ЛЕКЦИЯ 1. 02.09.06

ПОНЯТИЕ ГРУППЫ

Напомним, что под группой понимают множество элементов

$$G \quad = \quad \{a, b, c, ...\},$$

в котором определен закон, сопоставляющий с двумя любыми элементами множества – a и b – третий элемент c, т.е. в G определена функция

$$c \quad = \quad \phi(a, b).$$

Эта функция должна удовлетворять условию

$$\phi(a, \phi(b, c)) \quad = \quad \phi(\phi(a, b), c). \qquad (1)$$

Элемент c называют *произведением* элементов a и b, а операцию, с помощью которой его получают – *умножением.* С этой терминологией связано обозначение

$$c \quad = \quad (ab).$$

Свойство (1) функции ϕ определяет *ассоциативность* умножения:

$$(a(bc)) \quad = \quad ((ab)c).$$

Предполагается также, что множество G содержит *единицу* – элемент e, обладающий свойством

$$\forall a \qquad ae \quad = \quad a.$$

В терминах функции ϕ это означает, что

$$\phi(a, e) \quad = \quad a. \qquad (2)$$

Наконец, вместе с любым элементом a множество G содержит и *обратный* к a элемент a^{-1} для которого справедливо соотношение

$$\phi(a, a^{-1}) \quad = \quad e, \qquad (3)$$

т.е.

$$aa^{-1} \quad = \quad e.$$

Соотношения (1) – (3) можно считать общим *определением группы.* По мере надобности мы будем восполнять знания в области теории групп, полученные в предыдущем семестре, но сейчас необходимо перейти к новым понятиям, связанным с идеей непрерывности.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

Непрерывные группы возникают после того, как каждый элемент группы превращается в функцию некоторого числа действительных параметров $a_1, a_2, ..., a_r$. Удобно обозначать элементы непрерывных групп символами $R(a)$. Закон умножения элементов группы формулируют следующим образом

$$R(b)R(a) \quad = \quad R(c),$$
$$c_k \quad = \quad \phi_k(a_1, ..., a_r; b_1, ..., b_r),$$

или просто

$$c \quad = \quad \phi(a; b).$$

ГРУППЫ ЛИ

Далее из непрерывных групп выделяют *группы Ли*, в которых величины c_k являются *аналитическими функциями* параметров a и b. Единичному элементу группы соотвествует параметр a_0,

$$e \quad = \quad R(a_0).$$

Обычно считают, что точка a_0 определяется координатами $(0, ..., 0$, т.е. полагают

$$a_0 \quad = \quad 0.$$

Обратный к $R(a)$ элемент определяется значением параметра $\bar{a}$:

$$R^{-1}(a) \quad = \quad R(\bar{a}).$$

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Нас будут интересовать *группы преобразований* действительных переменных $x \quad = \quad (x_1, ..., x_n)$:

$$x'_i \quad = \quad f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r) \quad = \quad f_i(x; a).$$

или

$$x' \quad = \quad f(x; a),$$

в которых совокупность параметров $\{a\}$ образует группу Ли.

При бесконечно малом изменении параметров функции f_i меняются следующим образом:

$$f_i(x; a + \delta a) \quad \simeq \quad f_i(x; a) \quad + \quad \frac{\partial f_i}{\partial a_r}\delta a_r.$$

Если

$$x'' \quad = \quad f(x'; a^{-1}),$$

то должно выполняться равенства

$$f(x'; a^{-1}) \quad = \quad x.$$

Эти соотношения в случае отличия от нуля якобиана,

$$det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big) \quad \neq \quad 0,$$

можно разрешить относительно переменных x, выразив их в терминах величин x'.

Если величины x' и x'' определяются равенствами

$$x'_i \quad = \quad f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r),$$

$$x_i'' = f_i(x_1', ..., x_n'; b_1, ..., b_r),$$

то переменные x и x'' должны быть связаны соотношениями

$$x_i'' = f_i(x_1, ..., x_n; c_1, ..., c_r).$$

Эти равенства можно сформулировать как условия, которым должны удовлетворять функции f_i: соотношения

$$f(f(x; a); b) = f(x; \phi(a; b)).$$

должны быть тождественными относительно величин x, a и b.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Рассмотрим простейший случай преобразований переменной x, зависящих от одного параметра:

$$x' = f(x; a).$$

Близкие к x' значения $x' + dx'$ можно получить двумя способами. Можно, исходя из значения x, бесконечно мало изменить значение параметра a:

$$x' + dx' = f(x; a + da),$$

или, начав сразу со значения x', рассматривать бесконечно малые значения параметров:

$$x' + dx' = f(x'; \delta a).$$

Заметим, что

$$f(x'; \delta a) \simeq f(x'; 0) + \left(\frac{\partial f(x'; a)}{\partial a}\right)_{a=0} \delta a = x' + u(x')\delta a,$$

