

Модели ядра: вчера и сегодня

Р.В.Джолос

*Лаборатория теоретической физики им.
Н.Н.Боголюбова, ОИЯИ, Дубна*

Семинар ОЭПВАЯ НИИЯФ, 10 Ноябрь , 2022

- Введение
- Оболочечная модель ядра: спин-орбитальное взаимодействие, псевдоспиновая симметрия, суперсимметрия в ядерной физике
- Новые магические числа, протон-нейтронное взаимодействие
- Коллективная модель ядра: фазовые переходы, сосуществование форм.
- Функционал плотности энергии.
- Заключение

1933. Elsasser „On the Pauli principle in nuclei“

„The Pauli principle together with the assumption of the central potential well, leads to shell structure in nuclei. The field due to $N-1$ nucleons acting on the N th nucleon has probably spherical symmetry leading to the analogy with electron shells in atoms“

1934-1935 papers of Elsasser

Magic numbers: $Z=50,82$; $N=126$

Глядя назад, трудно объяснить, как четкие указания, представленные Элсассером, были проигнорированы в течении почти 13 лет.

Spin-orbit coupling estimated by analogy to atomic physics have a correct sign within nuclei. However, its value is too small.

$$\begin{aligned} V_{so} &= \frac{\hbar}{m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{s} \cdot \vec{l} \\ &\equiv \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{s} \cdot \vec{l} \end{aligned}$$

With $\lambda = 0.044 fm^2$. In nucleus $\lambda = 0.5 fm^2$.

Почему в атомных ядрах спин-орбитальное взаимодействие такое сильное?

Уравнение Дирака

$$(\gamma^\mu (cp_\mu + V_\mu) + Mc^2 - S) \Psi = 0$$

$$V_\mu = (V_0, \vec{V}) \quad (1)$$

В стационарном случае

$$H = \alpha(c\vec{p}) + \vec{V}) + V_0$$

$$+ \beta(Mc^2 - S) \quad (2)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Mc^2 + V_0 - S & \vec{\sigma}(\vec{p} - \vec{V}) \\ \vec{\sigma}(\vec{p} - \vec{V}) & -Mc^2 + V_0 + S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

S - scalar potential

$V_0(\vec{r})$ - vector potential (time-like), $\vec{V}(\vec{r})$ - vector potential (space-like), $W_+ = S + V_0$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{E + 2Mc^2 - W_+} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) g(\vec{r})$$

$$E = Mc^2 + \varepsilon$$

Предполагая, что

$$|\varepsilon| \ll 2 \left(Mc^2 - \frac{1}{2}(V_0 + S) \right) \equiv 2\tilde{M}c^2 \quad (3)$$

Получаем

$$\left(\vec{p} \frac{1}{2\tilde{M}c^2} \vec{p} + \frac{\hbar^2}{4\tilde{M}^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial(V_0 + S)}{\partial r} \vec{l} \cdot \vec{s} + (V_0 - S) \right) g(\vec{r}) \approx \varepsilon g(\vec{r})$$

$$V_0 - S = -50 MeV$$

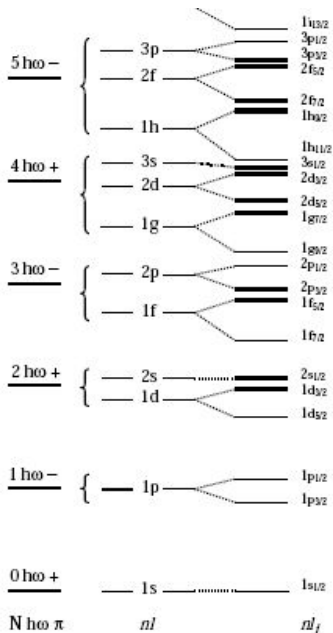
$$V_0 + S = 700 - 800 MeV$$

Из правила сумм QCD следует, что $S/V_0 \approx 1.1$ с 20% точностью.

53 года назад Arima, Harvey, Shimizu (Phys.Lett., 30B, 517 (1969)) и независимо Hecht, Adler (Nucl.Phys. A 137, 129 (1969)) обратили внимание на квазивырождения в одночастичных спектрах сферических ядер:

Одночастичные состояния с

$$(n_r, l, j = l + 1/2)(n_r - 1, l + 2, j = l + 3/2), \dots$$



$$\tilde{N} = N - 1$$

$$\tilde{l} = \left(\begin{array}{cc} (l+2) - 1, & j_1 = (l+2) - \frac{1}{2} = \tilde{l} + \frac{1}{2} \\ l+1, & j_2 = l + \frac{1}{2} = \tilde{l} - \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\tilde{s} = \frac{1}{2}$$

