнем, что из рассеяния нейтрона на протоне нельзя определить знак синглетной длины рассеяния.

Покажем, что если длина рассеяния положительна, то в таком потенциале возможно связанное состояние, если же длина рассеяния отрицательна, то связанного состояния в потенциале нет. Действительно, рассмотрим радиальное уравнение Шредингера при

нулевой энергии вне области действия потенциала, т.е. когда $r > r_0$, где r_0 – радиус потенциальной ямы. Оно имеет вид

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} = 0. \quad (2.60)$$

Решением этого уравнения является прямая линия

$$u(r) = \alpha r + \beta = C(r - a). \quad (2.61)$$

В выражении (2.61) константа a является длиной рассеяния. Действительно, запишем логарифмическую производную волновой функции (2.61) при нулевом радиусе действия сил ($r = r_0$ ($r_0 \rightarrow 0$)):

$$\left. \frac{u'(r)}{u(r)} \right|_{r=r_0 (r_0 \rightarrow 0)} = -\frac{1}{a}. \quad (2.61a)$$

Сравнивая это выражение с соотношениями (2.59), (2.50) и (2.58), (2.38) видим, что a – длина рассеяния.

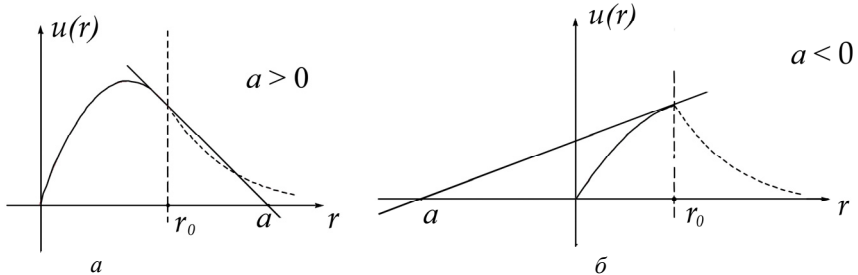


Рис. 2.2

Решение (2.61) в плоскости (u, r) является прямой линией, которая пересекает ось r в точке a . Эта линия, которая является волновой функцией вне области действия сил, должна сшиваться с волновой функцией во внутренней области (функция и ее производная непрерывны). Поэтому эта прямая должна быть касательной к волновой функции во внутренней области при $r < r_0$ в точке $r = r_0$. На рис. 2.2 показана зависимость радиальной волновой функции $u(r)$ при нулевой энергии в случае положительной (a) и отрицательной (\bar{a}) длины рассеяния (где r_0 – радиус потенциала). Из рис. 2.2, a видно, что в этом случае волновую функцию во внутренней области, т.е. функцию и ее производную, можно непрерыв-

но шить с экспоненциально затухающим решением во внешней области, соответствующим связанному состоянию (пунктирная кривая на рисунке). При этом следует отметить, что поведение волновой функции основного состояния в области $r < r_0$ почти не зависит от энергии, поэтому оно такое же, как в случае, если энергия связи невелика. Следовательно, в случае положительной длины рассеяния связанное состояние возможно. В случае отрицательной длины рассеяния (рис. 2.2,б) волновая функция во внутренней области ($r < r_0$) не может быть шита непрерывно в точек $r = r_0$ с экспоненциально затухающим решением, поэтому связанное состояние в этом случае невозможно.

Длина рассеяния выражается через фазу δ_0 . При $l = 0$ радиальное волновое уравнение вне области действия потенциала имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0, \quad (2.62)$$

где

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Общее решение этого уравнения при положительной энергии записывается как

$$u(r) = C \sin(kr + \delta_0). \quad (2.63)$$

Значит, логарифмическая производная волновой функции (2.63) в точке $r = r_0$ в приближении нулевого радиуса действия сил имеет вид

$$\left. \frac{u'(r)}{u(r)} \right|_{r=r_0 (r_0 \rightarrow 0)} = k \operatorname{ctg} \delta_0. \quad (2.64)$$

Сравнивая это выражение с соотношением (2.61а), имеем

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} \delta_0}{k} \right). \quad (2.65)$$

Легко показать, что в правой части соотношения (2.65) стоит нулевая парциальная амплитуда. Как хорошо известно из квантовой механики, парциальная амплитуда связана с фазой δ_0 соотношением

$$f_0 = \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2ik},$$

откуда следует соотношение

$$f_0 = \frac{1}{k(\operatorname{ctg}\delta_0 - i)}. \quad (2.66)$$

Поэтому имеет место

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg}\delta_0}{k} \right) = -a. \quad (2.67)$$

Из рассмотрения рассеяния нейтронов с энергией $E_n < 10 \text{ МэВ}$ на протонах следует, что в потенциале нуклон-нуклонного взаимодействия играют существенную роль центральные спин-спиновые силы. Эта зависимость от спин-спиновых сил приводит к различным потенциалам для синглетного и триплетного состояний. Кроме того, определена величина синглетной длины рассеяния. Однако ее знак определить из экспериментов по рассеянию нейтронов на протонах нельзя. Было показано, что в случае отрицательной длины рассеяния невозможно связанное состояние в потенциале. В следующем параграфе покажем, как из экспериментов по рассеянию нейтронов на молекулярном водороде можно определить знак синглетной длины рассеяния. Она отрицательна. Синглетное состояние дейтрона – виртуальный уровень.

2.4. Рассеяние нейтрона на орто- и параводороде

Для определения знака синглетной длины рассеяния рассмотрим рассеяние нейтрона на молекуле водорода. В природе существуют две модификации водорода: параводород и ортоводород. В параводороде спины протонов антипараллельны, и суммарный спин двух протонов равен нулю ($I = 0$). В то время как в ортоводороде спины протонов параллельны и, соответственно, суммарный спин двух протонов равен единице ($I = 1$). Изучение рассеяния нейтронов на пара- и ортоводороде позволяет определить знак синглетной длины рассеяния.

Однако, прежде чем рассматривать рассеяние нейтронов на молекуле водорода обобщим некоторые формулы теории рассеяния на случай столкновения двух частиц со спинами. Пусть налетаю-

чая частица имеет спин j_1 , а мишень – j_2 . Тогда волновая функция всей системы является прямым произведением волновых функций налетающей частицы и мишени:

$$\begin{aligned}\Psi &= \psi(\vec{R}_0) \otimes \psi(\vec{r}) \otimes \chi_{j_1\mu_1} \otimes \chi_{j_2\mu_2} = \\ &= |\vec{p}_0\rangle \otimes |\vec{p}\rangle \otimes |j_1\mu_1\rangle \otimes |j_2\mu_2\rangle,\end{aligned}\quad (2.68)$$

где \vec{R}_0 – радиус центра масс, \vec{r} – относительный радиус, j_i, μ_i ($i = 1, 2$) – спины и их проекции на ось 3 падающей частицы и мишени соответственно, а \vec{p}_0 и \vec{p} – импульсы центра масс и относительного движения. Волновая функция (2.68) – столбец размерностью $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Следует напомнить, что имеется два ортонормированных базиса, по которым можно разложить любое спиновое состояние сталкивающихся частиц. Эти базисы можно характеризовать двумя квантовыми числами либо μ_1, μ_2 (где μ_1, μ_2 – проекции спинов частиц на ось 3), либо j, μ (где j изменяется от $|j_1 - j_2|$ до $j_1 + j_2$, а μ от $-j$ до j). Эти два базиса связаны соотношением

$$|j\mu\rangle = \sum_{\mu_1\mu_2} C_{j_1\mu_1 j_2\mu_2}^{j\mu} |\mu_1\mu_2\rangle.$$

Отметим, что любое спиновое состояние двух сталкивающихся частиц $|\chi\rangle$ можно характеризовать коэффициентами разложения либо $c_{\mu_1\mu_2}$, либо $c_{j\mu}$ по этим базисным состояниям:

$$|\chi\rangle = \sum_{\mu_1\mu_2} c_{\mu_1\mu_2} |\mu_1\mu_2\rangle = \sum_{j\mu} c_{j\mu} |j\mu\rangle. \quad (2.69)$$

Так же как и в случае бесспиновых частиц, граничное условие на волновую функцию в случае частиц со спином должно иметь вид

$$\Psi = \zeta e^{i\vec{k}\vec{r}} + \zeta'(\theta, \varphi) \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r}, \quad (2.70)$$

где ζ и $\zeta'(\theta, \varphi)$ – спиновые функции, описывающие спиновые состояния частиц до и после рассеяния. Если разложить эти спиновые волновые функции по какому-либо полному ортонормированному базису, граничное условие на волновую функцию запишется как

$$\Psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_g \end{pmatrix} e^{ik\vec{r}} + \begin{pmatrix} c'_1(\theta, \varphi) \\ \vdots \\ c'_g(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.70a)$$

где $g = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$, а $c_\rho = \chi_\rho^+ \zeta$ и $c'_\rho(\theta, \varphi) = \chi_\rho^+ \zeta'(\theta, \varphi)$ – коэффициенты разложения функций ζ и $\zeta'(\theta, \varphi)$ по полному ортонормированному базису χ_ρ . Пусть начальное спиновое состояние нормировано на единицу, т.е.

$$\sum_{\rho=1}^g |c_\rho|^2 = 1. \quad (2.71)$$

Тогда конечное состояние нормировано так, что величина

$$\frac{|c'_\rho(\theta, \varphi)|^2}{r^2}$$

является плотностью рассеянных частиц в спиновом состоянии ρ . Следовательно, коэффициенты $c'_\rho(\theta, \varphi)$ связаны с дифференциальным сечением рассеяния соотношением

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \sum_{\rho=1}^g |c'_\rho|^2 d\Omega. \quad (2.72)$$

Рассмотрим частный случай. Пусть начальное состояние является одним из базисных состояний χ_i , а конечное состояние $\zeta'(\theta, \varphi)$ разложим в сумму по базисным состояниям

$$\zeta'(\theta, \varphi) = \sum_{f=1}^g F_{if}(\theta, \varphi) \chi_f, \quad (2.73)$$

где индекс i в коэффициенте разложения $F_{if}(\theta, \varphi)$ конечного спинового состояния по базовым состояниям указывает, что начальное состояние является базисным. В этом случае граничное условие (2.70) на волновую функцию примет вид

$$\Psi = \chi_i e^{ik\vec{r}} + \sum_{f=1}^g F_{if}(\theta, \varphi) \chi_f \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.70б)$$

Коэффициенты $F_{if}(\theta, \varphi)$ разложения конечного спинового состояния по базису представляют собой элементы матрицы рассеяния $F(\theta, \varphi)$, зависящей от направления рассеяния. Очевидно, что

дифференциальное сечение рассеяния из состояния i в состояние f равно:

$$d\sigma_{if}(\theta, \varphi) = |F_{if}(\theta, \varphi)|^2. \quad (2.74)$$

Тогда сечение рассеяния в случае неполяризованных частиц получается в результате усреднения по начальным и суммирования по конечным спиновым состояниям:

$$\begin{aligned} d\sigma(\theta, \varphi) &= \frac{1}{g} \sum_{i,f=1}^g d\sigma_{if}(\theta, \varphi) = \frac{1}{g} \sum_{i,f=1}^g |F_{if}(\theta, \varphi)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{g} \sum_{i,f=1}^g F_{if}^*(\theta, \varphi) F_{if}(\theta, \varphi) d\omega = \frac{1}{g} \sum_{i,f=1}^g F_{fi}^+(\theta, \varphi) F_{if}(\theta, \varphi) d\omega = (2.75) \\ &= \frac{1}{g} \sum_{f=1}^g (F^+(\theta, \varphi) F(\theta, \varphi))_{ff} d\omega = \frac{1}{g} Sp(F^+(\theta, \varphi) F(\theta, \varphi)) d\omega, \end{aligned}$$

где g определяется соотношением (2.70а). Последние равенства в цепочке соотношений (2.75) используют то обстоятельство, что суммирование проводится по полному ортонормированному базису. При этом таким базисом может служить любой из указанных выше базисов. Окончательно для сечения рассеяния неполяризованных частиц получим выражение

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 = \frac{1}{(2j_1+1)(1j_2+1)} Sp(F^+(\theta, \varphi) F(\theta, \varphi)). \quad (2.76)$$

В выражении (2.76) индекс 0 в левой стороне равенства указывает на то, что это – сечение неполяризованных частиц.

Перейдем к рассмотрению рассеяния нейтрона на молекуле водорода. Будем рассматривать нейтроны с такой энергией, чтобы длина волны его была больше расстояния между протонами в молекуле водорода, т.е. $\lambda_n > d$ ($d = 0,75 \cdot 10^{-8}$ см). В этом случае рассеяние нейтрона происходит когерентно, и имеют место интерференционные явления, которые позволяют определить знак a_s (или α_s). Из соотношения $\lambda_n > d$ немедленно следует, что энергия нейтрона определяется условием

$$E_n < \left(\frac{\lambda_p}{d}\right)^2 mc^2 \approx 0.01 \text{ эВ} \quad (2.77)$$

где λ_p – комптоновская длина волны протона. Нейтроны с энергией $0,5 \div 5 \cdot 10^{-3}$ эВ называются тепловыми.

При таких энергиях нейтрон не может возбудить ротационные уровни молекулы водорода, т.е. в этих условиях происходит лишь упругое рассеяние. Это упругое рассеяние нейтрона на пара- и ортоводороде различно, так как взаимодействие нейтрона и протона зависит от взаимной ориентации их спинов.

Следует подчеркнуть, что вращательное квантовое число основного состояния параводорода равно нулю ($I = 0$), в то время как для ортоводорода равно единице ($I = 1$). В соответствии с этим, несмотря на то, что переход параводорода в ортоводород невозможен, обратный процесс, т.е. переход ортоводорода в параводород, возможен, когда нейтрон получает энергию в результате такого перехода. Таким неупругим процессом будем пренебрегать.

Запишем амплитуду рассеяния нейтрона на протоне в произвольном спиновом состоянии. С этой целью введем операторы проектирования P_T и P_S , которые выделяют триплетное и синглетное спиновое состояние соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} P_T \chi_T &= \chi_T, & P_T \chi_S &= 0, \\ P_S \chi_T &= 0, & P_S \chi_S &= \chi_S, \end{aligned} \quad (2.78)$$

где χ_T и χ_S – триплетная (симметричная) и синглетная (антисимметричная) спиновые волновые функции соответственно. Операторы проектирования записываются как

$$P_T = \frac{3 + \bar{\sigma}_p \bar{\sigma}_n}{4}, \quad P_S = \frac{1 - \bar{\sigma}_p \bar{\sigma}_n}{4}, \quad (2.79)$$

где σ_n и σ_p – матрицы Паули, описывающие операторы спина нейтрона и протона соответственно.

Тогда амплитуду рассеяния нейтрона на протоне в произвольном спиновом состоянии можно представить в виде

$$\begin{aligned} F &= P_T f_0^{(T)} + P_S f_0^{(S)} = \frac{1}{4}(3f_0^{(T)} + f_0^{(S)}) + \frac{1}{4}(f_0^{(T)} - f_0^{(S)})\bar{\sigma}_p \bar{\sigma}_n = \\ &= a + b(\bar{\sigma}_p \bar{\sigma}_n), \end{aligned} \quad (2.79)$$

где введены обозначения:

$$a \equiv \frac{1}{4}(3f_0^{(T)} + f_0^{(S)}), \quad b \equiv \frac{1}{4}(f_0^{(T)} - f_0^{(S)}), \quad (2.79a)$$

а $f_0^{(S)}$ и $f_0^{(T)}$ – амплитуды рассеяния нейтрона на протоне в синглетном (2.53) и триплетном (2.41) состоянии соответственно.

Используя амплитуду (2.79), амплитуду рассеяния нейтрона на молекуле водорода можно представить в виде суммы амплитуд рассеяния нейтрона на каждом из протонов, входящих в молекулу водорода:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = a + b(\vec{\sigma}_{p_1} \vec{\sigma}_n) + a + b(\vec{\sigma}_{p_2} \vec{\sigma}_n) = \\ &= 2a + b(\vec{\sigma}_n(\vec{\sigma}_{p_1} + \vec{\sigma}_{p_2})), \end{aligned} \quad (2.80)$$

где $\vec{\sigma}_{p_1}$ и $\vec{\sigma}_{p_2}$ – спиновые операторы первого и второго протона молекулы водорода. Введем в это соотношение оператор спина молекулы водорода \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{p_1} + \vec{\sigma}_{p_2}). \quad (2.81)$$

Тогда амплитуду рассеяния нейтрона на молекуле водорода можно представить в виде

$$F = 2a + 2b(\vec{\sigma}_n \vec{S}). \quad (2.82)$$

Подставляя данную амплитуду в выражение (2.76), запишем сечение рассеяния неполяризованного нейтрона на молекуле водорода:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{1}{2(2I_{H_2} + 1)} Sp(F^+ F), \quad (2.83)$$

где I_{H_2} – спин молекулы водорода (для параводорода $I_{H_2} = 0$, для ортоводорода $I_{H_2} = 1$). Проведя вычисление шпура, получим выражение сечения рассеяния нейтрона на молекуле водорода окончательно в виде

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = 4|a|^2 + 4I_{H_2}(I_{H_2} + 1)|b|^2. \quad (2.84)$$

Следовательно, для параводорода имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0, \text{пара}} = 4|a|^2 \quad (2.85)$$

и, соответственно,

$$\sigma_{\text{пара}} = 16\pi|a|^2. \quad (2.85a)$$

В случае же ортоводорода имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{0,\text{орто}} = 4|a|^2 + 8|b|^2 \quad (2.86)$$

и, соответственно,

$$\sigma_{\text{орто}} = 16\pi|a|^2 + 32\pi|b|^2 \quad (2.86a)$$

Из соотношений (2.85a) и (2.86a) имеем

$$\sigma_{\text{орто}} - \sigma_{\text{пара}} = 32\pi|b|^2 = 2\pi|f_0^{(T)} - f_0^{(S)}|^2 \quad (2.87)$$

Используя определение длины рассеяния (2.57) и введя синглетную (2.59) и триплетную (2.58) длину рассеяния, получим из соотношения (2.87) следующее равенство:

$$\sigma_{\text{орто}} - \sigma_{\text{пара}} = 2\pi|a_T - a_S|^2 \quad (2.88)$$

Из выражения (2.88) видно, что, измеряя на эксперименте сечение рассеяния нейтрона на пара- и ортоводороде, можно определить величину $a_T - a_S$ и, соответственно, их относительные знаки. Оказывается, что у a_T и a_S разные знаки, т.е. состояние 1S_0 является виртуальным уровнем или резонансом Вигнера.

2.5. Дейтрон как смесь *S*- и *D*-состояний. Структура волновой функции дейтрона

Рассматривая выше дейтрон, мы предполагали, что силы, действующие между нейтроном и протоном, являются центральными, зависящими от спина. В этом случае орбитальный момент относительного движения является хорошим квантовым числом и равен нулю ($l = 0$). Следовательно, дейтрон – сферически симметричная система. Однако, как известно из теории поля, у сферически симметричной системы квадрупольный момент равен нулю, т.е. $Q \equiv 0$. Эксперимент же дает маленькую, но отличную от нуля величину. Кроме того, в случае сферически симметричного состояния для магнитного момента дейтрона имеется соотношение $\mu_d = \mu_p + \mu_n$. Оно также не согласуется с экспериментом. Наличие у дейтрона квадрупольного момента и разница между магнитным моментом дейтрона и суммой магнитных моментов нейтрона и протона указывают на нецентральный характер ядерных сил. В первой главе

было показано, что силы между нейтроном и протоном содержат тензорные силы, которые не являются центральными, а значит, орбитальный момент относительного движения не является квантовым числом такой системы. Поэтому для описания квадрупольного и магнитного моментов дейтрона необходимо учитывать тензорные силы. Поскольку изотопический спин дейтрона равен нулю, и он находится в триплетном спиновом состоянии, то потенциал, описывающий взаимодействие нейтрона и протона в дейтроне, запишем как

$$V^{(T=0, S=1)} = U(r) + U_T(r) \hat{S}_{12}, \quad (2.89)$$

где $U(r)$ определяется соотношением (2.8), а $U_T(r)$ – тензорный потенциал. Учитывая, что дейтрон находится в состоянии с изоспином, равным нулю, согласно (2.6) тензорный потенциал запишется:

$$U_T(r) = V_T^{(0)}(r) - 3V_T^{(1)}(r),$$

где $V_T^{(0)}(r)$ и $V_T^{(1)}(r)$ – тензорные потенциалы, входящие в потенциалы $V^{(0)}(r)$ и $V^{(1)}(r)$ соответственно (1.93).

Следовательно, для описания свойств дейтрона необходимо получить решение уравнения Шредингера, описывающее дейтрон:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + U(r) + U_T(r) \hat{S}_{12} - E \right] \Psi_d(\vec{r}) = 0. \quad (2.90)$$

В случае нецентрального взаимодействия, как указывалось выше (см. п. 1.2), гамильтониан не коммутирует с оператором \vec{l}^2 , поскольку $[\vec{l}^2, \hat{S}_{12}] \neq 0$. Следовательно, орбитальный момент не является квантовым числом такой системы и в соответствии с этим (п. 2.1) дейтрон должен быть смесью S - и D -состояний, т.е. его волновая функция записывается как

$$\Psi_d(\vec{r}) = \Psi_S(\vec{r}) + \Psi_D(\vec{r}). \quad (2.91)$$

Учитывая, что нейтрон и протон в дейтроне находятся в триплетном спиновом состоянии, S - и D -волновые части волновой функции дейтрона запишем в виде:

$$(\Psi_S(\vec{r}))^{1M} = \frac{u(r)}{r} \sum_{\mu=-1}^{+1} C_{1\mu, 00}^{1M} \chi_{1\mu} Y_{00}(\vec{n}) \quad (2.91a)$$

и

$$(\Psi_D(\vec{r}))^{1M} = \frac{w(r)}{r} \sum_{m,\mu} C_{1\mu,2m}^{1M} \chi_{1\mu} Y_{2m}(\vec{n}). \quad (2.916)$$

В выражениях (2.91a) и (2.91б) $\chi_{1\mu}$ – триплетная спиновая функция нейтрона и протона, $Y_{lm}(\vec{n})$ – шаровые функции, описывающие их орбитальный момент, $C_{S\mu,lm}^{JM}$ – коэффициенты Клебша–Гордона (JM – спин дейтрона и его проекция, $S\mu$ – суммарный спиновый момент и его проекция, lm – орбитальный момент и его проекция), а $u(r)$ и $w(r)$ – радиальные функции S - и D -состояний.

Введем спин-угловые функции S - и D - состояний:

$$\Psi_{S=1,l}^{1M}(\vec{n}) = \sum_{m,\mu} C_{1\mu,lm}^{1M} \chi_{1\mu} Y_{lm}(\vec{n}), \quad (2.92)$$

где $l=0$ для S - и $l=2$ для D -состояний. Тогда волновая функция дейтрона запишется как

$$\Psi_d^{1M}(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} \Psi_{S=1,l=0}^{1M}(\vec{n}) + \frac{w(r)}{r} \Psi_{S=1,l=2}^{1M}(\vec{n}). \quad (2.93)$$

Покажем, что спин-угловая часть D -состояния дейтрона связана со спин-угловой частью S -состояния соотношением:

$$\Psi_{S=1,l=2}^{1M}(\vec{n}) = C \hat{S}_{12} \chi_{1M} Y_{00}(\vec{n}) \quad (2.94)$$

где C – некоторая константа. Действительно, спиновая функция нейтрон-протонной системы в триплетном состоянии χ_{1M} при вращениях преобразуется по представлению группы вращений $D^{(1)}(g)$, в то время как оператор \hat{S}_{12} – скаляр относительно вращений. Значит, величина $\hat{S}_{12} \chi_{1M}$ при вращениях преобразуется по представлению $D^{(1)}(g)$ группы вращений. С другой стороны, по такому же представлению группы вращений преобразуется и функция $\Psi_{S=1,l=2}^{1M}(\vec{n})$. Покажем теперь, что функция $C \hat{S}_{12} \chi_{1M} Y_{00}(\vec{n})$ описывает D -волну. С этой целью воспользуемся тем, что если некоторая функция углов $F(\theta, \varphi)$, умноженная на r^l (где l – целое число), удовлетворяет уравнению Лапласа, то она описывает волну с орбитальным моментом l , т.е. покажем, что

$$\Delta(r^2 \hat{S}_{12} \chi_{1M}) = 0. \quad (2.95)$$

Действительно, учитывая определение \hat{S}_{12} (1.41), можно написать:

$$\begin{aligned}\Delta(r^2 \hat{S}_{12} \chi_{1M}) &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} (3(\vec{\sigma}_1 \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \vec{r}) - \vec{r}^2 (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)) \chi_{1M} = \\ &= (\delta_{ij} 3\sigma_{1k} \sigma_{2l} \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} (r_k r_l) - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \Delta(\vec{r}^2)) \chi_{1M} = 0,\end{aligned}$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} (r_k r_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}$$

и

$$\Delta(r^2) = 6.$$

Таким образом, соотношение (2.95), а соответственно, и соотношение (2.94) доказаны.

Величины $\psi_{S=1, l=2}^{1M}(\vec{n})$ ортонормированны. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}&\int \psi_{S=1, l=2}^{1M}(\vec{n}) \psi_{S=1, l=2}^{1M_1}(\vec{n}) d\Omega = \\ &= \sum_{m\mu, m_1\mu_1} C_{1\mu, 2m}^{1M} C_{1\mu_1, 2m_1}^{1M_1} \chi_{1\mu}^+ \chi_{1\mu_1} \int Y_{2m}^*(\vec{n}) Y_{2m_1}(\vec{n}) d\Omega = \\ &= \sum_{m\mu} C_{1\mu, 2m}^{1M} C_{1\mu, 2m}^{1M_1} = \delta_{MM_1}.\end{aligned}$$

Это условие ортонормированности $\psi_{S=1, l=2}^{1M}(\vec{n})$ легко позволяет определять нормировочную константу C в соотношении (2.94):

$$|C|^2 \int \chi_{1M}^+ \hat{S}_{12}^+ \hat{S}_{12} \chi_{1M_1} Y_{00}^2(\vec{n}) d\Omega = \delta_{MM_1}. \quad (2.96)$$

Учитывая эрмитовость оператора \hat{S}_{12} , имеем

$$\begin{aligned}\hat{S}_{12}^+ \hat{S}_{12} &= \hat{S}_{12}^2 = 9(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)^2 - \\ &- 3(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - 3(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) = \\ &= 6 - 2\hat{S}_{12} + 2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) = 8 - 2\hat{S}_{12}\end{aligned} \quad (2.96a)$$

В предпоследнем равенстве данной цепочки равенств учтены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) &= 1, \\
(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n})(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) &= (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}) = \\
&= 1 - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + (\vec{\sigma}_1 \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \vec{n}), \\
(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)^2 &= 3 - 2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2).
\end{aligned}$$

При получении последнего равенства цепочки равенств (2.96а) учтено, что нейтрон и протон в дейтроне находятся в триплетном спиновом состоянии, поэтому $(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) = 1$.

