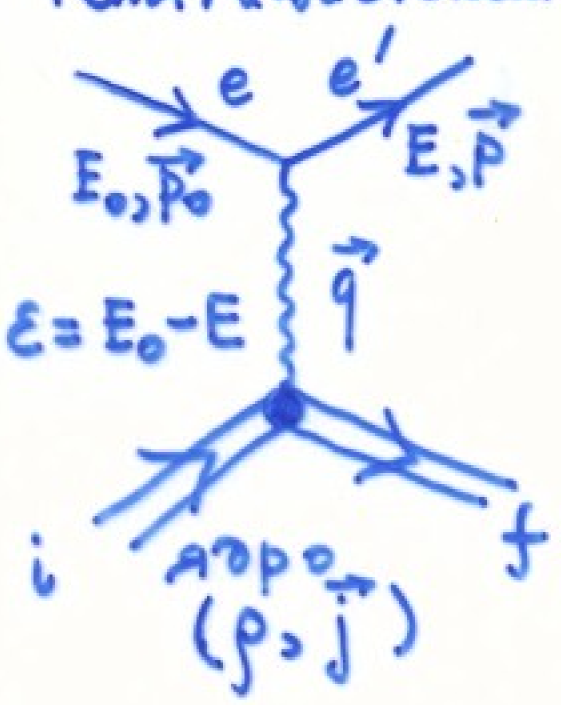
Формула для сечения рассеяния электронов ядром

Релятивистский случай, отдачей пренебрегаем. 1-й порядок теории возмущ. один электрон в единице объема, ск. v_e



$$d\sigma = \frac{1}{v_e} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | V_e | i \rangle \right|^2 d\rho_{e'}$$

V_e - оператор взаим. электронов с ядром

$v_e = p_0 c^2 / E_0$, $d\rho_{e'} = pE\,d\Omega / (2\pi\hbar)^3 c^2$.

Имеем
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E_0 E}{4\pi^2 \hbar^4 c^4} \left(\frac{p}{p_0}\right) \left| \langle f | V_e | i \rangle \right|^2}$$

$$V_e = \int [\underbrace{\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})}_{\text{кулон}} - \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})]\,d\vec{r} = -\frac{1}{c}\int j_\mu(\vec{r}) A_\mu(\vec{r})\,d\vec{r} \quad (+)$$

Электронный ток плотности $J_\mu(\vec{r}\,')$ создает 4-х потенциал $A_\mu(\vec{r}\,') e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}t}$,

где $\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu$ ($\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ур-я Максвелла $\Box\varphi = -4\pi\rho_e$, $\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$, калибровка Лоренца $\nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$)

или
$$\left(\nabla'^2 + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 c^2}\right) A_\mu(\vec{r}\,') = -\frac{4\pi}{c} J_\mu(\vec{r}\,') \quad (*)$$

Решение (*)
$$A_\mu(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} J_\mu(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

и из (+) получаем

$$(\blacksquare) \quad \boxed{V_e = -\frac{1}{c^2}\int j_\mu(\vec{r}) \frac{e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} J_\mu(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,d\vec{r}\,'}$$

Взаим. электрона с ядром осущ. обменом поперечными (t) и продольными (l) виртуальными фотонами ($\rho\varphi \to l$-фотоны, $\vec{j}\cdot\vec{A} \to l$ и t фотоны)

условие поперечности $\vec{q}\cdot\vec{\varepsilon}_q = 0$ не обязательно ($\vec{\varepsilon}_q$ - ед. вектор поляризации)

$$\boxed{\langle f | V_e | i \rangle = -\frac{1}{c^2}\int [\langle f | \vec{j}(\vec{r}) | i \rangle \cdot \vec{J}(\vec{r}\,') - c^2 \langle f | \rho(\vec{r}) | i \rangle \cdot \rho_e(\vec{r}\,')] \cdot \frac{e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,d\vec{r}\,'} \quad (++)$$

Борновское приближение с плоскими волнами (БППВ)

Плотность электронного 4-х тока? Решения ур-я Дирака.

