ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

# «БАРИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЯДЕРНЫХ ПЛОТНОСТЯХ И НЕЙТРОННЫЕ ЗВЁЗДЫ»

Выполнил студент
213 группы
Михеев Семен Алексеевич

_____________

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Третьякова Татьяна Юрьевна

_____________

Научный консультант:
к.ф.-м.н. Ланской Дмитрий Евгеньевич

_____________

Допущен к защите
Зав. кафедрой _____________

МОСКВА

2022

# Оглавление

# ВВЕДЕНИЕ

Нейтронные звезды - гидростатически равновесные звёзды, вещество которых состоит в основном из нейтронов и имеет плотность порядка ядерной. Идея существования нейтронных звёзд была впервые предложена в 1934 году Бааде и Цвикки, первые модели были созданы Оппенгеймером и Волковым. Современные теоретические расчеты указывают на возможность существования нейтронных звезд с массами от 0,1 $M_{\odot}$, хотя нейтронные звёзды со столь малыми массами до настоящего времени не наблюдались. Что касается верхнего предела, различные модели дают различные результаты, но в большинстве расчетов максимально возможная масса не превышает или слегка превышает 2 $M_{\odot}$. [1]

На сегодняшний день нейтронные звёзды наблюдаются во всех диапазонах электромагнитного спектра. Подавляющее большинство измерений масс нейтронных звезд было выполнено с помощью радио-наблюдений вращающихся пульсаров в двойных системах. В настоящее время в Галактике известно более 2500 пульсаров, однако около 90% из них изолированы и их массы не могут быть измерены, так как все современные методы основаны на точном отслеживании орбитальных движений через время прибытия импульсов от пульсаров. Среди нейтронных звёзд с надёжно измеренными массами большинство попадает в интервал от 1,3 до 1,5 масс Солнца. [2]

За последние годы был сделан ряд важных открытий в физике нейтронных звёзд. 17 августа 2017 года был зарегистрирован первый всплеск гравитационных волн от слияния двух нейтронных звёзд, GW170817. Событие было зарегистрировано одновременно всеми тремя гравитационно-волновыми детекторами детекторной сети LIGO-Virgo [3]. Теперь информация об электромагнитных и гравитационных волнах может быть объединена для получения ограничений на скорость расширения Вселенной и уравнения состояния плотной ядерной материи. В 2019 году были получены первые спектроскопические свидетельства синтеза тяжёлых элементов в слиянии нейтронных звёзд, был зарегистрирован стронций. [4] Помимо доказательства нуклеосинтеза в слиянии нейтронных звёзд, это событие является, по сути, первым доказательством того, что нейтронная звезда богата нейтронами. Также в 2019 году при помощи наземного телескопа Green Bank Telescope была обнаружена самая массивная из известных на данный момент нейтронная звезда, J0740+6620,с массой $2.14 \pm 0.2 M_{\odot}$, которая расположена на расстоянии около 4,6 тысячи световых лет от Земли. [5]

Нейтронные звёзды являются объектами, в которых реализуется широкий спектр экстремальных состояний вещества, который недоступен для лабораторных исследований: сверхвысокие магнитные поля, сверхъядерная плотность, сверхтекучая барионная компонента. Поэтому исследование нейтронных звёзд важно не только для астрофизики, но и для ядерной физики. [6]

Для построения модели нейтронной звезды необходимо уметь описывать уравнение состояния материи нейтронной звезды. Точный состав внутреннего ядра нейтронной звезды не известен, поэтому существует большое разнообразие теоретических моделей. В этой работе мы описываем материю нейтронных звёзд, как бесконечную ядерную материю. В самом простом варианте материя нейтронных звёзд состоит из нейтронов, протонов, электронов и мюонов, однако известно, что при плотностях, в несколько раз превышающих плотность насыщения ядерной материи, могут возникать гипероны. Первыми при увеличении плотности должны, предположительно, появиться $\Lambda$-гипероны, поэтому в данной работе изучается нейтронные звёзды, состоящие из нуклонов, лептонов и $\Lambda$-гиперонов.

## 1. Описание модели

В первом приближении вещество нейтронных звёзд может быть описано, как вырожденный газ невзаимодействующих нейтронов. В частности, уравнение идеального нейтронного газа было использовано в первых моделях нейтронных звёзд, созданных Оппенгеймером и Волковым [7]. В более сложных моделях частицы в ядерной материи взаимодействуют между собой и необходимо иметь эффективную модель описания этого взаимодействия.

Существует большое разнообразие теорий, которые могут быть основаны на фундаментальных физических свойствах взаимодействия или на анализе экспериментальных данных и построении моделей содержащих некоторое количество параметров. Важное место занимают методы самосогласованного среднего поля, направленные на моделирование эффективного взаимодействия и создание эффективных функционалов плотности энергии. В этой работе используется взаимодействие Скирма [8] - самосогласованная нерелятивистская модель среднего поля.

Взаимодействие Скирма построено с помощью дельта-сил, которые согласуются со свойствами ядерных сил. Такой подход позволяет упростить решение системы уравнений в методе Хартри-Фока, но приводит к возникновению большого числа параметров в модели. Модель Скирма является эффективным способом описания барионного взаимодействия и позволяет в одном подходе описывать и нуклон-нуклонное, и гиперон-нуклонное взаимодействие. Модель Скирма достаточно широко распространена и используется в различных работах для изучения свойств ядер и ядерной материи [9]. В том числе существуют работы, в которых данная модель применяется для описания нейтронных звёзд [10–12]. Однако стоит отметить, что модель Скирма является нерелятивистской, что приводит к её ограниченности в описании области высоких плотностей.

## 1.1. Потенциал Скирма

Потенциалы эффективного взаимодействия Скирма выглядит следующим образом:
Для нуклон-нуклонного взаимодействия [13]

$$\begin{aligned}V_{NN}(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2}) &= t_0(1+x_0P_\sigma)\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}) \\ &+ \frac{1}{2}t_1(1+x_1P_\sigma)[\overrightarrow{P}'^2\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})+\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})\overrightarrow{P}^2] \\ &+ t_2(1+x_2P_\sigma)\overrightarrow{P}'\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})\overrightarrow{P} \\ &+ iW_0\overrightarrow{\sigma}[\overrightarrow{P}'\times\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})\overrightarrow{P}]\end{aligned} \tag{1.1}$$

Для гиперон-нуклонного взаимодействия [14]

$$\begin{aligned}V_{\Lambda N}(\overrightarrow{r_\Lambda},\overrightarrow{r_N}) &= u_0(1+\xi_0P_\sigma)\delta(\overrightarrow{r_\Lambda}-\overrightarrow{r_N}) \\ &+ \frac{1}{2}u_1(1+\xi_1P_\sigma)[\overrightarrow{P}'^2\delta(\overrightarrow{r_\Lambda}-\overrightarrow{r_N})+\delta(\overrightarrow{r_\Lambda}-\overrightarrow{r_N})\overrightarrow{P}^2] \\ &+ u_2\overrightarrow{P}'\delta(\overrightarrow{r_\Lambda}-\overrightarrow{r_N})\overrightarrow{P} \\ &+ iW_0^\Lambda\overrightarrow{P}'\delta(\overrightarrow{r_\Lambda}-\overrightarrow{r_N})[\overrightarrow{\sigma}\times\overrightarrow{P}]\end{aligned} \tag{1.2}$$

Для гиперон-гиперонного взаимодействия [15]

$$\begin{aligned}V_{\Lambda\Lambda}(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2}) &= \lambda_0\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}) \\ &+ \frac{1}{2}\lambda_1[\overrightarrow{P}'^2\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})+\delta(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})\overrightarrow{P}^2]\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\overrightarrow{P} = \frac{1}{2i}(\nabla_1 - \nabla_2)$– оператор импульса относительного движения, действующий на правую обкладку матричного элемента, а $\overrightarrow{P'}$ – на левую, $P_\sigma = \frac{1}{2}(1+\sigma_1\sigma_2)$– спиновый обменный оператор, $\sigma_1$ и $\sigma_2$ – спины барионов. Для гиперон-нуклонного взаимодействия индексы 1 и 2 в выражениях выше заменяются на Λ и N соответственно.

Последний член в выражениях 1.1 и 1.2 отвечает за спин-орбитальное взаимодействие и равен нулю в однородной и неполяризованной ядерной материи. Также для полноценного описания NN- и $\Lambda N$-взаимодействия выражений 1.1 и 1.2, описывающих двухчастичное взаимодействие, необходим ещё один член, описывающий многочастичные эффекты. Для нуклон-нуклонного взаимодействия он может быть записан с помощью тройных сил:

$$V_{123}(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3}) = t_3\delta(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})\delta(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}) \tag{1.4}$$

Альтернативным способом описания этого эффекта является зависимость от нуклонной плотности ($n$):

$$V_{12}(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, n) = \frac{1}{6}t_3(1 + x_3P_\sigma)[n(\frac{\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}}{2})]^\sigma\delta(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \tag{1.5}$$

Эти два способа описания эквивалентны при условии $x_3 = 1$ и $\sigma = 1$.

Для гиперон-нуклонного потенциала многочастичные эффекты описываются аналогичным образом, через тройные силы или зависимость от нуклонной плотности ($n$) [16]:

$$V_{\Lambda NN}(\overrightarrow{r_\Lambda}, \overrightarrow{r_{N1}}, \overrightarrow{r_{N2}}) = u_3\delta(\overrightarrow{r_\Lambda} - \overrightarrow{r_{N1}})\delta(\overrightarrow{r_\Lambda} - \overrightarrow{r_{N2}}) \tag{1.6}$$

$$V_{\Lambda N}(\overrightarrow{r_\Lambda}, \overrightarrow{r_N}, n) = \frac{3}{8}u_3(1 + \xi_3P_\sigma)\delta(\overrightarrow{r_\Lambda} - \overrightarrow{r_N})n^\gamma(\frac{\overrightarrow{r_\Lambda} + \overrightarrow{r_N}}{2}) \tag{1.7}$$

При $\gamma = 1$ в выражении 1.7 эти два варианта практически эквивалентны для гиперядер и эквивалентны для симметричной ядерной материи, то есть для материи, в которой количество протонов равно количеству нейтронов. Однако в нейтронных звёздах, при сильном дисбалансе между протонами и нейтронами, тройные силы и зависимость от плотности могут приводить к разным результатам. Более того, существуют параметризации с зависимостью от плотности с $\gamma \neq 1$, которые не могут быть представлены с помощью тройных сил. В данной работе в том числе исследуется, как вышеописанные особенности $\Lambda N$-взаимодействия влияют на характеристики нейтронных звёзд.

Основываясь на этих потенциалах, можно рассчитать другие необходимые нам характеристики материи.

Энергия в материи рассчитывается следующим образом:

$$E = \langle\phi|T + V|\phi\rangle \tag{1.8}$$

В выражении 3.2 первое слагаемое определяет кинетическую энергию, второе - потенциальную энергию. Более удобной величиной, чем полная энергия является плотность энергии ($H$).

$$E = \int H dr \tag{1.9}$$

Подробный вывод плотности энергии из потенциала, основанный на работе [13] приведён в приложении.

Выражение для плотности энергии $NN$-взаимодействия:

$$\begin{aligned} H_{NN} = K &+ \frac{1}{4}t_0[(2+x_0)n_N^2 - (2x_0+1)(n_p^2+n_n^2)] \\ &+ \frac{1}{24}t_3 n_N^\sigma[(2+x_3)n^2 - (2x_3+1)(n_p^2+n_n^2)] \\ &+ \frac{1}{8}[t_1(2+x_1)+t_2(2+x_2)]\tau n_N \\ &+ \frac{1}{8}[t_2(2x_2+1)-t_1(2x_1+1)](\tau_p n_p + \tau_n n_n) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь $n_N = n_n + n_p$ – барионная плотность материи, а $\tau = \tau_n + \tau_p$ – плотность кинетической энергии. $K = (\frac{\hbar^2}{2m})\tau_N$ – член зависящий от кинетической энергии.

