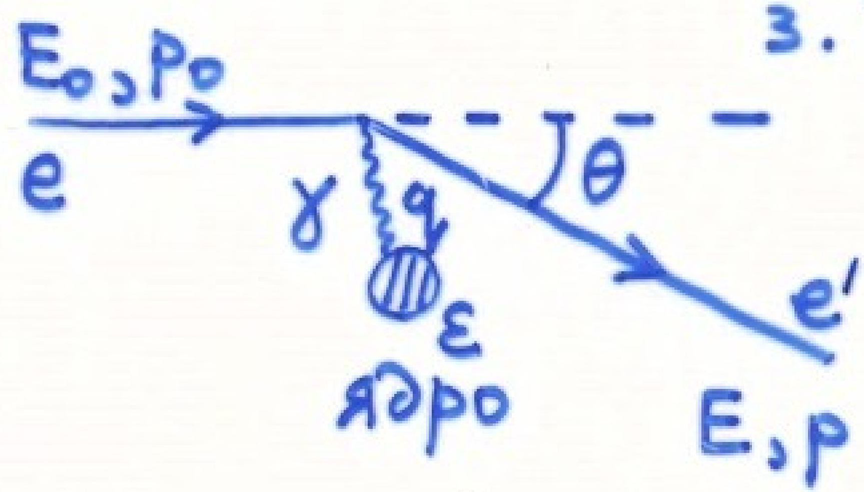
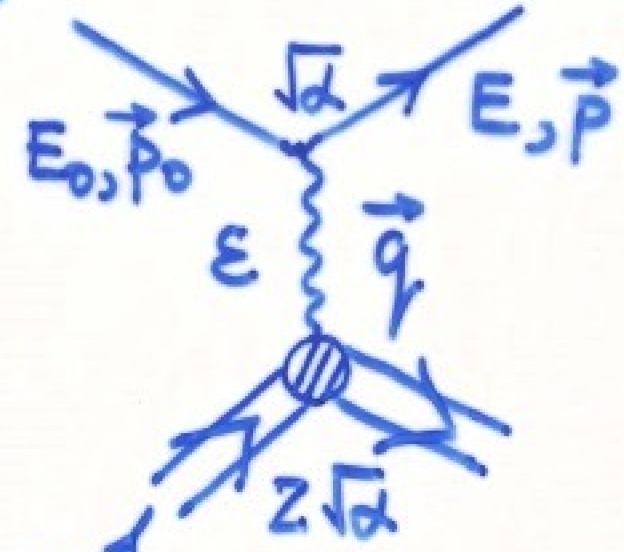
Лекция 12: Рассеяние электронов

Почему электроны?

1. Точечная частица ($< 10^{-17}$ см)
2. Взаимодействие электрослабое
3. Чувствуют всю ядерную материю.

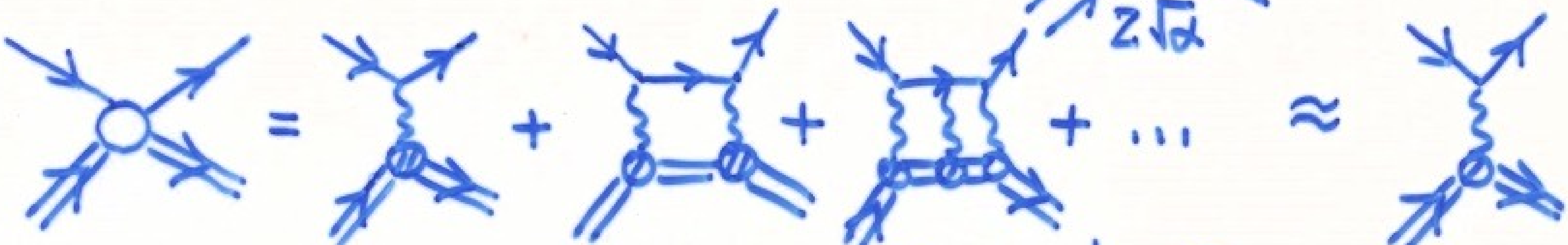




$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$\vec{q} = \vec{p}_0 - \vec{p}$$

$$\varepsilon = E_0 - E$$



Реальный фотон: $q^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} = \frac{(\hbar\omega)^2}{c^2}$ или $q^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = 0$

Виртуальный фотон: $q^2 > \frac{\varepsilon^2}{c^2}$ или $q^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} > 0$

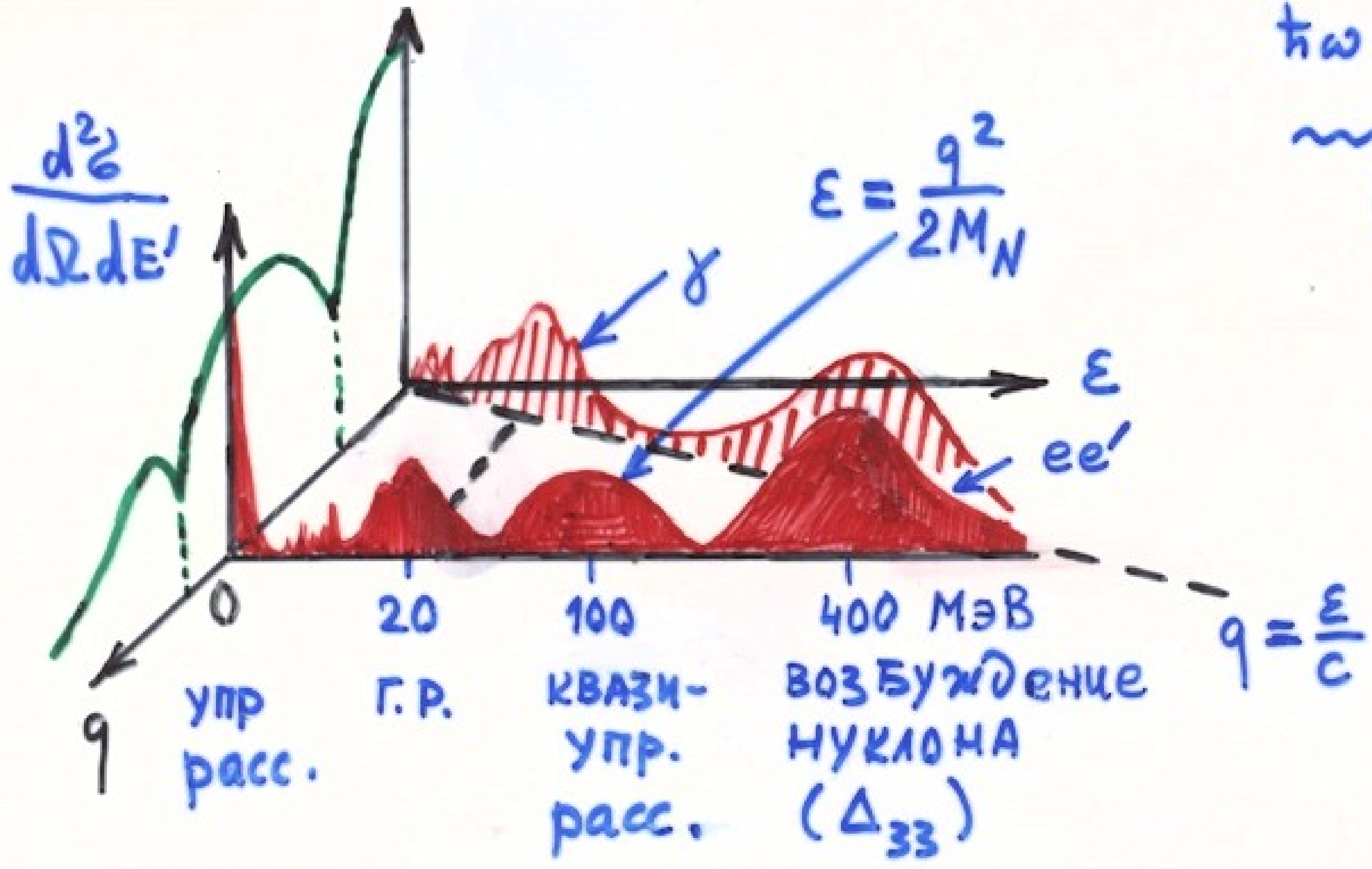
$$q^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos\theta = \frac{1}{c^2}(E_0^2 + E^2 - 2E_0 E \cos\theta)$$