Представление:
$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$
$$\vec{\gamma} = -i\beta\vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = i\beta\vec{\gamma}, \quad \gamma_4 = \beta$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_e(\vec r\,') &= e\,\psi^+_{\vec p}(\vec r\,')\,\psi_{\vec p_0}(\vec r\,') \\ \vec J(\vec r\,') &= ec\,\psi^+_{\vec p}(\vec r\,')\,\vec\alpha\,\psi_{\vec p_0}(\vec r\,') \\ \text{или}\quad J_\mu(\vec r\,') &= iec\,\overline{\psi}_{\vec p}(\vec r\,')\,\gamma_\mu\,\psi_{\vec p_0}(\vec r\,'), \end{aligned}\right\}\quad (**)$$

где $\overline{\psi}_{\vec p}(\vec r\,') = \psi^+_{\vec p}(\vec r\,')\gamma_4 = \psi^+_{\vec p}(\vec r\,')\beta$

обычно $\psi(\vec r\,')$ – решения ур. Дирака в кулон. поле ядра.

Приближение: $\psi(\vec r\,')$ – плоские волны, тогда в $(**)$ используем

$$\psi_{p_0}(\vec r\,') = e^{i\vec p_0\vec r\,'/\hbar}\cdot u(\vec p_0)\,;\quad \psi_{\vec p}(\vec r\,') = e^{i\vec p\,\vec r\,'/\hbar}\cdot u(\vec p)\,;\quad (+^+_+)$$

$u(\vec p_0)$, $u(\vec p)$ – дираковские спиноры в имп. пространстве

обозначим $k_0 = \varepsilon/\hbar c$, $\vec k = \vec q/\hbar$. Из $(**)$ и $(+^+_+)$:

$$J_\mu(\vec r\,') = iec\,[\bar u(\vec p)\gamma_\mu u(\vec p_0)]\,e^{ikr'} \qquad (*^*_*)$$

Подставляем $(*^*_*)$ в $(\blacksquare)$, вычисление $(++)$ дает:

$$\langle f|V_e|i\rangle = -\frac{1}{c}\int\langle f|j_\mu(\vec r)|i\rangle\,\mathcal{A}_\mu(\vec r)\,d\vec r\,, \qquad (\Delta)$$

$$\text{где}\quad \mathcal{A}_\mu(\vec r) = 4\pi i e\,\frac{[\bar u(\vec p)\gamma_\mu u(\vec p_0)]}{k^2-k_0^2}\,e^{ikr} = a_\mu e^{ikr} \; - \qquad (\blacksquare\blacksquare)$$

т.н. потенциал Мёллера (4-х потенциал плоской электронной волны)

Удобно выделить в $(\blacksquare\blacksquare)$ поперечные (t) и продольные (ℓ) волны (t и ℓ – виртуальные фотоны) и разбить ядерный ток на t и ℓ-компоненты (по отношению к волновому вектору $\vec k$ или переданному импульсу): $\vec j = \vec j^{\,t} + \vec j^{\,\ell}$; $\vec a = \vec a^{\,t} + \vec a^{\,\ell}$

После преобразований (Δ) принимает вид (учитываем, что $\vec j^{\,t}\cdot\vec a^{\,\ell} = \vec j^{\,\ell}\cdot\vec a^{\,t} = 0$)

$$\langle f|V_e|i\rangle = -\frac{4\pi i e}{c}\Big[\bar u(\vec p)\int d\vec r\,e^{i\vec k\vec r}\Big\{\frac{\langle f|\vec j^{\,t}(\vec r)|i\rangle}{k^2-k_0^2}\vec\gamma + i\,\frac{c\langle f|\rho(\vec r)|i\rangle}{k^2}\gamma_4\Big\}u(\vec p_0)$$

Это выражение подставляется в формулу для $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

Дальнейшие преобразования:

1. Усреднение по начальным состояниям спина электрона и суммирование по конечным.

