ЛЕКЦИЯ 2. 09.09.06

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

появляются после того, как с каждым элементом группы – R – сопоставлен линейный оператор $\hat{D}(R)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Эти операторы должны удовлетворять условиям

$$\hat{D}(R_2)\hat{D}(R_1) = \hat{D}(R_2R_1),$$
$$\hat{D}(e) = \hat{E}.$$

В дальнейшем будут рассматриваться лишь *ограниченные операторы*. В этом случае скалярные произведения

$$\langle\psi|\hat{D}(R)\psi\rangle$$

конечны для всех векторов ψ и непрерывно зависят от параметров элемента R.

Удобно начать с представлений алгебры Ли. В этом случае элементам алгебры A ставят в соотвествие операторы $\hat{D}(A)$, удовлетворяющие условиям

$$\hat{D}(\alpha A+\beta B) = \alpha\hat{D}(A) + \beta\hat{D}(B),$$

$$\hat{D}([A,B]) = [\hat{D}(A),\hat{D}(B)].$$

Если выделить элементы однопараметрической группы, определенной в терминах канонического параметра, то соотношения

$$\hat{D}(t_2+t_1) = \hat{D}(t_2)\hat{D}(t_2)$$

можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\hat{D}(t)}{dt} = \hat{D}\hat{D}(t),$$

в котором оператор $\hat{D}$,

$$\hat{D} \quad = \quad \lim_{t\to 0}\frac{\hat{D}(t)-\hat{E}}{t},$$

определяется инфинитезимальным оператором группы. Если при $t=0$ оператор $\hat{D}(t)$ сводится к единичному, то

$$\hat{D}(t) \quad = \quad e^{\hat{D}t}.$$

Если представление *унитарно*, т.е. справедливы равенства

$$\langle\hat{D}(t)\psi|\hat{D}(t)\phi\rangle \quad = \quad \langle\psi|\phi\rangle,$$

то дифференцируя по t и полагая t равным нулю, получаем равенство

$$\langle\hat{D}\psi|\phi\rangle \quad + \quad \langle\psi|\hat{D}\phi\rangle \quad = \quad 0,$$

верное при всех векторах ψ и ϕ. Поэтому справедливо соотношение

$$\hat{D}^{+} \quad + \quad \hat{D} \quad = \quad 0.$$

Если определить оператор

$$\hat{H} \quad = \quad i\hat{D},$$

то зависимость от времени операторов $\hat{R}(t)$ определится формулой

$$\hat{R}(t) \quad = \quad exp(-i\hat{H}t),$$

где $\hat{H}$ – эрмитов оператор:

$$\hat{H}^{+} \quad = \quad \hat{H}.$$

НЕЧТО О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Для дальнейшего полезно вспомнить о некоторых свойствах конечных групп. Конечная группа G порядка g состоит из элементов R_1,

R_2,...,R_g. Эти элементы можно рассматривать как совокупность точек, образующих *групповое многообразие*. Точки также перечислить целыми числами от 1 до g и с каждой точкой в таком пространстве сопоставить некоторый элемент группы, например, точке обозначенной числом a, поставить в соотвествие элемент R_a.

Если в произведении $R_c = R_a R_b$ число a фиксировано, а элемент R_b пробегает всю группу, то произведение R_c также пробегает всю группу. Если построить таблицу группового умножения, то она покажет, что при каждом значении a и b найдется некоторое значение c, которому соотвествует произведение $R_a R_b$. Иначе говоря, таблица умножения, заданная на групповом многообразии, определит функцию

$$c \quad = \quad \phi(a;b).$$

Очевидно, что на групповом многообразии можно определить произвольную функцию. Например, в теории представлений естественным образом возникли величины

$$D^{\mu}_{ij}(R_a) \quad = \quad D^{\mu}_{ij}(a),$$

которые при фиксированных значениях μ, i, j были функциями, заданными на групповом многообразии. Неприводимое унитарное представление D^{μ} размерности n_{μ} задает на групповом многообразии n^2_{μ} функций $D^{\mu}_{ij}(a)$. Функции, соотвествующие различным неэквивалентным представлениям, взаимно ортогональны:

$$\sum_a (D^{\mu}_{ij}(a))^* D^{\nu}_{kl}(a) \quad = \quad \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\mu\nu}\frac{g}{n_{\mu}}.$$

Функции $D^{\mu}_{ij}(a)$ образуют также и полную систему, т.е. любую заданную на групповом многообразии функцию $f(a)$ можно представить как линейную комбинацию функции $D(a)$.

ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотрим более общую конструкцию – суммы функций $f(R)$, когда элементы R пробегают некоторые подмножества группы M:

$$J = \sum_M f(R).$$

Если представить элементы R как

$$R = S^{-1}T,$$

где S – некоторый фиксированный элемент группы, то сумма J определится формулой

$$J = \sum_{SM} f(S^{-1}R).$$

Удобно представить полученное соотношение в виде

$$\sum_M f(R) = \sum_{SM} f(S^{-1}R).$$

Если множество M совпадает со всей группой, то

$$\sum_G f(R) = \sum_G f(S^{-1}R).$$

В случае непрерывных групп такие суммы должны переходить в интегралы

$$\int_M d\tau_A f(A).$$

При этом элементарные объемы (или, как говорят, *меру* $d\tau_a$) естественно определить так, чтобы, например, для любого фиксированного элемента B выполнялись соотношения

