Часть 3

ФОРМУЛА ФОН НЕЙМАНА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Условная матрица плотности и формула фон Неймана

Пусть квантовая система, которая описывается матрицей плотности $\hat{\rho} = \sum\limits_{\ell} W_{\ell} \rho_{\ell}$, обладает некоторой наблюдаемой характеристикой A. Сопоставим этой характеристике эрмитов оператор $\hat{A}$ с дискретным невырожденным спектром $\{a_n\}$ (для простоты). Хорошо известно, что собственные вектора $|\, a_n \,\rangle$ наблюдаемой A образуют базис, по которому раскладывается любой вектор $|\, \psi_{\ell} \,\rangle$:

$$|\, \psi_{\ell} \,\rangle = \sum_{n} C_{\ell\, n} \,|\, a_n \,\rangle, \text{ где } \langle\, a_{n'} \,|\, a_{n''} \,\rangle = \delta_{n'\, n''}.$$

Вопрос: как будет выглядеть матрица плотности системы, если проведенное над системой измерение показало определенное значение $a_{n'}$ наблюдаемой A?

Ответ: При измерении наблюдаемой A конекретное значение $a_{n'}$ из спектра будет найдено с вероятностью

$$w_{n'} = \sum_{\ell} W_{\ell}\, w(a_{n'}|\ell),$$

где $w(a_{n'}|\ell)$ – **условная вероятность**, которая определяет вероятность измерения значения $a_{n'}$ при условии, что среди всех возможных чистых состояний матрицы $\hat{\rho}$ реализовалось именно состояние $\hat{\rho}_\ell = |\,\psi_\ell\,\rangle\,\langle\,\psi_\ell\,|$.

Легко видеть, что условная вероятность $w(a_{n'}|\ell)$ определяется по формуле:

$$w(a_{n'}|\ell) = |C_{\ell\, n'}|^2 = |\langle\, a_{n'}\,|\,\,\psi_\ell\,\rangle|^2 = \langle\, a_{n'}\,|\,\,\psi_\ell\,\rangle\,\langle\,\psi_\ell\,|\,\,a_{n'}\,\rangle = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\hat{\rho}_\ell\right),$$

где $\hat{P}^{(A)}_{n'} = |\,a_{n'}\,\rangle\,\langle\,a_{n'}\,|$ – проектор на состояние $|\,a_{n'}\,\rangle$. Тогда вероятность $w_{n'}$ равна:

$$w_{n'} = \sum_\ell W_\ell\,\mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\hat{\rho}_\ell\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\sum_\ell W_\ell\hat{\rho}_\ell\right) =$$
$$= \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\,\hat{\rho}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\,\hat{\rho}\,\hat{P}^{(A)}_{n'}\right).$$

В последнем равенстве мы учли основное свойство проектора $\hat{P}^{(A)}_{n'} = \left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\right)^2$ и свойство циклической перестановки под знаком следа: $\mathbf{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{B}\hat{C}\hat{A}\right)$.

Введем новый оператор:

$$\hat{\rho}_{n'}^{(A)} = \frac{\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\,\hat{P}_{n'}^{(A)}}{w_{n'}} = \frac{\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\,\hat{P}_{n'}^{(A)}}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\right)}.$$

Можно проверить, что этот оператор удовлетворяет всем свойствам матрицы плотности. Назовем его **условной матрицей плотности**. Из проведенных выше вычислений следует, что оператор $\hat{\rho}_{n'}^{(A)}$ нужно трактовать как матрицу плотности квантовой системы, если измерение наблюдаемой A дало значение $a_{n'}$. Этим решается поставленная задача.

Пусть теперь в системе помимо наблюдаемой A имеется другая наблюдаемая B. Легко вычислить условную вероятность, что в спектре наблюдаемой B будет измерено конкретное значение $b_{k'}$, если до этого в спектре наблюдаемой A было измерено значение $a_{n'}$. Соответствующая условная вероятность:

$$w(b_{k'} \mid a_{n'}) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{k'}^{(B)}\hat{\rho}_{n'}^{(A)}\right) = \frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{k'}^{(B)}\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\,\hat{P}_{n'}^{(A)}\right)}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\right)} = \frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{k'}^{(B)}\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\,\hat{P}_{n'}^{(A)}\hat{P}_{k'}^{(B)}\right)}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\right)}$$

носит название **формулы фон Неймана**.

