Лекции 4,5: **Теории Великого Объединения и группа SU(5).**

"Мне бы такое зрение!" – заметил король с завистью.–
"Увидеть НИКОГО ! Да еще на ТАКОМ расстоянии!"
(Льюис Кэррол, "Алиса в Зазеркалье")

Стремление иметь в качестве обобщения СМ "настоящую" единую теорию, основанную на простой калибровочной группе G_{GU} с одной константой связи g_{GU} приводит нас к рассмотрению моделей "Великого Объединения". Рассмотрим их основные свойства, не связанные с конкретным выбором G_{GU} (оставаясь, конечно, в рамках подхода, основанного на использовании квантовых спонтанно нарушенных калибровочных теорий поля).

Любая такая теория должна в пределе низких энергий должна переходить в СМ, хорошо согласующуюся с экспериментальными данными. Поэтому естественно потребовать, чтобы G_{GU} содержала $G_{SM} = SU(3)_c \otimes SU(2)_T \otimes U(1)_Y$ в качестве подгруппы, и чтобы СНС происходило по меньшей мере в два этапа:

$$G_{GU} \quad \xrightarrow{M_{GU}} \quad G_{SM} \quad \xrightarrow{M_W} \quad SU(3)_c \otimes U(1)_{em}.$$

Поэтому среди набора генераторов $\hat{T}_a,\ (a = 0, ..., N-1)$ группы G_{GU} можно в некотором представлении явно выделить 12 генераторов, отвечающие подгруппе симметрии СМ:

$$\begin{aligned} \hat{T}_0 \ &= \ \frac{1}{2c}\,\hat{Y} \quad \leftarrow \ U(1)_Y, \\ \hat{T}_i \ (i = 1, 2, 3) \quad &\leftarrow \ SU(2)_T, \\ \hat{T}_b \ (b = 4, ..., 11) \quad &\leftarrow \ SU(3)_c \end{aligned} \tag{1}$$

(значения индекса a, отвечающие остальным генераторам, будем выделять с помощью индекса "r": $\hat{T}_r$ $(r = 12, ..., N-1)$). Напомним, что с каждым из генераторов связано слагаемое в лагранжиане модели, описывающее взаимодействие материальных и калибровочных полей (получаемые путем замены обычной производной ∂_μ на "удлиненную" $\partial_\mu - ig_{GU}\hat{T}_a V^a_\mu$). Операторы цвета и слабого изоспина включены в набор $\hat{T}_a$ непосредственно, так как они отвечают взаимодействию с физическими полями - глюонами и $W^\pm$- бозонами, в то время как нормировка оператора гиперзаряда выбирается таким образом, чтобы сохранить для электрического заряда (описывающего взаимодействие с фотонами) соотношение Гелл-Манна - Нишиджимы

$$\hat{Q} \ = \ \hat{T}_3 \ + \ \frac{1}{2}\,\hat{Y} \ = \ \hat{T}_3 \ + \ c\hat{T}_0. \tag{2}$$

В общем случае оператор электрического заряда, являющегося сохраняющимся аддитивным квантовым числом, должен быть линейной комбинацией диагональных генераторов G_{GU} и к тому же должен коммутировать со всеми цветовыми операторами $\hat{T}_b$ (цветовая симметрия остается ненарушенной, а глюоны не несут электрического заряда). Так как ранг $SU(3)$ равен 2, то число генераторов, входящих в выражение для $\hat{Q}$, равняется $R-2$ (R – ранг G_{GU}). Учитывая (2), приходим к выводу, что $R \geq 4$, причем в случае $R = 4$ (2) дает наиболее общее выражение для $\hat{Q}$.

Генераторы простой группы должны удовлетворять соотношениям

$$Sp[\hat{T}_a] \ = \ 0, \quad Sp[\hat{T}_a \hat{T}_{a'}] \ = \ K \cdot \delta_{aa'},$$

где K зависит только от выбора представления, но не от a и a'. Поэтому

$$Sp[\hat{Q}] \ = \ 0, \tag{3}$$

$$Sp[\hat{Q}^2] \ = \ Sp[(\hat{T}_3 + c\hat{T}_0)^2] \ = \ Sp[\hat{T}_3^2] \ + \ c^2 Sp[T_0^2] \ = \ (1+c^2) \ Sp[\hat{T}_3^2] \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ c^2 \ = \ \left\{ \ \frac{Sp[\hat{Q}^2]}{Sp[\hat{T}_3^2]} \ - \ 1 \ \right\} \tag{4}$$

