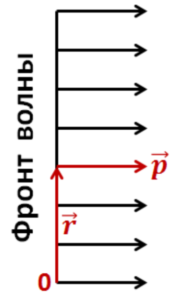
СЕМИНАР 4

1. Показать, что плоская волна не обладает определенным значением орбитального момента

<u>Решение:</u>

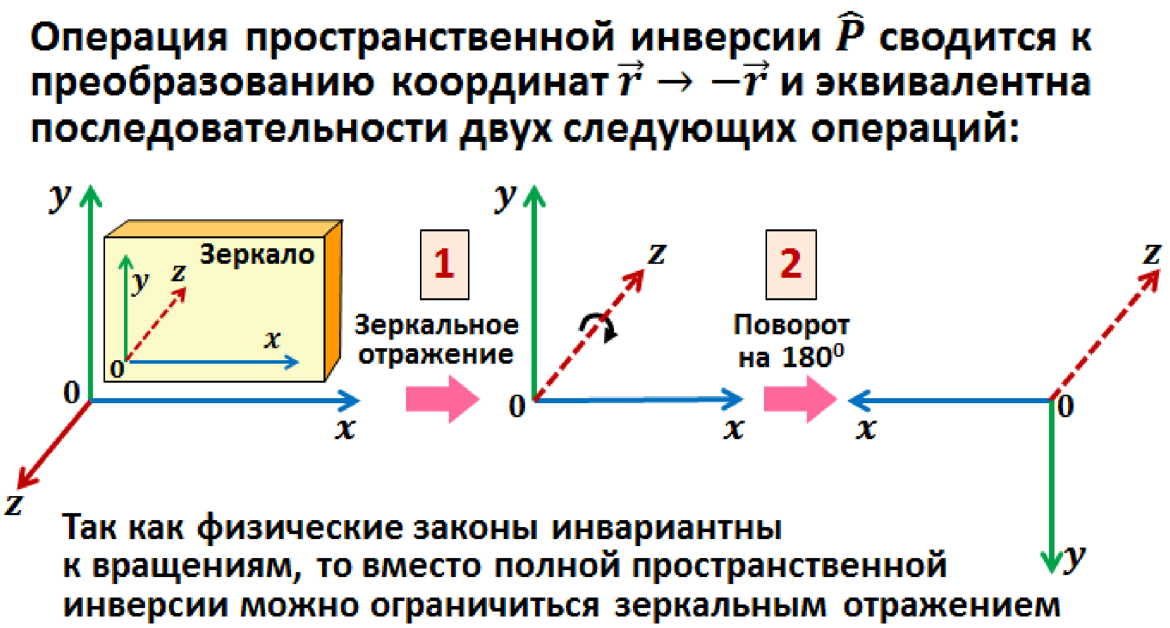



Из рисунка очевидно, что плоская волна содержит все возможные значения орбитального момента $\vec{l} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, поскольку величина $|\vec{r}|$ может быть любой.

2. Доказать, что из однородности времени следует закон сохранения механической энергии (задача на дом с использованием знания студентами раздела «Механика»).

3. Показать, что инверсия координат эквивалентна зеркальному отражению.

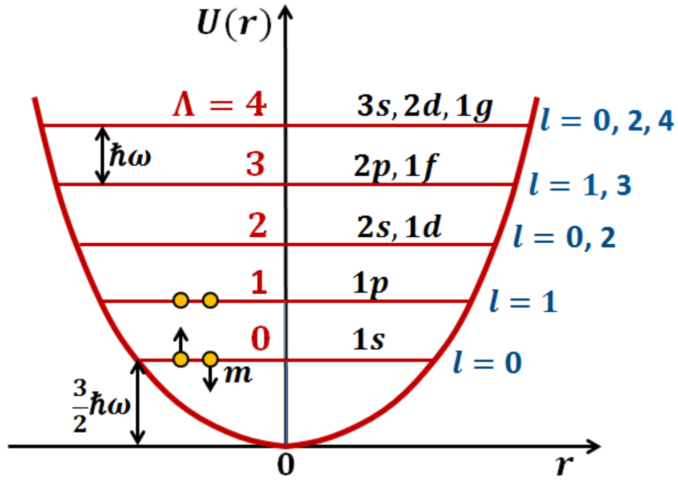
<u>Решение:</u>



4. Найти минимальную массу следующих систем: трёхмерный гармонический осциллятор а) с 4-мя одинаковыми частицами со спином 1/2 и массой $m$, б) четырьмя одинаковыми частицами той же массы, но со спином 0.

