СЕМИНАР 1

1. Получить выражение для среднего времени жизни τ радиоактивного ядра.

<u>Решение:</u> Используем закон радиоактивного распада $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$. По определению среднего

$$\tau = \frac{\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt} = \frac{1/\lambda^2}{1/\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

2. Определить энергию E, выделяемую 1 мг препарата ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$ за время, равное периоду полураспада $t_{1/2} = 138{,}4$ суток, если при одном акте распада освобождается энергия $Q = 5{,}4$ МэВ.

Распад идёт по схеме ${}^{210}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Энергия распада $Q = [m_{\mathrm{Po}} - (m_{\mathrm{Pb}} + m_{\alpha})]c^2 = 5{,}4\ \text{МэВ}$.

<u>Решение:</u> За время равное периоду полураспада распадается половина ядер ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$, число которых определяется выражением $N = m\frac{N_A}{A}$, где m — масса препарата, N_A — число Авогадро, A — массовое число. Получаем

$$N({}^{210}_{84}\mathrm{Po}) = m\frac{N_A}{A} = 10^{-3}\text{г} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1}}{210\text{г} \cdot \text{моль}^{-1}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{18}\text{ядер полония}.$$

Выделяющаяся за время периода полураспада энергия даётся выражением $E(t_{1/2}) = \frac{N}{2}Q$. Получаем

$$E(t_{1/2}) = \frac{N}{2}Q = \frac{2{,}9 \cdot 10^{18}}{2} \cdot 5{,}4\ \text{МэВ} =$$

$$= 0{,}78 \cdot 10^{19}\text{МэВ} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж/МэВ} \approx 1{,}24 \cdot 10^{6}\text{Дж}.$$

3. В естественной смеси изотопов урана – 99,27% урана-238 и 0,72% урана-235. Оба изотопа подвержены α-распаду. Попробуйте ответить на два вопроса: 1) Каков возраст вещества Солнечной системы, если предположить, что при её образовании оба изотопа урана присутствовали в этом веществе в равных количествах? 2) Как много ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ распалось с момента образования земной коры ($t_{\text{к}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{9}\text{лет}$)?

<u>Решение:</u> 1) Используем формулу $N = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$. Тогда возраст t_c Солнечной системы находится из соотношения

$$\frac{e^{-\lambda_{238}t_c}}{e^{-\lambda_{235}t_c}} = \frac{99{,}27}{0{,}72},$$

где индексы 238 и 235 отмечают соответствующие изотопы урана. Учитывая, что λ и период полураспада связаны соотношением $\lambda = ln2/t_{1/2} \approx 0{,}693/t_{1/2}$ и то, что $t_{1/2}(238) = 4{,}468 \cdot 10^9$лет, а $t_{1/2}(235) = 7{,}04 \cdot 10^8$лет , получаем

$$t_c = \frac{t_{1/2}(238) \cdot t_{1/2}(235)}{t_{1/2}(238) - t_{1/2}(235)} \cdot \frac{1}{ln2} \cdot ln\frac{e^{-\lambda_{238}t_c}}{e^{-\lambda_{235}t_c}} =$$

$$= \frac{44{,}68 \cdot 7{,}04}{44{,}68 - 7{,}04} \cdot \frac{1}{0{,}693} ln\frac{99{,}27}{0{,}72} = 5{,}93 \cdot 10^9\text{лет}.$$

Изотопный анализ метеоритов приводит к возрасту Солнечной системы $t_c \approx 4{,}6 \cdot 10^9$лет.

2) В течение $t_к \approx 2{,}5 \cdot 10^9$лет доля распавшихся ядер ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ составила $1 - e^{-\lambda_{238}t_к}$. Для этой доли получаем

$$1 - e^{-\lambda_{238}t_к} = 1 - e^{-\left(\frac{0{,}693}{4{,}468 \cdot 10^9\text{лет}}\right)2{,}5 \cdot 10^9\text{лет}} = 0{,}32.$$

4. Активность препарата ${}^{32}_{15}\mathrm{P}$ равна 2 мкКи (микрокюри). Сколько весит такой препарат? $t_{1/2}({}^{32}_{15}\mathrm{P})$ =14,262 сут. 1 Кюри = 3,7·10^{10} распадов/сек.