Следовательно, соотношение (2.96) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
|C|^2 \frac{1}{4\pi} \left\{ 8\chi_{1M}^+ \chi_{1M_1} \int d\mathbf{o} - 2 \int \chi_{1M}^+ \hat{S}_{12} \chi_{1M_1} d\mathbf{o} \right\} &= \\
= |C|^2 \left\{ 8\delta_{M_1 M} - \frac{1}{2\pi} \int \chi_{1M}^+ \hat{S}_{12} \chi_{1M_1} d\mathbf{o} \right\} &= 8|C|^2 \delta_{M_1 M} = \delta_{M_1 M},
\end{aligned} \tag{2.97}$$

так как имеет место соотношение:

$$\int \chi_{1M}^+ \hat{S}_{12} \chi_{1M_1} d\mathbf{o} = 0. \tag{2.97a}$$

Равенство (2.97а) следует из соотношения (1.45):

$$\begin{aligned}
\int \chi_{1M}^+ \hat{S}_{12} \chi_{1M_1} d\mathbf{o} &= \int \chi_{1M}^+ (6(\vec{S}\vec{n})^2 - 2\vec{S}^2) \chi_{1M_1} d\mathbf{o} = \\
&= 6\chi_{1M}^+ S_i S_j \chi_{1M_1} \int n_i n_j d\mathbf{o} - 4\chi_{1M}^+ \chi_{1M_1} \int d\mathbf{o} = \\
&= 8\pi\chi_{1M}^+ \vec{S}^2 \chi_{1M_1} - 16\pi\chi_{1M}^+ \chi_{1M_1} = 0
\end{aligned}$$

При написании данной цепочки равенств, использовались соотношения:

$$\int n_i n_j d\mathbf{o} = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}, \quad \chi_{1M}^+ \vec{S}^2 \chi_{1M_1} = 2\chi_{1M}^+ \chi_{1M_1}.$$

Окончательно, из соотношения (2.97) следует, что нормировочная константа C равна

$$C = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Тогда волновую функцию дейтрона с учетом S - и D -состояний можно записать в виде:

$$\Psi_d(\vec{r}) = \left[\frac{u(r)}{r} + \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{w(r)}{r} \hat{S}_{12} \right] \chi_{1M} Y_{00}(\vec{n}). \tag{2.98}$$

Эта волновая функция называется функцией Рарита и Швингера.

Волновая функция дейтрона нормирована условием

$$\int |\Psi_d|^2 d^3r = 1.$$

Подставляя в это соотношение функцию Рарита и Швингера (2.98) и учитывая ортонормируемость спин-угловых функций S - и D -состояний, которая следует из равенства (2.97а), получим, что радиальные волновые функции $u(r)$ и $w(r)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty (|u(r)|^2 + |w(r)|^2) dr = 1. \quad (2.99)$$

Величины $p_S = \int_0^\infty |u(r)|^2 dr$ и $p_D = \int_0^\infty |w(r)|^2 dr$ можно трактовать как вероятность находиться дейтрону в S - и D -состояниях соответственно. При этом соотношение (2.99) означает

$$p_S + p_D = 1. \quad (2.99a)$$

Подставляя функцию Рарита и Швингера (2.98) в уравнение Шредингера (2.90), получим систему связанных дифференциальных уравнений для радиальных функций $u(r)$ и $w(r)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2}(U(r) - E)u = \sqrt{8} \frac{m}{\hbar^2} U_T(r)w, \\ \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{6}{r^2}w - \frac{m}{\hbar^2}(U(r) - 2U_T(r) - E)w = \sqrt{8} \frac{m}{\hbar^2} U(r)u. \end{cases} \quad (2.100)$$

При получении данной системы уравнений необходимо учитывать соотношение (2.96а) для \hat{S}_{12}^2 , а так же ортонормируемость спин-угловых функций S - и D -состояний.

В систему уравнений (2.100) входят два потенциала: центральный потенциал, зависящий от спинов $U(r)$ (нейтрон и протон находятся в триплетном спиновом состоянии), и тензорный потенциал $U_T(r)$. Даже в простейшем случае, когда потенциалы заданы в виде прямоугольных ям, решение системы (2.100) зависит от четырех параметров: глубины центрального потенциала U_0 , глубины тензорного потенциала $U_0^{(T)}$ и радиусов действия центрального и тензорного потенциалов r_0 и r_T соответственно. Найти аналитическое решение даже в этом простом случае не удается.

Из соотношений (2.100) видно, что вне области действия сил, т.е. при $r \gg r_0$ и r_T , эта система уравнений для радиальных волновых функций распадается на два независимых уравнения:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{mE}{\hbar^2} u = 0 \quad (2.100a)$$

для функции $u(r)$ и

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{6}{r^2} w - \frac{mE}{\hbar^2} w = 0 \quad (2.100б)$$

для функции w . Учитывая, что $E = -\varepsilon$ (где ε – энергия связи дейтрона), и введя параметр α_T (2.13а), уравнения (2.100а) и (2.100б) примут вид:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \alpha_T^2 u = 0 \quad (2.101)$$

и

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{6}{r^2} w + \alpha_T^2 w = 0. \quad (2.102)$$

Уравнение (2.101) рассматривалось выше в п. 2.2 и его решение имеет вид

$$u(r) = C e^{-\alpha_T r}. \quad (2.103)$$

Получим решение уравнения (2.102). При $r \rightarrow \infty$ это уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \alpha_T^2 w = 0.$$

Поскольку в пределе больших r оно должно быть затухающим, так как рассматривается связанное состояние дейтрона, то необходимо взять решение:

$$w \sim e^{-\alpha_T r},$$

т.е. решение уравнения (2.101) следует искать в виде

$$w(r) = f(r) e^{-\alpha_T r}.$$

При этом функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - 2\alpha_T \frac{df}{dr} - \frac{6}{r^2} f = 0.$$

Обезразмерим переменную r , введя новую переменную x :

$$x = \alpha_T r,$$

тогда функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 2 \frac{df}{dx} - \frac{6}{x^2} f = 0. \quad (2.104)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k. \quad (2.105)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (2.104), получим соотношение

$$\sum_{k=n}^{\infty} \{a_k k(k-1)x^{k-2} - 2a_k kx^{k-1} - 6a_k x^{k-2}\} = 0.$$

Из этого выражения следует рекуррентное соотношение между a_k и a_{k-1} при $k \neq n$:

$$a_k k(k-1) - 2a_{k-1}(k-1) - 6a_k = 0$$

или

$$a_{k+1} = \frac{2k}{(k+1)k-6} a_k. \quad (2.106)$$

В случае, если $k = n$, получим соотношение, определяющее первый член ряда. Оно имеет вид:

$$a_n(n(n-1) - 6) = 0.$$

Откуда следует, что n может принимать два значения: либо $n = -2$, либо $n = 3$. Из этих двух значений n допустимо лишь первое, т.е. $n = -2$. Действительно, решение $w(r)$, описывающее связанное состояние нейтрона и протона, т.е. дейтрон, вне области действия ядерных сил, должно быть экспоненциально затухающим. Следовательно, ряд (2.105) должен обрываться. Из соотношения (2.106) следует, что обрыв ряда происходит лишь при $n = -2$, поскольку все коэффициенты $a_k \equiv 0$ с $k \geq 1$. Из всего сказанного следует:

$$f(x) = a_{-2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Тогда радиальная волновая функция D -состояния дейтрона имеет вид

$$w(r) = \tilde{C} \left(1 + \frac{3}{\alpha_r r} + \frac{3}{(\alpha_r r)^2} \right) e^{-\alpha_r r}. \quad (2.107)$$

Таким образом, асимптотические выражения для радиальных волновых функций, описывающих дейтрон в S - и D -состояниях, описываются выражениями (2.103) и (2.107) соответственно. В

этих выражениях α_T определяется соотношением (2.13а), C и \tilde{C} – нормировочные коэффициенты.

Отметим, что выражение для радиальной волновой функции S -состояния (2.103) справедливо на расстояниях r , превосходящих как r_0 , так и r_T , в то время как асимптотическое выражение для $w(r)$ (2.107) справедливо при $r > r_T$. Действительно, при получении уравнения (2.102) необходимо пренебречь членами, содержащими потенциал $U_T(r)$, поскольку членом $U(r)w(r)$ можно пренебречь уже при $r > r_T$, так как он мал по сравнению с центробежной энергией. В то время как при получении уравнения (2.101) необходимо отбросить члены, содержащие как потенциал $U(r)$, так и потенциал $U_T(r)$.

Отметим, что при малых r ($r \rightarrow 0$) радиальные волновые функции $u(r)$ и $w(r)$ ведут себя по-разному:

$$u(r) \sim r, \quad w(r) \sim r^3 \quad (r \rightarrow 0).$$

Поэтому функция $w(r)$ имеет резкий максимум при $r \approx r_T$. Действительно, из выражения (2.107) для $w(r)$ видно, что в области $r_T < r < 1/\alpha_T$ она ведет себя как $1/(\alpha_T r)^2$ (где $\alpha_T r < 1$). Следовательно, интеграл, определяющий вес D -состояния дейтрона p_D , сидит на расстояниях $r \sim r_T$.

2.6. Магнитный момент дейтрона

Как упоминалось выше, дейтрон обладает магнитным моментом. Вычислим его. Магнитный момент, создаваемый нуклонами в ядре, складывается из собственного магнитного момента нуклона и его орбитального момента, обусловленного движением заряженной частицы, когда нуклон является протоном. Таким образом, магнитный момент дейтрона $\vec{\mu}_d$ можно представить как

$$\vec{\mu}_d = \vec{\mu}_n + \vec{\mu}_p + \vec{\mu}_l, \quad (2.108)$$

где $\vec{\mu}_p$ – вектор собственного магнитного момента протона, $\vec{\mu}_l$ – вектор его орбитального магнитного момента, а $\vec{\mu}_n$ – вектор собственного магнитного момента нейтрона.

Согласно классической электродинамике магнитный момент, возникающий из-за движения заряженной частицы (протона), определяется выражением

$$\vec{\mu}_l = \frac{e}{2c} [\vec{r}_p \vec{v}_p] = \frac{e}{2m_p c} [\vec{r}_p \vec{p}_p], \quad (2.109)$$

где r_p – радиус-вектор протона, \vec{v}_p – его скорость, $\vec{p}_p = m_p \vec{v}_p$ – импульс протона, а e – его заряд. Введем момент количества движения протона, измеренный в единицах \hbar :

$$[\vec{r}_p \vec{p}_p] = \hbar \vec{l}_p, \quad (2.110)$$

тогда вектор орбитального магнитного момента протона запишется в виде

$$\mu_l = \frac{e\hbar}{2m_p c} \vec{l}_p = \mu_y \vec{l}_p. \quad (2.111)$$

Величина $\mu_y = \frac{e\hbar}{2m_p c} = \frac{|e|\hbar}{2m_p c} = 5.051 \cdot 10^{-24}$ эрг · Гс⁻¹ называется

ядерным магнетонам. Он меньше магнетона Бора ($\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c}$) в

$\frac{m_e}{m_p}$ раз (где m_e – масса электрона). Обычно магнитные моменты

ядерных частиц измеряются в ядерных магнетонах.

Таким образом, в ядерных магнетонах вектор орбитального магнитного момента заряженной частицы (протона) пропорционален его орбитальному моменту (2.111). Для обобщения данной формулы на квантовую механику введем оператор вектора орбитального магнитного момента протона $\hat{\mu}_l$ и оператор вектора орбитального момента количества движения \hat{l}_p . Эти два оператора связаны соотношением

$$\hat{\mu}_l = \mu_y \hat{l}_p. \quad (2.112)$$

Обобщая это соотношение, запишем связь между оператором спина нуклона и оператором его собственного магнитного момента в виде

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_p &= g_p \mu_\pi \hat{S}_p, \\ \hat{\mu}_n &= g_n \mu_\pi \hat{S}_n,\end{aligned}\tag{2.113}$$

где g_p и g_n – гиромагнитное отношение для протона и нейтрона соответственно. Вообще, гиромагнитные отношения g_p и g_n не равны единице, так в случае электрона, $g_e = 2$. Как следует из соотношения (2.111), гиромагнитное отношение для оператора орбитального магнитного момента $\hat{\mu}_l$ равно единице. В соответствии с выше сказанным оператор магнитного момента дейтрона можно записать в виде

$$\hat{\mu}_d = g_p \mu_\pi \hat{S}_p + g_n \mu_\pi \hat{S}_n + \mu_\pi \hat{l}_p.\tag{2.114}$$

С другой стороны, оператор магнитного момента дейтрона можно выразить через его спин \hat{J}_d :

$$\hat{\mu}_d = g_d \mu_\pi \hat{J}_d.\tag{2.114a}$$

Обычно приводящийся в таблицах магнитный момент частицы определяется как среднее значение оператора $\hat{\mu}_3$ в состоянии с максимальным значением проекции спина на ось 3 и выражается в ядерных магнетонах. Следовательно, для магнитного момента дейтрона можно записать

$$\mu_d = g_d \langle M = 1 | (\hat{J}_d)_3 | M = 1 \rangle = g_d = 0,857,\tag{2.115}$$

в то время как для нейтрона и протона имеем соответственно:

$$\begin{aligned}\mu_n &= g_n \langle \mu_n = 1/2 | (\hat{S}_n)_3 | \mu_n = 1/2 \rangle = \frac{1}{2} g_n = -1,913, \\ \mu_p &= g_p \langle \mu_p = 1/2 | (\hat{S}_p)_3 | \mu_p = 1/2 \rangle = \frac{1}{2} g_p = 2,793.\end{aligned}\tag{2.116}$$

Оператор момента импульса протона $\hbar \hat{l}_p$ выражается через радиус-вектор протона и его импульс. В дальнейшем при вычислении магнитного момента дейтрона необходимо провести усреднение по волновой функции дейтрона с $M = 1$. Однако волновая функция дейтрона зависит от радиуса-вектора взаимного расстояния $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_n$. Поэтому необходимо момент импульса протона выра-

зять через орбитальный момент импульса относительного движения. Следовательно, необходимо выразить через радиус-вектор \vec{r} и \vec{p} орбитальный момент количества движения протона. Так как в Ц-системе имеет место

$$\begin{aligned} m_p \vec{r}_p + m_n \vec{r}_n &= 0, \\ \vec{r} &= \vec{r}_p - \vec{r}_n, \end{aligned}$$

то

$$\vec{r}_p = \frac{m_n}{m_p + m_n} \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{r}.$$

В последнем равенстве данной цепочки равенств положили, что $m_n = m_p = m$ (где m – масса нуклона). В соответствии с этим имеем

$$\vec{p}_p = -\vec{p}_n = \vec{p}.$$

Следовательно, момент импульса протона в дейтроне можно записать через орбитальный момент импульса относительного движения

$$\hat{\hbar} \vec{l}_p = \frac{1}{2} \hat{\hbar} \vec{l}. \quad (2.117)$$

После всего сказанного выше, для оператора магнитного момента дейтрона, используя равенства (2.114), (2.114а), и (2.117), можно записать

$$g_d \mu_\pi \hat{J}_d = g_p \mu_\pi \hat{S}_p + g_n \mu_\pi \hat{S}_n + \frac{1}{2} \mu_\pi \hat{l},$$

откуда имеем

$$g_d \hat{J}_d = g_p \hat{S}_p + g_n \hat{S}_n + \frac{1}{2} \hat{l}. \quad (2.118)$$

Преобразуем это выражение. С этой целью введем в него суммарный спин протона и нейтрона $\vec{S} = \vec{S}_p + \vec{S}_n$ и его разность $\vec{\Sigma} = \vec{S}_p - \vec{S}_n$, тогда соотношение (2.118) запишется как

$$g_d \hat{J}_d = \frac{1}{2} (g_p + g_n) \hat{S} + \frac{1}{2} (g_p - g_n) \hat{\Sigma} + \frac{1}{2} \hat{l}.$$

Умножим скалярно это соотношение на \hat{J} , и получим

$$g_d \hat{J}_d^2 = \frac{1}{2}(g_p + g_n)(\hat{S}\hat{J}_d) + \frac{1}{2}(g_p + g_n)(\hat{\Sigma}\hat{J}_d) + \frac{1}{2}(\hat{l}\hat{J}).$$

Учитывая, что $\hat{J}_d = \hat{S} + \hat{l}$, соотношение (2.118) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu_d \hat{J}_d^2 &= \frac{1}{2}(g_p + g_n)\hat{S}^2 + \frac{1}{2}(g_p + g_n)(\hat{S}\hat{l}) + \\ &\frac{1}{2}(g_p - g_n)(\hat{\Sigma}\hat{S}) + \frac{1}{2}(g_p - g_n)(\hat{\Sigma}\hat{l}) + \frac{1}{2}(\hat{l}\hat{S}) + \frac{1}{2}\hat{l}^2. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Для вычисления магнитного момента дейтрона возьмем матричный элемент от этого операторного равенства между волновыми функциями дейтрона $\Psi_d(\vec{r})$ (2.91), тогда левая часть запишется как

$$g_d \left\langle \Psi_d \left| \hat{J}_d^2 \right| \Psi_d \right\rangle = g_d J(J+1) = 2g_d = 2\mu_d.$$

Так как спин дейтрона равен единице, а так же учтено соотношение (2.115). Следовательно, после усреднения соотношение (2.119) примет вид

$$\begin{aligned} 2\mu_d &= \frac{1}{2}(g_p + g_n) \left\langle \Psi_d \left| \hat{S}^2 \right| \Psi_d \right\rangle + \frac{1}{2}(g_p + g_n + 1) \left\langle \Psi_d \left| \hat{S}\hat{l} \right| \Psi_d \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{2}(g_p - g_n) \left\langle \Psi_d \left| \hat{\Sigma}\hat{S} \right| \Psi_d \right\rangle + \frac{1}{2}(g_p - g_n) \left\langle \Psi_d \left| \hat{\Sigma}\hat{l} \right| \Psi_d \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \Psi_d \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_d \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Рассмотрим правую часть этого соотношения. Спин-координатная часть волновой функции дейтрона должна быть симметрична относительно перестановки нейтрона и протона, поскольку изотопический спин дейтрона равен нулю. Это означает, что

$$\left\langle \Psi_d \left| \hat{\Sigma}\hat{S} \right| \Psi_d \right\rangle = \left\langle \Psi_d \left| \hat{\Sigma}\hat{l} \right| \Psi_d \right\rangle = 0. \quad (2.121)$$

Действительно, симметрия спин-координатной волновой функции дейтрона $\Psi_d(\vec{r})$ относительно перестановки нейтрона и про-

тона означает, что при замене $n \leftrightarrow p$ или, что тоже самое, при замене $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ имеем:

$$\Psi_d(\vec{r}) = \Psi_d(-\vec{r}),$$

в то время как операторы $\hat{\Sigma}\hat{S}$ и $\hat{\Sigma}\hat{l}$ антисимметричны относительно такой перестановки. Это и приводит к соотношению (2.121).

Кроме того, как показано в п. 1.2, оператор суммарного спина двух нуклонов коммутирует с гамильтонианом H и, следовательно, эта величина – квантовое число. В дейтоне она равна $S = 1$, поэтому:

$$\left\langle \Psi_d \left| \hat{S}^2 \right| \Psi_d \right\rangle = S(S+1) = 2 \quad (2.122)$$

Рассмотрим второй член правой стороны равенства (2.120), учитывая соотношение $\hat{J}_d = \hat{S} + \hat{l}$, можно записать

$$\hat{J}_d^2 = \hat{S}^2 + \hat{l}^2 + 2(\hat{S}\hat{l}).$$

Усредняя это операторное соотношение по волновой функции дейтрона, можно получить:

$$\begin{aligned} 2\left\langle \Psi_d \left| \hat{S}\hat{l} \right| \Psi_d \right\rangle &= \left\langle \Psi_d \left| \hat{J}_d^2 \right| \Psi_d \right\rangle - \left\langle \Psi_d \left| \hat{S}^2 \right| \Psi_d \right\rangle - \left\langle \Psi_d \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_d \right\rangle = \\ &= J(J+1) - S(S+1) - \left\langle \Psi_d \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_d \right\rangle = -\left\langle \Psi_d \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_d \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.123)$$

При написании этой цепочки равенств учтено, что $S = J_d = 1$.

Тогда, подставляя соотношения (2.123), (2.122) и (2.121) в равенство (2.120) и учитывая определение магнитного момента протона и нейтрона (2.116), получим выражение для магнитного момента дейтрона в следующем виде:

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \mu_p - \mu_n \right) \left\langle \Psi_d \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_d \right\rangle. \quad (2.124)$$

Рассмотрим матричный элемент $\left\langle \Psi_d \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_d \right\rangle$. Если дейтонная волновая функция является чистым S -состоянием, т.е. $\Psi_d = \Psi_S$, то

$$\left\langle \Psi_S \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_S \right\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n. \quad (2.125)$$

Однако, при учете D -состояния в дейтроне, т.е. когда $\Psi_d = \Psi_S + \Psi_D$, имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_S + \Psi_D \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_S + \Psi_D \right\rangle &= \left\langle \Psi_S + \Psi_D \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_D \right\rangle = \\ &= \left\langle \Psi_D \left| \hat{l}^2 \right| \Psi_D \right\rangle = 6 \langle \Psi_D | \Psi_D \rangle = 6 p_D. \end{aligned}$$

При написании этой цепочки равенств учитывалось, что

$$\hat{l}^2 | \Psi_D \rangle = 6 | \Psi_D \rangle, \quad \hat{l}^2 | \Psi_S \rangle = 0.$$

Таким образом, для магнитного момента дейтрона с учетом D -волны окончательно получаем следующее выражение:

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu_p - \mu_n \right) p_D. \quad (2.126)$$

Зная экспериментальные значения магнитного момента дейтрона и магнитных моментов нейтрона и протона, можно оценить вклад D -волны в дейтрон:

$$p_D = \frac{\mu_d - \mu_p - \mu_n}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu_p - \mu_n \right)} \approx 4 \cdot 10^{-2}. \quad (2.127)$$

Таким образом, экспериментальные данные по магнитному моменту дейтрона указывают, что вклад D -волны в волновую функцию дейтрона составляет 4%.

2.7. Электрический квадрупольный момент дейтрона

Другой характеристикой электрических свойств ядра является электрический квадрупольный момент. Как известно из теории поля, тензор квадрупольного момента определяется как

$$Q_{ik} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} (3r_{\alpha i} r_{\alpha k} - \vec{r}_{\alpha}^2 \delta_{ik}), \quad (2.128)$$

где суммирование проводится по всем заряженным частицам, а e_{α} – их заряды. В случае, если все заряженные частицы имеют один и тот же заряд e , как в случае ядра, то

$$Q_{ik} = e \sum_{\alpha} (3r_{\alpha i} r_{\alpha k} - \bar{r}_{\alpha}^2 \delta_{ik}). \quad (2.128a)$$

Обычно квадрупольный момент ядра измеряется в барнах ($1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$). Для этого в определении квадрупольного момента опускается множитель e , а расстояние измеряется в 10^{-12} см , т.е. он определяется выражением

$$Q_{ik} = \sum_{\alpha} (3r_{\alpha i} r_{\alpha k} - \bar{r}_{\alpha}^2 \delta_{ik}). \quad (2.128б)$$

Тогда компонента

$$Q_{33} = \sum_{\alpha} (3z_{\alpha}^2 - \bar{r}_{\alpha}^2),$$

где сумма берется по всем заряженным частицам, связана с формой ядра. Если тело вытянуто вдоль оси 3, то $Q_{33} > 0$, т.е. среднее значение квадрата координаты z больше среднего значения квадрата радиуса. Если же тело сплюснуто, то $Q_{33} < 0$.

В случае, когда распределение заряда непрерывно и характеризуется плотностью $\rho(\vec{r})$, квадрупольный момент определяется как

$$Q_{ik} = \int \rho(\vec{r}) (3r_i r_k - \bar{r}^2 \delta_{ik}) d^3 r. \quad (2.129)$$

В соответствии с этим в случае квантово-механических систем, описываемых волновой функцией $\psi(\vec{r})$, электрический квадрупольный момент такой системы записывается как

$$Q_{ik} = \int \psi^*(\vec{r}) (3r_i r_k - \bar{r}^2 \delta_{ik}) \psi(\vec{r}) d^3 r. \quad (2.130)$$

Квадрупольный момент, подобно магнитному моменту, можно связать с вектором спина, так как имеется всего одна векторная характеристика ядра – вектор спина \vec{J} . Для нахождения этой связи воспользуемся следующими свойствами квадрупольного момента. Во-первых, тензор квадрупольного момента – симметричный тензор второго ранга ($Q_{ik} = Q_{ki}$). Во-вторых, шпур тензора Q_{ik} равен нулю ($Sp Q_{ik} = 0$). Тогда, построив из вектора \vec{J} симметричный тензор второго ранга со шпуром, равным нулю, можно написать для оператора квадрупольного момента следующее выражение

$$\hat{Q}_{ij} = A (\hat{J}_i \hat{J}_j + \hat{J}_j \hat{J}_i - \frac{2}{3} \hat{J}^2 \delta_{ij}), \quad (2.131)$$

где A – некоторая константа.

