

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«Спектры возбужденных состояний атомных ядер в приближении δ -сил»

Выполнила студентка

413 группы

Жуляева Дарья Сергеевна

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Третьякова Татьяна Юрьевна

Допущена к защите _____

Зав. кафедрой _____

Москва

2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Теоретические методы.....	6
1.1. Проявления спаривания нуклонов	6
2.2. Введение теории спаривания	11
2.3. Два нуклона на j оболочке	13
2.4. Оценка энергии спаривания.....	15
2.5. Схема сеньорити	17
2. Результаты.....	20
2.1. Оболочка $1f_{7/2}$	20
2.1.1. Изотопы кальция.....	20
2.1.2. Изотоны $N = 28$	25
2.2. Подоболочка $1g_{9/2}$	29
2.2.1. Изотопы никеля.....	29
2.2.2. Изотоны $N = 50$	33
ВЫВОДЫ.....	39
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	41
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	43
ПРИЛОЖЕНИЕ	46
Приложение А. Вывод формулы энергетического сдвига для тождественных нуклонов.....	46
Приложение Б. Программа для определения значений полного момента J	49

ВВЕДЕНИЕ

Активно используемая оболочечная модель основана на концепции самосогласованного эффективного потенциала, однако помимо среднего поля имеет значение остаточное взаимодействие, которое отвечает за корреляции нуклонов. Парное взаимодействие ответственно, например, за чётно-нечётное расщепление массовой поверхности (EOS) и за то, что все чётно-чётные ядра имеют в основном состоянии спин $J^\pi = 0^+$. Силы спаривания, которые так же, как и нуклон-нуклонные силы, предполагаются короткодействующими, приводят к формированию характерных наборов уровней в низколежащих спектрах возбуждённых состояний атомных ядер. Эти наборы можно описать в приближении δ -сил [1], именно они рассматриваются в данной работе.

В 1943 году Рака ввел понятие спаривательного взаимодействия и числа сеньорити ν – число неспаренных нуклонов [2]. Была сформулирована модель сеньорити, основанная на симметриях ядерных взаимодействий и описывающая взаимодействие нуклонов в области $j \leq 7/2$ [3].

В работе изучаются низколежащие спектры возбуждений, к формированию которых приводит эффект спаривания тождественных нуклонов в чётно-чётных и чётно-нечётных ядрах. Выбор исследуемых атомных ядер должен быть основан в первую очередь на возможности их описания с помощью нашего подхода, а также актуальности их изучения. Очевидно, что лучше рассматривать сразу цепочки соседних ядер изотопов и изотонов для наблюдения за изменениями свойств спектров при добавлении одного валентного нуклона. Также представляет интерес сравнение работы нашей модели на оболочках с разными j .

С учётом описанных требований к объекту исследования были выбраны четыре цепочки ядер с последовательными заполнениями оболочек. Первая из них – изотопы кальция $^{42-46}\text{Ca}$. Так как эти ядра являются отличным примером для представления работы схемы сеньорити, то подробное исследование их спектров уже не раз было выполнено, например в статьях [4, 5, 6]. Но в

настоящей работе будет выполнен несколько иной подход: помимо стандартного построения мультиплета, мы произведём анализ его чувствительности к положению нижнего возбуждённого состояния, как будет далее видно, это приведёт к интересным эффектам.

Вторая цепочка ядер – изотопы $N = 28$. Такой выбор второй цепочки направлен на представление полноты исследования для оболочки $1f_{7/2}$. На их примере мы посмотрим, меняются ли закономерности, найденные в спектрах изотопов кальция, для протонного спаривания.

Следующими атомными ядрами, представляющими особый интерес данной работы, являются нейтрон-избыточные изотопы никеля. Повышенное внимание как теоретической, так и экспериментальной ядерной физики к ним вызвано сразу несколькими причинами [7, 8]. Ядра вблизи ^{78}Ni имеют большое значение в астрофизике [9], так как являются начальными элементами r -процесса, ответственного за образование ядер с $Z > 26$. Вероятность синтеза химических элементов вдоль той или иной цепочки нейтрон-избыточных изотопов напрямую зависит от оболочечных структуры ядер вдали от линии стабильности.

Спектроскопические исследования ^{78}Ni и его соседей включены в программу всех основных экспериментов нового поколения на радиоактивных пучках, таких как Radioactive Isotope Beam Factory (RIBF) в Японии, Facility for Rare Isotope Beams (FRIB) в США, Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) в Германии. Кардинальный прогресс за два последних десятилетия достигнут в экспериментальном изучении цепочки нейтрон-избыточных изотопов никеля $^{70-76}\text{Ni}$ [10-18]. Особое внимание к этой группе изотопов вызвано обсуждением сохранения числа сеньорити ν для $j = 9/2$ [19, 20], которое в данной работе также будет затронуто.

Как и в случае оболочки $1f_{7/2}$, будут рассмотрены и изотопы для $1g_{9/2}$. Это будет группа изотонов $N = 50$, и, несмотря на схожие с изотопами

конфигурации валентных нуклонов, мы увидим некоторые значительные отличия в их спектрах.

Поскольку ν является хорошим квантовым числом только для $j \leq 7/2$, рассматривается вопрос о степени нарушения сеньорити для $j = 9/2$. Поэтому в работе наблюдается поведение модели сеньорити на оболочке $1f_{7/2}$ на примере изотопов кальция $^{42-46}\text{Ca}$ и изотонов $N = 28$ (от Ti до Fe), и на оболочке $1g_{9/2}$ в изотопах никеля $^{70-76}\text{Ni}$ и изотонов $N = 50$ (от Mo до Cd). Особое внимание уделено анализу чувствительности порядка уровней мультиплетов основного состояния (GSM) и расщепления мультиплета с сеньорити $\nu = 4$ к положению состояния $J = 2$ ($\nu = 2$).

1. Теоретические методы

1.1. Проявления спаривания нуклонов

Несмотря на огромные успехи модели оболочек и обобщённой модели в предсказании и интерпретации экспериментальных данных, область их применения осталась достаточно ограниченной. Следствием рассмотрения усредненного потенциала и нуклонов как независимых частиц становится невозможность описать некоторые свойства основных и возбуждённых состояний ядер. Результаты такого подхода в лучшем случае будут отражать первый порядок приближения, который можно использовать лишь с корректировкой посредством учитывания остаточных взаимодействий. Наиболее существенной компонентой оказывается спаривательная. Именно она позволяет объяснить ряд эффектов, которые невозможно понять в рамках независимого движения нуклонов. Рассмотрим экспериментальные факты, подтверждающие идею о спаривании нуклонов в ядрах [21, 22].

1) Квантовые характеристики основного состояния

Для всех без исключения чётно-чётных ядер полный момент и чётность основного состояния $J^P = 0^+$.

2) Состав ядер

При анализе карты атомных ядер становится видно, что наиболее энергетически выгодными состояниями являются конфигурации с чётным числом нуклонов одного типа. (Стабильных нечётно-нечётных изотопов всего 4: ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{Ne}$; стабильных изотопов чётно-чётных ядер значительно больше, чем чётно-нечётных)

3) Чётно-нечётный эффект

Систематическое исследование энергий связи $E_{bind}(A)$ показывает, что энергия связи нечётного ядра как правило меньше, чем среднее арифметическое из энергий связи соседних ядер. То есть выполняется следующее соотношение:

$$E_{bind}(A) < \frac{1}{2}[E_{bind}(A-1) + E_{bind}(A+1)] \quad (1)$$

Оно называется чётно-нечётным скачком энергии связи EOS (even-odd staggering).

На рис.1 показана зависимость энергии связи в ядрах-изобарах с $A = 84$ от заряда ядра. На графике отчетливо видно расслоение энергий связи на три группы ядер: с чётным A (чётные N и Z), нечётным A (чётное N , нечётное Z или нечётное N , чётное Z) и с чётным A и нечётными значениями N и Z .

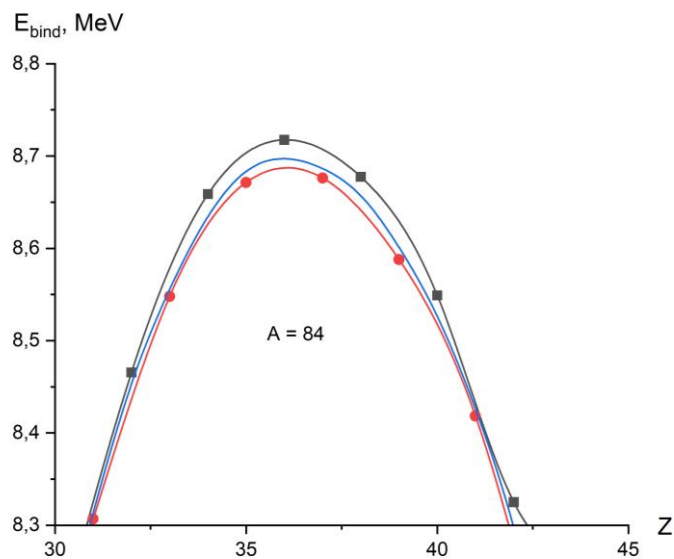


Рисунок 1 Зависимость энергии связи ядер-изобар $A = 84$ от заряда ядра Z . Квадраты — значения энергии связи в ядрах с чётными значениями N и Z , кружки — с нечётным N или Z . Линия по центру соответствует усреднённым значениям для $A = 83$ и $A = 85$. Экспериментальные данные из [23].

Величина этого эффекта есть расслоение массовой поверхности, и представляется как отклонение экспериментального значения энергии связи $E_{bind}(N, Z)$ от среднего значения энергий связи соседних ядер:

$$\Delta_n(N, Z) = E_{bind}(N, Z) - \frac{1}{2} [E_{bind}(N - 1, Z) + E_{bind}(N + 1, Z)] \quad (2)$$

если же нечетное A получается путем прибавления (вычитания) нейтрона, то будет иметь место аналогичная формула для Δ_p .

Также проявление EOS-эффекта хорошо видно в зависимостях энергии отделения нуклона от массового числа A . Энергия отделения нейтрона:

$$S_n(N, Z) = M(N - 1, Z) + m_n - M(N, Z) = E_{bind}(N, Z) - E_{bind}(N - 1, Z). \quad (3)$$

На рис.2 представлена зависимость $S_n(N)$ в изотопах цезия Cs ($Z = 55$). Ярко выраженный пилообразный характер зависимости указывает на парное взаимодействие между нуклонами. В случае чётного числа нейтронов энергия отделения S_n увеличивается за счет дополнительного притяжения пары нейтронов.

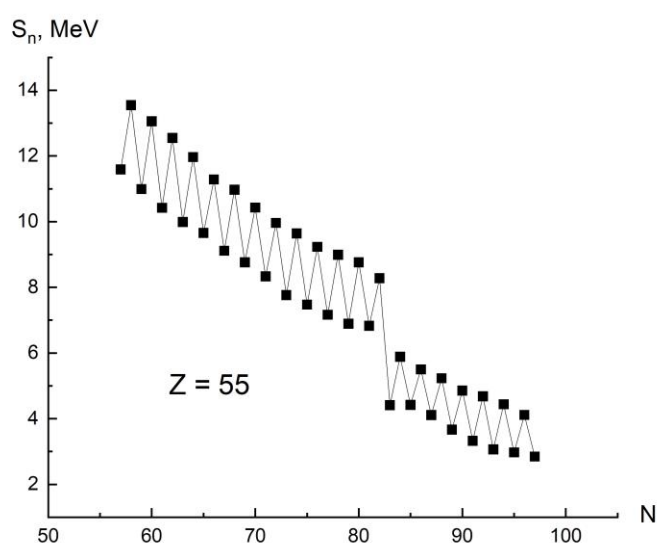


Рисунок 2 Зависимость энергии отделения нейтрона S_n от числа нейтронов N в изотопах Cs. Пилообразная зависимость $S_n(A)$ объясняется эффектом спаривания нуклонов в атомных ядрах. Повышенная величина изменения энергии отделения нейтрона при $N = 82$ соответствует заполнению ядерной оболочки. Экспериментальные данные из [23]

4) Энергетическая щель

Если сравнивать спектры чётно-чётных и чётно-нечётных ядер, то у первых значительно меньшее количество возбуждённых состояний в диапазоне до 1.5 МэВ, при этом большинство этих уровней описываются как вращательные или колебательные полосы. Это можно объяснить, если учесть, что для образования низших одночастичных состояний в чётно-чётном ядре необходимо разорвать связь между спаренными нуклонами. На рис.3 в качестве примера приведены спектры изотопов никеля $^{70-73}\text{Ni}$.

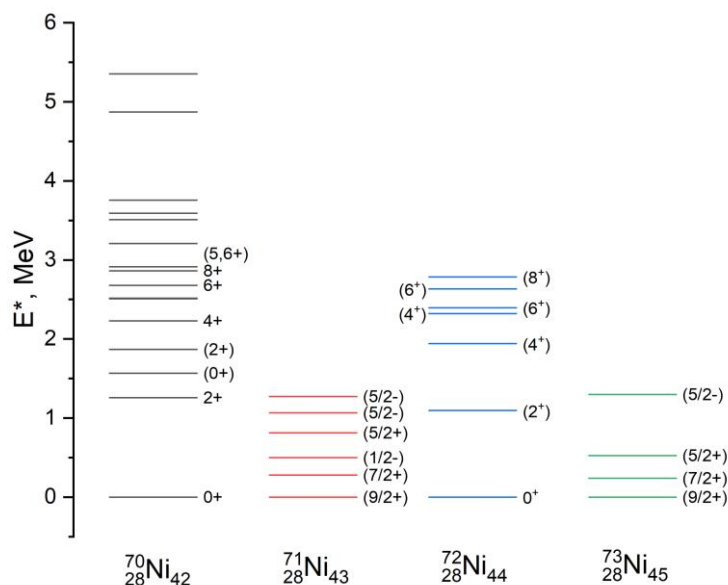


Рисунок 3 Спектры возбужденных состояний изотопов никеля $^{70-73}\text{Ni}$. Экспериментальные данные из [24, 25, 26, 27].

5) Деформации

В модели независимых частиц сферическое основное состояние реализуется только для ядер с полностью заполненными оболочками. Все ядра с незаполненными оболочками деформированы. Однако из экспериментальных данных следует, что ядра в окрестности магических ядер также имеют сферические основные состояния. Переход к эллипсоидальной форме происходит при заполнении примерно четверти мест в последней оболочке и по мере её заполнения деформация резко возрастает, достигая максимума к середине заполнения оболочки.

б) Моменты инерции

Если рассчитывать моменты инерции в рамках оболочечной модели, то полученные значения будут в несколько раз больше экспериментальных. Однако при учетывании эффекта спаривания достигается согласование теории и эксперимента. Также имеются существенные различия в моментах инерции чётно-чётных и соседних чётно-нечётных ядер, и эти различия превышают предполагаемые изменения от добавления одного нуклона.

7) Плотность уровней

Если оболочка j заполнена небольшим количеством нуклонов, то можно построить большое число энергетически вырожденных состояний, которые будут соответствовать различной связи угловых моментов частиц. При определении количества состояний в заданном интервале малых энергий оказывается, что теоретическая плотность уровней примерно вдвое больше экспериментальной. Это можно объяснить из соображений понижения энергии определённых конфигураций спариванием нуклонов.