Соотношение (3) показывает, что сумма зарядов фермионов, помещаемых в один неприводимый мультиплет группы G_{GU}, должна равняться 0 (так как в ТВО в один мультиплет помещаются цветовые триплеты кварков и лептоны, то можно ожидать, что это требование сразу же обеспечит наличие у кварков дробных электрических зарядов, кратных $\frac{1}{3}$ лептонного заряда), а (4) связывает квантовые числа фундаментальных фермионов и нормировочную константу для оператора гиперзаряда, зависящую от отношения калибровочных констант электрослабой подгруппы $SU(2) \otimes U(1)$. В самом деле, используя договоренность о классификации генераторов в выражении для "удлиненной" производной

$$\partial_\mu - i g_{GU} \hat{T}_a V_\mu^a \ = \ \partial_\mu - i g_{GU} (\hat{T}_0 B_\mu + \hat{T}_3 W_\mu^3 + \hat{T}_\pm W_\mu^\pm + \hat{T}_b G_\mu^b + \hat{T}_r V_\mu^r) \ =$$

$$= \ \partial_\mu - i g'_w \frac{\hat{Y}}{2} B_\mu - i g_w (\hat{T}_3 W_\mu^3 + \hat{T}_\pm W_\mu^\pm) - i g_s \hat{T}_b G_\mu^b - ...,$$

замечаем, что в масштабе энергий M_{GU}, когда восстанавливается полная симметрия теории, константы низкоэнергетических сильного и электрослабого взаимодействий

$$g_s \ = \ g_w \ = \ g_{GU}, \quad g'_w \ = \ \frac{1}{c} \, g_{GU}$$

а после перехода к физическим (отвечающим собственным состояниям массовой матрицы) полям фотонов (A_μ) и нейтральных промежуточных бозонов (Z_μ)

$$B_\mu \ = \ A_\mu \cdot cos\tilde{\theta}_W \ + \ Z_\mu \cdot sin\tilde{\theta}_W$$

$$W^3_\mu \;=\; -\,A_\mu \cdot sin\tilde{\theta}_W \;+\; Z_\mu \cdot cos\tilde{\theta}_W$$

(здесь $\tilde{\theta}_W$ – значение угла Вайнберга при энергиях Великого Объединения) получим, выделяя множитель при A_μ:

$$g_{GU}\;(\hat{T}_3\;sin\tilde{\theta}_W \;+\; \hat{T}_0\;cos\tilde{\theta}_W) \;=\; -g_{GU}\;sin\tilde{\theta}_W(\hat{T}_3 \;-\; \hat{T}_0\;ctg\tilde{\theta}_W) \;=\; -e\hat{Q}.$$

Таким образом,

$$e \;=\; g_{GU}\;sin\tilde{\theta}_W\;, \quad c \;=\; -\,ctg\tilde{\theta}_W.$$

Второе равенство с учетом (4) дает

$$sin^2\tilde{\theta}_W \;=\; \frac{Sp[\hat{T}_3^2]}{Sp[\hat{Q}^2]}.$$

Заметим, что сравнивать полученное здесь значение $\tilde{\theta}_W$ с определенным на основе экспериментальных данных θ_W напрямую нельзя, так как эффективные константы связи электрослабого взаимодействия g_w и g'_w изменяются за счет радиационных поправок при переходе от низких энергий к M_{GU}:

$$sin^2\theta_W \;\equiv\; \frac{g'^2_w}{g^2_w + g'^2_w} \;\equiv \frac{1}{1 + \alpha_w/\alpha'_w}.$$

Поэтому для использования низкоэнергетических данных необходимо учесть изменение инвариантных зарядов $\alpha \equiv g^2/4\pi$, которое в однопетлевом приближении описывается соотношением

$$\alpha_i^{-1}(M^2) \;=\; \alpha_i^{-1}(\mu^2) \;+\; \frac{b_i}{4\pi}\;ln\Big(\frac{M^2}{\mu^2}\Big) \qquad (5)$$

и потребовать, чтобы графики

$$\alpha_1 \;\equiv\; c^2\alpha'_w,\; \alpha_2 \;\equiv\; \alpha_w,\; \alpha_3 \;\equiv\; \alpha_s$$