Обычно квадрупольный момент Q , приводимый в таблицах, определяется как среднее значение оператора Q_{33} по состояниям с максимальной проекцией спина на ось 3 ($J_3 = J$), т.е.

$$Q = \left\langle J, J_3 = J \left| \hat{Q}_{33} \right| J, J_3 = J \right\rangle. \quad (2.132)$$

Используя это соотношение и выражение для оператора квадрупольного момента (2.131), получим

$$Q = A \left\langle J, J_3 = J \left| \left(2\hat{J}_3^2 - \frac{2}{3}\hat{J}^2 \right) \right| J, J_3 = J \right\rangle = \frac{2}{3} AJ(2J-1) \quad (2.133)$$

Из этого соотношения следует, что $Q \equiv 0$, если $J = 0$ или $1/2$, т.е. ядра со спином нуль или $1/2$ не могут иметь электрического квадрупольного момента. Наконец, из соотношения (2.132) имеем

$$A = \frac{3Q}{2J(2J-1)},$$

и, следовательно, оператор тензора электрического квадрупольного момента ядра записывается в виде

$$\hat{Q}_{ij} = \frac{3Q}{2J(2J-1)} \left(\hat{J}_i \hat{J}_j + \hat{J}_j \hat{J}_i - \frac{2}{3} \hat{J}^2 \delta_{ij} \right) \quad (2.134)$$

Теперь перейдем к вычислению электрического квадрупольного момента дейтрона. Поскольку спин дейтрона равен единице, то он может обладать электрическим квадрупольным моментом. Как указывалось выше, эксперимент дает значение $Q = 2,82 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2 = 2,82 \cdot 10^{-3} \text{ барн}$. Оператор электрического квадрупольного момента дейтрона записывается в виде

$$Q_{ik} = 3r_{p,i} r_{p,k} - \bar{r}_p^2 \delta_{ik}, \quad (2.135)$$

где \vec{r}_p – радиус-вектор протона. Введя в это выражение относительный радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_n$, который согласно предыдущему параграфу связан с радиусом-вектором протона соотношением $\vec{r}_p = \frac{1}{2} \vec{r}$, можно записать тензор квадрупольного момента дейтрона в виде

$$Q_{ik} = \frac{1}{4} (3r_i r_k - \bar{r}^2 \delta_{ik}). \quad (2.135a)$$

В соответствии с этим, оператор Q_{33} можно записать как

$$Q_{33} = \frac{1}{4}(3z^2 - \vec{r}^2) = \frac{1}{4}r^2(3\cos^2\theta - 1) \quad (2.136)$$

или, введя шаровую функцию

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1),$$

получим для Q_{33} следующее выражение:

$$Q_{33} = \sqrt{\frac{\pi}{5}}r^2Y_{20}(\theta, \varphi). \quad (2.136a)$$

Следовательно, электрический квадрупольный момент дейтрона определяется выражением

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle \Psi_d^{M=1} | r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) | \Psi_d^{M=1} \rangle, \quad (2.137)$$

где $\Psi_d^{M=1}$ – волновая функция дейтрона с проекцией спина на ось 3 равной единице.

Как было показано в п. 2.5, волновая функция дейтрона является суперпозицией S - и D -состояний и определяется выражением (2.91). Если предположить, что дейтрон описывается лишь S -состоянием, т.е. положить в соотношении (2.137) $\Psi_d = \Psi_S$, то для электрического квадрупольного момента получим:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle \Psi_S^{M=1} | r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) | \Psi_S^{M=1} \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_0^\infty u^2(r) dr \int d\Omega \frac{1}{4\pi} \chi_{11}^+ \chi_{11} Y_{20}(\vec{n}) = 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

из-за ортогональности шаровых функций $Y_{20}(\vec{n})$ и $Y_{00}(\vec{n})$. В выражении (2.138) $\chi_{1\mu}$ – триплетная спиновая волновая функция двух нуклонов.

Таким образом, сам факт существования электрического квадрупольного момента дейтрона указывает на существование в дейтроне D -волны. Следует напомнить, что магнитный момент дейтрона получается из-за наличия магнитных моментов у нейтрона и протона и равняется их сумме при $l=0$, в то время как при $l=0$ $Q \equiv 0$.

Пусть волновая функция дейтрона является суперпозицией S - и D -состояний, т.е. $\Psi_d(\vec{r}) = \Psi_S(\vec{r}) + \Psi_D(\vec{r})$, тогда квадрупольный момент дейтрона запишется как

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left\{ \left\langle \Psi_S^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_S^{M=1} \right\rangle + \left\langle \Psi_D^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_S^{M=1} \right\rangle + \left\langle \Psi_S^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_D^{M=1} \right\rangle + \left\langle \Psi_D^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_D^{M=1} \right\rangle \right\}. \quad (2.138)$$

Первое слагаемое, как было показано выше, равно нулю из-за сферической симметрии волновой функции $\Psi_S(\vec{r})$. Последним слагаемым можно пренебречь, так как из вычисления магнитного момента дейтрона следовало, что присутствие D -волны в дейтроне мало – порядка 4%, поэтому этот член мал по сравнению с двумя другими. Следовательно, квадрупольный момент можно представить в виде

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left\{ \left\langle \Psi_D^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_S^{M=1} \right\rangle + \left\langle \Psi_S^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_D^{M=1} \right\rangle \right\}.$$

Оператор электрического квадрупольного момента эрмитов, как любой оператор физической величины, поэтому можно написать

$$\left\langle \Psi_D^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_S^{M=1} \right\rangle = \left\langle \Psi_S^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_D^{M=1} \right\rangle.$$

Таким образом, окончательно для электрического квадрупольного момента получаем выражение

$$Q = 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} \left\langle \Psi_S^{M=1} \left| r^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right| \Psi_D^{M=1} \right\rangle. \quad (2.139)$$

Подставляя в это выражение волновые функции S - и D -состояний дейтрона (2.91а) и (2.91б), получим

$$Q = 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_0^\infty r^2 u(r) w(r) dr \int d\Omega (\Psi_{S=1, l=0}^{1,1}(\vec{n}))^+ Y_{20}(\vec{n}) \Psi_{S=1, l=2}^{1,1}(\vec{n}).$$

Рассмотрим интегрирование по телесному углу. Подставляя в этот интеграл выражение для спин-угловых волновых функций S - и D -состояний дейтрона и проведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} & \int d\omega (\psi_{S=1, l=0}^{1,1}(\vec{n}))^+ Y_{20}(\vec{n}) \psi_{S=1, l=2}^{1,1}(\vec{n}) = \\ & = \sum_{\mu m} C_{1\mu, 2m}^{11} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \chi_{11}^+ \chi_{1\mu} \int d\omega Y_{20}(\vec{n}) Y_{2m}(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} C_{11, 20}^{11} = \frac{1}{2\sqrt{10}\pi}. \end{aligned}$$

При написании этой цепочки равенств учитывалась ортогональность спиновых и шаровых функций:

$$\begin{aligned} \chi_{1,1}^+ \chi_{1,\mu} &= \delta_{1\mu}, \\ \int d\omega Y_{20}(\vec{n}) Y_{2m}(\vec{n}) &= \delta_{m0}, \end{aligned}$$

а также численное значение коэффициента Клебша–Гордона:

$$C_{11, 20}^{11} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Окончательно для электрического квадрупольного момента получим выражение

$$Q = \frac{1}{5\sqrt{2}} \int_0^\infty r^2 u(r) w(r) dr. \quad (2.140)$$

Так как под знак интеграла входит r^2 , то область малых значений r вносит малый вклад в интеграл, поэтому для оценки квадрупольного момента дейтрона можно для радиальных волновых функций $u(r)$ и $w(r)$ воспользоваться асимптотическими выражениями (2.103) и (2.107) соответственно. Кроме того, учитывая, что в $u(r)$ и $w(r)$ входит одна и та же затухающая экспонента, запишем:

$$w(r) = au(r).$$

Тогда квадрупольный момент дейтрона можно представить в виде:

$$Q = \frac{a}{5\sqrt{2}} \langle r^2 \rangle, \quad (2.141)$$

где $\langle r^2 \rangle$ – среднее значение квадрата радиуса в S -состоянии дейтрона:

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 u^2(r) dr = \frac{1}{2\alpha_T^2} = \frac{1}{2} R_d^2.$$

В этом выражении α_T определяется соотношением (2.13а), а R_d – радиус дейтрона. Таким образом, электрический квадрупольный момент дейтрона запишется в виде:

$$Q = \frac{R_d^2}{10\sqrt{2}} a. \quad (2.141a)$$

Если в выражение (2.141a) подставить радиус дейтрона $R_d = 4.2 \cdot 10^{-13}$ см, а для квадрупольного момента Q использовать экспериментальное значение, то можно найти величину a . Она оказывается равной 0,24, т.е. вклад D -волны оказывается около 6%.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Написать волновую функцию непрерывного спектра с импульсом \vec{k} системы нейтрон-протон в приближении нулевого радиуса действия сил в триплетном спиновом состоянии.
2. Показать, что написанная в первом вопросе функция ортогональна к волновой функции дейтрона в приближении нулевого радиуса действия сил (2.17).
3. Может ли длина рассеяния (a) быть положительной и $a < r_0$, где r_0 – радиус потенциала? Привести пример такого потенциала.

Глава 3. ИНВАРИАНТНЫЕ АМПЛИТУДЫ

3.1. Определение инвариантных амплитуд

В п. 2.4 при рассмотрении рассеяния нейтрона на молекулярном водороде в амплитуде рассеяния нейтрона на протоне выделялись спиновые переменные, и амплитуда записывалась в виде:

$$F = a + b \vec{\sigma}_p \vec{\sigma}_n. \quad (3.1)$$

В этом выражении величины a и b являются функциями импульса k , и вся информация о динамике процесса рассеяния содержится в функциях $a(k)$ и $b(k)$. При получении выражения (3.1) рассматривались лишь малые энергии. Попытаемся обобщить выражение (3.1) на произвольные нерелятивистские энергии.

Рассмотрим трансформационные свойства амплитуды рассеяния. Как известно [7], S -матрицу можно представить в виде

$$S = 1 + iT, \quad (3.2)$$

где T -матрица несет всю информацию о процессе рассеяния. Выделим из T -матрицы закон сохранения 4-импульса и запишем ее в виде

$$T = (2\pi)^4 M \delta^{(4)}(p_i - p_f), \quad (3.3)$$

где p_i и p_f – 4-импульсы начального и конечного состояния, а M – амплитуда рассеяния.

В релятивистском случае амплитуда рассеяния M , входящая в выражение (3.3), связана с инвариантной амплитудой F соотношением

$$F_{if} = \sqrt{2E_1 2E_2 \dots 2E_n} M_{if}, \quad (3.4)$$

где E_k ($k = 1, 2, \dots, n$) энергии частиц, участвующих в процесс $i \rightarrow f$ (i – начальное состояние, а f – конечное). Амплитуда F , как показано в квантовой теории поля, инвариантна относительно собственных преобразований Лоренца, т.е.

$$F_{if} = F_{i'f'}, \quad (3.5)$$

где штрихованные и нештрихованные индексы относятся к разным системам отсчета. Каждый индекс обозначает совокупность импульсов и спиновых переменных частиц в начальном и конечном состоянии.

В нерелятивистском случае энергия частиц $E_i \approx m_i$ ($i = 1, \dots, n$), где m_i – массы, участвующих в процессе частиц. Следовательно, в нерелятивистской теории связь между амплитудами F_{if} и M_{if} следующая:

$$F_{if} = \sqrt{2m_1 2m_2 \dots 2m_n} M_{if}. \quad (3.6)$$

Поэтому в нерелятивистской теории должны быть инвариантны относительно вращений и преобразований Галилея как амплитуда M_{if} , так и амплитуда F_{if} . Как уже упоминалось, под индексами i и f подразумевается совокупность импульсов частиц и их спиновые переменные в начальном и конечном состоянии соответственно.

В нерелятивистской теории можно рассматривать в качестве спиновой переменной проекцию спина на произвольную ось. Тогда

каждая частица характеризуется импульсом и проекцией спина на выделенное направление μ . В частности, для процесса, в котором участвуют n частиц ($1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$) под i подразумевается совокупность $(\mu_1, \vec{p}_1, \mu_2, \vec{p}_2)$, а под $f - (\mu_3, \vec{p}_3, \mu_4, \vec{p}_4, \dots, \mu_n, \vec{p}_n)$.

Однако такая характеристика спинового состояния частицы не является ковариантной, поскольку в другой системе отсчета имеем $i' = (\mu'_1, \vec{p}'_1, \mu'_2, \vec{p}'_2)$ и $f' = (\mu'_3, \vec{p}'_3, \mu'_4, \vec{p}'_4, \dots, \mu'_n, \vec{p}'_n)$. И, если известно, как преобразуется \vec{p}_i при переходе из одной системы отсчета к другой, то о преобразовании μ_i ничего сказать нельзя. Это связано с тем, что если $\chi_{j\mu}$ – собственная функция оператора проекции на ось 3, то после поворота $\chi_{j\mu}$ уже не является собственной функцией оператора проекции спина на ось 3. Действительно, пусть $\chi_{j\mu}$ – собственная функция оператора S_3 :

$$S_3 \chi_{j\mu} = \mu \chi_{j\mu}. \quad (3.7)$$

При вращении системы отсчета $\chi_{j\mu}$ преобразуется по представлению группы вращения веса j , где j – спин частицы, т.е. $\chi_{j\mu}$ перейдет в $\chi'_{j\mu}$:

$$\chi_{j\mu} \rightarrow \chi'_{j\mu} = D^{(j)}(g) \chi_{j\mu}. \quad (3.8)$$

При этом $D^{(j)}(g)$ определяется соотношением

$$D^{(j)}(g) = D^{(j)}(\vec{n}, \omega) = \exp\{-i\vec{S}\vec{n}\omega\}, \quad (3.8a)$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный по оси вращения, а ω угол поворота. Функция $\chi'_{j\mu}$ не является собственной функцией оператора S_3 , так как S_3 не коммутирует с $D^{(j)}(\vec{n}, \omega)$.

Для описания спинового состояния частицы зададим ее спиновую волновую функцию χ_j (где j – спин частицы), которую можно разложить по собственным функциям оператора проекции спина на произвольную ось:

$$\chi_j = \sum_{\rho=-j}^j \chi_j(\rho) \chi_{j\rho}. \quad (3.9)$$

В этом разложении $\chi_j(\rho)$ – амплитуда вероятности для различных значений проекций μ на выбранную ось для частицы, которая описывается спиновой волновой функцией χ_j . Они являются «компонентами» спиновой волновой функции

$$\chi_j = \begin{pmatrix} \chi_j(+j) \\ \vdots \\ \chi_j(-j) \end{pmatrix} = \{\chi_j(\rho), \rho = -j, \dots, +j\}. \quad (3.10)$$

Если спиновая волновая функция χ_j является также собственной функцией оператора проекции спина на выбранную ось 3 с собственным значением μ , т.е.

$$S_3 \chi_{j\mu} = \mu \chi_{j\mu},$$

то амплитуда вероятности $\chi_{j\mu}(\rho)$ определяется соотношением

$$\chi_{j\mu}(\rho) = \delta_{\mu\rho}. \quad (3.11)$$

Действительно, тогда спиновая волновая функция $\chi_{j\mu}$ определяется одной компонентой:

$$\chi_{j\mu} = \sum_{\rho=-j}^j \chi_{j\mu}(\rho) \chi_{j\rho} = \chi_{j\mu}.$$

Из выше изложенного следует, что задание компонент $\chi_j(\rho)$ спиновой волновой функции χ_j является общим случаем описания частиц со спином. Следовательно, можно задать начальное состояние системы спиновыми волновыми функциями и импульсами, т.е. $i = (\chi(1), \chi(2), \vec{p}_1, \vec{p}_2)$, которое в другой системе отсчета примет вид $i' = (\chi'(1), \chi'(2), \vec{p}'_1, \vec{p}'_2)$. При этом хорошо известен закон преобразования спиновых волновых функций при вращении. При преобразованиях

$$r_i \rightarrow r'_i = R_{ik} r_k$$

(где R – ортогональная матрица) спиновые волновые функции χ_j преобразуются согласно соотношению (3.8), которое в компонентах запишется как

$$\chi_j(\rho) \rightarrow \chi'_j(\rho) = \sum_{\rho'=-j}^j D_{\rho\rho'}^{(j)}(g) \chi_j(\rho'), \quad (3.12)$$

где $D^{(j)}(g)$ - матрица неприводимого представления группы вращений веса j . Следовательно, зная компоненты спиновой волновой функции в старой нештрихованной системе отсчета, можно найти их в новой штрихованной системе отсчета. Такое описание спиновых состояний частиц является ковариантным и, соответственно, ковариантным является начальное состояние i . В соответствии со всем сказанным выше, конечное состояние f будем задавать как $f = (\chi(3), \dots, \chi(n), \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n)$, которое при вращениях переходит в $f' = (\chi'(3), \dots, \chi'(n), \vec{p}'_3, \dots, \vec{p}'_n)$.

Отметим, что при преобразованиях Галилея, когда

$$\begin{aligned}\vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{V}_0 t, \\ t &\rightarrow t' = t,\end{aligned}\tag{3.13}$$

где \vec{V}_0 - скорость движения новой системы отсчета относительно исходной, спиновые волновые функции не меняются. В то время как, закон преобразования импульса определяется изменением скорости $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}_0$.

Требование инвариантности амплитуды рассеяния (3.5) означает, что амплитуда M в двух разных системах отсчета связана соотношением

$$M(\chi(1), \dots, \chi(n), \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = M(\chi'(1), \dots, \chi'(n), \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n)\tag{3.14}$$

В силу принципа суперпозиции в квантовой теории амплитуда M должна быть линейной по каждой из спиновых волновых функций $\chi(i)$ ($i = 1, \dots, n$). Однако, кроме спиновых волновых функций $\chi(i)$ ($i = 1, \dots, n$), имеются еще и эрмитовски сопряженные функции $\chi^+(i)$ ($i = 1, \dots, n$). Условимся, что частицам в конечном состоянии соответствуют $\chi^+(i)$ ($i = 3, \dots, n$), в то время как частицам в начальном состоянии ставится в соответствие $\chi(i)$ ($i = 1, 2$). Это соглашение следует из того, что если происходит процесс $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$, когда состояние налетающих частиц не меняется, то S -матрица равна единичной: $S = I$. Тогда в S -матрицу должны входить инварианты $\chi^+(1)\chi(1)$ и $\chi^+(2)\chi(2)$, и если все функции нормированы на единицу, то получаем правильный результат. Следовательно, для удовлетворения условия (3.14) необходимо сконструировать из спиновых функций частиц и их импульсов инвари-

анты относительно вращений и преобразований Галилея. Такие инварианты можно представить в следующем виде:

$$\sum_{\rho, i} C_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(k) \chi_{j_1}(\rho_1) \chi_{j_2}(\rho_2) \chi_{j_3}^*(\rho_3) \dots \chi_{j_n}^*(\rho_n) p_{1, i_1} p_{2, i_2} \dots p_{n, i_n}, \quad (3.15)$$

где $\chi_{j_i}(\rho_i)$ – компоненты спиновой волновой функции i -й частицы, p_{k, i_k} – компоненты импульса k -й частицы, а $C_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(k)$ – некоторые числовые коэффициенты. Вообще говоря, можно построить не один такой инвариант, а несколько. Разные инварианты нумеруются переменной k . Каждый такой инвариант должен входить со своей весовой функцией, которая является инвариантом относительно вращений и преобразований Галилея. Обозначим эту функцию через Γ_k . Эти весовые функции и называются инвариантными амплитудами. Тогда амплитуду рассеяния M можно записать в виде

$$M = \sum_k \Gamma_k(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) \times \sum_{\rho, i} C_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(k) \chi_{j_1}(\rho_1) \chi_{j_2}(\rho_2) \chi_{j_3}^*(\rho_3) \dots \chi_{j_n}^*(\rho_n) p_{1, i_1} p_{2, i_2} \dots p_{n, i_n}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим свойства инвариантных амплитуд. Поскольку спиновые волновые функции в амплитуду рассеяния M в силу принципа суперпозиции могут входить линейно, то инвариантные амплитуды могут зависеть только от импульсов частиц, участвующих в процессе. В силу инвариантности этих амплитуд они могут зависеть от инвариантов, составленных из импульсов частиц. Их число, как известно из релятивистской квантовой теории, равно $3n - 10$, где n – число участвующих в процессе частиц. В релятивистской теории в качестве таких переменных выбирают $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$ и $t_{ij} = (p_i - p_j)^2$, где p_i и p_j – 4-импульсы частиц i и j соответственно. В нерелятивистской теории в качестве таких переменных можно выбрать:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{ij} &= s_{ij} - (m_i + m_j)^2 = 2(m_i + m_j)(E_i + E_j) - (\vec{p}_i + \vec{p}_j)^2, \\ \tilde{t}_{ij} &= t_{ij} - (m_i - m_j)^2 = 2(m_i - m_j)(E_i - E_j) - (\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где m_i, E_i, \vec{p}_i – масса, кинетическая энергия и импульс i -й частицы соответственно. Переменные \tilde{s}_{ij} и \tilde{t}_{ij} инвариантны как относитель-

но вращений, так и относительно преобразований Галилея. Действительно, если выразить эти переменные через скорости i -й и j -й частиц получим

$$\tilde{s}_{ij} = m_i m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2, \quad \tilde{t}_{ij} = -m_i m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2. \quad (3.18)$$

Откуда немедленно следуют свойства инвариантности этих переменных. Таким образом, построено разложение амплитуды M_{if} по инвариантным амплитудам.

Выясним, сколько инвариантных амплитуд описывают рассматриваемый процесс $1 + 2 \rightarrow 3 + \dots + n$. Пусть i -я частица имеет спин j_i , т.е. в процессе участвуют частицы со спинами j_1, j_2, \dots, j_n . Будем рассматривать этот процесс в некоторой системе отсчета, в которой имеется выделенная ось, и i -я частица имеет проекцию μ_i на эту ось. Тогда амплитуда M_{if} в данной системе отсчета характеризуется проекциями спинов частиц на эту ось, т.е. $M_{(\mu_1, \mu_2)(\mu_3, \dots, \mu_n)}$. Так как имеется $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \dots (2j_n + 1)$ различных комбинаций значений проекций спинов на эту ось, то при фиксированных импульсах начальных и конечных частиц имеется всего $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \dots (2j_n + 1)$ различных амплитуд. Следовательно, число инвариантных амплитуд N_k не может превышать этого числа, т.е.

$$N_k \leq N_0 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \dots (2j_n + 1). \quad (3.19)$$

Реально число N_k оказывается как правило меньше этого числа N_0 . В частности, для реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ при правильном выборе спиновых переменных оно оказывается вдвое меньше.

Перейдем к рассмотрению конкретных процессов.

3.2. Разложение по инвариантным амплитудам амплитуды упругого рассеяния частицы со спином 1/2 на частице со спином нуль

Рассмотрим простейший процесс – упругое рассеяние частицы со спином 1/2 на частице со спином нуль. Примером такого процесса может служить рассеяние нейтрона на четно-четном ядре,

например на α -частице (He^4) или на ядре O^{16} . Как показано в предыдущем параграфе, для получения разложения амплитуды M_{if} этого процесса по инвариантным амплитудам необходимо построить инварианты из спиновых волновых функций $\chi(1)$ и $\chi^+(3)$ и импульсов частиц $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$.

Поскольку амплитуда M_{if} должна быть инвариантна относительно преобразований Галилея, то в M_{if} могут входить только относительные скорости. Введем относительные скорости в начальном и конечном состоянии:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= \frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2} = \frac{\vec{p}}{m_{12}}, \\ \vec{v}_3 - \vec{v}_4 &= \frac{\vec{p}_3}{m_3} - \frac{\vec{p}_4}{m_4} = \frac{\vec{p}'}{m_{34}},\end{aligned}\tag{3.20}$$

где $m_i, \vec{v}_i, \vec{p}_i$ – масса, скорость, импульс i -й частицы соответственно, \vec{p} и \vec{p}' – импульс частиц в Ц-системе в начальном и конечном состоянии, а m_{ik} – приведенная масса частиц i и k :

$$m_{ik} = \frac{m_i m_k}{m_i + m_k}.$$

Следовательно, импульсы \vec{p} и \vec{p}' инвариантны относительно преобразований Галилея.

Из векторов \vec{p} и \vec{p}' сконструируем два единичных вектора \vec{m} и \vec{l} :

$$\vec{m} = \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{|\vec{p} + \vec{p}'|}, \quad \vec{l} = \frac{\vec{p} - \vec{p}'}{|\vec{p} - \vec{p}'|}.\tag{3.21}$$

В случае упругого рассеяния эти два вектора ортогональны. Действительно, в этом случае $m_{34} = m_{12}$ и из закона сохранения энергии следует, что $\vec{p}^2 = \vec{p}'^2$, значит:

$$(\vec{m}\vec{l}) = \frac{\vec{p}^2 - \vec{p}'^2}{|\vec{p} + \vec{p}'||\vec{p} - \vec{p}'|} = 0.\tag{3.21a}$$

Кроме этих двух единичных векторов можно построить еще один единичный вектор \vec{n} , перпендикулярный к плоскости реакции, т.е.

к векторам \vec{p} и \vec{p}' , следовательно, ортогональный к двум единичным векторам \vec{m} и \vec{l} :

$$\vec{n} = \frac{[\vec{p}\vec{p}']}{|[\vec{p}\vec{p}']|}. \quad (3.22)$$

Таким образом, сконструирована тройка взаимноортогональных единичных векторов $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$ инвариантных относительно преобразований Галилея.

Из спиновых волновых функций $\chi(1)$ и $\chi^+(3)$, которые в случае частиц со спином $1/2$ являются спинорами, можно построить инвариант как относительно преобразований Галилея, так и относительно вращений $\chi^+(3)\chi(1)$. Действительно, спиновые волновые функции не меняются при преобразованиях Галилея, поэтому построенная величина инвариантна относительно их. При вращениях спиноры χ и χ^+ преобразуются следующим образом:

$$\chi \rightarrow \chi' = D^{(1/2)}(g)\chi, \quad \chi^+ \rightarrow \chi'^+ = (D^{(1/2)}(g)\chi)^+,$$

следовательно, величина $\chi^+\chi$ при вращениях преобразуется как

$$\begin{aligned} \chi^+\chi &\rightarrow \chi'^+\chi' = (D^{(1/2)}(g)\chi)^+ D^{(1/2)}(g)\chi = \\ &= \chi^+ D^{(1/2)+}(g) D^{(1/2)}(g)\chi = \chi^+\chi, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве данной цепочки учтена унитарность $D^{(1/2)}(g)$, т.е. $D^{(1/2)+}(g) = D^{(1/2)-1}(g)$. Таким образом, величина

$$\chi^+(3)\chi(1) = \sum_{\rho=-1/2}^{1/2} \chi_{j_3}^*(\rho)\chi_{j_1}(\rho) \quad (3.23)$$

является инвариантом относительно вращений и преобразований Галилея.

Из спиноров $\chi(1)$ и $\chi^+(3)$, как известно из курса квантовой механики, можно построить вектор, инвариантный относительно преобразований Галилея:

$$\chi^+(3)\vec{\sigma}\chi(1) = \sum_{\rho, \rho'=-1/2}^{1/2} \chi_{j_3}^*(\rho)\vec{\sigma}_{\rho\rho'}\chi_{j_1}(\rho'). \quad (3.24)$$

Инвариантность этого вектора относительно преобразований Галилея следует из инвариантности спиновых волновых функций относительно этих преобразований. Тогда, умножив этот вектор на три

взаимно ортогональных инвариантных относительно преобразований Галилея вектора $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$, получим три величины $\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{m})\chi(1)$, $\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{l})\chi(1)$, $\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{n})\chi(1)$, которые инвариантны как относительно преобразований Галилея, так и вращений.

