СЕМИНАР 11

Ядерные реакции. Деление атомных ядер

Ядерные реакции

Порог реакции $a + A \to B + b$ в лабораторной системе координат (ЛСК) даётся формулой

$$\left(E_{a,b}\right)_{\text{порог}} = |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_A} + \frac{|Q|}{2m_A c^2}\right),$$

где $Q = (W_B + W_b) - (W_A + W_a)$ – энергия реакции, выраженная через энергии связи участников реакции, и ядро-мишень A покоится.

1. Определить пороги следующих фотоядерных реакций в лабораторной системе координат (ЛСК):

$$\gamma + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{11}\mathrm{C} + n,$$
$$\gamma + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{11}\mathrm{B} + p.$$

Энергии связи ядер ${}^{12}\mathrm{C}$, ${}^{11}\mathrm{C}$ и ${}^{11}\mathrm{B}$ соответственно 92.2, 73.4 и 76.2 МэВ.

Решение: Определим энергии этих реакций, используя энергии связи ядер:

$$Q(\gamma, n) = W({}^{11}\mathrm{C}) - W({}^{12}\mathrm{C}) = (73.4 - 92.2)\text{МэВ} = -18.8\ \text{МэВ}.$$
$$Q(\gamma, p) = W({}^{11}\mathrm{B}) - W({}^{12}\mathrm{C}) = (76.2 - 92.2)\text{МэВ} = -16.0\ \text{МэВ}.$$

Находим пороги с помощью формулы $E_{\text{порог}} = |Q| \left(1 + \frac{m_\gamma}{m_C} + \frac{|Q|}{2m_C c^2}\right)$:

$$\left(E_{\gamma,n}\right)_{\text{порог}} \approx 18.8 \left(1 + \frac{0}{m_C} + \frac{18.8}{2 \cdot 12 \cdot 940}\right) \text{МэВ} \approx 18.8\ \text{МэВ},$$

$$\left(E_{\gamma,p}\right)_{\text{порог}} \approx 16.0 \left(1 + \frac{0}{m_C} + \frac{16.0}{2 \cdot 12 \cdot 940}\right) \text{МэВ} \approx 16.0\ \text{МэВ}$$

Здесь для энергии покоя ядра ${}^{12}\mathrm{C}$ использовано приближение $m_C c^2 \approx 12 \cdot m_{\text{нуклон}} c^2$ и то, что последнее слагаемое в скобках имеет величину $< 1{,}7 \cdot 10^{-3}$.

2. Найти порог реакции $\alpha + \alpha \to {}^{7}\mathrm{Li} + p$ в ЛСК (одна α-частица покоится). Энергии связи α-частицы и ядра ${}^{7}\mathrm{Li}$ соответственно 28,3 и 39,3 МэВ.

Решение: Находим энергию реакции:

$$Q = W({}^{7}\mathrm{Li}) - 2W(\alpha) = (39{,}3 - 2 \cdot 28{,}3)\text{МэВ} = -17.3\ \text{МэВ}.$$

Определяем порог реакции:

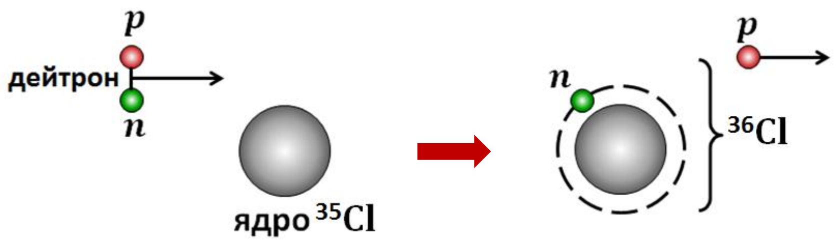
$$E_{\text{порог}} = |Q|\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\alpha} + \frac{|Q|}{2m_\alpha c^2}\right) \approx |Q|\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\alpha}\right) =$$

$$= 17{,}3 \cdot 2 \text{ МэВ} = 34{,}6 \text{ МэВ}.$$

Здесь учтено то, что третьим слагаемым в скобках можно пренебречь в силу его малости ($\approx 2\cdot10^{-3}$).

3. Для реакции $^{35}\mathrm{Cl}(d,p)^{36}\mathrm{Cl}$, где d – дейтрон (ядро дейтерия $^2_1\mathrm{H}$) найти в ЛСК возможные значения орбитального момента захваченного ядром $^{35}\mathrm{Cl}$ нейтрона, если это ядро находится в основном состоянии и имеет спин-чётность $3/2^+$, а конечное ядро $^{36}\mathrm{Cl}$ также образуется в основном состоянии (его спин-чётность в этом состоянии 2^+).

