

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСКЛЮЗИВНЫХ КАНАЛОВ  
ЭЛЕКТРОРОЖДЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО И НЕЙТРАЛЬНОГО  
ПИОНОВ ИЗ ДАННЫХ CLAS»

Выполнил студент  
413 группы  
Насртдинов Алмаз Газинурович

\_\_\_\_\_

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., с.н.с. Исупов Евгений Леонидович

\_\_\_\_\_

Допущена к защите  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

МОСКВА

2021

# Оглавление

Введение . . . . .	2
1. Современные исследования в лаборатории Джефферсона . . . . .	4
2. Экспериментальные исследования нуклонных резонансов . . . . .	6
3. Извлечение параметров нуклонных резонансов . . . . .	11
4. Описание эксклюзивных реакций электророждения мезонов на нуклоне . . . . .	15
5. Отбор экспериментальных данных . . . . .	19
6. Методы извлечения структурных функций . . . . .	21
7. Разделение поперечных и продольных вкладов . . . . .	25
8. Линейная интерполяция . . . . .	26
Выводы . . . . .	32
Заключение . . . . .	34
Список использованных источников . . . . .	35

## ВВЕДЕНИЕ

Появление ускорителей в первой половине XX века позволило начать серию экспериментов по взаимодействию частиц, формированию новых ядер. Стало известно, что ядро состоит из взаимодействующих нуклонов, произошли первые попытки построения теории, описывающей это взаимодействие, которое позднее было названо сильным. Для теоретического описания процессов сильного взаимодействия была разработана квантовая хромодинамика (КХД), являющаяся фундаментальной теорией сильных взаимодействий. При высоких энергиях (малые масштабы длин волн - менее 0.1 фм) квантовая хромодинамика является пертурбативной теорией с малой величиной безразмерного параметра кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_s$ , который отвечает режиму асимптотической свободы, имеет дело с взаимодействием точечных кварков и глюонов. Пертурбативный подход дает отличные результаты при высоких энергиях, что было неоднократно проверено в многочисленных экспериментах, где изучались процессы при энергиях от десятков ГэВ до единиц ТэВ и квадратах переданных импульсов от 10 до 10000 ГэВ<sup>2</sup>. При уменьшении энергии пертурбативный подход перестает быть применим из-за быстрого роста параметра кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_s$ , обусловленного антиэкранированием глюонов. При величинах  $\alpha_s$ , сравнимых с единицей, происходит "одевание" точечных токовых кварков и калибровочных глюонов облаками виртуальных глюонов (кварк-антикварковых пар), что приводит к образованию новых объектов: одетых кварков и глюонов. При дальнейшем уменьшении энергии (при масштабах длин волн более 1 фм) квантовая хромодинамика становится теорией бесцветных адронов (наблюдается конфайнмент кварков, система цветных кварков дает бесцветный адрон).

Свойства одетых кварков и глюонов зависят от расстояния и отличаются от свойств точечных кварков и глюонов КХД. Одевание кварков и глюонов формирует почти 98% массы адронов, в то время как взаимодействие с хиггсовским полем приводит к формированию лишь 2% массы. В промежуточном диапазоне энергий, для которого масштабы длин волн порядка  $[0.1\text{фм}; 1\text{фм}]$ , важнейшую роль играет возбуждение нуклонных резонансов. Нуклон, являясь системой многих тел, дает возможность исследовать сильное взаимодействие в непертурбативном режиме - в переходной области между асимптотической свободой (при малых расстояниях) и конфайнментом (при больших расстояниях). Эксперименты по изучению основного и возбужденных состояний нуклона открывают доступ к исследованию эволюции динамической массы и структуры одетых кварков и глюонов с расстоянием.

Целью данной работы является извлечение структурных функций электророждения на протоне и их дальнейшая интерполяция, которая позволит проанализировать полученные зависимости всюду в области  $W < 1.8 \text{ ГэВ}$  по инвариантной массе конечной адронной системы и виртуальности фотона  $Q^2 < 6 \text{ ГэВ}^2$ . Важность выполненной работы заключается в том, что структурные функции являются главным источником информации об амплитудах электровозбуждения нуклонных резонансов. Результаты по амплитудам электровозбуждения обеспечивают доступ к динамике сильных взаимодействий, формирующей основное и возбужденные состояния нуклона, а также другие адроны как связанные системы кварков и глюонов.

Основным методом изучения возбужденных состояний нуклона являются эксперименты по рассеянию электронов и фотонов на протонах. Одной из лабораторий, в которой проводятся подобные эксперименты, является лаборатория Джефферсона. Экспериментальная работа состоит из нескольких частей: исследование спектра возбужденных состояний нуклона в эксклюзивных реакциях фоторождения мезонов [3], исследование структуры резонансов в реакциях эксклюзивного электророждения мезонов [4].

## 1. Современные исследования в лаборатории Джефферсона

Лаборатория Джефферсона, основанная в 1984 году в городе Ньюпорт-Ньюс штат Виргиния, является одним из самых важных источников информации о структуре нуклона и его возбужденных состояний.

Лаборатория состоит из нескольких частей, каждая из которых играет значительную роль в исследовании структуры частиц.

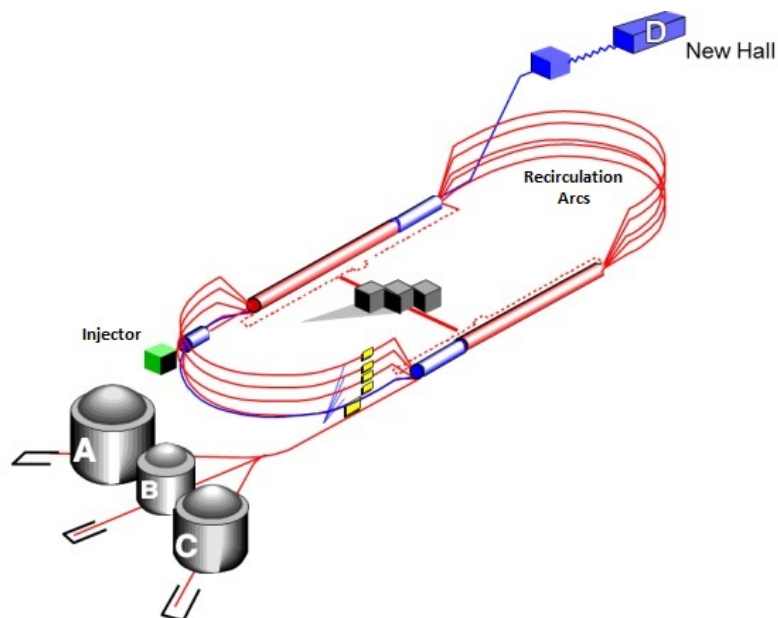


Рис. 1.1: Лаборатория Джефферсона.

Данные, использованные в настоящей работе, были получены на ускорителе CEBAF (Continuous Electron Beam Accelerator) лаборатории Джефферсона, а также детекторе CLAS (CEBAF Large Acceptance Spectrometer), который находился в холле Б этой лаборатории.

Ускоритель CEBAF состоит из двух прямых секций, в которых непрерывный пучок электронов ускоряется специальными микроволновыми резонаторами. С помощью направляющих магнитов луч направляется из одной прямой секции на другую. После пяти

ускорительных циклов каждый электрон в луче имеет энергию 6 ГэВ, а пучок электронов сконцентрирован в цилиндре диаметром всего около 0,1 мм. В этот момент специальные магниты направляют луч в экспериментальную зону, которая в нашем случае является холлом В.

В холле В находился детектор CLAS (CEBAF Large Acceptance Spectrometer), который работал с 1997 до 2012 года. Особенностью этого детектора являлась возможность регистрации всех частиц почти в полном телесном угле  $4\pi$ . Совокупность детекторов, входящих в спектрометр CLAS (рис. 1.2), позволяла зарегистрировать все частицы, образовавшиеся при столкновении ускоренных электронов с мишенью.

В 2012 году было проведено усовершенствование установок, текущие мощности ускорителя позволяют создавать непрерывный пучок с энергией 11 ГэВ, а новый детектор CLAS12 (рис. 1.3) расширяет область переданных импульсов с 6 до 12 ГэВ<sup>2</sup>, что позволит исследовать переходную область между кварк-глюонным конфайнментом и точечными кварками и глюонами.

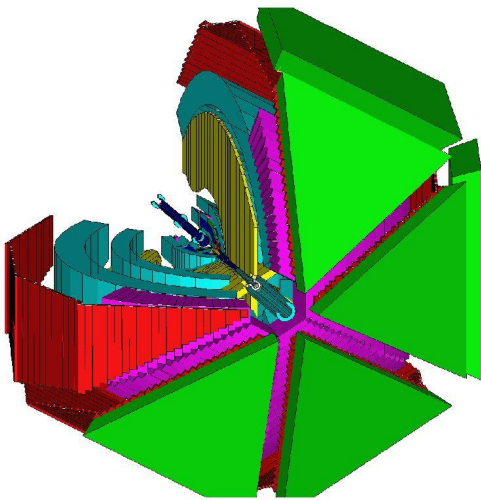


Рис. 1.2: Детектор CLAS.