Examples of Pseudospin Doublets

$$(n_r \ell j; (n_r - 1) \ell + 2, j + 1)$$

$$j = \bar{\ell} \pm \bar{s}, \quad \bar{s} = 1/2;$$

$\bar{\ell}$ pseudo-orbital angular momentum, \bar{s} pseudo-spin

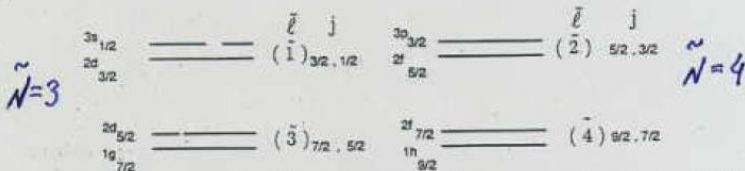
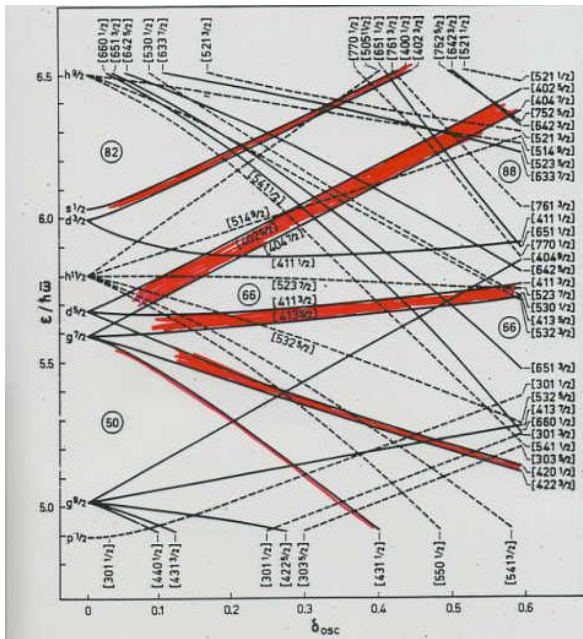


Fig. 1. Examples of pseudospin doublets in the ^{208}Pb region. n_r is the radial quantum number of the state, ℓ is the orbital angular momentum, j the total angular momentum.

Рис. : Примеры псевдоспиновых дублетов



Существование мультиплетов в спектре предполагает существование симметрии. Однако, с физической точки зрения тот факт, что мультиплеты одночастичных состояний существуют в реалистических спектрах, является неожиданным. Действительно, среднее поле ядра - это результат усреднения нуклон-нуклонного взаимодействия по $(A - 1)$ нуклону ядра. И если в результате усреднения в спектрах появляются простые закономерности, то это может быть следствием какой-то симметрии.

J.Ginocchio (Int.J.Mod.Phys. E15, 1843 (2006)) показал, что появление псевдоспиновой симметрии в ядрах можно объяснить, если рассматривать формирование среднего поля ядра в релятивистском подходе, учитывающем скалярный притягивающий и векторный отталкивающий потенциалы.

$$\left(\vec{p} \frac{1}{\varepsilon - W_-} \vec{p} - \frac{1}{(\varepsilon - W_-)^2} \frac{1}{r} \frac{\partial W_-}{\partial r} \vec{l} \cdot \vec{s} + W_+ - 2Mc^2 \right) f = \varepsilon f$$

J.Ginocchio, Phys.Rev.Lett. 78 (1997)436.

Если $S = V_0$, то $W_- \equiv V_0 - S = 0$. Спин-орбитальное взаимодействие в уравнении для малой компоненты дираковского спинора отсутствует. Следовательно дублет состояний с разными направлениями спина относительно орбитального момента малой компоненты дираковского спинора вырожден. Орбитальный момент малой компоненты дираковского спинора и есть псевдоорбитальный момент.

QCD sum rules generate the following relations for the scalar and vector potentials

$$S = -\frac{4\pi^2}{M^2} \frac{\sigma_N \rho_N}{m_q}$$

$$V_0 = \frac{32\pi^2}{M^2} \rho_N, \quad M \approx 1\text{GeV}$$

$$\sigma_N = 2m_q \int d^3x (\langle N | \bar{q}q | N \rangle - \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle_{vac})$$

$|N \rangle$ is a state of a nucleon.

It is seen that the scalar potential is related to the quark condensate.

Относительная слабость псевдо спин-орбитальной связи предполагает, что псевдоорбитальный момент квазичастицы сильно связан с угловым моментом четно-четного остова (Р.В.Джолос, ЭЧАЯ 32, 223 (2001))

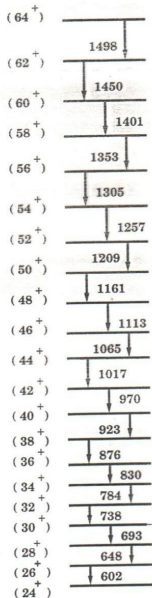
$$\vec{L} = \vec{R} + \vec{l} \quad (4)$$

Псевдоспин векторно складывается с \vec{L} , формируя полный угловой момент

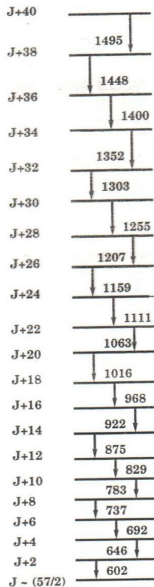
$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}. \quad (5)$$

Как следствие слабости псевдоспин-орбитальной связи в соседних четно-четном и нечетном ядрах появляются тождественные ротационные полосы, что позволяет говорить о суперсимметрии в спектрах возбуждения ядер.

EXP		EXP	
(16) $\overset{+}{\text{---}}$	3209	33/2	3001
		31/2	2969
(14) $\overset{+}{\text{---}}$	2598	29/2	2392
		27/2	2358
(12) $\overset{+}{\text{---}}$	2020	25/2	1832
		23/2	1796
(10) $\overset{+}{\text{---}}$	1486	21/2	1330
		19/2	1294
8 $\overset{+}{\text{---}}$	1010	17/2	894
		15/2	862
6 $\overset{+}{\text{---}}$	608	13/2	536
		11/2	508
4 $\overset{+}{\text{---}}$	297	9/2	262
		7/2	242
2 $\overset{+}{\text{---}}$	91	5/2	81
0 $\overset{+}{\text{---}}$	0	3/2	69
		1/2	0
174	Hf	179	Hf



^{152}Dy (SD-1 band)



^{151}Tb (SD-2 band)

Исторически первое указание на исчезновение оболочки среди тех, которые традиционно известны, было получено для магического числа $N = 20$ (PRL 100, 152501 (2008)). Оказалось, что вопреки традиционной точке зрения, магические числа могут эволюционировать вдали от долины стабильности, благодаря, например, специфическому протонно-нейтронному взаимодействию. Магическое число 20 возникает естественным образом при использовании потенциала гармонического осциллятора для моделирования среднего поля ядра. Энергетические щели при $N, Z = 20$ образованы между орбитами $d_{3/2}$ и $f_{7/2}$, относящимися к $N = 2$ и $N = 3$ осцилляторным оболочкам, соответственно. Эти орбиты имеют противоположные четности, что существенно для объяснения устойчивости этого магического числа.

