

СЕМИНАР 9

Темы семинара:

1. Энергия связи ядер. Формула Вайцзеккера.
2. Энергия отделения нуклонов.

Энергия связи ядра $W(A, Z)$ и масса ядра $M(A, Z)$. Формула Вайцзеккера:

$$W(A, Z) = [Zm_p + (A - Z)m_n]c^2 - M(A, Z)c^2 =$$
$$= \left[15,6 \cdot A - 17,2 \cdot A^{2/3} - 0,72 \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} - 23,6 \frac{(N - Z)^2}{A} + 34 \frac{\delta}{A^{3/4}} \right] \text{МэВ.}$$

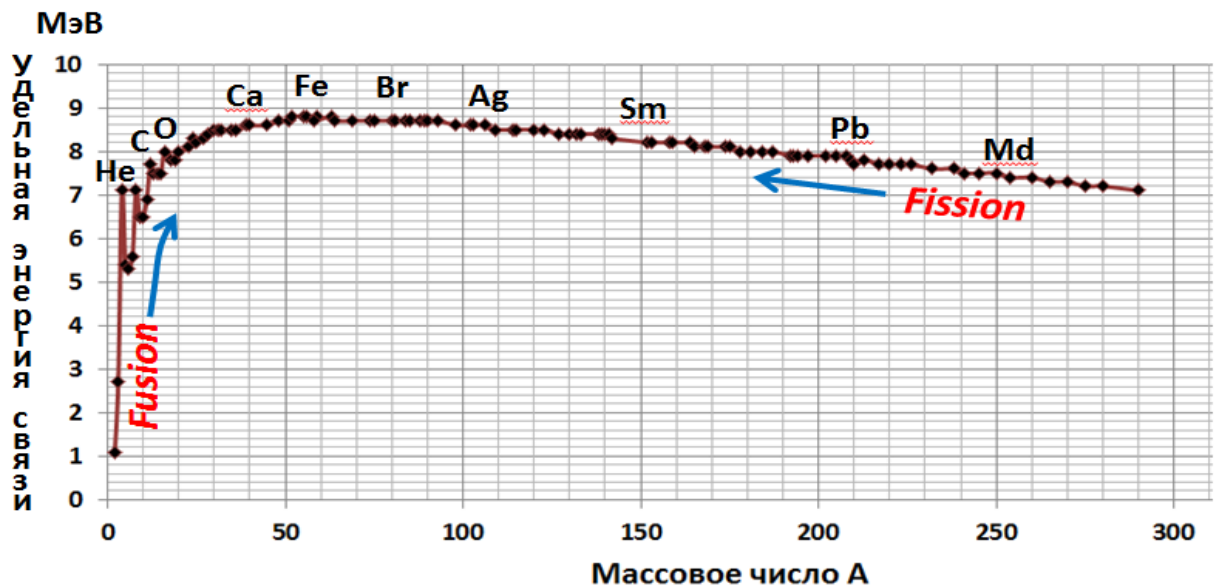
Здесь в последнем слагаемом (энергия спаривания)

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{для чётно - чётного ядра,} \\ 0 & \text{для нечётного ядра,} \\ -1 & \text{для нечётно - нечётного ядра.} \end{cases}$$

Удельная энергия связи ядра (средняя энергия связи на один нуклон):

$$\varepsilon = \frac{W(A, Z)}{A}.$$

Её график:



Стрелками показаны способы извлечения ядерной энергии: *Fusion* - синтез лёгких ядер, *Fission* - деление тяжёлых ядер.

1. Оценить энергию, выделяющуюся при делении 100 кг урана. На какую высоту можно поднять куб воды с длиной ребра 1 км с помощью выделившейся энергии?

Решение:

A – массовое число,

N_A – число Авогадро ($6 \cdot 10^{23}$),

m – масса урана (100 кг),

N_U – число ядер урана,

M – масса водяного куба,

h – высота подъёма водяного куба,

g – ускорение свободного падения ($\approx 10^3$ см/сек²),

Q_1 – энергия, выделяющаяся при делении одного ядра урана,

$\Delta\varepsilon$ – увеличение удельной энергии связи при делении.

