

Осенний семестр 2006-2007 учебного года

ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИЯМ

спецкурса кафедры физики элементарных частиц

физического факультета МГУ

"Диаграммы Фейнмана"

к.ф.-м.н. Никитин Николай Викторович (НИИЯФ МГУ)

Квантовая теория поля – наука "ручная", а не "ушная". То есть ни одни даже самые лучшие лекции прочитанные самыми искусными преподавателями, не заменят вычислений, которые должен самостоятельно проделать каждый студент. Набить руку в самостоятельных вычислениях помогают задачи.

Данные задачи предназначены для решения студентами, которые слушают семестровый курс "Диаграммы Фейнмана" на кафедре физики элементарных частиц физического факультета МГУ. Небольшая часть задач подробно разбирается в ходе лекций, для большего числа в лекциях дается только идея вычислений. Задачи, помеченные знаком "*", для своего решения требуют знаний, превышающих средний уровень. Для допуска к зачету требуется правильно решить более половины задач, не помеченных знаком "*".

В электронном виде задачи, прозрачки и программу курса можно найти на сайте кафедры общей ядерной физики физфака МГУ: <http://nuclphys.npi.msu.ru/fdiag/>. В осеннем семестре сайт регулярно обновляется.

Обо всех замеченных неточностях и опечатках просьба сообщать автору по телефону (495) 932-89-72 или по электронной почте nik679@monet.npi.msu.ru. В заголовке письма необходимо ставить "QFT-4", чтобы данное письмо можно было отличить от спама.

Задачи к Лекции N1

Задача N1 Найти явное выражение для матрицы лоренцовского преобразования $\Lambda_{\nu}^{\mu}(\vec{v})$, если система отсчета A' движется относительно системы A со скоростью $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$.

Задача N2 Какой вид имеет метрический тензор $g^{\mu\nu}$ в n -мерном евклидовом пространстве?

Задача N3 При помощи явного вида матрицы лоренцовского преобразования $\Lambda_{\nu}^{\mu}(\vec{v})$ (см. Задачу N1) показать, что скалярное произведение двух 4-векторов является лоренцовским инвариантом.

Задача N4 Показать, что для произвольного 4-вектора A^{μ} выполняется равенство

$$\partial A^{\mu} / \partial A_{\nu} = g^{\mu\nu}.$$

Задача N5 Пусть x^{μ} и p^{ν} - два 4-вектора. Найти $\partial^{\mu} e^{\mp i(px)}$ и $\partial^{\mu} \partial_{\mu} e^{\mp i(px)}$.

Задача N6 Получить выражение для свертки $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\zeta\eta\xi\beta}$.

Задача N7 В системе $\hbar = c = 1$ проверить следующие пересчетные коэффициенты:

$$1 \text{ ГэВ} \approx 1,78 \times 10^{-24} \text{ гр} \approx 1,6 \times 10^{-10} \text{ Дж},$$

$$1 \text{ ГэВ}^{-1} \approx 6,58 \times 10^{-25} \text{ сек} \approx 1,97 \times 10^{-14} \text{ см}.$$

Задача N8* В системе $\hbar = c = 1$ найти численные значения констант, характеризующих электромагнитное, слабое и гравитационное взаимодействия. Что можно сказать об иерархии этих констант? Отвечает ли она силе перечисленных выше взаимодействий в микромире?

Задача N9* Масса переносчиков сильного взаимодействия – глюонов – равна нулю, в то время как радиус сильных взаимодействий порядка 1 Фм. Не противоречит ли это "релятивизированному" соотношению неопределенностей $\Delta x \Delta E \geq 1$?

Задачи к Лекции N2

Задача N10 Вывести уравнения Лагранжа для движения классической частицы в потенциальном поле.

Задача N11* Найти величину классического действия для движения частицы из точки A в точку B в потенциале гармонического осциллятора.

Задача N12 Проверить, что в теории поля два лагранжиана, отличающиеся между собой на 4-дивергенцию некоторого 4-вектора (т.е. на величину $\partial_\mu V^\mu(x)$), приводят к одинаковым уравнениям Лагранжа.

Задача N13* Получить уравнения Лагранжа для лагранжиана вида $L(\phi_i(x), \partial^\nu \phi_i(x))$ при условии, что на трехмерной поверхности Σ_3 вариации $\delta\phi_i(x) = 0$ и $\delta\partial^\nu \phi_i(x) = 0$.