Редукция матрицы плотности и парадокс друга Вигнера

Формула фон Неймана легко объясняет, почему два наблюдателя увидят один и тот же результат измерения. Пусть два экспериментатора измеряют спектр наблюдаемой A. Назовем этих ученых Аленушкой и Братцемиванушкой (благодарю О.Чекерес за прекрасную идею!). Хотя, обычно, их называют Алисой и Бобом. Пусть Аленушка измерила значение $a_{n'}$. Тогда матрица плотности квантовой системы станет $\hat{\rho}_{n'}^{(A)}$. Далее за приборы встает Братециванушка. Если он умел и оперативен, то к началу его измерений матрица плотности микросистемы не успеет эволюционировать. Следовательно, вероятность найти в спектре наблюдаемой A значение $a_{k'}$ равна:

$$w(a_{k'} \mid a_{n'}) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{k'}^{(A)} \hat{\rho}_{n'}^{(A)}\right) = \frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{k'}^{(A)} \hat{P}_{n'}^{(A)} \, \hat{\rho} \, \hat{P}_{n'}^{(A)}\right)}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{n'}^{(A)} \, \hat{\rho}\right)}.$$

Поскольку различным значениям a_n соответствуют ортогональные проекторы, то $\hat{P}_{k'}^{(A)} \hat{P}_{n'}^{(A)} = \delta_{k'\,n'}$. Тогда:

$$w(a_{k'} \mid a_{n'}) = \delta_{k'\,n'} \, \frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}\,\hat{P}^{(A)}_{n'}\right)}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'}\,\hat{\rho}\right)} = \delta_{k'\,n'}\,.$$

Этот тривиальный математический факт часто облекают в форму парадоксального суждения.

Введем очень важное определение: переход от матрицы плотности $\hat{\rho}$ к матрице плотности $\hat{\rho}^{(A)}_{n'}$ в результате измерения называется РЕДУКЦИЕЙ (или стягиванием) матрицы плотности к одной из своих компонент. Выше понятие редукции относилось к чистым состояниям, сконструированным при помощи принципа суперпозиции. Теперь мы будем применять его также к смешанным состояниям и матрице плотности.

Вопрос: где происходит редукция в данном конкретном измерении? В самой микросистеме при ее взаимодействии с макроприбором? В макроприборе при измерении состояния микросистемы? В компьютере, обрабатывающим сигналы макроприбора? А, может быть, в мозгу у наблюдателя, который воспринимает и интерпретирует данные компьютера?

В последнем случае человек становится одним из главнейших элементов мироздания. Можно сказать. что благодаря человеку Вселенная существует в одном конкретном состоянии, а не в их суперпозиции или смеси.

Чтобы опровергнуть эту идеалистическую точку зрения американский физик–теоретик Юджин Вигнер придумал элегантное рассуждение. Оно получило название "парадокса друга Вигнера". Хотя никакого парадокса в нем не содержится.

Пусть Аленушка провела измерение микросистемы в одиночестве и нашла значение $a_{n'}$. В ее мозгу микросистема УЖЕ находится в состоянии $\hat{\rho}_{n'}^{(A)}$. Но для Братцаиванушки, который в лаборатории еще не появлялся, микросистема ПО-ПРЕЖНЕМУ находится в состоянии $\hat{\rho}$. Так кто из них двоих определяет состояние микросистемы? Чей мозг (в тайне от санитаров) управляет состоянием Вселенной? И что измерит Братецииванушка, когда, наконец, доберется до лаборатории? Квантовая механика дает однозначные ответы на поставленные вопросы (см. выше). И эти ответы НЕ нуждаются в особой роли мозга (души, печени и левой пятки) любого (не)разумного наблюдателя!

Проекционный постулат М.Борна и проекционный постулат Дирака-фон Неймана

В разделе "Постулаты квантовой механики" мы сформулировали Постулат N4 о физическом смысле коэффициентов разложения в принципе суперпозиции, который в литературе обычно называют проекционным постулатом Макса Борна. Данный постулат предлагает рецепт сравнения предсказаний квантовой теории с экспериментом, если квантовая система находится в чистом состоянии.