Высота подъёма h водяного куба массы M находится из соотношения

$$E(\text{взрыва}) = Mgh = Q_1 \cdot N_U = \Delta\varepsilon \cdot m \cdot N_A.$$

Здесь использовано то, что $Q_1 = \Delta\varepsilon \cdot A$, а $N_U = \frac{mN_A}{A}$.

Из кривой удельной энергии связи следует, что $\Delta\varepsilon \approx (8,5 - 7,5)\text{МэВ} = 1 \text{ МэВ}$. Поэтому

$$\begin{aligned} E(\text{взрыва}) &= \Delta\varepsilon \cdot m \cdot N_A = 1 \text{ МэВ} \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{28} \text{ МэВ} = \\ &= 6 \cdot 10^{28} \text{ МэВ} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/МэВ} \approx 10^{23} \text{ эрг} = 10^{16} \text{ Дж} = 10^{10} \text{ МДж}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h = \frac{E(\text{взрыва})}{Mg} = \frac{10^{23} \text{ эрг}}{(10^5 \text{ см})^3 \cdot 1 \text{ г/см}^3 \cdot 10^3 \text{ см/сек}^2} = \frac{10^{23}}{10^{18}} \text{ см} = 1 \text{ км}.$$

1 килотонна (кт) тринитротоллуола $\approx 4,2 \cdot 10^{12}$ Дж. Поэтому

$$E(\text{взрыва}) = \frac{10^{16} \text{ Дж}}{4,2 \cdot 10^{12} \text{ Дж/кт}} \approx 2,4 \text{ мегатонны тнт} = 2,4 \text{ Мт тнт}.$$

Это примерно в 100 раз больше бомб Хиросимы и Нагасаки.

2. Рассчитать энергию деления 1 кг плутония-239 (${}_{94}^{239}\text{Pu}$) – бомба Нагасаки.

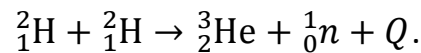
Решение:

Эта энергия должна быть примерно в 100 раз меньше энергии деления 100 кг урана, т.е. 10^{21} эрг = 10^{14} Дж ≈ 24 кт тнт.

3. Определить энергию, выделяющуюся при превращении всего дейтерия, содержащегося в $m = 100$ кг тяжёлой воды, в гелий. На какую высоту можно поднять куб воды с длиной ребра $h = 1$ км с помощью выделившейся энергии?

Решение:

Тяжёлая вода это D_2O , где $D \equiv {}^2_1H$. Синтез гелия из дейтерия идёт за счёт реакции



Найдём выделяющуюся при этом энергию Q . Напомним определение энергии Q реакции $A + B \rightarrow C + D$ (или распада $A \rightarrow B + C$):

$$Q = (M_A + M_B)c^2 - (M_C + M_D)c^2 = (W_C + W_D) - (W_A + W_B),$$

где последнее равенство справедливо при сохранении числа нуклонов каждого типа, что, как правило, имеет место в ядерных реакциях.

Получаем для данной задачи энергию одного акта синтеза:

$$\begin{aligned} Q &= 2M({}^2_1H)c^2 - M({}^3_2He)c^2 - m_n c^2 = W({}^3_2He) - 2W({}^2_1H) = \\ &= (7,72 - 2 \cdot 2,225) \text{МэВ} = 3,27 \text{МэВ}. \end{aligned}$$

Имеем

$$E(\text{синтеза}) = (\text{энергия на 1 акт синтеза}) \cdot (\text{число актов синтеза}).$$

При этом, так как два ядра дейтерия обеспечивают один акт синтеза, то

$$(\text{число актов синтеза}) = (\text{числу молекул } D_2O) = \frac{mN_A}{A_{D_2O}}.$$

Поэтому

$$E(\text{синтеза}) = Q \cdot \frac{mN_A}{A_{D_2O}} = 3,27 \text{МэВ} \frac{10^5 \text{г} \cdot 6 \cdot 10^{23}}{20 \text{г}} \approx 10^{28} \text{МэВ}.$$

Это в 6 раз меньше, чем при делении 100 кг урана (задача 1).

Следовательно, и высота подъёма воды будет в 6 раз меньше, т.е.

$$h_{\text{синтеза}} = \frac{1}{6} h_{\text{деления}} = \frac{1}{6} \cdot 1 \text{км} \approx 170 \text{ м}.$$

Если происходит слияние 100 кг чистого дейтерия, то выделяющаяся энергия в 5 раз больше (весовая доля дейтерия в тяжёлой воде $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$) и высота подъёма водяного куба объёмом 1 км^3 будет в 5 раз больше, т.е. около 830 м, и близка к той (1 км), которая будет при делении 100 кг урана.

