Квантовые свойства системы частиц

Как устроен Мир

ФЕРМИОНЫ

Спин $J = 1/2$

Лептоны (спин = 1/2)				Кварки (спин = 1/2)			
Аромат		Масса, ГэВ/с^2		Аромат		Масса, ГэВ/с^2	Электрический заряд
ν_e	электронное нейтрино	$<1\cdot10^{-8}$	**1 поколение**	u	up	0,003	2/3
e	электрон	0,0005111		d	down	0,006	–1/3
ν_μ	мюонное нейтрино	$<0,0002$	**2 поколение**	c	charm	1,3	2/3
μ	мюон	0,106		s	strange	0,1	–1/3
ν_τ	тау-нейтрино	$<0,02$	**3 поколение**	t	top	175	2/3
τ	тау	1,7771		b	bottom	4,3	–1/3

Стабильные частицы

e^- — электрон, e^+ — позитрон

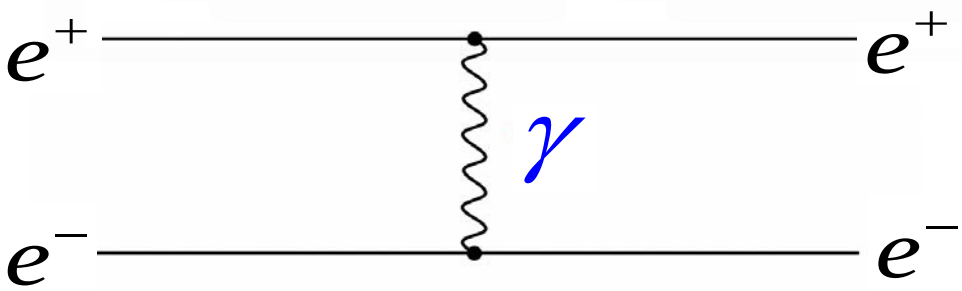
p — протон, $\bar{p}$ — антипротон

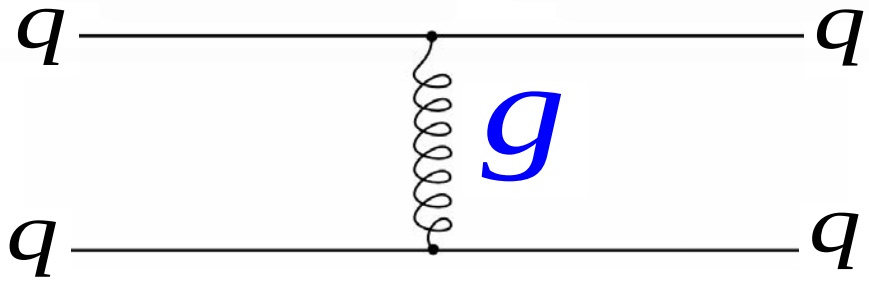
? ν_e, ν_μ, ν_τ, $\tilde{\nu}_e$, $\tilde{\nu}_\mu$, $\tilde{\nu}_\tau$

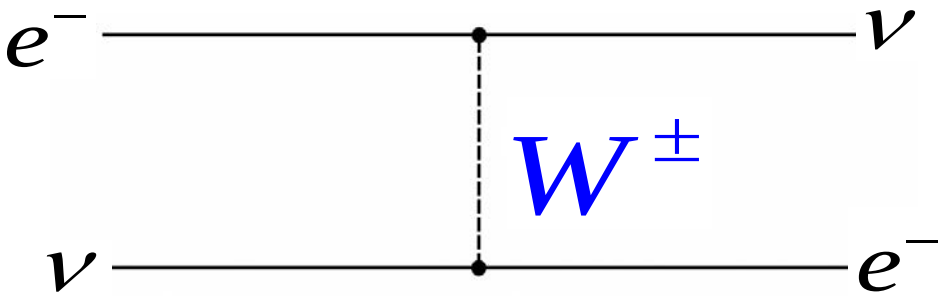
Взаимодействия

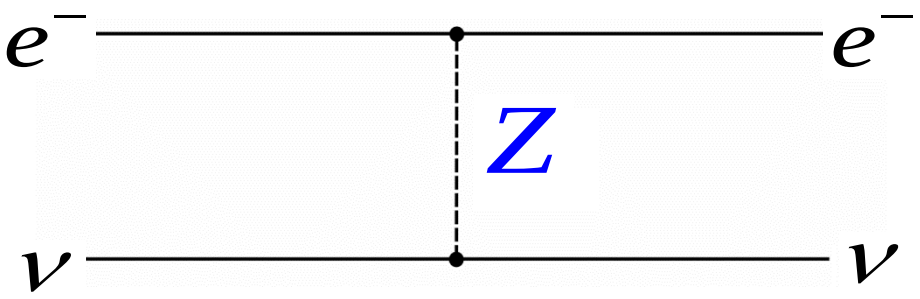
Спин J=1

Взаимодействие	На какие частицы действует	Калибровочные бозоны	Радиус действия	Константа взаимодействия
Сильное	Все цветные частицы	8 глюонов, безмассовые.	1 Фм	1
Электромагнитное	Все электрически заряженные частицы	Фотон, безмассовый.	∞	1/137
Слабое	Кварки, лептоны, электрослабые калибровочные бозоны	W^+, W^-, Z, $m(W^\pm) = 80$ ГэВ, $m(Z) = 91$ ГэВ.	10^{-2} Фм	~1/30
Гравитационное	Все массивные частицы	Гравитон, спин $J = 2$, безмассовый	∞	10^{-38}









Характеристики протона, нейтрона и электрона

Характеристика	Протон	Нейтрон	Электрон
Масса mc^2, МэВ	938.272	939.565	0.511
Электрический заряд (в единицах элементарного заряда)	+1	0	–1
Спин	1/2	1/2	1/2
Изоспин	1/2	1/2	
Проекция изоспина	+1/2	–1/2	
Чётность	+1	+1	
Статистика	Ферми-Дирака		
Магнитный момент (для нуклонов - в ядерных магнетонах, для электрона - в магнетонах Бора)	+2.79	–1.91	+1.001
Время жизни	$> 10^{32}$ лет	885.7±0.8 с	$>4.6\cdot10^{26}$ лет
Тип распада		$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$	

Корпускулярно-волновые свойства частиц

1924 г. Луи де Бройль. «Когда закончилась первая мировая война, я много размышлял о квантовой теории и о корпускулярно-волновом дуализме. Именно тогда меня осенила блестящая идея. Корпускулярно-волновой дуализм Эйнштейна носит всеобщий характер и распространяется на все объекты».

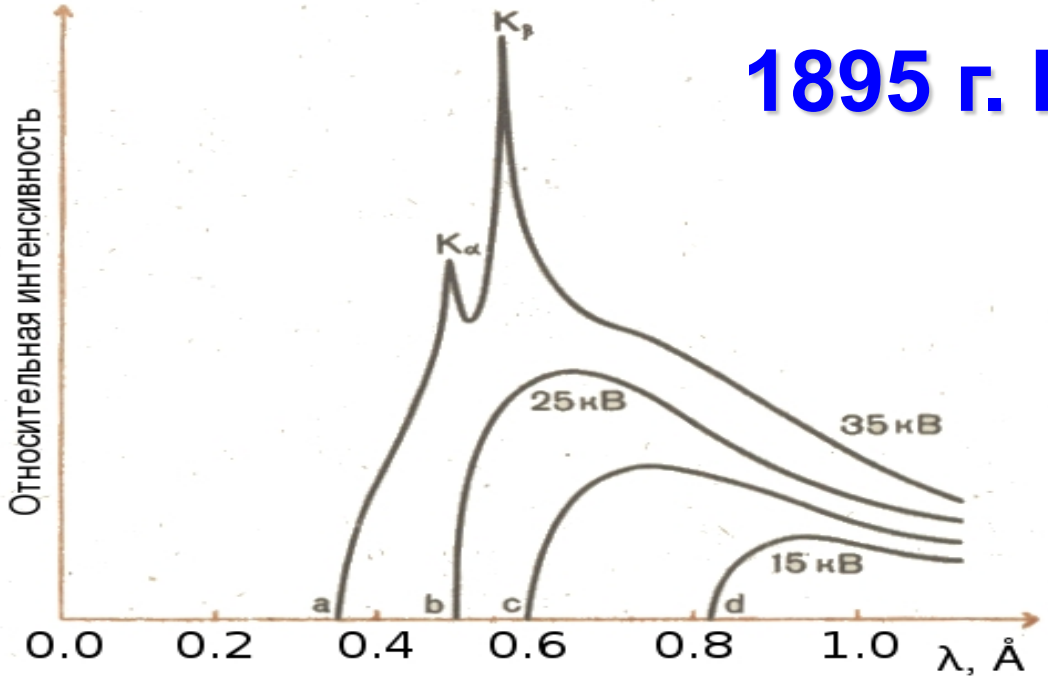
Соотношения де Бройля

$$\nu = \frac{E}{h} \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

В случае фотонов аналогичные соотношения следуют из условия квантования энергии и релятивистской связи между энергией и импульсом для частиц с нулевой массой покоя.