пересекались в точке $\alpha = \alpha_{GU}$ при $M^2 = M^2_{GU}$. Значения b_i определяются набором частиц (скалярных, спинорных, векторных), с которыми взаимодействует соответствующий калибровочный бозон (см. лекцию I.11), и

$$b_i \;=\; \beta_i \;-\; \frac{4}{3}\;n_f, \quad \beta_{1,2,3} \;=\; (-\frac{1}{10};\; \frac{43}{6};\; 11)$$

(где n_f – число фермионов, рождение пар которых разрешено при энергии M). Какую информацию можно извлечь из условий

$$\alpha_1(M^2_{GU}) \;=\; \alpha_2(M^2_{GU}) \;=\; \alpha_3(M^2_{GU}) \;\; ?$$

Считая известным закон изменения α_i (5) можно, используя одно из этих равенств и измеренные экспериментально значения соответствующих инвариантных зарядов при низких энергиях, вычислить координаты точки пересечения. При этом второе равенство превращается в нетривиальное соотношение между значениями низкоэнергетических констант связи сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий. Действительно:

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} \;+\; \frac{b_2}{4\pi}\, ln\Big(\frac{M_{GU}^2}{\mu^2}\Big) \;=\; \frac{1}{\alpha_3(\mu^2)} \;+\; \frac{b_3}{4\pi}\, ln\Big(\frac{M_{GU}^2}{\mu^2}\Big) \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; ln\Big(\frac{M_{GU}}{\mu}\Big) \;=\; \frac{2\pi}{b_3 - b_2}\,\Big[\,\frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} \;-\; \frac{1}{\alpha_3(\mu^2)}\,\Big]$$

и, так как $b_3 - b_2 = \beta_3 - \beta_2 = \frac{23}{6}$,

$$ln\Big(\frac{M_{GU}}{\mu}\Big) \;=\; \frac{12\pi}{23}\,\Big[\,\frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} \;-\; \frac{1}{\alpha_3(\mu^2)}\,\Big] \tag{6}$$

(здесь сразу обращает на себя внимание очень большая величина M_{GU}). С другой стороны,

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu^2)} \;+\; \frac{b_1}{4\pi}\, ln\Big(\frac{M_{GU}^2}{\mu^2}\Big) \;=\; \frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} \;+\; \frac{b_2}{4\pi}\, ln\Big(\frac{M_{GU}^2}{\mu^2}\Big) \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{\alpha_2(\mu^2)}{\alpha_1(\mu^2)} \;=\; 1 \;+\; \frac{\alpha_2(\mu^2)}{2\pi}\,(\beta_2 - \beta_1)\; ln\Big(\frac{M_{GU}}{\mu}\Big) \;=$$

$$=\; 1 \;+\; \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_2}\,\Big[\,1 \;-\; \frac{\alpha_2(\mu^2)}{\alpha_3(\mu^2)}\Big] \;==\; 1 \;+\; \frac{218}{115}\,\Big[\,1 \;-\; \frac{\alpha_2(\mu^2)}{\alpha_3(\mu^2)}\Big]$$

и поэтому

$$\frac{1}{sin^2\theta_W} \;=\; \frac{1}{sin^2\tilde{\theta}_W} \;+\; \frac{218}{115}\,\Big[\frac{1}{sin^2\tilde{\theta}_W} \;-\; 1\Big]\,\Big[\,1 \;-\; \frac{\alpha_2(\mu^2)}{\alpha_3(\mu^2)}\Big].$$

Удобно вместо $\alpha_2(\mu^2)$ использовать значение $\alpha_{em}(\mu^2) = \alpha_2(\mu^2)/sin^2\theta_W$, так как оно известно с высокой точностью:

$$\alpha_{em}^{-1}(m_e^2) \simeq 137$$

(для других μ^2 можно произвести пересчет в соответствии с формулой КЭД). Тогда легко получаем:

$$sin^2\theta_W \;=\; \frac{115\; tg^2\tilde{\theta}_W + 218\;\alpha_{em}/\alpha_s}{115\; tg^2\tilde{\theta}_W + 333}, \tag{7}$$

А в соответствии с КХД

$$\alpha_s^{-1}(\mu^2) \;=\; \frac{b_3}{2\pi}\; ln\Big(\frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}\Big)$$