Решение: Минимальная масса отвечает частицам на самых нижних уровнях в потенциале гармонического осциллятора $U(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$ (см. ниже схему этих уровней). Имеем:

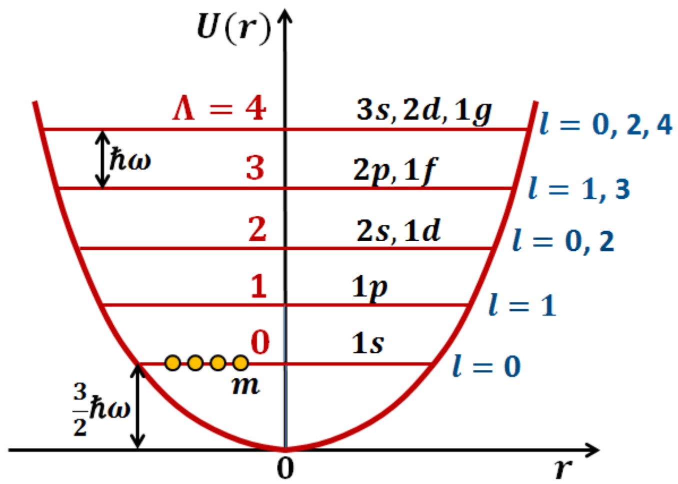
а)




Энергия системы $4mc^2 + 2\frac{3}{2}\hbar\omega + 2\left(\frac{3}{2} + 1\right)\hbar\omega = 4mc^2 + 8\hbar\omega$.

Масса $4m + \frac{8\hbar\omega}{c^2}$.

б)

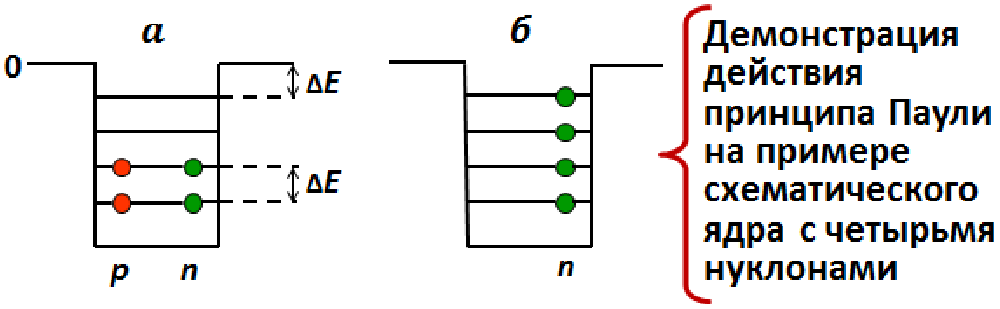



Энергия системы $4mc^2 + 4\frac{3}{2}\hbar\omega = 4mc^2 + 6\hbar\omega$.

Масса $4m + \frac{6\hbar\omega}{c^2}$.

5. Почему нет ядер из одних нейтронов?

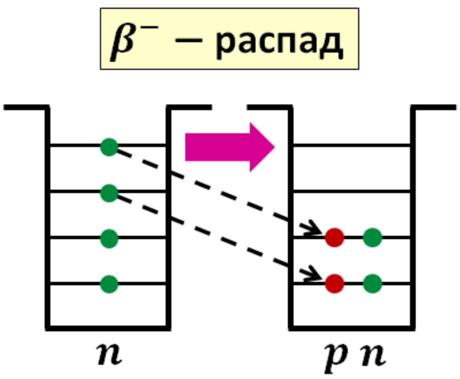
Решение: Рассмотрим схематический случай – 4 нуклона в прямоугольной ядерной потенциальной яме с уровнями, на которых может находиться лишь одна частица одного типа (см. рисунок). Слева (*а*) – два протона и два нейтрона, справа (*б*) – четыре нейтрона. Нуклоны в обоих случаях занимают низшие возможные энергии, допускаемые принципом запрета Паули. Видно, что энергия (масса) правой конфигурации (одни нейтроны) больше энергии (массы) левой конфигурации (два протона и два нейтрона) на величину $4\Delta E$. Поэтому правая ядерная конфигурация энергетически менее выгодна левой и не реализуется.




Если даже и попытаться реализовать вариант *б* (с четырьмя нейтронами) то за счёт $\beta^-$-распада нейтрона $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, идущего с энерговыделением

$$Q = (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})c^2 \approx$$
$$(939{,}565 - 938{,}272 - 0{,}511 - 0)\text{МэВ} \approx 0{,}78 \text{ МэВ},$$

конфигурация *б* эволюционирует в конфигурацию *а*. Эта эволюция иллюстрируется следующей схемой




6. Показать, что чётность сохраняется в электромагнитном взаимодействии.

Решение: Это следует из того, что электромагнитные взаимодействия подчиняются уравнениям Максвелла, которые инвариантны к замене $\vec{r} \to -\vec{r}$.

7. Нуклон имеет орбитальный момент $l = 1$. Чему равна его чётность?

Решение: Внутренняя чётность нуклона $\pi_N = +1$, поэтому

$$P_N = \pi_N(-1)^{l_N} = (+1) \cdot (-1)^1 = -1.$$

8. Определить спин-чётность $\alpha$-частицы.

