Лекция 3: **Внутренние симметрии адронов и кварковая модель.**

"Ибо таковы бесстыдные утверждения Демокрита, а еще раньше Левкиппа, будто существуют некоторые легкие тельца – одни шероховатые, другие круглые, третьи угловатые и крючковатые, четвертые закривленные и как бы внутрь загнутые, и из этих – то телец образовались небо и земля."

(Марк Тулий Цицерон, "О границах добра и зла")

При обсуждении свойств адронов мы отмечали наличие у адронных состояний изотопической симметрии – их можно сгруппировать в мультиплеты, рассматриваемые как набор состояний одной "частицы" с разными значенями проекции изотопического спина. С математической точки зрения это означает, что поля частиц мультиплета можно объединить в одно квантовое поле, обладающее спинорной структурой (число компонент спинора равно $2I+1$ для мультиплета с изотопическим спином I), а гамильтониан системы полей с довольно хорошей точностью инвариантен относительно преобразований, "перепутывающих" компоненты изотопических спиноров. Как и в случае обычного спина, группа вращений в изотопическом пространстве – это группа специальных унитарных двухрядных матриц $SU(2)$. Напомним, что $SU(2)$ является универсальной накрывающей группы обычных вращений трехмерного вещественного пространства $SO(3)$, и поэтому генераторы группы (с помощью которых любое групповое преобразование может быть записано в виде

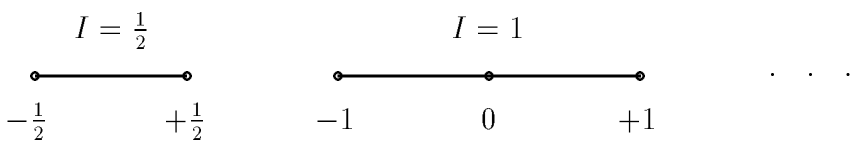
$$\hat{U} \; = \; exp[i\vec{\epsilon}\cdot\hat{\vec{J}}]$$

где $\hat{\vec{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3))$ по своим свойствам похожи на генераторы $SO(3)$ – операторы орбитального момента, с единственным отличием: собственные значения оператора Казимира $\hat{\vec{J}}^2$ равны $j(j+1)$, причем j может принимать не только целые, но и полуцелые значения. Алгебра Ли группы $SU(2)$ определяется коммутационными соотношениями

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] \; = \; i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k,$$

а ее неприводимые представления характеризуются значениями j (размерность такого представления равна $2j+1$). Операторы каждого неприводимого представления могут быть реализованы как матрицы в пространстве $(2j+1)$-компонентных спиноров, базис в котором образуют состояния с определенными значениями j и j_3. Переход от одного базисного состояния к другому можно осуществить с помощью повышающих и понижающих операторов для j_3: $\hat{J}_\pm \; \equiv \; \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$.

Таким образом, адронные состояния, принадлежащие одному изотопическому мультиплету, можно рассматривать как базис неприводимого представления группы изоспина $SU(2)$: изотопические дублеты (n и p, K^+ и K^0) есть базис фундаментального представления с $j = I = \frac{1}{2}$, триплеты (π^+, π^0, π^-, $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$) – присоединенного представления (его размерность совпадает с размерностью группы) с $j = I = 1$. То обстоятельство, что базисные состояния можно различать по собственным значениям одного из генераторов (ранг группы $SU(2)$ равен 1), позволяет изображать изотопические мультиплеты в виде одномерного графа – отрезка прямой с точками, отвечающими базисным элементам:

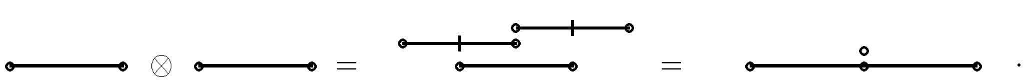


Поля изотопических мультиплетов, составленных из античастиц (таких как $\bar{n}$, $\bar{p}$), преобразуются по сопряженным представлениям: генераторы $(j)^*$ есть $\hat{J}_i^{(c)} = -\hat{J}_i^*$. Однако для группы $SU(2)$ сопряженное представление оказывается унитарно эквивалентно исходному – существует оператор $\hat{C}$, такой, что $\hat{C}^+\hat{J}_i\hat{C} = -\hat{J}_i^*$ (к примеру, для фундаментального представления с $j = \frac{1}{2}$ $\hat{J}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$, и $\hat{C} = \hat{\sigma}_2$; как нетрудно проверить, $\hat{\sigma}_2\frac{1}{2}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_2 = -\frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^*$). Следовательно, поля мультиплетов античастиц образуют базис того же неприводимого представления, что и поля мультиплетов частиц.