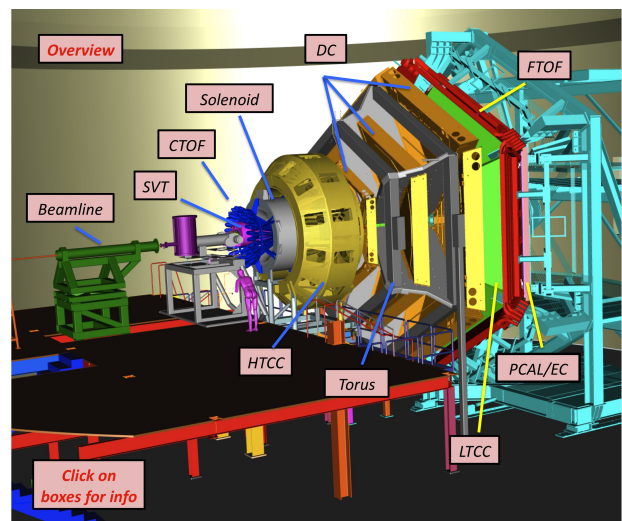


Рис. 1.3: Детектор CLAS12.

## 2. Экспериментальные исследования нуклонных резонансов

Нуклон является связанной системой кварков и глюонов и обладает спектром возбужденных состояний. Эти возбужденные состояния проявляются в виде максимумов в зависимостях полных сечений поглощения реальных (рис. 2.1) и виртуальных (рис. 2.2) фотонов от величины инвариантной массы конечной адронной системы  $W$ .

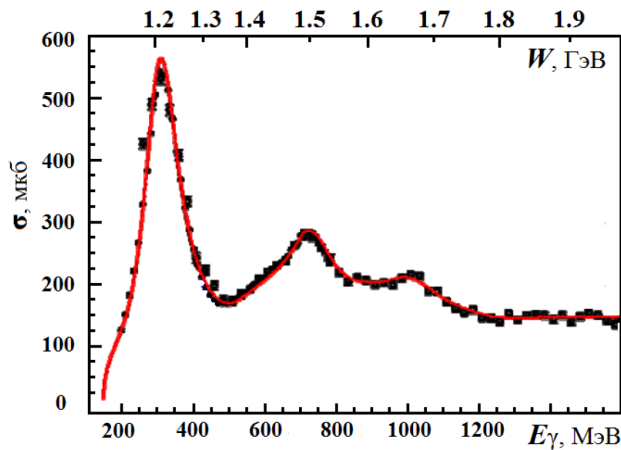


Рис. 2.1: Зависимость полного сечения поглощения реальных фотонов от величин  $E_\gamma$  и  $W$ .

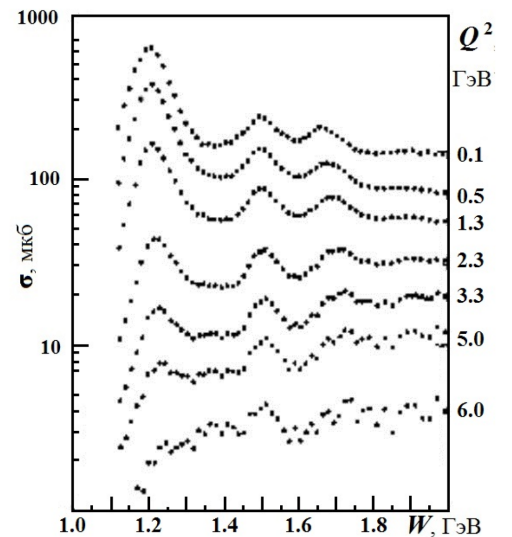


Рис. 2.2: Полное сечение поглощения виртуальных фотонов для различных  $Q^2$  как функция  $W$ .

В инклюзивных сечениях на рис. 2.1 и рис. 2.2 хорошо различимы 3 пика [5, 6]. Пик при величине массы конечной адронной системы  $W = 1.23$  ГэВ называется первым резонансным максимумом и обусловлен вкладом резонанса  $\Delta(1232)_{3/2^+}$ , а также совокупностью сложных нерезонансных механизмов.  $\Delta(1232)_{3/2^+}$  - резонанс - единственное изолированное состояние в спектре возбужденных состояний нуклона. Другие максимумы сечений фотопоглощения реальных и виртуальных фотонов представляют

собой суперпозицию нескольких резонансов. Пик в районе 1.5 ГэВ включает в себя 4 резонанса:  $N(1440)_{1/2+}$ ,  $N(1520)_{3/2-}$ ,  $N(1535)_{1/2-}$  и  $\Delta(1620)_{1/2-}$ . Область величин  $W$ , отвечающих вкладам этих состояний, получила название второго резонансного максимума. Пик в районе 1.7 ГэВ обусловлен вкладами 7 резонансов:  $N(1650)_{1/2-}$ ,  $N(1675)_{5/2-}$ ,  $N(1685)_{5/2+}$ ,  $\Delta(1700)_{3/2-}$ ,  $N(1700)_{1/2+}$ ,  $N(1720)_{3/2+}$  и состояния-кандидата  $N'(1720)_{5/2+}$  [7]. Эта область величин  $W$  называется третьим резонансным максимумом. Наряду с перечисленными резонансами, в сечения фото- и электровозбуждения нуклонов также дают вклад возбужденные состояния с большими массами, однако вследствие значительной ширины они не проявляются в виде структур в зависимостях интегральных инклюзивных сечений возбуждения нуклонов от величины  $W$ .

Как уже отмечалось выше, второй и третий максимумы в полных сечениях поглощения реальных и виртуальных фотонов обусловлены вкладами нескольких нуклонных резонансов. Ширины этих резонансов, изменяющиеся в пределах от 100 до 300 МэВ, оказываются значительно больше, чем разница их масс, что приводит к их сильному перекрыванию. Кроме того, в настоящее время хорошо установлено существование резонансов с массами  $M_{N^*} > 1.9$  ГэВ ( $\Delta(1905)_{5/2+}$ ,  $\Delta(1910)_{1/2+}$ ,  $\Delta(1950)_{7/2+}$ ,  $\Delta(2420)_{11/2+}$ ,  $N(2190)_{7/2-}$ ,  $N(2220)_{9/2+}$ ,  $N(2250)_{9/2-}$ ), ширины которых изменяются в пределах от 300 до 500 МэВ. Столь большие ширины делают невозможным наблюдение этих возбужденных состояний нуклона в виде пиков в полных сечениях поглощения реальных и виртуальных фотонов. Также необходимо отметить, что, наряду с нуклонными резонансами, существенный вклад в инклюзивные сечения вносят нерезонансные механизмы. К тому же инклюзивные реакции дают ограниченную информацию о процессе, а именно - лишь значение интегрального сечения для каждого  $W$  и  $Q^2$ . Поэтому анализ только инклюзивных реакций не позволяет извлечь надежную информацию о параметрах нуклонных резонансов.

Это приводит к необходимости исследования эксклюзивных каналов распада резонансов. В эксклюзивных реакциях измеряются кинематические характеристики всех частиц в конечном состоянии,



что позволяет получить более полную информацию об интегральных и дифференциальных сечениях реакций. Нуклонные резонансы с вероятностью больше 99% распадаются за счет сильного взаимодействия с испусканием мезонов (на электромагнитные распады с испусканием фотонов приходится меньше 1%). Исследование нуклонных резонансов начиналось с изучения рассеяния мезонов на нуклонах. Преимуществом этого метода является большое сечение взаимодействия налетающего мезона и нуклона-мишени. Этот метод, однако, имеет свои сложности, одной из которых является тот факт, что налетающая частица не является точечной и ее структура неизвестна, что приводит к существенному усложнению интерпретации экспериментальных данных. Широкое распространение получили реакции под действием пучков пионов. Результаты анализа процессов так называемого упругого пион-нуклонного рассеяния ( $\pi N \rightarrow \pi N$ ) и зарядового обмена (например,  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ ) до сих пор играют важную роль в спектроскопии нуклонных резонансов. Детали анализа этих реакций приведены в работах [8–11]. Однако не все резонансы могут быть обнаружены в упругом пион-нуклонном рассеянии, так как многие резонансы распадаются с испусканием мезонов, отличных от пионов и/или с испусканием более одного мезона. Использование пучков различных долгоживущих мезонов значительно расширяет возможности спектроскопии нуклонных резонансов [12]. Исследования эксклюзивных реакций под действием реальных и виртуальных фотонов, происходящих за счет электромагнитного взаимодействия, обеспечивают предпочтительные условия для изучения возбужденных состояний нуклона по сравнению с реакциями под действием адронов, поскольку фотоны являются бесструктурными частицами, а динамика их формирования и векторы состояния хорошо описываются в квантовой электродинамике.

Эксперименты с реальными фотонами позволяют исследовать спектр возбужденных состояний нуклона. Эксперименты по электровозбуждению нуклонов позволяют изучить сечения (или другие наблюдаемые) при различных значениях виртуальности фотона  $Q^2$  (квадрат четырехимпульса виртуального фотона, взятый с обратным знаком). Величина  $Q^2$  соответствует пространственному масштабу, на котором

проводится исследование резонанса, или, другими словами, — пространственному разрешению эксперимента. Изучение  $Q^2$  - эволюции различных наблюдаемых позволяет исследовать структуру резонансного состояния. Как видно на рис. 2.2, форма инклюзивного сечения сильно отличается для разных виртуальностей фотона  $Q^2$ . Так, при  $Q^2 = 6$  ГэВ<sup>2</sup> максимум, соответствующий  $\Delta$ -резонансу, исчезает, но второй и третий резонансные максимумы остаются. Таким образом, резонансы с различными квантовыми числами имеют разную структуру. В настоящее время вся информация о структуре возбужденных состояний нуклона получена из реакций эксклюзивного электророждения мезонов на нуклонах.

