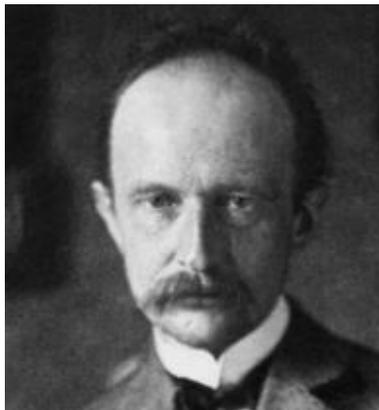




Уравнение Шредингера. Квантовая неопределённость.



Содержание

1. Нерелятивистское волновое уравнение (уравнение Шредингера).
2. Операторы физических величин.
3. Гамильтониан.
4. Стационарное уравнение Шредингера.
5. Неопределённость квантового описания.
6. Соотношения неопределённости.
7. Оптическая иллюстрация соотношения неопределённости «координата-импульс».
8. Волновой пакет и соотношение неопределённости «координата-импульс».
9. Преобразование Фурье и соотношение неопределённости «время-энергия».
10. Квант углового момента и соотношения неопределённости.

Нерелятивистское волновое уравнение (уравнение Шредингера) и операторы физических величин

Каждая частица с импульсом \vec{p} имеет свойства волны де Бройля с длиной волны $\lambda = \frac{h}{p}$, где h – постоянная

Планка ($6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек = $4,14 \cdot 10^{-21}$ МэВ·сек). Состояние частицы описывается волновой функцией $\Psi(\vec{r}, t)$.

Волновая функция свободной частицы с импульсом \vec{p} и энергией E это плоская монохроматическая волна:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}, \quad (1)$$

где $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$, $E = \hbar\omega$, $\hbar = h/2\pi$ (приведённая постоянная

Планка). Полагаем $A = 1$. Находим уравнение движения свободной частицы. Дифференцируем (1) по t и по

x, y, z :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi \quad \text{или} \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p_x \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{i}{\hbar} p_y \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} p_z \Psi. \quad (3)$$

Дифференцируем по x, y, z ещё раз и получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \left[(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 \right] \Psi. \quad (4)$$

Для свободной частицы

$$\frac{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}{2m} = E = T \quad (\text{кинетическая энергия}). \quad (5)$$

Сравнивая (2) и (5) с учётом (4), получаем уравнение Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi, \quad (6)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (лапласиан).

Операторы физических величин

Соотношения (3): $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p_x \Psi$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{i}{\hbar} p_y \Psi$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} p_z \Psi$

можно записать в виде

$$\hat{p}_x \Psi = p_x \Psi, \quad \hat{p}_y \Psi = p_y \Psi, \quad \hat{p}_z \Psi = p_z \Psi, \quad (7)$$

где вводятся операторы проекций импульса

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8)$$

а сами соотношения (7) это дифференциальные уравнения для нахождения волновых функций Ψ и собственных значений проекций импульса p_x , p_y и p_z в состояниях, описываемых волновыми функциями Ψ .

Такой подход это иллюстрация метода нахождения физических величин и состояний физических объектов (их волновых функций) в квантовой механике.

В общем виде, если речь идёт о физической величине A , которой отвечает оператор \hat{A} , то сами возможные значения этой физической величины и соответствующие им волновые функции Ψ подчиняются операторному уравнению (*уравнению на собственные значения*)

$$\hat{A}\Psi = A\Psi . \quad (9)$$

Помимо операторов проекций импульсов можно сразу записать вид операторов координаты, кинетической и полной энергии частицы. Оператор координаты \hat{x} равен самой координате x , т.е. сводится к умножению на эту переменную: $\hat{x} = x$.