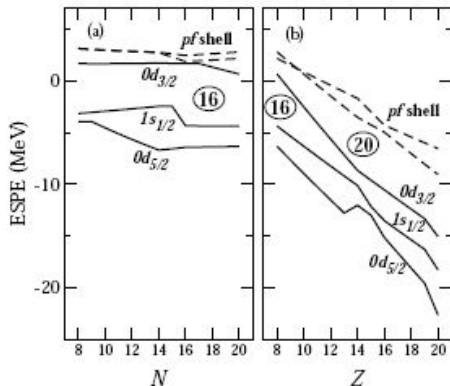


Figure 15: Effective Single Particle Energies (ESPE) of neutrons in the ${}^8\text{O}$ isotopic chain (left) and in the $N = 20$ isotones with $8 < Z < 20$ (right). These figures have been adapted from Fig. 5 of Ref. [105] and Fig. 1 of Ref. [106].

Энергетическая щель при N=8 разделяет $p_{1/2}$ и $d_{5/2}, s_{1/2}$ одночастичные состояния. В ^{16}O протоны, заполняющие состояния $p_{3/2}$ и $p_{1/2}$, сильно связывают нейтроны в $p_{1/2}$ состоянии по сравнению с другими орбитами. По мере удаления протонов из состояния $p_{1/2}$, нейтронное состояние $p_{1/2}$ становится менее связанным. Поэтому нейтронная оболочка N=8 быстро размывается, вызывая инверсию $p_{1/2}-s_{1/2}$. В результате в ^{12}Be появляется низколежащее 1^- состояние с большой величиной вероятности E1 перехода в основное состояние.

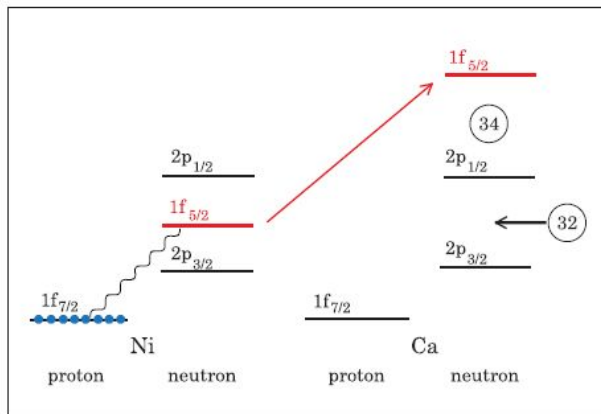


Figure 3. Schematic illustration of shell evolution from Ni back to Ca for neutron orbits. Light blue circles exhibit protons. The wavy line is the interaction between the proton $1f_{7/2}$ orbit and the neutron $1f_{5/2}$ orbit. The numbers in circles indicate (semi-)magic numbers.

По мере развития вычислительной техники стало возможным проводить оболочечные расчеты в большом конфигурационном пространстве.

Что же увидели, анализируя результаты больших оболочечных расчетов? В 2015 году Кальвин В.Джонсон проанализировал результаты оболочечных расчетов, выполненных в большом конфигурационном пространстве, без инертного кора, включающего нижние заполненные оболочки, и с использованием современного нуклон-нуклонного взаимодействия (*ab initio* расчеты). Анализ структуры полученных волновых функций показал, что их главные компоненты совпадают с теми, которые были получены 50 лет назад в расчетах, выполненных с использованием весьма ограниченного конфигурационного пространства (на шесть порядков меньшего по величине, чем в *ab initio* расчетах) и сил Коэна-Куранта .

Liquid drop model

Bethe-Weizsäcker formula

$$BE = aA - bA^{2/3} - 0.6Z^2e^2/R_c - 0.5c(N-Z)^2/A$$

$$a = 16 \text{ MeV}$$

$$b = 17 \text{ MeV}$$

$$c = 50 \text{ MeV}$$

$$R_c = 1.24 \text{ fm } A^{1/3}$$

Рис. : Модель жидкой капли

Neutron star

$$BE=(a-0.5c)N-bN^{2/3}+0.6GM^2/r_0 N^{5/3}$$

$$N=10^{56}$$

$$R=1.2 \cdot 10^{0.7} \text{ km}$$

Рис. : Модель жидкой капли.

I. Механизм возникновения деформации. Эффект Яна-Теллера.

Возникновение деформации может происходить в результате поляризации остова ядра валентными нуклонами. Связь валентных нуклонов с колебаниями остова ядра ведет к возникновению ядерного эффекта Яна-Теллера (любая нелинейная конфигурация атомов, содержащая вырожденные состояния электронов, неустойчива по отношению к понижающим её симметрию деформациям), т.е. к неустойчивости сферической симметрии среднего поля ядра относительно понижающих эту симметрию деформаций.

Оболочечная модель ядра содержит два основных элемента того механизма, который приводит к снижению симметрии среднего поля ядра: плотность одночастичных уровней как функция заполняемости оболочек, и связь движения нуклонов с колебаниями остова.