$$q^2 - (E_0 - E)^2/c^2 = 2E_0 E(1-\cos\theta)/c^2 > 0$$

$$q_{min} = \frac{\varepsilon}{c} \quad (\theta = 0^\circ); \qquad q_{max} = \frac{1}{c}(E_0 + E) \text{ при } \theta = 180^\circ$$

$$= \frac{1}{c}(2E_0 - \varepsilon)$$

$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}\right)_{ee'}$
упругое рассеяние
гигантские резонансы
100
200
300
400
МэВ
ε
100
200
300
400
100
200
300
400
500
$\theta = 15^\circ$
$\theta = 30^\circ$
$\theta = 60^\circ$
г. р.
квазиупругое рассеяние
возбуждение нуклона
q
$q = \varepsilon / c$



$\hbar\omega = 100$ МэВ, $P_\gamma = \frac{100\ \text{МэВ}}{c}$

$P_N = \sqrt{2M_N\hbar\omega} \approx 430\ \frac{\text{МэВ}}{c}$

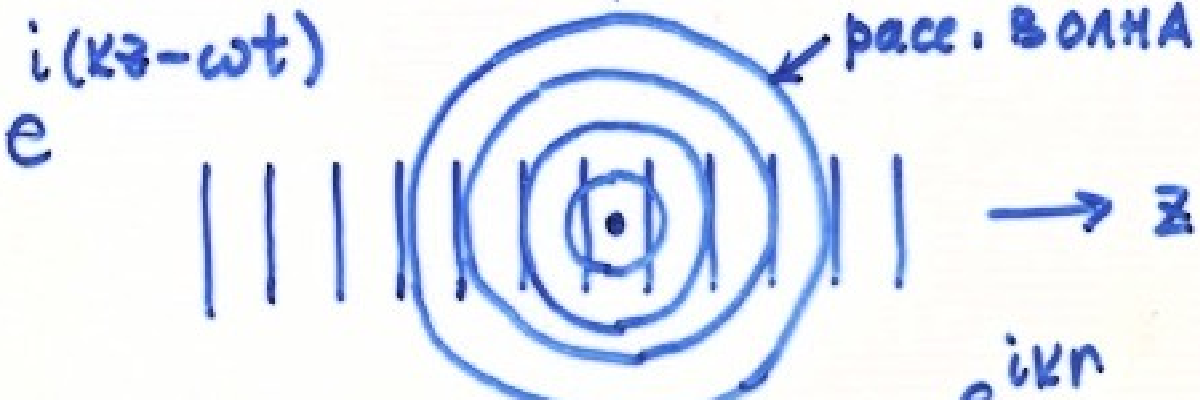
$E_0 = 250$ МэВ, $\varepsilon = 100$ МэВ

$q_{max} = \frac{1}{c}(2\cdot 250 - 100) = 400\ \frac{\text{МэВ}}{c}$

$E_e = 100$ МэВ $\qquad \lambda_e \cong \frac{\hbar c}{E_e} \approx \frac{200\ \text{МэВ}\cdot\text{фм}}{100\ \text{МэВ}} = 2$ фм

Упругое рассеяние

Рассеяние нерел. бесспиновой частицы на потенциале $V(\vec{r})$



$$\Psi = e^{ikz} + \Psi_{расс}$$

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E}$$

$$\Psi_{расс} = f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}\ ; \quad f(\theta,\varphi) \equiv f(\theta)$$ – амплитуда рассеяния

ур. Шр. $$(\nabla^2 + k^2)\Psi = \frac{2\mu}{\hbar^2} V\Psi$$

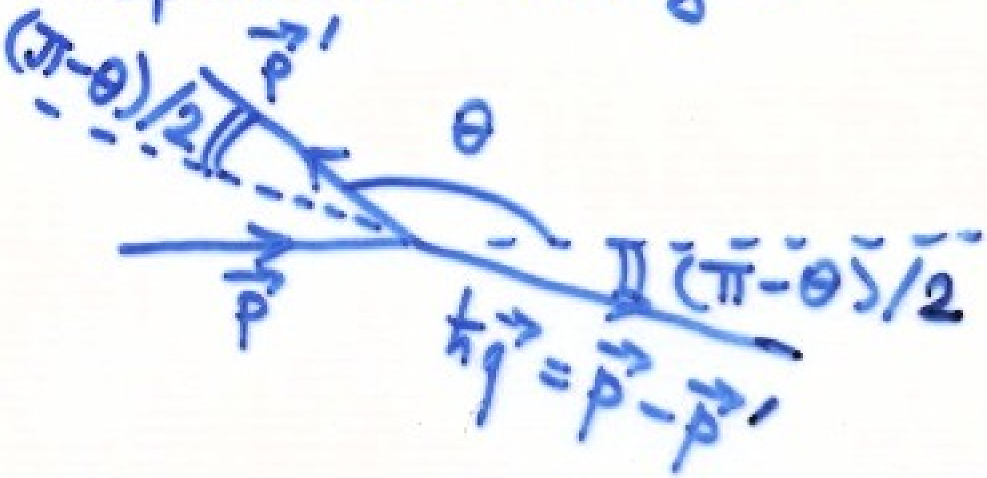
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2}$$

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}'\vec{r}}\, V(\vec{r})\Psi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Борновское приближение: $\Psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} \equiv e^{i\vec{k}\vec{r}}$

тогда (•) $f(\theta,\varphi) \cong -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\, d\vec{r}$, где $\vec{q}\hbar = (\vec{k}-\vec{k}')\hbar$ – переданный импульс.

$q\hbar = 2p\sin\frac{\theta}{2}$ при упругом расс.



