

СЕМИНАР 10

Распады атомных ядер: альфа-, бета- и гамма-распады.

Альфа-распад

Энергия α -распада

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - m_\alpha]c^2 = \\ = W(A - 4, Z - 2) + W_\alpha - W(A, Z).$$

Получим выражение для кинетической энергии α -частицы и конечного ядра при распаде покоящегося ядра: $A \rightarrow (A - 4) + \alpha$. Запишем законы сохранения энергии и импульса при данном распаде:

$$\begin{cases} M(A)c^2 = M(A - 4)c^2 + m_\alpha c^2 + T(A - 4) + T_\alpha, \\ p_\alpha = p(A - 4). \end{cases}$$

Здесь $T(A - 4)$ и T_α – кинетические энергии конечного ядра и α -частицы. В нерелятивистском случае $p^2 = 2mT$, что даёт

$$\begin{cases} Q_\alpha = T(A - 4) + T_\alpha, \\ \frac{T_\alpha}{T(A - 4)} = \frac{M(A - 4)}{m_\alpha}. \end{cases}$$

Откуда

$$T_\alpha = Q_\alpha \frac{M(A - 4)}{M(A - 4) + m_\alpha}, \\ T(A - 4) = Q_\alpha \frac{m_\alpha}{M(A - 4) + m_\alpha}.$$

Если пренебречь при расчёте масс ядер их энергией связи и разностью масс протона и нейтрона ($\approx 0,1\%$) и писать вместо масс начального и конечного ядер и α -частицы их массовые числа A , $A - 4$ и 4 , то получим совсем простые выражения для T_α и $T(A - 4)$, справедливые, по крайней мере, с точностью до 1%. Например, для ядра $^{127}_{53}\text{I}$ (йод) сумма масс входящих в его состав нуклонов ≈ 119 ГэВ, а энергия связи 1,073 ГэВ.

Итак, полагая $M(A) = A$, $M(A - 4) = A - 4$ и $m_\alpha = 4$, можем записать

$$\begin{cases} T_\alpha \approx Q_\alpha \frac{A - 4}{A}, \\ T(A - 4) \approx Q_\alpha \frac{4}{A}. \end{cases}$$

1. Определить кинетические энергии α -частицы и конечного ядра при α -распаде ядра $^{212}_{83}\text{Bi}$ (энергии связи ядер $^{212}_{83}\text{Bi}$, $^{208}_{81}\text{Tl}$ и α -частицы соответственно 1654,37; 1632,28 и 28,30 МэВ).

Решение: Схема распада ${}^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{208}_{81}\text{Tl} + {}^4_2\text{He}$.

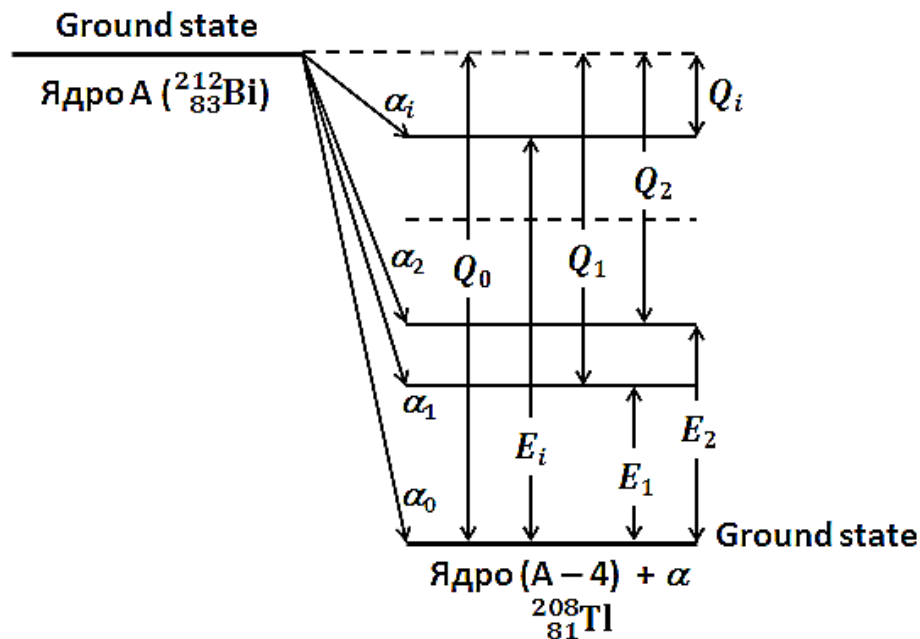
$$Q_\alpha = W({}^{208}_{81}\text{Tl}) + W_\alpha - W({}^{212}_{83}\text{Bi}) = (1632,28 + 28,30 - 1654,37)\text{МэВ} = 6,21\text{ МэВ}.$$