$$E = cp = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

1895 г. Рентгеновские лучи



Рентгеновские лучи возникают при взаимодействии быстрых электронов с кулоновским полем атомного ядра. Это излучение называют тормозным. Максимальная энергия рентгеновского излучения $h\nu_{\max}$ тормозного спектра определяется энергией электронов eV

$$h\nu_{\max} = eV.$$

Наряду с тормозным спектром в рентгеновском спектре наблюдаются дискретные линии, зависящие от вещества анода, в который ударяет пучок быстрых электронов. Быстрые электроны выбивают электроны из внутренних оболочек атомов материала анодов. Образующиеся при этом вакансии заполняются менее связанными электронами атомов. Высвобождающаяся энергия в виде дискретных линий в спектре характеризует строение атомных оболочек.

Модель Бора

Н. Бор
1885 – 1962

Модель, предложенная Бором, впервые позволила удовлетворительно объяснить закономерность строения атома. Основные постулаты модели Бора:

1. Электрон равномерно вращается вокруг атомного ядра по круговой орбите под действием кулоновских сил в соответствии с законами Ньютона.
2. Разрешенными орбитами электрона являются только те, для которых момент импульса электрона равен $n\hbar$.
3. При движении электрона по стационарной орбите атом не излучает энергию.
4. При переходе с орбиты с энергии E_i на другую орбиту с энергией E_f $(E_i > E_f)$ излучается фотон, имеющий энергию $h\nu = E_i - E_f$.

Нобелевская премия по физике

1922 г. - Н. Бор.

За работы по исследованию структуры атомов и их излучения

Модель Бора

Движение по круговой орбите. Частота обращения f

$$F = \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \qquad f = \frac{v}{2\pi r} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{r^{3/2}}$$

Условие стационарной орбиты. Квантование углового момента

$$L = mvr_n = n\hbar, \qquad r_n = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n^2\hbar^2}{mZe^2}$$

Боровский радиус $n = 1,\ Z = 1$ $\qquad r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529\ \text{Å}$

Полная энергия электрона E тоже квантуется

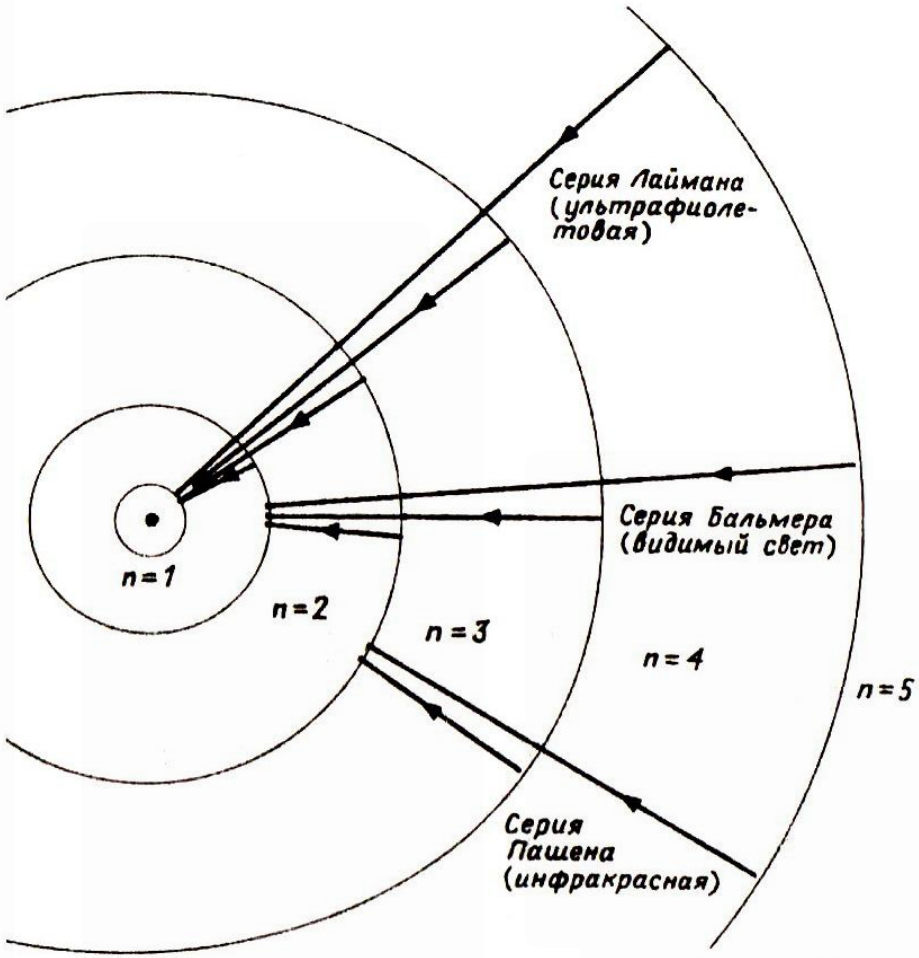
$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{Ze^2}{2r_n} - \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{Ze^2}{2r_n} = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

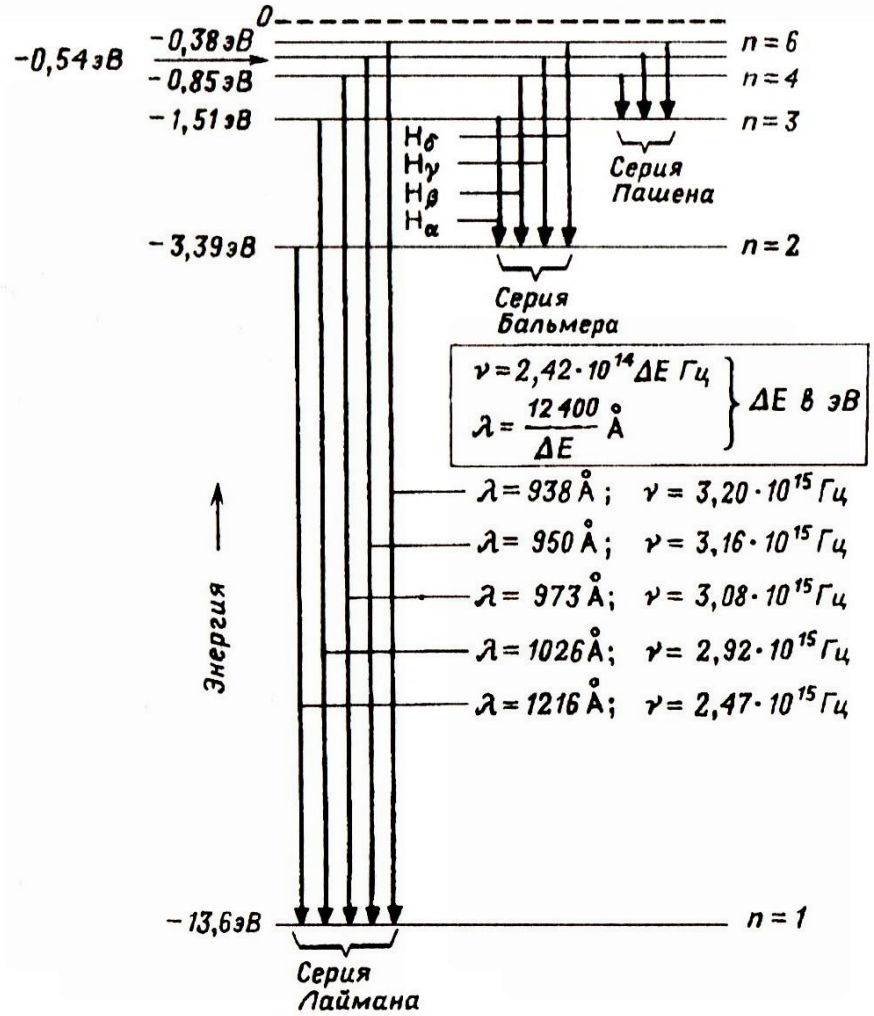
Энергия электрона на 1-ой боровской орбите.