итак, $f(\theta,\varphi) = f(\vec{q})$ и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2$$

при $V(\vec{r}) = V(r)$ сферическая симм.

$$f(\theta,\varphi) = f(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{q}\int_0^\infty V(r)\sin qr\cdot r\,dr \quad (*)$$

Формула Резерфорда и Мотта

Рассеяние нерел. точечного бесспинового заряда $Z_1 e$ на бесспиновом ядре с $Z_2 e$

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad \text{и} \quad f(q) = -\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{q^2} \quad (\text{из } *)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез.}} = \frac{4\mu^2 (Z_1 Z_2 e^2)^2}{\hbar^4 q^4} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Рассеяние рел. частицы заряда e со спином $1/2$ на бесспиновом ядре (с.ц.и.)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = \left(\frac{Ze^2}{2E}\right)^2 \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Множитель $\cos^2\frac{\theta}{2}$ – из-за наличия спина

Контуры вывода формулы Мотта: (•) – для бесспиновых частиц

в.ф. электрона $\quad \Psi_\lambda = u_\lambda e^{i(kz-\omega t)}$; $\quad \lambda = 1, 2, 3, 4.$

u_λ – четырехкомпонентный спинор

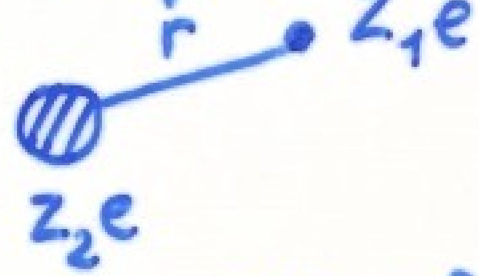
$$f_{fi}(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\,(u_f^* u_i) \int e^{i\vec{q}\vec{r}}\, V(\vec{r})\, d\vec{r} \qquad (**)$$

Амплитуда электронного рассеяния получается для неполяризованного электронного пучка усреднением по возможным направлениям начального спина и суммированием по возм. вариантам конечного спина. С учетом нормировки электронной в.ф. получается формула Мотта

Форм – фактор

Рассмотрим рассеяние точечного заряда $Z_1 e$ неподвижным протяженным бесспиновым зарядом $Z_2 e$

$\int \rho(\vec r)\, d\vec r = Z_2 e$;



При больших r : $V_c(r) = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$.

при любом r : $V(\vec r) = Z_1 e^2 \int \dfrac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\, d\vec r\,'$ и

$$f(\vec q) = -\frac{\mu Z_1 e^2}{2\pi \hbar^2} \iint \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} e^{i\vec q\vec r}\, d\vec r\, d\vec r\,'$$

$$\iint \ldots = \iint \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} e^{i\vec q(\vec r - \vec r\,')} e^{i\vec q\vec r\,'}\, d\vec r\, d\vec r\,' = \int \rho(\vec r\,') e^{i\vec q\vec r\,'}\, d\vec r\,' .$$

$$\cdot \int \frac{e^{i\vec q\vec x}}{|x|}\, d\vec x = \frac{4\pi}{q^2} \int \rho(\vec r) e^{i\vec q\vec r}\, d\vec r$$

зарядовый (или структурный)
Форм-фактор $F(\vec{q})$ определяется как Фурье-образ плотности заряда

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z_2 e}\int_0^\infty \rho(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\, d\vec{r}$$, откуда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез. или Мотт}} \cdot \left|F(\vec{q})\right|^2$$

При $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ $F(\vec{q}) = F(q)$; $F(q=0)=1$, $F(q\neq 0)<1$, $F(q\to\infty)\to 0$.
Необходимо знать $F(q)$ при $0\le q<\infty$, т.е. при всех ε и θ. $F(q)$ неизв. при $0 \leftarrow q \to \infty$

$$\rho(r) = \left(\frac{Z_2 e}{2\pi^2}\right)\frac{1}{r}\int_0^\infty F(q)\sin qr \cdot q\, dq$$

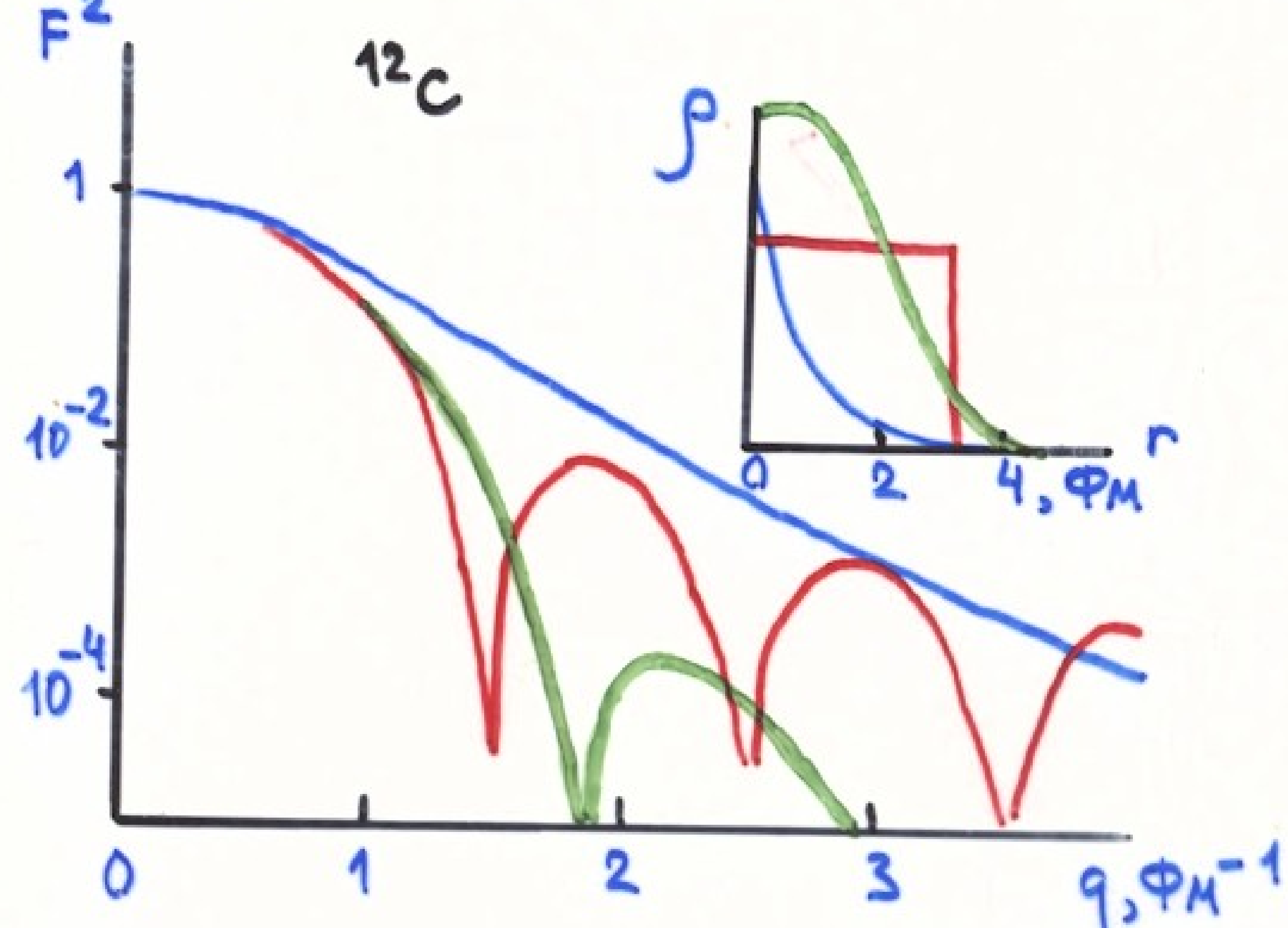
$$F(q) = \frac{4\pi}{Z_2 e}\cdot\frac{1}{q}\int_0^\infty \rho(r)\sin qr \cdot r\, dr$$

