Часть 8

НЕРАВЕНСТВА БЕЛЛА И КОРРЕЛЯЦИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Одновременная измеримость и неизмеримость

Одним из фундаментальных вопросов квантовой физики является вопрос о том, в какой степени физические свойства микрообъектов определяются процедурой измерения и конструкцией макроприборов, использующихся в эксперименте?

Согласно Копенгагенской интерпретации квантовой механики, не имеет смысла говорить о свойствах микрообъекта без конкретизации, при помощи какого макроприбора эти свойства будут измерены. Сторонники данной интерпретации считают, что максимально доступная информация о физических свойствах микросистемы определяется набором физических характеристик, которые измеряются при помощи макроприбора одного типа. На языке квантовой механики это означает, что макроприбор раскладывает вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ любой микросистемы в суперпозицию макроскопически различимых состояний $|\,i\,\rangle$:

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_i C_i\,|\,i\,\rangle.$$

В рассматриваемом случае макроскопическая различимость эквивалентна ортогональности, то есть $\langle\, i\,|\; i'\,\rangle = \delta_{i\,i'}$.

Вектора $|\, i \,\rangle$ должны быть ОБЩИМИ собственными векторами операторов $\hat{F}_A$, $\hat{G}_B$ и т.д. одновременно измеримых характеристик F_A, G_B и т.д рассматриваемой микросистемы, что ведет к условию $\left[\hat{F}_A, \hat{G}_B\right] = 0$. Соответственно, если операторы между собой не коммутируют, то они не имеют общей системы собственных векторов и не могут быть одновременно измерены с нулевой дисперсией макроприбором одного типа.

Напомним, что наблюдаемые F_A и F'_A, квантовомеханические операторы которых не коммутируют, могут быть измерены одновременно, но точности их измерения (дисперсии) ΔF_A и $\Delta F'_A$ подчиняются соотношению неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta F_A \, \Delta F'_A \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Например, в пузырьковой камере можно видеть трек заряженной частицы и то, как этот трек изгибается в магнитном поле. По кривизне трека легко измерить импульс частицы. Однако, произведение ширины трека Δx и разрешения по импульсу Δp для всех реальных пузырьковых камер на много порядков превосходят величину $\hbar/2$.

Везде ниже, когда мы будем говорить об одновременно измеримых величинах, всегда будем полагать, что измерения производятся с нулевой дисперсией для каждой из наблюдаемых.

В квантовой теории легко предъявить некоммутирующие между собой операторы, отвечающие физическим характеристикам одной микросистемы . Например, это могут быть операторы проекций спина $s = 1/2$ на непараллельные направления.

Напомним, что в нерелятивистском случае оператор спина $s = 1/2$ можно записать в виде вектора $\hat{\vec{s}} = \vec{\sigma}/2$, декартовы компоненты которого не коммутируют между собой:

$$\left[\hat{s}^i, \hat{s}^j\right] = i\,\varepsilon^{ijk}\,\hat{s}^k, \text{ или } \left[\sigma^i, \sigma^j\right] = 2\,i\,\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ где } \varepsilon^{123} = +1$$

и σ^i – матрицы Паули, ε^{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Операторы $\hat{s}^i$ не обладают общей системой собственных векторов, что, с точки зрения Копенгагенской интерпретации, эквивалентно невозможности одновременного точного измерения определенного значения проекций спина $s = 1/2$ на ЛЮБЫЕ два и более непараллельных направления при помощи одного макроприбора.

Понятие об элементах физической реальности

По-видимому, в статье A.Einstein, B.Podolsky, and N.Rosen "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev.47, p.777 (1935) был впервые поставлен вопрос о том, могут ли характеристики микросистемы, которые в квантовой теории описываются некоммутирующими операторами, существовать одновременно ("быть одновременно элементами физической реальности" по А.Эйнштейну), даже если эти характеристики невозможно совместно измерить ни одним известным макроприбором?

Предположим, что все используемые нами макроприборы чрезвычайно "грубы" для исследования микромира. Эта "грубость" может проявляться, например, в том, что микрочастицы обладают некоторыми свойствами (квантовыми числами) λ_i, которые ПРИНЦИПИАЛЬНО НЕИЗМЕРИМЫ при помощи любых макроприборов (например, в силу ограничений, накладываемых соотношением неопределенностей). Но если бы мы каким-либо образом узнали свойства λ_i, то смогли бы ТОЧНО ПРЕДСКАЗАТЬ результаты каждого эксперимента с любой микросистемой и значения всех ее физических характеристик.

Поскольку параметры λ_i неизвестны, то по ним приходится усреднять. Такое усреднение вполне может являются причиной вероятностных предсказаний квантовой теории и невозможности одновременного измерения некоторых физических характеристик. То есть не исключено, что квантовая механика – это не фундаментальная теория, а некая "термодинамика" взаимодействия "грубых" макроприборов с микромиром, которая просто фиксирует и удачно описывает сложившееся положение вещей.

Приведенные выше рассуждения носят название концепции скрытых параметров. И это не единственная попытка "улучшить" квантовую теорию, то есть сделать ее более похожей на понятную классическую физику. Причем в каждом подобном "улучшении" поднимается вопрос об одновременном существовании наблюдаемых, отвечающих некоммутирующим операторам.

