

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«Использование массовых моделей на основе соотношений
Гарви–Келсона для предсказания энергий связи атомных ядер»**

Выполнил студент
213м группы
Милованов Никита Юрьевич

Научный руководитель:
научный сотрудник, кандидат ф.-м. наук
Стопани Константин Александрович

Допущена к защите:

«__» _____ 2024 г.

заведующий кафедрой,
член-корреспондент РАН, профессор
Боос Эдуард Эрнстович

Москва

2024

Содержание

Введение	2
1. Теоретические методы определения энергий связи ядер	6
1.1. Макроскопический подход	8
1.2. Микроскопические модели масс ядер	10
1.3. Микро-макроскопический подход	12
1.4. Метод локальных массовых соотношений	13
1.5. Поведение соотношений Гарви–Келсона в рамках одночастичной модели оболочек	15
1.6. Поведение соотношений Гарви–Келсона в рамках модели деформированных оболочек Нильссона	16
2. Использование соотношений Гарви–Келсона для предсказаний энергий связи	28
2.1. Соотношения Гарви–Келсона на базе данных <i>AME2020</i> . . .	28
2.2. Решение разностного уравнения Гарви–Келсона при помощи метода наименьших квадратов	29
2.3. Аппроксимация коэффициентов $f_n(N)$, $f_z(Z)$ и $f_a(A)$	31
2.4. Сравнение полученных результатов с данными из <i>AME2020</i>	34
2.5. Предсказание энергий связи ядер	35
Заключение	45
Список использованных источников	48

Введение

Атомное ядро – система связанных нуклонов, состоящая из протонов и нейтронов. Для того чтобы разделить ядро на составные нуклоны, нужно затратить определенную минимальную энергию B , называемую энергией связи. При этом покоящееся ядро с массой M переходит в совокупность свободных покоящихся протонов и нейтронов с суммарной массой $Zm_p + Nm_n$. Таким образом, энергия связи ядра – минимальная энергия, необходимая для разделения ядра на составляющие его нуклоны, выражающаяся как: $B(A, Z) = [Zm_p + Nm_n - M(A, Z)]c^2$, где m_n – масса нейтрона в свободном состоянии, m_p – масса протона в свободном состоянии, $A = Z + N$ есть массовое число, Z и N – число протонов и нейтронов, соответственно, а $M(A, Z)$ – масса ядра. Энергия связи ядра является одной из его фундаментальных характеристик. Эта энергия характеризует стабильность ядра или же даже возможность его существования как такового. Чем больше энергия связи ядра, тем более стабильным является атомное ядро. Таким образом, энергия связи ядра играет важную роль в понимании структуры и свойств атомных ядер.

Согласно различным теоретическим моделям, возможно существование более 7000 ядер, в то время как на сегодняшний день в ходе экспериментальных исследований было обнаружено около 3500 ядер [1], при этом энергии связи около 2500 ядер были точно измерены [2]. На протяжении многих лет постоянный рост числа нуклидов, энергии связи которых были измерены, внес огромный вклад в понимание структуры ядра. Каждое атомное ядро, характеризующееся определенным количеством протонов и нейтронов, занимает конкретное место на NZ – диаграмме ядер, изображенной на рисунке 1, которая очерчивает область возможного существования атомных ядер, ограничивая число протонов и нейтронов, при которых ядра перестают быть связанными.

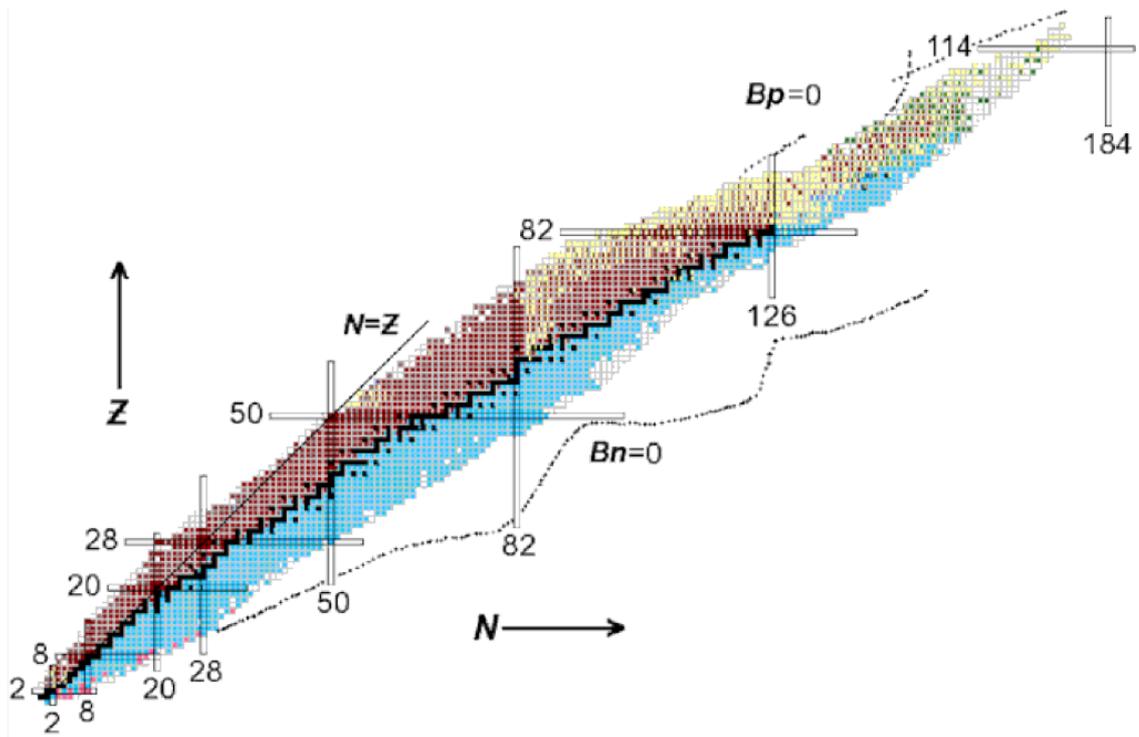


Рис. 1: NZ – диаграмма атомных ядер [3]. Черным цветом выделены стабильные ядра – долина стабильности. Справа от нее располагаются ядра, испытывающие β^- -распад, слева – ядра, испытывающие β^+ -распад. В области больших A находятся ядра, испытывающие α -распад, и спонтанно делящиеся ядра. Линия $B_p = 0$ (proton drip-line) ограничивает область существования атомных ядер слева, линия $B_n = 0$ (neutron drip-line) – справа.

Таблица AME (Atomic Mass Evaluation) – это обширная база данных, содержащая информацию о массах атомных ядер. Она была создана в 1950-х годах на основе имевшихся на тот момент экспериментальных данных. С того времени эта база данных постоянно расширяется и дополняется информацией о массах атомных ядер [4,5]. На сегодняшний день последней и наиболее полной таблицей этой серии является $AME2020$ [6]. С момента создания этой базы атомных ядер постоянное увеличение числа нуклидов, массы которых были определены, привнесло огромный вклад в понимание нами структуры ядра. Поиск новых изотопов и изучение их характеристик, в особенности таких как масса и энергия связи, является важной задачей современной физики. На основе уже существующих данных возможны различные теоретические предсказания с использованием экстраполяций,

продолженных в область тяжелых ядер, существование которых является неопределенным.

Если проанализировать поведение удельной энергии связи ядра в зависимости от его массового числа, то можно заметить, что наиболее сильно связаны ядра в области железа и никеля ($A \approx 55 - 60$), называемой железным максимумом, где удельная энергия связи достигает ≈ 8 МэВ. Существование подобного максимума удельной энергии связи является следствием насыщения ядерных сил, при котором каждый нуклон в ядре взаимодействует лишь с ограниченным числом соседних нуклонов. Однако во вселенной существует большое количество элементов тяжелее железа. Данные тяжелые элементы образуются в результате медленного s - или быстрого r -процессов захвата нейтронов, необходимым условием которых является наличие нейтроноизбыточной среды. Эти два механизма различаются отношением скорости захвата нейтронов (реакция (n, γ)) к скорости β^- -распада.

В s -процессе при образовании тяжелых элементов вовлечены только стабильные и β^- -радиоактивные ядра с большими периодами полураспада, то есть образование элементов происходит вдоль долины β -стабильности. Нейтроны добавляются к ядрам последовательно. При этом могут образоваться только сравнительно устойчивые ядра. Ядра с малыми периодами полураспада исчезают раньше, чем они успевают захватить следующий нейтрон. Поэтому образование тяжелых элементов в рамках s -процесса заканчивается на ^{209}Bi .

Многие ядра тяжелее железа, включая все ядра тяжелее ^{209}Bi , образуются в r -процессе путем быстрого последовательного захвата большого количества нейтронов. Главным условием протекания этого процесса является необходимость того, чтобы скорость захвата нейтронов превышала скорость β^- -распада. Захват нейтронов происходит до тех пор, пока скорость реакции захвата нейтронов не станет меньше скорости распада изотопа. Образующееся ядро претерпевает β^- -распад, после чего вновь начинается последовательный захват нейтронов. Линия, вдоль

которой происходит образование ядер в r -процессе, смещена от трека s -процесса (дорожки стабильности) в направлении нейтроноизбыточных изотопов. Существуют такие изотопы, которые могут образовываться только в результате r -процесса. Примером таких изотопов являются ^{100}Mo , ^{96}Zr , а также ^{76}Ge . Образование этих изотопов в результате s -процесса невозможно из-за малого периода полураспада изотопа, имеющего тот же заряд и массовое число ($A - 1$).

Экстремальные условия протекания r -процесса делают его экспериментальное исследование практически невозможным. Из-за невозможности воспроизведения условий астрофизического синтеза тяжелых ядер в лаборатории основным методом изучения r -процесса становится компьютерное моделирование. Определение входных параметров для моделирования r -процесса, таких как массы нейтроноизбыточных ядер, их энергии связи, а также периоды полураспада β^- -радиоактивных ядер, является актуальной и важной задачей современной астрофизики [7].

Целью данной работы является создание массовой модели на основе соотношений Гарви–Келсона для предсказания энергий связи атомных ядер, а также сравнение поведения данной модели с иными подходами как в области хорошо исследованных ядер, так и в области изотопов, пока не имеющих экспериментального подтверждения.

1. Теоретические методы определения энергий связи ядер

Рассмотрим основные теоретические методы, используемые для определения энергий связи атомных ядер, а также их масс. В основном выделяют четыре основных подхода. Макроскопический подход рассматривает ядро, как относительно однородную среду, пренебрегая поведением отдельных частиц, из которых она состоит. Микроскопический подход представляет собой иной подход, в котором рассматриваются детальное поведение каждой из взаимодействующих частиц на основе нуклон-нуклонного потенциала. При этом возможны упрощения микроскопического подхода, предполагающие рассмотрение системы, как совершающей движения в некотором среднем поле. Микромакроскопический подход является симбиозом предыдущих двух методов, в котором к усредненному поведению ядерной поверхности добавляются поправки, связанные с микроскопическим движением нуклонов. Помимо упомянутых выше методов существует ряд феноменологических подходов, основанных на различных аппроксимациях поведения массовой поверхности в различных областях.

Характеристики различных теоретических массовых моделей представлены в таблице 1. В ней приведены среднеквадратичные отклонения от экспериментальных масс, рассчитанные в соответствующих работах. Как видно, в большинстве своем значение среднеквадратичного отклонения находится в пределах 1000 кэВ.

Таблица 1: Сводные данные о среднеквадратичных отклонениях Δ_{RMS} масс атомных ядер, предсказанных на основании различных моделей [7]

Источник	Название используемой модели	Δ_{RMS}
Майерс [8]	Капельная с оболочечными поправками	-
Грут и др. [9]	Капельная с оболочечными поправками	670 кэВ
Сигер и др. [10]	Капельная с оболочечными поправками	704 кэВ
Лиран и др. [11]	Полуклассическая оболочечная модель	276 кэВ
Бауэр [12]	Феноменологическая оболочечная модель	-
Байнер и др. [13]	Метод плотности энергии (сферический)	\sim МэВ
Янеке [14]	Массовые соотношения Гарви–Келсона	118 кэВ
Комей и др. [15]	Усреднение по ансамблю Гарви–Келсона	102 кэВ
Янеке и др. [16]	Неоднородная частная разность	289 кэВ
Папе и др. [17]	Изобарическое массовое уравнение	271 кэВ
Дюссел и др. [18]	Систематика энергий α -распадов	287 кэВ
Меллер и др. [19]	Макро-микроскопическая модель	849 кэВ
Меллер и др. [20]	Макро-микроскопическая модель, модель капли с конечным радиусом	777 кэВ
Комей и др. [21]	Модифицированное среднее по ансамблю	431 кэВ
Сатпати и др. [22]	Модель бесконечной ядерной материи	456 кэВ
Тачибана и др. [23]	Модель с макроскопической и эмпирической оболочечной частью	538 кэВ
Спайнер и др. [24]	Модель Бете–Вайцзеккера с деформацией и оболочечными поправками	512 кэВ
Янеке и др. [25]	Массовые соотношения Гарви–Келсона	343 кэВ
Мейсон и др. [26]	Неоднородная частная разность	346 кэВ
Меллер [27]	Макро-микроскопическая FRDM(1992)	669 кэВ
Меллер [27]	Макро-микроскопическая FRLDM(1992)	779 кэВ
Меллер [28]	Макро-микроскопическая FRDM(2012)	560 кэВ
Меллер [28]	Макро-микроскопическая FRLDM(2012)	662 кэВ
Коура и др. [29]	Макро-микроскопическая KUTY(2000)	680 кэВ
Коура и др. [30]	Макро-микроскопическая KTUY(2005)	667 кэВ
Нинг Ванг и др. [31]	Макроскопическая W1(2016)	516 кэВ
Нинг Ванг и др. [32]	Макроскопическая WS*(2010)	441 кэВ
Мин Лиу и др. [33]	Макроскопическая WS3(2011)	336 кэВ
Нинг Ванг и др. [34]	Макроскопическая WS3+RBF(2011)	184 кэВ
Нинг Ванг и др. [35]	Макроскопическая WS4(2014)	298 кэВ
Нинг Ванг и др. [35]	Макроскопическая WS4+RBF(2014)	170 кэВ
Дюффло и др. [36]	Макро-микроскопическая DZ1995(1995)	375 кэВ