2. Разложение по мультиполям для ядерного матричного элемента

3. Усреднение и суммирование по проекциям спина начального и конечного ядра

Разложение по мультиполям – позволяет выделить ядерные матричные элементы определенной мультипольности, т.е. представить сечение как сумму сечений возбуждения отдельных уровней с различным спином и четностью.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\sum_{J=0}^{\infty}\frac{d\sigma_{CJ}}{d\Omega}}_{\ell} + \underbrace{\sum_{J=1}^{\infty}\frac{d\sigma_{EJ}}{d\Omega} + \sum_{J=1}^{\infty}\frac{d\sigma_{MJ}}{d\Omega}}_{t}$$

$$\ell:\ \int\langle f|\rho(\vec r)|i\rangle e^{i\vec k\vec r}\cdot d\vec r \qquad t:\ \int\langle f|\vec j^{\,t}(\vec r)|i\rangle e^{i\vec k\vec r}\cdot d\vec r$$

Требуемое разложение – это разложение по мультипольным векторным потенциалам $\vec A^{E}_{JM}$, $\vec A^{M}_{JM}$ для „поперечной" части ядерных матр. элем. и по сферическим функциям Y_{JM} для „продольной". Если использовать ~~определение~~ обозначение

$(J_i M_i\, JM\,|\,J_f M_f) \equiv (\ \ |\ \ )$; $\quad A^C_{JM}(q,\vec r) = j_J(qr)\,Y_{JM}(\vec r)$ – мультипольный кулоновский потенциал

и определить ~~от операторов~~ приведенные матр. элем. L_J, T^E_J и T^M_J отвечающих за продольный (кулоновский) переход и поперечные (E и M) переходы, как

$$(\ \ |\ \ )\langle f\|L_J\|i\rangle = i^J\int\langle f|\rho(\vec r)|i\rangle A^C_{JM}(q,\vec r)\,d\vec r,$$

$$(\ \ |\ \ )\langle f\|T^E_J\|i\rangle = i^{J+1}\int\langle f|\vec j(\vec r)|i\rangle \vec A^E_{JM}(q,\vec r)\,d\vec r,$$

$$(\ \ |\ \ )\langle f\|T^M_J\|i\rangle = i^{J}\int\langle f|\vec j(\vec r)|i\rangle \vec A^M_{JM}(q,\vec r)\,d\vec r,$$

то в рез. разложение по мультиполям получаем для сечения рассеяния $\underbrace{\text{ультрарелятивистских}}_{\text{неполяр.}}$ электронов на неориентированных ядрах следующее сечение:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi\frac{2J_f+1}{2J_i+1}\cdot\frac{\sigma_M}{(Ze)^2}\left\{\sum_{J=0}^{\infty}|\langle f\|L_J\|i\rangle|^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}+tg^2\frac{\theta}{2}\right)\left[\sum_{J=1}^{\infty}|\langle f\|T^E_J\|i\rangle|^2 + \sum_{J=1}^{\infty}|\langle f\|T^M_J\|i\rangle|^2\right]\right\}}$$

Можно определить продольный $F_\ell^2(q)$ и поперечный $F_t^2(q)$ форм-факторы:

$$F_\ell^2(q) = \frac{4\pi}{(Ze)^2}\cdot\frac{2J_f+1}{2J_i+1}\sum_{J=0}^{\infty}|\langle f\|L_J\|i\rangle|^2,$$

$$F_t^2(q) = \frac{4\pi}{(Ze)^2}\cdot\frac{2J_f+1}{2J_i+1}\sum_{J=1}^{\infty}\left[|\langle f\|T^E_J\|i\rangle|^2 + |\langle f\|T^M_J\|i\rangle|^2\right]$$

Тогда
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \left[F_l^2(q) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} + tg^2\frac{\theta}{2}\right) F_t^2(q) \right] \qquad \sigma_M = \left(\frac{Ze^2}{2E_0}\right)^2 \frac{\cos^2\theta/2}{\sin^4\theta/2}$$

— o —

В начале курса было соотношение для оператора взаимодействия квантовой системы с чистым электрическим или магнитным излучением мультипольности J:

$$V^{\mathcal{E}\text{ или }\mathcal{M}}_{JM} = -\frac{1}{c}\sum_{\alpha=1}^{A}\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\vec{A}^{\mathcal{E}\text{ или }\mathcal{M}}_{JM}\cdot\vec{p}_\alpha$$

Можно легко убедиться, что

$$(J_i M_i J M \mid J_f M_f)\langle f\| T^{\mathcal{E}}_J \|i\rangle = i^{J+1}\langle f\| V^{\mathcal{E}}_{JM}(q) \|i\rangle$$
$$(\qquad \mid \qquad)\langle f\| T^{\mathcal{M}}_J \|i\rangle = i^{J}\langle f\| V^{\mathcal{M}}_{JM}(q) \|i\rangle$$

