СЕМИНАР 3

1. Имеется частица с массой $m = 1$ г, движущаяся со скоростью $v = 1$ см/сек. Оценить неопределенность в координате и временно̀м положении этой частицы. Можно ли их наблюдать?

<u>Решение:</u> Используем соотношение неопределённости «импульс-координата» $\Delta p \cdot \Delta r \approx \hbar$ ($\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$эрг·сек), полагая для оценки $\Delta p \approx p = m \cdot v$:

$$\Delta r \approx \frac{\hbar}{\Delta p} \approx \frac{\hbar}{m \cdot v} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}\text{эрг} \cdot \text{сек}}{1\text{г} \cdot 1\,\text{см/сек}} \approx 10^{-27}\text{см.}$$

Ничтожность этой величины, исключающая возможность её наблюдения, очевидна. Столь же ничтожна и неопределенность во временно̀м положении этой частицы. Действительно, используя соотношение неопределённости «энергия-время» $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$ и полагая $\Delta E \approx T(\text{кин. эн.}) = \frac{mv^2}{2} = \frac{1\text{г}\cdot(1\text{см/сек})^2}{2} \approx$ 0,5 эрг, получаем

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}\text{эрг} \cdot \text{сек}}{0{,}5\ \text{эрг}} \approx 2 \cdot 10^{-27}\text{сек.}$$

2. Данные одного из экспериментов по измерению спектров α-частиц от распада ${}^{241}_{95}\text{Am}$ ($t_{1/2} =$ 432,6 лет) показывают наличие α-пика с энергией 5,476 МэВ и шириной на половине высоты $\Gamma \approx$ 15 кэВ. Можно ли эти α-частицы наблюдать в виде трека в ядерной фотоэмульсии (толщина трека в фотоэмульсии не может быть меньше диаметра одного проявленного зерна равного 0,5 мкм = $5 \cdot 10^{-5}$ см) и, если можно, то не будет ли это противоречить утверждению квантовой механики о невозможности движения частиц по траекториям.

<u>Решение:</u> Квантовая механика требует выполнения соотношения неопределенности «импульс-координата» $\Delta p \cdot \Delta r \approx \hbar$ или $\Delta pc \cdot \Delta r \approx \hbar c$. В данном случае $\Delta r = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Найдем Δpc, учитывая, что $\Gamma \approx \Delta T_\alpha$:

$$\Delta pc = \Delta\sqrt{2m_\alpha c^2 \cdot T_\alpha} = \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{2 \cdot T_\alpha}} \cdot \Delta T_\alpha = \sqrt{\frac{3727\ \text{МэВ}}{2 \cdot 5{,}476\ \text{МэВ}}} \cdot 0{,}015\ \text{МэВ} \approx$$

$$\approx 0{,}28\ \text{МэВ.}$$

Найдём теперь квантовую неопределённость в Δr, вытекающую из неопределённости $\Delta pc \approx 0{,}28$ МэВ:

$$\Delta r = \frac{\hbar c}{\Delta pc} \approx \frac{200\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм}}{0{,}28\ \text{МэВ}} = \frac{200\ \text{МэВ} \cdot 10^{-13}\text{см}}{0{,}28\ \text{МэВ}} \approx 0{,}7 \cdot 10^{-10}\text{см},$$

что почти на 6 порядков ниже толщины трека $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ см. Таким образом наличие достаточно отчетливого (с разрешением 0,5 мкм) трека α-частицы в фотоэмульсии не противоречит утверждению квантовой механики о невозможности движения частиц по траекториям.

3. Имеются α-частицы с кинетической энергией 5 МэВ и неопределенностью Δv в скорости того же порядка, что и сама скорость v. Будут ли следы этих α-частиц наблюдаться в виде чётких треков в позиционно-чувствительном детекторе (например, ядерной фотоэмульсии или камере Вильсона)?