Оператор кинетической энергии частицы $\hat{E} \equiv \hat{T}$ должен иметь вид $\hat{E} \equiv \hat{T} = \hat{p}^2 / 2m$. Учитывая (4) и (5), получаем

$$\hat{E} \equiv \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad (10)$$

где Δ – лапласиан $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

Если частица находится во внешнем не зависящем от времени поле, то она имеет некую потенциальную энергию $U(\vec{r}) \equiv U(x, y, z)$ и её полная энергия равна сумме кинетической T и потенциальной U энергий: $E = T + U$ или в операторном виде, т.е. $\hat{E} = \hat{T} + \hat{U}$:

$$\hat{E} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r}) . \quad (11)$$

Оператор потенциальной энергии равен самой этой энергии ($\hat{U} \equiv U$), так как зависит лишь от координат частицы.

Операторы остальных физических величин могут быть построены, используя операторы координаты и импульса и простое правило, которое выполняется в большинстве случаев:

В квантовой механике операторы физических величин выражаются друг через друга так же, как сами физические величины в классической физике.

Гамильтониан

Для классической частицы (системы частиц), которая находится в независящем от времени t (стационарном) потенциальном силовом поле, функция Гамильтона H равна сумме кинетической T и потенциальной $U(\vec{r})$ энергий:

$$H = T + U(\vec{r}), \quad (12)$$

т.е. совпадает с полной энергией E . В более общем случае нестационарного силового поля функция Гамильтона имеет вид $H = T + U(\vec{r}, t)$, где силовая функция $U(\vec{r}, t)$ – уже не является потенциальной энергией и поэтому функция Гамильтона не совпадает с полной энергией частицы (системы).

В квантовой механике аналогом классической функции Гамильтона является оператор Гамильтона (гамильтониан) $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$. Гамильтониан совпадает с оператором полной энергии частицы (системы) $\hat{E} = \hat{T} + U$, если она находится во внешнем стационарном силовом поле.

Так для отдельной частицы во внешнем поле $U(\vec{r})$

$$\hat{H} = \hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}). \quad (13)$$

Для системы A частиц с парным взаимодействием $U_{\alpha\beta}(|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|)$ – такой системой является атом и атомное ядро –

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\alpha=1}^A \frac{(\hat{p}^2)_\alpha}{2m_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^A \sum_{\beta>\alpha}^A U_{\alpha\beta} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \right) \Delta_\alpha + \sum_{\alpha=1}^A \sum_{\beta>\alpha}^A U_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Оператор Гамильтона (гамильтониан) является главным в квантовой механике, так как определяет все основные особенности рассматриваемой системы (вид её волновой функции). Успех рассмотрения зависит от того, насколько точно выбран гамильтониан (все ли основные взаимодействия в нём корректно учтены).

Для стационарного квантового состояния (когда гамильтониан не содержит времени явно) имеет место следующее операторное уравнение, определяющее вид волновой функции системы Ψ и её полную энергию E :

$$\hat{H}\Psi = E\Psi. \quad (15)$$

Поэтому вместо уравнения (2): $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$ можем сразу записать

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (16)$$

Это и есть основное уравнение Шредингера. Оно обобщается и на нестационарные квантовые системы, гамильтониан которых явно зависит от времени.

Так как уравнение Шредингера является линейным уравнением первого порядка по времени, то с его помощью по заданному значению волновой функции $\Psi(\vec{r}, t = 0)$ в момент времени $t = 0$ можно найти её значение в любой момент времени $\Psi(\vec{r}, t)$, где $t \neq 0$.

Стационарное уравнение Шредингера

Если гамильтониан частицы (системы) явно не зависит от времени (потенциальное силовое поле, входящее в его состав, стационарно), то энергия системы фиксирована и сохраняется. Гамильтониан \hat{H} при этом совпадает с оператором полной энергии и имеет место Операторное уравнение (15): $\hat{H}\Psi = E\Psi$. Ему удовлетворяет дискретный (или непрерывный) набор волновых функций Ψ и соответствующих им собственных значений энергий E . При этом уравнение Шредингера (16) возвращается к виду (2):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (17)$$

которое может быть непосредственно проинтегрировано по времени, что даёт

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \psi(\vec{r}) \cdot \phi(t). \quad (18)$$

Таким образом, зависимость от времени стационарного состояния даётся функцией

$$\phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (19)$$

а для зависящей только от координат волновой функции $\psi(\vec{r})$ справедливо уравнение

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (20)$$

называемое **стационарным уравнением Шредингера**.