Таким образом, имеется всего четыре инварианта, поэтому амплитуду рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль следует записывать в виде

$$M = A(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(3)\chi(1) + B(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{n})\chi(1) + C(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{m})\chi(1) + D(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{l})\chi(1), \quad (3.25)$$

где $A(\tilde{s}, \tilde{t}), B(\tilde{s}, \tilde{t}), C(\tilde{s}, \tilde{t})$ и $D(\tilde{s}, \tilde{t})$ – инвариантные амплитуды, которые так же, как и любой процесс $2 \rightarrow 2$, зависят от двух инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} :

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= 2(m_1 + m_2)(E_1 + E_2) - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2, \\ \tilde{t} &= 2(m_1 - m_3)(E_1 - E_3) - (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Потребуем, чтобы амплитуда M была также инвариантна относительно инверсии пространства, так как в сильных взаимодействиях сохраняется четность. При инверсии пространства, когда $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$, $t \rightarrow t' = t$ спиновая волновая функция и операторы преобразуются с помощью унитарной матрицы U_p . В случае частиц со спином $1/2$ преобразование спинора χ и матрицы $\vec{\sigma}$ определяется соотношениями [6]:

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow \chi' = U_p \chi = \eta_p \chi, \\ \vec{\sigma} &\rightarrow U_p \vec{\sigma} U_p^+ = \vec{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$U_p = \eta_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.27a)$$

а величина $\eta_p = \pm i$. Следовательно, вектор $\chi^+(3)\vec{\sigma}\chi(1)$ инвариантный при преобразованиях Галилея, инвариантен также относительно инверсии пространства

$$\chi^+(3)\vec{\sigma}\chi(1) \rightarrow \chi'^+(3)\vec{\sigma}'\chi'(1) = \chi^+(3)\vec{\sigma}\chi(1). \quad (3.28)$$

В то же время при преобразовании инверсии пространства импульсы \vec{p} и \vec{p}' меняют знак. Значит, единичные векторы \vec{m} и \vec{l} меняют знак при инверсии пространства:

$$\vec{m} \rightarrow \vec{m}' = -\vec{m}, \quad \vec{l} \rightarrow \vec{l}' = -\vec{l}, \quad (3.29)$$

а единичный вектор \vec{n} знак не меняет:

$$\vec{n} \rightarrow \vec{n}' = \vec{n}. \quad (3.29a)$$

Таким образом, из соотношений (3.28) и (3.29) следует, что инварианты относительно преобразований Галилея и вращений $\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{m})\chi(1)$ и $\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{l})\chi(1)$ при инверсии пространства меняют знак:

$$\begin{aligned} \chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{m})\chi(1) &\rightarrow \chi'^+(3)(\vec{\sigma}'\vec{m}')\chi'(1) = -\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{m})\chi(1), \\ \chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{l})\chi(1) &\rightarrow \chi'^+(3)(\vec{\sigma}'\vec{l}')\chi'(1) = -\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{l})\chi(1), \end{aligned} \quad (3.30)$$

а инвариант $\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{n})\chi(1)$ не меняет знака при инверсии пространства:

$$\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{n})\chi(1) \rightarrow \chi'^+(3)(\vec{\sigma}'\vec{n}')\chi'(1) = \chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{n})\chi(1). \quad (3.31)$$

Используя соотношения (3.27), можно показать, что инвариант $\chi^+(3)\chi(1)$ также не меняет знак, т.е.

$$\chi^+(3)\chi(1) \rightarrow \chi'^+(3)\chi'(1) = \chi^+(3)\chi(1). \quad (3.32)$$

Требованию, чтобы амплитуда рассеяния была инвариантна относительно инверсии пространства, можно удовлетворить, если положить

$$C(\vec{s}, \vec{t}) = D(\vec{s}, \vec{t}) = 0. \quad (3.33)$$

Следовательно, амплитуда рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль при учете закона сохранения четности (инвариантность амплитуды рассеяния относительно инверсии пространства) содержит только две инвариантные амплитуды $A(\vec{s}, \vec{t})$ и $B(\vec{s}, \vec{t})$ и, соответственно, имеет вид

$$M = A(\vec{s}, \vec{t})\chi^+(3)\chi(1) + B(\vec{s}, \vec{t})\chi^+(3)(\vec{\sigma}\vec{n})\chi(1). \quad (3.34)$$

Следует отметить, что полученная амплитуда рассеяния M (3.34) инвариантна также и относительно обращения времени. Действительно, при обращении времени, когда $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r}$, а время $t \rightarrow t' = -t$, спиновая волновая функция и операторы преобразуются по антиунитарному закону [6]:

$$\begin{aligned}\chi &\rightarrow \bar{\chi}' = U_t \chi^*, \\ A &\rightarrow \bar{A} = U_t A^T U_t^+.\end{aligned}\quad (3.35)$$

где A^T – транспонированный оператор, а матрица U_t для частиц со спином $1/2$ имеет вид:

$$U_t = \exp\left\{-\frac{i\pi}{2}\sigma_2\right\} = -i\sigma_2. \quad (3.35a)$$

Следовательно, при обращении времени матрицы $\bar{\sigma}$ меняет знак:

$$\bar{\sigma} \rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = -i\sigma_2 \bar{\sigma}^T i\sigma_2 = -\bar{\sigma}.$$

При обращении времени импульс также меняет знак, при этом начальное и конечное состояния меняются местами, т.е. $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}'$, поэтому единичный вектор \vec{n} при обращении времени меняет знак:

$$\vec{n} \rightarrow \bar{\vec{n}} = -\vec{n}.$$

Следовательно, матрица $(\bar{\sigma}\vec{n})$ при обращении времени не меняет знак:

$$(\bar{\sigma}\vec{n}) \rightarrow (\bar{\bar{\sigma}\vec{n}}) = U_t (\bar{\sigma}\vec{n})^T U_t^+ = (\bar{\sigma}\vec{n}). \quad (3.36)$$

Тогда преобразование инварианта $\chi^+(3)(\bar{\sigma}\vec{n})\chi(1)$ при обращении времени определяется следующей цепочкой:

$$\begin{aligned}\chi^+(3)(\bar{\sigma}\vec{n})\chi(1) &\rightarrow \bar{\chi}^+(1)(\bar{\bar{\sigma}\vec{n}})\bar{\chi}(3) = \\ &= \chi^T(1)\sigma_2(\bar{\bar{\sigma}\vec{n}})\sigma_2\chi^*(3) = \chi^T(1)(\bar{\sigma}\vec{n})^T\chi^*(3) = \\ &= \chi^+(3)(\bar{\sigma}\vec{n})\chi(1).\end{aligned}$$

При написании этой цепочки равенств используются соотношения (3.35), (3.35a) и (3.36). Следовательно эта величина инвариантна относительно обращения времени.

Совершенно аналогично можно показать, что величина $\chi^+(3)\chi(1)$ при обращении времени не меняется. Следовательно, амплитуда M (3.34) инвариантна относительно обращения времени, и никакие новые ограничения на вид амплитуды рассеяния требование инвариантности относительно обращения времени не накладывает.

Пусть в рассматриваемой системе отсчета имеется выделенное направление, т.е. ось 3. Тогда падающий и выходящий из реакции пучки частиц можно характеризовать проекцией спина на эту ось, т.е. спиноры $\chi(1)$ и $\chi(3)$ являются собственными функциями опе-

ратора S_3 с собственным значением μ . Следовательно, амплитуду рассеяния можно характеризовать проекциями μ_1 и μ_3 , и она имеет вид

$$M_{\mu_3\mu_1} = A(\tilde{s}, \tilde{t})\chi_{j_3\mu_3}^+ \chi_{j_1\mu_1} + B(\tilde{s}, \tilde{t})\chi_{j_3\mu_3}^+ (\bar{\sigma}\bar{n})\chi_{j_1\mu_1}. \quad (3.37)$$

Учитывая соотношение (3.11), можно записать

$$\chi_{j_3\mu_3}^+ \chi_{j_1\mu_1} = \sum_{\rho=-1/2}^{1/2} \chi_{j_3\mu_3}^*(\rho)\chi_{j_1\mu_1}(\rho) = \delta_{\mu_3\mu_1}$$

и

$$\chi_{j_3\mu_3}^+ (\bar{\sigma}\bar{n})\chi_{j_1\mu_1} = \sum_{\rho, \rho'=-1/2}^{1/2} \chi_{j_3\mu_3}^*(\rho)(\bar{\sigma}\bar{n})_{\rho\rho'}\chi_{j_1\mu_1}(\rho') = (\bar{\sigma}\bar{n})_{\mu_3\mu_1}.$$

Следовательно, амплитуду рассеяния $M_{\mu_3\mu_1}$ можно представить в виде

$$M_{\mu_3\mu_1} = A(\tilde{s}, \tilde{t})\delta_{\mu_3\mu_1} + B(\tilde{s}, \tilde{t})(\bar{\sigma}\bar{n})_{\mu_3\mu_1}. \quad (3.38)$$

Наконец, амплитуду упругого рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль можно представить в виде матрицы 2×2 , которая записывается

$$M = A(\tilde{s}, \tilde{t})I + B(\tilde{s}, \tilde{t})(\bar{\sigma}\bar{n}), \quad (3.38a)$$

т.е. она содержит единичную матрицу и матрицу $(\bar{\sigma}\bar{n})$.

В п. 2.1 было показано, что спиновая структура потенциала взаимодействия ядерных частиц со спинами нуль и $1/2$ имеет вид (1.36)

$$V(\vec{r}) = V_0(r) + V_{LS}(r)(\vec{S}\vec{l}), \quad (3.39)$$

где \vec{l} – орбитальный относительный момент $\vec{l} = \frac{1}{\hbar}[\vec{r}\vec{p}]$. Второй

член в потенциале (3.39) описывает спин-орбитальное взаимодействие. Покажем, что наличие в потенциале спин-орбитального взаимодействия приводит к амплитуде рассеяния M (3.38). Действительно, в борновском приближении амплитуда рассеяния определяется выражением

$$M = -\frac{m_{12}}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\frac{\vec{p}_r\vec{r}}{\hbar}} (V_0(r) + V_{LS}(r)(\vec{S}\vec{l})) e^{i\frac{\vec{p}_r\vec{r}}{\hbar}} d^3r.$$

где \vec{p}_f и \vec{p}_i – импульсы частицы в конечном и начальном состоянии, соответственно, а m_{12} – приведенная масса сталкивающихся частиц. Тогда эту амплитуду рассеяния можно записать в виде:

$$M = A(\vec{q}) + \left(-\frac{m_{12}}{2\pi\hbar^2}\vec{S}\int e^{-i\frac{\vec{p}_f\vec{r}}{\hbar}}V_{LS}(r)\vec{l}e^{i\frac{\vec{p}_i\vec{r}}{\hbar}}d^3r\right),$$

где $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$, а $A(\vec{q})$ определяется выражением

$$A(\vec{q}) = -\frac{m_{12}}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}}V_0(r)d^3r.$$

Рассмотрим второй член амплитуды M . Поскольку имеет место соотношение

$$l_k e^{i\frac{\vec{p}_i\vec{r}}{\hbar}} = \frac{1}{\hbar}\varepsilon_{kmn}r_m\hat{p}_n e^{i\frac{\vec{p}_i\vec{r}}{\hbar}} = \frac{1}{\hbar}\varepsilon_{kmn}r_m(p_l)_n e^{i\frac{\vec{p}_i\vec{r}}{\hbar}} = \frac{1}{\hbar}[\vec{r}\vec{p}_l]_k e^{i\frac{\vec{p}_i\vec{r}}{\hbar}},$$

то амплитуду рассеяния можно представить в виде

$$M = A(\vec{q}) + \left(-\frac{m_{12}}{2\pi\hbar^3}\right)S_k\varepsilon_{kmn}(p_l)_n\int e^{-i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}}r_mV_{LS}(r)d^3r.$$

Рассмотрим интеграл, входящий в это выражение. Поскольку он параметрически зависит от единственного вектора \vec{q} , то можно записать

$$\int e^{-i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}}r_mV_{LS}(r)d^3r = q_m C(\vec{q}),$$

где

$$C(\vec{q}) = \frac{1}{q^2}\int e^{-i\frac{\vec{q}\vec{r}}{\hbar}}(\vec{q}\vec{r})V_{LS}(r)d^3r.$$

Тогда амплитуда рассеяния запишется как

$$M = A(\vec{q}) + \left(-\frac{m_{12}}{2\pi\hbar^3}\right)(\vec{S}[\vec{q}\vec{p}_i])C(\vec{q}).$$

Учитывая определение \vec{q} и введя единичный вектор перпендикулярный плоскости реакции

$$\vec{n} = \frac{[\vec{p}_f\vec{p}_i]}{|\vec{p}_f\vec{p}_i|},$$

получим для амплитуды рассеяния частицы со спином нуль на частице со спином $1/2$ в борновском приближении следующее выражение:

$$M = A(\vec{q}^2) + B(\vec{q}^2)(\vec{\sigma}\vec{n}).$$

Видно, что $B(\vec{q}^2) \sim C(\vec{q}^2)$. Следовательно, если $V_{LS}(r) \equiv 0$, т.е. спин-орбитальным взаимодействием можно пренебречь, то $B(\vec{q}^2) \equiv 0$. Тогда амплитуда упругого рассеяния частицы со спином нуль на частице со спином $1/2$ не содержит члена с матрицей $(\vec{\sigma}\vec{n})$. Таким образом, наличие в ядерном взаимодействии спин-орбитальных сил приводит к указанному члену.

3.3. Разложение по инвариантным амплитудам амплитуды упругого рассеяния нуклона на нуклоне

Рассмотрим амплитуду упругого рассеяния нуклона на нуклоне, т.е. частицы со спином $1/2$ на частице со спином $1/2$. Такой процесс характеризуется четырьмя спиновыми волновыми функциями $\chi(1), \chi(2), \chi^+(3), \chi^+(4)$, а также четырьмя импульсами частиц $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$. Так же, как и в случае рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль, построим из импульсов частиц три инвариантных относительно преобразований Галилея и ортонормированных единичных вектора $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$ (3.21) (3.22):

$$\vec{m} = \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{|\vec{p} + \vec{p}'|}, \quad \vec{l} = \frac{\vec{p} - \vec{p}'}{|\vec{p} - \vec{p}'|}, \quad \vec{n} = \frac{[\vec{p}\vec{p}']}{|[\vec{p}\vec{p}']|}.$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, из спиновых волновых функций четырех нуклонов можно построить два скаляра $\chi^+(3)\chi(1)$ и $\chi^+(4)\chi(2)$, а также два вектора $\chi^+(3)\vec{\sigma}_1\chi(1)$ и $\chi^+(4)\vec{\sigma}_2\chi(2)$. Матрицы Паули $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ действуют на спиновые функции первого и второго нуклона соответственно. Вообще говоря, можно построить еще два скаляра $\chi^+(4)\chi(1)$, $\chi^+(3)\chi(2)$ и два вектора $\chi^+(4)\vec{\sigma}_1\chi(1)$, $\chi^+(3)\vec{\sigma}_2\chi(2)$. Однако они не независимы, в частности, можно показать, что имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} (\chi^+(4)\chi(1))(\chi^+(3)\chi(2)) &= \alpha(\chi^+(3)\chi(1))(\chi^+(4)\chi(2)) + \\ &+ \beta(\chi^+(3)\vec{\sigma}_1\chi(1))(\chi^+(4)\vec{\sigma}_2\chi(2)), \end{aligned}$$

где α и β – некоторые числовые коэффициенты, которые выражаются через $9j$ -коэффициенты Вигнера. Это будет видно из рассмотрения, проведенного в п. 3.5.

Построенные выше скаляры и векторы принадлежат спиновому пространству каждой из частиц. Из этих двух независимых скаляров и двух независимых векторов можно сконструировать в 4-мерном спиновом пространстве двух нуклонов следующие инвариантные относительно преобразований Галилея величины:

а) Скаляр

$$\begin{aligned} (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))I(\chi(2) \otimes \chi(1)) &= (\chi^+(4)\chi(2)) \otimes (\chi^+(3)\chi(1)) = \\ &= (\chi^+(4)\chi(2))(\chi^+(3)\chi(1)) \end{aligned} \quad (3.40)$$

в последнем равенстве данной цепочки учтено, что оба сомножителя являются обычными числами, поэтому знак прямого произведения опущен. В этом выражении I – единичная матрица размерности 4×4 ($I = I^{(1)} \otimes I^{(2)}$, где $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ – единичные 2×2 матрицы, действующие в спиновом пространстве первого и второго нуклона, соответственно);

б) два вектора

$$\begin{aligned} (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(I^{(2)} \otimes \bar{\sigma}_1)(\chi(2) \otimes \chi(1)) &= \\ = (\chi^+(4)I^{(2)}\chi(2)) \otimes (\chi^+(3)\bar{\sigma}_1\chi(1)) &= \\ = (\chi^+(4)\chi(2))(\chi^+(3)\bar{\sigma}_1\chi(1)) \end{aligned} \quad (3.41a)$$

и

$$\begin{aligned} (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(\bar{\sigma}_2 \otimes I^{(1)})(\chi(2) \otimes \chi(1)) &= \\ = (\chi^+(4)\bar{\sigma}_2\chi(2)) \otimes (\chi^+(3)I^{(1)}\chi(1)) &= \\ = (\chi^+(4)\bar{\sigma}_2\chi(2))(\chi^+(3)\chi(1)); \end{aligned} \quad (3.41a)$$

в) тензор второго ранга

$$\begin{aligned} (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(\sigma_{2,i} \otimes \sigma_{1,j})(\chi(2) \otimes \chi(1)) &= \\ = (\chi^+(4)\sigma_{2,i}\chi(2)) \otimes (\chi^+(3)\sigma_{1,j}\chi(1)) &= \\ = (\chi^+(4)\sigma_{2,i}\chi(2))(\chi^+(3)\sigma_{1,j}\chi(1)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Преобразуем построенные выше величины. Во-первых, вместо двух построенных выше векторов (3.41) введем два других вектора – сумму и разность выписанных векторов:

$$\begin{aligned}
& (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(I^{(2)} \otimes \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \otimes I^{(1)})(\chi(2) \otimes \chi(1)), \\
& (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(I^{(2)} \otimes \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \otimes I^{(1)})(\chi(2) \otimes \chi(1)).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Во-вторых, тензор второго ранга совершенно так же, как это было сделано в гл.1, разложим на неприводимые ковариантные величины, т.е. на

а) скаляр:

$$(\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(\bar{\sigma}_2 \otimes \bar{\sigma}_1)(\chi(2) \otimes \chi(1)), \tag{3.43}$$

б) антисимметричный тензор второго ранга

$$(\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))(\sigma_{2,i} \otimes \sigma_{1,j} - \sigma_{2,j} \otimes \sigma_{1,i})(\chi(2) \otimes \chi(1)),$$

который эквивалентен дуальному вектору

$$(\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))[\bar{\sigma}_2 \otimes \bar{\sigma}_1](\chi(2) \otimes \chi(1)), \tag{3.44}$$

в) симметричный тензор второго ранга со шпуром, равным нулю:

$$(\chi^+(4) \otimes \chi^+(3))S_{ij}(\chi(2) \otimes \chi(1)), \tag{3.45}$$

где

$$S_{ij} \equiv \sigma_{2,i} \otimes \sigma_{1,j} + \sigma_{2,j} \otimes \sigma_{1,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\bar{\sigma}_2 \otimes \bar{\sigma}_1). \tag{3.45a}$$

Таким образом, из спиновых волновых функций построили два скаляра (3.40) и (3.43), три вектора (3.42) и (3.44) и симметричный тензор второго ранга со шпуром, равным нулю (3.45). Всего 16 величин.

Все построенные выше величины, как из импульсов частиц, так и из их спиновых волновых функций инвариантны относительно преобразований Галилея. Следовательно, для построения инвариантов относительно вращения необходимо свернуть величину, построенную из импульсов, с соответствующей величиной, построенной из спиновых волновых функций. Поэтому необходимо построить тензоры второго ранга из трех ортонормированных единичных векторов $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$. Эти тензоры будут сворачиваться с симметричным тензором второго ранга со шпуром, равным нулю, построенным из спиновых волновых функций. Всего из указанных выше векторов можно построить шесть симметричных векторов второго ранга:

$$m_i m_j, l_i l_j, n_i n_j, m_i l_j + m_j l_i, l_i n_j + l_j n_i, m_i n_j + m_j n_i. \tag{3.46}$$

Однако среди этих шести тензоров не все независимы. Действительно, вектор \vec{n} пропорционален вектору $[\vec{p}\vec{p}']$ ($\vec{n} \sim [\vec{p}\vec{p}']$), следовательно, для тензора второго ранга можно написать

$$n_i n_j \sim \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} p_k p'_l p_m p'_n.$$

Тогда, воспользовавшись хорошо известным соотношением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} = & \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{kn} \delta_{lj} + \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{lm} - \\ & - \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{km} \delta_{lj}, \end{aligned}$$

можно свести данный тензор к другим тензорам. Таким образом, имеется всего пять независимых симметричных тензоров второго ранга.

После всего сказанного легко написать 16 инвариантов относительно преобразований Галилея и вращений, составленных из импульсов частиц и их спиновых волновых функций. Они приведены в табл. 3.1.

Необходимо отметить, что в этой таблицы и далее, так же как и в гл. 1, опущен знак прямого произведения, и в соответствии с этим, в прямых произведениях $\vec{\sigma}_2 \otimes I^{(1)}$ и $I^{(2)} \otimes \vec{\sigma}_1$ опускается единичная матрица. Это не вызывает недоразумений. Действительно, рассмотрим второй инвариант из табл. 3.1. Он определяется выражением (3.43):

$$\begin{aligned} & (\chi^+(4) \otimes \chi^+(3)) (\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_1) (\chi(2) \otimes \chi(1)) = \\ & = (\chi^+(4) \vec{\sigma}_2 \chi(2)) \otimes (\chi^+(3) \vec{\sigma}_1 \chi(1)) = (\chi^+(4) \vec{\sigma}_2 \chi(2)) (\chi^+(3) \vec{\sigma}_1 \chi(1)). \end{aligned}$$

С другой стороны, при записи, когда опущен знак прямого произведения, как это сделано в табл. 3.1, необходимо учитывать, что оператор $\vec{\sigma}_2$ действует на спиноры $\chi(2)$ и $\chi^+(4)$, а оператор $\vec{\sigma}_1$ – на спиноры $\chi(1)$ и $\chi^+(2)$, тогда можно написать:

Таблица 3.1

N	Инвариант	η_p	η_T
1	$\chi^+(4) \chi^+(3) \chi(2) \chi(1)$	+1	+1
2	$\chi^+(4) \chi^+(3) (\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_1) \chi(2) \chi(1)$	+1	+1
3	$\chi^+(4) \chi^+(3) (\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_1) \vec{m} \chi(2) \chi(1)$	-1	

4	$\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_1)\bar{l}\chi(2)\chi(1)$	-1	
5	$\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_1)\bar{n}\chi(2)\chi(1)$	+1	+1
6	$\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)\bar{m}\chi(2)\chi(1)$	-1	
7	$\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)\bar{l}\chi(2)\chi(1)$	-1	
8	$\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)\bar{n}\chi(2)\chi(1)$	+1	+1
9	$\chi^+(4)\chi^+(3)[\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1]\bar{m}\chi(2)\chi(1)$	-1	
10	$\chi^+(4)\chi^+(3)[\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1]\bar{l}\chi(2)\chi(1)$	-1	
11	$\chi^+(4)\chi^+(3)[\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1]\bar{n}\chi(2)\chi(1)$	+1	-1
12	$\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}l_i l_j \chi(2)\chi(1)$	+1	+1
13	$\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}m_i m_j \chi(2)\chi(1)$	+1	+1
14	$\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}(l_i m_j + l_j m_i)\chi(2)\chi(1)$	+1	-1
15	$\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}(l_i n_j + l_j n_i)\chi(2)\chi(1)$	-1	
16	$\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}(n_i m_j + n_j m_i)\chi(2)\chi(1)$	-1	

$$\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1)\chi(2)\chi(1) = (\chi^+(4)\bar{\sigma}_2\chi(2))(\chi^+(3)\bar{\sigma}_1\chi(1)).$$

Результативно эти два выражения совпадают. Однако если записать матрицу рассеяния нуклона на нуклоне, то она должна быть матрицей 4×4 , следовательно, $(\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1)$ надо понимать как прямое произведение.

Таким образом, разложение амплитуды рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином $1/2$ должно содержать 16 инвариантных амплитуд, зависящих от двух инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} , которые определяются равенствами (3.26). Однако при рассмотрении рассеяния нуклона на нуклоне необходимо учитывать закон сохранения четности в сильных взаимодействиях. Это означает, что амплитуда рассеяния должна быть инвариантна относительно инверсии пространства, т.е. когда, $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$, а $t \rightarrow t' = t$. Инвариантные амплитуды при инверсии пространства не меняются, так как переменные \tilde{s} и \tilde{t} не меняются при таком преобразовании. Следовательно, для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть, как преобразуются при инверсии пространства инвари-

анты, выписанные в табл. 3.1. Как уже упоминалось в п. 3.2, импульсы частиц при инверсии пространства меняют знак. Поэтому единичные векторы \vec{m} и \vec{l} меняют знак (3.39), а единичный вектор \vec{n} знак не меняет (3.39а). Значит, при инверсии пространства пять независимых тензоров второго ранга преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_i m_j &\rightarrow m'_i m'_j = m_i m_j, & l_i l_j &\rightarrow l'_i l'_j = l_i l_j, \\ l_i m_j + l_j m_i &\rightarrow l'_i m'_j + l'_j m'_i = l_i m_j + l_j m_i, \\ l_i n_j + l_j n_i &\rightarrow l'_i n'_j + l'_j n'_i = -(l_i n_j + l_j n_i), \\ m_i n_j + m_j n_i &\rightarrow m'_i n'_j + m'_j n'_i = -(m_i n_j + m_j n_i). \end{aligned}$$

Спиновые операторы $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ при инверсии пространства не меняются. Используя матрицу преобразования спиновых волновых функций t_g (1.16), легко убедиться, что в результате инверсии пространства (преобразования (1.18)) спиновые матрицы, входящие в инварианты табл. 3.1, не меняются. Напомним, что прямое произведение двух единичных матриц дает единичную матрицу. В результате каждый из инвариантов табл. 3.1 при инверсии пространства умножится на множитель η_p , который равен либо $+1$, либо -1 . Значения η_p приведены в третьем столбце таблицы. Видно, что восемь инвариантов меняют знак при инверсии пространства. Следовательно, чтобы удовлетворить закону сохранения четности, т.е. требованию инвариантности амплитуды M относительно инверсии пространства эти инварианты не должны входить в разложение амплитуды M по инвариантным амплитудам. Таким образом, разложение амплитуды M можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
M = & a(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)I\chi(2)\chi(1) + \\
& + b(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1)\chi(2)\chi(1) + \\
& + c(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_1)\bar{n}\chi(2)\chi(1) + \\
& + d(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)\bar{n}\chi(2)\chi(1) + \\
& + e(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)[\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1]\bar{n}\chi(2)\chi(1) + \\
& + f(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}l_i l_j \chi(2)\chi(1) + \\
& + g(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}m_i m_j \chi(2)\chi(1) + \\
& + h(\tilde{s}, \tilde{t})\chi^+(4)\chi^+(3)S_{ij}(l_i m_j + l_j m_i)\chi(2)\chi(1),
\end{aligned} \tag{3.47}$$

где a, b, c, d, e, f, g, h – инвариантные амплитуды, зависящие от двух переменных, как для всякого процесса $2 \rightarrow 2$.

