

## Глава 16

# Задачи и упражнения по теме курса

### 16.1 Введение.

Нет иного пути по-настоящему усвоить основы кинематики, тем более релятивистской, кроме решения кинематических задач. Во многих случаях весьма полезно не ограничиваться только получением формул, а проделывать численные оценки. Только так можно достичь достаточной для успешной работы легкости понимания условий конкретного исследования, его особенностей, возможностей, а заодно – избежать грубых промахов, могущих свести на нет многолетние усилия работающих вместе коллег. Одновременно, упражнения в решении кинематических задач существенно облегчают понимание статей в журналах и приведенных в них результатов других исследователей.

Во всех книгах по кинематике, рекомендованных в списке литературы, есть задачи и упражнения практически ко всем главам. Их стоит решать: не обязательно все, но хотя бы некоторые. Ответы на них всегда можно найти либо в цитируемых в книге статьях, либо в самом тексте, где эти ответы бывают неплохо замаскированы.

Удивительно, но почти невозможно найти современный специальный задачник по кинематике (да и не только по кинематике, если говорить о физике ядра и частиц)! Поэтому задачники, указанные в рекомендованном списке литературы, относительно почтенного возраста. Правда, стар задачник или нет – не так уж и важно.

С другой стороны, отсутствие специального задачника приводит к необходимости самостоятельного подбора задач и упражнений. Они, как правило, взяты из практики или из других книг. Эти задачи являются неотъемлемой частью данного курса кинематики элементарных процессов и сгруппированы, в основном, по темам лекций. Практически все они обязательны для решения и не слишком сложны. Для серьезных упражнений и тренировки весьма полезно не ограничиваться только ими, а обращаться также к книгам [1, 2, 3, 4].

## 16.2 Инварианты и системы координат.

1. Для бинарной реакции  $a + b \rightarrow c + d$  докажете формулу (3.3)

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 .$$

2. Выразите энергию частицы  $b$  через инвариант  $s$  и массы частиц, получив формулу, аналогичную (3.27).

3. Перечислите характерные качественные особенности дифракционного рассеяния, вытекающие из выражения для дифференциального сечения упругого рассеяния на абсолютно черном шаре радиуса  $R$  (формулы (3.6)-(3.8), или, в итоге, формула (3.9)):

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{\pi R^2}{-t} \cdot J_1^2(R\sqrt{-t}) ,$$

а именно:

1. характер зависимости  $d\sigma/dt$  от  $|t|$  при фиксированной начальной энергии снаряда,
2. характер зависимости  $d\sigma/dt$  от начальной энергии снаряда при фиксированной величине  $|t|$ ,
3. характер зависимости  $d\sigma/dt$  от радиуса шара-мишени при фиксированной начальной энергии снаряда,

4. получите приближенную формулу для  $d\sigma/dt$  при малых  $R\sqrt{|t|}$ .

4. Выведите формулу, связывающую дифференциальное сечение рассеяния, представленное в зависимости от угла рассеяния  $\theta^*$  в системе центра масс, с той же величиной, представленной в зависимости от  $|t|$  (то есть, свяжите  $d\sigma/d\Omega^*$  и  $d\sigma/dt$ ). Рассмотрите 2 случая: а) в системе центра масс рассеяние обладает аксиальной симметрией (ось симметрии - направление импульса частицы в системе центра масс), б) аксиальной симметрии нет (что возможно, например, в случае поляризованных частиц, когда спин одной из них перпендикулярен плоскости реакции).

5. Попробуйте самостоятельно прояснить смысл мандельштамовской переменной  $u$ , рассуждая примерно так же, как при обсуждении переменной  $t$ .

6. Рассмотрите кинематику на пороге реакции  $a+b \rightarrow 1+2+3$  в лабораторной системе, приняв массу снаряда  $a$  равной  $m_{proj} = M_1$  а массу мишени  $b$  равной  $M_{targ}$ . (Величину  $M_X = M_3 + m_2 - M_{targ}$  можно назвать "рожденной" массой). Проверьте формулу (3.15) для пороговой энергии и выведите формулы (3.16), (3.17), (3.18) для квадрата переданного к частицам 1, 2, 3 4-импульса в частном случае реакции рождения в  $pp$ -взаимодействии мезона (мезонов) в ассоциации с барионом (сюда относятся реакции типа  $pp \rightarrow p + \Lambda + K^+$ ), обозначив массу частицы 3 (бариона) через  $M_Y$  а мезона (или мезонов) через  $\sum m_i$ .

7. 1) Покажите, что для реакции фоторождения  $\phi$ -мезона на покоящемся протоне (т. е. реакции  $\gamma + p \rightarrow \phi + p$ ) лабораторный импульс рожденного  $\phi$ -мезона (в приближении равенства масс протона и  $\phi$ -мезона:  $m_p \approx m_\phi \equiv M$ ) на пороге равен примерно

$$\frac{3}{4} \cdot M \approx 750 \text{ МэВ/с} .$$

2) Как будет выглядеть на пороге угловое распределение рожденных  $\phi$ -мезонов? Под каким углом в л.с. по отношению к направлению импульса фотона будут они вылетать?

8. Задачу 7 полезно обобщить на случай произвольной бинарной реакции фоторождения  $\gamma + p \rightarrow M + p$ , где бозон  $M$  имеет массу  $M$  и

квантовые числа фотона (например, это векторный мезон). Протон-мишень с массой  $m$  покоится в лабораторной системе. Найдите: 1) пороговую энергию фотона в лабораторной системе, 2) импульс бозона в лабораторной системе на пороге.