Вклад $F_l(q)$ и $F_t(q)$ в $d\sigma/d\Omega$ зависит от θ и их можно отделить. При $\theta = 180^\circ$ остается только $F_t^2(q)$:
$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{180^\circ} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{Ze^2}{2E_0}\right)^2 F_t^2(q)$$

Определение типа и мультипольности перехода

При $q = const$ варьируются E_0 и θ и определяется тип перехода ($\mathcal{E}$ или $\mathcal{M}$)

$P(\mathcal{E}J) = P(CJ) = (-1)^J$
$P(\mathcal{M}J) = (-1)^{J+1}$

кулоновский форм-фактор F_e возникает лишь при переходах электрического типа.

При малых q ($kR \ll 1$)

$$\langle f \| L_J(q) \| i \rangle \to -\frac{qc}{\varepsilon}\sqrt{\frac{J}{J+1}}\langle f \| T_J^{\mathcal{E}}(q) \| i \rangle$$

Если при изменении θ (q - фиксировано) $\frac{d\sigma/d\Omega}{\sigma_M} \sim \left(\frac{1}{2} + tg^2\frac{\theta}{2}\right)$, то вклад $F_e = 0$ и переход магнитный. Если кулоновский вклад велик, то переход электрический.

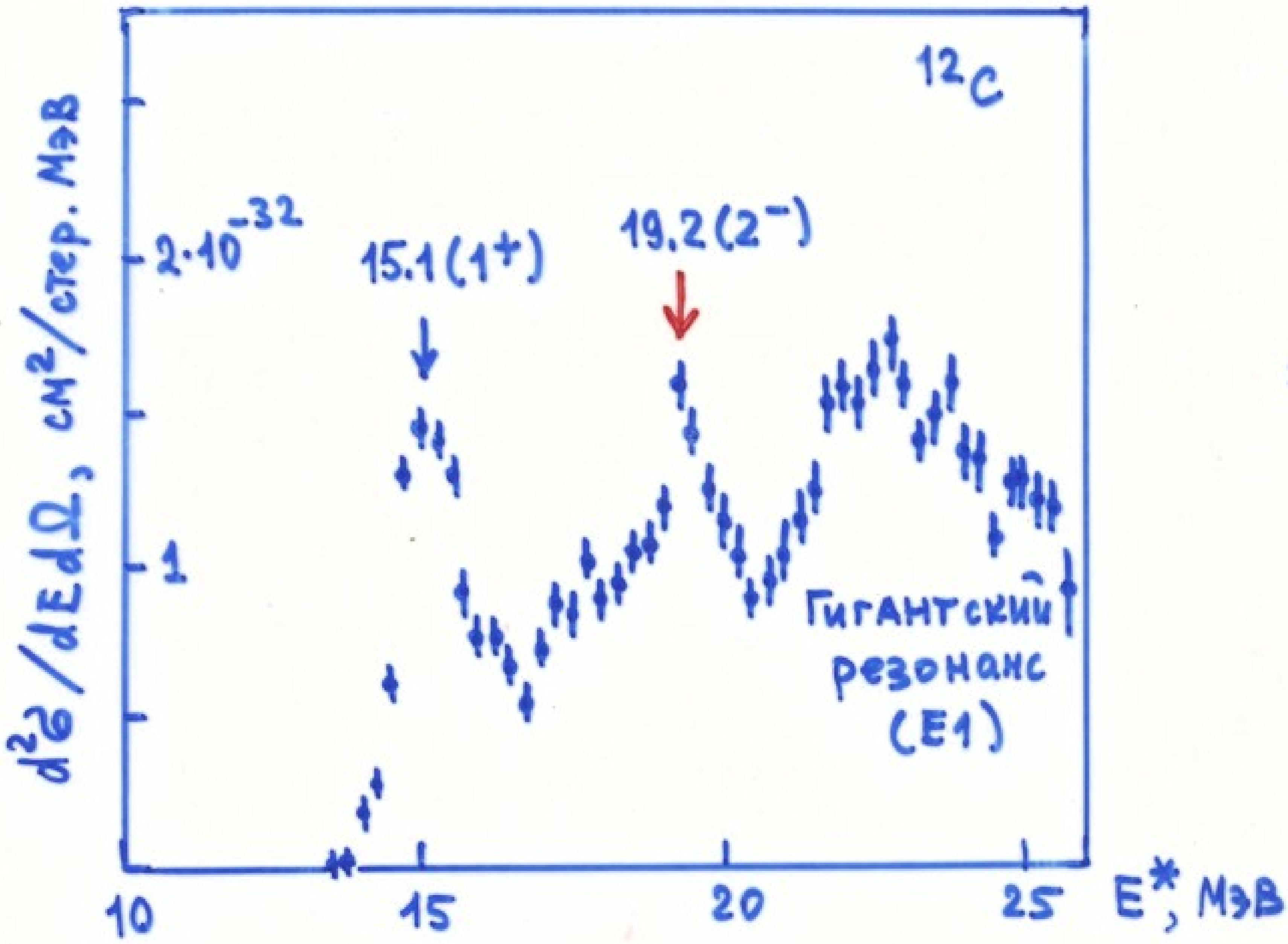
Мультипольность перехода определяется из зависимости форм-фактора уровня от q. Для малых q (из вида функций Бесселя при $kr \to 0$):