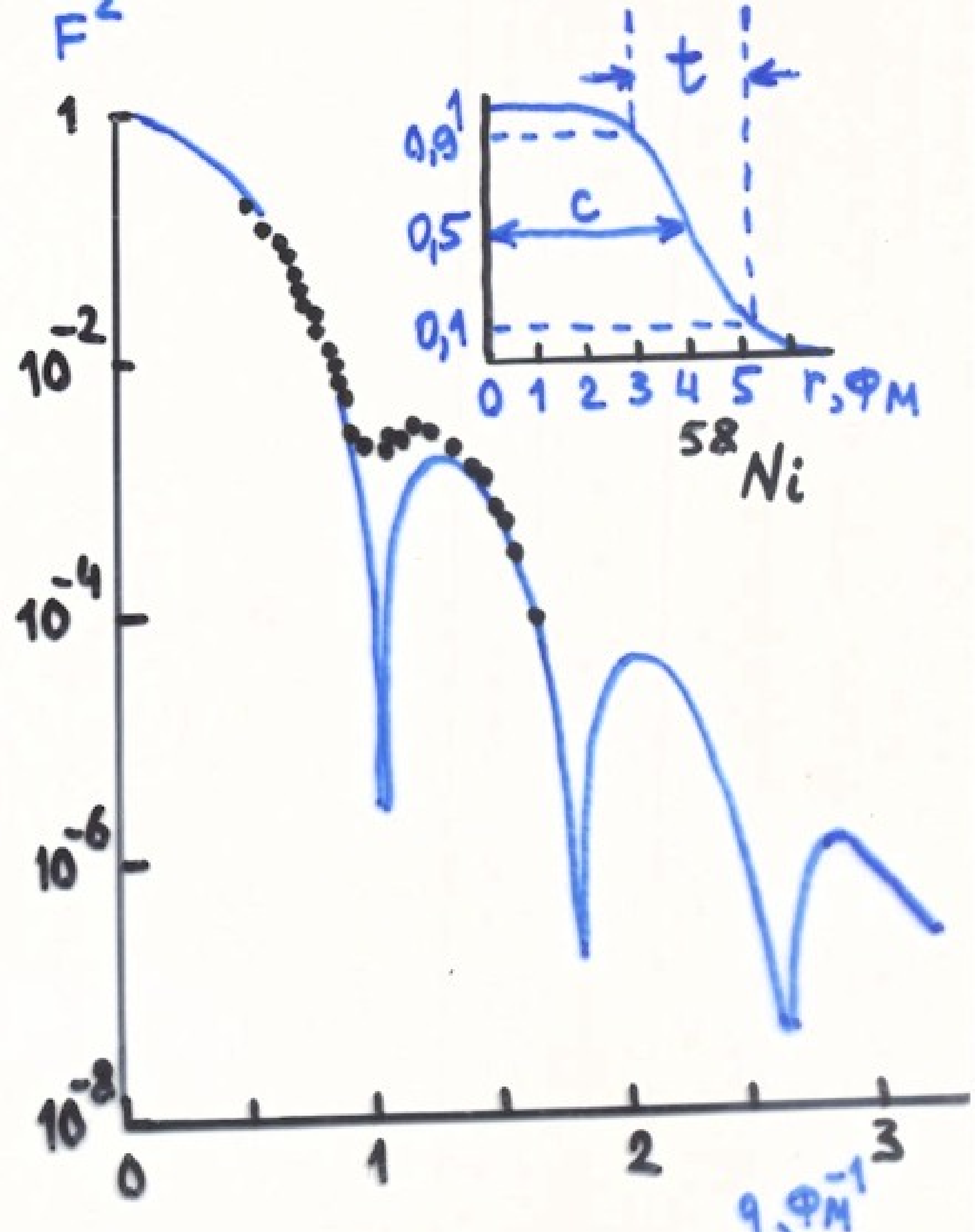
При малых $\vec{q}$: $$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z_2 e}\int \rho(r)\left\{1 + i(\vec{q}\vec{r}) - \frac{1}{2}(\vec{q}\vec{r})^2 + \ldots\right\} d\vec{r} =$$

$$= 1 - \frac{1}{6} r^2_{\text{ср.кв.}}\, q^2 + \ldots$$

$$r_{\text{ср.кв.}} = \left(\frac{1}{Z_2 e}\int \rho(r)\, r^2\, d\vec{r}\right)^{1/2}$$

Сразу на протяженность мишени указывает $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{эксп}} < \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{М}}$
$(Z_1+Z_2)^2 > Z_1^2 + Z_2^2$ и дифр. минимумы

