Лекция 6: **Решения с нетривиальной топологией в неабелевых калибровочных теориях.**

"Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила по узкому каналу пара лошадей, как вдруг баржа ... остановилась; ... масса воды в канале скопилась у носа судна в бурном волнении, затем ... покатилась вперед с большой скоростью в форме большого уединенного возвышения ; ... четко видимый водяной горб продолжал двигаться по каналу без заметного изменения формы или уменьшения скорости".

(Дж. Скотт – Рассел, "Сообщение о волнах".)

Процитированное выше сообщение было сделано на XIV собрании Британской ассоциации развития науки в 1845 году. Однако только в середине 60-х годов нашего столетия были разработаны теоретические принципы анализа подобных явлений – было обнаружено, что нелинейные волновые уравнения могут иметь стационарные решения с конечной энергией, описывающие распространение неизменного по форме локализованного уединенного импульса. Такие решения были названы *солитонами*. Оказалось, что с математической точки зрения стабильность солитона тесно связано с его нетривиальным топологическим устройством. Важным открытием явилось то, что солитоны очень часто присутствуют среди решений классических уравнений движения спонтанно нарушенных калибровочных теорий. Рассмотрим простой пример – теорию вещественного скалярного поля в пространстве-времени (1+1)-измерений с плотностью лагранжиана

$$L \;=\; \frac{1}{2}\,[\,(\partial_0\phi)^2 \;-\; (\partial_1\phi)^2\,] \;-\; V(\phi),$$

в котором самодействие скалярного поля

$$V(\phi) \;=\; \frac{\lambda}{2}\,(\,\phi^2 \;-\; v^2\,)^2\,, \quad v \;\equiv\; \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}.$$

Минимум энергии

$$E \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{\, \frac{1}{2}\,(\partial_0\phi)^2 \;+\; \frac{1}{2}\,(\partial_1\phi)^2 \;+\; V(\phi)\,\right\} dx$$

достигается в вакуумных полевых конфигурациях

$$\phi^{(1,2)}_{vac} \;\equiv\; \pm\, v\,, \quad E_{vac} \;=\; 0$$

Легко можно убедиться в существовании стационарных решений с конечной энергией. Ясно, что для этого достаточно построить статические решения, для которых

$\partial_0\phi = 0$ (т.е. они описывают покоящийся солитон) – решения с $\partial_0\phi \neq 0$ можно получить с помощью преобразований Лоренца. Для статических решений уравнения движения

$$\partial_0^2\phi \; - \; \partial_1^2\phi \; + \; V'(\phi) \; = \; 0 \quad \rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\phi \; - \; V'(\phi) \; = \; 0$$

легко интегрируются:

$$x \; - \; x_0 \; = \; \pm \int\limits_0^\phi \frac{dz}{\sqrt{2V(z)}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \phi_\pm(x) \; = \; \pm \, v \; th(\mu(x - x_0)).$$

Полевую конфигурацию, описываемую ϕ_+ называют *кинком*, а ϕ_- – *антикинком*. Видно, что при $x \to \pm\infty$ каждое из этих решений стремится к <u>различным</u> вакуумным значениям. Энергия кинка $E_k = 4\mu^3/3\lambda > E_{vac}$, но тем не менее это решение является устойчивым относительно малых возмущений. Причину этого можно понять, если определить сохраняющийся ток и вычислить соответствующий заряд, являющийся интегралом движения:

$$j_\mu(x) \; \equiv \; \epsilon_{\mu\nu} \, \partial^\nu\phi(x) \; , \quad \partial^\mu \, j_\mu \; = \; 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q \; \equiv \; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_0 \; dx \; = \; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\phi \; dx \; = \; \phi(+\infty) \; - \; \phi(-\infty) \; = \; const$$

Учитывая явный вид решений, можно записать Q через "число кинков" k (равное +1 для кинка, 0 для вакуума и -1 для антикинка):

$$Q \; = \; 2 \, v \; \cdot \; k \; .$$

Поэтому в процессе эволюции системы кинк не может перейти в вакуум, и является стабильным. Нетрудно заметить, что существование и стабильность кинка имеют топологическую природу – они стали возможны благодаря неодносвязности множеств вакуумных значений поля и точек пространственной бесконечности (в связи с этим законы сохранения типа рассмотренного выше обычно называют "топологическими законами сохранения").