8) Низколежащие состояния 2^+

В рамках оболочечной модели без учета спаривания нельзя описать низколежащие уровни 2^+ в ядрах вблизи магических чисел. Природа этих уровней отличается от вращательной или одночастичной, так как с одной стороны не выполняется условие пропорциональности энергии возбуждения $J(J + 1)$, с другой стороны вероятности переходов $B(E2)$ в основное состояния значительно выше одночастичных оценок.

На рис.4 приведена карта отношения энергий первых возбужденных состояний $E(4^+)/E(2^+)$ в зависимости от Z и N . Темные области, соответствующие $E(4^+)/E(2^+) < 2$ располагаются как раз вдоль линий магических чисел. Эти состояния также имеют коллективную природу, обусловленную спариванием нуклонов в ядрах, имеющих пары тождественных нуклонов на внешней оболочке.

Все вышеперечисленные явления можно объяснить, введя в рассмотрение взаимодействие нуклонов между собой. Так, учитывая спаривательные силы, легко понять, например, наличие энергетической щели: все нуклоны в ядре будут образовывать пары, а значит для возбуждения чётно-чётного ядра необходимо либо разорвать связь нуклонной пары, либо перевести пару на более высокую оболочку. В чётно-нечётном же ядре достаточно просто перевести выше один нуклон. Из аналогичных соображений понятны и остальные эффекты.

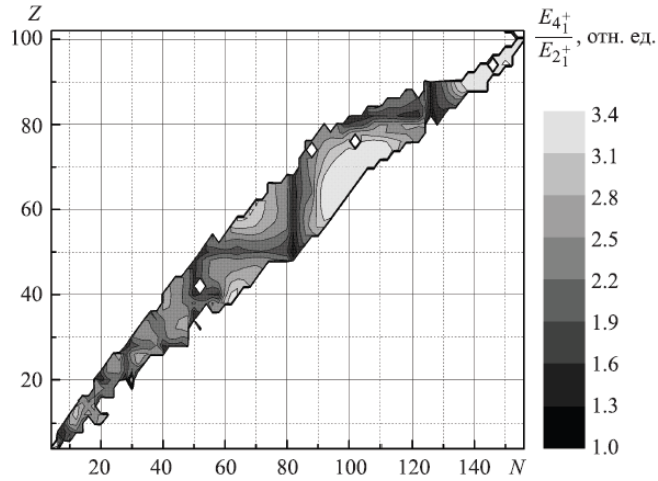


Рисунок 4 Отношение энергий первых возбуждённых состояний с $J^P = 4^+$ и $J^P = 2^+$ [21].

2.2. Введение теории спаривания

Теперь уже понятно, что между внешними нуклонами имеются сильные корреляции, возникающие благодаря короткодействующим ядерным силам. Вспомним, что угловые моменты чётно-нечётных ядер определяются свободным внешним нуклоном, и что все чётно-чётные ядра в основном состоянии имеют $J^P = 0^+$, получается, что следует ввести спаривательную силу между нуклонами. Тогда два нуклона, находящиеся на одной оболочке, будут всегда принимать состояние с наименьшей энергией. Рассмотрим это состояние [28].

Пусть существуют две частицы на оболочке (n, l, j) , первая в состоянии $|j_1, m_1\rangle$, и вторая в состоянии $|j_2, m_2\rangle$. Плотности вероятности их нахождения показаны в разрезе на рис.5, зона их перекрытия выделена, а θ_{12} – это угол между векторами j_1 и j_2 . С квантовой точки зрения остаточное взаимодействие между частицами наиболее велико тогда, когда перекрытие максимально. Это требование выполняется при $\theta_{12} = 0$ и π , то есть всего два случая: векторы j_1 и j_2 параллельны или антипараллельны. Так как первый случай с $\theta_{12} = 0$ означает нахождение обеих частиц в одном и том же состоянии, то он выполняется для тождественных фермионов не может по принципу Паули. Второй же случай $\theta_{12} = \pi$ разрешен, тогда одна из частиц находится в состоянии $|j, m\rangle$, а вторая – в состоянии $|j, -m\rangle$. Тогда происходит спаривание и $M_{12} = m_1 + m_2 = 0$. Отсюда следует $J_{12} = 0$. Это означает, что нуклоны движутся по одной орбите в

противоположных направлениях. При этом состояния $J_{12} \neq 0$ соответствуют частичному перекрытию.

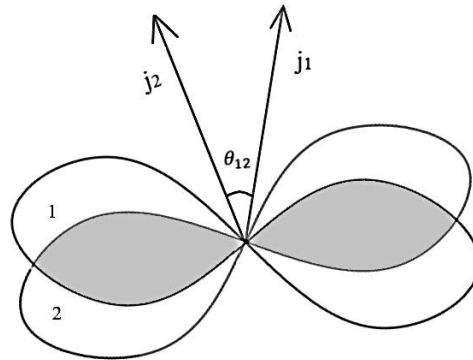


Рисунок 5 Плотности вероятности нахождения двух частиц $|j_1, m_1\rangle$ и $|j_2, m_2\rangle$ в разрезе. Область перекрывания заштрихована, через θ_{12} обозначен угол между векторами j_1 и j_2 .

Квантовые числа пары нуклонов, находящихся на оболочке (n, l, j) , будут $P = ((-1)^l)^2 = +1$ и $|j - j| \leq J \leq j + j$. Причем в случае двух тождественных нуклонов значения полного момента импульса будут принимать только чётные значения (в силу принципа Паули).

В нулевом порядке теории возмущений все эти состояния представляют собой собственные функции гамильтониана H_0 с собственным значением $2\varepsilon_j$, где ε_j – значение энергии частицы на оболочке j . Тогда без учёта остаточного взаимодействия наблюдался бы вырожденный мультиплет. Но на самом деле в наблюдаемых чётно-чётных ядрах состояние $J^P = 0^+$ является основным (см. рис.3), остальные же конфигурации близки друг к другу и возникают при более высоких энергиях. Предполагая, что все эти состояния возникают за счёт одной и той же чистой конфигурации, делаем вывод, что состояние $J^P = 0^+$ связано значительно сильнее остальных.

Это различие есть проявление взаимодействия спаривания, которое можно трактовать как остаточное взаимодействие притяжения (так как оно усиливает связь ядра), которое проявляется между двумя идентичными нуклонами практически только тогда, когда они находятся в состоянии с полным моментом количества движения равным нулю.

Очевидно, что между парой нуклонов действуют короткодействующие и притягивающие спаривательные силы, приводящие к образованию двухнуклонной системы с $J_{12} = 0$ в случае полного перекрытия волновых функций. Для описания такого взаимодействия наиболее хорошим и простым приближением будет δ -функция [1]:

$$V(r_1, r_2) = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (4)$$

где \vec{r}_1, \vec{r}_2 – пространственные координаты двух нуклонов, $V_0 = \text{const}$ – амплитуда взаимодействия.

2.3. Два нуклона на j оболочке

Волновая функция углового момента для двух частиц может быть построена как [29, 30]:

$$\psi(j_1(1)j_2(2); JM) = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | JM \rangle \cdot \varphi_{j_1 m_1}(1) \varphi_{j_2 m_2}(2), \quad (5)$$

где приняты следующие обозначения: $1 \equiv r_1, \sigma_1, \dots$ – все пространственные координаты частицы 1, j_1 – обозначение всех квантовых чисел для задания одночастичного состояния $j_1 \equiv n_1, l_1, j_1$.

Система замкнутых оболочек будет описываться гамильтонианом H_0 , а два тождественных валентных нуклона, взаимодействующих между собой посредством $V(r_1, r_2)$, будут описываться одночастичным гамильтонианом $h_0(i)$. Тогда полный гамильтониан ядра выглядит следующим образом:

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^2 h_0(i), \quad (6)$$

с собственными функциями (5) и собственным значением энергии $E_0 + \varepsilon_{j_1} + \varepsilon_{j_2}$. В результате остаточного взаимодействия произойдет расщепление вырождения по J , а энергетический сдвиг будет описываться так:

$$\Delta E(j_1 j_2; J) \equiv \langle j_1 j_2; JM | V(r_1, r_2) | j_1 j_1; JM \rangle. \quad (7)$$

Задача сводится к нахождению данного матричного элемента, благодаря которому можно будет найти сдвиги энергий для каждого J . Поскольку в простейшем варианте взаимодействие не зависит от спиновых переменных, пространственные и спиновые переменные могут быть разделены. Полная

волновая функция двух нуклонов должна быть антисимметричной. При этом пространственная волновая функция двух нуклонов должна быть симметричной, так как в случае δ -взаимодействия $r_1 = r_2$ и матричный элемент с δ -потенциалом в обкладках двух антисимметричных функций будет равен нулю. Следовательно, антисимметричной должна быть спин-изоспиновая часть:

$S = 0, T = 1$ — два нейтрона или два протона с противоположно направленными спинами;

$S = 1, T = 0$ — пара нейтрон-протон, спины нуклонов сонаправлены.

Строя антисимметричную волновую функцию двух нуклонов, разделяя в матричном элементе (7) пространственные и спиновые переменные, представляя взаимодействие нуклонов (4) в разложении по полиномам Лежандра, а также пользуясь алгеброй Рака, для тождественных нуклонов получим (см. Прил.А):

$$\Delta E_{j^2, J} = -\frac{V_0 F^0}{2} (2j + 1)^2 \begin{pmatrix} j & j & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad (8)$$

где $F^0 = F^0(nl)$ – радиальный интеграл, $J = 0, 2, \dots, (2j - 1)$ – полный момент пары нуклонов, $\begin{pmatrix} j & j & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ – $3j$ символ Вигнера. Таким образом относительный сдвиг состояния с полным моментом J определяется соотношением [30]:

$$\frac{\Delta E_J}{\Delta E_0} = (2j + 1) \begin{pmatrix} j & j & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad (9)$$

где ΔE_0 – сдвиг энергии основного состояния, ΔE_J – сдвиг энергии возбуждённого состояния ядра с моментом J . В то же время, сдвиг энергии основного состояния относительно положения вырожденных уровней определяется энергией спаривания Δ_{NN} [21]. Схематическое изображение мультиплета изображено на рис.6. Соответственно, можно найти энергию уровня E_J , пользуясь лишь одним расчётным параметром – значением энергии спаривания пары нуклонов:

$$E_J = \Delta_{NN} \left(1 - \frac{\Delta E_J}{\Delta E_0} \right). \quad (10)$$

Формула (10) позволяет рассчитать уровни возбуждения, образованные посредством парного взаимодействия тождественных внешних нуклонов в чётно-чётных ядрах, набор этих уровней принято называть мультиплетом основного состояния (ground state multiplet, GSM).

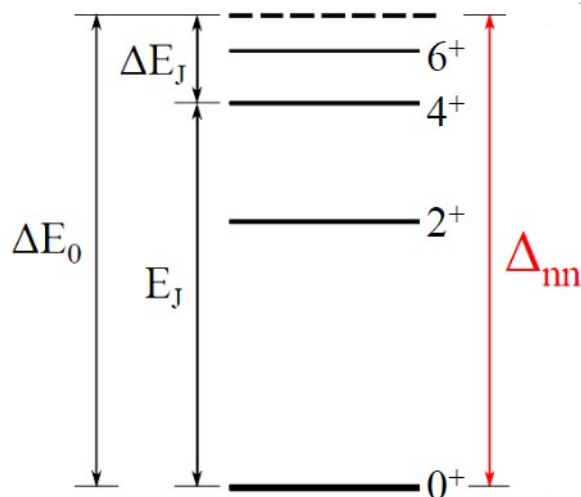


Рисунок 6 Схематическое изображение мультиплета основного состояния.

2.4. Оценка энергии спаривания

Мы рассматриваем ядро как систему из замкнутого дважды магического остова ($N - 2, Z$) и двух валентных (внешних) нуклонов, например, нейтронов. В этом случае при отсутствии взаимодействия между последними (спаривания) энергия отделения пары нейтронов в ядре (N, Z) совпадала бы с удвоенным значением энергии отделения нейтрона в ядре ($N - 1, Z$). В действительности, вследствие эффекта спаривания данное соотношение не выполняется,

Традиционно величина чётно-нечётного эффекта EOS является оценкой сил спаривания нуклонов, ее можно рассчитать на основе экспериментальных значений энергий отделения нуклона. По пилообразным скачкам (на рис.2) можно оценить вклад эффекта спаривания, однако тенденция к убыванию зависимости $S_n(N)$ приводит к неопределённости в том, как именно определить величину эффекта спаривания (рис. 7). Можно рассмотреть два варианта расчета [31, 32, 33]. Так, простейшими оценками являются

$$\Delta_{nn}(N) = (-1)^N [S_n(N) - S_n(N - 1)], \quad (11)$$

$$\Delta_{nn}^{(3)}(N) = (-1)^N [S_n(N) - S_n(N + 1)], \quad (12)$$

где $S_n(N)$ – энергия отделения нейтрона в ядре (N, Z) .

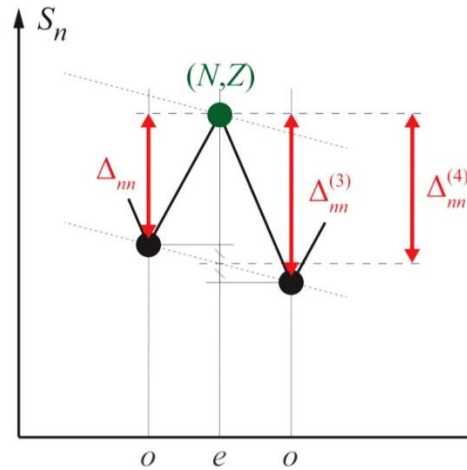


Рисунок 7 Иллюстрация соотношений для оценки спаривания двух нейтронов через энергии отделения нейтрона S_n в изотопах [31].

Видно, что $\Delta_{nn}^{(3)}(N) = \Delta_{nn}(N + 1)$ и что при чётных N всегда выполняется неравенство $\Delta_{nn}^{(3)}(N) > \Delta_{nn}(N)$ (для нечётных N – наоборот). Для того чтобы исключить влияние изменения общего потенциала, получаем оценку эффекта спаривания через усредняющую оценку $\Delta_{nn}^{(4)}(N)$ [32]:

$$\begin{aligned} \Delta_{nn}^{(4)}(N) &= \frac{1}{2} [\Delta_{nn}^{(3)}(N) + \Delta_{nn}(N)] = \\ &= \frac{(-1)^N}{2} [-S_n(N - 1) + 2S_n(N) - S_n(N + 1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку определение величины чётно-нечётного эффекта EOS из экспериментальных данных применяется, прежде всего, для получения аналитических зависимостей энергии спаривания от числа нуклонов, то в некоторых современных расчётах используются ещё более сглаживающие формулы [33], поэтому имеет смысл рассчитывать и $\Delta_{nn}^{(5)}(N)$ [34], которое введем подобно $\Delta_{nn}^{(4)}(N)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{nn}^{(5)}(N) &= \frac{1}{2} [\Delta_{nn}^{(4)}(N) + \Delta_{nn}^{(4)}(N + 1)] = \\ &= \frac{(-1)^N}{4} [S_n(N + 2) - 3S_n(N + 1) + 3S_n(N) - S_n(N - 1)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для протонов.