**9.** Пусть на покоящийся в лабораторной системе протон налетает фотон с энергией  $E$  и происходит неупругая реакция с рождением частиц так, что в конечном состоянии нет фотонов (фотопоглощение). (Конечно, некоторые из рожденных частиц могут затем распадаться с испусканием фотонов, но эти фотоны вторичные, а не появившиеся в акте взаимодействия фотона с протоном, т. е. не "прямые".) Какова максимальная эффективная масса системы частиц в конечном состоянии?

**10.** При анализе данных, накопленных в эксперименте по фоторождению  $\phi$  мезонов в реакции  $p(\gamma, \phi)X$  с использованием пучка "меченых" фотонов, аспирант попытался ответить на вопрос о количестве зарегистрированных случаев этой реакции при разных энергиях фотонов и получил распределения, показанные на рисунке 16.1. На его нижней панели показано распределение по эффективной массе пары  $K$ -мезонов. Пик в этом распределении отвечает каонным парам от распада  $\phi \rightarrow K^+K^-$ . На верхней панели рисунка 16.1 показано распределение событий в зависимости от энергии фотона. Аспирант сделал утверждение, что события в этом распределении те же самые, что и в распределении по эффективной массе каонной пары. Верно ли это утверждение? Что может вызвать сомнение в его истинности?

**11.** Представьте в явном виде нерелятивистский предел соотношений (3.22) (т. е. предел  $\beta \ll 1$ ,  $\gamma \approx 1$ ):

$$u_{12}^0 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)$$

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \cdot \frac{u_1^0 + u_{12}^0}{1 + u_2^0}.$$

(NB:  $u_1^0 = E_1/m_1 = \gamma_1$ ,  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}_1/m_1 = \gamma_1\boldsymbol{\beta}_1$  и т. д.).

**12.** Переменная Мандельштама  $s$  имеет, как известно, смысл полной энергии в системе центра масс сталкивающихся частиц, то есть

$$s = (\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b)^2 = (E_a^* + E_b^*)^2,$$

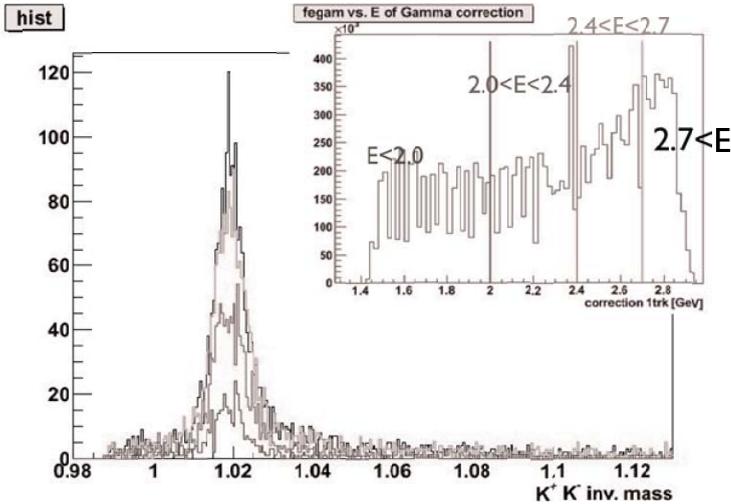


Рис. 16.1. Распределения событий по эффективной массе пары -мезонов и по энергии фотонов пучка, полученные при анализе данных по фоторождению мезонов на протонах. В эксперименте использовалась жидководородная мишень в пучке "меченых" фотонов.

где звездочка в верхнем индексе, как всегда, помечает кинематические величины в системе центра масс реакции. Получите формулы, выражающие  $E_a^*$  и  $E_b^*$  через инвариант  $s$  и массы частиц.

**13.** (а) Получите формулу (3.29) для импульса частиц  $a$  и  $b$  в системе центра масс. (б) Получите аналогичную формулу для импульса снаряда (частица  $a$ ) в системе покоя частицы  $b$  (лабораторная система). Какой практический вывод вы бы сделали из сравнения полученной вами формулы с формулой (3.29)? Проверьте этот вывод, перейдя в "антилабораторную" систему, или систему покоя частицы  $a$ , и вычислив в ней импульс частицы  $b$ . *Напоминание.* "Функция треугольника"  $\lambda(x, y, z)$  определена как  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x - y - z)^2 - 4yz$ .

**14.** Выведите формулы (3.32), выражающие скорость (и гамма-фактор) системы центра масс через инварианты и массы частиц. Вторые части этих формул легко получить в пределе больших (по сравнению с массами) значений  $s$ .

15. Для рассеяния  $a + b \rightarrow a' + b'$  частиц одинаковых масс ( $m_a = m_b = m$ ) сравните скорость системы центра масс  $\beta_{cm}$  (относительно лабораторной системы, где частица  $b$  покоится) со скоростью частицы  $a$  (или  $b$ )  $\beta^*$  в системе центра масс.