($\Lambda_{QCD} \simeq 0.3$ГэВ). Поскольку значение $\tilde{\theta}_W$ определяется составом фундаментальных мультиплетов материальных полей, (7) связывает $sin^2\theta_W$ с низкоэнергетическими значениями α_{em} и α_s. Проведя вычисления для $\mu = M_W$, получим

$$\frac{\alpha_s(M_W^2)}{\alpha_{em}(M_W^2)} \simeq 12.8 \quad \Rightarrow \quad sin^2\theta_W \simeq \frac{115\ tg^2\tilde{\theta}_W + 17}{115\ tg^2\tilde{\theta}_W + 333}.$$

Какая же калибровочная группа может подойти в качестве G_{GU}? Из вышеизложенного ясно, что эта должна быть простая группа ранга $R \geq 4$, имеющая подгруппу G_{SM} и обладающая комплексными представлениями (чтобы иметь возможность разделения частиц и античастиц). Список таких групп при каждом заданном R не слишком широк, а при *минимальном* возможном значении $R = 4$ вообще исчерпывается единственной группой – $SU(5)$ (в некоторых работах предлагалось использовать группы, составленные из произведений одинаковых простых групп – в этом случае также можно ограничится введением единой константы связи, но для минимального ранга реалистичных моделей такого типа нет). Таким образом, модель, основанная на группе $SU(5)$, является простейшей из возможных схем Великого Объединения – ее часто называют "минимальной ТВО". Рассмотрим ее более подробно на примере одного фермионного поколения.

В СМ одно поколение содержит 15 киральных компонент фермионных полей, причем левые компоненты объединены в изотопические дублеты, а правые являются изотопическими синглетами. Простейшими комплексными представлениями $SU(5)$ являются фундаментальное (размерность = 5) и антисимметричное (10), так что все фермионы в точности размещаются в этих представлениях с сохранением асимметрии левых и правых компонент и правильными значениями квантовых чисел по отношению к выделенным подгруппам $SU(3)_c$ и $SU(2)_T$ (правда, для этого придется иногда вместо киральной компоненты частицы включать в мультиплет противоположную киральную компоненту античастицы):

$$\psi_R^{(i)} = \Big(d_r, d_y, d_g, e^+, -\nu_e^c\Big)_R,$$

$$\chi_L^{(ij)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_g^c & -u_y^c & u_r & d_r \\ -u_g^c & 0 & u_r^c & u_y & d_y \\ u_y^c & -u_r^c & 0 & u_g & d_g \\ -u_r & -u_y & -u_g & 0 & e^+ \\ -d_r & -d_y & -d_g & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L .$$

(индексы $i, j = 1, ..., 5$, причем первые три значения отождествлены с цветовыми индексами подгруппы $SU(3)$, а последние два – с индексами изотопической подгруппы

$SU(2)$). Тогда условие (3) сразу приводит к соотношениям между зарядами кварков и лептонов ($Q_e \equiv -1$)

$$3Q_d \ + \ 1 \ + Q_\nu \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad Q_d \ = \ - \ \frac{1}{3},$$

и, поскольку u и d оказались изотопическим дублетом,

$$Q_u \ = \ Q_d \ + \ 1 \quad \Rightarrow \quad Q_u \ = \ + \ \frac{2}{3}.$$

В свою очередь, условие (4) фиксирует значение $\tilde{\theta}_W$:

$$c^2 \ = \ \frac{3 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 0}{3 \cdot 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \ - \ 1 \ = \ \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad sin^2\tilde{\theta}_W \ = \ \frac{3}{8},$$

а $sin^2\theta_W$ при $\mu = M_W$ оказывается равным

$$sin^2\theta_W \ \simeq \ \frac{115 \cdot \frac{3}{5} + 17}{115 \cdot \frac{3}{5} + 333} \ = \ \frac{43}{201} \ \simeq \ 0.214,$$

в то время как анализ экспериментальных данных по рассеянию нейтрино с такими энергиями дает $sin^2\theta_W \ \simeq \ 0.215 \pm 0.01$, и к тому же учет высших радиационных поправок в формуле для инвариантных зарядов еще более улучшает согласие!

Возможность предсказания дробных зарядов кварков и значения угла Вайнберга убеждает нас в том, что $SU(5)$- модель вполне реалистична и имеет право считаться по меньшей мере удачным первым приближением к построению ТВО. Масштаб энергий Великого объединения можно определить из (6): $M_{GU} \sim 10^{15}$ГэВ, а значение "единой" константы связи $g_{GU} \simeq 22$.