Эксперименты по фото- и электророждению мезонов на нуклоне проводятся во многих лабораториях на протяжении последних десятилетий. Использование непрерывных пучков электронов и фотонов, а также детекторов с акцептансом  $\approx 4\pi$  впервые позволило выполнять измерения с высокой точностью и почти полным перекрытием фазового пространства реакций [3]. Эти эксперименты дают ценную информацию о сечениях и поляризационных наблюдаемых реакций с конечными состояниями  $\pi N$ ,  $\eta N$ ,  $\omega N$ ,  $\pi\pi N$ ,  $KA$ ,  $K\Sigma$ .

На рис. 2.3 приведены данные CLAS [13] о выходах эксклюзивных каналов электророждения мезонов на нуклоне. Каналы рождения одного и двух пионов являются основными в сечении фото- и электророждения мезонов на нуклоне в резонансной области. Сумма интегральных сечений этих каналов составляет более 90% инклюзивного сечения. Пики в сечениях каналов  $\pi N$  и  $\pi\pi N$  свидетельствуют о чувствительности этих каналов к вкладам нуклонных резонансов.

Резонансы с массой  $M_{N^*} < 1.6$  ГэВ распадаются преимущественно по каналу  $\pi N$ , что делает этот канал основным источником информации о низколежащих нуклонных резонансах. Двухпионный канал в этом случае служит для независимой проверки этой информации. Большинство резонансов с массой  $M_{N^*} > 1.6$  ГэВ распадаются преимущественно по каналу  $\pi\pi N$ , поэтому этот эксклюзивный канал является эффективным средством исследования высоколежащих нуклонных резонансов.

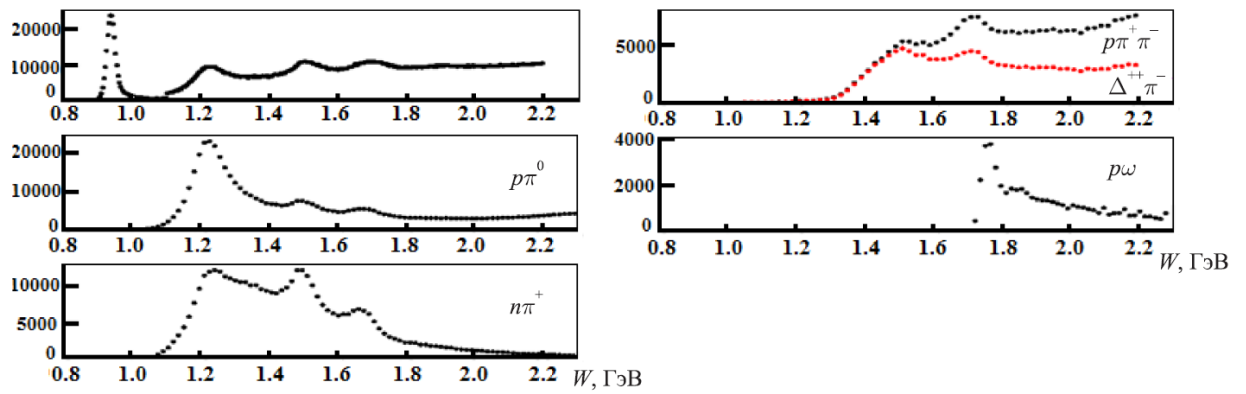


Рис. 2.3: Зависимость полного сечения поглощения реальных фотонов от величин  $E_\gamma$  и  $W$ .

### 3. Извлечение параметров нуклонных резонансов

Под параметрами нуклонного резонанса подразумеваются его масса, ширина, квантовые числа ( $J^P$ ), амплитуды фото- и электровозбуждения  $A_{1/2}$ ,  $A_{3/2}$  и  $S_{1/2}$ , парциальные адронные ширины и др. Амплитуды фото- и электровозбуждения  $A_{1/2}$ ,  $A_{3/2}$  и  $S_{1/2}$  характеризуют процесс возбуждения резонанса реальными ( $S_{1/2} = 0$ ) или виртуальными фотонами и соответствуют вершине 1 на рис. 3.1 (слева). Индексы отвечают проекции суммарного спина системы начальных частиц  $\gamma_{r,v}N$  (или спина  $N^*$ ) на направление импульса фотона в системе центра масс (т. е. спиральности системы начальных частиц). Амплитуды  $A_{1/2}$  и  $A_{3/2}$  соответствуют взаимодействию поперечно поляризованного фотона с нуклоном. Только эти амплитуды вносят вклад в фотовозбуждение нуклонных резонансов. Амплитуда  $S_{1/2}$  описывает возбуждение резонансов продольно поляризованными виртуальными фотонами. Она вносит вклад лишь в электровозбуждение резонансов наряду с амплитудами для поперечных виртуальных фотонов  $A_{1/2}$  и  $A_{3/2}$ .

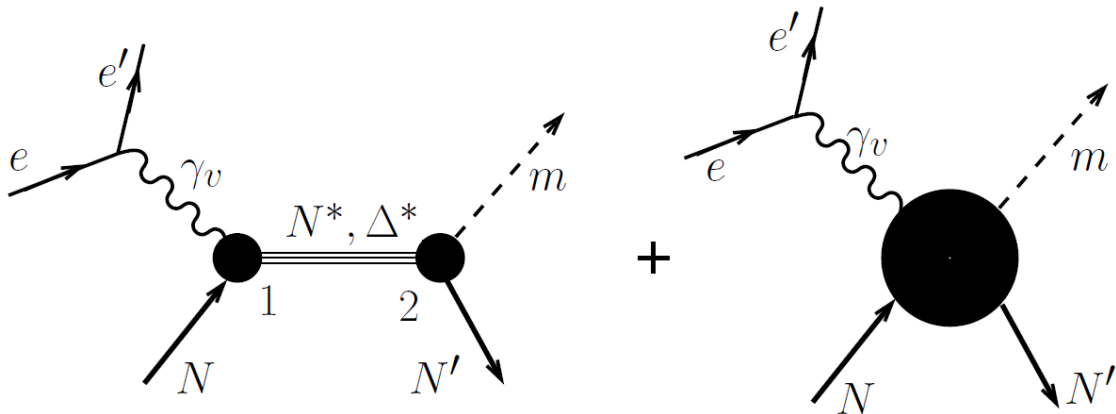


Рис. 3.1: Схема процесса электророждения мезонов ( $m$ ) на нуклоне ( $N$ ) с разделением резонансных (слева) и нерезонансных (справа) вкладов.

Параметры нуклонных резонансов извлекаются из

экспериментальных данных по наблюдаемым различным эксклюзивным реакциям фото- и электророждения мезонов на нуклонах. Эксклюзивный процесс, схематически представленный на рис. 3.1 суперпозицией резонансных и нерезонансных вкладов, описывается комплексными амплитудами, которые могут быть использованы в различных представлениях: в виде спиральных амплитуд [4, 14], поперечных амплитуд [15] и т. д.

Количество независимых комплексных амплитуд, описывающих эксклюзивный процесс, зависит, во-первых, от спирального состояния начальных частиц ( $\gamma_{r,v} + N$ ), во-вторых - от спирального состояния конечных частиц (барион + мезоны), а в-третьих - от количества частиц в конечном состоянии.

Физические наблюдаемые, измеряемые в эксперименте: сечение  $\sigma$  в системе центра масс, асимметрия  $\Sigma$  фотонного пучка, поляризация  $P$  ядра отдачи, асимметрия  $T$  мишени, двойные поляризационные наблюдаемые типа «пучок–мишень» ( $E, G, H, F$ ) и др. однозначно выражаются через комплексные амплитуды. Далее приводится формула, связывающая дифференциальное сечение эксклюзивной реакции рождения мезонов под действием реальных и виртуальных фотонов со спиральными амплитудами, описывающими этот эксклюзивный процесс.

Чтобы получить информацию обо всех амплитудах, описывающих определенную эксклюзивную реакцию, необходимо измерить достаточное количество наблюдаемых. Так, для извлечения амплитуд процесса  $\gamma_{real} + N \rightarrow$  барион + псевдоскалярный мезон достаточно измерить угловые распределения восьми определенным образом выбранных наблюдаемых.

Комплексные амплитуды любой эксклюзивной реакции (амплитуды процесса  $\gamma_{r,v} + N \rightarrow$  барион + мезоны) представляют собой суперпозицию вкладов нуклонных резонансов и сложной совокупности нерезонансных механизмов (рис. 3.1).