16. В реакции  $a + b \rightarrow c + d$  конец вектора, изображающего лабораторный импульс частицы  $c$ , на плоскости ( $p_x, p_y = 0, p_z$ ) (ось  $Z$  направлена по импульсу пучка) лежит на эллипсе (т. н. "эллипс импульсов"). Покажите, что экстремальные значения лабораторного импульса частицы  $c$  задаются формулами (3.38), где  $\beta^*$  есть скорость частицы  $c$  в системе центра масс:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 0, \gamma_{cm} E^* (\beta_{cm} - \beta^*)) , \quad \mathbf{p}_2 = (0, 0, \gamma_{cm} E^* (\beta_{cm} + \beta^*)) .$$

17. Проведите кинематический анализ реакции  $n(K, \pi)\Lambda$  и дайте ответы на следующие вопросы:

- имеет ли она порог в физической области энергий и каков он;
- если  $K$ -мезон имеет импульс  $p_K$  (разумеется, выше порога) то каковы величины минимально возможного и максимально возможного импульсов  $\Lambda$ -гиперона?
- Может ли в этой реакции  $\pi$ -мезон вылететь "назад" в лабораторной системе отсчета?
- Может ли в этой реакции  $\Lambda$ -гиперон вылететь "назад" в лабораторной системе отсчета?
- Постройте график зависимости минимально возможного импульса  $\Lambda$ -гиперона от импульса  $p_K$ .

18. Зная, что

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= p_{\perp}^* \\ p_z &= \gamma_{cm} p_z^* + \gamma_{cm} \beta_{cm} E^* \\ E &= \gamma_{cm} E^* + \gamma_{cm} \beta_{cm} p_z^* , \end{aligned}$$

свяжите угол вылета частицы  $c$  в лабораторной системе отсчета с ее углом вылета в системе центра масс и докажите, что

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_{cm} (\cos \theta^* + g^*)} , \quad g^* = \frac{\beta_{cm}}{\beta^*} .$$

**19.** Выразив, например, энергию частицы  $s$  в с.ц.м. через продольный импульс и энергию в лабораторной системе, можно получить уравнение, определяющее величину импульса этой частицы в лабораторной системе отсчета в зависимости от угла ее вылета, т. е. найти функцию  $p(\theta)$ :

$$E^* + \beta_{cm} \gamma_{cm} p \cos \theta = \gamma_{cm} (p^2 + m^2)^{1/2} .$$

Решите это уравнение (см. (3.40)).

**20.** Для бинарной неупругой реакции типа  $\mu + m \rightarrow \mu + M$ , где  $\mu$  – масса снаряда,  $m$  – масса мишени,  $M$  – масса частицы, в которую после рассеяния превратилась частица-мишень, выведите формулу для  $t_{min}$ , считая, что  $s \gg m_i^2$  ( $m_i$  – массы частиц, участвующих в реакции).

### 16.3 Задачи к лекциям 5 и 6.

**21.** (а) Покажите, что векторы  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ , определенные в (16.1), попарно ортогональны друг к другу. Выполните аналогичную проверку для ортов, определенных согласно формулам (16.3).

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f}{|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f|}, \quad (16.1)$$

где  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_f$  есть единичные векторы, направленные вдоль импульсов начальной и рассеянной частиц, соответственно. Векторы  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ , определенные в (16.1), удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m}. \quad (16.2)$$

Существует также другое определение базисных ортов

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f}{|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f|}. \quad (16.3)$$

При таком определении они удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{m} \times \mathbf{l}. \quad (16.4)$$

(b) Проверьте формулы (16.2) и (16.4).

(с) Какие из этих двух троек ортов соответствуют правовинтовой системе координат? Если только одна, то какой системе соответствует другая тройка?

**22.** Объясните, почему в связи с несферичностью дейтрона говорят только о  $D$ -состоянии в нерелятивистской волновой функции дейтрона.

**23.** В "спектаторном" механизме фрагментации дейтрона предполагается, что основной вклад в амплитуду реакции дает левая диаграмма рис. 4.3.

(а) Рассмотрите кинематику вершины "развала" дейтрона на систему "протон+нейтрон" в системе покоя дейтрона и получите формулу ((4.11)). Найдите относительный импульс нейтрона (т. е. импульс, взятый в системе покоя протона-спектатора) в случае, когда нейтрон находится "на массовой поверхности", т. е. выполняется соотношение  $E_n^2 - q_n^2 = m_n^2$ .

(б) Покажите, что условие:  $\mathcal{P}_n^2 \geq 0$  влечет за собой ограничение (4.12) на величину относительного импульса:

$$q \leq \frac{3}{4} m_N .$$

**24.** Для упругого рассеяния типа  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$  найдите связь лабораторного угла рассеяния с углом рассеяния в системе центра масс. Выпишите формулу, связывающую тангенсы этих углов (или угла рассеяния в л.с. с половинным углом рассеяния в с.ц.м.).

**25.** Реакция  $n(K, \pi)\Lambda$  с начала 1960-х годов, после появления статьи [60], широко используется в экспериментах по изучению гиперядер, благодаря особенности ее кинематики, впервые замеченным М.И.Подгорецким.

Именно: при определенном значении лабораторного импульса  $K$ -мезона, образовавшаяся  $\Lambda$ -частица оказывается покоящейся в лабораторной системе. Найдите это "магическое" значение импульса  $K$ -мезона. Проанализируйте полученную общую формулу. В реакциях какого типа могут быть подобные особенности?

**26.** Рассмотрите реакцию фоторождения мезона на покоящемся в лабораторной системе нуклоне (массу нуклона обозначим как  $M$ ):  $\gamma + N \rightarrow M + N$ . Определите, при какой энергии фотона  $E_\gamma$  (и при каком соотношении между массами мезона  $M$  и нуклона) мезон в этой реакции может оказаться покоящимся в лаборатории.