Основное состояние $\qquad E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6\ \text{эВ}$

Энергия переходов $(n_f \to n_i)$ $\qquad \hbar\omega = -\frac{mZ^2e^4}{2h^2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$

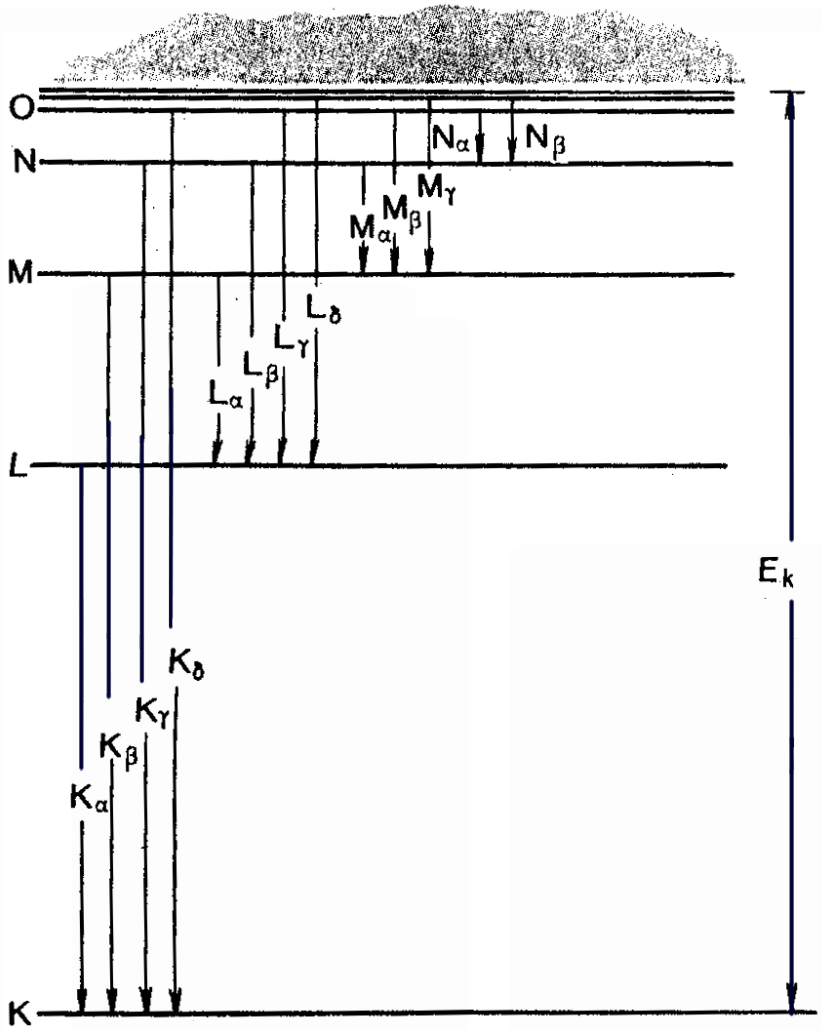
Модель Бора. Атом Водорода





Состояние

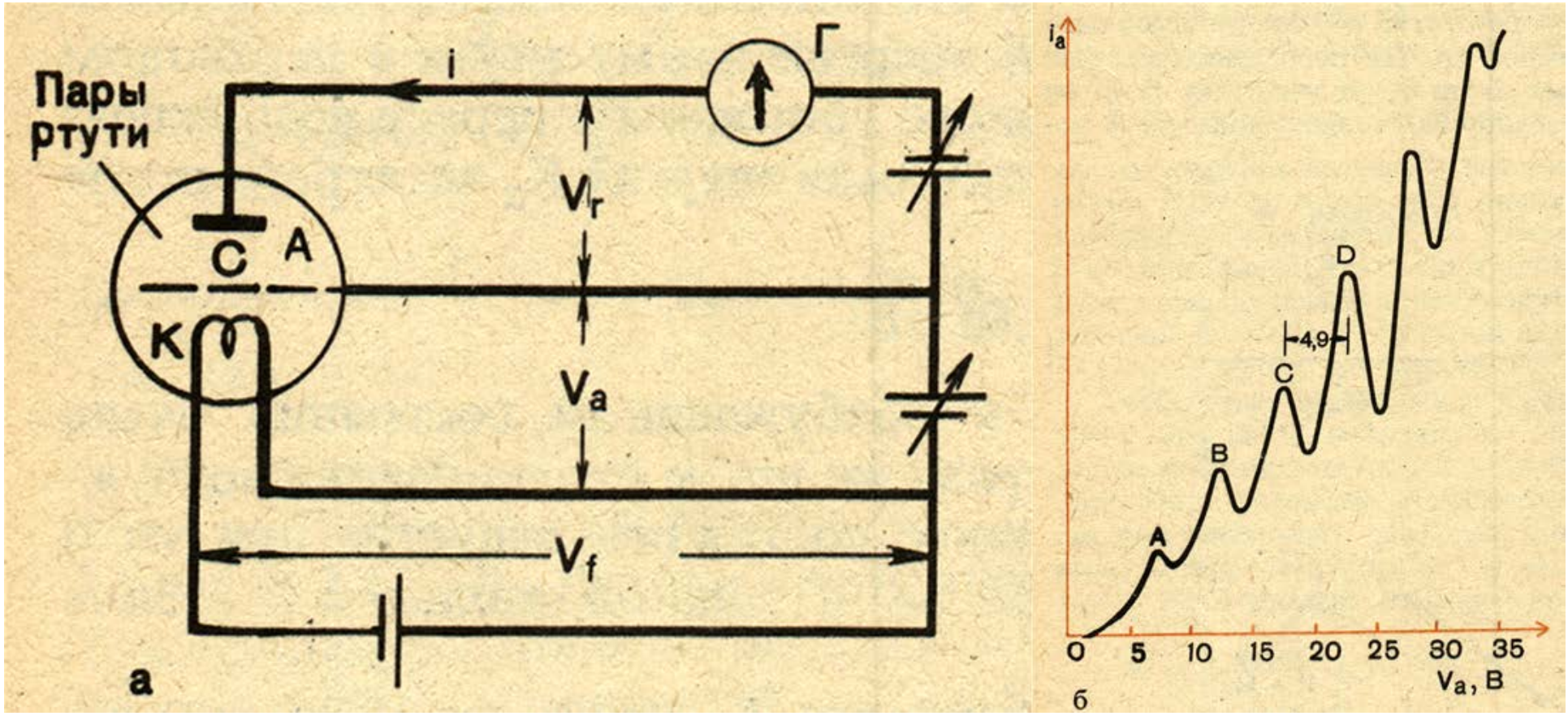
Рентгеновский спектр



Характеристический рентгеновский спектр зависит от материала анода. Электроны в атоме заполняют последовательно K, L, M, N оболочки. Электроны K оболочки расположены наиболее близко к атомному ядру и связаны наиболее сильно. Затем последовательно располагаются более слабо связанные L, M, N оболочки.