Выражения для плотности энергии гиперон-нуклонного и гиперон-гиперонного взаимодействия рассчитываются аналогично 1.10 и выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{N\Lambda} = K_\Lambda &+ u_0(1+\frac{\xi_0}{2})n_N n_\Lambda \\ &+ \frac{1}{8}[u_1(2+\xi_1)+u_2(2+\xi_2)](\tau_N n_\Lambda + \tau_\Lambda n_N) + H_3 \end{aligned} \tag{1.11}$$

В случае зависимости от плотности:

$$H_3 = \frac{3}{8}u_3(1+\frac{\xi_3}{2})n_N^{\gamma+1}n_\Lambda$$

В случае тройных сил:

$$H_3 = \frac{1}{4}u_3(1+\frac{\xi_3}{2})n_\Lambda(n_N^2 + 2n_n n_p)$$

Здесь кинетический член $K_\Lambda = (\frac{\hbar^2}{2m_\Lambda})\tau_\Lambda$. Для гиперон-гиперонного взаимодействия:

$$H_{\Lambda\Lambda} = \frac{\lambda_0}{4} n_\Lambda^2 + \frac{1}{8}\lambda_1 n_\Lambda \tau_\Lambda \tag{1.12}$$

Соответственно,полная плотность энергии материи:

$$H = H_{NN} + H_{N\Lambda} + H_{\Lambda\Lambda} \tag{1.13}$$

Все параметризации Скирма ведут себя очень похоже при ядерных плотностях и хорошо описывают ядра и гиперядра, но имеют самое различное поведение в экстремальных областях. Именно поэтому крайне важно тестирование параметризаций при высоких плотностях.

## 1.2. Бесконечная ядерная материя

В работе исследуется бесконечная ядерная материя и различные её характеристики. Важным параметром ядерной материи является её протонная заселенность ($Y_p$). $Y_p$ – это отношение числа протонов в материи к общему числу барионов. Также в дальнейшем будут использоваться и другие заселённости: нейтронная, электронная, мюонная и гиперонная ($Y_n, Y_e$ ,$Y_\mu$ и $Y_\Lambda$ соответственно). В этой работе исследуется материя, состоящая из протонов, нейтронов, мюонов, электронов и $\Lambda$-гиперонов, и находящаяся в состоянии химического равновесия. Такая форма материи характеризуется следующими процессами.

$$n \Longleftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \Longleftrightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$n + n \Longleftrightarrow n + \Lambda$$

Исходя из этого, состояние химического равновесия определяется следующей системой уравнений для химических потенциалов.

$$\begin{cases} \mu_p + \mu_e = \mu_n \\ \mu_\mu = \mu_e \\ \mu_\Lambda + m_\Lambda = \mu_n + m_n \end{cases} \tag{1.14}$$

Химические потенциалы барионов здесь рассчитываются следующим образом:

$$\mu_i = \frac{\partial H}{\partial n_i} \tag{1.15}$$

Химические потенциалы лептонов в данной работе включают в себя массу лептонов:

$$\mu_e = \sqrt{{m_e}^2 + (3\pi^2 Y_e n)^{2/3}} \tag{1.16}$$

$$\mu_\mu = \sqrt{{m_\mu}^2 + (3\pi^2 Y_\mu n)^{2/3}} \tag{1.17}$$

Учтём связи между фракциями различных составляющих: $Y_n + Y_p + Y_\Lambda = 1$, $Y_\mu = Y_p - Y_e$. Таким образом система уравнений для химических потенциалов имеет три неизвестные: $Y_p$,$Y_\Lambda$ и $Y_e$.

$$\begin{cases} \mu_p(Y_p, Y_\Lambda) + \mu_e(Y_e) = \mu_n(Y_p, Y_\Lambda) \\ \mu_\mu(Y_p, Y_e) = \mu_e(Y_e) \\ \mu_\Lambda(Y_p, Y_\Lambda) + m_\Lambda = \mu_n(Y_p, Y_\Lambda) + m_n \end{cases} \tag{1.18}$$

В материи без гиперонов $Y_\Lambda = 0$ и система уравнений для химических потенциалов включает в себя два уравнения при двух неизвестных:

$$\begin{cases} \mu_p(Y_p) + \mu_e(Y_e) = \mu_n(Y_p) \\ \mu_\mu(Y_p, Y_e) = \mu_e(Y_e) \end{cases} \tag{1.19}$$

Выражение для энергии на нуклон имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{H}{n} = \varepsilon_{NN} + \varepsilon_{\Lambda N} + \varepsilon_{\Lambda\Lambda} \tag{1.20}$$

Запишем выражения для каждого слагаемого.

$$\varepsilon_{NN}(Y_p, Y_\Lambda, n) = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{3\pi^2}{2})^{2/3}n^{2/3}F_{5/3} \tag{1.21}$$
$$+\frac{1}{4}t_0 n[(x_0+2)(Y_n+Y_p)^2-(2x_0+1)(Y_p^2+Y_n^2)]$$
$$+\frac{1}{24}t_3 n^{\sigma+1}[(x_3+2)(Y_p+Y_n)^{\sigma+2}-(2x_3+1)(Y_p+Y_n)^{\sigma}(Y_p^2+Y_n^2)]$$
$$+\frac{3}{40}(\frac{3\pi^2}{2})^{2/3}n^{5/3}[2^{2/3}[t_1(x_1+2)+t_2(x_2+2)](Y_n^{8/3}+Y_n^{5/3}Y_p+Y_p^{5/3}Y_n+Y_p^{8/3})$$
$$+\frac{1}{2}[t_2(2x_2+1)-t_1(2x_1+1)]F_{8/3}],$$

где

$$F_m(Y_p) = 2^{m-1}[{Y_p}^m+(1-Y_p)^m]$$

$$\varepsilon_{N\Lambda}(Y_p, Y_\Lambda, n) = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m_\Lambda}(3\pi^2)^{2/3}n^{2/3}Y_\Lambda^{5/3}+u_0(1+\frac{\xi_0}{2})n(Y_\Lambda-Y_\Lambda^2) \tag{1.22}$$
$$+\frac{3}{40}(3\pi^2)^{2/3}[u_1(2+\xi_1)+u_2(2+\xi_2)]n^{5/3}Y_\Lambda(Y_\Lambda^{2/3}-Y_\Lambda^{5/3}+Y_n^{5/3}+Y_p^{5/3})+\varepsilon_3$$

где для тройных сил:

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}u_3(1+\frac{\xi_3}{2})n^2 Y_\Lambda(Y_n^2+4Y_nY_p+Y_p^2) \tag{1.23}$$

Для зависимости от плотности:

$$\varepsilon_3 = \frac{3}{8}u_3(1+\frac{\xi_3}{2})n^{\gamma+1}Y_\Lambda(1-Y_\Lambda)^{\gamma+1} \tag{1.24}$$

$$\varepsilon_{\Lambda\Lambda}(Y_\Lambda, n) = \frac{\lambda_0}{4}nY_\Lambda^2+\frac{3}{40}\lambda_1(3\pi^2)^{2/3}n^{5/3}Y_\Lambda^{8/3} \tag{1.25}$$

Нейтронная заселённость определяется как $Y_n = 1-Y_p-Y_\Lambda$, $n$ – барионная плотность материи, вычисляемая в $fm^{-3}$. С помощью выражений 1.20-1.25 можно рассчитать и остальные необходимые характеристики.
Энергия симметрии ($a_s$) и её производные ($K, L_{sym}$). Здесь $n_0$ – плотность насыщения:

$$a_s = \frac{1}{8}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial Y_p^2}_{Y_p=1/2} \tag{1.26}$$

$$L = 3n_0(\frac{\partial a_s}{\partial n})_{n=n_0} \tag{1.27}$$

$$K_{sym} = 9n_0^2(\frac{\partial^2 a_s}{2})_{n=n_0} \tag{1.28}$$

Экспериментальное значение плотности насыщения для тяжелых ядер:

$$n_0 = 0.16 \pm 0.005 fm^{-3}$$

Давление рассчитывается по следующей формуле:

$$p = n^2 \frac{d\varepsilon}{dn} \tag{1.29}$$

С учётом 1.20 это можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} p(Y_p, Y_\Lambda, n) = {} & \frac{2}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{3\pi^2}{2})^{2/3} n^{5/3} F_{5/3} + \frac{2}{5}\frac{\hbar^2}{2m_\Lambda}(3\pi^2)^{2/3} n^{5/3} Y_\Lambda^{5/3} \\ & + \frac{1}{4} t_0 n^2 [(x_0+2)(Y_n+Y_p)^2 - (2x_0+1)(Y_p^2+Y_n^2)] \\ & + \frac{1}{24} t_3 n^{\sigma+2}(\sigma+1)[(x_3+2)(Y_p+Y_n)^{\sigma+2} - (2x_3+1)(Y_p+Y_n)^\sigma(Y_p^2+Y_n^2)] \\ & + \frac{5}{40}(\frac{3\pi^2}{2})n^{8/3}[2^{2/3}[t_1(x_1+2)+t_2(x_2+2)](Y_n^{8/3}+Y_n^{5/3}Y_p+Y_p^{5/3}Y_n+Y_p^{8/3}) \\ & + \frac{1}{2}[t_2(2x_2+1)-t_1(2x_1+1)]F_{8/3}] + u_0(1+\frac{\xi_0}{2})n^2(Y_\Lambda - Y_\Lambda^2) \\ & + \frac{1}{8}(3\pi^2)^{2/3}[u_1(2+\xi_1)+u_2(2+\xi_2)]n^{8/3}Y_\Lambda(Y_\Lambda^{2/3} - Y_\Lambda^{5/3} + Y_n^{5/3} + Y_p^{5/3}) + p_3 \\ & + \frac{\lambda_0}{4} n^2 Y_\Lambda^2 + \frac{\lambda_1}{8}(3\pi^2)^{2/3} n^{8/3} Y_\Lambda^{8/3} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Соответственно, для тройных сил:

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}u_3(1+\frac{\xi_3}{2})n^3 Y_\Lambda(Y_n^2 + 4Y_nY_p + Y_p^2) \tag{1.31}$$

Для зависимости от плотности:

$$\varepsilon_3 = \frac{3}{8}u_3(1+\frac{\xi_3}{2})(\gamma+1)n^{\gamma+2}Y_\Lambda(1-Y_\Lambda)^{\gamma+1} \tag{1.32}$$

Также, для дальнейших расчётов необходимо ввести энергетическую плотность материи, которая отличается от $H$ (1.13) тем, что включает массы частиц и энергетические плотности лептонов:

$$\epsilon(n_e, n_p, n_n, n_\mu) = n_b\varepsilon + n_n m_n c^2 + n_p m_p c^2 + n_\Lambda m_\Lambda c^2 + \epsilon_e(n_e) + \epsilon_\mu(n_\mu) \tag{1.33}$$

Здесь $n_b = n_n + n_p + n_\Lambda$, а $\epsilon_\mu$ и $\epsilon_e$ – энергетические плотности мюонов и электронов соответственно. Они рассчитываются из следующих соображений [17].