$$T_\alpha \approx Q_\alpha \frac{A-4}{A} = 6,21 \frac{212-4}{212} \text{МэВ} = 6,09 \text{МэВ}.$$

$$T({}^{208}_{81}\text{Tl}) \approx Q_\alpha \frac{4}{A} = 6,21 \frac{4}{212} \text{МэВ} = 0,12 \text{МэВ}.$$

2. В α -спектре ядра ${}^{212}_{83}\text{Bi}$, распадающегося из основного состояния, помимо основной группы α -частиц ($T_{\alpha_0} = 6,09$ МэВ) обнаружены две малоинтенсивные группы α -частиц - с энергиями 5,60 и 5,48 МэВ. Определить энергии уровней конечного ядра.

Решение: Структура спектра α -частиц обусловлена распадами на возбужденные состояния ядра ${}^{208}_{81}\text{Tl}$:



Так как $T_i \approx Q_i \frac{A-4}{A}$, то энергия распада на i -е возбужденное состояние

$$Q_i \approx T_i \frac{A}{A-4}.$$

Энергия i -го состояния (отсчитывается от основного)

$$E_i \approx Q_0 - Q_i.$$

Имеем

$$Q_{\alpha_i} \approx T_{\alpha_i} \frac{A}{A-4},$$

$$Q_{\alpha_1} \approx T_{\alpha_1} \frac{A}{A-4} = 5,60 \frac{212}{208} \text{ МэВ} = 5,71 \text{ МэВ},$$

$$Q_{\alpha_2} \approx T_{\alpha_2} \frac{A}{A-4} = 5,48 \frac{212}{208} \text{ МэВ} = 5,59 \text{ МэВ}.$$

Из предыдущей задачи известно, что $Q_{\alpha_0} = 6,21 \text{ МэВ}$. Поэтому

$$E_1 = Q_{\alpha_0} - Q_{\alpha_1} = (6,21 - 5,71) \text{ МэВ} = 0,50 \text{ МэВ}.$$

$$E_2 = Q_{\alpha_0} - Q_{\alpha_2} = (6,21 - 5,59) \text{ МэВ} = 0,62 \text{ МэВ}.$$

Бета-распад

Энергетические условия бета-распада:

$$\beta^-(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e), \quad \text{условие распада } M(A, Z) > M(A, Z + 1) + m_e,$$

$$\beta^+(p \rightarrow n + e^+ + \nu_e), \quad \text{условие распада } M(A, Z) > M(A, Z - 1) + m_e,$$

$$e^- - \text{захват } (p + e^- \rightarrow n + \nu_e), \text{ условие распада } M(A, Z) + m_e > M(A, Z - 1).$$

Выразим энергию β^- -распада через энергию связи ядер:

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= [M(A, Z) - M(A, Z + 1) - m_e]c^2 = W(A, Z + 1) - W(A, Z) + \\ &+ (m_n - m_p)c^2 - m_e c^2 = W(A, Z + 1) - W(A, Z) + 1,29 \text{ МэВ} - 0,51 \text{ МэВ} = \\ &= W(A, Z + 1) - W(A, Z) + 0,78 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} &= W(A, Z - 1) - W(A, Z) + \\ &+ (m_p - m_n)c^2 - m_e c^2 = W(A, Z - 1) - W(A, Z) - 1,29 \text{ МэВ} - 0,51 \text{ МэВ} = \\ &= W(A, Z - 1) - W(A, Z) - 1,80 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

$$Q_e = Q_{\beta^+} + 2m_e c^2 = W(A, Z - 1) - W(A, Z) - 0,78 \text{ МэВ}.$$

Если возможен β^+ -распад, то тем более возможен и e^- -захват.