1.1. Макроскопический подход

Наиболее известной моделью, реализующей макроскопический подход, является модель жидкой капли. Карл Фридрих фон Вайцеккер в 1935 году предложил теоретическое обоснование энергии связи атомного ядра на основе модели жидкой капли [37]. В рамках данной модели ядро рассматривается, как капля несжимаемой заряженной жидкости, находящейся в сферическом объеме радиуса $R = 1.3A^{\frac{1}{3}}$ Фм. Плотность ядерного вещества считается постоянной, из чего как раз и следует несжимаемость капли. Карл Фридрих фон Вайцеккер вместе с Хансом Бете предложили полуэмпирическую формулу для оценки энергии связи ядра $B(N, Z)$. Энергия связи в формуле Бете–Вайцеккера рассматривается, как сумма нескольких слагаемых, ответственных за различные компоненты суммарной энергии. Капельная модель учитывает вклад в энергию связи ядра объемной, поверхностной и кулоновской энергии. Этих слагаемых, однако, не достаточно для корректного описания энергии связи реальных ядер. Чтобы учесть обстоятельство, что атомное ядро состоит из фермионов двух типов: протонов и нейтронов – в выражение для энергии связи $B(N, Z)$ вводятся дополнительные члены, которые не могут быть поняты в рамках капельной модели ядра, но получают свое объяснение в рамках оболочечной модели ядра:

$$B(N, Z) = E_{vol} - E_{surf} - E_{coul} - E_{sym} + E_{eo}, \quad (1)$$

где E_{vol} – объемная энергия, E_{surf} – поверхностная энергия, E_{coul} – кулоновская энергия, E_{sym} – энергия симметрии, а E_{eo} – энергия спаривания.

Первое слагаемое в выражении для энергии связи ядра представляет собой объемную энергию ядра, пропорциональную массовому числу A и отражающую свойство насыщения ядерных сил: $E_{vol} = a_1 A$. Второе слагаемое – поверхностная энергия ядра. Существование этого слагаемого отражает конечность размера ядра. Поверхностная энергия уменьшает энергию связи ядра, так как нуклоны, находящиеся на поверхности,

имеют меньше соседей, чем внутренние частицы. Поверхностная энергия пропорциональна поверхности сферического ядра. Следовательно, она должна зависеть от массового числа A , как $A^{2/3}$: $E_{surf} = a_2 A^{2/3}$. Третье слагаемое в выражении для энергии связи обусловлено кулоновским взаимодействием протонов. В капельной модели предполагается, что электрический заряд протонов равномерно распределен внутри сферы. Это создает кулоновскую энергию ядра: $E_{coul} = a_3 Z(Z - 1)/A^{1/3}$, где $Z(Z - 1)$ – количество протонных пар, а зависимость от $A^{1/3}$ возникает из-за того, что сила Кулона обратно пропорциональна радиусу ядра $R = 1.3A^{1/3}$ Фм. Эта энергия также уменьшает общую энергию связи ядра. Энергия симметрии ядра отражает повышенную стабильность ядер с $N = Z$: $E_{sym} = a_4(N - Z)^2/A$. Последнее слагаемое учитывает наблюдаемое в эксперименте скачкообразное изменение энергии связи ядра при добавлении к нему или удалении из него одного нуклона, то есть энергию разрыва нуклонной пары: $E_{eo} = a_5 A^{-3/4}$, где $a_5 > 0$ для четно-четных ядер, $a_5 = 0$ для нечетных ядер и $a_5 < 0$ для нечетно-нечетных ядер. Входящие в формулу Вайцзеккера коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 , a_4 и a_5 оцениваются из экспериментальных данных по энергиям связи ядер. Таким образом, формула Бете–Вайцзеккера имеет вид:

$$B(N, Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} + a_5 A^{-3/4}, \quad (2)$$

$$\text{где } a_5 = \begin{cases} +|a_5| & \text{для четно-четных ядер} \\ 0 & \text{для нечетных ядер} \\ -|a_5| & \text{для нечетно-нечетных ядер} \end{cases}$$

Наибольшее расхождение между экспериментально измеренными величинами энергии связи ядра и значениями, полученными при помощи формулы Бете–Вайцзеккера (2) наблюдается в области магических чисел. Это объясняется тем, что в капельной модели не учитываются микроскопические эффекты, такие как неоднородности распределения ядерной материи, обусловленные оболочечной структурой атомных ядер.

1.2. Микроскопические модели масс ядер

В микроскопических моделях рассматривается поведение отдельных нуклонов ядра. Наиболее распространенной микроскопической моделью ядра является оболочечная модель, предложенная М. Гепперт–Майер [38] и независимо О. Хакселем, Е. Иенсенем и Г. Зюссом [39]. Она оказалась результатом систематизации и обобщения огромного количества экспериментальных данных. Уравнение Шредингера для системы, состоящей из N нуклонов, имеет вид:

$$H\Psi = E\Psi, \quad (3)$$

где $H = \sum_i T_i + \sum_{i>j} u_{ij}$

Точное решение уравнения (3) для многонуклонной системы является сложнейшей вычислительной задачей даже для легких ядер, поэтому был разработан метод среднего поля или же метод Хартри–Фока [40, 41]. Суть этого метода заключается в том, что каждая частица движется в некотором среднем поле, образованном в результате взаимодействия нуклонов друг с другом в ядре, таким образом, самосогласованное ядерное поле описывается посредством 2-частичных взаимодействий. Точный гамильтониан H системы заменяется на эффективный H_{eff} с заменой реальных потенциалов на эффективные v_{ij}^{eff} :

$$H_{eff} = -\frac{\hbar^2}{2m_N} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_{i>j} v_{ij}^{eff} \quad (4)$$

В качестве подходящего потенциала двухчастичного взаимодействия v_{ij}^{eff} из выражения (4) применяется потенциал Скирма, имеющий

следующий вид:

$$\begin{aligned}
v_{12}^{eff} = & t_0(1 + x_0 P_x) \delta(r_1 - r_2) + \\
& + \frac{1}{2} t_1(1 + x_1 P_x) [p_{12}^2 \delta(r_1 - r_2) + \delta(r_1 - r_2) p_{12}^2] + \\
& + t_2(1 + x_2 P_x) p_{12} \cdot \delta(r_1 - r_2) p_{12} + \\
& + \frac{1}{6} t_3(1 + x_3 P_x) \rho^\alpha \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \delta(r_1 - r_2) + \\
& + i t_4 p_{12} \cdot \delta(r_1 - r_2) (\sigma_1 + \sigma_2) \times p_{12},
\end{aligned} \tag{5}$$

где оператор p_{12} отвечает импульсу относительного движения частиц:

$$p_{12} = p_1 - p_2, \tag{6}$$

оператор P_x является оператором обмена спинами:

$$P_x = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \sigma_2), \tag{7}$$

$\sigma_{1,2}$ —матрицы Паули, а $\rho^\alpha \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)$ —коэффициент, зависящий от плотности. Величины $t_{0...4}$ и $x_{0...3}$ являются параметрами модели, значения которых могут быть получены с помощью опоры на экспериментальные данные.

В дальнейшем метод среднего поля был развит в методе Хартри–Фока–Боголюбова [42], где вместо волновых функций отдельных частиц рассматриваются волновые функции пар нуклонов, что позволяет учитывать в расчете эффект спаривания нуклонов. Находясь в этом среднем поле, нуклоны независимо (в первом приближении) заполняют орбиты с определенными квантовыми характеристиками, в том числе с определенной энергией. На одной орбите может быть ограниченное число нуклонов. Орбиты с близкими энергиями группируются в оболочки. Микроскопический подход в отличие от макроскопического позволяет объяснить существование особо устойчивых магических ядер, как ядер с полностью заполненными нуклонами оболочками. Современные модели, основанные на методе Хартри–Фока–Боголюбова, позволяют получить

теоретическое предсказание масс ядер с точностью около 500 кэВ во всей области массовых чисел.

1.3. Микро-макроскопический подход

Приближение жидкой капли, предложенное Вайцеккером, являлось наиболее простым представлением о ядре, которое может быть расширено путем учета микроскопических эффектов. Одной из моделей с подобным расширением является модель *FRDM* (Finite-Range Droplet Model – модель капли с конечным радиусом), в которой для вычисления макроскопического вклада в энергию используется продвинутое многокомпонентное приближение жидкой капли. Полная энергия ядра в этой модели зависит не только от заряда ядра и числа нейтронов, но и от формы:

$$E(N, Z, shape) = E_{macro}(N, Z, shape) + E_{micro}(N, Z, shape) \quad (8)$$

Макроскопическая часть E_{macro} данного выражения включает в себя не только стандартные члены, входящие в формулу Бете–Вайцеккера, но и дополнительные поправки, учитывающие сжимаемость ядерной жидкости, а также зарядовую асимметрию.

Вклад оболочечных эффектов от деформированных одночастичных состояний в рамках данной модели учитывается при помощи микроскопической части. Энергии оболочек рассчитываются методом Струтинского [43], в котором одночастичный оболочечный потенциал представляется в виде:

$$V = V_{nucl} + V_{ls} + V_{coul} \quad (9)$$

Здесь первое слагаемое является независимой от спина частью ядерного взаимодействия, второе слагаемое характеризует спин-орбитальное взаимодействие, а третье слагаемое относится к кулоновскому взаимодействию.

1.4. Метод локальных массовых соотношений

Кроме глобальных подходов также существуют и локальные феноменологические методы оценки массы ядра. Массовая поверхность $m(N, Z)$ считается непрерывной, поэтому учет ее локального поведения позволяет связывать массы ядер в определенные алгебраические соотношения. Одним из первых подобных подходов локальных массовых соотношений стал метод, впервые предложенный Г. Гарви и И. Келсоном в рамках работы 1966 году [44]. Этот метод основан на формулах, связывающих массы (или энергии связи $B(N, Z)$) шести близко расположенных на NZ -диаграмме нуклидов. Гарви и Келсон предложили два соотношения, известные как поперечное (GK_T) и продольное (GK_L):

$$GK_T : M(N + 2, Z - 2) - M(N, Z) + M(N, Z - 1) - \\ - M(N + 1, Z - 2) + M(N + 1, Z) - M(N + 2, Z - 1) \approx 0 \quad (10)$$

$$GK_L : M(N + 2, Z) - M(N, Z - 2) + M(N + 1, Z - 2) - \\ - M(N + 2, Z - 1) + M(N, Z - 1) - M(N + 1, Z) \approx 0 \quad (11)$$

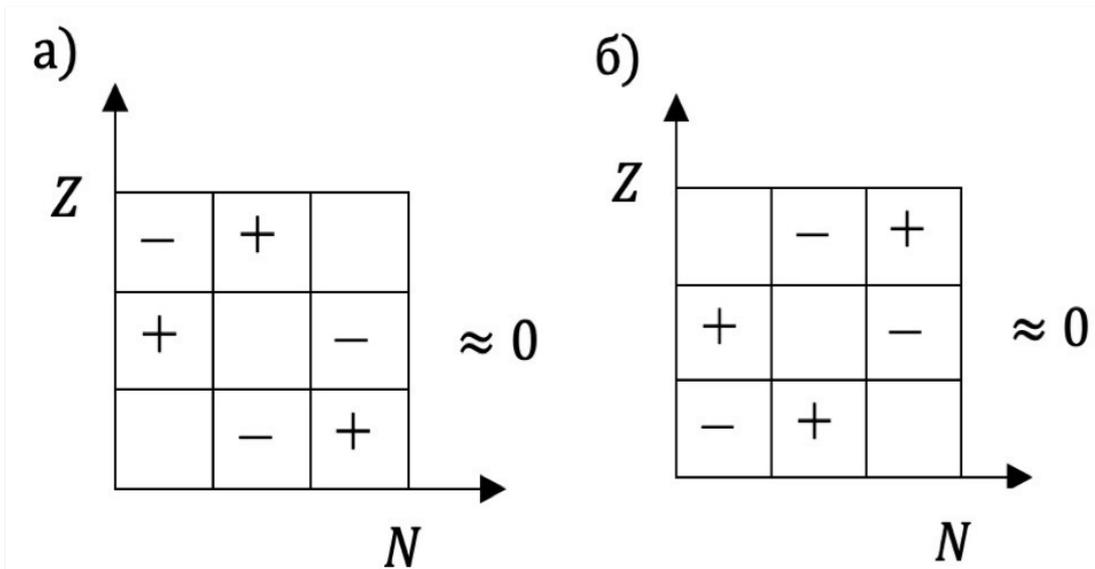


Рис. 2: Схемы для массовых соотношений: а) поперечное соотношение Гарви-Келсона GK_T , б) продольное соотношение Гарви-Келсона GK_L

Данные соотношения основываются на модели независимых частиц

и составлены таким образом, чтобы сумма проекций изоспинов ядер, включенных в соотношение, равнялась нулю. Схематично соотношения Гарви–Келсона для масс ядер изображены на рисунке 2. Квадратики здесь представляют ядра из таблицы атомных ядер, а знаки плюс и минус указывают на то, что соответствующие значения массы должны быть добавлены или вычтены.