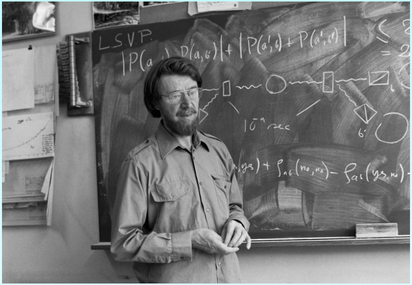
На первый взгляд может показаться, что экспериментального ответа на данный вопрос не существует. Действительно, как можно узнать о существовании того, что нельзя измерить ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ? Поэтому долгое время рассуждения об элементах физической реальности считались уделом философов и городских сумасшедших, а не серьезных ученых.

Неравенств Белла. Историческая справка

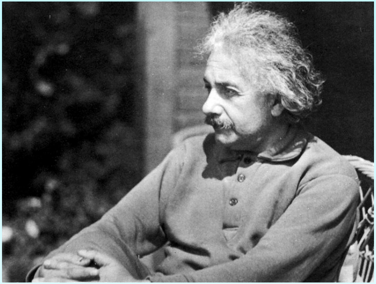
Первая удачная попытка перевести вопрос о совместном существовании элементов физической реальности, соответствующих одновременно неизмеримым величинам, из области умозрительных рассуждений в экспериментальную плоскость была предпринята Дж.Беллом в двух работах 1964-ого и 1966-ого годов (J.S.Bell, "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", Physics 1, p.195 (1964) и J.S.Bell, "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. 38, p.447 (1966)).

В дальнейшем идеи Дж.Белла были развиты Клаузером, Хорном, Шимони и Хольтом в работе J.F.Clauser, M.A.Horne, A.Shimony and R.A.Holt, "Proposed experiment to test local hidden variable theories", Phys. Rev. Lett. 23, p.880 (1969). (так называемые CHSH-неравенства). Обычно именно эти неравенства называют неравенствами Белла, хотя сам Дж.Белл не имел к их выводу прямого отношения.

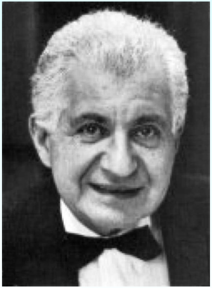
Ниже мы приведем два различных вывода CHSH-неравенства. Затем докажем, что CHSH-неравенства могут нарушаться в квантовой механике. И наконец, используя данное А.Эйнштейном определение элемента физической реальности, покажем, как только при помощи макроприборов можно попытаться экспериментально опровергнуть гипотезу об одновременном существовании элементов физической реальности.



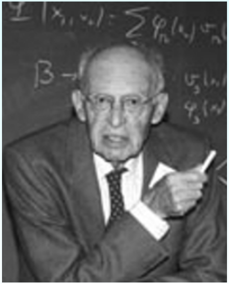
Дж. Белл (1928 – 1990)



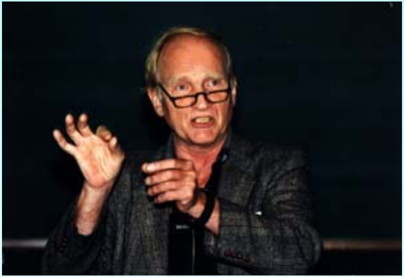
А.Эйнштейн (1879 – 1955)



Б.Подольский (1896 – 1966)



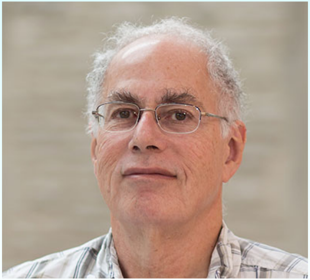
Н.Розен (1909 – 1995)



J.F.Clauser

M.A.Horne

A.Shimony



R.A.Holt

Неравенств Белла. Основная идея

Как записать, что некоторая совокупность физических характеристик микросистемы одновременно является элементом физической реальности, даже если эта совокупность совместно не может быть измерена никаким макроприбором? Хорошая возможность заключается в предположении, что совместная вероятность одновременного существования рассматриваемой совокупности наблюдаемых неотрицательна.

Далее необходимо найти соотношение, которое:

а) **может быть получено из предположения о существовании неотрицательных совместных вероятностей и, возможно, некоторых дополнительных условий, накладываемых на процедуру измерения (обычно требуется локальность);**

б) **может быть вычислено в рамках квантовой теории;**

в) **поддается экспериментальной проверке с помощью макроприборов.**

Предсказания пунктов а) и б) не должны полностью совпадать, чтобы можно было поставить критический эксперимент.

Простой вывод CHSH-неравенства

Пусть имеются подсистемы A и B, которые являются частями некоторой общей системы. Для подсистемы A рассмотрим две наблюдаемые F_A и F'_A, относящиеся только к этой системе. Для подсистемы B аналогично определим две наблюдаемые G_B и G'_B, которые относятся только к этой подсистеме.

Дополнительно потребуем, чтобы наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B были дихотомными, то есть, чтобы спектр каждой из наблюдаемых принимал всего два значения ± 1. Очевидно, что дихотомными переменными являются, например, удвоенные проекции спинов электронов или фотонов на любое направление.