Число состояний для свободных электронов в единицу объема:

$$dn = \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3} \tag{1.34}$$

Интегрируя это выражение от 0 до $k_F$ (импульс Ферми) получим численную плотность электронов.

$$n_e = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_0^{k_F} k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{1.35}$$

Дополнительная двойка в числителе здесь появляется из-за того, что на каждом энергетическом уровне электрон имеет два возможных направления спина. Из 1.35 получим значение импульса Ферми:

$$k_F = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3} \tag{1.36}$$

Вклад электронов в энергетическую плотность с учётом их массы покоя определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\epsilon_e(k_F) &= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_0^{k_F}(k^2c^2 + m_e^2c^4)^{1/2}k^2 dk \qquad (1.37)\\ &= \epsilon_0 \int\limits_0^{k_F/m_ec} (u^2+1)^{1/2}u^2 du\\ &= \frac{\epsilon_0}{8}[(2x^3+x)(1+x^2)^{1/2} - sinh^{-1}(x)]\end{aligned}$$

Где $x = k_F/m_ec$, $\epsilon_0 = \dfrac{m_e^4c^5}{\pi^2\hbar^3}$

Плотность энергии для мюонов рассчитывается аналогично. Массовая плотность, которая будет применяться для расчёта массы звезды:

$$\rho(n) = \frac{\epsilon(n)}{c^2} \tag{1.38}$$

Также можно рассчитать скорость звука в ядерной среде:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{dp}{d\epsilon} = \frac{dp}{dn}\frac{dn}{d\epsilon}, \tag{1.39}$$

И несжимаемость:

$$K_{inf} = 9n^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} \tag{1.40}$$

Помимо плотного ядра, которое состоит из ядерной материи и может описываться с помощью взаимодействия Скирма, в нейтронной звезде присутствует кора, состоящая из ядер и фрагментов ядерной материи. Это область значительно отличается от внутренней, и поэтому необходимо использовать отдельное уравнение состояния для описания области малых плотностей. В данной работе для этого используется уравнение состояния, построенное с помощью уравнения Бейма-Петика [18], широко используемого в литературе.

## 1.3. Нейтронные звёзды

Для расчёта характеристик нейтронной звезды мы проводим численное интегрирование уравнения Толмана-Оппенгеймера-Волкова [7, 19]:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{G}{r^2} \frac{[\rho(r) + P(r)/c^2][m(r) + (4\pi r^3 P(r)/c^2)]}{1 - (2Gm(r)/rc^2)} \tag{1.41}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{1.42}$$

В этом выражении $r$ – радиальная переменная, отсчитываемая от центра звезды, $P(r)$ и $\rho(r)$ – давление и плотность материи на расстоянии r от центра, $G$ – гравитационная постоянная.

$$m(r) = \int\limits_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{1.43}$$

Величина $m(r)$ может быть интерпретирована, как масса внутри сферы радиуса $r$, а полная масса звезды вычисляется как

$$M = m(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr \tag{1.44}$$

В этом выражении $R$ - полный радиус звезды. Вкупе с уравнением состояния уравнение Оппенгеймера-Волкова полностью определяет структуру сферически симметричной равновесной невращающейся звезды. В качестве уравнения состояния будем использовать выражения для $P(n)$ и $\rho(n)$ (1.30,1.38)

Основной вклад в уравнение Оппенгеймера-Волкова можно вывести из простейших соображений Ньютоновской механики. Для сферически-симметричного распределения вещества масса определяется из выражения 1.43. Будем считать что $\rho(r) \approx const$. Рассмотрим элемент звезды площадью $dS$ и толщиной $dr$. Для достижения равновесия сила давления на него должна компенсировать силу гравитационного сжатия. Сила притяжения между $m(r)$ и $dm = \rho dSdr$ следующая.

$$F_g = \frac{Gm(r)}{r^2} dm = \frac{Gm(r)\rho dS}{r^2} dr \tag{1.45}$$

Разница давлений даёт вклад:

$$F_p = dS(P(r) - P(r + dr)) = dSdr \frac{dP}{dr} \tag{1.46}$$

Для достижения равновесия необходимо:

$$F_p = F_g \tag{1.47}$$

$$dSdr \frac{dP}{dr} = \frac{Gm(r)\rho dS}{r^2} dr \tag{1.48}$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{Gm(r)\rho}{r^2} \tag{1.49}$$

Выражение 1.49 отражает основной вклад в уравнение Оппенгеймера-Волкова.

# 2. Нуклонная материя

Данная часть работы посвящена изучению нейтронных звёзд, состоящих исключительно из нуклонной материи. Несмотря на то, что при высоких плотностях в материи должны появляться гипероны, гиперон-нуклонное взаимодействие естественным образом изучено хуже, чем нуклон-нуклонное. Таким образом учёт только нуклонных и лептонных степеней свободы позволяет установить наиболее надёжные закономерности. В этой части работы мы исследуем связь между свойствами ядерной материи и характеристиками нейтронных звёзд. Одной из важнейших характеристик материи нейтронных звёзд является энергия симметрии. Она отражает тенденцию к стабильности ядер и материи с N=Z.

Ранее взаимосвязь между свойствами ядерной материи и некоторыми характеристиками нейтронных звезд была рассмотрена в работе [11]. Авторы использовали свыше 80 различных параметризаций скирмовского типа уравнения состояния ядерной материи, уделяя особое внимание зависимости энергии симметрии от плотности, предсказываемой этими параметризациями. Некоторые параметризации дают монотонный рост энергии симметрии с плотностью, в других же энергия симметрии достигает максимума при некотором значении $n > n_0$, а затем начинает убывать. Было показано, что в первом случае доли протонов и нейтронов в материи нейтронных звёзд постепенно приближаются друг к другу в согласии с большим количеством предшествующих работ, но во втором случае протоны могут исчезнуть при больших плотностях, и материя становится чисто нейтронной. На рисунке 1 и рисунке 2 на примере параметризаций SkO [20] и SkX [21] показаны примеры зависимости энергии симметрии от плотности и соответствующих зависимостей протонных и лептонных заселенностей для двух групп взаимодействий.

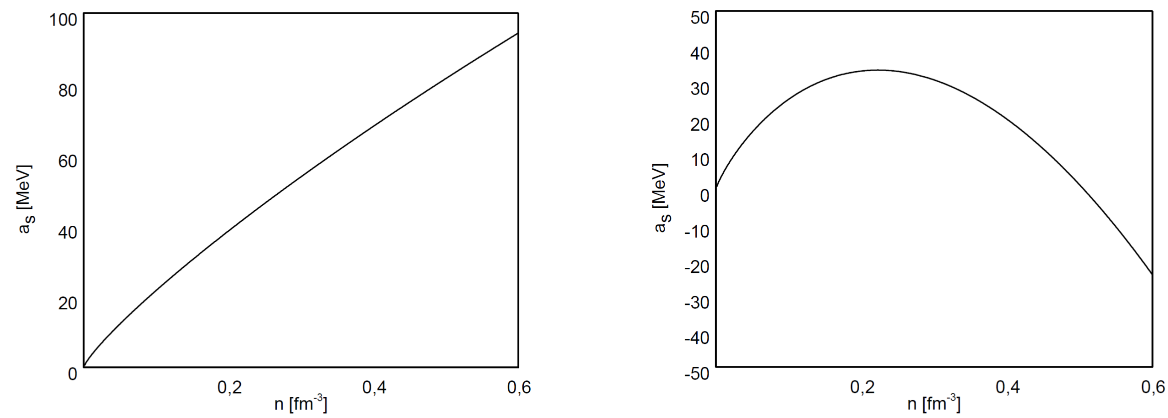


Рис. 1: Зависимость энергии симметрии $a_s$ от плотности $n$ для параметризаций SkO(слева) и SkX(справа)

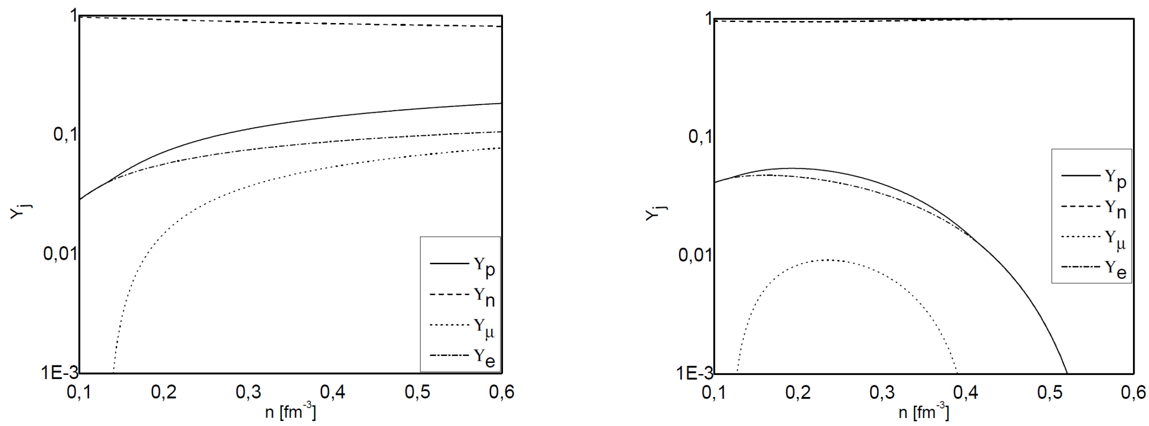


Рис. 2: Зависимость заселённостей $Y$ от плотности $n$ для параметризаций SkO(слева) и SkX(справа)

Также в работе [11] отмечается, что только взаимодействия первой группы позволяют удовлетворительно описать экспериментальные оценки масс и радиусов нейтронных звезд, в связи с чем данная группа параметров признана наиболее реалистичной. Однако в дальнейшем в работе [9] был проведен анализ 240 наборов параметров Скирма на основе развернутого набора критериев и в состав отобранных параметризаций также вошли взаимодействия, предсказывающие наличие максимума в зависимости энергии симметрии от плотности.

В ходе нашей работы было протестировано 42 различные параметризации Скирма, включая взаимодействия, отобранные в работе [9], при этом использовались только те наборы параметров, которые удовлетворяют стандартному виду потенциала Скирма. Для выбранных взаимодействий были рассчитаны зависимости массы от радиуса нейтронной звезды и рассмотрены корреляции этих характеристик с характеристиками ядерной материи. Что касается параметризаций второй группы, были отобраны только те наборы параметров, для которых прогнозируемая максимальная масса нейтронной звезды превосходит массу в 1.4 $M_{\odot}$. Также в целях максимально объективной оценки величины корреляций использовалось минимальное количество параметризаций, относящихся к одному семейству.

Для численной оценки величины корреляций использовался коэффициент корреляции Пирсона. Значение коэффициента может варьироваться от 1 до $-1$ и определяет величину линейной корреляции между двумя величинами, при этом знак указывает на наличие прямой или обратной зависимости. В таблице 1 представлены коэффициенты Пирсона для корреляций между различными характеристиками материи и нейтронных звёзд.

Таблица 1: Коэффиценты корреляции Пирсона между свойствами ядерной материи и характеристиками нейтронных звёзд.

| | $n(1,4M_{\odot})$ | $R(1,4M_{\odot})$ | $A(1,4M_s)$ | $n(M_{max})$ | $M_{max}$ | $R(M_{max})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_0$ | 0.18 | -0.09 | 0.30 | .24 | -0.30 | -0.49 |
| $K_{inf}$ | -0.46 | 0.55 | -0.62 | -0.63 | 0.64 | 0.58 |
| $a_s$ | -0.35 | 0.39 | -0.52 | -0.38 | 0.29 | 0.65 |
| $L$ | -0.63 | 0.82 | -0.76 | -0.68 | 0.53 | 0.72 |
| $K_{sym}$ | -0.73 | 0.88 | -0.72 | -0.76 | 0.65 | 0.75 |
| $Q_{sym}$ | 0.45 | -0.71 | 0.66 | 0.51 | -0.33 | -0.46 |
| $K_{\tau,v}$ | 0.34 | -0.55 | 0.71 | 0.48 | -0.33 | -0.52 |
| $m*$ | 0.28 | -0.37 | 0.31 | 0.43 | -0.48 | -0.29 |

Наиболее сильные корреляции наблюдаются между характеристиками нейтронных звёзд и характеристиками материи, зависящими от изоспиновой асимметрии ($L$ и $K_{sym}$). Также наблюдаются существенно меньшие корреляции для несжимаемости

($K_\infty$) и эффективной массы ($m*$). Взаимосвязь между $L, K_\infty, K_{sym}$ и характеристиками нейтронных звёзд проиллюстрирована на рис. 3.

