

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«Зависимость эффекта внутривещного рассеяния от магнитной
структуры накопительного кольца»**

Выполнил студент

группы 213М:

Бобылев Дмитрий Алексеевич

подпись студента

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Шведунов Василий Иванович

подпись научного руководителя

Допущена к защите

Зав. кафедрой _____

подпись зав. кафедрой

Москва

2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1. ВНУТРИПУЧКОВОЕ РАССЕЙЯНИЕ.....	4
1.1 Источники рентгеновского излучения, основанные на эффекте обратного комптоновского рассеяния.....	4
1.2 Внутрипучковое рассеяние в накопительных кольцах.....	5
1.3 Теоретические модели внутрипучкового рассеяния.....	8
1.4 Формулы Бьёркена-Мтингвы.....	10
Глава 2. АНАЛИЗ ФОРМУЛ БЬЁРКЕНА-МТИНГВЫ.....	15
2.1 Анализ примеров накопительных колец.....	15
2.2 Приблизительное значение интеграла Бьёркена-Мтингвы.....	20
2.3 Границы применимости полученного приближения.....	24
2.4 Строгий вывод приближения, полученный в частном случае.....	28
2.5 Приближение Вапе.....	31
Глава 3. СТРУКТУРА КОЛЬЦА, ОПТИМИЗИРОВАННАЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВНУТРИПУЧКОВОГО РАССЕЙЯНИЯ.....	36
3.1 Минимизация N_x	36
3.2 Анализ кольца [17] с точки зрения правил минимального ВПР.....	38
3.3 Накопительное кольцо, удовлетворяющее правилам минимального ВПР.....	38
Глава 4. НАКОПИТЕЛЬНОЕ КОЛЬЦО ДЛЯ КОМПТОНОВСКОГО ИСТОЧНИКА.....	49
4.1 Точка взаимодействия.....	49
4.2 Три кольца-примера.....	50
4.3 Положение рабочей точки на карте резонансов.....	55
4.4 Коэффициент расширения орбит.....	57
4.5 Динамическая апертура.....	58
4.6 Скорости роста эмиттансов.....	59
Глава 5. НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕЙ РАБОТЫ.....	69
ВЫВОДЫ.....	70
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	72
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	73
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Интеграл Бьёркена-Мтингвы как интеграл от функции Гаусса.....	75
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Максимальная дисперсия в ячейке, используемой в работе.....	80

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время всё более широкое распространение получают источники рентгеновского излучения, основанные на эффекте обратного комптоновского рассеяния. В данных источниках рентгеновское излучение генерируется в точке взаимодействия пучка ускоренных электронов и лазерного излучения. Многие из данных источников включают в себя накопительное кольцо, в котором циркулирует ускоренный пучок электронов. В ходе циркуляции в пучке происходят различные процессы, одним из которых является внутripучковое рассеяние, вызывающее рост эмиттанса пучка. Рост эмиттанса пучка приводит к целому ряду нежелательных явлений, таких как потери пучка вследствие выхода частиц за аксептанс машины, уширение спектра рентгеновского излучения, увеличение геометрических размеров пучка в точке взаимодействия с лазерным излучением и, как следствие, уменьшение выхода рентгеновского излучения. Внутripучковое рассеяние имеет особенно большое значение для накопительных колец малой энергии порядка нескольких десятков МэВ.

В настоящей работе исследуется вопрос о возможности ослабления эффекта внутripучкового рассеяния путём подбора оптимального порядка следования элементов магнитной структуры накопительного кольца. Для этой цели проводится анализ нескольких существующих проектов накопительных колец и предлагаются накопительные кольца с аналогичными параметрами и существенно более слабым эффектом внутripучкового рассеяния.

Глава 1. ВНУТРИПУЧКОВОЕ РАССЕЯНИЕ

1.1 Источники рентгеновского излучения, основанные на эффекте обратного комптоновского рассеяния.

В настоящее время рентгеновское излучение используется во многих областях науки и техники. Среди данных областей можно выделить такие как медицина, таможенный и транспортный контроль, генная инженерия, науки о материалах и многие другие.

Наряду с классическими рентгеновскими трубками в настоящее время в качестве источников рентгеновского излучения широко используются источники синхротронного излучения на базе ускорителей и накопительных колец электронов. Данные источники имеют на порядки большие по сравнению с рентгеновскими трубками светимости и позволяют получать излучение с высокой степенью монохроматичности.

В настоящее время существует потребность в создании компактных источников рентгеновского излучения, основанных на эффекте обратного комптоновского рассеяния. Данный эффект состоит в том, что фотоны оптического диапазона, идущие от лазера, рассеиваясь на встречном пучке высокоэнергичных электронов от ускорителя, увеличивают свою энергию и уходят в область рентгеновского излучения. Для более эффективного использования пучка электронов в систему встраивают накопительное кольцо — замкнутую последовательность поворотных магнитов и прямолинейных участков, в которой пучок способен циркулировать достаточно длительное время (которое определяется требованиями эксперимента, типичное значение в нашем случае составляет доли секунды). Для устойчивой циркуляции пучка в накопительное кольцо добавляют квадрупольные и секступольные магниты, корректора, а также системы ввода и вывода пучка и некоторые другие элементы.

Типичный пример накопительного кольца из работы [1] приведен на рисунке 1:

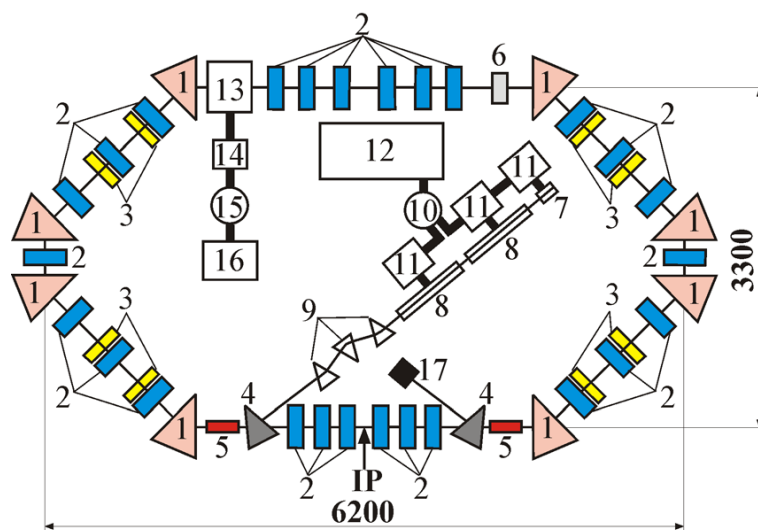


Рисунок 1. Накопительное кольцо [1]. 1 – поворотные магниты, 2 – квадрупольные линзы, 3 – секступольные линзы, 4 – септум-магниты систем инжекции и вывода пучка, 5 – кикеры систем инжекции и вывода пучка, 6 – датчики тока и положения пучка, 7 – СВЧ-пушка, 8 – линейный ускоритель, 9 – система растяжки пучка, 10 – импульсный клистрон для питания СВЧ-пушки и линейного ускорителя, 11 – высокочастотные тракты системы питания СВЧ-пушки и линейного ускорителя, 12 – модулятор системы питания импульсного клистрона, 13 – высокочастотный резонатор, 14 – высокочастотный тракт системы питания резонатора, 15 – длинноимпульсный клистрон системы питания резонатора, 16 – источник питания клистрона рециркулятора, поглотитель пучка, IP – место взаимодействия пучка с лазерным излучением.

Данное кольцо рассчитано на энергию электронов 45 МэВ, имеет периметр 15.546 м, нормализованные эмиттансы пучка составляют около 5 мм·мрад. Прочие параметры данного кольца будут описаны далее в работе, как и параметры некоторых других накопительных колец. Именно для таких по порядку величины энергии, периметра и эмиттанса накопительных колец и будет проводиться наше исследование.

Использование накопительного кольца в источнике рентгеновского излучения даёт ряд преимуществ (самое очевидное из которых — экономия энергии), однако сопряжено и с рядом недостатков, одному из которых и посвящена данная работы.

1.2 Внутрипучковое рассеяние в накопительных кольцах

Совершая бетатронные и синхротронные колебания частицы внутри пучка могут сталкиваться друг с другом. Столкновения приводят к

перераспределению импульса внутри пучка, что может приводить к изменению эмиттанса пучка. В результате продольный и горизонтальный эмиттансы пучка могут одновременно увеличиваться [2].

Стоит отметить, что существуют два схожих эффекта, которые, однако, традиционно разделяют.

Первый эффект состоит в том, что при рассеянии частиц внутри пучка на большие углы их импульс меняется существенно и частица выходит за энергетический аксептанс машины и, как следствие, теряется. Это так называемый эффект Тушека, который не будет в дальнейшем обсуждаться в нашей работе.

В отличие от эффекта Тушека, собственно внутрипучковое рассеяние (далее — ВПР) связано с множеством последовательных столкновений частиц, в каждом из которых импульс частицы меняется слабо и она не теряется. Однако, при этом происходит рост эмиттанса пучка сразу в нескольких направлениях. Со временем частицы всё же начинают выпадать за энергетический аксептанс, однако, ещё более важным является то, что из-за роста эмиттанса пучок очень часто становится непригоден для дальнейшего использования.

Рассмотрим, к примеру, источник рентгеновского излучения, основанный на эффекте обратного комптоновского рассеяния [3,4,5].

Известно [4], что достижимый поток рентгеновского излучения от данного источника составляет

$$\dot{N}_x = \sigma_{Th} \frac{N_e N_{ph} f_{coll}}{2\pi \sqrt{\sigma_{x_e}^2 + \sigma_{x_L}^2} \sqrt{\sigma_{z_e}^2 + \sigma_{z_L}^2}} R_h \quad (1)$$

где $\sigma_{Th} = 6.65 * 10^{-25} \text{ см}^2$ — Томсоновское сечение, N_e — число электронов в пучке, N_{ph} — число фотонов в лазерном импульсе, f_{coll} — частота столкновений, $\sigma_{x,z e}$, $\sigma_{x,z L}$ — среднеквадратичные размеры электронного и лазерного пятна в точке взаимодействия, соответственно, R_h — Рэлеевская длина для лазера.

Известно [6], что

$$\sigma_{x_e, z_e} = \sqrt{\beta_{x,z} \epsilon_{x,z}} \quad (2)$$

где $\beta_{x,z}$ – бетатронные функции, определяемые магнитной структурой кольца, $\epsilon_{x,z}$ — эмиттансы в направлениях x и z (далее будем называть их горизонтальным и вертикальным эмиттансами соответственно).

Из данного факта видно, что из-за роста эмиттансов, вызываемого внутрипучковым рассеянием, со временем увеличивается размер электронного пятна в точке взаимодействия, что вызывает падение потока рентгеновского излучения. Поскольку во многих экспериментах поток рентгеновского излучения должен быть постоянным во времени, пучок электронов необходимо менять через определённые промежутки времени.

Кроме того, из-за роста продольного эмиттанса происходит уширение спектра пучка и, соответственно, спектра рентгеновского излучения. Поскольку продольный эмиттанс пучка равен [7]:

$$\epsilon_l = \sigma_s \sigma_\eta \quad (3),$$

где σ_s - длина пучка, σ_η – разброс по импульсу (в ультрарелятивистском случае равный энергетическому разбросу), то из-за его увеличения увеличивается и ширина энергетического спектра рентгеновского излучения.

Данное уширение несложно оценить из упрощённой формулы для энергии фотона E_x , рассеянного на 180° при лобовом столкновении [3] с электроном с Лоренц-фактором γ (E_L – энергия фотона до столкновения):

$$E_x = 4\gamma^2 E_L \quad (4)$$

Пример данной зависимости для двух длин волн начального фотона, можно видеть на рисунке 2 [3]:

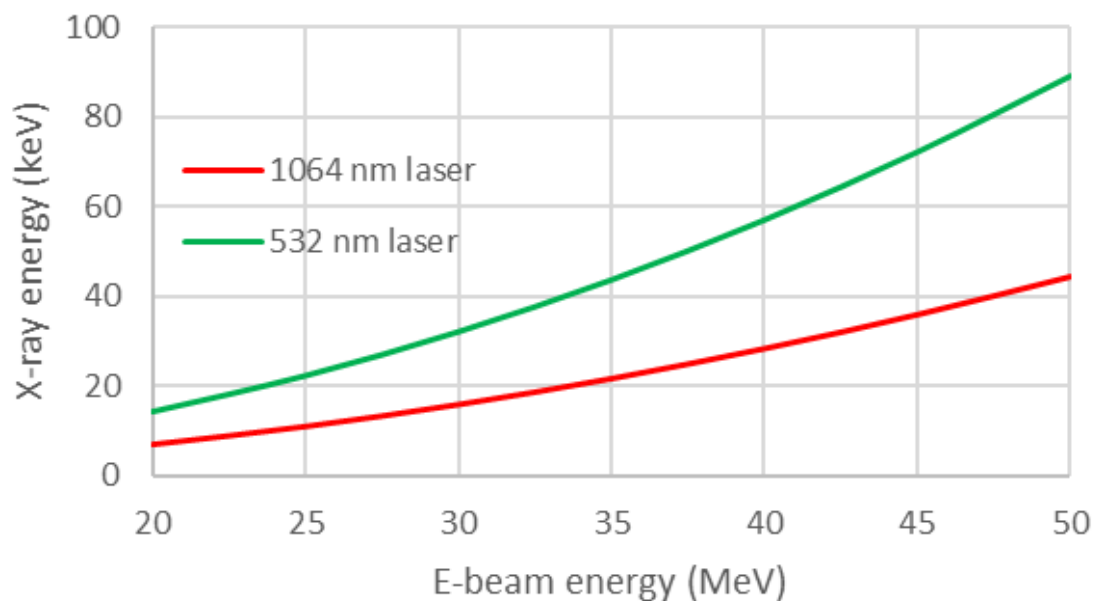


Рисунок 2. Зависимость энергии рассеянного фотона от энергии пучка электронов

Более сложные формулы, учитывающие ненулевой угол столкновения и отличный от 180° угол рассеяния, приведены в [1] и [5].

Поскольку, во многих экспериментах есть жёсткие требования к степени монохроматичности рентгеновского излучения, пучок опять-таки нужно менять через определённые промежутки времени, что связано с потерями энергии и рядом других сложностей. По этой причине необходимо максимально ослабить эффект ВПР, чему и посвящена данная работа.

1.3 Теоретические модели внутривпучкового рассеяния

На сегодняшний день существует множество теоретических моделей, описывающих процесс внутривпучкового рассеяния [8]. Первоначально эффект был описан *Brueck* и *LeDuff* в 1965. В 1974 году подход был развит *Piwinski* [9], а в 1983 с использованием квантовомеханической теории рассеяния — *Bjorken* и *Mtingwa* [10] (далее будем называть их Бьёркеном и Мтингвой), которые вывели достаточно простые для расчётов формулы для скорости роста эмиттанса в зависимости от параметров накопительного кольца. В их формулах

пренебрегают рядом членов и считают дисперсию в вертикальной плоскости равной нулю. Позже в 1984 их подход был уточнён *Conte* и *Martini* [11], которые учли ряд членов, которыми пренебрегли Бьёркен и Мтингва, что особенно важно для пучков с $\gamma < 10$. В 2005 году *Zimmermann* [12] получил аналог формул *Conte* и *Martini* с учётом ненулевой вертикальной дисперсии. В этом же году *Kubo* [13] получил формулы, основанные на формализме *Piwinski*, не включающие в себя сложных интегралов как у Бьёркена и Мтингвы.

На сегодняшний день расчёт эффекта внутривпучкового рассеяния в накопительных кольцах (и в ускорителях, в целом) можно проводить с использованием ряда программ, например, ZAP, SAD, MAD-X [14], Elegant и другие. Чаще всего, в данных программах расчёт ведётся по формулам Бьёркена-Мтингвы или их уточнениям, сделанными более поздними исследователями.

Расчёт по формулам Бьёркена-Мтингвы осложняется тем фактом, что необходимо численно считать значение интеграла Бьёркена-Мтингвы, для чего нужно брать эллиптические интегралы. Для ускорения подсчётов разработан алгоритм Нагайцева (*Nagaitsev*), ускоряющий вычисления в десятки раз.

Теория Бьёркена-Мтингвы многократно проверялась через сравнение со значениями скорости роста эмиттанса в реальных ускорителях. Так, в 1975 году проводились измерения на ISR [15], в 1985 — на SPS, в 1984 — на АА, показавшие отклонения теории от эксперимента менее чем на 10-20%. В 2000-х годах проводились эксперименты на RHIC [16], Tevatron, КЕК-АТФ и РЕР-Х, показавшие очень точное согласие теории с экспериментом.

В нашей стране также проводятся исследования влияния внутривпучкового рассеяния на качество пучка, который используется для экспериментов с обратным комптоновским рассеянием. Этому частично посвящены работы [1, 17-18]. Во всех этих работах описаны накопительные кольца, рассчитанные на достаточно невысокую энергию электронов порядка 50 МэВ. Во всех случаях авторы работ приходят к выводу, что внутривпучковое рассеяние приводит к

существенному росту эмиттанса пучка в течение долей секунды, что приводит к необходимости достаточно часто заменять пучок в накопительном кольце. Автор [1] пришёл к выводу, что пучок нужно менять 50 раз в секунду, авторы [17-18] показали, что в их кольцах замена должна производиться ещё чаще. Таким образом, во всех случаях внутривпучковое рассеяние накладывает весьма существенные ограничения на параметры создаваемого накопительного кольца. Данный факт следует из того, что, как указано в [2], скорость роста эмиттанса сильно зависит от энергии пучка:

$$\frac{1}{T} \sim \frac{1}{\gamma^4} \quad (5)$$

Таким образом, внутривпучковое рассеяние наиболее существенно для пучков малой энергии.

1.4 Формулы Бьёркена-Мтингвы

В данной работе в качестве теоретической основы будут использоваться формулы Бьёркена-Мтингвы [10], без каких-либо уточнений из [11-13]. Причина этого состоит в том, что формулы Бьёркена-Мтингвы наиболее просты для анализа, а электроны при интересующих нас энергиях ультрарелятивистские. На данном этапе работы высокая точность расчётов нам не требуется, поэтому мы и остановимся на формулах Бьёркена-Мтингвы. В приближении Бьёркена-Мтингвы скорости роста горизонтального, продольного и вертикального эмиттансов пучка равны соответственно:

$$\frac{1}{T_x} = \frac{\pi^2 \alpha^2 MN (\log) \left[\frac{\gamma^2 \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\beta_x}{\epsilon_x} \gamma^2 \phi^2 \right]}{\gamma \Gamma} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} (2a\lambda + b) d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \quad (6a)$$

$$\frac{1}{T_l} = \frac{\pi^2 \alpha^2 MN (\log) \left[\frac{\gamma^2}{\sigma_\eta^2} \right]}{\gamma \Gamma} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} (2a\lambda + b) d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \quad (6б)$$

$$\frac{1}{T_z} = \frac{\pi^2 \alpha^2 MN(\log)}{\gamma \Gamma} \left[\frac{\beta_z}{\epsilon_z} \right] \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda} (-a\lambda + (b - 3c \frac{\epsilon_z}{\beta_z})) d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \quad (6в)$$

Здесь:

$$a = \frac{\gamma^2 \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\beta_x}{\epsilon_x} \gamma^2 \phi^2 + \frac{\gamma^2}{\sigma_\eta^2} \quad (6г)$$

$$b = \left(\frac{\gamma^2 \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\gamma^2}{\sigma_\eta^2} \right) \left(\frac{\beta_x}{\epsilon_x} + \frac{\beta_z}{\epsilon_z} \right) + \frac{\beta_x \beta_z}{\epsilon_x \epsilon_z} \gamma^2 \phi^2 \quad (6д)$$

$$c = \frac{\beta_x \beta_z}{\epsilon_x \epsilon_z} \left(\frac{\gamma^2 \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\gamma^2}{\sigma_\eta^2} \right) \quad (6е)$$

$$\Gamma = (2\pi)^3 \beta^3 \gamma^3 M^3 \epsilon_x \epsilon_z \sigma_\eta \sigma_s \quad (6ж)$$

$$\phi = \eta' - \frac{\beta_x' \eta}{2 \beta_x} \quad (6з)$$

Здесь:

$\beta_x, \beta_z, \beta_x', \beta_z'$ – горизонтальная и вертикальная бета-функции и их производные соответственно, η и η' — дисперсия в плоскости кольца и её производная соответственно (в приближении Бьёркена-Мтингвы дисперсия в вертикальной плоскости считается равной нулю, как было указано выше), ϵ_x и ϵ_z – горизонтальный и вертикальный среднеквадратичные эмиттансы, γ — лоренц-фактор электронов, σ_η — относительный разброс по импульсу, β — скорость пучка в скоростях света, σ_s – среднеквадратичная длина сгустка электронов, M – масса электрона, α — постоянная тонкой структуры, N — число частиц в сгустке, (\log) — т. н. Кулоновский логарифм, обычно равный 15-20 [12], Γ — 6-мерный среднеквадратичный фазовый объём.

Отметим, что при переходе в систему Си величина

$$\frac{\pi^2 \alpha^2 MN(\log)}{\gamma \Gamma} = \frac{c r_0^2 N(\log)}{8\pi \beta^3 \gamma^4 \epsilon_x \epsilon_z \sigma_\eta \sigma_s} \quad (7)$$

где $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-15}$ м — классический радиус электрона, c – скорость света.

Очевидно, что в накопительном кольце величины β , γ , N , ε_x , ε_z , σ_s , σ_η являются постоянными и зависят от требований, предъявляемых к данному кольцу. Таким образом, перед нами стоит задача минимизировать скорость роста эмиттанса за счёт эффекта ВПР путём подбора определённой структуры, то есть нам доступны для варьирования параметры β_x , β_z , β_x' , η и η' . Как известно [6], данные параметры удовлетворяют в любой точке орбиты двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta_{x,z}\beta_{x,z}'' - \frac{1}{4}(\beta_{x,z}')^2 + (\beta_{x,z})^2 K_{x,z} &= 1 \\ \eta_{x,z}'' + K_{x,z}\eta_{x,z} &= \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_x &= -\left(k - \frac{1}{\rho^2}\right) \\ K_y &= k \end{aligned}$$

где k – квадрупольный коэффициент, ρ — радиус квивизны орбиты в данной точке.

Решение данных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \eta_0 \cos(\sqrt{K}s) + \frac{1}{K\rho} (1 - \cos(\sqrt{K}s)) + \frac{\eta_0'}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ \eta'(s) &= \eta_0' \cos(\sqrt{K}s) + \frac{1}{\sqrt{K}\rho} \sin(\sqrt{K}s) - \eta_0 \sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \frac{\beta_0}{2} (1 + \cos(2\sqrt{K}s)) + \frac{1}{2\beta_0 K} \left(1 + \frac{(\beta_0')^2}{4}\right) (1 - \cos(2\sqrt{K}s)) + \frac{\beta_0'}{2\sqrt{K}} \sin(2\sqrt{K}s) \\ \beta'(s) &= -\beta_0 \sqrt{K} \sin(2\sqrt{K}s) + \beta_0' \cos(2\sqrt{K}s) + \frac{1}{\beta_0 \sqrt{K}} \left(1 + \frac{(\beta_0')^2}{4}\right) \sin(2\sqrt{K}s) \end{aligned} \quad (9б)$$

Здесь β_0 , η_0 , β_0' , η_0' — бета-функция, дисперсия и их производные в начале очередного элемента кольца, $\beta(s)$, $\eta(s)$, $\beta(s)'$, $\eta(s)'$ — эти же величины вдоль данного элемента при условии, что в нём $K = const$.

В данной работе мы будем рассматривать накопительное кольцо как совокупность элементов трёх типов: дипольных магнитов ($K = 1/\rho^2$), квадрупольных магнитов ($K = k$) и прямолинейных участков ($K = 0$).

Секступольные магниты и краевые поля в данной работе рассматриваться не будут. Их учёту могут быть посвящены будущие исследования.

Обычно уравнения (9а — 9б) решают, используя матричный метод [6].

Отметим, что на прямолинейных участках траектории $k=0$, $1/\rho=0$, а, значит,

$$\begin{aligned}\eta(s) &= \eta_0 + \eta_0' s \\ \eta'(s) &= \eta_0'\end{aligned}\tag{10в}$$

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \beta_0 + \beta_0' s + \frac{s^2}{\beta_0} \left(1 + \frac{(\beta_0')^2}{4}\right) \\ \beta'(s) &= \beta_0' + \frac{2s}{\beta_0} \left(1 + \frac{(\beta_0')^2}{4}\right)\end{aligned}\tag{10г}$$

Аналогичные выражения можно получить и для дипольных или квадрупольных магнитов. Отметим также, что проанализировав первое уравнение (8), легко понять, что бета-функция не может обратиться в нуль ни в одной точке (иначе квадрат её производной будет отрицательным числом, что невозможно). Данный факт нам понадобится впоследствии.

Итак, перед нами стоит задача уменьшить скорость роста эмиттанса путём подбора определённого порядка следования элементов кольца.