Один из примеров стационарного состояния – состояние (1) свободной частицы с импульсом \vec{p} и энергией E :

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}. \quad (21)$$

Для пространственно ограниченных систем (атом, ядро атома и др.) уравнение (20) даёт спектр решений $\psi_n(\vec{r})$ с дискретным набором энергий E_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Для неограниченных (т.е. нереальных) систем спектр решений (состояний) непрерывен. Пример – свободная частица в виде плоской монохроматической волны (21).

Неопределённость квантового описания

Состояние частицы в классической физике в любой момент времени описывается заданием 6-ти величин – трёх координат и трёх проекций импульсов: (x, y, z, p_x, p_y, p_z) . Зная эти величины в момент времени t , можно однозначно описать эволюцию системы под действием известных сил во все последующие моменты времени. При этом координаты и импульсы частиц в классической физике сами являются непосредственно измеряемыми (наблюдаемыми) величинами.

В квантовом мире не все наблюдаемые величины могут иметь точно определённые значения. Так частица не может иметь одновременно определённые значения импульса и координат. Поэтому понятие движения частицы по строго определённой траектории лишено смысла. В состоянии $\Psi(\vec{r}, t)$ можно говорить лишь вероятностном распределении значений наблюдаемых. Также можно говорить лишь о вероятности реакции (или распада), а не об их протекании наверняка.

Итак, из-за того, что количество величин, описывающих квантовую систему, сокращается вдвое по сравнению с классической (либо три координаты x, y, z , либо три проекции импульса p_x, p_y, p_z , и волновая функция может иметь вид либо $\Psi(\vec{r}, t)$, либо $\Psi(\vec{p}, t)$), квантовое описание выглядит существенно менее определённым и полным, чем классическое и приобретает статистический (вероятностный) характер. Пары величин, которые в квантовом мире не могут одновременно иметь определённые значения, называют **канонически сопряжёнными** (дополнительными, по терминологии Н. Бора). Помимо пар x и p_x , y и p_y , z и p_z , это z -компонента J_z момента количества движения и угол φ поворота в плоскости xy , энергия E частицы и момент времени t , в который она измеряется. В любом квантовом состоянии из каждой пары таких величин (x и p_x , J_z и φ , E и t) определённое значение может иметь только одна, либо обе не имеют определённого значения. Количественно это выражается **соотношениями неопределённости Гейзенберга.**

Соотношения неопределённости

Произведение неопределённостей Δ двух канонически сопряжённых величин должно быть не менее \hbar :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar,$$

$$\Delta \varphi \cdot \Delta J_z \gtrsim \hbar,$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \hbar.$$

В частности последнее из этих соотношений («время-энергия») означает, что определение энергии с точностью ΔE должно занять интервал времени не менее

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E}.$$

Пример: состояние свободного движения частицы

$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}$. В этом состоянии импульс частицы \vec{p} и её энергия E имеют определённые значения. В то же время координата частицы \vec{r} и время t полностью неопределённы, т.е. могут иметь любые значения.

Принципиальная неполнота квантового описания по сравнению с классическим проявляется и в том, что

В квантовом мире есть виды, но нет индивидов

В классическом мире каждый представитель определённого вида или подвида (человек, собака, берёза, камень и др.) индивидуален, отличен от других представителей этого вида (подвида). В квантовом мире представители объекта определенного вида (протоны, нейтроны, ядра ${}_{20}^{40}\text{Ca}$ в фиксированном состоянии и др.) абсолютно неотличимы друг от друга, идентичны. В этой связи квантовый мир сводится к счётному числу объектов, т.е. более отчетливо структурирован, чем классический и поэтому, в отличие от последнего, обозрим.