Формулы Гарви–Келсона также можно записать и в терминах энергии связи $B(N, Z)$:

$$GK_T : -B(N + 2, Z - 2) + B(N, Z) - B(N, Z - 1) + \\ + B(N + 1, Z - 2) - B(N + 1, Z) + B(N + 2, Z - 1) \approx 0 \quad (12)$$

$$GK_L : -B(N + 2, Z) + B(N, Z - 2) - B(N + 1, Z - 2) + \\ + B(N + 2, Z - 1) - B(N, Z - 1) + B(N + 1, Z) \approx 0 \quad (13)$$

Метод локальных массовых соотношений выгодно отличается в сравнении с иными подходами своей относительной простотой расчетов, а также удобством использования в области тяжелых элементов. Успешность данного подхода объясняется тем, что многие характеристики ядер меняются довольно медленно от ядра к ядру и обусловлены его коллективными свойствами. Однако при использовании метода локальных массовых соотношений также стоит учитывать и то, что если энергия связи или масса перестает плавно и равномерно увеличиваться с ростом N и Z , что, например, наблюдается в области легких ядер или же при использовании соотношений в области, далекой от массива экспериментальных данных, то предсказательная способность данного метода значительно ухудшается. Выражая массу или энергию связи одного из ядер через 5 других, исходя из формул (10–13), можно получить оценку неизвестной величины для него. Дальнейшее использование в рамках данного метода экстра- и интерполяции позволяет расширить область его применения.

1.5. Поведение соотношений Гарви–Келсона в рамках одночастичной модели оболочек

Рассмотрим соотношения GK_T и GK_L в рамках простой одночастичной оболочечной модели с независимыми нуклонами и простейшим эффектом образования пар нуклонов одного типа. Рассмотрим различные варианты четности и нечетности N и Z . Введем обозначения: E – энергия связи ядра, E_1, E_2, E_3, E_4 – одночастичные энергии нуклонов 1-4, C – потенциальная энергия остальных нуклонов, Δ_{12} и Δ_{34} – энергия нуклонной пары одного типа. Возможны четыре варианта расположения нуклонов в рамках данной модели. Все эти варианты рассмотрены на рисунке 3.

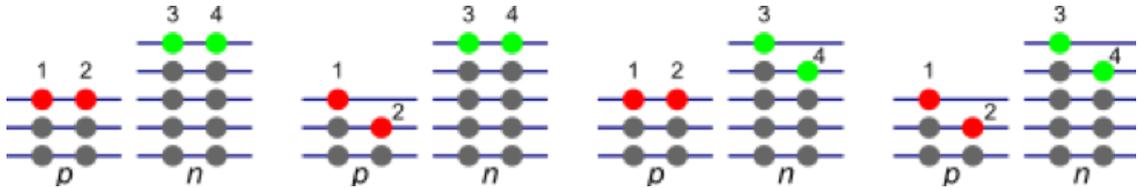


Рис. 3: Возможные варианты расположения нуклонов в одночастичной оболочечной модели

Рассмотрим случай, когда N и Z четные. Тогда суммарные энергии нуклонов ядер, участвующих в соотношениях Гарви–Келсона, запишутся следующим образом:

- 1) $E(N, Z): E = C + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - \Delta_{12} - \Delta_{34}$
- 2) $E(N - 1, Z): E = C + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - \Delta_{12}$
- 3) $E(N, Z - 1): E = C + E_1 + E_3 + E_4 - \Delta_{34}$
- 4) $E(N - 1, Z - 1): E = C + E_1 + E_3$
- 5) $E(N - 2, Z): E = C + E_1 + E_2 - \Delta_{12}$
- 6) $E(N, Z - 2): E = C + E_3 + E_4 - \Delta_{34}$
- 7) $E(N - 2, Z - 1): E = C + E_1$
- 8) $E(N - 1, Z - 2): E = C + E_3$
- 9) $E(N - 2, Z - 2): E = C$

Проверим выполнение соотношений Гарви–Келсона:

$$GK_T : E(N, Z - 2) - E(N, Z - 1) - E(N - 1, Z - 2) + E(N - 1, Z) +$$

$$+ E(N-2, Z-1) - E(N-2, Z) = (C + E_3 + E_4 - \Delta_{34}) - (C + E_1 + E_3 + E_4 - \Delta_{34}) - (C + E_3) + (C + E_1 + E_2 + E_3 - \Delta_{12}) + (C + E_1) - (C + E_1 + E_2 - \Delta_{12}) = 0$$

$$GK_L : E(N, Z) - E(N-1, Z) - E(N, Z-1) + E(N-2, Z-1) + E(N-1, Z-2) - E(N-2, Z-2) = (C + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - \Delta_{12} - \Delta_{34}) - (C + E_1 + E_2 + E_3 - \Delta_{12}) - (C + E_1 + E_3 + E_4 - \Delta_{34}) + (C + E_1) + (C + E_3) - (C) = 0$$

По аналогии оставшиеся три конфигурации (N четное, Z нечетное; N нечетное, Z четное; N и Z нечетные) приводят к такому же результату. Таким образом, рассмотрение соотношений Гарви–Келсона в рамках простой одночастичной оболочечной модели с независимыми нуклонами и простейшим эффектом образования пар нуклонов одного типа приводит к их точному выполнению.

1.6. Поведение соотношений Гарви–Келсона в рамках модели деформированных оболочек Нильссона

В действительности соотношения Гарви–Келсона выполняются лишь приближенно. Это связано с тем, что сферически-симметричный потенциал, используемый в одночастичной модели оболочек, является упрощенной моделью, которая, например, не учитывает деформацию ядер. Впервые расчеты одночастичных состояний с использованием деформированного аксиально-симметричного потенциала были выполнены С. Нильссоном в 1955 году [45]. Учет деформации ядра приводит к изменению положения одночастичных уровней, что в свою очередь приводит к некоторому отклонению соотношений Гарви–Келсона от точного равенству нулю.

Рассмотрим модель, в которой учитывается взаимодействие каждого нуклона с каждым, но предполагается, что величина взаимодействия очень медленно меняется при переходе к соседнему ядру. Введем обозначения: C – энергия взаимодействия всех нуклонов за исключением внешних двух протонов и двух нейтронов, E – энергия взаимодействия каждого

из внешних нуклонов с внутренними, D – энергия взаимодействия двух внешних нуклонов между собой. Рассмотрим случай, когда N и Z четные. Участвующие в соотношениях Гарви–Келсона суммарные энергии нуклонов ядер будут выражаться как:

- 1) $E(N, Z): E = C + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + D_{12} + D_{23} + D_{34} + D_{14} + D_{13} + D_{24}$
- 2) $E(N - 1, Z): E = C + E_1 + E_2 + E_3 + D_{12} + D_{23} + D_{13}$
- 3) $E(N, Z - 1): E = C + E_1 + E_3 + E_4 + D_{34} + D_{14} + D_{13}$
- 4) $E(N - 1, Z - 1): E = C + E_1 + E_3 + D_{13}$
- 5) $E(N - 2, Z): E = C + E_1 + E_2 + D_{12}$
- 6) $E(N, Z - 2): E = C + E_3 + E_4 + D_{34}$
- 7) $E(N - 2, Z - 1): E = C + E_1$
- 8) $E(N - 1, Z - 2): E = C + E_3$
- 9) $E(N - 2, Z - 2): E = C$

В этом случае проверка соотношений Гарви–Келсона приводит к следующим выражениям:

$$GK_T : D_{23} - D_{14}$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13}$$

По аналогии оставшиеся три конфигурации (N четное, Z нечетное; N нечетное, Z четное; N и Z нечетные) приводят к такому же результату. Видно, что соотношения GK_T и GK_L тождественно не равняются нулю, а зависят от коэффициентов D_{ij} , где $i = 1, 2$, а $j = 3, 4$.

Проанализируем поведение коэффициентов D_{ij} и значений соотношений Гарви–Келсона в зависимости от этого. Первым рассмотрим случай, когда N и Z четные:

- 1) $N < Z$

В этом случае нейтроны лежат на более низкой оболочке по сравнению с протонами, из-за этого можно считать, что их взаимодействие практически отсутствует.

$$D_{13} = D_{14} = D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i \neq j}(T = 0) + V_{i \neq j}(T = 1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

Здесь $V_{i \neq j}(T = 0, 1)$ соответствует энергии взаимодействия двух нуклонов в конфигурации с суммарным значением изоспина $T = 0$ или $T = 1$, соответственно. Выражение $i \neq j$ обозначает, что эти два нуклона находятся на разных уровнях в модели Нильссона. Эти уровни описываются не одинаковыми волновыми функциями, поэтому предполагается, что значением величиной взаимодействия можно пренебречь.

$$2) N = Z$$

Если нейтроны и протоны располагаются на оболочках одного уровня, то взаимодействие будет присутствовать.

$$D_{13} = D_{14} = D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i=j}(T = 0) + V_{i=j}(T = 1)}{2} > 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$3) N > Z$$

Здесь ситуация аналогична первому случаю, только уже нейтроны располагаются на соседней более высокой оболочке по сравнению с протонами.

$$D_{13} = D_{14} = D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i \neq j}(T = 0) + V_{i \neq j}(T = 1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

Таким образом, можно говорить о том, что и в рамках модели деформированных оболочек Нильссона для ядер с четным количеством нейтронов и протонов оба соотношения Гарви–Келсона не должны иметь отклонений от нуля.

Теперь рассмотрим вариант, где N четное, а Z нечетное:

$$1) N < Z - 1$$

В этом случае оболочка нейтронов лежит ниже оболочек, на которых расположены рассматриваемые протоны. Это приводит к практически отсутствию взаимодействия.

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_1 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_2 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$2) N = Z - 1$$

В этом случае оболочка нейтронов лежит на том же уровне, что и оболочка нижнего рассматриваемого протона, в то время как незамкнутая оболочка с одним протоном лежит выше.

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_1 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_2 \neq j_{34}}(T=1)}{2} > 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} > 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} > 0$$

$$3) N = Z + 1$$

Здесь оболочка нейтронов располагается на том же уровне, что незамкнутая оболочка с одним протоном. Оболочка нижнего рассматриваемого протона расположена ниже.

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 = j_{34}}(T=0) + V_{i_1 = j_{34}}(T=1)}{2} > 0$$

$$D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_2 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} < 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} < 0$$

$$4) N > Z + 1$$

Оболочка нейтронов лежит выше незамкнутой оболочки с одним протоном.

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_1 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_2 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

Для ядер с четным количеством нейтронов и нечетным количеством протонов при определенных конфигурациях наблюдаются отклонения от нуля соотношений Гарви–Келсона.

Далее рассмотрим случай, где N нечетное, а Z четное:

$$1) N < Z - 1$$

В этом случае оболочка протонов лежит выше оболочек нейтронов, на которых расположены рассматриваемые нейтроны. Это приводит к практически отсутствию взаимодействия.

$$D_{13} = D_{23} = \frac{V_{i_{12} \neq j_3}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_3}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{14} = D_{24} = \frac{V_{i_{12} \neq j_4}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_4}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$2) N = Z - 1$$

Здесь оболочка протонов располагается на том же уровне, что незамкнутая оболочка с одним нейтроном. Оболочка нижнего рассматриваемого нейтрона расположена ниже.

$$D_{13} = D_{23} = \frac{V_{i_{12} \neq j_3}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_3}(T=1)}{2} > 0$$

$$D_{14} = D_{24} = \frac{V_{i_{12} \neq j_4}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_4}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} > 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} < 0$$

$$3) N = Z + 1$$

В этом случае оболочка протонов лежит на том же уровне, что и оболочка нижнего рассматриваемого нейтрона, в то время как незамкнутая

оболочка с одним нейтроном лежит выше.

$$D_{13} = D_{23} = \frac{V_{i_{12} \neq j_3}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_3}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{14} = D_{24} = \frac{V_{i_{12} \neq j_4}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_4}(T=1)}{2} > 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} < 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} > 0$$

$$4) N > Z + 1$$

В этом случае оболочка протонов лежит ниже оболочки нижнего рассматриваемого нейтрона, это приводит к тому, что их взаимодействие практически отсутствует.

$$D_{13} = D_{23} = \frac{V_{i_{12} \neq j_3}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_3}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{14} = D_{24} = \frac{V_{i_{12} \neq j_4}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_4}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

Для ядер с нечетным количеством нейтронов и четным количеством протонов при определенных конфигурациях наблюдаются отклонения от нуля соотношений Гарви–Келсона.

Наконец, рассмотрим случай, где N и Z нечетные:

$$1) N < Z - 2$$

В этом случае оболочки рассматриваемых нейтронов расположены ниже оболочек рассматриваемых протонов. Это приводит к практически отсутствию взаимодействия.