В терминах измерений Постулат N4 можно сформулировать следующим образом. Пусть ДО измерения микросистема находилась в чистом состоянии $|\psi\rangle$. Если измерение наблюдаемой A дало значение $a_{n'}$, то следует полагать, что сразу ПОСЛЕ измерения квантовая система перешла в состояние $|a_{n'}\rangle$. Вероятность измерить значение $a_{n'}$ в состоянии $|\psi\rangle$ задается выражением

$$w_{n'} = |\langle a_{n'} | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | a_{n'} \rangle \langle a_{n'} | \psi \rangle = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{n'} \hat{P}_{\psi}\right).$$

Вопрос: как обобщить проекционный постулат Борна на смешанные состояния?

Ответ: опираясь на изложенный выше материал мы могли бы сформулировать этот постулат следующим образом (**проекционный постулат Дирака-фон Неймана**):

Постулат N4': Пусть **ДО** измерения микросистема находилась в смешанном состоянии $\hat{\rho}$. Если измерение наблюдаемой A дало значение $a_{n'}$, то следует полагать, что сразу после измерения квантовая система перешла в состояние

$$\hat{\rho}_{n'}^{(A)} = \frac{\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\,\hat{P}_{n'}^{(A)}}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\right)}.$$

Вероятность измерить значение $a_{n'}$ в состоянии $\hat{\rho}$ задается величиной **"fidelyty"**:

$$w_{n'} = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{n'}^{(A)}\,\hat{\rho}\right).$$

Note: заметим, что так сформулированные проекционные постулаты Борна и Дирака-фон Неймана автоматически решают **вопрос о приготовлении микросистемы** в заданном квантовом состоянии при помощи макроскопических приборов

Постулат о среднем значении операторов

Если продолжать последовательно строить аксиоматику квантовой теории в терминах матрицы плотности, то необходимо сформулировать постулат для вычисления средних значений наблюдаемых. Очевидно, что в качестве этого постулата следует использовать свойство д) матрицы плотности, которое выше было выведено при помощи аксиоматики квантовой механики в терминах векторов состояния.

Постулат N5': любая микросистема обладает хотя бы одной наблюдаемой. В квантовой теории любой наблюдаемой A ставится в соответствие эрмитов оператор $\hat{A}$ так, что среднее значение этой наблюдаемой в состоянии микросистемы, которое описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, вычисляется по формуле:

$$\langle A \rangle_{\rho} = \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}\,\hat{A}\right).$$

Заметим, что в формулировке данной аксиомы как самоочевидное предполагалось, что микросистему характеризуют только средние значения наблюдаемых.

Модель измерения по фон Нейману

Проекционные постулаты Борна и Дирака-фон Неймана выражают вероятности измерения через коэффициенты разложения волновой функции или след матрицы плотности микросистемы. Но измерения проводятся при помощи макроприборов. И информацию о микросистеме экспериментатору передает макроприбор. Как связаны между собой вероятности, полученные на основе описания микросистемы, и вероятности, которые измеряет макроприбор?

Ясно, что для ответа на этот вопрос необходимо привлечь какую-нибудь модель измерения. Одну из таких моделей предложил фон Нейман. Изучим эту модель подробно.

Рассмотрим квантовую микросистему (обозначим "Q") и измерительный макроприбор (обозначим "D"). До начала измерения квантовая микросистема находится в состоянии, описываемом матрицей плотности

$$\hat{\rho}_Q^{(in)} = \sum_\ell W_\ell \, \hat{\rho}_{Q_\ell},$$

где $\hat{\rho}_{Q_\ell} = |\, Q_\ell \,\rangle \langle\, Q_\ell \,|$ – проекторы на чистые состояния, $\hat{\rho}^2_{Q_\ell} = \hat{\rho}_{Q_\ell}$.

Очевидно, что до начала измерения макроприбор не должен ничего показывать. Поскольку любой макроприбор состоит из атомов и молекул, то логично предположить, что состояние макроприбора тоже можно описывать при помощи многочастичной матрицы плотности. Пусть до измерения это была матрица плотности $\hat{\rho}_{D_0}$. Если до начала измерения между микросистемой и макроприбором не происходило никаких взаимодействий, то начальную матрицу плотности всей системы можно написать в факторизованном виде:

$$\hat{\rho}^{(in)} = \hat{\rho}_Q^{(in)}\, \hat{\rho}_{D_0}.$$

Процесс измерения по фон Нейману представляет собой запутывание состояний микросистемы и макроприбора в результате взаимодействия. Тогда после измерения матрица плотности всей системы становится равной

$$\hat{\rho}^{(out)} = W_0\, \hat{\rho}^{(in)} + \sum_{\ell} W_\ell\, \hat{\rho}_\ell.$$