<u>Решение:</u> Реакция $d + {}^{35}_{17}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{36}_{17}\mathrm{Cl} + p$ сводится к передаче нейтрона от дейтрона ядру $^{35}_{17}\mathrm{Cl}$:



Таким образом, реакция сводится к процессу (считаем далее, что энергия нейтрона невелика и отдачей $^{36}\mathrm{Cl}$ можно пренебречь)

$$n + {}^{35}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{36}\mathrm{Cl}.$$

Используем для этого процесса закон сохранения углового момента:

$$\vec{J}_n + \vec{J}(^{35}\mathrm{Cl}) + \vec{L}_n = \vec{J}(^{36}\mathrm{Cl}),$$

где спины участников $J_n = 1/2$, $J(^{35}\mathrm{Cl}) = 3/2$, $J(^{36}\mathrm{Cl}) = 2$, а $\vec{L}_n$ – орбитальный момент нейтрона. Баланс угловых моментов приобретает вид

$$\frac{\vec{1}}{2} + \frac{\vec{3}}{2} + \vec{L}_n = \vec{2}.$$

Отсюда $L_n = 0, 1, 2, 3, 4.$

Для уточнения значения L_n используем для процесса $n + {}^{35}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{36}\mathrm{Cl}$ закон сохранения чётности

$$\pi_n \cdot \pi(^{35}\mathrm{Cl}) \cdot (-1)^{L_n} = \pi(^{36}\mathrm{Cl}).$$

Учитывая, что $\pi_n = +1$, $\pi(^{35}\mathrm{Cl}) = +1$, $\pi(^{36}\mathrm{Cl}) = +1$,

получаем: $(+1) \cdot (+1) \cdot (-1)^{L_n} = (+1)$. Откуда остаются лишь следующие значения орбитального момента нейтрона: $L_n = 0, 2, 4.$

4. При каких орбитальных моментах протона возможна протекающая в ЛСК реакция $p + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \to \alpha + \alpha$, в которой -частицы имеют нулевой суммарный орбитальный момент, а ядро ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$ находится в основном состоянии $3/2^{-}$?

Решение: Используем законы сохранения углового момента и чётности (реакция идёт за счёт сильного взаимодействия). Баланс угловых моментов:

$$\vec{J}_p + \vec{L}_p + \vec{J}({}^{7}_{3}\mathrm{Li}) = \vec{J}_\alpha + \vec{J}_\alpha + \vec{L}_{\alpha\alpha},$$

где $\vec{L}_{\alpha\alpha}$ – суммарный орбитальный момент -частиц. Итак,

$$\frac{\vec{1}}{2} + \vec{L}_p + \frac{\vec{3}}{2} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0},$$

т.е. $L_p = 1, 2$.

Сохранение чётности требует выполнения следующего равенства:

$$\pi_p \cdot \pi_{\mathrm{Li}} \cdot (-1)^{L_p} = \pi_\alpha \cdot \pi_\alpha \cdot (-1)^{L_{\alpha\alpha}}$$

или

$$(+1)(-1)(-1)^{L_p} = (+1)(+1)(-1)^0.$$

Откуда $L_p = 1$.

5. Определить возможные значения орбитального момента дейтрона в ЛСК в реакции $p + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \to {}^{15}_{8}\mathrm{O} + d$, если орбитальный момент протона равен 0. Учесть, что спин-чётности ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{15}_{8}\mathrm{O}$ в основном состоянии и дейтрона соответственно $0^{+}, 1/2^{-}$ и 1^{+}. Отдачей ядра ${}^{15}_{8}\mathrm{O}$ пренебречь.

Решение: Закон сохранения углового момента:

$$\vec{J}_p + \vec{L}_p + \vec{J}({}^{16}_{8}\mathrm{O}) = \vec{J}\left({}^{15}_{8}\mathrm{O}\right) + \vec{J}_d + \vec{L}_d.$$

Или

$$\frac{\vec{1}}{2} + \vec{0} + \vec{0} = \frac{\vec{1}}{2} + \vec{1} + \vec{L}_d.$$

Откуда $L_d = 0, 1, 2$.

Сохранение чётности даёт:

$$(+1)(+1)(+1) = (-1)(+1)(-1)^{L_d}.$$

Откуда $L_d = 1$.

6. Чему могут быть равны изоспины ядер ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ и ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$?