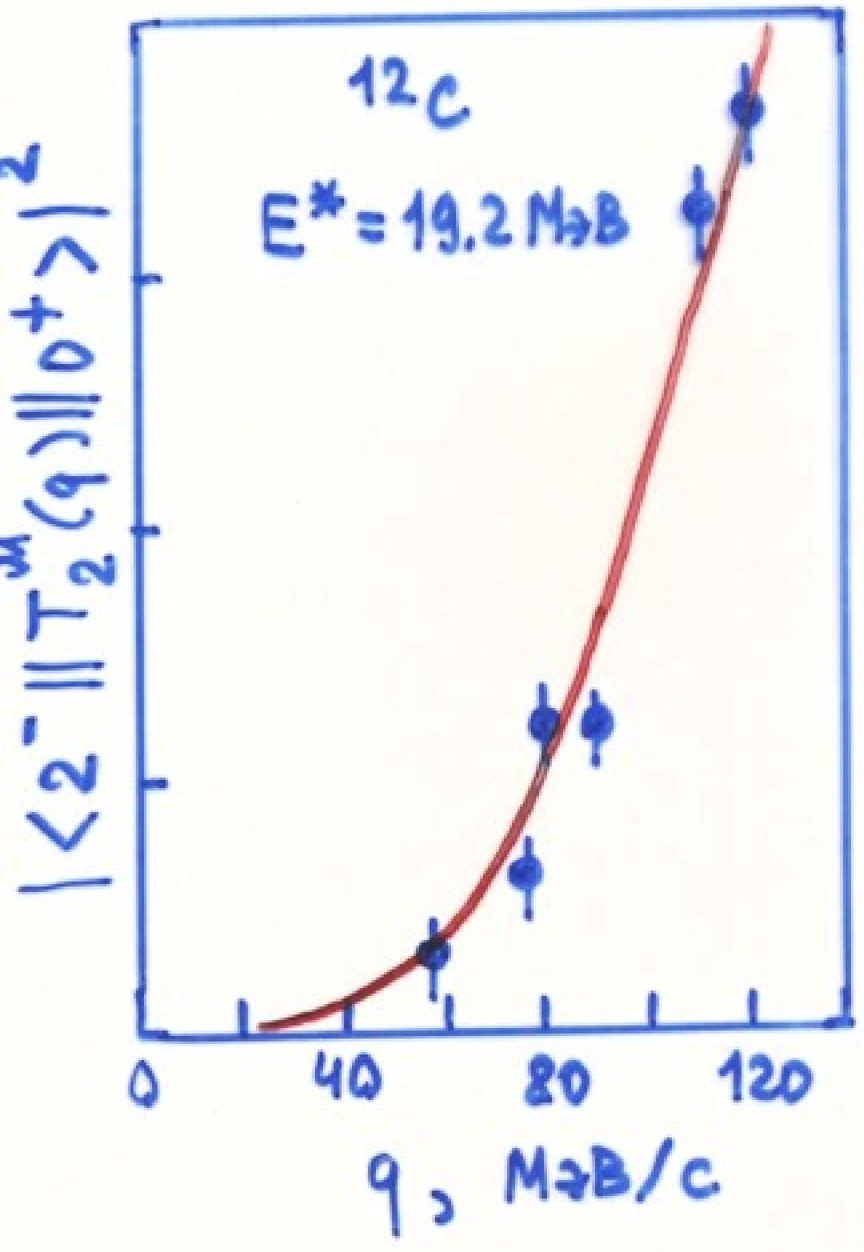
$$\langle f \| L_J(q) \| i \rangle \sim q^J$$