Размерность группы $SU(5)$ равна 24, потому в соответствующей модели имеется 24 калибровочных бозона, которые размещаются в базисе присоединенного представления в соответствии с (1)

$$\hat{V}_\mu \ \equiv \ \sum_{a=0}^{23} \frac{\hat{\Lambda}_a}{2} \ V_\mu^a \ =$$

$$= \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \cdot \ \begin{pmatrix} & & & X_r & Y_r \\ & \left(G_\mu - \frac{2}{\sqrt{30}} \ B_\mu\right)_b^{b'} & & X_y & Y_y \\ & & & X_g & Y_g \\ X_r^c & X_y^c & X_g^c & \frac{1}{\sqrt{2}} \ W_m^3 u + \frac{3}{\sqrt{30}} \ B_\mu & W_\mu^+ \\ Y_r^c & Y_y^c & Y_g^c & W_\mu^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \ W_m^3 u + \frac{3}{\sqrt{30}} \ B_\mu \end{pmatrix}.$$

Таким образом, помимо глюонов и бозонов электрослабого взаимодействия, в $SU(5)$-модели есть еще 6 заряженных калибровочных бозонов (т.е. 24 - 12 = 12 дополнительных вещественных векторных полей), испускание и поглощение которых приводит к переходам между кварковыми и лептонными или кварковыми и антикварковыми состояниями фермионов (в связи с этим выделяют *лептокварковые* и *дикварковые* состояния бозонов X и Y). Эти частицы несут как цветовые индексы, так и индексы слабого изоспина и обладают дробными электрическими зарядами:

$$Q_X \ = \ -\frac{4}{3}\,, \quad Q_Y \ = \ -\frac{1}{3}.$$

В соответствии со структурой калибровочно-инвариантного взаимодействия ψ или χ с $\hat{V}_\mu$ оказывается, что дикварковые и лептокварковые состояния X, Y не ортогональны, и поэтому оказываются возможными процессы с изменением барионного и лептонного числа, хотя их разность $B-L$ сохраняется.

Для введения в теорию масс частиц и правильного описания низкоэнергетической физики необходимо обеспечить двухэтапное нарушение калибровочной симметрии $SU(5)$. Простейший способ добиться этого – ввести два набора скалярных полей, юкавовским образом взаимодействующих с фермионами, потенциал самодействия которых имеет минимум при ненулевых значениях некоторых их компонент. *Минимальный* возможный набор полей Хиггса в $SU(5)$- модели содержит мультиплеты, принадлежащие фундаментальному (5) и присоединенному (24) представлениям : $\phi^{(i)}$ и $H^{(ij)} = (H^{(ij)})^+$, $Sp[\hat{H}] = 0$. По аналогии с моделью Салама-Вайнберга будем рассматривать потенциал взаимодействия в виде калибровочно-инвариантного потенциала 4-го порядка

$$V(H,\phi) \ = \ \Big[\ V_1(H) \ + \ V_2(\phi) \ + \ \lambda_3 \phi^+\phi \ Sp[\hat{H}^2] \ + \ \lambda_4 \phi^+ \hat{H}^2 \phi \ \Big]_S,$$

$$V_1(H) \ = \ -m_1^2 \ Sp[\hat{H}^2]2 \ + \ \lambda_1 (Sp[\hat{H}^2])^2 \phi \ + \ \lambda_1' Sp[\hat{H}^4],$$

$$V_2(\phi) \ = \ -m_2^2 \phi^+\phi \ + \ \lambda_2 (\phi^+\phi)^2,$$

в котором $[...]_S$ означает симметризацию выражения по H и ϕ, устраняющую нечетные степени полей. Выбранный потенциал замечателен тем, что при $\lambda_1' > 0$, $\lambda_1 > -\frac{7}{30}\lambda_1'$ $V_1(H)$ имеет минимум при

$$\hat{H} \ = < \hat{H} >_{vac} = \ V \ \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$V \ \equiv \ \frac{m_1}{\sqrt{15\lambda_1 + 3.5\lambda_1'}},$$