Когда падающие на анод электроны выбивают электроны из K оболочки, вакансии в K оболочке заполняются за счёт переходов электронов из верхних менее связанных оболочек. Если вакансию в оболочке K заполняет электрон из оболочки L, в спектре возникает линия K_α. При переходе электрона из M оболочки на вакансию в K оболочке в спектре возникает линия K_β. Таким образом, при переходах с оболочек L, M, N на K оболочку испускается дискретный спектр рентгеновских линий K_α, K_β, K_γ, K_δ, …

1913 г. Опыт Франка-Герца

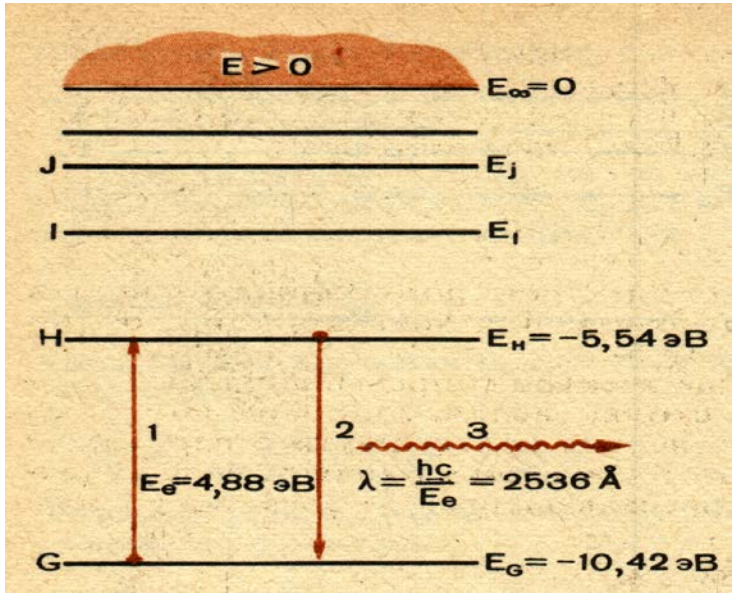


Нобелевская премия по физике

1925 г. – Дж. Франк и Г. Герц.

За открытие законов столкновения электрона с атомом

1913 г. Опыт Франка-Герца



Дж. Франк
1882 – 1964

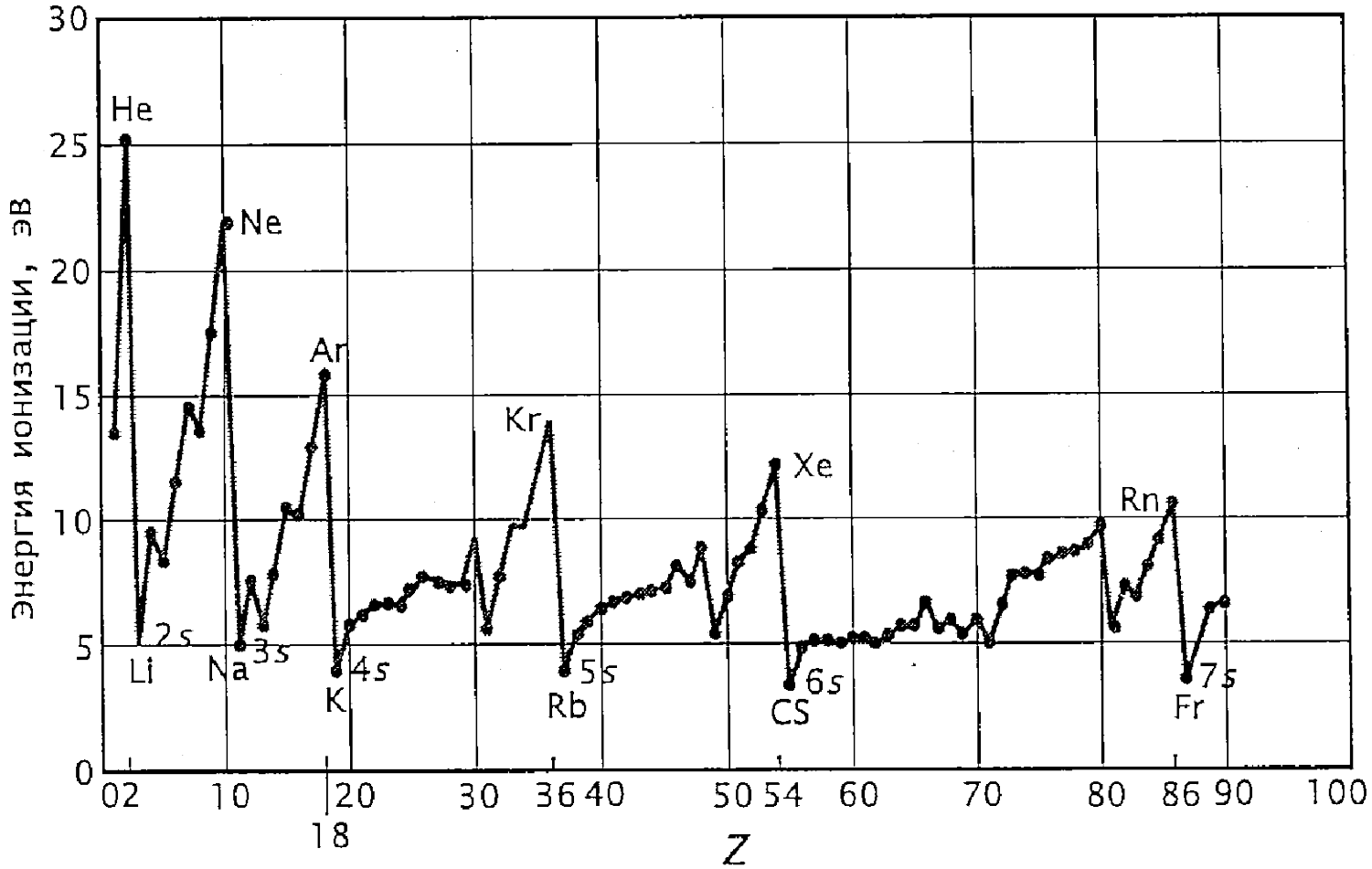
Г. Герц
1887 – 1975

В 1913 г. Франк и Герц поставили эксперимент, в котором наблюдалась дискретная структура атомных уровней. Энергии связи внешних электронов в тяжелых атомах составляют несколько эВ. На рисунке показаны уровни энергии валентных электронов атома ртути. Энергия электронов основного состояния $E_0 = -10,42$ **эВ. Энергия первого возбужденного состояния** $E_h = -5,54$ **эВ. Энергия перехода между этими состояниями**

$$E = E_h - E_0 = -5,54 \text{ эВ} - (-10,42) \text{ эВ} = 4,88 \text{ эВ}.$$

Если энергия пучка медленных электронов, проходящего через пары ртути, меньше 4,88 эВ, то столкновения электронов пучка с атомами ртути будут упругими, т.е. без передачи энергии. Если энергия пучка электронов превышает 4,88 эВ, то происходят неупругие столкновения с передачей части энергии электрону атома ртути, сопровождающиеся переходами электронов атома ртути в первое возбужденное состояние. Поэтому в зависимости анодного тока от ускоряющего потенциала будут наблюдаться характерные максимумы и минимумы, соответствующие дискретным уровням энергии, на которых находятся внешние электроны атома ртути.

Потенциал ионизации атома



Зависимость первой энергии ионизации (она соответствует энергии связи в атоме самого удаленного электрона) от Z вплоть до $Z = 90$. Энергия возрастает с увеличением Z, пока оболочка не оказывается заполненной (что соответствует $Z = 2$, 10, 18, 36, 54 и 86). Следующий электрон должен оказаться на более высокой оболочке (более удаленной от ядра), т. е. слабее связанным. Ионизационный потенциал (в В) численно равен энергии ионизации (в эВ).