Вернёмся к рассмотрению формул Бьёркена-Мтингвы.

Как видно из формул (6а-6б), выражения для скорости роста продольного и горизонтального эмиттансов имеют аналогичный вид и состоят из одной и той же константы (синий), которая не зависит от структурных функций кольца; некоего множителя (зелёный), который зависит от структурных функций кольца для скорости роста горизонтального эмиттанса и является константой для скорости роста продольного эмиттанса; и самого интеграла Бьёркена-Мтингвы (красный), имеющего одинаковый вид для скоростей роста обоих эмиттансов:

$$\frac{1}{\tau_l} = \frac{\pi^2 \alpha^2 MN (\log)}{\lambda \tilde{\Gamma}} \left[\frac{m\gamma^2}{\sigma_\eta^2} \right] \int_0^\infty \frac{d\lambda \sqrt{\lambda} [2a\lambda + b]}{\{\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c\}^{3/2}}, \quad (6a^*)$$

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{\pi^2 \alpha^2 MN (\log)}{\gamma \tilde{\Gamma}} \left[\frac{\gamma^2 \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\beta_x}{\epsilon_x} \gamma^2 \phi^2 \right] \int_0^\infty \frac{d\lambda \sqrt{\lambda} [2a\lambda + b]}{\{\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c\}^{3/2}}, \quad (6b^*)$$

Как указано в работе [10], скорость роста вертикального эмиттанса в большинстве случаев отрицательна и на несколько порядков меньше, чем скорости роста горизонтального и продольного эмиттансов. Подтверждение последнего факта мы будем встречать на протяжении всей данной работы. Поэтому основной интерес для нас представляют скорости роста горизонтального и продольного эмиттансов.

Поскольку перед нами стоит задача уменьшить скорости роста этих эмиттансов за счёт подбора структурных функций кольца, нам нужно минимизировать интеграл в красной рамке и множитель в зелёной для горизонтального эмиттанса.

Прежде, чем приступить к этому, обсудим ВПР в двух опорных кольцах — кольце из работы Бьёркена-Мтингвы [10] и кольце из работы [17].

Глава 2. АНАЛИЗ ФОРМУЛ БЬЁРКЕНА-МТИНГВЫ

2.1 Анализ примеров накопительных колец

Рассмотрим вначале кольцо, описанное в работе Бьёркена-Мтингвы [10]. Это кольцо Антипротонного накопителя в Фермилаб, $\gamma=9.53$, энергия протонов 8 ГэВ. Эмиттансы пучка равны $\varepsilon_x=\varepsilon_z=0.42$ мм·мрад, энергетический разброс $\sigma_\delta=1.2\cdot 10^{-4}$, ток пучка 41 мА. Значения бета-функций, дисперсий и скоростей роста эмиттансов, рассчитанные авторами статьи, приведены на рисунках 3 и 4:

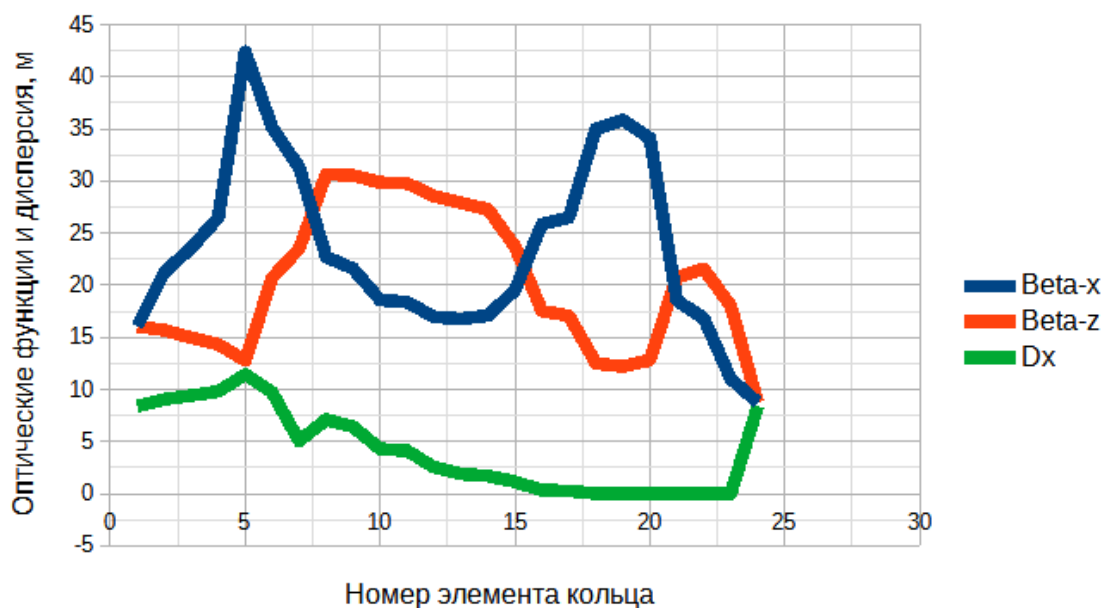


Рисунок 3. Оптические функции и дисперсия в элементах кольца [10].

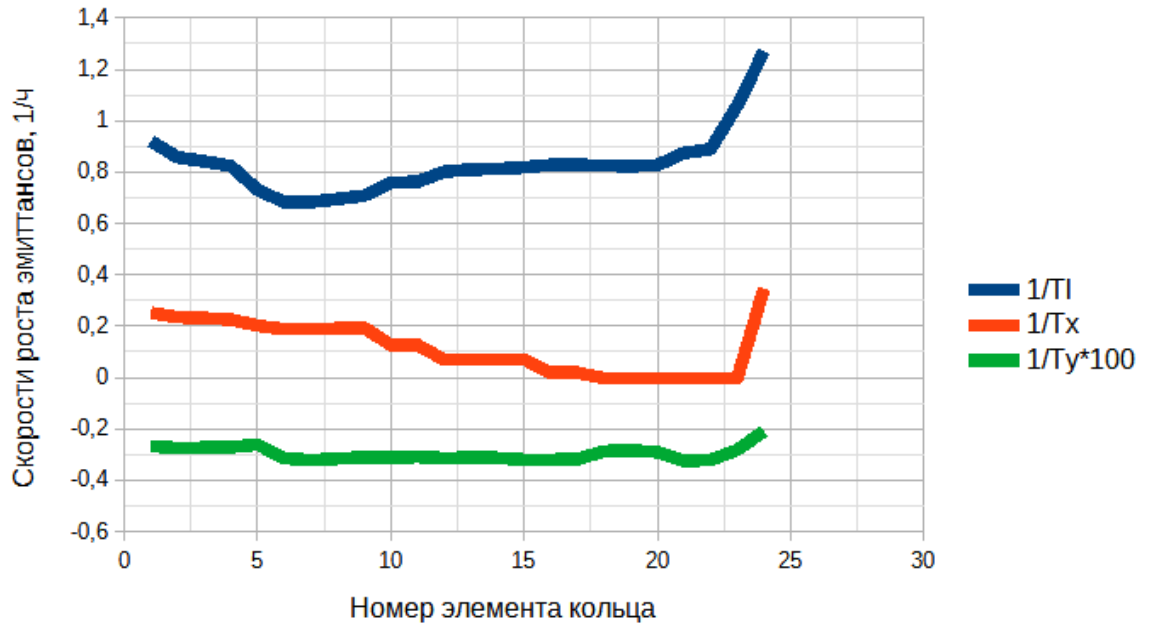


Рисунок 4. Скорости роста эмиттансов в элементах кольца [10].

Видим, что скорость роста вертикального эмиттанса отрицательна и примерно на два порядка ниже, чем скорости роста продольного и горизонтального эмиттансов, что было указано выше.

Перейдём теперь к кольцу из работы [17].

Схема данного кольца приведена на рисунках 5а — 5б:

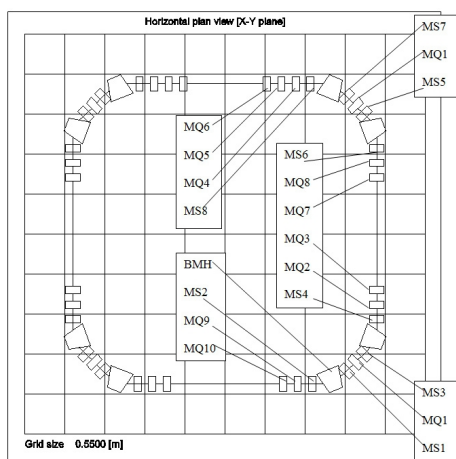


Рисунок 5а. Магнитные элементы накопительного кольца [17].

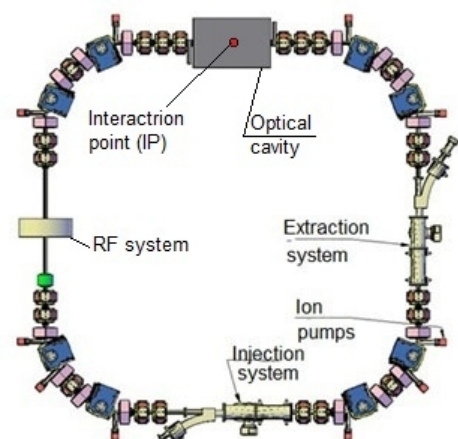


Рисунок 5б. Общий вид накопительного кольца [17].

Это электронное кольцо с энергией электронов около 50 МэВ, $\gamma \approx 100$.

Эмиттансы равны $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0.16$ мм·мрад, энергетический разброс

$\sigma_\delta = 0.003$, ток пучка 20 мА, заряд одного сгустка — 1 нКл. Длина кольца составляет 15.1153 м, кольцо состоит из восьми 45-градусных секторных магнитов с углами скоса +34.378 градуса, 22 квадрупольей и 16 секступольей и корректоров, параметры которых подробно приведены в работе [17].

Поскольку, в отличие от авторов [10], авторы [17] подробно указали параметры всех элементов накопительного кольца, становится возможно провести расчёт ВПР с помощью программы MAD-X.

Значения бета-функций, дисперсий и скоростей роста эмиттансов, рассчитанные с помощью программы MAD-X по параметрам кольца, приведённым авторами [17], показаны на рисунках 6 и 7 и соответствуют вычислениям, приведённым в самой работе [17]:

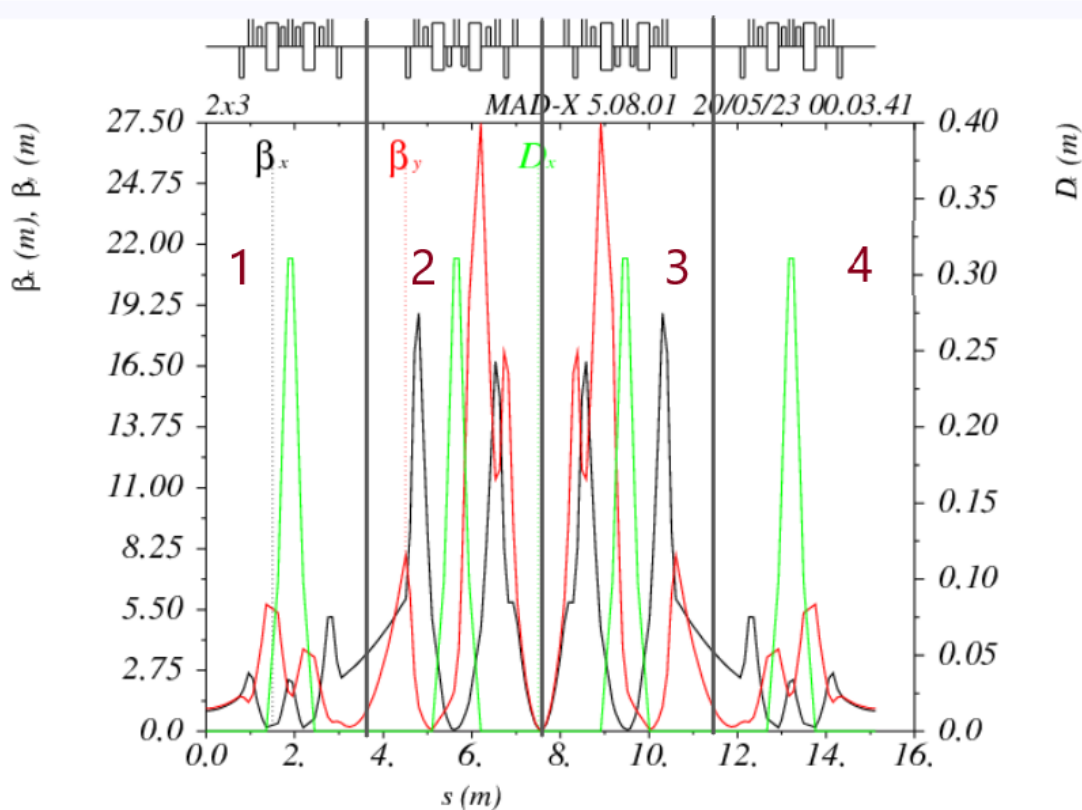


Рисунок 6. Оптические функции и дисперсия в элементах кольца [17], расчёт MAD-X.

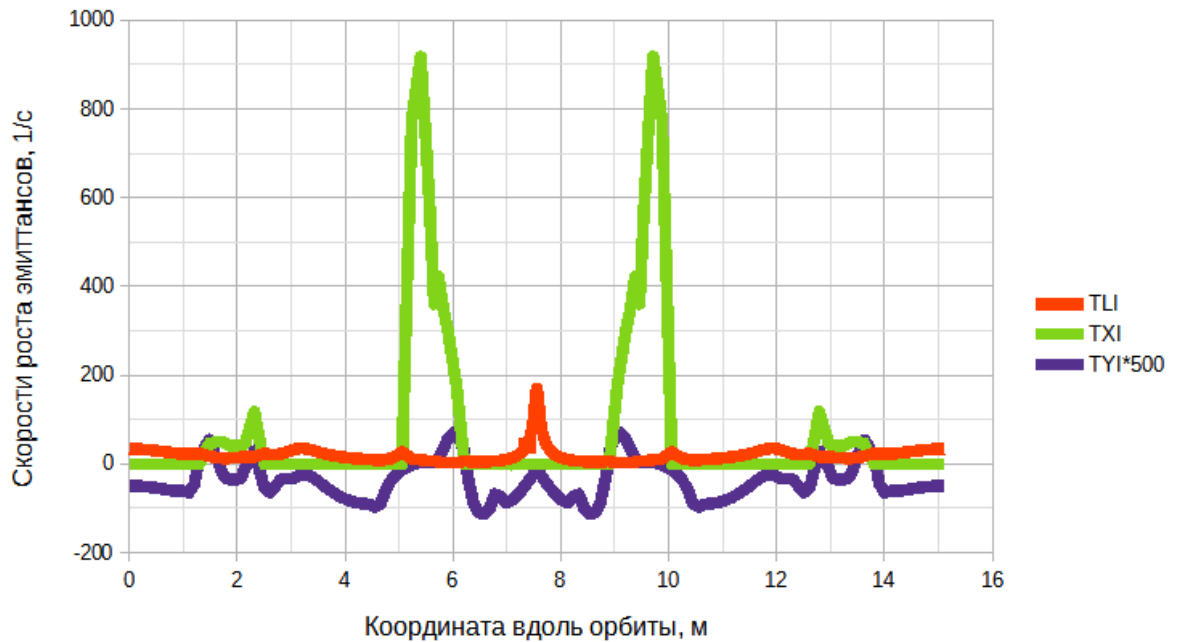


Рисунок 7. Скорости роста эммитансов в элементах кольца [17], расчёт MAD-X .

Здесь, в отличие от кольца [10], можно сразу сделать ряд достаточно интересных наблюдений. Кольцо состоит из 4-х ахроматичных поворотов (их границы на схеме кольца показаны на рисунке 6), имеющих схожую структуру (отличие состоит в наличии одной лишней квадруполи на участках 2 и 3). По этой причине дисперсионные функции во всех 4-х поворотах идентичны друг другу, что можно видеть на рисунке 8:

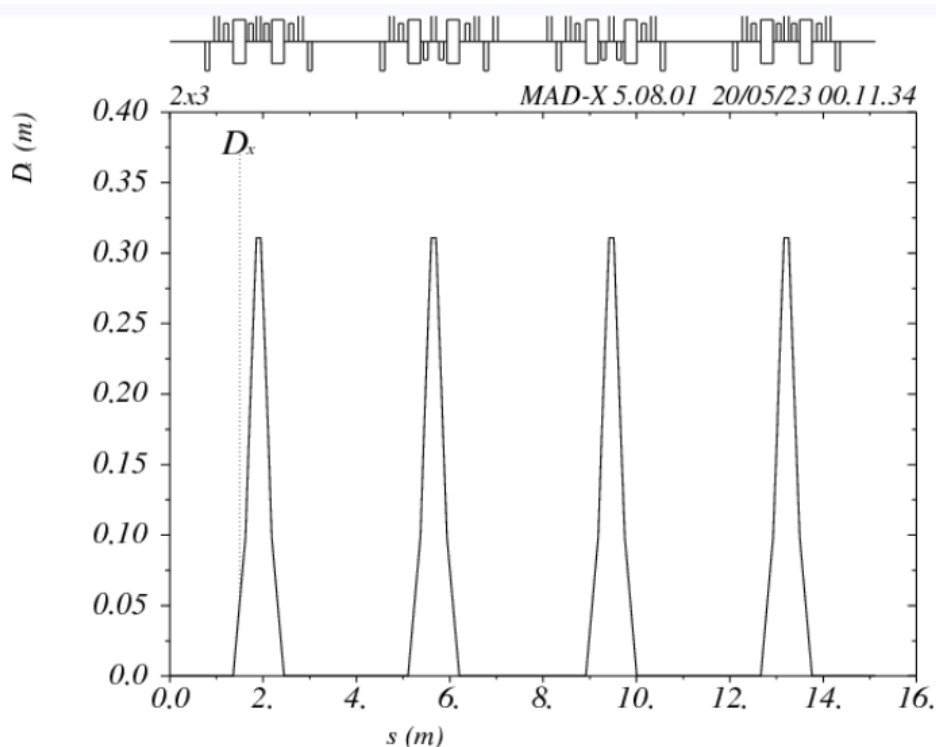


Рисунок 8. Дисперсионная функция кольца [17], расчёт MAD-X.

Посмотрим теперь на рисунок 7, изображающий скорости роста эмиттансов в элементах кольца.

Заметим сразу, что скорость роста вертикального эмиттанса примерно на 2-3 порядка ниже скоростей роста других эмиттансов, как и должно быть согласно [10]. Видим также, что скорость роста горизонтального эмиттанса на участках 2 и 3 примерно **на порядок** больше, чем на участках 1 и 4.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что причина столь высокой скорости роста горизонтального эмиттанса на участках 2 и 3 заключается в поведении бета-функции на этих участках. Значит, изменив данное поведение каким-либо образом, возможно уменьшить скорость роста эмиттанса на этих участках и приблизить её значение к скорости роста на участках 1 и 4.

2.2 Приближительное значение интеграла Бьёркена-Мтингвы

Кратко обсудив внутрипучковое рассеяние в кольцах [10] и [17], перейдем к анализу интеграла Бьёркена-Мтингвы.

Интеграл Бьёркена-Мтингвы зависит от трех параметров a , b , c , которые обсуждались ранее, и имеет вид:

$$I(a, b, c) = \int_0^{\infty} \frac{(2a\lambda + b)\sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \equiv \int_0^{\infty} f(a, b, c, \lambda) d\lambda \quad (11)$$

Данный интеграл не берется аналитически, а все попытки его преобразований приводят к сложным формулам, затрудняющим его анализ. Поскольку в данной работе нам не требуется высокая точность расчётов, мы поставили своей целью упростить интеграл Бьёркена-Мтингвы до некоего выражения, удобного для анализа.

В ходе работы было сделано несколько попыток найти подобное выражение, одна из которых описана в ПРИЛОЖЕНИИ 1. Данный путь на нынешнем этапе работы не привёл к каким-либо результатам, однако, как нам кажется, на него стоит обратить внимание в будущих исследованиях.

В итоге, нами был избран следующий путь. Поскольку интеграл Бьёркена-Мтингвы зависит от трёх независимых параметров a , b , c , логично предположить, что его приближительное значение также зависит от этих трёх параметров.

Построим для начала зависимости $lg(1/T)$ (поскольку скорость роста продольного эмиттанса равна интегралу Бьёркена-Мтингвы, умноженному на набор констант) как функцию $lg(a)$, $lg(b)$ и $lg(c)$ для всех элементов кольца [17] (каждая точка на графике соответствует определённому элементу кольца). Данные зависимости приведены на рисунках 9а — 9в.

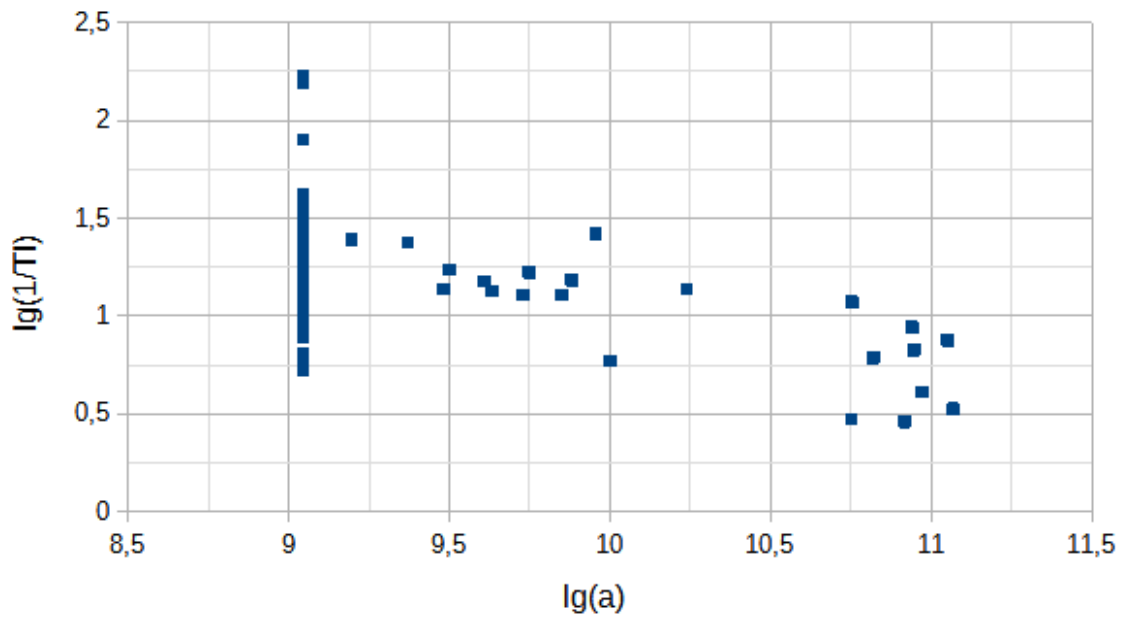


Рисунок 9а. Зависимость $\lg(1/T)$ как функция $\lg(a)$ для кольца [17].

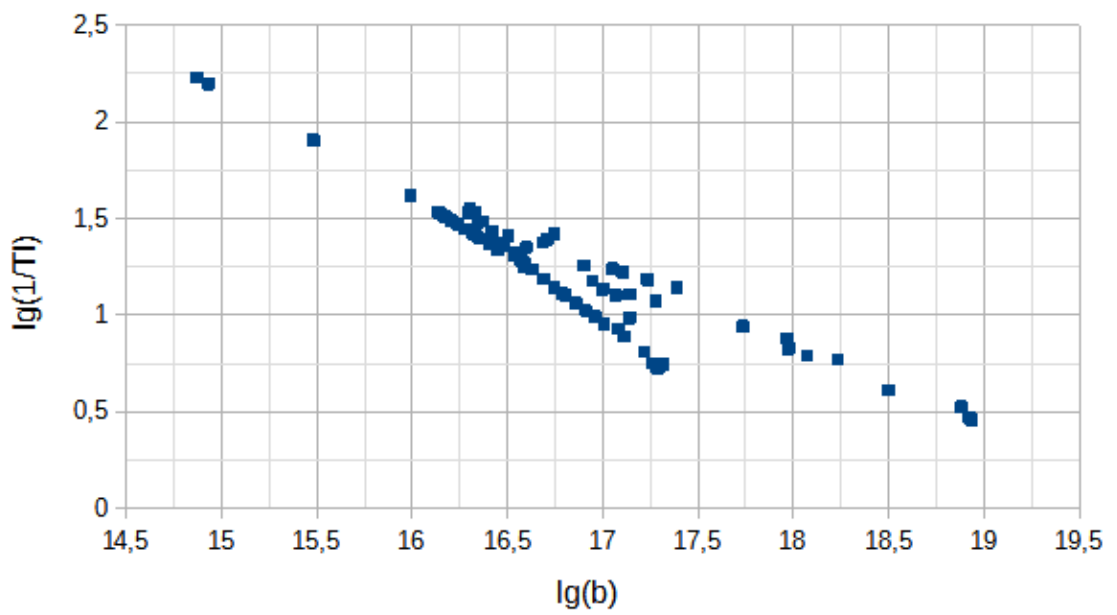


Рисунок 9б. Зависимость $\lg(1/T)$ как функция $\lg(b)$ для кольца [17].

