



# Фотомагнитное расщепление дейтрона

Дзюба А.А.

Лаборатория барионной физики

ОФВЭ НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ

Семинар им. Б.С. Ишханова, НИИЯФ МГУ, 23 октября 2025 г.



# Семинар им. Б.С. Ишханова

- Огромное спасибо за возможность выступить на Семинаре!

## Ядерная физика в интернете

Проект кафедры общей ядерной физики физического факультета МГУ  
и отдела электромагнитных процессов и взаимодействия атомных ядер НИИЯФ МГУ



### Учебные материалы курса «Физика атомного ядра и частиц»

- Физика ядра и частиц. XX век. Б. С. Ишханов, Э. И. Кэбин
- Шпаргалка для отличника (Частицы и ядра). Б. С. Ишханов, Э. И. Кэбин
- Программа курса «Физика атомного ядра и частиц»
- Лекции профессора Б. С. Ишханова (2019)
- Лекции профессора И. М. Капитонова (2024)
- Семинары профессора И. М. Капитонова
- Лекции доцента Е. В. Широкова (2021, видео)
- Семинары по физике атомного ядра и частиц. Е. В. Широков (видео)
- Основные вопросы по курсу «Частицы и атомные ядра» (2021)
- Обязательные вопросы для допуска к экзамену
- Семинары по физике ядра и частиц. Н. Г. Гончарова
- Семинары по физике частиц и атомного ядра. Б. С. Ишханов, М. Е. Степанов, Т. Ю. Третьякова
- Задачи и решения. Н. Г. Гончарова, Б. С. Ишханов, И. М. Капитонов, Э. И. Кэбин, М. Е. Степанов
- Общий ядерный практикум
- Темы курсовых работ для студентов II курса

### Материалы спецкурсов

- Б. С. Ишханов. История атомного ядра
- Б. С. Ишханов. Микромир и Вселенная

### Поиск по сайту

- Новое на сайте
- Нобелевские лауреаты по физике
- Фотографии и биографии физиков
- Хроника открытий в физике ядра и частиц
- Борис Саркисович Ишханов — выдающийся учёный и педагог

### Справочные материалы

- Частицы и атомные ядра. Основные понятия
- Атомные ядра. Основные характеристики
- Физика атомного ядра и частиц в Физической энциклопедии
- Таблицы частиц
- Константы и единицы измерений
- Греческий алфавит
- Таблица Менделеева
- Названия химических элементов

# Развал дейтрона

Ишханов Б. С., Капитонов И. М.

60 рублей

Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979.

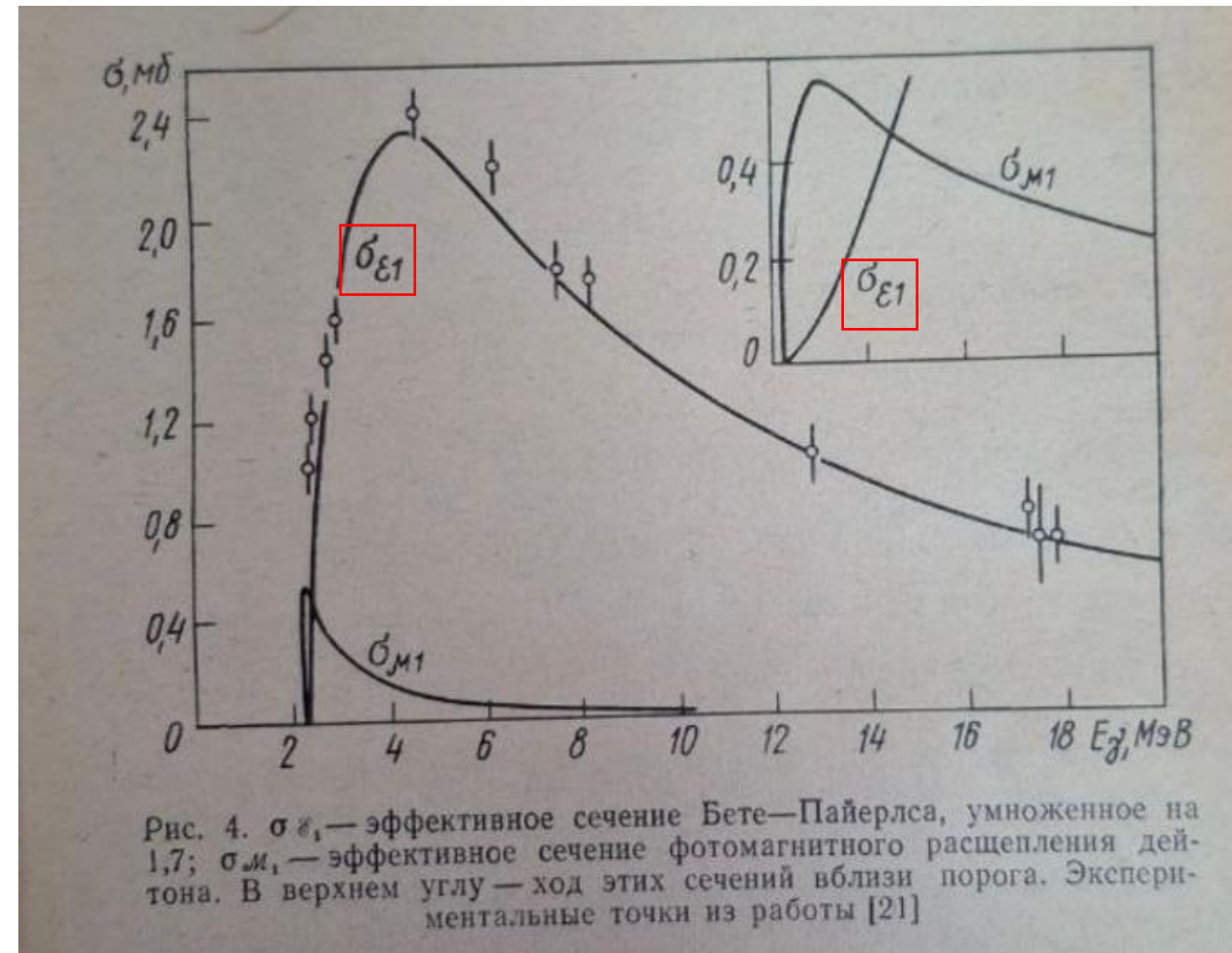
216 с. 97 ил.