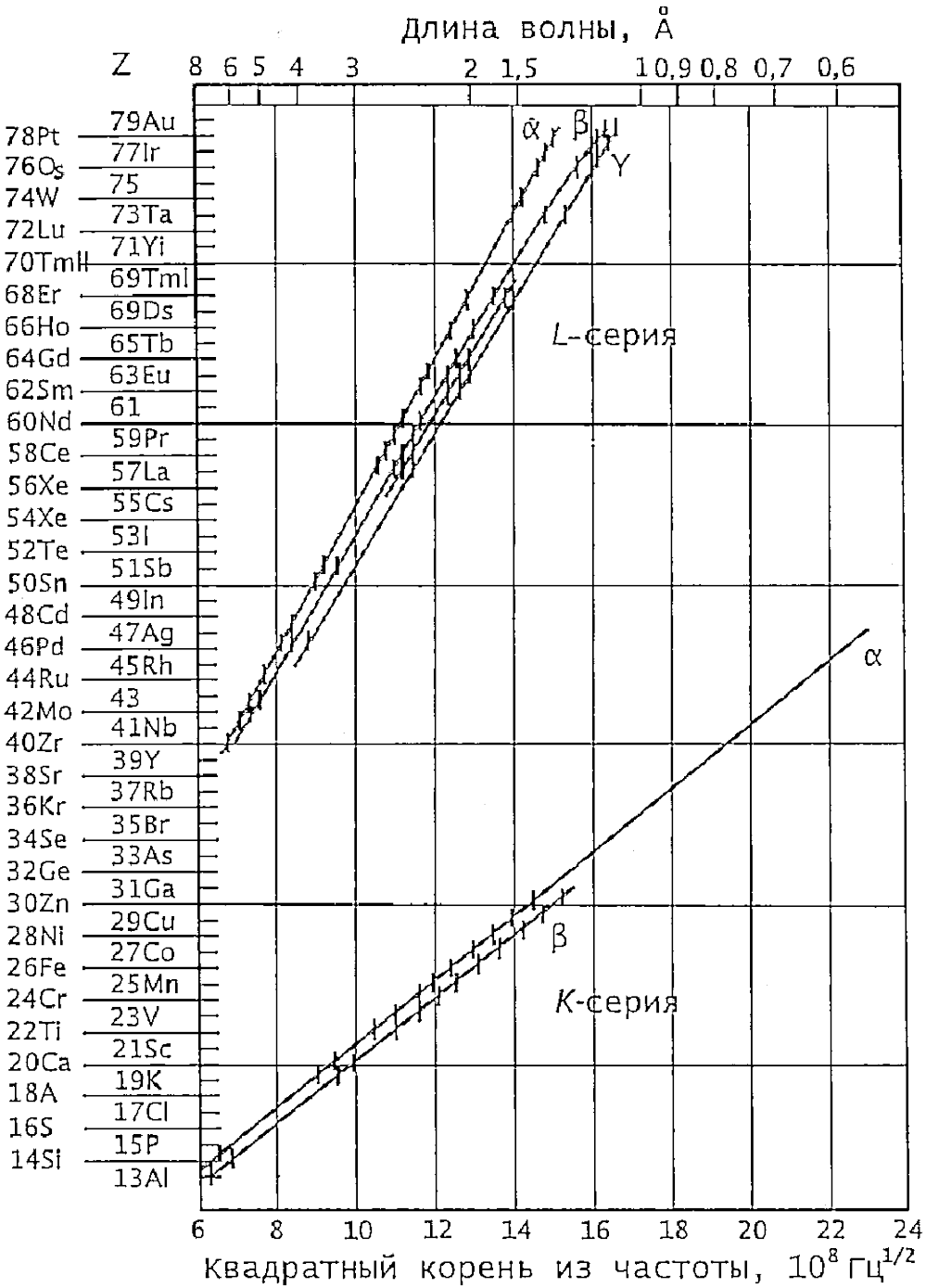


График Мозли

Графики Мозли, на которых изображена зависимость квадратного корня из частоты от Z для характеристических рентгеновских лучей. Если атом бомбардируется электронами с высокой энергией, то один из внутренних электронов может быть выбит, и его место на внутренней оболочке становится вакантным. Линиям К-серии отвечают переходы на вакансии в оболочке с $n = 1$ (K-оболочка), а линиям L-серии отвечают переходы на вакансии в оболочке с $n = 2$ (L-оболочка). (Цитируется по H. Moseley, Philosophical Magazine (б). 27. 713 (1914).)

График Мозли

Мозли измерил длины волн характеристического рентгеновского излучения более 40 элементов. Он обнаружил, что рентгеновские спектры изменяются от элемента к элементу в определенной закономерности. Мозли предположил, что рентгеновские спектры возникают при переходах электронов на внутренних оболочках атомов. Согласно модели Бора энергия электронов на первой боровской орбите пропорциональная квадрату заряда ядра Z. Поэтому зависимость корня квадратного от частоты рентгеновской линии ω будет линейной функцией заряда ядра Z.

$$\omega^{1/2} = A(Z - b),$$

где $A = const$, $b = const$.

Для К-серии $b = 1$.

Корпускулярные и волновые свойства частиц. Принцип неопределенности

Экспериментальное подтверждение идеи корпускулярно-волнового дуализма привело к пересмотру привычных представлений о движении частиц и способе описания частиц. Для классических материальных точек характерно движение по определенным траекториям, так, что их координаты и импульсы в любой момент времени точно известны. Для квантовых частиц это утверждение неприемлемо, так как для квантовой частицы импульс частицы связан с ее длиной волны, а говорить о длине волны в данной точке пространства бессмысленно. Поэтому для квантовой частицы нельзя одновременно точно определить значения ее координат и импульса. Если частица занимает точно определенное положение в пространстве, то ее импульс полностью неопределен и наоборот, частица с определенным импульсом имеет полностью неопределенную координату. Неопределенность в значении координаты частицы Δx и неопределенность в значении компоненты импульса частицы Δp_x связаны соотношением неопределенности, установленным В. Гейзенбергом в 1927 году.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$$

Из принципа неопределенности следует, что в области квантовых явлений неправомерна постановка некоторых вопросов, вполне естественных для классической физики. Так, например, не имеет смысла говорить о движении частицы по определенной траектории. Необходим принципиально новый подход к описанию физических систем. Не все физические величины, характеризующие систему, могут быть измерены одновременно. В частности, если время жизни некоторого состояния равно Δt, то неопределенность величины энергии этого состояния ΔE не может быть меньше $\Delta E / \hbar$.

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

Статистическая природа квантовых явлений

Квантовая механика является принципиально статистической теорией. Её предсказания носят вероятностный характер. Можно с любой точностью предсказать вероятность найти электрон в произвольной части атома водорода, но нельзя предсказать, в какие моменты времени электрон в эту часть атома попадет.

Различие между классической статистической теорией и квантовой механикой состоит в следующем. В классической статистической теории предполагается, что в принципе мы можем проследить за судьбой, например, всех молекул газа и точно рассчитать их траектории. Но, так как молекул много, то для расчета макроскопических величин нам достаточно знать не все точные величины, описывающие каждую молекулу, а небольшое количество усредненных характеристик системы. Например, для описания газа заключенного в сосуде вводят такие усредненные характеристики как давление и температура. Статистический характер процессов в микромире проявляется в том, что и результат измерений в микромире также имеют статистическую природу. Для отдельной молекулы газа бессмысленно говорить о её температуре. В противоположность этому в квантовом мире статистические свойства не вторичны, а первичны.

Волновая функция

В квантовой физике состояние системы описывается волновой функцией. Так как для квантовой частицы нельзя одновременно точно определить значения ее координат и импульса, то не имеет смысла говорить о движении частицы по определенной траектории в пространстве можно определить только вероятность нахождения частицы в данной точке в данный момент времени, которая определяется квадратом модуля волновой функции —

$$W \sim |\psi(x,y,z,t)|^2 dV$$

Нобелевская премия по физике

1954 г. – М. Борн.

За фундаментальные исследования в квантовой механике, в особенности за статистическую интерпретацию волновой функции

Волновая функция

Волновая функция как решение уравнения Шредингера должна удовлетворять определенным требованиям

- $\Psi(x,t)$ **должна быть совместимой с соотношениями**

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p}, \qquad E = \hbar\omega, \qquad E = \frac{p^2}{2m} + U$$

- $\Psi(x,t)$ **должна быть линейной относительно всевозможных решений уравнений Шредингера. Если** $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$, **...,** $\Psi_n(x,t)$ **являются решениями уравнения Шредингера, то функция**

$$\Psi(x,t) = a_1\psi_1 + a_2\Psi_2 + \ldots + a_n\Psi_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\Psi_i,$$

где $a_1, a_2, \ldots a_n$ **— некоторые постоянные, также представляет возможную волновую функцию.**

- **Функция** $\partial\Psi(x,t)/\partial x$ **также должна быть линейной.**
- **Функция** $\Psi(x,t)$ **как и ее производная** $\partial\Psi(x,t)/\partial x$ **должна быть однозначной, конечной и непрерывной.**
- **При** $x \to \pm\infty$ **функция** $\Psi(x,t)$ **должна стремиться к нулю.**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Psi(x,t) \to 0$$

Основной постулат квантовой механики

Обозначим действие оператора $\hat{f}$ на волновую функцию ψ $(\hat{f}\psi)$. Определение оператора $\hat{f}$ состоит в том, что интеграл от произведения $(\hat{f}\psi)$ на комплексно сопряженную функцию ψ^* даёт среднее значение величины $\overline{f}$.

$$\overline{f} = \int \psi^* \hat{f} \psi dx$$

Это основной постулат квантовой механики.