<u>Решение:</u> Ядра состоят из протонов и нейтронов, имеющих изоспин $i = 1/2$ и проекции изоспина $\left(i_p\right)_3 = +\,1/2$, $(i_n)_3 = -\,1/2$. Изоспин ядра I определяется векторной суммой изоспинов нуклонов входящих в состав ядра:

$$\vec{I} = \sum_{\alpha=1}^{A} \vec{\imath}_{\alpha}.$$

Максимальное значение I отвечает сонаправленности A векторов величиной $1/2$, т.е. $I_{max} = A/2$. Минимальная величина I не может быть меньше модуля проекции вектора $\vec{I}$ на одну из осей координат. В данном случае – это проекция на ось 3:

$$I_{min} = \sum_{\alpha=1}^{A} (i_{\alpha})_3 = Z\left(+\frac{1}{2}\right) + N\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{Z-N}{2}.$$

Итак,

$$\left|\frac{Z-N}{2}\right| \le I \le \frac{A}{2}.$$

Учитывая количества протонов и нейтронов в ядрах ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ $(Z = N = 6)$ и ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ $(Z = 13, N = 14)$, получаем $I({}^{12}_{6}\mathrm{C}) = 0 \div 6$ (т.е. целое число от 0 до 6), а $I({}^{27}_{13}\mathrm{Al}) = \frac{1}{2} \div \frac{27}{2}$ (т.е. полуцелое число от $\frac{1}{2}$ до $\frac{27}{2}$). Можно показать, что изоспин основного состояния ядра принимает минимально возможное значение, т.е.

$$I_{gs}({}^{12}_{6}\mathrm{C}) = 0,\ I_{gs}({}^{27}_{13}\mathrm{Al}) = 1/2.$$

7. Исходя из схемы протекающей в ЛСК реакции

$$p + {}^{19}_{9}\mathrm{F}(1/2^+) \to {}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*(1^+) \to {}^{16}_{8}\mathrm{O}^*(3^-, I = 0) + \alpha,$$

найти орбитальный момент захваченного протона и изоспин промежуточного состояния ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*(1^+)$.

<u>Решение:</u> Находим орбитальный момент захваченного протона. В пренебрежении отдачей ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$ имеем

$$\vec{J}_p + \vec{L}_p + \vec{J}_{g.s.}({}^{19}_{9}\mathrm{F}) = \vec{J}({}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*).$$

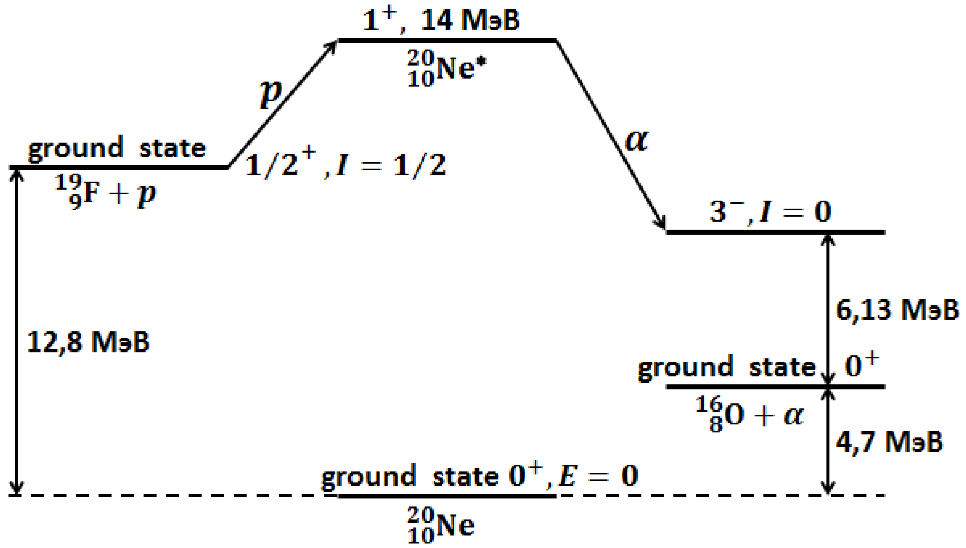
Или

$$\frac{\vec{1}}{2} + \vec{L}_p + \frac{\vec{1}}{2} = \vec{1} \quad \text{и} \quad L_p = 0, 1, 2.$$

Учитываем сохранение чётности:

$$(+1)(-1)^{L_p}(+1) = (+1) \ \text{ и остаются } \ L_p = 0, 2.$$

Диаграмма уровней в рассматриваемой реакции выглядит следующим образом:



Находим изоспин промежуточного состояния $^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*(1^+)$. Реакция идёт по сильному взаимодействию, т.е. с сохранением изоспина. Имеем

$$\vec{I}(^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*) = \vec{I}(^{16}_{8}\mathrm{O}^*) + \vec{I}_\alpha$$

Или

$$\vec{I}(^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*) = \vec{0} + \vec{0}.$$

Откуда

$$I(^{20}_{10}\mathrm{Ne}^*) = 0.$$

Деление атомных ядер

8. Какое количество ядер должно делиться в 1 сек для получения мощности 1 Вт? Какая масса урана-235 делится в 1 сек в ядерном реакторе мощностью 1000 МВт?