Книга доступна онлайн:

<http://nuclphys.sinp.msu.ru/books/b/kapitonov.djvu>

- **Фотоэлектрическое расщепление —  $E1$ -фотоны**

- Сечение Бете-Пайерлса, 1935
  - Нулевой радиус действия ядерных сил
  - Дейтрон — чистое S-состояние
  - Пренебрежение взаимодействием в конечном состоянии



$$\sigma_{E1}(\hbar\omega) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^2 \hbar}{Mc} V \Delta W \frac{(\hbar\omega - \Delta W)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3}.$$

# Развал дейтрона

- **Фотоэлектрическое расщепление** — E1-фотоны

- Сечение Бете-Пайерлса, 1935
  - Нулевой радиус действия ядерных сил
  - Дейтрон — чистое S-состояние
  - Пренебрежение взаимодействием в конечном состоянии
- Экспериментальное сечение превышает БП в 1.7 раза
  - Более точные расчеты описывают данные в диапазоне 3-100 МэВ

- **Фотомагнитное расщепление** — M1-фотоны

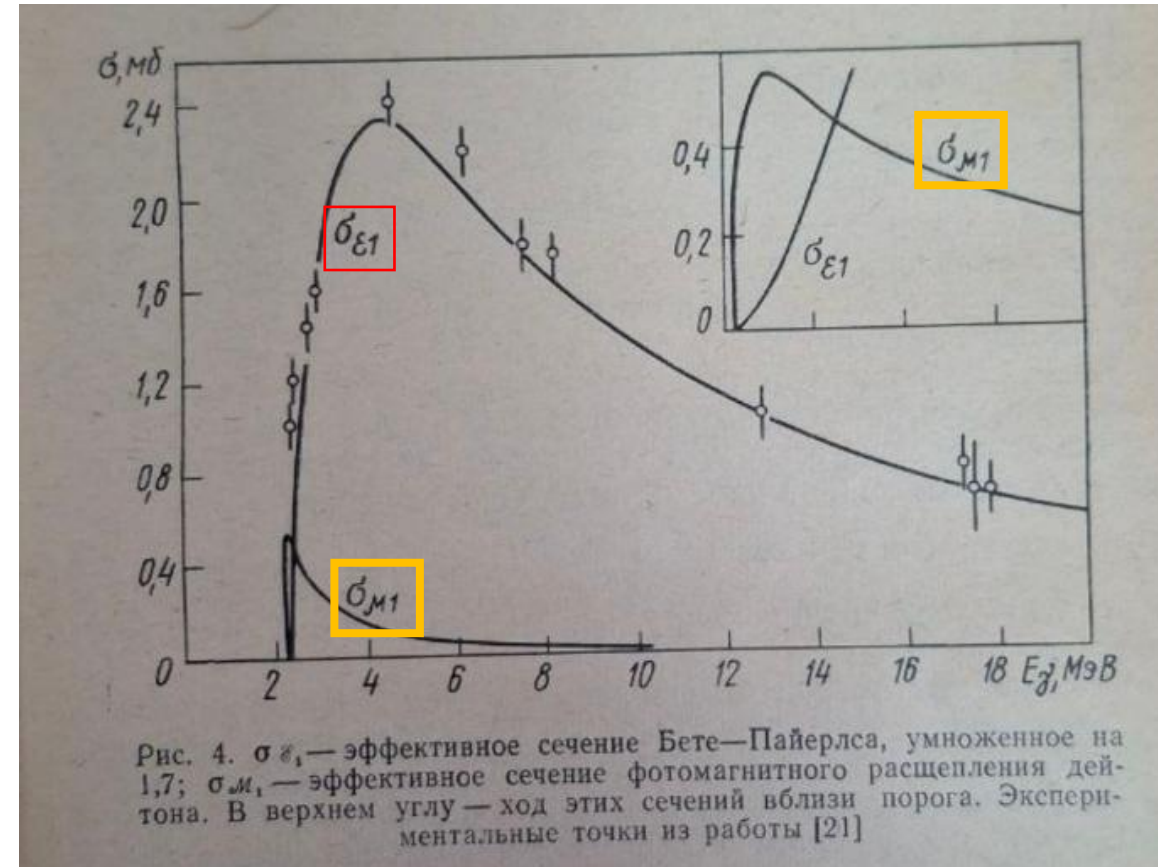
- Можно / нужно ли измерить?

Ишханов Б. С., Капитонов И. М.

60 рублей

Взаимодействие электромагнитного излучения с атомными ядрами. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979.

216 с. 97 ил.



$$\sigma_{E1}(\hbar\omega) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^2 \hbar}{Mc} V \Delta W \frac{(\hbar\omega - \Delta W)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3}.$$



# Фотомагнитное расщепление дейтрона

- Доминирует вблизи порога, задаваемого энергией связи дейтрона

- $E_{\text{св}} = 2,22457 \text{ МэВ}$

- Две возможности регистрации:

- Прямое измерение полного сечения
    - **Никто не делал точно**
  - Анизотропия вылета нейтронов

- *W. Tornow et al., Phys. Lett. B574, 8 (2003)*

**10.8. Фотомагнитное расщепление дейтона.** Как уже говорилось выше, сечение Бете — Пайерлса не объясняет поведения экспериментального сечения фоторасщепления вблизи порога. В этой области основной вклад дают переходы в S-состояние, которые при поглощении  $E1$  фотонов запрещены правилами отбора. Переходы в S-состояние могут, однако, происходить при поглощении  $M1$  фотона. Гамильтониан взаимодействия  $M1$  фотона с дейтоном пропорционален оператору его магнитного дипольного момента. Так как в рассматриваемом случае начальное и конечное состояние дейтона имеет равный нулю орбитальный момент, то в матричный элемент  $M1$  перехода дает вклад лишь та часть магнитного дипольного момента дейтона, которая определяется собственными магнитными моментами протона и нейтрона, т. е.

$$v_{M1} = \mu_p + \mu_n = \frac{e}{Mc} (\mu_p S_p + \mu_n S_n).$$

В дейтоне два антипараллельных магнитных момента (протона и нейтрона). Магнитное поле излучения стремится сделать их параллельными и, следовательно, вызывает переходы из триплетного состояния в синглетное (так как при этом спины протона и нейтрона становятся антипараллельными), т. е. в состояние  $S_0$ . Так как синглетного связанного S-состояния у дейтона нет, то наступает расщепление.