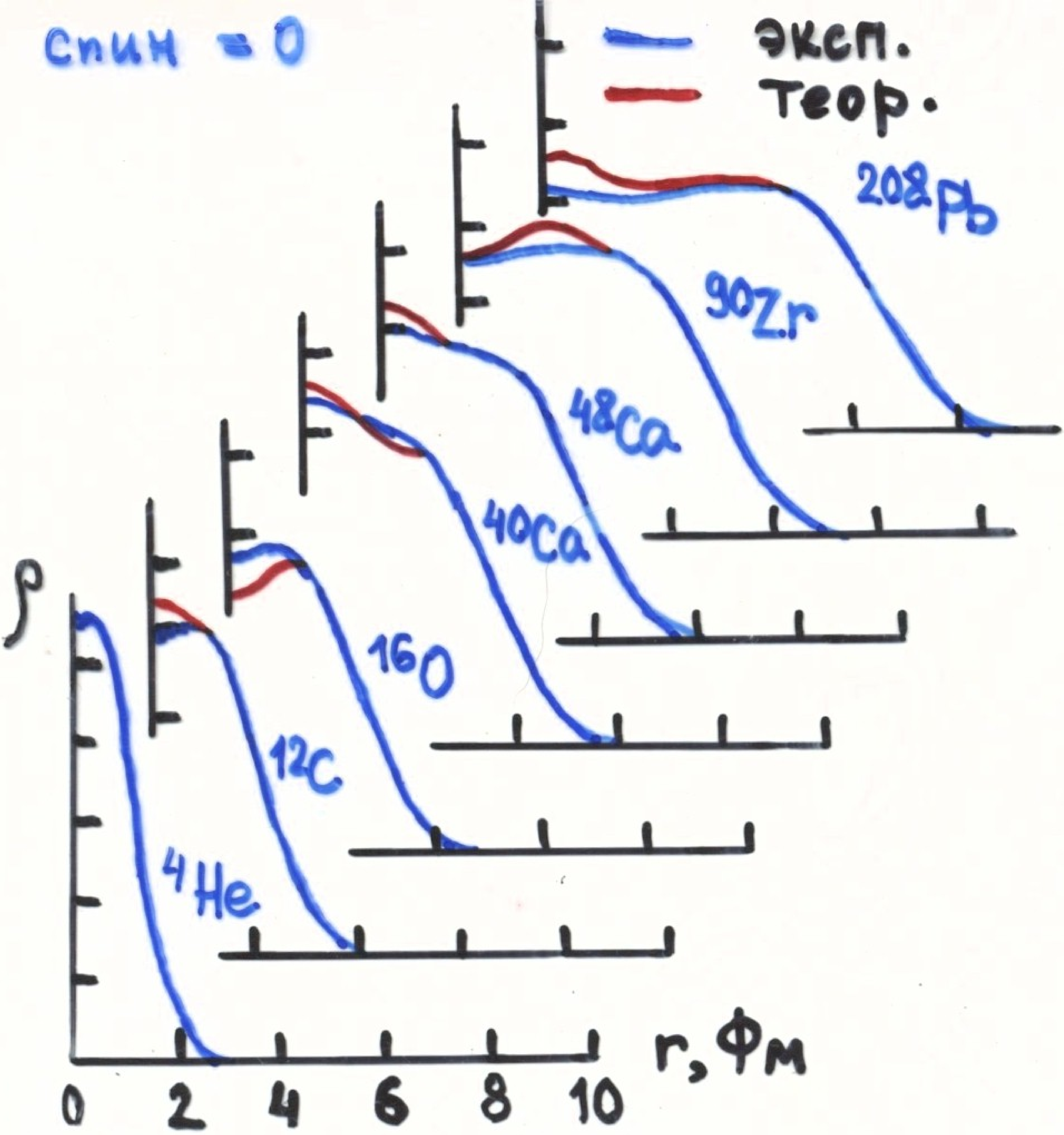




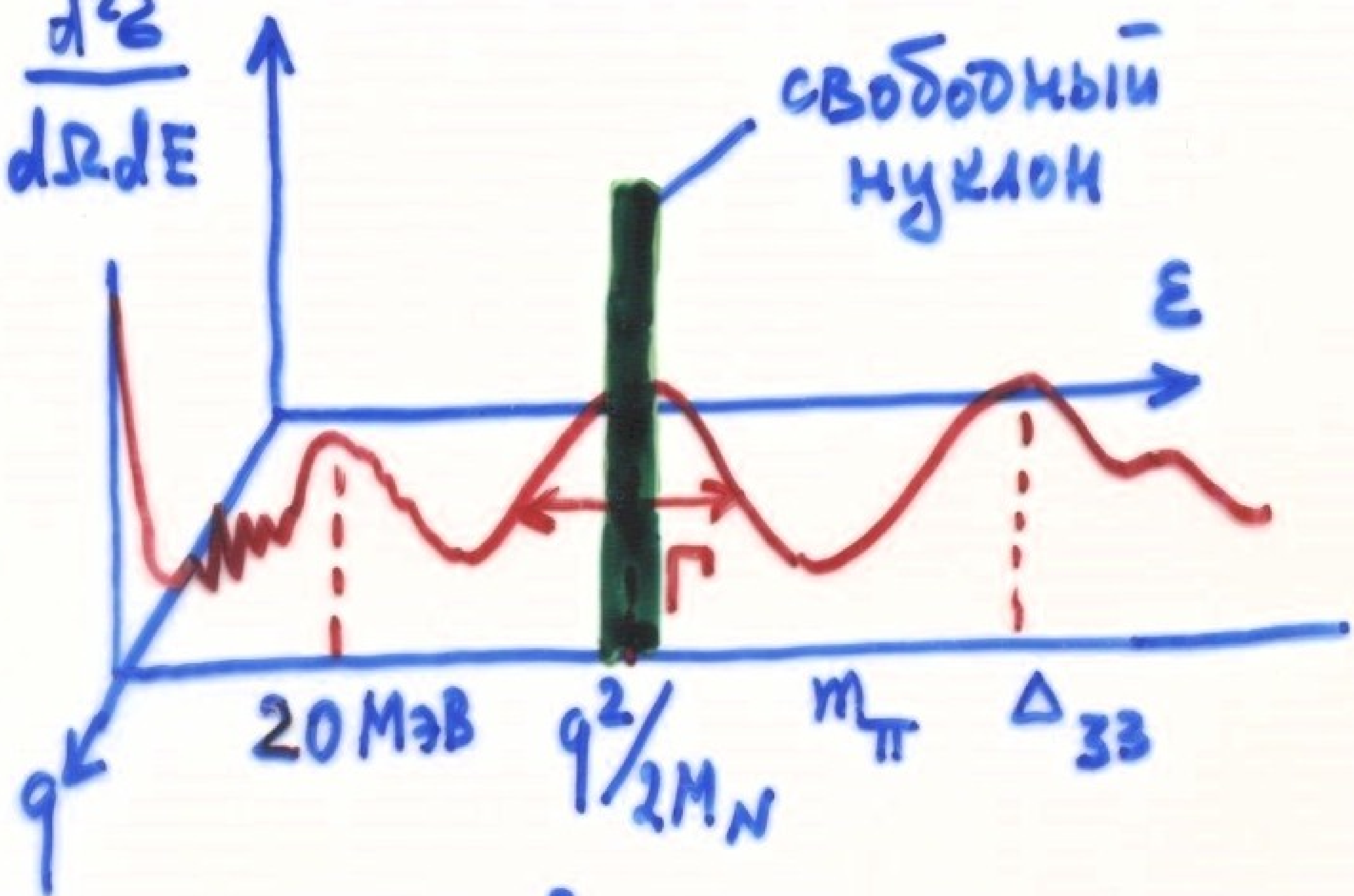
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}}$$

$t \approx 4{,}4\,a$

$c = (1{,}2\,A^{1/3} - 0.5)$ Фм


спин = 0
эксп.
теор.
208Pb
90Zr
48Ca
40Ca
16O
12C
4He
ρ
r, Фм
0
2
4
6
8
10

Квазиупругое рассеяние (e,e'p)



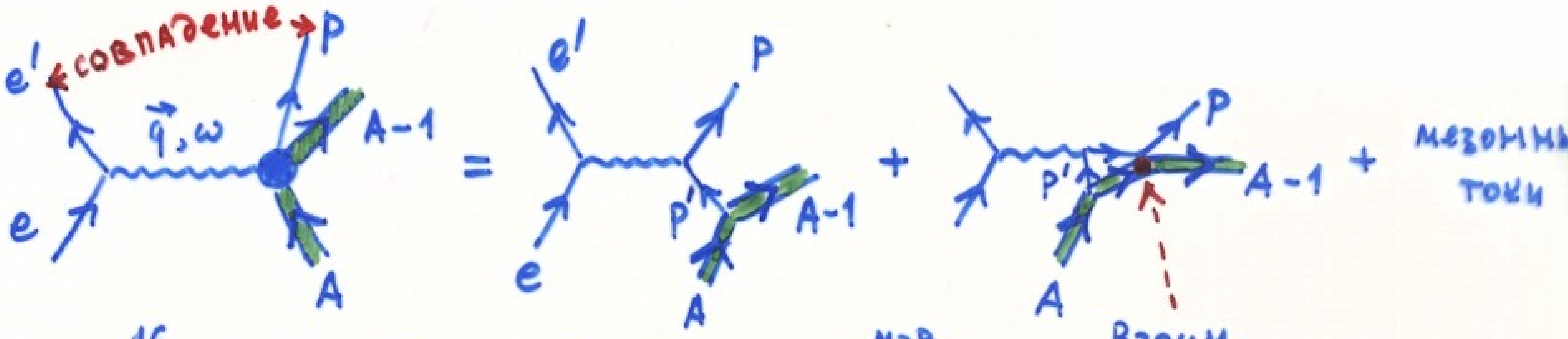
$$\varepsilon = \frac{q^2}{2M_N}; \quad M_N \to M_N^*$$