Если все четыре наблюдаемые одновременно являются элементами физической реальности, то тогда с неотрицательной вероятностью существуют всевозможные наборы элементов их спектров $\{f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)},\}$, даже если эти наборы невозможно измерить ни одним макроприбором. Составим из этих наборов суммы вида

$$S_{ijkm} = \left({f'}_j^{(A)} + f_i^{(A)}\right) g_k^{(B)} + \left({f'}_j^{(A)} - f_i^{(A)}\right) {g'}_m^{(B)}.$$

Легко проверить, что для любых комбинаций $\{i, j, k, m\} = \{+, -\}$ верно равенство:

$$S_{ijkm} = \pm 2.$$

Зададим выборку из $N \gg 1$ комбинаций. Пусть каждая комбинация S_{ijkm} встречается в этой выборке $N_{ijkm} \gg 1$ раз. Тогда для среднего значения величины S по данной выборке можем записать

$$|\langle S \rangle| = \left| \frac{1}{N} \sum_{i,\,j,\,k,\,m} S_{ijkm} \, N_{ijkm} \right| \leq 2.$$

Данное неравенство можно переписать в эквивалентной форме:

$$|\langle F_A \, G_B \rangle - \langle F_A \, G'_B \rangle + \langle F'_A \, G_B \rangle + \langle F'_A \, G'_B \rangle| \leq 2.$$

Таким образом, если дихотомные наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B одновременно являются элементами физической реальности, то среднее значение величины S для любой выборки **НИКОГДА** не превзойдет по модулю двойки. Это и есть одна из форм **CHSH-неравенства**. Данное предсказание **нужно сравнить** с тем, что можно получить для значения величины $|\langle S \rangle|$ из квантовой механики.

Вывод CHSH-неравенства из условия неотрицательности совместных вероятностей

Предыдущий вывод CHSH-неравенства лишь косвенно использовал предположение о неотрицательности совместных вероятностей совокупности наблюдаемых. Теперь покажем, как это предположение может быть использовано явно.

Пусть для всех наборов $\{f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)},\}$ **четверные совместные вероятности**

$$w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) \geq 0.$$

Элементарно проверить, что любые тройные и двойные совместные вероятности также неотрицательны. Действительно, например

$$w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}\right) = \sum_{m=\pm} w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) \geq 0$$

и

$$w\left(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}\right) = \sum_{j=\pm} w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}\right) \geq 0.$$

Помимо этого совместные вероятности подчиняются естественным условиям нормировки:

$$\sum_{i,\,j,\,k,\,m} w\left(f_i^{(A)},\, {f'}_j^{(A)},\, g_k^{(B)},\, {g'}_m^{(B)}\right) = 1;$$

$$\sum_{i,\,j,\,k} w\left(f_i^{(A)},\, {f'}_j^{(A)},\, g_k^{(B)}\right) = 1; \quad \ldots \quad \textbf{все остальные тройные};$$

и

$$\sum_{i,\,k} w\left(f_i^{(A)},\, g_k^{(B)}\right) = 1; \quad \ldots \quad \textbf{плюс все остальные двойные}$$

и условиям соответствия типа: $w\left(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}\right) \geq w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}\right)$,

$w\left(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) \geq w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right)$ **плюс все аналогичные им.**

Поскольку величины $f_i^{(A)}$, ${f'}_j^{(A)}$, $g_k^{(B)}$ **и** ${g'}_m^{(B)}$ **принимают значения только** ± 1**, то любое суммирование по индексам может быть записано в явной форме следующим образом:**

$$\begin{aligned} w(\ldots, x_\alpha, y_\beta, \ldots) &= \sum_{\ldots\,\ell\,\ldots} w(\ldots, x_\alpha,\, h_\ell,\, y_\beta, \ldots) = \\ &= w(\ldots, x_\alpha,\, +h_\ell,\, y_\beta \ldots) + w(\ldots, x_\alpha,\, -h_\ell,\, y_\beta, \ldots). \end{aligned}$$

Теперь можно начать доказательство. Рассмотрим величину

$$\Lambda\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) = w\left(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}\right) - w\left(f_i^{(A)}, {g'}_m^{(B)}\right) + $$
$$+ w\left({f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}\right) + w\left({f'}_j^{(A)}, {g'}_m^{(B)}\right) - w\left({f'}_j^{(A)}\right) - w\left(g_k^{(B)}\right).$$

Проверим, что эта величина удовлетворяет неравенству

$$-1 \le \Lambda\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) \le 0.$$

I) Начнем с *неположительности* $\Lambda(\ldots)$. Имеем

$$0 \le w\left({f'}_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, -{g'}_m^{(B)}\right) = w\left({f'}_j^{(A)}, -g_k^{(B)}\right) - w\left({f'}_j^{(A)}, -g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) =$$
$$= w\left({f'}_j^{(A)}\right) - w\left({f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}\right) - w\left({f'}_j^{(A)}, {g'}_m^{(B)}\right) + w\left({f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right).$$

Далее

$$w\left({f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) = w\left(f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) + w\left(-f_i^{(A)}, {f'}_j^{(A)}, g_k^{(B)}, {g'}_m^{(B)}\right) \le$$
$$\le w\left(f_i^{(A)}, {g'}_m^{(B)}\right) + w\left(-f_i^{(A)}, g_k^{(B)}\right) = w\left(f_i^{(A)}, {g'}_m^{(B)}\right) + w\left(g_k^{(B)}\right) - w\left(f_i^{(A)}, g_k^{(B)}\right).$$

Подставив последнее неравенство в предпоследнее немедленно получаем утверждение о неположительности $\Lambda(\ldots)$.