Решение: В одном делении освобождается энергия

$$200 \text{ МэВ} = 200 \text{ МэВ}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-6} \text{эрг/МэВ} = 3{,}2\cdot 10^{-4} \text{эрг} = 3{,}2\cdot 10^{-11} \text{ Дж}.$$

Следовательно, одному делению в секунду отвечает мощность

$$3{,}2\cdot 10^{-11} \text{ Дж /сек} = 3{,}2\cdot 10^{-11} \text{ Вт}.$$

$$\text{Или } 1 \text{ Вт} = \frac{10^{11}}{3{,}2} \text{ делений/сек} \approx 3{,}1\cdot 10^{10} \text{ дел/сек}.$$

Соответственно при мощности 1000 МВт число делений в 1 сек равно $3{,}1\cdot 10^{19}$, а масса делящегося урана-235 равна

$$(3{,}1\cdot 10^{19})\cdot 235 \text{ а.е.м.} = (3{,}1\cdot 10^{19})\cdot 235\cdot 1{,}66\cdot 10^{-24} \text{г} \approx 12 \text{ мг}.$$

Эта мощность отвечает делению приблизительно 1 кг урана в сутки. Из проделанных вычислений следует также, что деление 1 кг урана даёт энерговыделение $\approx 8{,}3\cdot10^{13}$ Дж.

9. Показать, что основная часть энергии деления освобождается в виде кинетической энергии осколков.

   Решение: Такой вывод следует из того, что кулоновская энергия $E_{\text{кул}}$ двух соприкасающихся осколков приблизительно равна энергии деления (около 200 МэВ). Под действием электрических сил отталкивания осколков $E_{\text{кул}}$ переходит в их кинетическую энергию $T_{\text{оск}}$, т.е. $E_{\text{кул}} = T_{\text{оск}}$. Если осколки имеют заряды Z и радиусы R, то

$$T_{\text{оск}} = E_{\text{кул}} = \frac{(eZ)^2}{2R} = \frac{Z^2}{2R}\cdot\frac{e^2}{\hbar c}\cdot\hbar c = \frac{46^2}{2\cdot 6\text{ Фм}}\cdot\frac{197\text{ МэВ}\cdot\text{Фм}}{137} \approx 250\text{ МэВ}.$$

   В этих вычислениях использовано то, что при $A \approx 240$ имеем $2Z \approx 92$ и $R \approx 1{,}2\cdot(A/2)^{1/3}\text{Фм} \approx 1{,}2\cdot120^{1/3}\text{Фм} \approx 6\text{ Фм}$.

10. Оценить плотность потока нейтронов (их число в 1 сек на см^2) на расстоянии 1 км от эпицентра в момент взрыва урановой атомной бомбы с энерговыделением 20 килотонн тринитротолуола (примерно бомба Хиросимы). Учесть, что длительность ядерного взрыва $\approx 10^{-6}$ сек.

    Решение: Взрыв 1 килотонны тринитротолуола дает энерговыделение приблизительно $4{,}2\cdot10^{12}$Дж. При взрыве атомной бомбы в 20 килотонн тнт выделяется энергия $20\cdot4{,}2\cdot10^{12}$Дж $= 8{,}4\cdot10^{13}$Дж. Эта энергия практически совпадает с энерговыделением 1 кг урана – $8{,}3\cdot10^{13}$Дж (см. задачу 1). Найдём полное число N нейтронов, образовавшихся при взрыве. Оно равно числу M ядер в образце урана массой $m = 1$ кг умноженному на $(k-1)$, где k – коэффициент размножения нейтронов. Для ^{235}U коэффициент размножения $k = 2{,}3$. Поэтому

$$N = M(k-1) = m\frac{N_A}{A}(k-1) =$$

$$= 10^3\text{г}\cdot\frac{6{,}02\cdot10^{23}}{235\text{ г}}(2{,}3-1) = 3{,}33\cdot10^{24}\text{ нейтронов}.$$

    Плотность потока j нейтронов на расстоянии $R = 1$ км находим с учётом площади $4\pi R^2$ сферы радиуса R и длительности взрыва $t \approx 10^{-6}$ сек:

$$j = \frac{N}{4\pi R^2\cdot t} = \frac{3{,}33\cdot10^{24}\text{ нейтронов}}{4\cdot3{,}14\cdot(10^5\text{см})^2\cdot10^{-6}\text{сек}} \approx 2{,}7\cdot10^{19}\frac{\text{нейтронов}}{\text{см}^2\cdot\text{сек}}.$$