а приращение параметра a можно определить формулой

$$a + da = \phi(a; \delta a) \simeq \phi(a; 0) + \left(\frac{\partial \phi(a; b)}{\partial b}\right)_{b=0} \delta a.$$

Таким образом получаются соотношения

$$\delta a \quad = \quad \psi(a)da,$$

а

$$dx' \quad = \quad u(x')\psi(a)da,$$

которые можно представить в форме

$$\frac{dx'}{u(x')} \quad = \quad \psi(a)da.$$

Определяя функции

$$y(x) \quad = \quad \int^x \frac{dx'}{u(x')}$$

и

$$t \quad = \quad \int_0^a \psi(a)da,$$

получим соотношение

$$y^{'} \quad - \quad y \quad = \quad t.$$

Очевидно, что в терминах параметра t закон умножения группы выглядит следующим образом:

$$R(t_1)R(t_2) \quad = \quad R(t_1 + t_2).$$

В частности, обратные элементы определяются формулами

$$R^{-1}(t) \quad = \quad R(-t).$$

Переменную t называют *каноническим параметром* группы.

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Аналогичные формулы в общем случае r-параметрической группы выглядят следующим образом:

$$x'_i \quad = \quad f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r), \qquad i \quad = \quad 1, ..., n;$$

$$x_i' + dx_i' \quad = \quad f_1(x_1', ..., x_n'; \delta a_1, ..., \delta a_r) \quad + \sum\nolimits_{\rho=1}^{r} \Big(\frac{\partial f_i(x_1', ..., x_n'; a_1, ..., a_r)}{\partial a_k} \Big)_{a=0} \delta a_\rho,$$

т.е.

$$dx_i' \quad = \quad \sum\nolimits_{\rho=1}^{r} u_{i\rho}(x') \delta a_\rho.$$

Функции $u_{i\rho}$ определяются равенствами

$$u_{i\rho}(x') \quad = \quad \Big(\frac{\partial f_i(x'; a)}{\partial a_\rho} \Big)_{a=0}.$$

Приращения параметров a_λ определяются формулой

$$a_\lambda \quad + \quad da_\lambda \quad = \quad \phi_\lambda(a_1, ..., a_r; \delta a_1, ..., \delta a_r),$$

т.е.

$$da_\lambda = \sum\nolimits_{\rho=1}^{r} \Big(\frac{\partial \phi_\lambda(a_1, ..., a_r; b_1, ..., b_r)}{\partial b_\rho} \Big)_{b=0} \delta a_\rho = \sum\nolimits_{\rho=1}^{r} \theta_{\lambda\rho}(a) \delta a_\rho.$$

Величины δa можно выразить в терминах дифференциалов da:

$$\delta a_\rho \quad = \quad \sum\nolimits_{l} \psi_{\rho\lambda} da_\lambda,$$

где ψ и θ – взаимно обратные матрицы:

$$\sum\nolimits_{\lambda} \psi_{\rho\lambda}(a) \theta_{\lambda\mu}(a) \quad = \quad \delta_{\rho\mu}.$$

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Изменение произвольной функции при бесконечно малых приращениях переменных x определяется формулой

$$dF(x) \quad = \quad \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \quad = \quad \sum\nolimits_{k=1}^{r} \delta a_\rho \Big(\sum\nolimits_{i=1}^{n} u_{i\rho}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big).$$

Определяя дифференциальные операторы

$$X_\rho \quad = \quad \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_{i\rho}(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

можно представить штрихованные координаты в форме

$$x_i' \quad = \quad \Bigl(1 \quad + \quad \sum\nolimits_{\rho=1}^{r} \delta a_\rho X_\rho\Bigr) x_i.$$

Операторы X_ρ называют *инфинитезимальными операторами* группы преобразований.