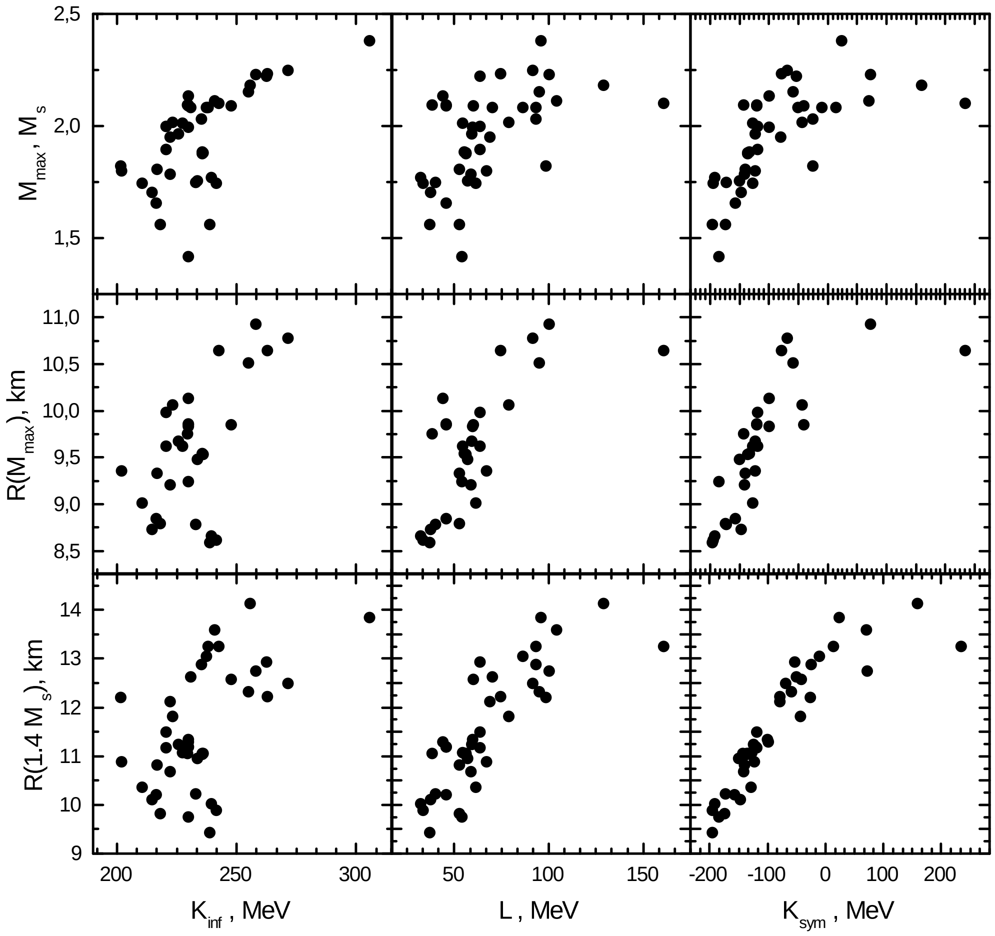


Рис. 3: Корреляции между характеристиками нейтронных звёзд (максимальная масса и соответствующий ей радиус ($M_{max}, R(M_{max})$) и радиус при массе в 1.4 массы Солнца ($R(1.4M_\odot)$)) и свойствами ядерной материи (несжимаемость ($K_\infty$) и производные от энергии симметрии($L$ и $K_{sym}$))

Все реалистические уравнения состояния согласуются с энергией и плотностью насыщения симметричной ядерной материи. Однако характеристики нейтронных звезд сильно зависят от поведения уравнения состояния при больших плотностях. Обычно мягкость или жесткость уравнения состояния ассоциируется с несжимаемостью симметричной ядерной материи $K_\infty$. Однако материя нейтронной звезды далека от изоспиновой симметрии ($Y_p$=0.5). Хорошо известно, что сильное влияние на характеристики нейтронных звёзд оказывает производная энергии симметрии $L$. Обращает на себя внимание то, что из других характеристик наибольшая роль принадлежит $K_{sym}$ и $Q_{sym}$ — величинам, определяющим наряду с $L$ зависимость энергии симметрии от плотности, в то время как влияние $K_\infty$ слабее. Последняя величина лишь косвенно связана с жесткостью уравнения состояния материи нейтронных звезд.

Также были рассмотрены результаты некоторых вычислений характеристик нейтронных звезд в релятивистской теории среднего поля [22]. На рис. 4 показаны корреляции между радиусом нейтронной звезды при массе в $1.4M_\odot$ и второй производной от энергии симметрии $K_{sym}$ для расчётов релятивистской теории среднего поля и параметризаций Скирма. Видно, что корреляции в обоих подходах носят схожий характер. Это указывает на то, что установленные взаимосвязи являются модельно независимыми и отражают объективные физические закономерности.

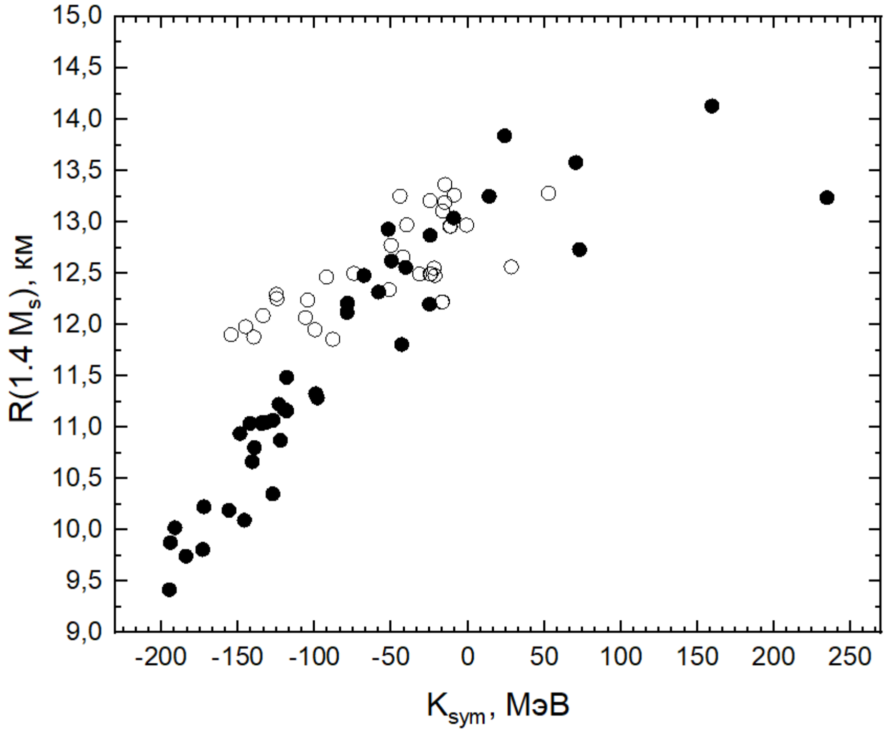


Рис. 4: Корреляции между радиусом нейтронной звезды при массе в 1.4 массы Солнца $R(1.4M_\odot)$) и второй производной от энергии симметрии $K_{sym}$ для расчётов с использованием релятивистской модели среднего поля (белым цветом) и параметризаций Скирма (черным цветом)

С помощью уравнения 1.41 была рассчитана зависимость массы нейтронной звезды от радиуса для различных параметризаций нуклон-

нуклонного взаимодействия. Полученная зависимость представлена на рисунке 5.

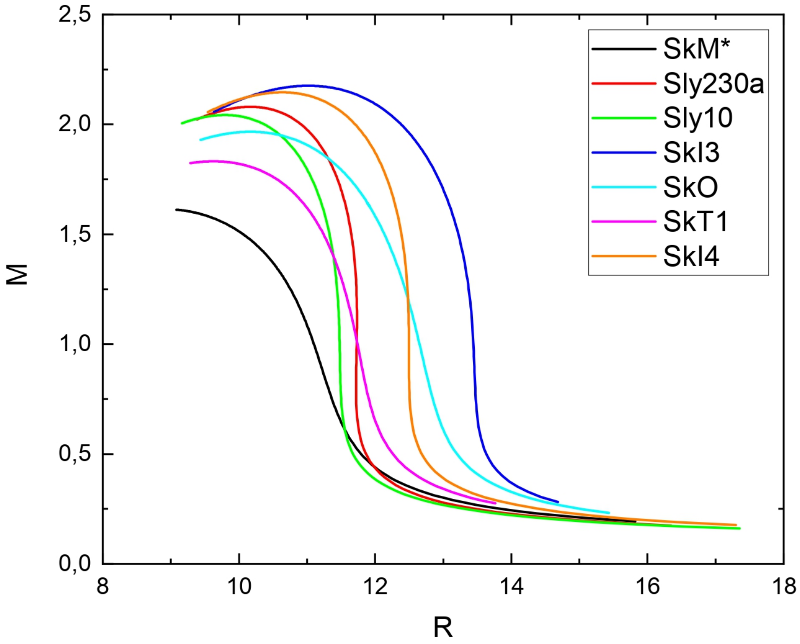


Рис. 5: Зависимость массы нейтронной звезды от радиуса для различных параметризаций нуклон-нуклонного взаимодействия

Данная зависимость показывает, что используемая модель адекватно описывает такие важные характеристики нейтронной звезды, как масса и радиус. Среди рассмотренных параметризаций к наибольшей максимальной массе приводит параметризация SkI3 [23], что будет учтено в дальнейшем.

Достаточно сильное влияние на характеристики нейтронной звезды оказывает её кора, состоящая из ядер тяжелее железа и фрагментов ядерной материи. Кора даёт небольшой вклад в максимальную массу нейтронной звезды и достаточно ощутимый вклад в её радиус. Данная особенность отражена в таблице 2, где приведены характеристики нейтронных звёзд для набора параметризаций рассчитанные с корой и без неё.

Таблица 2: Массы и радиусы нейтронных звёзд в расчётах с использованием приближения для коры и без него

| Характеристики | | SkM* | Sly230a | SkI3 | SkO |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_{max}$ | С корой | 1,61 | 2,08 | 2,17 | 1,96 |
| | Без коры | 1,6 | 2,07 | 2,15 | 1,94 |
| $R(M_{max})$ | С корой | 8,87 | 10,17 | 11,02 | 10,17 |
| | Без коры | 8,45 | 9,83 | 10,43 | 9,63 |

Таким образом, модель, не включающая описание коры, позволяет относительно адекватно описывать максимальную массу звезды, но непригодна для описания характеристик при меньших плотностях.

# 3. Гиперон-нуклонная материя

Во этой части работы мы изучаем материю с $\Lambda$-гиперонами и исследуем, как их присутствие влияет на характеристики нейтронных звёзд.

Хотя состав внутреннего ядра нейтронной звезды точно неизвестен, большинство существующих моделей включает в состав нейтронной звезды гипероны. При больших плотностях химический потенциал нейтрона превосходит массу $\Lambda$-гиперона, что ведёт к появлению гиперонов в материи. Условие появления $\Lambda$-гиперонов выглядит следующим образом:

$$\mu_\Lambda(Y_\Lambda = 0) = \mu_n + m_n - m_\Lambda \tag{3.1}$$

Однако, несмотря на то, что появление гиперонов в нейтронной звезде кажется, на сегодняшний день, наиболее вероятным вариантом, оно ведёт к возникновению проблемы под названием "hyperon puzzle". Она заключается в том, что модели, описывающие нейтронные звёзды с гиперонами предсказывают меньшую максимальную массу звезды, чем массы, наблюдаемые в эксперименте. Эта проблема связана с тем, что появление гиперонов сильно смягчает уравнение состояния. Основным направлением поиска решений этой проблемы является более глубокое исследование гиперон-нуклонного и гиперон-гиперонного взаимодействий и поиск более жестких уравнений состояния [24, 25].

В данной работе мы концентрируем внимание на гиперон-нуклонном взаимодействии и исследуем, как его особенности влияют на характеристики нейтронных звёзд. Эти свойства относительно хорошо изучены для гиперядер, однако в нейтронных звёздах возможно возникновение некоторых эффектов, влияющих на характеристики нейтронных звёзд.