<u>Решение:</u> Закон радиоактивного распада $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$. Активность радиоактивного препарата

$$I(t) = \frac{dN}{dt} = \lambda N(t).$$

Она измеряется в кюри (1 Ки = 3,7·10^{10} распадов/с – активность эманации радия (т. е. радона-222), находящейся в радиоактивном равновесии с 1 г ^{226}Ra). Количество ядер в образце массой m граммов

$$N = \frac{mN_A}{A},$$

где N_A – число Авогадро, A – массовое число (число нуклонов в ядре). Активность препарата

$$I(0) = \lambda N(0) = \frac{ln2}{t_{1/2}} \cdot \frac{mN_A}{A}.$$

Откуда масса

$$m = \frac{I(0)t_{1/2}A}{ln2 \cdot N_A} \approx$$

$$\approx \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10}\,\text{расп/с} \cdot 14{,}3\ \text{сут} \cdot 86400\ \text{с/сут} \cdot 32}{6{,}02 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1} \cdot 0{,}693} \approx 7{,}0 \cdot 10^{-12}\text{г}.$$

5. Радиоактивный источник в среднем испытывает $\bar{n} = 10$ распадов/сек. Какова вероятность того, что через время равное периоду полураспада он испытает то же количество распадов/сек?

Решение: Используем распределение Пуассона, в котором $\bar{n} = 5$ распадов/сек (среднее число распадов/сек через время равное периоду полураспада), а $n = 10$:

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{n!}e^{-\bar{n}} = \frac{5^{10}}{10!}e^{-5} \approx 0{,}018 = 1{,}8\%.$$

6. Оценить степень продольного сокращения размера космического протона с кинетической энергией $T = 10^{20}$ эВ = 10^{11} ГэВ.

Решение: Это сокращение определяется соотношением

$$L = \frac{1}{\gamma}L_0\ ,$$

где L_0 – продольный размер покоящегося тела, L – продольный размер движущегося тела, а γ – Лоренц-фактор $\left(1 + \frac{T}{mc^2}\right)$. В данном случае

$$\gamma_p = 1 + \frac{T_p}{m_p c^2} = 1 + \frac{10^{11}}{0{,}93827} \approx 10^{11}.$$

В это же число раз (10^{11}) и сократится продольный размер протона. Учитывая, что в покое радиус протона $\approx 10^{-13}$ см = 1 Фм, получаем, что размер протона сократится до $\approx 10^{-11}$ Фм.

7. Рассчитать максимальную скорость движения протона в LHC (Large Hadron Collider – Большой Адронный Коллайдер).

Решение: Используем релятивистскую формулу

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{T + mc^2}\right)^2},$$

где T — кинетическая энергия протона (7 000 ГэВ), а его энергия покоя $mc^2 = 0{,}93827\,\text{ГэВ}$. Вычисления дают для скорости протона величину меньшую скорости света всего на $\approx 3\,\text{м/сек}$.

8. Средняя кинетическая энергия нуклона в ядре $T_N \approx 20\,\text{МэВ}$. Чему равна его скорость?

Решение: Движение в ядре нерелятивистское. Используем нерелятивистскую формулу:

$$v = c\sqrt{\frac{2T_N}{m_N c^2}} \approx c\sqrt{\frac{2\cdot 20\ \text{МэВ}}{940\ \text{МэВ}}} \approx 0{,}2\ \text{c} \approx 6\cdot 10^9\ \text{см/сек}.$$

9. Рассчитать энергии частиц, рождающихся в распаде π^+ (положительный пион) из покоящегося состояния.

Решение: Положительный пион распадается по схеме $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$, где μ^+ – положительный мюон, а ν_μ – мюонное нейтрино. $m_\pi c^2 = 139{,}57\ \text{МэВ}$, $m_\mu c^2 = 105{,}66\ \text{МэВ}$, $m_\nu c^2 \approx 0$.

Запишем уравнения для энергий и импульсов:

$$m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} + T_\nu,$$
$$p_\mu = p_\nu = p.$$

Заменяем в первом уравнении $p_\mu^2 c^2$ на $p_\nu^2 c^2 = T_\nu^2$, получаем

$$m_\pi c^2 = \sqrt{T_\nu^2 + m_\mu^2 c^4} + T_\nu.$$

Откуда

$$T_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 = 29{,}8\ \text{МэВ}.$$

Так как

$$m_\pi c^2 = m_\mu c^2 + T_\mu + T_\nu,$$

то

$$T_\mu = \left(m_\pi c^2 - m_\mu c^2\right) - T_\nu = \left(m_\pi - m_\mu\right)c^2 - \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 =$$
$$= (139{,}6 - 105{,}7)\text{МэВ} - 29{,}8\text{МэВ} = 4{,}1\ \text{МэВ}.$$

10. Определить максимальную кинетическую энергию электрона в распаде мюона ($m_\mu c^2 = 105{,}66\ \text{МэВ}$, $m_e c^2 = 0{,}51\ \text{МэВ}$, $m_\nu c^2 = 0$). Он распадается по схеме $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$.