**Фотоэлектрическое: P-волна**

**Фотомагнитное: S-волновое состояние → изотропное распределение по углу вылета дейтрона**

# Фотоэлектрическое расщепление

- Современные протон-нейтронные потенциалы хорошо описывают фотоэлектрическое расщепление (I)

- *R.Schiavilla, J.Carlson, M.Paris, Phys. Rev. C70 (2004) 044007*

- *T.M. Partanen, J.A. Niskanen, Eur. Phys. J. A (2011) 47*

- Поиск эффектов несохранения четности (II)

- Прямое измерение полного сечения выполнено только для области доминирования фотоэлектрического расщепления

- Можно выполнить впервые (III)

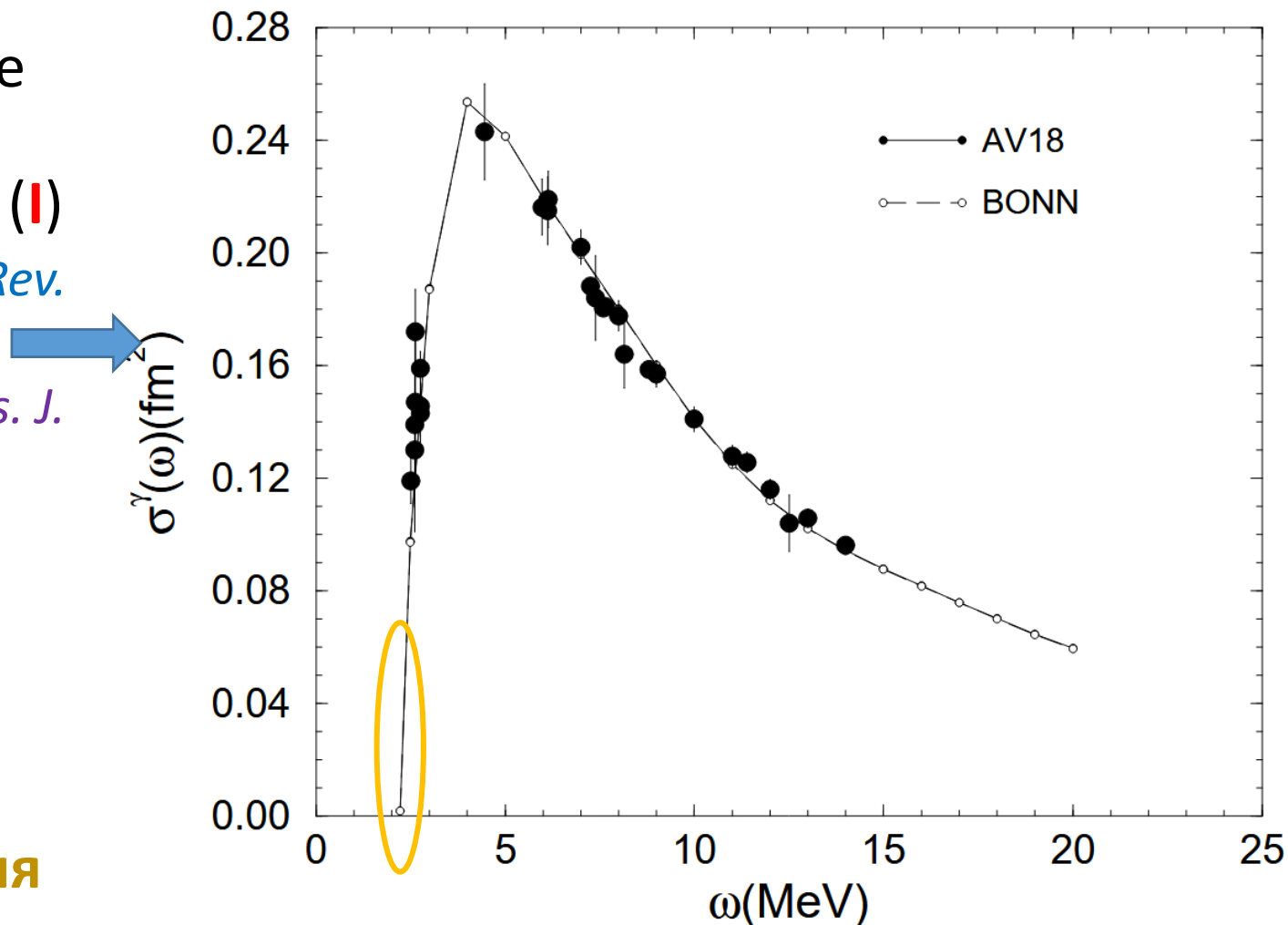


FIG. 15. The deuteron photo-disintegration cross sections, calculated with the AV18 and BONN interactions, are compared to data. Note that the AV18 and BONN results are indistinguishable.

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ba}} = \frac{p_b^2 (2J_a + 1)(2J_A + 1)}{p_a^2 (2J_b + 1)(2J_B + 1)}$$

# Почему это измеряли? (2003)

- Необходимо для решения космологической проблемы точного определения барионной плотности  $\Omega_b h^2$  в ранней Вселенной, что необходимо для согласования предсказаний нуклеосинтеза Большого Взрыва (BBN) с данными о реликтовом излучении (CMB).
  - **Роль дейтерия:** Количество дейтерия, образовавшегося во время BBN, напрямую зависит от сечения реакции захвата нейтрона протоном  $np \rightarrow d\gamma$  в диапазоне энергий 25–200 кэВ.
  - **Неопределённость в  $\Omega_b h^2$ :** из измерений фоторасщепления дейтерия
  - **Сравнение с CMB:** Результаты WMAP дали независимое значение  $\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009$ , что требовало уточнения данных BBN для проверки непротиворечивости стандартной космологической модели.
- Принцип детального равновесия: сечения прямой  $\leftrightarrow$  обратной реакции
- Измерения Phys. Rev. C 39, 1247 (1989) мотивированы  $\Omega_b h^2$
- Можно улучшить точность (IV)

# Связь с поляризуемостью дейтрона (V)

R. Moreh, T.J. Kennett, and W.V. Prestwich, Phys. Rev. C 39, 1247 (1989)

Na-24, 2,76 МэВ: 1,456 +/- 0,045 мб

It should also be added that this low-energy measurement of the absolute cross section is very important for the determination of the electric polarizability of the deuteron.<sup>19</sup> This is because the polarizability is dependent on the inverse-square energy-weighted photonuclear sum rule. This energy weighting greatly enhances the importance of the data near threshold. It also adds more confidence in the reliability of the value of the electric polarizability of the deuteron because the value of  $\sigma_D$  used in Ref. 19 was practically the same as that measured in the present work.



J. L. Frier, S. Fallieros, and E. G. Fuller, Phys. Rev. C 27, 1364 (1983)

Note: Другим способом измерения поляризуемости дейтрона является упругое рассеяние на ядрах свинца ( $T_d < 11$  МэВ)

Это очень странное утверждение поскольку в статье J. L. Frier et al. используется взвешенный интеграл спектра, а у R. Moreh et al. измерена лишь одна точка спектра

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \sigma(\omega') \frac{d\omega'}{\omega'^2} \equiv \bar{\sigma}_{-2} = \frac{\sigma_{-2}}{2\pi^2}$$





# Связь с поляризуемостью дейтрона

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \sigma(\omega') \frac{d\omega'}{\omega'^2} \equiv \bar{\sigma}_{-2} = \frac{\sigma_{-2}}{2\pi^2}$$

Извлекается из данных по рN-рассеянию

Извлекаемая поляризуемость дейтрона

Поправка на отдачу

Электрические поляризуемости протона и нейтрона

$$\bar{\alpha} = \frac{2\alpha}{3} \sum_{N \neq 0} \frac{|\langle N | \vec{D} | 0 \rangle|^2}{E_N - E_0} + \frac{Z\alpha \langle \vec{r}^2 \rangle}{3M_t} + \alpha_N$$

Поправка на пионное облако

$$\bar{\beta} = \frac{2\alpha}{3} \sum_{N \neq 0} \frac{|\langle N | \vec{\mu} | 0 \rangle|^2}{E_N - E_0} + \left[ -\frac{Z\alpha \langle \vec{r}^2 \rangle}{6M} - \frac{\alpha \langle \vec{D}^2 \rangle}{2M_t} \right] + \beta_N + \beta_\pi$$

Парамагнитная восприимчивость дейтрона

Магнитные поляризуемость дейтрона и поправка к ней на отдачу

Магнитные поляризуемости протона и нейтрона

TABLE I. Contributions to  $\sigma_{-2}$  for the deuteron in units of fm<sup>3</sup>.