Существуют два подхода к извлечению параметров нуклонных резонансов из экспериментальных данных:

1. Если возможно непосредственно из экспериментальных данных получить информацию о комплексных амплитудах эксклюзивной реакции,

то параметры нуклонных резонансов могут быть извлечены из этих амплитуд. Применение этого метода возможно в случае, если для определенного эксклюзивного канала измерено достаточное количество наблюдаемых, причем измерения проведены с высокой точностью и в очень широком диапазоне по  $W$ . Другими словами, применение этого подхода возможно лишь для эксклюзивных каналов фоторождения одного псевдоскалярного мезона.

2. Если невозможно непосредственно из экспериментальных данных получить информацию о комплексных амплитудах эксклюзивного процесса (например, в случае электророждения мезонов), информация о параметрах нуклонных резонансов может быть получена из доступных наблюдаемых в рамках моделей реакций или формализма связанных каналов. В этом подходе необходимо разделять резонансные и нерезонансные вклады в амплитуду реакции. Это приводит к тому, что извлекаемые параметры нуклонных резонансов имеют дополнительные систематические неопределенности, связанные с моделью. Резонансная часть амплитуды в этом случае параметризуется брейт-вигнеровской функцией, а параметры резонансов извлекаются из условий наилучшего описания данных.

Доминирующая часть информации о параметрах нуклонных резонансов получена в рамках последнего подхода. При этом возникает вопрос, сколь надежно разделены резонансные и нерезонансные части и, следовательно, сколь надежно извлечены параметры резонансов. Исследование различных эксклюзивных каналов рождения мезонов позволяет получить модельно-независимый ответ на этот вопрос. Амплитуды фото- и электровозбуждения нуклонных резонансов ( $A_{1/2}$ ,  $A_{3/2}$ ,  $S_{1/2}$ ) должны быть одинаковы для всех эксклюзивных каналов. Описание всей совокупности экспериментальных данных по основным эксклюзивным каналам фото и электророждения мезонов обеспечивает модельно-независимую проверку надежности извлеченных параметров резонансов.

Как было отмечено выше, использование первого подхода требует информации о достаточном количестве измеренных наблюдаемых

(например, 8 для  $\gamma_{real} + N \rightarrow$  барион + псевдоскалярный мезон). Второй подход позволяет использовать информацию о меньшем числе наблюдаемых, однако увеличение их количества позволяет снизить модельную зависимость результата. Таким образом, необходимо измерение большого числа дифференциальных сечений и поляризационных асимметрий с высокой (порядка нескольких процентов) точностью.

#### 4. Описание эксклюзивных реакций электророждения мезонов на нуклоне

В настоящем разделе изложен формализм описания реакций фото- и электророждения мезонов на нуклоне, показанных на рис. 4.1.

В процессах электророждения мезонов измеряемые дифференциальные сечения являются дифференциальными сечениями рассеяния электрона на нуклоне с образованием определенного конечного адронного состояния:

$$\frac{d^{n+2}\sigma_e}{dE_{ef}d\Omega_{ef}d^n\tau}, \quad (4.1)$$

где  $E_{ef}$  — энергия конечного электрона в лабораторной системе,  $\Omega_{ef}$  — телесный угол конечного электрона в лабораторной системе (вместо переменных  $E_{ef}$  и  $\Omega_{ef}$  могут использоваться  $W$  и  $Q^2$ ),  $d^n\tau$  — дифференциал кинематических переменных конечного адронного состояния. Кинематические переменные конечного состояния определяются числом частиц (адронов) в конечном состоянии.

В случае двух частиц (рис. 4.1) в конечном состоянии существует 8 возможных кинематических переменных (4 компоненты четырехимпульса каждой конечной частицы). Законы сохранения импульса и энергии накладывают на них 4 условия связи, а тот факт, что конечные мезон и барион должны находиться на массовой поверхности, — еще 2. Таким образом, процесс образования двух частиц в конечном состоянии описывается двумя независимыми кинематическими переменными ( $n = 2$  в формуле (4.1)), которые могут быть выбраны различными способами. Например (рис. 4.2), в случае реакций электророждения на протоне в качестве кинематических переменных конечного состояния можно выбрать



следующие углы в системе центра масс начальной системы  $\gamma_v N$ :  $\theta$  — угол между направлением движения фотона и импульсом одной из конечных частиц и  $\varphi$  — угол между плоскостью рассеяния электрона и плоскостью реакции (плоскостью, образованной начальным нуклоном и конечными частицами).

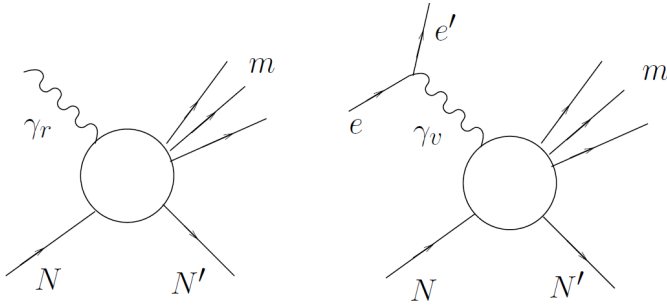


Рис. 4.1: Механизмы реакций фото- и электророждения мезонов ( $m$ ) на нуклоне ( $N$ ).

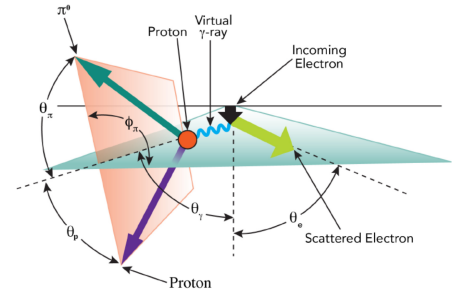


Рис. 4.2: Схема реакции электророждения мезонов на протоне.

Рассматривая реакцию электророждения в приближении однофотонного обмена, показанного на рис. 4.1 (слева), дифференциальное сечение электророждения мезонов может быть представлено в виде произведения потока виртуальных фотонов  $\gamma_v$  на сечение соответствующего процесса под действием виртуальных фотонов:

$$\frac{d^{n+2}\sigma_e}{dE_{e_f}d\Omega_{e_f}d^n\tau} = \Gamma_v \frac{d^n\sigma_v}{d^n\tau} \quad (4.2)$$

Сечения рассеяния электронов являются полностью модельно-независимыми величинами, измеряемыми в экспериментах. Сечения процессов под действием виртуальных фотонов не могут быть измерены, и их введение связано с модельными предположениями о динамике рассеяния электронов.

При рассмотрении реакции электровозбуждения (под действием виртуальных фотонов) в случае двух частиц в конечном состоянии получают [16] следующие выражения:

$$\frac{d^4\sigma_e}{dWdQ^2d\Omega} = \Gamma_\gamma \frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega}, \quad (4.3)$$

$$\Gamma_\gamma(W, Q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \frac{1}{E_{beam}^2 m_p^2}, \frac{W(W^2 - m_p^2)}{(1 - \varepsilon)Q^2}, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_T = \left(1 + 2\left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2}\right) \tan^2 \frac{\theta_e}{2}\right)^{-1}, \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_L = \frac{Q^2}{\nu^2} \varepsilon_T, \quad (4.6)$$

где  $\Gamma_\gamma(W, Q^2)$  - поток виртуальных фотонов,  $E_{beam}$  - энергия начального пучка электронов,  $Q^2$  - виртуальность фотона,  $\varepsilon$  - поляризация виртуального фотона,  $W$  - инвариантная масса конечной адронной системы,  $m_p$  - масса протона в ГэВ,  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры,  $\theta_e$  - полярный угол рассеяния электрона в лабораторной системе отсчета,  $\nu$  - энергия виртуального фотона.

В случае двух частиц в конечном состоянии системы сечение эксклюзивного электроорождения  $N\pi$  может быть представлено как [16]:

$$\frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_\pi} = \frac{d\sigma_u}{d\Omega_\pi} + \varepsilon \cdot \frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_\pi} \cdot \cos 2\varphi + \sqrt{2\varepsilon(1 + \varepsilon)} \frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_\pi} \cdot \cos \varphi, \quad (4.7)$$

$$\frac{d\sigma_u}{d\Omega_\pi} = \frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi} + \varepsilon \frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}, \quad (4.8)$$

где  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_\pi}$  - неполяризованная (unpolarized), поперечная (transverse), продольная (longitudinal), продольно-поперечная (longitudinal-transverse), поперечно-поперечная (transverse-transverse) структурные функции соответственно.

Перечисленные структурные функции зависят от инвариантной массы конечной адронной системы  $W$ , виртуальности фотона  $Q^2$ , полярного  $\theta$ , азимутального  $\varphi$  углов эмиссии конечного пиона в системе центра масс системы.

В более компактном виде выражение (4.7) принимает вид

$$\frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega} = A + B \cos 2\varphi + C \cos \varphi. \quad (4.9)$$

Дифференциальные сечения позволяют определить структурные функции, которые важны для получения информации об амплитудах электровозбуждения, несущих в себе информацию о сильном взаимодействии. Рассмотрение различных каналов позволяет получить независимую оценку теоретических представлений.