Если измерение однозначно, то есть каждому измеренному состоянию микросистемы соответствует только одно состояние макроприбора и наоборот, то матрицы плотности $\hat{\rho}_\ell$ должны быть устроены следующим образом:

$$\hat{P}_{D_\ell}\hat{\rho}_{\ell'}\hat{P}_{D_\ell} = \delta_{\ell\,\ell'}\hat{\rho}_\ell \ \ \Rightarrow \ \ \hat{P}_{D_\ell}\hat{\rho}^{(out)}\hat{P}_{D_\ell} = W_\ell\,\hat{\rho}_\ell, \ \ D_\ell \neq D_0$$

и аналогично

$$\hat{\rho}_{Q_\ell}\hat{\rho}_{\ell'}\hat{\rho}_{Q_\ell} = \delta_{\ell\,\ell'}\hat{\rho}_\ell \ \ \Rightarrow \ \ \hat{\rho}_{Q_\ell}\hat{\rho}^{(out)}\hat{\rho}_{Q_\ell} = W_\ell\,(W_0+1)\ \hat{\rho}_\ell.$$

Из приведенных выше правил имеются простые следствия:

$$\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}^{(out)}\hat{P}_{D_\ell}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{D_\ell}\hat{\rho}^{(out)}\hat{P}_{D_\ell}\right) = W_\ell\,\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_\ell\right) = W_\ell$$

и

$$\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_{Q_{\ell'}}\hat{\rho}_\ell\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_{Q_{\ell'}}\hat{\rho}_\ell\hat{\rho}_{Q_{\ell'}}\right) = \delta_{\ell\,\ell'}\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_\ell\right) = \delta_{\ell\,\ell'}.$$

Тогда по формуле фон Неймана вероятность микросистеме находиться в состоянии $Q_{\ell'}$, если после измерения макроприбор находится в состоянии D_ℓ, равна:

$$w\left(Q_{\ell'}|D_\ell\right) = \frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_{Q_{\ell'}}\hat{P}_{D_\ell}\,\hat{\rho}^{(out)}\,\hat{P}_{D_\ell}\right)}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{D_\ell}\,\hat{\rho}^{(out)}\right)} = \frac{W_\ell\,\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_{Q_{\ell'}}\hat{\rho}_\ell\right)}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{D_\ell}\,\hat{\rho}^{(out)}\right)} = \delta_{\ell\,\ell'}.$$

А вероятность макроприбору находиться в состоянии D_ℓ есть:

$$w_{D_\ell} = \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}^{(out)}\hat{P}_{D_\ell}\right) = W_\ell,$$

то есть равна вероятности состояния Q_ℓ в матрице плотности микросистемы $\hat{\rho}_Q^{(in)}$ **ДО** измерения.

Таким образом, модель измерения по фон Нейману не противоречит аксиомам квантовой механики, является достаточно общей для исследования широкого круга явлений в области измерений и достаточно просто демонстрирует, каким образом внутренние свойства микросистемы связаны с показаниями измеряющих их макроприборов.

Однако эта модель не объясняет, почему состояния микросистемы и макроприбора должны запутываться взаимно однозначно, и не предлагает конкретного механизм такого запутывания.

Локальность нерелятивистской квантовой механики на макроскопическом уровне и теорема Эберхарда

НЕлокальность нерелятивистской квантовой механики (НКМ) НА МИКРОУРОВНЕ прямо заложена в математический аппарат этой теории. То есть, в рамках НКМ любое измеНение подсистемы A приводит к мгновенному изменению подсистемы B, если эти подсистемы находились в запутанном состоянии.

Поясним данное утверждение на простом примере. Пусть подсистемы A и B – это два спина $s^{(A)} = 1/2$ и $s^{(B)} = 1/2$, которые находятся в синглетном белловском состоянии

$$\left|\Psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+\right\rangle^{(A)}\left|-\right\rangle^{(B)} - \left|-\right\rangle^{(A)}\left|+\right\rangle^{(B)}\right).$$

Матрица плотности всей системы $\hat{\rho} = \left|\Psi^-\right\rangle\left\langle\Psi^-\right|$. Как было показано в параграфе "Квантовое происхождение вероятностей W_ℓ", в этом случае матрица плотности подсистемы A может быть записана в виде $\hat{\rho}^{(A)} = \hat{1}/2$. Пусть теперь в подсистеме B измерено значение спина $s_z^{(B)} = +1/2$. Тогда согласно проекционному постулату Дирака – фон Немана матрица плотности подсистемы A будет иметь вид:

$$\hat{\rho}^{(A)} = \mathbf{Tr}_B\left(\frac{\hat{P}_+^{(B)}\hat{\rho}\,\hat{P}_+^{(B)}}{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}_+^{(B)}\hat{\rho}\right)}\right) = \hat{P}_-^{(A)},$$

где $\hat{P}_{\pm}^{(\alpha)} = |\pm\rangle^{(\alpha)}\langle\pm|^{(\alpha)}$ – соответствующие проекционные операторы и $\alpha = \{A, B\}$ – индекс подсистем.