	$\bar{\sigma}_{-2}$	$\alpha_E$	$\alpha'_E$	$\alpha_N + \beta_N$	$\beta_M$	$\beta_d + \beta'_d$	$\beta_\pi$
RSC	0.70	0.624	0.0010	0.0028	0.065(.077)	-0.0024	0.00006
Expt	0.69 ± 0.04	0.61 ± 0.04	Вычитают, используя теоретические расчеты				

Результат

Вычитают, используя теоретические расчеты

Закладывают из рN-данных (фит)

Reid soft core (RSC) potential model

Парамагнитная восприимчивость дейтрона – основная поправка, основной вклад в которую вносит фотомангнитное расщепление

# Как измерялось сечение фоторасщепления?

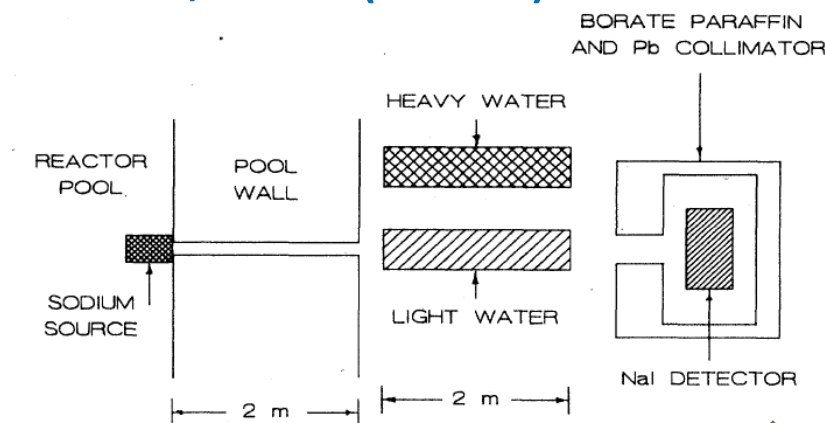
- G.R. Bishop et al., Phys. Rev. 80, 211 (1950)
  - 2.62 MeV gamma-rays emitted by RdTh (Bi-208)
  - 2.76 MeV gamma-line of radio-sodium (Na-24)
  - 2.51 MeV gamma-line of radio-gallium (Ga-72)

	Experiment	Theory
$\sigma_{2.757} \times 10^{-27} \text{ cm}^2$	$15.9 \pm 0.6$	$15.1 \pm 0.3$
$\sigma_{2.618} \times 10^{-27} \text{ cm}^2$	$13.9 \pm 0.6$	$12.5 \pm 0.3$
$\sigma_{2.757} / \sigma_{2.604}$	$1.34 \pm 0.05$	$1.49 \pm 0.02$
$\sigma_{2.618} / \sigma_{2.604}$	$1.16 \pm 0.04$	$1.24 \pm 0.01$
$\sigma_{2.604} \times 10^{27} \text{ cm}^2$	$11.9 \pm 0.8$	$10.1 \pm 0.3$

- A.H. Snell, E.C. Barker, and R.L. Sternberg, Phys. Rev. 80, 637 (1950)
  - Na-24, Ga-72

- S.A. Colgate, Phys. Rev. 83, 1262 (1951).
  - Bi-208

- J.H. Carver et al., Nature 167, 154 (1951)



- R. Moreh, T.J. Kennett, and W.V. Prestwich, Phys. Rev. C 39, 1247 (1989)

• Na-24 → 1,456 +/- 0,045 mb

# Как измерялось сечение фоторасщепления?

- A. De Graeve et al., Phys. Rev. C 45, 860 (1992)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = a + b \sin^2\theta + c \cos\theta + d \sin^2\theta \cos\theta + e \sin^4\theta, \quad (1)$$

with  $\theta$  the c.m. proton emission angle; the so-called “Par-tovi coefficients”  $a$  up to  $e$  contain the information concerning the e.m. multipolarity of the involved transition(s).

Consequently, one obtains

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(0^\circ) = a + c, \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(180^\circ) = a - c, \quad (3)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(90^\circ) = a + b + e, \quad (4)$$

while the total absorption photodisintegration cross section  $\sigma_T$  reads

$$\sigma_T = 4\pi(a + \frac{2}{3}b + \frac{8}{15}e). \quad (5)$$

Alternately, the latter can be written as

$$\sigma_T = 4\pi \left[ \frac{1}{3}a + \frac{2}{3} \frac{d\sigma}{d\Omega}(90^\circ) - \frac{2}{15}e \right].$$

Теоретическая оценка  
(мал, 5% от изм. при 90град)