Пусть так же, как в предыдущем случае, спиновые состояния падающих и выходящих из реакции частиц характеризуются в некоторой системе отсчета проекциями на выделенную ось, т.е. спиновые функции $\chi(i)$ ($i=1,2,3,4$) являются собственными функциями оператора S_3 и соответствуют собственному значению μ_i , $i=1,2,3,4$. В соответствии этим амплитуду упругого рассеяния можно также характеризовать в этой системе отсчета проекциями спинов частиц на ось 3. Учитывая определение прямого произведения двух матриц

$$(\bar{\sigma}_2 \otimes \bar{\sigma}_1)_{\rho_2 \rho_1, \rho'_2 \rho'_1} \equiv (\bar{\sigma}_2)_{\rho_2 \rho'_2} (\bar{\sigma}_1)_{\rho_1 \rho'_1},$$

а также определения спиновой волновой функции двух нуклонов

$$(\chi_{\mu_2} \otimes \chi_{\mu_1})_{\rho_2 \rho_1} = \chi_{\mu_2}(\rho_2)\chi_{\mu_1}(\rho_1) = \delta_{\mu_2, \rho_2} \delta_{\mu_1, \rho_1},$$

амплитуду рассеяния M в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
M_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} = & a(\tilde{s}, \tilde{t})\delta_{\mu_4 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_1} + b(\tilde{s}, \tilde{t})(\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1)_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} + \\
& + c(\tilde{s}, \tilde{t})((\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)\bar{n})_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} + d(\tilde{s}, \tilde{t})((\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)\bar{n})_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} + \\
& + e(\tilde{s}, \tilde{t})([\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1]\bar{n})_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} + f(\tilde{s}, \tilde{t})((\bar{\sigma}_2\bar{l})(\bar{\sigma}_1\bar{l}))_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} + \\
& + g(\tilde{s}, \tilde{t})((\bar{\sigma}_2\bar{m})(\bar{\sigma}_1\bar{m}))_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1} + \\
& + h(\tilde{s}, \tilde{t})((\bar{\sigma}_2\bar{l})(\bar{\sigma}_1\bar{m}) + (\bar{\sigma}_2\bar{m})(\bar{\sigma}_1\bar{l})).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Следовательно, амплитуду упругого рассеяния нуклона на нуклоне можно представить в виде матрицы 4×4 , и ее разложение по инвариантным амплитудам имеет вид:

$$\begin{aligned}
 M = & a(\tilde{s}, \tilde{t}) + b(\tilde{s}, \tilde{t})(\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_1) + c(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \vec{n}) + \\
 & + d(\tilde{s}, \tilde{t})(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) \vec{n} + e(\tilde{s}, \tilde{t})([\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_1] \vec{n}) + \\
 & + f(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{l})(\vec{\sigma}_1 \vec{l})) + g(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{m})(\vec{\sigma}_1 \vec{m})) + \\
 & + h(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{l})(\vec{\sigma}_1 \vec{m}) + (\vec{\sigma}_2 \vec{m})(\vec{\sigma}_1 \vec{l})).
 \end{aligned}
 \tag{3.48a}$$

Отметим, что в этом выражении произведение матриц $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ является прямым произведением матриц и, соответственно, любая спиновая матрица, стоящая в правой стороне равенства, является матрицей 4×4 , включая единичную матрицу, стоящую у инвариантной амплитуды $a(\tilde{s}, \tilde{t})$.

Потребуем, чтобы амплитуда M была инвариантна относительно обращения времени. Как упоминалось в п. 3.2, при обращении времени импульсы меняют знак, т.е. $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ и $\vec{p}' \rightarrow -\vec{p}'$, а также происходит замена начального состояния конечным и наоборот ($\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}'$). Соответственно, единичные векторы $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$ при обращении времени преобразуются следующим образом: $\vec{m} \rightarrow -\vec{m}$, $\vec{l} \rightarrow \vec{l}$, $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$.

Учитывая закон преобразования прямого произведения двух спиновых матриц (1.30) при обращении времени, легко найти, что каждый из инвариантов, построенный из спиновых матриц и импульсов, при обращении времени умножится на множитель η_i , который равняется либо $+1$, либо -1 . В табл. 3.1 в четвертом столбце приведены значения множителя η_i для инвариантов. Видно, что инварианты $([\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_1] \vec{n})$ и $((\vec{\sigma}_2 \vec{l})(\vec{\sigma}_1 \vec{m}) + (\vec{\sigma}_2 \vec{m})(\vec{\sigma}_1 \vec{l}))$ умножаются на -1 , и, следовательно, для удовлетворения требованию инвариантности амплитуды рассеяния M относительно обращения времени необходимо потребовать, чтобы

$$e(\tilde{s}, \tilde{t}) = h(\tilde{s}, \tilde{t}) = 0. \tag{3.49}$$

Таким образом, амплитуда M , удовлетворяющая требованию инвариантности относительно инверсии пространства и обращения времени, должна иметь вид

$$\begin{aligned}
M = & a(\tilde{s}, \tilde{t}) + b(\tilde{s}, \tilde{t})(\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_1) + c(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \vec{n}) + \\
& + d(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) \vec{n}) + f(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{l})(\vec{\sigma}_1 \vec{l})) + \\
& + g(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{m})(\vec{\sigma}_1 \vec{m})).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Пусть рассеиваются тождественные частицы. Тогда амплитуда M должна быть симметрична относительно перестановки $1 \leftrightarrow 2$. Такая перестановка означает, что $\vec{\sigma}_1 \leftrightarrow \vec{\sigma}_2$, а импульсы \vec{p} и \vec{p}' переходят в $-\vec{p}$ и $-\vec{p}'$. Это соответствует следующему преобразованию единичных векторов $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$:

$$\vec{m} \rightarrow -\vec{m}, \vec{l} \rightarrow -\vec{l}, \vec{n} \rightarrow \vec{n}.$$

При таком преобразовании операторов спина и единичных векторов $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$ меняет знак лишь один инвариант, а именно $(\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) \vec{n}$, поэтому для тождественных частиц необходимо положить

$$d(\tilde{s}, \tilde{t}) = 0. \tag{3.51}$$

Таким образом, амплитуда рассеяния двух нуклонов, M инвариантна относительно преобразований Галилея, вращения, преобразования инверсии, обращения времени и симметрична относительно перестановки $1 \leftrightarrow 2$, определяется пятью инвариантными амплитудами, и ее разложение по этим амплитудам имеет вид

$$\begin{aligned}
M = & a(\tilde{s}, \tilde{t}) + b(\tilde{s}, \tilde{t})(\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_1) + c(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \vec{n}) + \\
& + f(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{l})(\vec{\sigma}_1 \vec{l})) + g(\tilde{s}, \tilde{t})((\vec{\sigma}_2 \vec{m})(\vec{\sigma}_1 \vec{m})),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

где a, b, c, f, g – инвариантные амплитуды, зависящие от инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} .

В случае NN -взаимодействия имеется дополнительная инвариантность – принцип зарядовой независимости ядерных сил. Как показано в п. 1.3, согласно этому принципу, гамильтониан двух нуклонов, а следовательно, и амплитуда рассеяния M инвариантна относительно вращений в изотопическом пространстве. Там же было показано, что в изотопическом пространстве двух нуклонов можно построить два инварианта I и $(\vec{\tau}_2 \vec{\tau}_1)$, где $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ – матрицы Паули в изотопическом пространстве каждого из нуклонов, а, I – единичная матрица. В соответствии с этим амплитуду рассеяния нуклона на нуклоне M можно представить в виде

$$M = M_0 I + M_1 (\vec{\tau}_2 \vec{\tau}_1). \tag{3.53}$$

В этом выражении амплитуды M_0 и M_1 определяются соотношением (3.52) с инвариантными амплитудами a_0, b_0, c_0, f_0, g_0 и a_1, b_1, c_1, f_1, g_1 соответственно.

3.4. Разложение амплитуды треххвостки по инвариантным амплитудам

В данном параграфе рассмотрим выделение кинематической зависимости амплитуды распада частицы 1 на частицы 2 и 3, т.е. процесса $1 \rightarrow 2 + 3$. Такой процесс называется треххвосткой, так как в процессе участвуют три частицы. Пусть каждая из частиц имеет спин j_i ($i = 1, 2, 3$), и спиновые состояния частиц описываются спиновыми волновыми функциями χ_{j_i} ($i = 1, 2, 3$), которые инвариантны относительно преобразований Галилея. Как упоминалось ранее, в соответствии с принципом суперпозиции элементы матрицы рассеяния M должны быть линейны по спиновым функциям. Следовательно, в амплитуду M должны входить χ_{j_1} и $\chi_{j_2}^+, \chi_{j_3}^+$ согласно условию, что конечным частицам соответствуют эрмитовски сопряженные спиновые функции.

В нашем распоряжении имеются скорости трех частиц $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Из них можно построить единичный вектор \vec{n}_{23} , инвариантный относительно преобразований Галилея, где

$$\vec{n}_{ik} = \frac{\vec{v}_i - \vec{v}_k}{|\vec{v}_i - \vec{v}_k|}. \quad (3.54)$$

Вектор \vec{n}_{23} можно записать через галилеев инвариантный импульс \vec{p} частиц 2 и 3 в их Ц-системе:

$$\vec{n}_{23} = \vec{k} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \vec{p} = m_{23} \left(\frac{\vec{p}_2}{m_2} - \frac{\vec{p}_3}{m_3} \right). \quad (3.54a)$$

Таким образом, задача о выделении инвариантных амплитуд в треххвостке сводится к построению всех независимых инвариантов относительно преобразований Галилея и вращений из вектора \vec{n}_{23} и спиновых функций.

Как и ранее, будем характеризовать спиновые состояния частиц их спиновыми волновыми функциями χ_{j_i} и, соответственно, их компонентами $\{\chi_{j_i}(\rho), \rho = -j, \dots, +j\}$ (3.9), (3.10), (3.11).

Сконструируем соответствующие инварианты. С этой целью построим спиновую волновую функцию системы двух частиц 2 и 3, которую обозначим через $\chi_{j_{23}}(2,3)$, из спиновых функций частиц 2 и 3. Эта функция является собственной функцией оператора $(\vec{S}_2 + \vec{S}_3)^2$, которая соответствует собственному значению j_{23} :

$$(\vec{S}_2 + \vec{S}_3)^2 \chi_{j_{23}} = j_{23}(j_{23} + 1) \chi_{j_{23}}. \quad (3.55)$$

Она содержит $(2j_{23} + 1)$ компоненту:

$$\chi_{j_{23}}(2,3) = \left\{ \chi_{j_{23}}(2,3; \rho_{23}), \rho_{23} = -j_{23}, \dots, +j_{23} \right\}, \quad (3.56)$$

где компоненты $\chi_{j_{23}}(2,3; \rho_{23})$ определяются с помощью коэффициентов Клебша–Гордана и имеют вид

$$\chi_{j_{23}}(2,3; \rho_{23}) = \sum_{\rho_2 \rho_3} C_{j_2 j_3 j_{23}}^{j_{23} \rho_2 \rho_3} \chi_{j_2}(\rho_2) \chi_{j_3}(\rho_3). \quad (3.56a)$$

Таких спиновых функций можно построить несколько с разными значениями j_{23} . При этом j_{23} меняются в пределах $|j_2 - j_3| \leq j_{23} \leq j_2 + j_3$. Отметим, что построенные выше спиновые функции не являются собственными функциями оператора $(\vec{S}_2 + \vec{S}_3)_z$.

Следующим шагом будет построение собственных функций оператора $(\vec{S} + \vec{l})^2$, соответствующей собственному значению j_1 :

$$(\vec{S} + \vec{l})^2 \chi_{j_1}(\vec{k}; 2,3) = j_1(j_1 + 1) \chi_{j_1}(\vec{k}; 2,3), \quad (3.57)$$

где $\vec{S} = \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ – оператор суммарного спина частиц 2 и 3, а \vec{l} – оператор относительного орбитального момента частиц 2 и 3. Спин-угловая волновая функция $\chi_{j_1}(\vec{k}; 2,3)$ имеет $(2j_1 + 1)$ компоненту:

$$\chi_{j_1}(\vec{k}; 2,3) = \left\{ \chi_{j_1}(\vec{k}; 2,3; \rho_1), \rho_1 = -j_1, \dots, +j_1 \right\}, \quad (3.58)$$

где компоненты спин-угловой волновой функции $\chi_{j_1}(\vec{k}; 2,3; \rho_1)$ определяются соотношением:

$$\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3; \rho_1) = \sum_{\rho_2 \rho_3 \rho_{23} m} C_{j_{23} \rho_{23} l m}^{j_1 \rho_1} C_{j_2 \rho_2 j_3 \rho_3}^{j_{23} \rho_{23}} \chi_{j_2}(\rho_2) \chi_{j_3}(\rho_3) Y_{lm}(\vec{\kappa}). \quad (3.58a)$$

В выражении (3.58a) входит шаровая функция $Y_{lm}(\vec{\kappa})$, которая описывает относительный орбитальный момент частиц 2 и 3 и является собственной функцией оператора \vec{l}^2 :

$$\vec{l}^2 Y_{lm}(\vec{\kappa}) = l(l+1) Y_{lm}(\vec{\kappa}).$$

Отметим, что построенная таким образом функция $\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3)$ не является собственной функцией оператора проекции на некоторую ось $(\vec{S} + \vec{l})_z$.

Спин-угловая функция $\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3)$ обладает такими же трансформационными свойствами, что и функция частицы со спином j_1 , т.е.

$$\chi_{j_1} = \left\{ \chi_{j_1}(\rho_1), \rho_1 = -j_1, \dots, +j_1 \right\}. \quad (3.59)$$

Произведение эрмитовски сопряженной спин-угловой функции $\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3)$ на спиновую функцию χ_{j_1} является инвариантом как относительно преобразования Галилея, так и относительно вращений. Таким образом, из спиновых волновых функций частиц 1, 2, 3 и их импульсов сконструированы инварианты

$$\chi_{j_1}^+(\vec{\kappa}; 2, 3) \chi_{j_1} = \sum_{\rho_1 = -j_1}^{+j_1} \chi_{j_1}^*(\vec{\kappa}; 2, 3; \rho_1) \chi_{j_1}(\rho_1). \quad (3.60)$$

Каждый такой инвариант характеризуется двумя числами j_{23} и l . Число инвариантов определяется тем, какие значения принимают эти числа. Из построения инвариантов видно, что j_{23} и l могут изменяться в следующих пределах:

$$\begin{aligned} |j_2 - j_3| &\leq j_{23} \leq j_2 + j_3, \\ |j_{23} - j_1| &\leq l \leq j_{23} + j_1. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Для построения разложения амплитуды распада частицы 1 на 2 и 3, т.е. треххвостки, по инвариантным амплитудам необходимо умножить каждый инвариант на свою весовую функцию, которая является инвариантной амплитудой (их еще для процессов распада называют форм-факторами):

$$M = \sum_{J_{23} l} \Gamma(J_{23}, l) \sum_{\rho_1 = -j_1}^{+j_1} \chi_{j_1}^*(\vec{\kappa}; 2, 3; \rho_1) \chi_{j_1}(\rho_1). \quad (3.62)$$

Используя определение спин-угловых функций $\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3)$ (3.58a), это разложение можно представить в виде

$$M = \sum_{J_{23} l} \Gamma(J_{23}, l) \times \\ \times \sum_{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_{23} m} C_{J_{23} \rho_{23} l m}^{j_1 \rho_1} C_{j_2 \rho_2 j_3 \rho_3}^{j_{23} \rho_{23}} \chi_{j_2}^*(\rho_2) \chi_{j_3}^*(\rho_3) \chi_{j_1}(\rho_1) Y_{lm}^*(\vec{\kappa}). \quad (3.63)$$

При написании выражения (3.63) учтено, что коэффициенты Клебша–Гордана действительны. Следует отметить, что если частицы 1, 2, 3 – реальные, т.е. $p_i^2 = m_i^2$ ($i = 1, 2, 3$), то амплитуды $\Gamma(J_{23}, l)$ являются константами.

Пусть спиновые волновые функции частиц являются собственными функциями оператора проекции спина на некоторое направление (ось 3) в некоторой системе отсчета, т.е. спиновые функции характеризуются проекцией спина μ_i :

$$S_3 \chi_{j_i \mu_i} = \mu_i \chi_{j_i \mu_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

тогда амплитуду процесса M также можно характеризовать проекциями спинов частиц на выделенное направление. В соответствии с этим, используя (3.11), амплитуду M можно представить как

$$M_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = \sum_{J_{23} l} \Gamma(J_{23}, l) \sum_{\mu_{23} m} C_{j_2 \mu_2 j_3 \mu_3}^{j_{23} \mu_{23}} C_{J_{23} \mu_{23} l m}^{j_1 \mu_1} Y_{lm}^*(\vec{\kappa}). \quad (3.64)$$

В этом случае построенная выше спиновая волновая функция $\chi_{j_{23}}(2, 3)$ (3.55) является также собственной функцией оператора $(\vec{S}_2 + \vec{S}_3)_z$ и соответствует собственному значению $\mu_{23} = \mu_2 + \mu_3$, т.е.

$$(\vec{S}_2 + \vec{S}_3)_z \chi_{j_{23} \mu_{23}}(2, 3) = \mu_{23} \chi_{j_{23} \mu_{23}}(2, 3). \quad (3.65)$$

Следовательно, спиновая волновая функция $\chi_{j_{23} \mu_{23}}(2, 3)$ в соответствии с (3.56a) имеет одну компоненту и записывается в виде

$$\chi_{j_{23} \mu_{23}}(2, 3; \rho_{23}) = C_{j_2 \mu_2 j_3 \mu_3}^{j_{23} \mu_{23}} \delta_{\rho_{23} \mu_{23}}. \quad (3.66)$$

Соответственно, спин-угловая функция $\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3)$ (3.58) определяется компонентами $\chi_{j_1}(\vec{\kappa}; 2, 3; \rho_1)$, которые можно представить в виде

$$\chi_{j_1}(\bar{\kappa}; 2, 3; \rho_1) = \sum_m C_{j_{23}\mu_{23}lm}^{j_1\rho_1} C_{j_2\mu_2j_3\mu_3}^{j_{23}\mu_{23}} Y_{lm}(\bar{\kappa}), \quad (3.67)$$

а компонента с $\rho_1 = \mu_1$ в соответствии с (3.67) запишется как

$$\chi_{j_1}(\bar{\kappa}; 2, 3; \mu_1) = C_{j_{23}\mu_{23}l\mu_1-\mu_{23}}^{j_1\mu_1} C_{j_2\mu_2j_3\mu_3}^{j_{23}\mu_{23}} Y_{l\mu_1-\mu_{23}}(\bar{\kappa}). \quad (3.68)$$

Рассмотрим построенные выше инварианты $\chi_{j_1}^+(\bar{\kappa}; 2, 3)\chi_{j_1}$ (3.60). Их можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \chi_{j_1}^+(\bar{\kappa}; 2, 3)\chi_{j_1} = \\ & = \sum_m \left\{ \sum_{\rho_1\rho_2\rho_3} C_{j_{23}\rho_{23}lm}^{j_1\rho_1} C_{j_2\rho_2j_3\rho_3}^{j_{23}\rho_{23}} \chi_{j_2}^*(\rho_2)\chi_{j_3}^*(\rho_3)\chi_{j_1}(\rho_1) \right\} Y_{lm}^*(\bar{\kappa}). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Введем величину T_{lm}^Δ , которую определим соотношением

$$T_{lm}^\Delta \equiv \sum_{\rho_1\rho_2\rho_3} C_{j_{23}\rho_{23}lm}^{j_1\rho_1} C_{j_2\rho_2j_3\rho_3}^{j_{23}\rho_{23}} \chi_{j_2}^*(\rho_2)\chi_{j_3}^*(\rho_3)\chi_{j_1}(\rho_1). \quad (3.70)$$

Эта величина называется спин-тензором. Она преобразуется как шаровой $(2l+1)$ -вектор. Однако этот шаровой вектор построен из спиновых функций. Верхний индекс у спин-тензора Δ обозначает дополнительные величины, характеризующие этот спин-тензор. В случае треххвостки имеется всего одна такая величина j_{23} . Тогда построенные инварианты можно записать как

$$\chi_{j_1}^+(\bar{\kappa}; 2, 3)\chi_{j_1} = \sum_m T_{lm}^{j_{23}} Y_{lm}^*(\bar{\kappa}). \quad (3.71)$$

Следовательно, можно сказать, что для построения инвариантов необходимо построить из спиновых волновых функций частиц спин-тензор, который преобразуется как $(2l+1)$ -шаровой вектор. Затем, из импульсов, участвующих в процессе частиц, построить инвариантные относительно преобразований Галилея единичны вектора \vec{n}_{ij} (3.54), из которых сконструировать $(2l+1)$ -шаровой вектор, который обозначим через Φ_{lm}^δ . Верхние индексы δ определяют величины, характеризующие этот шаровой вектор. Отметим, что этот шаровой вектор должен строиться из независимых единичных векторов \vec{n}_{ij} . В случае треххвостки Φ_{lm}^δ определяется шаровой функцией $Y_{lm}(\vec{n}_{23})$ и не зависит от индексов δ . Тогда скалярное произведение спин-тензора T_{lm}^Δ на шаровой вектор Φ_{lm}^δ , т.е.

величина $\sum_m T_{lm}^\Delta \Phi_{lm}^{\delta*}(\vec{n}_{ij})$, является инвариантом как относительно преобразований Галилея, так и относительно вращений. Следовательно, разложение амплитуды M по инвариантным амплитудам можно представить в виде

$$M = \sum_{\Delta\delta l} f(\Delta, \delta, l) \sum_m T_{lm}^\Delta \Phi_{lm}^{\delta*}(\vec{n}_{ij}). \quad (3.72)$$

Предложенная процедура – общий рецепт построения разложения амплитуды M по инвариантным амплитудам. Величины $f(\Delta, \delta, l)$ являются инвариантными амплитудами. Они зависят от $(3n-10)$ инвариантных переменных \tilde{s}_{ij} и \tilde{t}_{ij} (3.17).

Если предположить, что процесс $1+2 \rightarrow 3+4+\dots+n$ рассматривается в некоторой определенной системе отсчета, а спиновые состояния частиц в этой системе отсчета характеризуются проекциями спина μ_i на выделенную ось 3, то разложение амплитуды M по инвариантным амплитудам запишется в виде

$$M_{\mu_1\mu_2,\mu_3,\dots,\mu_n} = \sum_{\Delta\delta l} f(\Delta, \delta, l) \sum_m (T_{lm}^\Delta)_{\mu_1\mu_2,\mu_3,\dots,\mu_n} \Phi_{lm}^{\delta*}(\vec{n}_{ij}). \quad (3.72a)$$

Этим методом в следующем параграфе будет построено разложение по инвариантным амплитудам амплитуды M произвольной реакции $1+2 \rightarrow 3+4$, которая носит название четыреххвостки.

Рассмотрим амплитуду треххвостки M (3.63) и выясним, сколько форм-факторов (или инвариантных амплитуд) может входить в ее разложение. Пусть $j_2 \leq j_3$. Это не накладывает никаких ограничений на амплитуду треххвостки. Рассмотрим три случая:

$$\text{а) } j_1 \leq j_3 - j_2, \text{ б) } j_2 + j_3 \leq j_1, \text{ в) } j_3 - j_2 \leq j_1 \leq j_2 + j_3$$

Рассмотрим случай а). Из соотношений (3.61) следует, что

$$j_{23} = j_3 - j_2, j_3 - j_2 + 1, \dots, j_3 + j_2$$

Следовательно, j_{23} может принимать всего $(2j_2 + 1)$ значение. Соответственно, l равно

$$l = j_{23} - j_1, j_{23} - j_1 + 1, \dots, j_{23} + j_1,$$

т.е. может принимать всего $(2j_1 + 1)$ значение, т.е. число инвариантных амплитуд, которые определяются числами j_{23} и l , равно в этом случае N_a :

$$N_a = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \quad (3.73a)$$

Рассмотрим случай б). Так же как и в предыдущем случае, из соотношений (3.61) следует, что j_{23} может принимать $(2j_2 + 1)$ значение:

$$j_{23} = j_3 - j_2, j_3 - j_2 + 1, \dots, j_3 + j_2.$$

Соответственно, при данном значении j_{23} l принимает $(2j_{23} + 1)$ значение:

$$l = j_1 - j_{23}, j_1 - j_{23} + 1, \dots, j_1 + j_{23}.$$

Таким образом, число инвариантных амплитуд при данном значении j_{23} меняется от $(2(j_3 - j_2) + 1)(2j_2 + 1)$, если $j_{23} = j_3 - j_2$, до $(2(j_3 + j_2) + 1)(2j_2 + 1)$, если $j_{23} = j_3 + j_2$. Следовательно, число инвариантных амплитуд в этом случае равно

$$N_6 = (2j_2 + 1)(2j_3 + 1) \quad (3.73б)$$

В случае в) разделим интервал изменения значений j_{23} на два интервала. В первом j_{23} меняется от $j_3 - j_2$ до j_1 ($j_{23} = j_3 - j_2, j_3 - j_2 + 1, \dots, j_1$) и содержит n значений j_{23} (где $n = j_1 + j_2 - j_3 + 1$). В этом случае l принимает следующие значения $l = j_1 - j_{23}, j_1 - j_{23} + 1, \dots, j_1 + j_{23}$. Соответственно, число независимых пар j_{23}, l в этом интервале равно

$$N_1 = (j_1 - j_2 + j_3 + 1)(j_1 + j_2 - j_3 + 1).$$

Во втором интервале j_{23} принимает значения: $j_{23} = j_1 + 1, \dots, j_3 + j_2$. Число различных значений j_{23} в этом интервале равно $2j_2 + 1 - n$. В этом интервале изменения j_{23} l принимает следующие значения: $l = j_{23} - j_1, \dots, j_{23} + j_1$ и число их различных значений равно $(2j_1 + 1)$. Следовательно, число различных пар j_{23}, l в этом интервале равно

$$N_2 = (2j_1 + 1)(j_2 - j_1 + j_3).$$

Тогда число различных пар j_{23}, l в третьем случае определяется выражением:

$$N_в = N_1 + N_2 = (2j_1 + 1)(j_2 - j_1 + j_3) + (j_1 - j_2 + j_3 + 1)(j_1 + j_2 - j_3 + 1). \quad (3.73в)$$

Соотношения (3.73а), (3.73б), (3.73в) определяют число независимых форм-факторов (или инвариантных амплитуд) в разложении амплитуды треххвостки по инвариантным амплитудам при произ-

вольных значениях спинов частиц j_1, j_2, j_3 . Следует отметить, что во всех трех случаях число инвариантных амплитуд меньше числа N_0 (3.19), где $N_0 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)$.

