.

Осенний семестр 2006-2007 учебного года

ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИЯМ

спецкурса кафедры физики элементарных частиц

физического факультета МГУ "Диаграммы Фейнмана"

к.ф.-м.н. Никитин Николай Викторович (НИИЯФ МГУ)

Квантовая теория поля – наука "ручная", а не "ушная". То есть ни одни даже самые лучшие лекции прочитанные самыми искуссными преподавателями, не заменят вычислений, которые должен самостоятельно проделать каждый студент. Набить руку в самостоятельных вычислениях помогают задачи.

Данные задачи предназначены для решения студентами, которые слушают семестровый курс "Диаграммы Фейнмана" на кафедре физики элементарных частиц физического факультета МГУ. Небольшая часть задач подробно разбирается в ходе лекций, для большего числа в лекциях дается только идея вычислений. Задачи, помеченные знаком "$*$", для своего решения требуют знаний, превышающих средний уровень. Для допуска к зачету требуется правильно решить более половины задач, не помеченных знаком "$*$".

В электронном виде задачи, прозрачки и программу курса можно найти на сайте кафедры общей ядерной физики физфака МГУ: *http://nuclphys.npi.msu.su/fdiag/* . В осеннем семестре сайт регулярно обновляется.

Обо всех замеченных неточностях и опечатках просьба сообщать автору по телефону *(495) 932–89–72* или по электронной почте *nik679@monet.npi.msu.su*. В заголовке письма необходимо ставить "QFT–4", чтобы данное письмо можно было отличить от спама.

Задачи к Лекции N1

Задача N1 Найти явное выражение для матрицы лоренцовского преобразования $\Lambda^{\mu}_{\nu}(\vec{v})$, если система отсчета A' движется относительно системы A со скоростью $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$.

Задача N2 Какой вид имеет метрический тензор $g^{\mu\nu}$ в n–мерном евклидовом пространстве?

Задача N3 При помощи явного вида матрицы лоренцовского преобразования $\Lambda^{\mu}_{\nu}(\vec{v})$ (см. Задачу N1) показать, что скалярное произведение двух 4-векторов является лоренцовским инвариантом.

Задача N4 Показать, что для произвольного 4–вектора A^{μ} выполняется равенство

$$\partial\, A^{\mu}/\partial A_{\nu} = g^{\mu\nu}.$$

Задача N5 Пусть x^{μ} и p^{ν} - два 4-вектора. Найти $\partial^{\mu} e^{\mp\, i(px)}$ и $\partial^{\mu}\partial_{\mu} e^{\mp\, i(px)}$.

Задача N6 Получить выражение для свертки $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\xi\beta}$.

Задача N7 В системе $\hbar = c = 1$ проверить следующие пересчетные коэффициенты:

$$1\,\textit{ГэВ}\ \approx\ 1,78\ \times\ 10^{-24}\,\textit{гр}\ \approx\ 1,6\ \times\ 10^{-10}\,\textit{Дж},$$

$$1\,\textit{ГэВ}^{-1}\ \approx\ 6,58\ \times\ 10^{-25}\,\textit{сек}\ \approx\ 1,97\ \times\ 10^{-14}\,\textit{см}.$$

Задача N8* В системе $\hbar = c = 1$ найти численные значения констант, характеризующих электромагнитное, слабое и гравитационное взаимодействия. Что можно сказать об иерархии этих констант? Отвечает ли она силе перечисленных выше взаимодействий в микромире?

Задача N9* Масса переносчиков сильного взаимодействия – глюонов – равна нулю, в то время как радиус сильных взаимодействий порядка 1 Фм. Не противоречит ли это "релятивизированному" соотношению неопределенностей $\Delta x\,\Delta E\ \geq\ 1$?

Задачи к Лекции N2

Задача N10 Вывести уравнения Лагранжа для движения классической частицы в потенциальном поле.

Задача N11* Найти величину классического действия для движения частицы из точки A в точку B в потенциале гармонического осциллятора.

Задача N12 Проверить, что в теории поля два лагранжиана, отличающиеся между собой на 4-дивергенцию некоторого 4-вектора (т.е. на величину $\partial_\mu V^\mu(x)$), приводят к одинаковым уравнениям Лагранжа.

Задача N13* Получить уравнения Лагранжа для лагранжиана вида $L(\phi_i(x), \partial^\nu \partial_\nu \phi_i(x))$ при условии, что на трехмерной поверхности Σ_3 вариации $\delta\phi_i(x) = 0$ и $\delta\, \partial^\nu \phi_i(x) = 0$.