При увеличении числа пространственных измерений ситуация изменяется: в многомерных полевых системах пространственная бесконечность – односвязная область, и, если топология решения нетривиальна (отличается от топологии вакуума, в котором поле имеет некоторое постоянное значение), то на бесконечности поле есть функция направления вектора координаты, что приводит к расходимости интеграла энергии (плотность энергии содержит слагаемое $\frac{1}{2} \, (\vec{\nabla}\phi)^2$). Поэтому в теории одного скалярного поля в пространстве-времени $(1+n)$ измерений при $n \geq 2$ солитонов нет.

Однако полевые конфигурации можно стабилизировать путем введения других (например - векторных) полей, взаимодействующих со скалярным полем. Конечно, при этом поведение векторных и скалярных полей должно быть скоррелировано во всем пространстве. В качестве примера рассмотрим модель Джорджи - Глэшоу, которая некогда рассматривалась как один из кандидатов на роль теории электрослабого взаимодействия. Она основана на группе калибровочной симметрии $SU(2)$, спонтанно нарушаемой с помощью изотопического триплета полей Хиггса: в отсутствие полей материи

$$L \ = \ - \frac{1}{4} \ F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \ + \ \frac{1}{2} \ D_\mu \phi^a D^\mu \phi^a \ - \ V(\phi),$$

где тензор напряженности поля

$$F^a_{\mu\nu} \ \equiv \ \partial_\mu A^a_\nu \ - \ \partial_\nu A^a_\mu \ - \ e\epsilon^{abc} A^b_\mu A\nu^c$$

(калибровочный заряд обозначен за "$-e$"), ковариантная производная (ее вид определяется тем, что поля Хиггса принадлежат присоединенному представлению $SU(2)$)

$$D_\mu \phi^a \ = \ \partial_\mu \phi^a \ - \ e\epsilon^{abc} A^b_\mu \phi^c,$$

а

$$V(\phi) \ = \ \frac{\lambda}{4} \ (\ \phi^a \phi^a \ - \ v^2 \ )^2.$$

Множество вакуумных состояний поля ϕ с нулевой энергией – сфера радиуса v в изотопическом пространстве. Пусть СНС произошло таким образом, что $< \phi^a >_{vac} = (0, 0, v)$, т.е. исходная калибровочная симметрия нарушается до подгруппы $U(1)_3$, отвечающей вращениям вокруг оси 3. В этом случае за счет взаимодействия с полем Хиггса поля A^1_μ и A^2_μ приобретают одинаковую массу, и из них можно составить одно заряженное векторное поле

$$W^\pm_\mu \ \equiv \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ (\ A^1_\mu \ \pm \ i \ A^2_\mu \ )$$

с массой $M_W = ev$. Поле $A_\mu \equiv A^3_\mu$ остается безмассовым (далее будем называть его электромагнитным). Поля W поглотили два скалярных вещественных поля, так что после перехода к унитарной калибровке (т.е после выделения "физических" полям, квантуемым в окрестности вакуума) мы получим теорию, содержащую электромагнитное поле, поля заряженных массивных векторных бозонов и одно массивное вещественное скалярное (хиггсовское) поле ($m_H = v\sqrt{2\lambda}$). Можно отметить, что модель Джорджи - Глэшоу похожа на модель Салама - Вайнберга без нейтрального массивного векторного бозона (Z^0). Рассмотрим теперь статическое решение классических уравнений движения, в котором ϕ на бесконечности стремится к ненулевому значению, зависящему от направления:

$$\phi^a \;=\; \phi^a(\vec{r} = r \cdot \vec{n})|_{r\to\infty} \;\to\; \; v \cdot n_a. \tag{1}$$