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_1 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_2 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$2) N = Z - 2$$

Здесь нижняя оболочка рассматриваемых протонов совпадает с верхней оболочкой рассматриваемых нейтронов.

$$D_{23} = \frac{V_{i_2 \neq j_3}(T=0) + V_{i_2 \neq j_3}(T=1)}{2} > 0$$

$$D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_4}(T=0) + V_{i_2 \neq j_4}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_1 \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} > 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$3) N = Z$$

В этом случае рассматриваемые оболочки совпадают.

$$D_{14} = D_{23} = \frac{V_{i_{12} \neq j_{43}}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_{43}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{13} = D_{24} = \frac{V_{i_{12} \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_{34}}(T=1)}{2} > 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$4) N = Z + 2$$

Верхняя оболочка рассматриваемых протонов совпадает с нижней оболочкой рассматриваемых нейтронов.

$$D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_4}(T=0) + V_{i_1 \neq j_4}(T=1)}{2} > 0$$

$$D_{23} = \frac{V_{i_2 \neq j_3}(T=0) + V_{i_2 \neq j_3}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$D_{13} = D_{24} = \frac{V_{i_{12} \neq j_{34}}(T=0) + V_{i_{12} \neq j_{34}}(T=1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} < 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

$$5) N > Z + 2$$

В этом случае оболочки рассматриваемых нейтронов расположены выше оболочек рассматриваемых протонов. Это приводит к практически отсутствию взаимодействия.

$$D_{13} = D_{14} = \frac{V_{i_1 \neq j_{34}}(T = 0) + V_{i_1 \neq j_{34}}(T = 1)}{2} \approx 0$$

$$D_{23} = D_{24} = \frac{V_{i_2 \neq j_{34}}(T = 0) + V_{i_2 \neq j_{34}}(T = 1)}{2} \approx 0$$

$$GK_T : D_{23} - D_{14} \approx 0$$

$$GK_L : D_{24} - D_{13} \approx 0$$

Таким образом, для нечетного числа протонов и нейтронов наблюдается асимметрия между продольным (GK_L) и поперечным (GK_T) соотношениями Гарви–Келсона. В то время как GK_L точно выполняется, GK_T может отклоняться от нуля причем как со знаком плюс, так и со знаком минус в зависимости от конфигурации. Для всех типов ядер в различных рассмотренных ранее конфигурациях были проверены продольные и поперечные соотношения Гарви–Келсона на основе современной базы экспериментальных данных *AME2020* [46]. Произведенные расчеты для различных групп ядер представлены в таблицах 2 и 3, в которых введены обозначения: μ – среднее значение, σ – стандартное отклонение в МэВ, Δ_{RMS} – среднеквадратичное отклонение от 0 в МэВ, n – число ядер, th – теоретическое предсказание в рамках модели деформированных оболочек Нильссона.

Таблица 2: Проверка соотношений GK_L на базе данных *AME2020*

Тип ядра	Конфигурация	μ	σ	Δ_{RMS}	n	th
чет-чет	Все	0.010	0.174	0.174	445	-
чет-чет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	-
чет-чет	$N < Z - 1$	0.041	0.170	0.175	4	= 0
чет-чет	$N > Z + 1$	0.010	0.164	0.164	435	= 0
чет-чет	$N > Z + 2$	0.010	0.164	0.165	425	-
Продолжение таблицы 2 на следующей странице						

Таблица 2 – продолжение

Тип ядра	Конфигурация	μ	σ	Δ_{RMS}	n	th
чет-чет	$N = Z - 2$	0.041	0.170	0.175	4	-
чет-чет	$N = Z - 1$	-	-	-	-	-
чет-чет	$N = Z$	-0.036	0.529	0.531	6	= 0
чет-чет	$N = Z + 1$	-	-	-	-	-
чет-чет	$N = Z + 2$	-0.001	0.141	0.141	10	-
нечет-чет	Все	-0.047	0.189	0.195	435	-
нечет-чет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	-
нечет-чет	$N < Z - 1$	-	-	-	-	= 0
нечет-чет	$N > Z + 1$	-0.050	0.167	0.174	421	= 0
нечет-чет	$N > Z + 2$	-0.050	0.167	0.174	421	-
нечет-чет	$N = Z - 2$	-	-	-	-	-
нечет-чет	$N = Z - 1$	0.352	0.242	0.427	4	> 0
нечет-чет	$N = Z$	-	-	-	-	-
нечет-чет	$N = Z + 1$	-0.083	0.541	0.548	10	< 0
нечет-чет	$N = Z + 2$	-	-	-	-	-
чет-нечет	Все	0.037	0.194	0.197	437	-
чет-нечет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	-
чет-нечет	$N < Z - 1$	-	-	-	-	= 0
чет-нечет	$N > Z + 1$	0.044	0.172	0.178	423	= 0
чет-нечет	$N > Z + 2$	0.044	0.172	0.178	423	-
чет-нечет	$N = Z - 2$	-	-	-	0	-
чет-нечет	$N = Z - 1$	-0.505	0.355	0.617	5	< 0
чет-нечет	$N = Z$	-	-	-	-	-
чет-нечет	$N = Z + 1$	-0.012	0.434	0.434	9	> 0
чет-нечет	$N = Z + 2$	-	-	-	-	-
нечет-нечет	Все	-0.039	0.211	0.215	421	-
нечет-нечет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	= 0

Продолжение таблицы 2 на следующей странице

Таблица 2 – продолжение

Тип ядра	Конфигурация	μ	σ	Δ_{RMS}	n	th
нечет-нечет	$N < Z - 1$	-0.177	0.063	0.187	2	-
нечет-нечет	$N > Z + 1$	-0.037	0.205	0.208	414	-
нечет-нечет	$N > Z + 2$	-0.037	0.203	0.206	404	= 0
нечет-нечет	$N = Z - 2$	-0.177	0.063	0.187	2	= 0
нечет-нечет	$N = Z - 1$	-	-	-	-	-
нечет-нечет	$N = Z$	-0.160	0.516	0.540	5	= 0
нечет-нечет	$N = Z + 1$	-	-	-	-	-
нечет-нечет	$N = Z + 2$	-0.050	0.256	0.261	10	= 0

Таблица 3: Проверка соотношений GK_T на базе данных AME2020

Тип ядра	Конфигурация	μ	σ	Δ_{RMS}	n	th
чет-чет	Все	-0.059	0.170	0.180	445	-
чет-чет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	-
чет-чет	$N < Z - 1$	-0.001	0.213	0.213	4	= 0
чет-чет	$N > Z + 1$	-0.061	0.170	0.180	435	= 0
чет-чет	$N > Z + 2$	-0.064	0.166	0.178	425	-
чет-чет	$N = Z - 2$	-0.001	0.213	0.213	4	-
чет-чет	$N = Z - 1$	-	-	-	-	-
чет-чет	$N = Z$	0.029	0.039	0.049	6	= 0
чет-чет	$N = Z + 1$	-	-	-	-	-
чет-чет	$N = Z + 2$	0.077	0.264	0.275	10	-
нечет-чет	Все	0.043	0.339	0.342	435	-
нечет-чет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	-
нечет-чет	$N < Z - 1$	-	-	-	-	= 0
нечет-чет	$N > Z + 1$	0.023	0.193	0.194	421	= 0
Продолжение таблицы 3 на следующей странице						

Таблица 3 – продолжение

Тип ядра	Конфигурация	μ	σ	Δ_{RMS}	n	th
нечет-чет	$N > Z + 2$	0.023	0.193	0.194	421	-
нечет-чет	$N = Z - 2$	-	-	-	-	-
нечет-чет	$N = Z - 1$	-1.561	0.332	1.596	4	< 0
нечет-чет	$N = Z$	-	-	-	-	-
нечет-чет	$N = Z + 1$	1.530	0.382	1.577	10	> 0
нечет-чет	$N = Z + 2$	-	-	-	-	-
чет-нечет	Все	-0.005	0.359	0.359	437	-
чет-нечет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	-
чет-нечет	$N < Z - 1$	-	-	-	-	$= 0$
чет-нечет	$N > Z + 1$	-0.019	0.202	0.203	423	$= 0$
чет-нечет	$N > Z + 2$	-0.019	0.202	0.203	423	-
чет-нечет	$N = Z - 2$	-	-	-	-	-
чет-нечет	$N = Z - 1$	-1.691	0.427	1.744	5	< 0
чет-нечет	$N = Z$	-	-	-	-	-
чет-нечет	$N = Z + 1$	1.592	0.294	1.619	9	> 0
чет-нечет	$N = Z + 2$	-	-	-	-	-
нечет-нечет	Все	0.032	0.201	0.204	421	-
нечет-нечет	$N < Z - 2$	-	-	-	-	$= 0$
нечет-нечет	$N < Z - 1$	-0.194	0.484	0.522	2	-
нечет-нечет	$N > Z + 1$	0.034	0.199	0.202	414	-
нечет-нечет	$N > Z + 2$	0.035	0.183	0.186	404	$= 0$
нечет-нечет	$N = Z - 2$	-0.194	0.484	0.522	2	< 0
нечет-нечет	$N = Z - 1$	-	-	-	-	-
нечет-нечет	$N = Z$	-0.001	0.031	0.031	5	$= 0$
нечет-нечет	$N = Z + 1$	-	-	-	-	-
нечет-нечет	$N = Z + 2$	-0.038	0.534	0.535	10	> 0

В подавляющем большинстве случаев теоретические предсказания,

сделанные в рамках модели деформированных оболочек Нильссона, удовлетворяют расчетным значениям для различных групп ядер с учетом погрешностей.

2. Использование соотношений Гарви–Келсона для предсказаний энергий связи

2.1. Соотношения Гарви–Келсона на базе данных AME2020

Рассмотрим проверку точности выполнения соотношений Гарви–Келсона на основе современных экспериментальных данных из AME2020. На рисунке 4 представлены зависимости соотношений GK_T и GK_L от массового числа A .

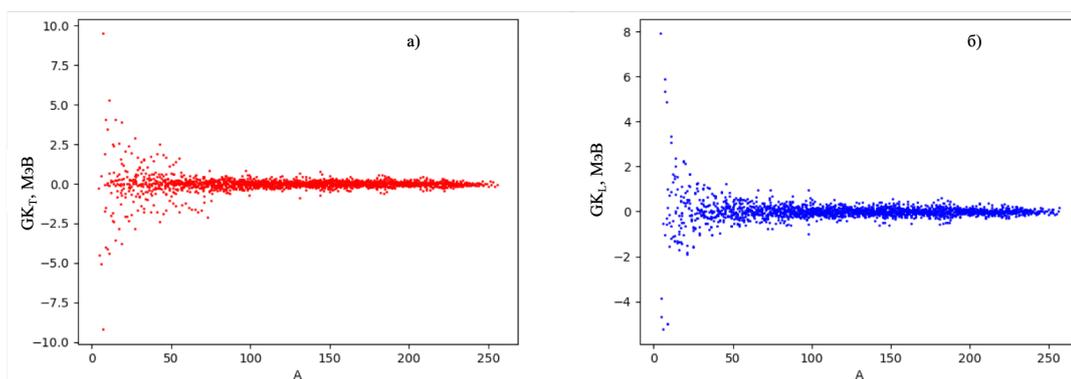


Рис. 4: Массовые соотношения Гарви–Келсона на базе данных AME2020: а) поперечное соотношение Гарви–Келсона GK_T , б) продольное соотношение Гарви–Келсона GK_L

На графиках видно, что разброс значений соотношений Гарви–Келсона и их отклонение от нуля для легких ядер значительно выше, чем для более тяжелых. Среднеквадратичное отклонение Δ_{RMS} для GK_T на всем диапазоне значений A составляет 598.3 кэВ, а для GK_L – 485.9 кэВ. В то же время в области средних и тяжелых ядер при $A \geq 40$ значение среднеквадратичное отклонения $\Delta_{RMS(A \geq 40)}$ составляет 421.8 кэВ для GK_T и 308.2 кэВ для GK_L . Это обстоятельство позволяет использовать соотношения Гарви–Келсона для предсказания энергий связи ядер, которые не были исследованы экспериментально, а также оценить их стабильность и другие свойства.

2.2. Решение разностного уравнения Гарви–Келсона при помощи метода наименьших квадратов

Поперечное (GK_T) и продольное (GK_L) соотношения Гарви–Келсона задают на плоскости NZ -диаграммы уравнения, которым удовлетворяют функции вида $Y(N, Z)$, зависящие от количества протонов и нейтронов в ядре. В рамках работы 1969 года [47] Г. Гарви, И. Келсон и соавторы предложили общее решение разностного уравнения Гарви–Келсона GK_T в виде суммы трех независимых функций:

$$M(N, Z) = f_n(N) + f_z(Z) + f_a(A), \quad (14)$$

где N —количество нейтронов в ядре, Z —количество протонов в ядре, A —массовое число ядра. Также было предложено общее решение продольного разностного уравнения Гарви–Келсона GK_L в виде:

$$M(N, Z) = g_n(N) + g_z(Z) + g_{T_3}(T_3), \quad (15)$$

где N —количество нейтронов в ядре, Z —количество протонов в ядре, T_3 —проекция изоспина ядра.