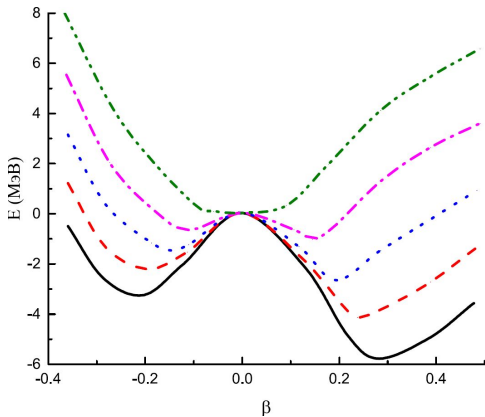


Рис. : Эволюция потенциальной энергии деформации ядер начала редкоземельной области.

II. Механизм Federman-Pittel (Phys.Lett. B 69, 385 (1977)).

В изотопах Zr последний одночастичный уровень, заполненный протонами - $p_{1/2}$. Следующий уровень $g_{9/2}$ отделен от $p_{1/2}$ энергетической щелью. Нейтроны последовательно заполняют состояния $d_{5/2}$ и затем $g_{7/2}$. Когда нейтроны находятся в состоянии $g_{7/2}$, они сильно взаимодействуют с протонами посредством тензорных сил, если протоны находятся в состоянии $g_{9/2}$. В этом случае ядро „выигрывает“ в энергии связи. В результате энергия связи нейтронов в состоянии $g_{7/2}$ увеличивается, $g_{7/2}$ приближается к $d_{5/2}$. Пространство одночастичных состояний, которое могут занимать валентные нейтроны, увеличивается, что и создает условия для возникновения деформации. Однако переход протонов из состояния $p_{1/2}$ в $g_{9/2}$ требует дополнительной энергии. Поэтому деформированный минимум у потенциальной энергии

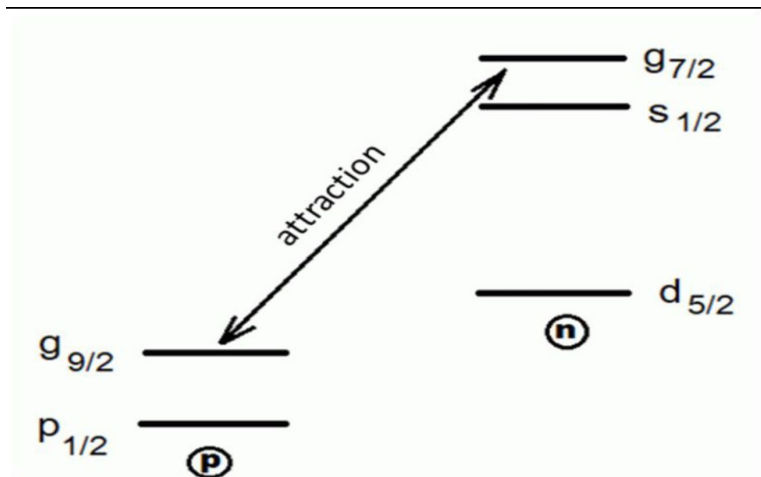


Рис. : Zr. Схема одночастичных уровней.

Фазовый переход с ростом энергии возбуждения

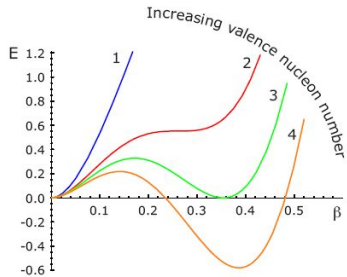


Рис. :

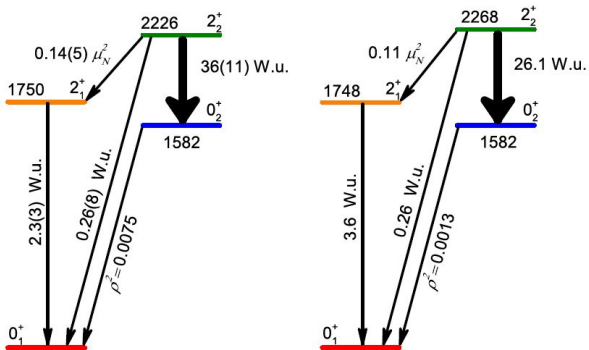


Рис. : Фазовый переход с ростом энергии возбуждения.

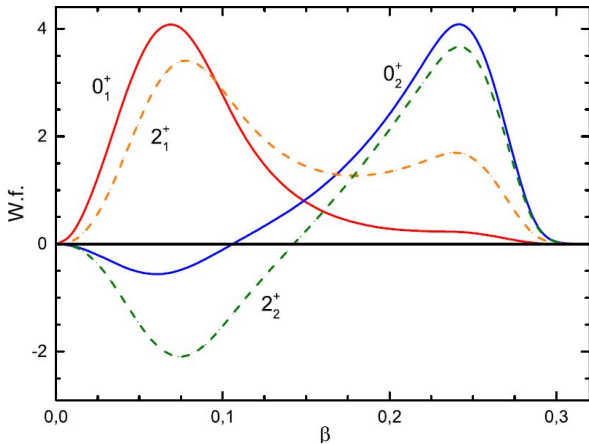


Рис. : Фазовый переход с ростом энергии возбуждения.