т.е. ненулевое вакуумное среднее H при $\phi \equiv 0$ не нарушает цветовой и изотопической симметрий! Таким образом, можно считать, что именно оно обеспечивает первое СНС

$$SU(5) \xrightarrow{M_{GU}} SU(3)_c \otimes SU(2)_T \otimes U(1)_Y$$

(естественно, мы должны считать $V \sim M_{GU} \geq 10^{15}$ГэВ). Переходя к новым полевым переменным $H' \equiv H - < H >_{vac}$ и учитывая, что 12 скалярных безмассовых полей поглощаются калибровочными бозонами X и Y, приобретающими массу

$$M_X = M_Y = \frac{5}{\sqrt{2}} g_{GU} V,$$

получаем, что в рассматриваемой модели возникает 12 вещественных скалярных полей H, массы и квантовые числа которых можно установить, выделяя квадратичную часть потенциала $V(H')$. Вычисления показывают, что они группируются в состояния:

- цветового октета с массой $m^{(8)} = \sqrt{5\lambda_1'}V$
- изотопического триплета с массой $m^{(3)} = 2\sqrt{5\lambda_1'}V$
- синглета с массой $m^{(1)} = 2m_1$.

Взаимодействия H и ϕ приводят к появлению массы и у второго набора полей Хиггса, который при этом распадается на цветовой триплет и изотопический дублет, массовые слагаемые для которых имеют вид:

$$L_m(\phi) = -m^{(t)\,2}\phi_t^+\phi_t - m^{(d)\,2}\phi_d^+\phi_d =$$
$$= -[(\frac{15}{2}\lambda_3 + \lambda_4)V^2 - m_2^2]\phi_t^+\phi_t - [(\frac{15}{2}\lambda_3 + \frac{9}{4}\lambda_4)V^2 - m_2^2]\phi_d^+\phi_d.$$

Цветовая симметрия не должна нарушаться, так что $m^{(t)\,2} > 0$ и поле ϕ_t – еще один массивный тяжелый скаляр, в то время как ϕ_d идеально подходит для СНС Стандартной Модели, если $m^{(d)}\ 2 < 0$ и $v \equiv \frac{|m^{(d)}|}{\sqrt{\lambda_2}} \simeq 250$ГэВ. Следует обратить внимание на неестественность последнего требования – мы предполагаем, что по каким-то случайным обстоятельствам масштабы нарушения симметрий различаются не менее чем на 12 порядков! В действительности ситуация даже хуже, чем кажется на первый взгляд: даже если подбором параметров потенциала самодействия обеспечить требуемую малость $|m^{(d)}|$, радиационные поправки (например, связанные с испусканием виртуального калибровочного бозона, взаимодействующего с конденсатом тяжелых полей Хиггса) приведут к значительной перенормировке массы легкого хиггсовского бозона, так что малость последней можно обеспечить только путем очень тщательного подбора всех параметров модели. Представляется проблематичным, что такой подбор осуществим при учете всех порядков теории возмущений. По этой причине обычно говорят о существовании *проблемы калибровочных иерархий* в ТВО. Предполагается, что она может быть решена при учете некоторых дополнительных, более широких симметрий – возможно, при построении "самой настоящей" единой теории, включающей описание гравитационного взаимодействия.

С иерархией СНС тесно связана и еще одна особенность моделей типа минимальной ТВО. Как видно на примере $SU(5)$- модели, такие теории хорошо описывают низкоэнергетическую физику, и предсказывают, что какие-либо серьезные отличия от СМ могут появиться только при энергиях, по порядку приближающихся к $M_{GU} \sim 10^{15}$ГэВ. До этого нельзя ожидать ни новых физических явлений, ни появления новых классов частиц – только все более высокоэнергетичные и все менее стабильные состояния кварк-глюонных систем. Эту картину, которой мог бы порадоваться разве что Белый Король (см. эпиграф к настоящей лекции), теоретики назвали "Великой пустыней". К счастью, у таких теорий имеются отмеченные выше проблемы, заставляющие нас искать проявления более фундаментальных закономерностей – динамического нарушения симметрии с помощью технифермионов, суперсимметрии и т.д..