- Используя значения энергий связи ядер $^{114}_{48}\text{Cd}$ ($W = 972,63 \text{ МэВ}$), $^{114}_{49}\text{In}$ ($W = 970,42 \text{ МэВ}$) и $^{114}_{50}\text{Sn}$ ($W = 971,61 \text{ МэВ}$), определить возможные виды бета-распада ядра $^{114}_{49}\text{In}$. Для возможных распадов найти энергии распадов.
- Для распада $^{10}_4\text{Be} \rightarrow ^{10}_5\text{B} + e^- + \bar{\nu}_e$ из покоящегося состояния определить значение полного момента количества движения $J_{e\nu}$ пары испущенных лептонов и наиболее вероятное значение $L_{e\nu}$ орбитального момента этой пары. Учсть, что $J(^{10}_4\text{Be}) = 0$, а $J(^{10}_5\text{B}) = 3$.

Решение: Запишем для рассматриваемого распада закон сохранения момента количества движения:

$$\vec{J}(^{10}_4\text{Be}) = \vec{J}(^{10}_5\text{B}) + \vec{J}_{e\nu},$$

или

$$\vec{0} = \vec{3} + \vec{J}_{ev}, \text{ т.е. } J_{ev} = 3.$$

Кроме того

$$\vec{J}_{ev} = \vec{s}_e + \vec{s}_\nu + \vec{L}_{ev} = \frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} + \vec{L}_{ev}.$$

С учётом того, что $J_{ev} = 3$, имеем $\vec{3} = \frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{1}}{2} + \vec{L}_{ev}$ и $L_{ev} = 2, 3, 4$.

Наиболее вероятное значение L_{ev} отвечает наименьшему из возможных значений, т. е. $L_{ev} = 2$.

5. Определить энергию отдачи ядра лития ${}^7_3\text{Li}$, образующегося в результате e -захвата в ядре ${}^7_4\text{Be}$. Энергии связи ядер ${}^7_4\text{Be}$ и ${}^7_3\text{Li}$ соответственно 37,6 и 39,3 МэВ.

Решение: Схема процесса ${}^7_4\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu_e$. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид:

$$\begin{cases} Q_e = T_{\text{Li}} + T_\nu, \\ p_{\text{Li}} = p_\nu. \end{cases}$$

$$Q_e = W_{\text{Li}} - W_{\text{Be}} - 0,78 \text{ МэВ} = (39,3 - 37,6 - 0,78) \text{ МэВ} \approx 0,9 \text{ МэВ}.$$

$$p_{\text{Li}}^2 = 2M_{\text{Li}} \cdot T_{\text{Li}}; p_{\text{Li}} = p_\nu = \frac{T_\nu}{c} \text{ и } T_{\text{Li}} = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2M_{\text{Li}}} = \frac{T_\nu^2}{2M_{\text{Li}}c^2}.$$

При этом $Q_e = T_\nu + T_{\text{Li}} = T_\nu + \frac{T_\nu^2}{2M_{\text{Li}}c^2} = T_\nu \left(1 + \frac{T_\nu}{2M_{\text{Li}}c^2} \right) \approx T_\nu$, так как $\frac{T_\nu}{2M_{\text{Li}}c^2} \ll 1$. С учётом этого

$$T_{\text{Li}} = \frac{T_\nu^2}{2M_{\text{Li}}c^2} \approx \frac{Q_e^2}{2M_{\text{Li}}c^2}.$$

Расчёт даёт

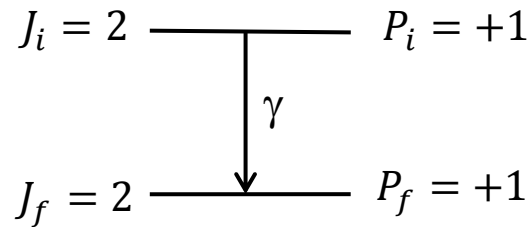
$$\begin{aligned} T_{\text{Li}} &\approx \frac{Q_e^2}{2M_{\text{Li}}c^2} = \frac{Q_e^2}{2[3m_p c^2 + 4m_n c^2 - W_{\text{Li}}]} = \\ &= \frac{(0,9 \text{ МэВ})^2}{2(3 \cdot 938,3 + 4 \cdot 939,6 - 39,3) \text{ МэВ}} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ МэВ} = 60 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

6. Показать, что соотношение неопределённостей запрещает электрону при бета-распаде долго оставаться внутри ядра (решение можно увидеть в задачнике Гончаровой, Ишханова, Капитонова «Частицы и атомные ядра. Задачи с решениями и комментариями», с. 133).