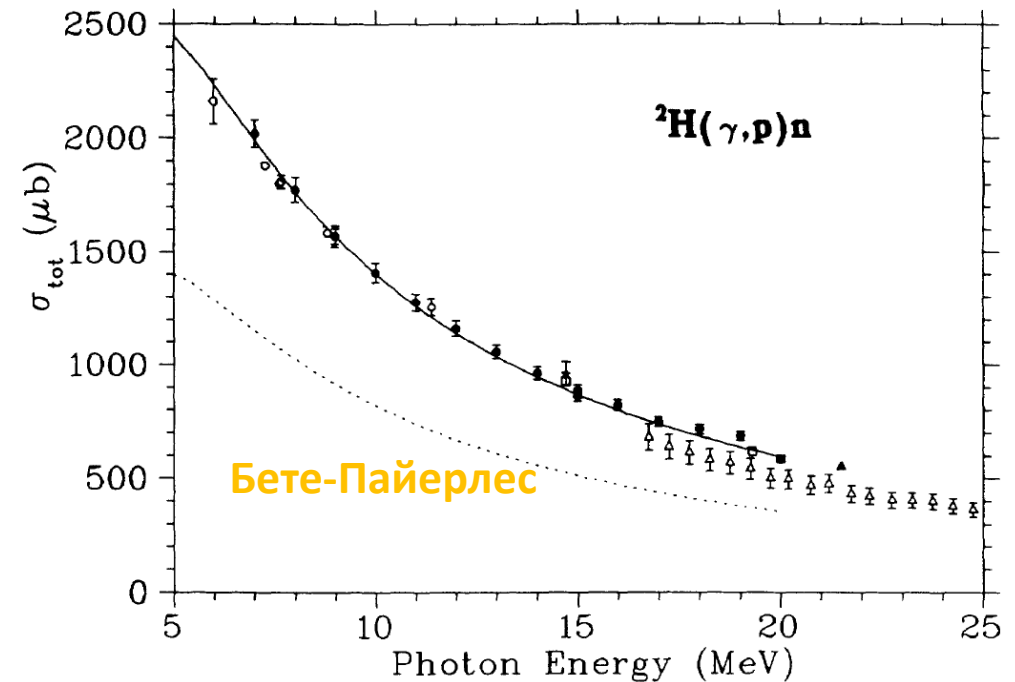
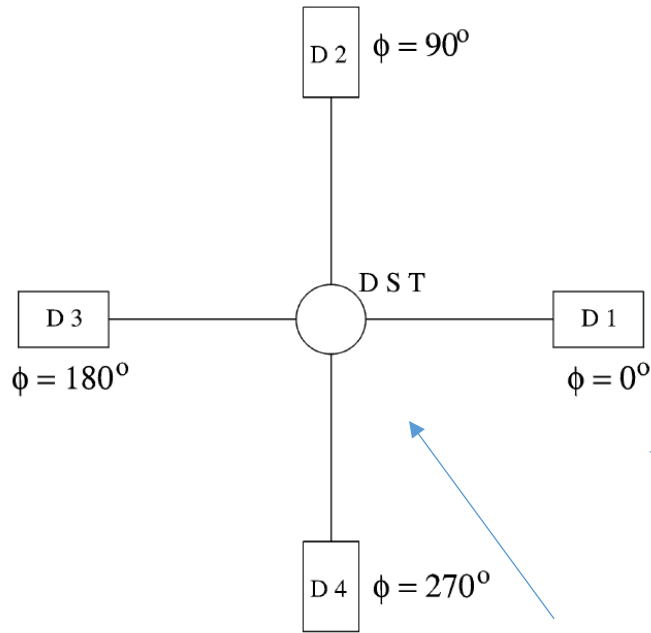


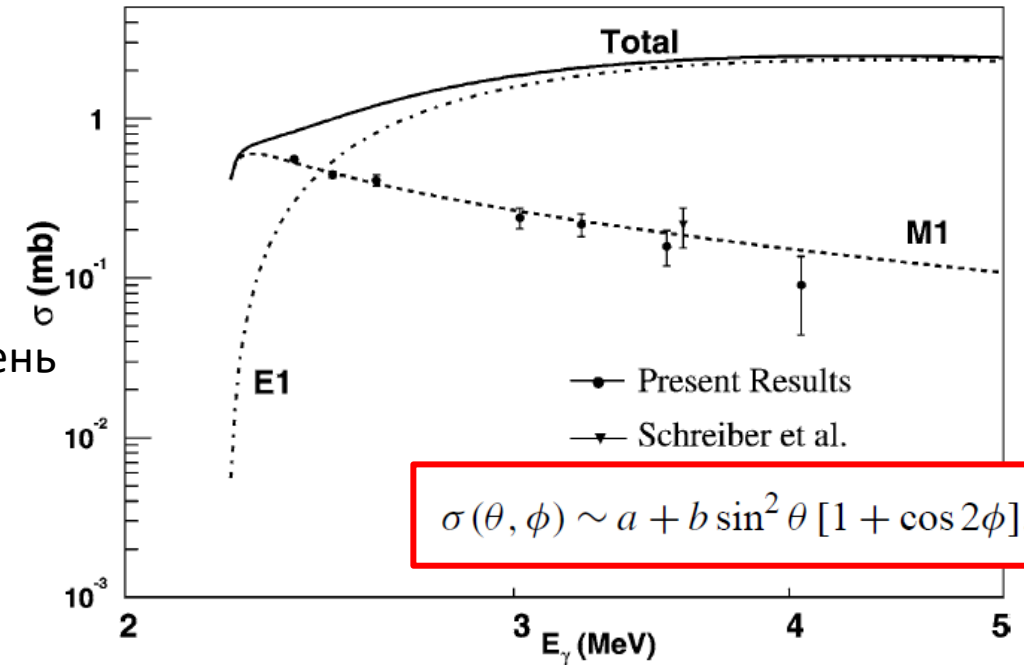
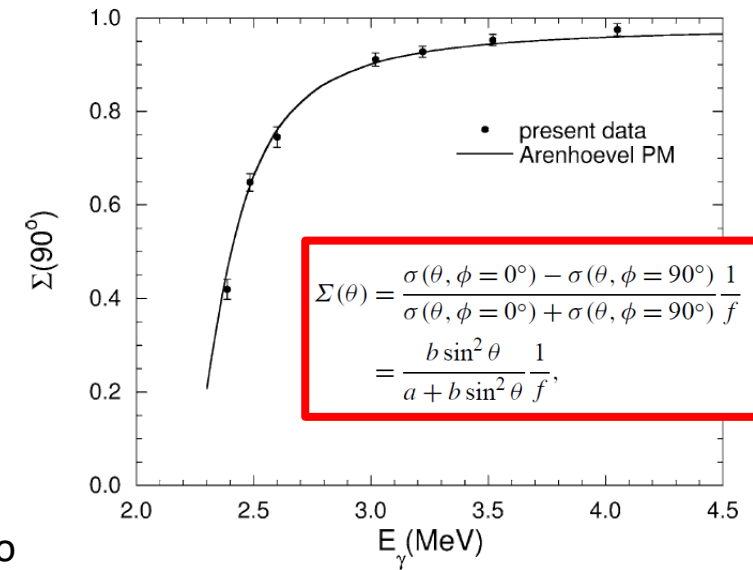
FIG. 1. The total deuteron photodisintegration cross section in the c.m. system, as a function of the laboratory photon energy. ●, our data; ○, Birenbaum, Kahane, and Moreh [2]; △, Baglin *et al.* [15]; ■, Ahrens *et al.* [1]; ▲, Wauters *et al.* [9]; □, Bernabei *et al.* [3]; ☆, Stiehler *et al.* [7]. The solid curve represents the results from a recent calculation by Wilhelm and co-workers [14], using the Paris potential, while the dashed line shows the “historical” values as calculated by Bethe and Peierls

# Фотомагнитное расщепление и анализирующая способность



DST – дейтерированный сцинтиллятор мишень  
Диметр 4 см и длина 6 см  
(C<sub>6</sub>D<sub>12</sub>, Nuclear Enterprises NE232)