$$\varepsilon \to \frac{q^2}{2M_N} + B; \quad q \to q \pm \Gamma$$

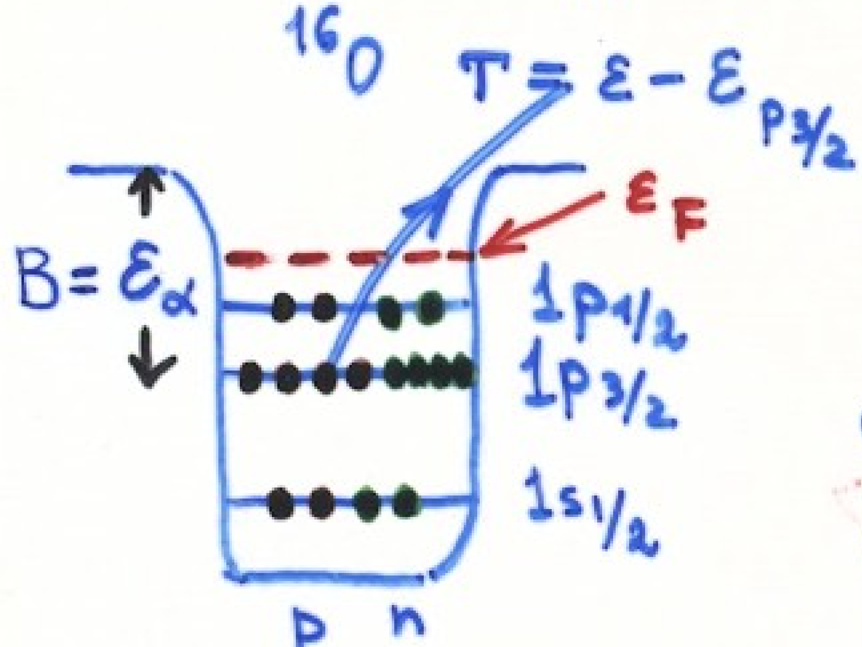
(разброс по импульсам)

Изучается: 1. Эн. связи нуклонов на подоболочках.

2. Распределение нуклонов по импульсам.