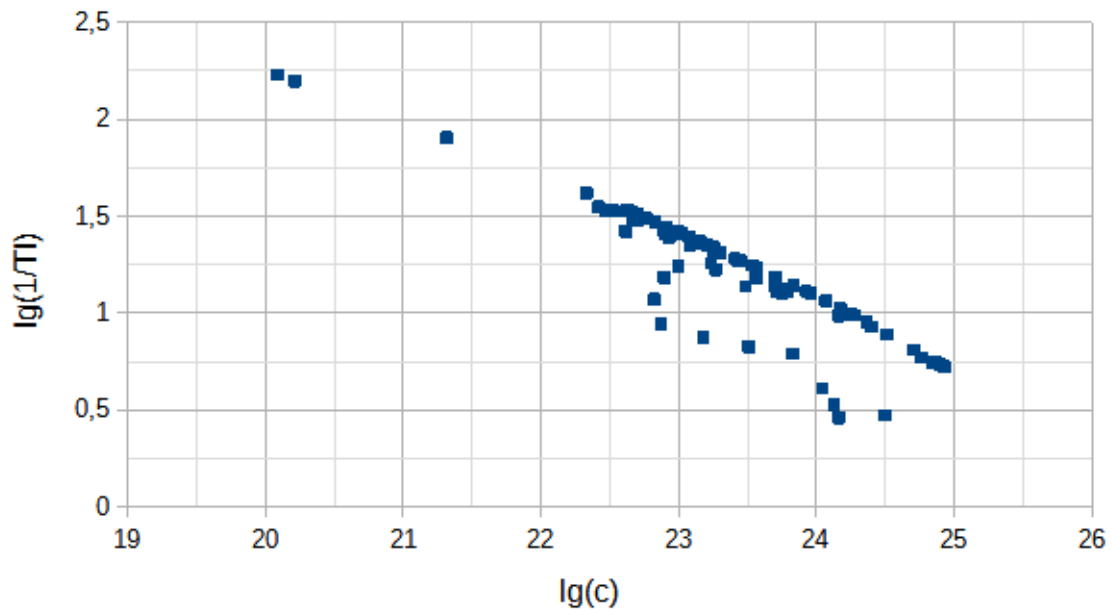


Рисунок 9в. Зависимость $lg(1/T_l)$ как функция $lg(c)$ для кольца [17].

Можно заметить, что никакой явной зависимости от параметра a не наблюдается (при одном и том же значении a $lg(1/T_l)$ принимает совершенно разные значения), а для параметров b и c некая зависимость (приблизительно линейная) присутствует, причём точки, лежащие выше основной прямой на зависимости от b , лежат ниже её на зависимости от c .

Это наводит на мысль, что приближённое выражение может быть пропорционально произведению abc .

Построим зависимость $lg(1/T_l)$ как функцию $lg(abc)$. Вместе с основной зависимостью приведены две прямые, проведённые по методу наименьших квадратов и соответствующие коэффициентам наклона $-1/6$ (жёлтая линия) и $-1/5$ (красная линия). Данные зависимости приведены на рисунке 10:

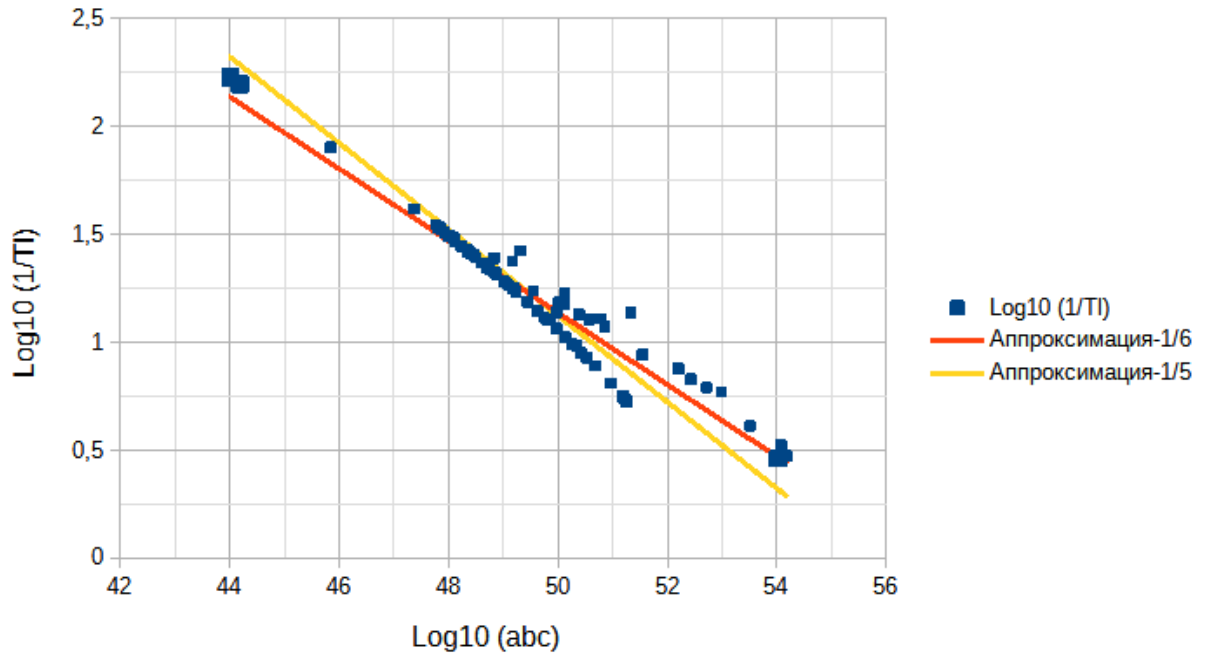


Рисунок 10. Зависимость $lg(1/T_l)$ как функция $lg(abc)$ для кольца [17] и её аппроксимации прямыми с коэффициентом наклона $-1/5$ (жёлтая линия) и $-1/6$ (красная линия).

Как видим, для элементов кольца [17] с неплохой точностью выполняется соотношение:

$$I(a, b, c) \sim (abc)^{-(1/6 \div 1/5)} \quad (12)$$

Построим аналогичную зависимость для кольца из работы Бьёркена-Мтингвы [10] (Рисунок 11).

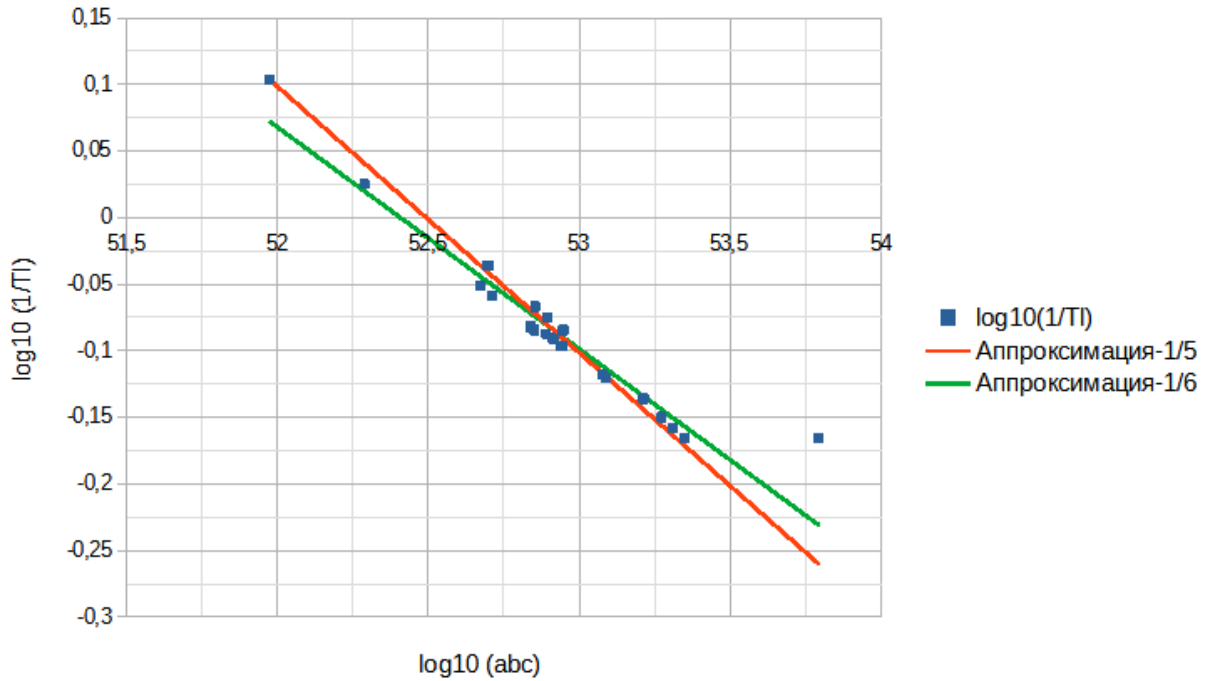


Рисунок 11. Зависимость $lg(1/T_i)$ как функция $lg(abc)$ для кольца [10] и её аппроксимации прямыми с коэффициентом наклона $-1/5$ (красная линия) и $-1/6$ (зелёная линия).

Также видим неплохое совпадение. Отметим, что попытки построить зависимость $lg(1/T_i)$ как функцию $lg(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, где α, β, γ — некие степени, не привели к заметному увеличению точности. Поэтому остановимся на соотношении (12).

2.3 Границы применимости полученного приближения

Поскольку утверждение

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{(2a\lambda + b)\sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \approx \text{const} \cdot (abc)^{-(1/6 + 1/5)} \quad (13)$$

совершенно не очевидно, и существует вероятность, что данная зависимость является случайным совпадением для колец [10] и [17], была написана компьютерная программа, в которой случайным образом задаются параметры

$$k = \frac{\gamma^2 * \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\gamma^2}{\sigma_\eta^2}, \quad x = \frac{\beta_x}{\epsilon_x}, \quad z = \frac{\beta_z}{\epsilon_z} \quad \text{и} \quad s = \frac{\beta_x}{\epsilon_x} * \gamma^2 * \phi^2, \quad \text{из которых находятся}$$

параметры $a=k+s$, $b=(x+z)k+zs$, $c=kxz$ и численно рассчитывается интеграл Бьёркена-Мтингвы $I(abc)$. Далее находится величина del , равная отношению этого интеграла и нашего приближенного значения

$$del = \frac{I(abc)}{(abc)^\alpha} \quad (14)$$

Пусть x , z и s изменяются в пределах от 1 до 10^{10} , а k — от 10 до 10^{16} .

Соответствующая зависимость $del(\lg(k))$ при $\alpha = -1/6$ приведена на рисунке 12:

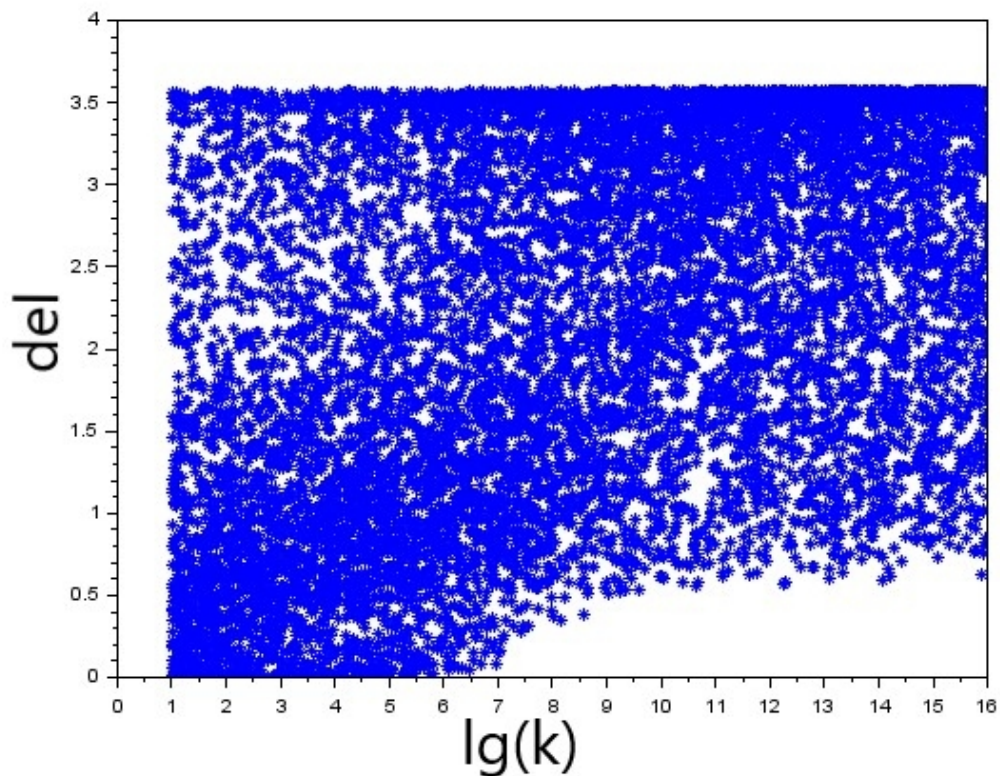


Рисунок 12. Зависимость $del(\lg(k))$ при $\alpha = -1/6$; x , z и s изменяются в пределах от 10^0 до 10^{10} , k — от 10^1 до 10^{16} .

Построим аналогичные графики при $\alpha = -1/5$ и $\alpha = -1/7$ (Рисунки 13а — 13б).

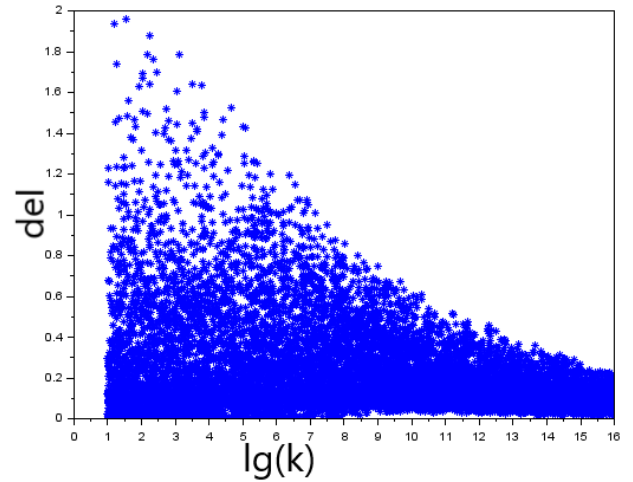
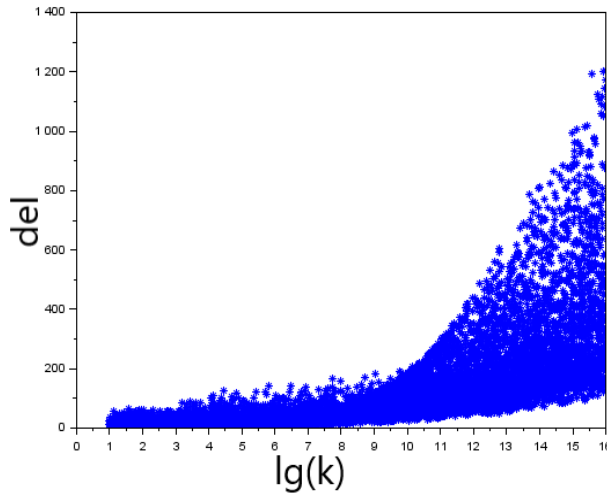


Рисунок 13а. Зависимость $del(lg(k))$ при $\alpha = -1/5$.

Рисунок 13б. Зависимость $del(lg(k))$ при $\alpha = -1/7$.

Видим из рисунков 12 и 13а — 13б, что при $\alpha = -1/5$ и $\alpha = -1/7$ отличие $I(abc)$ от $(abc)^\alpha$ больше, чем для $\alpha = -1/6$. Особое внимание стоит обратить на тот факт, что величина $del(lg(k))$ при $\alpha = -1/6$ ограничена во всех точках значением 3.6 (то есть всюду $I(abc) < 3.6 \cdot (abc)^{1/6}$), а при других значениях α таких ограничений не наблюдается (верхняя и нижняя границы уходят вверх или вниз с ростом k).

Итак, примем в дальнейшей работе следующее приближение:

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{(2a\lambda + b)\sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \approx F(a, b, c) \cdot (abc)^{-1/6} \quad (15),$$

где $F(a, b, c)$ — слабо меняющаяся функция, которую можно считать примерно постоянной.

Как мы можем видеть из рисунка 12, при $lg(k) > 8$ $0.5 < F(a, b, c) < 3.6$ (при $lg(k) < 6$ $F(a, b, c)$ может принимать значения, много меньше единицы, а, значит, данное приближение уже не верно).

Обсудим вопрос о границах применимости данного приближения. Нас волнуют, в первую очередь, электронные кольца с энергией до 100 МэВ, т. е. с $\gamma < 200$. Обычный для таких колец нормализованный эмиттанс составляет несколько

мм·мрад: 5 мм·мрад [1]; 4 мм·мрад [17]; 3-4 мм·мрад [18] . Значит, сам эмиттанс составляет около десятой доли мм·мрад. Бета-функции лежат в пределах от нескольких см до нескольких десятков м.

Таким образом, $10^5 \lesssim \frac{\beta_{x,z}}{\epsilon_{x,z}} \lesssim 10^{10}$.

Дисперсии обычно лежат в пределах от нуля до нескольких метров, а вот производные бета-функций и дисперсий такой простой оценке не поддаются.

Поэтому для оценки величины s примем $\varphi \sim \eta \sim 1$ м, то есть $s < 10^{14} - 10^{15}$. Отметим, что в кольце [17] максимальная $s_{max} = 10^{11}$, что на 4 порядка ниже. Очевидно, $s_{min} = 0$.

Посмотрим, чему равна величина $del = \frac{I(abc)}{(abc)^{-1/6}}$ для случайных x, z и s из более

широкого по s диапазона $10^3 < \frac{\beta_{x,z}}{\epsilon_{x,z}} < 10^{10}$, $10^0 < s < 10^{16}$.

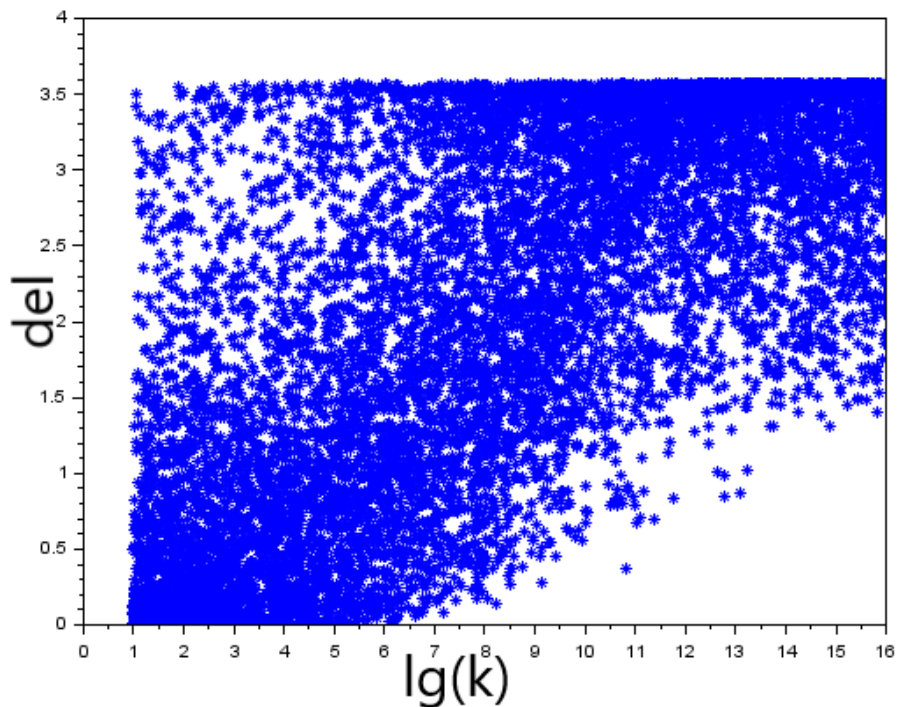


Рисунок 14. Зависимость $del(lg(k))$ при $\alpha = -1/6$; x и z изменяются в пределах от 10^3 до 10^{10} , s — от 10^0 до 10^{16} , k — от 10^1 до 10^{16} .

Заметим, что начиная уже с $k \sim 10^8 - 10^9$ $F(a,b,c) \approx (0.5-3.6)$. Отметим, что данная граница слабо зависит от s . Так, при $s=0$ зависимость имеет вид:

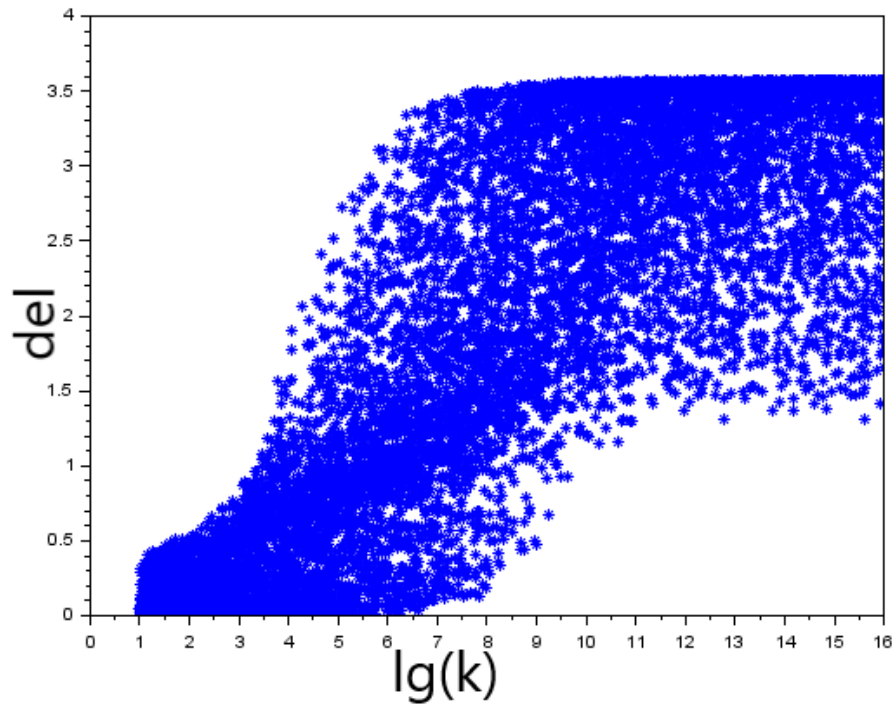


Рисунок 15. Зависимость $del(lg(k))$ при $\alpha = -1/6$; x и z изменяются в пределах от 10^3 до 10^{10} , k — от 10^1 до 10^{16} , $s=0$.

Таким образом, при энергетическом разбросе $\sigma_\eta < (10^{-3} - 10^{-2})$ (это следует из границы для $k \sim 10^8 - 10^9$) приближение

$$I(a,b,c) = \int_0^\infty \frac{(2a\lambda + b)\sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} \approx (0,5-3,6) \cdot (abc)^{-1/6} \quad (16)$$

выполняется. Такой разброс — типичная величина для колец типа [1, 17-18], что указано в их описании.

2.4 Строгий вывод приближения, полученный в частном случае

Попробуем получить приближение (16) строго математически. Математический вывод (16) в общем случае нам получить на сегодняшний день не удалось.

Однако, данная зависимость получается строго в одном частном случае.