4. До какой температуры нужно нагреть тяжёлую воду, чтобы стало возможным слияние ядер дейтерия?

Решение: Ядра дейтерия должны сблизиться до расстояния, равного примерно среднему расстоянию между нуклонами в ядре (оно соответствует радиусу действия межнуклонных сил притяжения – ядерных сил). Это расстояние $r_{NN} \approx 2$ Фм. При этом кинетическая энергия ядер дейтерия $E_{\text{кин}}(^2\text{H})$ должна равняться потенциальной энергии их кулоновского отталкивания на расстоянии $r_{NN} \approx 2$ Фм.

Имеем

$$E_{\text{кин}}(^2\text{H}) = \frac{e^2}{r_{NN}} = \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{\hbar c}{r_{NN}} = \frac{1}{137} \cdot \frac{197 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}}{2 \text{ Фм}} \approx 0,7 \text{ МэВ}.$$

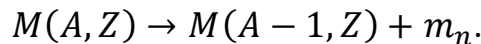
Далее используем известное термодинамическое соотношение $E_{\text{кин}} = \frac{3}{2} kT$, где постоянная Больцмана $k \approx 8,6 \cdot 10^{-11}$ МэВ/Кельвин, а T – абсолютная температура дейтерия. Получаем

$$T = \frac{2}{3k} E_{\text{кин}}(^2\text{H}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{0,7 \text{ МэВ}}{8,6 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ/Кельвин}} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ Кельвинов}.$$

За счёт высокоэнергичного хвоста максвелловского распределения по скоростям (энергиям) и квантовомеханического туннелирования ядер дейтерия (прохождения сквозь потенциальный кулоновский барьер) реальная температура начала синтеза дейтерия снижается на 3-4 порядка.

Энергия отделения от ядра нуклонов и более сложных частиц

Энергия отделения нуклона (α -частицы) это минимальная энергия необходимая для вырывания нуклона (α -частицы) из ядра. Например, при отделении нейтрона происходит следующая модификация массы ядра:



Энергия, необходимая, для такой модификации, и есть энергия отделения нейтрона B_n . Очевидно, она даётся следующим равенством

$$\begin{aligned} B_n &= M(A - 1, Z)c^2 + m_n c^2 - M(A, Z)c^2 = \\ &= W(A, Z) - W(A - 1, Z) - W(1, 0) = W(A, Z) - W(A - 1, Z). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что собственная энергия связи нейтрона $W(1, 0) = 0$ (нейтрон свободен, ни с чем не связан). Аналогично для энергии отделения протона имеем

$$\begin{aligned} B_p &= M(A - 1, Z - 1)c^2 + m_p c^2 - M(A, Z)c^2 = \\ &= W(A, Z) - W(A - 1, Z - 1) - W(1, 1) = W(A, Z) - W(A - 1, Z - 1). \end{aligned}$$

Для энергии B_x отделения от ядра системы x из a связанных нуклонов, из которых z протонов, очевидно, имеет место равенство

$$B_x = W(A, Z) - W(A - a, Z - z) - W(a, z),$$

где $W(a, z)$ — энергия связи системы x .

5. По данным таблицы энергий связи ядер определить энергии отделения нейтрона B_n , протона B_p и α -частицы B_α от ядра $^{12}_6\text{C}$. Энергии связи ядер $^{12}_6\text{C}$, $^{11}_6\text{C}$, $^{11}_5\text{B}$, ^8_4Be и ^4_2He (α -частица) соответственно 92.2, 73.4, 76.2, 56.5 и 28.3 МэВ.