The Hamiltonian of the model used can be presented as

$$H_I = -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta_{30}^2} + V_I^{(1)}(\beta_{30}),$$

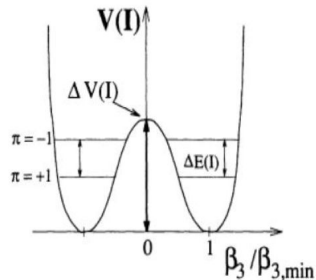
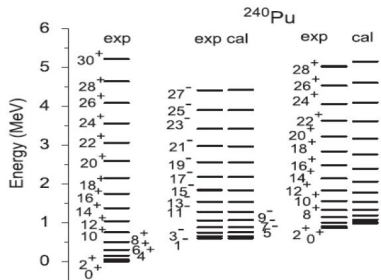


Рис. :

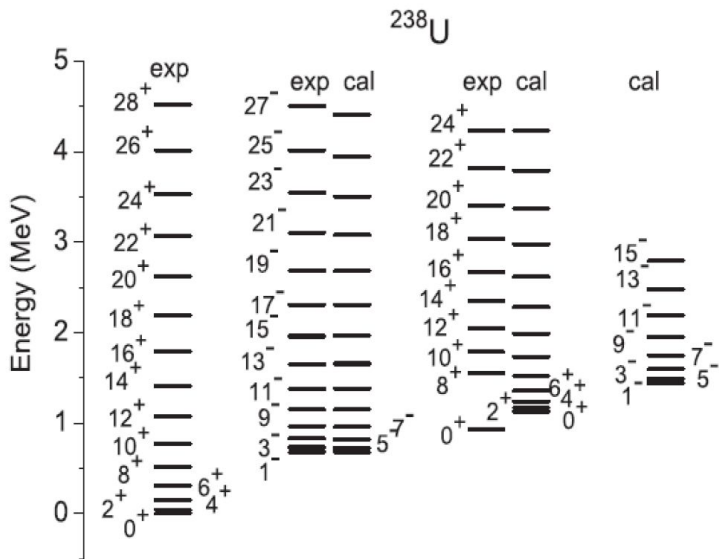
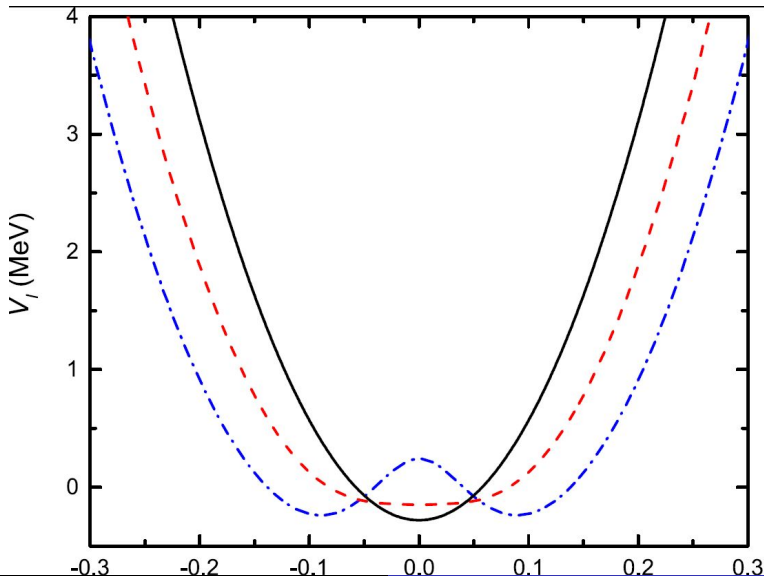


Рис. :

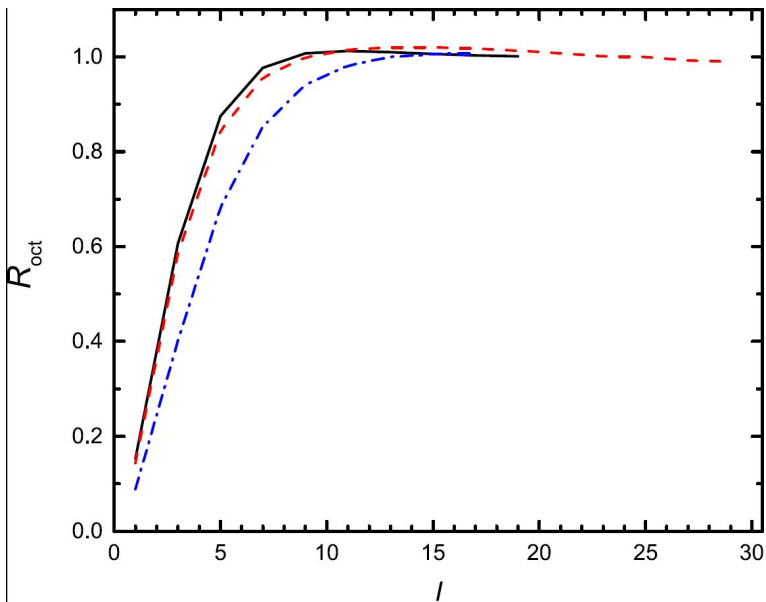


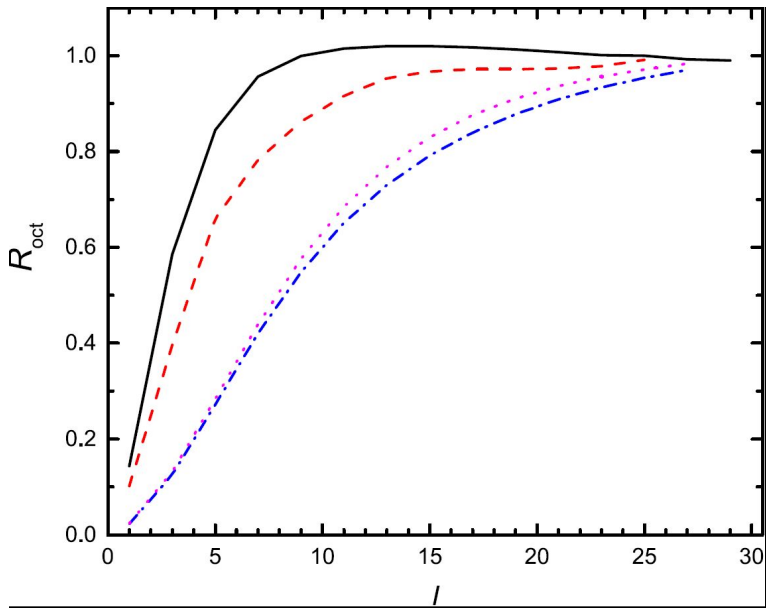
Stabilization of the octupole deformation (R.V.Jolos, P. von Brentano, Phys.Rev. C 92, 044318 (2015))