Задача N14 Зная явный вид тензора напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}(x)$ получить явный вид $F_{\mu\nu}(x)$.

Задача N15 Вычислить свертки $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}$ в терминах напряженностей электрического и магнитного полей.

Задачи к Лекции N3

Задача N16* Получить выражение для тензора энергии-импульса T^μ_ν свободного электромагнитного поля в произвольной калибровке.

Задача N17* Найти решение уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля в кулоновской $div\,\vec{A} = 0$ и аксиальной $(\vec{n}, \vec{A}) = 0$ калибровках, где div – обычная дивергенция в трехмерном пространстве, а $\vec{n}$ – фиксированный единичный вектор в трехмерном пространстве.

Задача N18 Найти явные выражения для напряженностей электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей через коэффициенты $c_{\vec{k}\,\lambda}$ и $c^\dagger_{\vec{k}\,\lambda}$.

Задача N19 В лекциях энергия и импульс свободного электромагнитного поля были найдены как компоненты тензора энергии–импульса. Однако возможен иной путь. Из общего курса физики известно, что энергия в единице объема для свободного электромагнитного поля имеет вид $(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)/2$, а импульс поля в единице объема (вектор Пойнтинга) равен $\vec{E} \times \vec{H}$. Используя результат Задачи N18, получить выражения для энергии и импульса поля в терминах коэффициентов $c_{\vec{k}\,\lambda}$ и $c^\dagger_{\vec{k}\,\lambda}$.

Задачи к Лекции N4

Задача N20 Явными вычислениями показать, что:

$$D^{\mu\nu}_\pm = g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{(2\pi)^2 x^2} \mp \frac{1}{4\pi}\, \delta(x^2) sign(x^0). \right)$$

Задача N21 Доказать, что пропагатор $D_c^{\mu\nu}$ электромагнитного поля является функцией Грина уравнения Даламберта, то есть для него выполняется равенство

$$\Box\, D_c^{\mu\nu}(x) \;=\; -g^{\mu\nu}\delta^4(x),$$

где $\Box = \partial^\mu\partial_\mu$ – даламбертиан.

Задачи к Лекции N5

Задача N22 Привести примеры истинно нейтральных адронов, отличных от π^0–мезона. Встречаются ли среди них барионы?

Задача N23 Показать, что для матриц Паули σ^i выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&Sp\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\right) \;=\; 2\,i\,\varepsilon^{ijk}, \\
&Sp\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l\right) \;=\; 2\,\left(\delta^{ij}\delta^{kl} \,-\, \delta^{ik}\delta^{jl} \,+\, \delta^{il}\delta^{jk}\right), \\
&\sigma^i\sigma^j\sigma^k \;=\; i\varepsilon^{ijk}\hat{1} \,+\, \delta^{ij}\sigma^k \,-\, \delta^{ik}\sigma^j \,+\, \delta^{jk}\sigma^i,
\end{aligned}$$

где ε^{ijk}–абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга для которого $\varepsilon^{123} = +1$, δ^{ij}–символ Кронеккера, латинские индексы $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Задача N24* Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Клейна–Гордона–Фока с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. Совпадает ли полученная формула с экспериментальными данными?

Задача N25 Найти унитарные матрицы переходов от стандартного к спинорному представлению и от спирального к спинорному представлению.

Задача N26 Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Дирака с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. В чем отличие полученной формулы от результата Задачи N24?

Задача N27* Найти явный вид $u(\vec{p}, \lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Задачи к Лекции N6

Задача N28 Показать, что

$$\gamma^5 \;=\; \frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta,$$

$$Sp\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) = 4i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta},$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = g^{\mu\nu}\gamma^5 - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\zeta = \left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\zeta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\zeta} + g^{\mu\zeta}g^{\nu\alpha}\right)\gamma_\alpha - i\varepsilon^{\mu\nu\zeta\alpha}\gamma_\alpha\gamma^5,$$
$$\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta},$$
$$\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12I,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu = -2\,\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha,$$
$$O^\mu\gamma^\nu O_\mu = -4\,O^\nu,$$
$$O^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta O_\mu = 0,$$
$$O^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma O_\mu = -4\,\gamma^\gamma\gamma^\beta O^\alpha,$$

где $O^\mu = \gamma^\mu(1-\gamma^5)$, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – абсолютно антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, такой что $\varepsilon^{0123} = -1$ и $\sigma^{\mu\nu} = i/2\,[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu]$.