Решение:

$$B_n(^{12}_6\text{C}) = W(^{12}_6\text{C}) - W(^{11}_6\text{C}) = (92.2 - 73.4)\text{МэВ} = 18.8\text{ МэВ},$$

$$B_p(^{12}_6\text{C}) = W(^{12}_6\text{C}) - W(^{11}_5\text{B}) = (92.2 - 76.2)\text{МэВ} = 16.0\text{ МэВ},$$

$$B_\alpha(^{12}_6\text{C}) = W(^{12}_6\text{C}) - W(^8_4\text{Be}) - W(^4_2\text{He}) = \\ = (92.2 - 56.5 - 28.3)\text{МэВ} = 7.4\text{ МэВ}.$$

Определение зеркальных ядер:

Два ядра ($A_1 = Z_1 + N_1$) и ($A_2 = Z_2 + N_2$) называются зеркальными, если $A_1 = A_2$, $Z_1 = N_2$ и $Z_2 = N_1$.

6. Считая, что разность энергий связи зеркальных ядер определяется только различием энергий кулоновского отталкивания протонов в этих ядрах (т.е. разностью кулоновских энергий), найти радиусы зеркальных ядер с $A = 7$ (^7_3Li и ^7_4Be). Энергии связи этих ядер соответственно 39,3 и 37,6 МэВ.

Решение: Два зеркальных ядра в формуле Вайцеккера отличаются только кулоновской энергией, которую через радиус ядра можно записать в виде энергии заряженного шара из Z однородно распределённых элементарных зарядов

$$E_{\text{кул}} = +\frac{3}{5} \cdot \frac{Z(Z-1)}{R} e^2.$$

При этом энергия связи $W(A, Z)$ зеркального ядра с меньшим зарядом (Z) будет больше энергии связи $W(A, Z + 1)$ зеркального ядра с большим зарядом ($Z + 1$). Для разности ΔW этих энергий имеем

$$\Delta W = W(A, Z) - W(A, Z + 1) = E_{\text{кул}}(A, Z + 1) - E_{\text{кул}}(A, Z) = \\ = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} [(Z + 1)Z - Z(Z - 1)] = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{R} Z.$$

Откуда

$$R = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{\Delta W} Z.$$

Для $Z = 3$ (зеркальные ядра с $A = 7$) получаем

$$R = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{\Delta W} Z = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{\hbar c}{\Delta W} Z = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{197 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}}{(39,3 - 37,6) \text{ МэВ}} \cdot 3 \approx 3 \text{ Фм}.$$

7. Нарисовать, пользуясь формулой Вайцзеккера, графики зависимости от A объёмной, поверхностной и кулоновской энергий и энергии симметрии для стабильных ядер. Оценить вклад (долю) различных видов энергии в разных областях A .
8. Получить формулу $Z_{\text{равн}} = f(A)$ для наиболее стабильных ядер (решение можно увидеть на стр. 241 задачника Гончаровой, Ишханова, Капитонова «Частицы и атомные ядра. Задачи с решениями и комментариями»): задача 2.6.19.

ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ЯДЕР				ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ЯДЕР			
${}^2_1\text{H}$	2,225 МэВ	${}^{16}_8\text{O}$	127,6	${}^2_1\text{H}$	2,225 МэВ	${}^{16}_8\text{O}$	127,6
${}^3_2\text{He}$	7,72	${}^{23}_{11}\text{Na}$	186,6	${}^3_2\text{He}$	7,72	${}^{23}_{11}\text{Na}$	186,6
${}^4_2\text{He}$	28,3	${}^{23}_{12}\text{Mg}$	181,7	${}^4_2\text{He}$	28,3	${}^{23}_{12}\text{Mg}$	181,7
${}^7_3\text{Li}$	39,3	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	342,0	${}^7_3\text{Li}$	39,3	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	342,0
${}^7_4\text{Be}$	37,6	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	492,2	${}^7_4\text{Be}$	37,6	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	492,2
${}^8_4\text{Be}$	56,5	${}^{114}_{48}\text{Cd}$	972,6	${}^8_4\text{Be}$	56,5	${}^{114}_{48}\text{Cd}$	972,6
${}^{11}_5\text{B}$	76,2	${}^{114}_{49}\text{In}$	970,4	${}^{11}_5\text{B}$	76,2	${}^{114}_{49}\text{In}$	970,4
${}^{11}_6\text{C}$	73,4	${}^{114}_{50}\text{Sn}$	971,6	${}^{11}_6\text{C}$	73,4	${}^{114}_{50}\text{Sn}$	971,6
${}^{12}_6\text{C}$	92,2	${}^{235}_{92}\text{U}$	1783,3	${}^{12}_6\text{C}$	92,2	${}^{235}_{92}\text{U}$	1783,3