II) Теперь докажем, что $\Lambda(\ldots)$ превосходит величину "-1".

$$0 \le w\left(-f'^{(A)}_j, -g^{(B)}_k, -g'^{(B)}_m\right) = w\left(-g^{(B)}_k, -g^{(B)}_k\right) - w\left(f'^{(A)}_j, -g^{(B)}_k, -g'^{(B)}_m\right) =$$

$$= w\left(-g^{(B)}_k\right) - w\left(-g^{(B)}_k, g'^{(B)}_m\right) - w\left(f'^{(A)}_j, -g^{(B)}_k, -g'^{(B)}_m\right) =$$

$$= 1 - w\left(g^{(B)}_k\right) - w\left(g'^{(B)}_m\right) + w\left(g^{(B)}_k, g'^{(B)}_m\right) - w\left(f'^{(A)}_j, -g^{(B)}_k, -g'^{(B)}_m\right) =$$

$$\begin{aligned} = \quad & 1 - w\left(f'^{(A)}_j\right) - w\left(g^{(B)}_k\right) - w\left(g'^{(B)}_m\right) + w\left(f'^{(A)}_j, g^{(B)}_k\right) + w\left(f'^{(A)}_j, g'^{(B)}_m\right) + \\ + \quad & w\left(g^{(B)}_k, g'^{(B)}_m\right) - w\left(f'^{(A)}_j, g^{(B)}_k, g'^{(B)}_m\right) = 1 - w\left(f'^{(A)}_j\right) - w\left(g^{(B)}_k\right) + \\ + \quad & w\left(f'^{(A)}_j, g^{(B)}_k\right) + w\left(f'^{(A)}_j, g'^{(B)}_m\right) + \left[w\left(-f'^{(A)}_j, g^{(B)}_k, g'^{(B)}_m\right) - w\left(g'^{(B)}_m\right)\right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством (докажите его самостоятельно)

$$w\left(-f'^{(A)}_j, g^{(B)}_k, g'^{(B)}_m\right) - w\left(g'^{(B)}_m\right) \le w\left(f^{(A)}_i, g^{(B)}_k\right) - w\left(f^{(A)}_i, g'^{(B)}_m\right),$$

тогда

$$\begin{aligned}0 \;&\leq 1 - w\left(f'^{(A)}_j\right) - w\left(g^{(B)}_k\right) + w\left(f'^{(A)}_j, g^{(B)}_k\right) + w\left(f'^{(A)}_j, g'^{(B)}_m\right) + \\ +\;& w\left(f^{(A)}_i, g^{(B)}_k\right) - w\left(f^{(A)}_i, g'^{(B)}_m\right) = 1 + \Lambda\left(f^{(A)}_i,\, f'^{(A)}_j,\, g^{(B)}_k,\, g'^{(B)}_m\right).\end{aligned}$$

Таким образом доказана и вторая часть неравенства.

III) На заключительном этапе доказательства распишем подробно, например, выражение для $\langle\, F_A\, G_B \,\rangle$. Имеем:

$$\begin{aligned}\langle\, F_A\, G_B \,\rangle \;&=\; \sum_{i,\,k} f^{(A)}_i\, g^{(B)}_k\, w\left(f^{(A)}_i, g^{(B)}_k\right) = \\ &=\; w\,(+1,\,+1) + w\,(-1,\,-1) - w\,(+1,\,-1) - w\,(-1,\,+1).\end{aligned}$$

Аналогично можно расписать $\langle\, F_A\, G'_B \,\rangle$, $\langle\, F'_A\, G_B \,\rangle$ и $\langle\, F'_A\, G'_B \,\rangle$. Тогда простыми (но несколько длинными и нудными) алгебраическими преобразованиями находим, что

$$\begin{aligned}&\langle\, F_A\, G_B \,\rangle - \langle\, F_A\, G'_B \,\rangle + \langle\, F'_A\, G_B \,\rangle + \langle\, F'_A\, G'_B \,\rangle = \Lambda\,(+1,\,+1,\,+1\,+1) + \\ &+\Lambda\,(-1,\,-1,\,-1\,-1) - \Lambda\,(+1,\,-1,\,+1\,-1) - \Lambda\,(-1,\,+1,\,-1\,+1).\end{aligned}$$

Поскольку

$$-2 \le \Lambda(+1, +1, +1\ +1) + \Lambda(-1, -1, -1\ -1) \le 0;$$
$$0 \le -\Lambda(+1, -1, +1\ -1) - \Lambda(-1, +1, -1\ +1) \le 2,$$

то

$$|\langle F_A\, G_B \rangle - \langle F_A\, G'_B \rangle + \langle F'_A\, G_B \rangle + \langle F'_A\, G'_B \rangle| \le 2.$$

Таким образом мы получили CHSH-неравенство другим способом. Именно, из условия неотрицательности четверных совместных вероятностей. Заметим, что при доказательстве неявно было также использовано условие отсутствия каких-либо корреляций между наблюдаемыми F_A, F'_A, G_B и G'_B.