Представим знаменатель интеграла Бьёркена-Мтингвы в виде

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda + \lambda_0)^3 + f \quad (17)$$

где $\lambda_0 = \frac{a}{3}$, $f = (b\lambda + c) - (3\lambda_0^2\lambda + \lambda_0^3) = (b - \frac{a^2}{3})\lambda + (c - \frac{a^3}{27}) = \Delta\lambda + \delta$

Тогда

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{(2a\lambda + b)\sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{(6\lambda_0\lambda + 3\lambda_0^2 + \Delta)\sqrt{\lambda} d\lambda}{((\lambda + \lambda_0)^3 + f)^{3/2}} \quad (18)$$

Пусть:

$$f \ll (\lambda + \lambda_0)^3 \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= 3\lambda_0 \int_0^\infty \frac{(2\lambda + \lambda_0) \left(1 + \frac{\Delta}{3\lambda_0(2\lambda + \lambda_0)}\right) \sqrt{\lambda} d\lambda}{(\lambda + \lambda_0)^{9/2} \left(1 + \frac{\Delta\lambda + \delta}{(\lambda + \lambda_0)^3}\right)^{3/2}} \approx \\ &\approx 3\lambda_0 \int_0^\infty \frac{(2\lambda + \lambda_0)}{(\lambda + \lambda_0)^{9/2}} \sqrt{\lambda} \left(1 + \frac{\Delta}{3\lambda_0(2\lambda + \lambda_0)} - \frac{3}{2} \frac{\Delta\lambda + \delta}{(\lambda + \lambda_0)^3}\right) d\lambda \end{aligned} \quad (20)$$

Используя известное соотношение для B - и Γ -функций Эйлера:

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (21)$$

после несложных вычислений получим:

$$I(a, b, c) = \frac{1.143}{\lambda_0} - 5.26 \cdot 10^{-3} \frac{\Delta}{\lambda_0^3} - 0.1023 \frac{\delta}{\lambda_0^4} - 0.0256 \frac{\Delta^2}{\lambda_0^5} - 0.085 \frac{\Delta\delta}{\lambda_0^6} \quad (22)$$

Аналогично, используя разложение Тейлора, получим:

$$(abc)^{-1/6} = \frac{0.69}{\lambda_0} - 0.0383 \frac{\Delta}{\lambda_0^3} - 0.115 \frac{\delta}{\lambda_0^4} - 0.0383 \frac{\Delta\delta}{\lambda_0^6} \quad (23)$$

Заметим, что в обоих выражениях (22) и (23) нет 2-й степени по λ_0 . Если $\delta = \Delta = 0$, то

$$I(a, b, c) = 1.648(abc)^{-1/6} \quad (24)$$

Для выполнения условия (19) достаточно выполнения

$$\begin{aligned} \delta &\ll \lambda_0^3 \\ \Delta &\ll 3\lambda_0^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Построим зависимость $del = \frac{I(abc)}{(abc)^{-1/6}}$ от величины $e = \frac{|\delta|}{\lambda_0^3} + \frac{|\Delta|}{3\lambda_0^2}$

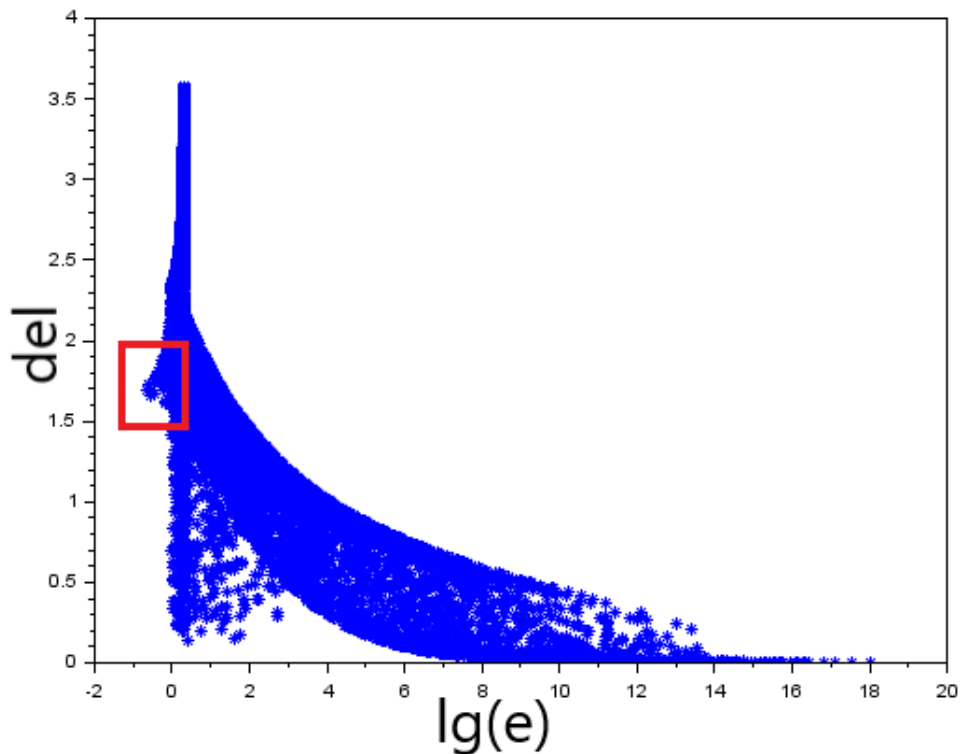


Рисунок 16. Зависимость $del = \frac{I(abc)}{(abc)^{-1/6}}$ от $e = \frac{|\delta|}{\lambda_0^3} + \frac{|\Delta|}{3\lambda_0^2}$.

Область, удовлетворяющая условию (25), отмечена на рисунке 16 красным прямоугольником. Как видим, соотношение (16) выполняется в куда более широкой области параметра e , чем области, определяемой (25).

Отметим также, что в кольце [10] $del = 2.95$, а в кольце [17] $del = 2.36$, считая по аппроксимациям, приведённым на рисунках 10 и 11.

2.5 Приближение Ване

Обсудим следующий вопрос. В работе [8] приведена приближительная формула скорости роста продольного эмиттанса, подобная (16):

$$\frac{1}{T_l} \approx \frac{r_e^2 c N_b (\log)}{16 \gamma^3 \epsilon_x^{3/4} \epsilon_z^{3/4} \sigma_z \sigma_p^3} (\sigma_H g(a_1/b_1) (\beta_x \beta_z)^{-1/4}) \quad (26),$$

Где $\frac{1}{\sigma_H^2} = \frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{H_x}{\epsilon_x}$, $a_1 = \frac{\sigma_H}{\gamma} \sqrt{\frac{\beta_x}{\epsilon_x}}$, $b_1 = \frac{\sigma_H}{\gamma} \sqrt{\frac{\beta_z}{\epsilon_z}}$, $g(\alpha) = \alpha^{0.021 - 0.044 \ln \alpha}$,

$$H_x = \frac{\eta^2}{\beta_x} + \beta_x \phi^2 .$$

Переходя к нашим обозначениям $\frac{1}{\sigma_H^2} = \frac{a}{\gamma^2}$, то есть $\sigma_H = \frac{\gamma}{\sqrt{a}}$. Тогда

$$\frac{1}{T_l} \approx \frac{r_e^2 c N_b (\log)}{16 \gamma^2 \epsilon_x \epsilon_z \sigma_z \sigma_p^3} (a^{-1/2} \left(\frac{\beta_x \epsilon_z}{\epsilon_x \beta_z}\right)^{(0.0105 - 0.011 \ln(\frac{\beta_x \epsilon_z}{\epsilon_x \beta_z}))} \left(\frac{\beta_x \beta_z}{\epsilon_x \epsilon_z}\right)^{-1/4}) \quad (27)$$

Построим зависимость скорости роста продольного эмиттанса в кольце [17] от

величины $a^{-1/2} \left(\frac{\beta_x \epsilon_z}{\epsilon_x \beta_z}\right)^{(0.0105 - 0.011 \ln(\frac{\beta_x \epsilon_z}{\epsilon_x \beta_z}))} \left(\frac{\beta_x \beta_z}{\epsilon_x \epsilon_z}\right)^{-1/4}$ (рисунок 17).

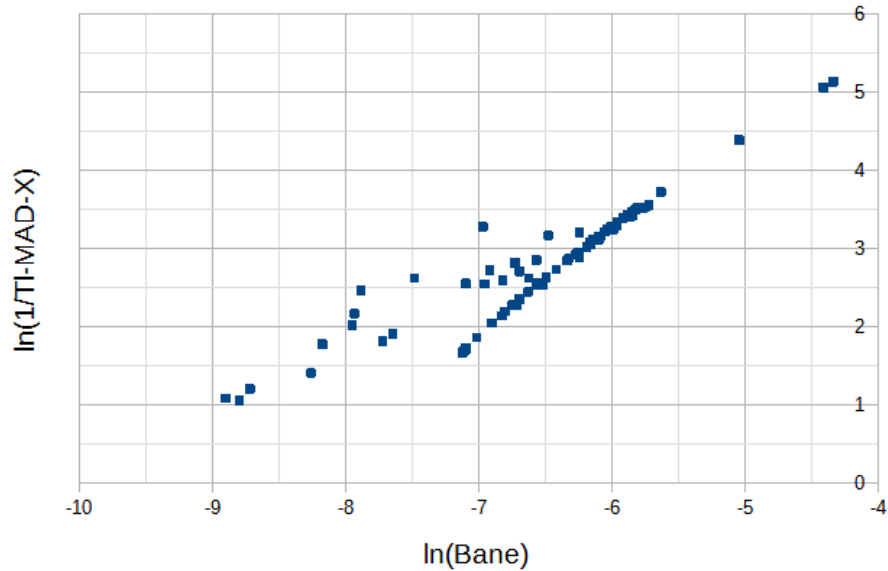


Рисунок 17. Приближение Ване для элементов кольца [17].

Легко видеть, что данное приближение отличается от прямой линии практически в той же степени, что и полученное нами приближение (12), показанное на рисунке 10.

Отметим, что чаще всего $\epsilon_x \approx \epsilon_z$, а $10^{-4} < \frac{\beta_x}{\beta_z} < 10^4$ (т. к. бета-функция составляет от нескольких см до нескольких десятков м), откуда

$$0.000037 < 0.0105 - 0.011 \ln\left(\frac{\beta_x}{\epsilon_x} \frac{\epsilon_z}{\beta_z}\right) < 0.0206$$

и, следовательно, $0.8 \lesssim \left(\frac{\beta_x}{\epsilon_x} \frac{\epsilon_z}{\beta_z}\right)^{(0.0105 - 0.011 \ln(\frac{\beta_x}{\epsilon_x} \frac{\epsilon_z}{\beta_z}))} \lesssim 1$ (В кольце [17] эта величина составляет от 0.87 до 1.0025). Таким образом, данный множитель меняется крайне слабо, и его можно считать практически постоянным. То есть приближение (27) упрощается до

$$\frac{1}{T_l} \sim \frac{1}{\sigma_p^3} \left(a^{-1/2} \left(\frac{\beta_x}{\epsilon_x} \frac{\beta_z}{\epsilon_z} \right)^{-1/4} \right) \quad (28)$$

Обсудим, как выглядит вид формулы для скорости роста горизонтального эмиттанса $1/T_x$ в приближении *Vane* и нашем приближении.

Как указано в [8],

$$\frac{1}{T_x} = \frac{\sigma_p^2}{\epsilon_x} H_x \frac{1}{T_l} \quad (29)$$

Данный факт напрямую следует из формул Бьёркена-Мтингвы (6а — 6б).

Легко видеть, что с ростом H_x (то есть с увеличением дисперсии и φ -функции) скорость роста продольного эмиттанса уменьшается (т. к. в формуле (28) H_x входит в величину a и стоит под корнем в знаменателе), а скорость роста горизонтального эмиттанса — увеличивается, поскольку первая степень H_x растёт быстрее его корня.

В нашем приближении (16), поскольку $(abc)^{1/6}$ растёт не быстрее, чем η и $\varphi^{2/3}$, то с ростом H_x скорость роста продольного эмиттанса уменьшается, а горизонтального — увеличивается.

Итак, в обоих приближениях невозможно одновременно уменьшать скорости роста эмиттансов обоих типов. В различных экспериментах могут требоваться

свои особые ограничения на скорость роста эмиттанса каждого типа, однако, наиболее вероятно, что нужно уменьшать обе скорости в равной мере, т. е. выяснить, как ведёт себя сумма этих скоростей с ростом H_x .

В приближении *Vane*

$$\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_l} = \left(\frac{\sigma_p^2}{\epsilon_x} H_x + 1 \right) \frac{1}{T_p} \sim a^{1/2} \left(\frac{\beta_x}{\epsilon_x} \frac{\beta_z}{\epsilon_z} \right)^{-1/4} \sim H_x^{0.5/2} \quad (30),$$

т. е. увеличивается с ростом H_x .

Легко показать, что в нашем приближении (16)

$$\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_l} \sim \left(\frac{a^5}{bc} \right)^{1/6} \quad (31)$$

Обсудим данное выражение более подробно.

Введём величины:

$$k = \frac{y^2}{\sigma_\eta^2}, \quad m = \frac{y^2 * \eta^2}{\epsilon_x \beta_x}, \quad n = \frac{\beta_x * y^2 * \phi^2}{\epsilon_x}, \quad z = \frac{\beta_z}{\epsilon_z}, \quad x = \frac{\beta_x}{\epsilon_x}.$$

Тогда $a = k(1+m+n)$; $b = k((x+z)(1+m) + zn)$; $c = kxz(1+m)$.

Отсюда

$$\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_l} \sim \left(\frac{a^5}{bc} \right)^{1/6} = k^{1/2} \left(\frac{(1+m+n)^5}{xz(1+m)(x(1+m) + z(1+m+n))} \right)^{1/6} \quad (32)$$

Взяв производную по m при фиксированном n , получим минимум в точке, определяемой из условия:

$$1+m = \frac{(x-z) + \sqrt{((x-z)^2 + 3(x+z)z)}}{3(x+z)} \quad n =: \alpha n \quad (33)$$

Обсудим, какие значения может принимать параметр α . Поскольку $x > 0$, $z > 0$, можно написать $x = Mz$, где $M > 0$. Тогда:

$$\alpha = \frac{(x-z) + \sqrt{((x-z)^2 + 3(x+z)z)}}{3(x+z)} = \frac{(1-M) + \sqrt{(4M^2 + M + 1)}}{3(1+M)} \quad (34)$$

Как видим, величина x сократилась.

При $M=0$ $\alpha=2/3$, при $M \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow 1/3$. Построим зависимость $\alpha(M)$ на рисунке 18.

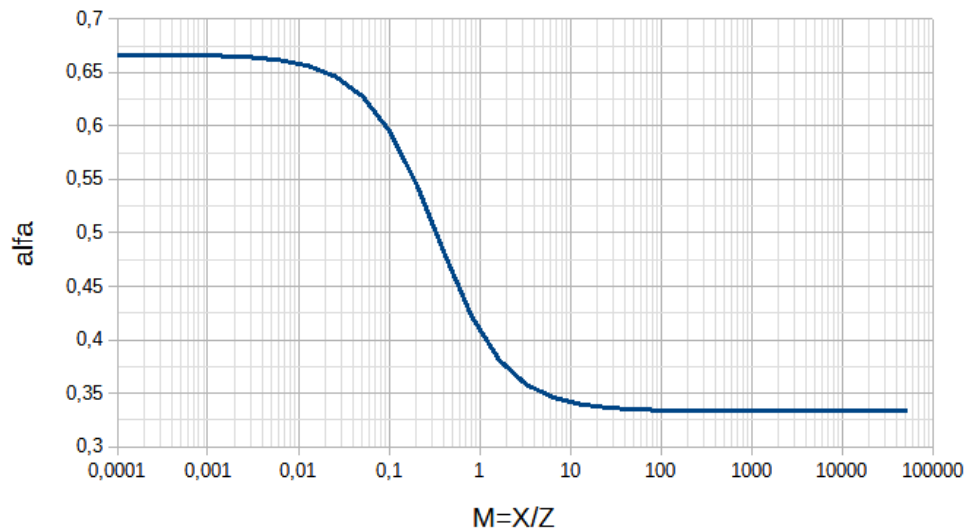


Рисунок 18. Зависимость $\alpha(M)$.

Зависимость $\alpha(M)$ монотонно убывает, в чём легко убедиться, взяв производную от α по M . Таким образом, $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$, а, значит, поскольку $1+m > 1$, то $n > 1.5$.

Значение суммы скоростей роста эмиттансов в точке (33) составляет:

$$\left(\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_{l \min}}\right) \sim \left(\frac{a^5}{bc}\right)^{1/6} = k^{1/2} \frac{(1+m)^{1/2}}{n} \left(\frac{(1+\alpha)^5}{xz \alpha ((x+z)\alpha + z)}\right)^{1/6} \quad (35)$$

С другой стороны, при $m=n=0$ данное значение составляет

$$\left(\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_{l 0}}\right) \sim k^{1/2} \left(\frac{1}{xz(x+z)}\right)^{1/6} \quad (36)$$

Построим зависимость отношения суммы скоростей роста эмиттансов в минимуме (33) к сумме скоростей роста при $m=n=0$ от M .

При $m=0$ она имеет вид, показанный на рисунке 19:

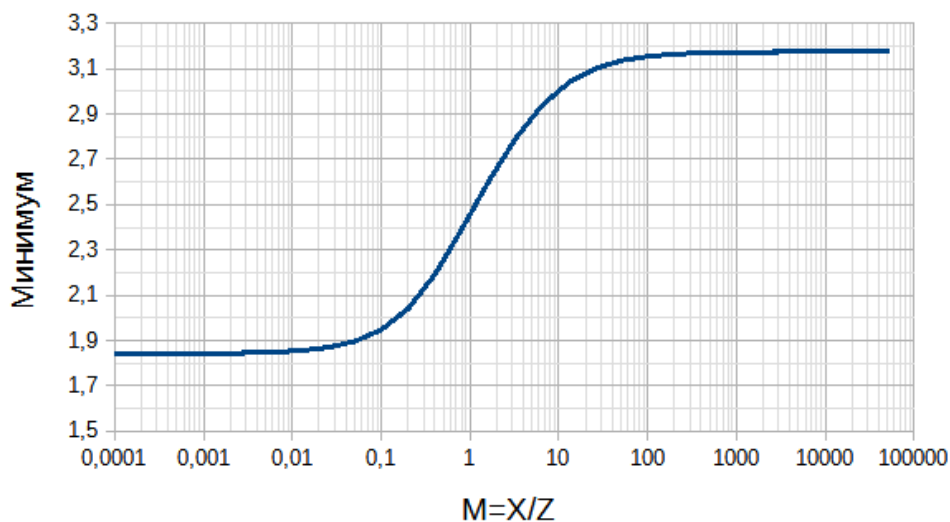


Рисунок 19. Значение в точке минимума (33) при $m=0$, нормированное на значение в точке $m=n=0$.

Видим, что значение в данном минимуме в 2-3 раза больше, чем значение при $m \rightarrow 0, n \rightarrow 0$. При $m > 0$ это отношение становится ещё больше. Таким образом, нет смысла пытаться попасть в данный минимум. Взяв теперь производную по n при фиксированном m , получим, что минимум отсутствует, а, значит, наименьшее значение находится при $n=0$.

Таким образом, как и в приближении *Vane*, мы получили, что сумма скоростей роста эмиттансов с ростом H_x увеличивается.

Итак, в обоих приближениях с ростом H_x скорость роста продольного эмиттанса уменьшается, горизонтального — увеличивается, их сумма — увеличивается.

При $m, n \ll 1$, используя разложение Тейлора, можно получить следующее приближение:

$$\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_l} \sim k^{1/2} \frac{1}{xz(x+z)} \left(1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{6} \left(\frac{5x+4z}{x+z}\right)n\right) \sim k^{1/2} \frac{1}{xz(x+z)} \left(1 + \frac{1}{2}m + \left(\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}\right)n\right) \quad (37)$$

Как видим, вклад члена с φ^2 примерно в полтора раза больше, чем вклад члена с η^2 . Таким образом, наша задача — одновременно минимизировать члены с φ^2 и η^2 , то есть величину H_x . Далее мы обсудим, каким образом это можно сделать.

Глава 3. СТРУКТУРА КОЛЬЦА, ОПТИМИЗИРОВАННАЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВНУТРИПУЧКОВОГО РАССЕЯНИЯ

3.1 Минимизация H_x

Итак, перед нами стоит задача уменьшить сумму $H_x = [\frac{\gamma^2 * \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\beta_x}{\epsilon_x} * \gamma^2 * \phi^2]$, стоящую перед интегралом Бьёркена-Мтингвы и входящую в приближительную формулу для данного интеграла. Очевидно, в данной сумме мы можем менять лишь дисперсию η , бета-функцию β_x и функцию ϕ .

Обсудим, каким образом можно изменить данные параметры, чтобы уменьшить сумму.

1) Дисперсия. В кольце обязательно должны быть участки (область взаимодействия с лазерным излучением, высокочастотная структура), на которых дисперсия должна равняться нулю. Как следует из второго уравнения (6), дисперсия не может равняться нулю вдоль всего кольца (т. к. кольцо должно включать поворотные магниты, в которых $1/\rho$ отлично от нуля), а, значит, будут и участки с ненулевой дисперсией. О них мы поговорим ниже.

2) Бета-функция. В первом члене суммы она стоит в знаменателе, и в выражении $\phi = \eta' - \frac{\beta_x' \eta}{2 \beta_x}$ тоже. Таким образом, нам следует сделать максимальным значение данной функции в областях ненулевой дисперсии. К такому же выводу пришел и автор [1].

3) Функция ϕ . Как указано в работе [10], данная функция не может быть равной нулю во всех точках кольца. Однако, если в какой-либо точке $\eta \approx 0 \approx \text{const}$ (бездисперсные участки), то в этой точке $\phi \rightarrow 0$.

Итак, на бездисперсных участках кольца значение H_x стремится к нулю. При этом скорость роста горизонтального эмиттанса на них тождественно равна нулю, а скорость роста продольного — медленно убывает с ростом β_x и β_z как степень $1/2$ и в нашем приближении (16) и в приближении Ване (28), в чём легко

убедиться, посмотрев на формулы (16) и (28) при условии $\beta_x \approx \beta_z$. Для минимизации $1/T_1$ на них нужно увеличивать значение бета-функций, о чём уже было сказано выше.

Таким образом, нас интересуют в основном участки с ненулевой дисперсией. На них необходимо сделать максимально возможной β_x и максимально уменьшить φ и η . Легко видеть, что, условие $\varphi=0$ эквивалентно условию

$$\eta = \text{const} \cdot \sqrt{\beta_x} \quad (39)$$

К сожалению, точное равенство (39) невозможно, например, по той причине, что, как следует из первого уравнения (8), бета-функция не может обратиться в нуль, что она должна сделать на границе дисперсного участка для выполнения (39). Однако, стремиться к точному равенству можно. Первое приближение к точному равенству — это требование, чтобы знаки η' и $\frac{\beta_x' \eta}{2\beta_x} \equiv -\frac{\alpha_x \eta}{\beta_x}$ были одинаковы, и данные члены хотя бы отчасти компенсировали друг друга в φ . Физически это означает синхронное изменение η и β_x .

Таким образом, мы приходим к трём важным правилам (будем называть их в дальнейшем правилами минимального ВПР), которые позволяют добиться малого значения H_x :

ПРАВИЛА МИНИМАЛЬНОГО ВПР

- 1) Минимальная дисперсия в областях ненулевой дисперсии.
- 2) Максимальная бета-функция в данных областях.
- 3) Синхронное изменение дисперсии и бета-функции в данных областях.

Отметим, что выполнение этих правил эквивалентно минимальному значению const в (39).

3.2 Анализ кольца [17] с точки зрения правил минимального ВПР

Проанализируем выполнение правил минимального ВПР в кольце [17] и посмотрим, связаны ли они со скоростью роста эмиттансов в каждой точке данного кольца.

Напомним, что кольцо состоит из 4-х ахроматических поворотов, значения дисперсионной функции в которых полностью идентичны. Однако, посмотрев на рисунок 4, можно понять, что в 1-м и 4-м поворотах дисперсионная функция и бета-функция изменяются синхронно (максимум одной соответствует максимуму другой), а во 2-м и 3-м — антисинхронно (максимум дисперсии соответствует минимуму бета-функции). Согласно правилам 2 и 3 нам следует ожидать, что величина H_x на участках 2 и 3 будет больше, чем на участках 1 и 4, а, значит, скорость роста горизонтального эмиттанса и сумма скоростей роста эмиттансов — также выше.

Именно это мы можем наблюдать на рисунке 7.

Кроме того, заметим, что максимумы $1/T_x$ приблизительно соответствуют минимумам $1/T_i$, о чём было написано выше.

3.3 Накопительное кольцо, удовлетворяющее правилам минимального ВПР

Перейдём теперь к обсуждению того, как создать накопительное кольцо, удовлетворяющее правилам минимального ВПР.

Начнём с правила 1. Поскольку кольцо состоит из нескольких ахроматических участков, в каждом из них дисперсия имеет вид некоего «пика», т. е. она вначале нарастает от нуля до максимума, а потом спадает вновь до нуля.

Для минимизации первого слагаемого H_x нам нужно, чтобы интеграл от $\frac{\eta^2}{\beta_x}$ на каждом дисперсном участке, умноженный на число дисперсных участков, был минимален. Традиционно, дисперсный участок состоит из поворотного магнита (нескольких магнитов) и квадрупольных и секступольных магнитов

вокруг него. Значение дисперсии зависит от радиуса кривизны орбиты в поворотном магните, который, в свою очередь, связан с углом поворота θ , который зависит от числа поворотных магнитов в кольце, равного $360/\theta$. Таким образом, можно прийти к выводу, что интеграл от первого члена суммы по кольцу зависит от числа поворотных магнитов, а, значит, и элементарных ячеек в кольце. Это приводит нас к т. н. идее Multibend Achromat (МВА) [19] – введению множества ячеек, в каждой из которых пучок поворачивается на относительно малый угол.