Таким образом, полученные уровни мультиплета основного состояния будут основываться исключительно на массовых соотношениях соседних ядер без использования каких-либо дополнительных подгоночных параметров. В настоящей работе будет использоваться величина (13), рассчитанная на основе данных АМЕ2020 [35].

2.5. Схема сеньорити

Теперь рассмотрим спектры возбужденных состояний в модели сеньорити [2]. Схема сеньорити описывает движение N нуклонов на j оболочке, состоящей из $2\Omega = 2j + 1$ вырожденных состояний (2Ω – максимально возможное число пар на подоболочке), через гамильтониан спаривания:

$$\hat{H}_{pair} = -|G|\hat{A}^+\hat{A}, \quad (15)$$

где G – параметр спаривания, $\hat{A}^+ = \sum_{m>0}^j a_m^+ a_{-m}^+$ – оператор рождения пары.

Энергия основного состояния в модели сеньорити может быть выражена через число нуклонов n и сеньорити ν (число неспаренных нуклонов в конфигурации) [36]:

$$E(n, \nu) = -\frac{1}{4}G(n - \nu)(2\Omega - \nu - n + 2), \quad (16)$$

где $\nu = 0$ для чётного числа нуклонов n и $\nu = 1$ для нечётного числа n .

Спаривательный гамильтониан действует только между двухнуклонными состояниями с $J = 0$, потому только данное состояние сдвигается вниз по энергии. Остальные состояния с $J \neq 0$ не смещаются и остаются вырожденными. При этом состояния с более высокими значениями сеньорити $\nu > 2$ также вырождены.

Схема сеньорити предполагает, что при наличии известных энергий состояний двух нуклонов на подоболочке можно вычислить энергии состояний в случае большего числа нуклонов на той же подоболочке. В таком случае вырождение снимается в результате расчетов, использующих в качестве базиса невырожденный набор уровней $\nu = 2$, который найден либо в результате модельных расчетов (в нашем случае – это рассчитанный в δ -приближении

GSM), либо из эксперимента. Формула для нахождения энергетических состояний:

$$E(J_n) = \sum_{J_{n-1}} [(jj)J_{n-1}jJ_n | \}j^n J_n]^2 E(J_{n-1}), \quad (17)$$

где $[(jj)J_{n-1}jJ_n | \}j^n J_n]$ – генеалогические коэффициенты (coefficients of fractional parentage, CFP). Генеалогические коэффициенты, используемые в расчетах, взяты из работы [37].

Определение состава каждого набора сеньорити является первостепенной задачей при работе с данной моделью. Процесс вычисления значений J крайне длителен, но достаточно прост. Понятно, что значения полного момента J определяются числом протонов и нейтронов на частично заполненных уровнях. Рассмотрим, например, последовательное заполнение оболочки $1f_{7/2}$ нейтронами. У каждого внешнего нейтрона будет значение момента $j = 7/2$ и $2j + 1$ значений проекций m : от $-j$ до $+j$ с шагом 1. Задача нахождения J заключается в сложении всевозможных комбинаций проекций нескольких нейтронов $M = \sum_i m_i$, но нужно помнить о двух условиях: во-первых, должен соблюдаться принцип Паули, а значит, тождественные частицы на одном уровне j не могут иметь одинаковое значение m , во-вторых, не важен порядок сложения проекций, ведь частицы одинаковы. В дальнейшем, получив все значения проекций M , которых будет $\frac{(2j+1)!}{\nu!(2j+1-\nu)!} = 56$ (для $\nu = 3$) и 70 (для $\nu = 4$), нужно будет выделить из них значения полных моментов J . Причем подсчет состояний с $\nu = 4$ будет включать в себя также и подсчет состояний с $\nu = 0$ и 2 (случаи, когда все 4 частицы спарены и спарена только одна пара соответственно), аналогично подсчет состояний с $\nu = 3$ будет включать состояние с $\nu = 1$. Результатом таких манипуляций будут возможные значения полного момента J , представленные в табл.1 и табл.2, данные значения совпадают с результатами в [38]. Мини-программа для определения возможных значений полного момента представлены в прил.Б.

Таблица 1 Возможные значения полного момента J для $j = 7/2$.

ν	Полный момент J
0	0
1	$7/2$
2	2, 4, 6
3	$3/2, 5/2, 9/2, 11/2, 15/2$
4	2, 4, 5, 8

Таблица 2 Возможные значения полного момента J для $j = 9/2$.

ν	Полный момент J
0	0
1	$9/2$
2	2, 4, 6, 8
3	$3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, 13/2, 15/2, 17/2, 21/2$
4	0, 2, 3, 4 (два раза), 5, 6 (два раза), 7, 8, 9, 10, 12

Существует теорема, согласно которой любое взаимодействие двух тел в j^N -конфигурации является диагональным в схеме сеньорити, если оно диагонально в j^3 -конфигурации, то есть если нет конечных матричных элементов, соединяющих состояния $\nu = 3$ с состояниями $\nu = 2$ [3]. Это условие выполняется для любого значения J , которое не является общим для состояний $|j^3\nu = 3\rangle$ и $|j^3\nu = 1\rangle$, а значит, теорема осуществима вплоть до $j = 7/2$. Поэтому сеньорити ν является хорошим квантовым числом для всех значений $j \leq 7/2$ независимо от используемого взаимодействия двух тел. Первой подболочкой, для которой можно увидеть эффекты нарушения сеньорити, является подболочка $1g_{9/2}$ [19, 39].

2. Результаты

Для описания спектров низколежащих состояний происходило вычисление наборов сеньорити $\nu = 2, 3, 4$ на основе только лишь величины спаривания нуклонов в конкретном ядре Δ_{NN} . Причем между наиболее используемыми величинами (13) и (14) была выбрана именно $\Delta_{nn}^{(4)}$ в связи с лучшим соответствием расщеплению мультиплета в экспериментальных спектрах рассматриваемых ядер.

Модель сеньорити в совокупности с приближением δ -сил спаривания была использована для описания энергетических спектров изотопов кальция $^{42-46}\text{Ca}$, изотонов $N = 28$ (от Ti до Fe), изотопов никеля $^{70-76}\text{Ni}$ и изотонов $N = 50$ (от Mo до Cd).

2.1. Оболочка $1f_{7/2}$

Последовательное заполнение оболочки $1f_{7/2}$ нейтронами и протонами происходит в изотопах кальция $^{42-46}\text{Ca}$ и изотонах $N = 28$ (от Ti до Fe). Во всех этих ядрах будет конфигурация $\frac{7^N}{2}$, предполагающая подобные друг другу в изотопах и изотонах спектры, соответствующие набору сеньорити представлены в табл.1.

2.1.1. Изотопы кальция

В ядрах изотопов кальция происходит увеличение количества нейтронов между двумя магическими числами 20 и 28. Остовом рассматриваемых ядер является ^{40}Ca . Начнем с изотопов с двумя нейтронами и двумя дырками на $1f_{7/2}$, то есть с изотопов $^{42,46}\text{Ca}$, в которых должны наблюдаться спектры $\nu = 2$. На рис.8 представлены расчеты в приближении δ -сил в сравнении с экспериментальными значениями. Сразу заметим, что величина спаривания нейтронов $\Delta_{nn}^{(4)}$ близко расположена к значению $J = 6$, то есть она действительно соответствует расщеплению GSM. В спектрах $\nu = 2$ удовлетворительно воспроизводятся лишь верхние уровни, в то время как энергии уровней 2^+ оказываются завышены, данную особенность мы будем наблюдать не только в данных ядрах, а вообще во всех подобных спектрах. Причиной таких результатов

является невозможность описания состояния $J^\pi = 2^+$ ($\nu = 2$) нашим подходом, так как это состояние формируется преимущественно за счет дальнедействующих сил и является результатом коллективных возбуждений ядра.

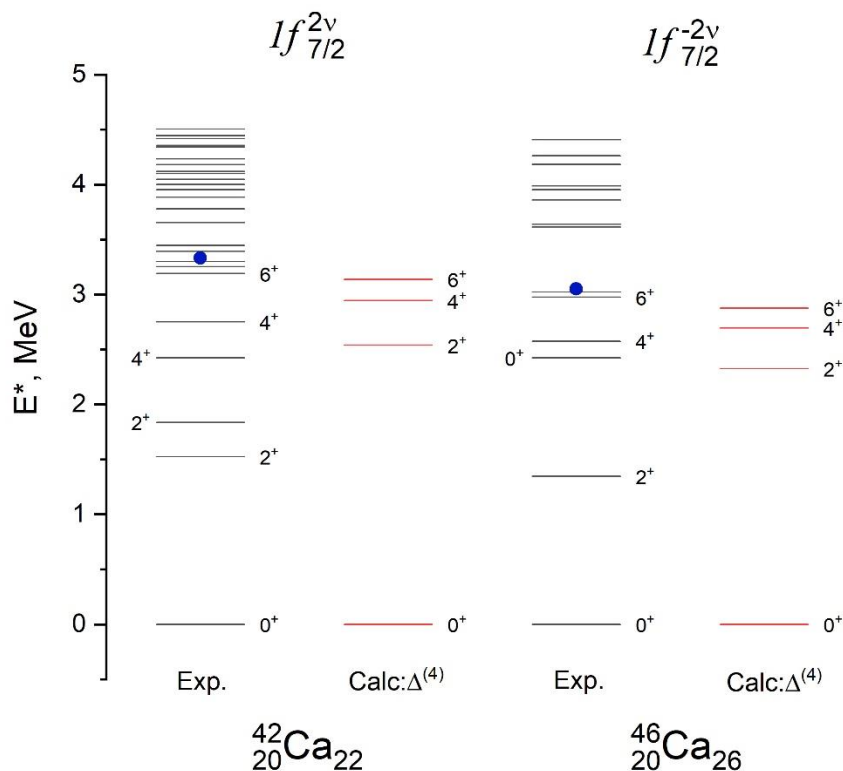


Рисунок 8 Спектры ядер $^{42,46}\text{Ca}$. Сверху подписана основная конфигурация валентных нуклонов. Точкой отмечена величина $\Delta_{nn}^{(4)}$. Calc: $\Delta^{(4)}$ – расчеты в приближении δ -сил. Ехр – экспериментальные спектры [24].

Согласно модели сеньорити, спектр ядра ^{44}Ca с четырьмя нейтронами на $1f_{7/2}$ должен содержать набор уровней $\nu = 2$, который представлен на рис.8, а также уровни $\nu = 4$. По аналогии с $^{42,46}\text{Ca}$, приближение δ -сил спаривания приводит к завышенному значению энергии состояния 2^+ (см. 1-ый спектр на рис. 9), а также к обособленности набора состояний $\nu = 4$, которые лежат выше энергии спаривания. Из соображений, что положение состояния $J^\pi = 2^+$ ($\nu = 2$) должно влиять на расчеты спектров более высоких порядков сеньорити, было принято решение попробовать взять значение соответствующего возбужденного состояния из экспериментального спектра.

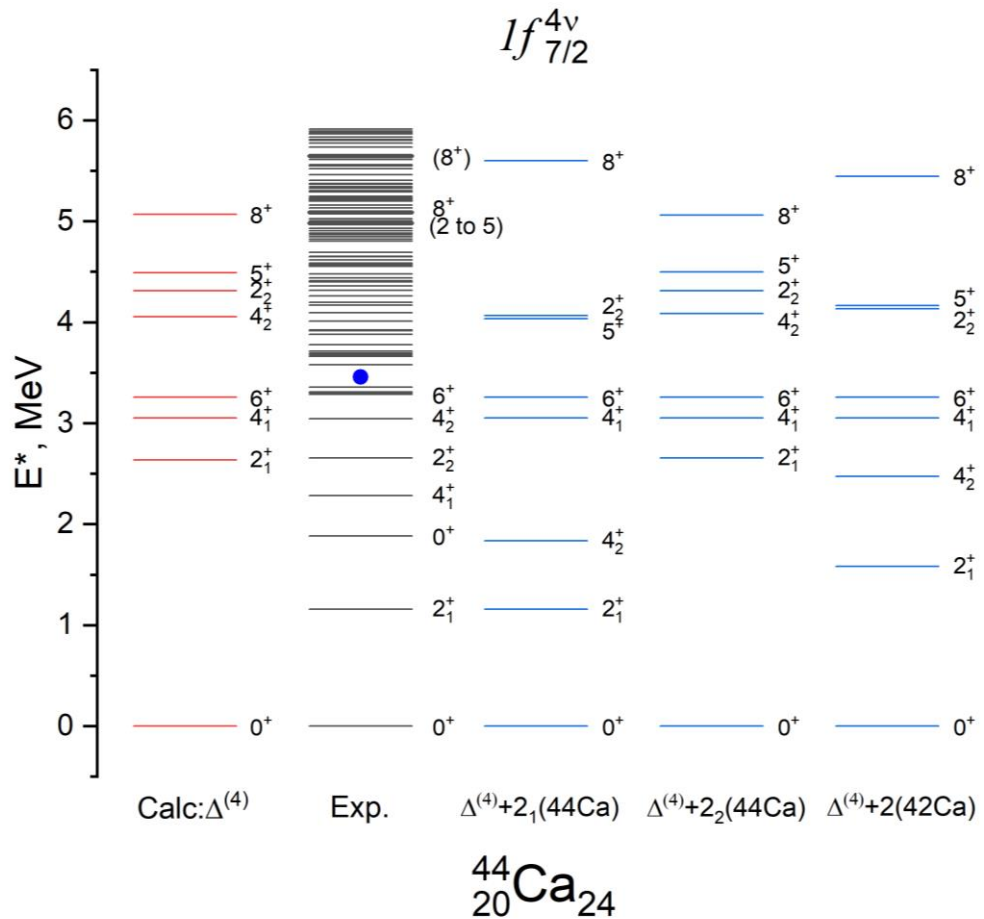


Рисунок 9 Спектры ядра ^{44}Ca . $\Delta^{(4)+2}$ – расчеты с использованием экспериментального значения $E^*(2^+)$. Остальные обозначения см. рис.8. Эксперимент [24].

Сразу возникает вопрос: какое состояние 2^+ станет оптимальным? Ведь в экспериментальном спектре (см. рис.9 столбец Exp.) наблюдаются сразу два состояния с $J^\pi = 2^+$, но второе состояние описывается нашим расчетом в δ -приближении, а значит результатом его использования будет аналогичный 1-му столбцу спектр (см. рис.9 столбец $\Delta^{(4)+2_2}(^{44}\text{Ca})$). Первое состояние с $J^\pi = 2^+$ традиционно считается результатом спаривания нуклонов. После замены в посчитанном GSM значения состояния 2^+ на экспериментальное (остальные уровни $\nu = 2$ оставляем без изменений), происходит увеличение расщепления набора $\nu = 4$ и изменение порядка уровней в нем (см. рис.9 столбец $\Delta^{(4)+2_1}(^{44}\text{Ca})$). Особенно сильно опускается уровень 4_2^+ , оказываясь при этом даже ниже по энергии, чем соответствующий уровень из набора $\nu = 2$, что отвечает обратному порядку уровней в модели сеньорити. При этом состояния

$J^\pi = 4_1^+, 6^+, 2_2^+, 5^+$ почти не меняют своих положений, а уровень 8^+ становится выше на $\Delta(E^*(8^+)) \approx 0.52 \text{ МэВ}$, при этом совпадая с экспериментальными данными. Важным фактом для нас является описание экспериментального состояния 4_2^+ именно набором $\nu = 2$, из-за чего можно предположить, что данное состояние реализуется посредством спаривания двух частиц, а не четырех, как это представлялось ранее.