Впервые такой вывод CHSH-неравенства был дан в работе W.M. de Muynck, "The Bell inequalities and their irrelevance to the problem of locality in quantum mechanics", Phys. Lett. 114A, p.65 (1986). Более ясный и простой вариант можно найти в статье А.В.Белинского "Неравенства Белла без предположения о локальности", "Успехи физических наук" т.164, N2, стр.231 (1994).

Willem M. de Muynck
Eindhoven University of Technology
Netherlands

А.В.Белинский
МГУ им. М.В.Ломоносова
Россия

Граница Цирельсона

CHSH-неравенство получено в предположении, что наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B одновременно являются элементами физической реальности. Естественно задаться вопросом, может ли (и если может, то при каких условиях) CHSH-неравенство нарушаться в нерелятивистской квантовой механике?

Чтобы ответить на этот вопрос, сопоставим наблюдаемым F_A, F'_A, G_B и G'_B эрмитовы операторы $\hat{F}_A$, $\hat{F}'_A$, $\hat{G}_B$ и $\hat{G}'_B$. Пусть для наблюдаемых, относящихся к одной подсистеме (A или B), эти операторы не коммутируют, то есть

$$\left[\hat{F}_A, \hat{F}'_A\right] \neq 0 \quad \text{и} \quad \left[\hat{G}_B, \hat{G}'_B\right] \neq 0.$$

Согласно теореме Эберхарда о локальности измерений (локальности квантовой теории на уровне макроприборов), можно написать следующие дополнительные коммутационные условия на операторы $\hat{F}_A$, $\hat{F}'_A$, $\hat{G}_B$ и $\hat{G}'_B$:

$$\left[\hat{F}_A, \hat{G}_B\right] = \left[\hat{F}_A, \hat{G}'_B\right] = \left[\hat{F}'_A, \hat{G}_B\right] = \left[\hat{F}'_A, \hat{G}'_B\right] = 0.$$

Тогда, согласно **Копенгагенской интерпретации**, имеет смысл говорить, например, об одновременном существовании наблюдаемых F_A и G_B, но нельзя говорить об одновременном существовании наблюдаемых F_A и F'_A.

Поскольку наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B отвечают дихотомным величинам, то их операторы подчиняются дополнительному условию

$$\hat{F}_A^2 = \hat{F}_A'^{\,2} = \hat{G}_B^2 = \hat{G}_B'^{\,2} = \hat{1}.$$

Определим следующий оператор:

$$\hat{S} = \hat{F}_A \hat{G}_B - \hat{F}_A \hat{G}'_B + \hat{F}'_A \hat{G}_B + \hat{F}'_A \hat{G}'_B.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{2}\right)\hat{1} - \hat{S} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{F}_A^2 + \hat{F}_A'^{\,2} + \hat{G}_B^2 + \hat{G}_B'^{\,2}\right) - \hat{S} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{F}'_A - \frac{\hat{G}_B + \hat{G}'_B}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{F}_A - \frac{\hat{G}_B - \hat{G}'_B}{\sqrt{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

Усредняем это равенство по состоянию $\hat{\rho}$ произвольной микро-системы получаем:

$$0 \le 2\sqrt{2}\,\langle\,\hat{1}\,\rangle_\rho - \langle\,S\,\rangle_\rho = 2\sqrt{2} - \langle\,S\,\rangle_\rho.$$

Таким образом

$$\langle\,S\,\rangle_\rho \le 2\sqrt{2}.$$

Полностью аналогично можно показать, что

$$\langle\,S\,\rangle_\rho \ge -2\sqrt{2}.$$

Объединяя оба неравенство в одно при помощи модуля

$$\Big|\langle\,S\,\rangle_\rho\Big| \le 2\sqrt{2}.$$

приходим к выражению для так называемой границы Цирельсона квантовых корреляций (B.S. Cirel'son, "Quantum generalizations of Bell's inequality", "Letters in Mathematical Physics", Vol.4, p.93 (1980)). Перепишем последнее неравенство в терминах средних для наблюдаемых F_A, F'_A, G_B и G'_B.