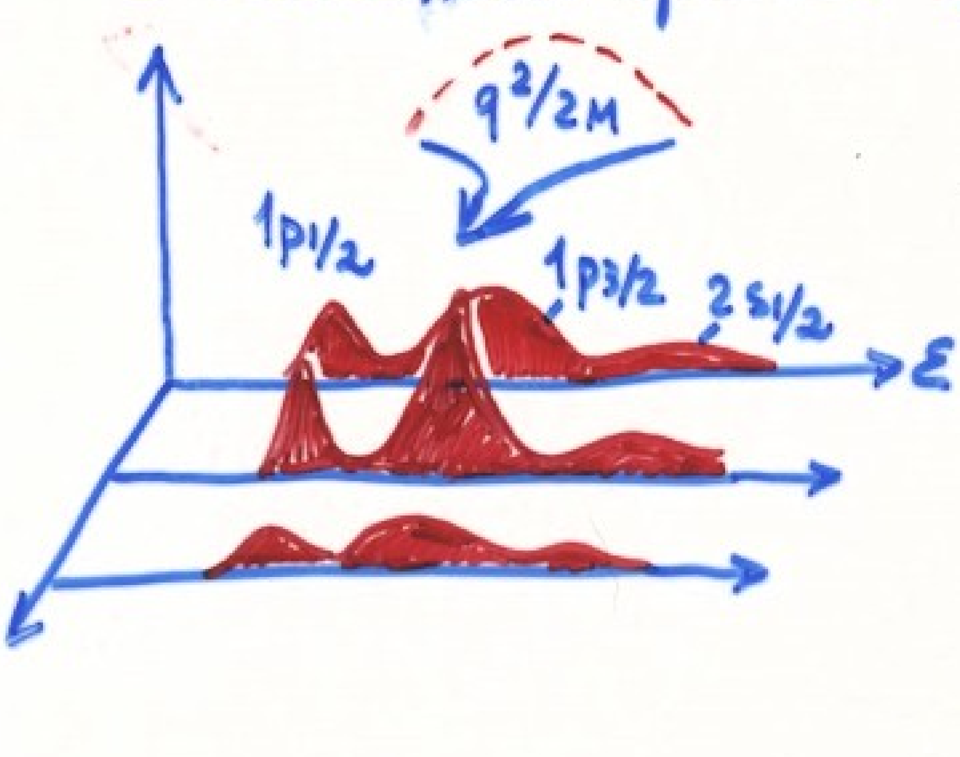
Взаим. в конечном состоянии



$$|\vec{q}\,| = (200-1000)\,\frac{\text{МэВ}}{c}$$

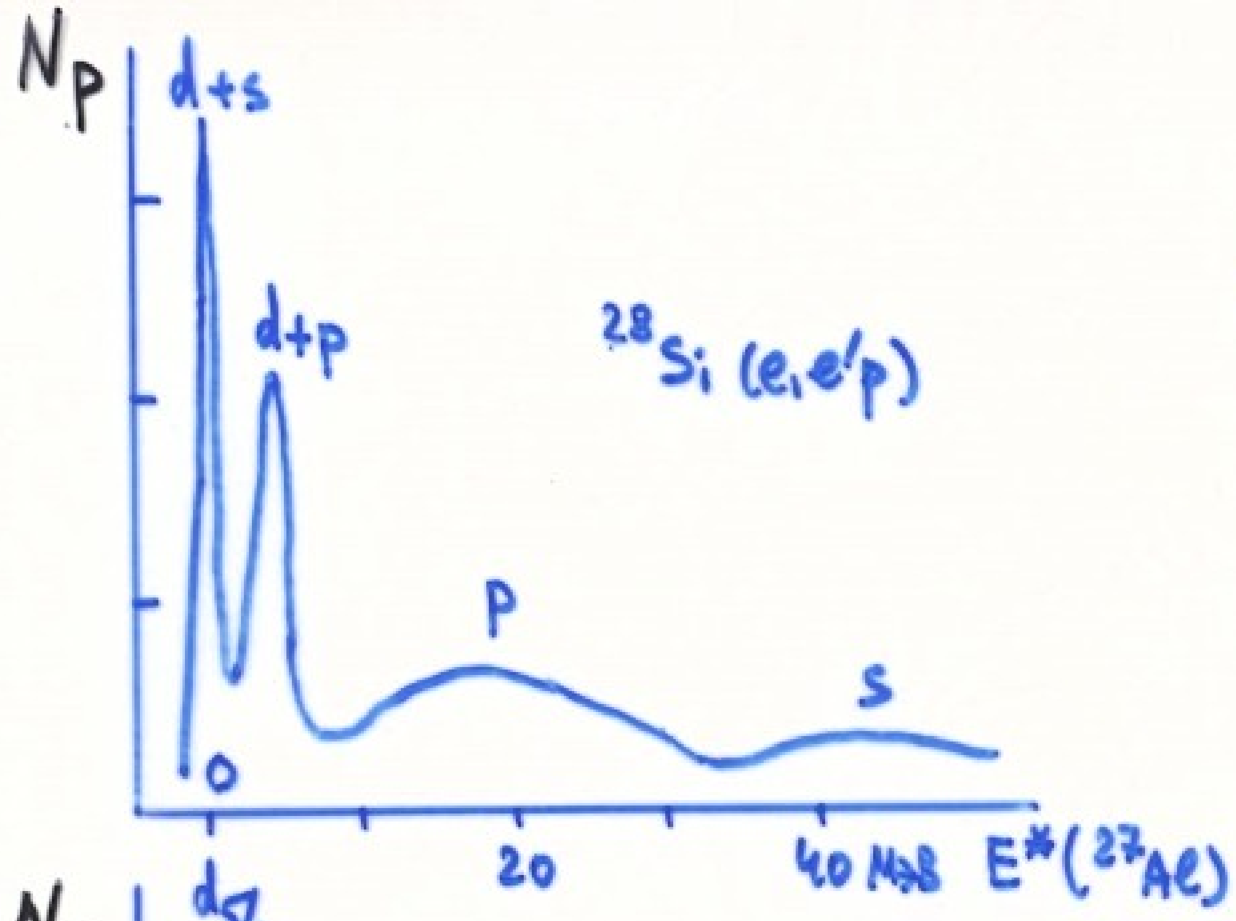
$$\lambda_q = 0.2 - 1.0\ \text{Фм}$$

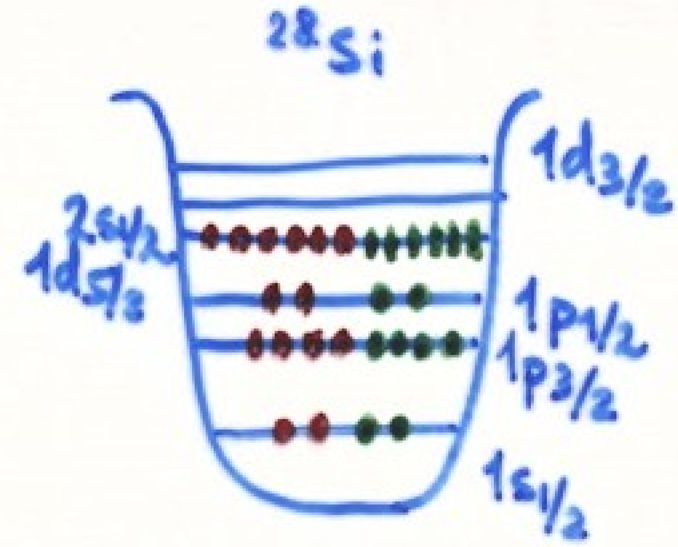
Структура квазиупругого пика связана с выбиванием протонов из разных оболочек

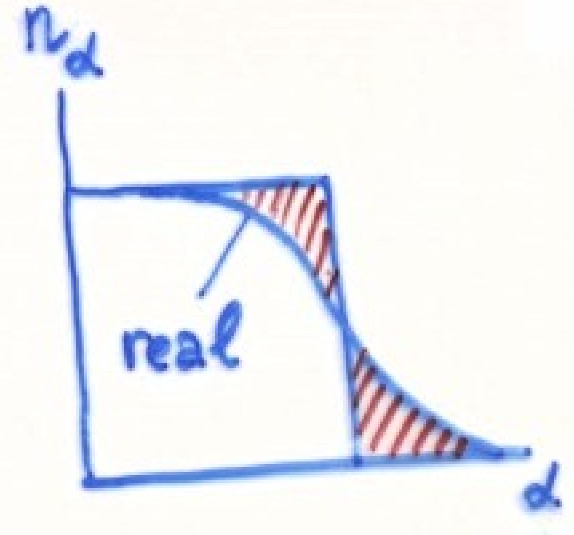


Вся кинематика определяется и орб. момент нуклона на оболочке

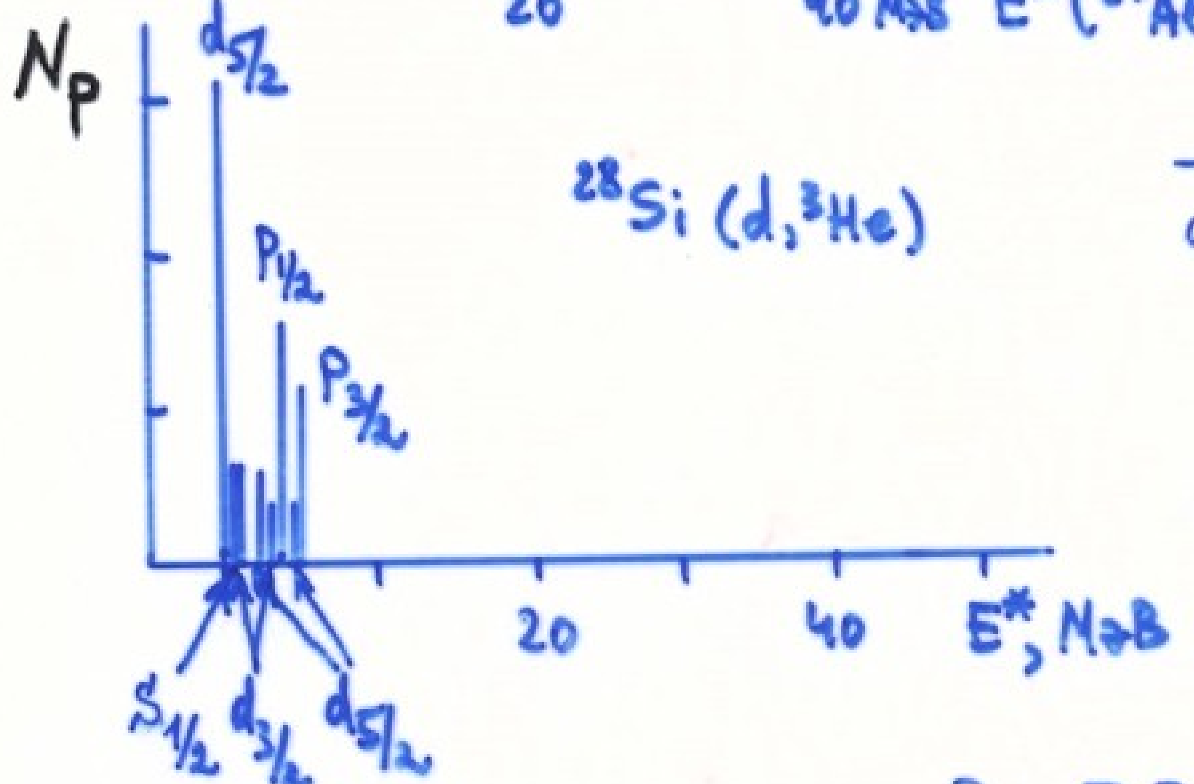
Аналогичную информ. дают реакции (p,2p) и подхвата протона $(d,{}^3He)$, (n,d)







Размытость границы Ферми в основном состоянии



$$\frac{d^4\sigma}{dE_e\, d\Omega_e\, dE_p\, d\Omega_p} = (K.F.)\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_p \cdot S(E_p, \vec{p}_p)$$

K.F. – кинематич. фактор;

$(d\sigma/d\Omega)_p$ – сечение рассеяния на свободном протоне

$S(E_p, \vec{p}_p)$ – спектральная функция

В IPSM (модель независимых частиц)

$$S(E_p, \vec{p}_p) = \sum_\alpha |\Phi_\alpha(\vec{p}_p)|^2\, n_\alpha\, \delta(E_p - \varepsilon_\alpha)$$

$\alpha = \{nlj\}$; $n_\alpha = 2j+1$. Из-за остаточного взаимодействия $n_\alpha \delta(E_p - \varepsilon_\alpha) \longrightarrow S_\alpha(E_p)$ – фрагментация дырки.