Задачи к Лекциям N7–N10

Задача N29 Доказать, что в стандартном представлении оператор зарядового сопряжения C обладает следующими свойствами:

$$C^\dagger = C^T = C^{-1} = -C, \qquad C^* = C.$$

Задача N30 Найти явный вид оператора зарядового сопряжения в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N31* Найти явный вид $v(\vec{p},\lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N32 Показать, что для свободной частицы релятивистский оператор трехмерного спина $\vec{O}$ коммутирует с гамильтонианом H, то есть $\left[\vec{O},\,H\right] = 0$.

Задача N33* Изменится ли оператор $\vec{O}$, если в представлении Фолди–Вутхайзена в качестве спинового оператора выбрать не оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2}\gamma^5\vec{\gamma}$ (как в лекциях), а оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}$? Каков явный вид обоих операторов в стандартном представлении?

Задача N34 В стандартном представлении для фермионов и антифермионов найти собственные функции проекционного оператора $\left(\vec{n}\,\vec{O}\right)$, отвечающие спиральностям $\lambda = \pm 1$.

Задача N35 Используя результат Задачи N34, показать, что:

$$\chi_{-\lambda}(-\vec{n}) = i\,\chi_\lambda(\vec{n});$$

$$\chi_\lambda(\vec{n}) \;=\; -i\;(\vec{n}\vec{\sigma})\,\xi_{-\lambda}(\vec{n});$$

$$\xi_\lambda(\vec{n}) \;=\; (-\,\lambda)\;\chi_{-\lambda}(\vec{n}).$$

Задача N36* Для суммирования по спинам фермионов получить соотношение:

$$\sum_{\lambda=\pm 1} u(\vec{p},\lambda)\bar{u}(\vec{p},\lambda) \;=\; \gamma^\mu p_\mu \;+\; Im.$$

Задача N37 Показать, что в отсутствии внешнего поля из уравнения $(i\gamma^\mu\partial_\mu \;-\; Im)\,\psi^c(x) \;=\; 0$ следует урвнение $i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \;+\; \bar{\psi}(x)m \;=\; 0$.

Задача N38 Показать, что тензор энергии–импульса свободного дираковского поля имеет вид

$$T^\mu_\nu(x) \;=\; \bar{\psi}(x)\,i\gamma^\mu\partial_\nu\,\psi(x).$$

Задача N39 Вычислить импульс и заряд свободного дираковского поля в терминах произведений $a^\dagger_{\vec{p},\lambda}a_{\vec{p},\lambda}$ и $b_{\vec{p},\lambda}b^\dagger_{\vec{p},\lambda}$.

Задача N40 Получить интегральное представление для функции

$$S_-(x-x') \;=\; -\;\langle 0\left|\bar{\psi}^{(+)}(x')\psi^{(-)}(x)\right|0\rangle$$

в виде:

$$S_-(x) \;=\; -\,i\;(i\gamma^\mu\partial_\mu \;+\; Im)\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{ipx}}{2\varepsilon_p}.$$

Задача N41 Показать, что

$$\frac{e^{-i\varepsilon_p|t|}}{2\varepsilon_p} \;=\; i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\,p^0}{2\pi}\,\frac{e^{-ip^0t}}{p^2\;-\;m^2\;+\;i\varepsilon}.$$

Указание: вспомнить, что $\varepsilon_p^2 \;=\; |\vec{p}|^2 \;+\; m^2$ и провести вычисления интеграла при помощи теории вычетов аналогично тому, как это было сделано для электромагнитного поля.

Задача N42* Показать, что локальные калибровочные преобразования в КЭД допускают существование паулевского взаимодействия вида

$$\mathcal{L}^{int}_{Pauli}(x) \;=\; -\,\mu\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)F_{\mu\nu}(x)$$

наравне с взаимодействием $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$.

Задача N43* Почему не имеет никакого физического смысла калибровочное преобразование электромагнитного поля вида $\tilde{A}^\mu(x) \;=\; A^\mu(x)\,e^{i\alpha(x)}$?

Задача N44* Найти явняй вид операторов пространственной четности P и обращения времени T для спирального и спинорного представлений.

Задача N45* Прямыми вычислениями показать, что C – четность электромагнитного тока отрицательна.

Задача N46 В стандартном представлении прямым вычислением показать, что лагранжиан КЭД инвариантен относительно CP–, PT–, CT– и CPT–преобразований.