Имеем:

$$\left|\langle F_A\, G_B \rangle_\rho - \langle F_A\, G'_B \rangle_\rho + \langle F'_A\, G_B \rangle_\rho + \langle F'_A\, G'_B \rangle_\rho\right| \le 2\sqrt{2}.$$

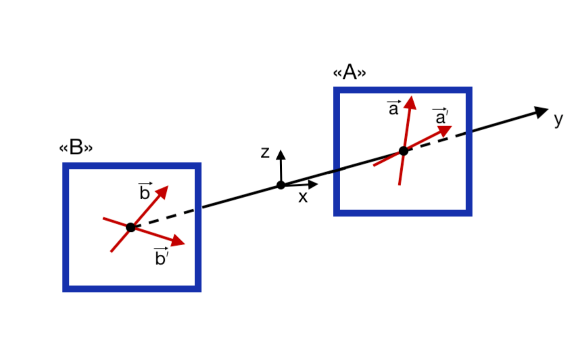
Этот результат надо сравнить с CHSH-неравенством:

$$|\langle F_A\, G_B \rangle - \langle F_A\, G'_B \rangle + \langle F'_A\, G_B \rangle + \langle F'_A\, G'_B \rangle| \le 2.$$

Из сравнения обоих неравенств видно, что принципиально в квантовой теории CHSH-неравенство может нарушаться. Если имеется путь экспериментального подтверждения этого нарушения, то появляется возможность объективной проверки, являются ли наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B одновременно элементами физической реальности, или это не имеет места, как утверждает квантовая механика. Более аккуратно: нарушение CHSH-неравенства может подтвердить правоту квантовой теории. Его выполнение квантовой теории НЕ противоречит.

Остается важный вопрос: существуют ли такие квантовые состояния $|\,\Psi\,\rangle$ или $\hat{\rho}$ и наблюдаемые F_A, F'_A, G_B, G'_B, на которых в реальных экспериментах можно достичь границы Цирельсона?

Запутанные состояния вступают в игру



Рассмотри мысленный эксперимент, в котором подсистема A отвечает фермиону, распространяющемуся вдоль оси "y", подсистема B – фермиону, который двигается против направления оси "y". Наблюдаемые F_A и F_A' соответствуют удвоенным проекциям спина фермиона A на направления $\vec{a}$ и $\vec{a}\,'$. Наблюдаемые G_B и G_B' – удвоенным проекциям спина фермиона B на направления $\vec{b}$ и $\vec{b}\,'$ соответственно. Пусть все четыре направления непараллельны друг другу. Их удобно выбрать лежащими в плоскостях, которые параллельны плоскости (x, z), как это показано на рисунке.

Ответ на вопрос из предыдущего параграфа: для достижения границы Цирельсона в квантовой механике можно использовать белловское состояние

$$\left|\Psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|+\right\rangle^{(A)}\left|-\right\rangle^{(B)} - \left|-\right\rangle^{(A)}\left|+\right\rangle^{(B)}\Big) = $$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{(A)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{(B)} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{(A)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^{(B)}\right).$$

Рассмотрим направление $\vec{a}$, которое задается единичным вектором $\vec{a} = (\sin\theta_a,\, 0,\, \cos\theta_a)$. Тогда оператор $\hat{F}_A$ можно записать как

$$\hat{F}_A = \left(\vec{a}\,\vec{\sigma}^{\,(A)}\right) = \sigma_x^{(A)}\sin\theta_a + \sigma_z^{(A)}\cos\theta_a.$$

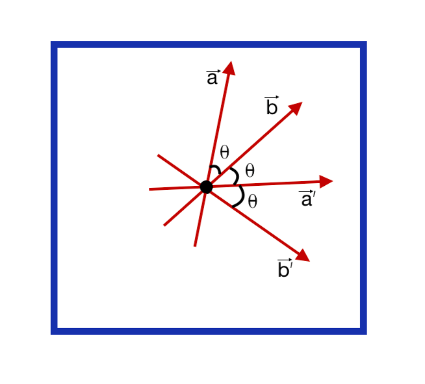
Абсолютно аналогичные формулы имеют место для операторов $\hat{F}'_A$, $\hat{G}_B$ и $\hat{G}'_B$. Тогда

$$\langle\, F_A\, G_B\,\rangle_{\Psi^-} \equiv \left\langle \Psi^- \,\middle|\, \hat{F}_A\,\hat{G}_B \,\middle|\, \Psi^- \right\rangle = -\cos\left(\theta_a - \theta_b\right) = -\cos\theta_{ab}.$$

Не представляет труда вычислить оставшиеся средние, которые входят в CHSH-неравенство.

В итоге

$$|\langle S\rangle_{\Psi^-}| = |\cos\theta_{ab} - \cos\theta_{ab'} + \cos\theta_{a'b} + \cos\theta_{a'b'}|.$$



Максимум $|\langle S\rangle_{\Psi^-}|$ **достигается для углов** $\theta_{ab} = \theta_{ba'} = \theta_{a'b'} = \pi/4$ **и** $\theta_{ab'} = 3\pi/4$**. В этом случае**

$$|\langle S\rangle_{\Psi^-}| = \left|3\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right| = \left|4\cos\frac{\pi}{4}\right| = 2\sqrt{2}$$

попадает на границу Цирельсона и нарушает CHSH-неравенство!

А теперь - пресловутая нелокальность!

Практически общим местом стало утверждение, что нарушение CHSH-неравенств является следствием/доказательством нелокальности квантовой теории. Это не совсем так.

Вспомним, что согласно теореме Эберхарда даже нерелятивистская квантовая механика локальна на уровне макроприборов. Этот факт активно использовался нами при вычислении границы Цирельсона, которая превосходит верхнюю границу для CHSH-неравенства. Поэтому на уровне измерений нарушение CHSH-неравенства никак не связано с нелокальностью.