Значения изотопического спина составной системы I, состоящей из подсистем с изотопическим спином I_1 и I_2, определяется квантовомеханическим правилом сложения моментов: $I = |I_1 - I_2|, ..., I_1 + I_2$. На языке теории групп это означает, что произведение двух неприводимых представлений есть приводимое представление, разложение которого на неприводимые в случае $SU(2)$ имеет вид

$$(I_1) \otimes (I_2) = (|I_1 - I_2|) \oplus ... \oplus (I_1 + I_2).$$

Процедуру разложения можно произвести графическим способом, последовательно помещая центр графа (точку $I_3 = 0$) одного из перемножаемых представлений над каждой из точек другого и разбивая получающуюся "многослойную" картину на графы неприводимых представлений: соотношение $(\frac{1}{2}) \otimes (\frac{1}{2}) = (0) \oplus (1)$ изображается как



т.е. $(\frac{1}{2})\otimes(\frac{1}{2}) = (0)\oplus(1)$. Поэтому пространство состояний системы нуклон-антинуклон ($I_1 = I_2 = \frac{1}{2}$) разбивается в прямую сумму подпространств, соответствующих состояниям систем с изотопическим спином 0 и 1, и с чисто алгебраической точки зрения некоторые изотопические синглеты и триплеты мезонов можно рассматривать как связанные состояния системы $N\bar{N}$: $\pi^+ = p\bar{n}$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}p + \bar{n}n)$, $\pi^- = \bar{p}n$, $\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}p - \bar{n}n)$ – такая модель строения мезонов была предложена Ферми и Янгом еще в 1949 году. Конечно, для проверки ее работоспособности следовало бы изучить также динамический аспект проблемы – найти потенциал взаимодействия нуклон-антинуклон и выяснить, есть ли у этой системы связанные состояния с соответствующей энергией. Впрочем, модель Ферми-Янга была отвергнута по другой причине – адронов было открыто слишком много, и далеко не все они укладывались в ее классификационную схему даже после того, как Саката и Марков предложили добавить к нуклонам в качестве "истинно элементарной" частицы еще и Λ-гиперон для расширения возможностей конструирования.

Для выяснения внутреннего устройства адронов попробуем найти в системе адронных состояний симметрии более обширные, чем изотопическая $SU(2)$. Ясно, что $SU(2)$ должна входить в них в качестве подгруппы, и что соответствующие мультиплеты частиц должны объединять несколько изотопических мультиплетов. Ключом к нахождению такой симметрии явилась классификация адронов по значениям I_3 и гиперзаряда Y – если наборы наиболее легких частиц с одинаковыми значениями спина, внутренней четности и барионного числа расположить в плоскости (I_3, Y), то они образуют весьма симметричные фигуры (см. рисунок 1).

Таким образом, мы ищем группу симметрии, имеющую подгруппу $SU(2)$, ранг, равный 2 (графы двумерны) и неприводимые представления с размерностями 8 и 10. Всем этим требованиям удовлетворяет группа специальных унитарных трехрядных матриц $SU(3)$ (соответствующую симметрию так и назвали – <u>унитарной</u>). Изучим подробнее ее свойства.

Унитарная матрица $n \times n$ с единичным детерминантом описывается $\frac{1}{2}(2n^2) - 1 = n^2 - 1$ независимыми вещественными параметрами. Следовательно, размерность группы $SU(3)$ равна 8. Ее генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли

$$[\hat{F}_a, \hat{F}_b] \; = \; i f_{abc} \hat{F}_c, \tag{1}$$

в котором полностью антисимметричные структурные константы f_{abc}, отличные от нуля, равны:

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Отметим, что $[\hat{F}_3, \hat{F}_8] = 0$, и эти два генератора могут быть диагонализованы одновременно. Базисные функции неприводимых представлений можно различать по собственным значениям этих операторов (ранг группы действительно равен 2). Например, в фундаментальном представлении генераторы группы записываются в виде бесследовых эрмитовых матриц 3×3

$$\hat{F}_a \ = \ \frac{1}{2}\,\hat{\lambda}_a,$$

где $\hat{\lambda}$ нормированы условием $Tr(\hat{\lambda}_a \hat{\lambda}_b) = 2\delta_{ab}$ и равны:

$$\hat{\lambda}_1 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}_2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}_3 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_4 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}_5 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}_6 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_7 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}_8 \ = \ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

и три базисных состояния соответствуют собственным значениям $\hat{F}_3$ и $\hat{F}_8$, равным $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ соответственно.