Задача N14 Зная явный вид тензора напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}(x)$ получить явный вид $F_{\mu\nu}(x)$.

Задача N15 Вычислить свертки $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}$ в терминах напряженностей электрического и магнитного полей.

Задачи к Лекции N3

Задача N16* Получить выражение для тензора энергии-импульса T_ν^μ свободного электромагнитного поля в произвольной калибровке.

Задача N17* Найти решение уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля в кулоновской $div \vec{A} = 0$ и аксиальной $(\vec{n}, \vec{A}) = 0$ калибровках, где div – обычная дивергенция в трехмерном пространстве, а \vec{n} – фиксированный единичный вектор в трехмерном пространстве.

Задача N18 Найти явные выражения для напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей через коэффициенты $c_{\vec{k}\lambda}$ и $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$.

Задача N19 В лекциях энергия и импульс свободного электромагнитного поля были найдены как компоненты тензора энергии-импульса. Однако возможен иной путь. Из общего курса физики известно, что энергия в единице объема для свободного электромагнитного поля имеет вид $(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)/2$, а импульс поля в единице объема (вектор Пойнтинга) равен $\vec{E} \times \vec{H}$. Используя результат Задачи N18, получить выражения для энергии и импульса поля в терминах коэффициентов $c_{\vec{k}\lambda}$ и $c_{\vec{k}\lambda}^\dagger$.

Задачи к Лекции N4

Задача N20 Явными вычислениями показать, что:

$$D_\pm^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{(2\pi)^2 x^2} \mp \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) \text{sign}(x^0) \right)$$

Задача N21 Доказать, что пропагатор $D_c^{\mu\nu}$ электромагнитного поля является функцией Грина уравнения Даламберта, то есть для него выполняется равенство

$$\square D_c^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu} \delta^4(x),$$

где $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ – даламбертиан.

Задачи к Лекции N5

Задача N22 Привести примеры истинно нейтральных адронов, отличных от π^0 -мезона. Встречаются ли среди них барионы?

Задача N23 Показать, что для матриц Паули σ^i выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Sp(\sigma^i \sigma^j \sigma^k) &= 2i \varepsilon^{ijk}, \\ Sp(\sigma^i \sigma^j \sigma^k \sigma^l) &= 2(\delta^{ij} \delta^{kl} - \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \\ \sigma^i \sigma^j \sigma^k &= i \varepsilon^{ijk} \hat{1} + \delta^{ij} \sigma^k - \delta^{ik} \sigma^j + \delta^{jk} \sigma^i, \end{aligned}$$

где ε^{ijk} – абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга для которого $\varepsilon^{123} = +1$, δ^{ij} – символ Кронеккера, латинские индексы $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Задача N24* Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Клейна–Гордона–Фока с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. Совпадает ли полученная формула с экспериментальными данными?

Задача N25 Найти унитарные матрицы переходов от стандартного к спинорному представлению и от спирального к спинорному представлению.

Задача N26 Предполагая, что движение электрона в атоме водорода можно описать при помощи уравнения Дирака с кулоновским взаимодействием, получить выражение для тонкой структуры спектра. В чем отличие полученной формулы от результата Задачи N24?

Задача N27* Найти явный вид $u(\vec{p}, \lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Задачи к Лекции N6

Задача N28 Показать, что

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta,$$

$$\begin{aligned}
Sp(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 4i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 &= g^{\mu\nu} \gamma^5 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta, \\
\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\zeta &= (g^{\mu\nu} g^{\alpha\zeta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\zeta} + g^{\mu\zeta} g^{\nu\alpha}) \gamma_\alpha - i \varepsilon^{\mu\nu\zeta\alpha} \gamma_\alpha \gamma^5, \\
\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}, \\
\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} &= 12I, \\
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma_\mu &= -2 \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha, \\
O^\mu \gamma^\nu O_\mu &= -4 O^\nu, \\
O^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta O_\mu &= 0, \\
O^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma O_\mu &= -4 \gamma^\gamma \gamma^\beta O^\alpha,
\end{aligned}$$

где $O^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma^5)$, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ – абсолютно антисимметричный псевдотензор четвертого ранга, такой что $\varepsilon^{0123} = -1$ и $\sigma^{\mu\nu} = i/2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Задачи к Лекциям N7–N10

Задача N29 Доказать, что в стандартном представлении оператор зарядового сопряжения C обладает следующими свойствами:

$$C^\dagger = C^T = C^{-1} = -C, \quad C^* = C.$$

Задача N30 Найти явный вид оператора зарядового сопряжения в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N31* Найти явный вид $v(\vec{p}, \lambda)$ в спиральном и спинорном представлениях.