Согласно формуле фон Неймана условная вероятность измерить значение $s_z^{(A)} = +1/2$ для подсистемы A в то время как в подсистеме B было измерено значение $s_z^{(B)} = +1/2$ равна:

$$w\left(+^{(A)}\middle|+^{(B)}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{+}^{(A)}\hat{\rho}^{(A)}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{+}^{(A)}\hat{P}_{-}^{(A)}\right) = 0.$$

Аналогичная условная вероятность для $s_z^{(A)} = -1/2$ и $s_z^{(B)} = +1/2$ есть

$$w\left(-^{(A)}\middle|+^{(B)}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{-}^{(A)}\hat{\rho}^{(A)}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_{-}^{(A)}\hat{P}_{-}^{(A)}\right) = 1.$$

При этом изменения в подсистеме A от $\hat{\rho}^{(A)} = \hat{1}/2$ к $\hat{\rho}^{(A)} = \hat{P}_{-}^{(A)}$ происходят мгновенно "сразу после" изменений в подсистеме B.

Однако мы знаем, что результат любого измеНения квантовой системы должен быть зарегистрирован макроскопическим прибором. Только путем измеРения наблюдатель может узнать о произошедшем измеНении состояния микросистемы. Поэтому возникает естественный вопрос: распространяется ли микроскопическая нелокальность НКМ на показания макроприборов?

Отрицательный ответ на поставленный выше вопрос дает теорема Эберхарда (Eberhard, P.H., "Bell's theorem and the different concepts of nonlocality", Nuovo Cimento 46B, 392-419 (1978)).

Пусть имеется квантовая система, которая описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$. И пусть эта система состоит из двух подсистем A и B. Теорема Эберхарда гласит, что никакое измерение наблюдаемых, связанных только с подсистемой A, не влияет на результат измерения любых наблюдаемых, которые связаны только с подсистемой B.

Предположим, что в подсистеме A имеется наблюдаемая F_A с дискретным спектром $f_i^{(A)}$, которая измеряется макроприбором D_A. Макроприбор обладает набором макроскопически различных состояний $D_\alpha^{(A)}$. Для подсистемы B аналогично введем наблюдаемую G_B с дискретным спектром $g_j^{(B)}$, и измерительный макроприбор D_B, у которого имеется набор макроскопически различных состояний $D_\beta^{(B)}$.

Тогда для теоремы Эберхарда можно дать еще одну эквивалентную формулировку: НКМ запрещает нелокальные корреляции между состояниями макроприборов $D_\alpha^{(A)}$ и $D_\beta^{(B)}$.

На математическом языке последняя формулировка означает, что

$$\sum_j w\left(f_i^{(A)},\, D_\alpha^{(A)} \middle| g_j^{(B)},\, D_\beta^{(B)}\right) = w\left(f_i^{(A)},\, D_\alpha^{(A)}\right),$$

и

$$\sum_i w\left(f_i^{(A)},\, D_\alpha^{(A)} \middle| g_j^{(B)},\, D_\beta^{(B)}\right) = w\left(g_j^{(B)},\, D_\beta^{(B)}\right),$$

где $w(x|y)$ – условная вероятность произойти событию x, если событие y уже произошло. Особенностью этих формул является то, что впервой после суммирования по j пропадает зависимость от $D_\beta^{(B)}$. А во второй после суммирования по i уходит зависимость от $D_\alpha^{(A)}$. Абсолютно нетривиальный результат!

Если бы локальность на **макроуровне** была бы нарушена, то изменяя, например, состояние макроприбора $D_\beta^{(B)}$, мы могли бы мгновенно влиять на результат измерения в подсистеме A и, тем самым, передавать информацию быстрее скорости света.