Подобным образом можно использовать положение уровня $J^\pi = 2^+(\nu = 2)$ и из другого ядра с похожей конфигурацией, взяв его GSM за эталонный и отнормировав значение энергии состояния на величину расщепления мультиплета, то есть на $\Delta^{(4)}$. Результат такого вычисления представлен на столбце $\Delta^{(4)+2}(^{42}\text{Ca})$ рис.9. Принципиально он не отличается от предыдущего подхода из-за получившегося близким значения энергии $J^\pi = 2^+$ набора $\nu = 2$.

Интерес представляют также и нечётные ядра кальция: ^{43}Ca и ^{45}Ca с тремя нейтронами и тремя дырками на оболочке соответственно. Спектры этих ядер должны содержать единственное состояние $\nu = 1$ – основное состояние ядра, а также набор уровней $\nu = 3$, энергии которых можно рассчитать в рамках модели сеньорити на основе энергий уровней для системы из двух нуклонов на $j = 7/2$. Рассчитанные для них спектры представлены на рис.10 и рис.11. Как наблюдалось ранее, описание лишь в приближении δ -сил приводит к фактической дырке между наборами $\nu = 1$ и $\nu = 3$, что не соответствует эксперименту. Воспользуемся вышеописанным методом, используя значение энергии состояния $J^\pi = 2^+(\nu = 2)$ из соседнего чётно-чётного ядра и из эталонного ^{42}Ca , проведя нормировку на расщепление спектра. И, если в ^{45}Ca разница в выборе 2^+ не существенна, то в ^{43}Ca использование 2^+ из соседнего ^{44}Ca опускает состояние $5/2^-$ ниже основного состояния $7/2^-$, опять меняя порядок следования уровней сеньорити, а также меняет местами близкие уровни $3/2^-$ и $11/2^-$, в расчетах с эталонным уровнем, который после нормировки

оказывается больше уровня из ^{44}Ca на $\Delta(\text{exp } E^*(2^+)) \approx 0.42\text{МэВ}$, таких изменений не наблюдается.

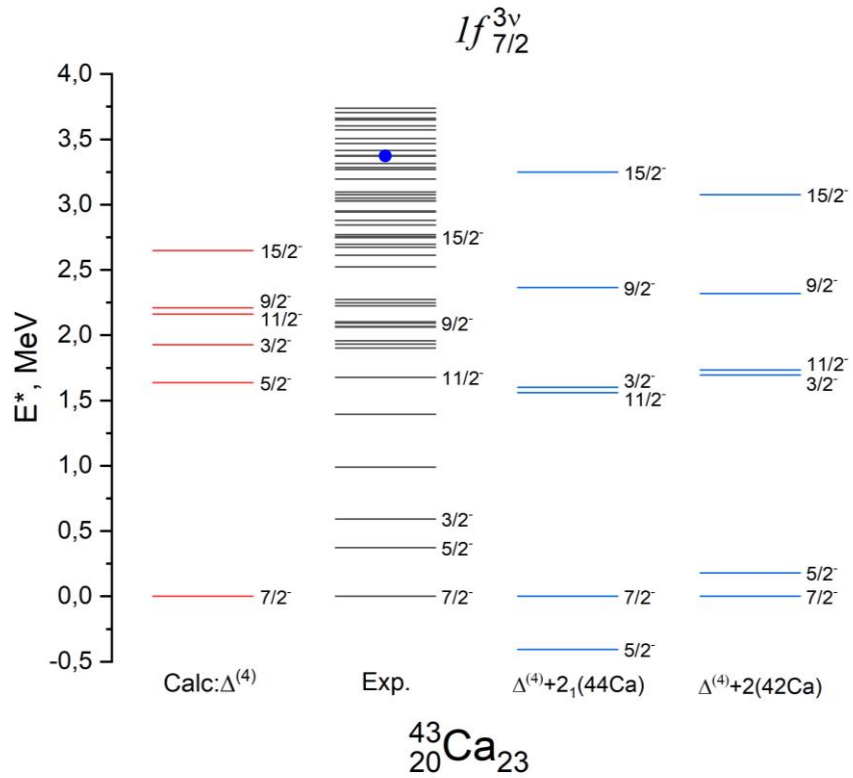


Рисунок 10 Спектры ядра ^{43}Ca . Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

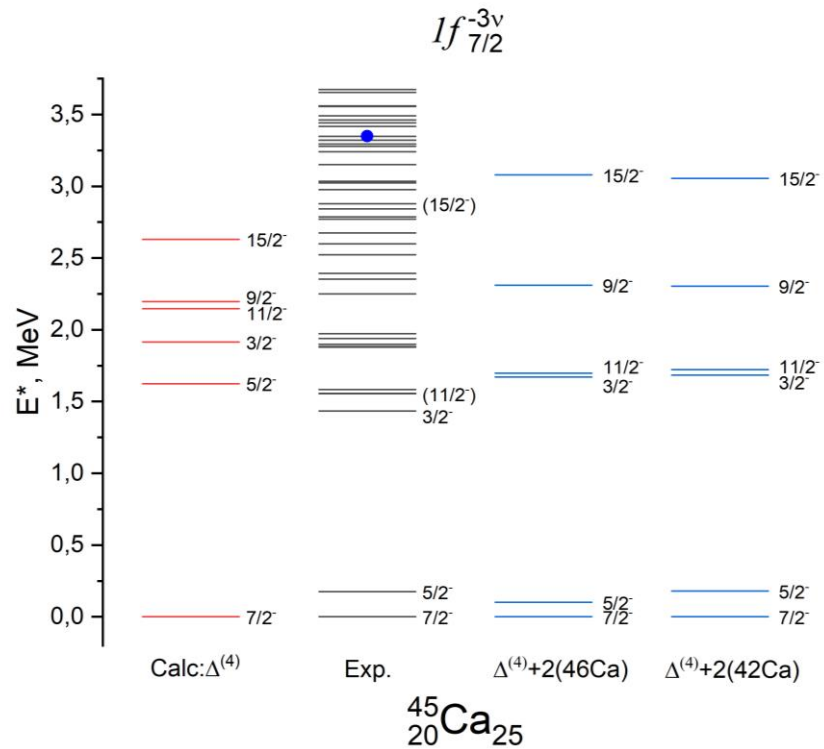


Рисунок 11 Спектры ядра ^{45}Ca . Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

В спектрах обоих ядер использование экспериментальной 2^+ закономерно увеличивает разброс состояний спектра $\nu = 3$, приблизительное соответствие с экспериментом приобретают уровни: $11/2^-$ в обоих ядрах, $9/2^-$ в ^{43}Ca и $5/2^-$ в ^{45}Ca . Использование экспериментального положения $J^\pi = 2^+$ позволяет в целом улучшить структуру спектров и его расщепление.

2.1.2. Изотоны $N = 28$

В интересующих нас изотонах $N = 28$ происходит заполнение протонами оболочки $1f_{7/2}$ сверх остова ^{48}Ca . Спектральная картина каждой отдельной конфигурации будет очень схожа со случаем нейтронного спаривания.

На рис.12 представлены спектры для двух протонов и двух дырок в ^{50}Ti и ^{54}Fe , в которых наилучшее описание ожидаемо получилось для состояний 6^+ , их разница достигает всего $\Delta(E^*(6^+)) \approx 0.08\text{МэВ}$, в то время как для нижележащих состояний видим аналогичную изотопам картину.

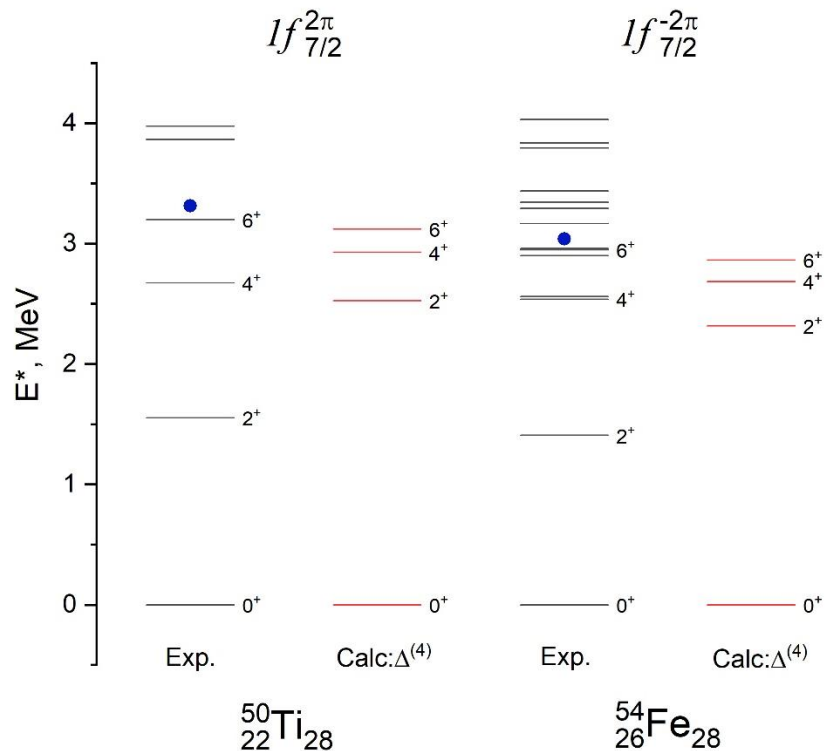


Рисунок 12 Спектры ядер ^{50}Ti и ^{54}Fe . Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

Рассчитывая ядра с тремя и четырьмя протонами на оболочке, мы так же, как и в случае с изотопами, брали дополнительное положение 2^+ из эталонного спектра, которым тут выступает спектр ядра ^{50}Ti . Но во всех случаях такого рода

вычисления повторяли результаты с собственной 2^+ (в случае ^{52}Cr) и с 2^+ из соседних чётно-чётных ядер (для ^{51}V и ^{53}Mn), поэтому эти спектры представлены не будут.

Вычисления для ^{52}Cr с четырьмя протонами можно наблюдать на рис.13. Обратимся сразу к результату использования экспериментального уровня. Заметно очевидное улучшение положения состояний 5^+ и обеих 4^+ , причем последние описываются моделью сеньорити в обратном порядке – значит, первая экспериментальная 4_1^+ относится к набору $\nu = 4$, а 4_2^+ – к набору $\nu = 2$.

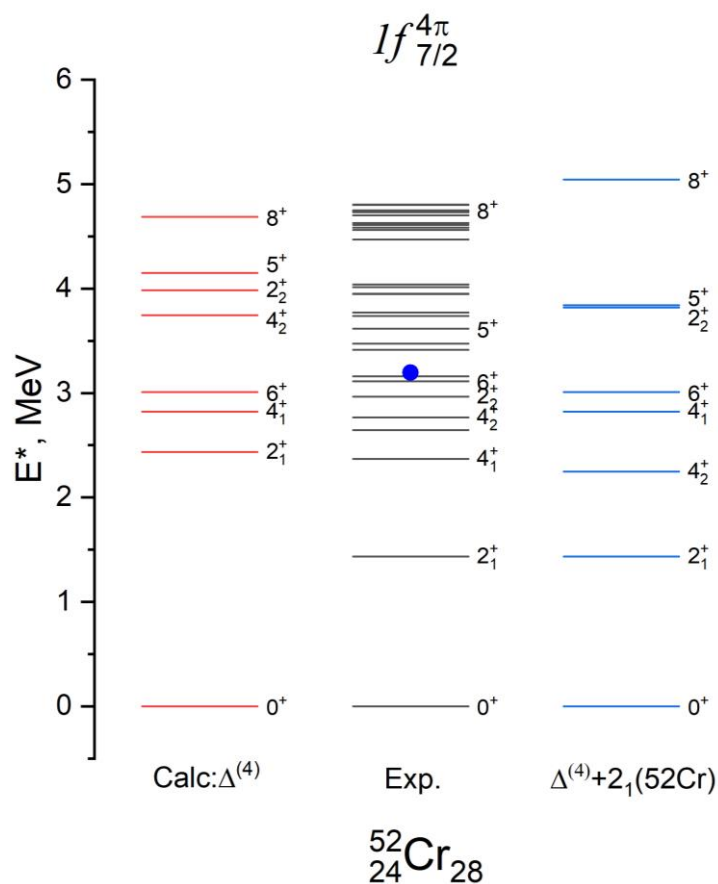


Рисунок 13 Спектры ядра ^{52}Cr . Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

Результаты вычислений для нечетных изотонов показаны на рис.14, спектр, выполненный целиком в δ -приближении, опущен, его вид аналогичен рис.10 и рис.11.

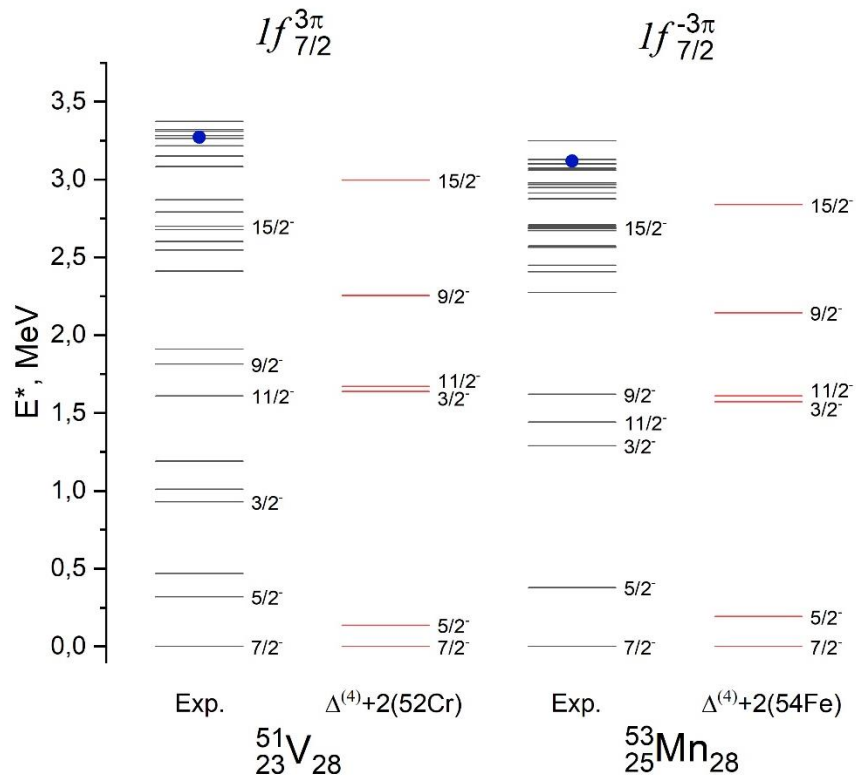


Рисунок 14 Спектры ядер ^{51}V и ^{53}Mn . Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

Как и ранее, использование экспериментальной 2^+ из соседних ядер приводит к увеличению расщепления спектра $\nu = 3$, с неплохой точностью воспроизводится структура всего спектра и порядок уровней в нем, хорошее совпадение с экспериментом опять наблюдается у состояний $11/2^-$.