$$\langle f \| T_J^{\mathcal{E}}(q) \| i \rangle \sim q^{(J-1)}$$

$$\langle f \| T_J^{\mathcal{M}}(q) \| i \rangle \sim q^J$$

Пример

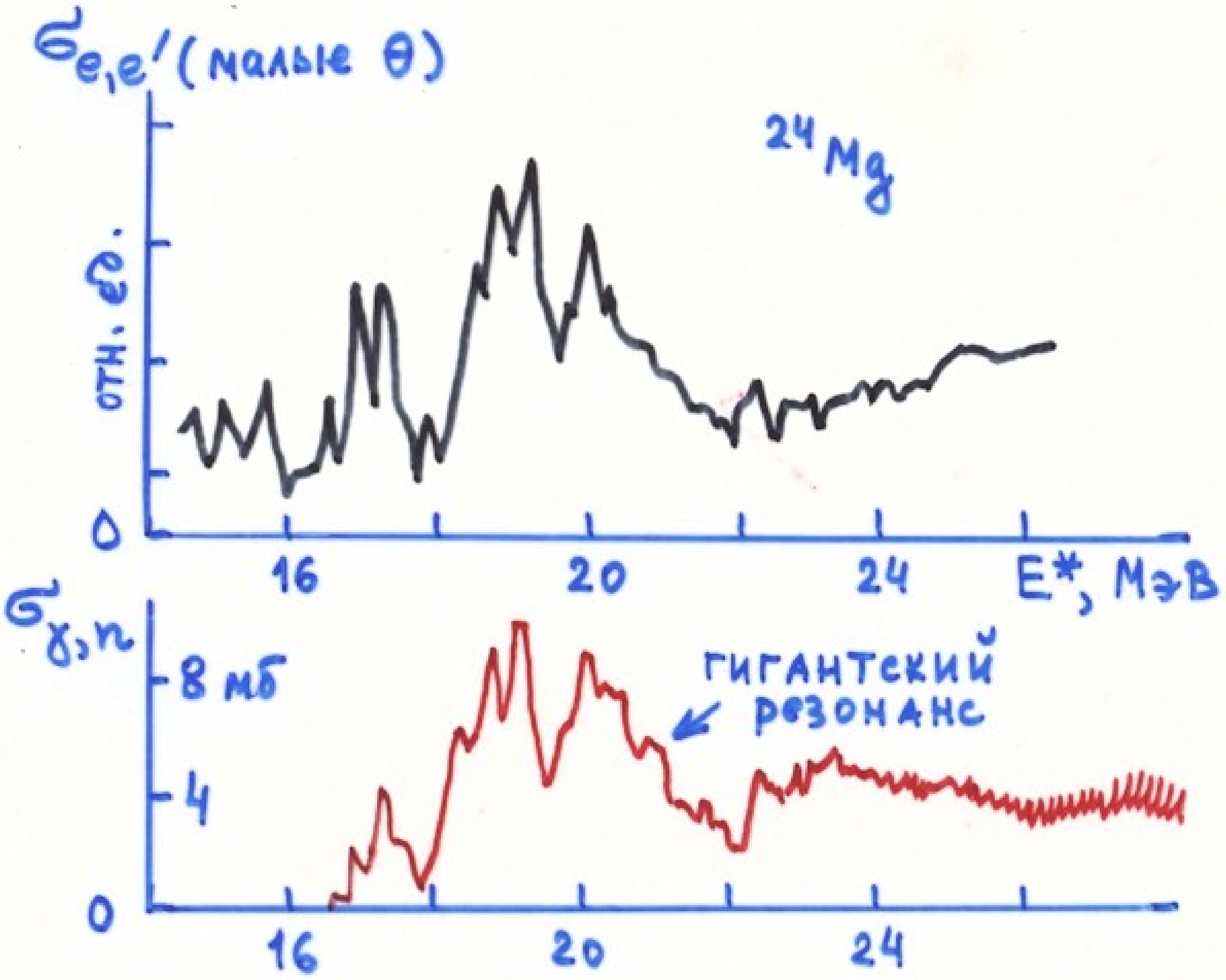




Отличие от фотопоглощения — возможность изменения q

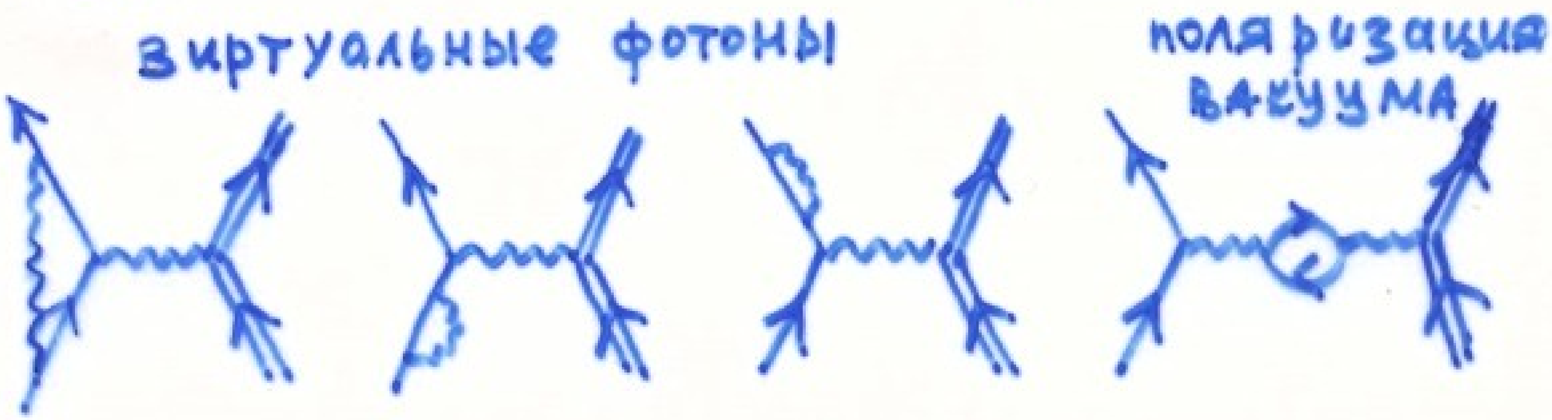
(e,e') аналогично фотопоглощению при $\theta \approx 0°$, тогда