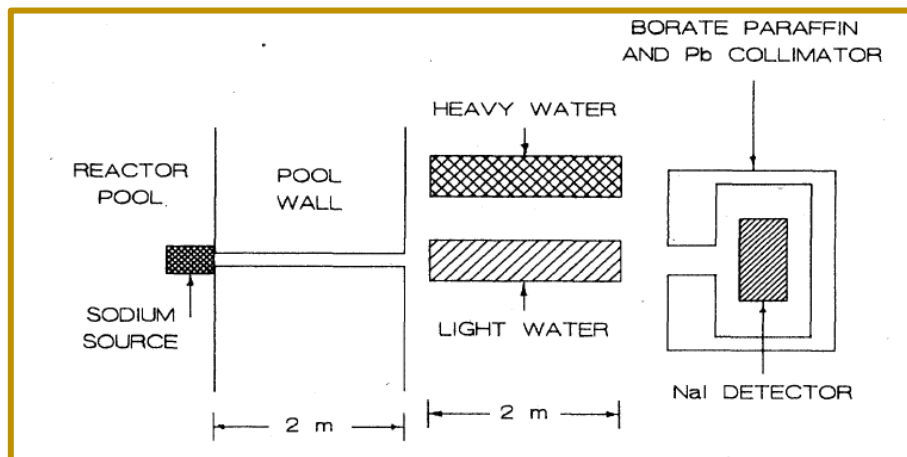
- Фотоны получены при помощи источника на обратном комптоновском рассеянии
- 670 нм лазер на свободных электронах (FEL)
- High-Intensity Gamma-ray Source (HIGS)
- Duke University Free-Electron Laser Laboratory
- Энергия электрона в кольце  $E_e = 300 - 375$  МэВ, что позволило работать с фотонами 2.39 – 4.05 МэВ
- 500 кГц / **линейная поляризация**
- Bicron 501A жидкий сцинтиллятор
- 2" в диаметре и 2" длиной,
- Neutron–gamma pulse-shape discrimination (PSD) techniques



- E. Schreiber, et al., Phys. Rev. C 61 (2000) 061604
- W. Tornow et al., Phys. Lett. B 574, 8 (2003).

# Можно ли измерить лучше?

- Гамма-источники
  - Новые
  - Уже использовались
- Источник, тяжелая вода, защита + коллимация, гамма-спектрометр
  - Моделирование?



Nuclide	Energy (keV)	Intensity (%)	Decay mode	Half-life	Effective Intens. (dps)
57-La-141	2267.0	0.04	B-	3.92	H 1.96E-08
41-Nb- 90	2318.96	82.03	EC	14.60	H 1.08E-05
39-Y - 90	2318.97	2.E-03	B-	3.19	H N/A
45-Rh-100	2375.98	32.64	EC	20.8	H 3.02E-06
36-Kr- 88	2392.11	34.6	B-	2.84	H 2.35E-05
27-Co- 56	2598.46	17.3	EC	77.233	D 1.80E-08
83-Bi-208	2614.5	99.78	EC	3.68E+5	Y 5.96E-14
21-Sc- 44	2656.48	0.11	EC	3.97	H 5.33E-08
39-Y - 88	2734.0	0.71	B+	106.626	D 5.34E-10
31-Ga- 66	2751.84	22.68	EC	9.49	H 4.60E-06
11-Na- 24	2754.01	99.86	B-	14.997	H 1.28E-05

\*: relative, ~: approximate, ?: calculated or estimated  
 >: greater than or equal to, <: less than or equal to  
 U: unplaced decay

Phys. Rev. C 39, 1247 (1989)

Вряд ли перспективно



# Можно ли измерить лучше?

- ИКИ НЦФМ
  - получению точной, надежной и достоверной информации о сечениях как полных, так и парциальных фотоядерных реакций, разнообразных характеристиках образующихся в таких реакциях частиц и легких ядер

Источник комптоновского излучения  
НЦФМ: параметры и перспективы исследований.

А. Кузнецов, А. Полонский, А. Лапик, Л. Джилаван, А. Русаков,  
А. Шемухин, В. Шведун, А. Савельев-Трофимов, И. Артюков,  
А. Виноградов, В. Варламов, А. Чепурнов, М. Меркин,  
С. Рыкованов

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ;  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет;  
Институт ядерных исследований РАН;  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН;  
Сколковский институт науки и технологий.

LXXV Международная Конференция «ЯДРО – 2025. Ядерная физика и физика элементарных частиц. Ядерно-физические технологии»  
(Санкт-Петербург, Россия, 1–6 июля 2025)

	$E_\gamma$ , MeV	$\Delta E_\gamma$	$I_\gamma$ , ph/sec
ELI-NP (VEGA) (Румыния, проект)	0.2-19.5	0.5%	$\sim 10^8$
NewSubaru (Япония, SPRING8, работает)	0-76	1.2-10%	$\sim 10^5$
HIγS (США, работает)	0-100	0.8-10	$\sim 10^7$
SLEGS (Китай, работает)	0.25 – 19.5	5%	$\sim 10^{5-8}$
ИКИ НЦФМ (Россия, проект)	0-300	0.2-0.5%	$\sim 10^8$