Обратим внимание, что здесь произведено отождествление направлений в координатном и изоспиновом пространстве – изотопический вектор $\vec{\phi}$ в удаленной точке $r \cdot \vec{n}$ направлен "в ту же сторону", что и $\vec{n}$. Это решение топологически отличается от вакуума – не существует всюду несингулярного преобразования, переводящего (1) в вакуум ($\vec{\phi} \equiv v\vec{e}_3$) (решение (1), на бесконечности "ощетинившееся" векторами $\vec{\phi}$, направленными от центра, назвали "ежом", так что предыдущее утверждение часто формулируют в виде "невозможно всюду причесать ежа"). Энергия конфигурации скалярных и векторных полей будет конечна, если при $r \to \infty$

$$A^a_\mu \;\sim\; O(r^{-1})\;, \quad D_\mu\phi^a \;\sim\; O(r^{-2})\;.$$

Статическое решение уравнений движения, удовлетворяющее таким граничным условиям, можно искать в виде (*анзац т'Хоофта – Полякова*)

$$\begin{aligned} \phi^a \;&=\; \frac{r_a}{er^2}\;\cdot H(evr)\;, \\ A^a_i \;&=\; -\,\epsilon^{aij}\,\frac{r_j}{er^2}\;\cdot [\;1\;-\;K(evr)\;]\;, \\ A^a_0 \;&\equiv\; 0\;. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь вид функций $H(z)$ и $K(z)$ определяется единственным параметром – $\kappa \equiv \lambda/e^2$:

$$z^2\,\frac{d^2K}{dz^2} \;=\; KH^2 \;+\; K(K^2\;-\;1),$$

$$z^2\,\frac{d^2H}{dz^2} \;=\; 2K^2H \;+\; \kappa H(H^2\;-\;z^2).$$

Причем при $z \to \infty$

$$H(z)\;\sim\;z\;,\quad K(z) \to 0\;,$$

а при $z \to 0$

$$H(z)\;\le\;O(z)\;,\quad K(z)\;-\;1\;\le\;O(z)\;.$$

Энергия полевой конфигурации (2) выражается через сходящийся интеграл

$$E \;=\; \frac{4\pi v}{e}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{z^2}\Big[z^2K'^2 \;+\;\frac{1}{2}\,(zH'-H)^2 \;+\;\frac{1}{2}\,(K^2-1)^2\;+$$

$$+\;K^2H^2\;+\;\kappa(H^2-z^2)^2\Big] \;\equiv\; \frac{4\pi v}{e}\,F(\kappa)\;.$$

Численные вычисления показывают, что в довольно широкой области значений κ $F \sim 1$, так что масса солитона (обозначим его символом M)

$$m_M \;\sim\; \frac{4\pi v}{e} \;=\; \frac{4\pi}{e^2}\, M_W \;=\; \frac{M_W}{\alpha}.$$

Для понимания физической природы построенного полевого образования следует перейти к унитарной калибровке и тем самым выяснить картину распределения физических полей. Ограничимся исследованием только асимптотического поведения. Ясно, что массивные поля в островном статическом решении экспоненциально убывают при $r \to \infty$, а электромагнитное поле (напомним, что в унитарной калибровке его тензор напряженностей совпадает с $F^3_{\mu\nu}$)

$$F^3_{ij}|_{r\to\infty} \;\sim\; \frac{1}{er^4}\,\epsilon^{ijk} r_a r_k \;, \quad F^3_{0\mu} \;=\; 0 \Rightarrow$$

$$E_i \;=\; F^3_{0i} \;=\; 0 \;, \quad B_i \;=\; \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk} F^3_{jk} \;=\; -\,\frac{1}{e}\,\frac{r_i}{r^3}.$$

Таким образом, поле в удаленных от "сердцевины" солитона точках является полем *магнитного монополя*! Размер сердцевины обратно пропорционален массам M_W или m_H, т.е. величине вакуумного среднего поля Хиггса.

Этот довольно неожиданный результат весьма примечателен. Напомним, что магнитные заряды и токи можно ввести в теорию Максвелла наряду с электрическими симметричным образом: покоящиеся магнитные заряды будут порождать потенциальное магнитное поле, а магнитные токи – вихревое электрическое поле. Дирак предложил способ сконструировать монопольное решение в обычной электродинамике, рассмотрев магнитное поле, выходящее из конца бесконечно длинного соленоида в пределе нулевой его толщины. Такое поле всюду, кроме оси соленоида (превратившегося в бесконечно тонкую ненаблюдаемую "дираковскую струну") совпадает с полем магнитного монополя. Монополь Дирака нуждается в струне, "поставляющей" ему поток магнитного поля. В случае же монополя т'Хоофта - Полякова ось сингулярности в $\vec{B}$ отсутствует. Исследуя поведение частиц с зарядом q в поле магнитного монополя