Задачи к Лекции N11

Задача N47* Показать, что для заряженной частицы с 4–импульсом p^μ в поле плоской электромагнитной волны с волновым вектором k^μ и 4–потенциалом $A^\mu(\varphi)$ (где $\varphi = (kx)$) классическое действие записывается в виде:

$$S = -(px) - \int_0^\varphi d\tilde{\varphi} \left(\frac{e\,(A(\tilde{\varphi})p)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2(\tilde{\varphi})}{2(kp)} \right).$$

Задача N48 Пусть $\Psi_{\vec{p},\lambda}(x,\, A^\mu(\varphi))$ и $\Phi_{\vec{p},\lambda}(x,\, A^\mu(\varphi))$ – решения Волкова уравнения Дирака в стандартном представлении для частицы и античастицы соответственно. Найти явные выражения для $\bar{\Psi}_{\vec{p},\lambda}(x,\, A^\mu(\varphi))$ и $\bar{\Phi}_{\vec{p},\lambda}(x,\, A^\mu(\varphi))$.

Задача N49 Записать решения Волкова для частицы и античастицы в случае, если 4–потенциал электромагнитного поля имеет вид $A^\mu(\varphi) = a^\mu \cos(\varphi)$ и подчиняется условию Лоренца.

Задача N50* Показать, что среднее по времени значение обобщенного импульса для решения Волкова с 4–потенциалом $A^\mu(\varphi) = a^\mu \cos(\varphi)$ равно:

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 a^2}{4\,(kp)}\, k^\mu.$$

Задача N51* Найти точное решение уравнения Дирака в постоянном однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z.

Указание: для решения задачи потенциал электромагнитного поля удобно выбрать в виде $A^\mu = (0,\, -Hy/2,\, Hx/2,\, 0)$ и использовать стандартное представление матриц Дирака.

Задачи к Лекциям N12–N14

Задача N52* Доказать операторную формулу:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \ldots$$

Задача N53 Показать, что если $\hat{A}^{(S)}$ и $\hat{A}^{(H)}$ – операторы одной и тойже наблюдаемой в представлении Шредингера и представлении Гейзенберга соответственно, то собственные значения обоих операторов совпадают. Как этот факт можно объяснить с физической, а не с математической точки зрения? Верно ли утверждение задачи не только для представления Гейзенберга, но и для представления взаимодействия?

Задача N54* Доказать, что комутационные соотношения в шредингеровском и гейзенберговском представлениях имеют один и тотже вид. Изменится ли вид комутаторов в представлении взаимодействия?

Задача N55* Какое преобразование осуществляет переход от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия? Можно ли исходя из вида такого преобразования заключить, что $\hat{V}^{(I)} = \hat{V}^{(H)}$?

Задача N56 Получить уравнения движения для оператора $\hat{A}^{(I)}$ некоторой физической величины в представлении взаимодействия.

Задача N57 Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\left\langle f \left| S^{(1)} \right| i \right\rangle$ в случае нефизических процессов $\gamma e^- \to e^-$ и $e^+e^- \to \gamma$. Какой множитель в амплитуде отвечает за невозможность данных процессов?

Задача N58 Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\left\langle f \left| S^{(2)} \right| i \right\rangle$ в случае $e^+e^- \to \gamma\gamma$ и $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Проверить результат, применив правила Фейнмана.

Задачи к Лекции N15

Задача N59 Пусть имеется два 4-импульса, квадраты которых $p_1^2 = m_1^2$ и $p_2^2 = m_2^2$. Показать, что выполняется следующее неравенство для скалярного произведения этих 4–векторов: $p_1^\mu p_{2\mu} \geq m_1 m_2$.

Задача N60* Пользуясь результатами Задачи N59, найти верхние и нижние границы для мандельстамовских переменных реакции $2 \to 2$ в различных каналах. Считать, что все четыре частицы имеют *разные* массы.

Задачи к Лекциям N16–N20

Задача N61 В терминах мандельстамовских переменных s и u вычислить функцию $g(s, u, m^2)$ для комптоновского рассеяния.

P.S. Определение функции $g(s,u,m^2)$ дано в лекциях на Прозрачке N108.

Задача N62 Найти угловые распределения электронов и фотонов для эффекта Комптона в системе центра масс сталкивающихся частиц и в системе покоя начального электрона.

Задача N63* Найти выражения для полного сечения эффекта Комптона в ультрарелятивистском и нерелятивистском случаях.

Задача N64 Не пренебрегая массами электрона и мюона вычислить сечение реакции $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$.

Задача N65 В "скалярной КЭД" найти $\pi^+\pi^+\gamma$ – вершину.

Задача N66* В рамках "скалярной КЭД" вычислить дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$.