Для минимизации второго слагаемого необходимо синхронное изменение бета-функции и дисперсии, т. е. бета функция должна иметь вид некоего пика, максимум которого совпадает с максимумом пика дисперсии. Разумно составить кольцо из нескольких одинаковых ячеек. Из соображений симметрии и периодичности, бета-функции, дисперсии, и скорости роста эмиттансов в кольце будут одинаковы во всех ячейках. Поскольку, как мы поняли, кольцо, возможно, будет состоять из достаточно большого числа поворотных магнитов, а длина кольца ограничена, нужно выбирать тип ячейки, состоящий из наименьшего числа элементов. Остановим свой выбор на самой простой ячейке. Для создания ахроматического поворота нужны как минимум два поворотных магнита и квадруполь между ними. Для того, чтобы в данной ячейке существовали периодические бета-функции, поставим дуплет из фокусирующего и дефокусирующего квадрупольей до и после ячейки.

То есть наша ячейка имеет вид (ячейка полностью симметрична относительно середины центрального квадруполья QF0), показанный на рисунке 20:

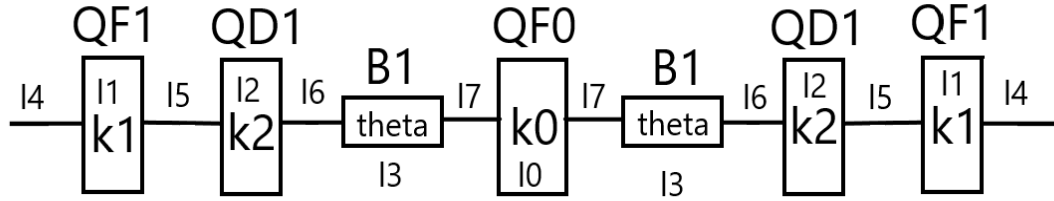


Рисунок 20. Элементарная ячейка, используемая в дальнейшей работе.

Обозначим силу центрального квадруполья за k_0 , боковых квадрупольей — за k_1 , k_2 , угол поворота дипольного магнита и радиус кривизны орбиты в нём — за θ и ρ соответственно, длины магнитов и расстояния между ними — за l_0, \dots, l_7 .

Теперь нам необходимо подобрать параметры данной ячейки для уменьшения H_x . Поскольку мы хотим создать ахроматичную ячейку, дисперсия (и её производная, разумеется) должна обращаться в нуль вне промежутка между поворотными магнитами $B1$. Из данного требования и уравнения (9а) несложно получить важное соотношение:

$$\sqrt{k_0} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{k_0} l_0}{2}\right) [\rho \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + l_7] = 1 \quad (40)$$

Пусть длины магнитов и углы поворота будут фиксированы. Таким образом, остаётся целых 6 свободных параметров (4 расстояния между магнитами + 3 силы квадрупольей — 1 уравнение связи), которые можно менять в неких пределах (сумма всех длин не должна превышать максимально разрешённый периметр кольца, делённый на число ячеек; сила квадрупольей не может быть слишком велика по физическим соображениям).

В данной работе эта задача была решена следующим образом. Была написана компьютерная программа (в среде программирования *Scilab*), в которой данные свободные параметры берутся случайным образом из возможного (заданного) диапазона значений; для данных значений рассчитываются матрицы всех элементов ячейки и находится периодическое решение (бета-функции и

дисперсия). По найденным бета-функциям и дисперсии находится значение H_x в каждом элементе ячейки. Среди множества случайных значений свободных параметров находится тот их набор, для которого H_x минимально. Поскольку даже для миллиона наборов случайных параметров, на каждый из них приходится лишь около $(10^6)^{1/6} = 10$ точек, сетка получается довольно редкой. Большая точность вычислений ограничена слишком большим временем работы программы. Чтобы хоть немного улучшить точность, уменьшим число свободных параметров до пяти, зафиксировав силу центрального квадруполя.

Покажем результат работы нашей программы для миллиона вычислений, при угле поворота $\theta=15^\circ$, силы центрального квадруполя $k=50$, силы фокусирующих квадруполей — от нуля до 50, дефокусирующих — от -50 до нуля, длин поворотных магнитов 0.2 м, длины центрального квадруполя — 0.15 м, длин прочих квадруполей — 0.1 м, ограничением по периметру кольца — 20 м.

Из уравнения (40) получим, что $l_7 = 0.1406$ м.

Типичный пример ячейки, определённой программой из 100 000 начальных значений наборов случайных параметров и проверенной с помощью MAD-X, бета-функции и дисперсии в нём приведены на рисунках 21а и 21б:

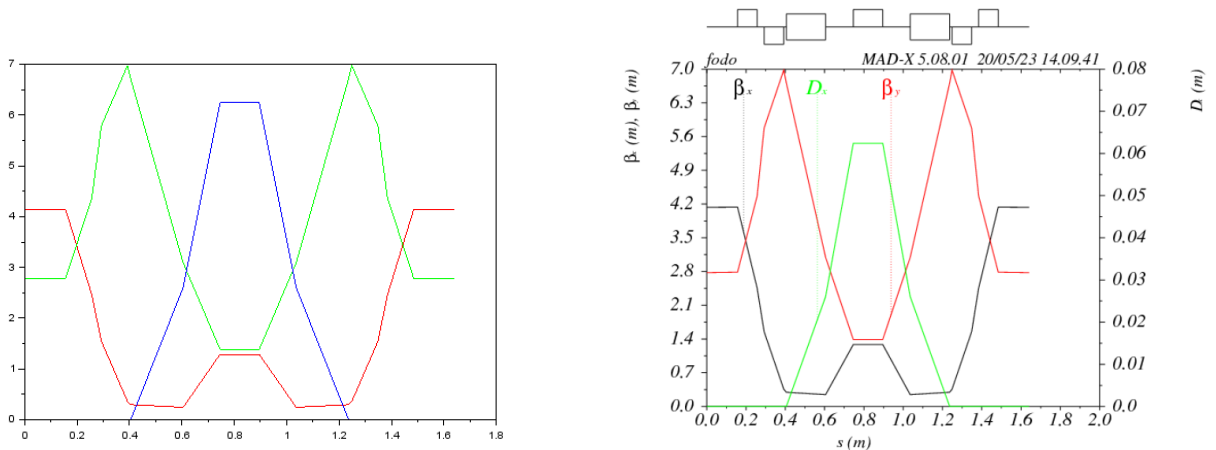


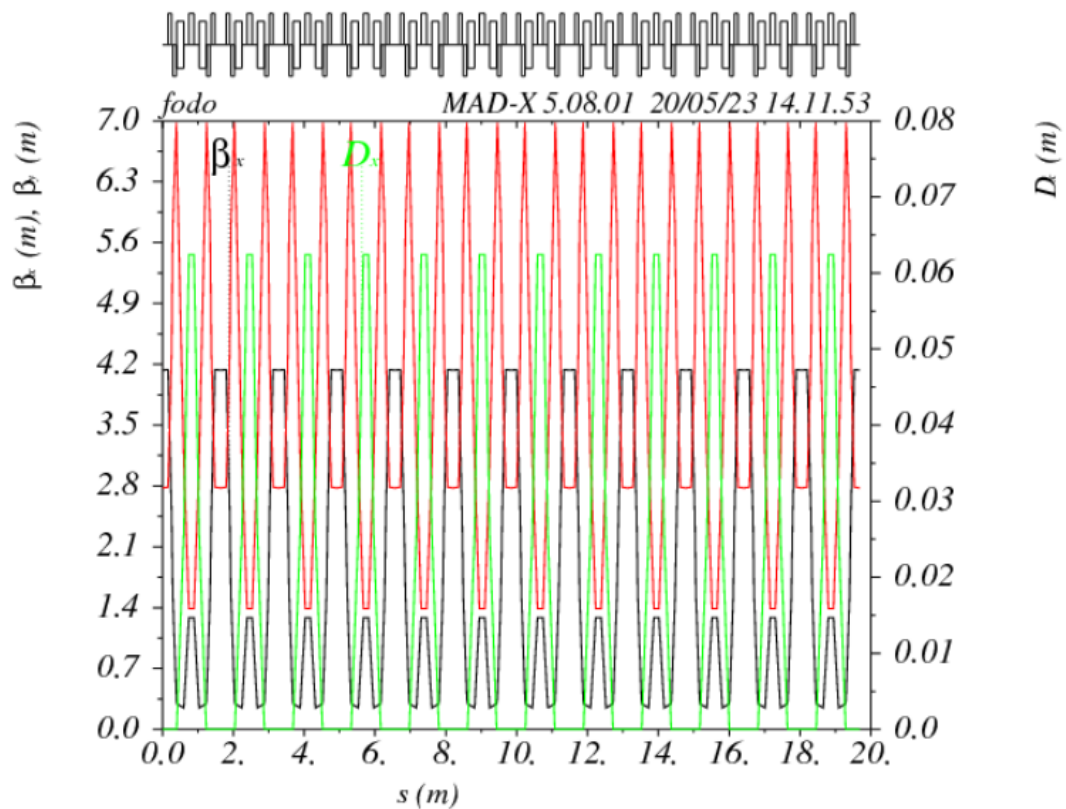
Рисунок 21а. Пример бета-функций (красная и зелёная линии) и дисперсии (синяя линия, увеличено в 100 раз)

Рисунок 21б. Результаты расчётов данной ячейки в MAD-X. В верхней части рисунка показано расположение

ячейки, найденной с помощью магнитных элементов ячейки.
написанной программой.

Отметим, что для существования периодического решения след матрицы передачи должен быть меньше 2 по модулю. Было замечено, что результаты программы, для которых бета-функция в областях ненулевой дисперсии принимает наибольшие значения (то есть, решения с минимальным H_x), соответствуют значению следа как раз примерно равному 2 по модулю. Однако, как оказалось, данные значения крайне неустойчивы и находятся вблизи резонансов бетатронных частот. Поэтому было искусственно наложено ограничение на след матрицы, согласно которому он не может превышать по модулю 1.8. Для кольца на рисунке выше след матрицы передачи равен 1.75 для горизонтальной плоскости и 1.68 для вертикальной, т. е. мы видим явное стремление к максимальному по модулю значению следа.

Соберем теперь кольцо из 12 данных ячеек. Длина его составит 19.69 м, что практически равно максимально возможным 20 м.



Бета-функции и дисперсия в нём показаны на рисунке 22:

Рисунок 22. Порядок магнитных элементов, бета-функции и дисперсия в кольце длины около 19.69 м, собранном из 12 ячеек.

Средняя скорость роста продольного эмиттанса для данного кольца (при параметрах пучка в точности равных параметрам пучка кольца [17]) равна 26.15 1/с, горизонтального — 4.08 1/с, вертикального - $(-6.86 \cdot 10^{-2})$ 1/с.

Вспомним, что кольцо [17] имеет длину 15,116 м, состоит из 4 ячеек, а скорости роста эмиттансов составляют: продольного — 22.53 1/с, горизонтального — 97.35 1/с, вертикального - $(-8.63 \cdot 10^{-2})$ 1/с.

Проведём аналогичную работу для кольца с разрешённой максимальной длиной — 40 м, т. е. в 2 раза больше. Результат работы программы приведён на рисунке 23:

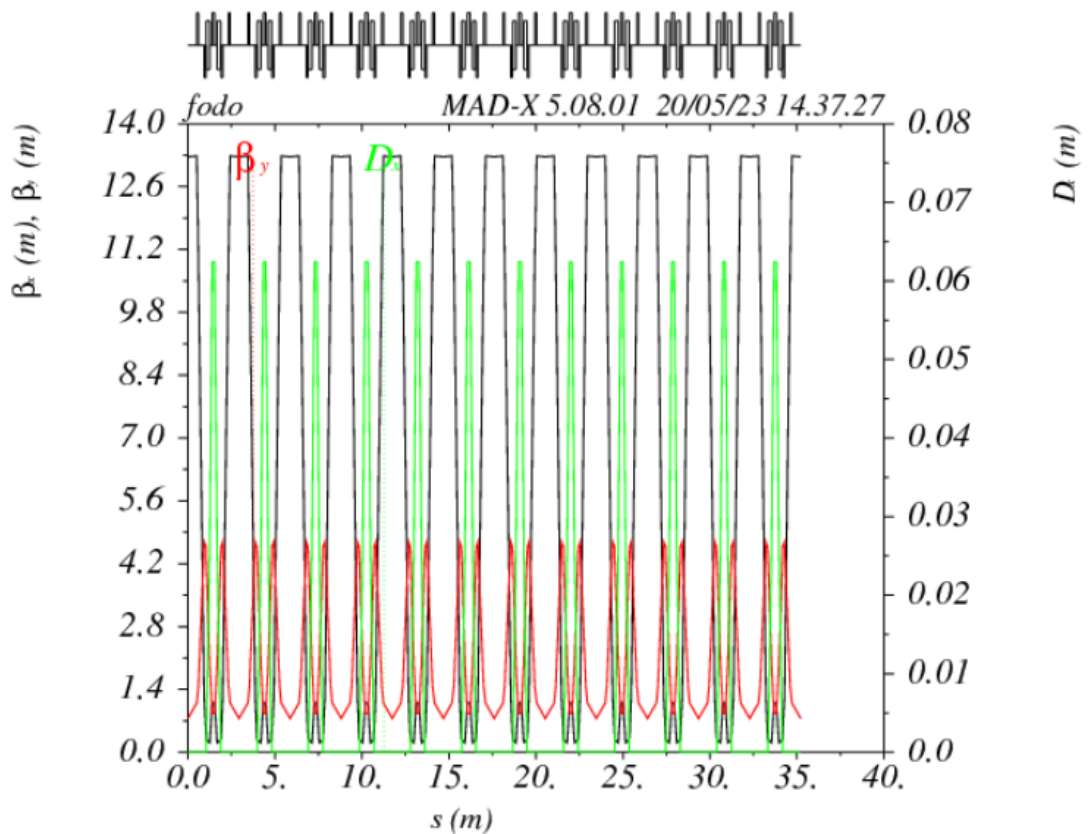


Рисунок 23. Порядок магнитных элементов, бета-функции и дисперсия в кольце длины около 35.215 м, собранном из 12 ячеек.

Длина полученного кольца — 35.215 м, т. е. кольцо имеет стремление к увеличению длины до максимально возможной, следы матрицы передачи— 1.76 для горизонтальной плоскости и 1.201 для вертикальной, т. е. опять практически максимально возможные. Скорости роста эмиттансов: продольного — 21.85 1/с, горизонтального - 2.704 1/с, вертикального - $(-9.58 \cdot 10^{-2})$ 1/с. Итак, с ростом периметра кольца заметно уменьшение скорости роста горизонтального эмиттанса.

Рассмотрим, наконец, кольцо максимально разрешённой длины 40 м из 24 ячеек с поворотными магнитами по 7.5° каждый (т. е. при той же длине число поворотов увеличилось вдвое).

Результат работы программы приведён на рисунке 24:

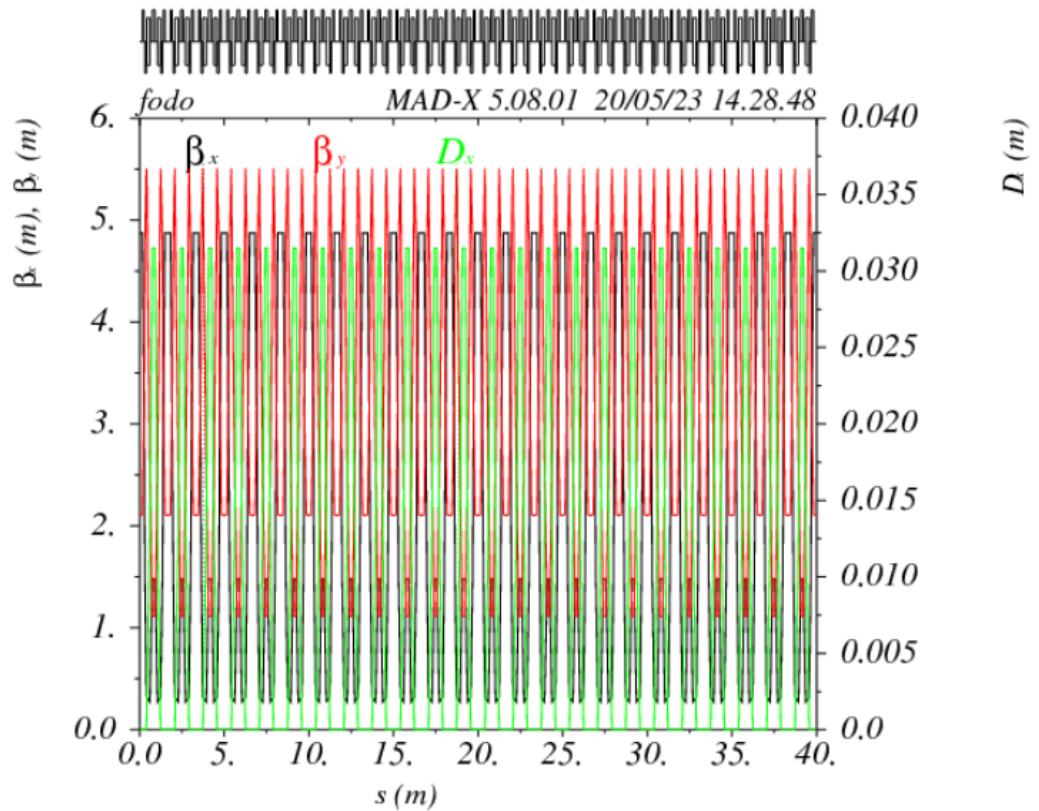


Рисунок 24. Порядок магнитных элементов, бета-функции и дисперсия в кольце длины около 38.45 м, собранном из 24 ячеек.

Длина полученного кольца — 39.977 м, т. е. результат программы вновь имеет стремление к увеличению длины кольца до максимально возможной; следы матрицы передачи – 1.786 для горизонтальной плоскости и 1.48 для вертикальной, т. е. снова практически максимально возможные. Скорости роста эмиттансов: продольного — 27.71 1/с, горизонтального - 1.03 1/с, вертикального - $(-9.5 \cdot 10^{-2})$ 1/с. Итак, с ростом числа поворотов также заметно уменьшение скорости роста горизонтального эмиттанса.

Результат работы программы при заданных значениях максимально возможных сил квадруполей, числа магнитов и максимально возможной длины кольца сохраняется достаточно стабильным: например, повторный запуск программы с последним набором параметров даёт кольцо длины 32.6 м со скоростями роста

эмиттансов: продольного — 30.1 1/с, горизонтального — 1.125 1/с, вертикального - $(-8.9 \cdot 10^{-2})$ 1/с. Таким образом, 100 000 начальных значений вполне достаточно для получения более-менее стабильного результата работы программы.

Соберем все полученные результаты в одну таблицу 1 (одним цветом выделены результаты работы программы при одинаковых ограничениях на параметры кольца; показано для демонстрации стабильности работы программы):

Номер кольца	Максимально разрешённая длина кольца, м	Длина кольца, определённая программой, м	Число поворотных магнитов	Скорости роста эмиттансов, 1/с		
				Продольного	Горизонтального	Вертикального
1 (из [17])	-	15.116	8	22.53	97.35	$-8.63 \cdot 10^{-2}$
2	20	7.91	8	22.16	24.26	$-5.54 \cdot 10^{-2}$
3	20	18.95	24	24.4	4.15	$-6.95 \cdot 10^{-2}$
3а	20	19.69	24	26.15	4.08	$-6.86 \cdot 10^{-2}$
4	40	38.25	24	13.38	1.89	$-11.8 \cdot 10^{-2}$
4а	40	35.215	24	21.85	2.704	$-9.58 \cdot 10^{-2}$
5	40	38.45	48	24.5	0.816	$-8.05 \cdot 10^{-2}$
5а	40	32.6	48	30.1	1.125	$-8.9 \cdot 10^{-2}$
5б	40	39.977	48	27.71	1.03	$-9.5 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1. Зависимости скоростей роста эмиттансов от длины накопительного кольца и числа поворотных магнитов в нём для колец, найденных с помощью компьютерной программы.

По данной таблице легко сделать вывод о том, что скорость роста горизонтального эмиттанса убывает приблизительно линейно с ростом периметра кольца и увеличением числа поворотных магнитов, скорость роста продольного и вертикального эмиттансов примерно сохраняется постоянной.

Кроме того, смотря на строки 1 и 2, можно прийти к выводу, что кольцо [17] не оптимизировано в плане скорости роста горизонтального эмиттанса. Можно прийти к выводу, что оптимизированное по нашим правилам кольцо из 8 поворотных магнитов длиной около 15 м должно иметь скорость роста горизонтального эмиттанса около 10-15 1/с, т. е. **почти на порядок (в 6-10 раз) меньше**, чем у кольца [17]. Вспомним, что аналогичный вывод мы сделали раньше, когда сравнивали скорость роста горизонтального эмиттанса в ячейках 1 и 4 по сравнению с ячейками 2 и 3.

Попробуем понять тот факт, что скорость роста горизонтального эмиттанса линейно спадает с увеличением числа ячеек.

Горизонтальный эмиттанс растёт лишь в областях с ненулевой дисперсией, в нашем случае — между поворотными магнитами. Данные участки состоят из 3-х частей: поворотного магнита B_1 , прямолинейного участка l_7 и квадрупольного магнита QF_0 . Поскольку в нашей работе угол $\theta \ll 1$, то можно разложить выражения 9а — 9б по Тейлору и получить, что в поворотном магните $\eta \sim s^2$, в прямолинейном участке $\eta \sim s$, а в квадруполе $\eta \sim As + Bs^2$, а $\beta_x \sim Cs + Ds^2$ всюду (A , B , C и D — некие параметры). Таким образом, приблизительно $\beta_x = C \eta^\alpha$, где $\alpha = 0.5 \dots 2$.

На примере реальных колец типа [17], можно показать, что практически всегда $\alpha \sim 1$, то есть $\beta_x \sim C \eta$. Из этого следует, что величина

$$H_x = \left[\frac{y^2 * \eta^2}{\epsilon_x \beta_x} + \frac{\beta_x}{\epsilon_x} * y^2 * \phi^2 \right] \sim \eta \quad (41)$$

В таком случае, скорость роста эмиттанса вдоль кольца пропорциональна (далее N — число ячеек)

$$\frac{L}{T} = \sum_{\text{по кольцу}} \frac{l_i}{T_i} = N \sum_{\text{по ячейке}} \frac{l_i}{T_i} \sim N \sum_{\text{по ячейке}} l_i \eta_i \sim \eta_{\max} \quad (42)$$

Поскольку $\eta_{\max} \sim \theta \sim 1/N$ (доказательство данного факта и более подробная выкладка в (42) приведены в ПРИЛОЖЕНИИ 2), скорость роста эмиттанса зависит от числа ячеек в кольце обратно пропорционально.

Тот факт, что скорость роста горизонтального эмиттанса линейно спадает с ростом длины кольца, связан, вероятно, с тем, что для кольца большой длины возможно расположить дуплет квадрупольей наиболее оптимальным способом (так как в кольце большей длины больше «свободного места», доступного для размещения квадрупольей). На это же указывает и то, что наименьшее значение H_x соответствует наибольшей разрешённой длине кольца, то есть квадрупольи стремятся «разойтись подальше» друг от друга.

Глава 4. НАКОПИТЕЛЬНОЕ КОЛЬЦО ДЛЯ КОМПТОНОВСКОГО ИСТОЧНИКА

4.1 Точка взаимодействия

Все кольца, найденные программой ранее, не пригодны для использования в комптоновских источниках по той причине, что в них нет точки взаимодействия электронного пучка с лазерным излучением. Как указано в [1], для достижения максимальной эффективности взаимодействия пучка с импульсом лазера в точке взаимодействия дисперсионные функции в ней должны быть равны нулю, а бета-функции минимальны. Из (2) следует, что для достижения размеров пучка в точке взаимодействия около 100 мкм при значениях эмиттанса порядка 0.1 мм·мрад необходимо, чтобы бета-функции в точке взаимодействия составляли около 10 см. Так, в кольце [1] горизонтальная и вертикальная бета-функции в точке взаимодействия составляют 5.8 см и 4.9 см, в [17] — 4.6 см и 8.2 см, в [18] — от 3 см до 10 см и от 4 см до 10 см соответственно в различных вариантах кольца.

Таким образом, в полученные ранее структуры необходимо добавить квадруполи для сжатия бета-функций в точке взаимодействия. Поиск параметров данных квадруполей осуществлялся следующим образом. В программу для поиска оптимальной ячейки были добавлены 2 квадрупольных дуплета (попытка заменить дуплеты триплетами не привела к каким-либо серьёзным переменам), стоящие посередине кольца. Силы квадруполей в данных дуплетах являлись случайным числом от нуля до 70 по модулю, а их длины были приняты равными 10 см. С противоположной стороны кольца был оставлен просто прямолинейный участок такой же длины, как два квадрупольных дуплета. Таким образом, к 5 свободным параметрам из ячейки добавились ещё 5: две силы квадруполей (одна фокусирующая, другая дефокусирующая) и три расстояния между ними. Из-за такого количества свободных параметров среди результатов программы лишь небольшая доля

наборов параметров относилась к устойчивому движению, где след матрицы передачи по модулю меньше двух (точнее 1.8, см. прошлую главу). Так, из 100 000 начальных наборов параметров, лишь в 50 (0.05%) возможно устойчивое движение (К слову, при расчёте самой ячейки из 100 000 начальных наборов устойчивыми были около 1000 или 1%). Таким образом, добавление каждого свободного параметра уменьшает количество устойчивых вариантов кольца при их фиксированном начальном количестве (назовём далее эту величину полезным выходом программы) примерно вдвое. Замена дуплета квадруполью триплетом требует введения ещё двух дополнительных свободных параметров (силы квадруполья и расстояния до дуплета), что понизит полезный выход программы ещё в 4 раза (действительно, при расчётах из 100 000 начальных наборов остаётся лишь около 15 или 0.015% устойчивых).