$$\vec{B} \;=\; g \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Дирак установил, что проквантовать уравнения движения непротиворечивым образом возможно лишь в том случае, если

$$g \cdot q \;=\; \frac{1}{2}\, n,$$

где n- целое число (это соотношение обычно называют условием квантования Дирака). Для монополя т'Хоофта - Полякова $g = -\frac{1}{e}$, заряды частиц $q = -e \cdot T_3 = -en/2$, и поэтому $gq = -\frac{1}{e} \cdot n \frac{-e}{2} = \frac{n}{2}$. Магнитное поле такого монополя несингулярно всюду, в том числе и в его "сердцевине", в которой также присутствуют вклады остальных полей. Так как решение (2) сферически симметрично в изотопическом пространстве, то можно считать, что в сердцевине монополя восстановлена полная ненарушенная калибровочная симметрия, а асимптотику решения мы рассматриваем на фоне вакуума, нарушающего симметрию.

Интересной особенностью (2) является уже отмечавшееся перемешивание пространственных и изотопических индексов. Точнее, это решение инвариантно относительно "синхронных" поворотов в координатном и изоспиновом пространстве, генерируемых оператором

$$\hat{\vec{K}} \ = \ \hat{\vec{J}} \ + \ \hat{\vec{T}} \ ,$$

в котором $\hat{\vec{J}} \equiv \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ – оператор полного момента количества движения. В результате собственные значения оператора момента системы оказываются связаны со значениями изоспина. Если монополь захватывает скалярный изодублет (ϕ^+, ϕ^-) (изоспин равен 1/2) , то возникнет топологически нетривиальное решение с полуцелым полным механическим моментом, хотя никакие фермионы в такой полевой конфигурации не присутствуют! Более того – как оказалось, эти образования подчиняются статистике Ферми-Дирака. Таким образом, монополь производит спин из изоспина. Аналогичным образом можно показать, что при захвате монополем спинорной частица может получиться система с целым полным моментом. Так как электрический заряд связан с T_3, то в поле монополя возможно также изменение заряда частицы (разумеется, полный заряд сохраняется, просто происходит перестройка топологически нетривиального решения: теряемый частицей заряд передается монополю и он превращается в *дион* – частицу, несущую и электрический, и магнитный заряды).

Появляются ли монополи в более реалистичных теориях? Доказано, что это происходит в любой калибровочной теории поля, основанной на простой группе исходной симметрии G, спонтанно нарушаемой за счет присутствия скалярных полей до группы, представляющейся в виде произведения простых групп и содержащей фактор $U(1)$:

$$G \ \ \rightarrow \ \ G' \ = \ G'' \ \otimes \ U(1).$$

Нетрудно заметить, что этому условию удовлетворяют почти все модели Великого Объединения, в которых симметрия G_{GU} в два этапа нарушается до $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$, поэтому в таких теориях неминуемо появятся магнитные монополи, связанные с существованием хиггсовских полей, обеспечивающих первое СНС $G_{GU} \rightarrow G_{SM}$ (в самой СМ монополи не появляются). Масса монополя $m_M \sim M_X/\alpha$ очень велика – например, в $SU(5)$- модели $m_M \geq 10^{16}$ГэВ, что отчасти объясняет тот факт, что их до сих пор не обнаружили экспериментально. Вместе с тем монополи должны были рождаться на ранних этапах эволюции Вселенной, и тогда они обязаны были – пусть и в небольшом количестве – сохраниться до наших дней. Поиск реликтовых монополей по специфическому отклику, который должен возникать в сверхпроводящем контуре при пролете через него магнитного заряда, ведется довольно интенсивно, однако все, что удалось найти – это единичные события, похожие на такой отклик. Во всяком случае, верхний предел на концентрацию монополей в Солнечной системе оказался намного ниже первоначально ожидаемого значения, что побудило теоретиков к весьма значительному пересмотру сценария развития ранней Вселенной.