# Характеристики комптоновского излучения комплекса ИКИ

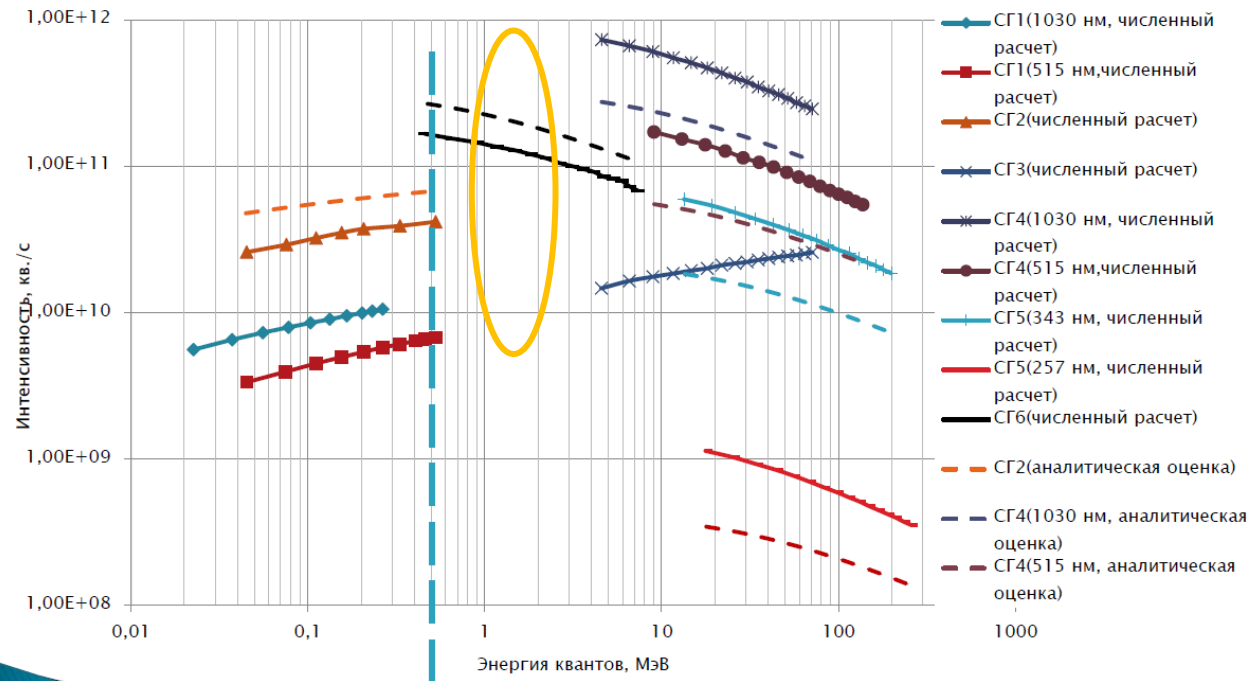
Подходит

Характеристика	СГ1	СГ2	СГ3	СГ4	СГ5	СГ6
Диапазон энергии электронов, МэВ	35 - 120	35 - 120	500 - 2000	500 - 2000	500 - 2000	500 - 2000
Максимальная частота сгустков, Гц	400	$1,3 \cdot 10^7$	1	$10^7$	$10^7$	$10^7$
Длина волны лазерного излучения, нм	1030	515	1030	1030 (515)	343 (257)	10 600
Энергия импульса лазера, мДж	100	1	20 000	0,1	0,02	0,01
Длительность импульса, пс	10	30	10	300	300	300
Диапазон энергии квантов, МэВ	0,02-0,27	0,04-0,54	5-70	5 - 70 (10 - 136)	15 - 200 (20 - 256)	0,5-7
Интенсивность, кв./с	$10^{10}$	$10^{11}$	$10^{10}$	$10^{10} - 10^{11}$	$10^8 - 10^9$	$10^{11}$
Монохроматичность, FWHM %	0,5 - 1	0,5 - 1,5	-	0,2 - 0,5	0,2 - 0,5	0,2 - 0,5 <sub>1,3</sub>

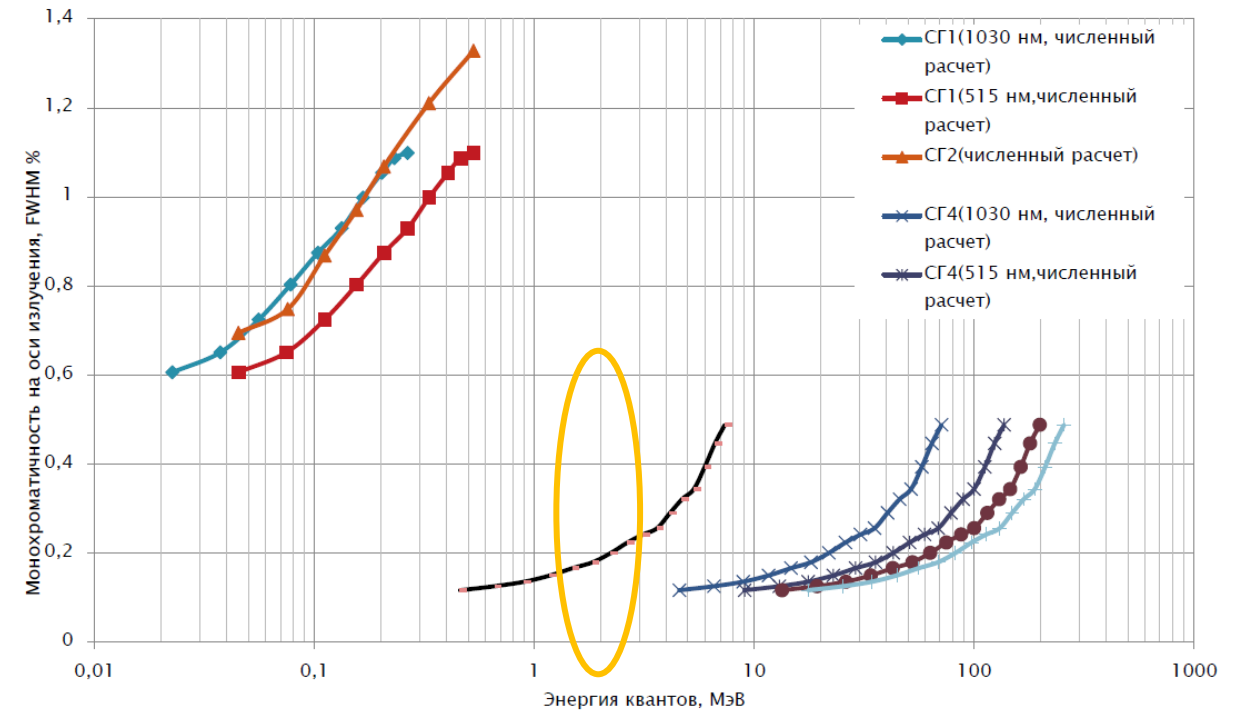
## Интенсивность выхода квантов на станциях генерации комплекса ИКИ

Малый ИКИ (35–120 МэВ)

Большой ИКИ (500–2000 МэВ)

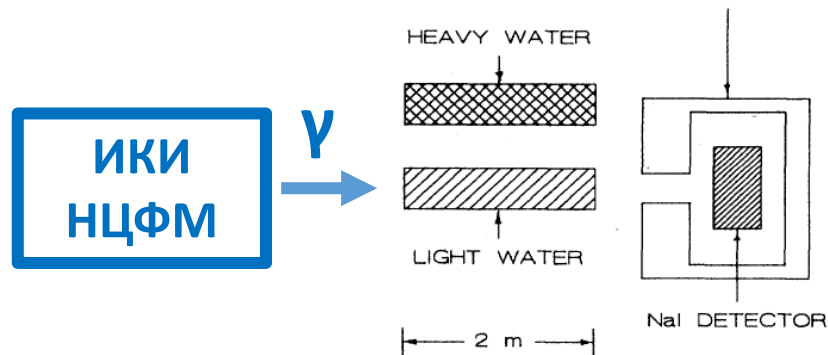


## Монохроматичность на станциях генерации комплекса ИКИ



Phys. Rev. C 39, 1247 (1989)