## 16.4 Задачи к лекциям 7 и 8.

**27.** Докажите, что эффективная масса группы фотонов, летящих в одном направлении, равна нулю. (Г.И.Копылов)

**28.** Докажите, что если в какой-нибудь одной системе отсчета направления движения двух фотонов совпадают, то они совпадают в любой другой системе отсчета. (Г.И.Копылов)

**29.** Для распада  $0 \rightarrow 1 + 2$  частицы 0 с массой  $M_0$  на частицы 1 и 2 с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно, выпишите формулы для полных энергий частиц 1 и 2, их кинетических энергий, а также отношения этих кинетических энергий.

**30.** Пусть имеется в лабораторной системе "родительская" частица 0 с 4-импульсом  $\mathcal{P}_0 = (E_0, \mathbf{p}_0)$  (выберем направление оси  $Z$  по направлению импульса  $\mathbf{p}_0$ ), и пусть она распадается с вылетом распадной частицы 1 с 4-импульсом  $\mathcal{P}_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ . Под углом вылета этой распадной частицы будем понимать угол между  $\mathbf{p}_1$  и направлением оси  $Z$ . Чтобы его найти, достаточно вычислить инвариант  $(\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1)$  в системе покоя распадающейся частицы и в лабораторной системе:

$$(\mathcal{P}_0 \cdot \mathcal{P}_1) = E_0 E_1 - \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 = E_0 E_1 - p_0 p_1 \cos \theta_1 = E_0^* E_1^* .$$

Поскольку энергия и импульс распадающейся частицы известны, а энергия распадной частицы связана с ее импульсом и массой, то соотношение (6.4) можно считать уравнением, связывающим импульс распадной частицы с ее углом вылета. Покажите, что искомое решение уравнения (6.4) дается формулами (6.5) и (6.6):

$$p_1 = \frac{M_0 E_1^* p_0 \cos \theta_1 \pm E_0 \sqrt{D_1}}{E_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta_1} ,$$

где

$$D_1 = M_0^2 p_1^{*2} - m_1^2 p_0^2 \sin^2 \theta_1 .$$

**31.** Для распада  $1 \rightarrow 2+3$  при условии, что массы частиц 2 и 3 равны нулю (пример: распад  $\pi^0$  на два фотона) выведите соотношение

$$\sin \frac{\psi_{23}}{2} = \frac{m}{2\sqrt{E_2 E_3}}$$

и покажите с его помощью, что минимальный угол разлета  $\psi_{23}^{min}$  получается, когда  $\theta_2 = \theta_3$  (симметричные условия). Чему равен синус этого минимального угла? (См. также задачу 34.)

**32.** Можно связать с углом вылета распадной частицы и ее энергию; найдите это выражение сами и сравните с формулой (23) гл. II (параграф 2) в книге Г.И.Копылова [2].

**33.** Под углом разлета  $\psi(E_1)$  распадных частиц в распаде  $0 \rightarrow 1 + 2$  "на лету", когда в лабораторной системе 4-импульс распадающейся частицы равен  $(E_0, \mathbf{p}_0)$ , будем понимать угол между импульсами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  при энергии распадной частицы 1 равной  $E_1$ .

Проделайте самостоятельно выкладки, приводящие к формулам (6.12)-(6.14):

$$\cos \psi = \frac{E_1 E_2 - q^2}{p_1 p_2},$$

$$\cos \psi = \frac{E_1 (E_0 - E_1) - q^2}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \sqrt{(E_0 - E_1)^2 - m_2^2}},$$

причем предельные значения  $E_1$ , очевидно, отвечают вылету частицы 1 в системе покоя 0 "назад" ( $E_{1, min}$ ) и "вперед" ( $E_{1, max}$ ). Соответственно,

$$E_{1, min/max} = \frac{E_0 E_1^* \mp p_0 p_1^*}{M_0}, \quad E_{1, min} \leq E_1 \leq E_{1, max}.$$

**34.** Продолжая анализ распада  $0 \rightarrow 1 + 2$  "на лету", в случае, когда распадные частицы – фотоны, выведите формулы (6.16) и (6.17):

$$E_1 = \frac{E_0}{2} \pm \sqrt{\frac{E_0^2}{4} - \frac{M_0^2}{2(1 - \cos \psi)}},$$

$$E_2 = \frac{E_0}{2} \mp \sqrt{\frac{E_0^2}{4} - \frac{M_0^2}{2(1 - \cos \psi)}}.$$

Проанализируйте эти формулы: всякие ли углы разлета разрешены? Как найти минимальный угол разлета?

**35.** Для упругого рассеяния типа  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$  найдите связь лабораторного угла рассеяния с углом рассеяния в системе центра

масс. Выпишите формулу, связывающую тангенсы этих углов (или угла рассеяния в л.с. с половинным углом рассеяния в с.д.м.).

**36.** 1) Пусть рассматривается реакция  $a + T \rightarrow c + X$ , имеющая порог при ненулевом импульсе снаряда  $a$  с ненулевой массой, который падает на покоящуюся в л.с. мишень  $T$ . Частица  $c$  регистрируется, а система  $X$  имеет минимально возможную массу  $M$  (недостающую массу) и не регистрируется. Дайте аналитический вывод соотношения между массой мишени и массой регистрируемой частицы, при выполнении которого всегда существует такое значение импульса снаряда, что условие "безотдачности" выполняется (т.е. импульс частицы  $c$  в л.с. равен нулю). 2) Справедливо ли это соотношение, если снаряд является фотоном?