$$R_{oct}(I_{odd}) = \frac{E_{inter}(I_{odd})}{E_{exp}(I_{odd})} \quad (6)$$

$$E_{inter}(I_{odd}) = W(I_{odd})E_{exp}^{even}(I_{odd} + 1) + (1 - W(I_{odd}))E_{exp}^{even}(I_{odd} - 1)$$

$$W(I) = \frac{I}{2I + 1} \quad (8)$$





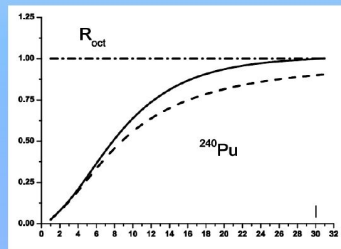
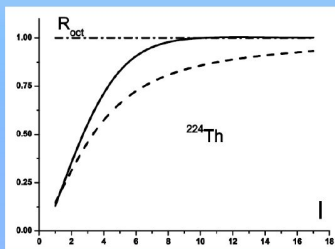
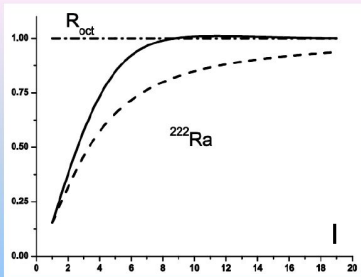
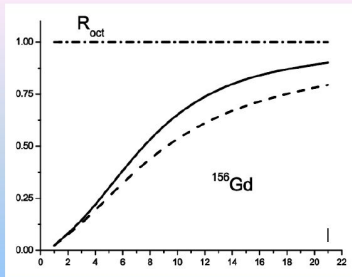


Рис. :

Pairing + QQ

$$\kappa_\lambda = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \frac{M\omega_0^2}{A \langle r^{2\lambda-2} \rangle}$$

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) [f + f' \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} + g \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)} + g' \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \vec{\tau}^{(1)} \cdot \vec{\tau}^{(2)}]$$

(9)

$$f(\vec{r}) = f^{ex} + (f^{in} - f^{ex}) \rho(\vec{r})$$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - R)/a)}$$

$$f^{in} = 0.0685, \quad f^{ex} = -2.165$$

$$f'^{in} = 0.3315, \quad f'^{ex} = 0.465, \quad g = 0.575, \quad g' = 0.725$$

+ pp канал. Итого 7-8 параметров.

Функционал Фаянса

Самосогласование параметров среднего потенциала ядра и остаточных сил

Условие самосогласования имеет вид (Z.Bochnacki,
I.M.Holban, I.N.Mikhailov, Nucl.Phys. A97, 33 (1967))

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left(\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Для корректного описания насыщения

$$U = a \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2} b \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2$$

Используя это выражение для U , получаем

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left(a + b \frac{\rho}{\rho_0} \right) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$
$$a = f^{ex}, \quad b = f^{in} - f^{ex}$$

Используя выражение для плотности потенциальной энергии $\mathcal{E}_{pot}(\rho)$, можно написать

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \mathcal{E}_{pot}(\rho)$$

1955 y. **Classical field theory of nuclear forces**

M.M.Johnson and E.Teller, Phys. Rev. **98**, 783 (1955)

- Nuclear interactions are strong which has the consequence that at high energies the multiple production of nuclear quanta-meson is the rule, where the multiple production of gamma-quanta is a rare event. Consequently in nucleon-nucleon collisions several mesons may be expected in virtual states.
- For heavy nucleus in which the expectation value of mesons present is considerably larger than one, the mesons obeying the Bose statistics will tend to occupy the same quantum states. The wave function of this quantum state will correspond to the classical potential of nuclear forces.

The simplest Hamiltonian valid for the interior of nuclei is

$$H_1 = \int d\tau \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j |\nabla \Psi_j|^2 + \mu^2 c^4 \Phi^2 - \hbar c g \Phi \sum_j |\Psi_j|^2 \right\} (10)$$

At the moment it does not include kinetic energy of meson field.

This Hamiltonian has two shortcomings

- it does not explain saturation
- it predicts too large neutron excess in heavy nuclei

$$\frac{\delta H_1}{\delta \Phi(r)} = 2\mu^2 c^4 \Phi - \hbar c g \sum_j |\Psi_j|^2 \equiv 2\mu^2 c^4 \Phi - \hbar c g \rho = 0$$

at equilibrium. Then

$$\begin{aligned} H_1 &= \int d\tau \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j |\nabla \Psi_j|^2 + \frac{\mu^2 c^4 \hbar^2 c^2 g^2}{4\mu^4 c^8} \rho^2 - (\hbar c g)^2 \frac{\rho^2}{2\mu^2 c^4} \right\} \\ &= \int d\tau \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j |\nabla \Psi_j|^2 - \frac{1}{4} \frac{(\hbar c g)^2}{2\mu^2 c^4} \rho^2 \right\} \end{aligned}$$

Nucleon kinetic energy $\sim \rho^{5/3}$. **Therefore, there is no saturation.**

The Coulomb energy should be added to H_1 . The energy minimum occur when the kinetic energy at the top of the proton Fermi distribution differs from the energy at the top of the neutron Fermi distribution by the Coulomb potential. This minimum occurs in heavy nuclei for two large neutron excess.

Relativistic Effects in Nuclear Forces

H.-P.Dürr, Phys.Rev. **103**, 469 (1956)

Let us try to find a relativistic formulation of an interaction which in the relativistic limit will lead to a velocity dependence as it is proposed by Johnson and Teller.