4.2 Три кольца-примера

Лучшим результатом, полученным в результате работы данной программы, можно считать кольцо длины 23.32 м, состоящее из 12 ячеек, включающих в себя 15° поворотные магниты (будем называть его Кольцо 1).

Схематичный чертёж Кольца 1 в сравнении с кольцом [17] приведён на рисунке 25:

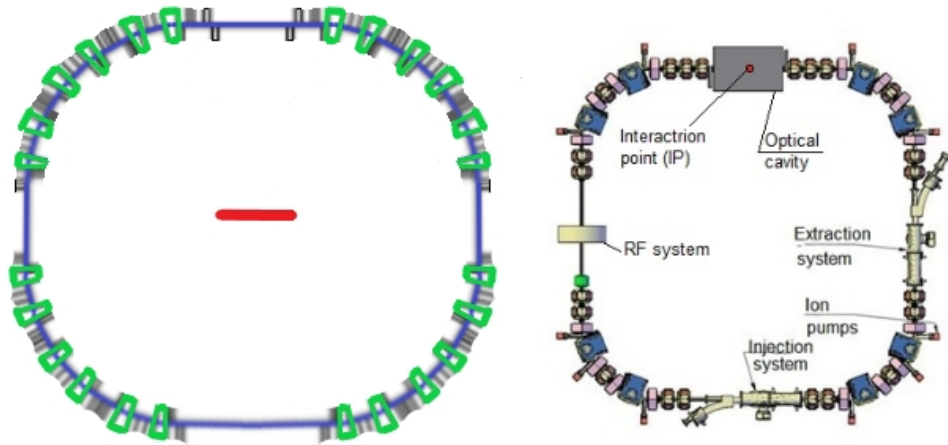


Рисунок 25. Сравнение кольца 1 и кольца [17]. Зелёными секторами выделены поворотные магниты, чёрными палочками — квадруполи. Красная черта соответствует 1 м.

Бета-функции и дисперсия в Кольце 1 приведены на рисунке 26:

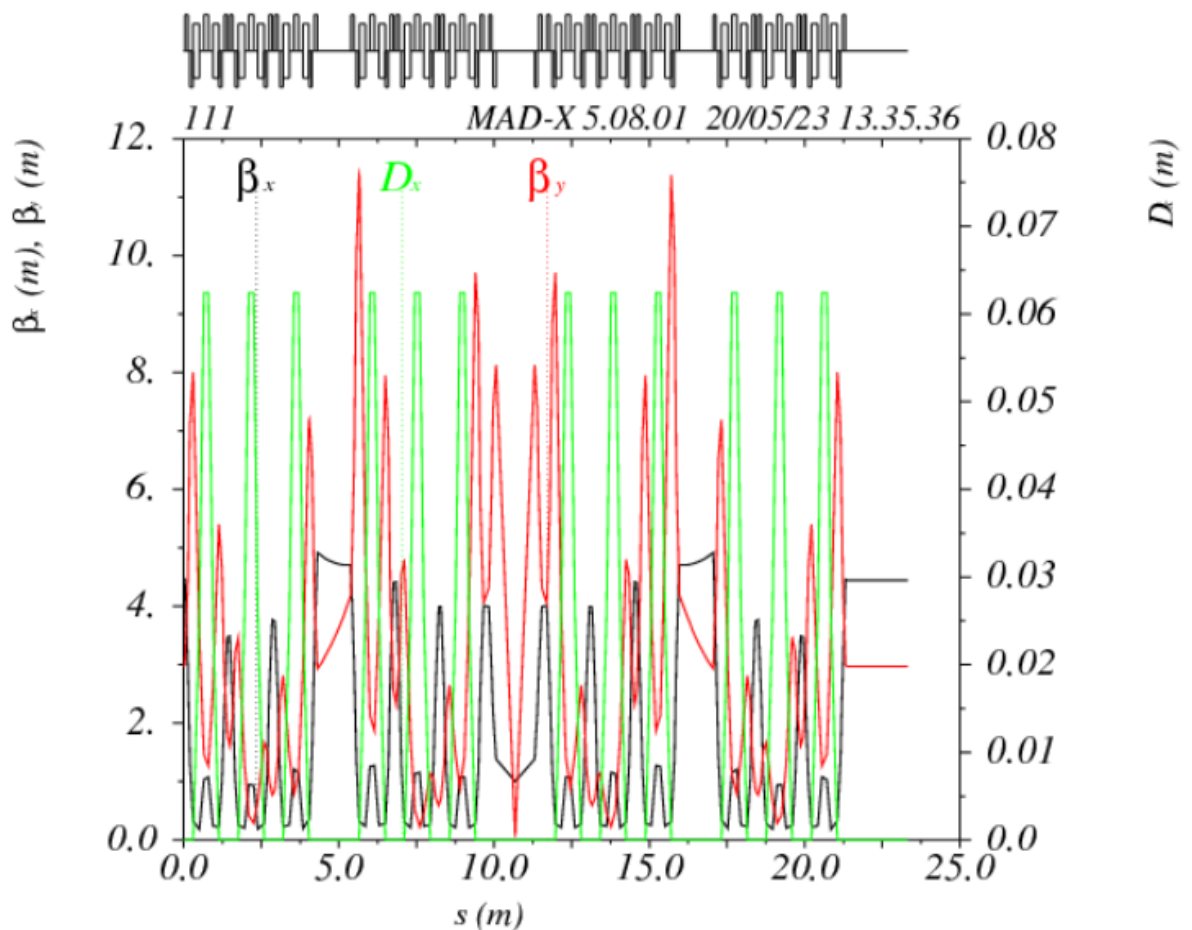


Рисунок 26. Бета-функции, дисперсии и порядок следования элементов в Кольце 1.

Отметим сразу один существенный недостаток Кольца 1. В точке взаимодействия $\beta_z=4.72$ см, что аналогично кольцам [1, 17-18], а вот $\beta_x=100.03$ см, то есть ровно метр! При эмиттансе пучка 0.16 мм·мрад, размеры пучка в точке взаимодействия составляют около 87 мкм в вертикальной плоскости и целых 400 мкм в горизонтальной. Это довольно много, что, безусловно, отразится на выходе комптоновского излучения.

Приведём на рисунках 27а-27б как пример ещё 2 кольца, выданные данной программой: Кольцо 2 и Кольцо 3. Они хуже Кольца 1 и иллюстрируют

типичные результаты программы. Их схемы в сравнении с кольцом [17] не приводим, так как они почти в 2 раза длинее.

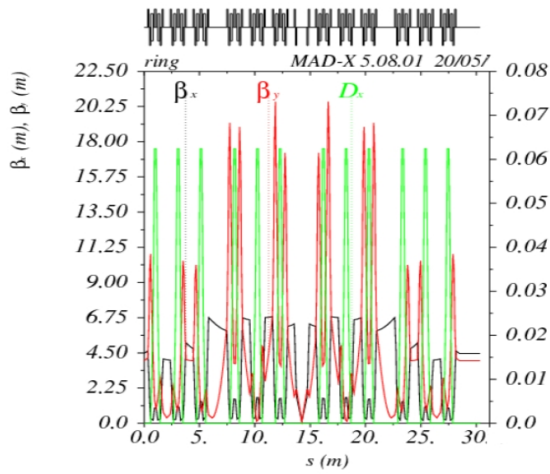


Рисунок. 27а. Бета-функции, дисперсии и порядок следования элементов в Кольце 2.

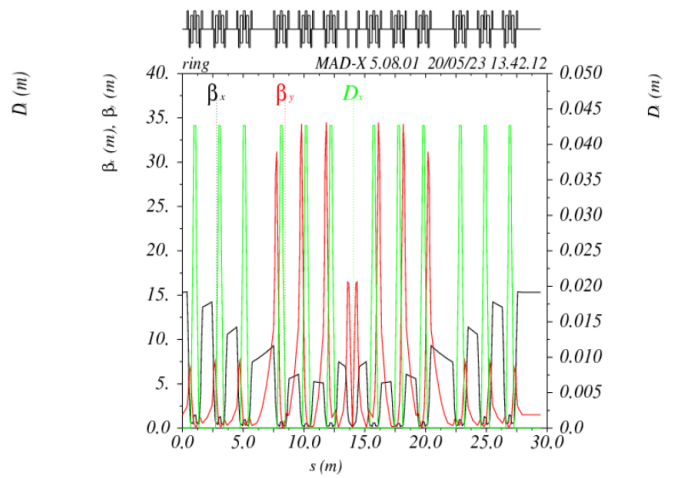


Рисунок. 27б. Бета-функции, дисперсии и порядок следования элементов в Кольце 3.

Отметим, что Кольцо 1 и Кольцо 2 оказались весьма близки к резонансам бетатронных частот, поэтому мы слегка изменили силу центральной дефокусирующей квадрупольи, чтобы отодвинуть рабочую точку от резонанса. Все дальнейшие параметры приведены для модифицированного варианта.

Сравним полученные кольца с кольцом [17]; параметры пучка взяты одинаковыми: энергия — 50 МэВ, оба эмиттанса — 0.16 мм·мрад, относительный энергетический разброс — 0.003, длина сгустка — 1.2 мм, заряд сгустка — 1 нКл.

Итак, сравним в таблице 2 созданное кольцо с кольцом [17]. Заодно приведём параметры колец [1] и [18], хотя параметры пучка в них несколько иные. Цвета ячеек означают сравнение колец 1-3 с кольцом [17]. Зелёный соответствует параметру данного кольца, значительно лучшему, чем у кольца [17], жёлтый — сравнимым параметрам, красный — параметру, значительно худшему.

Параметр	Кольцо 1	Кольцо 2	Кольцо 3	Кольцо [17]	Кольцо [1]	Кольца [18]
Периметр, м	23.32	30.35	29.45	15.1153	15.546	15.1-18.9
Энергия, МэВ	50	50	50	50	45	35-50
Максимальная β_x , м	4.915	6.826	15.366	18,9	~4	5.3-16.6
Максимальная β_z , м	11.377	20.555	34.482	27.5	~4	6.5-21.6
β_x в точке взаимодействия, см	100.03	14.25	14.19	5.82	4.6	3-10
β_z в точке взаимодействия, см	4.72	10.64	0.51	4.88	8.2	4-10
Максимальная дисперсия, м	0.0624	0.0624	0.0426	0.311	~1.7	0.38-1.96
Дисперсия в точке взаимодействия, м	$1.25 \cdot 10^{-8}$	$-8.3 \cdot 10^{-9}$	$-1.4 \cdot 10^{-8}$	0 (заявлено) , $-7.9 \cdot 10^{-8}$ (реально)	Не указана	Не указана
Коэффициент уплотнения орбит	0.002343	0.001801	0.001855	0.01396	-0.0065	0.013-0.1

Бетатронная частота Q_x	11.11179	11.73708	6.77727	3.73	4.35	3.22, 3.44, 2.59, 3.78
Бетатронная частота Q_z	2.70318	3.60396	11.69477	2.83	4.19	1.71, 3.11, 1.69, 2.16
Натуральная хроматичность ξ_x при $dp/p=0$	-33.27	-44.49	-65.95	-20.77 (заявлено) -20.91 (реально)	-11.907	-9.8 — -12.9
Натуральная хроматичность ξ_z при $dp/p=0$	-29.94	-47.26	-88.18	-37.186 (заявлено) -36.25 (реально)	-11.023	-4.6 — -11.2

Таблица 2. Параметры колец 1-3 в сравнении с кольцами [1, 17-18]. Цвета ячеек означают сравнение колец 1-3 с кольцом [17]. Зелёный соответствует параметру данного кольца, значительно лучшему, чем у кольца [17], жёлтый — сравнимым параметрам, красный — параметру, значительно худшему.

Скорректированные хроматичности нет смысла сравнивать, т. к. на данном этапе работы в наших кольцах отсутствуют секступольные магниты и никакой коррекции нет.

4.3 Положение рабочей точки на карте резонансов

Покажем положение рабочей точки на карте резонансов (вплоть до кубических) для всех приведённых выше колец и её смещение при отклонении импульса от опорного на $\pm 0.1\%$.

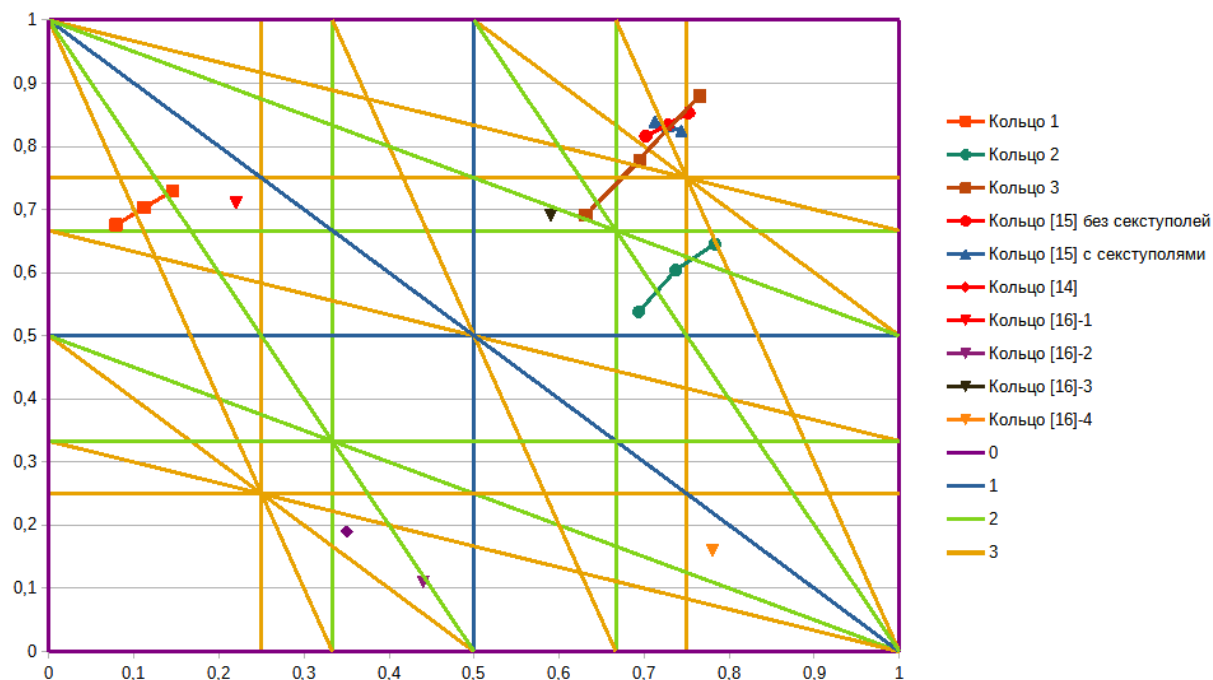


Рисунок 28. Положения рабочих точек колец 1-3 и колец [1, 17-18] на карте резонансов вплоть до кубических резонансов и отклонения рабочей точки при отклонении импульса от опорного на $\pm 0.1\%$ для тех колец, где данный расчёт возможен.

Как видим, Кольцо 1 сравнимо по отклонению рабочей точки с кольцом [17] без секступолей, а Кольца 2 и 3 значительно хуже, в чём легко убедиться, посмотрев на значения их натуральных хроматичностей. Тот факт, что Кольцо 3 имеет особенно большую естественную хроматичность, связано, вероятно, с тем, что в нём используются более сильные квадрупольные магниты: если в кольцах 1 и 2 сила центрального квадрупольного магнита равна 50, то в Кольце 3 — 70. В любом случае, все кольца нуждаются в дальнейшем добавлении секступольных магнитов и коррекции хроматичностей.

Добавление секступолей может быть связано с рядом трудностей, поскольку созданное кольцо и так достаточно сильно заполнено дипольными и

квадрупольными магнитами. В любом случае, данная задача требует отдельного исследования.

4.4 Коэффициент расширения орбит

Заметим, что в кольцах 1-3 коэффициент расширения орбит на порядок меньше, чем в кольцах [1, 17-18]. Причина этого ясна из определения данного коэффициента [1]:

$$\alpha_c = \frac{1}{L} \int \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (43)$$

Здесь L – длина кольца.

Поскольку в нашем кольце дисперсии малы (что хорошо заметно по Таблице 2), а радиусы кривизны велики (так как малы углы поворота), то и коэффициент расширения орбит так же мал.

Более того, так как в $1/\rho$ отлично от нуля лишь в поворотных магнитах, а в них $\eta(s) = \rho(1 - \cos(s/\rho))$, то интеграл (43) можно взять (N — число поворотных магнитов в кольце, $N = 360/\theta$ [град], l_3 – длина поворотного магнита):

$$\alpha_c = \frac{1}{L} \int \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds = N \frac{1}{L} \int_0^{l_3} \frac{1 - \cos(\frac{s}{\rho})}{\rho} ds = \frac{N}{L} (l_3 - \rho \sin(\theta)) = \left(\frac{360}{\theta * 180} \right) \frac{1}{L} (l_3 - \rho \sin(\theta)) \quad (44)$$

Поскольку θ мал, разложим $\sin(\theta)$ в ряд Тейлора и учтём, что $l_3 = \rho\theta$.

В итоге,

$$\alpha_c = \frac{\pi^2}{540} \frac{l_3}{L} \theta (degree) \quad (45)$$

Поскольку l_3 фиксировано, коэффициент расширения орбит линейно убывает с ростом θ .

У нас во всех кольцах

$$\alpha_c = \frac{\pi^2}{540} \frac{l_3}{L} \theta(\text{degree}) = \frac{0.054776}{L} \quad (46)$$

Подставляя в (46) соответствующие длины колец L , можно получить значения коэффициентов расширения орбит, почти точно совпадающие с приведёнными в таблице.

4.5 Динамическая апертура

Обсудим величину динамической апертуры для данных колец при импульсе, соответствующем равновесному.

Под динамической апертурой кольцевой машины принято понимать максимальные амплитуды устойчивых бетатронных колебаний, которые могут существовать в присутствии нелинейных полей [1].

Динамическая апертура определялась методом (трэкинг частиц), описанным в [1] для 1000 частиц, начальный разброс которых составлял 8 мм по горизонтальной и по вертикальной координате.

Результаты трэкинга показаны на рисунках 29а — 29г. Красным цветом показаны начальные координаты частиц, которые не теряются спустя 1000 оборотов, жёлтым — спустя 100 оборотов, зелёным — спустя 10 оборотов, синим — теряющиеся за первые 10 оборотов.



Рисунок 29а. Динамическая апертура кольца 1.

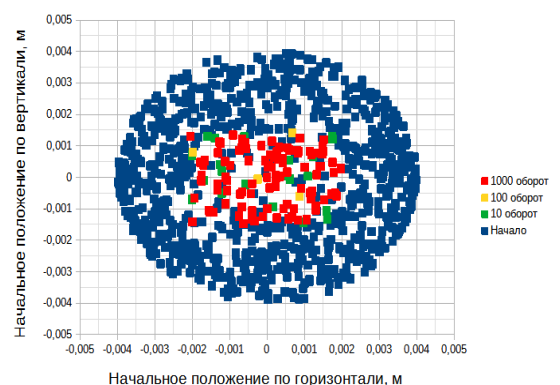


Рисунок 29б. Динамическая апертура кольца 2.

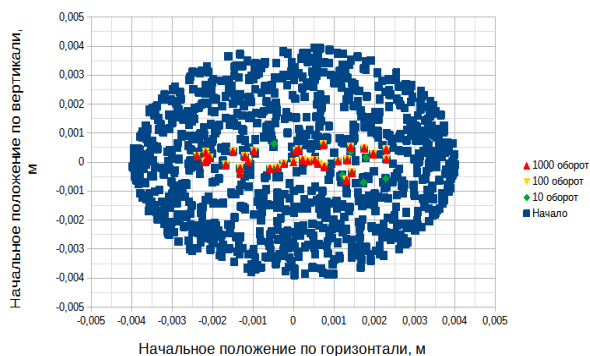


Рисунок 29в. Динамическая апертура кольца 3.

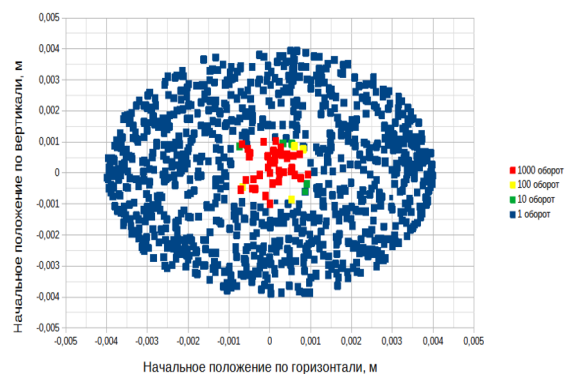


Рисунок 29г. Динамическая апертура кольца [17].

Мы видим, что динамическая апертура Кольца 1 ощутимо больше, чем у кольца [17], у Кольца 2 — сравнима с ним, а у Кольца 3 — заметно меньше.

Трекинг Кольца 1 показывает, что из 10 частиц с начальным разбросом по координатам от -0.4 мм до 0.4 мм все они делают 100 000 оборотов, то есть их движение в течении данного времени стабильно.

Таким образом, Кольцо 1 практически по всем параметрам выигрывает у кольца [17], за исключением горизонтальной бета-функции в точке взаимодействия и естественных хроматичностей. К тому же оно длинее в 1.5 раза.

4.6 Скорости роста эмиттансов

Посмотрим теперь на скорости роста эмиттансов в данных кольцах.

Скорости роста эмиттансов, усреднённые программой MAD-X по всем элементам кольца, при значении вертикального и горизонтального эмиттансов, равном $1.6 \cdot 10^{-7}$ мм·мрад, длине сгустка 1.2 мм и относительном энергетическом разбросе 0.003, приведены в таблице 3:

Скорость роста эмиттанса, 1/с	Кольцо 1	Кольцо 2	Кольцо 3	Кольцо [17]
1/T ₁ — продольная	29.28	23.67	24.33	22.54
1/T _x – горизонтальная	4.32	2.67	3.22	97.35
1/T _z – вертикальная	8.56·10 ⁻²	-6.87·10 ⁻²	-5.15·10 ⁻²	-8.63·10 ⁻²
Сумма	33.69	26.27	27,5	119.8

Таблица 3. Сравнение скоростей роста эмиттансов колец 1-3 с кольцом [17]. Цвета ячеек означают сравнение колец 1-3 с кольцом [17]. Зелёный соответствует параметру данного кольца, значительно лучшему, чем у кольца [17], жёлтый — сравнимым параметрам, красный — параметру, значительно худшему.

На рисунках 30а — 30г приведены сравнения скоростей роста эмиттансов каждого типа в каждом элементе кольца [17] с кольцами 1-3. Поскольку скорость роста горизонтального эмиттанса в кольце [17] на порядок выше, чем у остальных колец, приведено также сравнение колец 1-3 друг с другом без кольца [17].

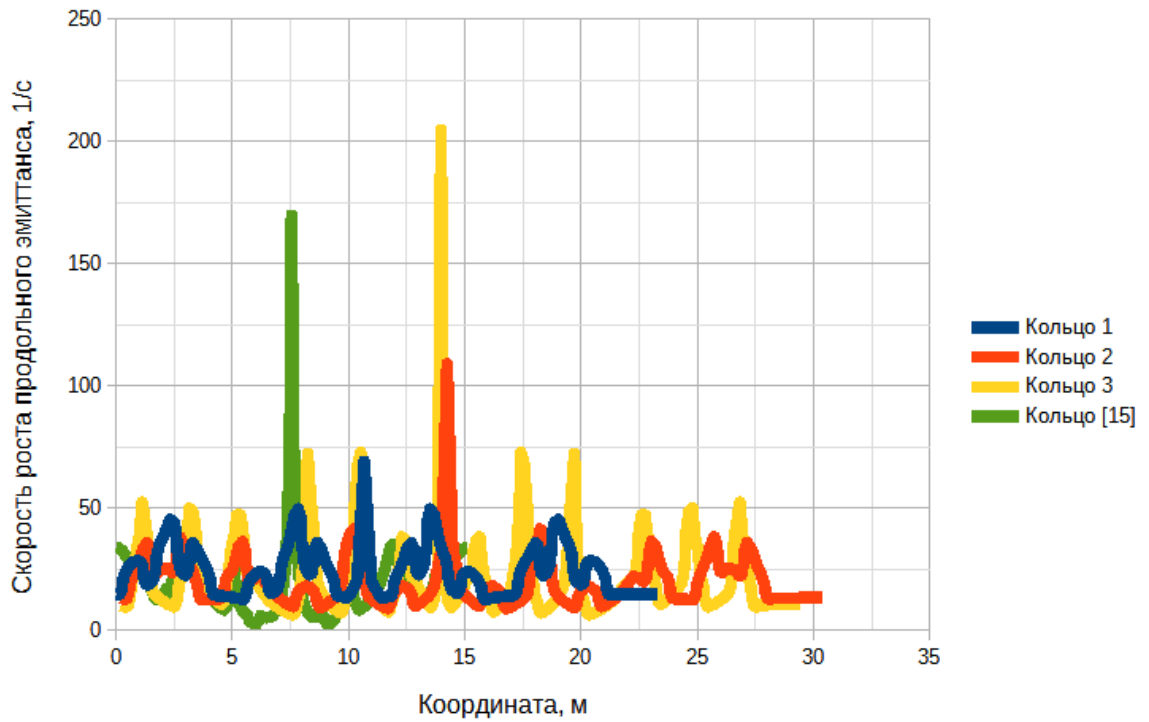


Рисунок 30а. Сравнение скоростей роста продольного эмиттанса в кольцах 1-3 с кольцом [17].