Как видно из наших расчетов для $\nu = 3$ и $\nu = 4$, полное расщепление GSM весьма чувствительно к положению 2_1^+ . Изменение расщепления мультиплета и его структуры в зависимости от соотношения энергии спаривания и энергии 2^+ ($\nu = 2$) показано на схемах рис.15 и рис.16. Соотношение между энергией спаривания и энергией 2_1^+ сильно влияет на полное расщепление мультиплета независимо от числа сеньорити. Что касается порядка уровней в мультиплете, то для набора $\nu = 3$ уровень $5/2$ опускается ниже уровня $7/2$ начиная с величины отношения $E^*(2^+)/\Delta_{NN} = 0.47$. На рис.15 наглядно показано, почему так отличались расчёты с разными 2_1^+ для ^{43}Ca : соответствующее соотношение с 2_1^+ из ^{42}Ca находится на стыке перехода состояния $5/2$ под основное состояние, а так как у нас уровни всё-таки не единичные, то данные зависимости носят чисто

схематический характер, и на самом деле эта область начинается несколько раньше, и поэтому уровень $5/2$ оказался выше состояния $7/2$.

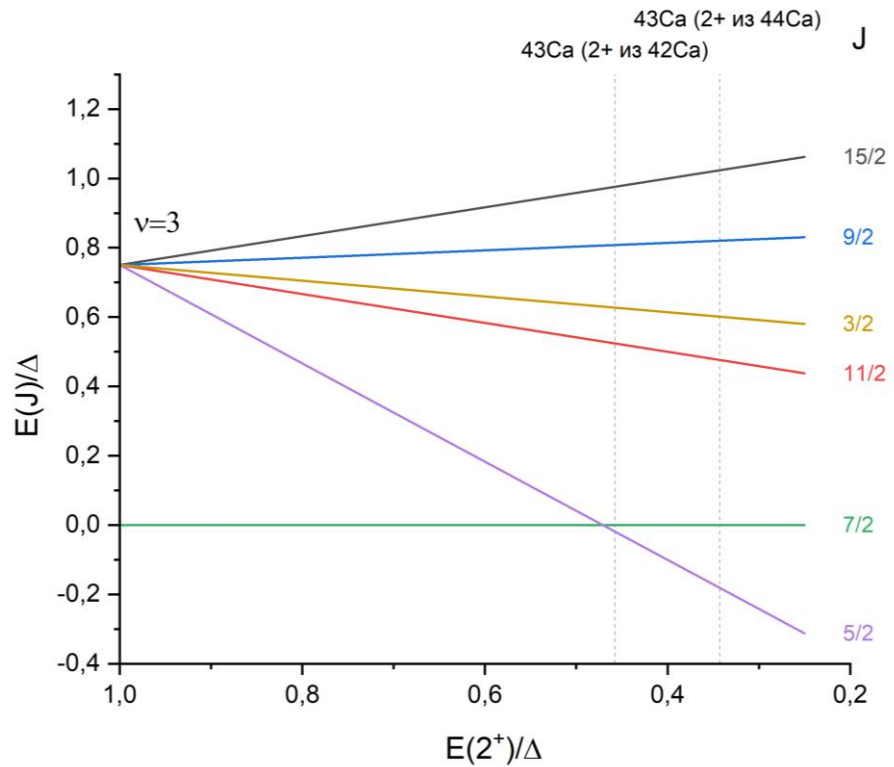


Рисунок 15 Спектр сеньорити $v = 3$ в зависимости от энергии состояния 2^+ в спектре $v = 2$ для оболочки $1f_{7/2}$.

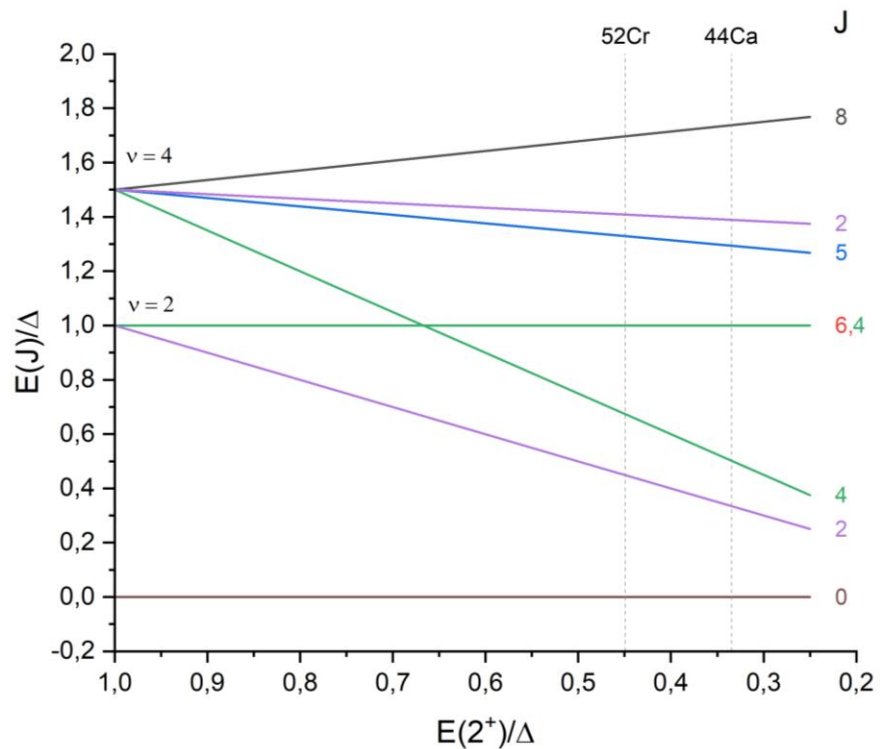


Рисунок 16 Спектр сеньорити $v = 4$ в зависимости от энергии состояния 2^+ в спектре $v = 2$ для оболочки $1f_{7/2}$.

В спектре $\nu = 4$ видно, что положение состояния 2_1^+ наиболее сильно влияет на 4_2^+ , в результате чего этот уровень спускается в область набора $\nu = 2$ (начиная с величины $E^*(2^+)/\Delta_{NN} = 0.67$), что мы и наблюдаем в спектрах ^{44}Ca и ^{52}Cr , как видим, их величины $E^*(2^+)/\Delta_{NN}$ расположены глубоко в области перемешивания уровней $\nu = 4$ и $\nu = 2$. Наиболее стабильными относительно движения 2_1^+ оказываются состояния $3/2, 9/2$ из набора $\nu = 3$ и состояния $2, 5$ из набора $\nu = 4$.

2.2. Подоболочка $1g_{9/2}$

Рассмотрение данной области ядер интересно, в первую очередь, работой схемы сеньорити на ней. Попытки описания спектров возбуждённых состояний на подоболочке $1g_{9/2}$ уже были предприняты в работах [19, 20, 39]. Мы же будем работать в аналогичном оболочке $1f_{7/2}$ подходе для сравнения возможностей схемы сеньорити.

В работе [40] было показано, что для ядер вблизи линии стабильности наилучшим описанием мультиплетов соответствует величина (14), основанная на массовых соотношениях пяти соседних изотопов. Однако, рассматриваемые в настоящей работе ядра, расположены в сильно нейтронизбыточной области, поэтому использование дополнительных данных приводит к появлению больших ошибок величины спаривания нуклонов, в связи с этим расчеты проводились по соотношению (13).

Последовательное заполнение подоболочки $1g_{9/2}$ происходит в изотопах никеля $^{70-76}\text{Ni}$ и изотонах $N = 50$ (от Mo до Cd). Наблюдаемые при этом значения моментов возбужденных состояний записаны в табл.2.

2.2.1. Изотопы никеля

Для изучения изотопов никеля, за остов было взято ядро ^{68}Ni , являющееся полумагическим. Результат расчётов вычислений в δ -приближении для ядер с двумя нейтронами и двумя дырками представлен на рис.17, он уже был описан нами в работе [41], там же было показано, что наиболее точно воспроизводятся состояния с высоким моментом $6^+, 8^+$, в то время как состояния

2^+ и 4^+ закономерно завышены по той же причине, что и в предыдущих спектрах. Величина $\Delta_{nn}^{(4)}$ соответствует расщеплению мультиплета, однако, чем больше нейтронов в ядре, тем больше становится погрешность у величины спаривания, что вносит в наши результаты неопределённость.

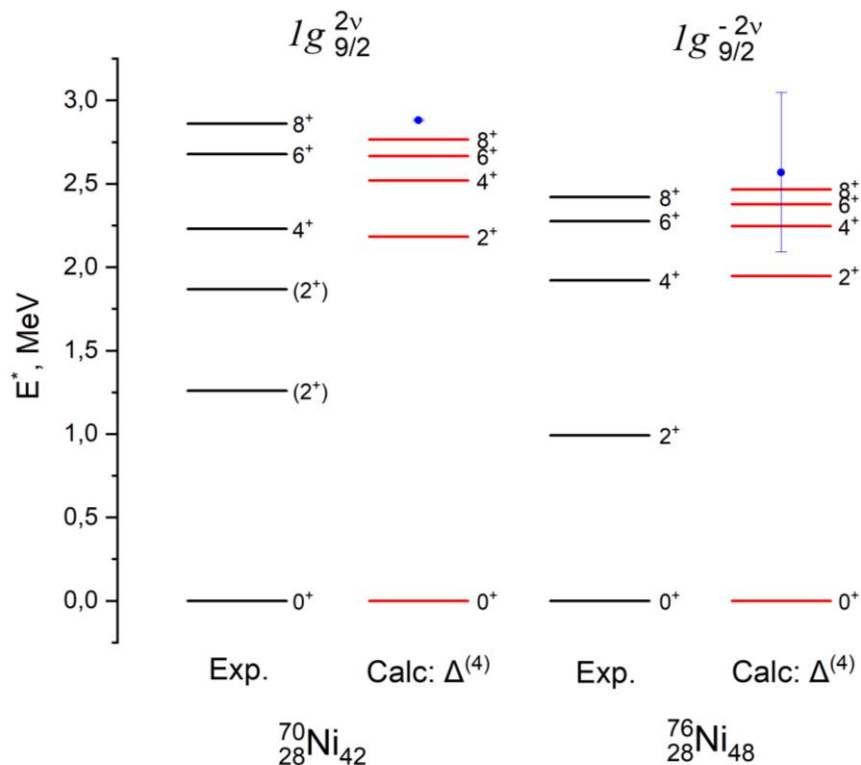


Рисунок 17 Спектры ядер $^{70,76}\text{Ni}$. Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

Вид экспериментальных спектров ^{72}Ni и ^{74}Ni (4 нейтрона и 4 дырки на $1g_{9/2}$). отличается от предполагаемого набора, в нем присутствуют лишь некоторые из уровней: одно состояние 2^+ , по два состояния 4^+ и 6^+ , состояние 8^+ , что, вероятно, связано с недостаточным объёмом экспериментальных данных. Расчёты спектров данных ядер представлены на рис.18 и рис.19. В результатах с использованием только δ -потенциала наблюдается уже описанная тенденция к разделению наборов сеньорити 2 и 4, из-за чего посчитанные уровни почти не согласуются с экспериментом. Предполагая, что, как и в предыдущих случаях, положение 2^+ повлияет на мультиплет, берём собственное экспериментальное значение 2^+ . И действительно, верный учёт положения состояния 2^+ кардинально меняет вид спектра $\nu = 4$ (см. рис.18 и рис.19 столбец $\Delta^{(4)+2}$). Произошло перемешивание состояний $\nu = 4$ как между собой, так и с

уровнями $\nu = 2$, наиболее сильно положение 2^+ повлияло на 4_2^+ и 6_2^+ , которые спустились по энергии ниже соответствующих состояний 4_1^+ и 6_1^+ . При этом описание экспериментального спектра стало заметно лучше.

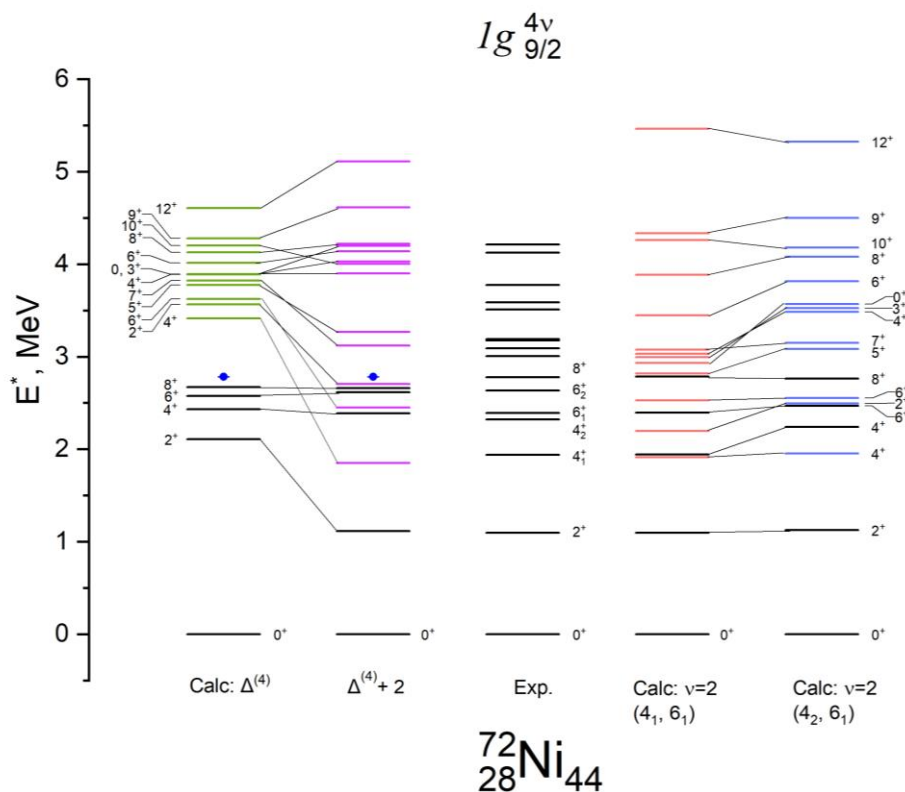


Рисунок 18 Спектры ядра ^{72}Ni . Чёрными линиями отмечены состояния $\nu = 2$, цветными – $\nu = 4$. Остальные обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [26].