В принципе, нарушение локальности НКМ на **макроуровне** нас совсем не удивило бы, поскольку мы рассматриваем нерелятивистскую теорию, в которой $c = +\infty$. Более того, такой результат был бы ожидаем. Тем интереснее, что именно на **макроуровне имеет место локальности НКМ**!

Докажем это утверждение наконец. Сначала выполним измерение наблюдаемой F_A подсистемы A. Вероятность того, что значение F_A будет равно $f_i^{(A)}$ при условии, что мы наблюдаем макроприбор D_A в состоянии $D_\alpha^{(A)}$, задается формулой

$$w(f_i^{(A)}|D_\alpha^{(A)}) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(A)}_{f_i\,D_\alpha}\,\hat{\rho}\right),$$

где $\hat{P}^{(A)}_{f_i\,D_\alpha} = \left| f_i^{(A)},\, D_\alpha^{(A)} \right\rangle \left\langle f_i^{(A)},\, D_\alpha^{(A)} \right|$ – проектор на состояние $\left| f_i^{(A)},\, D_\alpha^{(A)} \right\rangle$. После проведения измерения наблюдаемой F_A, согласно постулату Дирака – фон Неймана матрицу плотности квантовой можно записать в следующем виде:

$$\hat{\rho}^{(out)} = \frac{\hat{P}^{(A)}_{f_i\,D_\alpha}\ \hat{\rho}\ \hat{P}^{(A)}_{f_i\,D_\alpha}}{w(f_i^{(A)}|D_\alpha^{(A)})}.$$

Затем выполним измерение наблюдаемой G_B в подсистеме B. Вероятность того, будет получено значение $g_j^{(B)}$ при условии, что макроприбор D_B наблюдается нами в состоянии $D_\beta^{(B)}$, задается формулой фон Неймана:

$$w(g_j^{(B)}|f_i^{(A)}, D_\alpha^{(A)}, D_\beta^{(B)}) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{g_j D_\beta}\,\hat{\rho}^{(out)}\right) = \frac{\mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{g_j D_\beta}\ \hat{P}^{(A)}_{f_i\,D_\alpha}\ \hat{\rho}\ \hat{P}^{(A)}_{f_i\,D_\alpha}\right)}{w(f_i^{(A)}|D_\alpha^{(A)})},$$

где проектор $\hat{P}^{(B)}_{g_j\,D_\beta} = \left| g_j^{(B)},\, D_\beta^{(B)} \right\rangle \left\langle g_j^{(B)},\, D_\beta^{(B)} \right|$.

Тогда совместная вероятность измерения $f_i^{(A)}$ и $g_j^{(B)}$ при условии, что макроприборы D_A и D_B будут находится в состояниях $D_\alpha^{(A)}$ и $D_\beta^{(B)}$ соответственно, равна:

$$w(g_j^{(B)}, f_i^{(A)} | D_\alpha^{(A)}, D_\beta^{(B)}) = w(f_i^{(A)} | D_\alpha^{(A)}) w(g_j^{(B)} | f_i^{(A)}, D_\alpha^{(A)}, D_\beta^{(B)}) =$$

$$= \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta} \; \hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha} \; \hat{\rho} \; \hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha} \right).$$

Эту формулу можно упростить. Проекторы $\hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha}$ и $\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta}$ действуют в разных гильбертовых пространствах. Поэтому они должны коммутировать между собой. Принимая во внимание цикличность следа и условие $\hat{P}^{(A)\,2}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha} = \hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha}$, для искомой вероятности окончательно находим:

$$w(g_j^{(B)}, f_i^{(A)} | D_\alpha^{(A)}, D_\beta^{(B)}) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta} \; \hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha} \; \hat{\rho} \right).$$

Структура данной формулы прозрачна. Мы получили fidelity матрицы плотности $\hat{\rho}$ и факторизованной матрицы плотности $\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta} \; \hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha}$ двух квантовых подсистем, которые находятся в состояниях $\left| g_j^{(B)}, \, D_\beta^{(B)} \right\rangle$ и $\left| f_i^{(A)}, \, D_\alpha^{(A)} \right\rangle$ соответственно.