Все свойства физической системы полностью определяются заданием её волновой функции.

Экспериментально измеряемые средние значения любой физической величины f, характеризующей систему, может быть вычислено по известной волновой функции ψ.

Операторы

Каждой физической величине F в квантовой теории сопоставляется линейный оператор $\hat{F}$, действующий на волновую функцию $\Psi(r,t)$.

Под оператором $\hat{F}$ понимается правило, по которому одной функции $\Psi(r,t)$ переменных r,t сопоставляется другая функция $U(r,t)$ тех же переменных.

$$U(r,t) = \hat{F}\Psi(r,t)$$

Спектр собственных значений оператора $\hat{F}$ представляет собой спектр возможных (измеряемых) значений этой величины. С результатами экспериментов сопоставляются средние значения физических величин, которые вычисляются по формуле

$$\overline{\mathrm{F}} = \int \Psi^* \hat{\mathrm{F}} \Psi \mathrm{dv}$$

Например: оператор $\hat{F}$ может означать дифференцирование по какой-либо переменной.

$$U(r,t) = \hat{F}\Psi(r,t) = \partial\Psi(r,t)/\partial r$$

$$\hat{F} = \partial/\partial r$$

Оператор координаты

По определению среднее значение координаты x

$$\overline{x} = \int x\left|\psi(x)\right|^2 dx = \int \psi^*(x)\cdot x\cdot\psi(x)dx \qquad (*)$$

По определению

$$\overline{x} = \int \psi^*(x)\hat{x}\psi(x)dx \qquad (**)$$

Сравнивая соотношения (*) и (**), получаем

$$\hat{x} = x$$

Оператор импульса

По определению

$$\overline{p}_x = \int \psi^* \cdot \hat{p}_x \cdot \psi \, dx \qquad (*)$$

Свободная частица описывается волновой функцией

$$\psi = A \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p_x \cdot x - Et) \right).$$

Для свободной частицы среднее значение импульса равно импульсу частицы

$$\overline{p}_x = p_x = \int A e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} \hat{p}_x A e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} dx. \qquad (*)$$

В силу нормировки волновой функции

$$A^2 \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)} dx = 1$$

Для выполнения соотношения (*) оператор импульса должен иметь вид

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

В трёхмерном случае

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla$$

Оператор кинетической энергии

Операторы координат и импульса – основные операторы квантовой механики. Операторы всех других величин находятся по следующему правилу. Формулы классической физики, которые соответствуют связям между значениями физических величин, в квантовой механике рассматриваются как связь операторов этих величин.

Классическая физика

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right).$$

Квантовая физика

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}, \qquad \hat{p}_y = -i\hbar\frac{d}{dy}, \qquad \hat{p}_z = -i\hbar\frac{d}{dz}$$

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$$

Оператор орбитального момента количества движения $\hat{l}$

Оператор момента количества движения $\hat{l}$

$$\hat{l}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = (\hbar / i)(y\partial / \partial z - z\partial / \partial y),$$

$$\hat{l}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = (\hbar / i)(z\partial / \partial x - x\partial / \partial z),$$

$$\hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = (\hbar / i)(x\partial / \partial y - y\partial / \partial x).$$

Оператор квадрата момента количества движения $\hat{l}^2$

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^{\,2} + \hat{l}_y^{\,2} + \hat{l}_z^{\,2}.$$

Простейшие операторы квантовой механики

Физическая величина		Оператор
Координата	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r}$
	$x,\ y,\ z$	$x,\ y,\ z$
Импульс	$\boldsymbol{p}$	$-i\hbar\nabla$
	$p_x,\ p_y,\ p_z$	$-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x},\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y},\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}$
Момент количества движения, или угловой (вращательный) момент	$\boldsymbol{L}=[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$	$\hat{\boldsymbol{L}}=-i\hbar[\boldsymbol{r}\times\nabla]$
	$L_x=yp_z-zp_y$	$\hat{L}_x=-i\hbar\left(y\dfrac{\partial}{\partial z}-z\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$
	$L_y=zp_x-xp_z$	$\hat{L}_y=-i\hbar\left(z\dfrac{\partial}{\partial x}-x\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$
	$L_z=xp_y-yp_x$	$\hat{L}_z=-i\hbar\left(x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$
Энергия в нерелятивистском приближении	$E=\dfrac{p^2}{2\mu}+U(\boldsymbol{r})$	$H=-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})$

Собственные значения. Собственные функции

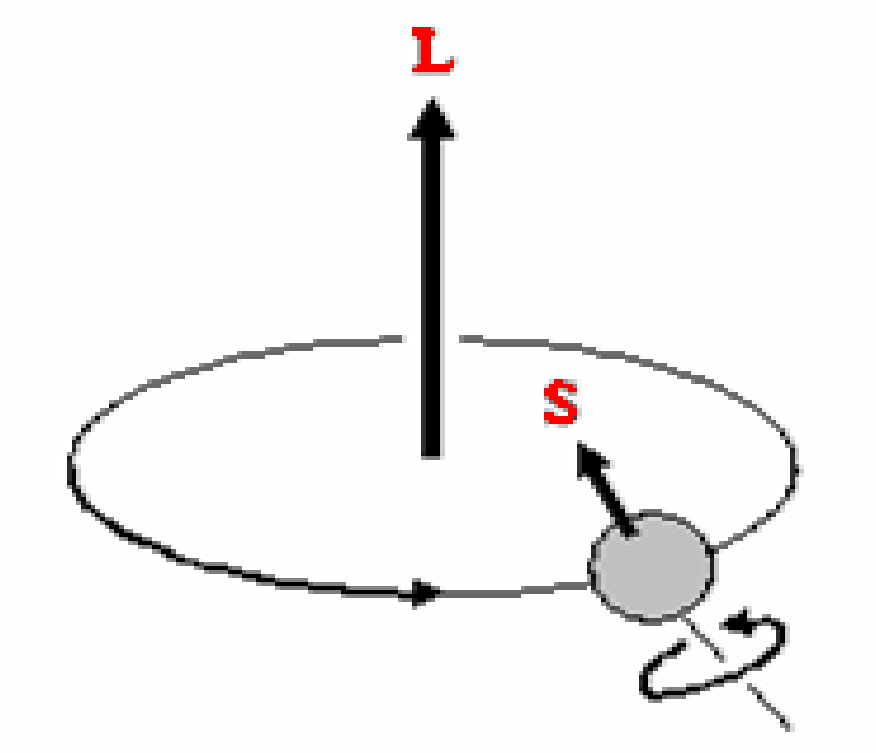
С каждым оператором $\hat{F}$ в квантовой механике связывается уравнение

$$\hat{F}\psi_n(x) = F_n\psi_n(x),$$

определяющее его собственные значения F_n и полную систему ортонормированных функций ψ_n, подчиняющихся определенным граничным условиям. Совокупность величин F_n определяет спектр возможных значений физической величины F.

Функция $\psi_n(x)$ характеризует состояние системы, в котором величина F имеет значение F_n.