We also introduce vector meson field in addition to scalar meson field.
Dirac equation ($\hbar = c = 1$)

$$i\gamma_\mu p_\mu + m = O_j$$

In general,

$$\begin{aligned} O_1 &= -V_s - \text{scalar} \\ O_2 &= i\gamma_n u A_\nu, \quad A_\nu = (\vec{A}, iA_0) - \text{vector} \\ O_3 &= i\gamma_5 V_{ps} - \text{pseudoscalar} \end{aligned}$$

We restrict consideration to interactions which have a non-vanishing linear averages. In the time-independent problem this amounts to selfconsistent field treatment. On the basis of the transformation properties of the vector field will contribute to nonrelativistic Hamiltonian. Because of the parity conservation pion field contribution vanishes.

Dirac Hamiltonian

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m - \beta V_s + A_0$$

$\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ mixes large and small component of a Dirac spinor. Because of this, a weight of a small component will increase with \vec{p} . The nuclear potential $-\beta V_s + A_0$ is attractive for small $|\vec{p}|$ ($V_s > A_0$) and become repulsive for higher $|\vec{p}|$.

- Velocity-dependent meson-nucleon coupling is not introduced into consideration.
- Effective mass is produced by the coupling to the scalar meson.
- The empirical value of the nuclear size and the symmetry energy are reproduced.
- Appearance of the strong spin-orbit interaction is explained.
- Saturation is explained as relativistic effect (small component of a Dirac spinor, decrease of the coupling to the scalar meson with momentum \vec{p} increases).

Present formulation of the Relativistic Mean Field theory (P.Ring, Progr.Part.Nucl.Phys. 37, 193 (1996). RMF)

RMF - это феноменологический подход к решению ядерной проблемы многих тел. Подход Лоренц-инвариантен, а нуклоны рассматриваются как точечные частицы, хотя мы знаем, что нуклоны - это составные объекты. Нуклоны в этом подходе взаимодействуют, обмениваясь мезонами. Число мезонов, их квантовые числа, величины их масс и констант связи определяются так, чтобы лучше воспроизвести экспериментальные данные.

В рассмотрение включается , по возможности, меньшее число мезонов. Предполагается, что их характеристики в ядерной среде не обязательно должны иметь те же значения, что и в свободном пространстве.

Самым легким мезоном является пион. Его квантовые числа: $J=0$, $T=1$ and $P=-1$. Однако, так как пионы имеют отрицательную четность, соответствующее среднее поле ядра не сохраняет четность, что противоречит тому, что имеет место в реальных ядрах. Однако два, да и любое четное число пионов формируют объект, имеющий положительную четность.

В RMF в рассмотрение вводится σ -мезон, имеющий квантовые числа: $J=0$, $T=0$ and $P=+1$. Его введение можно рассматривать как некоторое приближенное описание более сложного объекта с теми же квантовыми числами, сформированного из кварк-антикварковых пар и глюонов. Обмен такими скалярными мезонами ведет к притяжению между нуклонами.

Отталкивающая часть взаимодействия определяется обменом векторными мезонами. Наиболее важный из них ω -мезон с квантовыми числами $J=1$, $T=0$. Такой мезон экспериментально известен. Его масса $m_\omega \approx 783$ МэВ. В приближении среднего поля он порождает векторный потенциал $\omega^\mu(x)$, чья времени-подобная компонента генерирует отталкивание, подобно электромагнитному полю фотонов, которые также имеют спин $J=1$. Электромагнитное поле представлено векторным потенциалом $A^\mu(x)$, а его времени-подобная компонента представляет кулоновское отталкивание.

Известно, что ядерные силы зависят от изоспина. Эта зависимость описывается обменом ρ -мезоном, имеющим квантовые числа $J=1$, $T=1$. В принципе есть много других мезонов, которые важны при количественном описании взаимодействия свободных нуклонов. Например, δ -мезон делает ядерный потенциал разным для протонов и нейтронов. Однако, для упрощения во многих ядерных моделях учитываются только $\sigma(x)$, $\omega^\mu(x)$, $\vec{\rho}^\mu(x)$ и фотоны $A^\mu(x)$.

$$L = L_N + L_M + L_{int}, \quad L_M = L_\sigma + L_\omega + L_\rho + L_A,$$

$$L_N = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi,$$

$$L_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2),$$

$$L_\omega = -\frac{1}{2} \left(\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right),$$

$$L_\rho = -\frac{1}{2} \left(\vec{R}_{\mu\nu} \vec{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \right).$$

$$L_{int} = -g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi - g_\omega \bar{\psi} \gamma_\mu \omega^\mu \psi - g_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \vec{\rho}^\mu \psi - e \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi.$$

$$L_A = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

$$\Omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu,$$

$$\vec{R}^{\mu\nu} = \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu,$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Выяснилось, однако, что такие свойства ядра как сжимаемость или свойства поверхности нельзя воспроизвести количественно с помощью приведенного выше Лагранжиана. По этой причине модель была расширена и в нее включили нелинейные по σ члены.