В рамках данной работы решено рассчитать энергии связи атомных ядер $B(N, Z)$ на основе общего решения поперечного разностного уравнения Гарви–Келсона GK_T для энергий связи на основе базы данных *AME2020*:

$$B(N, Z) = f_n(N) + f_z(Z) + f_a(A) \quad (16)$$

Решение данной задачи сводится к нахождению набора значений функций $f_n(N)$, $f_z(Z)$ и $f_a(A)$, которые наилучшим образом аппроксимируют данные из *AME2020*. В рассмотрение были взяты только ядра с массовым числом $A \geq 40$, то есть область, где соотношения Гарви–Келсона наилучшим образом выполняются. Также из рассмотрения были исключены ядра с $N = Z$, так как этим ядрам свойственна повышенная устойчивость, вызванная энергией Вигнера [48], связанной с особой корреляцией нейтрон-протонных пар в ядрах, где нейтроны и

протоны занимают одинаковые орбитали в рамках оболочечной модели. Нахождение коэффициентов было произведено при помощи линейного метода наименьших квадратов (МНК). Задача МНК выглядела как:

$$A \cdot X = B + \epsilon \quad (17)$$

В уравнении (17) A —матрица системы с размерностью $m \times n$, где $n = 2278$ является числом ядер с $A \geq 40$ из *AME2020*, а $m = 540$ и равняется количеству искомым коэффициентов. Таким образом, матрица A представляет собой совокупность строк, где все элементы равняются нулю за исключением тех, которые соответствуют его количеству нейтронов, количеству протонов и массовому числу. B —вектор экспериментальных энергий связи из *AME2020*, ϵ —случайная ошибка, а X —вектор искомым параметров, состоящий из $m = 540$ элементов:

$$X = \begin{pmatrix} f_n(N = 1) \\ \vdots \\ f_n(N = 160) \\ f_z(Z = 1) \\ \vdots \\ f_z(Z = 110) \\ f_a(A = 1) \\ \vdots \\ f_a(A = 270) \end{pmatrix}$$

Решение уравнения (17) находилось в виде $X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$ и было найдено при помощи МНК. Таким образом, были получены значения коэффициентов $f_n(N = 1 \dots N = 160)$, $f_z(Z = 1 \dots N = 110)$, $f_a(A = 1 \dots A = 270)$. Так как в рассмотрение были взяты только ядра с $A \geq 40$, то в действительности в рамках задачи МНК актуальными будут являться коэффициенты, присущие этой области ядер, то есть $f_n(N = 18 \dots N = 160)$, $f_z(Z = 14 \dots N = 110)$, $f_a(A = 40 \dots A = 270)$. Стоит отметить, что величины погрешностей некоторых стабильных ядер в *AME2020* определена вплоть

до нескольких кэВ. Соотношения Гарви–Келсона, как было показано в разделе 2.1., достигают точности в несколько сотен кэВ. По этой причине в рамках данной работы для уменьшения влияния сверхнизких погрешностей стабильных ядер из *AME2020* значение экспериментальных погрешностей не учитывалось.

2.3. Аппроксимация коэффициентов $f_n(N)$, $f_z(Z)$ и $f_a(A)$

По полученным наборам значений коэффициентов f_n , f_z и f_a были построены их зависимости от N , Z и A соответственно. Можно заметить, что в большинстве своем полученные значения коэффициентов представляют собой упорядоченную последовательность данных, однако присутствуют значения, выпадающие из общей зависимости. На рисунке 5 эти значения выделены красным цветом.

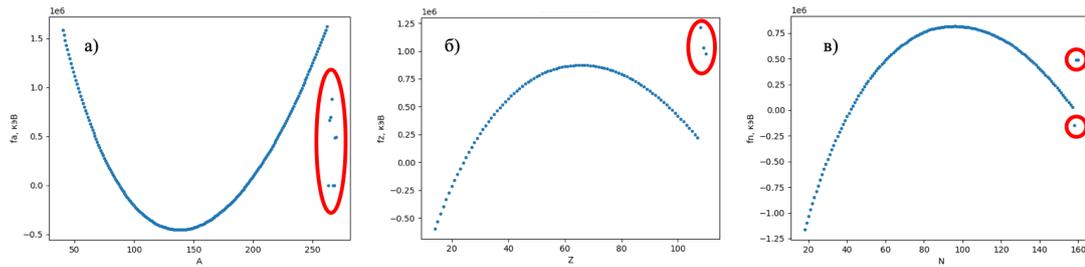


Рис. 5: Полученные при помощи МНК зависимости коэффициентов: а) f_a от A , б) f_z от Z , в) f_n от N

Наличие подобных данных, выбивающихся из общей зависимости, объясняется тем, что количество экспериментальных данных из *AME2020* для некоторых сверхтяжелых ядер с подобными коэффициентами пока не слишком высоко или же полностью отсутствует. В дальнейшем данные выбивающиеся значения были отброшены из рассмотрения.

Детальное исследование получившихся зависимостей позволило выявить то, что для коэффициентов f_z также как и для коэффициентов f_n наблюдается присутствие четно-нечетных эффектов. Наличие данных эффектов наглядно показано на рисунке 6.

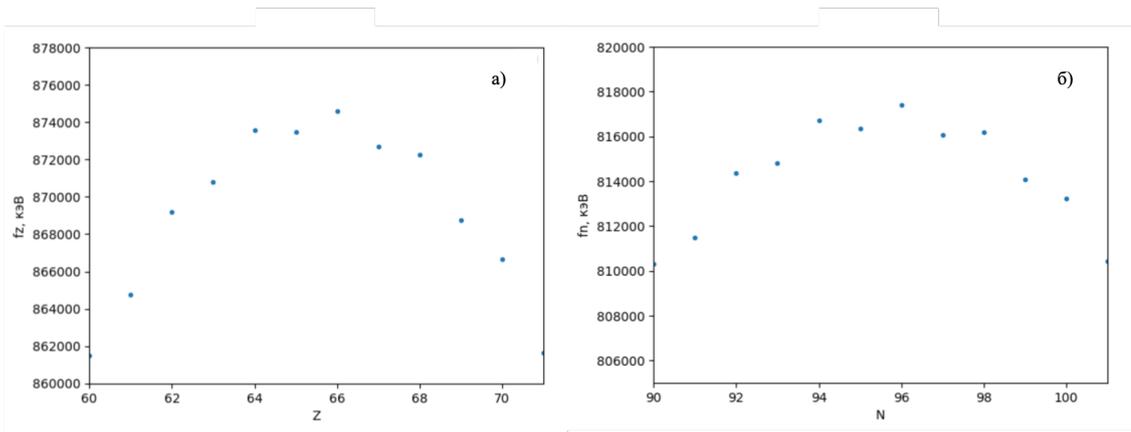


Рис. 6: Полученные при помощи МНК зависимости коэффициентов : а) f_z от Z в области $60 \leq Z \leq 71$, б) f_n от N в области $90 \leq N \leq 101$

Для реконструкции недостающих значений и экстраполяции в область тяжелых ядер решено произвести аппроксимацию полученных наборов данных. Для учета четно-нечетных эффектов решено аппроксимировать коэффициенты $f_n(N)$ и $f_z(Z)$ по отдельности для четных и нечетных N или Z соответственно. Критерием качества проведенной аппроксимации служил показатель χ^2/ndf :

$$\chi^2/ndf = \frac{1}{ndf} \sum_{i=1}^{ndf} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2, \quad (18)$$

где ndf (number of degrees of freedom) – количество степеней свободы, X_i – независимые нормальные случайные величины, μ – математическое ожидание, σ – среднеквадратичное отклонение. Аппроксимация тем лучше, чем ближе этот показатель к единице. Используя данный подход, выбор аппроксимирующего полинома был сделан в пользу полинома пятой степени вида:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5, \quad (19)$$

где x равняется A , N или же Z в зависимости от аппроксимируемых данных.

Дальнейшее увеличение степени полинома не привело к существенному улучшению качества аппроксимации, которое для всех

наборов коэффициентов f_n , f_z и f_a было оценено при помощи χ^2/ndf . Значение данного показателя во всех случаях оказалось меньше 1.2, что свидетельствует об успешной аппроксимации данных. Аппроксимация коэффициентов f_a , f_n и f_z представлено на рисунках 7-9.

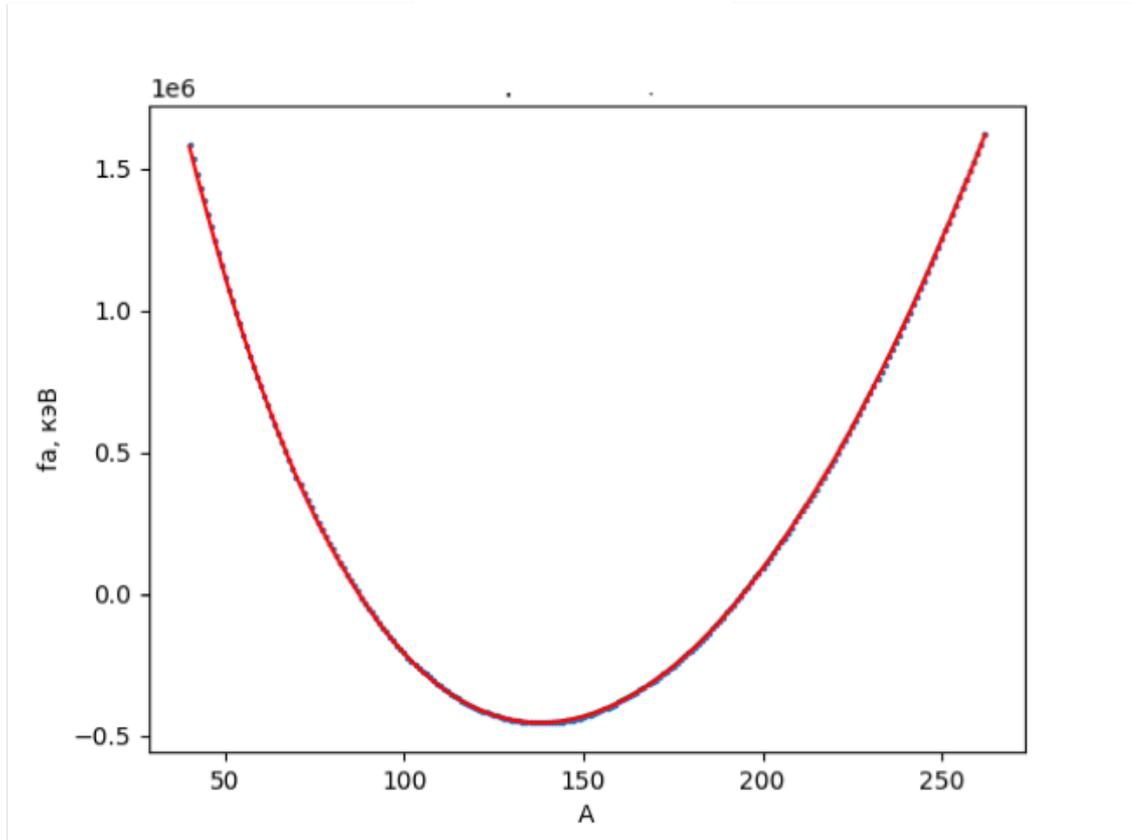


Рис. 7: Аппроксимация коэффициентов f_a полиномом пятой степени

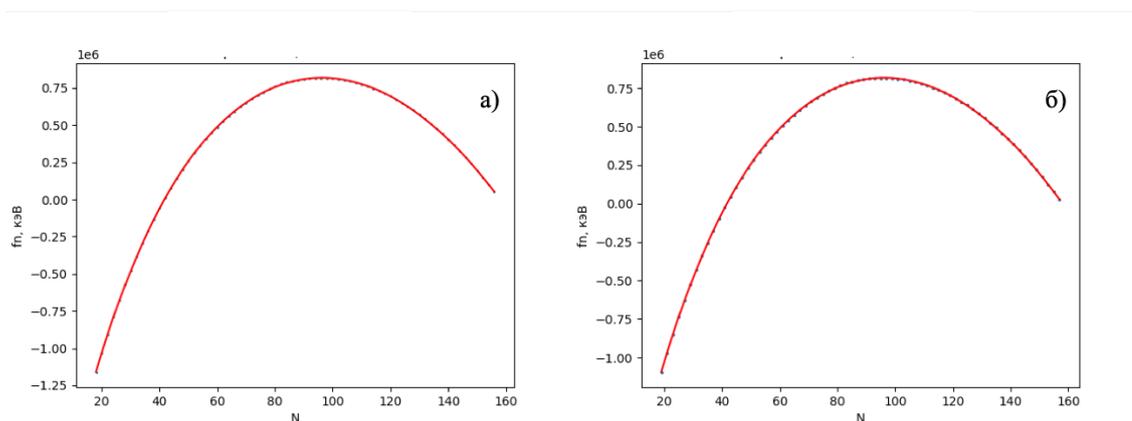


Рис. 8: Аппроксимация коэффициентов f_n полиномом пятой степени: а) случай четных N , б) случай нечетных N

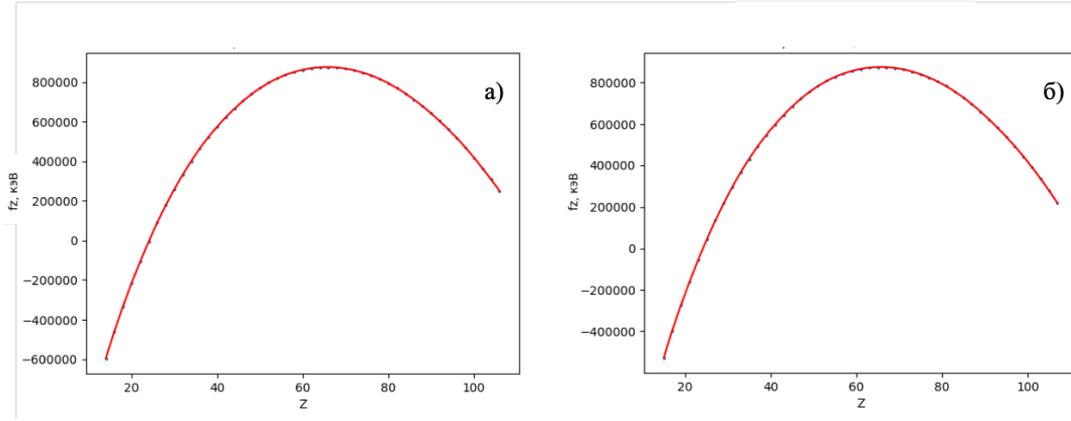


Рис. 9: Аппроксимация коэффициентов f_z полиномом пятой степени: а) случай четных Z , б) случай нечетных Z

Полученные наборы коэффициентов полинома (19) представлены в таблице 4 ниже:

Таблица 4: Коэффициенты полинома (19), полученные из аппроксимации

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
f_a	-5.336e-06	5.727e-03	-2.480e+00	6.673e+02	-9.297e+04	4.375e+06
$f_{n_{even}}$	6.001e-05	-3.553e-02	8.479e+00	-1.234e+03	1.028e+05	-2.655e+06
$f_{n_{odd}}$	5.681e-05	-3.405e-02	8.221e+00	-1.213e+03	1.020e+05	-2.646e+06
$f_{z_{even}}$	2.485e-04	-1.010e-01	1.686e+01	-1.822e+03	1.126e+05	-1.858e+06
$f_{z_{odd}}$	2.336e-04	-9.621e-02	1.627e+01	-1.789e+03	1.117e+05	-1.851e+06

Полученные коэффициенты полинома были использованы для предсказания значений коэффициентов f_n , f_z и f_a , выходящих за пределы экспериментальных данных, вплоть до $N = 200$, $Z = 120$ и $A = 320$.