Спиновый момент частицы



Спин — собственный момент количества движения частицы. **Спин имеет квантовую природу и не связан с какими-либо перемещениями частицы в пространстве. Спин измеряется в единицах постоянной Планка и равен s — характерное для каждой частицы полуцелое или целое (включая нуль) положительное число**

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1)$$

Спин

Частица	*Кварковый состав*	*Масса* mc^2, *МэВ*	*Спин* J
Электрон, e^-	—	0,511	1/2
Мюон, μ^-	—	105,6	1/2
Нейтрино, ν_e	—	0	1/2
Протон, p	uud	938,27	1/2
Нейтрон, n	udd	939,57	1/2
Сигма, Σ^+	uus	1189	1/2
Дельта, Δ^{++}	uuu	1232	3/2
Пион, π^+	$u\bar{d}$	139,57	0
Ро, ρ^+	$u\bar{d}$	776	1
Гамма-квант, γ	—	—	1

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$s^2 = \hbar^2 s(s+1)$$

$$l^2 = \hbar^2 l(l+1)$$

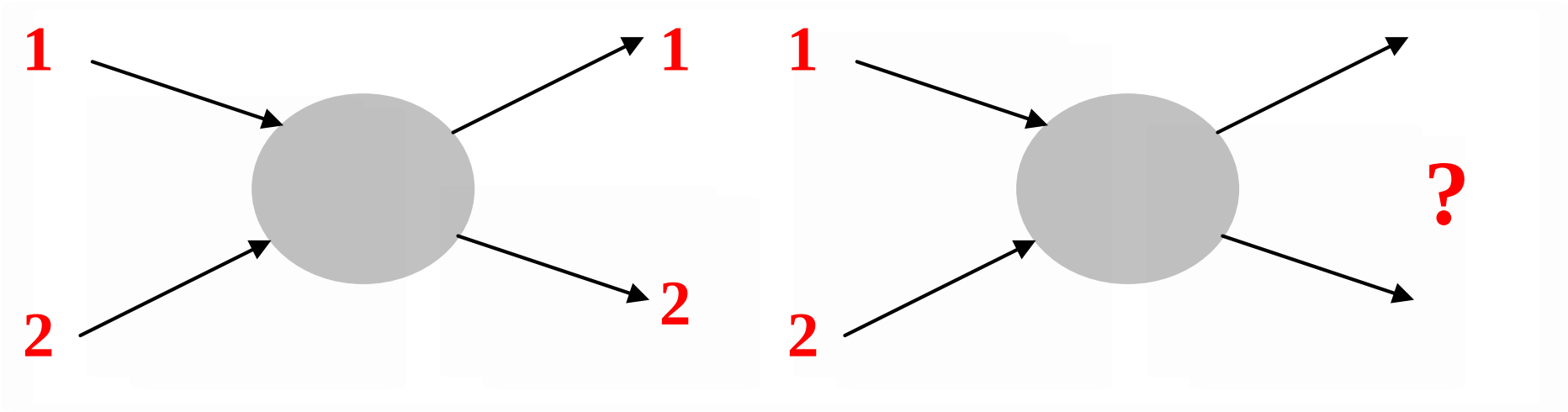
$$j^2 = \hbar^2 j(j+1)$$

$$s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2...$$

$$l = 0, 1, 2, 3...$$

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2...$$

Статистика



Принцип тождественности частиц

Волновая природа микрочастиц не позволяет установить, какая из возможностей реализуется в ситуации, когда две тождественные частицы оказываются друг от друга на расстоянии де-бройлевской длины волны.

Статистика

Статистика является проявлением коллективных свойств системы частиц. Существование статистики является следствием принципа неразличимости одинаковых микрочастиц и вероятностного характера описания состояний в квантовой теории.

В системе частиц одного сорта проявляются новые особенности, которые не имеют аналогов в системе классических одинаковых частиц.

В микромире частицы одного типа неразличимы, т. е. имеет место принцип тождественности частиц. Перестановка двух одинаковых частиц не меняет состояния системы.

Принцип тождественности частиц: *гамильтониан системы частиц инвариантен относительно перестановки всех координат двух любых частиц одного типа.*

Поэтому должна быть квантовая характеристика (квантовое число) или сохраняющаяся физическая величина, отвечающая этому преобразованию.

Статистика

Оператор перестановки $\hat{\Pi}_{12}$ и его собственные значения ε определяются следующим образом:

$$\hat{\Pi}_{12}\psi(1,2,...,A)=\psi(2,1,...,A),$$

$$\hat{\Pi}_{12}\psi(1,2,...,A)=\varepsilon\psi(1,2,...,A),$$

$$\hat{\Pi}_{12}^{2}\psi(1,2,...,A)=\varepsilon^{2}\psi(1,2,...,A)=\psi(1,2,...,A).$$

Поэтому $\varepsilon^2 = 1$ и $\varepsilon = \pm 1$.

При $\varepsilon = +1$

$$\hat{\Pi}_{12}\psi(1,2,...,A)=\psi(1,2,...,A),$$

т. е. волновая функция системы частиц симметрична:

$$\psi(2,1,...,A)=\psi(1,2,...,A).$$

При $\varepsilon = -1$

$$\hat{\Pi}_{12}\psi(1,2,...,A)=-\psi(1,2,...,A),$$

т. е. волновая функция системы частиц антисимметрична:

$$\psi(2,1,...,A)=-\psi(1,2,...,A).$$

Различие между классической и квантовой статистиками

Две частицы 1, 2. Два различных одночастичных состояния $\psi_n \psi_m$

Классическая статистика

1. **Обе частицы в состоянии** ψ_n $\quad \psi_n(1)\psi_n(2)$
2. **Обе частицы в состоянии** ψ_m $\quad \psi_m(1)\psi_m(2)$
3. **Первая частица в состоянии** ψ_n**, вторая – в** ψ_m $\quad \psi_n(1)\psi_m(2)$
4. **Первая частица в состоянии** ψ_m**, вторая – в** ψ_n $\quad \psi_m(1)\psi_n(2)$

Статистика Ферми. Антисимметричная волновая функция

Одна частица находится в состоянии ψ_n**, другая – в** ψ_m **и наоборот**

$$\psi_{asim} = \psi_n(1)\psi_m(2) - \psi_m(1)\psi_n(2)$$

Статистика Бозе-Эйнштейна. Симметричная волновая функция

1. **Обе частицы в состоянии** ψ_n $\quad \psi_n(1)\psi_n(2)$
2. **Обе частицы в состоянии** ψ_m $\quad \psi_m(1)\psi_m(2)$
3. **Одна из частиц в состоянии** ψ_n**, другая – в** ψ_m **и наоборот**

$$\psi_{sim} = \psi_n(1)\psi_m(2) + \psi_m(1)\psi_n(2)$$

Фермионы. Бозоны. Принцип Паули

Частицы с целым (в том числе с нулевым) спином подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна (γ-кванты, π-мезоны, α-частицы и др.). Частицы с целым спином называются ***бозонами***. Частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми-Дирака (электроны, кварки, нейтрино, протоны, нейтроны, ядра с нечётным числом нуклонов и т.д.). Частицы и ядра с полуцелым спином называются ***фермионами***.

Для тождественных фермионов справедлив принцип Паули.

В. Паули
1900 – 1958

Принцип Паули: в системах, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака и описываемых антисимметричными волновыми функциями, не должно существовать двух тождественных частиц с полностью совпадающими характеристиками.

Для системы тождественных фермионов

$$\psi(2,1,\ldots,A) = -\psi(1,2,\ldots,A).$$

Если частицы 1 и 2 находятся в одинаковом состоянии, тогда $\psi(2,1,\ldots,A)$ и $\psi(1,2,\ldots,A)$ одна и та же функция и $\psi = -\psi$, $2\psi = 0$, $\psi = 0$, т. е. такое состояние не существует.

Принцип Паули определяет строение электронных оболочек атомов, заполнение нуклонных состояний в ядрах.

Нобелевская премия по физике

1945 г. – В. Паули.

За открытие принципа запрета, названного его именем

Статистика

$$\psi_{nm}(1,2) = \psi_n(1)\psi_m(2)$$
$$\psi_{nm}(2,1) = \psi_n(2)\psi_m(1),$$

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_m(2) + \psi_n(2)\psi_m(1)$$

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_m(2) - \psi_n(2)\psi_m(1),$$

$$\psi_{nn}(1,2) = \psi_{nn}(2,1) = \psi_n(1)\psi_n(2) = \psi_n(2)\psi_n(1) = \psi_B$$

$$\psi_B^*\psi_B = \psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2)$$

$$\psi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) + \psi_n(2)\psi_n(1)] = \frac{2}{\sqrt{2}}\psi_n(1)\psi_n(2)$$

$$\psi_{BE}^*\psi_{BE} = 2\psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2) = 2\psi_B^*\psi_B$$

Статистика

$$\psi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2)+\psi_n(2)\psi_n(1)] = \frac{2}{\sqrt{2}}\psi_n(1)\psi_n(2)$$