Сформулированный выше Лагранжиан приводит к следующему уравнению Дирака для нуклонов :

$$\{\gamma_\mu(i\partial^\mu + V^\mu) + M + S\} \psi_i = 0$$

где:

$$S(x) = g_\sigma \sigma(x),$$

$$V^\mu(x) = g_\omega \omega^\mu(x) + g_\rho \vec{\tau} \vec{\rho}^\mu(x) + eA^\mu(x).$$

В статическом приближении мы предполагаем независимость от времени мезонных полей и зависящую от времени фазу $\exp(i\varepsilon_i t)$ для спинора ψ_i . С учетом инвариантности относительно отражения времени и пространственного отражения пространственно-подобные компоненты всех токов исчезают и мы получаем стационарные уравнения RMF:

$$(-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta(M + S) + V) \psi_i = \varepsilon_i \psi_i$$

$$V(\vec{r}) = g_\omega \omega^0(\vec{r}) + g_\rho \tau_3 \rho_3^0(\vec{r}) + eA^0(\vec{r}),$$

$$S(\vec{r}) = g_\sigma \sigma(\vec{r}).$$

$$\begin{aligned}(-\Delta + m_\sigma^2)\sigma &= -g_\sigma\rho_s \\(-\Delta + m_\omega^2)\omega^0 &= g_\omega\rho_v \\(-\Delta + m_\rho^2)\rho_3^0 &= g_3\rho_3 \\-\Delta\rho_c^0 &= e\rho_c\end{aligned}$$

где

$$\rho_s = \sum_i^A \bar{\psi}_i \psi_i,$$

$$\rho_v = \sum_i^A \psi_i^+ \psi_i,$$

$$\rho_3 = \sum_i^A \psi_i^+ \tau_3 \psi_i,$$

$$\rho_c = \sum_i^A \psi_i^+ \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi_i,$$

$$\begin{aligned}
E &= \int d^3r \mathcal{H}(\vec{r}) = \sum_i^A \int d^3r \psi_i^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M) \psi_i \\
&+ \frac{1}{2} \int d^3r \{(\nabla\sigma)^2 + m_\sigma^2 \sigma^2\} \\
&- \frac{1}{2} \int d^3r \{(\nabla\omega^0)^2 + m_\omega^2 (\omega^0)^2\} \\
&- \frac{1}{2} \int d^3r \{(\nabla\rho^0)^2 + m_\rho^2 (\rho_3^0)^2\} - \frac{1}{2} \int d^3r (\nabla A^0)^2 \\
&+ \int d^3r \{g_\sigma \rho_s \sigma + g_\omega \rho_v \omega^0 + g_\rho \rho_3 \rho_3^0 + e\rho_c A^0\}
\end{aligned}$$

Для самосогласованного решения получаем

$$E = \sum_i^A \varepsilon_i - \frac{1}{2} \int d^3r \{ g_\sigma \rho_s \sigma + g_\omega \rho_v \omega^0 + g_\rho \rho_3 \rho_3^0 + e \rho_c A^0 \}.$$

Так как массы σ and ω мезонов достаточно большие, то для качественного обсуждения можно пренебречь оператором Лапласа Δ в уравнениях для полей. Тогда σ и ω пропорциональны скалярной и векторной плотностям. В конечных ядрах эти поля по форме более менее подобны потенциалу Саксона-Вудса.

В RMF подходе коллапса ядра не происходит, благодаря специфическому релятивистскому эффекту:

$$\rho_s(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A (|f_i(\vec{r})|^2 - |g_i(\vec{r})|^2),$$

$$\rho_v(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A (|f_i(\vec{r})|^2 + |g_i(\vec{r})|^2)$$

$$\rho_s = \rho_v - 2 \sum_{i=1}^A g_i^2 \approx \rho_v - \frac{1}{m_{eff}} \sum_{i=1}^A |\nabla f_i|^2 \approx \rho_v - 2\tau_{kin}.$$

При больших плотностях кинетическая энергия возрастает.

Здесь ρ_v - это обычная барионная плотность, нормированная на число нуклонов. ρ_s убывает, если малая компонента спинора возрастает, например, в случае возможного коллапса. Этот механизм автоматически уменьшает притяжение и стабилизирует ядро.

Однако описание нуклон-нуклонного взаимодействия в рамках концепции обмена мезонами вызывает вопросы. Экспериментально наблюдаемая ширина σ -мезона составляет 400-700 МэВ, что соответствует пробегу $l = c\tau_{lifetime} = 0.3$ фм. Комптоновская длина волны ω -мезона 0.25 фм. Это соответствует расстоянию, на котором исчезает граница между нуклонами, как „кварковыми мешками“. Можно рассматривать σ -мезон, как имитацию эффекта s -волнового двух-пионного обмена.

Киральная эффективная теория поля (R.Machleidt, Int.J.Mod.Phys. E 26, 1740018 (2017))

Силы, действующие между нуклонами, это остаточные „цветные“ силы, подобные силам Ван дер Ваальса, действующим между нейтральными молекулами. При построении киральной эффективной теории поля используется следующее обстоятельство. В спектре адронов имеется большой разрыв между массой π -мезона и массами ω - и ρ -мезонов. Таким образом, есть две энергетические шкалы: „мягкая“ шкала с импульсом $Q \sim m_\pi$ и „жесткая“ шкала, характеризуемая параметром $\Lambda_\chi \sim m_\omega, m_\rho$, известная также как шкала нарушения киральной симметрии. Это наводит на мысль, использовать при построении лагранжиана разложение по параметру Q/Λ_χ . Степени свободы киральной эффективной теории поля: π -мезоны и нуклоны N .

В итоге, программа построения лагранжиана состоит из следующих шагов:

- Фиксировать „мягкую“ и „жесткую“ энергетические шкалы и степени свободы.
- Определить все существенные симметрии низкоэнергетической КХД.
- Построить лагранжиан наиболее общего вида, обладающий этими симметриями, включая и их нарушения.
- Использовать разложение по параметру Q/Λ_χ .
- Следуя этому разложению, рассчитать вклады всех фейнмановских диаграмм для рассматриваемых процессов.

- В целом, исследования структуры ядер попрежнему базируются на двух основных подходах: оболочечной модели и коллективной модели ядра.
- Задача построения теории ядерной структуры, основываясь на реалистических нуклон-нуклонных силах остается нерешенной.