Удобно ввести операторы

$$\hat{I}_3 \ = \ \hat{F}_3, \quad \hat{Y} \ = \ \frac{2}{\sqrt{3}}\,\hat{F}_8,$$

$$\hat{I}_\pm \ = \ \hat{F}_1 \pm i\hat{F}_2, \quad \hat{V}_\pm \ = \ \hat{F}_4 \pm i\hat{F}_5, \quad \hat{U}_\pm \ = \ \hat{F}_6 \pm i\hat{F}_7,$$

и тогда базисные состояния нумеруются собственными значениями I_3 и Y, а повышающие и понижающие операторы осуществляют переход между разными состояниями: так как из (1) следуют соотношения $[\hat{I}_3, \hat{I}_\pm] = \pm\hat{I}_\pm$, $[\hat{Y}, \hat{I}_\pm] = 0$, то $\hat{I}_\pm$ изменяет I_3 на ± 1 и оставляет Y неизменным. Аналогично $\hat{V}_\pm$ изменяет I_3 на $\pm\frac{1}{2}$, а Y на ± 1; $\hat{U}_\pm$ изменяет I_3 на $\mp\frac{1}{2}$, а Y на ± 1. Базисные состояния унитарных мультиплетов в плоскости (I_3, Y) образуют "сетку", узлы которой связаны такими переходами. Отметим явную аналогию алгебраических свойств операторов $\hat{U}_\pm$ и $\hat{V}_\pm$ со свойствами

$\hat{I}_\pm$ – можно, дополнив их операторами $\hat{U}_3 = \frac{1}{2}[\hat{U}_+, \hat{U}_-]$, $\hat{V}_3 = \frac{1}{2}[\hat{V}_+, \hat{V}_-]$, наряду с изотопическим спином ввести еще две характеристики адронных состояний типа спина: U- и V-спин. Хотя эти характеристики и не используются для классификации частиц, иногда повышающими и понижающими операторами для U- или V-спина удобно пользоваться при построении волновых функций адронов как составных систем. Неприводимые представления $SU(3)$ нумеруются двумя целочисленными индексами (p, q), имеют размерность $d(p, q) = (p + 1)(q + 1)(p + q + 2)/2$, и изображаются графически в виде участка "сетки", ограниченной шестиугольником с центром в начале координат и длинами сторон p(три стороны) и q(еще три); если p или q равны 0, шестиугольник вырождается в треугольник. В случае $SU(3)$ значения I_3 и Y могут быть вырождены – узлам сетки на внешней границе соответствует единственное базисное состояние, но уже в следующем (при продвижении вглубь фигуры) слое каждому узлу отвечают два состояния, и так далее до вырождения формы слоя до треугольника, после чего кратность узлов перестает увеличиваться (ясно, что максимальная возможная кратность равна $min(p+1, q+1)$). Отметим, что $d(1, 1) = 8$, $d(3, 0) = 10$ и графы соответствующих представлений в точности совпадают с изображением октетов и декаплета адронов на рис.1. Поэтому их действительно можно рассматривать как базис неприводимых представлений группы $SU(3)$. Обращает на себя внимание, что среди адронов отсутствуют унитарные мультиплеты, отвечающие фундаментальному представлению $(1, 0)$ с размерностью 3 и сопряженному к нему представлению $(0, 1)$ – 3^*. Между тем неприводимые представления высших размерностей можно построить путем перемножения 3 и 3^*. В самом деле, разложение произведения представлений $SU(3)$ на неприводимые можно осуществить с помощью графического метода, аналогично тому, как это было сделано для группы $SU(2)$: надо помещать центр графа ($I_3 = Y = 0$) одного из сомножителей над каждым узлом графа другого (столько раз, какова кратность этого узла) и выделять из полученной картины графы неприводимых представлений. Например:

т.е $3^* \otimes 3 = 8 \oplus 1$. Аналогично можно получить $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$. С физической точки зрения это означает, что адроны, входящие в унитарные мультиплеты, могут рассматриваться как связанные состояния частиц, отвечающих фундаментальному триплету и соответствующих античастиц. Такие гипотетические составляющие адронов получили название кварков, а три их "аромата" (базисные состояния триплета) стали обозначать u (up – "верхний"), d ($down$ – "нижний") и s ($strange$ – "странный"). Спин кварков равен $\frac{1}{2}$. Весьма примечательны значения их квантовых чисел – как видно из расположения графа фундаментального представления в плоскости (I_3, Y), кварки обладают дробными электрическими и барионными зарядами:

	I	I_3	B	Q	S	Y
u	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$

В свободном состоянии такие частицы не наблюдаются, но с их помощью можно построить все "обычные" и "странные" адроны. При этом мезоны оказываются связанными состояниями системы кварк-антикварк, а барионы – связанными состояниями трех кварков (в соответствии с формулой разложения произведений представлений $SU(3)$). Например: октет псевдоскалярных мезонов

$$\pi^+ = u\bar{d}\ , \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})\ , \quad \pi^- = d\bar{u}\ , \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})\ ,$$

$$K^+ = u\bar{s}\ , \quad K^0 = d\bar{s}\ , \quad \bar{K}^0 = s\bar{d}\ , \quad K^- = s\bar{u}\ ;$$

а октет $\frac{1}{2}^+$-барионов

$$p = uud\ , \quad n = udd\ , \quad \Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(uu + dd - 2ud)s\ ,$$

$$\Sigma^+ = suu\ , \ \ \Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)s\ , \ \ \Sigma^- = sdd\ , \ \ \Xi^0 = ssu\ , \ \ \Xi^- = ssd\ .$$

Наблюдаемое у адронов свойство изотопической симметрии в рамках кварковой модели объясняется "похожестью" u- и d-кварков. Свойства же s-кварка, по-видимому, довольно существенно отличаются от свойств u и d, и поэтому унитарная симметрия адронных состояний нарушена значительно сильнее, чем изотопическая: расщепление масс в изотопических мультиплетах $(m_n - m_p)/(m_n + m_p) \simeq 0.7 \cdot 10^{-3}$, $(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})/(m_{\pi^+} + m_{\pi)}) \simeq 1.7 \cdot 10^{-2}$, а в унитарных мультиплетах $(m_\Xi - m_p)/(m_\Xi + m_p) \simeq 0.17$. Массы адронов, входящих в один унитарный мультиплет, должны зависеть от масс кварков и от энергии их взаимодействия m_0 (кварки, являясь релятивистскими квантовыми частицами, окружены "шубой" из кварк-антикварковых пар и квантов полей, с которыми они взаимодействуют, так что в энергию взаимодействия должна входить энергия этого "облачения"). Предполагая точную $SU(3)$-симметрию сильного взаимодействия кварков, будем считать m_0 не зависящей от кваркового состава адрона. Кроме того, учитывая высокую точность изотопической симметрии, будем считать $m_u \simeq m_d \equiv m_1$, $m_s \equiv m_2 > m_1$. Тогда для $\frac{1}{2}^+$-барионов получим:

$$\begin{cases} m_N & \simeq \quad m_0 + 3m_1 \\ m_\Sigma & \simeq \quad m_0 + 2m_1 + m_2 \\ m_\Lambda & \simeq \quad m_0 + 2m_1 + m_2 \\ m_\Xi & \simeq \quad m_0 + m_1 + 2m_2 \end{cases}$$

Исключая отсюда m_0, m_1 и m_2, получаем соотношения:

$$m_\Lambda \simeq m_\Sigma \quad (1.12\ \textit{ГэВ} \simeq 1.19\ \textit{ГэВ})$$

$$\frac{m_\Sigma + 3m_\Lambda}{2} \simeq m_N + m_\Xi \quad (2.23\ \textit{ГэВ} \simeq 2.25\ \textit{ГэВ})$$

Поступая аналогично для декаплета $\frac{3}{2}^+$-барионов, обнаруживаем "правило эквидистантности масс":

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} \simeq m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \simeq m_{\Sigma^*} - m_\Delta$$

(в действительности первый интервал равен 141 Мэв, второй – 148 Мэв, третий – 151 МэВ). Когда Гелл-Манн и Окубо впервые получили эти соотношения, Ω^-- гиперон еще не был открыт, так что унитарная симметрия определяла однозначно все его свойства – квантовые числа, спин и массу. Экспериментальный поиск был довольно недолгим и успешным – эта частица была обнаружена в 1964 году.