Однако при выводе CHSH-неравенства использовалось другое предположение: отсутствие корреляций какого угодно рода на микроскопическом уровне между любыми элементами и наборами элементов спектров всех четырех рассматриваемых наблюдаемых. Это допущение как раз и позволяет нам вводить независимые вероятности, суммировать их, пользоваться условиями нормировки и соответствия. Но условие независимости на микроуровне прямо нарушается в НКМ!

Действительно, во-первых, белловское состояние $|\Psi^-\rangle$ дает абсолютную (анти)корреляцию по проекциям спинов фермионов A и B на любое направление. Поэтому данные проекции и соответствующие им элементы спектров рассматриваемых наблюдаемых независимыми считать нельзя.

Во-вторых, вероятности некоторых совместных распределений, вычисленные в НКМ по состоянию $|\Psi^-\rangle$ оказываются отрицательными при углах, которые обеспечивают максимальное нарушение CHSH-неравенства. Например

$$w(f_+^{(A)}, f'^{(A)}_-, g'^{(B)}_-) = \left\langle \Psi^- \middle| \hat{P}_{\vec{a}}^{(+)} \hat{P}_{\vec{a}'}^{(-)} \hat{P}_{\vec{b}'}^{(-)} \middle| \Psi^- \right\rangle = \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) \leq 0,$$

где $\hat{P}_{\vec{n}}^{(\pm)}$ – проекторы на состояния с проекцией спина $\pm 1/2$ на направление $\vec{n}$. Этот результат и аналогичные ему косвенно задают корреляции и ограничения для наборов значений спектров наблюдаемых F_A, F'_A, G_B и G'_B.

Тем не менее, при наличии запутанности нелокальность НКМ на микроуровне не только можно, но и нужно рассматривать как основной (но не единственный!) источник корреляций и, следовательно, причину нарушения CHSH-неравенства.

Так о чем же тогда говорит нам нарушение CHSH-неравенств в НКМ? О том, что

а) **хотя наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B одновременно являются элементами физической реальности, но на микроуровне имеются корреляции между этими наблюдаемыми, которые и нарушают CHSH-неравенства;**

б) **наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B одновременно НЕ являются элементами физической реальности и дополнительно имеются корреляции между наблюдаемыми на микроуровне; оба условия нарушают CHSH-неравенства;**

в) **наблюдаемые F_A, F'_A, G_B и G'_B одновременно НЕ являются элементами физической реальности, но при этом корреляции между наблюдаемыми отсутствуют. Тогда первое условие должно нарушать CHSH-неравенство.**

Чтобы делать уверенные суждения только о возможности одновременного существования/несуществования элементов физической реальности, следует избавиться от источников потенциальных корреляций. Скажем, от нелокальности можно избавится перейдя к квантовой теории поля (КТП), которая локальна по построению (например, из-за принципа микропричинности Н.Н.Боголюбова).

CHSH-неравенство и сепарабельные состояния

Заметим, что запутанность квантовых состояний (которая является одним из источников корреляций) при нарушении CHSH-неравенства играет ключевую роль. Ниже мы докажем, что сепарабельные состояния вида

$$\hat{\rho} = \sum_{\ell} W_\ell \, \hat{\rho}_\ell^{(A)} \otimes \hat{\rho}_\ell^{(B)}$$

НЕ нарушают CHSH-неравенства даже если

$$\left[\hat{F}_A,\, \hat{F}'_A\right] \neq 0 \quad \text{и} \quad \left[\hat{G}_B,\, \hat{G}'_B\right] \neq 0.$$

Таким образом пункт "в)" из предыдущего слайда можно будет исключить.

Начнем доказательство. Для двойных корреляторов имеем

$$\langle\, F_A \, G_B \,\rangle_\rho \;=\; \mathbf{Tr}\left(\hat{\rho}\, \hat{F}_A\, \hat{G}_B\right) \;=\; \sum_{\ell} W_\ell \, f_\ell^{(A)}\, g_\ell^{(B)},$$

где $f_\ell^{(A)} = \mathbf{Tr}_A\left(\hat{\rho}_\ell^{(A)}\, \hat{F}_A\right)$ **и** $g_\ell^{(B)} = \mathbf{Tr}_B\left(\hat{\rho}_\ell^{(B)}\, \hat{G}_B\right)$**.**

Очевидно, что если операторы $\hat{F}_A$ и $\hat{G}_B$ являются операторами дихотомных наблюдаемых, то $|f_\ell| \leq 1$ и $|g_\ell| \leq 1$. Воспользуемся этим фактом и известным неравенством $|f+g| \leq |f| + |g|$. Тогда