2.4. Сравнение полученных результатов с данными из AME2020

Полученные значения коэффициентов f_n , f_z и f_a были подставлены в общее решение разностного уравнения Гарви–Келсона (16), благодаря чему был получен набор значений энергий связи атомных ядер $B(N, Z)$. Было произведено сравнение этого набора с данными из AME2020. В рамках данного сравнения из полученных значений энергий связи вычитались данные AME2020. Результаты произведенного сравнения представлены на рисунке 10.

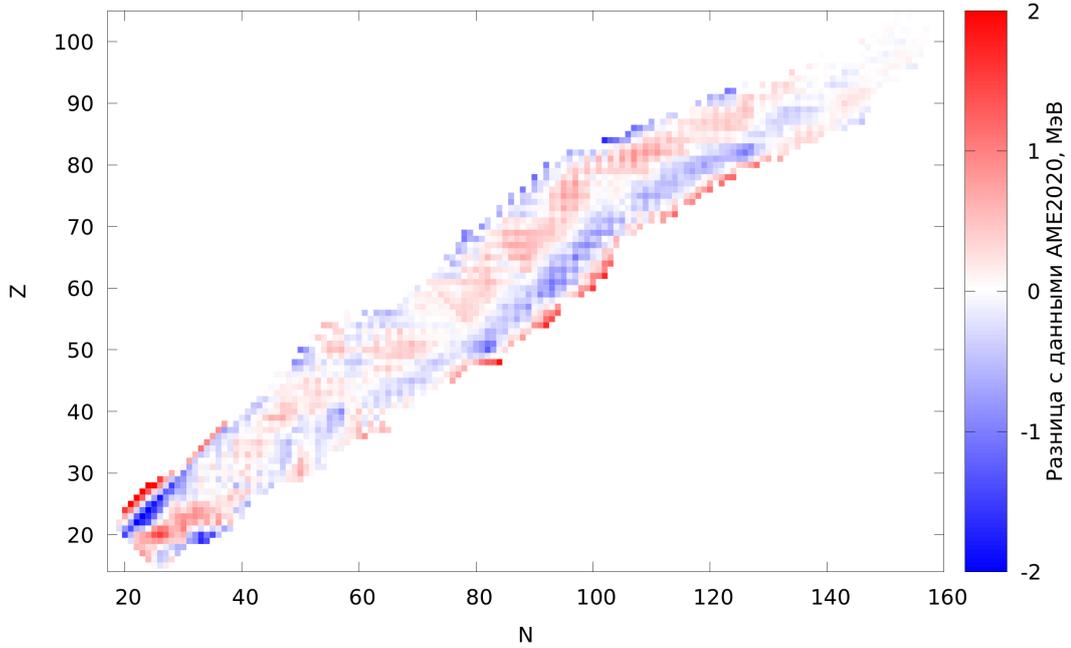


Рис. 10: Сравнение полученных при решении разностного уравнения энергий связи атомных ядер $B(N, Z)$ с данными из $AME2020$.

В рамках данного сравнения можно говорить об успешности используемого метода, так как для всех ядер отклонение между энергиями связи, рассчитанными в рамках общего решения разностного уравнения Гарви–Келсона (16), и данными $AME2020$ не превышает 2 МэВ. Для ядер, энергии связи которых на всем рассматриваемом промежутке достигают нескольких сотен МэВ и даже больше, относительная ошибка не превышает 1.5%, а среднеквадратичное отклонение Δ_{RMS} составило 421 кэВ.

2.5. Предсказание энергий связи ядер

Экстраполяция коэффициентов f_n , f_z и f_a открыла возможности для предсказания энергий связи ядер за пределами экспериментальных данных $AME2020$. Для ядер олова $Sn(Z = 50)$, тербия $Tb(Z = 65)$, урана $U(Z = 92)$ и дармштадтия $Ds(Z = 110)$ в рамках данного подхода были предсказаны энергии связи как для изотопов, входящих в $AME2020$, так и для изотопов, не входящих в нее. Для этого бралось общее решение разностного уравнения Гарви–Келсона (16) с фиксированным коэффициентом f_z , а коэффициенты f_n и f_a

варьировались. Таким образом, были получены наборы энергий связи для каждого элемента в зависимости от массового числа A . Для всех рассмотренных ядер было произведено сравнение полученных энергий связи $B(N, Z)$ с данными $AME2020$ и другими моделями: микромакроскопической моделью $FRDM2016$ [49], моделью на основе метода Хартри–Фока–Боголюбова и ядерных сил Скирма HFB [50], а также феноменологической моделью Дюфло–Цукера $DZ10$ [51]. Сравнение полученных результатов для олова приведено на рисунках 11 и 12.

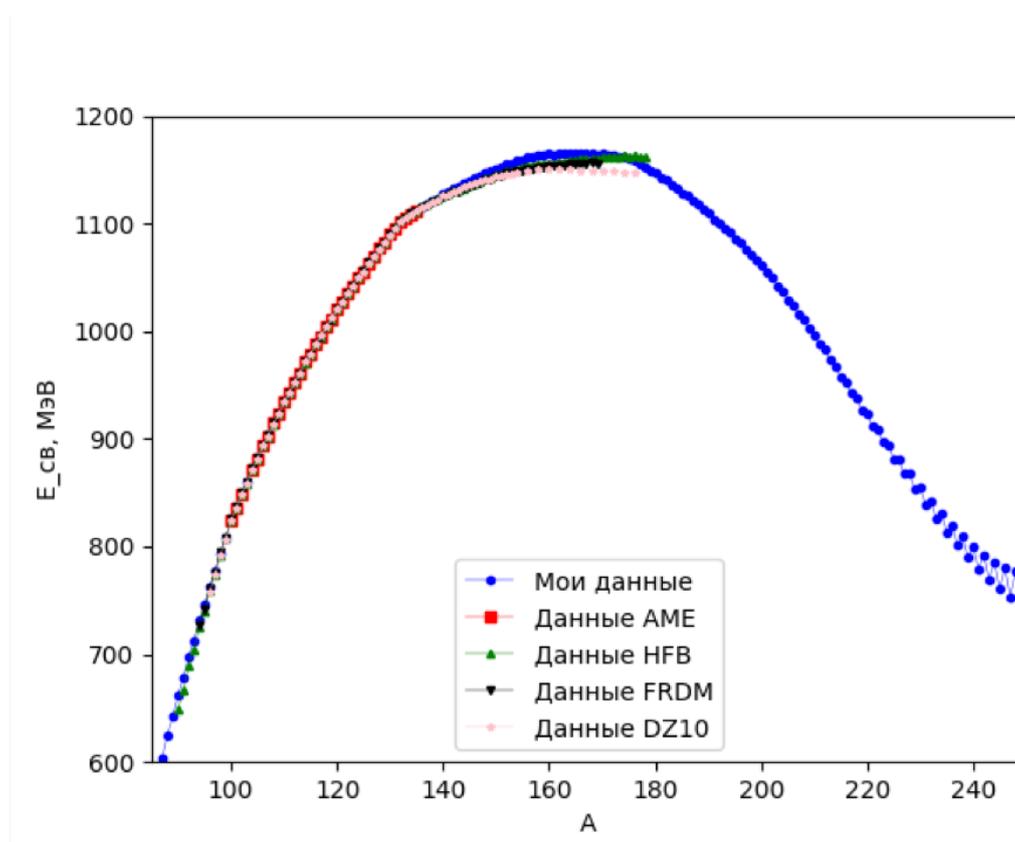


Рис. 11: Предсказание энергий связи $Sn(Z = 50)$ в сравнении с данными $AME2020$ и другими моделями.

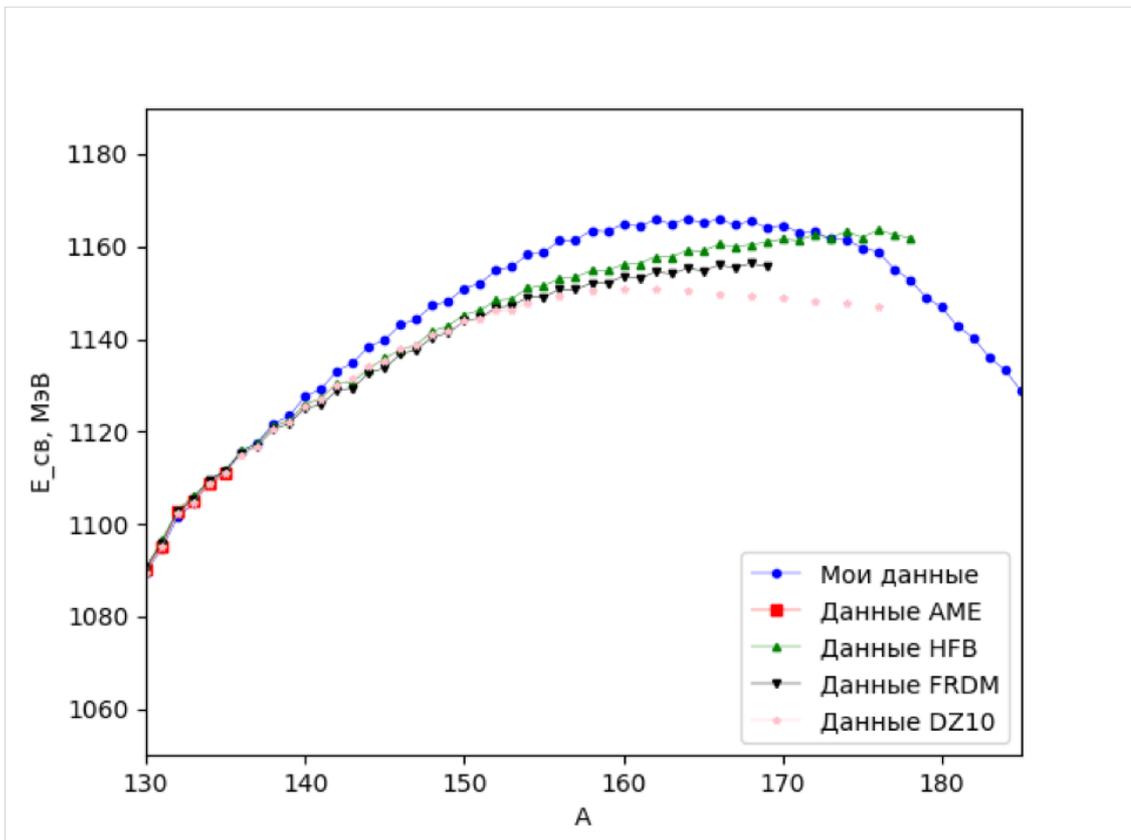


Рис. 12: Предсказание энергий связи $S_n(Z = 50)$ в сравнении с данными $AME2020$ и другими моделями в области $130 \leq A \leq 185$.

Предсказания энергий связи в рамках подхода общего решения разностного уравнения Гарви–Келсона (16) ограничивается лишь тем, насколько далеко будут экстраполированы коэффициенты f_n и f_a . Именно поэтому данная модель предсказывает также и значительно более тяжелые изотопы олова с $Z = 50$ по сравнению с другими моделями. Предсказания данной работы хорошо согласуются с предсказаниями других моделей в области легких изотопов, выходящих за пределы экспериментальных данных. Также все рассмотренные модели успешно описывают данные $AME2020$. В области тяжелых изотопов, выходящих за пределы экспериментальных данных, данная модель находится в хорошем согласии с другими моделями примерно до $A = 144$, после чего несколько превышает другие предсказания вплоть до $A = 172$, где они совпадают с данными $HFБ$. Стоит отметить, что предсказания трех других моделей, представленных в сравнении, дают различные предсказания в области

$A > 155$. Далее рассмотрим результаты для тербия с $Z = 65$. Они представлены на рисунках 13 и 14.