Поскольку при измерении наблюдаемой G_B мы не интересуемся, в каком состоянии будет находиться подсистема A , то просуммировав по всем возможным состояниям наблюдаемой F_A находим вероятность измерения значения $g_j^{(B)}$ наблюдаемой G_B при условии, что макроприбор D_B находится в состоянии $D_\beta^{(B)}$. Таким образом:

$$w(g_j^{(B)}|D_\beta^{(B)}) = \sum_i w(g_j^{(B)}, f_i^{(A)}|D_\alpha^{(A)}, D_\beta^{(B)}) = \sum_i \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta}\hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha}\hat{\rho}\right) =$$

$$= \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta}\left(\sum_i \hat{P}^{(A)}_{\boldsymbol{f_i} D_\alpha}\right)\hat{\rho}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta}\ \hat{1}\ \hat{\rho}\right) = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}^{(B)}_{\boldsymbol{g_j} D_\beta}\ \hat{\rho}\right),$$

где в первом равенстве второй строчки были использованы предположение фон Неймана об однозначности измерения свойств микросистемы при помощи макроприборов и условие полноты для проекционных операторов подсистемы A. Из полученной формулы видно, что $w(g_j^{(B)}|D_\beta^{(B)})$ НЕ ЗАВИСИТ от состояния макроприбора D_A, который производит измерения в подсистеме A. Теорема доказана.

Суперпозиция или смесь!

Для упрощения задачи рассмотрим квантовую систему, которую можно описать только при помощи двух векторов состояния $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$. Чтобы не отвлекаться на второстепенные усложнения дополнительно потребуем ортогональности этих состояний, то есть, чтобы $\langle\,\psi_i\,|\,\psi_j\,\rangle = \delta_{ij}$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Если квантовая система находится в смешанном состоянии, то ее матрица плотности $\hat{\rho}$ по определению выражается через матрицы плотности $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ чистых состояний $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$ следующим образом:

$$\hat{\rho} = W_1\,\hat{\rho}_1 + W_2\,\hat{\rho}_2 = W_1\,|\,\psi_1\,\rangle\langle\,\psi_1\,| + W_2\,|\,\psi_2\,\rangle\langle\,\psi_2\,|.$$

При этом НЕ существует вектора $|\,\psi\,\rangle$ такого, что $\hat{\rho} = |\,\psi\,\rangle\langle\,\psi\,|$. Обычно о такой сумме говорят как о смеси чистых состояний $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$.

Теперь предположим, что микросистема находится в чистом состоянии, которое является суперпозицией $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$, то есть:

$$|\,\psi\,\rangle = \sqrt{W_1}\,|\,\psi_1\,\rangle + \sqrt{W_2}e^{i\varphi}\,|\,\psi_2\,\rangle.$$

Вопрос: как связаны между собой в этом случае матрицы плотности $\hat{\rho}$, $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$?

Ответ: ясно, что наличие относительной фазы $e^{i\varphi}$ делает эту связь нелинейной. И формула сложения, которая была пригодна для смеси, в случае суперпозиции не работает.

Действуя по определению, получаем:

$$\hat{\rho} = |\,\psi\,\rangle\langle\,\psi\,| = W_1\hat{\rho}_1 + W_2\hat{\rho}_2 + \sqrt{W_1 W_2}\left(|\,\psi_2\,\rangle\langle\,\psi_1\,|\,e^{i\varphi} + |\,\psi_1\,\rangle\langle\,\psi_2\,|\,e^{-i\varphi}\right).$$

Введем новое состояние $|\,\varphi\,\rangle$ такое, что:

$$e^{i\varphi} = \mathcal{A}\,\langle\,\psi_2\,|\,\varphi\,\rangle\langle\,\varphi\,|\,\psi_1\,\rangle = \mathcal{A}\left\langle\,\psi_2\,\middle|\,\hat{P}_\varphi\,\middle|\,\psi_1\,\right\rangle,$$

где $\mathcal{A}$ – нормировочный множитель, $\hat{P}_\varphi = |\,\varphi\,\rangle\langle\,\varphi\,|$ – проектор на состояние $|\,\varphi\,\rangle$. Условие нормировки

$$1 = e^{-i\varphi}e^{i\varphi} = |\mathcal{A}|^2\left\langle\,\psi_1\,\middle|\,\hat{P}_\varphi\,\middle|\,\psi_2\,\right\rangle\left\langle\,\psi_2\,\middle|\,\hat{P}_\varphi\,\middle|\,\psi_1\,\right\rangle =$$
$$= |\mathcal{A}|^2\left\langle\,\psi_1\,\middle|\,\hat{P}_\varphi\hat{\rho}_2\hat{P}_\varphi\,\middle|\,\psi_1\,\right\rangle = |\mathcal{A}|^2\,\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_1\hat{P}_\varphi\hat{\rho}_2\hat{P}_\varphi\right)$$

