СЕМИНАР 2

1. Вычислить дебройлевскую длину волны α-частицы и электрона с кинетическими энергиями 5 МэВ.

Решение:

α-Частица. Это нерелятивистский случай, так как $m_\alpha c^2 = 3727,38\ \text{МэВ} \approx 4000\ \text{МэВ}$. Поэтому используем нерелятивистскую формул и то, что $\hbar c = 197\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм} \approx 200\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм}$:

$$\lambda_\alpha = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2m_\alpha c^2 \cdot T_\alpha}} \approx \frac{1240\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм}}{\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 5}\ \text{МэВ}} \approx 6{,}2\ \text{Фм}.$$

Электрон. Это релятивистский случай. Используем релятивистскую формулу:

$$\lambda_e = \frac{2\pi\hbar c}{p_e c} \approx \frac{2\pi\hbar c}{T_e} = \frac{1240\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм}}{5\ \text{МэВ}} \approx 250\ \text{Фм}.$$

2. При изучении дифракционного рассеяния протонов с кинетической энергией $T_p = 20$ ГэВ на ядрах свинца первый дифракционный минимум наблюдался при $\theta_1 = 0{,}3^\circ$. Оценить радиус ядра свинца.

Решение:

Имеет место формула

$$\text{Sin}\theta_m \approx m\frac{0{,}6 \cdot \lambda}{R},$$

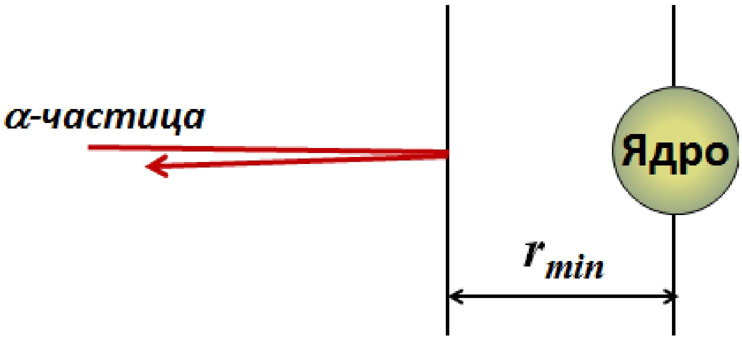
где R – радиус облучаемого объекта а λ – дебройлевская длина волны налетающей на объект частицы, θ_m – угол рассеяния, отвечающий дифракционному минимуму порядка m ($m = 1, 2, 3 \ldots$). Поэтому можем записать с учётом релятивистской формулы для длины волны протона λ_p:

$$R_{\text{Pb}} \approx \frac{0{,}6 \cdot \lambda_p}{\text{Sin}\theta_1} = \frac{0{,}6 \cdot 2\pi\hbar c}{T_p \cdot \frac{0{,}3\pi}{180}} \approx \frac{0{,}6 \cdot 1240\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм} \cdot 180}{20 \cdot 10^3\text{МэВ} \cdot 0{,}3 \cdot 3{,}14} \approx 7{,}1\ \text{Фм}.$$

3. Почему в опыте Резерфорда не наблюдается дифракционная картина?

Решение:

Обратимся к схеме опыта для случая, когда α-частица подходит к ядру золота ($^{197}_{79}\mathrm{Au}$) на минимальное расстояние:



Рассчитаем расстояние r_{min} минимального сближения α-частицы с ядром золота. Это расстояние отвечает условию:

$$T_\alpha = \frac{Z_\alpha Z_я e^2}{r_{min}} = V_{кул},$$

Или

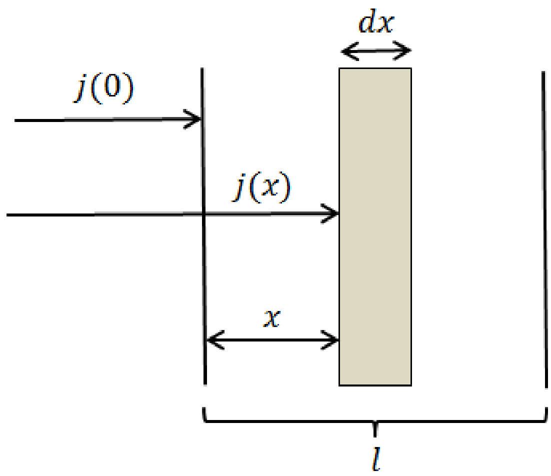
$$r_{min} = \frac{Z_\alpha Z_я e^2}{T_\alpha} = \frac{Z_\alpha Z_я}{T_\alpha} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \hbar c \approx \frac{2 \cdot 79}{5\ \text{МэВ}} \cdot \frac{1}{137} \cdot 200\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм} \approx 46\ \text{Фм}.$$

Это много больше радиуса ядра $^{197}_{79}\mathrm{Au}$, который равен ≈7 Фм. Т. е. α-частица–волна «облизывает» пустое пространство вдали от поверхности ядра. Она не ощущает очертания ядра. Дифракция не возникает.