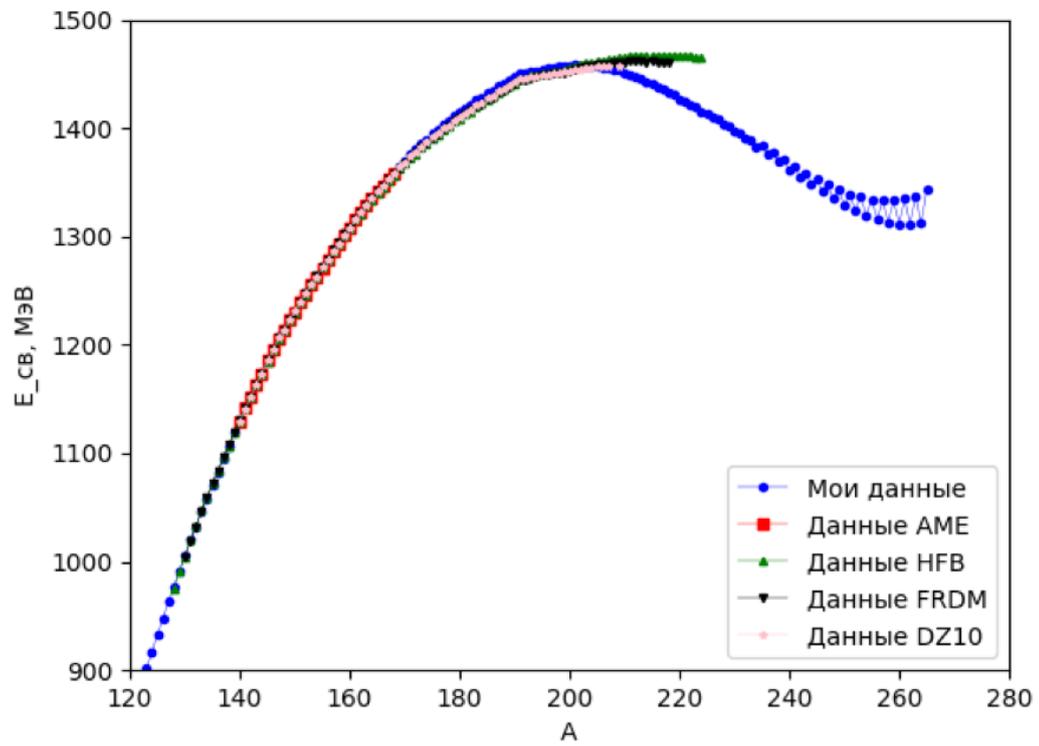


Рис. 13: Предсказание энергий связи $Tb(Z = 65)$ в сравнении с данными AME2020 и другими моделями.

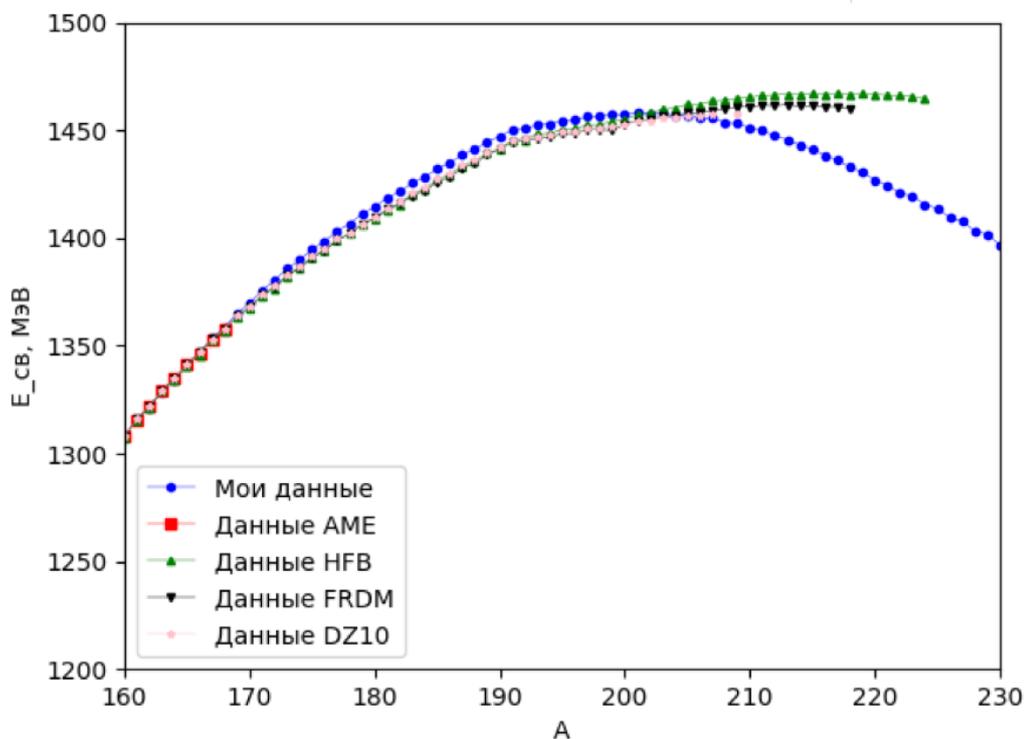


Рис. 14: Предсказание энергий связи $Tb(Z = 65)$ в сравнении с данными $AME2020$ и другими моделями в области $160 \leq A \leq 230$.

Для тербия предсказанные энергии связи хорошо согласуются с данными других методов как в области легких изотопов, выходящих за пределы экспериментальных данных, так и в области данных $AME2020$, успешно их описывая. Предсказания в области тяжелых изотопов, выходящих за пределы экспериментальных данных, у всех моделей качественно совпадают вплоть до $A = 205$, после чего подход данной работы предсказывает энергии связи ниже, чем остальные модели. В области сверхтяжелых изотопов при $A > 240$, как и в случае с оловом, можно наблюдать своего рода раздвоение зависимости, что является следствием отдельной аппроксимации коэффициентов $f_n(N)$ для четных и нечетных аргументов. Следующими рассмотрим результаты для урана с $Z = 92$. Эти сравнения представлены на рисунках 15 и 16.

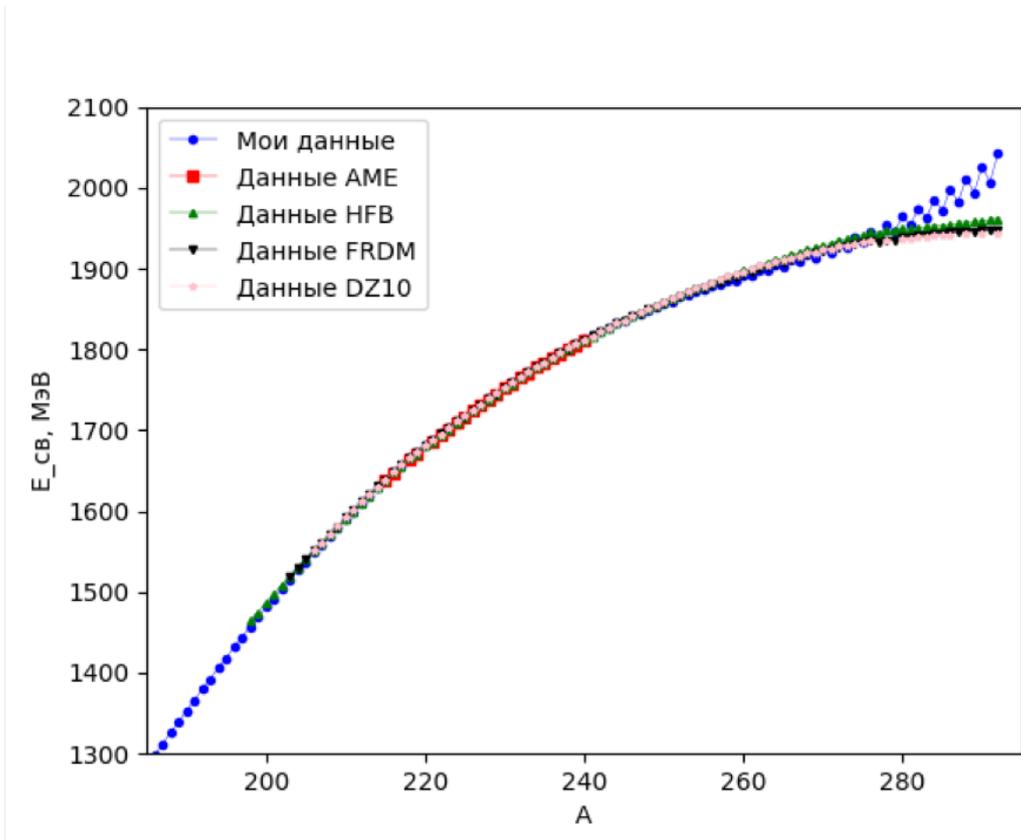


Рис. 15: Предсказание энергий связи $U(Z = 92)$ в сравнении с данными *AME2020* и другими моделями.

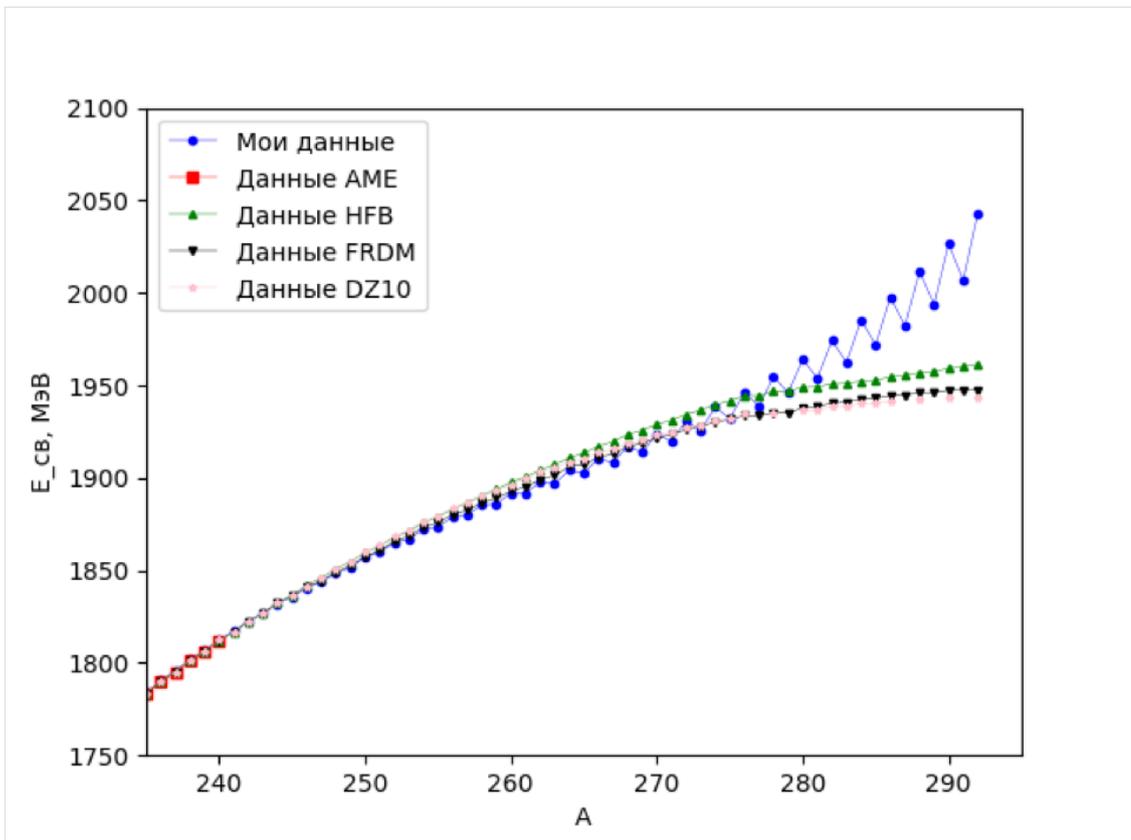


Рис. 16: Предсказание энергий связи $U(Z = 92)$ в сравнении с данными $AME2020$ и другими моделями в области $235 \leq A \leq 295$.

Предсказанные энергии связи для урана хорошо согласуются в области легких изотопов, выходящих за пределы экспериментальных данных. Также все рассмотренные модели успешно описывают данные $AME2020$. В области тяжелых изотопов за пределами данных $AME2020$ модели находятся в согласии до $A = 277$. При $A > 277$ энергии связи, предсказанные в рамках данной модели, начинают превышать данные других моделей. Для урана в области $A > 260$ так же, как и для других рассмотренных ядер, наблюдается своего рода раздвоение полученной зависимости энергий связи, что является следствием раздельной аппроксимации коэффициентов $f_n(N)$ для четных и нечетных N . Последним рассмотренным в данной работе элементом является дармштадтий с $Z = 110$. Результаты сравнения для этого элемента приведены на рисунках 17 и 18.