Задача N32 Показать, что для свободной частицы релятивистский оператор трехмерного спина \vec{O} коммутирует с гамильтонианом H , то есть $[\vec{O}, H] = 0$.

Задача N33* Изменится ли оператор \vec{O} , если в представлении Фолди–Вутхайзена в качестве спинового оператора выбрать не оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2} \gamma^5 \vec{\gamma}$ (как в лекциях), а оператор $\vec{S} = -\frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma}$? Каков явный вид обоих операторов в стандартном представлении?

Задача N34 В стандартном представлении для фермионов и антифермионов найти собственные функции проекционного оператора $(\vec{n} \vec{O})$, отвечающие спиральностям $\lambda = \pm 1$.

Задача N35 Используя результат Задачи N34, показать, что:

$$\chi_{-\lambda}(-\vec{n}) = i \chi_\lambda(\vec{n});$$

$$\chi_\lambda(\vec{n}) = -i (\vec{n}\vec{\sigma}) \xi_{-\lambda}(\vec{n});$$

$$\xi_\lambda(\vec{n}) = (-\lambda) \chi_{-\lambda}(\vec{n}).$$

Задача N36* Для суммирования по спинам фермионов получить соотношение:

$$\sum_{\lambda=\pm 1} u(\vec{p}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}, \lambda) = \gamma^\mu p_\mu + Im.$$

Задача N37 Показать, что в отсутствии внешнего поля из уравнения $(i\gamma^\mu \partial_\mu - Im) \psi^c(x) = 0$ следует уравнение $i\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + \bar{\psi}(x) m = 0$.

Задача N38 Показать, что тензор энергии-импульса свободного дираковского поля имеет вид

$$T_\nu^\mu(x) = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu \partial_\nu \psi(x).$$

Задача N39 Вычислить импульс и заряд свободного дираковского поля в терминах произведений $a_{\vec{p}, \lambda}^\dagger a_{\vec{p}, \lambda}$ и $b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger b_{\vec{p}, \lambda}$.

Задача N40 Получить интегральное представление для функции

$$S_-(x - x') = - \langle 0 | \bar{\psi}^{(+)}(x') \psi^{(-)}(x) | 0 \rangle$$

в виде:

$$S_-(x) = -i (i\gamma^\mu \partial_\mu + Im) \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ipx}}{2\varepsilon_p}.$$

Задача N41 Показать, что

$$\frac{e^{-i\varepsilon_p |t|}}{2\varepsilon_p} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip^0 t}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

Указание: вспомнить, что $\varepsilon_p^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ и провести вычисления интеграла при помощи теории вычетов аналогично тому, как это было сделано для электромагнитного поля.

Задача N42* Показать, что локальные калибровочные преобразования в КЭД допускают существование паулевского взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_{Pauli}^{int}(x) = -\mu \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) F_{\mu\nu}(x)$$

наравне с взаимодействием $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x)$.

Задача N43* Почему не имеет никакого физического смысла калибровочное преобразование электромагнитного поля вида $\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x) e^{i\alpha(x)}$?

Задача N44* Найти явный вид операторов пространственной четности P и обращения времени T для спирального и спинорного представлений.

Задача N45* Прямыми вычислениями показать, что C – четность электромагнитного тока отрицательна.

Задача N46 В стандартном представлении прямым вычислением показать, что лагранжиан КЭД инвариантен относительно CP –, PT –, CT – и CPT –преобразований.