Коммутатор этих операторов можно представить в форме

$$[X_\rho, X_\sigma] \quad = \quad u_{i\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}u_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad - \quad u_{j\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}u_{i\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad =$$

$$\Bigl(u_{i\rho}\frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_j} \quad - \quad u_{i\sigma}\frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i}\Bigr)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Нетрудно показать,что величины

$$\Bigl(u_{i\rho}\frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_j} \quad - \quad u_{i\sigma}\frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i}\Bigr)$$

пропорциональны функциям $u_{j\kappa}$:

$$\Bigl(u_{i\rho}\frac{\partial u_{j\sigma}}{\partial x_j} \quad - \quad u_{i\sigma}\frac{\partial u_{j\rho}}{\partial x_i}\Bigr) \quad = \quad C^{\kappa}_{\rho\sigma}u_{j\kappa},$$

Где $C^{\lambda}_{\rho\sigma}$ – постоянные величины.

В силу этих соотношений коммутаторы операторов X_ρ и X_σ выражается в терминах таких же операторов:

$$[X_\rho, X_\sigma] \quad = \quad C^{\kappa}_{\rho\sigma}X_\kappa.$$

Числа $C^{\kappa}_{\rho\sigma}$ называют *структурными константами* группы Ли. Очевидно, что они антисимметричны по индексам ρ и σ:

$$C^{\kappa}_{\rho\sigma} \quad = \quad - \quad C^{\kappa}_{\sigma\rho}. \qquad (A)$$

Кроме того, в силу известного тождества Якоби

$$[[X_\rho, X_\sigma], X_\tau] \quad + \quad [[X_\sigma, X_\tau], X_\rho] \quad + \quad [[X_\tau, X_\rho], X_\sigma] \quad = \quad 0,$$

структурные константы удовлетворяют тождеству

$$C^\mu_{\rho\sigma} C^\nu_{\mu\tau} \quad + \quad C^\mu_{\sigma\tau} C^\nu_{\mu\rho} \quad + \quad C^\mu_{\tau\rho} C^\nu_{\mu\sigma} \quad = \quad 0. \qquad (B)$$

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Итак, определив группу преобразований, мы нашли порождающие эти преобразования операторы X_σ и структурные постоянные группы. Великое открытие Ли состояло в том, что можно сначала определить постоянные $C^\mu_{\rho\sigma}$, удовлетворяющие условиям (A) и (B), затем – функции $u_{i\sigma}(x)$ – решения уравнений

$$u_{j\sigma} \frac{\partial u_{i\tau}}{\partial x_j} \quad - \quad u_{j\tau} \frac{\partial u_{i\sigma}}{\partial x_j} \quad = \quad C^\kappa_{\tau\sigma} u_{i\kappa}(x),$$

а затем построить операторы

$$X_\sigma \quad = \quad \sum\nolimits_i u_{i\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если не торопиться с конкретной реализацией группы, можно заметить, что r–параметрической группе Ли соответсвует векторное пространство, состоящее из величин $\sum_\sigma a_\sigma X_\sigma$ с действителными коэффициентами a_σ. Это пространство замкнуто относительно операции умножения, которая определяется соотношениями

$$[X_\rho, X_\sigma] \quad = \quad C^\kappa_{\rho\sigma} X_\kappa,$$

$$[[X_\rho, X_\sigma], X_\tau] \quad + \quad [[X_\sigma, X_\tau], X_\rho] \quad + \quad [[X_\tau, X_\rho], X_\sigma] \quad = \quad 0,$$

Полученную конструкцию называют *алгеброй Ли.*

Полезно привести независимое определение этой структуры.

Действительная алгебра Ли состоит из величин $A, B, ...$ и линейных комбинаций $aA \quad + \quad bB$ с действительными числами a и b. *Произведение* элементов A и B, которое можно обозначить символом $[A, B]$, определяет элемент того же пространства и удовлетворяет условиям

$$[A, B] \quad = \quad -[B, A],$$

$$[[A, B], C] \quad + \quad [[B, C], C] \quad + \quad [[C, A], B] \quad = \quad 0.$$

Любой элемент алгебры Ли можно представить как линейную комбинацию базисных векторов X_σ:

$$A \quad = \quad \sum\nolimits_\sigma a_\sigma X_\sigma.$$