Тогда $S(E_p, \vec{p}_p) = \sum_\alpha |\Phi_\alpha(\vec{p}_p)|^2\, S_\alpha(E_p)$

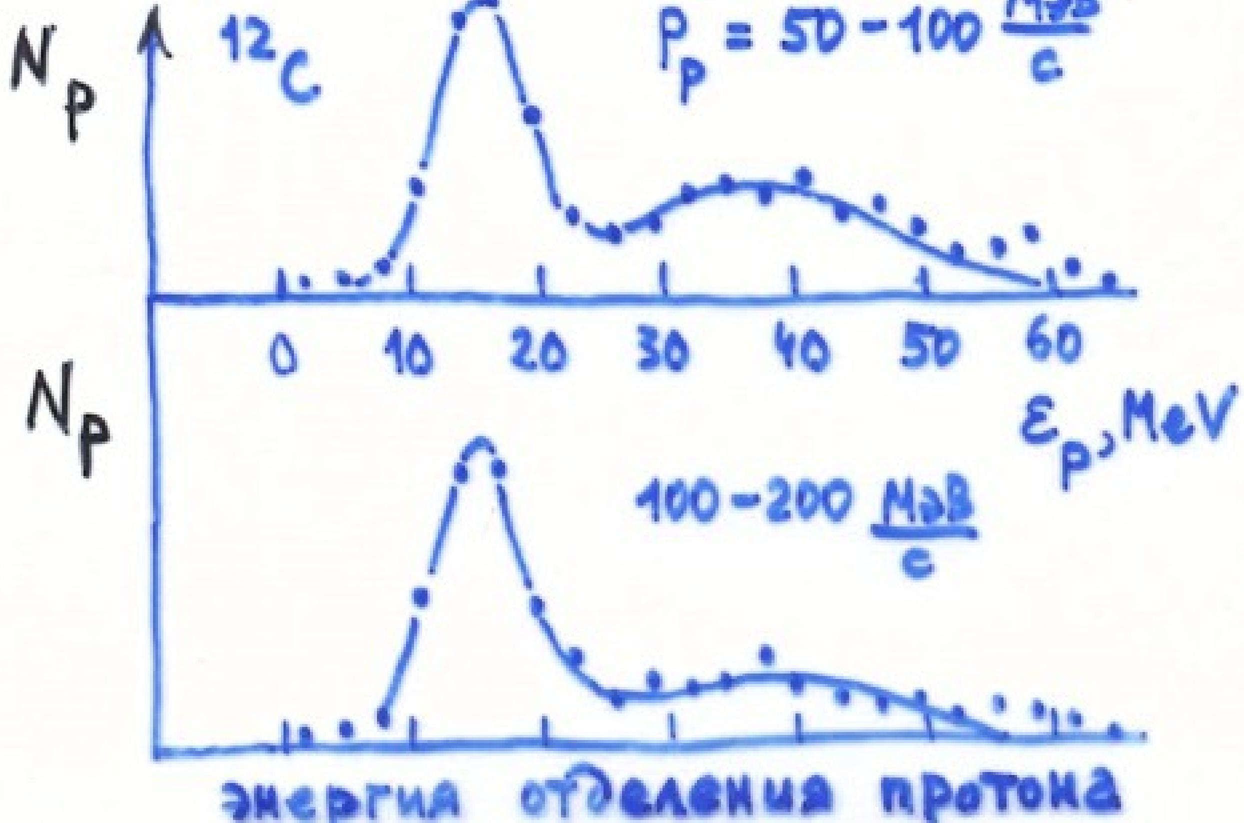
Φ_α – одночастичная волновая функция

$n_\alpha = \int S_\alpha(E_p)\, dE_p$; $\varepsilon_\alpha = \int S_\alpha(E_p)\, E_p\, dE_p / n_\alpha$

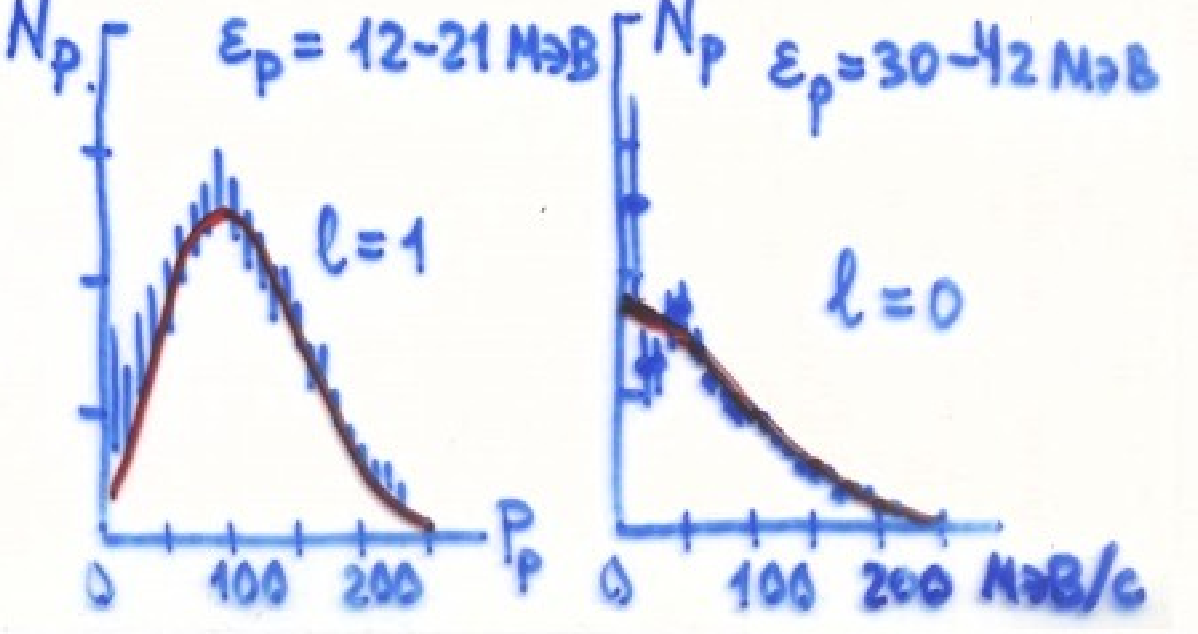
$\sum n_\alpha = Z$; $\sum n_\alpha \varepsilon_\alpha / Z = B_p$ – средн. эн. связи

Идентификация оболочки – по угловому или импульсному распределению протонов

$$\varepsilon_p = M_{A-1} + M_p - M_A + \varepsilon^*$$



$$\Phi_{1p}(p) \sim p \cdot e^{-p^2/2p_0^2}\ ;\ \Phi_{1s}(p) \sim e^{-p^2/2p_0^2}$$



	P_F (МэВ/c)	$\bar{\varepsilon}_p$ (МэВ)
^{6}Li	169	17
^{12}C	221	25
^{24}Mg	235	32
^{40}Ca	251	28
^{89}Y	254	39
^{208}Pb	265	44

	nlj	n_α	ε_α, МэВ
^{6}Li	1s	1.46 (2)	22.6 ± 0.2
	1p	0.72 (1)	4.5 ± 0.2
^{12}C	1s	1.34 (2)	38.1 ± 1.0
	1p	2.6 (4)	17.5 ± 0.4
^{28}Si	1s	0.9 (2)	51
	1p	2.9 (6)	32
	1d	5.5 (6)	16
	2s	0.4 (0)	14
^{58}Ni	1s	1.0 (2)	62
	1p	6.8 (6)	45
	1d	8.9 (10)	21
	2s	1.9 (2)	14.7
	1f	7.5 (8)	9.3