## 5. Отбор экспериментальных данных

Перед началом работы из базы данных [17] были извлечены дифференциальные сечения реакций электророждения  $N\pi$  на протонах под действием виртуальных фотонов. При этом были отобраны экспериментальные данные, которые удовлетворяли следующим критериям :

- 1) Были исключены точки с относительной погрешностью более 0.7.
- 2) Была выполнена аппроксимация измеренных дифференциальных сечений в каждом интервале по  $(W, Q^2, \theta)$  в зависимости от угла согласно (4.7). Угловое распределение (4.7) представляет собой модельно-независимое описание в приближении однофотонного обмена [18]. Строились распределения отклонений от аппроксимированных значений по  $\chi^2$ . Было получено, что наилучшее согласование значений с аппроксимированными значениями происходит в том случае, если в зависимостях с  $\chi^2$  более 1.3 выполняется отбрасывание точек, отклоняющихся от аппроксимированных значений более чем 1.5 стандартных отклонения. (рис. 5.1)
- 3) Данные в интервалах по  $(W, Q^2, \theta)$ , в которых содержится менее 4 точек по  $\varphi$  были исключены.

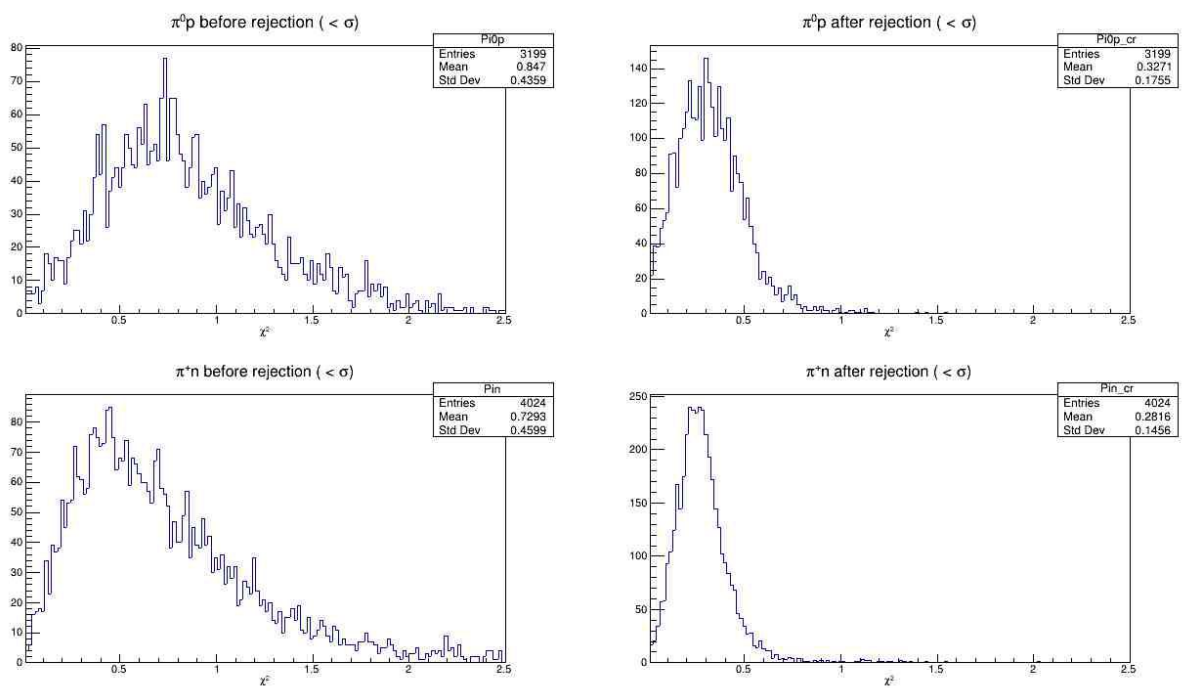


Рис. 5.1:  $\chi^2$  - распределения отклонений от аппроксимированных значений до отбора и после отбора для каналов  $\pi^0 p$  и  $\pi^+ n$  соответственно.

## 6. Методы извлечения структурных функций

В работе использовались различные методы извлечения структурных функций, которые зависели от наличия в угловых распределениях по  $\varphi$  интервалов, где данные отсутствовали из-за наличия мертвых зон детектора CLAS.

В нулевом методе предполагалось, что данные покрывают полный диапазон по углу  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Структурные функции определены из условия их наилучшего описания в соответствии с выражением (4..7).

Первый и второй методы использовались в случае частичного покрытия диапазона по углу  $\varphi \in [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ , в первом и втором методах вычисления были проведены без и с экстраполяцией соответственно.

Для дифференциального сечения в первом методе получили:

$$\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi \text{ method 1}}} = \frac{1}{\varphi_{max} - \varphi_{min}} \cdot \left[ \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} \frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}} d\varphi - \varepsilon \frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}} \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} \cos 2\varphi d\varphi - \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon)} \frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}} \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} \cos \varphi d\varphi \right], \quad (6.1)$$

где  $\frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}}$  - измеренные дифференциальные сечения, а  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}}$  и  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}}$  оценены из аппроксимации угловых распределений в области от  $\varphi_{min}$  до  $\varphi_{max}$  согласно (4..7). Таким образом, при определении структурной функции  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi \text{ method 1}}}$  в методе 1 используется информация из области

$[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ , где имеются экспериментальные данные, без какой либо экстраполяции в области по  $\varphi$ , где данные отсутствуют.

Поляризационные  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega}$  и  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega}$  структурные функции в методе 1 оцениваются следующим образом:

$$\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{method}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \frac{d\sigma_u}{d\Omega_{method}} \cdot r_{tt}, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{method}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}} \cdot \frac{d\sigma_u}{d\Omega_{method}} \cdot r_{lt}, \quad (6.3)$$

Входящие в (6.2) и (6.3) отношения  $r_{tt}$  и  $r_{lt}$  определяются из аппроксимации (4.7) дифференциальных сечений  $\frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}}$  в области  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ :

$$r_{tt} = \frac{\varepsilon \frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}}}{\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_0}}}, \quad (6.4)$$

$$r_{lt} = \frac{\sqrt{2\varepsilon(1+\varepsilon)} \frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}}}{\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_0}}}, \quad (6.5)$$

где  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_0}}$ ,  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}}$ ,  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}}$  определены из аппроксимации (4.7) в области  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ .

Во втором методе выполняется экстраполяция измеренных сечений в области по  $\varphi$  вне интервала  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$  согласно выражению (4.7) с  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}}$ ,  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}}$  определенными из аппроксимации (4.7) в области  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ .

Для дифференциального сечения во втором методе получили:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi \text{ method 2}}} = & \\ \frac{1}{2\pi} \cdot & \left[ \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} \frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}} d\varphi + \int_0^{\varphi_{min}} \left[ \frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_0}} + \varepsilon \frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}} \cdot \cos 2\varphi + \sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} \frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}} \cdot \cos \varphi \right] d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_{\varphi_{max}}^{2\pi} \left[ \frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_0}} + \varepsilon \frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}} \cdot \cos 2\varphi + \sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)} \frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}} \cdot \cos \varphi \right] d\varphi \right], \quad (6..6) \end{aligned}$$

Неполяризованная структурная функция  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_{method 2}}}$  вычислена из интеграла сечения  $\frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}}$  в области  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ . При этом в интервале  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$  подынтегральное выражение берется из экспериментальных данных, а вне интервала  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$  оно определяется из экстраполяции.

Поляризационные структурные функции в методе 2 вычислены согласно (6..2-6..5).

В третьем и четвертом методах предполагалось, что имеются одна или две соответственно области, в которых данные отсутствуют (рис. 6.1) из-за наличия мертвых зон детектора CLAS, вычисления были проведены без какой-либо экстраполяции в области, в которых данные отсутствовали.

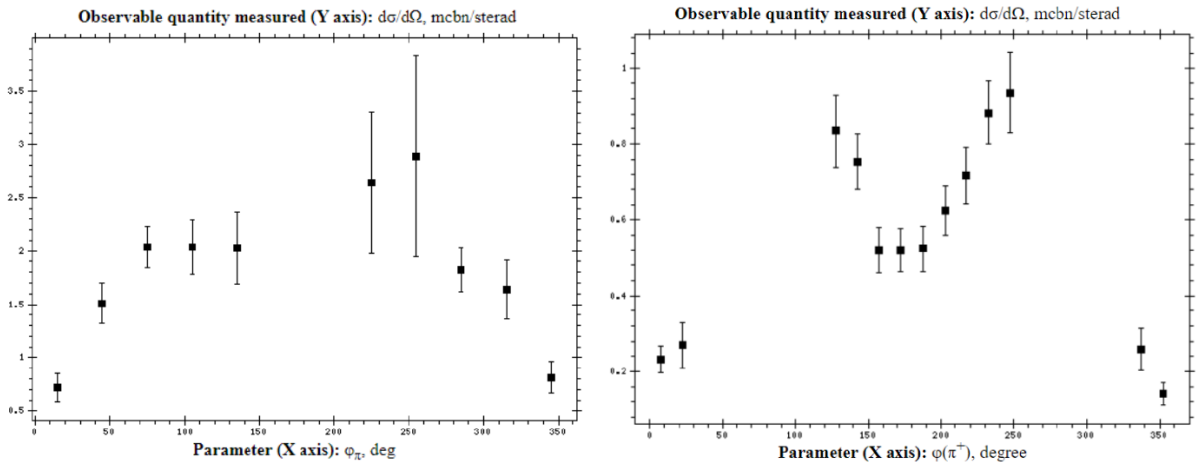


Рис. 6.1: одна (слева) и две зоны (справа) без данных соответственно в зависимостях дифференциальных сечений от угла  $\varphi$ .