В ходе работы были протестированы различные комбинации ряда параметризаций для гиперон-нуклонного (YBZ2, YBZ6 [26], SLL4’ [27], LYI [16], YMR [28]) и гиперон-гиперонного взаимодействий (SLL1’, SLL3’ [29], SLL2 [15]). В качестве параметризации нуклон-нуклонного взаимодействия используется преимущественно параметризация SkI3, поскольку она приводит к наиболее жесткому уравнению состояния и к наибольшей максимальной массе звезды.

Рассмотрим, как меняется состав материи при появлении гиперонов. На рисунке 6 изображена зависимость заселённостей различных компонент материи от плотности для двух комбинаций NN- и $\Lambda N$-параметризаций.

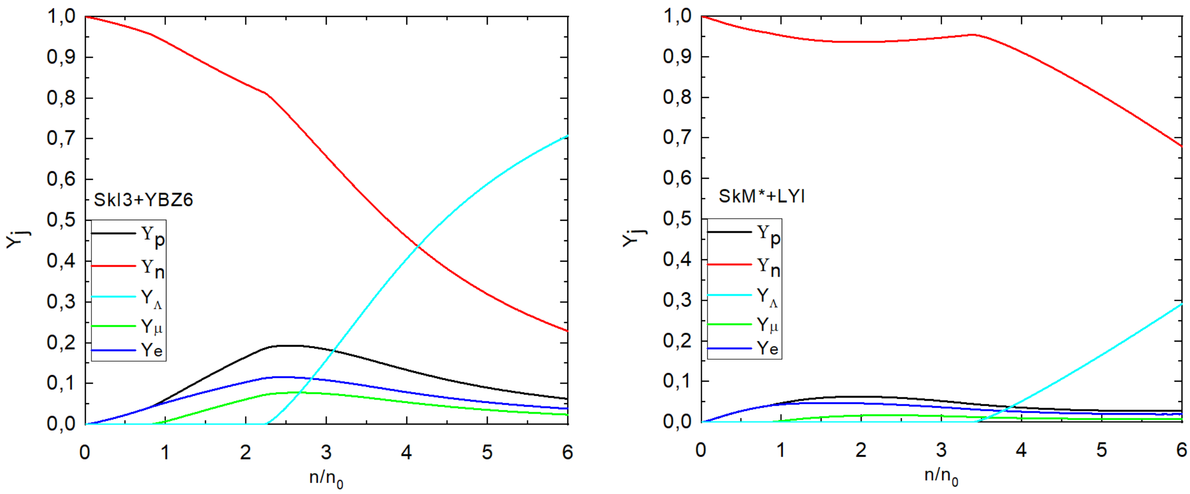


Рис. 6: Заселенности (Y) компонент материи в зависимости от плотности для двух различных комбинаций параметризаций $NN$- и $\Lambda N$-взаимодействия

С ростом плотности количество $\Lambda$-гиперонов в материи резко возрастает и гипероны занимают значительную часть материи. В определённых случаях гиперонная заселённость при высокой плотности может превосходить нейтронную.

Таким образом, при появлении гиперонов, в материи появляется новая массивная частица, которая при этом взаимодействует с нуклонами в среде. На рисунке 7 изображена зависимость массы нейтронной звезды от радиуса для различных уравнений состояния: исключительно нуклонная материя (чёрным цветом), материя с гиперонами, не взаимодействующими с нуклонами (красным), материя с гиперонами и $\Lambda N$-взаимодействием (зелёным) и материя с гиперонами, $\Lambda N$- и $\Lambda\Lambda$-взаимодействием.

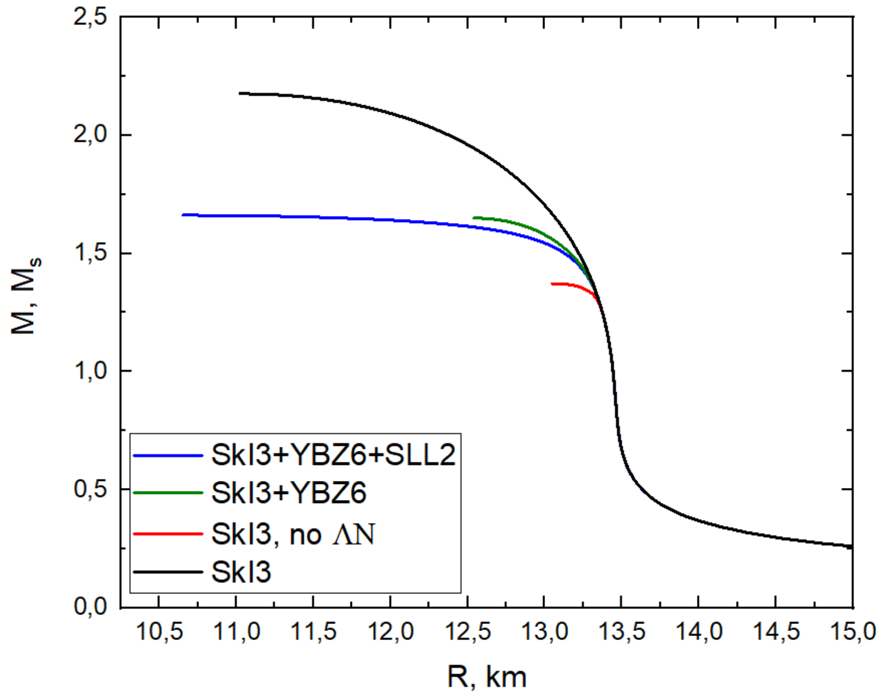


Рис. 7: Зависимость массы нейтронной звезды от радиуса для различных уравнений состояния

Видно что результат для материи с невзаимодействующими гиперонами значительно отличается от материи с $\Lambda N$-взаимодействием. Таким образом, несмотря на то, что $\Lambda N$-взаимодействие слабее нуклон-нуклонного, оно оказывает значительное влияние на характеристики нейтронных звёзд.

Далее изучается влияние свойств гиперон-нуклонного взаимодействие на характеристики звезды, в частности разница в описании звёзд с помощью тройных сил (1.6) и зависимости от плотности (1.7), а также зависимость от показателя степени $\gamma$ в выражении 1.7. На рисунке 8 изображена зависимость давления в материи от плотности для исключительно нуклонного уравнения состояния и двух уравнений состояния с наличием гиперонов ($\gamma = 1$ и $\gamma = 1/3$).

Видно, что любое включение гиперонов смягчает уравнение состояния, поскольку возникает дополнительная степень свободы. Однако параметризация $\Lambda N$-взаимодействия с $\gamma = 1$ приводит к более жесткому уравнению состояния, чем параметризация с $\gamma = 1/3$.

Мы исследовали влияние свойств гиперон-нуклонного

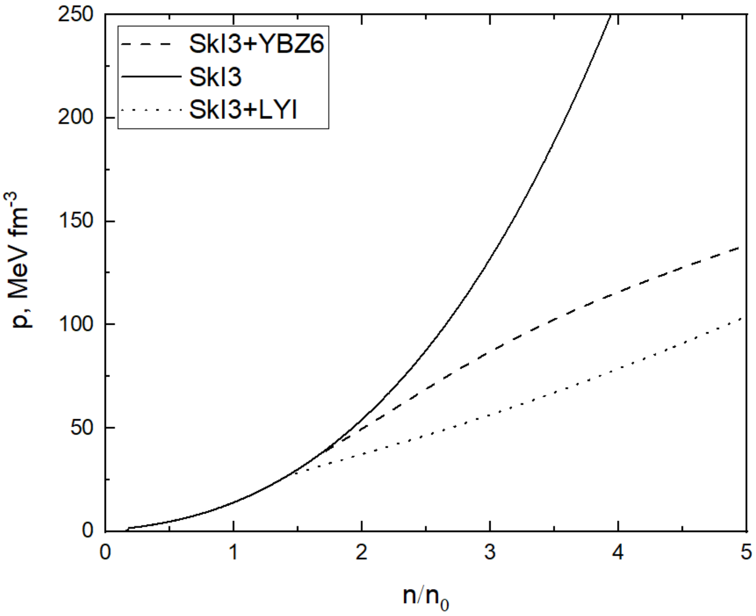


Рис. 8: Зависимость давления от плотности для различных комбинаций параметризаций NN- и $\Lambda N$-взаимодействий

взаимодействия на характеристики нейтронных звёзд, сравнивая зависимости масса-радиус, полученные для различных параметризаций $\Lambda N$-взаимодействия при фиксированных параметризациях $\Lambda\Lambda$-взаимодействия. Пример такой зависимости можно увидеть на рисунке 9. Зависимости для других $\Lambda\Lambda$-взаимодействий выглядят аналогичным образом.

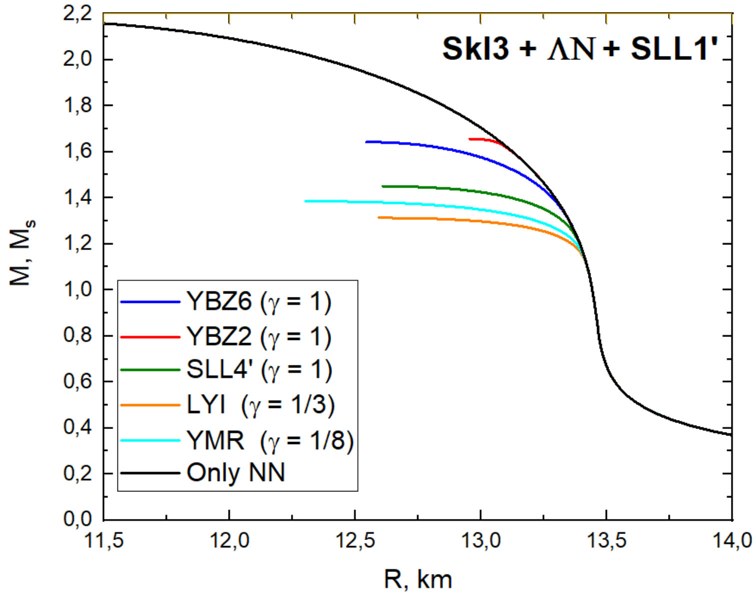


Рис. 9: Зависимость массы от радиуса для нейтронных звёзд с различными параметризациями $\Lambda N$-взаимодействия

Добавление гиперонов значительно смягчает уравнение состояния и уменьшает максимальную массу нейтронной звезды по сравнению со случаем, когда в состав звезды входят только нуклоны и лептоны. Однако, из рисунка 9 видно, что параметризации с $\gamma = 1$ (YBZ2, YBZ6 и SLL4') приводят к более жесткому уравнению состояния и большей максимальной массе, чем параметризации с $\gamma < 1$ (LYI,YMR). Таким образом, можно говорить о том, что группа параметризаций с $\gamma = 1$ более предпочтительна для описания характеристик нейтронных звёзд с точки зрения отбора по максимальной массе.

На рисунке 10 изображена аналогичная зависимость для фиксированной параметризации $\Lambda N$-взаимодействия и различных параметризаций $\Lambda\Lambda$-взаимодействия. Также на этом рисунке пунктирной линией изображены данные, полученные с использованием тройных сил, а сплошной линией - зависимости от плотности.