Однако остаётся неясным, какие экспериментальные уровни (4_1^+ или 4_2^+ , 6_1^+ или 6_2^+) обладают природой $\nu = 2$ и $\nu = 4$. Для того, чтобы произвести оценку принадлежности уровней к конкретным наборам сеньорити, мы провели расчеты с всеми возможными комбинациями экспериментальных уровней 4_i^+ , 6_j^+ в спектре ^{72}Ni в качестве состояний $\nu = 2$. На рис.18 в качестве примера 4-ым и 5-ым спектром приводятся расчеты, в которых за $\nu = 2$ брались уровни 4_1^+ , 6_1^+ и 4_2^+ , 6_1^+ соответственно. Из сопоставления с экспериментом можно заключить, что именно состояние 4_2^+ характеризуется сеньорити $\nu = 2$. Экспериментальные данные по распадам возбужденных состояний ^{72}Ni также подтверждают этот факт. С состояниями $6_{1,2}^+$ ситуация сложнее и нельзя наверняка утверждать,

какой уровень относится к набору уровней $\nu = 2$, поскольку оба расчета в целом воспроизводят эксперимент.

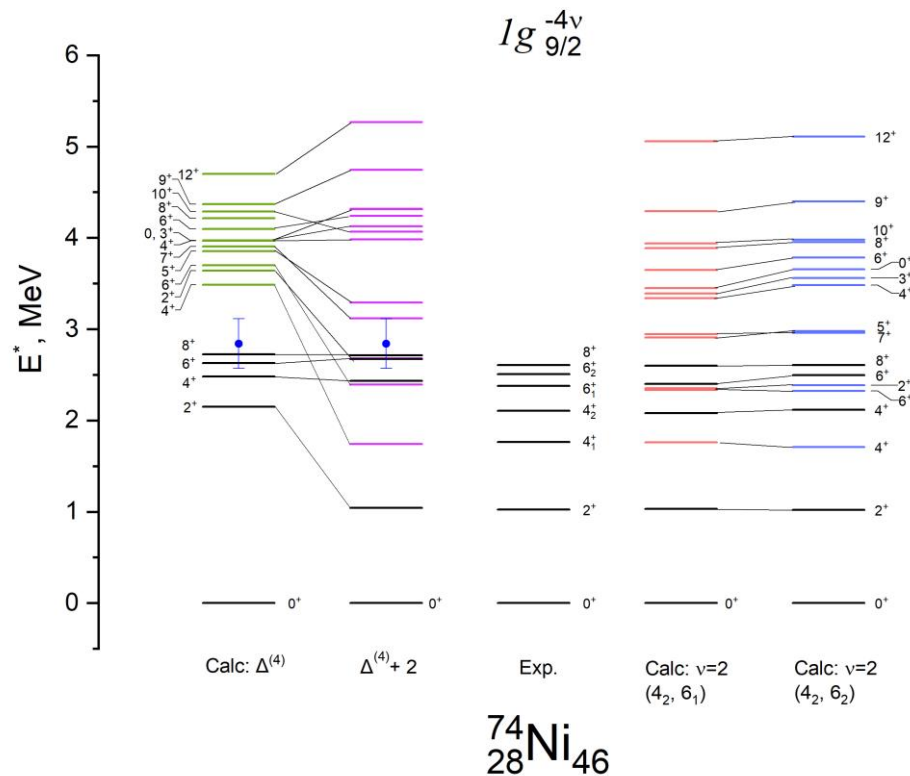


Рисунок 19 Спектры ядра ^{74}Ni . Чёрными линиями отмечены состояния $\nu = 2$, цветными – $\nu = 4$. Остальные обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [42].

Аналогичные расчёты для ядра ^{74}Ni представлены на рис.19 4-ый и 5-ый спектр. Наши расчёты подтверждают такой же результат для уровней $4_{1,2}^+$: нижайшее состояние 4_1^+ – это состояние $\nu = 4$. Для состояний $J^\pi = 6^+$ в ^{74}Ni ещё больше вопросов в силу их близости по энергии.

Мы брали на изучение три нечётных изотопа никеля: $^{71,75}\text{Ni}$ с тремя нейтронами и тремя дырками и ^{73}Ni с пятью нейтронами (хотя для системы из пяти нуклонов должны быть состояние $\nu = 1, 3, 5$, мы ограничились расчетом состояний $\nu = 1, 3$). Пример спектра для нечётного ядра при расчётах с $\Delta^{(4)}$ показан только для ^{71}Ni (см. на рис.20 столбец 1). Так же, как это было сделано в чётных изотопах, энергии мультиплета $\nu = 2$ были найдены в приближении δ -сил спаривания с использованием отнормированного экспериментального значения $E^*(2_1^+)$ в соседнем чётно-чётном ядре (для ^{71}Ni энергия 2_1^+ взята из ^{70}Ni , для ^{73}Ni – из ^{72}Ni , для ^{75}Ni – из ^{74}Ni). Получившиеся спектры см. на рис.20.

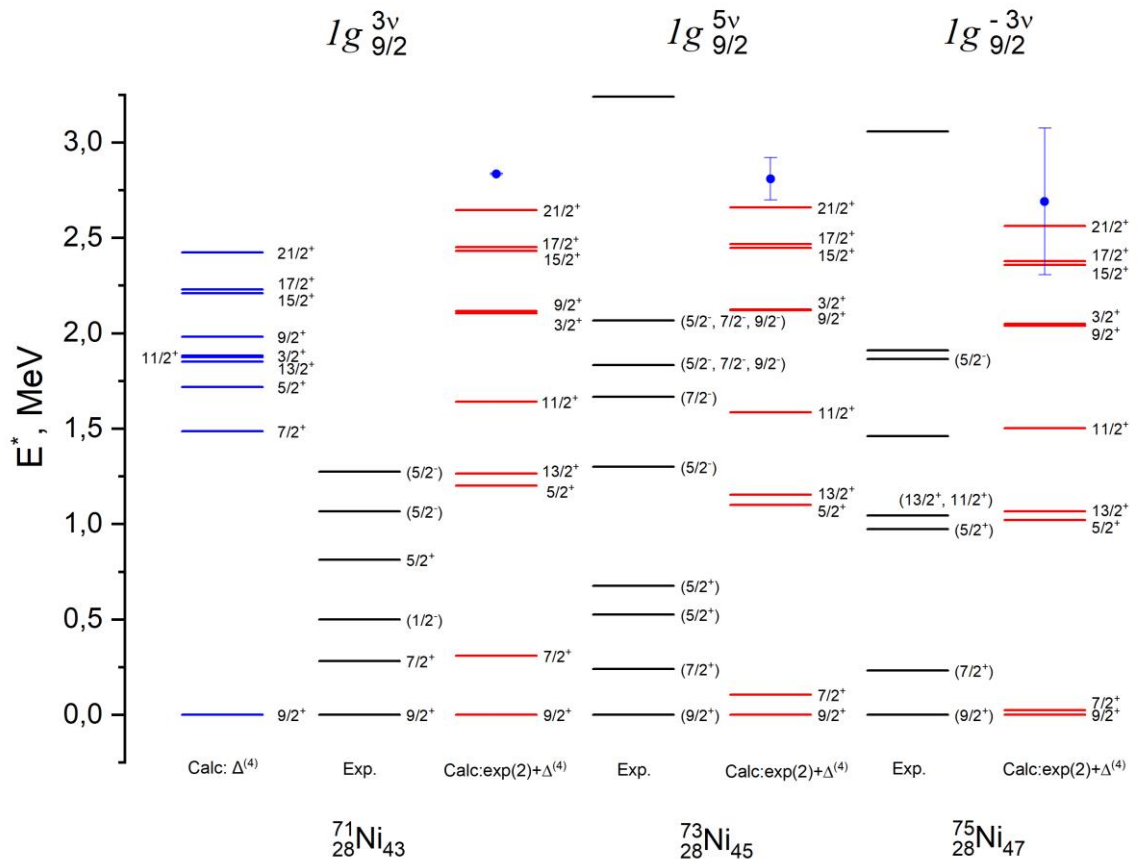


Рисунок 20 Спектры ядер $^{71,73,75}\text{Ni}$. Обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [25, 27, 43].

Отметим достаточно точное воспроизведение состояния $J^\pi = 7/2^+$ в ^{71}Ni , и состояний $J^\pi = 5/2^+$, $13/2^+$ для ядра ^{75}Ni . Данные нечётные изотопы лежат на границе существования ядер и экспериментальная информация ограничена, поэтому мы видим не все уровни, предсказываемые моделью сеньорити, в эксперименте. Следует также обратить внимание и на большие ошибки величин Δ_{nn} для $^{73,75}\text{Ni}$, которые хоть и не влияют на структуру мультиплетта, но существенно увеличивают неопределённость результатов.

2.2.2. Изотопы $N = 50$

В изотопах $N = 50$ заполняется протонами подболочка $1g_{9/2}$ поверх полумагического остова ^{90}Zr . В спектрах $\nu = 2$ (см. на рис.21) принципиально ничего нового не появляется. Единственное действительно важное отличие от спектров никеля с двумя нуклонами заключается в расположении состояния 2^+ : в никеле эти состояния лежали ниже половины энергии спаривания

($E^*(2^+)/\Delta_{NN} = 0.44$ и 0.49), в ^{92}Mo и ^{98}Cd данные уровни располагаются выше половины (для них соотношение равно 0.53 и 0.56). В дальнейшем это приведёт к различиям в спектрах более высокого порядка сеньорити.

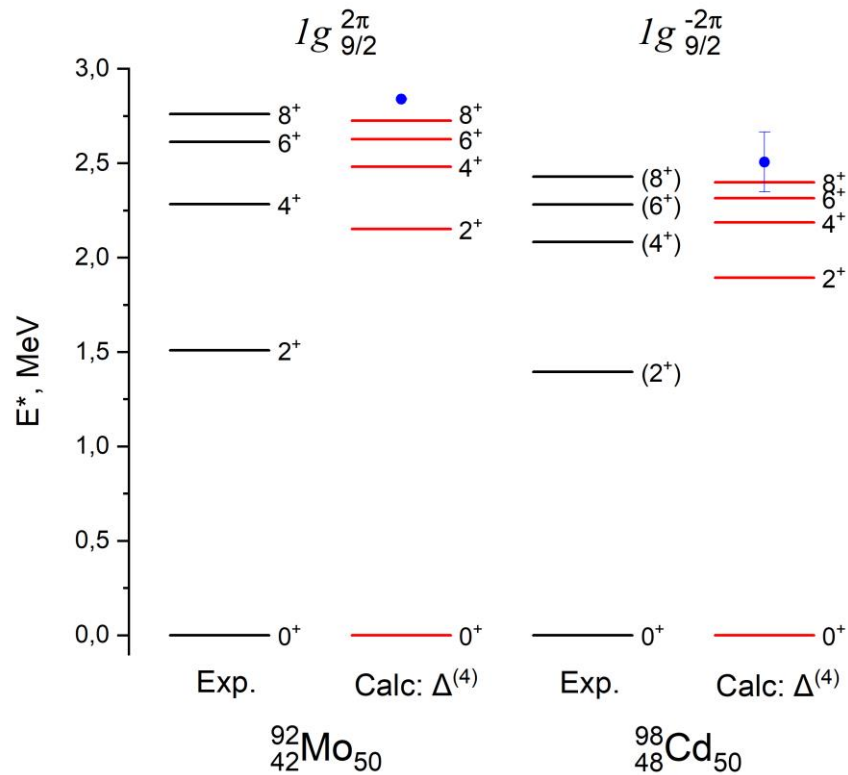


Рисунок 21 Спектры ядер ^{92}Mo и ^{98}Cd . Все обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [24].

Экспериментальные спектры ^{94}Ru и ^{96}Pd , а также теоретические расчёты представлены на рис.22 и рис.23. Важным отличием спектров $\nu = 4$ в цепочке изотонов $N = 50$ является состав спектра в области GSM: у изотопов никеля между основным состоянием и 8^+ были пары 4^+ и 6^+ , в изотонах же находится два состояния 4^+ , но только одно 6^+ . В отличие от изотопов никеля в ^{94}Ru и ^{96}Pd первый уровень $J^\pi = 4^+$ относится к набору $\nu = 2$. Использование вместе с приближением δ -потенциала экспериментального состояния $J^\pi = 2^+$ ($\nu = 2$) улучшает теоретическое описание спектра в целом, воспроизводя порядок уровней и величину энергии возбуждения для отдельных состояний.

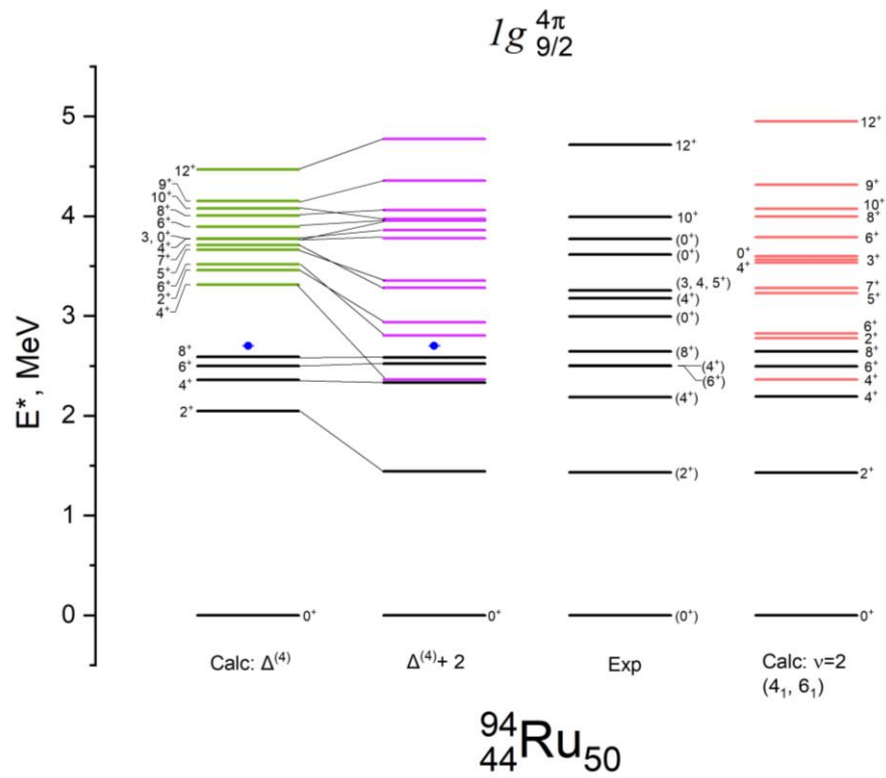


Рисунок 22 Спектры ядра ^{94}Ru . Чёрными линиями отмечены состояния $\nu = 2$, цветными – $\nu = 4$. Остальные обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [26].