Третий метод использовался в том случае, когда имеется лишь один интервал по  $\varphi$ , где отсутствуют экспериментальные данные  $\frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}}$ . Имеющиеся экспериментальные данные аппроксимируются согласно (4.7). Из аппроксимации определяются  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_0}}$ ,  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_0}}$ ,  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_0}}$ , а неполяризованные структурные функции вычисляются согласно выражению

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_u}{d\Omega_{\pi_{method\ 3}}} = & \left[ \int_{\varphi_{1\ min}}^{\varphi_{1\ max}} \frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}} d\varphi + \int_{\varphi_{2\ min}}^{\varphi_{2\ max}} \frac{d\sigma_{\gamma v}}{d\Omega_{\pi_{exp}}} d\varphi \right] \cdot \\ & \cdot \left( [(\varphi_{1\ max} - \varphi_{1\ min}) + (\varphi_{2\ max} - \varphi_{2\ min})] + r_{tt} \cdot \left[ \int_{\varphi_{1\ min}}^{\varphi_{1\ max}} \cos 2\varphi d\varphi + \int_{\varphi_{2\ min}}^{\varphi_{2\ max}} \cos 2\varphi d\varphi \right] + \right. \\ & \left. + r_{lt} \cdot \left[ \int_{\varphi_{1\ min}}^{\varphi_{1\ max}} \cos \varphi d\varphi + \int_{\varphi_{2\ min}}^{\varphi_{2\ max}} \cos \varphi d\varphi \right] \right)^{-1}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

$r_{tt}$  и  $r_{lt}$  вычислены согласно (6.2-6.3). Поляризационные структурные функции  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_{\pi_{method\ 3}}}$  и  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_{\pi_{method\ 3}}}$  получены из неполяризованных структурных функций согласно (6.4-6.5).

Четвертый метод является модификацией метода 3 в случае, когда данные по дифференциальным сечениям отсутствуют в двух интервалах по  $\varphi$ . Формула для метода 3 обобщалась добавлением к двум еще и третьего интервала по  $\varphi$ , где имеются экспериментальные данные по дифференциальным сечениям. Поляризационные структурные функции получены аналогично методу 3.

## 7. Разделение поперечных и продольных вкладов

Поперечные  $\frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi}$  и продольные  $\frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}$  структурные функции были получены из неполяризованных  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_\pi}$  структурных функций и из экспериментальных данных по величине  $R(W, Q^2)$ :

$$R = \frac{\frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}}{\frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi}} \quad (7.1)$$

полученной из реакций инклюзивного рассеяния электронов. Разделение поперечной  $\frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi}$  и продольной  $\frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}$  компонент выполнено в предположении одинаковой величины  $R$  для всех углов  $\theta$  при фиксированных величинах  $W$  и  $Q^2$ .

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = \frac{\frac{d\sigma_u}{d\Omega}}{1 + \varepsilon R}, \quad \frac{d\sigma_l}{d\Omega} = \frac{R \frac{d\sigma_u}{d\Omega}}{1 + \varepsilon R}.$$

Также поперечно-поперечные  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega}$  и продольно-поперечные  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega}$  структурные функции были посчитаны наилучшим способом для каждого значения  $\cos \theta$ .

В случае полного покрытия  $\varphi$  диапазона наилучшим методом считался нулевой метод. В случае частичного покрытия по углу  $\varphi$  были использованы методы 1-4.

В ходе вышеописанных процедур для всех доступных экспериментальных значений были посчитаны структурные функции  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_\pi}$ .

## 8. Линейная интерполяция

Рассчитанные экспериментальные данные имеют дискретный характер, для получения непрерывных зависимостей структурных функций была выполнена их линейная интерполяция от переменных  $(W, Q^2, \theta)$ .

Для удобства визуализации и поиска полученных зависимостей были созданы веб-сайты [19, 20], содержащие в свободном доступе полученные структурные функции и полученные при помощи интерполяции зависимости. Сайты обеспечивают графическое и цифровое представление информации о структурных функциях реакции электророждения  $\pi^0 p$  и  $\pi^+ n$  в области  $W < 1.8$  ГэВ и  $Q^2 < 6$  ГэВ<sup>2</sup>.

Примеры графиков, полученных в ходе работы, можно увидеть на (8.1-8.8), для получения остальных результатов нужно перейти [19, 20].

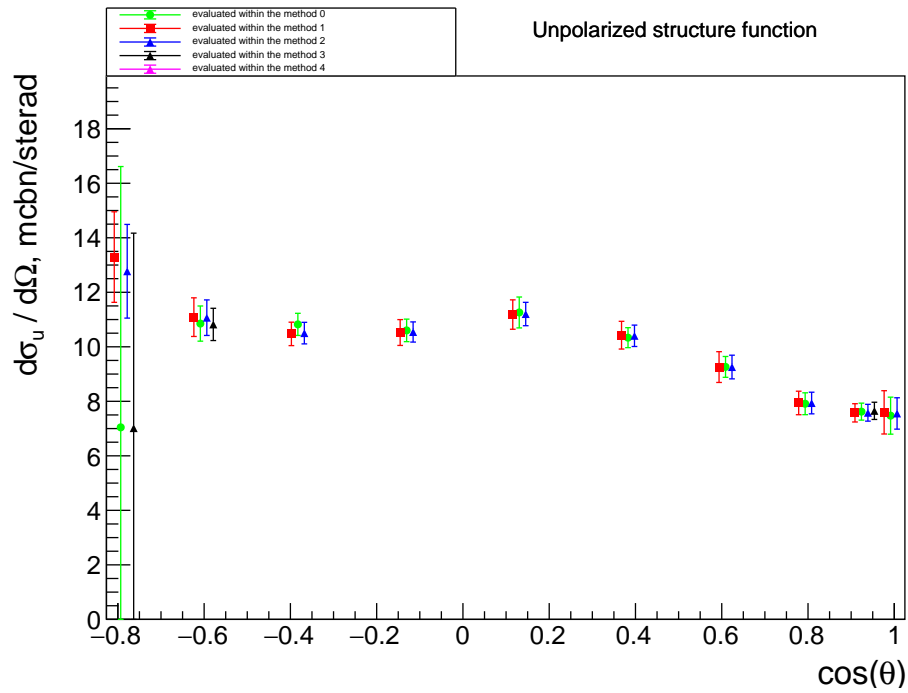


Рис. 8.1: Сравнение неполяризованных структурных функций, полученных различными методами, для канала  $\gamma_v p \rightarrow \pi^+ n$  при  $W_{min} = 1.16$  ГэВ,  $W_{max} = 1.18$  ГэВ,  $Q_{min}^2 = 0.25$  ГэВ<sup>2</sup>,  $Q_{max}^2 = 0.35$  ГэВ<sup>2</sup>.

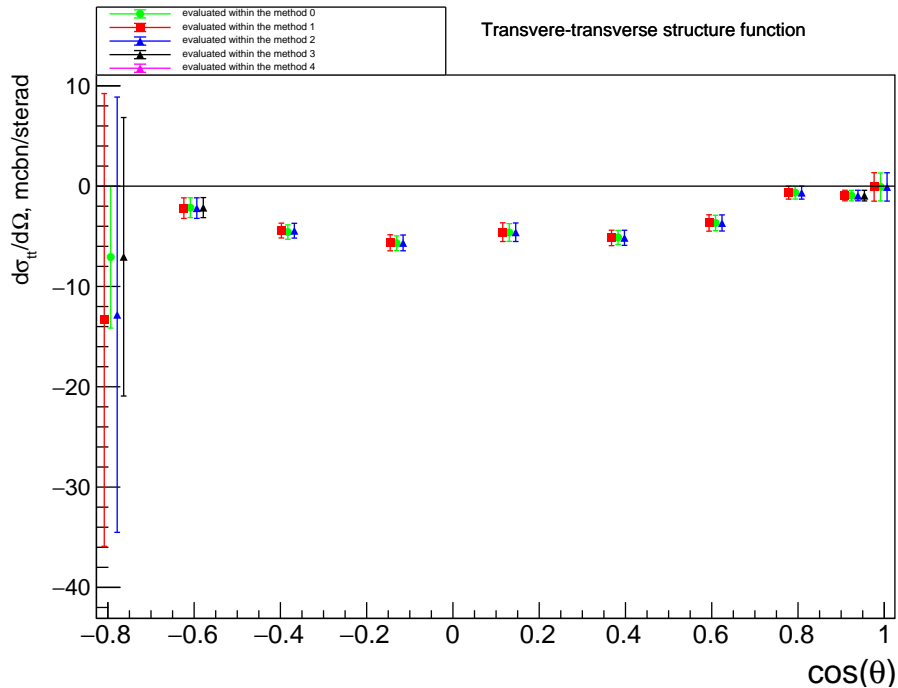


Рис. 8.2: Сравнение поперечно-поперечных структурных функций, полученных различными методами, для канала  $\gamma_v p \rightarrow \pi^+ n$  при  $W_{min} = 1.16$  ГэВ,  $W_{max} = 1.18$  ГэВ,  $Q_{min}^2 = 0.25$  ГэВ<sup>2</sup>,  $Q_{max}^2 = 0.35$  ГэВ<sup>2</sup>.