## 16.5 Фазовый объем.

**37.** Прделайте самостоятельно выкладку, дающую последнее равенство формулы (9.15):

$$\int d^4P_i \delta(P_i^2 - m_i^2) = \int d^3\mathbf{p}_i dE_i \delta(E_i^2 - \mathbf{p}_i^2 - m_i^2) = \int \frac{d^3p_i}{2E_i}.$$

**38.** Покажите, что

(а) вблизи порога реакции, где  $\sqrt{s}$  мало отличается от суммы масс частиц конечного состояния, фазовый объем растет от нуля (который имеет место, когда  $\sqrt{s}$  равен пороговому значению  $s_{thresh}$ ) так, как показано в формуле (9.24):

$$R_2(s) \sim \sqrt{\sqrt{s} - (m_1 + m_2)} = \sqrt{\varepsilon},$$

где  $\varepsilon \equiv \sqrt{s} - \sqrt{s_{thresh}}$  называется "превышением над порогом";

(б) в ультрарелятивистском пределе (когда всеми массами можно пренебречь), справедлива формула (9.25):

$$R_2^{ur}(s) = \frac{\pi}{2}.$$

**39.** Рассмотрите реакции (а)  $n + p \rightarrow M + d$  и (б)  $n + p \rightarrow M + n + p$  вблизи порога рождения мезона  $M$  в них. Сравните фазовые объемы этих реакций ( $R_2^a$  и  $R_3^b$ ) при одинаковом превышении над соответствующими порогами, получив в нерелятивистском пределе выражение для отношения  $R_2^a/R_3^b$ .

**40.** Распад  $\Lambda$ -частицы может идти как по каналу  $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ , так и по каналу  $\Lambda \rightarrow n + \pi^0$ . Вычислите отношение фазовых объемов для распадов по этим каналам.

**41.** Объясните характер распределения событий на рис. 16.2 и рис. 16.3, взятых из статьи [66]:

1. Почему на левой панели есть один изолированный "островок", отделенный незаселенной областью от области, ограниченной "гребнем" с высокой концентрацией событий?
2. Почему на правой панели есть области с очень низкой концентрацией событий?
3. События какого типа группируются в "островок" в форме эллипса?
4. Почему этот островок погружен в область, засеянную событиями?
5. Какие причины могли бы обусловить низкую концентрацию событий возле линии  $p_1 = p_2$ ?
6. Какие физические особенности, помимо перечисленных, вы заметили на распределении, показанном на правой панели?

**42.** Почему на диаграмме Арментероса-Подольянского (см. рис. 7.1) для  $V^0$ -частицы, распадающейся на две заряженных частиц, распределения событий от распада каонов и от распада  $\Lambda^0$  не только имеют разный характер, но и разные значения максимального поперечного импульса?

## 16.6 Задачи к лекциям 11 и 12.

**43.** Докажите теорему о том, что для любой точки внутри равностороннего треугольника сумма ее расстояний до сторон этого треугольника равна его высоте.

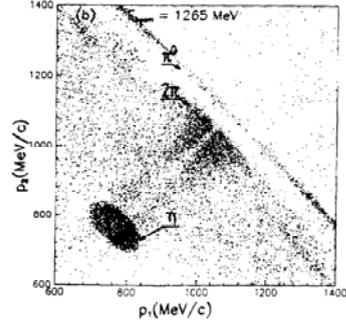
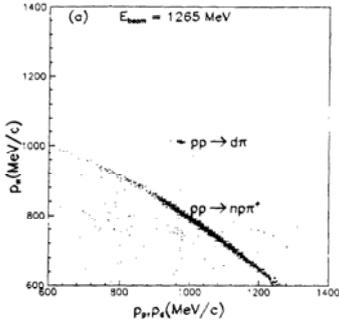


Рис. 16.2. Данные из [66] по реакции неупругого  $pp$  взаимодействия. Распределение по импульсам протонов для событий с регистрацией сам пиона (ось абсцисс) в совпадении не менее 2-х протонов в совпадении с тяжелой положительно заряженной частицей; ее импульс отложен по оси ординат.

Рис. 16.3. Данные из [66]. Распределение по импульсам протонов для событий с регистрацией сам пиона (ось абсцисс) в совпадении не менее 2-х протонов в совпадении с тяжелой положительно заряженной частицей; ее импульс отложен по оси ординат.

44. Для трехчастичного распада  $P \rightarrow 1 + 2 + 3$  введем следующие переменные:  $\Omega_3 = (\cos \theta_{13}, \varphi_3)$ , которые описывают ориентацию вектора импульса частицы 3 относительно  $\mathbf{p}_1$ , и  $\Omega_1$  – ориентацию импульса частицы 1 относительно некоторой произвольной оси. Покажите, что справедлива формула (10.6):

$$d^3 p_1 d^3 p_3 = p_1^2 dp_1 d\Omega_1 p_3^2 dp_3 d\Omega_3 = p_1 E_1 dE_1 d\Omega_1 p_3 E_3 dE_3 d\cos \theta_{13} d\varphi_3 ,$$

а для трехчастичного фазового объема можно и в самом деле написать выражение (10.7)

$$R_3(s) = \frac{1}{8} \int dE_1 dE_3 d\Omega_1 d\varphi_3 \Theta(1 - \cos^2 \theta_{13}) .$$

Здесь  $\Theta$  – функция ограничивает  $\cos \theta_{13}$  его физическими значениями. Значения  $\cos \theta_{13} = \pm 1$  соответствуют границе физической области на плоскости  $(E_1, E_3)$ , то есть границе диаграммы Далица.