Рассмотрим, какие ограничения на инвариантные амплитуды треххвостки накладывает сохранение четности. С этой целью рассмотрим, как преобразуется амплитуда треххвостки M при инверсии пространства, т.е. при преобразовании $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}$, $t \rightarrow t' = t$. При таком преобразовании импульсы частиц меняют знак, поэтому $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ (где $\vec{p} = \vec{p}_2 = -\vec{p}_3$). Соответственно, единичный вектор \vec{k} (3.54а) при инверсии пространства также меняет знак, т.е. $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$. В то время как спиновые волновые функции при инверсии пространства преобразуются с помощью матрицы t_p :

$$\chi_j \rightarrow \chi'_j = t_p \chi_j, \quad (3.74)$$

где t_p – матрица неприводимого представления ортогональной группы $O(3)$ [5], т.е. $t_p \in O(3)$, которая имеет вид:

$$t_p = \pi I. \quad (3.74а)$$

В выражении (3.74а) I – единичная матрица, а π – внутренняя четность частиц $\pi = \pm 1$ для частиц с целым спином и $\pi = \pm i$ для частиц с полуцелым спином.

Учитывая соотношение для шаровых функций:

$$Y_{l_2 m}(-\vec{k}) = (-1)^{l_2} Y_{l_2 m}(\vec{k}),$$

а также закон преобразования спиновых волновых функций (3.74) при инверсии пространства, можно показать, что при инверсии пространства инвариант $\chi_{j_1}^+(\vec{k}; 2, 3) \chi_{j_1}$ (3.60) преобразуется следующим образом:

$$\chi_{j_1}^+(\vec{k}; 2, 3) \chi_{j_1} \rightarrow (-1)^{l_2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \chi_{j_1}^+(\vec{k}; 2, 3) \chi_{j_1}.$$

Поскольку инвариантные амплитуды треххвостки для реальных процессов константы, то для удовлетворения требованию инвариантности амплитуды треххвостки M относительно инверсии пространства необходимо потребовать, чтобы при этом не менялись инварианты, т.е.

$$(-1)^{l_2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 = 1. \quad (3.75)$$

Произведение внутренних четностей частиц $\pi_1\pi_2\pi_3$, которое в дальнейшем будет обозначаться через π , т.е. $\pi \equiv \pi_1\pi_2\pi_3$, равно ± 1 , поэтому условие (3.75) запишется как

$$(-1)^{l_{23}} = \pi. \quad (3.76)$$

Если $\pi = +1$, то этому условию удовлетворяют l_{23} четные, следовательно, все форм-факторы с нечетными l_{23} должны обращаться в нуль, и наоборот, если $\pi = -1$, то отличны от нуля все форм-факторы с нечетными l_{23} , в то время как форм-факторы с четными l_{23} равны нулю. В соответствии с этим условием, число форм-факторов N , которое определяется соотношениями (3.73) при различных значениях j_1, j_2, j_3 , сокращается. Совершенно аналогично тому, как вычислялось полное число N форм-факторов, можно получить, что число форм-факторов с учетом сохранения четности равно

$$N_\pi = \frac{1}{2}N, \quad (3.77)$$

если N – четное число, и

$$N_\pi = \frac{1}{2}(N + \pi(-1)^{j_1+j_2+j_3}), \quad (3.77a)$$

если N – нечетное число.

Рассмотрим, какие ограничения на форм-факторы треххвостки накладывает условие, когда частицы 2 и 3 тождественны. В этом случае амплитуда треххвостки M должна быть либо симметричной относительно перестановки частиц 2 и 3, т.е. $2 \leftrightarrow 3$, если они бозоны, либо антисимметричной, если 2 и 3 фермионы. В случае перестановки частиц 2 и 3 коэффициент Клебша–Гордана $C_{j_2\mu_2 j_3\mu_3}^{j_{23}\mu_{23}}$ переходит в $C_{j_3\mu_3 j_2\mu_2}^{j_{23}\mu_{23}}$. Используя симметрию коэффициентов Клебша–Гордана, можно написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} C_{j_2\mu_2 j_3\mu_3}^{j_{23}\mu_{23}} &\rightarrow C_{j_3\mu_3 j_2\mu_2}^{j_{23}\mu_{23}} = (-1)^{3j_2-j_3+j_{23}} C_{j_2\mu_2 j_3\mu_3}^{j_{23}\mu_{23}} = \\ &= (-1)^{2j_2+j_{23}} C_{j_2\mu_2 j_3\mu_3}^{j_{23}\mu_{23}}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

В последнем равенстве данной цепочки учтено, что частицы 2 и 3 тождественны.

Кроме того, перестановка частиц 2 и 3 меняет знак импульса \vec{p} (3.54a). Следовательно, единичный вектор \vec{k} переходит в $-\vec{k}$. Тогда имеем следующую цепочку:

$$Y_{l_{23}m}(\vec{k}) \rightarrow Y_{l_{23}m}(-\vec{k}) = (-1)^{l_{23}} Y_{l_{23}m}(\vec{k}). \quad (3.79)$$

Используя два последних соотношения (3.78) и (3.79) можно показать, что при перестановке частиц 2 и 3 инвариант $\chi_{j_1}^+(\vec{k}; 2, 3)\chi_{j_1}$ (3.60) преобразуется следующим образом:

$$\chi_{j_1}^+(\vec{k}; 2, 3)\chi_{j_1} \rightarrow (-1)^{2j_2+j_{23}+l_{23}} \chi_{j_1}^+(\vec{k}; 2, 3)\chi_{j_1}.$$

Тогда поскольку инвариантные амплитуды треххвостки для реальных процессов константы, а амплитуда треххвостки при перестановке частиц 2 и 3 должна приобретать знак $(-1)^{2j_2}$, который равен +1 для бозонов и -1 для фермионов, т.е.

$$M \rightarrow M' = (-1)^{2j_2} M, \quad (3.80)$$

то в разложении треххвостки по инвариантным амплитудам выживают лишь те форм-факторы, для которых выполнено условие

$$(-1)^{2j_2+j_{23}+l_{23}} = (-1)^{2j_2}. \quad (3.81)$$

Остальные форм-факторы должны зануляться. Условие (3.81) можно представить в виде:

$$(-1)^{j_{23}} = (-1)^{l_{23}} = \pi, \quad (3.82)$$

где в последнем равенстве данного соотношения использовано условие (3.76), которое связано с инвариантностью M относительно инверсии пространства. Условие (3.82) также сокращает число форм-факторов.

Рассмотрим два примера применения общих соотношений, полученных в этом параграфе, к конкретным распадам. В первом примере рассмотрим распад частицы со спином $1/2$ на две частицы со спинами $1/2$ и нуль, а внутренняя четность частиц такова, что $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3 = -1$. В соответствии с соотношениями (3.61) $j_{23} = 1/2$, а $l_{23} = 0, 1$. Условие (3.76) из двух значений l_{23} выбирает $l_{23} = 1$. Следовательно, амплитуда распада M определяется одним форм-фактором $\Gamma(j_{23} = 1/2, l_{23} = 1)$ и согласно выражению (3.64) имеет вид

$$M_{\mu_1, \mu_2} = \Gamma(1/2, 1) \sum_{\mu_{23} m} C_{1/2, \mu_2, 00}^{1/2, \mu_{23}} C_{1/2, \mu_2, 1m}^{1/2, \mu_1} Y_{1m}^*(\vec{\kappa}),$$

или, учитывая, что $C_{1/2, \mu_2, 00}^{1/2, \mu_{23}} = \delta_{\mu_2, \mu_{23}}$, имеем для амплитуды M следующее выражение:

$$M_{\mu_1, \mu_2} = \Gamma(1/2, 1) \sum_m C_{1/2, \mu_2, 1m}^{1/2, \mu_1} Y_{1m}^*(\vec{\kappa}). \quad (3.83)$$

Для коэффициента Клебша–Гордана имеет место соотношение

$$C_{1/2, \mu_2, 1m}^{1/2, \mu_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_m)_{\mu_1, \mu_2},$$

где $m = 0, \pm 1$, а σ_m связаны с матрицами Паули $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соотношениями

$$\sigma_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \sigma_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - i\sigma_2), \quad \sigma_0 = \sigma_3.$$

Соответственно, шаровую функцию $Y_{1m}(\vec{\kappa})$ можно представить как

$$Y_{1m}(\vec{\kappa}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \kappa_m,$$

где $m = 0, \pm 1$, а κ_m определяется соотношениями

$$\kappa_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 + i\kappa_2), \quad \kappa_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - i\kappa_2), \quad \kappa_0 = \kappa_3.$$

Тогда легко показать, что имеет место соотношение

$$\sum_m C_{1/2, \mu_2, 1m}^{1/2, \mu_1} Y_{1m}^*(\vec{\kappa}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\vec{\sigma} \vec{\kappa})_{\mu_1, \mu_2}.$$

Следовательно, амплитуду распада M можно записать в виде

$$M_{\mu_1, \mu_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Gamma(1/2, 1) (\vec{\sigma} \vec{\kappa})_{\mu_1, \mu_2} \quad (3.84)$$

или в матричном виде

$$M = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Gamma(1/2, 1) (\vec{\sigma} \vec{\kappa}). \quad (3.84a)$$

Во втором примере частица со спином нуль ($j_1 = 0$) распадается на две тождественные частицы со спинами $1/2$ ($j_2 = j_3 = 1/2$), а внутренняя четность частиц такова, что π положительна, т.е. $\pi = +1$. В соответствии с соотношениями (3.61) j_{23} может принимать значения $0, 1$. Такие же значения принимает и l_{23} , т.е.

$l_{23} = 0, 1$. Условие (3.76) из двух значений l_{23} выбирает $l_{23} = 0$. Тогда условие (3.82), которое следует из тождественности частиц 2 и 3, выбирает значение $j_{23} = 0$. Таким образом, разложение амплитуды M по инвариантным амплитудам содержит один форм-фактор $\Gamma(j_{23} = 0, l_{23} = 0)$. В соответствии с выражением (3.64) для амплитуды M имеем

$$M_{\mu_2\mu_3} = C_{1/2\mu_2 1/2\mu_3}^{00} C_{0000}^{00} Y_{00}^*(\vec{\kappa}).$$

Учитывая, что $C_{0000}^{00} = 1$, а

$$C_{1/2\mu_2 1/2\mu_3}^{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{\frac{1}{2}-\mu_2} \delta_{\mu_2, -\mu_3},$$

окончательно получим для амплитуды распада M следующее выражение:

$$M_{\mu_2\mu_3} = \frac{\Gamma(0, 0)}{\sqrt{8\pi}} (-1)^{\frac{1}{2}-\mu_2} \delta_{\mu_2, -\mu_3}. \quad (3.85)$$

3.5. Разложение амплитуды произвольной четыреххвостки по инвариантным амплитудам

Рассмотрим произвольную ядерную реакцию, у которой в начале и в конце две частицы, т.е. четыреххвостку $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. В описание этого процесса входят четыре спиновые волновые функции участвующих в реакции частиц, $\chi_{j_i}(i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и импульсы этих частиц \vec{p}_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Задача состоит в построении разложения амплитуды этой реакции M по инвариантным амплитудам. Для этого согласно предыдущему параграфу (с. 116, 117), из спиновых волновых функций необходимо построить спин-тензор, который при вращениях ведет себя как $(2L + 1)$ -шаровой вектор. Затем из импульсов частиц необходимо построить $(2L + 1)$ -шаровой вектор. Перемножив их скалярно, получим необходимые инварианты, по которым можно произвести разложение амплитуды четыреххвостки по инвариантным амплитудам (3.72).

Построим из импульсов частиц $(2L + 1)$ -шаровой вектор Φ_{LM}^δ . Вначале из импульсов начальных и конечных частиц построим два вектора \vec{p} и \vec{p}' , которые инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\vec{p} = m_{12} \left(\frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2} \right), \quad \vec{p}' = m_{34} \left(\frac{\vec{p}_3}{m_3} - \frac{\vec{p}_4}{m_4} \right), \quad (3.86)$$

где m_{12} и m_{34} – приведенные массы частиц 1,2 и 3,4 соответственно. Отметим, что в Ц-системе частиц 1,2 $\vec{p} = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ и, соответственно, $\vec{p}' = \vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ в Ц-системе частиц 3,4. Из этих векторов построим два единичных вектора \vec{k} и \vec{k}' :

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad \vec{k}' = \frac{\vec{p}'}{|\vec{p}'|}. \quad (3.87)$$

Тогда, построив из единичных векторов \vec{k} и \vec{k}' шаровые функции $Y_{l_1 m_1}(\vec{k})$ и $Y_{l_2 m_2}(\vec{k}')$, легко написать требуемый $(2L+1)$ -шаровой вектор Φ_{LM}^δ :

$$\Phi_{LM}^{l_1 l_2} = \sum_{m_1 m_2} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} Y_{l_1 m_1}(\vec{k}) Y_{l_2 m_2}(\vec{k}'). \quad (3.88)$$

Из этого выражения следует, что шаровой вектор Φ_{LM}^δ определяется двумя числами l_1 и l_2 , т.е. $\delta \equiv l_1, l_2$. При этом коэффициент Клебша–Гордана накладывает на L ограничения

$$|l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2. \quad (3.88a)$$

Условие (3.88a) не ограничивает сумму $l_1 + l_2$ сверху, Следовательно, существует бесконечное число пар (l_1, l_2) , которые удовлетворяют этому условию, Поэтому возникает вопрос: как выбрать l_1 и l_2 , чтобы $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ были линейно-независимы, поскольку для построения инвариантов типа (3.72) только такие шаровые векторы нужны? С этой целью можно ограничиться рассмотрением лишь $(2L+1)$ -шаровых векторов $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$, у которых $l_1 + l_2 = L$ или $l_1 + l_2 = L + 1$. Именно эти $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ или тензоры независимы. Действительно, при фиксированных значениях суммы $l_1 + l_2$ все $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$, отвечающие разным парам (l_1, l_2) , независимы, так как независимы шаровые функции с разными l_1 и l_2 . Нет линейной зависимости и среди тензоров с разнящкй на единицу суммой $l_1 + l_2$, так как при инверсии пространства

$$\Phi_{LM}^{l_1 l_2}(\vec{k}, \vec{k}') \rightarrow \Phi_{LM}^{l_1 l_2}(-\vec{k}, -\vec{k}') = (-1)^{l_1 + l_2} \Phi_{LM}^{l_1 l_2}(\vec{k}, \vec{k}'),$$

т.е. имеют разную четность.

Поскольку число линейно независимых $(2L+1)$ -шаровых векторов должно равняться размерности тензора $(2L+1)$, то $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}(\vec{k}, \vec{k}')$ с $l_1 + l_2 = L$ и $l_1 + l_2 = L+1$ образуют полную систему линейно независимых векторов. Действительно, число независимых $(2L+1)$ -шаровых векторов $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ равно $L+1$, если $l_1 + l_2 = L$, поскольку имеется $L+1$ пар чисел (l_1, l_2) : $(L, 0), (L-1, 1), \dots, (0, L)$, а число независимых $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ равно L , если $l_1 + l_2 = L+1$, ибо пара чисел (l_1, l_2) может принимать значения: $(L, 1), (L-1, 2), \dots, (1, L)$. Таким образом, их оказывается $2L+1$. Следовательно, все остальные тензоры (или $(2L+1)$ -шаровые векторы) являются их линейными комбинациями со скалярными коэффициентами типа $\text{const}(\vec{k}\vec{k}')^n$.

Этот результат можно пояснить по-другому. Известно, что любой вектор в трехмерном пространстве можно разложить по трем заданным некопланарным векторам, например по векторам $\vec{k}, \vec{k}', \vec{n} = [\vec{k}\vec{k}'] / |[\vec{k}\vec{k}']|$. Следовательно, все независимые $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}(\vec{k}, \vec{k}')$ можно построить из трех выписанных выше векторов.

Известно также, что представления группы вращения веса L реализуются полностью симметричными тензорами L -го ранга со шпуром, равным нулю. Такой тензор ранга L , элементы которого построены из векторов $\vec{k}, \vec{m}, \dots, \vec{l}$, обозначается символом $\{k, m, \dots, l\}_{ij\dots k}$. Например, тензор второго ранга, построенный из векторов \vec{n}, \vec{m} , имеет вид

$$\{n, m\}_{ij} = n_i m_j + n_j m_i - \frac{2}{3}(\vec{n}\vec{m})\delta_{ij},$$

а тензор третьего ранга, построенный из векторов $\vec{m}, \vec{l}, \vec{n}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \{mnl\}_{ijk} = & m_i l_j n_k + m_j l_k n_i + m_k l_i n_j + m_j l_i n_k + m_i l_k n_j + \\ & + m_k l_j n_i - \frac{2}{5}(\bar{m}\bar{l})(\delta_{ij}n_k + \delta_{jk}n_i + \delta_{ki}n_j) - \frac{2}{5}(\bar{m}\bar{n})(\delta_{ij}l_k + \\ & + \delta_{jk}l_i + \delta_{ki}l_j) - \frac{2}{5}(\bar{n}\bar{l})(\delta_{ij}m_k + \delta_{jk}m_i + \delta_{ki}m_j). \end{aligned}$$

Кроме того, если какой-либо вектор входит в этот тензор k раз, то это обозначается символом $[]^k$. Например:

$$\{mmnll\} = \{[m]^3 [l]^2 n\}$$

Из имеющихся в нашем распоряжении независимых векторов \bar{k} , \bar{k}' , \bar{n} необходимо построить полностью симметричные тензоры ранга L . При этом вектор \bar{n} может входить лишь один раз. Действительно, если вектор \bar{n} входит два раза, то, учитывая соотношение

$$\begin{aligned} n_i n_k \sim \varepsilon_{ijl} \kappa_j \kappa'_l \varepsilon_{kmn} \kappa_m \kappa'_n = & (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{lk} + \\ & \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} - \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} - \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{lk}) \kappa_j \kappa'_l \kappa_m \kappa'_n = \\ & (1 - (\bar{k}\bar{k}')^2) \delta_{ik} - (\kappa_i \kappa_k + \kappa'_i \kappa'_k) + (\bar{k}\bar{k}')(\kappa_i \kappa'_k + \kappa'_i \kappa_k), \end{aligned}$$

можно показать, что тензоры, содержащие произведение $n_i n_k$, выражаются через тензоры, содержащие только векторы \bar{k} и \bar{k}' . Следовательно, независимых полностью симметричных тензоров ранга L можно построить $2L+1$. Они имеют вид

$$\{[\kappa]^L\}, \{[\kappa]^{L-1} \kappa'\}, \dots, \{\kappa[\kappa']^{L-1}\}, \{[\kappa']^L\}, \quad (3.89)$$

всего $L+1$ тензоров, а также L тензоров, содержащих вектор \bar{n} :

$$\{[\kappa]^{L-1} n\}, \{[\kappa]^{L-2} \kappa' n\}, \dots, \{[\kappa']^{L-1} n\}. \quad (3.89a)$$

Их линейными комбинациями являются $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$, причем условию $l_1 + l_2 = L$ соответствуют тензоры типа (3.89), а условию $l_1 + l_2 = L+1$ - тензоры типа (3.89a).

Для построения инвариантов относительно преобразований Галилея и вращений необходимо построить спин-тензоры T_{LM}^Δ (3.70). Их необходимо сконструировать из спиновых волновых функций начальных частиц χ_{j_1}, χ_{j_2} и эрмитовски-сопряженных спиновых

волновых функций конечных частиц $\chi_{j_3}^+, \chi_{j_4}^+$. Введя спины входного j_{12} и выходного j_{34} каналов, T_{LM}^Δ можно записать в следующем виде

$$T_{LM}^{j_{12}j_{34}} = \sum_{\substack{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \\ \rho_{12} \rho_{34}}} C_{j_1 \rho_1 j_2 \rho_2}^{j_{12} \rho_{12}} \chi_{j_1}(\rho_1) \chi_{j_2}(\rho_2) C_{j_3 \rho_3 j_4 \rho_4}^{j_{34} \rho_{34}} \chi_{j_3}^+(\rho_3) \chi_{j_4}^+(\rho_4) C_{j_{34} \rho_{34} L M}^{j_{12} \rho_{12}}. \quad (3.90)$$

Роль Δ в этом выражении выполняют спины входного и выходного каналов j_{12}, j_{34} . При написании третьего коэффициента Клебша–Гордана в выражении (3.90) учтено, что $T_{LM}^{j_{12}j_{34}}$ строится из спиновых волновых функций начальных частиц и эрмитовски-сопряженных спиновых волновых функций конечных частиц. Из построения спин-тензора $T_{LM}^{j_{12}j_{34}}$ следует, что спины входного и выходного каналов j_{12}, j_{34} и величина L ограничиваются соотношениями:

$$\begin{aligned} |j_1 - j_2| \leq j_{12} \leq j_1 + j_2, \quad |j_3 - j_4| \leq j_{34} \leq j_3 + j_4, \\ |j_{12} - j_{34}| \leq L \leq j_{12} + j_{34}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Согласно изложенному выше рецепту построения инвариантов перемножим скалярно спин-тензор $T_{LM}^{j_{12}j_{34}}$ на $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$, т.е. $\sum_M T_{LM}^{j_{12}j_{34}} \Phi_{LM}^{l_1 l_2 *}(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}')$, тогда разложение амплитуды произвольной четыреххвостки M по инвариантным амплитудам можно записать в виде

$$M = \sum_{j_{12} j_{34} L l_1 l_2} f(j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2) \sum_M T_{LM}^{j_{12}j_{34}} \Phi_{LM}^{l_1 l_2 *}(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'), \quad (3.92)$$

где $f(j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2)$ инвариантные амплитуды, которые являются функциями двух инвариантных переменных \tilde{s}, \tilde{t} . Используя выражения для спин-тензора $T_{LM}^{j_{12}j_{34}}$ (3.90) и для $(2L+1)$ -шаровых векторов $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ (3.88), запишем окончательное разложение амплитуды произвольной реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ по инвариантным амплитудам в виде

$$\begin{aligned}
M = & \sum_{j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2} f(j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2) \times \\
& \times \sum_{\substack{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \\ \rho_{12} \rho_{34} M m_1 m_2}} C_{j_1 \rho_1 j_2 \rho_2}^{j_{12} \mu_{12}} C_{j_3 \rho_3 j_4 \rho_4}^{j_{34} \mu_{34}} C_{j_{34} \rho_{34} L M}^{j_{12} \mu_{12}} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{L M} Y_{l_1 m_1}^*(\vec{\kappa}) Y_{l_2 m_2}^*(\vec{\kappa}') \times \\
& \times \chi_{j_1}(\rho_1) \chi_{j_2}(\rho_2) \chi_{j_3}^*(\rho_3) \chi_{j_4}^*(\rho_4).
\end{aligned} \quad (3.93)$$

Пусть в некоторой системе отсчета имеется выделенное направление ось 3, и спиновые волновые функции являются собственными функциями оператора проекции спина на эту ось с собственным значением μ_i ($i=1,2,3,4$), т.е. спиновые функции имеют вид $\chi_{j_i \mu_i}$. Тогда и амплитуда произвольной четыреххвостки будет описываться в этой системе отсчета проекциями спина μ_i ($i=1,2,3,4$). Используя выражение (3.11), амплитуду произвольной четыреххвостки в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
M_{\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4} = & \sum_{j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2} f(j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2) \times \\
& \times \sum_{\substack{\mu_{12} \mu_{34} \\ M m_1 m_2}} C_{j_1 \mu_1 j_2 \mu_2}^{j_{12} \mu_{12}} C_{j_3 \mu_3 j_4 \mu_4}^{j_{34} \mu_{34}} C_{j_{34} \mu_{34} L M}^{j_{12} \mu_{12}} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{L M} Y_{l_1 m_1}^*(\vec{\kappa}) Y_{l_2 m_2}^*(\vec{\kappa}'),
\end{aligned} \quad (3.93a)$$

где μ_{12} и μ_{34} являются собственными значениями операторов $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)_z$ и $(\vec{S}_3 + \vec{S}_4)_z$ соответственно.