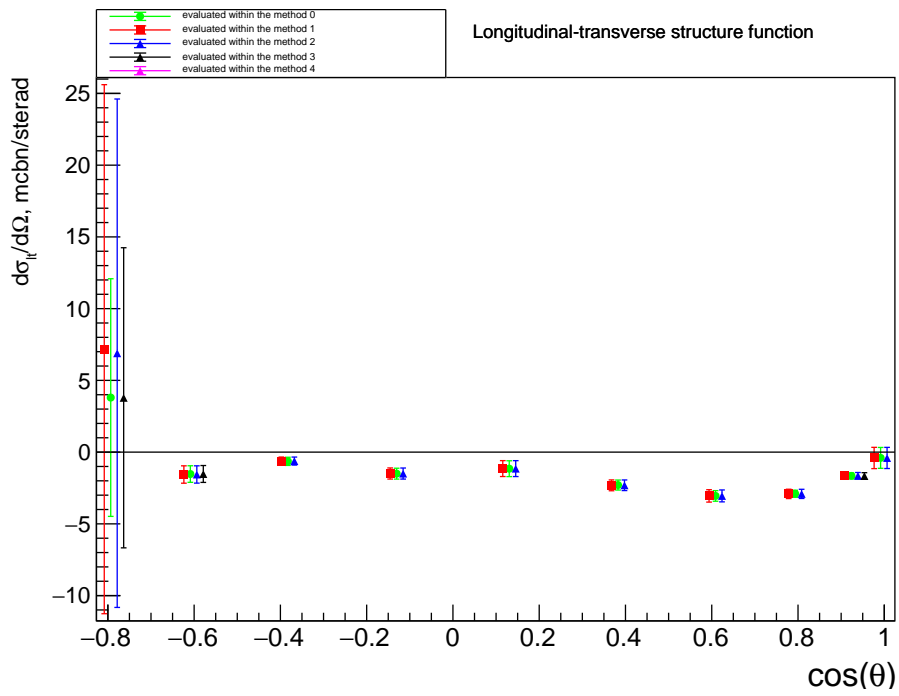


Рис. 8.3: Сравнение продольно-поперечных структурных функций, полученных различными методами, для канала  $\gamma_v p \rightarrow \pi^+ n$  при  $W_{min} = 1.16$  ГэВ,  $W_{max} = 1.18$  ГэВ,  $Q_{min}^2 = 0.25$  ГэВ<sup>2</sup>,  $Q_{max}^2 = 0.35$  ГэВ<sup>2</sup>.

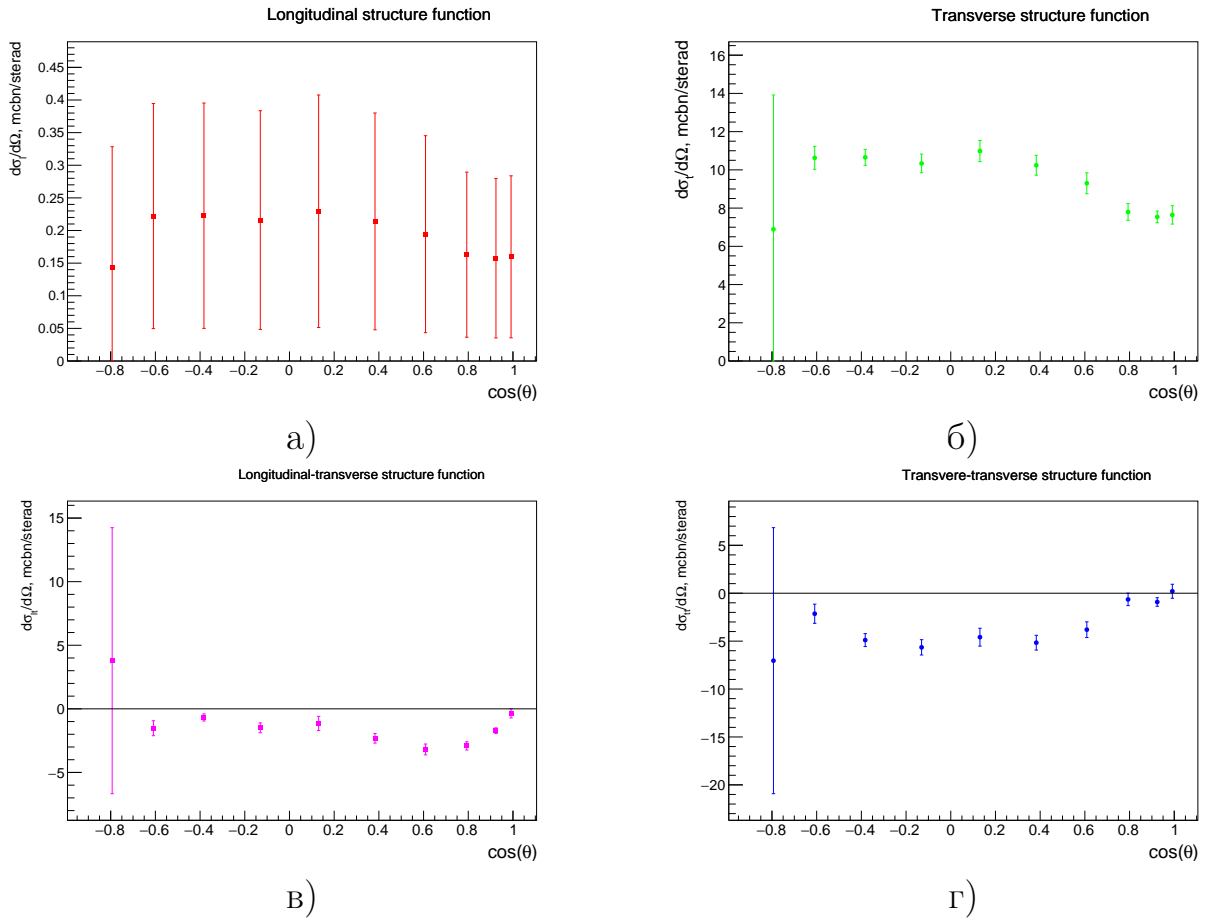


Рис. 8.4: Зависимости продольной (а), поперечной (б), продольно-поперечной (в) и поперечно-поперечной (г) структурных функций от угла испускания пиона в системе центра масс виртуального фотона и протона для реакции  $\gamma_p \rightarrow \pi^+ n$  при  $W_{min} = 1.16$  ГэВ,  $W_{max} = 1.18$  ГэВ,  $Q_{min}^2 = 0.25$  ГэВ<sup>2</sup>,  $Q_{max}^2 = 0.35$  ГэВ<sup>2</sup>.

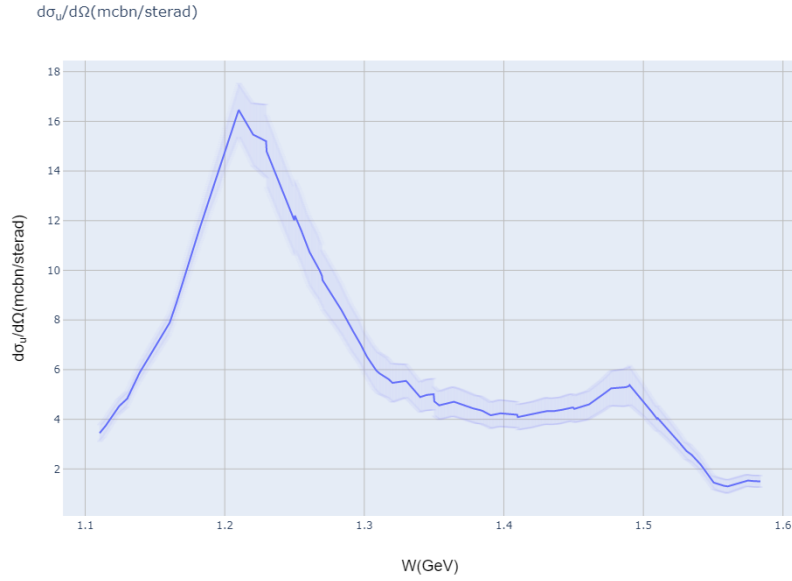


Рис. 8.5: Зависимость проинтерполированной неполяризованной структурной функции от  $W(\text{GeV})$  для канала  $\gamma_p \rightarrow \pi^+ n$  при  $Q^2 = 0.35 \text{ ГэВ}^2$ ,  $\cos\theta = 0.3$ ,  $E_{beam} = 5.75 \text{ ГэВ}$ ,  $\varphi = 30^\circ$ .