$$d\tau_A = d\tau_{BA}.$$

В этом случае говорят о *лево-инвариантной мере.*

Вычисленные с помощью лево-инвариантной меры интегралы обладают такими свойствами:

$$\int_M d\tau_A f(A) = \int_{BM} d\tau_{BA} f(B^{-1}A) = \int_{BM} d\tau_A f(B^{-1}A),$$

$$\int_G d\tau_A f(A) \quad = \quad \int_G d\tau_A f(B^{-1}A).$$

ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕРЫ

Если элемент A определяется переменными $(a_1, ..., a_r)$, то соответствующий элемент объема пространстве параметров равен da. Если с помощью элемента B произведен левый сдвиг множества M, то координаты соответствующих точек множества BM, будут равны

$$c \quad = \quad \phi(a;b).$$

Объему da теперь соответсвует величина dc.

Предположим, что множество M содержит единицу группы и определим меру этом множестве формулой

$$d\tau_M \quad = \quad \rho(a)da,$$

В этом случае мера на множестве BM равна

$$d\tau_{BM} \quad = \quad \rho(c)dc.$$

В окрестности единицы можно произвольно задать значение $\rho(0)$. Левый сдвиг, определяемый элементом B переводит множество, лежащее в окрестности единицы, во множество, расположенное в окрестности точки с параметрами

$$b_k \quad = \quad \phi_k(0;b),$$

поэтому приращения этих параметров равны

$$db_k \quad = \quad \sum\nolimits_{l=1}^{r} \Big(\frac{\partial \phi_k(a;b)}{\partial a_l}\Big)_{a=0} da_l.$$

Соответствующий элементарный объем равен

$$db \quad = \quad J(b)da,$$

где
$$J(b) \quad = \quad det\Big(\frac{\partial\phi_k(a;b)}{\partial a_l}\Big)_{a=0}.$$
Если определить функцию
$$\rho(b) \quad = \quad \frac{\rho(0)}{J(b)},$$
то элемент объема в окрестности точки B окажется равным
$$\rho(b)db \quad = \quad \rho(0)da.$$
Значение функции $\rho(b)$ для всех b получается из начального в результате левого сдвига на элемент B.

Чтобы убедиться в непротиворечивости принятого определения, достаточно заметить, что переход от элементарного объема, расположенного в окрестности любого значения параметра a к элементарному объему, определяемом параметром c, осуществляется с помощью преобразования
$$c \quad = \quad \phi(a;b).$$
Эту операцию можно совершить в два приема:

1) сначала выполнить преобразование, обратное к преобразованию с параметром a, а затем

2) совершить преобразование, которое приведет элементарный объем к точке c.

Приведем несколько примеров левоинвариантных мер.

1) Пусть группа определяется соотношениями
$$x' \quad = \quad x \quad + \quad a.$$
В этом случае точке b соотвествует
$$c \quad = \quad \phi(a;b) \quad = \quad a \quad + \quad b.$$
Поскольку
$$\frac{\partial\phi(a;b)}{\partial a}|\{a=0\} \quad = \quad 1,$$

то функция ρ тождественно равна единице. При интегрировании по группе трансляций следует вычислять интеграл

$$\int daf(a).$$

2) Закон умножения группы

$$x' \quad = \quad ax$$

определяется формулой

$$c \quad = \quad \phi(a;b) \quad = \quad ab.$$

Тождественное преобразование определяется значением $a = 1$,

$$\frac{\partial\phi(a;b)}{\partial a}|\{a=1\} \quad = \quad b,$$

поэтому функция плотности равна

$$\rho(b) \quad = \quad \frac{1}{b}.$$

3) В случае группы

$$x' \quad = \quad a_1 x \quad + \quad a_2$$

функции ϕ определяются равенствами

$$\begin{aligned} c_1 \quad &= \quad \phi_1(a,b) \quad = \quad ba_1, \\ c_2 \quad &= \quad \phi_2(a,b)b \quad + \quad ba_2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial a_1}|\{a_1=1,a_2=0\} \quad = \quad b, \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial a_2}|\{a_1=1,a_2=0\} \quad = \quad 0,$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial a_1}|\{a_1=1,a_2=0\} \quad = \quad 0, \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial a_1}|\{a_1=1,a_2=0\} \quad = \quad b,$$

то

$$\rho(b) \quad = \quad \frac{1}{b^2}.$$

Инвариантный интеграл определяется выражением

$$\int \frac{da_1 da_2}{a_1^2} f(a_1, a_2).$$

Предыдущие рассуждения следует дополнить важным замечанием. Мы определили интегралы, инвариантные относительно левых сдвигов. Однако, с таким же успехом можно определить интегрирование, инвариантное при правых сдвигах, считая, что

$$\rho(c)dc \quad = \quad \rho(a)da,$$

если

$$c \quad = \quad \phi(b; a).$$

Поэтому следует выяснить, могут ли лево- и правосторонние интегралы определять одну и ту же величину и сформулировать условия, при которых это может произойти.

Для нас важен случай, когда *область изменения групповых параметров конечна.* Соотвествующее групповое многообразие называют *компактным.* Говорят также о *компактной группе.* Доказано, что в случае компактных групп лево- и правоинвариантные меры совпадают, определяя одну *инвариантную меру.*