Подсчитаем число инвариантных амплитуд, входящих в разложение (3.93). Учитывая, что числа L, j_{12}, j_{34} лежат в интервалах, определяемых соотношениями (3.91), можно число инвариантных амплитуд N определить как

$$N = \sum_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} \sum_{|j_3 - j_4|}^{j_3 + j_4} \sum_{|j_{12} - j_{34}|}^{j_{12} + j_{34}} (2L + 1). \quad (3.94)$$

При написании этого выражения учтено, что при данном L можно построить $2L + 1$ шаровых векторов $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$. Поскольку

$$\sum_{|j_{12} - j_{34}|}^{j_{12} + j_{34}} (2L + 1) = (2j_{12} + 1)(2j_{34} + 1),$$

то легко получить выражение для числа инвариантных амплитуд

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j_{12}+1) \sum_{|j_3-j_4|}^{j_3+j_4} (2j_{34}+1) = \\
&= (2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)(2j_4+1).
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Рассмотрим, к каким ограничениям приводит требование инвариантности амплитуды реакции относительно инверсии пространства, т.е. закон сохранения четности в сильных взаимодействиях. Как уже упоминалось, при инверсии пространства импульсы меняют свое направление, следовательно, единичные векторы \vec{k} и \vec{k}' также меняют свое направление. Тогда при инверсии пространства $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ преобразуются следующим образом:

$$\Phi_{LM}^{l_1 l_2}(\vec{k}, \vec{k}') \rightarrow \Phi_{LM}^{l_1 l_2}(-\vec{k}, -\vec{k}') = (-1)^{l_1+l_2} \Phi_{LM}^{l_1 l_2}(\vec{k}, \vec{k}')$$

С другой стороны, при преобразовании инверсии пространства спиновые волновые функции умножаются на внутреннюю четность частиц π_i ($i=1,2,3,4$). Следовательно, спин-тензор $T_{LM}^{j_{12} j_{34}}$ при инверсии умножается на произведение внутренних четностей частиц, участвующих в реакции, т.е.

$$T_{LM}^{j_{12} j_{34}} \rightarrow \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 T_{LM}^{j_{12} j_{34}} = \pi T_{LM}^{j_{12} j_{34}},$$

где введено обозначение $\pi \equiv \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$. Учитывая, что при инверсии пространства инвариантные амплитуды $f(j_{12}, j_{34}, L, l_1, l_2)$, зависящие от \tilde{s}, \tilde{t} , не меняются, можно показать, что каждый член разложения амплитуды M по инвариантным амплитудам умножается на множитель $(-1)^{l_1+l_2} \pi$. Тогда для удовлетворения требованию закона сохранения четности необходимо обнулить те инвариантные амплитуды, которые не удовлетворяют требованию:

$$(-1)^{l_1+l_2} \pi = 1. \tag{3.96}$$

Следовательно, если четность π положительна, т.е. $\pi = +1$, то число $N(L)$ инвариантных амплитуд при заданном значении L , которые удовлетворяют этому условию, равно

$$N(L) = \begin{cases} L, & \text{если } L \text{ четно,} \\ L+1, & \text{если } L \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{3.97a}$$

Если же четность π отрицательна, т.е. $\pi = -1$, то $N(L)$ равно:

$$N(L) = \begin{cases} L+1, & \text{если } L \text{ четно,} \\ L, & \text{если } L \text{ нечетно} \end{cases} \quad (3.976)$$

Эти соотношения являются следствием того, что при заданном L шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ независимы, если сумма $l_1 + l_2$ равна либо L , либо $L+1$.

Таким образом, число инвариантных амплитуд с учетом закона сохранения четности N_π равно:

$$N_\pi = \sum_{|j_1-j_2||j_3-j_4||j_{12}-j_{34}}^{j_1+j_2} \sum_{j_3+j_4}^{j_{12}+j_{34}} N(L).$$

Подставляя в это соотношение выражения для $N(L)$, и проведя вычисления, получим окончательно:

$$N_\pi = \begin{cases} \frac{1}{2} N, & \text{если } N \text{ четное,} \\ \frac{1}{2} [N + \pi(-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4}], & \text{если } N \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3.98)$$

Отметим, что обращение времени не дает дополнительных ограничений на амплитуду реакции, а связывает амплитуды прямого и обратного процессов. В случае упругого рассеяния возникают ограничения. В частности, для рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином $1/2$ они рассматривались в п. 3.2.

Преобразуем полученные выше $(2L+1)$ -шаровые векторы $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$. С этой целью от пары чисел (l_1, l_2) , определяющих шаровой вектор $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$, перейдем к другой паре чисел (r, λ) , которая является полусуммой и полуразностью чисел l_1 и l_2 :

$$r = \frac{1}{2}(l_1 + l_2), \quad \lambda = \frac{1}{2}(l_2 - l_1). \quad (3.99)$$

Тогда шаровой вектор $\Phi_{LM}^{l_1 l_2}$ будет определяться парой чисел (r, λ) и его можно представить в виде

$$\Phi_{LM}^{r\lambda} = \sum_{m_1 m_2} C_{r-\lambda m_1, r+\lambda m_2}^{LM} Y_{r-\lambda m_1}(\vec{\kappa}) Y_{r+\lambda m_2}(\vec{\kappa}'). \quad (3.100)$$

Из соотношения (3.99) следует, что r может принимать два значения:

$$r = \frac{1}{2}L \quad r = \frac{1}{2}(L+1). \quad (3.101)$$

Введенные выше шаровые векторы $\Phi_{LM}^{r\lambda}$, которые характеризуются парой чисел (r, λ) , удобны, когда учитываются ограничения, связанные с законом сохранения четности. В этом случае r принимает одно значение. Используя соотношения (3.97а) и (3.97б), можно написать, что если четность π положительна, т.е. $\pi = +1$, то

$$r = \begin{cases} \frac{1}{2}L, & \text{если } L \text{ четное,} \\ \frac{1}{2}(L+1), & \text{если } L \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3.102a)$$

если же четность π отрицательна, т.е. $\pi = -1$, то

$$r = \begin{cases} \frac{1}{2}(L+1), & \text{если } L \text{ четное,} \\ \frac{1}{2}L, & \text{если } L \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3.102б)$$

Следовательно, инвариантные амплитуды в этом случае определяются спинами входного и выходного каналов и числами L и λ , т.е. $f(j_{12}, j_{34}, L, \lambda)$. Тогда разложение амплитуды четыреххвостки M по инвариантным амплитудам запишется как

$$M_{\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4} = \sum_{j_{12}j_{34}L\lambda} f(j_{12}, j_{34}, L, \lambda) \times \quad (3.103)$$

$$\times \sum_{\mu_{12}\mu_{34}Mm_1m_2} C_{j_{12}\mu_1 j_{2}\mu_2}^{j_{12}\mu_{12}} C_{j_{34}\mu_3 j_{4}\mu_4}^{j_{34}\mu_{34}} C_{j_{34}\mu_{34} LM}^{j_{12}\mu_{12}} C_{r-\lambda m_1 r+\lambda m_2}^{LM} Y_{r-\lambda m_1}^*(\vec{k}) Y_{r+\lambda m_2}^*(\vec{k}').$$

При этом λ – пробегает все целые значения, если r – целое, и все полуцелые значения, если r – полуцелое, при которых $r - \lambda, r + \lambda, L$ образуют треугольник.

В некоторых случаях, для четыреххвостки оказывается удобным представление перекрестного канала, когда при построении спин-тензора T_{LM}^{Δ} объединяются спины входящих и выходящих частиц. В частности, такое представление удобно в случае упругого рассеяния, когда начальные частицы тождественны конечным. Вследствие этого, матрицы $T_{LM}^{\Delta} \Phi_{LM}^{\delta *}$ в перекрестном канале можно рассматривать как прямое произведение операторов, действующих

на спиновые переменные сталкивающихся частиц. Спин-тензор T_{LM}^Δ в перекрестном канале записывается следующим образом:

$$T_{LM}^{j_1 j_2 j_3 j_4} = \sum C_{j_3 p_3 j_{13} p_{13}}^{j_1 p_1} C_{j_4 p_4 j_{24} p_{24}}^{j_2 p_2} C_{j_{13} p_{13} j_{24} p_{24}}^{LM} \chi_{j_1}(\rho_1) \chi_{j_3}^*(\rho_3) \chi_{j_2}(\rho_2) \chi_{j_4}^*(\rho_4). \quad (3.104)$$

Этот спин-тензор задается двумя величинами, j_{13} и j_{24} . При этом j_{13}, j_{24}, L изменяются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} |j_1 - j_3| \leq j_{13} \leq j_1 + j_3, \quad |j_2 - j_4| \leq j_{24} \leq j_2 + j_4, \\ |j_{13} - j_{24}| \leq L \leq j_{13} + j_{24}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

После всего сказанного, легко написать разложение амплитуды произвольной четыреххвостки M по инвариантным амплитудам в перекрестном канале:

$$M_{\mu_1 \mu_2, \mu_3 \mu_4} = \sum_{j_{13} j_{24} L \lambda} f(j_{13}, j_{24}, L, \lambda) \times \sum_{\substack{\mu_1 \mu_2 \\ M m_1 m_2}} C_{j_3 \mu_3 j_{13} \mu_{13}}^{j_1 \mu_1} C_{j_4 \mu_4 j_{24} \mu_{24}}^{j_2 \mu_2} C_{j_{13} \mu_{13} j_{24} \mu_{24}}^{LM} C_{r-\lambda m_1 r+\lambda m_2}^{LM} Y_{r-\lambda m_1}^*(\vec{\kappa}) Y_{r+\lambda m_2}^*(\vec{\kappa}').$$

Эта амплитуда записана в системе отсчета, в которой имеется некоторая выделенная ось и μ_i ($i=1,2,3,4$) проекции спинов, участвующих в реакции частиц на эту ось.

Инвариантные амплитуды в перекрестном канале $f(j_{13}, j_{24}, L, \lambda)$ выражаются в виде линейной комбинации инвариантных амплитуд во входном и выходном каналах $f(j_{12}, j_{34}, L, \lambda)$ с помощью $9j$ -коэффициентов Вигнера:

$$f(j_{13}, j_{24}, L, \lambda) = (2j_{13} + 1)(2j_{24} + 1)[(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)(2L + 1)]^{-1} \times \sum_{j_{12} j_{34}} (2j_{34} + 1) \sqrt{2j_{12} + 1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ j_{12} & j_{34} & L \\ j_2 & j_4 & j_{24} \end{Bmatrix} f(j_{12}, j_{34}, L, \lambda).$$

Методом, использованным в этом параграфе, можно построить разложение по инвариантным амплитудам амплитуды произвольной реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$.

1. Написать амплитуду рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль, которая инвариантна относительно обращения времени, но не инвариантна относительно инверсии пространства.

2. Написать амплитуду рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином $1/2$, которая инвариантна относительно обращения времени, но не инвариантна относительно инверсии пространства.

Глава 4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В УПРУГОМ РАССЕЯНИИ. ПОЛНЫЙ ОПЫТ

4.1. Общие замечания. Постановка задачи

В предыдущей главе было показано, что амплитуду упругого рассеяния нейтрона (частица со спином $1/2$) на любом четно-четном ядре (частица со спином нуль – He^4 , O^{16} и т.д.) можно представить в виде

$$M = A(\tilde{s}, \tilde{t}) + B(\tilde{s}, \tilde{t}) \vec{\sigma} \vec{n}, \quad (4.1)$$

где $A(\tilde{s}, \tilde{t})$ и $B(\tilde{s}, \tilde{t})$ – инвариантные амплитуды, в общем случае, являющиеся комплексными функциями двух инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} , σ_i ($i=1,2,3$) – матрицы Паули, а \vec{n} – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости реакции:

$$\vec{n} = \frac{[\vec{p}\vec{p}']}{|[\vec{p}\vec{p}']|}, \quad (4.2)$$

где \vec{p} и \vec{p}' – импульсы частицы в Ц-системе до и после столкновения, соответственно.

Инвариантные функции $A(\tilde{s}, \tilde{t})$ и $B(\tilde{s}, \tilde{t})$ – комплексные функции, и их можно представить в виде

$$A(\tilde{s}, \tilde{t}) = ae^{i\varphi}, \quad B(\tilde{s}, \tilde{t}) = be^{i\psi}. \quad (4.3)$$

Таким образом, имеются всего четыре действительные функции, зависящие от двух инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} . Возникает вопрос: сколько экспериментов надо провести для полного восстановления амплитуды M (5.1), учитывая, что в каждом эксперименте измеряется одна действительная функция? Другими словами: сколько действительных функций имеют физический

смысл? Таких функций три. Действительно, общая фаза волновой функции и, следовательно, амплитуды рассеяния не имеют физического смысла. Следовательно, она не может определяться из эксперимента. Поэтому из эксперимента должны определяться три действительные величины: модули инвариантных амплитуд a и b , а также относительная фаза $\psi - \varphi$. Эти величины являются функциями двух инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} .

Под полным опытом понимается такая совокупность экспериментов, которая позволяет восстановить три выше упомянутые действительные функции двух инвариантных переменных \tilde{s} и \tilde{t} , т.е. функции $a, b, \psi - \varphi$.

В п. 2.4 было показано, что сечение упругого рассеяния частиц со спином определяется выражением (2.76). Применяя это соотношение к упругому рассеянию частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль, имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{1}{2} Sp(M^+ M) = a^2 + b^2, \quad (4.4)$$

где $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$ обозначает сечение упругого рассеяния неполяризованных в начальном состоянии частиц и когда в конце не интересуются спиновыми состояниями частиц. При написании этого соотношения использовалось выражение для амплитуды (4.1). В сечение

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$ входит сумма квадратов модулей инвариантных амплитуд,

поэтому для восстановления амплитуды рассеяния нужны дополнительные эксперименты.

4.2. Вектор поляризации. Спиновая матрица плотности частиц со спином $1/2$

Дополнительной экспериментальной характеристикой частицы, обладающей спином, служит вектор поляризации. По определению, компоненты вектора поляризации определяются как среднее значение соответствующих компонент спина:

$$\vec{P} = 2\langle \vec{S} \rangle. \quad (4.5)$$

Учитывая, что оператор спина частицы со спином $1/2$ \vec{S} выражается через матрицы $\vec{\sigma}$ ($\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$), имеем

$$\vec{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle. \quad (4.5a)$$

Пусть пучок частиц со спином $1/2$ находится в чистом спиновом состоянии, которое описывается спиновой волновой функцией

$$\chi = |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где компоненты спиновой волновой функции χ_1, χ_2 комплексны. Следовательно, спиновая функция χ (4.6) определяется четырьмя действительными величинами. Однако полная фаза волновой функции не имеет физического смысла, и поэтому она может быть произвольной. Выберем ее таким образом, чтобы компонента χ_1 была действительной. Кроме того, условие нормировки спиновой волновой функции требует, чтобы

$$|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1. \quad (4.7)$$

Следовательно, спиновая волновая функция частицы со спином $1/2$ в самом общем случае определяется двумя действительными параметрами, и ее можно представить в виде

$$\chi = |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Тогда компоненты вектора поляризации частицы со спином $1/2$ в чистом состоянии согласно (4.5a) определяются как

$$P_i = \langle \chi | \sigma_i | \chi \rangle. \quad (4.9)$$

Используя спиновую волновую функцию χ (4.8) и определение матриц Паули, легко вычислить компоненты вектора поляризации:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \langle \chi | \sigma_1 | \chi \rangle = \sin \theta \cos \delta, \\
P_2 &= \langle \chi | \sigma_2 | \chi \rangle = \sin \theta \sin \delta, \\
P_3 &= \langle \chi | \sigma_3 | \chi \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Отметим, что третья компонента вектора поляризации равна разности вероятности частице иметь проекцию спина на ось 3 $\pm 1/2$, т.е. заселенность этих состояний. Действительно:

$$\begin{aligned}
P_3 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = |\chi_1|^2 - |\chi_2|^2 = \frac{|\chi_1|^2 - |\chi_2|^2}{|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2} = \\
&= W(+1/2) - W(-1/2),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

где через $W(\pm 1/2)$ обозначена вероятность иметь частице проекцию спина на ось 3 $\pm 1/2$. Соответственно:

$$W(+1/2) = \frac{|\chi_1|^2}{|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2}, \quad W(-1/2) = \frac{|\chi_2|^2}{|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2}. \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.10) следует, что

$$|\vec{P}| = (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{4.13}$$

Таким образом, для любого чистого состояния пучка вектор поляризации имеет единичную длину. Параметры θ и δ можно рассматривать как полярные углы, определяющие направление вектора \vec{P} , причем θ – угол между \vec{P} и осью 3, а относительная фаза δ – азимутальный угол вектора \vec{P} . В частности, если ввести новую систему координат с осью $3'$, которая параллельна вектору \vec{P} , то, выбирая ось $3'$ в качестве оси квантования, получим в новой системе координат

$$P_{1'} = 0, \quad P_{2'} = 0, \quad P_{3'} = 1, \tag{4.14}$$

т.е. все частицы обладают спином вверх относительно оси $3'$.

Пользуясь выражением для спиновой волновой функции (4.8) и выражением для вектора поляризации (4.10), можно построить в явном виде спиновые функции для любого чистого состояния и найти соответствующий вектор поляризации \vec{P} . В частности, рассмотрим пучки спиновых состояний, которые определяются одним

и тем же углом $\theta = 90^\circ$, а азимутальный угол δ равен $0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Спиновые функции и вектор поляризации \vec{P} таких состояний приведены в табл. 4.1. Все эти четыре спиновых состояния могут быть построены как суперпозиция двух состояний

$$|+1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Таблица 4.1

№	θ, δ	Спиновые волновые функции	Вектор поляризации
1	$\theta = 90^\circ, \delta = 0$	$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	\vec{P} параллелен оси 1
2	$\theta = 90^\circ, \delta = \pi$	$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	\vec{P} антипараллелен оси 1
3	$\theta = 90^\circ, \delta = 90^\circ$	$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	\vec{P} параллелен оси 2
4	$\theta = 90^\circ, \delta = 270^\circ$	$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	\vec{P} антипараллелен оси 2

с одинаковыми по величине коэффициентами χ_1 и χ_2 :

$$|\chi_1| = |\chi_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.16)$$

но разными относительными фазами, так как $\theta = 90^\circ$ одинаково для всех состояний, в то время как δ различно. Отметим, что вектор поляризации лежит в плоскости, перпендикулярной к оси 3, одинаков по величине, однако имеет разное направление.

Кроме указанного выше чистого спинового состояния пучка, можно построить другое смешанное спиновое состояния пучка. Примером такого состояния может служить следующая ситуация. Пусть два пучка частиц, приготовлены независимо. Один из пучков находится в чистом состоянии

$$|+1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17a)$$

а другой пучок в чистом состоянии

$$|-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.176)$$

Под словами «независимо» в этом случае подразумевается, что между пучками отсутствует какое либо фазовое соотношение. Пусть в первом пучке N_1 частиц, а во втором N_2 частиц.

Возникает вопрос: как описать состояние объединенного пучка частиц? Очевидно, что такое состояние невозможно описать с помощью вектора состояния $|\chi\rangle$. Действительно, смесь нельзя представить в виде линейной комбинации состояний $|+1/2\rangle$ и $|-1/2\rangle$, соответствующих каждому из состояний пучка. Чтобы построить такую линейную комбинацию, как было показано выше (см. табл. 4.1), необходимы величины коэффициентов $|\chi_1|$ и $|\chi_2|$ и их относительная фаза δ . При этом $|\chi_1|^2$ и $|\chi_2|^2$ вероятности обнаружить частицу в состоянии $|+1/2\rangle$ и $|-1/2\rangle$ в объединенном пучке известны:

$$|\chi_1|^2 = W_1 = \frac{N_1}{N}, \quad |\chi_2|^2 = W_2 = \frac{N_2}{N}, \quad (4.17)$$

где

$$N = N_1 + N_2.$$

Однако существенный момент состоит в том, что оба пучка приготовлены независимо, т.е. не существует определенного фазового соотношения, а без определенного значения относительной фазы нельзя написать вектор состояния $|\chi\rangle$ объединенного пучка.

Следовательно, смесь следует описывать, точно указывая способ ее приготовления. В рассматриваемом случае известно, что N_1 частиц приготовлено в состоянии $|+1/2\rangle$, а N_2 частиц в состоянии $|-1/2\rangle$, совершенно независимо друг от друга. Вот вся информация, которая известна.

Вычислим для объединенного пучка вектор поляризации. Вектор поляризации для объединенного пучка можно определить как статистическое среднее по двум независимым пучкам:

$$P_i = W_1 \langle +1/2 | \sigma_i | +1/2 \rangle + W_2 \langle -1/2 | \sigma_i | -1/2 \rangle. \quad (4.18)$$

Тогда для объединенного пучка имеем

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = W_1 - W_2 = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}. \quad (4.19)$$

Отметим, что длина вектора поляризации меньше единицы и пропорциональна разности заселенности двух состояний $|+1/2\rangle$ и $|-1/2\rangle$, что является обобщением результата для чистого состояния (4.11).

Этот результат обобщается на произвольный случай. Пусть объединенный пучок готовится смешиванием N_a частиц в состоянии $|\chi_a\rangle$ и N_b частиц в состоянии $|\chi_b\rangle$. Тогда компонента вектора поляризации определяется усреднением по независимо приготовленным пучкам:

$$P_i = W_a \langle \chi_a | \sigma_i | \chi_a \rangle + W_b \langle \chi_b | \sigma_i | \chi_b \rangle = W_a P_i^{(a)} + W_b P_i^{(b)}, \quad (4.20)$$

где $i = 1, 2, 3$, W_a и W_b определяются равенствами

$$W_a = \frac{N_a}{N_a + N_b}, W_b = \frac{N_b}{N_a + N_b}, \quad (4.20a)$$

а

$$P_i^{(a)} = \langle \chi_a | \sigma_i | \chi_a \rangle, P_i^{(b)} = \langle \chi_b | \sigma_i | \chi_b \rangle. \quad (4.20b)$$

В векторной форме соотношение (4.20) имеет вид:

$$\vec{P} = W_a \vec{P}^{(a)} + W_b \vec{P}^{(b)}. \quad (4.21)$$

При этом в соответствии с тем, что $|\chi_a\rangle$ и $|\chi_b\rangle$ – чистые состояния, имеем

$$|\vec{P}^{(a)}| = |\vec{P}^{(b)}| = 1. \quad (4.21a)$$

Из выражения (4.21) следует, что величина вектора поляризации объединенного пучка меньше единицы. Действительно, можно написать:

$$\begin{aligned} \vec{P}^2 &= (W_a \vec{P}^{(a)} + W_b \vec{P}^{(b)})^2 = W_a^2 + W_b^2 + 2W_a W_b \vec{P}^{(a)} \vec{P}^{(b)} \leq \\ &\leq W_a^2 + W_b^2 + 2W_a W_b = (W_a + W_b)^2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор поляризации объединенного пучка \vec{P} удовлетворяет неравенству

$$|\vec{P}| \leq 1. \quad (4.22)$$

Равенство $|\vec{P}|=1$ имеет место в том случае, если $\vec{P}^{(a)}\vec{P}^{(b)}=1$, т.е. когда оба пучка имеют одинаковые векторы поляризации. Это означает, что оба пучка, входящие в объединенный пучок, находятся в одинаковых спиновых состояниях, следовательно, и объединенный пучок находится в чистом спиновом состоянии.

Таким образом, длина вектора поляризации ограничена неравенствами:

$$0 \leq |\vec{P}| \leq 1. \quad (4.23)$$

Максимально возможное значение $|\vec{P}|=1$ достигается тогда и только тогда, когда рассматриваемый пучок находится в чистом состоянии. Смесь всегда характеризуется вектором поляризации, длина которого меньше единицы. Используется следующая терминология. Если состояние пучка характеризуется вектором поляризации с $|\vec{P}| > 0$, пучок называется поляризованным. В случае, когда состояние пучка характеризуется вектором поляризации с $|\vec{P}| = 0$, то пучок называется неполяризованным. Если пучок описывается вектором состояния $|\chi\rangle$, т.е. вектор поляризации равен единице $|\vec{P}|=1$, то такой пучок называется полностью поляризованным.

На любой вопрос, касающийся поведения чистого или смешанного состояний, можно ответить, указав состояния, присутствующие в смеси, и их статистический вес W_i . Однако есть другой более удобный метод описания чистых и смешанных спиновых состояний. Рассмотрим этот альтернативный метод.

Пусть рассматриваемый пучок содержит N_a частиц в состоянии $|\chi_a\rangle$ и N_b частиц в состоянии $|\chi_b\rangle$. Введем для описания объединенного пучка оператор плотности или статистический оператор, который определяется выражением

$$\rho = W_a |\chi_a\rangle\langle\chi_a| + W_b |\chi_b\rangle\langle\chi_b| = W_a \chi_a \chi_a^\dagger + W_b \chi_b \chi_b^\dagger, \quad (4.24)$$

где

$$W_a = \frac{N_a}{N_a + N_b}, \quad W_b = \frac{N_b}{N_a + N_b}. \quad (4.24a)$$

Этот оператор описывает способ приготовления и тем самым содержит всю информацию о пучке, т.е. оператор плотности полностью определяет пучок. В случае чистого состояния пучка оператор плотности имеет вид

$$\rho = |\chi_a\rangle\langle\chi_a| = \chi_a\chi_a^\dagger. \quad (4.25)$$

Запишем оператор плотности в матричном виде. С этой целью выберем набор базисных состояний

$$|\chi_{+1/2}\rangle = | +1/2 \rangle, \quad |\chi_{-1/2}\rangle = | -1/2 \rangle, \quad (4.26)$$

и разложим векторы состояния $|\chi_a\rangle$ и $|\chi_b\rangle$ по этому базису:

$$\begin{aligned} \chi_a = |\chi_a\rangle &= c_+^{(a)} | +1/2 \rangle + c_-^{(a)} | -1/2 \rangle = \begin{pmatrix} c_+^{(a)} \\ c_-^{(a)} \end{pmatrix}, \\ \chi_b = |\chi_b\rangle &= c_+^{(b)} | +1/2 \rangle + c_-^{(b)} | -1/2 \rangle = \begin{pmatrix} c_+^{(b)} \\ c_-^{(b)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.27a)$$

где $c_+^{(a)}, c_-^{(a)}; c_+^{(b)}, c_-^{(b)}$ – компоненты спиновых волновых функций χ_a, χ_b соответственно. Тогда можно написать:

$$\begin{aligned} \chi_a^\dagger = \langle\chi_a| &= c_+^{(a)*} \langle +1/2| + c_-^{(a)*} \langle -1/2| = (c_+^{(a)*}, c_-^{(a)*}), \\ \chi_b^\dagger = \langle\chi_b| &= c_+^{(b)*} \langle +1/2| + c_-^{(b)*} \langle -1/2| = (c_+^{(b)*}, c_-^{(b)*}). \end{aligned} \quad (4.27b)$$

Учитывая, что из выражений (4.27) следуют следующие соотношения:

$$|\chi_a\rangle\langle\chi_a| = \chi_a\chi_a^\dagger = \begin{pmatrix} c_+^{(a)} \\ c_-^{(a)} \end{pmatrix} (c_+^{(a)*}, c_-^{(a)*}) = \begin{pmatrix} c_+^{(a)}c_+^{(a)*} & c_+^{(a)}c_-^{(a)*} \\ c_-^{(a)}c_+^{(a)*} & c_-^{(a)}c_-^{(a)*} \end{pmatrix}$$

и совершенно аналогично

$$|\chi_b\rangle\langle\chi_b| = \chi_b\chi_b^\dagger = \begin{pmatrix} c_+^{(b)}c_+^{(b)*} & c_+^{(b)}c_-^{(b)*} \\ c_-^{(b)}c_+^{(b)*} & c_-^{(b)}c_-^{(b)*} \end{pmatrix},$$

можно записать матрицу плотности ρ в виде

$$\rho = \begin{pmatrix} W_a |c_+^{(a)}|^2 + W_b |c_+^{(b)}|^2 & W_a c_+^{(a)} c_-^{(a)*} + W_b c_+^{(b)} c_-^{(b)*} \\ W_a c_-^{(a)} c_+^{(a)*} + W_b c_-^{(b)} c_+^{(b)*} & W_a |c_-^{(a)}|^2 + W_b |c_-^{(b)}|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Полученное выражение называется матрицей плотности в $\{|\pm 1/2\rangle\}$ -представлении, поскольку в качестве базисных векторов выбраны состояния $|\pm 1/2\rangle$.