Оптическая иллюстрация справедливости соотношения неопределённости «координата-импульс»

Оценим точность одновременного определения координаты x и компоненты импульса p_x частицы P , наблюдая рассеянный ею свет, сфокусированный на экране S линзой L . Из волновой оптики известно, что разрешающая способность линзы в лучшем случае

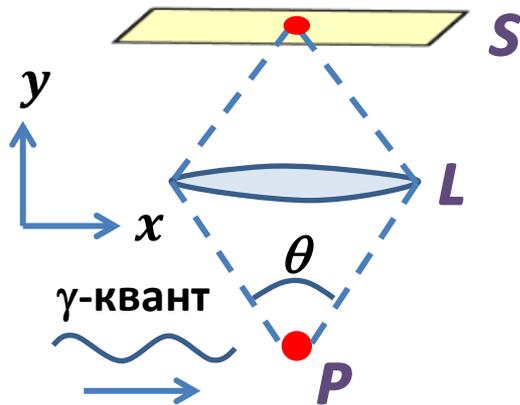
такова, что максимальная точность определения координаты составляет

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin(\theta/2)}, \quad (22)$$

где λ – длина волны излучения, падающего на линзу. Точное направление рассеянного фотона не известно из-за конечной апертуры линзы.

Его импульс $p = \frac{h}{\lambda}$ и неопределённость в его x -компоненте

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}. \quad \text{Поэтому } \Delta x \cdot \Delta p_x \approx \frac{\lambda}{\sin(\theta/2)} \cdot \frac{h}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} = h.$$



Волновой пакет и соотношение неопределенности «координата-импульс»

К соотношению неопределённости можно прийти, рассматривая такое образование как **волновой пакет**. Волновой пакет описывается функцией

$$\psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk, \quad (23)$$

т.е. в виде совокупности плоских волн, волновые векторы которых направлены вдоль оси z и имеют значения, лежащие в интервале

$$k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k.$$

Введём новую переменную $k - k_0$, тогда, разлагая $\omega(k)$ в ряд Тейлора по степеням $k - k_0$ и ограничиваясь только двумя первыми членами разложения

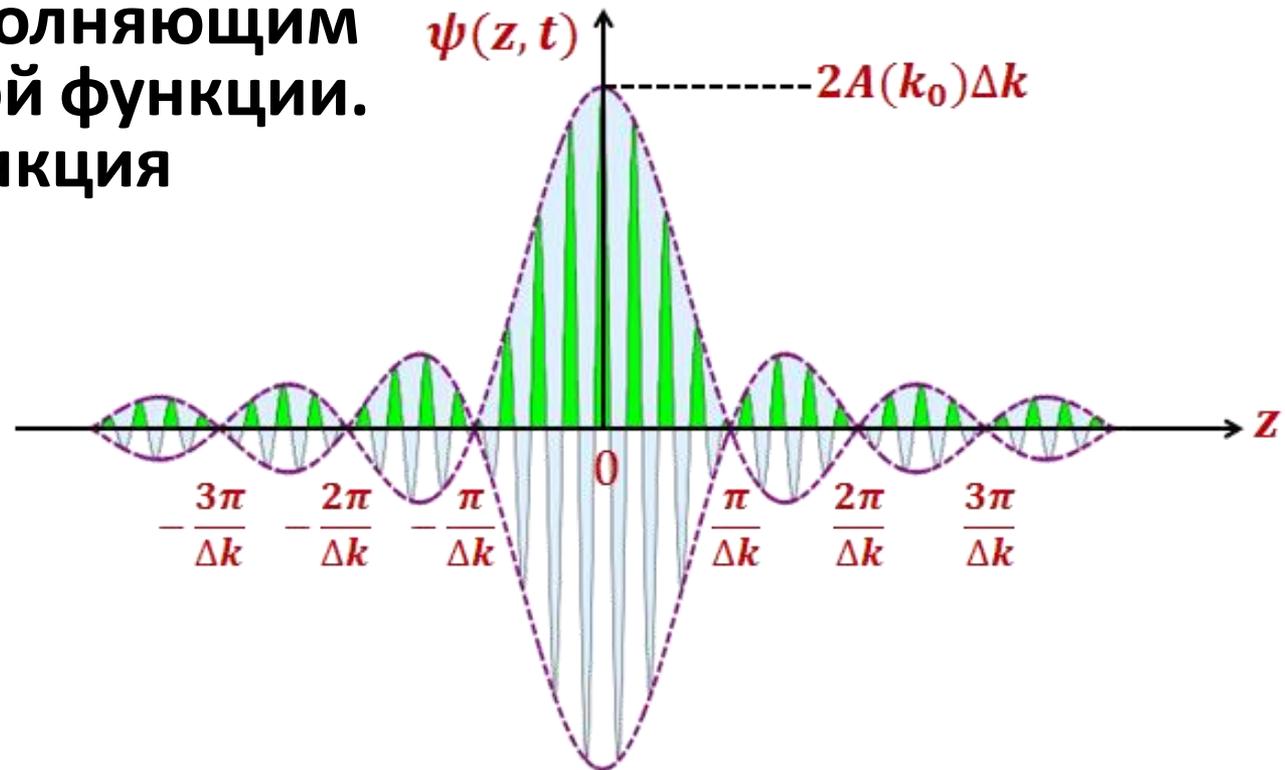
$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0),$$