Решение: Запишем уравнения для энергий и импульсов:

$$m_\mu c^2 = m_e c^2 + T_e + T_{\bar{\nu}_e} + T_{\nu_\mu},$$

$$(p_e)_{max} = p_{\bar{\nu}_e} + p_{\nu_\mu} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\text{c}}\sqrt{T_e^2 + 2m_e c^2 T_e} = \frac{T_{\bar{\nu}_e}}{\text{c}} + \frac{T_{\nu_\mu}}{\text{c}}.$$

При максимальной кинетической энергии электрона максимален и его импульс. Это имеет место тогда, когда импульсы обоих (≈ безмассовых) нейтрино сонаправлены и противоположны импульсу электрона. Это и использовано во втором уравнении. Совмещая оба уравнения, получаем

$$m_\mu c^2 - m_e c^2 = T_e + \sqrt{T_e^2 + 2m_e c^2 T_e}.$$

Откуда

$$T_e^{max} = \frac{\left(m_\mu c^2 - m_e c^2\right)^2}{2m_\mu c^2} = \frac{(105{,}66 - 0{,}51)^2}{2 \cdot 105{,}66}\text{МэВ} \approx 52\ \text{МэВ}.$$

11. Показать, что γ-квант не может передать всю энергию изолированному электрону.

Решение: Запишем уравнения для энергий и импульсов, полагая, что электрон до взаимодействия с фотоном покоился:

$$p_\gamma c + m_e c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4},$$

$$p_\gamma = p_e.$$

Очевидно, что верхнее уравнение при справедливости нижнего выполняется лишь при $p_\gamma = 0$, т. е. при отсутствии фотона.

12. Найти порог реакции $\gamma + p \to p + \bar{p} + p$ в ЛСК в нерелятивистском и релятивистском приближениях. $m_p c^2 = m_{\bar{p}} c^2 = 938{,}27$ МэВ.

Решение: Для реакции $A + B \to C + D + \ldots$ используем пороговую формулу

$$E_{\text{порог}} = (T_A)_{min} = |Q|\left(1 + \frac{m_A}{m_B} + \frac{|Q|}{2m_B c^2}\right),$$

где $Q = (m_A + m_B)c^2 - (m_C + m_D + \cdots)c^2 -$ энергия реакции, а последнее слагаемое в скобках учитывается в релятивистском приближении. Итак, поскольку в данном случае $|Q| = 2m_p c^2$, получаем

- в нерелятивистском приближении

$$\left(T_{\gamma}\right)_{min} = |Q|\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right) = 2m_p c^2 = 1877 \text{ МэВ},$$

- в релятивистском приближении

$$\left(T_{\gamma}\right)_{min} = |Q|\left(1+\frac{m_A}{m_B}+\frac{|Q|}{2m_B c^2}\right) = 2m_p c^2\left(1+\frac{2m_p c^2}{2m_p c^2}\right) = 3754 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, релятивистская «поправка» удваивает порог.

13. Рассмотреть прямую и обратную ядерные реакции $\alpha+\alpha \to {}^7_3\mathrm{Li}+p$ и $p+{}^7_3\mathrm{Li} \to \alpha+\alpha$. Какая из них имеет порог? Для реакции с порогом найти этот порог в ЛСК. Используйте массы «участников» реакции в энергетических единицах: $m_p c^2 = 938{,}27$ МэВ, $m_{\mathrm{Li}} c^2 = 6533{,}83$ МэВ, $m_\alpha c^2 = 3727{,}38$ МэВ. Найти долю кинетической энергии налетающей частицы, идущую на движение центра инерции. Оценить релятивистскую добавку.

Решение: Порогом обладает реакция, для которой сумма масс в конечном состоянии больше. Это имеет место для реакции $\alpha+\alpha \to {}^7_3\mathrm{Li}+p$. Вычислим Q реакции:

$$Q = 2m_\alpha c^2 - m_p c^2 - m_{{}^7_3\mathrm{Li}} c^2 =$$

$$= (2\cdot 3727{,}38 - 938{,}27 - 6533{,}83)\text{МэВ} = -17{,}34 \text{ МэВ}.$$

Рассчитываем порог реакции:

$$(T_\alpha)_{min} = |Q|\left(1+\frac{m_\alpha}{m_\alpha}+\frac{|Q|}{2m_\alpha c^2}\right) = 17{,}34\left(1+1+\frac{17{,}34}{2\cdot 3727{,}38}\right)\text{МэВ} =$$

$$= 17{,}34(2+0{,}00233)\text{МэВ} \approx 34{,}68 \text{ МэВ} + 0{,}04 \text{ МэВ}.$$

За счет энергии движения центра инерции порог возрастает по сравнению с величиной $|Q|$ на множитель $1+\frac{17{,}34}{2\cdot 3727{,}38} \approx 1{,}0023$ (сумма второго и третьего слагаемых в скобках). Релятивистская добавка определяется третьим слагаемым в скобках и равна $17{,}34 \text{ МэВ}\cdot 0{,}0023 \approx 0{,}04$ МэВ.