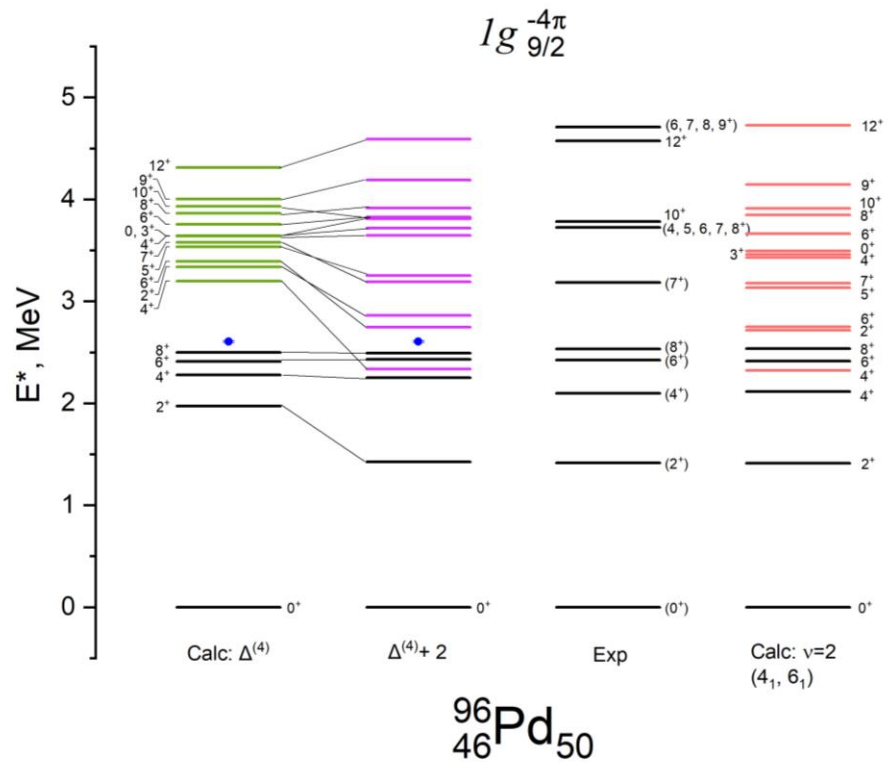


Рисунок 23 Спектры ядра ^{96}Pd . Чёрными линиями отмечены состояния $\nu = 2$, цветными – $\nu = 4$. Остальные обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [42].

Аналогичные изотопам никеля исследования спектров ^{93}Tc , ^{95}Rh , ^{97}Ag будут более показательными, так как они обладают бóльшим количеством экспериментальных данных (см. рис. 24). По сравнению с δ -потенциалом использование экспериментального значения энергии состояния $J^\pi = 2^+$ ($\nu = 2$) из спектра соседнего чётно-чётного изотопа позволило лучше воспроизвести как положение $7/2^+$, так и уровни с высоким значением J . Стоит отметить достоверное воспроизведение общего расщепления, то есть энергии состояния $J^\pi = 21/2^+$.

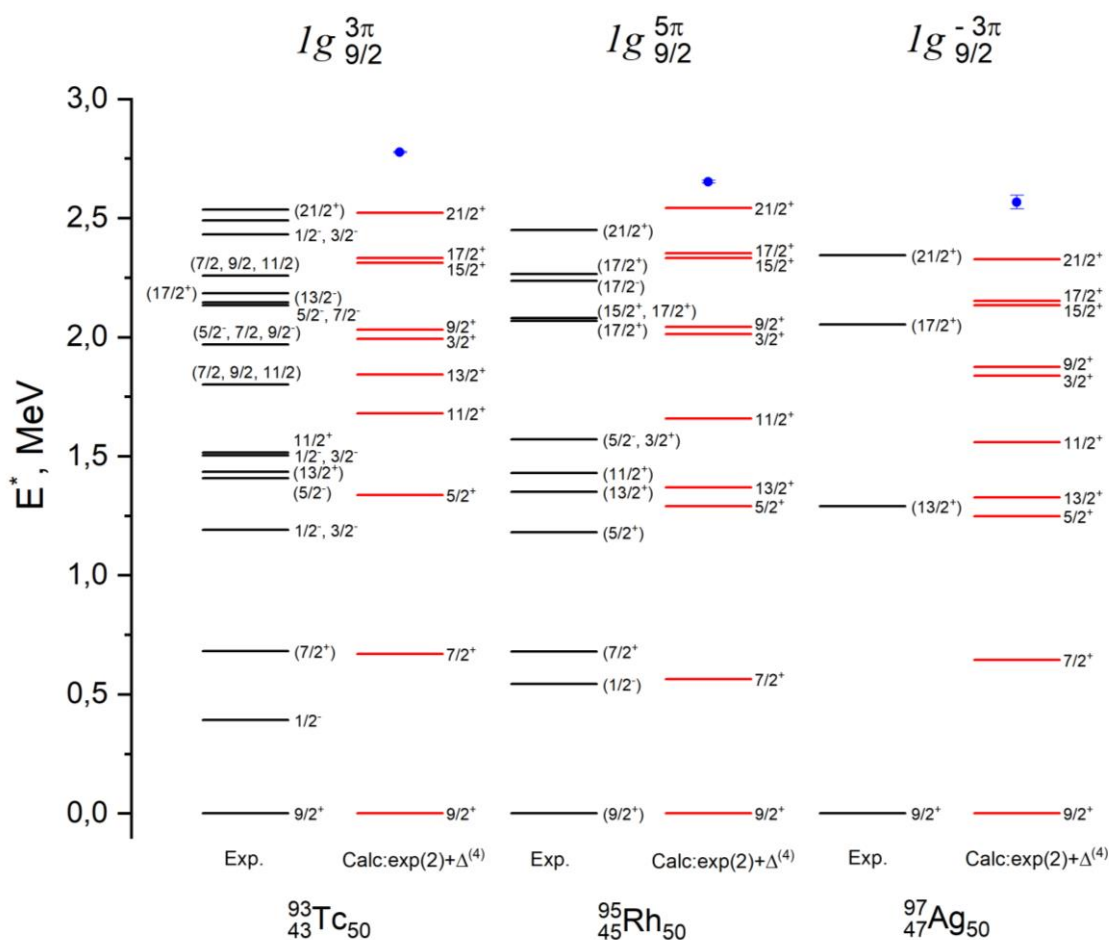


Рисунок 24 Спектры ядер ^{93}Tc , ^{95}Rh , ^{97}Ag . Обозначения см. рис.8, 9. Эксперимент [26].

Для подболочки $1g_{9/2}$ также были построены схемы зависимостей расщепления мультиплета и его структуры от соотношения энергии спаривания и энергии 2^+ ($\nu = 2$) (рис.25, 26). Поведение спектра $\nu = 3$ в данном случае схоже с оболочкой $1f_{7/2}$ (рис.15), происходит увеличение разброса уровней, а

нижайшее состояние набора, начиная с величины $E^*(2^+)/\Delta_{NN} \approx 0.4$, опускается под основное состояние.

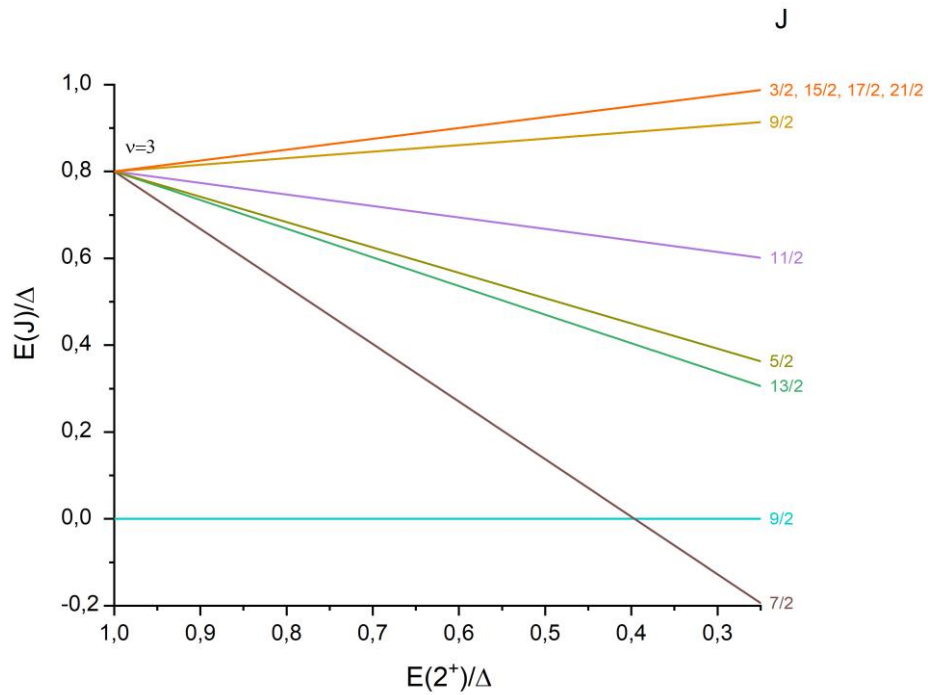


Рисунок 25 Спектр сеньорити $\nu = 3$ в зависимости от энергии состояния 2^+ в спектре $\nu = 2$ для подболочки $1g_{9/2}$.

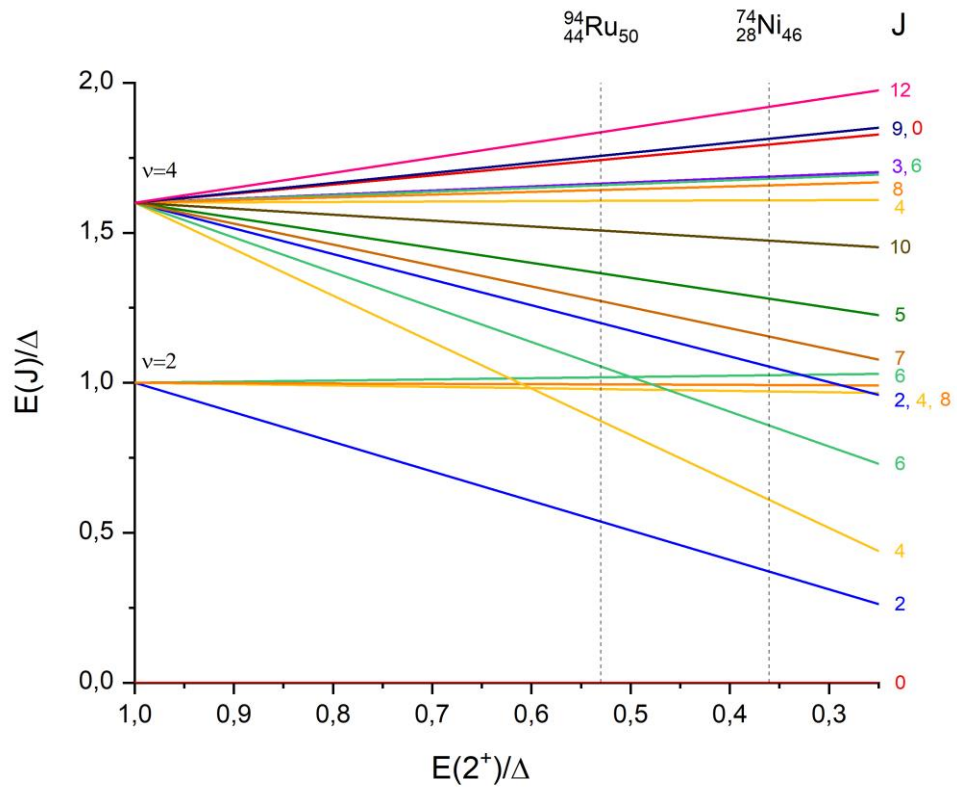


Рисунок 26 Спектр сеньорити $\nu = 4$ в зависимости от энергии состояния 2^+ в спектре $\nu = 2$ для подболочки $1g_{9/2}$.

В наборе $\nu = 4$ положение 2^+ ($\nu = 2$) оказывает наибольшее влияние на 4^+ , 6^+ , которые спускаются в область $\nu = 2$. Важная для нас характеристика – величина отношения $E^*(2^+)/\Delta_{NN}$, для изотопов никеля она равна ~ 0.36 , а для изотонов ~ 0.53 , что, согласно схеме, приводит к наличию пар 4^+ и 6^+ в области GSM в никеле и к двум состояниям 4^+ и одному состоянию 6^+ в изотопах. Наиболее стабильными к положению 2^+ оказываются уровни 4^+ , 6^+ , 8^+ ($\nu = 2$) и уровни 4_2^+ , 8^+ , 3^+ , 6_2^+ ($\nu = 4$). Примечательно, что все остальные уровни $\nu = 2$ (кроме 2^+) не должны менять своего положения (как это было на рис.16), так как при построении данной схемы их положение было положено единице, но при пересчёте спектра для 4-х частиц значения состояний, относящихся к $\nu = 2$ незначительно изменились. Возможно, это также является проявлением несохранения числа сеньорити на данной подболочке. Однако зависимость уровней 4^+ , 6^+ , 8^+ ($\nu = 2$) не велика, поэтому можно считать, что схема сеньорити остается рабочей в данной области.

ВЫВОДЫ

На основе выполненных расчетов низколежащих спектров возбуждений, к формированию которых приводит эффект спаривания тождественных нуклонов в чётно-чётных и чётно-нечётных ядрах, можно сделать несколько выводов.

- 1) Работа в приближения δ -сил спаривания позволяет описать GSM чётно-чётного ядра. Данное приближение верно воспроизводит расщепление мультиплета, при этом наиболее хорошее согласование достигается для уровней с моментами, близкими к J_{max} . Упущением данного подхода является невозможность описания состояния $J^\pi = 2^+ (\nu = 2)$, так как оно образовано преимущественно дальнедействующими силами, а не короткодействующими, как в используемой модели.
- 2) Использование экспериментального значения состояния $J^\pi = 2^+ (\nu = 2)$ в совокупности с δ -приближением для вычисления остальных уровней GSM приводит к качественному изменению структуры мультиплета. Наблюдаемое увеличение расщепления спектров $\nu = 3, 4$, а также эффект изменения порядка уровней с разным числом сеньорити позволяет улучшить результаты одного лишь δ -взаимодействия как для чётно-чётных, так и для чётно-нечётных ядер.
- 3) В результате анализа спектров ядер с 4-мя нуклонами поверх замкнутого остова сделаны выводы о принадлежности некоторых состояний 4^+ к набору сеньорити $\nu = 2$ или к набору $\nu = 4$. Так, во всех данных ядрах, кроме ^{94}Ru и ^{96}Pd , состояния 4^+ располагаются в обратном порядке, то есть уровень 4_1^+ является уровнем из $\nu = 4$, а уровень 4_2^+ является уровнем из $\nu = 2$.
- 4) Описание нечётных изотопов, несмотря на неточность воспроизведения уровней возбуждения, заслуживает внимания, так как благодаря таким расчётам удается узнать приблизительное расщепление спектра, а также порядок уровней в нём.

5) Хотя число сеньорити не считается хорошим квантовым числом при $j = 9/2$, результаты, полученные с использованием схемы сеньорити, с хорошей точностью описывают экспериментальные спектры в области ядер с заполняемой подболочкой $1g_{9/2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Парные корреляции нуклонов играют важную роль в формировании спектра возбужденных состояний атомного ядра. Описание спаривания нуклонов может быть осуществлено в достаточно простом приближении δ -сил, которое, несмотря на отсутствие учёта смешивания конфигураций или иных эффектов, выполняет поставленную задачу описания низколежащих возбужденных состояний, образованных внешними нуклонами на замкнутом остове ядра.