Особенностью монополей в ТВО является наличие у них не только асимптотического монопольного магнитного, но и асимптотического монопольного хромомагнитного поля (появляющегося вследствие того, что нарушающие G_{GU} скалярные поля взаимодействуют не только с калибровочными бозонами электрослабого сектора, но и с глюонами). Любопытно, что при взаимодействии такого монополя с фермионами может происходить перестройка решения, выражающаяся в том, что монополь окружает себя фермионным конденсатом с нулевыми значениями цветового заряда и $B-L$ – например, $u_r u_y d_g e^-$. С точки зрения чисел заполнения обычных частиц этот процесс будет наблюдаться как индуцированный распад протона

$$M \ + \ p \ \to \ M \ + \ u_r \ + \ u_y \ + \ d_g \ \to \ M \ + \ e^+.$$

Расчеты показывают, что в некоторых моделях сечение подобных процессов могут быть сравнимы с сечениями обычных адронных неупругих процессов. В этой реакции сам монополь сохраняется, так что теоретически он мог бы последовательно разрушить очень большое число протонов. Энерговыделение при распаде протона очень значительно, так что, собрав некоторое число остановившихся реликтовых монополей, можно было использовать их для построения необычайно эффективной энергоустановки. Впрочем, как в вопросе о реальности существования монополей, так и в оценках эффективности катализа ими протонных распадов на сегодняшний день остается еще очень много неясного.

Монополи не являются единственным примером топологически нетривиальных решений, существующих в классических калибровочных теориях поля. С точки зрения квантовой теории важность таких решений обусловлена тем, что они могут рассматриваться как "конденсатная" (классическая) составляющая кватовых полей, причем квантование в окрестности решения с нетривиальной топологией в значительной степени отражается на динамике квантовой системы. С алгебраической точки зрения различия в топологической структуре различных "вакуумных" конфигураций обусловлена их принадлежностью к разным *гомотопическим классам*. Например, статические вакуумные конфигурации калибровочных полей есть не зависящие от времени решения классических уравнений движения с заданными на поверхности большого радиуса граничными условиями для потенциалов в виде "чистой калибровки" (потенциала, соответствующего нулевым значениям напряженностей и, следовательно, получаемых путем калибровочного преобразования тривиального решения $A^a_\mu \equiv 0$). Классификация таких решений может быть построена на основании классификации граничных условий, а фиксацию последних можно рассматривать как задание отображения сферы в координатном пространстве в компактное групповое пространство калибровочных преобразований (например, любому преобразованию группы $SU(2)$ может быть поставлена в соответствие точка трехмерной сферы, вложенной в четырехмерное пространство). Такие преобразования разбиваются на классы, характеризующиеся некоторым целочисленным топологическим индексом. Происхождение подобной классификации легко понять на простом примере: рассмотрим отображение окружностей $C^1 \rightarrow C^1$; такое отображение может быть однозначным (проекция одной окружности на другую, расположенную вокруг нее), двузначным (вторая окружность перед проектированием дважды "оборачивается" вокруг первой), трехзначным и т.д. Число "обертываний" – n – и есть топологический индекс (*индекс Понтрягина*) – отображения с разными его значениями не могут быть несингулярным непрерывным образом трансформированы друг в друга. В каждом гомотопическом классе существует решение, отвечающее минимуму энергии – "локальный вакуум", но среди нестатических решений в пространстве Минковского нет траекторий, связывающих состояния из разных классов, а квантование теории в окрестности разных локальных вакуумов приводит к теориям с разным физическим содержанием. В калибровочных теориях поля, таким образом, существует некоторое множество неэквивалентных вакуумных состояний, характеризуемых разными значениями индекса n.

Более детальное исследование ситуации показало, что эти вакуумы тем не менее не являются совершенно изолированными друг от друга – обнаружилось, что связывающие их траектории – решения полевых уравнений с конечным действием – существуют в <u>евклидовом</u> пространстве. Начиная с конца 70-х годов эти объекты – *инстантоны* – вызывают значительный интерес у теоретиков. Прежде чем изучать инстантонные решения в реалистичных моделях, рассмотрим на более простых примерах их отличительные особенности и влияние на динамику квантовых систем.