Решение: Рассчитаем неопределённость Δr в координате α-частиц, используя соотношение неопределённости «импульс-координата»:

$$\Delta r \approx \frac{\hbar}{m\Delta v} \approx \frac{\hbar}{mv} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-27}\ \text{г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}}{4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ \text{г} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{9}\ \text{см/сек}} \approx 10^{-13}\text{см}.$$

Таким образом, треки будут чёткими (их расплывание заметно не будет).
В решении было использовано следующее: масса m α-частицы примерно равна четырём нуклонным массам $4 \cdot m_{\text{нукл}} \approx 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г $\approx 4 \cdot 10^{3}$ МэВ/c^2 и их скорость

$$v = c\sqrt{\frac{2T}{mc^2}} \approx 3 \cdot 10^{10}\frac{\text{см}}{\text{сек}}\sqrt{\frac{2 \cdot 5\ \text{МэВ}}{4 \cdot 10^{3}\ \text{МэВ}}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{9}\frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

4. Рассмотрим атом. Типичная энергия электрона в атоме $T_e \approx 10$ эВ. Оценить неопределенность в пространственном положении такого электрона.

Решение: Используем $\hbar = 6{,}58 \cdot 10^{-22}\text{МэВ} \cdot \text{сек}$. Оценим неопределённость Δr_e в пространственном положении такого электрона, полагая $\Delta p_e \approx p_e = \sqrt{2T_e m_e}$:

$$\Delta r_e \approx \frac{\hbar}{\Delta p_e} \approx \frac{\hbar c}{p_e c} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2T_e m_e c^2}} \approx$$

$$\approx \frac{200\ \text{МэВ} \cdot 10^{-13}\text{см}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-5}\ \text{МэВ} \cdot 0{,}511\ \text{МэВ}}} \approx 0{,}6 \cdot 10^{-8}\text{см}.$$

Полученная пространственная неопределённость отвечает размеру атома.

5. Типичная кинетическая энергия нуклона (протона или нейтрона) в ядре $T_N \approx$ 20 МэВ. Оценить неопределённость Δr_N в пространственном положении такого нуклона.

Решение: Полагая $\Delta p_N \approx p_N = \sqrt{2T_N m_N}$, имеем

$$\Delta r_N \approx \frac{\hbar}{\Delta p_N} \approx \frac{\hbar}{p_N} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2T_N \cdot m_N c^2}} \approx$$

$$\approx \frac{200\ \text{МэВ} \cdot \text{Фм}}{\sqrt{2 \cdot 20\ \text{МэВ} \cdot 1000\ \text{МэВ}}} \approx 1\ \text{Фм} = 10^{-13}\text{см}.$$

Эта пространственная неопределённость отвечает ядерному масштабу. В решении использовано $m_N c^2 \approx 939\ \text{МэВ} \approx 1000\ \text{МэВ}$. Этим приближением удобно пользоваться для многих оценок.

6. Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга «импульс-координата» ($\Delta p \cdot \Delta r \approx \hbar$), оценить кинетические энергии электрона в атоме и кварка в нуклоне.

Решение: Рассмотрим атом. Соотношение неопределенности запишем в виде $\Delta p_e c \cdot \Delta r_e \approx \hbar c$. Для оценок полагаем $\Delta r_e \approx R_{ат}$, где $R_{ат}$ – радиус атома, а $\Delta p_e \approx p_e$, где p_e – импульс электрона. Электрон на орбите атома нерелятивистский, поэтому $p_e = \sqrt{2T_e \cdot m_e}$. Итак, получаем

$$T_e \approx \frac{1}{2m_e c^2}\left(\frac{\hbar c}{R_{ат}}\right)^2 \approx \frac{1}{10^6\text{эВ}}\left(\frac{200 \cdot 10^6\text{эВ} \cdot 10^{-13}\text{см}}{10^{-8}\text{см}}\right)^2 \approx 4\ \text{эВ}.$$