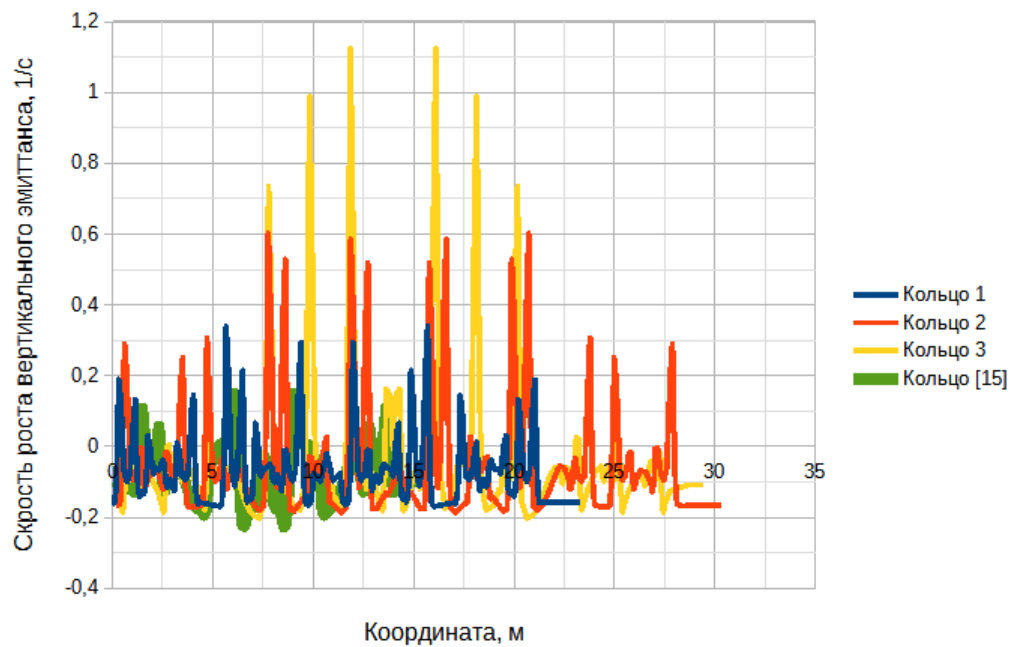


Рисунок 30б. Сравнение скоростей роста вертикального эмиттанса в кольцах 1-

3 с кольцом [17].

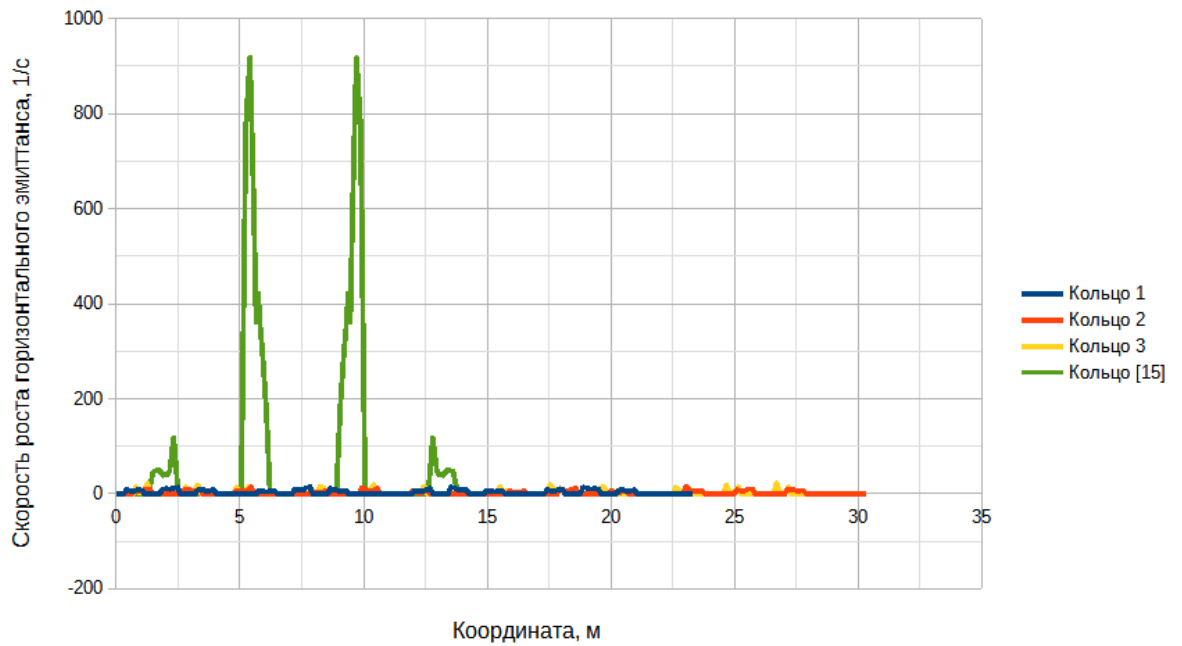


Рисунок 30в. Сравнение скоростей роста горизонтального эмиттанта в кольцах 1-3 с кольцом [17].

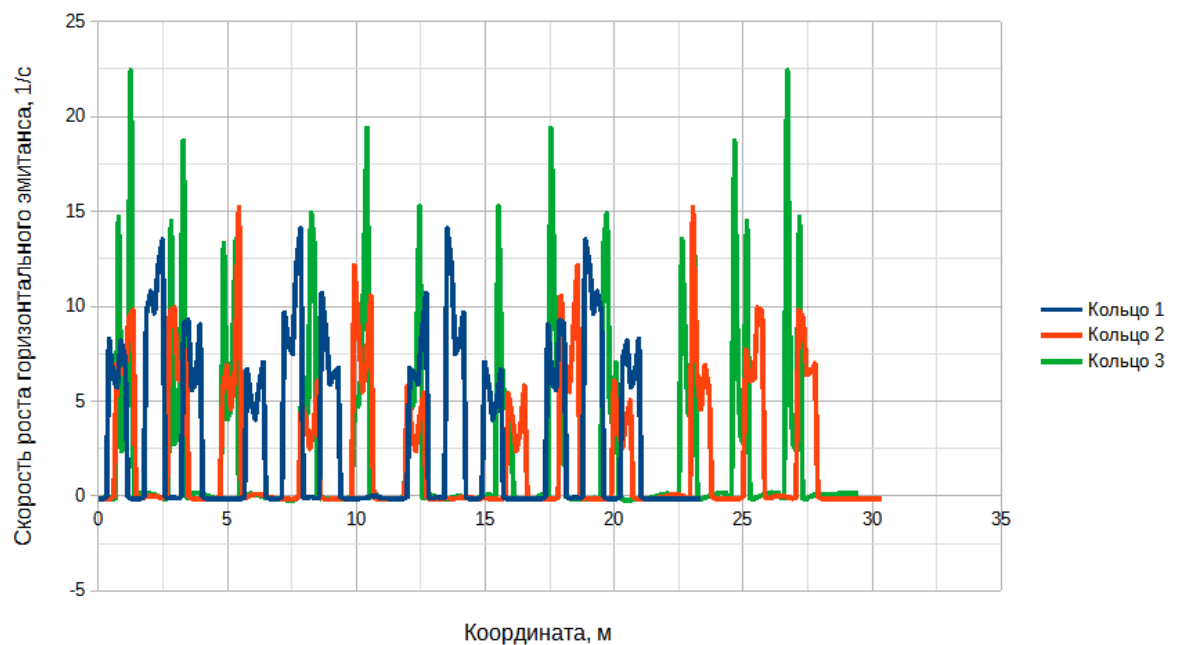


Рисунок 30г. Сравнение скоростей роста горизонтального эмиттанта в кольцах

1-3 .

Рассмотрим отдельно самый успешный вариант — Кольцо 1. Скорости роста эмиттансов всех типов показаны на рисунке 31:

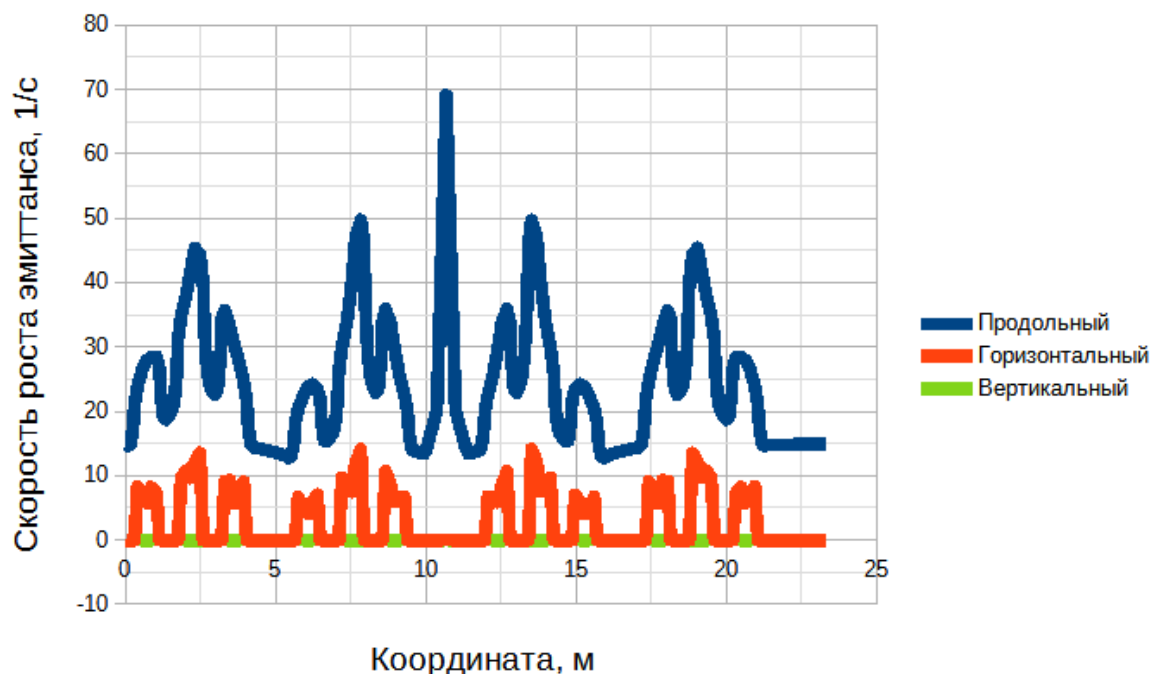


Рисунок 31. Скорости роста эмиттансов в Кольце 1.

Легко понять, что продольные и вертикальные эмиттансы во всех кольцах сравнимы, а горизонтальные удалось уменьшить более, чем на порядок, в чём и виделась цель данной работы. Сумма всех трёх эмиттансов также радикально уменьшилась.

Проведём сравнение полученных колец с кольцами [1] и [18]. Для них усреднённые скорости роста не приведены в соответствующих статьях, однако дана зависимость величины самого эмиттанса от времени циркуляции пучка в кольце.

Поэтому рассчитаем данную зависимость и для нашего Кольца 1.

По определению скорости роста эмиттанса связаны с эмиттансами через дифференциальные уравнения [1]:

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{2}{T_x} \epsilon_x \quad (48a)$$

$$\frac{d\epsilon_z}{dt} = \frac{2}{T_z} \epsilon_z \quad (48б)$$

$$\frac{d\sigma_\delta}{dt} = \frac{1}{T_l} \sigma_\delta \quad (48в)$$

Поскольку, как следует из формул ба — бб, скорость роста эмиттансов зависит от самих эмиттансов, причём вид этой зависимости не вполне очевиден (ясно лишь, что чем меньше значение эмиттанса, тем выше скорость его роста), мы не будем решать данные уравнения в общем виде, а поступим следующим образом.

Зная из результатов работы программы среднюю скорость роста эмиттанса при определённом значении самого эмиттанса, определим его значение на следующем обороте, считая, что эмиттанс за один оборот изменился довольно слабо, и его скорость роста — ещё меньше. Таким образом,

$$\frac{\epsilon_{x,z}(i+1) - \epsilon_{x,z}(i)}{\epsilon_{x,z}(i)} = \frac{2}{T_{x,z}(i)} \Delta t \quad (49a)$$

$$\frac{\sigma_\delta(i+1) - \sigma_\delta(i)}{\sigma_\delta(i)} = \frac{1}{T_l(i)} \Delta t \quad (49б)$$

откуда

$$\epsilon(i+1) = \epsilon(i) \left(1 + 2 \frac{\Delta t}{T(i)}\right) \approx \epsilon(i) e^{2 \frac{\Delta t}{T(i)}} \quad (50a)$$

$$\sigma_\delta(i+1) = \sigma_\delta(i) \left(1 + \frac{\Delta t}{T(i)}\right) \approx \sigma_\delta(i) e^{\frac{\Delta t}{T(i)}} \quad (50б)$$

Здесь $\Delta t = \frac{L}{\beta c} \approx \frac{L}{c}$, где L — длина орбиты, c — скорость света. Поскольку для колец $L \sim 10^1 - 10^2$ м, то $\Delta t \sim 10^{-7}$ с. Так как самая большая скорость роста

эмиттанса в наших кольцах составляет около 100 1/с, то $\frac{\Delta t}{T(i)} \sim 10^{-5} \ll 1$ и

приближение экспонентой применимо.

К сожалению, расчёт эмиттанса даже на время циркуляции около 1 с требует десятки миллионов вычислений, поэтому вместо вычислений эмиттанса на каждом обороте лучше считать эмиттанс через N оборотов.

Однако, для большого числа N оборотов эмиттанс будет меняться достаточно сильно и приближения (49а)-(49б) перестанут быть применимыми.

Чтобы убедиться в применимости данного подхода и найти границы области его применимости, проверим, насколько близкие результаты получаются при вычислениях через 1, 10, 100, 1000 и 10 000 оборотов в кольце [17] для времени около 2 мс (порядка 40 000 оборотов) при начальном эмиттансе $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0.16$ мм·мрад, $\sigma_\delta = 0.003$ и длине сгустка — 3 мм. Кольцо [17] и горизонтальный эмиттанс выбраны по той причине, что именно для этого случая скорость роста эмиттанса наибольшая из всех встреченных вариантов.

Шаг, число оборотов	Значение горизонтального эмиттанса через ~2 мс, мм·мрад
1	0.184700
10	0.184702
100	0.184726
1000	0.184965
10000	0.185574

Таблица 4. Значение горизонтального эмиттанса через ~2 мс в кольце [17] в зависимости от шага вычислений при начальном эмиттансе $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0.16$ мм·мрад, $\sigma_\delta = 0.003$ и длине сгустка — 3 мм.

Как видим, значения эмиттанса через 2 мс, полученные с разным шагом, отличаются слабо.

Поэтому в дальнейшем для ускорения расчётов, будем считать с шагом не 1, а 1000 оборотов.

Сравним полученные значения для Кольца 1, и колец [1, 17].

В качестве начальных параметров возьмём параметры, близкие к кольцу [1]:

$\epsilon_x = \epsilon_z = 0.125$ мм·мрад, $\sigma_\delta = 0.003$, длина сгустка — 3 мм, энергия — 50 МэВ.

Полученные зависимости приведены на рисунках 32а — 32в:

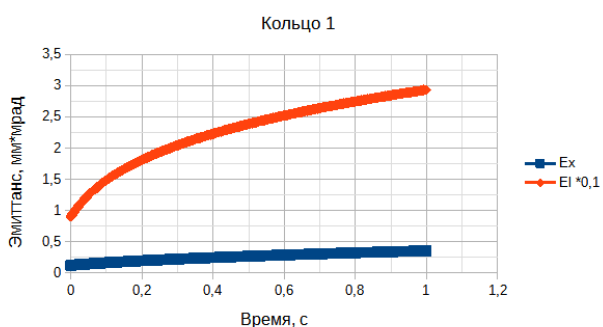


Рисунок 32а. Увеличение горизонтального и продольного эмиттансов с течением времени в Кольце 1, заряд сгустка 640 пКл.

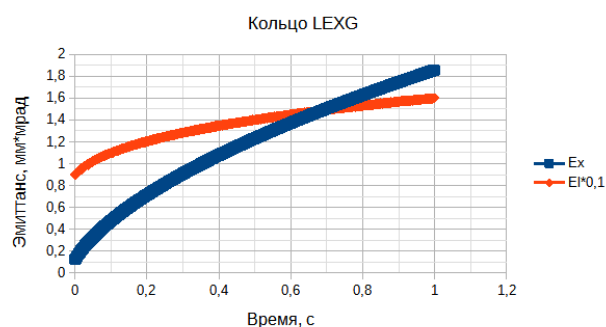


Рисунок 32б. Увеличение горизонтального и продольного эмиттансов с течением времени в Кольце [17], заряд сгустка 320 пКл.

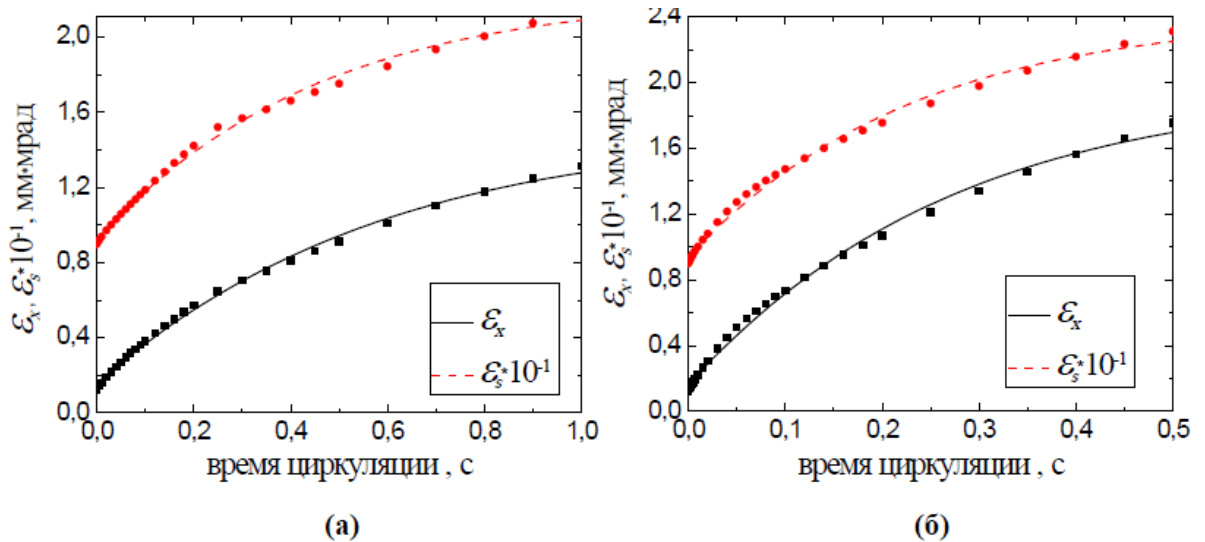


Рис. П.9. Зависимость продольного ε_s и горизонтального поперечного ε_x эмиттансов пучка от времени циркуляции с учётом эффекта внутрипучкового рассеяния:

а) $N = 9.4 \cdot 10^8$ ($I = 3$ мА), $\sigma_{s,0} = 3$ мм, $\sigma_{\delta,0} = 3 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{x,0} = 0.125$ мм·мрад, $E = 45$ МэВ,

б) $N = 3.1 \cdot 10^9$ ($I = 10$ мА), $\sigma_{s,0} = 3$ мм, $\sigma_{\delta,0} = 3 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{x,0} = 0.125$ мм·мрад, $E = 45$ МэВ.

Рисунок 32в. Увеличение горизонтального и продольного эмиттансов с течением времени в Кольце [1]. Заряды сгустков 150 пКл (слева), 500 пКл (справа).

Как видим, Кольцо 1 примерно на порядок лучше по нарастанию горизонтального эмиттанса и немного хуже по нарастанию продольного.

Покажем для большей наглядности на рисунке 33 сравнение горизонтальных эмиттансов за время циркуляции 20 мс в Кольце 1 и кольце [17] при $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0.16$ мм·мрад, $\sigma_\delta = 0.003$, заряде сгустка — 1 нКл, длине сгустка — 1.2 мм, энергии — 50 МэВ

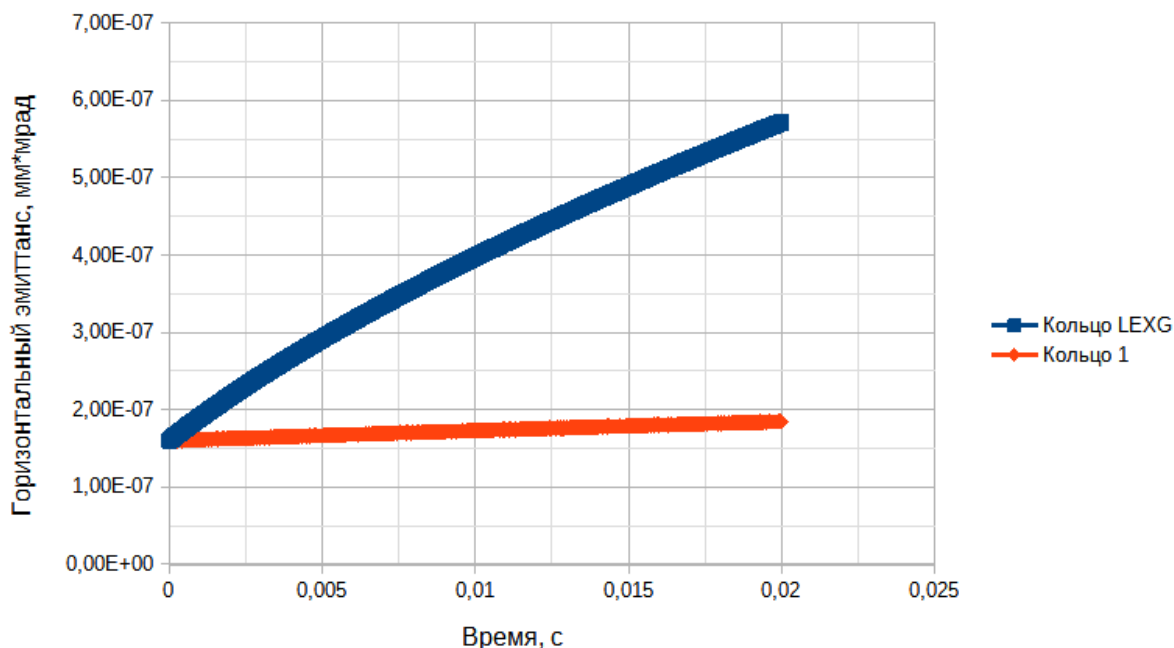


Рисунок 33. Сравнение горизонтальных эмиттансов за время циркуляции 20 мс в Кольце 1 и кольце [17] при $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0.16$ мм·мрад, $\sigma_\delta = 0.003$, заряде сгустка — 1 нКл, длине сгустка — 1.2 мм, энергии — 50 МэВ

Подобные графики увеличения эмиттансов имеются и для колец [18], однако они вызывают большие сомнения в правильности расчётов, поскольку в них эмиттанс нарастает чрезвычайно быстро. Поскольку возможности проверить расчёты у нас нет, данные графики в этой работе не приводятся.

Итак, в предложенном нами накопительном кольце нарастание горизонтального эмиттанса за счёт эффекта ВПР существенно меньше, чем в аналогичных кольцах [1, 17] и, вероятнее всего, [18].