Евклидов вариант полевой теории строится путем замены временной координаты пространства Минковского $x_0 \equiv t$ на четвертую компоненту евклидова координатного вектора $x_4 \equiv \tau \equiv it$. Отметим, что такая замена приводит к изменению сигнатуры метрического тензора – в евклидовом пространстве $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (т.е. нет никакого различия между ковариантными и контравариантными индексами), поэтому динамика полевых систем в евклидовом режиме может качественно отличаться от псевдоевклидова поведения. При этом всякое решение для евклидовой системы уравнений движения является аналитическим продолжением некоторого решения в пространстве Минковского на мнимую ось в плоскости комплексных значений временной координаты. Евклидовы уравнения движения могут быть получены из принципа наименьшего действия, причем $S_E = -iS_M|_{t \to -i\tau}$ (множитель $-i$ введен в определение действия для сохранения его вещественности и удобства определения производящего функционала в квантовом варианте теории, на вид классических уравнений движения он не влияет). Рассмотрим в качестве иллюстрации сказанного теорию свободного вещественного скалярного поля. В пространстве Минковского условие минимальности действия

$$S_M \;=\; \int dt d^3\vec{r}\;[\;\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 \;-\; \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 \;-\; m^2\phi^2\;]$$

приводит к уравнению движения Клейна - Гордона - Фока – уравнению второго порядка в частных производных гиперболического типа

$$(\;\partial_0^2 \;-\; \vec{\nabla}^2 \;+\; m^2\;)\;\phi \;=\; 0.$$

После замены $x_0 \to -ix_4$ мы приходим к евклидову функционалу действия

$$S_E \;=\; \int d^4x\;[\;\frac{1}{2}(\partial_4\phi)^2 \;+\; \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 \;+\; m^2\phi^2\;]$$

и полевому уравнению <u>эллиптического</u> типа

$$(\;\partial_4^2 \;+\; \vec{\nabla}^2 \;-\; m^2\;)\;\phi \;=\; 0.$$

Оно имеет решения с качественно отличающимся от решений КГФ поведением: любой свободный волновой пакет – решение гиперболического уравнения – либо статичен, либо "убегает" на бесконечность, а у эллиптического уравнения существуют решения, ограниченные по всем измерениям, т.е. удовлетворяющие условию $\phi \to 0$ на бесконечности пространства R^4 (именно локализация по "времени" послужила причиной, по которой им дали имя "инстантоны" – от английского "instant").

Зачем нам нужно изучать евклидовы решения? Ответ становится ясен после квантования теории. Для примера рассмотрим частицу в потенциале "двойной ямы" (для наглядности в формулах, относящихся к данному примеру, восстановим явным образом присутствие постоянной Планка $\hbar$)

$$U(x) \; = \; \frac{\lambda}{4} \, (x^2 - a^2)^2.$$

Классические "вакуумные" решения (локальные минимумы энергии) соответствуют $x = \pm a$, $E_{vac} = 0$. После квантования эти вакуумные состояния (их энергия, конечно, отлична от нуля: $E_{vac}^{\text{кв}} \simeq \hbar a \sqrt{\lambda/2m}$, но будем считать ее далее пренебрежимо малой по сравнению с высотой барьера $\lambda a^4/4$) уже не независимы, так как возможны туннельные переходы между ними. Конечно, среди решений классических уравнения движения в обычном времени

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \; = \; - \, \frac{\partial U}{\partial x}$$

нет траекторий с $E = E_{vac} = 0$, связывающей эти состояния. Но такая траектория существует в евклидовой динамике: при $t \to -i\tau$

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} \; = \; - \, \frac{\partial(-U)}{\partial x}$$

и первый интеграл этого уравнения

$$E \; = \; \frac{m}{2} \, \Big(\frac{dx}{d\tau}\Big)^2 \; - \; U(x)$$

позволяет легко найти требуемое решение

$$E \; \simeq \; 0 \quad \Rightarrow \quad x(\tau) \; \simeq \; x_0(\tau) \; = \; a \cdot th\Big(a\tau\sqrt{\frac{\lambda}{2m}}\Big) \; .$$

Евклидово действие на этой траектории оказывается конечным

$$S_E \; \simeq \; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \; \Big[\; \frac{m}{2} \, \Big(\frac{dx_0}{d\tau}\Big)^2 \; + \; U(x_0) \; \Big] \; = \; \frac{8a^3}{3} \, \sqrt{\frac{2m}{\lambda}} \; ,$$

и его значение определяет величину амплитуды <u>квантового</u> туннельного перехода между "вакуумами" в квазакласическом приближении

$$A_T \; \simeq \; e^{-S_E/\hbar} \, \Big[\; 1 \; + \; O(\hbar) \; \Big] \; .$$

Таким образом, мы приходим к важному выводу: существование классических эвклидовых траекторий с конечным действием, связывающей неэквивалентные вакуумные конфигурации, означает, что после квантования между вакуумными состояниями будут возможны туннельные переходы.