Решение: $\alpha$-Частица состоит из двух протонов и двух нейтронов. Они находятся в ядерной потенциальной яме в основном, т.е. в самом нижнем энергетическом состоянии. В любом сферически-симметричном состоянии нижний уровень характеризуется орбитальным моментом находящейся на ней частицы $l = 0$. На этом уровне помещаются все нуклоны $\alpha$-частицы: два протона с противоположно направленными спинами и два нейтрона с противоположно направленными спинами. Все они имеют $l = 0$. Поэтому

$$\vec{J}_\alpha = \vec{s}_{p_1}(\uparrow) + \vec{s}_{p_2}(\downarrow) + \vec{s}_{n_1}(\uparrow) + \vec{s}_{n_2}(\downarrow) + \vec{l}_{p_1} + \vec{l}_{p_2} + \vec{l}_{n_1} + \vec{l}_{n_2} =$$
$$= \frac{\vec{1}}{2}(\uparrow) + \frac{\vec{1}}{2}(\downarrow) + \frac{\vec{1}}{2}(\uparrow) + \frac{\vec{1}}{2}(\downarrow) + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Внутренняя чётность нуклона $+1$. Поэтому чётность $\alpha$-частицы

$$P_\alpha = \pi_p \pi_p \pi_n \pi_n (-1)^{l_p + l_p + l_n + l_n} = (+1)(+1)(+1)(+1)(-1)^{0+0+0+0} = +1.$$

9. Две $\alpha$-частицы находятся в состоянии с относительным орбитальным моментом $L = 2$. Чему равны полный момент и чётность системы?

Решение:

$$\vec{J}_{\alpha\alpha} = \vec{s}_{\alpha_1} + \vec{s}_{\alpha_2} + \vec{l}_{\alpha_1} + \vec{l}_{\alpha_2} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{2} = \vec{2}.$$

Здесь использовано

$$\vec{l}_{\alpha_1} + \vec{l}_{\alpha_2} = \vec{L}_{\alpha\alpha} = \vec{2}.$$

Чётность

$$P_{\alpha\alpha} = \pi_{\alpha_1} \pi_{\alpha_2} (-1)^{l_{\alpha_1} + l_{\alpha_2}} = \pi_{\alpha_1} \pi_{\alpha_2} (-1)^{L_{\alpha\alpha}} = (+1)(+1)(-1)^2 = +1.$$

Итак, для $\alpha$-частицы имеем $(J^P)_{\alpha\alpha} = 2^+$.

10. Определить спин-чётность $\pi$-мезона. Известно, что $\pi$-мезон состоит из кварка и антикварка с противоположно направленными спинами и нулевым относительным орбитальным моментом.

<u>Решение:</u> Так как $\pi$-мезон состоит из кварка $q$ и антикварка $\bar{q}$ с противоположно направленными спинами $(+1/2$ и $-1/2)$ и с их относительным нулевым орбитальным моментом $\vec{L} = \vec{l}_q + \vec{l}_{\bar{q}}$, то

$$\vec{J}_\pi = \vec{s}_q + \vec{s}_{\bar{q}} + \vec{l}_q + \vec{l}_{\bar{q}} = \frac{\vec{1}}{2}(\uparrow) + \frac{\vec{1}}{2}(\downarrow) + \vec{0} = \vec{0}.$$

Чётность $\pi$-мезона с учётом того, что у кварка она положительная, а у антикварка отрицательная определяется выражением

$$P_\pi = \pi_q \pi_{\bar{q}} (-1)^{l_q + l_{\bar{q}}} = (+1)(-1)(-1)^0 = (-1).$$

Таким образом спин-чётность $\pi$-мезона $(J^P)_\pi = 0^-$.

11. Чему равны классические величины собственных магнитных моментов протона и нейтрона? Как они направлены относительно спинов? (Задача решается дома, после знакомства с Приложением к Лекции 4).

<u>Решение:</u> Для собственных магнитных моментов протона и нейтрона имеют место следующие выражения:

$$\vec{\mu}_s^p = g_s^p \cdot \vec{s}_p, \quad \vec{\mu}_s^n = g_s^n \cdot \vec{s}_n,$$

где $\vec{s}_p = \frac{\vec{1}}{2}$, $\vec{s}_n = \frac{\vec{1}}{2}$ – спины нуклонов, а $g_s^p = +5{,}58$, $g_s^n = -3{,}82$ – их гиромагнитные факторы. Вышенаписанные выражения для магнитных моментов нуклонов при подстановке приведенных значений спинов и гиромагнитных моментов нуклонов дают величины их магнитных моментов в ядерных магнетонах $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3{,}15 \cdot 10^{-18}$ МэВ/Гс.:

$$\mu_s^p = g_s^p \cdot s_p = +5{,}58 \cdot \frac{1}{2} \mu_N = +2{,}79 \mu_N.$$

$$\mu_s^n = g_s^n \cdot s_n = -3{,}82 \cdot \frac{1}{2} \mu_N = -1{,}91 \mu_N.$$

Положительный знак магнитного момента означает, что вектор магнитного момента направлен вдоль вектора спина (протон). Отрицательный знак магнитного момента означает, что вектор магнитного момента противоположен вектору спина (нейтрон).