Диагональные элементы матрицы плотности $W_a |c_{\pm}^{(a)}|^2 + W_b |c_{\pm}^{(b)}|^2$ имеют непосредственный физический смысл. Действительно, W_a – вероятность нахождения частицы пучка в состоянии $|\chi_a\rangle$, а вероятность того, что в состоянии $|\chi_a\rangle$ частица имеет проекцию $\pm 1/2$, равна $|c_{\pm}^{(a)}|^2$. Поэтому $W_a |c_{\pm}^{(a)}|^2$ – вероятность обнаружить частицу в объединенном пучке в состоянии $|\chi_a\rangle$ с проекцией $\pm 1/2$. Соответственно, $W_b |c_{\pm}^{(b)}|^2$ – вероятность обнаружить частицу в объединенном пучке в состоянии $|\chi_b\rangle$ с проекцией $\pm 1/2$. Следовательно, диагональные матричные элементы дают полную вероятность того, что частица будет обнаружена в соответствующем базисном состоянии $|\pm 1/2\rangle$.

Рассмотрим шпур матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \text{Sp}\rho &= W_a |c_+^{(a)}|^2 + W_b |c_+^{(b)}|^2 + W_a |c_-^{(a)}|^2 + W_b |c_-^{(b)}|^2 = \\ & W_a (|c_+^{(a)}|^2 + |c_-^{(a)}|^2) + W_b (|c_+^{(b)}|^2 + |c_-^{(b)}|^2) = W_a + W_b = 1. \end{aligned} \quad (4.29)$$

При написании этой цепочки равенств учтено, что имеют место соотношения

$$|c_+^{(i)}|^2 + |c_-^{(i)}|^2 = 1, \quad i = a, b.$$

Рассмотрим несколько примеров спиновой матрицы плотности. Пусть имеется смесь, которая содержит N_+ частиц в состоянии $|+1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и N_- частиц в состоянии $|-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, приготовленных независимо. Тогда объединенный пучок описывается матрицей плотности

$$\rho = W_+ |+1/2\rangle\langle +1/2| + W_- |-1/2\rangle\langle -1/2| = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Пусть объединенный пучок неполяризованный, т.е. вектор поляризации равен нулю, $\vec{P} = 0$. Тогда согласно соотношению (4.24a) $N_+ = N_-$ и, соответственно, $W_+ = W_- = \frac{1}{2}$. Следовательно, матрица плотности для неполяризованного пучка записывается как

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I, \quad (4.31)$$

где I - единичная матрица. Соответственно, матричные элементы матрицы плотности имеют вид

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (4.31a)$$

В качестве второго примера рассмотрим матрицу плотности чистого состояния. Используя спиновую волновую функцию (4.6), ее можно представить:

$$\rho = \begin{pmatrix} |\chi_1|^2 & \chi_1 \chi_2^* \\ \chi_1^* \chi_2 & |\chi_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Тогда, учитывая соотношение (4.8), $|\chi_1|^2, |\chi_2|^2, \chi_1 \chi_2^*, \chi_1^* \chi_2$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} |\chi_1|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2}, & |\chi_2|^2 &= \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \chi_1 \chi_2^* &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\delta}, & \chi_1^* \chi_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\delta}. \end{aligned} \quad (4.32a)$$

Проведя элементарные вычисления, матрицу плотности ρ (4.32) можно записать в виде

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta (\cos \delta - i \sin \delta) \\ \sin \theta (\cos \delta - i \sin \delta) & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Если ввести в это выражение компоненты вектора поляризации \vec{P} , которые определяются соотношениями (4.10), получим для спиновой матрицы плотности частиц со спином $1/2$ следующее выражение:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1 - P_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \vec{P} \vec{\sigma}), \quad (4.33a)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – матрицы Паули. Следовательно, матрица плотности пучка частиц со спином $1/2$, находящегося в чистом состоянии, которое описывается вектором состояния $|\chi\rangle$, полностью определяется вектором поляризации \vec{P} .

Рассмотрим спиновую матрицу плотности чистого состояния, когда вектор поляризации направлен по оси 3, т.е. $P_1 = P_2 = 0, P_3 = 1$. В этом случае матрица плотности запишется как

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.33б)$$

Можно показать, что спиновая матрица плотности пучка частиц со спином $1/2$ в смешанном состоянии имеет вид (4.33а). Однако в этом случае вектор поляризации определяется не соотношениями (4.9), а выражением (4.21), т.е.

$$\vec{P} = \sum_i W_i \vec{P}_i, \quad (4.34)$$

где суммирование идет по пучкам частиц, обладающими вектором состояния $|\chi_i\rangle$, а W_i их статистический вес в объединенном пучке.

Спиновая матрица плотности пучка частиц со спином $1/2$ имеет три независимых параметра. Действительно, спиновая матрица плотности – комплексная матрица второго порядка, поэтому она определяется четырьмя комплексными или восемью действительными параметрами. Из определения спиновой матрицы плотности (4.33) видно, что она эрмитова. Это означает, что диагональные элементы матрицы действительны, т.е. имеем два дополнительных условия (мнимые части равны нулю) на элементы матрицы плотности. Кроме того, недиагональные элементы комплексно сопряженные, т.е. равны их реальным частям, а мнимые части отличаются на (-1) . Это еще два дополнительных условия. Таким образом, эрмитовость спиновой матрицы плотности пучка частиц со спином $1/2$ на восемь ее действительных параметров налагает четыре дополнительных условия. Следовательно, независимых остаются четыре. Однако условие равенства единице шпура спиновой матрицы плотности (4.29) дает еще одно дополнительное условие, и независимых действительных параметра остается всего три.

Таким образом, вектор поляризации, который определяется тремя действительными параметрами, полностью определяет спи-

новую матрицу плотности произвольного пучка частиц со спином $1/2$.

В случае чистого спинового состояния пучка было показано, что вектор поляризации определяется двумя действительными параметрами θ и δ (4.10), или, другими словами, на три компоненты вектора поляризации наложено дополнительное условие равенства единицы его длины (4.13). Следовательно, в случае чистых спиновых состояний должно иметь место еще одно условие на спиновую матрицу плотности ρ . Получим его. С этой целью рассмотрим

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \frac{1}{4}(1 + \vec{P}\vec{\sigma})^2 = \frac{1}{4}(1 + 2(\vec{P}\vec{\sigma}) + (\vec{P}\vec{\sigma})^2) = \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2(\vec{P}\vec{\sigma}) + \vec{P}^2) = \frac{1}{2}(1 + (\vec{P}\vec{\sigma})) = \rho.\end{aligned}$$

В последнем равенстве данной цепочки равенств учтено, что в чистом состоянии $\vec{P}^2 = 1$ (4.13). Поэтому в случае чистых спиновых состояний спиновая матрица плотности определяется двумя действительными параметрами и условие $\vec{P}^2 = 1$ эквивалентно условию:

$$\rho^2 = \rho. \quad (4.35)$$

Рассмотрим, как изменяется в процессе рассеяния спиновая матрица плотности. С этой целью рассмотрим спиновую матрицу плотности чистого состояния (4.25). Как хорошо известно [7], S -матрица переводит вектор состояния системы из начального (при $t = -\infty$) в конечное состояние (при $t = +\infty$):

$$|f\rangle = S_{if}|i\rangle.$$

В соответствии с этим спиновая матрица плотности конечного состояния пучка запишется как

$$\rho_f = |\chi_f\rangle\langle\chi_f| = S_{if}|\chi_i\rangle\langle\chi_i|S_{if}^+ = S_{if}\rho_i S_{if}^+, \quad (4.36)$$

где ρ_i – спиновая матрица плотности начального пучка. Используя связь S -матрицы с амплитудой рассеяния M [7], можно определить спиновую матрицу плотности конечного состояния как

$$\rho_f = M\rho_i M^+. \quad (4.37)$$

Пусть начальный пучок неполяризованный, т.е. его спиновая матрица плотности определяется соотношением (4.31), тогда спиновая матрица плотности конечного состояния имеет вид

$$\rho_f = \frac{1}{2} MM^+. \quad (4.38)$$

Следовательно, согласно соотношению (2.76) сечение рассеяния неполяризованного пучка частиц со спином $1/2$ на ядре со спином нуль равно шпуру матрицы плотности ρ_f :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = Sp \rho_f = \frac{1}{2} Sp(MM^+). \quad (4.39)$$

Таким образом, нормировка спиновой матрицы плотности конечного состояния выбрана так, чтобы шпур матрицы плотности конечного состояния определял сечение рассеяние.

Используя амплитуду рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль (4.1), получим спиновую матрицу плотности конечного пучка в случае, когда рассеивается неполяризованный пучок частиц со спином $1/2$ на мишени со спином нуль:

$$\begin{aligned} \rho_f &= \frac{1}{2} MM^+ = \frac{1}{2} (A + B(\vec{\sigma}\vec{n}))(A^* + B^*(\vec{\sigma}\vec{n})) = \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \left[1 + \frac{2 \operatorname{Re} AB^*}{a^2 + b^2} (\vec{\sigma}\vec{n}) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Из выражения (4.40) следует, что в результате рассеяния получается поляризованный пучок частиц со спином $1/2$, и его вектор поляризации определяется (4.33а) как

$$\vec{P}_f = \frac{2 \operatorname{Re} AB^*}{a^2 + b^2} \vec{n} = \frac{2ab \cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} \vec{n}. \quad (4.41)$$

При написании последнего равенства использованы соотношения (4.3).

Вектор поляризации конечного пучка направлен по вектору \vec{n} , т.е. перпендикулярно к плоскости реакции. Это легко понять. Действительно, вектор поляризации определяется как среднее значение спина (4.5), т.е. $\vec{P}_f = \langle \chi_f | \vec{\sigma} | \chi_f \rangle$, следовательно, он является псевдовектором. В п. 3.2 были введены три ортогональных единичных вектора \vec{m}, \vec{l} (3.21) и \vec{n} (3.22). Из них единственным псевдовектором является \vec{n} , и по нему должен быть направлен вектор поляризации.

Отметим, что величина вектора поляризации пропорциональна модулю инвариантной амплитуды $B(\tilde{s}, \tilde{t})$. С другой стороны, инвариантная амплитуда $B(\tilde{s}, \tilde{t})$ отлична от нуля лишь при наличии спин-орбитального взаимодействия (см. п. 3.2). Следовательно, возникновение поляризации в упругом рассеянии нейтрона на четно-четном ядре указывает на сильную спин-орбитальную связь в сильных взаимодействиях.

4.3. Восстановление из эксперимента амплитуды упругого рассеяния частицы со спином 1/2 на частице со спином нуль

В предыдущем параграфе была получена новая характеристика упругого рассеяния – вектор поляризации конечных частиц $\vec{P}_f(E, \theta)$, где E – энергия налетающих частиц, а θ – угол рассеяния. Если сечение рассеяния в случае неполяризованного пучка определялось лишь модулями инвариантных амплитуд a и b , то в величину вектора поляризации входит косинус относительной фазы $\psi - \varphi$. Следовательно, для восстановления амплитуды упругого рассеяния частицы со спином 1/2 на частице со спином нуль из экспериментальных данных необходим еще один эксперимент, содержащий указанные три величины.

С этой целью рассмотрим упругое рассеяние поляризованного пучка частиц со спином 1/2 на мишени со спином нуль. Пусть начальная поляризация пучка определяется вектором поляризации \vec{P}_0 , тогда его спиновая матрица плотности должна иметь вид (4.33а):

$$\rho_i = \frac{1}{2}(1 + \vec{P}_0 \vec{\sigma}). \quad (4.42)$$

Следовательно, спиновая матрица плотности рассеянных частиц со спином 1/2 определится выражением (4.37)

$$\rho_f = \frac{1}{2}M(1 + \vec{P}_0 \vec{\sigma})M^+, \quad (4.43)$$

где M – амплитуда упругого рассеяния, определяемая выражением (4.1). Подставляя амплитуду рассеяния M в выражение (4.43), по-

лучим после тривиальных вычислений следующее выражение для матрицы плотности конечных частиц:

$$\begin{aligned} \rho_f = & \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \left\{ 1 + \frac{2ab \cos(\psi - \varphi)}{a^2 + b^2} (\bar{n} \bar{P}_0) + \right. \\ & + \left[\frac{2ab \cos(\psi - \varphi)}{a^2 + b^2} \bar{n} + \frac{2ab \sin(\psi - \varphi)}{a^2 + b^2} [\bar{n} \bar{P}_0] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \bar{P}_0 + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} (\bar{P}_0 \bar{n}) \bar{n} \right] \bar{\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

При получении этого выражения необходимо использовать соотношение

$$(\bar{\sigma} \bar{n})(\bar{P}_0 \bar{\sigma})(\bar{\sigma} \bar{n}) = 2(\bar{P}_0 \bar{n})(\bar{\sigma} \bar{n}) - (\bar{P}_0 \bar{\sigma}).$$

Как ранее упоминалось, матрица плотности конечного состояния нормирована таким образом, чтобы ее шпур давал сечение рассеяния. Следовательно, сечение рассеяния поляризованного пучка частиц со спином $1/2$ на мишени со спином нуль равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = Sp \rho_f. \quad (4.45)$$

Используя выражение для матрицы плотности конечного состояния (4.44) и учитывая, что шпур матриц Паули равен нулю, получим сечение рассеяния поляризованного пучка частиц со спином $1/2$ на мишени со спином нуль:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (1 + \bar{A} \bar{P}_0). \quad (4.46)$$

Видно, что сечение рассеяния поляризованного пучка на мишени выражается через сечение рассеяния неполяризованного пучка на

той же мишени $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0$, определяемое выражением (4.4). Однако в

сечении рассеяния $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$ входит также вектор \bar{A} , который называется вектором азимутальной асимметрии и определяется соотношением

$$\bar{A} = \frac{2ab \cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} \bar{n}. \quad (4.47)$$

Рассмотрим физический смысл вектора азимутальной асимметрии. С этой целью рассмотрим эксперимент по детектированию частиц после рассеяния (рис. 4.1). Пусть вектор поляризации начального пучка \vec{P}_0 перпендикулярен к плоскости реакции и его на-

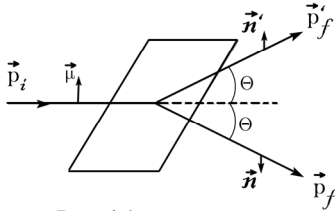


Рис. 4.1

правление определяется единичным вектором $\vec{\mu}$, который направлен вверх от этой плоскости, т.е. $\vec{P}_0 = P_0 \vec{\mu}$. Пусть падающая частица рассеивается на угол θ , и рассеянные частицы детектируются двумя детекторами, расположенными справа и слева по отношению к направлению падающего пучка

под углом θ . Все импульсы \vec{p}_i, \vec{p}_f и \vec{p}'_f лежат в одной плоскости (где \vec{p}_i – импульс падающей частицы, а \vec{p}_f и \vec{p}'_f – импульсы рассеянной частицы, регистрируемые правым и левым детектором соответственно). Тогда единичный вектор $\vec{n} \sim [\vec{p}_i \vec{p}_f]$ направлен против вектора $\vec{\mu}$, поэтому $(\vec{n} \vec{\mu}) = -1$, а $\vec{n}' \sim [\vec{p}_i \vec{p}'_f]$ по вектору $\vec{\mu}$ и $(\vec{n}' \vec{\mu}) = 1$. В соответствии с этим, учитывая (4.46), сечение рассеяния, измеряемое левым детектором, равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\text{л} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (1 + AP_0), \quad (4.48a)$$

а сечение рассеяния, измеряемое правым детектором, равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\text{пр} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (1 - AP_0). \quad (4.48б)$$

Эти два сечения различны, т.е. в случае рассеяния поляризованного пучка частиц со спином $1/2$ на мишени со спином нуль сечение рассеяния не обладает азимутальной симметрией относительно направления падающего пучка частиц. Для определения этого различия вводят величину $\epsilon_{\text{л,пр}}$, которая называется лево-правой асимметрией и определяется выражением

$$\varepsilon_{\text{л.пр}} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{\text{л}} - \left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{\text{пр}}}{\left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{\text{л}} + \left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{\text{пр}}}. \quad (4.49)$$

Подставляя в это соотношение выражения для $\left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{\text{л}}$ (4.48a) и $\left(\frac{d\sigma}{do}\right)_{\text{пр}}$ (4.48б), получим лево-правую асимметрию в случае рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль:

$$\varepsilon_{\text{л.пр}} = AP_0. \quad (4.50)$$

Таким образом, в случае наличия у падающего пучка частиц поляризации, вектор которой перпендикулярен плоскости реакции, в сечении рассеяния возникает лево-правая асимметрия, которая пропорциональна величине вектора азимутальной асимметрии.

Пусть теперь вектор поляризации начального пучка \vec{P}_0 имеет произвольное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\mu}$. Тогда разложим вектор $\vec{\mu}$ на компоненты $\vec{\mu}_{\perp}$ и μ_{\parallel} , т.е.

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\perp} + \mu_{\parallel}, \quad (4.50)$$

где двумерный вектор $\vec{\mu}_{\perp}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к падающему пучку, а компонента μ_{\parallel} направлена вдоль падающего пучка. Тогда скалярное произведение единичных векторов \vec{n} и \vec{n}' с единичным вектором $\vec{\mu}$ определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} (\vec{n}\vec{\mu}) &= (\vec{n}\vec{\mu}_{\perp}) = \cos\varphi, \\ (\vec{n}'\vec{\mu}) &= (\vec{n}'\vec{\mu}_{\perp}) = -\cos\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае величина лево-правой асимметрии зависит от азимутального угла φ вокруг направления падающего пучка частиц и определяется выражением

$$\varepsilon_{\text{л.пр}} = AP_0 \cos\varphi. \quad (4.51)$$

Из соотношений (4.41) и (4.47) видно, что вектор поляризации \vec{P}_f конечного пучка частиц, если падает неполяризованный пучок частиц со спином $1/2$, равен вектору азимутальной асимметрии \vec{A}

в случае, когда измеряется сечение рассеяния частиц со спином $1/2$ и начальной поляризацией \vec{P}_0 на мишени со спином нуль, т.е.

$$\vec{P}_f = \vec{A}. \quad (4.52)$$

Это равенство является следствием общего утверждения, носящего название первой теоремы Вольфенштейна и Ашкина. Эта теорема утверждает, что равенство (4.52) выполняется при рассеянии частицы со спином $1/2$ на ядрах с произвольным спином. Доказательство теоремы основано на требовании инвариантности амплитуды рассеяния M относительно вращений, инверсии пространства и обращения времени.

Следовательно, измерение сечения рассеяния поляризованного пучка частиц со спином $1/2$ на мишени со спином нуль не дает новой информации для восстановления амплитуды рассеяния M . Однако равенство (4.52) позволяет экспериментально измерить величину вектора поляризации \vec{P}_f , возникающую при рассеянии неполяризованного пучка частиц на мишени.

Рассмотрим эксперимент по двойному рассеянию. Пусть падающий неполяризованный пучок нейтронов рассеивается дважды на двух одинаковых мишенях. В результате первого рассеяния на угол θ у нейтронного пучка возникает поляризация \vec{P}_f , определяемая выражением (4.41). Полученный в результате первого рассеяния, поляризованный пучок нейтронов вторично рассеивается на такой же мишени, и измеряется сечение рассеивания под тем же самым углом θ . В этом рассеянии, поскольку падающий пучок нейтронов поляризован, возникает лево-правая асимметрия, которая имеет вид

$$\varepsilon_{\text{л.пр}} = \vec{A}\vec{P}_f. \quad (4.53)$$

Учитывая, что оба рассеяния упругие и происходят на один и тот же угол θ , согласно теореме Вольфенштейна и Ашкина можно записать

$$\varepsilon_{\text{л.пр}} = \vec{P}_f^2, \quad (4.54)$$

т.е. величина вектора поляризации пучка нейтронов, возникающая в результате первого рассеяния, равна

$$P_f = \sqrt{\varepsilon_{\text{л.пр}}}. \quad (4.54а)$$

Таким образом, для восстановления амплитуды упругого рассеяния M частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль необходимо иметь начальный поляризованный пучок частиц и в результате рассеяния измерять поляризацию конечного пучка частиц. С этой целью рассмотрим полностью поляризованный падающий пучок частиц в состоянии $|+1/2\rangle$, т.е. его вектор поляризации равен единице и направлен вдоль оси 3, т.е. $P_1 = P_2 = 0$, $P_3 = 1$. В этом случае спиновая матрица плотности падающего пучка частиц определяется выражением (4.33б). Тогда матрицу плотности конечного пучка, которая определяется соотношением (4.44), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_f = & \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \left\{ 1 + \frac{2ab \cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} n_3 + \right. \\ & + \frac{2ab \cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} (\vec{\sigma} \vec{n}) - \frac{2ab \sin(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} [\vec{n} \sigma]_3 + \\ & \left. + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sigma_3 + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} n_3 (\vec{n} \vec{\sigma}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Выпишем матричные элементы данной матрицы плотности, представив ее в виде

$$\rho_f = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{a^2 + b^2} (a^2 + 2abn_3 \cos(\varphi - \psi) + b^2 n_3^2), \quad (4.56a)$$

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{2ab \cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} (n_1 - in_2) - \\ & - \frac{2ab \sin(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} (in_1 + n_2) + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} n_3 (n_1 - in_2), \end{aligned} \quad (4.56б)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{2ab \cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} (n_1 + in_2) + \\ & + \frac{2ab \sin(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2} (in_1 - n_2) + \frac{2b^2}{a^2 + b^2} n_3 (n_1 + in_2), \end{aligned} \quad (4.56в)$$

$$\delta = \frac{2b^2(1 - n_3^2)}{a^2 + b^2}. \quad (4.56г)$$

Рассмотрим величину δ . Она дает вероятность нахождения частицы после рассеяния в состоянии $| -1/2 \rangle$, в то время как до рассеяния все частицы находились в состоянии $| +1/2 \rangle$. Эта вероятность максимальна, когда $n_3^2 = 0$, т.е. ось 3 лежит в плоскости реакции, так как вектор \vec{n} перпендикулярен к ней. Пусть ось 3 направлена по падающему пучку, тогда

$$\delta = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (4.57)$$

Матрица плотности рассеянного пучка нормирована так, чтобы ее шпур давал сечение рассеяния. Следовательно, коэффициент δ определяет сечение рассеяния с переворотом спина, так как начальный пучок был полностью поляризованный и его вектор состояния имел вид $| +1/2 \rangle$. Такое сечение называется спин-

флиповым сечением, которое будем обозначать как $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$. Оно

имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = b^2. \quad (4.58)$$

Таким образом, получен третий эксперимент, который позволяет полностью восстановить амплитуду упругого рассеяния M частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль.

Возникает вопрос: как провести измерение спин-флипового сечения? Оно измеряется в экспериментах по тройному рассеянию. Действительно, в первом рассеянии возникает поляризованный пучок частиц со спином $1/2$. С помощью магнитного поля из него выделяют компоненту, находящуюся в состоянии $| +1/2 \rangle$. Такой пучок полностью поляризован. Во втором рассеянии полностью поляризованный пучок рассеивается, в результате чего происходит изменение его поляризации, и появляется компонента пучка в состоянии $| -1/2 \rangle$. Третье рассеяние служит анализатором поляризационного состояния конечного пучка и, следовательно, измеряет спин-флиповое сечение.

Таким образом, для восстановления амплитуды упругого рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином нуль необходимо провести три эксперимента. Этими экспериментами являются:

а) измерение сечения неполяризованного пучка

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = a^2 + b^2, \quad (4.59a)$$

б) измерение величины вектора поляризации конечного пучка в случае, когда начальный пучок неполяризованный (двойное рассеяние):

$$P_f = \frac{2ab\cos(\varphi - \psi)}{a^2 + b^2}, \quad (4.59б)$$

в) измерение спин-флипового сечения в тройном рассеянии:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = b^2. \quad (4.59в)$$

Измерение этих трех величин, проводимое во всей области изменения их переменных, позволяет восстановить амплитуду упругого рассеяния.

В заключение рассмотрим вопрос о восстановлении амплитуды упругого нуклон-нуклонного рассеяния. В соответствии с выражением (3.52) такая амплитуда содержит пять инвариантных амплитуд a, b, c, f, g . Следовательно, подлежат экспериментальному определению девять функций двух переменных: модули этих амплитуд и четыре относительные фазы. Программа определения этих величин сформулирована. Она включает эксперименты, в которых участвуют поляризованные начальные пучки и поляризованные мишени. Кроме того, измеряется поляризация конечного пучка и мишени. В результате экспериментального осуществления этой программы удалось восстановить амплитуду упругого NN -рассеяния до 600 Мэв..

Контрольные вопросы к главе 4

1. Сколько независимых параметров содержит спиновая матрица плотности частицы со спином 1 и с $m \neq 0$.

2. Имеется система из двух невзаимодействующих частиц со спинами $1/2$. Написать ее спиновую матрицу плотности.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Давыдов А.С. Теория атомного ядра. – М.: ГИФМЛ, 1958.
2. С. де Бенедетти. Ядерные взаимодействия. – М.: Атомиздат, 1968.
3. Ситенко А.Г., Тартаковский В.К. Лекции по теории ядра. – М.: Атомиздат, 1972.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989.
5. Шапиро И.С., Берков А.В., Хангулян В.А. Релятивистская квантовая теория. Трансформационные свойства поле – М.: МИФИ, 1980.
6. Шапиро И.С., Берков А.В., Хангулян В.А. Квантование свободных полей. Уравнение Дирака во внешнем поле. – М.: МИФИ, 1980.
7. Шапиро И.С., Берков А.В., Хангулян В.А. Теория взаимодействующих квантованных полей. – М.: МИФИ, 1982.