Глава 5. НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕЙ РАБОТЫ

В ходе написания данной работы был выявлен ряд задач, решение которых видится её автору первоочередным для дальнейших исследований в данной области. Приведём их список:

- 1) Строгое математическое обоснование приближения (16). Чёткое уточнение границ данного приближения. Возможно, некоторое усложнение формул (15-16), с целью увеличения точности приближения.
- 2) Возможно, выход из тупикового пути взятия интеграла Бьёркена-Мтингвы через его замену функцией Гаусса (см. Приложение 1). Чёткое математическое обоснование того факта, что подынтегральная функция в данном интеграле близка по виду к распределению Гаусса.
- 3) Оптимизация программы поиска параметров ячейки с целью увеличения полезного выхода программы.
- 4) Добавление в программу отбора колец по их близости к резонансам, хроматичности и т. д.
- 5) Добавление в кольцо секступольных магнитов.
- 6) Обсуждение минимально возможных бета-функций в точке взаимодействия с лазерным излучением и минимально возможных скоростей роста эмиттанса в накопительном кольце, имеющем заданную длину, число ячеек и прочие параметры.
- 7) Максимально возможное улучшение прочих параметров кольца, таких как динамическая апертура.
- 8) Возможно, замена опорной ячейки ячейкой иного типа.
- 9) Рассмотрение всего вышеизложенного в приближениях *Conte-Martini* и *Zimmermann*'а.
- 10) Подобные исследования для колец, лежащих вне границ, определённых в п.1.

ВЫВОДЫ

В данной работе нами:

- 1) Получено приближённое выражение для интеграла Бьёркена-Мтингвы и определены примерные границы применимости данного приближения.
- 2) Строго выведено данное приближение для одного частного случая.
- 3) Определено, как в данном приближении возможно уменьшить скорость роста горизонтального и полного эмиттанса и как при этом изменится скорость роста продольного эмиттанса.
- 4) Получены три правила, которым нужно следовать для минимизации эффекта внутривидового рассеяния.
- 5) Показано, что кольцо [17] не удовлетворяет данным правилам, что приводит к высокой скорости роста горизонтального и полного эмиттанса.
- 6) Предложена определённая ячейка, в которой эффект ВПР достаточно мал. Определено условие нулевой дисперсии вне данной ячейки.
- 7) Получена связь скоростей роста эмиттансов в кольце, собранном из данных ячеек от длины кольца и числа ячеек в нём. Теоретически обоснована зависимость от числа ячеек.
- 8) Написана программа для поиска параметров элементов ячейки для минимизации эффекта ВПР. Приведено несколько полученных результатов.
- 9) Модифицирована данная программа для поиска параметров ячейки в кольце, включающем систему фокусировки пучка в точке взаимодействия с лазерным излучением.
- 10) Показана связь полезного выхода программы с количеством свободных параметров в кольце.
- 11) Сделан вывод о том, что замена дуплета квадруполей в системе фокусировки триплетом не даёт особой пользы, однако уменьшает полезный выход программы в 4 раза.

12) Приведены в качестве примера несколько накопительных колец, параметры которых были выданы данной программой. Проведено сравнение таких параметров данных колец, как минимальные бета-функции, натуральные хроматичности, коэффициенты расширения орбит, положения на карте резонансов, динамические апертуры и другие с кольцами [1, 17-18].

13) Проведено сравнение скорости роста эмиттансов в найденных кольцах с кольцами [1, 17]. Показано, каким образом можно найти эмиттанс в определённый момент времени, зная скорость роста эмиттанса в другой момент. Определено, как связаны результаты подобных расчётов с величиной шага по числу оборотов в них.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы проанализированы скорости роста эмиттансов пучка, вызываемые эффектом внутripучкового рассеяния в приближении Бьёркена-Мтингвы. На основе приближённого значения интеграла Бьёркена-Мтингвы получен ряд правил, следуя которым при создании накопительного кольца, возможно ослабить эффект внутripучкового рассеяния. Следуя данным правилам предложена опорная ячейка. В качестве иллюстрации продемонстрировано несколько накопительных колец, в которых скорость роста эмиттанса за счёт внутripучкового рассеяния существенно ниже, чем в аналогичных кольцах, известных из литературы. Прочие параметры данных колец также относительно не плохие.

В ходе работы выявлен ряд проблем, решения которых являются направлениями дальнейших исследований.

Видится, что идеи, высказанные в ходе данной работы могут оказаться весьма полезными при создании накопительных колец для комптоновских источников в дальнейшем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1) А. Посеряев, Расчёт динамики и оптимизация параметров ускорительных комплексов различного назначения. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2006.
- 2) А. Wolski, Damping ring designs and issues. Lecture 7: Space-charge, IBS and Touschek effects. Houston, Texas, 2007.
- 3) В. Hornberger, J. Kasahara, M. Gifford, M. Feser, Recent developments in compact X-ray and gamma-ray sources based on inverse Compton scattering. OSA High-brightness sources and light-driven interactions congress 2020.
- 4) Zh. Pan, J. Byrd, H. Hao, W. Huang, D. Li, C. Sun, Y.K. Wu, C. Tang, Design and dynamic studies for a compact storage ring to generate gamma-ray light source based on Compton backscattering technique. Physical review. Accelerators and beams 22, 040702 (2019).
- 5) Guang-Peng An et. al. High energy and high brightness laser Compton backscattering gamma-ray source at IHEP. Matter and radiation at extremes, 3 (2018) 219-226.
- 6) F. Sannibale, Transverse dynamics & optical functions. Lecture №3.
- 7) M. Martini, Intrabeam scattering. CAS 2015, Intensity limitations in particle beams. 06.11.2015.
- 8) K. Bane, Intra-beam scattering theory and measurements. LER2011 Workshop, Heraklion, Crete, 2011.
- 9) A. Piwinski, Intra-beam scattering. Proc. 9th Int. Conf. On High Energy Accelerators, 1974, p. 405.
- 10) J.D. Bjorken, S.K. Mmtingwa, Intrabeam scattering, Part. Acc. Vol. 13, pp. 115-143 (1983).
- 11) M. Conte, M. Martini, Intrabeam scattering in the CERN Antiproton Accumulator, Part. Acc. Vol. 17, pp. 1-10 (1985).
- 12) F. Zimmermann, IBS in MAD-X, MAD-X Day, 23.09.2005.

- 13) K. Kubo, K. Oide, PRST-AB 4, 124401 (2001)
- 14) L. Deniau, H. Grote, G. Roy, F. Schmidt, The MAD-X Program (Methodical Fccelerator Design), User's Reference Manual, European laboratory for particle physics, 2021.
- 15) K. Huebner, PAC75, p.1416.
- 16) A. Fedotov et al, HB2006, p. 259.
- 17) Artyukov, I., Savelév, A., Shvedunov, V., Vinogradov, A. Compton X-ray source based on 50-MeV accelerator and its applications. In Proceedings of the LXXII International Conference "NUCLEUS-2022: Fundamental Problems and Applications", Moscow, Russia, 11–16 July 2022; pp. 273–274.
- 18) L. Ovchinnikova, V. Shvedunov, A. Mikhailichenko, E. Bessonov, M. Gorbunkov A comparative study of low energy compact storage rings for a Thomson scattering X-ray source. 7th International Particle Accelerator Conference IPAC'16, 2016.
- 19) Seunghwan Shin. New era of synchrotron radiation: fourth-generation storage ring. AAPPS Bulletin, 2021. <https://doi.org/10.1007/s43673-021-00021-4>.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Интеграл Бьёркена-Мтингвы как интеграл от функции Гаусса.

Посмотрим, как выглядит зависимость подынтегральной функции $f(\lambda)$ в интеграле Бьёркена-Мтингвы (6а-6б) от параметра интегрирования λ . Построим данную зависимость для различных элементов кольца [17].

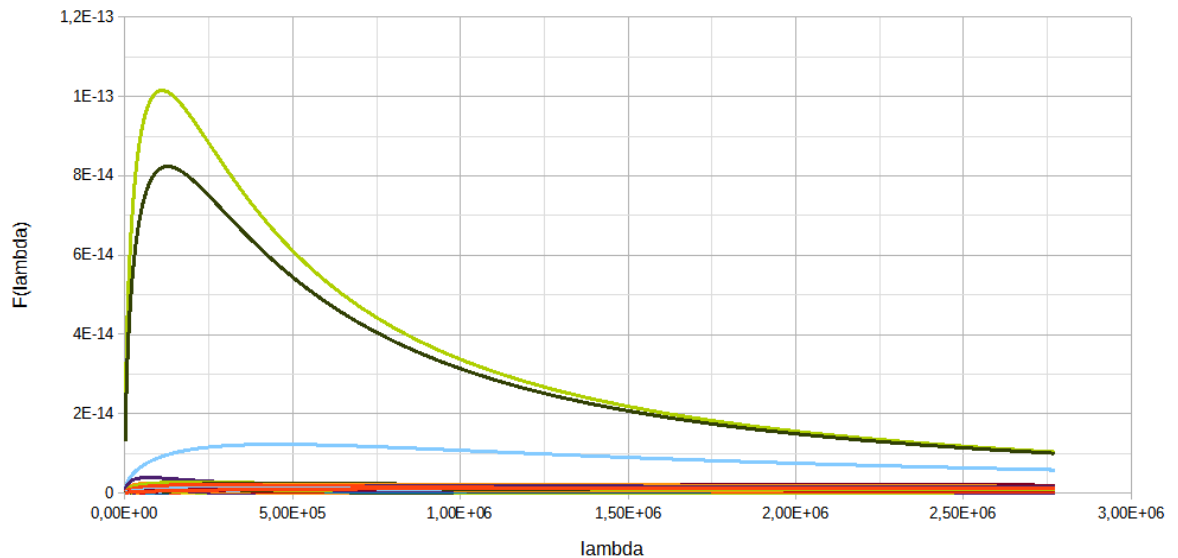


Рисунок 34. Зависимость подынтегральной функции в интеграле Бьёркена-Мтингвы от параметра интегрирования в различных элементах кольца [17].

Поскольку по данному графику затруднительно определить вид функции, а значения параметра λ по горизонтальной оси являются довольно большими числами, будем работать не с параметром λ , а с его логарифмом. Поскольку в этом случае нам требуется считать интеграл на сетке $\ln(\lambda)$, нужно домножить подынтегральную функцию на λ :

$$I(a, b, c) = \int_0^{\infty} f(a, b, c, \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f(a, b, c, \lambda) \cdot \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(a, b, c, \lambda) \cdot \lambda\} d \ln(\lambda) \quad (\text{П1})$$

Построим теперь зависимость функции $g(\lambda) = f(\lambda) \cdot \lambda$ от $\ln(\lambda)$:

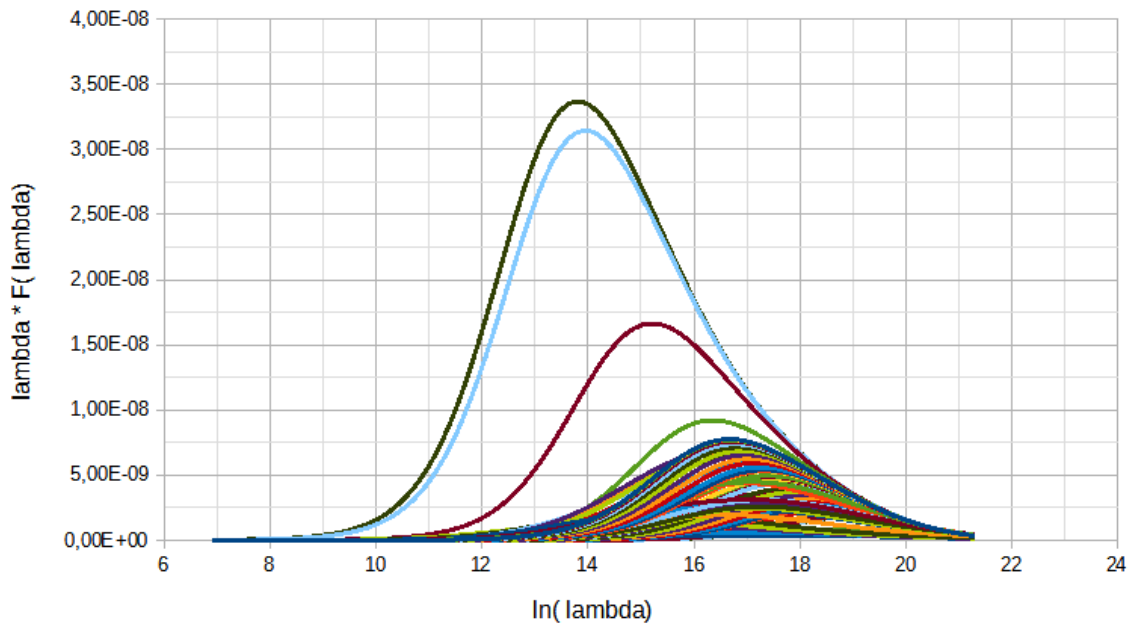


Рисунок 35. Зависимость функции $g(\lambda)=f(\lambda)\cdot\lambda$ от $\ln(\lambda)$ в различных элементах кольца [17].

Численное интегрирование в обоих случаях даёт практически идентичные результаты, линейно связанные с программным расчётом скорости роста продольного эмиттанта I/T_i , т. е. ошибки в данных вычислениях нет.

Заметим теперь, что зависимость $g(\lambda)$ во всех элементах кольца внешне напоминает распределение Гаусса. Более точные вычисления показали, что часть графика после максимума практически неотличима от распределения Гаусса.

На рисунке 36 показано сравнение $g(\lambda)$ с распределением Гаусса (его параметры подобраны вручную) для $a=1.06\cdot 10^9$, $b=1.99\cdot 10^{16}$, $c=9.27\cdot 10^{22}$, что соответствует одному из прямолинейных промежутков кольца [17], взятому случайным образом.

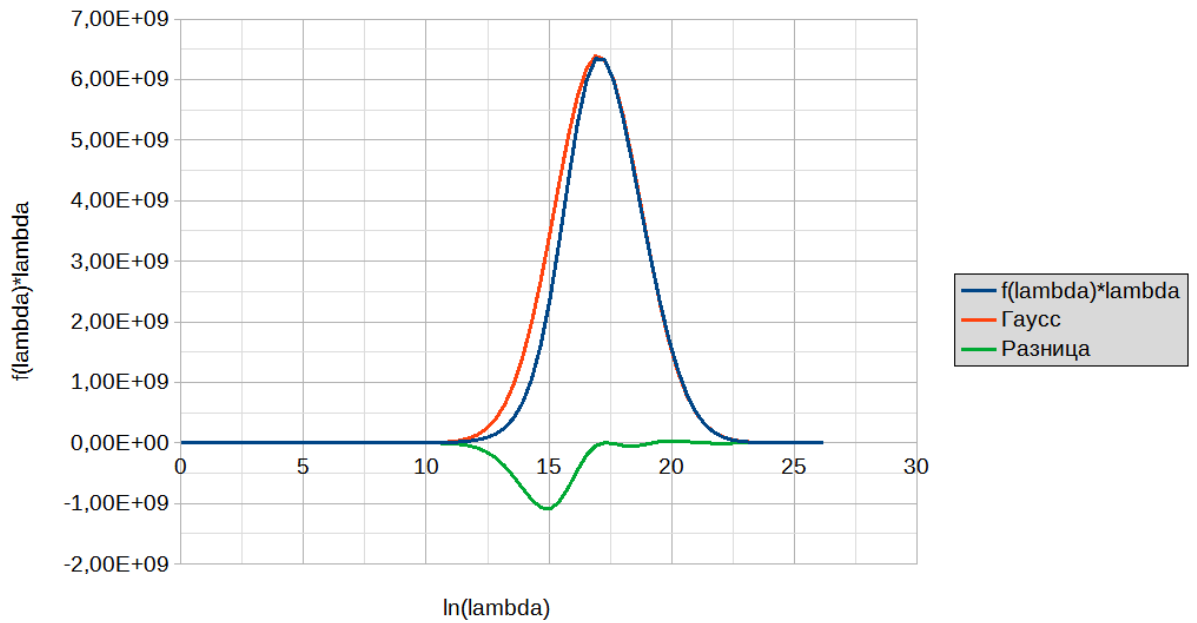


Рисунок 36. Сравнение $g(\lambda)$ с распределением Гаусса (параметры подобраны вручную) для $a=1.06 \cdot 10^9$, $b=1.99 \cdot 10^{16}$, $c=9.27 \cdot 10^{22}$.

Подобным образом выглядят и $g(\lambda)$ для других значений a, b, c .

Строго математически причину подобного сходства на данном этапе работы определить не удалось. Отметим, что сходство с распределением Гаусса наблюдается в области после максимума, где вклады всех членов в знаменатель $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ подынтегральной функции интеграла Бьёркена-Мтингвы (6а-6б) приблизительно одинаковы, что показано на рисунке 37 (параметры a, b, c – те же, что и ранее):

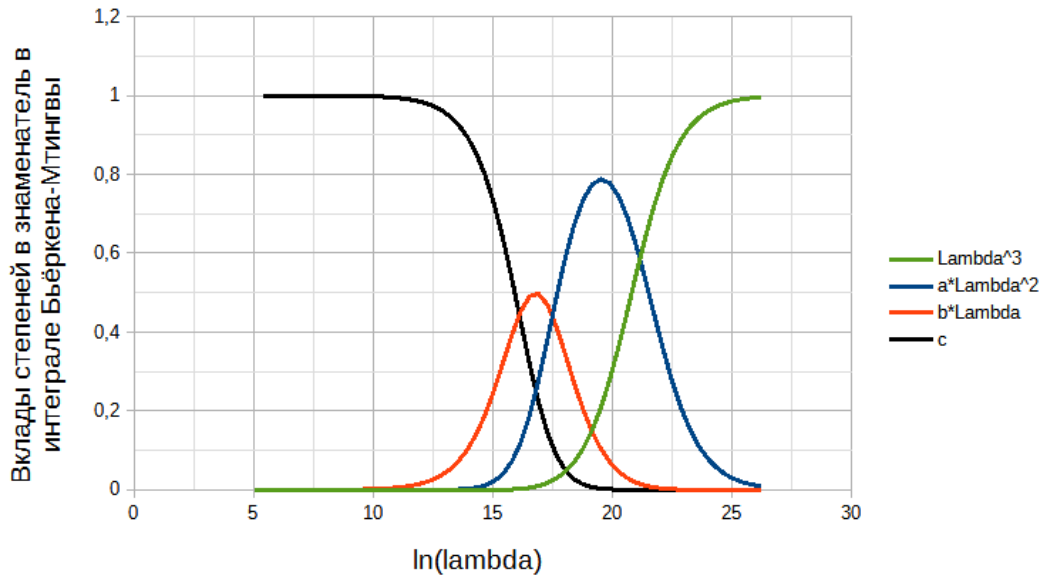


Рисунок 37. Вклады членов в знаменатель подынтегральной функции интеграла Бьёркена-Мтингвы.

Очевидно, при очень больших значениях λ данное сходство с распределением Гаусса нарушается, так как подынтегральная функция пропорциональна

$$\frac{(2a\lambda+b)\lambda^{3/2}}{(\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c)^{3/2}} \sim 2a\lambda^{-2}, \text{ а не } Ae^{-\frac{(\ln\lambda)^2}{\sigma^2}}$$

Поскольку в той области, которая вносит основной вклад в интеграл Бьёркена-Мтингвы, подынтегральная функция практически совпадает с распределением Гаусса, попробуем посчитать интеграл Бьёркена-Мтингвы как интеграл от распределения Гаусса.

Как известно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\pi} A \sigma \tag{П2}$$

Таким образом, для начала, нам необходимо найти точку максимума функции $g(\lambda)$. На данном этапе работы сделать это не удалось: производная $g(\lambda)$ по λ имеет нуль в точке, определяемой уравнением 4-й степени:

$$-8a\lambda^4 - (6b+2a^2)\lambda^3 + ab\lambda^2 + 10ac\lambda + 3bc = 0 \tag{П3}$$

В принципе, решить данное уравнение возможно, однако, ответом будет крайне громоздкая формула, анализ которой будет очень непростым делом. Попытки пренебречь частью членов к особым успехам не приводят, а возможность данного действия нуждается в серьёзном математическом обосновании.

К слову, максимум функции $f(\lambda)$ определяется решением похожего уравнения

$$-6a \cdot \lambda^4 - (4b + 3a^2) \cdot \lambda^3 - \frac{5}{2}ab \cdot \lambda^2 - (b^2 - 3ac)\lambda + \frac{1}{2}bc = 0 \quad (\text{П4})$$

Поскольку, $b = az + \frac{c}{z}$, где $z = \beta_z / \epsilon_z$, то $b^2 - 3ac = (az - \frac{c}{z})^2 + ac > 0$, а, значит, уравнение (П4) имеет лишь один корень и функция $f(\lambda)$ имеет единственный максимум.

Итак, данный путь поиска приближенного значения интеграла Бьёркена-Мтингвы на данный момент ни к чему не привёл. Однако, на наш взгляд, тот факт, что зависимость $g(\lambda)$ напоминает распределение Гаусса, может быть использован в будущих исследованиях.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Максимальная дисперсия в ячейке, используемой в работе

Обсудим, чему равно максимальное значение дисперсии в ячейке, используемой в нашей работе. Напомним, что ячейка состоит из двух поворотных магнитов, фокусирующего квадруполь между ними и двух фокусирующе-дефокусирующих дуплетов квадрупольей до и после поворотных магнитов. Ячейка полностью симметрична относительно центра среднего квадруполья (см. рисунок 20).

Из соображений симметрии и требования, чтобы дисперсия была тождественно равна нулю вне области между поворотными магнитами, легко получить, что максимальное значение дисперсии соответствует центру ячейки и равняется (все обозначения приведены на рисунке 20):

$$D_{max} = [\rho(1 - \cos(\theta)) + l_7 \sin(\theta)] \cos(\sqrt{k_0} \frac{l_0}{2}) + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{k_0}} \sin(\sqrt{k_0} \frac{l_0}{2}) \quad (\text{П5})$$

Условие равенства нулю дисперсии вне поворотных магнитов задаётся формулой (40).

Путём простых преобразований (40) и (П5) можно получить, что

$$D_{max} = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{k_0} \sin(\sqrt{k_0} \frac{l_0}{2})} \quad (\text{П6})$$

Поскольку, как было указано в Главе 3, мы фиксировали значения k_0 и l_0 , то $D_{max} \sim \sin(\theta) \sim \theta$, так как угол θ мал.

Кроме того, в формуле (42) опущена следующая выкладка ($L = Nl_0$ – сумма длин всех дисперсных участков в ячейках, l_0 обсуждается далее):

$$N \sum_{\text{по ячейке}} \frac{l_i}{T_i} \sim 2N \int_0^{l_0} \eta(s) ds \approx 2N \int_0^{l_0} \frac{\eta_{max}}{l_0} s ds = N \eta_{max} l_0 = L \eta_{max} \quad (\text{П7})$$

Здесь используется приближение, что дисперсия в ячейке возрастает до своего максимального значения приблизительно линейно. Безусловно, это не так,

однако, можно предположить, что квадратичный рост в поворотном магните будет скомпенсирован замедляющимся ростом в квадруполе (квадратичный рост возникает из разложения косинуса по Тейлору).

Таким образом, l_0 – некая эффективная длина ячейки, как показано на рисунке 38:

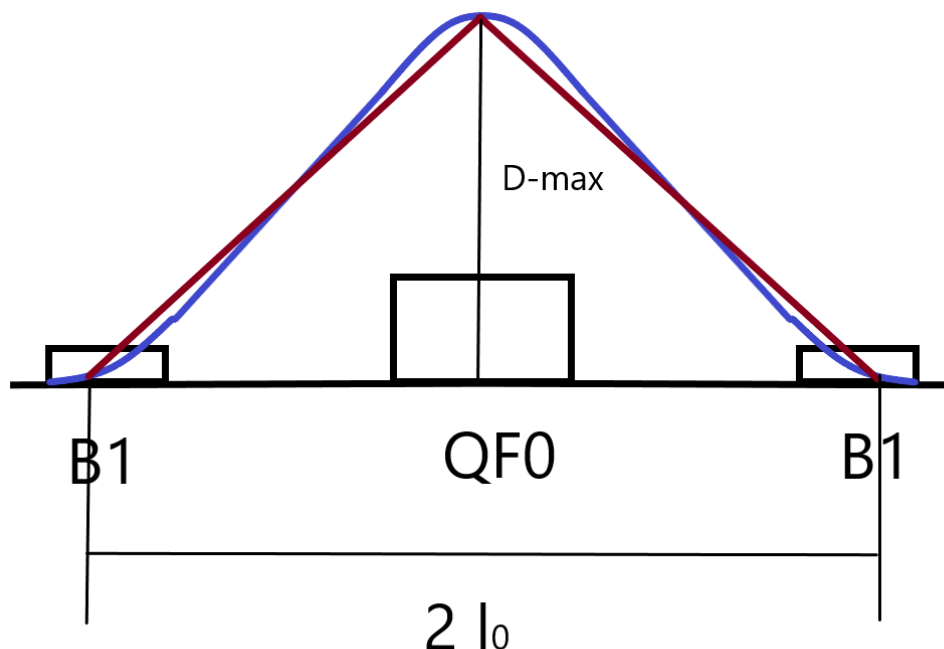


Рисунок 38. Дисперсия в ячейке и её аппроксимация прямой линией.

Более точный расчёт без данной аппроксимации приводит к достаточно длинным формулам, суть которых остаётся той же.