4. Оценить радиус ядра меди, если при прохождении релятивистских нейтронов через пластинку меди толщиной $l = 2$ см поток нейтронов уменьшается в 1,1 раза. Размером нейтрона пренебречь.

Решение: Релятивизм нужен, что бы длиной волны нейтрона λ_n можно было пренебречь по сравнению с радиусом ядра, т. е. $\lambda_n \ll R_я$ (например, при $T_n = 6$ ГэВ длина волны нейтрона $\lambda_n \approx 0{,}2$ Фм). Кроме того, существенно, что электромагнитного взаимодействия нет, а лишь ядерное (сильное), а оно короткодействующее (радиус ≈ 1 Фм) и с этой точностью можно оценить радиус действия по формуле $\sigma_n \approx \pi R_я^2$.

Получим формулу для толстой мишени



На Лекции 2 для числа взаимодействий N в слое толщиной l при сечении взаимодействия σ было получено выражение

$$N = j \cdot n \cdot S \cdot l \cdot \sigma,$$

где n – число ядер в 1 см^3 мишени, а S – поперечная облучаемая площадь мишени. Число взаимодействий dN в тонком слое dx на глубине x даётся соотношением

$$dN(x) = -j(x) \cdot n \cdot S \cdot dx \cdot \sigma.$$

Знак «минус» означает уменьшение падающего на тонкий слой потока за счёт числа взаимодействий $dN(x)$. Тогда $\dfrac{dN(x)}{S} = dj(x)$ – изменение плотности потока нейтронов при прохождении слоя dx. Можем записать

$$dj(x) = -j(x) \cdot n \cdot \sigma \cdot dx$$

$$\text{и} \qquad j(x) = j(0) \cdot e^{-n\sigma x}.$$

Для мишени толщиной l получаем

$$j(l) = j(0) \cdot e^{-n\sigma l}.$$

Откуда

$$\sigma = \frac{1}{nl} \cdot ln\frac{j(0)}{j(l)} = \frac{A}{\rho N_A \cdot l} ln\frac{j(0)}{j(l)} = \frac{63 \text{ г}}{9 \text{ г/см}^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 2 \text{ см}} ln1{,}1 \approx$$

$$\approx 0{,}55 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 = 0{,}55 \text{ барн}.$$

Здесь использовано то, что $n = \frac{\rho N_A}{A}$, где $\rho \approx 9 \text{ г/см}^3$ – плотность меди, N_A – число Авогадро и A – массовое число ядра меди в граммах (63).

Радиус ядра меди получаем из выражения $\sigma \approx \pi R^2$:

$$R \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = \sqrt{\frac{0{,}55}{3{,}14} \cdot 10^{-24}\text{см}^2} \approx 4{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{см} = 4{,}2\ \text{Фм}.$$

5. Определить длину L свободного пробега и среднее время жизни τ реакторного антинейтрино до взаимодействия в воде, воспользовавшись данными эксперимента Райнеса и Коуэна (1956-1959), получившими для сечения взаимодействия антинейтрино с нуклоном или электроном величину $\sigma \approx 10^{-43}\ \text{см}^2$.

Решение: Число антинейтрино, прошедших через слой вещества толщиной x дается выражением

$$N(x) = N(0) \cdot e^{-n\sigma x},$$

вывод которого дан в задаче 4. Антинейтрино рождаются в реакторе в реакции распада нейтронов

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Энергия распада ≈ 0,78 МэВ.

Длина L свободного пробега частицы определяется как среднее расстояние, которое она пролетает без взаимодействия. Найдём выражение для L. Вероятность $P(x)$ частице пройти расстояние x без взаимодействия есть

$$P(x) = \frac{N(x)}{N(0)} = e^{-n\sigma x}$$

и по определению среднего (математического ожидания)

$$L = \frac{\int_0^\infty x \cdot P(x)dx}{\int_0^\infty P(x)dx} = \frac{\int_0^\infty x \cdot e^{-n\sigma x}dx}{\int_0^\infty e^{-n\sigma x}dx} = \frac{(1/n\sigma)^2}{(1/n\sigma)} = \frac{1}{n\sigma}.$$

Для расчёта нужна концентрация n_{e+N} электронов и нуклонов в воде. Она получается умножением концентрации молекул воды $n_{\mathrm{H_2O}}$ на число электронов и нуклонов в одной молекуле воды. Это последнее число для воды ($\mathrm{H_2O}$) равно $Z_e + Z_p + N_n = (2+8) + (2+8) + 8 = 28$. Итак, имеем

$$n_{e+N} = \left(\frac{\rho N_A}{A}\right)_{\mathrm{H_2O}} \cdot 28 = \frac{1\ \text{г/см}^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{18\ \text{г}} \cdot 28 \approx 0{,}94 \cdot 10^{24}\text{см}^{-3}.$$