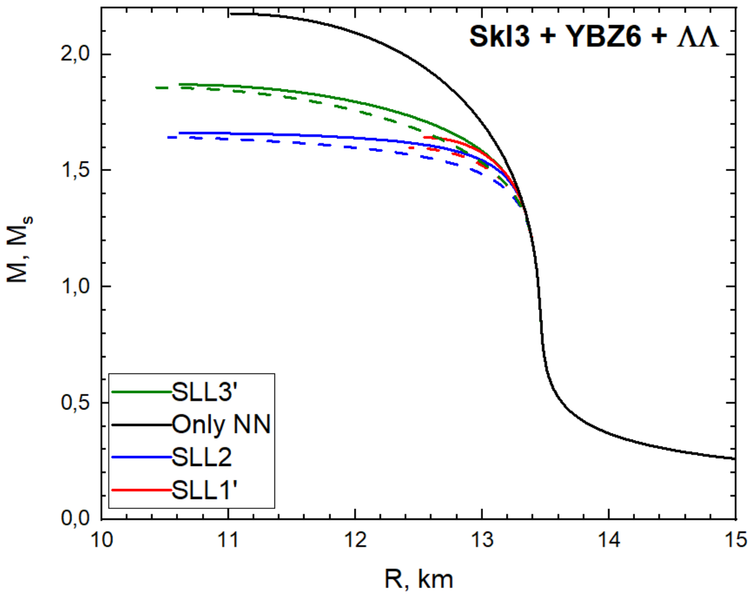


Рис. 10: Зависимость массы от радиуса для нейтронных звёзд с различными параметризациями $\Lambda\lambda$-взаимодействия. Пунктирной линией изображены кривые построенные с тройными силами, сплошной линией - с зависимостью от плотности

В отличии от гиперядер, в нейтронных звёздах эти два случая неэквивалентны, хотя этот эффект и является более тонким, чем зависимость от значения показателя степени $\gamma$. Тройные силы всегда приводят к меньшей максимальной массе звезды, чем зависимость от плотности, что, по-видимому, можно объяснить следующим образом: в случае тройных сил в материи с большим количеством нейтронов сильнее работает принцип Паули, два нуклона могут образовываться только в синглетном, а не триплетном состоянии, что приводит к уменьшению тройных сил по сравнению с зависимостью от плотности. Тройные силы положительные и соответствуют отталкиванию между частицами, поэтому их уменьшение ведёт к уменьшению отталкивания и, следовательно, к смягчению уравнения состояния.

Что касается зависимости от выбора $\Lambda\Lambda$-взаимодействия, на рисунке 10 видно, что он довольно сильно влияет и на максимальную массу нейтронной звезды и на соответствующий радиус. Однако, естественным образом, $\Lambda\Lambda$-взаимодействие изучено достаточно слабо, все существующие параметризации основаны на только на данных по основным состояниям $\Lambda\Lambda$-гиперядер и опираются на маленькую экспериментальную базу. Поэтому эта область остаётся малоизученной и сложной для анализа.

Поскольку используемая в этой работе модель Скирма является нерелятивистской, в ней возможно возникновение ситуации, когда скорость звука в среде превосходит скорость света. Эта ситуация, очевидно, является нефизической и значительно ограничивает область применения данной модели. Однако включение в модель гиперонов и смягчение уравнения состояния значительно увеличивает плотность, при которой скорость звука достигает скорости света и расширяет границы применимости модели.

На рисунке 11 приведена зависимость отношения скорости звука к скорости света от плотности, на которой видно, что при наличии гиперонов скорость звука превышает скорость света при плотностях, более чем в девять раз превышающих плотность насыщения ядерной материи, которые, как правило, не достигаются в нейтронных звёздах.

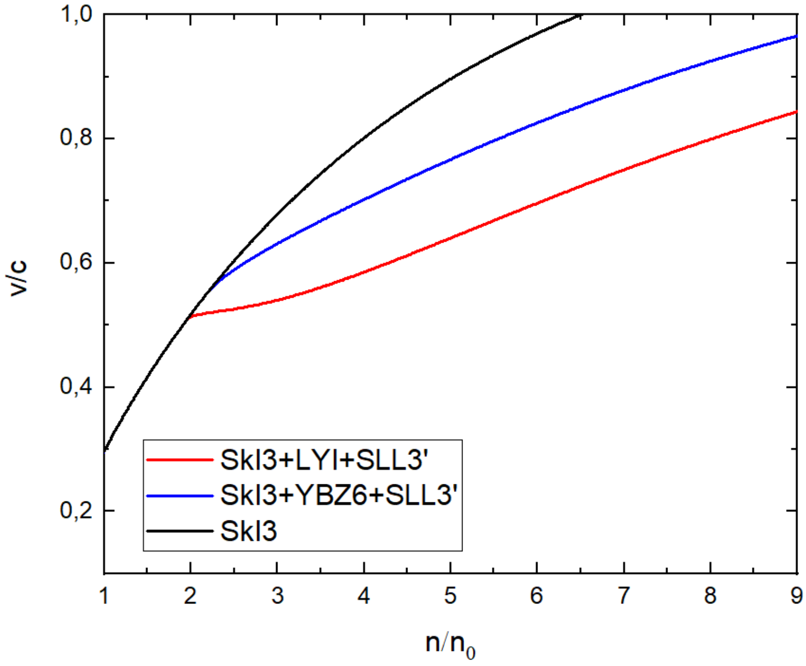


Рис. 11: Зависимость отношения скорости звука к скорости света от плотности для различных комбинаций параметризаций

Таким образом, добавление гиперонов существенно увеличивает диапазон плотностей, в котором может быть применена модель Скирма.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена состоящая из нейтронов, протонов, электронов, мюонов и $\Lambda$-гиперонов ядерная материя в сильном гравитационном поле, как структурный элемент нейтронных звёзд. Для построения модели нейтронной звезды использовалось уравнение состояния, основанное на потенциале Скирма и уравнение Толмана-Оппенгеймера- Волкова. Были рассчитаны следующие характеристики материи: энергия на нуклон, давление, химические потенциалы, энергия симметрии и её производные. Также были рассчитаны массы, радиусы и число барионов для нейтронных звёзд.

В первой части работы рассматривалась нуклонная материя и её свойства, в частности энергия симметрии. Были рассчитаны корреляции между свойствами ядерной материи и характеристиками нейтронных звёзд. Основным выводом этого исследования является то, что наиболее сильное влияние на характеристики нейтронных звезд оказывают первая, вторая и третья производные энергии симметрии ядерной материи по плотности, в то время как влиянии несжимаемости материи заметно меньше. Также изучалась возможность описания наблюдаемых характеристик нейтронных звёзд с использованием взаимодействия Скирма и была отобрана параметризация SkI3, как приводящая к наибольшей максимальной массе звезды.

Во второй части работы рассмотрена материя содержащая $\Lambda$-гипероны. Изучались свойства гиперон-нуклонного и гиперон-гиперонного взаимодействия и влияние их особенностей на характеристики нейтронных звёзд, в частности влияние коэффициента $\gamma$ в зависимости от нуклонной плотности в $\Lambda N$-потенциале Скирма. Было получено, что наиболее подходящими для описания нейтронных звёзд являются параметризации с $\gamma = 1$. Также изучалась разница в описании трёхчастичного гиперон-нуклонного взаимодействия в нейтронных звёздах с помощью тройных сил и зависимости от нуклонной плотности. Хотя добавление в материю гиперонов, как известно, значительно смягчает уравнение состояния, усложняя задачу достижения в модели максимальной массы в 2 $M_{\odot}$, в то же время оно расширяет границы применимости модели Скирма при высоких плотностях.

Результаты работы были представлены на конференциях «Ядро-2020», «Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине 2021», «Ломоносов-2020» и «Ломоносов-2022». Также результаты были опубликованы в журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» [30]. Автор выражает благодарность Т. Ю. Третьяковой за прекрасное осуществление научного руководства, Д. Е. Ланскому за полезные консультации и обсуждения, а также Артуру Насакину за активное участие в дискуссиях.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Шапиро С.Л, Тьюколски С.А, Смородинский Я.А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды часть 2. — 1985.

2. Потехин А.Ю. Физика нейтронных звёзд // Усп. физ. наук. — 2010. — Vol. 180, no. 12. — P. 1279–1304.

3. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral / Abbott B. P., Abbott R., Abbott T. D., Acernese F., Ackley K., Adams C., Adams T., Addesso P., and Adhikari // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Oct. — Vol. 119. — P. 161101.

4. Identification of strontium in the merger of two neutron stars / Watson Darach, Hansen Camilla J., Selsing Jonatan, Koch Andreas, Malesani Daniele B., Andersen Anja C., Fynbo Johan P. U., Arcones Almudena, Bauswein Andreas, Covino Stefano, and et al. // Nature. — 2019. — Oct. — Vol. 574, no. 7779. — P. 497–500.

5. Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar / Cromartie H. T., Fonseca E., Ransom S. M., Demorest P. B., Arzoumanian Z., Blumer H., Brook P. R., DeCesar M. E., Dolch T., Ellis J. A., and et al. // Nature Astronomy. — 2019. — Sep. — Vol. 4, no. 1. — P. 72–76.

6. Фортов В.Е. Физика высоких плотностей энергии. — 2013.

7. Oppenheimer J. R., Volkoff G. M. On Massive Neutron Cores // Phys. Rev. — 1939. — Feb. — Vol. 55. — P. 374–381.

8. Skyrme T.H.R. The effective nuclear potential // Nuclear Physics. — 1958. — Vol. 9, no. 4. — P. 615–634.

9. Skyrme interaction and nuclear matter constraints / Dutra M., Lourenç o O., Martins J. S. Sá, Delfino A., Stone J. R., and Stevenson P. D. // Physical Review C. — 2012. — mar. — Vol. 85, no. 3.

10. Mornas, L. Neutron stars in a Skyrme model with hyperons // Eur. Phys. J. A. — 2005. — Vol. 24, no. 2. — P. 293–312.

11. Nuclear matter and neutron-star properties calculated with the Skyrme interaction / Rikovska Stone J., Miller J. C., Koncewicz R., Stevenson P. D., and Strayer M. R. // Phys. Rev. C. — 2003. — Sep. — Vol. 68. — P. 034324.

12. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities / Chabanat E., Bonche P., Haensel P., Meyer J., and Schaeffer R. // Nuclear Physics A. — 1997. — Vol. 627, no. 4. — P. 710–746.

13. Vautherin D., Brink D. M. Hartree-Fock Calculations with Skyrme's Interaction. I. Spherical Nuclei // Phys. Rev. C. — 1972. — Mar. — Vol. 5. — P. 626–647.

14. Rayet M. Skyrme parametrization of an effective Λ-nucleon interaction.

15. Lanskoy D. E. Double-Λ hypernuclei in the Skyrme-Hartree-Fock approach and nuclear core polarization // Phys. Rev. C. — 1998. — Dec. — Vol. 58. — P. 3351–3358.

16. Lanskoy D. E., Yamamoto Y. Skyrme-Hartree-Fock treatment of Lambda and Lambda Lambda hypernuclei with G-matrix motivated interactions // Phys. Rev. C. — 1997. — Vol. 55. — P. 2330–2339.

17. Silbar Richard R., Reddy Sanjay. Neutron stars for undergraduates // American Journal of Physics. — 2004. — Vol. 72, no. 7. — P. 892–905.

18. Baym Gordon, Pethick Christopher, Sutherland Peter. The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models // The Astrophysical Journal. — 1971. — Dec. — Vol. 170. — P. 299.

19. Tolman Richard C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid // Phys. Rev. — 1939. — Feb. — Vol. 55. — P. 364–373.

20. Shape coexistence and the effective nucleon-nucleon interaction / Reinhard P.-G., Dean D. J., Nazarewicz W., Dobaczewski J., Maruhn J. A., and Strayer M. R. // Physical Review C. — 1999. — jun. — Vol. 60, no. 1.

21. Alex Brown B. New Skyrme interaction for normal and exotic nuclei // Phys. Rev. C. — 1998. — Jul. — Vol. 58. — P. 220–231.

22. Dutra Mariana, Lourenço Odilon, Menezes Débora P. Stellar properties and nuclear matter constraints // Phys. Rev. C. — 2016. — Feb. — Vol. 93. — P. 025806.

23. Reinhard P.-G., Flocard H. Nuclear effective forces and isotope shifts // Nuclear Physics A. — 1995. — Vol. 584, no. 3. — P. 467–488.