Задача N67* В "скалярной КЭД" написать правило Фейнмана для $\pi\pi\gamma\gamma$ – вершины.

Задача N68 Показать, что релятивистские инварианты

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, p_{1\,\beta}\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta'}\, p_2^{\beta'}$$

и

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, p_{1\,\alpha}\, p_{2\,\beta}\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'}\, p_1^{\alpha'}\, p_2^{\beta'}$$

выражаются через $q^2 = (p_1 - p_2)^2$ и $M^2 = p_1^2 = p_2^2$.

Задача N69* Для пиона электромагнитный формфактор в координатном представлении хорошо апроксимируется функцией вида

$$F_\pi(r^2) = \alpha\, e^{-\beta\, r},$$

где α и β – некоторые действительные числа. Учтя, что $\langle r_\pi^2 \rangle = (0,44 \pm 0,02)$ фм^2, найти $F_\pi(q^2)$.

Задача N70* Показать, что амплитуда излучения мягкого фотона факторизуется, если в начальном и конечном состоянии находятся не фермионы (как в лекции), а бесструктурные точечные пионы "скалярной КЭД".

Задача N71* Записать глобальные и локальные калибровочные преобразования в "скалярной КЭД". Показать, что из глобальных калибровочных преобразования следуют законы сохранения электромагнитного тока и электрического заряда.

Задачи к Лекциям N21–N24

Задача N72* Показать, что дифференцирование за счет "длинной производной" $D_\mu(x) = \partial_\mu - ig_s t^a B_\mu^a(x)$ в КХД не меняет свойств биспинора $q_i(x)$ относительно локальных калибровочных преобразований, то есть

$$D_\mu \left(e^{i\,t^a\,\alpha^a(x)}\,q_i(x)\right) = e^{i\,t^a\,\alpha^a(x)}\,D_\mu\,q_i(x).$$

Задача N73* Исходя только из определения структурных констант группы $SU(N)$ через коммутатор генераторов группы доказать, что $f^{abc} = f^{cab} = -f^{cba}$.

Задача N74* Проверить, что лагранжиан глюонного поля в КХД может быть представлен в виде:

$$\mathcal{L}^B(x) = -\frac{1}{2}\,Tr\left(G^{\mu\nu}(x)\,G_{\mu\nu}(x)\right),$$

где $G_{\mu\nu}(x) = t^a\,G^a_{\mu\nu}(x)$ и $G^a_{\mu\nu}(x)$ – тензор напряженности глюонного поля.

Задача N75* Полагая, что компоненты тензора напряженности глюонного поля выражаются через напряженности хромоэлектрического и хромомагнитного полей абсолютно аналогично тому, как компоненты тензора напряженности электромагнитного поря выражаются через напряженности электрического и магнитного полей, написать аналог уравнений Максвелла в пустоте для хромоэлектрического и хромомагнитного полей.

Задача N76* Доказать, что

$$\begin{aligned}
&d^{abk}f^{kcd} - d^{adk}f^{kbc} - f^{ack}d^{kdb} = 0;\\
&f^{abk}d^{kcd} + f^{adk}d^{kbc} + f^{ack}d^{kdb} = 0;\\
&d^{abc}d^{cdk} + d^{bdc}d^{ack} + d^{adc}d^{bck} = \frac{1}{N}\left(\delta^{ab}\delta^{dk} + \delta^{ad}\delta^{bk} + \delta^{ak}\delta^{bd}\right);\\
&d^{abk}d^{kcd} - d^{adk}d^{kbc} + f^{ack}f^{kdb} = \frac{2}{N}\left(\delta^{ad}\delta^{bc} - \delta^{ab}\delta^{cd}\right);\\
&d^{akm}f^{blk}f^{cml} = -\frac{N}{2}\,d^{abc};\\
&d^{akm}d^{blk}f^{cml} = ?\,f^{abc};\\
&d^{akm}d^{blk}d^{cml} = -\frac{1}{2}\,d^{abc};
\end{aligned}$$

Указание: см. работу Z.Zhang and L.Chang, Nucl.Phys.**B**291, pp.392-428 (1987).

Задача N77* Написать лагранжиан и получить правила Фейнмана "скалярной КХД".

Задача N78* В рамках "скалярной КХД" (то есть предполагая, что верна теория возмущений по константе α_s) найти дифференциальное снчение реакции $gg \to q_s\bar{q}_s$, где q_s – кварк со спином ноль ("скалярный кварк", аналогичный $\pi^\pm$ – мезонам в "скалярной КЭД").