Гамма-распад

7. Фотоны какого типа и мультипольности могут излучаться при γ -переходе между уровнями, имеющими спин-чётность 2^+ ?

Решение:



Из баланса угловых моментов имеем $|J_i - J_f| \leq J_\gamma \leq |J_i + J_f|$ или $|2 - 2| \leq J_\gamma \leq |2 + 2|$, что даёт $J_\gamma = 0, 1, 2, 3, 4$. Значение $J_\gamma = 0$ исключаем, так как таких фотонов нет. Далее для нахождения чётности фотона используем сохранение чётности в электромагнитных взаимодействиях: $P_\gamma = P_i \cdot P_f$, что даёт $P_\gamma = (+1)(+1) = +1$. Для определения типа фотона (электрический или магнитный) используем следующие правила для чётностей фотонов различного типа:

$$\begin{aligned}
 P(EJ) &= (-1)^J, \\
 P(MJ) &= (-1)^{J+1}.
 \end{aligned}$$

С учётом этого окончательно получаем, что электромагнитный переход $2^+ \rightarrow 2^+$ обеспечивается фотонами $M1, E2, M3, E4$.

8. На ядро золота ($^{197}_{79}\text{Au}$) падает фотон с энергией 2 МэВ. Каково соотношение между приведённой длиной волны фотона $\tilde{\lambda}$ и радиусом ядра?

Решение:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar c}{E_\gamma} \approx \frac{200 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}}{2 \text{ МэВ}} = 100 \text{ Фм}.$$

$$R(^{197}_{79}\text{Au}) = (1,0 \div 1,1) A^{1/3} \text{ Фм} = 6,1 \text{ Фм}.$$

Поэтому $\frac{\tilde{\lambda}}{R} \approx 16,4$ или $kR \approx \frac{1}{16,4}$, так как $k = \frac{1}{\lambda}$.

Вероятности гамма-переходов в длинноволновом приближении

В длинноволновом приближении ($\lambda \gg R$, $kR \ll 1$) выполняются следующие соотношения между вероятностями перехода с поглощением (испусканием) фотонов разного типа и мультипольности:

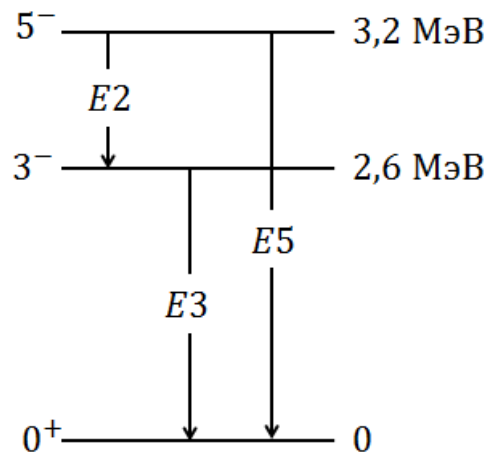
$$w(EJ) \sim \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2(J-1)} = (kR)^{2(J-1)},$$

$$w(MJ) \sim \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2J} = (kR)^{2J}.$$

$$\text{или } \frac{w(MJ)}{w(EJ)} \approx (kR)^2 \ll 1,$$

$$\frac{w(MJ+1)}{w(MJ)} \approx \frac{w(EJ+1)}{w(EJ)} \approx (kR)^2 \ll 1.$$

9. По схеме низших состояний ядра $^{208}_{82}\text{Pb}$



определить наиболее вероятный путь γ -распада второго возбужденного состояния (5^-).