45. Получите уравнение (10.8), определяющее границы диаграммы Далица:

$$(\sqrt{s} - E_1 - E_3)^2 = E_1^2 - m_1^2 + E_3^2 - m_3^2 \pm [(E_1^2 - m_1^2)(E_3^2 - m_3^2)]^{1/2} + m_2^2 ,$$

которое можно переписать и в форме (10.9)

$$(\sqrt{s} - E_1 - E_3)^2 = |p_1 \pm p_3|^2 + m_2^2.$$

46. Покажите, что на границе диаграммы Далица (см. (10.14))

$$\lambda(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = 0.$$

47. Рассмотрите реакцию типа  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3$ . Ее кинематическая диаграмма представлена на рис. 10.9.

Для реакции этого типа получите самостоятельно все формулы для инвариантов  $t_{a2}, t_{b2}, t_{a3}, t_{b1}, s_{13}$  и скалярных произведений типа  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j$ . Указанные инварианты определите по аналогии с определениями (10.18).

## 16.7 Задачи к лекциям 13 и 14.

48. Как известно, плотность событий на диаграмме Далица определяется квадратом матричного элемента реакции, который содержит чисто кинематическую часть и часть, зависящую от динамики (механизма) реакции (распада). Для распада векторного мезона на три пиона **покажите**, что если эта (зависящая от динамики) часть не зависит, тем не менее, от кинематических переменных, то плотность событий на диаграмме Далица определяется формулами (11.7) и (11.8):

$$\frac{d\rho_{c.m.}}{dS} = \text{const} \frac{\lambda(\mathbf{p}_1^2, \mathbf{p}_2^2, \mathbf{p}_3^2)}{4},$$

что в полярных координатах сводится к выражению

$$\frac{d\rho_{c.m.}}{dS} = \text{const} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \right) r^2 - \frac{2\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2} r^3 \cos(3\varphi) \right],$$

где величина  $\varepsilon$  определена раньше и уже знакома.

49. Получите самостоятельно выражение (11.11) для плотности событий на диаграмме Далица при распаде псевдовекторного мезона

на три пиона.

$$\frac{d\rho_{c.m.}}{dS} = \text{const} \left[ 1 - \frac{2}{2-\varepsilon} r \cos(3\varphi) \right] r^2 .$$

**50.** Напишите свою программу генерации нормально распределенного случайного числа и проверьте, что полученное распределение действительно совпадает с нормальным законом  $N(0, 1)$ .

**51.** Обобщите приведенные в разделе 12.2 главы 12 формулы и вашу программу так, чтобы она генерировала случайные числа, распределенные по закону  $N(X_0, \sigma)$ .

**52.** Обратите внимание на ф-лу (12.6): приведенное в ней распределение для величины  $\rho$  называется *распределением Рэля*. Фактически, это распределение по расстоянию от начала координат некоторой случайной точки на плоскости при условии, что каждая из декартовых координат этой точки распределена нормально со средним значением 0 и единичной дисперсией. Пусть теперь параметр  $\sigma$  не равен 1. Для такого распределения:

1. Найдите наиболее вероятное значение  $\rho$ , когда эта величина распределена по закону Рэля.
2. Найдите среднее значение  $\rho$ .
3. Найдите среднее значение  $\rho^2$ .
4. Обобщите эту задачу и получите обобщение закона Рэля (12.6), рассмотрев случай, когда декартовы координаты  $(x, y)$  случайной точки на плоскости распределены нормально, но с ненулевыми средними: координата  $x$  распределена по закону  $N_x(X_0, \sigma)$ , а координата  $y$  – по закону  $N_y(Y_0, \sigma)$ ,  $X_0 \neq 0$ ,  $Y_0 \neq 0$ .

**53.** Пусть на плоскости  $(X, Y)$  вокруг начала координат случайным образом разбросаны точки с координатами  $(x, y)$ , причем координаты  $x$  и  $y$  независимы и распределены по нормальному закону с одинаковой дисперсией  $\sigma$  и средним значением 0. Каково распределение этих точек по расстоянию  $r$  от начала координат? Каково наиболее вероятное значение  $r$ , среднее значение  $\langle r \rangle$  и среднеквадратичное значение  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ ?

**54.** Ответьте на эти же вопросы для случая, когда точки равномерно распределены на той же плоскости внутри круга радиуса  $R$ .

**55.** Пусть две независимые случайные величины  $x$  и  $y$  распределены (каждая) по закону Брейта-Вигнера с одним и тем же параметром ширины  $\Gamma$ :

$$w(z) \sim \frac{\Gamma^2/4}{(z_0 - z)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (16.5)$$

где  $z = x$  или  $z = y$  соответственно, и центры распределений находятся в нуле осей соответствующих координат (т. е.  $x_0 = y_0 = 0$ ).

Найдите и проанализируйте уравнение для "линий уровня" (т. е. постоянного значения) двумерного распределения  $W(x, y)$  этих случайных величин на плоскости. Дайте графическое представление этих линий при нескольких значениях параметра  $\rho$  (например, 0.1, 0.3, 0.5, 0.8), определенного как

$$\rho_i = \frac{W(x, y) = \text{const}_i}{W(x, y)_{\max}}.$$

Можно дать графическое представление, полученное Монте-Карло методом розыгрыша этих случайных величин в соответствии с заданным распределением.