можно преобразовать (23) к виду

$$\psi(z, t) = 2A(k_0) \frac{\sin\left\{ \left[z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \Delta k \right\}}{z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (24)$$

Полученная функция показана на рисунке. Она представляет собой быстроосциллирующую зависимость, определяемую экспонентой, которая модулируется плавно меняющимся множителем перед экспонентой, исполняющим роль амплитудной функции.

Амплитудная функция показана на рисунке пунктиром.



Из рисунка видно, что основная часть волновой функции $\psi(z, t)$ концентрируется в ограниченной области пространства (имеет вид волнового пакета). Его протяжённость можно характеризовать величиной $\Delta z = \frac{2\pi}{\Delta k}$ или $\Delta z \cdot \Delta k = 2\pi$. Учитывая, что для квантовой частицы $k = \frac{p}{\hbar}$ и следовательно $\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar}$, получаем

$$\Delta z \cdot \Delta p_z = 2\pi\hbar = h. \quad (25)$$

Таким образом, получено соотношение, имеющее вид соотношения неопределённости.

С течением времени средняя точка волнового пакета, соответствующая максимальному значению амплитуды, перемещается в пространстве с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \left(\frac{dE}{dp} \right)_0 = \frac{p_0}{m} = v_0,$$

т. е. со скоростью нерелятивистской частицы с импульсом $p_0 = \hbar k_0$ и кинетической энергией $E_0 = p_0^2/m$.

Итак, амплитуда волнового пакета заметно отлична от нуля лишь в ограниченной области пространства, которую можно связать с местоположением частицы. При этом для дебройлевской частицы $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ и групповая скорость перемещения пакета точно равна скорости такой частицы. Поэтому возможно сопоставление движения главного максимума волнового пакета с движением частицы, поскольку в обоих случаях при линейном перемещении (например, вдоль оси z) их положение в пространстве характеризуется функцией $|\psi(z, t)|^2$.

Выражение (24) приближенно. Учет последующих членов разложения $\omega(k)$ в ряд по степеням $k - k_0$ приводит к выражению для волнового пакета, ширина которого увеличивается со временем. Происходит расплывание пакета. Это является следствием того, что каждая волна, составляющая пакет, движется со своей фазовой скоростью

$$v_{\phi} = \omega/k = \hbar k/2m.$$

Подчеркнём, однако, что пространственную структуру волнового пакета нельзя связать с пространственной структурой самой частицы не только из-за факта его расплывания. Если бы частица представляла собой пакет волн, то, как и в случае одиночной волны, невозможно было бы объяснить опыт с дифракцией отдельных частиц. Отдельная частица, являясь волной (пакетом волн) при попадании на экран за дифракционной структурой (парой щелей, дифракционной решеткой, кристаллом) уже давала бы хоть и очень бледную, но дифракционную картину. На самом деле она всегда оставляет на экране след в виде точки. Дифракционная картина проявляется только в распределении точек от большого числа частиц. За $|\psi(z, t)|^2$ можно сохранить лишь статистическую интерпретацию Макса Борна, согласно которой величина $|\psi(z, t)|^2$ представляет собой вероятность нахождения частицы в данной точке пространства в данный момент времени.