Рассмотрим теперь инстантоны в теориях Янга - Миллса на примере теории с калибровочной группой $SU(2)$. Объединяя потенциалы калибровочных полей в матрице

$$\hat{A}_\mu \; \equiv \; \sum_{a=1}^{3} g \, \frac{\hat{\tau}^a}{2} \, A^a_\mu \; ,$$

евклидово действие можно записать в виде

$$S_E \; = \; -iS_M|_{x_0 \to -ix_4} \; = \; \frac{1}{2g^2} \int d^4x \; Tr[\hat{G}_{\mu\nu}\hat{G}^{\mu\nu}]$$

($\hat{G}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]$ – тензор напряженностей). Классические уравнения движения

$$D_\mu \; \hat{G}^{\mu\nu} \; = \; \partial_\mu \hat{G}^{\mu\nu} \; + \; [\hat{A}_\mu, \hat{G}^{\mu\nu}] \; = \; 0$$

имеют решения, удовлетворяющие на сфере большого радиуса граничному условию в виде "чистой калибровки"

$$\hat{A}_\mu \; |_{|x|=R\to\infty} \; = \; \hat{U}(x)\partial_\mu[\hat{U}^{-1}(x)]$$

($\hat{U}(x)$ – унитарное преобразование, зависящее от координат), которое можно рассматривать как задание отображения трехмерных сфер $S^3 \to S^3$. Поэтому все решения разбиваются на гомотопические классы, характеризуемые индексом Понтрягина – *топологическим зарядом* Q. Более детальный анализ показывает, что его можно записать в виде функционала от полевой конфигурации

$$Q \; = \; \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \; Tr[\hat{\tilde{G}}_{\mu\nu}\hat{G}^{\mu\nu}]$$

(дуальный тензор определяется как $\hat{\tilde{G}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}$). Решение уравнений движений доставляет минимум функционалу действия. Важным шагом в исследовании инстантонных решений явился переход от этой вариационной задачи к алгебраической – *уравнениям (анти)самодуальности*. Для его осуществления рассмотрим очевидное неравенство

$$\int d^4x \; Tr[(\hat{\tilde{G}}_{\mu\nu} \; \pm \; \hat{G}^{\mu\nu})^2] \; \geq \; 0 \; ,$$

которое с учетом свойств следа $Tr[\hat{\tilde{G}}_{\mu\nu} \; \hat{\tilde{G}}^{\mu\nu}] \; = \; Tr[\hat{G}_{\mu\nu} \; \hat{G}^{\mu\nu}]$ приводит к

$$\int d^4x \; Tr[\hat{G}_{\mu\nu} \; \hat{G}^{\mu\nu}] \; \geq \; |Tr[\hat{\tilde{G}}_{\mu\nu} \; \hat{G}^{\mu\nu}]| \; ,$$

то есть

$$S_E \; \geq \; \frac{8\pi^2}{g^2} \; |Q|, \tag{3}$$

причем равенство достигается только при

$$\hat{\tilde{G}}_{\mu\nu} \; = \; \pm \, \hat{G}^{\mu\nu} \; .$$

Таким образом решение уравнений (анти)самодуальности приводит к конфигурации, отвечающей минимуму действия в данном гомотопическом классе. Подстановка

$$A^a_\mu \; = \; \frac{1}{g} \; \bar{\eta}^{a\mu\nu} \; \partial_\nu [ln\phi] \; ,$$

в которой $\bar{\eta}^{a\mu\nu}$ – символы т'Хоофта:

$$\bar{\eta}^{a\mu\nu} \; \equiv \; -\bar{\eta}^{a\nu\mu} \; \equiv \; \begin{cases} \varepsilon^{a\mu\mu} & \mu,\nu = 1,2,3 \\ -\delta^{a\mu} & \nu = 4 \end{cases}$$