Рассмотрим теперь нуклон. Он, как известно, состоит из трех кварков (их массы 2-5 МэВ/c^2). Радиус нуклона $R_N \approx$ 1 Фм. Кварки внутри нуклона релятивистские. Это следует из массы нуклона (≈1000 МэВ) и суммарной массы трёх кварков, из которых состоит нуклон. А эта суммарная масса всего ≈10 МэВ. Т.е. масса нуклона формируется в основном за счёт кинетической энергии кварков внутри нуклона и эта энергия во много раз больше энергии покоя кварков. Итак, кварки в нуклоне релятивистские, поэтому $p_q c \approx T_q$. Полагая $\Delta p_q c \approx p_q c \approx T_q$, для кинетической энергии кварка внутри нуклона получаем

$$T_q \approx \frac{\hbar c}{R_N} \approx \frac{200 \text{ МэВ} \cdot 1 \text{ Фм}}{1 \text{ Фм}} = 200 \text{ МэВ}.$$

7. Ядро ${}^{10}_{5}B$ из возбужденного состояния с энергией 0,72 МэВ распадается испусканием гамма-кванта с периодом полураспада $t_{1/2} = 7 \cdot 10^{-10}$ с. Оценить неопределенность в энергии ΔE испущенного гамма-кванта.

Решение: В соотношении неопределенности Гейзенберга «энергия-время» $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$ используем в качестве Δt величину периода полураспада $t_{1/2}$. Тогда

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{t_{1/2}} = \frac{\hbar c}{t_{1/2} \cdot c} = \frac{200 \text{ МэВ} \cdot 10^{-13} \text{см}}{7 \cdot 10^{-10} \text{сек} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}} \approx 10^{-6} \text{эВ}.$$

8. Найти среднее время жизни τ ядра ${}^{12}C$ в первом возбужденном состоянии с энергией $E = 4{,}44$ МэВ, если при гамма-распаде этого состояния формируется гамма-линия шириной $\Gamma = (10{,}8 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-6}$ кэВ.

Решение: Используем соотношение неопределенности $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$, в котором $\Delta E = \Gamma$, а $\Delta t = \tau$. Получаем

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar c}{\Gamma c} \approx \frac{200 \cdot 10^{3} \text{кэВ} \cdot 10^{-13} \text{см}}{11 \cdot 10^{-6} \text{ кэВ} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}} \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{сек}.$$

9. Из соотношения неопределенности «импульс-координата» получить соотношение неопределенности $\Delta J_z \cdot \Delta\varphi \geq \hbar$ (это задача на дом и необязательная, лишь для желающих).

10. Определить момент количества движения частицы с $l = 2$.

Решение:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)} = \hbar\sqrt{2(2+1)} = 6{,}58 \cdot 10^{-22}\sqrt{6} \text{ МэВ} \cdot \text{сек} \approx$$
$$\approx 2{,}6 \cdot 10^{-34} \text{Дж} \cdot \text{сек}.$$

11. Рассчитать угловой момент, связанный с движением Земли вокруг Солнца. Каков орбитальный момент l, отвечающий такому движению?

Решение:

Масса Земли $m_З = 6 \cdot 10^{27}$г, среднее расстояние до Солнца $r = 150 \text{ млн. км} = 1{,}5 \cdot 10^{13}$см, период обращения вокруг Солнца $t = 365 \text{ дн} \approx 3{,}15 \cdot 10^{7}$сек.

Рассчитываем среднюю скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца:

$$v = \frac{2\pi r}{t} \approx \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{13}\text{см}}{3{,}15 \cdot 10^{7}\text{сек}} \approx 3 \cdot 10^{6}\,\frac{\text{см}}{\text{сек}} = 30\,\frac{\text{км}}{\text{сек}}.$$

Рассчитываем угловой момент, связанный с движением Земли вокруг Солнца:

$$L = m_3 \cdot v \cdot r = 6 \cdot 10^{27}\text{г} \cdot 3 \cdot 10^{6}\,\frac{\text{см}}{\text{сек}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{13}\text{см} = 2{,}7 \cdot 10^{47}\text{эрг} \cdot \text{сек} =$$
$$= 2{,}7 \cdot 10^{40}\text{Дж} \cdot \text{сек}.$$