В настоящей работе данное приближение было использовано для описания положения возбужденных уровней четырёх цепочек атомных ядер: изотопов кальция $^{42-46}\text{Ca}$, изотонов $N = 28$ (от Ti до Fe) для наблюдения за заполнением оболочки $1f_{7/2}$, изотопов никеля $^{70-76}\text{Ni}$ и изотонов $N = 50$ (от Mo до Cd) с заполнением оболочки $1g_{9/2}$. Было показано, что расщепление GSM в исследуемых изотопах может быть описано на основе массовых соотношений, при этом в чётных ядрах достаточно точно воспроизводятся верхние возбужденные состояния. Однако приближение δ -взаимодействия не позволяет описывать положение состояния 2^+ . Корректный учет $J^\pi = 2^+$ ($\nu = 2$) оказывает сильное влияние на структуру мультиплетов с более высокими значениями сеньорити ν , приводя к перемешиванию уровней с разным ν . Данный эффект приводит к улучшению описания экспериментальных спектров.

Было проведено сравнение работы схемы сеньорити на двух оболочках с $j = 7/2$ и $j = 9/2$, в результате которого можно сказать, что с описанием общего вида спектров модель справляется одинаково хорошо на обеих оболочках, но наиболее близкое воспроизведение отдельных уровней всё же получилось именно на оболочке $1f_{7/2}$.

Результаты исследований данной работы были представлены на таких конференциях, как «Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине» в 2020 и 2021 годах, а также в Международной конференции «ЯДРО – 2021». Опубликована работа по никелю

в журнале Ученые записки физического факультета Московского Университета в 2021 году.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность моему научному руководителю, Третьяковой Татьяне Юрьевне, за постановку задачи, постоянное руководство работой, ценные замечания и помощь в написании текста. Выражаю также благодарность Сидорову Семёну Владимировичу за техническую поддержку данной работы, без которой было бы сложно произвести все выполненные расчеты, за неоднократное участие в обсуждении результатов и поиске научной литературы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Mayer, M.G. // *Phys.Rev.* – 1950. – Vol. 78. – № 1. – p. 22
2. Racah, G. // *Phys.Rev.* – 1943. – Vol. 63. – № 9-10. – p. 367
3. Casten, R.F. *Nuclear Structure From A Simple Perspective* / Casten R.F. – New York: Oxford University Press, 1990. – 391 p.
4. Имашева Л.Т. и др. // *Изв. РАН сер. физ.* – 2016. – Т. 80. – №3 – с. 347
5. Talmi, I. // *Phys. Rev.* – 1957. – Vol. 107. – p. 326
6. McCullen, J.D., Bayman, B.F., and Zamick, L. // *Phys. Rev. C* – 1964. – Vol. 134. – p. B515
7. Carlson J. et al. // *Prog. Part. Nucl. Phys.* – 2017. – Vol. 94. – p. 68.
8. Watanabe H. // *Acta Phys. Polonica B.* – 2019. – Vol. 50. – p. 641
9. Grawe H. et al. // *Rep. on Prog. in Phys.* – 2007. – Vol. 70. – p. 1525
10. Grawe H. et al. // *Prog. Part. Nucl. Phys.* – 2019. – Vol. 38. – p. 15
11. Grzywacz R. et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81. – p. 766
12. Sawicka M. et al. // *Phys. Rev. C.* – 2003. – Vol. 68. – 044304
13. Chiara C.J. et al. // *Phys. Rev. C.* – 2011. – Vol. 84. – 037304
14. Morales A.I. et al. // *Phys. Rev. C.* – 2016. – Vol. 93. – 034328
15. Morales A.I. et al. // *Phys. Lett. B.* – 2018. – Vol. 781. – p. 706
16. Go S. et al. // *Phys. Rev. C.* – 2020. – Vol. 102. – 044331
17. Gottardo A. et al. // *Phys. Rev. C.* – 2020. – Vol. 102. – 014323
18. Escrig S. et al. // *Phys. Rev. C.* – 2021. – Vol. 103. – 064328
19. Van Isacker // *Int. J. of Mod. Phys. E.* – 2011. – Vol. 20. – p. 191
20. Степанов М.Е. и др. // *Изв. РАН сер. физ.* – 2018. – Т. 82. – № 6 – с. 774
21. Ишханов Б.С., Степанов М.Е., Третьякова Т.Ю. // *ВМУ.* – 2014. – Сер.3. *Физ. Астр.* – №1. – p. 3
22. Eisenberg, J.M. *Nuclear Theory. V.3. Microscopic theory of the nucleus* / J.M. Eisenberg, W. Greiner. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1972
23. Центр данных фотоядерных экспериментов [электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cdfc.sinp.msu.ru/>

24. National Nuclear Data Center [электронный ресурс] – Режим доступа:
<https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>
25. Khalifeh Abusaleem, Balraj Singh // Nucl. Data Sheets. – 2011. – Vol. 112.
– p. 133.
26. Morales, A.I. et al. // Phys. Rev. C. – 2016. – Vol. 93. – 034328
27. Go, S. et al. // Phys. Rev. C. – 2020. – Vol. 102. – 044331
28. Валантэн, Л. Субатомная физика (ядра и частицы): В 2-х т. Т. 2.
Дальнейшее развитие: Пер. с франц. – М.: Мир. 1986. – 336 с.
29. Heyde, Kris L.G. The Nuclear Shell Model / Kris Heyde. – New York:
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. – 386 p.
30. De-Shalit, A. // Phys. Rev. – 1953. – Vol. 91. – №6. – p. 1479
31. Владимирова Е.В., Дашков И.Д., Ишханов Б.С., Третьякова Т.Ю. //
УЗФФ МГУ. – 2018. – №3. – 1830205
32. Бор, О. Структура атомного ядра / О. Бор, Б. Моттельсон; Т. 1., Пер. с
англ. под ред. Л.А. Слива. – М.: Мир. 1971. – 456 с.
33. Ishkhanov B.S. et al. // Chinese Phys. C. – 2017. – Vol. 41. – 094101
34. Madland D.G., Nix J.R. // Nucl. Phys. A. – 1988. – Vol. 476. – Issue 1. – p.1
35. Wang M. et al. // Chinese Phys. C. – 2021. – Vol. 45. – 030003
36. Talmi, I. Simple Models of Complex Nuclei / I. Talmi. – Harwood Ac. Publ.
Chur., 1993.
37. Bayman V.F., Lande A. // Nucl. Phys. – 1966. – Vol. 77. – p. 1.
38. Гепперт-Майер, М. Элементарная теория ядерных оболочек / М.
Гепперт-Майер, И. Ганс, Д. Иенсен; Пер. с англ. Н. Н. Колесникова; Под
ред. Д. Д. Иваненко. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. - 318 с.
39. Escuderos A., Zamick L. // Phys. Rev. C. – 2006. – Vol. 73. – 044302
40. Imasheva L.T. et al // Phys. of Part. and Nucl. – 2017. – Vol. 48. – Issue 6. –
p. 889

41. Жуляева Д. С., Сидоров С. В., Третьякова Т. Ю. // Ученые записки физического факультета Московского Университета. – 2021. – № 3. – 2130402
42. Morales A.I. et al. // Phys. Rev. B. – 2018. – Vol. 781. – p. 706
43. Escrig S. et al. // Phys. Rev. C – 2021. – Vol. 103. – 064328

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение А. Вывод формулы энергетического сдвига для тождественных нуклонов

Построим антисимметричную волновую функцию двух нуклонов с $j_1 = j_2$ и выполняем нормировку:

$$\begin{aligned}
 \psi(j^2; JM) &= N \sum_{m_1, m_2} \langle j m_1; j m_2 | JM \rangle \cdot [\varphi_{j m_1}(1) \varphi_{j m_2}(2) - \varphi_{j m_1}(2) \varphi_{j m_2}(1)] = \\
 &= N \sum_{m_1 m_2} [\langle j m_1; j m_2 | JM \rangle - \langle j m_2; j m_1 | JM \rangle] \varphi_{j m_1}(1) \varphi_{j m_2}(2) = \\
 &= \frac{1}{2} (1 - (-1)^{2j-J}) \sum_{m_1 m_2} \langle j m_1; j m_2 | JM \rangle \varphi_{j m_1}(1) \varphi_{j m_2}(2). \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Теперь представим взаимодействие (4) в разложении по полному набору функций:

$$V(r_1, r_2) = -V_0 \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r_1, r_2) P_k(\cos \theta_{12}), \quad (A.2)$$

где $P_k(\cos \theta_{12}) = \sum_k \frac{4\pi}{2k+1} Y_k^{k*}(\Omega_1) Y_k^k(\Omega_2)$ – полиномы Лежандра. Также запишем мультипольное разложение δ -функции [11]:

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \sum_k \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \frac{(2k+1)}{4\pi} P_k(\cos \theta_{12}) \quad (A.3)$$

Сравнивая формулы (A.2) и (A.3), найдем вид функции $v_k(r_1, r_2)$:

$$v_k(r_1, r_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \frac{(2k+1)}{4\pi} \quad (A.4)$$

Теперь разделим в матричном элементе (7) пространственные и спиновые переменные:

$$\langle j_1 j_2; JM | V(r_1, r_2) | j_1 j_1; JM \rangle = -V_0 \sum_k f_k F_k, \quad (A.5)$$

где

$$f_k = \frac{4\pi}{2k+1} \langle j_1 j_2; JM | Y_k(\Omega_1) Y_k(\Omega_2) | j_1 j_2; JM \rangle \quad (A.6)$$

и

$$F_k = \int |u_{n_1 l_1}(r_1) u_{n_2 l_2}(r_2)|^2 v_k(r_1, r_2) dr_1 dr_2. \quad (\text{A.7})$$

Перепишем (A.7) с учетом (A.4):

$$F_k = \frac{(2k+1)}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} |u_{n_1 l_1}(r) u_{n_2 l_2}(r)|^2 dr = (2k+1) F^0 \quad (\text{A.8})$$

Для упрощения угловой части, воспользуемся следствием теоремы Вигнера-Эккарта [11]:

$$\begin{aligned} & \langle j_1, j_2; J \| T^{(k)}(1) U^{(k)}(2) \| j'_1, j'_2; J' \rangle = \\ & = (-1)^{j_2+j'_1+J} \hat{j} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j'_2 & j'_1 & k \end{Bmatrix} \langle j_1 \| T^{(k)} \| j'_1 \rangle \langle j_2 \| U^{(k)} \| j'_2 \rangle \delta_{JJ'}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где $T^{(k)}$ и $U^{(k)}$ – операторы ранга k , $\langle j_1 \| T^{(k)} \| j'_1 \rangle$ – приведенный матричный элемент, $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j'_1 & j'_2 & k \end{Bmatrix}$ – 6j-символ Вигнера. Тогда выражение (A.6) примет вид

$$f_k = \frac{4\pi}{2k+1} (-1)^{j_1+j_2+J} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_2 & j_1 & k \end{Bmatrix} \langle j_1 \| Y_k \| j_1 \rangle \langle j_2 \| Y_k \| j_2 \rangle \quad (\text{A.10})$$

Так как $j = l + s$ и оператор Y_k действует только на l , то используя первое правило редукции Рака, получим [11]:

$$\langle \frac{l}{2} j \| Y_k \| \frac{l'}{2} j' \rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+l'+j+k} \hat{j} \hat{j}' \begin{Bmatrix} l & j & 1/2 \\ j' & l' & k \end{Bmatrix} \langle l \| Y_k \| l' \rangle, \quad (\text{A.11})$$

причем приведенный матричный элемент $\langle l \| Y_k \| l' \rangle = (-1)^l \frac{\hat{l} \hat{l}' \hat{k}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда для (A.11) запишем:

$$\begin{aligned} \langle \frac{l}{2} j \| Y_k \| \frac{l'}{2} j' \rangle & = (-1)^{\frac{1}{2}+l'+l+j+k} \frac{\hat{j} \hat{j}' \hat{l}' \hat{k}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l & j & 1/2 \\ j' & l' & k \end{Bmatrix} \\ & = (-1)^{j-\frac{1}{2}} \frac{\hat{j} \hat{j}' \hat{k}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j & k & j' \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + (-1)^{l+l'+k}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Теперь подставляем данное выражение сначала в (A.10), находя конечный вид угловой части, затем подставляем полученное выражение и формулу (A.8) в сумму (A.5).

$$\sum_k f_k F_k = F^0 (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \sum_k (-1)^{J-1} \frac{1}{2} (1 + (-1)^k) (2k + 1) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_2 & j_1 & k \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k & j_1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & k & j_2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Далее используем некоторые выражения для работы с угловыми моментами, а именно [11]:

$$\sum_k (2k + 1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_2 & j_1 & k \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k & j_1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & k & j_2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{2j_2+J} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & J \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_k (2k + 1) (-1)^k \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ j_2 & j_1 & k \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & k & j_1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & k & j_2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{J-2j_2} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Наконец получим выражение для искомого матричного элемента:

$$\langle j_1 j_2; JM | V(r_1, r_2) | j_1 j_1; JM \rangle = -\frac{V_0 F^0}{2} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}^2 \right] \quad (\text{A.16})$$

Итого, энергетический сдвиг для тождественных нуклонов при $j_1 = j_2$ будет описываться формулой:

$$\Delta E_{j^2, J} = -\frac{V_0 F^0}{2} (2j + 1)^2 \begin{pmatrix} j & j & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (\text{A.17})$$

Приложение Б. Программа для определения значений полного момента J

Программа для определения возможных значений полного момента J двух и более фермионов, находящихся в одинаковых состояниях j , написана на языке программирования Python 3.7.0.

```
import itertools as it
from fractions import Fraction as F
```

Происходит подключение необходимых нам библиотек. Далее программа просит пользователя ввести состояние j фермионов, после чего заполняет массив соответствующими проекциям спина.

```
spin=str(input("Введите спин (через дробь): "))
j=[]
for i in range(int(spin[0])+1):
    j.append(F(-int(spin[0])+2*i,2))
```

Программа просит ввести число сеньорити, после чего перебирает всевозможные суммы разных проекций моментов. Далее программа собирает полученные проекции полного момента в единый массив.

```
V=[]
data1=list(it.combinations(j, int(input("Введите сеньорити:"))))
for configurations in data1:
    V.append(sum(configurations))
V.sort()
```

Код анализирует количество способов собрать то или иное значение проекции.

```
q=V[0]
counts=[]
proections=[]
for i in range(int(abs(q.numerator/q.denominator)*2)+1):
    counts.append(V.count(V[0]+i))
    proections.append(V[0]+i)
```

Затем следует алгоритм, собирающий из проекций полное значение момента J и считающий сколько раз это J встречается.

```
moments=[]
frequency=[]
while len(counts)>0:
    if counts[0]>0:
        i=0
        while counts[0]>0:
            i+=1
            counts=list(map(lambda x: x-1,counts))
        moments.append(abs(proections[0]))
        frequency.append(i)
    else:
        counts.pop(0)
        if len(counts)>0:
            counts.pop(len(counts)-1)
        projections.pop(0)
        if len(proections)>0:
            projections.pop(len(proections)-1)
```

Вывод на экран возможных значений полного момента J и его количество.

```
for x,y in zip(moments, frequency):
    print("Moment=", x, "Frequency=", y)
```