превращает уравнения самодуальности в простое уравнение для ϕ:

$$\frac{\partial_\mu \partial^\mu \phi}{\phi} \; = \; 0.$$

уравнения антисамодуальности решаются аналогично, с заменой $\bar{\eta}^{a\mu\nu}$ на $\eta^{a\mu\nu}$, отличающиеся только знаком при $\mu,\nu = 4$. Одноинстантонное решение (с топологическим зарядом $Q = +1$) порождается

$$\phi(x) \; = \; 1 \; + \; \frac{\lambda^2}{|x_\mu - a_\mu|^2}$$

(причем a_μ и λ имеют смысл координат центра и размера инстантона) и имеет вид

$$A^a_\mu \; = \; - \; \frac{2}{g} \; \bar{\eta}^{a\mu\nu} \; \frac{\lambda^2 y_\nu}{y^2(y^2+\lambda^2)},$$

$(y_\mu \equiv x_\mu - a_\mu)$. Появившуюся здесь сингулярность можно устранить калибровочным преобразованием, после которого одноинстантонное решение записывается как

$$A'^{\,a}_\mu \; = \; - \; \frac{2}{g} \; \eta^{a\mu\nu} \; \frac{y_\nu}{y^2+\lambda^2}. \tag{4}$$

При $x_4 \to \pm\infty$ $A'^{\,a}_\mu$ ведет себя как "чистая калибровка" и отвечает двум топологически различным вакуумным конфигурациям. Можно построить также N - инстантонные и антиинстантонные решения $(Q = \pm N)$.

Существование инстантонов указывает на то, что между разными вакуумами в квантовай теории должны происходить туннельные переходы, и поэтому истинный вакуум – стационарное состояние с минимальной возможной энергией – является линейной комбинацией состояний с определенными значениями топологического заряда:

$$|vac> \equiv \; |\theta> = \; \sum_Q \; e^{-iQ\theta} \; |Q> .$$

Видно, что устройство вакуумного состояния в неабелевых калибровочных теориях оказывается весьма сложным и может влиять на динамику квантовых полей, определенных на его фоне. В частности, функции Грина в калибровочном секторе теории надо будет вычислять исходя из эффективного лагранжиана

$$L_{ef} \ = \ L \ + \ \frac{\theta}{16\pi^2} \ Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \ ,$$

в котором добавочное слагаемое нарушает P- и CP- инвариантность теории.

Отметим, что эти рассуждения в полной мере применимы к КХД, которую мы рассматриваем как реалистичную теорию сильного взаимодействия. Инстантоны дают вклад в непертурбативную плотность вакуумной энергии (см. лекцию I.11), и поэтому высказывались надежды, что они позволят решить проблему описания конфайнмента. К сожалению, оказалось, что в "обычной" КХД в трехмерном пространстве вклад инстантонов недостаточно велик, хотя в одномерных теориях взаимодействие двух зарядов в θ - вакууме действительно приводит к линейно растущему эффективному потенциалу. Позднее было предложено для обеспечения удержания кварков включить в рассмотрение наряду с инстантонами *мероны* – решения с полуцелым топологическим зарядом и бесконечным действием. Это может иметь смысл, так как двухмеронные конфигурации ($Q = 1$) могут иметь конечное действие и давать ненулевой вклад в амплитуду вакуум-вакуумного перехода. Впрочем, не исключено, что существуют и другие, не известные сейчас типы непертурбативных вакуумных флуктуаций глюонного поля, дающие существенный вклад в вакуумную плотность энергии в КХД.

Задачи к лекции 6:

1. В теории вещественного скалярного поля в одном пространственном измерении построить стационарное решение, описывающее кинк, движущийся со скоростью v. Вычислить его энергию.

2. Для частицы с зарядом q, движущейся в поле магнитного монополя g, найти полный момент количества движения (с учетом момента электромагнитного поля). Получить соотношение между q и g, появляющееся вследствие квантования момента количества движения.

3. Для одноинстантонного решения в виде (4) убедиться, что оно:

   а) удовлетворяет классическим уравненим движения;

   б) отвечает $Q = +1$.

   Вычислить соответствующий тензор напряженности.