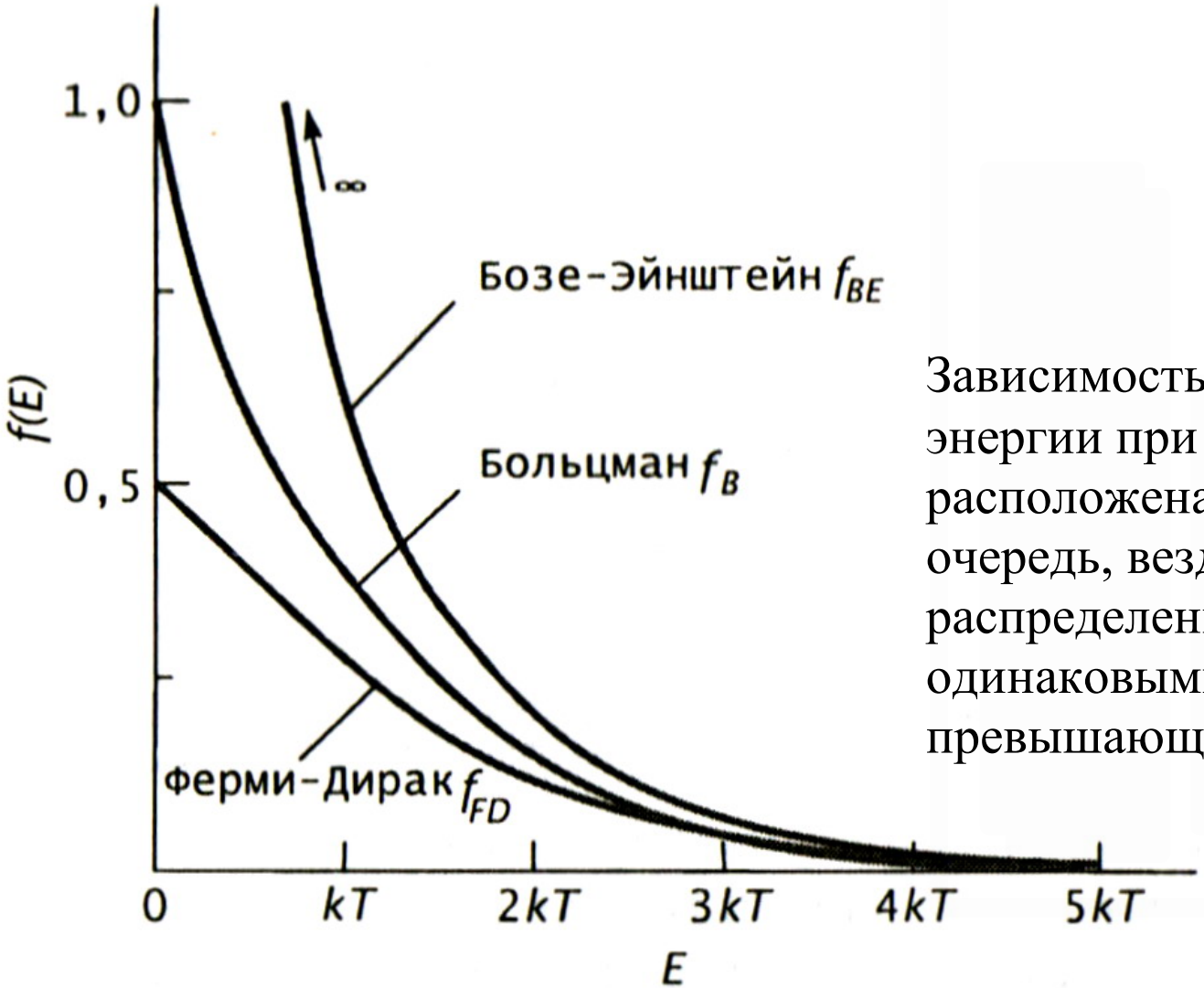
$$\psi^*_{BE}\psi_{BE} = 2\psi^*_n(1)\psi^*_n(2)\psi_n(1)\psi_n(2) = 2\psi^*_B\psi_B$$

Присутствие бозона в конкретном квантовом состоянии увеличивает вероятность того, что в этом состоянии будут находиться другие бозоны того же типа.

$$\psi_{FD} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) - \psi_n(2)\psi_n(1)] = 0.$$

Присутствие фермиона в конкретном квантовом состоянии *запрещает* другим фермионам находиться в том же состоянии.

Распределения Больцмана f_B, Ферми-Дирака f_{FD}, Бозе-Эйнштейна f_{BE}



$$f_B = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E/kT}}$$

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1}$$

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E/kT} + 1}$$

Зависимость распределений f_B, f_{BE} и f_{FD} от энергии при $\alpha = 0$. Кривая f_{BE} расположена выше f_B, которая, в свою очередь, везде превышает f_{FD}. Все распределения становятся примерно одинаковыми и сливаются при энергиях, превышающих примерно $5kT$.

Классическая физика	*Квантовая физика*
1. Описание состояния	
$(x,\ y,\ z,\ p_x,\ p_y,\ p_z,\ t)$	$\psi(x, y, z, t)$
2. Изменение состояния во времени	
$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dH}{d\vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dH}{d\vec{r}}$	$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$
3. Измерения	
$x,\ y,\ z,\ p_x,\ p_y,\ p_z$	$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$ $\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \hbar$ $\Delta z \cdot \Delta p_z \approx \hbar$
4. Детерминизм	4. Статистическаятеория
Динамическое (не статистическое) описание	$\lvert\psi(x, y, z, t)\rvert^2$ $\langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dV$
5. Гамильтониан	
$H = E + U(x, y, z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(x, y, z)$	$\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}(x, y, z) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x, y, z)$

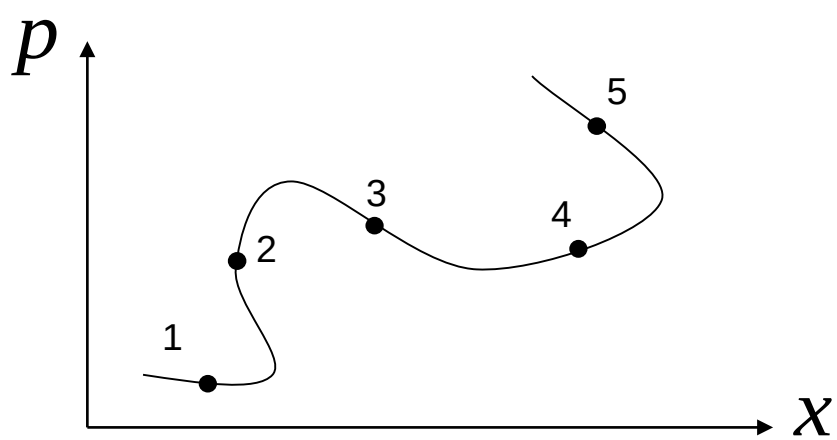
Классическая физика

$$x, p, t$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{dU}{dx} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

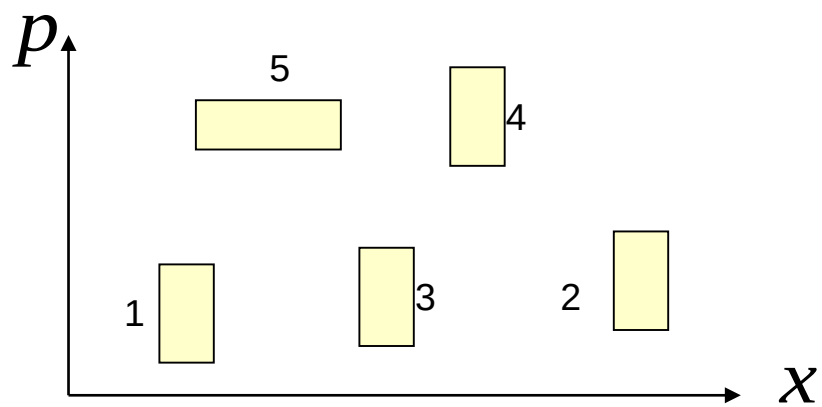
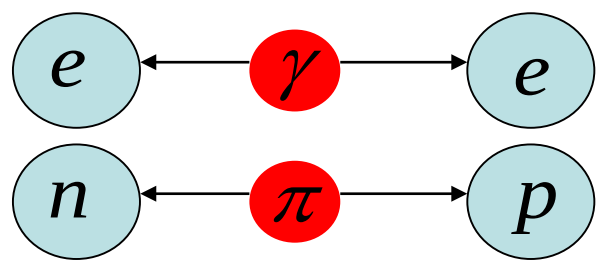
$$H = U + E$$



Квантовая физика

$$\psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\hat{U} + \hat{E})\psi$$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx \hbar$$

$$\hat{H}\psi = E\psi$$