Можно построить и массовые формулы для мезонных мультиплетов. Оказалось, что в этом случае значительно точнее согласуются с экспериментальными данными соотношения не между самими массами, а между их квадратами: для октета псевдоскалярных мезонов

$$\begin{cases} m_\pi^2 & \simeq \quad m_0^2 + 2m_1^2 \\ m_K^2 & \simeq \quad m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 \\ m_\eta^2 & \simeq \quad m_0^2 + \frac{2}{3}(m_1^2 + 2m_2^2) \end{cases}$$

откуда легко получить

$$4\, m_K^2 \simeq m_\pi^2 + 3\, m_\eta^2 \quad (0.98\ \textit{ГэВ}^2 \simeq 0.92\ \textit{ГэВ}^2)$$

Массовые формулы Гелл-Манна - Окубо в большой степени способствовали признанию идеи унитарной симметрии и кварковой модели. В принципе для их построения можно предложить универсальный алгоритм, базирующийся на теоретико-групповых рассуждениях. Считая основной причиной нарушения $SU(3)$-симметрии отличие свойств s-кварка от свойств u и d, приходим к выводу, что $SU(3)$-нарушающая часть гамильтониана кварковых систем должна преобразовываться при групповых преобразованиях как оператор гиперзаряда $\hat{Y}$ (именно с собственным значением этого оператора связано значение страности $S = Y - B$) – это предположение носит название "правила октетной доминантности". Поэтому расщепление масс в мультиплетах можно рассчитывать, используя теорию возмущений и теорему Вигнера-Эккарта (подобно тому, как это делается в атомной физике, где используется симметрия гамильтониана по отношению к группе трехмерных вращений). Тогда для барионных мультиплетов, соответствующих базисам неприводимых представлений (p,q), получим

$$m^{(p,q)}(I,Y) \; = \; m_0^{(p,q)} \; + \; \alpha^{(p,q)} Y \; - \; \beta^{(p,q)} [I(I+1) \; - \; \frac{1}{4} \; Y^2 \; - 1],$$

а для мезонных мультиплетов аналогичная формула записывается для квадратов масс.

Точно так же можно исследовать и различие электромагнитных свойств частиц внутри одного мультиплета – оператор электрического заряда в соответствии с формулой Гелл-Манна - Нишиджимы имеет вид $\hat{Q} = \hat{I}_3 + \frac{1}{2}\hat{Y}$ и удовлетворяет коммутационным соотношениям:

$$[\hat{Q}, \hat{U}_{\pm}] \; = \; [\hat{Q}, \hat{U}_3] \; = \; 0,$$

и, следовательно, заряд играет по отношению к U-спину ту же роль, что и гиперзаряд по отношению к изотопическому спину ($\hat{Y}$ также коммутирует с $\hat{\vec{I}}$). Оператор магнитного момента частиц линейно связан с зарядом, поэтому при групповых преобразованиях он преобразуется как $\hat{Q}$, и расщепление значений μ аналогично расщеплению значений масс с заменой $I \to U$, $Y \to Q$:

$$\mu^{(p,q)}(I,Y) \; = \; \gamma^{(p,q)} Q \; - \; \delta^{(p,q)} [U(U+1) \; - \; \frac{1}{4} \; Q^2 \; - 1].$$

Задачи к лекции 3:

1. Проверить формулу разложения произведения представлений группы $SU(3)$ $3 \otimes 3 \otimes 3$ на неприводимые.

2. Записать кварковый состав октета псевдовекторных мезонов и декаплета $\frac{3}{2}^+$-барионов.

3. Используя массовые формулы для $\frac{1}{2}^+$-барионов и 0^-- мезонов найти значения параметров m_1 и m_2. О чем свидетельствует полученный результат?

4. Получить массовые формулы для октета псевдовекторных мезонов. Проверить их соответствие экспериментальным данным.

5. Построить мультиплеты частиц, являющихся связанными состояниями системы двух кварков. Каковы были бы их характеристики?

6. Для октета $\frac{1}{2}^+$-барионов найти соотношения между магнитными моментами частиц и вычислить магнитные моменты Σ^+ и Λ-гиперонов (использовать значения $\mu(p) = +2.79$ и $\mu(n) = -1.91$). Сравнить с экспериментальными данными.