Преобразование Фурье и соотношение неопределенности «время-энергия»

Наряду с описанием колебаний и волн как функций времени в классической физике применяется и альтернативный метод – *спектральный*. Он основан на формализме интеграла Фурье и Фурье-преобразовании. Согласно этому формализму, если имеется некая (в общем случае) непериодическая функция времени $f(t)$, то справедливы следующие преобразования

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Т.е. любая функция времени может быть представлена в виде разложения по гармоническим колебаниям с различными частотами ω и, вообще говоря, комплексными спектральными амплитудами $f(\omega)$. В случае если $f(t)$ – чётная функция времени, то её спектральная амплитуда является действительной и чётной функцией частоты и преобразование Фурье может быть записано в виде

интеграла от действительной функции по положительным частотам:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad f(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

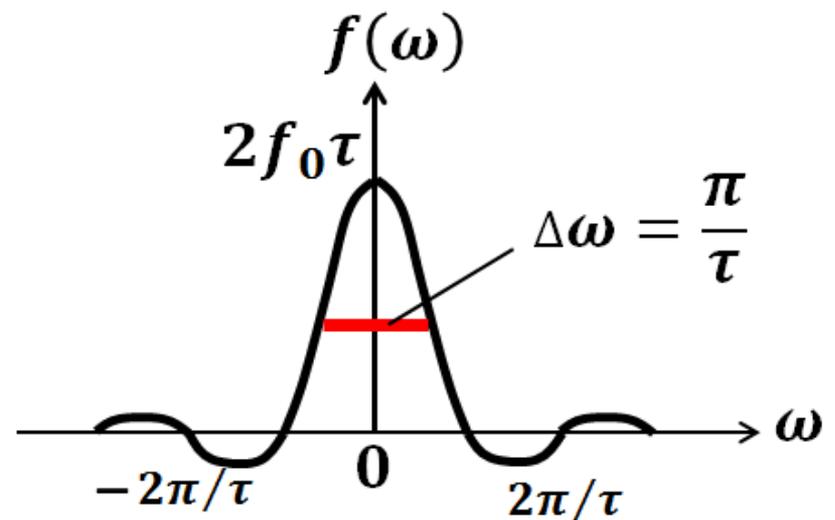
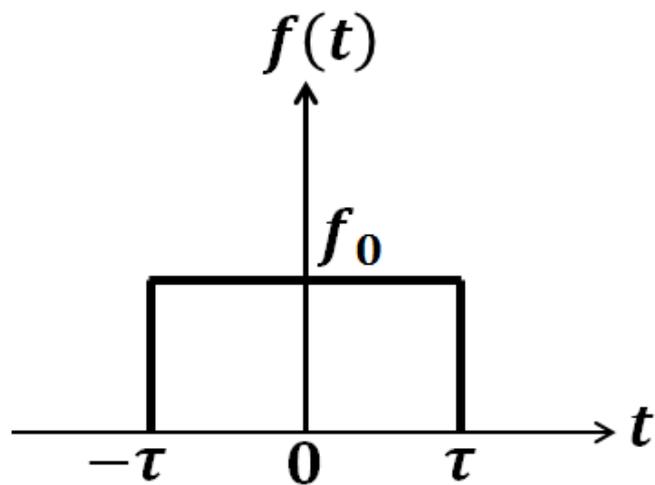
Рассмотрим в качестве примера прямоугольный импульс:

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & -\tau \leq t \leq \tau, \\ 0, & -\tau \geq t \geq \tau. \end{cases}$$