## 16.8 Разные задачи.

**56.** Есть 4 города, расположенных в вершинах квадрата со стороной 2 единицы. Нужно соединить их железной дорогой так, чтобы из любого города можно было бы проехать в любой другой, и при этом полная длина железной дороги была бы минимально возможной. Насколько короче эта минимальная длина (если она действительно короче) суммы длин диагоналей данного квадрата?

**57.** Известно, что нуклон состоит из трех конститuentных кварков. Глюоны связывают их наподобие упругих струн так, что чем дальше расходятся кварки, тем сильнее глюонная струна препятствует этому. Иными словами, запасенная в глюонной струне энергия пропорциональна ее длине (в принципе, почти ничего для данной задачи не изменится, если она пропорциональна длине, возведенной в некоторую ненулевую положительную степень).

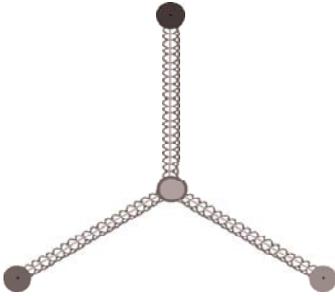


Рис. 16.4. Вариант конфигурации кварков и глюонных струн в нуклоне. Цветные кварки: кружки разного оттенка. Кружок в центре: трехглюонная связь. Спирали - эффективные глюонные струны.



Рис. 16.5. Второй возможный вариант конфигурации кварков и глюонных струн. Примечательно, что в этом варианте каждый кварк связан сразу с двумя глюонными струнами.

Радиус нуклона известен: примерно  $0.8 \text{ Фм}$ . Из соображений симметрии (легкие кварки  $u$  и  $d$  для глюонов неразличимы и их массы одинаковы) ясно, что (1) задачу можно рассматривать на плоскости, так как через 3 точки можно провести одну, и только одну плоскость, и (2) расстояния между кварками одинаковы. Таким образом, кварки находятся в вершинах равностороннего треугольника.

В настоящее время считается, что вклад эффективных глюонных струн в массу нуклона составляет почти  $2/3$  его массы.

Рис. 16.4-16.5 указывают также на то, что орбитальный момент количества движения кварков и глюонных струн может давать заметный вклад в полный спин нуклона, так как ни одна вершина треугольников не выделена и система обладает вращательной симметрией (представьте себе эти треугольники вращающимися).

Какой из рисунков 16.4-16.5 адекватно отражает структуру нуклона, то есть, соответствует наиминимальной энергии трехкваркового состояния? Обоснуйте свой выбор.

**58.** Пусть параллельный монохроматический пучок падает нормально на плоскопараллельную пластинку толщины  $x$  по направлению пучка.

1. Найдите вероятность  $P_k(x)$  того, что частица пучка испытает **ровно**  $k > 0$  столкновений.

2. При какой толщине пластинки вероятность  $P_k(x)$  максимальна? Чему равна эта максимальная вероятность?
3. Найдите вероятность  $P_{scatt}(x)$  того, что частица пучка испытает хотя бы одно столкновение.

**59.** Характерный пространственный угол многократного рассеяния, как известно, есть

$$\theta_{moliere} = \sqrt{2} \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \cdot z \cdot \sqrt{\frac{x}{X_0}} \cdot \left[ 1 + 0.038 \cdot \ln \left( \frac{x}{X_0} \right) \right], \quad (16.6)$$

где  $p$ ,  $\beta$  и  $z$  есть импульс (в МэВ/с), скорость и заряд частицы соответственно,  $x$  и  $X_0$  – толщина слоя вещества и его радиационная длина.

Почему в приведенной здесь формуле (16.6) поставлен множитель  $\sqrt{2}$ ?

**60.** Пусть в лабораторной системе сталкиваются два релятивистских ядра с одинаковой энергией на нуклон; заряды ядер, соответственно,  $Z_1$  и  $Z_2$ , атомные номера  $A_1$  и  $A_2$ . Массы ядер в ГэВ/с<sup>2</sup> оцените с учетом средней энергии связи на нуклон. Оцените величину напряженности магнитного поля, возникающего при максимальном сближении ядер при "касательном" столкновении (прицельный параметр соударения возьмите равным сумме радиусов ядер). Дайте численную оценку напряженности магнитного поля в гауссах для следующих случаев:

1. столкновение ядер  $Au$  с  $Au$  (ядра золота);
2. столкновение ядер  $Cu$  с  $Cu$  (ядра меди);
3. столкновение ядер  $d$  с  $Au$  (ядра дейтерия с золотом);
4. столкновение протонов с протонами.

В каждом из этих случаев сделайте оценки при следующих двух значениях полной энергии каждого из ядер в расчете на один нуклон: (а) 10 ГэВ; (б) 1 ТэВ. Оцените характерное время пребывания ядер в таком индуцированном магнитном поле для этих же случаев.