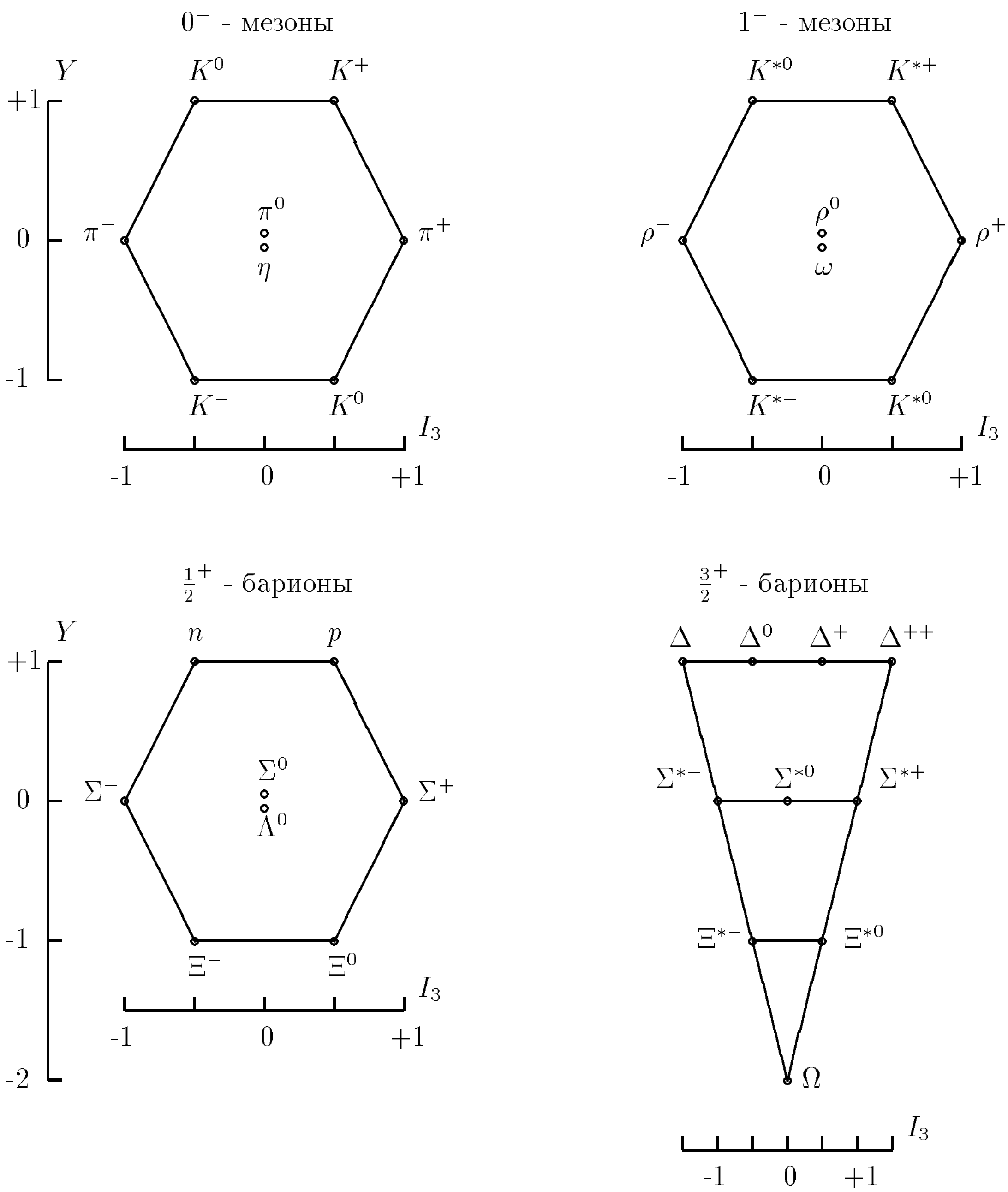

0^- - мезоны
1^- - мезоны
$\frac{1}{2}^+$ - барионы
$\frac{3}{2}^+$ - барионы
Y
$+1$
0
-1
-2
I_3
K^0 K^+ π^- π^0 η π^+ $\bar{K}^-$ $\bar{K}^0$
K^{*0} K^{*+} ρ^- ρ^0 ω ρ^+ $\bar{K}^{*-}$ $\bar{K}^{*0}$
n p Σ^- Σ^0 Λ^0 Σ^+ $\bar{\Xi}^-$ $\bar{\Xi}^0$
Δ^- Δ^0 Δ^+ Δ^{++} Σ^{*-} Σ^{*0} Σ^{*+} Ξ^{*-} Ξ^{*0} Ω^-

Figure 1: .