Задачи к Лекции N11

Задача N47* Показать, что для заряженной частицы с 4-импульсом p^μ в поле плоской электромагнитной волны с волновым вектором k^μ и 4-потенциалом $A^\mu(\varphi)$ (где $\varphi = (kx)$) классическое действие записывается в виде:

$$S = - (px) - \int_0^\varphi d\tilde{\varphi} \left(\frac{e(A(\tilde{\varphi})p)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2(\tilde{\varphi})}{2(kp)} \right).$$

Задача N48 Пусть $\Psi_{\vec{p},\lambda}(x, A^\mu(\varphi))$ и $\Phi_{\vec{p},\lambda}(x, A^\mu(\varphi))$ – решения Волкова уравнения Дирака в стандартном представлении для частицы и античастицы соответственно. Найти явные выражения для $\bar{\Psi}_{\vec{p},\lambda}(x, A^\mu(\varphi))$ и $\bar{\Phi}_{\vec{p},\lambda}(x, A^\mu(\varphi))$.

Задача N49 Записать решения Волкова для частицы и античастицы в случае, если 4-потенциал электромагнитного поля имеет вид $A^\mu(\varphi) = a^\mu \cos(\varphi)$ и подчиняется условию Лоренца.

Задача N50* Показать, что среднее по времени значение обобщенного импульса для решения Волкова с 4-потенциалом $A^\mu(\varphi) = a^\mu \cos(\varphi)$ равно:

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 a^2}{4(kp)} k^\mu.$$

Задача N51* Найти точное решение уравнения Дирака в постоянном однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z .

Указание: для решения задачи потенциал электромагнитного поля удобно выбрать в виде $A^\mu = (0, -Hy/2, Hx/2, 0)$ и использовать стандартное представление матриц Дирака.

Задачи к Лекциям N12–N14

Задача N52* Доказать операторную формулу:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

Задача N53 Показать, что если $\hat{A}^{(S)}$ и $\hat{A}^{(H)}$ – операторы одной и той же наблюдаемой в представлении Шредингера и представлении Гейзенберга соответственно, то собственные значения обоих операторов совпадают. Как этот факт можно объяснить с физической, а не с математической точки зрения? Верно ли утверждение задачи не только для представления Гейзенберга, но и для представления взаимодействия?

Задача N54* Доказать, что коммутационные соотношения в шредингеровском и гейзенберговском представлениях имеют один и тот же вид. Изменится ли вид коммутаторов в представлении взаимодействия?

Задача N55* Какое преобразование осуществляет переход от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия? Можно ли исходя из вида такого преобразования заключить, что $\hat{V}^{(I)} = \hat{V}^{(H)}$?

Задача N56 Получить уравнения движения для оператора $\hat{A}^{(I)}$ некоторой физической величины в представлении взаимодействия.

Задача N57 Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\langle f | S^{(1)} | i \rangle$ в случае нефизических процессов $\gamma e^- \rightarrow e^-$ и $e^+ e^- \rightarrow \gamma$. Какой множитель в амплитуде отвечает за невозможность данных процессов?

Задача N58 Из первых принципов получить выражения для амплитуды $\langle f | S^{(2)} | i \rangle$ в случае $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$ и $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Проверить результат, применив правила Фейнмана.

Задачи к Лекции N15

Задача N59 Пусть имеется два 4-импульса, квадраты которых $p_1^2 = m_1^2$ и $p_2^2 = m_2^2$. Показать, что выполняется следующее неравенство для скалярного произведения этих 4-векторов: $p_1^\mu p_{2\mu} \geq m_1 m_2$.

Задача N60* Пользуясь результатами Задачи N59, найти верхние и нижние границы для мандельстамовских переменных реакции $2 \rightarrow 2$ в различных каналах. Считать, что все четыре частицы имеют *разные* массы.

Задачи к Лекциям N16–N20

Задача N61 В терминах мандельстамовских переменных s и u вычислить функцию $g(s, u, m^2)$ для комптоновского рассеяния.

P.S. Определение функции $g(s, u, m^2)$ дано в лекциях на Прозрачке N108.

Задача N62 Найти угловые распределения электронов и фотонов для эффекта Комптона в системе центра масс сталкивающихся частиц и в системе покоя начального электрона.

Задача N63* Найти выражения для полного сечения эффекта Комптона в ультрарелятивистском и нерелятивистском случаях.

Задача N64 Не пренебрегая массами электрона и мюона вычислить сечение реакции $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$.

Задача N65 В "скалярной КЭД" найти $\pi^+ \pi^+ \gamma$ – вершину.

Задача N66* В рамках "скалярной КЭД" вычислить дифференциальное сечение процесса $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$.