Впрочем, одно из предсказаний ТВО можно проверять уже при низких энергиях. Как отмечалось выше, взаимодействие посредством обмена бозонами X и Y может приводить к несохранению барионного и лептонного зарядов. Поскольку масса этих бозонов чрезвычайно велика, можно работать с эффективным четырехфермионным лагранжианом вида

$$L_{\Delta B=1} \;=\; \frac{g_{GU}^2}{2M_X^2}\;\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\;\epsilon^{ij}\;[\bar{u}_\gamma^c\gamma^\mu q_{\beta i}]\;\left([\bar{d}_\alpha^c\gamma_\mu l_j]\;+\;[\bar{e}^+\gamma_\mu q_{\alpha j}]\right)$$

$(\alpha,\beta,\gamma = r,y,g;\; i,j = T_3)$. Для нас наибольший интерес представляет то, что здесь возникает возможность распада протона – например, на мезон и лептон (нужно только обеспечить выполнение закона сохранения энергии в СЦИ, проследить за сохранением $B-L$ и учесть смешивание фермионов различных поколений – с учетом вида матрицы ККМ при рождении странных мезонов должно выполнятся требование $\Delta S < 0$). Точное вычисление времени жизни протона довольно громоздко, так как требует последовательного учета вклада сильного взаимодействия в непертурбативной области. Для оценки можно считать, что матричный элемент перехода $M_{\Delta B=1} \sim g_{GU}^2/M_X^2$, и (с учетом соображений размерности) ширина распада

$$\Gamma_p \;=\; A^{-1}\cdot\;\frac{\alpha_{GU}^2 m_p^5}{M_X^4}.$$

Коэффициент A^{-1} по порядку величины соответствует вероятности столкновения пары кварков в протоне – будем считать, что A не слишком сильно отличается от 1 (модельные расчеты в $SU(5)$ дают при различных предположениях $A \sim 10^{-1} - 10^{1}$), поэтому

$$\tau_p \ \geq \ \frac{M_X^4}{\alpha_{GU}^2 m_p^5} \sim 10^{30} \textit{лет}.$$

Так как 1 т вещества содержит $\sim 3 \cdot 10^{29}$ протонов, то при достаточно большой массе образца, находящегося под наблюдением детекторов частиц, можно было ожидать регистрации распада протона за приемлемое время (конечно, нам придется решить сложную техническую проблему выделения подобных событий на фоне частиц от космических лучей). Однако до сих пор никаких подтверждений регистрации распада протона найдено не было, хотя на установке KAMIOKANDE мы должны были иметь порядка 10 событий в год даже при $\tau_p = 10^{32}$ лет! Таким образом, по крайней мере в этом отношении предсказания $SU(5)$- модели не согласуются с экспериментом.

Другой возможный способ проверки ТВО состоит в сравнении масс лептонов и кварков. Так как, например, d- кварк и электрон почти одинаковым образом входят в фундаментальные мультиплеты $SU(5)$ (правые компоненты объединены в 5-плете, а левые находятся в одном столбце или строке 10-плета), то они одинаковым образом взаимодействуют с полями Хиггса и при вычислении после СНС массовых членов для фермионов оказывается, что в масштабе энергий M_{GU}

$$m_d \ = \ m_e \ , \ \ m_s \ = \ m_\mu \ , \ \ m_b \ = \ m_\tau.$$

Как и в случае констант связи, эти равенства после учета перенормировки массы можно превратить в соотношения между низкоэнергетическими значениями "физических" масс. В частности, в минимальной ТВО при энергии, отвечающей порогу рождения $(\bar{b}b)$

$$\frac{m_b}{m_\tau} \ \simeq \ \ 3,$$

что довольно хорошо согласуется с экспериментом. Аналогичные соотношения для легких кварков d и s приводят к неправильным результатам, но это не следует рассматривать как неудачу модели, так как $m_d \ll \Lambda_{QCD}$, $m_s \sim \Lambda_{QCD}$, и применимость ренормгрупповых соображений для них нельзя считать обоснованной.

Задачи к лекциям 4,5:

1. Вычислить M_GU и $sin^2\theta_W$ в минимальной ТВО, исходя из значений электромагнитной и сильной констант связи при $-Q^2 = \mu^2 \ = \ 1$ ГэВ, 10 ГэВ.

2. Какие фейнмановские диаграммы (на кварк - лептонном уровне) описывают распад протона $p \to \pi e$? Перечислить другие возможные каналы двухчастичных распадов протона в $SU(5)$- модели.

3. Найти массы, приобретаемые скалярными частицами в минимальной $SU(5)$-модели с потенциалом самодействия скалярных полей $V(H,\phi)$ после первого СНС $SU(5) \to G_{SM}$.

4. Какие мультиплеты скалярных частиц (кроме (5) и (24)) могут участвовать в юкавовском взаимодействиями с фермионами $SU(5)$- модели?