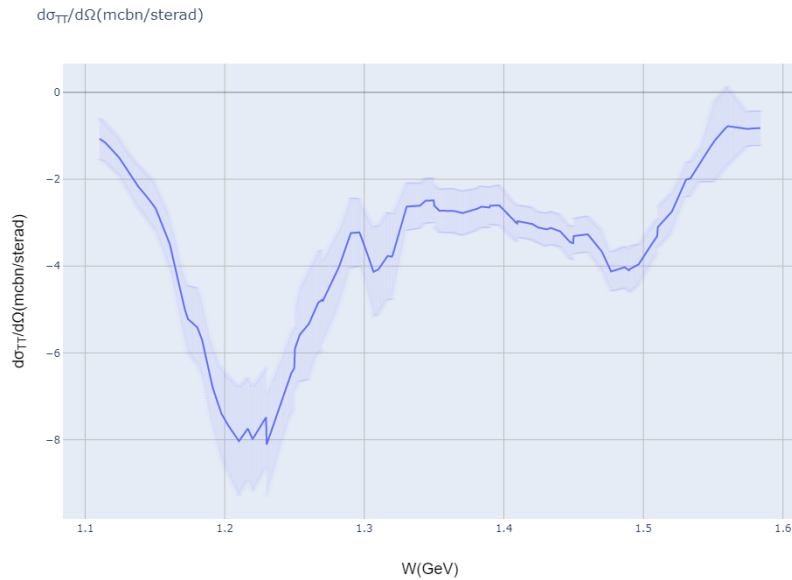


Рис. 8.6: Зависимость проинтерполированной поперечно-поперечной структурной функции от  $W(\text{GeV})$  для канала  $\gamma_p \rightarrow \pi^+ n$  при  $Q^2 = 0.35 \text{ ГэВ}^2$ ,  $\cos\theta = 0.3$ ,  $E_{beam} = 5.75 \text{ ГэВ}$ ,  $\varphi = 30^\circ$ .



Рис. 8.7: Зависимость проинтерполированной продольно-поперечной структурной функции от  $W(\text{GeV})$  для канала  $\gamma_n p \rightarrow \pi^+ n$  при  $Q^2 = 0.35 \text{ ГэВ}^2$ ,  $\cos\theta = 0.3$ ,  $E_{beam} = 5.75 \text{ ГэВ}$ ,  $\varphi = 30^\circ$ .

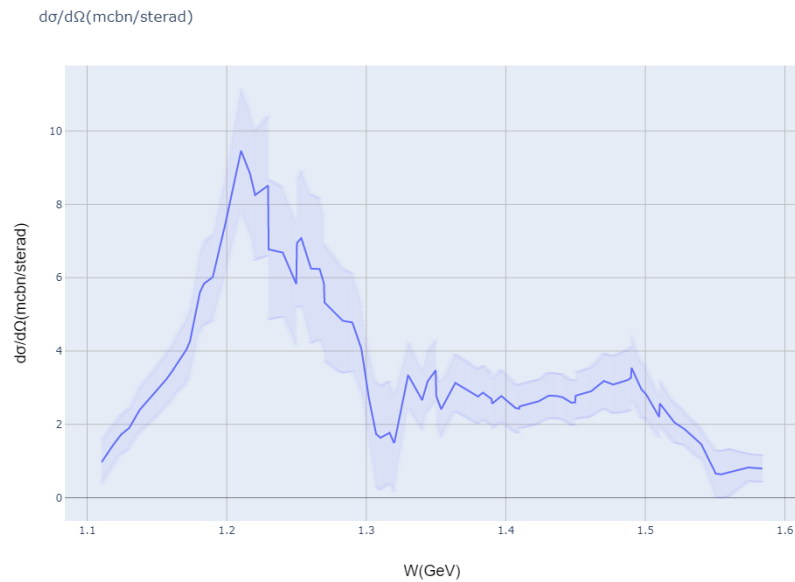


Рис. 8.8: Зависимость проинтерполированного дифференциального сечения от  $W(\text{GeV})$  для канала  $\gamma_n p \rightarrow \pi^+ n$  при  $Q^2 = 0.35 \text{ ГэВ}^2$ ,  $\cos\theta = 0.3$ ,  $E_{beam} = 5.75 \text{ ГэВ}$ ,  $\varphi = 30^\circ$ .



## ВЫВОДЫ

В рамках описанного выше подхода были рассчитаны эксклюзивные структурные функции из данных CLAS для реакций электророждения  $\pi^0 p$  и  $\pi^+ n$  в области  $W < 1.7$  ГэВ и  $Q^2 < 6.0$  ГэВ<sup>2</sup>. Данные по  $N\pi$  эксклюзивным структурным функциям представляют значительный интерес для изучения структуры нуклонных резонансов во второй и третьей резонансных областях, а также для сравнительного анализа результатов по амплитудам электровозбуждения  $\Delta(1232)3/2^+$  резонанса.

Наблюдается (рис. 8.1-8.3) хорошее соответствие между величинами структурных функций, полученных различными методами, описанными в предыдущей части статьи.

В качестве примера (рис. 8.1) сравниваются неполяризованные структурные функции в каналах  $\pi^+ n$ , полученные различными методами в зависимости от угла эмиссии пиона в системе центра масс виртуального фотона и протона. Хорошее соответствие, наблюдающееся для большинства точек, свидетельствует о надежности извлечения этих величин. Как показано на рис. 8.1,  $\pi^+ n$  неполяризованные структурные функции, полученные в методах 1,2,4, отличаются от полученных из подгонки измеренных сечений согласно 4.7 и методу 3. Таким образом, ситуация, когда данные покрывают ограниченные интервалы по углам  $\varphi$ , делает проблематичным извлечение структурных функций из подгонки данных 4.7. В этих случаях необходимо использовать развитые в настоящей работе методы 1,2,4.

Также в качестве примера на рис. 8.4 показаны извлеченные структурные функции для реакций электророждения  $\pi^+ n$  при  $W_{min} = 1.16$  ГэВ,  $W_{max} = 1.18$  ГэВ,  $Q_{min}^2 = 0.25$  ГэВ<sup>2</sup>,  $Q_{max}^2 = 0.35$  ГэВ<sup>2</sup>. Хорошо видно, что неполяризованные структурные функции вносят наибольший

вклад в процессы эксклюзивного электророждения пионов. Вклад от поляризованных структурных функций и составляет от 10% до 50% сравнительно с неполяризованными структурными функциями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из данных CLAS по дифференциальным сечениям электророждения  $\pi^0 p$  и  $\pi^+ n$  на протонах были получены структурные функции  $\frac{d\sigma_u}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_t}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_l}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_{lt}}{d\Omega_\pi}$ ,  $\frac{d\sigma_{tt}}{d\Omega_\pi}$  в области  $W < 1.8$  ГэВ и  $Q^2 < 6$  ГэВ<sup>2</sup>.

Была выполнена линейная интерполяция данных сечений, вычислены дифференциальные сечения реакций. Полная информация об извлеченных структурных функциях и дифференциальных сечениях доступна на веб-сайтах [19, 20]. Полученные результаты представляют значительный интерес для исследования структуры возбужденных состояний нуклона во второй и третьей резонансных областях.

Дальнейшая работа предполагает выполнение экстраполяции полученных данных, которая позволит получить значения структурных функций и дифференциальных сечений в областях, в которых экспериментальные данные отсутствуют.

По результатам работы была написана и опубликована статья в Известиях РАН [21].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hampton D. et al. Optical spectral characteristics of sprites // Geophysical Research Letters. 1996. vol. 23, number 1. p. 89-92.
2. Hampton D. et al. Optical spectral characteristics of sprites // Geophysical Research Letters. 1996. vol. 23, number 1. p. 89-92.
3. Crede V., Roberts W. // Rept. Prog. Phys. 2013. 76. 076301.
4. Aznauryan I.G., Burkert V.D. // Prog. Part. Nucl. Phys. 2012. 67. P. 1.
5. <http://tpcsf.ihep.ac.cn>
6. Foster F., Hughes G. // Rept. Prog. Phys. 1983. 46. P. 1445.
7. Ripani M., Burkert V.D., Mokeev V. et al. // 2003. hep-ex/0304034.
8. Cutkosky R.E., Forsyth C.P., Hendrick R.E., Kelly R.L. // Phys. Rev. D. 1979. 20. P. 2804.
9. Hohler G., Kaiser F., Koch R., Pietarinen E. // Phys. Dat. 1979. 12, N 1. P. 1.
10. Koch R. // Nucl. Phys. 1986. A448. P. 707.
11. Vrana T.P., Dytman S.A., Lee T.S.H. // Phys. Rep. 2000. 328. P. 182.
12. Briscoe W.J., Döring M., Haberzettl H. et al. // 2015. arXiv:1503.07763 [hep-ph].
13. Mecking B.A. et al. // Nucl. Instrum. Meth. 2003. A503. P. 513.
14. Krusche B., Schadmand S. // Prog. Part. Nucl. Phys. 2003. 51. P. 399.
15. Barker I.S., Donnachie A., Storrow J.K. // Nucl. Phys. 1975. B95. P. 347.

16. Ю.А. Скородумина и др. // ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 2015. № 6
17. <https://clas.sinp.msu.ru>
18. Amaldi E., Fubini S., Furlan G.// Pion-Electroproduction: Electroproduction at Low Energy and Hadron Form Factors. Springer Tracts in Modern Physics, 1979.
19. <https://clas.sinp.msu.ru/almaz/>
20. <https://clas.sinp.msu.ru/almaz/interpolateGraph>
21. А. Д. Булгаков и др. // Известия РАН. Серия физическая, 2021, Т. 85, № 5, стр. 627-633