Рассчитываем l:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)} \approx \hbar l.$$

Откуда

$$l \approx \frac{L}{\hbar} \approx \frac{2{,}7 \cdot 10^{40}\text{Дж} \cdot \text{сек}}{1{,}05 \cdot 10^{-34}\text{Дж} \cdot \text{сек}} \approx 2{,}6 \cdot 10^{74}.$$

12. Рассчитать угловой момент, связанный с движением Солнца вокруг центра Галактики. Каков орбитальный момент l, отвечающий такому движению?

<u>Решение:</u>

Масса Солнца $m_С = 2 \cdot 10^{33}$г, расстояние до центра Галактики $r = 2{,}6 \cdot 10^{17}$км, скорость вращения вокруг центра Галактики $v = 220$ км/сек.

Имеем:

$$L = m_С v r = 2 \cdot 10^{33}\text{г} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{7}\,\frac{\text{см}}{\text{сек}} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{22}\text{см} = 1{,}144 \cdot 10^{63}\text{эрг} \cdot \text{сек} \approx$$
$$\approx 1{,}1 \cdot 10^{56}\text{Дж} \cdot \text{сек}.$$

Рассчитываем l: $L = \hbar\sqrt{l(l+1)} \approx \hbar l$ и

$$l \approx \frac{L}{\hbar} \approx \frac{1{,}1 \cdot 10^{56}\text{Дж} \cdot \text{сек}}{1{,}05 \cdot 10^{-34}\text{Дж} \cdot \text{сек}} \approx 10^{90}.$$

13. Нуклон имеет орбитальный момент $l = 1$. Чему может быть равен его полный момент j и проекция этого момента на ось z?

<u>Решение:</u>

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} = \vec{1} + \overrightarrow{\frac{1}{2}}.$$

$$\left|1 - \tfrac{1}{2}\right| \le j \le 1 + \tfrac{1}{2} \text{ или } \tfrac{1}{2} \le j \le \tfrac{3}{2}. \text{ Т.е. } j = \tfrac{1}{2} \text{ или } j = \tfrac{3}{2}.$$

$$j_z = \pm j, \pm(j-1), \dots, \pm\frac{1}{2}.$$

$$\text{Итак, если } j=\frac{1}{2}, \text{ то } j_z=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\text{Если } j=\frac{3}{2}, \text{ то } j_z=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

14. Нуклон имеет орбитальный момент $l=3$. Чему может быть равен его полный момент j и проекция этого момента на ось z? (Эта задача решается аналогично предыдущей).

15. Найти углы θ, которые векторы углового момента с $j = 1/2$ и $j = 1$ составляют с осью z. (Эта задача для самостоятельного решения).

16. Атом калия состоит из ядра $^{39}_{19}\mathrm{K}$ и 19-ти электронов. Полный момент, создаваемый электронами $I = 5/2$. Спин ядра $J = 3/2$. Чему может быть равен полный момент атома F?

Решение:

$$\vec{F}=\vec{I}+\vec{J}=\frac{\vec{5}}{2}+\frac{\vec{3}}{2}=\vec{1},\vec{2},\vec{3},\vec{4}.$$

Этот результат – следствие нижеследующего соотношения:

$$\left|\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right|\le F\le\frac{5}{2}+\frac{3}{2}.$$

17. Назовите какую-либо причину, запрещающую распад $n\to p+e^-$.

Решение: Одна из причин – сохранение углового момента. Спин всех частиц в вышеприведенном распаде 1/2. Таким образом, слева угловой момент распадающегося из состояния покоя нейтрона равен 1/2. Справа - система двух конечных частиц со спином 1/2 может быть лишь в состоянии с результирующим целым или нулевым угловым моментом. Имеем распад, в котором угловой момент не сохраняется.