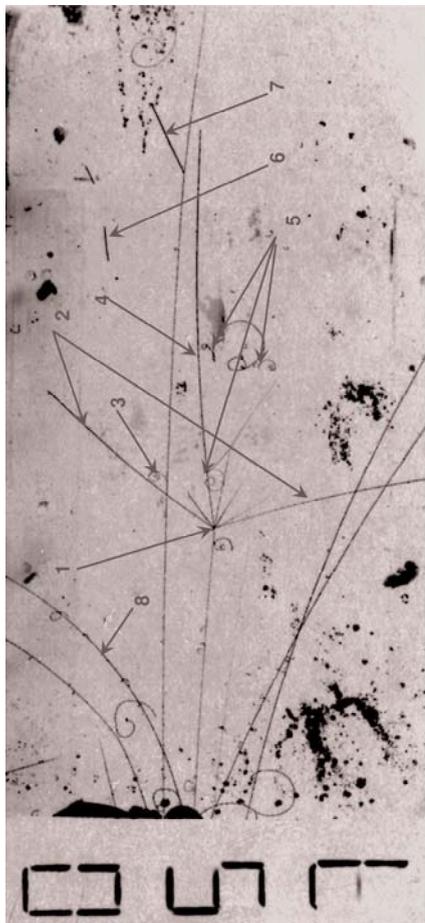
**61.** Оцените частоту (в Гц) прецессии спина протона и нейтрона в вычисленных вами магнитных полях.

**62.** Сделайте численную оценку энергии взаимодействия протона и нейтрона с внешним постоянным магнитным полем напряженностью  $10^{17}$  Гаусс. Ответ дайте в единицах, характерных для ядерной физики, т. е. в МэВ.

**63.** Вспомнив, что одноименные электрические заряды отталкиваются, оцените численно величину энергии электрического взаимодействия, выталкивающего протоны из сталкивающихся ядер при их сближении на такое наименьшее возможное расстояние, когда сильное взаимодействие между ними еще отсутствует. Оценку дайте в единицах, характерных для ядерной физики, т. е. в МэВ. Оцените (в единицах Фм) величину расстояния наибольшего сближения без включения сильного взаимодействия для столкновения двух ядер золота друг с другом.

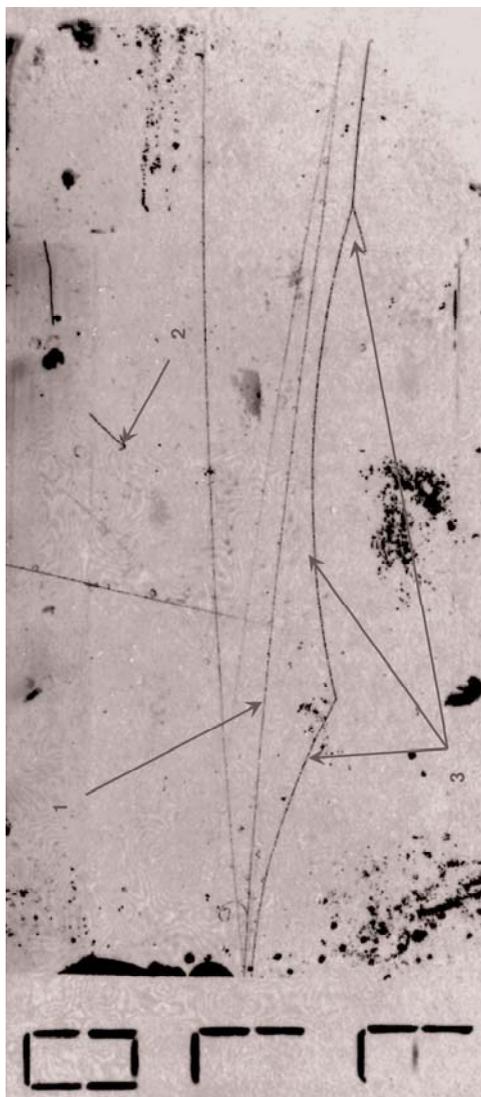
## 16.9 Распознавание событий в детекторах.

64. Дайте ответы на вопросы, поставленные на рисунках:



1. Что здесь произошло? Опишите качественно, определив знак заряда пучковой частицы.
2. Охарактеризуйте качественно (знак заряда, энергии) каждый из треков и что произошло с каждой из частиц.
3. Что за частица оставила этот след? Назовите термин, которым пользуются для них.
4. Почему меняется степень «черноты» этого следа?
5. Что за частицы оставили эти следы? Предложите наиболее вероятную причину появления таких следов.
6. Кто мог оставить этот след и каково его возможное происхождение?
7. Что здесь произошло?
8. Какие частицы (знак заряда, энергия) могли оставить эти следы?
9. Как выглядел бы этот кадр в современном детекторе (без ТРС, в ТРС)?
10. Можно ли было бы сегодня получить такой же кадр без использования фотоплёнки?

Рис. 16.6. Регистрация событий: пример. Фото с пузырьковой водородной камеры длиной (по пучку) 1 м.



Что произошло на этом кадре? Опишите качественно.

1. Охарактеризуйте этот след.
2. Что это за событие и чем оно может быть вызвано?
3. Охарактеризуйте качественно (знак заряда, энергии, события на этом треке) этот след.

Рис. 16.7. Регистрация событий: пример второй. Та же пузырьковая камера.



Рис. 16.8. Регистрация событий: пример третий. Пропановая пузырьковая камера с 3-мя танталовыми пластинами-мишенями. Найдите на снимке дельта-электроны, далцевские электрон-позитронные пары. Попробуйте разделить, на глаз, треки заряженных частиц с зарядом 1 и с более высоким зарядом. Разделите вторичные треки на треки положительно заряженных и отрицательно заряженных частиц.