Из вышеприведенных формул для преобразования Фурье получаем следующее выражение для спектра колебаний адекватного прямоугольному импульсу:

$$f(\omega) = 2f_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}.$$

Прямоугольный импульс и его спектр показаны на нижеследующем рисунке



Для данного примера временной неопределённостью Δt является ширина импульса 2τ , а в качестве оценки спектральной неопределённости $\Delta\omega$ используем ширину на половине высоты π/τ главного максимума спектральной функции $f(\omega)$ (этот выбор отвечает принятому способу оценки ширины энергетического уровня в микромире). Имеем $\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\tau \cdot (\pi/\tau) = 2\pi$ или $\Delta t \cdot \hbar\Delta\omega = 2\pi\hbar = h$. Окончательно получаем

$$\Delta t \cdot \Delta E = h. \quad (26)$$

Это соотношение имеет тот же вид, что и (25) и переходит в него заменой $\Delta t \cdot c = z$ и $\Delta E/c = p_z$.

Квант углового момента и соотношение неопределённости

Если частица (система частиц) наделена орбитальным угловым моментом l , то он не может быть меньше \hbar . Само значение углового момента квантуется и меняется с шагом $\approx \hbar$. Таким образом величина \hbar исполняет роль кванта углового момента (кванта действия), отличное от нуля орбитальное значение которого не может быть меньше этой величины. Итак, имеем

$$l = r \cdot p \geq \hbar. \quad (27)$$

Примем, что импульс и координата частицы колеблются вокруг нулевого среднего значения, так что $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$. Проведя соответствующую замену в (27), приходим к соотношению неопределенности «координата-импульс» в наиболее часто используемом виде (22):

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar. \quad (28)$$

Эквивалентное соотношение неопределённости «время-энергия» имеет вид

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar. \quad (29)$$

Оба обсуждаемых соотношения выполняются с гигигантским запасом для классических объектов, что видно из нижеследующих примеров. Поэтому они никак не проявляют себя в классической физике. Рассмотрим в качестве первого примера частицу с массой $m = 1$ г, двигающуюся со скоростью $v = 1$ см/сек. Энергия такой частицы 1 эрг. Оценим из соотношения (28) неопределенность в координате этой частицы ($\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек):

$$\Delta r \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \frac{\hbar}{m \cdot v} = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}}{1 \text{ г} \cdot 1 \text{ см/сек}} \approx 10^{-27} \text{ см.}$$

Ничтожность этой величины, исключая возможность её наблюдения, очевидна.

Столь же ничтожна и неопределенность во временном положении этой частицы. Действительно, используя (29), получаем

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}}{1 \text{ эрг}} \approx 10^{-27} \text{ сек.}$$

Рассмотрим атом. Типичная энергия электрона в атоме $T_e \approx 10$ эВ. Оценим пространственную неопределённость такого электрона (используем $\hbar = 6,58 \cdot 10^{-22}$ МэВ·сек):

$$\begin{aligned} \Delta r_e &\geq \frac{\hbar}{\Delta p_e} \approx \frac{\hbar c}{\sqrt{2T_e m_e c^2}} = \\ &= \frac{6,58 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{сек} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-5} \text{ МэВ} \cdot 0,511 \text{ МэВ}}} \approx 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \end{aligned}$$

Полученная пространственная неопределённость отвечает размеру атома.

Рассмотрим другой пример. Типичная кинетическая энергия нуклона (протона или нейтрона) в ядре $T_N \approx 20$ МэВ. Оценим пространственную неопределённость такого нуклона:

$$\Delta r_N \geq \frac{\hbar}{\Delta p_N} \approx \frac{\hbar c}{\sqrt{2T_N m_N c^2}} =$$
$$= \frac{6,58 \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{сек} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}}{\sqrt{2 \cdot 20 \text{ МэВ} \cdot 939 \text{ МэВ}}} \approx 10^{-13} \text{ см.}$$

Эта пространственная неопределённость отвечает ядерному масштабу. Таким образом, соотношение неопределённости явным образом проявляется в объектах микромира.