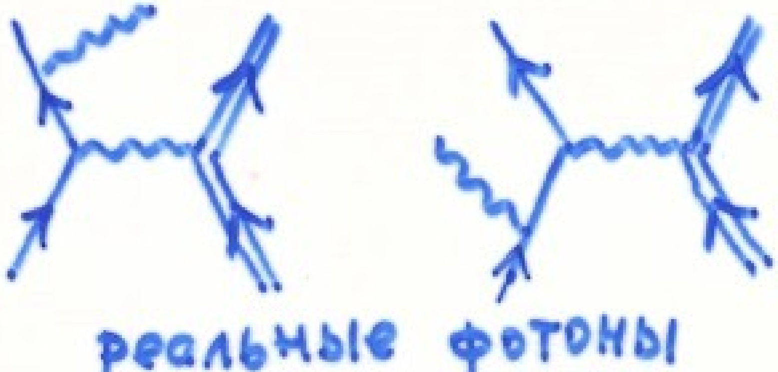
$$q \cong q_{min} = (E_0 - E)/c \text{, т.е. как для реального фотона}$$



Радиационные поправки

следующие процессы неядерного происхождения искажают результаты (e,e′) экспериментов:





За счет этих процессов любой резонанс в спектре рассеянных электронов имеет т.н. „радиационный хвост" со стороны малых энергий