дает $\mathcal{A} = 1/\sqrt{\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_1 \hat{P}_\varphi \hat{\rho}_2 \hat{P}_\varphi\right)}$. Тогда матрицу плотности $\hat{\rho}s$ окончательно можно представить в виде:

$$\hat{\rho} = W_1 \hat{\rho}_1 + W_2 \hat{\rho}_2 + \sqrt{\frac{W_1 W_2}{\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_1 \hat{P}_\varphi \hat{\rho}_2 \hat{P}_\varphi\right)}} \left(\hat{\rho}_2 \hat{P}_\varphi \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1 \hat{P}_\varphi \hat{\rho}_2\right).$$

Легко проверить, что найденная матрица плотности $\hat{\rho}$ удовлетворяет всем свойствам матрицы плотности для чистых состояний, что естественно, поскольку она получена цепочкой тождественных преобразований из матрицы плотности $|\,\psi\,\rangle\,\langle\,\psi\,|$ чистого состояния.

Таким образом, матрицы плотности для смеси и суперпозиции отличаются интерференционным слагаемым $\sim\ \hat{\rho}_2 \hat{P}_\varphi \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1 \hat{P}_\varphi \hat{\rho}_2$, которое несет информацию об относительной фазе между состояниями $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$. В смеси эта информация потеряна.

От матрицы плотности для суперпозиции можно перейти к матрице плотности для смеси, если провести усреднение по всем возможным относительным фазам φ.

Для усреднения по всем фазам заменим проектор $\hat{P}_\varphi$ на сумму всех возможных проекторов $\sum\limits_k \hat{P}_{\varphi_{\boldsymbol{k}}}$. Тогда формула для матрицы плотности суперпозиции состояний модифицируется следующим образом:

$$\hat{\rho} = W_1\hat{\rho}_1 + W_2\hat{\rho}_2 + \mathbf{const}\left(\hat{\rho}_2\left(\sum_k \hat{P}_{\varphi_{\boldsymbol{k}}}\right)\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1\left(\sum_k \hat{P}_{\varphi_{\boldsymbol{k}}}\right)\hat{\rho}_2\right).$$

Если усреднение происходит по всем возможным фазам, то $\sum\limits_k \hat{P}_{\varphi_{\boldsymbol{k}}} = \hat{1}_\varphi$. В силу ортогональности состояний $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$:

$$\hat{\rho}_2\left(\sum_k \hat{P}_{\varphi_{\boldsymbol{k}}}\right)\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2\hat{1}_\varphi\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2\hat{\rho}_1 = |\,\psi_2\,\rangle\,\langle\,\psi_2\,|\,\ \psi_1\,\rangle\,\langle\,\psi_1\,| = 0.$$

То есть мы показали, что после усреднения по всем возможным относительным фазам φ между чистыми состояниями $|\,\psi_1\,\rangle$ и $|\,\psi_2\,\rangle$ суперпозиция состояний переходит в смесь состояний. Такой процесс называется декогеренцией. Он играет важную роль в теории измерений.

Альтернатива принципу суперпозиции

В своей книге "Принципы квантовой механики" один из создателей квантовой теории П.Дирак прямо утверждает, что именно принцип суперпозиции отличает квантовую физику от классической. В разделе "Постулаты квантовой механики" была дана формулировка принципа суперпозиции для чистых состояний (Постулат N3). В терминах матрицы плотности формулировка эквивалентного принципа будет не столь проста и элегантна.

Постулат N3': Пусть микросистема описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$. И пусть она в результате измерения может переходить в одно из макроскопически различных состояний, каждому из которых можно сопоставить матрицу плотности $\hat{\rho}_i$. Тогда $\hat{\rho}$ можно представить в виде:

$$\hat{\rho} = \sum_i W_i \hat{\rho}_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \sqrt{\frac{W_i W_j}{\mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}_i \hat{P}_{\varphi_{ij}} \hat{\rho}_j \hat{P}_{\varphi_{ij}}\right)}} \left(\hat{\rho}_j \hat{P}_{\varphi_{ij}} \hat{\rho}_i + \hat{\rho}_i \hat{P}_{\varphi_{ij}} \hat{\rho}_j\right).$$

Коэффициент $1/2$ связан с тем, что в сумме по $\{i, j\}$ мы дважды учитываем одни и те же интерференционные вклады.