24. Bombaci Ignazio. The Hyperon Puzzle in Neutron Stars // Journal of the Physical Society of Japan. — 2017.

25. Friedman E., Gal A. Constraints from $\Lambda$ hypernuclei on the $\Lambda NN$ content of the $\Lambda$-nucleus potential and the 'hyperon puzzle'. — 2022.

26. Yamamoto Yasuo, Bandō Hiroharu, Žofka J. On the -Hypernuclear Single Particle Energies // Progress of Theoretical Physics. — 1988. — 11. — Vol. 80, no. 5. — P. 757–761.

27. Schulze H.-J., Hiyama E. Skyrme force for light and heavy hypernuclei // Phys. Rev. C. — 2014. — Oct. — Vol. 90. — P. 047301.

28. Rijken Thomas, Nagels M., Yamamoto Yasuo. Baryon-Baryon Interactions Nijmegen Extended-Soft-Core Models // Progress of Theoretical Physics Supplement - PROG THEOR PHYS SUPPL. — 2010. — 05. — Vol. 185. — P. 14–71.

29. Minato F., Chiba S. Fission barrier of actinide nuclei with double- particles within the Skyrme–Hartree–Fock method // Nuclear Physics A. — 2011. — Vol. 856, no. 1. — P. 55–67.

30. Mikheev S.A., Lanskoy D.E., Tretyakova T.Y. Correlations between Properties of Nuclear Matter and Characteristics of Neutron Stars // Phys. Part. Nuclei. — 2022. — Vol. 58. — P. 409–414.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РАСЧЁТ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ

Получим плотность энергии из потенциала на примере потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия, следуя работе [13]. Энергия в материи рассчитывается следующим образом:

$$E = \langle \phi | T + V | \phi \rangle = \sum_i \langle i | T_i | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle ij | V_{ij} | ij \rangle + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \langle ijk | V_{ijk} | ijk \rangle = \int H dr \tag{3.2}$$

В выражении 3.2 первое слагаемое определяет кинетическую энергию, второе - вклад в потенциальную энергию от потенциала двухчастичного взаимодействия, третье - вклад тройных сил, $H$ – плотность энергии.

Потенциал 1.1 можно записать через следующую сумму:

$$V_{NN} = \sum_k v_k$$

Индекс k соответствует индексу параметров t в выражении 1.1.

Вклад каждого слагаемого $v_k$ в потенциальную энергию системы определяется выражением:

$$U_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle ij | v_k (1 - P_M P_\sigma P_\tau) | ij \rangle = \int H_k dr, \tag{3.3}$$

где множитель $(1 - P_M P_\sigma P_\tau)$ соответствует антисимметризации волновых функций. $P_M$–Майорановский обменный оператор, $P_\sigma$–спиновый,$P_\tau$–изоспиновый.

Существует известное соотношение, связывающие волновую функцию ($\phi$) и плотность материи ($n$).

$$\sum_{i,\sigma} |\phi_i(\overrightarrow{r}, \sigma, q)|^2 = n_q \tag{3.4}$$

В этом выражении $q$ обозначает третью проекцию изоспина.

Запишем некоторые другие соотношения, связывающие волновые функции и характеристики материи, которые понадобятся нам в дальнейшем.

$$\sum_i |\nabla\phi_i|^2 = \tau \tag{3.5}$$

$$\sum_i \phi_i^* \nabla\phi_i = \frac{1}{2}\nabla n \tag{3.6}$$

Распишем также выражение для $\nabla^2 n$:

$$\nabla^2 n = \nabla^2 \sum_i |\phi_i|^2 = \nabla(\sum_i \nabla\phi_i^*\phi_i + \sum_i \phi_i^*\nabla\phi_i) = \tag{3.7}$$
$$= 2\sum_i \phi_i^*\nabla^2\phi_i + 2\sum_i |\nabla\phi_i|^2 = 2\sum_i \phi_i^*\nabla^2\phi_i + 2\tau$$

Теперь можно отдельно рассчитать вклад каждого слагаемого $v_k$ в потенциальную энергию. Для $v_0$ он выглядит следующим образом:

$$U_0 = \frac{1}{2}\sum_{ij} \langle ij|t_0\delta(\overrightarrow{r})(1 + x_0P_\sigma)(1 - P_M P_\sigma P_\tau)|ij\rangle \tag{3.8}$$

Здесь и далее под $\delta(\overrightarrow{r})$ подразумевается $\delta(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$. В данном случае $\delta$-силы действуют только на S-волну, поэтому $P_M$=1. Кроме того, предполагается что зарядовые состояния Хартри-Фока не смешиваются, поэтому оператор обмена изоспином соответствует множителю $P_\tau = \delta_{q_iq_j}$ , где $q_i$ - проекция изоспина одночастичного состояния i.

Распишем произведение

$$(1 + x_0P_\sigma)(1 - \delta_{q_iq_j}P_\sigma) = 1 - x_0\delta_{q_iq_j} + \frac{1}{2}(1 + \overrightarrow{\sigma_1}\overrightarrow{\sigma_2})(x_0 - \delta_{q_iq_j}) \tag{3.9}$$

Подставим его в выражение для $U_0$

$$U_0 = \frac{1}{2}\sum_{ij}\int dr\phi_i^*\phi_j^*(1 - x_0\delta_{q_iq_j} + \frac{1}{2}(1 + \overrightarrow{\sigma_1}\overrightarrow{\sigma_2})(x_0 - \delta_{q_iq_j}))\phi_i\phi_j \tag{3.10}$$

Учтём, что $\sum_i \phi_i^*\overrightarrow{\sigma}\phi_i = 0$ и тогда слагаемые с $\overrightarrow{\sigma_1}\overrightarrow{\sigma_2}$ тоже равны нулю. Стоит сразу отметить, что $\overrightarrow{\sigma_1}\overrightarrow{\sigma_2}$ может давать вклад в потенциальную энергию, например при комбинации $(\overrightarrow{\nabla_1}\overrightarrow{\nabla_2})(\overrightarrow{\sigma_1}\overrightarrow{\sigma_2})$, но эти члены будут зависеть от спиновой плотности $(J)$ и равны нулю в однородной неполяризованной материи, которая рассматривается в данной работе. Учитывая также выражение 3.4 получим следующее выражения для $U_0$.

$$U_0 = \frac{1}{2}\sum_{ij}\int dr\phi_i^*\phi_j^*(1+\frac{x_0}{2}-\delta_{q_iq_j}(x_0+\frac{1}{2}))\phi_i\phi_j = \tag{3.11}$$
$$= \frac{1}{2}t_0\int dr(n^2(1+\frac{x_0}{2})-(x_0+\frac{1}{2})(n_n^2+n_p^2))$$

Соответственно, выражение для плотности энергии:

$$H_0 = \frac{1}{4}t_0(n^2(2+x_0)-(2x_0+1)(n_n^2+n_p^2)) \tag{3.12}$$

Распишем теперь член, пропорциональный $t_1$.

$$U_1 = \frac{1}{2}\sum_{ij}\langle ij|\frac{1}{2}t_1(\overrightarrow{P}'^2\delta(\overrightarrow{r})+\delta(\overrightarrow{r})\overrightarrow{P}^2)(1+x_1P_\sigma)(1-P_mP_\sigma P_\tau)|ij\rangle \tag{3.13}$$

Учитывая, что, также как и в предыдущем случае, $P_M = 1$,$P_\tau = \delta_{q_iq_j}$ и оператор $\overrightarrow{P}'$ - комплексно сопряженный к $\overrightarrow{P}$, можно переписать выражение 3.13 в следующем виде:

$$U_1 = \frac{1}{4}t_1\sum_{ij}\langle ij|(\delta(\overrightarrow{r})\overrightarrow{P}^2)(1+x_1P_\sigma)(1-\delta_{q_iq_j}P_\sigma)|ij\rangle + H.C. \tag{3.14}$$

Здесь $H.C.$ – слагаемое комплексно сопряженное к первому.

Учтём также, что в нашем случае слагаемое с $\sigma_1\sigma_2$ не даёт вклада в энергию и запишем для произведения, входящего в матричный элемент:

$$(1+x_1P_\sigma)(1-\delta_{q_iq_j}P_\sigma) = 1+x_1P_\sigma-\delta_{q_iq_j}(P_\sigma+x_1) = \tag{3.15}$$
$$= \frac{1}{2}(2+x_1-\delta_{q_iq_j}(1+2x_1))$$

Оператор $P^2$ выглядит следующим образом:

$$P^2 = \frac{1}{4}(2\nabla_1\nabla_2-\nabla_1^2-\nabla_2^2) \tag{3.16}$$

Запишем оператор $\delta(r)P^2$ в обкладках волновых функций и учтём выражения 3.4-3.8

$$\begin{aligned}
&\phi_i^*(r_1)\phi_j^*(r_2)\delta(r)P^2\phi_i(r_1)\phi_j(r_2) = \\
&= \frac{1}{4}(\phi_i^*\phi_j^*\nabla\phi_i\nabla\phi_j - \phi_i^*\phi_j^*\phi_j\nabla^2\phi_i - \phi_i^*\phi_j^*\phi_i\nabla^2\phi_j) = \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}(\nabla n)^2 - 2n(\frac{1}{2}\nabla^2 n - \tau)) = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}(\nabla n)^2 + \tau n)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь в последней строчке учтено, что $n\nabla^2 n = -(\nabla n)^2$. Теперь подставим все полученные выражения в интеграл для $U_1$.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{4}t_1\int dr\frac{1}{2}(\frac{3}{4}(\nabla n)^2 + \tau n)\frac{1}{2}(2 + x_1 - \delta_{q_iq_j}(1 + 2x_1)) + H.C. = \\
&= \int dr(\frac{1}{8}t_1[(2 + x_1)n\tau - (1 + x_2)(n_n\tau_n + n_p\tau_p)] + \\
&+ \frac{3}{32}t_1[[(2 + x_1)(\nabla n)^2 - (1 + x_2)((\nabla n_n)^2 + (\nabla n_p)^2)])
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Соответствующая плотность энергии:

$$\begin{aligned}
H_1 = &\frac{1}{8}t_1[(2 + x_1)n\tau - (1 + x_2)(n_n\tau_n + n_p\tau_p)] + \\
&+ \frac{3}{32}t_1[[(2 + x_1)(\nabla n)^2 - (1 + x_2)((\nabla n_n)^2 + (\nabla n_p)^2)]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Выражение для $U_2$ рассчитывается схожим способом, но член $v_2$ действует на P-волну, поэтому Майорановский обменный оператор $P_M = -1$.

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{2}\sum_{ij}\langle ij|t_2(1 + x_2P_\sigma)\overrightarrow{P}'\delta(\overrightarrow{r})\overrightarrow{P}(1 - P_MP_\sigma P_\tau)|ij\rangle = \\
&= \frac{1}{8}\sum_{ij}\langle ij|t_2(1 + x_2P_\sigma)(\nabla_1' - \nabla_2')\delta(\overrightarrow{r})(\nabla_1 - \nabla_2)(1 + P_\sigma\delta_{q_iq_j})|ij\rangle
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Используя свойства симметрии можем записать:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_1' - \nabla_2')\delta(\overrightarrow{r})(\nabla_1 - \nabla_2) = \nabla_1'\delta(\overrightarrow{r})\nabla_1 - \nabla_1'\delta(\overrightarrow{r})\nabla_2 - \nabla_2'\delta(\overrightarrow{r})\nabla_1 \\
&+ \nabla_2'\delta(\overrightarrow{r})\nabla_2 = 2\nabla_1'\delta(\overrightarrow{r})\nabla_1 - 2\nabla_2'\delta(\overrightarrow{r})\nabla_1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Запишем этот оператор в обкладках функций:

$$
\begin{aligned}
&\phi_i^*(r_1)\phi_j^*(r_2)\overrightarrow{P}'\delta(\overrightarrow{r})\overrightarrow{P}\phi_i(r_1)\phi_j(r_2) = \\
&= 2(\nabla\phi_i^*(r_1)\phi_j^*(r_2)\delta(\overrightarrow{r})\nabla\phi_i(r_1)\phi_j(r_2) - \phi_i^*(r_1)\nabla\phi_j^*(r_2)\delta(\overrightarrow{r})\nabla\phi_i(r_1)\phi_j(r_2)) \\
&= 2(\nabla\phi_i^*(r)\phi_j^*(r)\nabla\phi_i(r)\phi_j(r) - \phi_i^*(r)\nabla\phi_j^*(r)\nabla\phi_i(r)\phi_j(r)) = \\
&= 2\tau n - \frac{1}{2}(\nabla n)^2
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Подставим всё это в интеграл и получим выражение для $U_2$.