Теперь получаем

$$L = \frac{1}{n_{e+N} \cdot \sigma} = \frac{1}{0{,}94 \cdot 10^{24}\text{см}^{-3} \cdot 10^{-43}\text{см}^2} \approx 1{,}06 \cdot 10^{19}\text{см} = 1{,}06 \cdot 10^{14}\text{км}.$$

Среднее время жизни антинейтрино (оно двигается практически со скоростью света):

$$\tau = \frac{L}{c} = \frac{1{,}06 \cdot 10^{19}\text{см}}{3 \cdot 10^{10}\ \text{см/сек}} \approx 3{,}55 \cdot 10^{8}\text{сек} \approx 10\ \text{лет}.$$

Здесь использовано то, что 1 год $\approx \pi \cdot 10^7$сек.

6. Золотая пластинка $(Z = 79)$ толщиной $l = 0{,}1$ мм облучается пучком α-частиц с плотностью потока $j = 10^3$ см^{2}сек$^{-1}$. Кинетическая энергия α-частиц $T_\alpha = 5$ МэВ. Оценить число рассеиваемых в секунду в единицу телесного угла α-частиц под углом $\theta = 170^\mathrm{o}$ к оси падающего пучка, если площадь пятна пучка $S = 1\ \text{см}^2$ (опыт Резерфорда).

<u>Решение:</u> Используем формулу

$$\frac{dN}{d\Omega} = jnSl\,\frac{d\sigma}{d\Omega},$$

где формула Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_\alpha Z_я e^2}{4T_\alpha}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{Sin}^4\,\dfrac{\theta}{2}}.$$

Вначале рассчитаем $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2 \cdot 79}{4 \cdot 5\ \text{МэВ}} \cdot 1{,}44 \cdot 10^{-13}\text{МэВ} \cdot \text{см}\right)^2 \frac{1}{Sin^4\,\dfrac{170^\mathrm{o}}{2}} = 1{,}29 \cdot 10^{-24}\,\frac{\text{см}^2}{\text{стерад}}.$$

Мы использовали

$$e^2 = \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \hbar c = \frac{1}{137} \cdot 197\ \text{МэВ}\cdot\text{Фм} \approx 1{,}44\cdot 10^{-13}\ \text{МэВ}\cdot\text{см}.$$

Итак, имеем

$$\frac{dN}{d\Omega} = 10^3\,\frac{\alpha}{\text{см}^2\,\text{сек}} \cdot \frac{19{,}32\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{197\ \text{г}} \cdot 1\text{см}^2 \cdot 10^{-2}\text{см} \cdot 1{,}29 \cdot \frac{\text{см}^2}{\text{стерад}} \approx 0{,}77\,\frac{\alpha}{\text{сек}\cdot\text{стерад}}.$$

7. Протон с кинетической энергией $T = 2$ МэВ налетает на неподвижное ядро $^{197}_{79}\mathrm{Au}$. Определить дифференциальное сечение рассеяния $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ на

угол $\theta = 60^{o}$. Как изменится величина дифференциального сечения рассеяния, если в качестве рассеивающего ядра выбрать ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$?

<u>Решение:</u> Используем формулу Резерфорда и то, что

$$\frac{e^2}{\hbar c}\cdot\hbar c = \frac{1}{137}\cdot 197\ \text{МэВ}\cdot\text{Фм} \approx 1{,}44\ \text{Мэв}\cdot\text{Фм}:$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_p Z_я e^2}{4T}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{Sin}^4\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_p Z_я e^2}{4T\cdot\hbar c}\hbar c\right)^2 \frac{1}{\mathrm{Sin}^4\frac{\theta}{2}} \approx$$

$$\approx \left(\frac{1\cdot 79\cdot 1{,}44\ \text{МэВ}\cdot\text{Фм}}{4\cdot 2\ \text{МэВ}}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{Sin}^4 30^{o}} \approx 3{,}2\cdot 10^3\ \text{Фм}^2/\text{стерад} =$$

$$= 32\ \text{барн}/\text{стерад}.$$

Из формулы Резерфорда следует, что отношение дифференциальных сечений рассеяния при замене ядра ${}^{197}_{79}\mathrm{Au}$ на ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ будет определяться отношением квадратов зарядов этих ядер:

$$R = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Au}} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Al}} = Z^2_{\mathrm{Au}}/Z^2_{\mathrm{Al}} = 79^2_{\mathrm{Au}}/13^2_{\mathrm{Al}} = 37.$$

Т. е. при одинаковых условиях сечение рассеяния на ядре золота будет в 37 раз больше, чем на ядре алюминия.