Решение: Используя правила отбора по моменту и чётности, получаем следующие типы и мультипольности всех возможных переходов:

$$5^- \rightarrow 0^+ \text{ переход } E5,$$

$$3^- \rightarrow 0^+ \text{ переход } E3,$$

$$5^- \rightarrow 3^- \text{ переходы } E2, M3, E4, M5, E6, M7, E8.$$

Поскольку имеет место длинноволновое приближение, то переход $5^- \rightarrow 3^-$ реализуется почти исключительно $E2$ -фотонами.

Для определения способа γ -распада из состояния 5^- сравним вероятности двух возможных путей достижения основного состояния:

$$5^- \rightarrow 0^+ \text{ или } 5^- \rightarrow 3^- \rightarrow 0^+.$$

Имеем

$$1) \frac{w(5^- \rightarrow 3^-)}{w(5^- \rightarrow 0^+)} = \frac{w(E2)}{w(E5)} \approx \frac{(R \cdot E_\gamma / \hbar c)_{5^- \rightarrow 3^-}^{2(J-1)}}{(R \cdot E_\gamma / \hbar c)_{5^- \rightarrow 0^+}^{2(J-1)}} \approx$$

$$\approx \frac{(6,1 \Phi_M \cdot 0,6 \text{ МэВ} / 200 \text{ МэВ} \cdot \Phi_M)^{2(2-1)}}{(6,1 \Phi_M \cdot 3,2 \text{ МэВ} / 200 \text{ МэВ} \cdot \Phi_M)^{2(5-1)}} \approx 2,5 \cdot 10^4,$$

$$2) \frac{w(3^- \rightarrow 0^+)}{w(5^- \rightarrow 0^+)} = \frac{w(E3)}{w(E5)} \approx \frac{(6,1 \Phi_M \cdot 2,6 \text{ МэВ} / 200 \text{ МэВ} \cdot \Phi_M)^{2(3-1)}}{(6,1 \Phi_M \cdot 3,2 \text{ МэВ} / 200 \text{ МэВ} \cdot \Phi_M)^{2(5-1)}} \approx 5,2 \cdot 10^3,$$

$$3) \frac{w(5^- \rightarrow 3^-)}{w(3^- \rightarrow 0^+)} = \frac{w(E2)}{w(E3)} \approx \frac{(6,1 \Phi_M \cdot 0,6 \text{ МэВ} / 200 \text{ МэВ} \cdot \Phi_M)^{2(2-1)}}{(6,1 \Phi_M \cdot 2,6 \text{ МэВ} / 200 \text{ МэВ} \cdot \Phi_M)^{2(3-1)}} \approx 8,7.$$

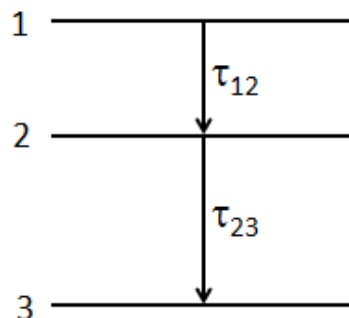
Из полученных численных отношений следует, что каскадный распад $5^- \rightarrow 3^- \rightarrow 0^+$ из верхнего состояния существенно вероятнее прямого $5^- \rightarrow 0^+$.

При решении подобных задач можно исходить из того, что подавление вероятности γ -перехода за счёт мультипольности во много раз больше, чем за счёт энергии γ -перехода.

Примечание:

Расчёт времени каскадного гамма-перехода.

Рассмотрим схему уровней



и получим выражение для вероятности $w_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$ и времени $\tau_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$ каскадного гамма-перехода через вероятности w_{12} и w_{23} переходов $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$:

$$\tau_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = \tau_{12} + \tau_{23} = \frac{1}{w_{12}} + \frac{1}{w_{23}} = \frac{w_{12} + w_{23}}{w_{12} \cdot w_{23}}.$$

Соответственно вероятность каскадного перехода

$$w_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = \frac{1}{\tau_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}} = \frac{w_{12} \cdot w_{23}}{w_{12} + w_{23}}.$$

Если, например, $w_{12} \gg w_{23}$, то для вероятности и времени жизни такого каскада получаем

$$w_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} \approx w_{23} \text{ и } \tau_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} \approx \frac{1}{w_{23}}.$$