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{8}t_2\int dr((2\tau n - \frac{1}{2}(\nabla n)^2)(1 + x_2P_\sigma)(1 + P_\sigma\delta_{q_iq_j})) = \\
&= \frac{1}{8}t_2\int dr((2\tau n - \frac{1}{2}(\nabla n)^2)\frac{1}{2}(2 + x_2 + \delta_{q_iq_j}(1 + 2x_2))) = \\
&= \int dr(\frac{1}{8}t_2[\tau n(2 + x_2) + (\tau_p n_p + \tau_n n_n)(1 + 2x_2)] \\
&- \frac{1}{32}t_2[(\nabla n)^2(2 + x_2) + ((\nabla n_n)^2 + (\nabla n_p)^2)(1 + 2x_2)])
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2 = &\frac{1}{8}t_2[\tau n(2 + x_2) + (\tau_p n_p + \tau_n n_n)(1 + 2x_2)] \\
&- \frac{1}{32}t_2[(\nabla n)^2(2 + x_2) + ((\nabla n_n)^2 + (\nabla n_p)^2)(1 + 2x_2)]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Рассчитаем также вклады от выражений 1.4 и 1.5, то есть от потенциалов описывающих многочастичные эффекты.

В случае зависимости от плотности плотность энергии рассчитывается аналогично описанным ранее случаям.

$$
\begin{aligned}
U_3 &= \frac{1}{2}\sum_{ij}\langle ij|\frac{1}{6}t_3(1 + x_3P_\sigma)(1 - P_MP_\sigma P_\tau)n^\sigma\delta(\overrightarrow{r})|ij\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij}\int\phi_i^*\phi_j^*dr\frac{1}{6}t_3(1 + x_3P_\sigma)(1 - \delta_{q_iq_j}P_\sigma)n^\sigma\delta(\overrightarrow{r})\phi_i\phi_j \\
&= \frac{1}{12}t_3\sum_{ij}\int\phi_i^*\phi_j^*dr(1 + \frac{1}{2}x_3 - \delta_{q_iq_j}(x_3 + \frac{1}{2}))n^\sigma\phi_i\phi_j
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

$$
= \frac{1}{12}t_3\int dr((1 + \frac{1}{2}x_3)n^2 - (x_3 + \frac{1}{2})(n_n^2 + n_p^2))n^\sigma \tag{3.26}
$$

$$H_3 = \frac{1}{12} t_3 (1 + \frac{1}{2} x_3) n^2 - (x_3 + \frac{1}{2})(n_n^2 + n_p^2) n^\sigma \tag{3.27}$$

Для случая тройных сил вклад в энергию рассчитывается следующим образом:

$$U_3 = \frac{1}{6} \sum_{ijk} \langle ijk | v_{123} | ijk \rangle \tag{3.28}$$

Учитывая все обменные операторы, а также то, что из-за присутствия двух дельта-функций для любой пары частиц $P_M = 1$, запишем выражение для $v_{123}$

$$\begin{aligned} v_{123} = t_3 \delta(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \delta(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}) [1 + P_\sigma(12) P_\sigma(23) P_\tau(12) P_\tau(23) \\ + P_\sigma(13) P_\sigma(23) P_\tau(13) P_\tau(23) \\ - P_\sigma(12) P_\tau(12) - P_\sigma(23) P_\tau(23) - P_\sigma(31) P_\tau(31)] \end{aligned} \tag{3.29}$$

В этом выражении второй второе и третье слагаемые дают одинаковый вклад, также как и последние три слагаемых. Учитывая это и то, что члены с $\overrightarrow{\sigma}$ не дают вклада в энергию можем записать:

$$v_{123} = t_3 \delta(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \delta(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}) (1 + \frac{1}{2} P_\tau(12) P_\tau(23) - \frac{3}{2} P_\tau(12)) \tag{3.30}$$

Тогда можем записать выражение для $U_3$ и соответствующей плотности энергии.

$$U_3 = \frac{1}{6} t_3 \sum_{ijk} \int dr \phi_i^* \phi_j^* \phi_k^* (1 + \frac{1}{2} \delta_{q_i q_j} \delta_{q_j q_k} - \frac{3}{2} \delta_{q_i q_j}) \phi_i \phi_j \phi_k \tag{3.31}$$

$$H_3 = \frac{1}{6} t_3 (n^3 + \frac{1}{2}(n_n^3 + n_p^3) - \frac{3}{2} n (n_n^2 + n_p^2)) \tag{3.32}$$

Выражения 3.27 и 3.32 эквивалентны при условии $x_3 = 1$ и $\sigma = 1$.

Таким образом, мы можем записать выражение для плотности энергии. Сразу учтём при этом, что в рассматриваемой в этой работе материи $\overrightarrow{\nabla} n = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{J} = 0$.

$$\begin{aligned} H_{NN} = K &+ \frac{1}{4} t_0 [(2+x_0)n^2 - (2x_0+1)(n_p^2+n_n^2)] \\ &+ \frac{1}{24} t_3 n^\sigma [(2+x_3)n^2 - (2x_3+1)(n_p^2+n_n^2)] \\ &+ \frac{1}{8} [t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)]\tau n \\ &+ \frac{1}{8} [t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)](\tau_p n_p + \tau_n n_n) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Здесь $n = n_n + n_p$ – барионная плотность материи, а $\tau = \tau_n + \tau_p$ – плотность кинетической энергии. $K = (\frac{\hbar^2}{2m})\tau_N$ – член, зависящий от кинетической энергии.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Для расчёта уравнения состояния равновесной материи необходимо получить значения заселённостей для каждого значения плотности, поскольку остальные характеристики, такие как давление, энергия на нуклон и химические потенциалы являются функциями плотности и заселённостей (1.30,1.15,1.20 ). Процесс расчёта уравнения состояния делится на два этапа: до появления мюонов, после появления мюонов, но до появления гиперонов и после появления гиперонов.

1. До появления мюонов из системы 1.19 необходимо обеспечить выполнение только первого условия. Перепишем его чуть в другом виде:

   $$\mu_p(Y_p, n) + \mu_e(Y_e, n) - \mu_n(Y_p, n) = 0 \tag{3.34}$$

   Так как без мюонов выполняется $Y_e = Y_p$ это уравнение включает в себя только одну переменную, $Y_p$. Таким образом, последовательно двигаясь по плотности с шагом в 0.001 $fm^{-3}$, на каждом шаге решается уравнение 3.34 и находится соответствующее значение $Y_p$. Решение этого уравнение реализуется при помощи стандартного библиотечного метода zeroin, предназначенного для поиска нулей функции. Достижение точки появления мюонов определяется условием достижения химическим потенциалом электрона массы мюона.

   $$\mu_e = m_m \tag{3.35}$$

2. После появления мюонов в системе 1.19 играют роль оба уравнения и необходимо решать систему из двух уравнений с двумя переменными.

Второе уравнение системы можно записать в виде

$$\mu_e(Ye, n) - \mu_\mu(Ye, Yp, n) \tag{3.36}$$

Для решения этой системы используется метод деления отрезка пополам. В качестве изначального отрезка взят отрезок по $Y_p$ от $10^{-6}$ до 0.5. Так как метод деления отрезка пополам предполагает постепенное сужение отрезка, на котором находится корень, на каждом шаге этого метода мы имеем фиксированное значение $Y_p$ на краях и в середине отрезка. Таким образом уравнение 3.36 становится уравнением одной переменной и решается с помощью уже упомянутой функции zeroin. Решение ищется в границах от $10^{-6}$ до $Y_p$. Резюмируя вышесказанное, решение системы сводится к решению уравнения 3.34 относительно $Y_p$ методом деления отрезка пополам, где значение $Y_e$ в каждой точке находится путем решения уравнения 3.36 с помощью метода zeroin. Параллельно проверяется выполнение условия

$$\mu_\Lambda(Y_\Lambda = 0) > m_n + \mu_n - m_\Lambda. \tag{3.37}$$

При прекращении выполнения этого условия в материи появляются $\Lambda$-гипероны и программа переходит к следующему этапу.

3. После появления $\Lambda$-гиперонов необходимо решать уже систему 1.18 из трёх уравнений для трёх переменных. Запишем её ещё раз.

$$\begin{cases} \mu_p(Y_p, Y_\Lambda) + \mu_e(Y_e) = \mu_n(Y_p, Y_\Lambda) \\ \mu_\mu(Y_p, Y_e) = \mu_e(Y_e) \\ \mu_\Lambda(Y_p, Y_\Lambda) + m_\Lambda = \mu_n(Y_p, Y_\Lambda) + m_n \end{cases} \tag{3.38}$$

Второе уравнение в системе не зависит от $Y_\Lambda$, а третье не зависит от $Y_e$. Поэтому систему можно решить аналогично предыдущему случаю. Первое выражение в системе решается методом деления отрезка пополам относительно $Y_p$ в границах от $a = Y_{p-1} - 0.1$ до $b = Y_{p-1} + 0.1$, где $Y_{p-1}$ - значение протонной заселенности на предыдущем шаге по плотности. Необходимые значения $Y_e$ и $Y_\Lambda$ находятся из второго и третьего уравнений системы соответственно с помощью функции zeroin при соответствующих значениях $Y_p$. Границы для поиска $Y_e$ такие же как на предыдущем шаге, а границы для поиска $Y_\Lambda$: от $Y_{\Lambda-1} - 0.1$ (если это значение меньше 0.00001, то от 0.00001 ) до $Y_{\Lambda-1} + 0.1$, где $Y_{\Lambda-1}$ - значение заселенности гиперонов на предыдущем шаге по плотности. Расчёт прекращается при достижении заданного значения плотности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА УРАВНЕНИЯ TOV

Уравнение Оппенгеймера-Волкова (1.41) решается следующим образом.

1. Выбирается начальное значение центральной плотности. Исходя из этого по формулам 1.30 и 1.43 находятся начальные значения для массы и давления. Начальное значение $r$ соответствует шагу по $r$.

2. Решается уравнение 1.41 относительно давления методом Рунге-Кутты. Классический метод Рунге-Кутты для уравнения $y' = f(x, y)$ заключается в следующем:
   Рассчитываются выражения
   $$k_1 = f(x_n, y_n)$$
   $$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2})k_1$$
   $$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2})k_2$$
   $$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_3$$
   где h - это шаг. Значение $y_{n+1}$ определяется как
   $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4)$$
   В нашем случае роль $y$ выполняет $P$, роль $x$ - $r$, а роль $f(x, y)$ - правая часть уравнения TOV. Таким образом после решения этого уравнения мы получим значение давление при $r = r + h$.

3. Значение барионной плотности при $r = r + h$ находится из массива значений $P$ и соответствующих им значений $n$, сформированного при

расчете уравнения состояния. Массовая плотность рассчитывается по формуле 1.38.

4. На каждом шаге методом средних считается промежуточное значение m(r) из интеграла 1.43.

5. С новыми значениями $m, \rho$ и $r$ повторяются пункты 2-4. Цикл прерывается после обнуления давления, что свидетельствует о достижении края звезды. Соответствующие $m$ и $r$ являются массой и радиусом нейтронной звезды.

   Для поиска максимальных массы и радиуса и построения зависимости массы от радиуса цикл 1-5 повторяется для большого диапазона центральных плотностей (от 0.1 до 1.5 $fm^{-3}$)