Задача N67* В "скалярной КЭД" написать правило Фейнмана для $\pi \pi \gamma \gamma$ – вершины.

Задача N68 Показать, что релятивистские инварианты

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta'} p_2^{\beta'}$$

и

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha'\beta'} p_1^{\alpha'} p_2^{\beta'}$$

выражаются через $q^2 = (p_1 - p_2)^2$ и $M^2 = p_1^2 = p_2^2$.

Задача N69* Для пиона электромагнитный формфактор в координатном представлении хорошо аппроксимируется функцией вида

$$F_\pi(r^2) = \alpha e^{-\beta r},$$

где α и β – некоторые действительные числа. Учтя, что $\langle r_\pi^2 \rangle = (0,44 \pm 0,02)$ фм², найти $F_\pi(q^2)$.

Задача N70* Показать, что амплитуда излучения мягкого фотона факторизуется, если в начальном и конечном состоянии находятся не фермионы (как в лекции), а бесструктурные точечные пионы "скалярной КЭД".

Задача N71* Записать глобальные и локальные калибровочные преобразования в "скалярной КЭД". Показать, что из глобальных калибровочных преобразования следуют законы сохранения электромагнитного тока и электрического заряда.

Задачи к Лекциям N21–N24

Задача N72* Показать, что дифференцирование за счет "длинной производной" $D_\mu(x) = \partial_\mu - ig_s t^a B_\mu^a(x)$ в КХД не меняет свойств биспинора $q_i(x)$ относительно локальных калибровочных преобразований, то есть

$$D_\mu (e^{i t^a \alpha^a(x)} q_i(x)) = e^{i t^a \alpha^a(x)} D_\mu q_i(x).$$

Задача N73* Исходя только из определения структурных констант группы $SU(N)$ через коммутатор генераторов группы доказать, что $f^{abc} = f^{cab} = -f^{cba}$.

Задача N74* Проверить, что лагранжиан глюонного поля в КХД может быть представлен в виде:

$$\mathcal{L}^B(x) = -\frac{1}{2} Tr (G^{\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}(x)),$$

где $G_{\mu\nu}(x) = t^a G_{\mu\nu}^a(x)$ и $G_{\mu\nu}^a(x)$ – тензор напряженности глюонного поля.

Задача N75* Полагая, что компоненты тензора напряженности глюонного поля выражаются через напряженности хромоматричного и хромоматричного полей абсолютно аналогично тому, как компоненты тензора напряженности электромагнитного поля выражаются через напряженности электрического и магнитного полей, написать аналог уравнений Максвелла в пустоте для хромоматричного и хромоматричного полей.

Задача N76* Доказать, что

$$\begin{aligned} d^{abk} f^{kcd} - d^{adk} f^{kbc} - f^{ack} d^{kdb} &= 0; \\ f^{abk} d^{kcd} + f^{adk} d^{kbc} + f^{ack} d^{kdb} &= 0; \\ d^{abc} d^{cdk} + d^{bdc} d^{ack} + d^{adc} d^{bck} &= \frac{1}{N} (\delta^{ab} \delta^{dk} + \delta^{ad} \delta^{bk} + \delta^{ak} \delta^{bd}); \\ d^{abk} d^{kcd} - d^{adk} d^{kbc} + f^{ack} f^{kdb} &= \frac{2}{N} (\delta^{ad} \delta^{bc} - \delta^{ab} \delta^{cd}); \\ d^{akm} f^{blk} f^{cml} &= -\frac{N}{2} d^{abc}; \\ d^{akm} d^{blk} f^{cml} &= ? f^{abc}; \\ d^{akm} d^{blk} d^{cml} &= -\frac{1}{2} d^{abc}; \end{aligned}$$

Указание: см. работу Z.Zhang and L.Chang, Nucl.Phys.В291, pp.392-428 (1987).

Задача N77* Написать лагранжиан и получить правила Фейнмана "скалярной КХД".

Задача N78* В рамках "скалярной КХД" (то есть предполагая, что верна теория возмущений по константе α_s) найти дифференциальное сечение реакции $gg \rightarrow q_s \bar{q}_s$, где q_s – кварк со спином ноль ("скалярный кварк", аналогичный π^\pm – мезонам в "скалярной КЭД").