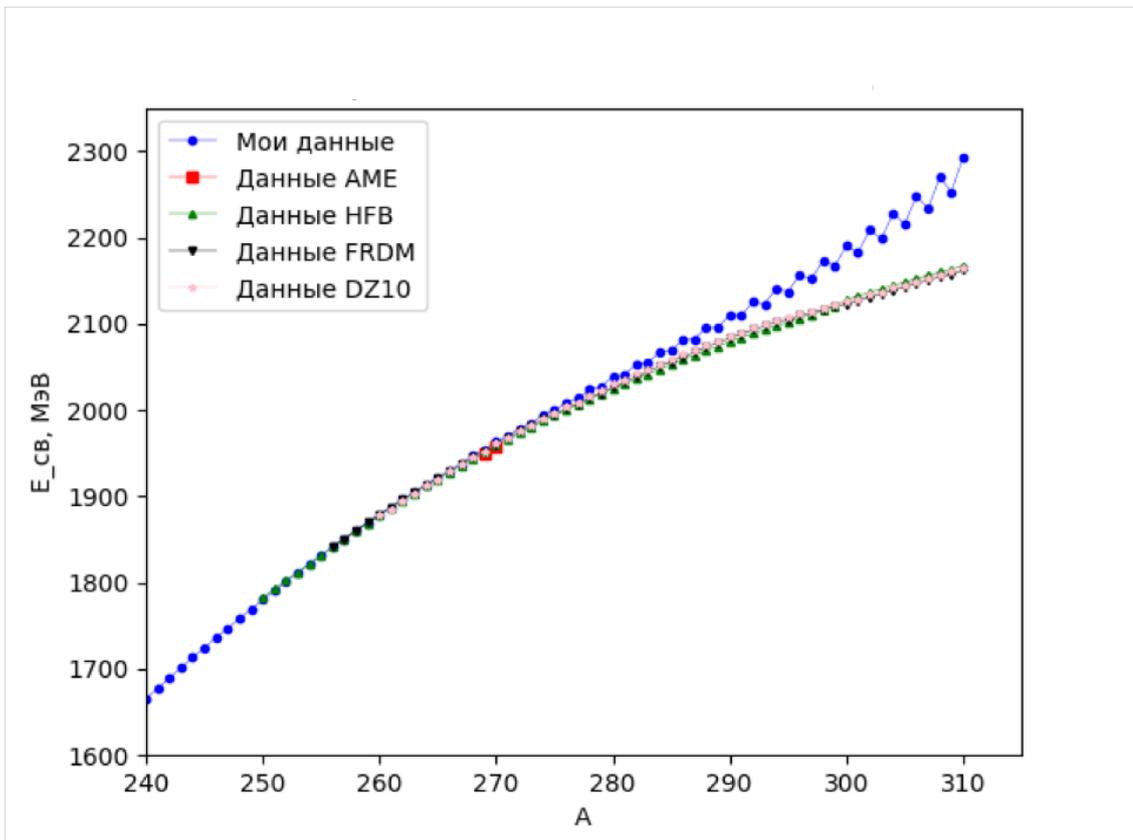


Рис. 17: Предсказание энергий связи $Ds(Z = 110)$ в сравнении с данными AME2020 и другими моделями.

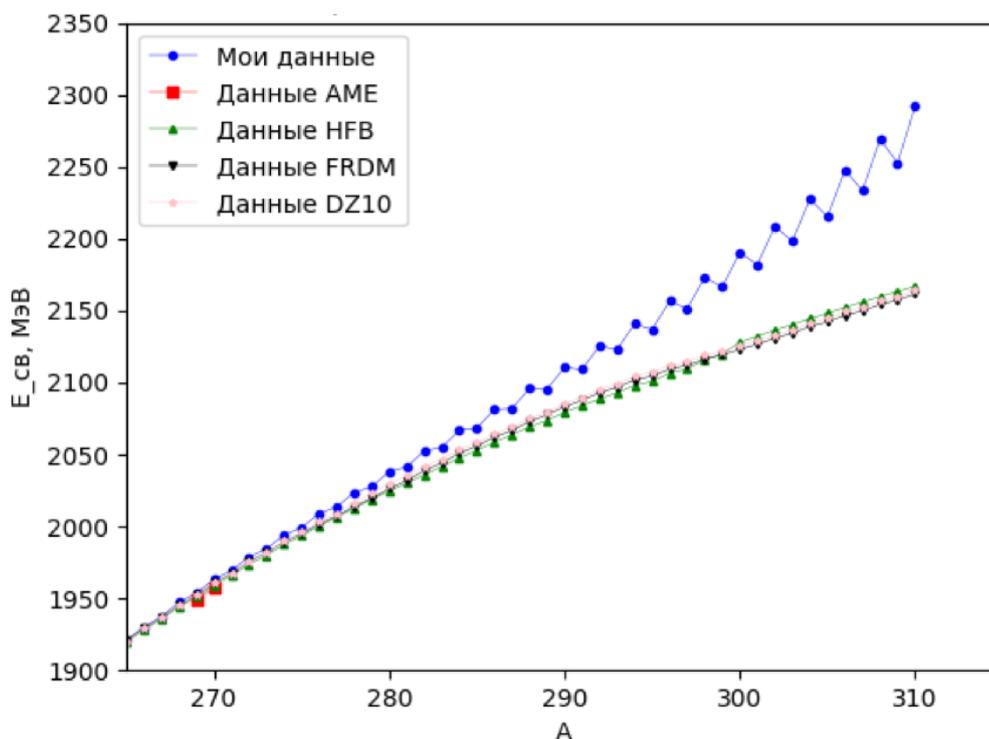


Рис. 18: Предсказание энергий связи $Ds(Z = 110)$ в сравнении с данными $AME2020$ и другими моделями в области $265 \leq A \leq 315$.

Для дармштадтия в целом картина повторяется. Предсказанные энергии связи хорошо согласуются с данными других методов в области выходящих за пределы экспериментальных данных легких изотопов. Также все рассмотренные модели успешно описывают данные $AME2020$. Предсказания в области тяжелых изотопов, выходящих за пределы экспериментальных данных, у всех моделей качественно совпадают вплоть до $A = 280$, результаты данной работы превышают предсказания, выполненные в других работах. Для изотопов дармштадтия с увеличением A , особенно в области $A > 280$ наблюдается раздвоение полученной зависимости энергий связи, что является результатом отдельной аппроксимации коэффициентов $f_n(N)$ для четных и нечетных N .

Подытоживая произведенное предсказание энергий связи, можно выделить некоторые общие черты для всех рассмотренных элементов. Модель на основе общего решения разностного уравнения Гарви–Келсона

(16) в целом показала свою успешность. Модель успешно описывает экспериментальные данные из *AME2020*, предсказания в области легких изотопов полностью согласуются с моделями, использующими иные подходы. В области же тяжелых изотопов за пределами данных *AME2020* модель показала успешную, но ограниченную предсказательную способность. Это связано с тем, что в этой области ядра являются сильно нейтроноизбыточными. Соотношения Гарви–Келсона же являются симметричными относительно N и Z и работают лучше в области протоноизбыточных ядер при $N = Z$.

Заключение

В настоящей работе было показано, что соотношения Гарви–Келсона в точности выполняются в рамках одночастичной модели оболочек. Но в действительности эти соотношения выполняются лишь приближенно. Рассмотрение соотношений в модели одночастичной модели оболочек с использованием аксиально-симметричного потенциала Нильссона привело к отклонению соотношений Гарви–Келсона от точного нуля при определенных конфигурациях ядра.

Были построены зависимости соотношений Гарви–Келсона от массового числа на основе современной таблицы атомных ядер *AME2020* и посчитаны среднеквадратичные отклонения для поперечного и продольного соотношения GK_T и GK_L . Они получились равными соответственно 598.3 кэВ и 485.9 кэВ соответственно. Также среднеквадратичные отклонения были рассчитаны для $A \geq 40$. В этой области для GK_T среднеквадратичное отклонение составило 421.8 кэВ, а для GK_L оно получилось равным 308.2 кэВ.

На основе данных *AME2020* получен набор значений функций Гарви и Келсона $f_n(N)$, $f_z(Z)$ и $f_a(A)$ для ядер с $A \geq 40$. Полученные наборы коэффициентов f_n , f_z , f_a были аппроксимированы при помощи полиномов пятой степени. Полученные из аппроксимации коэффициенты полинома позволили восстановить недостающие значения функций, а также предсказать значения f_n , f_z , f_a далеко за пределы экспериментальных данных вплоть до $N = 200$, $Z = 120$ и $A = 320$ соответственно. После этого были рассчитаны энергии связи ядер $B(N, Z)$, и произведено их сравнение с экспериментальными значениями из *AME2020*.

Для элементов *Sn*, *Tb*, *U* и *Ds* в рамках данного метода были предсказаны энергии связи изотопов за пределами данных *AME2020*, а также приведено сравнение с другими работами. Модель показала свою успешность. Также было установлено, что в области тяжелых нейтроноизбыточных изотопов далеко за пределами данных

AME2020 модель показала успешную, но ограниченную предсказательную способность, что связано с симметричностью соотношений Гарви–Келсона относительно N и Z , в связи с чем работают они лучше в области протоноизбыточных ядер при $N = Z$.

Благодарности

Автор выражает благодарность К.А. Стопани за отзывчивость, полезные советы, ценные обсуждения и неоценимую помощь в работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] National Nuclear Data Center (NNDS), <http://www.nndc.bnl.gov/>.
- [2] Zepeng Gao, Yongjia Wang, Hongliang Lü et al. // Nucl. Sci. Tech. 32. 10, (2021), 1.
- [3] <http://nuclphys.sinp.msu.ru/anuc/anuc02.htm>
- [4] G. Audi // Int. J. Mass Spectr. 251, (2006), 85.
- [5] A.H. Wapstra // Hyperfine Interact. 132, (2001), 127.
- [6] E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, F. Hoyle // Rev. Mod. Phys. 29. 4, (1957), 548 – 550.
- [7] T. Yamaguchi, H. Koura, Yu.A. Litvinov, M. Wang // Prog. Part. Nucl. Phys. 120, (2021), 103882.
- [8] W.D. Myers, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 411-417
- [9] H.v. Groote, E.R. Hilf, K. Takahashi, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 418-427
- [10] P.A. Seeger, W.M. Howard, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 428-430
- [11] S. Liran, N. Zeldes, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 431-441
- [12] M. Bauer, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 442-449
- [13] M. Beiner, R.J. Lombard, D. Mas, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 450-454
- [14] J. Jänecke, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 455-462
- [15] E. Comay, I. Kelson, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 463-466
- [16] J. Jänecke, B. P. Eyton, At. Data Nucl. Data Tables 17 (1976) 467-473
- [17] A. Pape and M.S. Antony, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988) 201-203
- [18] G. Dussel, E. Caurier, A.P. Zuker, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988) 205-211
- [19] P. Möller, J.R. Nix, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988) 213-223
- [20] P. Möller, W.D. Myers, W.J. Swiatecki, J. Treiner, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988) 225-233
- [21] E. Comay, I. Kelson, A. Zidon, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988) 235-240
- [22] L. Satpathy and R.C. Nayak, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988)

241-249

- [23] T. Tachibana, M. Uno, M. Yamada, S. Yamada, *At. Data Nucl. Data Tables* 39 (1988) 251-258
- [24] L. Spanier, S.A.E. Johansson, *At. Data Nucl. Data Tables* 39 (1988) 259-264
- [25] J. Jänecke, P.J. Masson, *At. Data Nucl. Data Tables* 39 (1988) 265-271
- [26] P.J. Masson, J. Jänecke, *At. Data Nucl. Data Tables* 39 (1988) 273-280
- [27] P. Möller, *At. Data Nucl. Data Tables* 59 (1995) 185
- [28] P. Möller, *At. Data Nucl. Data Tables* 109-110 (2016) 1-204
- [29] H. Koura, M. Uno, T. Tachibana and M. Yamada, *Nucl. Phys. A* 674 (2000) 47
- [30] H. Koura, T. Tachibana, M. Uno and M. Yamada *Progress of Theoretical Physics* 113 (2005)305-325
- [31] Ning Wang, Min Liu and Xizhen Wu, *Phys. Rev. C* 81 (2010) 044322
- [32] Ning Wang, Zuoying Liang, Min Liu, Xizhen Wu, *Phys. Rev. C* 82 (2010) 044304
- [33] Min Liu, Ning Wang, Yangge Deng, Xizhen Wu, *Phys. Rev. C* 84 (2011) 014333
- [34] Ning Wang and Min Liu, *Phys. Rev. C* 84 (2011) 051303(R)
- [35] Ning Wang, Min Liu, Xizhen Wu and Jie Meng, *Phys. Lett. B* 734 (2014) 215
- [36] J. Dufflo, A.P. Zuker, *Phys. Rev. C* 52 (1995) R23-27
- [37] C.F. von Weizsäcker // *Z. Physik* 96, (1935), 431.
- [38] M.Goeppert-Mayer. *Phys. Rev.* 75 (1949) 1464.
- [39] O.Haxell, J.Jensen, H.Suess. *Phys. Rev.* 75 (1949) 1766.
- [40] Hartree D. R. *The Wave Mechanics of an Atom with a Non-Coulomb Central Field. Part I. Theory and Methods* // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* — Vol. 24, no. 1. — P. 89–110.
- [41] Fock V. *Näherungsmethode zur Lösung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems* // *Z. Physik.* — 1930. — T. 61. — C. 126–148.
- [42] Боголюбов Н. Н. *Об одном вариационном принципе в задаче многих*

- тел // ДАН СССР. — 1958. — Т. 119, № 2. — С. 244–246.
- [43] Strutinsky V. “Shells” in deformed nuclei // Nuclear Physics A. — 1968. — Vol. 122, no. 1. — P. 1–33.
- [44] Garvey G. T., Kelson I. New Nuclidic Mass Relationship // Phys. Rev. Lett. — 1966. — Vol. 16, no. 5. — P. 197–200.
- [45] Nilsson S G 1955 Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 no 16
- [46] W.J. Huang, M. Wang, F.G. Kondev et al, Chinese Phys. C (2021) 45 030002
- [47] G.T. Garvey, W.J. Gerace, R.L. Jaffe et al. // Rev. Mod. Phys. 41, (1969), S1.
- [48] W. Satula et al./Physics Letters B 407 (1997) 103-109
- [49] P. Möller et al. Nuclear ground-state masses and deformations: FRDM (2012) // At. Data and Nucl. Data. Tables, 2016. V. 109–110, pp. 1–204.
- [50] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Further explorations of SkyrmeHartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. XIII. the 2012 atomic mass evaluation and the symmetry coefficient // Phys. Rev. C. — 2013. — Vol. 88, no. 2. — P. 1–14.
- [51] J. Mendoza-Temis, J.G. Hirsch and A.P. Zuker, Nucl. Phys. A 843 (2010) 14.