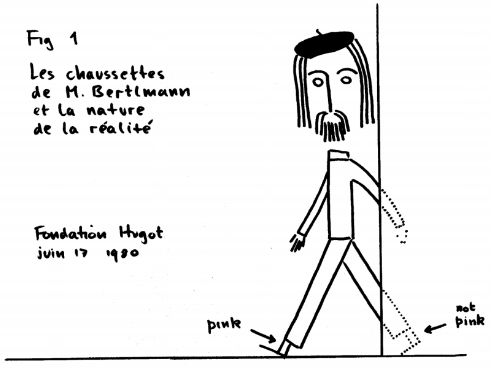
$$\begin{aligned}
\left|\langle\, S\,\rangle_\rho\right| \quad &= \left|\langle\, F_A\, G_B\,\rangle_\rho - \langle\, F_A\, G'_B\,\rangle_\rho + \langle\, F'_A\, G_B\,\rangle_\rho + \langle\, F'_A\, G'_B\,\rangle_\rho\right| = \\
= \quad & \left|\sum_\ell W_\ell \left\{ f_\ell^{(A)} g_\ell^{(B)} \,-\, f_\ell^{(A)} {g'}_\ell^{(B)} \,+\, {f'}_\ell^{(A)} g_\ell^{(B)} \,+\, {f'}_\ell^{(A)} {g'}_\ell^{(B)} \right\}\right| \leq \\
\leq \quad & \sum_\ell W_\ell \left\{ \left| f_\ell^{(A)} g_\ell^{(B)} \,-\, f_\ell^{(A)} {g'}_\ell^{(B)} \right| + \left| {f'}_\ell^{(A)} g_\ell^{(B)} \,+\, {f'}_\ell^{(A)} {g'}_\ell^{(B)} \right| \right\} \leq \\
\leq \quad & \sum_\ell W_\ell \left\{ \left| f_\ell^{(A)} \right| \left| g_\ell^{(B)} \,-\, {g'}_\ell^{(B)} \right| \,+\, \left| {f'}_\ell^{(A)} \right| \left| g_\ell^{(B)} \,+\, {g'}_\ell^{(B)} \right| \right\} \leq \\
\leq \quad & \sum_\ell W_\ell \left\{ \left| g_\ell^{(B)} \,-\, {g'}_\ell^{(B)} \right| \,+\, \left| g_\ell^{(B)} \,+\, {g'}_\ell^{(B)} \right| \right\} \leq 2 \sum_\ell W_\ell = 2.
\end{aligned}$$

Все доказано. Кстати, попутно мы получили еще один критерий сепарабельности, ведь любое запутанное состояние должно нарушать CHSH-неравенство. Это так называемый критерий сепарабельности по Беллу.

Носки профессора Бертлмана, запутанность и CHSH-неравенство

В своем докладе "Bertlmann's socks and the nature of reality" ("Носки Бертлмана и природа реальности"), прочитанном в Колледж де Франс 17 июня 1980 года и опубликованном в книге J.S. Bell, "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics", "Cambridge University Press", Cambridge (1987), Джон Белл приводит красивый пример, который еще раз подчеркивает важность одновременной неизмеримости наблюдаемых характеристик микросистемы для нарушения CHSH-неравенства.

Приведем тут вольный перевод основной идеи статьи: ***"Дилетант, который не утруждал себя изучением квантовой механики, будет совершенно не впечатлен корреляционными свойствами запутанных состояний. Он сразу же укажет на множество примеров аналогичных корреляций, которые можно найти в повседневной жизни. Широко известен случай с носками профессора Бертлмана. Профессор Бертлман всегда носит носки разных цветов. Совершенно невозможно угадать какого цвета будет носок в данный день на данной ноге профессора.***



Но если Вы увидели (см. рисунок), что один носок Бертлмана розового цвета, то можете быть абсолютно уверены, что на другой ноге будет носок нерозового цвета, даже если Вы не видите эту ногу. Таким образом, наблюдение цвета первого носка и знание привычек профессора Бертлмана немедленно дает нам информацию о втором носке. Если не удивляться странному поведению профессора Бертлманна, то в носочной антикорреляции нет никакой тайны. И из этой привычки никак нельзя получить нарушение "носочного CHSH-неравенства".

Носки профессора Рейнхолда Бертлмана

и сам профессор в 2010 году

Очевиден и ответ, почему "носочное CHSH-неравенство" не может быть нарушено. Сколько бы не было разноцветных носков у профессора Бертлмана, их всегда можно сложить в одну общую кучу. А потом эту кучу разделить на любое количество меньших куч. Таким образом все совместные вероятности существования носков разного цвета неотрицательны. А это, как мы видели выше, не может привести к нарушению CHSH-неравенства.

Обратная связь с автором

Мне очень хотелось сделать интересный и современный курс, который бы показал студентам красоту и глубину квантовой теории. Удалось это или нет, судить слушателям и читателям (почти уверен, что курс будет гулять “по интернетам”). Очевидно, что написать столько текста и не сделать ни одной ошибки в формулах или опечатки в словах абсолютно невозможно. Поэтому у меня просьба, если кто найдет ошибку, опечатку или, упаси боже, “дырку” в доказательстве какого-либо утверждения, свяжитесь пожалуйста с автором по e-mail и сообщите ему о своей находке. Вознаграждение не предлагаю. :)

Если у кого-то возникнут пожелания, какие еще интересные вопросы можно было бы включить в курс, я с удовольствием рассмотрю эти предложения (но не обещаю, что приму).

e-mail для связи 679nik@mail.ru, в теме письма просьба указать “Обсуждение лекций по матрице плотности”, чтобы мне было легче находить соответствующие сообщения.

P.S. Работы, опровергающие квантовую физику и теорию относительности, не рассматриваю. Дискуссии на эти темы не веду.