BORATE PARAFFIN  
AND Pb COLLIMATOR

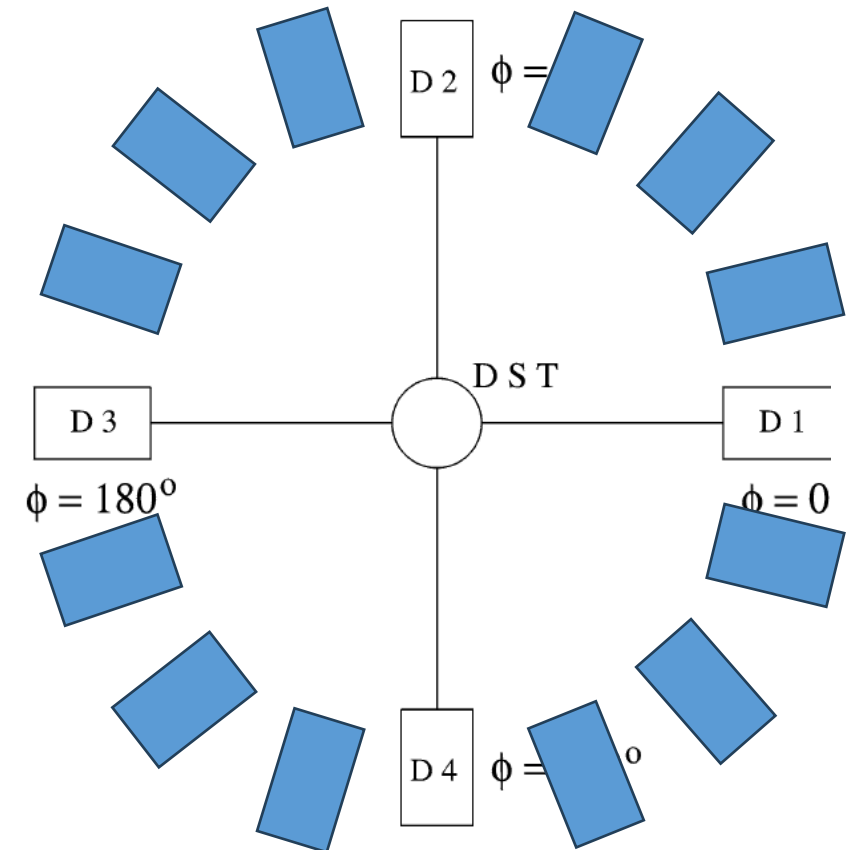


<https://indico.spbu.ru/event/1/timetable/#20250704.detailed>

- Установка барабанного типа
- Измерения  $D_2O$ ,  $H_2O$  и пустая
- Легкие входные окна (Ве или углепластик)

# Семинар в НИЦ «Курчатовский институт» - ПИЯФ

- Семинары ОФВЭ (и ОТФ):  
[https://hepd.pnpi.spb.ru/hepd/events/seminar\\_index\\_ru.html](https://hepd.pnpi.spb.ru/hepd/events/seminar_index_ru.html)
- Видео:  
[https://hepd.pnpi.spb.ru/hepd/events/abstract/2025/HEPD\\_Seminar\\_Dzyuba\\_A.A.\\_23.09.2025.mp4](https://hepd.pnpi.spb.ru/hepd/events/abstract/2025/HEPD_Seminar_Dzyuba_A.A._23.09.2025.mp4)
- Предложения по итогам Семинара:
  - Иван Андреевич Митропольский – развал E2-фотонами, «убирающими» квадрупольный момент (**никто не делал, можно использовать установку еще для чего-то**)
  - Анатолий Борисович Гриднев – дейтерированный полиэтилен вместо тяжелой воды (**отсутствие эффекта стенок**)
  - Евгений Михайлович Маев – ионизационная камера с газовым усилением для регистрации протонов отдачи (**полное сечение и асимметрия**)
  - Измерить диапазон 3 – 5 МэВ, где **не было точных измерений**



W. Tornow *et al.*, Phys. Lett. B 574, 8 (2003).

# Заключение

- Фоторасщепление дейтрона довольно хорошо изучено
  - Фотоэлектрическое – напрямую и по анализирующей способности
  - Фотомагнитное – измерялось по анализирующей способности
- **Прямое измерение фотомагнитного расщепления пока не выполнялось!**
- Связана с космологией (барионная плотность,  $\Omega_B h^2$ )
- Связана с поляризуемостью дейтрона
- Зависит от волновой функции дейтрона (потенциала)
  - Использовалось для поиска эффектов несохранения четности
- **Возможны измерения** на гамма-источниках и **на ИКИ НЦФМ**
  - Можно промоделировать.
  - Нужно ли?
- **Необходима помощь экспертов!**



# Сечение Бете-Пайерлса

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} |\langle f | v | i \rangle|^2 \rho_f.$$

$$\psi_i \equiv |i\rangle \text{ и } \psi_f \equiv |f\rangle$$

Волновая функция начального состояния (S-волна):

$$\psi_i(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \cdot \frac{e^{-r/R}}{r},$$

Масса нуклона

Энергия связи дейтрона

$$R = \hbar / \sqrt{M \Delta W},$$

Волновая функция конечного состояния (P-волна):

$$\psi_f^{e1} = i \sqrt{4\pi \cdot 3} j_1(kr) Y_{10}(\theta_{kr}).$$

$$Y_{10}(\theta_{kr}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta_{kr}$$

Переход к полярным координатам:

$$\cos \theta_{kr} = \cos \theta_k \cos \theta_r + \sin \theta_k \sin \theta_r \cos(\varphi_k - \varphi_r),$$

$$\psi_f^{e1} = \frac{3i}{kr} \left( \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) \cos \theta_k \cos \theta_r +$$

+ член, дающий при дальнейшем интегрировании нуль.

Оператор взаимодействия с E1-фотонами:

$$v = \sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\omega}} c \frac{E_f - E_i}{ic \hbar} \varepsilon (\varepsilon_p r_p + \varepsilon_n r_n) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\omega}} \cdot \frac{i\omega \varepsilon}{i} \cdot \frac{e}{2} (r_p - r_n) = \frac{e}{2i} \sqrt{2\pi \hbar \omega} \varepsilon \cdot r,$$

Если волна поляризована вдоль z

$$\varepsilon r = r \cos \theta_r.$$

Плотность конечных состояний:

Нормировка: V=1

$$\Delta \rho_f = \frac{dn}{dE} = \frac{dn_x dn_y dn_z}{dE} = \frac{dp_x dp_y dp_z}{dE (2\pi \hbar)^3} V = \frac{p^2 dp d\Omega_p}{dE (2\pi \hbar)^3} V = \frac{M p d\Omega_p}{2 (2\pi \hbar)^3} V = \frac{d\Omega_k}{(2\pi \hbar)^3} \cdot \frac{M \hbar k}{2} V = \frac{d\Omega_k}{(2\pi \hbar)^3} \cdot \frac{M \hbar k}{2}.$$

Собираем и интегрируем по углу:

$$\sigma_{e1}(k) = \frac{18\pi}{3} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2 c} \cdot \frac{M \omega}{R} \cdot \frac{k^3}{(R^{-2} + k^2)^4}.$$

$$\hbar \omega - \Delta W = E_k,$$

$$E_k = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2 k^2}{M}$$

$$\sigma_{e1}(\hbar \omega) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^2 \hbar}{Mc} \sqrt{\Delta W} \frac{(\hbar \omega - \Delta W)^{3/2}}{(\hbar \omega)^3}.$$